CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y ESTUDIOS AVANZADOS
DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
DEPARTAMENTO DE INVESTIGACIONES EDUCATIVAS

ESTUDIO DE LAS TRANSFORMACIONES QUE SUFREN LAS CONCEPCIONES DE LOS MAESTROS SOBRE CONTENIDOS GEOMÉTRICOS EN UN CURSO DE ACTUALIZACIÓN

Tesis
Que para obtener el grado de Maestro en Ciencias en la Especialidad de Investigaciones Educativas

Presenta

Alejandra Avalos Rogel

Licenciada en Lengua y Literaturas Modernas
(Letras Francesas)

Directoras de tesis:

M. en C. Irma Rosa Fuenlabrada Velázquez
Dra. Guillermina Waldegg Casanova

marzo, 1997

A Rodolfo
esposo, compañero
e interlocutor intelectual

AGRADECIMIENTOS

La elaboración de un trabajo de tesis completa la formación de aquél que la elabora. En mi caso esto no habría sido posible sin la asesoría desinteresada de la Maestra Irma Fuenlabrada y de la Dra. Guillermina Waldegg, a quienes agradezco sus valiosos comentarios y orientaciones.

Expreso mi agradecimiento a los sinodales y a todos aquellos que en algún momento me brindaron su comentario para enriquecer este trabajo. En particular al equipo de psicomatemática -Lucy, Ruthy, Bertha, Leove y Humberto- con quienes compartí las peripecias de este proyecto.

Mi reconocimiento y gratitud a los maestros que participaron en el curso de actualización, por su paciencia, amistad, y permitirme aprender con ellos.

También recibí apoyos institucionales muy valiosos. En particular deseo expresar mi agradecimiento a las autoridades del CINVESTAV, cuya gestión logró que gozara oportunamente de una beca que me permitió realizar mis estudios y esta investigación.

Y al DIE, maestros, compañeros y personal de apoyo, que hacen de esta institución un centro de excelencia académica.

Índice

Introducción

Este trabajo es el resultado de un estudio en el que se identificaron algunas concepciones, sobre contenidos geométricos, de maestros asistentes a un curso de actualización llevado a cabo en una Normal del Estado de México, y dirigido por un conductor. Además se analiza, a partir de los registros de observación, la manera en que se transforman dichas concepciones por efecto del trabajo en grupo y por el desarrollo de las actividades propuestas en los materiales *La enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria. Taller para maestros. Primera y Segunda partes. Programa de actualización permanente* (BLOCK (coord.) 1994). Finalmente el trabajo también aporta información sobre las conceptualizaciones que los maestros elaboran sobre contenidos geométricos, la manera en que logran arribar a ellas y las habilidades que desarrollan en la búsqueda de estrategias para resolver problemas geométricos.

La información obtenida permite plantear, en los espacios pertinentes, posibles alternativas para el mejoramiento de las propuestas de actualización en lo que se refiere a los contenidos de geometría.

Las concepciones que los maestros ponen en juego al resolver un problema geométrico están determinadas por su familiarización con ciertos contenidos relacionados con el área, la posibilidad de dar sustento a un determinado argumento en la solución de un problema geométrico mediante experiencias previas de aprendizaje, o por los saberes que han ido conformando mediante su práctica docente y el contacto cotidiano con los niños. La identificación de ideas o concepciones de los docentes que obstaculizan el desarrollo de la propuesta, permite proponer cambios fundamentados a algunas actividades, a las estrategias en el planteamiento de situaciones didácticas, o al orden de las secuencias didácticas, con el fin de movilizar dichas concepciones.

A continuación se exponen algunos antecedentes a este trabajo y se hace una breve descripción de los materiales y del curso de actualización que sirvió como referente empírico.

Antecedentes

Las investigaciones que desde 1978 desarrolla el equipo de psicomatemática del Departamento de Investigaciones Educativas (DIE), cuya coordinación está a cargo de los maestros Irma Fuenlabrada y David Block, han tenido por finalidad estudiar los procesos que tienen lugar en el aula del nivel básico, en los espacios destinados a la enseñanza de las matemáticas, y dar seguimiento a propuestas didácticas, diseñadas con fines de experimentación, que permitan hacer más eficiente la enseñanza y más significativo el aprendizaje. Una necesidad identificada fue la de atender una línea de investigación dirigida a buscar alternativas para hacer llegar los aportes de la investigación en educación matemática a los maestros, en particular algunos recursos metodológicos para la enseñanza de las matemáticas (FUENLABRADA 1995b, 2-3). Para satisfacer dicha necesidad se llevaron a cabo las investigaciones *Formación de profesores, metodología de enseñanza de la matemática en la escuela primaria* de 1982 a 1984 (FUENLABRADA (coord.) 1984). y *Formación de profesores sobre áreas fundamentales de la educación básica* de 1988 a 1989 (FUENLABRADA, BLOCK y NEMIROVSKY (coord.) 1989).

La estrategia metodológica de la primera investigación antes enunciada, contempló el diseño de talleres en los que se experimentaron secuencias didácticas que permitieran al grupo de profesores asistentes, la reorganización y reconceptualización de contenidos aritméticos y geométricos. La segunda investigación se centró en diseñar estrategias que posibilitaran a los maestros analizar aspectos relacionados con la metodología de la resolución de problemas como medio para el aprendizaje de las matemáticas.

Estas investigaciones tienen como objetivo central que los maestros interactúen con situaciones problemáticas que cuestionen sus saberes matemáticos y metodológicos sobre enseñanza o aprendizaje, de tal suerte que en la búsqueda de solución de las situaciones problemáticas planteadas, su conocimiento se reorganice y amplíe. En estos trabajos subyace la hipótesis de que si los maestros aprenden a través de la metodología que se espera que funcionalicen en el aula, abordarán de una forma distinta el conocimiento matemático con sus alumnos. De acuerdo a los autores, la segunda investigación "... sí permitió analizar y caracterizar algunas de las transformaciones (en el aula) de las estrategias de enseñanza de los maestros que participaron en la experiencia, en función de la propuesta metodológica que se ponía a su consideración" (FUENLABRADA 1995b, 3).

Los materiales

En 1993 la Secretaría de Educación Pública (SEP) reformuló los contenidos de los planes y programas para la educación básica, con un enfoque que propone la introducción de la metodología que muchos espacios de investigación habían mostrado que era pertinente. En 1994, se publicaron los nuevos libros de texto para la escuela primaria, con secuencias de situaciones didácticas que pretenden lograr aprendizajes significativos de las matemáticas mediante la resolución de problemas. Se planteó entonces la urgencia de una actualización de los profesores que les ayudara a entender el sentido de la metodología y a conocer otros materiales de apoyo al trabajo docente.

Dada la experiencia acumulada del DIE, las autoridades educativas solicitaron al equipo de psicomatemática que desarrollara un proyecto para la actualización de los maestros, en función de los cambios curriculares en educación primaria. Es así como un equipo de investigadores coordinado por David Block, elaboró secuencias didácticas dirigidas a maestros, sobre los contenidos matemáticos de la primaria. Con estas secuencias se desarrollaron materiales impresos, organizados en dos volúmenes bajo el título de *La enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria. Taller para maestros. Primera y Segunda partes. Programa de actualización permanente* (BLOCK (coord.) 1994), a los que se agrega un libro con material recortable y un libro con una selección de lecturas sobre educación matemática. El taller está diseñado para que, en 250 horas de estudio autodidacta, los profesores de primaria se actualicen en la enseñanza de la matemática.

En el primer volumen se desarrollan las secuencias didácticas sobre los números naturales y el sistema decimal de numeración, la suma y la resta, la multiplicación y la división, la geometría y la medición. Además se incluye un primer capítulo que aborda las principales características de la metodología de los nuevos planes y programas de estudio. En el segundo volumen se abordan los temas de fracciones, procesos de cambio, tratamiento de la información y finalmente, la predicción y el azar.

Cada tema se desarrolla a partir de "situaciones-problema", cuya resolución demanda, en principio, una reorganización de los conocimientos previos del profesor y posibilita la evolución de estrategias informales. Con esto se pretende que los maestros reconceptualicen algunos contenidos matemáticos de la escuela primaria y que se relacionen de manera distinta con ellos desde el punto de vista de sus significados. Se espera que la reflexión sobre la manera como "reaprenden" ellos mismos los contenidos matemáticos los lleve a dar sentido a las situaciones diseñadas para los niños.

Además, se pretende que en el taller los maestros analicen los materiales que la SEP propone para su trabajo docente: libros del alumno y del maestro, avances programáticos, programas, ficheros. En particular se espera que identifiquen la metodología sugerida en los materiales para el apoyo al trabajo docente y la lógica de las secuencias didácticas planteadas en los libros de texto. Los aspectos teóricos que subyacen a la propuesta son abordados a través de lecturas sobre educación matemática, de manera que permita a los maestros valorar la propuesta en función de la investigación educativa en la que está basada. Finalmente, se proponen actividades en las que el maestro tiene que considerar la manera en que los niños aprenden los contenidos matemáticos bajo esta nueva metodología, mediante el análisis de sus producciones.

El diseño de las secuencias didácticas de los materiales tuvo que responder a los tiempos y ritmos impuestos por la SEP. Esto trajo consigo una serie de limitantes a la propuesta: en ninguna de sus secuencias didácticas medió un trabajo sistemático de desarrollo curricular que diera cuenta de su pertinencia en procesos masivos de actualización; además nunca se ha probado la secuencia didáctica de todos los temas de matemáticas del curriculum de la primaria, con un mismo grupo de profesores.

Es por eso que actualmente, el equipo de psicomatemática del DIE se ha dado a la tarea de evaluar la propuesta de actualización mediante el proyecto *Investigación evaluativa de una propuesta de actualización en matemáticas para profesores en servicio*, en el que se busca saber "....el grado en que el Taller posibilita procesos de aprendizajes de los profesores, los aspectos que les interesa, que los motiva, así como las dificultades que enfrentan, los momentos de pérdida de interés, las dudas que quedan sin respuesta" (FUENLABRADA 1995b, 6).

El trabajo que ahora se expone presenta los resultados de una investigación que forma parte del proyecto arriba mencionado, pero como se explicará en el primer capítulo, tiene características y metodología propias para valorar el impacto de algunas secuencias de la propuesta.

El curso de actualización

En el protocolo del proyecto de la investigación rectora había quedado asentada la necesidad de la permanencia de un mismo grupo de maestros a lo largo de las 250 horas de duración del taller. Es por ello que se aprovechó un momento circunstancial para interactuar con un grupo de maestros del Estado de México. Una de las escuelas Normales solicitó al DIE asesoría para el diseño de un “Diplomado en Enseñanza de las matemáticas”, dirigido a docentes y a maestros egresados de esa institución. El DIE propuso desarrollar un programa de formación de docentes en servicio, conducido por investigadores del Departamento y bajo la coordinación de Irma Fuenlabrada, en el que se utilizaran los materiales objeto de esta investigación.

Desde enero de 1995 hasta noviembre del mismo año, el profesor Juan Leove y la maestra Irma Fuenlabrada condujeron el Diplomado, y la profesora Ruth Valencia coordinó la observación de la experimentación, todos los viernes de 3 a 7 p.m., con excepción de 2 semanas del mes de julio, en las que se trabajó mañana y tarde.

Aunque la propuesta de actualización contempla una modalidad de aprendizaje autodidacta o en grupos de estudio, para efectos de la investigación se requirió la presencia de un conductor. Se pidió a los asistentes, como sugiere la propuesta, el cumplimiento de las actividades, tareas, lecturas y la elaboración de los materiales que se les solicitaban, a lo cual los maestros siempre respondieron de manera favorable. Hubo muy poca deserción, pues de 25 maestros que iniciaron el curso, 23 lo terminaron, lo que habla de un interés en lo que se les planteaba. Además la baja deserción, aunada a la disposición de las autoridades de la Normal de proporcionar la infraestructura necesaria, permitió que el taller se desarrollara bajo condiciones acordes con las exigencias del proyecto de la investigación evaluativa.

Este curso ha sido de los pocos intentos de actualización de docentes de educación primaria en el área de matemáticas, desde la publicación de los nuevos programas para la educación básica, que pretende dar a conocer a los maestros las innovaciones curriculares, en contenidos, metodologías y materiales de apoyo para el sistema educativo.

Organización de la presentación del trabajo

Este trabajo se organiza en 3 capítulos.

En el primer capítulo se explicita lo que se entiende por concepción en esta investigación y se expone una revisión de los resultados de investigaciones sobre concepciones de maestros referentes a contenidos geométricos. Además se hace una revisión de los contenidos del curriculum de geometría de los Planes y Programas de 1993 y se caracterizan algunas propuestas de actualización. Finalmente, se describe la metodología y las etapas de la investigación.

En el segundo capítulo se presenta un análisis de los materiales que se utilizan en el curso, en particular de la unidad de geometría: la naturaleza de las situaciones didácticas, la secuencia entre ellas, y sobre todo la coherencia entre los principios de la propuesta -pedagógicos y de actualización de maestros- y el desarrollo del curriculum de la propuesta.

En el tercer capítulo se describen algunas concepciones de los maestros asistentes al curso en el momento de abordar las actividades de la propuesta de actualización y la transformación de dichas concepciones. Además se recupera la manera en que los maestros elaboraron conjeturas geométricas y construyeron ciertos razonamientos geométricos mediante la validación grupal de sus conjeturas.

Finalmente, se exponen algunas conclusiones y se plantean interrogantes derivadas del estudio realizado para ser desarrolladas en investigaciones posteriores.

Capítulo I. Marco teórico-metodológico

1. Concepciones de los maestros sobre contenidos geométricos
2. La geometría en el curriculum de 1993
3. Las propuestas de actualización
4. Metodología de la investigación
5. Etapas de la investigación

1. Concepciones de los maestros sobre contenidos geométricos

Desde la década pasada, en el campo de la educación matemática se han comenzado a desarrollar algunos trabajos tendientes a identificar las concepciones de los maestros sobre lo que son las matemáticas y su enseñanza[1]. Esto obedece a que algunos investigadores se han percatado de que “no existe un consenso universal sobre lo que constituye una ‘buena enseñanza de las matemáticas’” (THOMPSON 1982, 127), pues eso depende de la “concepción” que se tenga sobre lo que es el conocimiento matemático y su enseñanza.

Thompson define “concepción docente” como “una estructura mental más general [que los sistemas de creencias], que abarca creencias, significados, conceptos, proposiciones, reglas, imágenes mentales, gustos y preferencias” (THOMPSON 1982, 130). A partir de su revisión de trabajos publicados en Estados Unidos, la autora considera que los investigadores americanos han sido sensibles a los casos donde los maestros tratan sus creencias sobre las matemáticas como conocimientos matemáticos; de ahí que los estudios abordan los dos aspectos.

De esos estudios, para este trabajo es relevante el de Green (1971)[2], quien utiliza la metáfora de “sistemas de creencias” para describir la organización de las creencias individuales. Considera tres dimensiones en los sistemas de creencias: 1. una creencia nunca está completamente independiente de las demás; 2. una creencia es central o periférica (ésta es más susceptible a cambios y revisiones) en función del grado de convicción que la sostiene; 3. algunas creencias sostienen a otras, quedando así agrupadas en “racimos”; muchos de estos racimos no

[1] En el estado de conocimiento de las investigaciones en educación matemática en México realizadas de 1982 a 1992, publicado en WALDEGG, G. (coord.) (1995) ***Procesos de enseñanza y aprendizaje II***, se afirma que existen aún pocos estudios sobre conocimientos, concepciones y prácticas del maestro. Entre ellos se mencionan los trabajos de NEMIROVSKY *et al.*(1990), BLOCK *et al.*(1990), ÁVILA (1991) y MÉNDEZ (1991a).

[2] Citado en THOMPSON (1992), pág. 130.

guardan ninguna relación entre ellos, lo que explica algunas inconsistencias en la manifestación de las creencias.

A pesar de que el concepto de creencia permite entender algunos comportamientos de los maestros, no posibilita aproximaciones por ejemplo a los saberes que se construyen en el contacto cotidiano con los niños. Es por ello que se requiere de una categoría conceptual más amplia que de cuenta de los significados que los maestros ponen en juego en la relación educativa.

Parecería que el concepto de concepción de Thompson, enunciado más arriba, permite una mayor integración de elementos (conceptos, imágenes, etc.). Sin embargo, al quedar organizados en una "estructura mental" pierden su dinamismo e historicidad.

Moreno y Waldegg definen "concepción" como "un complejo cognoscitivo" constituido por "una red de información, de imágenes, de relaciones, anticipaciones e inferencias alrededor de una idea" (MORENO Y WALDEGG 1992, 14). En este trabajo se considera que ese "complejo cognoscitivo" está formado por varias redes que se construyen históricamente, y que se relacionan unas con otras en algunos de sus nodos. Los conocimientos y las creencias también forman sus propios entramados que están más o menos relacionados en función de los escenarios culturales donde se encuentra el sujeto que los construye.

En el caso que nos ocupa, las concepciones de los maestros sobre contenidos geométricos son entramados derivados de la organización de aprendizajes adquiridos durante su escolaridad, de sus vivencias como alumno, de su formación profesional y de su práctica docente, en donde los saberes sobre los contenidos se han conformado tanto por la influencia de los contenidos de los diversos curricula desarrollados, como por la información y presentación de los contenidos en los libros de texto.

De la misma manera, las concepciones de los maestros sobre los procesos de aprendizaje de la geometría son el producto de las confluencias de redes entretejidas con los conocimientos adquiridos en la formación inicial, los saberes elaborados en el contacto cotidiano con los niños, los imperativos impuestos por los programas de geometría escolares y lo que consideran son las expectativas sociales sobre los conocimientos geométricos que los alumnos deben tener y las habilidades que requieren desarrollar.

Las concepciones de los maestros sobre los contenidos matemáticos escolares se manifiestan en la manera como resuelven la problemática de la enseñanza de un determinado contenido: los significados que asignan a los contenidos, la relevancia que otorgan al uso de los materiales de apoyo al trabajo docente, la incorporación de los enfoques de los curricula oficiales al diseño de sus clases, el tipo de actividades que proponen y su secuencia de presentación, el sentido que confieren a las intervenciones de los niños, y el valor que dan a los comentarios de sus pares y de los padres de familia.

Es por lo anterior que las pocas investigaciones en México sobre concepciones de maestros relacionadas con contenidos geométricos han recurrido a aproximaciones de tipo cualitativo: se pide al maestro, en entrevistas semi-estructuradas, que exprese sus ideas sobre lo que tendría que ser relevante en cuanto al contenido geométrico y la forma de abordarlo, para contrastarlas, en un segundo momento, con la manera en que posiciona a los niños frente al conocimiento en el salón de clase.

A continuación se exponen algunas de las concepciones de los maestros sobre contenidos geométricos, tratando de encontrar la lógica que subyace en ellas.

1) La geometría es un conjunto de configuraciones que los niños tienen que identificar.

La *enseñanza* de la geometría según esta concepción está centrada en la "ostensión" de la figura geométrica por parte del maestro[3], y en el uso de

[3] El docente muestra la figura a los alumnos y da su nombre. A veces solicita su reproducción en el cuaderno.

analogías, -como la del paralelismo con las vías del tren-, y en un *aprendizaje* de la figura basado en la percepción.

De acuerdo a Grecia Gálvez, esta concepción está basada en lo que Piaget (1964) considera uno de los problemas básicos del conocimiento geométrico, a saber, la creencia de que existe una homogeneidad relativa entre el significante y el significado.

> Las relaciones espaciales se representan mediante imágenes que son también espaciales, cosa que no sucede por ejemplo en el terreno de la aritmética. Esta homogeneidad lleva a concebir a la intuición geométrica como un producto directo de la percepción. Durante mucho tiempo, dicha concepción ha fundamentado la organización de la enseñanza escolar de la geometría elemental, dotándola de un carácter ostensivo (GALVEZ 1985, 32-33).

El objeto geométrico se encuentra fuera del sujeto; para aprehenderlo, es suficiente con verlo, distinguirlo de otros objetos ya conocidos, reconocerlo en el entorno, y finalmente memorizar su nombre, y a veces algunas de sus características.

Cabe señalar que para muchos maestros, el reconocimiento de la figura por parte del niño, y sobre todo su correcta denominación, es una evidencia de desarrollo intelectual. Al respecto, Nemirovsky documenta la preocupación de las educadoras por enseñar algunas figuras geométricas a los niños, pues ésto les permitiría tener éxito en el test de Filho, del que depende el pase del niño a la primaria: “Ahorita yo estoy con las figuras geométricas porque en el test de Filho viene el rombo” afirma una de las educadoras entrevistadas (NEMIROVSKY 1990, 31). Además para los padres y los maestros, que los niños reconozcan el nombre de la figura muestra que se está “aprendiendo geometría”. Por ello, la estrategia de enseñanza por ostensión y la del aprendizaje por percepción y memorización del nombre de la figura han sido ampliamente validadas socialmente.

2) Las figuras y cuerpos geométricos se definen en términos de su posición relativa y se denominan en términos de su "regularidad".

Una consecuencia de la enseñanza de las figuras y cuerpos basada en la percepción visual, es la concepción de que en la determinación de las características de las figuras y los cuerpos cabe incluir rasgos de las condiciones en que son presentados; para el caso de las figuras su posición relativa con respecto a los bordes de la hoja o del pizarrón, y para el de los cuerpos, en términos de la cara en que se acostumbra apoyarlos. Al respecto Méndez afirma:

> En el caso que nos ocupa, los alumnos tuvieron que aprender, por ejemplo, que casi todas las figuras tienen base sobre la cual descansan, según afirmó la maestra, lo cual conlleva a una concepción errónea del espacio de dos dimensiones. (MÉNDEZ 1991a, 25).

De esta manera, un cuadrado se considera tal si sus lados son paralelos a los bordes de la hoja, pero si está "apoyado" en uno de sus vértices deja de ser cuadrado para convertirse en rombo. Las características geométricas de la figura pasan a un segundo plano, siendo relevante únicamente la posición.

Una segunda consecuencia de la enseñanza por ostensión y del aprendizaje mediante la percepción, es la tendencia a asociar la *existencia* del nombre de una figura con la percepción de alguna "regularidad" en ella. Por ejemplo, los cuadriláteros como el cuadrado, rectángulo, romboide, etcétera, son los que "perceptualmente" tienen alguna simetría, o que "a ojo" sus lados o sus ángulos son congruentes dos a dos. Es por eso que esos cuadriláteros son considerados como "regulares", es decir, perceptualmente "normales". Los cuadriláteros que perceptualmente no son "regulares", no tienen nombre, o se les llama "cuadriláteros feos". Esto deja de lado la definición correcta de figura regular que es aquella que tiene sus lados y ángulos interiores congruentes.

Esta concepción de enseñanza se ve fuertemente apuntalada por los contenidos curriculares de geometría que marcan la pertinencia de que los niños clasifiquen figuras geométricas únicamente por la percepción de las dimensiones y número de los lados.

3) La geometría es un conjunto de configuraciones que los niños tienen que saber trazar (para aprender sus características).

Al tiempo que los niños aprenden los nombres de las figuras, los maestros consideran que es necesario que aprendan a trazarlas, pues parecería que el trazo permite la sistematización y afianzamiento de los conocimientos de sus características. La *enseñanza* de la geometría según esta concepción, está centrada en el diseño por parte del maestro, de la “secuencia más sencilla” o “más vistosa” para el trazo de alguna figura geométrica, y en una idea del *aprendizaje* de la figura basado en el trazo, mediante la interpretación, -y memorización-, de una secuencia propuesta.

Al parecer a esta idea subyace una metodología sensual-activista de la enseñanza de las matemáticas, difundida en México desde mediados de la década de los 60, hasta mediados de los 80, en la que se presume que el niño aprende mediante su actividad física y su interacción con los objetos. Desde esta concepción, conformada en programas de actualización y en la interacción con los programas y libros de texto, los maestros solicitan que los niños tracen figuras utilizando diversos materiales: popotes, cuerdas, recorte, plastilina, etc., y diversas estrategias: calcado, copiado, trazo con instrumentos, etc., siguiendo determinadas secuencias. Al respecto, Gálvez comenta:

> La secuencia sugerida probablemente facilita la corrección del trazado en el momento en que debe hacerse sobre el cuaderno, pero no garantiza la apropiación de la significación del objeto estudiado, la que queda sujeta a los vaivenes de la experiencia de cada alumno... (GALVEZ 1985, 33).

Lo relevante para el maestro es con frecuencia, la memorización de secuencia de trazos, entre los que se encuentran el trazo de la perpendicular a un segmento dado, la bisectriz de un ángulo, y el trazo de polígonos inscritos en una circunferencia.

A su vez, un aspecto de esta concepción sobre la importancia del trazo, es el papel que se asigna al “juego de geometría”, -escuadras, regla y compás- dentro de la enseñanza. Los maestros consideran que el manejo del juego de geometría es un contenido en sí mismo que tiene que ser enseñado de manera independiente de los contenidos geométricos referentes al estudio de las figuras, aunque no se sepa cómo; muchos maestros consideran incluso que el manejo “correcto” de los instrumentos es un contenido que debe ser antecedente a los temas de geometría.

A pesar de que los maestros “intuyen” que el manejo del juego de geometría es importante para la conceptualización de la figura geométrica mediante el trazo, no saben cómo abordarlo porque en sus experiencias de formación tampoco ha sido muy claro. Méndez (1991a, 21) documenta el caso de una maestra que solicita a sus alumnos trazar polígonos inscritos en una circunferencia: primero les pide que tracen una circunferencia y su diámetro; posteriormente dividen 360° entre el número de lados del polígono en cuestión, y finalmente trazan un ángulo central, de abertura igual al resultado obtenido, con ayuda del transportador ¡Y repiten el procedimiento para obtener cada uno de los lados! De acuerdo a la maestra se están abordando los contenidos del programa de 5° grado de primaria, que señalaban que los niños tenían que construir polígonos con regla y compás, y lo resuelve de esta manera. Posiblemente los niños conceptualizaron las características de los polígonos en términos de las dimensiones de ángulos centrales, y sin duda a partir de ese momento distinguen a las figuras geométricas solamente en términos de un valor numérico, y no en función de sus características geométricas y su relación con la circunferencia circunscrita.

Con el advenimiento de las matemáticas modernas, se introduce en la educación básica la geometría de las transformaciones: en particular, la simetría entre figuras y la simetría al interior de una figura, las transformaciones rígidas, como la traslación y la rotación, y la obtención de figuras semejantes a partir de la homotecia. La idea original era proporcionar a los alumnos una herramienta que les permitiera hacer análisis de figuras geométricas y demostraciones con pocos postulados. Sin embargo, los maestros no entendieron el sentido de esa propuesta, -según Grecia Gálvez (1985, 32) lo percibían como algo "exótico"- y al contrario, la propuesta favoreció el "activismo", de tal suerte que incluso los maestros incorporaron otros recursos didácticos, que permitieran el trazo, como el doblado de papel para obtener configuraciones simétricas o para verificar su simetría.

4) La medición forma parte de los conocimientos geométricos.

Se ha identificado que la secuencia de actividades que tienen que realizar maestro y alumnos en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas es más o menos fija, y está conformada por tres momentos bien definidos: el maestro enseña un algoritmo o un procedimiento, el alumno ejercita lo aprendido y finalmente lo aplica en problemas "cotidianos", de tipo enunciado[4] (QUIROZ 1991).

Esta secuencia está acorde con las lógicas anteriormente expuestas: en el caso de la geometría, en un primer momento el profesor enseña -muestra-, la figura o cuerpo geométrico, definiéndolos en términos del resultado numérico de la medición de algunos de sus elementos, digamos lados o ángulos; a su vez los niños observan lo que se les muestra, tratando al mismo tiempo de aprender su nombre, de memorizar la definición proporcionada por el maestro y las fórmulas que permiten obtener su perímetro y su área en el caso de las figuras, su área y su volumen en el caso de los cuerpos. En un segundo momento, los alumnos ejercitan lo "aprendido", mediante el trazo de la figura o la construcción del cuerpo. Posteriormente aplican las fórmulas aprendidas en problemas de medición.

[4] El problema se presenta como un conjunto de proposiciones con datos que es preciso relacionar en función del procedimiento previamente aprendido, con el fin de obtener un resultado.

Esta última etapa en el "aprendizaje de la geometría" es de vital importancia para los maestros, en principio, por el impacto de estos conocimientos fuera del contexto escolar, pues permiten resolver problemas de la "vida cotidiana" lo que socialmente justifica la enseñanza de la geometría, y por lo tanto su existencia en el curriculum, y por otro lado, por la facilidad que este tipo problemas brinda al maestro de contextualizar la operatoria aritmética, pues la problemática reside en la correcta sustitución en una fórmula, en la posibilidad de operar con distintos tipos de números (enteros, racionales, decimales, etc.), y en la exigencia en la exactitud de los resultados.

5) Los cuerpos geométricos.

Al menos desde los programas de 1944, el estudio de los cuerpos geométricos se ha visto soslayado en favor de las figuras planas. Aunque en los programas de matemáticas de los años 70 los contenidos referentes a los sólidos desaparecieron por completo, los maestros los consideraban como un contenido que no debía ser suprimido. La manera de abordarlo era mediante la actividad de armado de desarrollos: en algunas ocasiones el maestro daba la secuencia para el trazo del desarrollo del cuerpo, y los niños realizaban el trazo sobre una cartulina, armaban el cuerpo y le asignaban un nombre (MÉNDEZ 1991b); o bien, se solicitaba la compra de plantillas que existen en el mercado, y se pedía a los niños su armado.

La geometría del espacio ha sido para los maestros un conjunto de cuerpos regulares que el niño tiene que saber construir. La clasificación de los sólidos ha sido muy pobre o ha estado ausente en los programas. El análisis geométrico que se propone en los programas anteriores a 1970, se reduce a la memorización e identificación de algunos elementos, como vértices, caras y aristas. En curricula anteriores no se propone ningún trabajo sistemático tendiente a la representación de los cuerpos en el plano; sin embargo, algunos maestros han creido conveniente la utilización de alguna convención, por ejemplo, han hecho hincapié en que los niños pongan las aristas ocultas con líneas punteadas. La aproximación a las representaciones no necesariamente se ha hecho en el marco del estudio de los cuerpos, sino como referente visual cuando se trata de estudiar otros contenidos matemáticos, particularmente el estudio de los números racionales (FIGUERAS, FILLOY y VALDEMOROS 1985; FIGUERAS 1988).

En 5o. y 6o. grados los niños aprendían además la fórmula para la obtención de volúmenes de cuerpos geométricos y realizaban numerosos ejercicios, donde lo importante era la correcta sustitución y aplicación de las potencias, es decir, el trabajo aritmético (QUINTIL 1991).

2. La geometría en el curriculum de 1993

Como en los planes y programas anteriores, en el curriculum de la educación básica vigente desde 1993, las matemáticas siguen ocupando un lugar preponderante en la formación del niño: se espera que se dedique una cuarta parte del tiempo escolar de la primaria a su enseñanza. Se pretende que sean un instrumento que permita al niño “reconocer, plantear y resolver problemas” y un medio a través del cual pueda “comunicar e interpretar información matemática” (SEP 1993, 15).

En la orientación adoptada para la enseñanza de las matemáticas se hace énfasis, entre otras cosas, en el “desarrollo del pensamiento matemático a partir de situaciones prácticas” (*Ibid*. 15) y de la resolución de problemas; además se afirma que, a diferencia de programas anteriores, se otorga mayor atención a los contenidos de geometría.

Entre los propósitos generales asociados a la geometría se espera que el alumno desarrolle habilidades, capacidades y destrezas relacionadas con la estructuración del espacio, la imaginación espacial y el uso de instrumentos de dibujo y que adquiera conocimientos básicos de geometría, a través de “la manipulación, observación, dibujo y análisis de formas diversas” (*Ibid*. 53).

El sentido que revisten los contenidos geométricos en este curriculum tendría que estar acorde con el propósito explícito de la enseñanza de las matemáticas, que es el "desarrollo del pensamiento matemático". En particular, tendría que propiciar en el niño el desarrollo de un razonamiento geométrico, consistente en caracterizar las relaciones intra e interfigurales, y operar lógicamente con ellas, dentro del contexto de un problema geométrico.

Esto sería posible gracias a las características de los contenidos propuestos, su realización en las actividades de los *Libros de texto* y de los *Ficheros. Actividades didácticas*, y la manera como son presentados a los docentes en los *Libros del maestro* [5].

El cambio en los programas de geometría tanto a nivel de los contenidos, en particular la exclusión de la medición, como en el sentido que se da a los contenidos desde las actividades, pero sobretodo la innovación en lo que se refiere a las metodologías de enseñanza, contrasta fuertemente con la tradición magisterial de la enseñanza de la geometría en educación básica, tradición que ha sido conformada, como se expuso en el punto anterior, por la confluencia de distintas lógicas: la de los curricula anteriores, la de las concepciones de los docentes sobre lo que es factible que los alumnos aprendan y la de la validación social de los contenidos que deben ser enseñados.

En el marco de la presente investigación es pertinente indagar qué tan acentuado es dicho contraste, y qué tan necesario es tenerlo presente para el análisis del material y del desarrollo del curso de actualización. Es por ello que se plantea el análisis de los contenidos propuestos en el curriculum actual, y del

[5] Para el *Libro de texto* de primer grado cfr. BLOCK y FUENLABRADA 1994, para el de segundo grado cfr. FUENLABRADA 1995; para el de tercero cfr. AVILA y BALBUENA 1994; para el de cuarto cfr. AVILA, BALBUENA y BOLLÁS 1995; para los de quinto y sexto cfr.PÉREZ Y LÓPEZ 1994, 1995. Asimismo cfr. *Fichero. Actividades didácticas. Matemáticas. Primer grado.* 1994, *Fichero. Actividades didácticas. Matemáticas. Segundo grado.* 1994, *Fichero. Actividades didácticas. Matemáticas. Tercer grado.* 1994, *Fichero. Actividades didácticas. Matemáticas. Cuarto grado.* 1994, *Fichero.Actividades didácticas. Matemáticas. Quinto grado.* 1994, *Fichero.Actividades didácticas. Matemáticas. Sexto grado.* 1994; y para los *Libros del maestro* cfr. BONILLA, MARTÍNEZ Y RAMÍREZ 1994a, 1994b, 1994c, 1994d, 1994e, 1994f.

sentido que adquieren en las actividades escolares, dentro de la investigación sobre la actualización de los maestros en esta área.

La necesidad de justificación de la existencia de la geometría en el curriculum de la primaria, en tanto contenido que requiere ser validado socialmente, se plantea desde el momento en que se deslinda de la medición. La medición, que había estado integrada en los contenidos geométricos hasta la última reforma curricular (ÁVILA 1988), había permitido al maestro la contextualización de las operaciones aritméticas en problemas “de aplicación” presumiblemente del ámbito de lo cotidiano. La geometría daba la posibilidad de ser el soporte “visual” para la comprensión del problema, y la aritmética seguía siendo el foco de atención. Por el tipo de operaciones aritméticas que se abordan en la escuela primaria, se había considerado necesario que los niños tuvieran acceso a fórmulas para el cálculo del área y del perímetro de figuras planas. Todo apuntaba a la memorización de una fórmula, la correcta sustitución y realización de las operaciones en el orden adecuado. Al respecto, Bishop (1986) considera que la preeminencia de la enseñanza de la aritmética en la escuela elemental ha sido el principal obstáculo para la enseñanza de la geometría.

Ahora bien, en el curriculum vigente se hace explícito que la geometría y la medición son ejes conceptuales independientes: cada uno atiende y permite el desarrollo del pensamiento matemático de manera distinta. Según los planteamientos de los programas de estudio, el desarrollo del razonamiento geométrico tendría que lograrse mediante el desarrollo de tres líneas: la ubicación espacial, el análisis de la figura geométrica y el análisis del cuerpo geométrico.

La ubicación espacial

Una de las innovaciones a nivel del curriculum de la educación básica es la introducción de la representación y análisis de la ubicación espacial del niño y los objetos que constituyen su entorno. Algunos estudios ya habían señalado su pertinencia en los programas escolares (AVALOS y MÉNDEZ 1993; BERTHÉLOT 1994; GÁLVEZ 1994b).

Estos autores reconocen que si bien la estructuración del espacio y su representación es un conocimiento que puede adquirirse socialmente fuera del contexto escolar “funcionalmente”, también es cierto que los códigos de representación de relaciones espaciales es un contenido que tiene que estar a cargo de la escuela, en particular en el espacio destinado a la geometría. El sentido utilitario del aprendizaje de la geometría permite, sobre todo, la validación social del conocimiento geométrico como herramienta para la adquisición y la comunicación de distintos tipos de representaciones de relaciones espaciales en el plano, que posibilitan la elaboración, transmisión y lectura de croquis, diagramas y mapas.

Un segundo argumento a favor de la introducción de la ubicación espacial en la escuela primaria, es que posibilita el diseño de situaciones didácticas en donde se pueda contextualizar el análisis interfigural. Se pretende que el niño identifique primeramente la posición relativa de los objetos entre sí, y que esto mismo lo lleve a la necesidad de buscar puntos de referencia socialmente determinados (como los puntos cardinales); posteriormente, se desea que en la interacción con situaciones problemáticas de comunicación, determine la lógica de las relaciones espaciales -calles paralelas y calles perpendiculares, por ejemplo-, misma que lo llevará a la sistematización del conocimiento geométrico.

El desarrollo de la ubicación espacial en la primaria abarca cuatro aspectos: 1) el análisis de la posición relativa del niño y los objetos del entorno; 2) la representación de recorridos en el plano; 3) la elaboración y lectura de croquis del entorno inmediato; 4) la elaboración de planos y mapas. Los dos primeros años se centran en el desarrollo de los dos primeros puntos; conforme se va avanzando en la escolaridad, se tiende a abandonarlos para trabajar los otros dos.

En efecto, la estructuración del espacio comienza en primer año con situaciones que permiten al niño la descripción de su ubicación en su entorno y la representación gráfica de éste. En particular, se pretende introducir al niño a la representación de desplazamientos en el plano. En segundo año, esta representación se afina al introducir algunos puntos de referencia, en particular, la orientación con respecto a puntos cardinales. Se aspira a que el niño describa la ubicación relativa de los objetos. En tercer año, la ubicación relativa entre objetos se representa en el plano. El niño en este nivel tiene que ser capaz de diseñar e interpretar algunos croquis sencillos. Por otro lado, se le presentan problemas que lo lleven a observar y representar objetos desde diversos puntos de vista. En cuarto, quinto y sexto grados, el niño está listo para leer e interpretar mapas y para localizar puntos en el plano cartesiano.

Del análisis de los libros de texto es posible afirmar que los contenidos de ubicación espacial ocupan aproximadamente la quinta parte del espacio destinado a los contenidos geométricos. Por otro lado, a pesar de que las situaciones de ubicación espacial efectivamente permiten una buena contextualización de los contenidos geométricos a través de situaciones problemáticas de comunicación, -lo que validaría la metodología-, difícilmente en los libros de texto se establecen situaciones que permitan una descontextualización de los conocimientos en juego, de tal suerte que se logre el reconocimiento del contenido geométrico.

Análisis de los cuerpos geométricos

El análisis de los cuerpos geométricos también es un contenido relativamente novedoso, pues no apareció en los programas de educación básica desde 1970, pero si existía en curricula anteriores. Sin embargo, el peso que ocupa actualmente con respecto al resto de los contenidos geométricos es a lo más la décima parte. Sobre todo en los tres primeros grados, el estudio de los cuerpos se reduce a unas cuantas actividades, aisladas y no sistemáticas; en primer grado, la actividad consiste en la clasificación de cuerpos en función de los que “ruedan” y los “que no ruedan”; en segundo y tercer grados, se aborda el desarrollo de los cuerpos, ya sea mediante el desarmado de cajas, la construcción de plantillas mediante el trazo del contorno de las caras de los poliedros, o el forrado. La actividad más interesante es posiblemente la anticipación del cuerpo que se obtendría dado un desarrollo, porque permite el mejoramiento de la imaginación espacial.

En cuarto, quinto y sexto grados se introduce la clasificación de los poliedros, se sigue con el desarrollo de cuerpos, y como innovación, aparece el trabajo de los códigos para la representación de cuerpos en el plano (perspectivas). Sin embargo, el análisis geométrico de los cuerpos es bastante tímido: hay pocas actividades en los libros de texto, y no se trasluce alguna propuesta metodológica.

En los *Libros del maestro* de quinto y sexto grados se intenta destacar la importancia de la construcción de plantillas de cuerpos en el desarrollo de la imaginación espacial, y en el del desarrollo del razonamiento geométrico cuando, en grupo, los alumnos las analizan y argumentan por qué cierto modelo conduce o no a la construcción de un cuerpo determinado. Sin embargo, el argumento que aparece en dichos libros de que es necesario “partir de los sólidos para ir a lo más abstracto, las líneas y los puntos”, no se ve reflejado en las secuencias de actividades presentadas en los libros de texto de los grados correspondientes.

Análisis de la figura geométrica

El estudio de la geometría en la escuela primaria sigue centrándose en el análisis de la figura geométrica. El estudio de la geometría tal y como se presenta actualmente, es un punto de confluencia de las diversas “tradiciones” de la enseñanza de la geometría que han tenido lugar en México.

Por un lado el “análisis” de la figura para su clasificación, es un contenido privilegiado que ha formado parte de la enseñanza de la geometría al menos desde 1944 (ÁVILA 1988). El “análisis” de la figura, en particular de sus elementos lineales, está centrado en las características de la métrica euclidiana. No hay que olvidar que durante muchos siglos *Los Elementos* de Euclides fue un libro de texto obligatorio en las aulas de educación media superior (FILLOY 1977), y que numerosos maestros han intentado “...producir alternativas a la de Euclides, más adecuadas (digamos más fáciles) para los estudiantes...” (HEATH 1956). Sin embargo, el “análisis” métrico de la figura, con el que se iniciaría a los niños de educación básica a la geometría, se vio desvirtuado en favor de la memorización de las clasificaciones de figuras. A pesar de que el contenido geométrico privilegiado sigue siendo la clasificación de figuras, se espera ahora que las situaciones permitan el análisis "métrico" de la figura que efectivamente de lugar a la clasificación.

Una segunda tradición que ha conformado el actual curriculum de la escuela primaria es la de la geometría transformacional, que llega a la escuela primaria con la introducción de las matemáticas modernas al curriculum en 1970 (ÁVILA 1988). Ese movimiento se generó originalmente en Francia por la influencia de la matemática estructuralista desarrollada por el grupo Bourbaki. Se quería que los niños adquirieran estructuras algebraicas que les permitieran acceder más fácilmente al conocimiento matemático. En particular, la simetría intra e interfigural, las traslaciones y rotaciones, y las homotecias, permitirían al niño analizar figuras geométricas, clasificarlas, extraer de ellas ciertas estructuras algebraicas y hacer demostraciones no muy complicadas (DIENES y GOLDING 1969). Sin embargo, a pesar de que los libros de texto fueron escritos por matemáticos que veían ventajosa la introducción de las matemáticas modernas en la escuela, el planteamiento no tuvo sentido para los maestros (GÁLVEZ 1985; KLINE 1986). No obstante permanecen algunos contenidos en los programas de la primaria; tal es el caso de la simetría, misma que debería permitir la clasificación de figuras.

Otra influencia en la constitución del curriculum actual de geometría, son las investigaciones realizadas en diversos lugares del mundo sobre la importancia de poner a los niños, desde muy temprana edad, actividades que permitan el desarrollo de habilidades "geométricas", en particular, la percepción geométrica y la imaginación espacial (KRUTETSKII 1976; BISHOP 1980, 1986, 1993; CHETVERUKHIN 1980). La percepción geométrica es uno de los puntos centrales a ser trabajados en los primeros grados de la primaria. En los libros de texto se proponen actividades de identificación de figuras en configuraciones; los diversos rompecabezas -de "ilustración", tangrama, cuadrados bicolores-, los teselados con determinadas formas -gallinas, mosaicos-, y las retículas -uniformes, latices- son recursos didácticos que permiten la realización de dichas actividades. La imaginación espacial tiende a desarrollarse hacia los últimos grados de la primaria, cuando se introducen actividades que permiten anticipar sólidos a partir de sus desarrollos y que favorecen representaciones de cuerpos en el plano mediante el uso de los códigos de las perspectivas (caballera, isométrica, etc.).

El análisis de la figura geométrica para su clasificación sigue siendo el contenido más importante en la primaria, y el que ocupa más espacio dentro de los contenidos de geometría. Dicho análisis comienza en primer año con la reproducción de formas diversas, su identificación en el entorno, y su trazo con ayuda del contorno de objetos. La clasificación de figuras bajo diversos criterios, básicamente el número y tamaño de los lados, empieza formalmente en segundo grado. A partir de tercer año, se espera que los niños elaboren clasificaciones más finas de triángulos y cuadriláteros, por ejemplo, clasificaciones de los cuadriláteros en función del paralelismo de sus lados, o del comportamiento de sus diagonales. En cuarto grado, se pretende que identifiquen y tracen alturas de triángulos, y que utilicen la simetría como criterio de clasificación de figuras. En quinto y sexto se introduce la semejanza entre figuras desde problemas de trazo de figuras a escala.

El trazo de figuras utilizando diversos recursos -con regla y compás, mecanos, sobre el geoplano, con métodos de "jardinero" o con doblado de papel-, ocupa en los programas de geometría un lugar especial. Se afirma en los libros del maestro, que es de esperarse que a través del trazo, los niños analicen las figuras, identifiquen relaciones al interior de ellas, y se acerquen al razonamiento geométrico al diseñar, analizar y seguir secuencias de trazos. Sin embargo, los problemas de trazo, tal y como son planteados en los libros de texto, no parecen llevar necesariamente a los niños a una argumentación sobre el por qué la secuencia del trazo es correcta. Tampoco queda claro que los problemas de trazo sean situaciones didácticas que permitan el análisis de las figuras, ni que es posible descubrir las propiedades geométricas inherentes a los instrumentos de trazo. Además, es poco probable que los problemas de trazo sean percibidos por los maestros como "problemas".

Se ha insistido en que para los maestros el problema en geometría se identifica con los problemas de cálculo de perímetros áreas o volúmenes. Difícilmente los maestros consideran que existan problemas "cotidianos" susceptibles de ser resueltos con recursos y conocimientos geométricos. A fin de que se reconozca los problemas geométricos que se resuelven con herramientas geométricas, en la Lección 8 "El lugar del tesoro", del Bloque 4 del *Libro de texto* de cuarto grado se propone a los niños la construcción de algunos lugares geométricos. Dichos lugares geométricos son la solución al problema de encontrar un conjunto infinito de puntos que satisfacen un conjunto de condiciones dadas desde un contexto determinado[6]. La obtención del lugar geométrico en estas situaciones es el resultado de: 1. una actividad de trazo que involucra el análisis de la construcción obtenida; 2. el análisis de lo que puede ser construido por el instrumento de trazo, 3. la elaboración de conjeturas sobre las características geométricas del resultado de la construcción y 4. la posibilidad de argumentar sobre la construcción obtenida, primero verificando si obedece a las restricciones planteadas originalmente, y posteriormente, argumentando con otros compañeros la pertinencia del trazo en la obtención del resultado. Se prevé que los problemas de construcción de lugares geométricos den la posibilidad de pensar que el conocimiento geometrico es una herramienta matemática para resolver problemas, y no una tarea escolar que es necesario "aprender".

Se esperaría que en procesos de actualización docente la tendencia de los maestros a ver los contenidos geométricos como un conjunto de nombres y figuras

[6] El texto del problema dice: "En un palacio muy antiguo se encontraron algunos documentos del rey que vivió ahí. 1) Uno de los documentos dice: 'El tesoro está enterrado a 4 metros del pozo, a 3 metros del árbol, a 2.5 metros de la estatua, y a 3 metros de la fuente'. Utiliza tu compás y encuentra el punto donde puede estar el tesoro, luego coloréalo de azul. Cada centímetro del dibujo representa un número. [En la ilustración del libro se dibujaron cada uno de los objetos enunciados, con una marca en cada uno de ellos. **La solución en realidad no es un punto, sino una región en el plano**]. 2) Otro documento dice lo siguiente: '- Quiero que en el jardín pongan otra fuente en forma de círculo. Debe haber 3 metros del centro a la orilla de la fuente. - Quiero que alrededor de la fuente pongan una franja de violetas de 1 metro de ancho. - Después de las violetas pongan una franja de rosas que tenga medio metro de ancho. El rey. "

a ser memorizados se transforme, a través de un acercamiento al enfoque actual de la enseñanza de la geometría.

3. Las propuestas de actualización

Para todo profesionista, la actualización es un medio para conocer las transformaciones continuas que tienen lugar en su campo de trabajo, y el caso de los maestros no es la excepción. Las transformaciones en el caso de las matemáticas escolares, son el resultado de la evolución de la matemática misma, de los cambios en la manera de concebir su aprendizaje y su enseñanza, de las investigaciones que permiten un mayor conocimiento de los procesos que se dan al interior de la escuela, de los requerimientos de la sociedad actual con respecto al desarrollo de habilidades y capacidades específicas en los niños, y de los proyectos nacionales y las políticas educativas. Esas transformaciones, aunadas a los imperativos que impone un curriculum nacional en un país con tantos contrastes culturales, lleva a pensar la matemática escolar de manera diferente a como se había venido planteando, es decir, como un conjunto de conocimientos que los alumnos deben memorizar y utilizar a modo de “herramienta” en problemas de tipo enunciado. Actualmente la matemática adquiere un sentido distinto cuando se pretende que, como producto de su aprendizaje, los niños puedan resolver problemas y sean capaces de atribuir un significado a sus conocimientos en situaciones específicas. En este nuevo contexto, la actualización de los maestros difícilmente puede ser concebida como una recopilación y transmisión de información sobre los cambios actuales a nivel curricular.

El diseño de la actualización ha estado conformado por las características de las instituciones gubernamentales que se han encargado de ella. La formación y, en particular, la actualización han dependido de los enfoques desde donde se las conceptualiza y la manera como se han instrumentado las acciones formadoras en función de dichos enfoques. En efecto, en el ámbito de la actualización de profesores en el área de matemáticas, el diseño de propuestas se han generado básicamente desde dos posturas: 1) es necesario que el docente tenga una formación en el área profesional, mediante el estudio de teorías psicopedagógicas que le permitan comprender los procesos de adquisición de conocimientos por parte del niño, y diseñar estrategias didácticas en función de ello; 2) el docente debe tener una buena formación en el área disciplinaria, porque si sabe más matemáticas comprenderá cuál es la estructura subyacente en dicha ciencia, entenderá cuáles son los obstáculos a vencer para aprehenderla y diseñará correctamente las secuencias didácticas.

Hay pocos estudios evaluativos que den cuenta exacta del efecto particular de estas posturas de formación sobre el quehacer cotidiano del maestro. Algunas investigaciones sobre formación de docentes (ROCKWELL 1986b; ROCKWELL Y MERCADO 1986; QUIROZ 1988) señalan que los maestros consideran que existe poca relación entre lo que aprenden en sus cursos de formación inicial o en los de actualización, y lo que requiere de ellos su práctica cotidiana. La falta de estudios sobre programas de formación de profesores en el área de matemáticas se debe posiblemente a que los esfuerzos realizados se ocupan prioritariamente en dar respuesta a la demanda del magisterio sobre el particular, mediante la elaboración de programas de formación y el diseño de procedimientos para su implantación.

Lo que mayoritariamente ha ocupado la atención es el diseño de diversas estrategias para la instrumentación de propuestas de actualización; una de ellas es la relacionada con un sistema escolarizado (v. gr. licenciaturas en educación básica para los docentes formados antes del plan de 1984 de la Educación Normal, cursos y diplomados diversos e incluso, posgrados). La otra estrategia para la actualización es lo que se ha llamado “sistemas en cascada”, y se basa en un mecanismo de transmisión de información a cuerpos técnicos (inspectores, supervisores, jefes de zona), los que se encargan de actualizar a los directores, quienes a su vez transmiten la información a los maestros. Tampoco hay seguimientos de este tipo de instrumentaciones. Es posible suponer que el sistema de actualización escolarizado es poco rentable, por la inversión de tiempo y esfuerzo que se requiere por parte del docente. En el caso del sistema en cascada, se sabe que a lo largo de la cadena de transmisión, mucha información se pierde o se distorsiona. Además un mecanismo de esta naturaleza se apoya en el supuesto de que la formación es información que puede ser transmitida.

Ahora bien, la tendencia de los estudios del equipo de psicomatemáticas del DIE ha sido la de observar y dar cuenta de los efectos que pueden tener cursos de actualización en los que se coloca a los maestros en una situación didáctica de reconceptualización de contenidos matemáticos y de reflexión sobre la metodología empleada en el desempeño de su práctica cotidiana y, eventualmente, compararla con la empleada por los conductores del curso. Para tal efecto, los investigadores han recurrido a la información obtenida en los registros de las observaciones de talleres de formación, a los trabajos realizados por maestros en las sesiones de taller y a observaciones efectuadas en el salón de clases. En la investigación *Formación de profesores en áreas fundamentales de la educación básica* (FUENLABRADA, BLOCK y NEMIROVSKY 1989), las conclusiones apuntan a la pertinencia de dichos cursos en la formación docente, siempre que no sean cursos de corta duración y que tengan periodos inter-talleres entre las sesiones que permitan otras actividades, como la lectura o la elaboración de materiales. Sin embargo los investigadores también señalan que los alcances reales no pueden ser apreciados hasta que no se realicen estudios de seguimiento.

Con estas experiencias el equipo de psicomatemáticas ha intentado estructurar una propuesta de actualización en la que la reconceptualización de contenidos matemáticos lleve al maestro a la reflexión de cómo se aprende y enseña matemáticas. Parece ser que los profesores, en ese tipo de cursos de actualización, piensan constantemente en cómo reaccionarían los niños ante tal o cual actividad, o en las dificultades que tendrían en la aproximación a un determinado problema, y en el escenario que tendrían que construir en el aula con sus alumnos en función de lo que en el curso de actualización han "aprendido". Y esto no es una situación excepcional. En efecto, Papert da cuenta de ello en la crónica de una experiencia en un curso de actualización de profesores, en el que se pretendía que los maestros aprendieran el lenguaje LOGO:

> Durante los periodos de debate (uno de los maestros) comentaba con fervor cualquier idea que se le ocurría para utilizar lo que estaba aprendiendo; incluso cuando trabajaba con su ordenador, profería de vez en cuando exclamaciones de que no veía el momento de volver a su clase con sus nuevos conocimientos. “¡A mis niños les encantará!”. De acuerdo con cualquier criterio de evaluación el taller estaba funcionando muy bien [...] A pesar de ello tenía la sensación de que algo iba mal [...] Aparentemente una de las participantes tenía la misma sensación que yo, pero fue más rápida en identificar el problema. Perdió la paciencia ante tantas expresiones de entusiasmo y, entre dientes, dijo: “¡Olvídate de los [exabrupto] niños!” [...] El elemento discordante que no había podido identificar consistía en el hecho de que los participantes en el curso pensaban en ellos mismos como profesores en período de adiestramiento, pero no como estudiantes. (PAPERT 1995, 88).

Según Papert, una vez que se comentó este incidente entre los maestros hubo cambios en su conducta y empezaron a gozar de su propio aprendizaje. En cursos de actualización donde los maestros tematizan sus saberes y hacen objeto de reflexión su práctica docente, existe mayor posibilidad de que incorporen a sus concepciones las transformaciones propuestas a nivel curricular, de que valoren la factibilidad de llevar la nueva metodología al salón de clase, y que piensen constantemente en cómo van a aprender los niños con la metodología con la que ellos mismos están aprendiendo.

Teniendo en cuenta los efectos producidos por ese tipo de cursos, los integrantes del equipo de psicomatemáticas conformaron una propuesta de actualización *La enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria. Taller para maestros*. *Primera y segunda partes. Programa de actualización permanente* (BLOCK (coord.),1994) que en principio permita a los maestros reconceptualizar los contenidos de matemáticas de la primaria, y que favorezca al mismo tiempo la reflexión en torno a los procesos de enseñanza y de aprendizaje de las matemáticas.

En cuanto a la instrumentación, la propuesta se presenta como un conjunto de secuencias didácticas, impresas en dos tomos, bajo una modalidad de autoaprendizaje, aunque a veces la propuesta solicita al maestro reunir a compañeros de trabajo, amigos o familiares cuando la situación requiere de un trabajo colectivo, y de autogestion del tiempo de estudio, pues se calcula que en un promedio de 250 horas es posible abordarlos en su totalidad. Esta estrategia de instrumentación es atractiva, aunque habría que estudiar su viabilidad en función de las condiciones de trabajo y económicas del profesor, mismas que podrían impedirle ocuparse de su actualización fuera de los tiempos escolares.

La propuesta podría ser interesante para los profesores que están interesados en mejorar su práctica docente, a pesar de sus limitaciones de tiempo, económicas e incluso institucionales, y que sienten la necesidad de una actualización que tienda a una formación permanente. Algunas pruebas del interés en la superación profesional de los maestros son la permanencia de asociaciones de profesionales de la enseñanza de las matemáticas, la proliferación de encuentros y jornadas académicas, el cada vez mayor número de publicaciones y la consolidación de los posgrados en educación matemática. Las motivaciones pueden ser diversas: la posibilidad de movilidad escalafonaria, la motivación ejercida por algún líder académico en la escuela de procedencia, el reto que significa que los niños aprendan matemáticas, la convicción de la superación profesional, etc.

A partir del inicio del año escolar 1996-1997 la propuesta ha sido implantada a nivel nacional; se ha distribuido a los maestros en servicio que se han inscrito en el Programa Nacional de Actualización Permanente, a través de los centros de maestros que se encuentran ubicados en todo el país.

El diseño de la propuesta diseñada por el DIE contempla:

-la reorganización de los conocimientos previos sobre contenidos matemáticos.

-el análisis de los materiales de apoyo al trabajo docente

-el análisis de las producciones de los niños.

- la lectura de textos de educación matemática.

Uno de los aspectos de la propuesta de actualización consiste en que el profesor conozca los libros de texto producidos por la SEP y que resuelva algunas lecciones, con la finalidad de que identifique los contenidos que se abordan y que prevea posibles dificultades por las que pasarán los alumnos, ya sea por el tipo de actividad, por la secuencia en los contenidos o por su presentación.

Al resolver algunas lecciones de los libros de diferentes grados, e incluso en el transcurso de actividades del taller que les parecen interesantes, los maestros expresan sus hipótesis sobre la manera como aprenden los niños a través de dichas actividades. Esas hipótesis son elaboradas desde sus concepciones de lo que significa el aprendizaje en matemáticas, desde los saberes conformados en la interacción cotidiana con los niños, desde su conocimiento de los resultados del trabajo con las actividades propuestas por los nuevos libros de texto en clase, y desde la dificultad que ellos mismos experimentan al desarrollar las actividades de los libros y las del taller.

Ahora bien, la modalidad de instrumentación de la propuesta de actualización que se observó para la elaboración del presente trabajo fue la de curso-taller dirigido por un conductor. Para efectos de este trabajo sólo se observó las sesiones destinadas al estudio de las secuencias de geometría, sin embargo eso fue suficiente para valorar las ventajas del trabajo de la propuesta con un grupo de maestros en servicio que se reunían cada sábado en una Normal del Estado de México.

En particular, de este proceso es importante subrayar la presencia del conductor como facilitador de la confrontación de los resultados entre los maestros, lo que permitió aprendizajes que de otra manera probablemente no se hubieran dado.

Los maestros también hicieron posible que las condiciones materiales del curso fueran óptimas. Todos tenían sus materiales completos y bien presentados: geoplanos, materiales recortados, hilo, tinta y cojín para sellos, etc. y todos tenían fotocopias de la propuesta. Todos llevaron sus materiales de apoyo al trabajo docente, -ficheros, libros de texto, libros del maestro-, aunque parece ser que llegaron a tener problemas para conseguirlos, porque en sus escuelas de procedencia difícilmente tenían los libros suficientes para los niños. En fin, todos mostraron entusiasmo y deseos de superación académica.

Sin embargo, es pertinente saber, con las condiciones planteadas por la propuesta y por el trabajo grupal, si los maestros logran modificar sus concepciones sobre los contenidos matemáticos.

4. Metodología de la investigación

El proyecto de investigación del DIE contempla la experimentación de todas las secuencias didácticas del taller, lo que “permitirá valorar el potencial didáctico del modelo de Taller que se propone” (FUENLABRADA 1995b, 7). Se impuso además la condición de respetar el desarrollo de las situaciones didácticas tal y como las presenta la propuesta, y desarrollarlas bajo la coordinación de un conductor.

Tanto para la investigación rectora como para el desarrollo de esta investigación, se requirió la documentación de la observación de las sesiones completas del taller, mediante su registro en un protocolo de observación en el que se incluye: quiénes fueron los participantes, la duración de las actividades y de la sesión completa, las respuestas, actitudes y producciones de los maestros, y el rol, el tipo y los contenidos de las participaciones del conductor del Taller.

Esta técnica investigativa se apoya en la opinión de algunos autores que han subrayado la importancia de los recursos metodológicos cualitativos para la investigación educativa (ROCKWELL 1986a, 1986b, 1987; WOODS 1986; ERICKSON 1986; EDWARDS 1990). Al respecto Erickson afirma que

> El investigador procura comprender los modos en los que docentes y estudiantes, en sus acciones conjuntas, constituyen ambientes unos para otros. El investigador de campo centra su atención en esto cuando observa un aula, y hace anotaciones que registran la organización social y cultural de los hechos observados, en el supuesto de que la organización del

> *significado-en-acción* es a la vez el ambiente de aprendizaje y el contenido a aprender (ERICKSON 1986, 217).

En la propuesta que nos ocupa, se supone que el proceso de reorganización de conocimientos tendiente a la elaboración de conceptualizaciones sobre aspectos matemáticos tiene lugar durante la interacción con los demás, en el contexto de la solución de un problema: pedir información para plantear un problema o interpretar la que aparece en los materiales para adecuarla a lo que se considera el problema en cuestión; confrontar puntos de vista con los compañeros para diseñar estrategias de solución; justificar determinados procedimientos o validar los de los demás, y comunicar y argumentar los resultados. Es por esto que tiene sentido el uso de una metodología cualitativa.

Se parte del supuesto de que en el contexto de un problema se atribuye un sentido y un significado a las representaciones matemáticas. Sin embargo, es necesario también favorecer situaciones en las que los maestros "descontextualicen" el conocimiento, a fin de llegar a conceptos generales aplicables en situaciones distintas. El éxito de las secuencias didácticas de la propuesta en lo que concierne a la geometría, residiría en posibilitar situaciones problemáticas que permitieran la construcción de razonamientos geométricos formales al resolver los problemas geométricos planteados y al validar las soluciones.

Dentro de este marco general, la presente investigación se basó en el análisis de los registros de observación y de las producciones de los maestros, con el fin de indagar los efectos producidos por las secuencias didácticas de geometría en sus concepciones sobre contenidos geométricos.

Cabe señalar que las situaciones y los sucesos que tienen lugar durante un curso de actualización, permiten a los maestros manifestar sus concepciones de manera distinta de como lo harían en el salón de clases. Es por ello que fue necesario centrar la atención en los siguientes elementos:

1) las interacciones verbales y no verbales, al interior de los equipos, entre maestros a nivel grupal y con el conductor;
2) el significado que los maestros daban a las interacciones, en la lógica de la reorganización de sus conocimientos;
3) el significado que conferían a los objetos y relaciones geométricas involucrados en los problemas propuestos en las actividades;
4) la manera como los maestros interpretaban las instrucciones;
5) el valor que daban a los textos así como a las ilustraciones;
6) los resultados que obtenían en el proceso de resolver problemas y la interpretación que daban a ese resultado;
7) la manera como validan sus resultados ante sus compañeros;
8) las modificaciones que hacían a dichos resultados derivadas de la intervención grupal.

Finalmente, un elemento importante para la recuperación de los significados que los maestros daban a las actividades consistió en obtener una copia de los apuntes, bocetos y trazos realizados en sus cuadernos durante las sesiones de trabajo. Esta evidencia escrita permitió completar el registro de observación conformado con lo visto (algunos videos y notas), y con lo oído (cintas magnetofónicas).

5. Etapas de la investigación

Las actividades que permitieron llevar a cabo esta investigación son las siguientes:

- *Análisis de los materiales del taller de actualización*. Se analizaron las secuencias didácticas de geometría para tratar de descubrir los propósitos de los autores al ofrecer determinadas secuencias, y la coherencia entre los principios teóricos explícitos en los materiales y el tipo de actividades propuestas.

- *Observación del curso de formación y recopilación de los trabajos de los maestros*. Se hicieron observaciones de las 6 sesiones del curso de actualización destinadas a contenidos geométricos, con un total de 24 horas. Para apoyar la observación, se grabó la sesión en audio y algunas secuencias en video. Además, había un observador auxiliar que hacía el seguimiento de un equipo. Por otro lado, durante las sesiones de trabajo se procuró fotocopiar materiales de trabajo de algunos maestros asistentes: dibujos, análisis de problemas, anotaciones de los cuadernos, y algunos fragmentos de los materiales de la propuesta que tenían que ser contestados por ellos.

- *Elaboración de protocolos*. Los códigos, abreviaturas y símbolos usados en la elaboración de los protocolos de observación se adoptaron por consenso de todos los que constituían el equipo de seguimiento del taller. Para la realización de los protocolos de las sesiones de geometría, se realizó la transcripción de cintas de audio y video. Posteriormente se agregaron las notas de observación tomadas durante el taller.

- *Análisis de protocolos y de los materiales recopilados*. En base a los resultados de las investigaciones realizadas en México sobre la manera como los maestros presentan los contenidos geométricos ante los niños, al análisis de los materiales de la propuesta, y con ayuda de los materiales de Duval sobre la estructura de los razonamientos argumentativo y deductivo, se diseñaron indicadores para el análisis de los protocolos y de las producciones de los maestros que asistieron al taller.

Objetivo de la investigación

Este trabajo tiene como finalidad dar cuenta de las transformaciones que sufrieron las concepciones de los maestros, sobre ciertos contenidos geométricos, en un taller de actualización para maestros de educación primaria. Al abordarse esta investigación con una metodología específica arriba descrita, el ámbito de validez de las afirmaciones que se hagan y las conclusiones que se obtengan se restringen al grupo de maestros participantes en el momento en que participaron en el taller. Sin embargo los resultados del estudio permiten evaluar el “potencial didáctico” y las limitaciones de la propuesta, es decir, valorar las situaciones que permitieron aprendizajes significativos, apreciar los resultados a los que llegaron los maestros asistentes al curso, y prever los que se obtendrían en otros talleres modificando la propuesta, o su posible impacto en la modalidad autodidacta.

Para dar cuenta si tuvieron lugar transformaciones de las concepciones de los maestros sobre contenidos geométricos, finalidad del taller de actualización, se necesitaba identificar los siguientes aspectos en los registros de observación:

1. cuáles eran las concepciones sobre contenidos geométricos con las que los maestros se aproximaban a un problema geométrico;
2. cuáles eran las estrategias informales de las que hacían uso;
3. cómo evolucionaban en función de las situaciones didácticas propuestas,
4. de qué manera dicha evolución les permitía la reorganización de contenidos y el desarrollo de un pensamiento geométrico;
5. qué habilidades ponían en juego y qué otras tantas desarrollaban en la búsqueda de estrategias para resolver los problemas propuestos
6. de qué manera las secuencias didácticas propuestas en el Taller permitían arribar a conceptos generales y estrategias formales.

Estas cuestiones fueron las que guiaron el análisis de los protocolos de observación, cuyos resultados se exponen en el tercer capítulo.

Capítulo II. Análisis de las secuencias didácticas de los materiales de la propuesta de formación*

1. Los principios pedagógicos y de actualización de maestros de la propuesta

2. Análisis de la propuesta en el área de geometría en función de sus principios

   2.1 Tema 1: Simetría

   2.2 Tema 2: Triángulos y cuadriláteros

   2.3 Tema 3: Paralelas, perpendiculares y trazos interesantes

   2.4 Tema 4: Los poliedros

* El material que se analizará es BLOCK SEVILLA, David (coord.) (1994). ***La enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria. Taller para maestros***. ***Primera y segunda partes. Programa de actualización permanente***.

Introducción

El propósito en esta sección es presentar los fundamentos teóricos que sirvieron de base para la aproximación detallada a las secuencias didácticas del tema de geometría, así como los resultados del análisis efectuado.

Para muchos de los maestros en actualización, la geometría es un contenido nuevo que se presenta en los libros de texto con un enfoque novedoso. El objetivo de la propuesta en este sentido es doble: en primer término, que los docentes aprendan geometría, y que además asimilen una metodología distinta para el trabajo de los contenidos matemáticos que se espera funcionalicen en el salón de clases.

El análisis de cada uno de los temas que constituyen la propuesta en la unidad de geometría se llevó a cabo en relación a ese doble objetivo; en primer lugar, se identificaron los principios pedagógicos de la propuesta que permitían la reorganización de contenidos matemáticos de los maestros, y en base a estos principios se analizaron las secuencias didácticas identificadas en la propuesta. En segundo lugar se analizó de qué manera los principios de actualización de los maestros permiten la introducción y el análisis de la nueva metodología.

En suma, el criterio básico de este análisis es el de la coherencia entre los principios de la propuesta -pedagógicos y de actualización de maestros- y el desarrollo del curriculum de la propuesta.

1. Los principios pedagógicos y de actualización de maestros de la propuesta

Como ya se ha mencionado, la propuesta se sustenta en principios pedagógicos, explícitos en los materiales. En los propósitos, los autores afirman que la realización del taller permite al maestro “Ampliar sus conocimientos sobre los contextos y las secuencias de situaciones problemáticas que dan significado a los contenidos de matemáticas que se trabajan en la escuela primaria” (BLOCK (coord.) 1994, 10). Este propósito tiene una dimensión epistemológica al llevar una idea implícita de lo que son las matemáticas y de lo que es su aprendizaje.

En efecto, en primer término se contempla que sólo los contenidos matemáticos escolares correspondientes al curriculum de la educación primaria vigente desde 1993 sean objeto de reflexión por parte de los maestros.

En segundo lugar, se pretende que las matemáticas que se trabajan en la propuesta de actualización, -y en la escuela primaria-, tengan un significado en función de un contexto. Desde otros enfoques de la enseñanza de las matemáticas, los contenidos escolares se reducen a sus aspectos operatorios, por lo que se cree que pueden ser abordados de manera descontextualizada, haciendo hincapié en su sentido utilitario. La pregunta didáctica en dichos enfoques es ¿cómo se puede presentar ese conocimiento de manera tal que el alumno lo "aprehenda"? De ahí la importancia que esas corrientes dan al uso de tablas, ábacos, etcétera, pues dan la posibilidad de precisión y rapidez en los cálculos a través de su uso reiterado.

En esta propuesta, lo importante es que los contenidos matemáticos tomen un significado en función de los contextos y de las situaciones problemáticas diseñadas didácticamente para ese fin: "Esta concepción didáctica implica recuperar los significados de los conocimientos, contextualizarlos nuevamente, es decir, ponerlos en situaciones en las que éstos cobren sentido para el alumno, al permitirle resolver los problemas que se plantean." (*Ibid.*, 9). Sin embargo, en un segundo momento, con ayuda de situaciones diseñadas para ese fin, tendrán que arribar nuevamente a la descontextualización de los contenidos, a fin de generalizarlos y poderlos aplicar a situaciones diferentes.

Los siguientes principios tendrían que permear las secuencias didácticas:

- Un enfoque en el que se privilegia la reorganización del conocimiento matemático, por la interacción del sujeto con el entorno, y con otros sujetos, en contextos y en situaciones de resolución de problemas;

- El diseño de situaciones problemáticas que permitan contextualizar el conocimiento matemático, y que cobre significado para los sujetos a los que están dirigidas,
- El diseño de situaciones de institucionalización[7] que permitan de nuevo la descontextualización del conocimiento.

Estos principios de carácter epistemológico, en el tema de geometría tendrían que actualizarse en situaciones que propicien la elaboración de hipótesis y conjeturas sobre relaciones geométricas, -intra e interfigurales[8]- y la argumentación de resultados mediante su confrontación y discusión en equipos.

Es por ello que la idea de la propuesta es diseñar secuencias bajo principios didácticos que posibiliten al maestro la reorganización de conocimientos geométricos mediante la solución de problemas y "Experimentar una manera grata y creativa de hacer matemáticas" (BLOCK (coord.) 1994, 9). Los principios didácticos que posibilitarían "hacer" matemáticas, tendrían que cubrir los siguientes aspectos:

- Proponer una situación problemática:

> "... las llamadas *'situaciones-problema'* [son actividades] diseñadas para maestros, cuyo propósito es permitirle conocer con mayor profundidad los distintos contenidos de matemáticas de los programas de la primaria, desde el punto de vista de sus contextos y significados. " (*Ibid.,* 12)

- Permitir la búsqueda de soluciones creativas contra la aplicación de reglas:

> "La búsqueda de la solución a un problema nuevo empieza muchas veces por tanteos , ensayos, errores y correcciones. El trabajo de búsqueda, si se realiza con libertad, puede ser tan grato como el que hacemos frente a un acertijo, una adivinanza o cualquier actividad interesante que nos presente un reto" (*Ibid.,* 18).

---

[7] "La consideración 'oficial' del objeto de enseñanza por parte del alumno, y del aprendizaje del alumno por parte del maestro, es un fenómeno social muy importante y una fase esencial del proceso didáctico: este doble reconocimiento constituye el objeto de la INSTITUCIONALIZACIÓN " (BROUSSEAU 1994, 65).

[8] cfr. PIAGET y GARCÍA 1984, 106.

- Dar cabida al juego

> “ Los juegos pueden ser situaciones didácticas ideales para aprender matemáticas. ...para empezar a ganar, es necesario construir una estrategia. dicha estrategia se va elaborando al realizar varios juegos, en los cuales se prueban ideas, [...] se utilizan determinados conocimientos matemáticos y se construyen otros nuevos...” (*Ibid.,* 24).

- Posibilitar el cálculo mental y la estimación.

> “El desarrollo de estrategias para calcular mentalmente resultados aproximados, constituye uno de los propósitos de la enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria” (*Ibid.,* 25).

- Favorecer la percepción geométrica y la imaginación espacial.

- Coadyuvar a la elaboración de conjeturas geométricas en los procesos de construcción de relaciones entre los objetos geométricos;

- El razonamiento geométrico y la argumentación de resultados, como procesos antecedentes a la demostración en geometría, tendrían que darse en situaciones didácticas de validación[9] .

Ahora bien, la reorganización de conocimientos y su posterior descontextualización sólo son posibles si se han movilizado conocimientos previos y si se han actualizado habilidades en el sujeto que aprende. Es decir, si el alumno modifica o reorganiza conocimientos anteriores al interactuar sobre situaciones problemáticas nuevas, si recrea su herramienta matemática que evoluciona al resolver problemas, y si con todo ello, genera sus propios recursos y estrategias, que a su vez le servirán en futuras ocasiones.

[9] “Las situaciones de validación, en las que se trata de convencer a uno o varios interlocutores de la validez de las afirmaciones que se hacen. En este caso, los alumnos deben elaborar pruebas para demostrar sus afirmaciones. No basta la comprobación empírica de que lo que dicen es cierto; hay que explicar que, necesariamente, debe ser así.” (GÁLVEZ 1994a, 43).

Estos principios -epistemológicos y didácticos- tendrían que guiar el diseño de secuencias didácticas que favorezcan una actividad intelectual del sujeto, con una dirección y sentido en función de un problema planteado, que le permitan hacer evolucionar sus estrategias no convencionales al establecer nuevas relaciones entre los objetos matemáticos y al interactuar con otros sujetos. Por otro lado, dichos principios tendrían que quedar plasmados en una propuesta de evaluación del aprendizaje, que de cuenta del grado de generalización que alcanzan los conocimientos reorganizados.

Además de los principios anteriormente expuestos, la propuesta debería estar permeada con principios relativos a la formación de los docentes. Se espera que los docentes amplíen "... sus conocimientos sobre el enfoque didáctico de los nuevos materiales su estructura y los contenidos." y conozcan "...con mayor profundidad la estructura y los contenidos de los nuevos materiales para la enseñanza de la matemáticas" (BLOCK (coord.) 1994, 10). La reorganización de conceptos matemáticos con una nueva metodología, -con el fin de que el maestro tenga dominio de los contenidos de la primaria en el área de las matemáticas-, es relevante en esta propuesta, pero de acuerdo con los resultados de las investigaciones sobre formación de docentes en el área de matemáticas realizadas en el DIE (FUENLABRADA, BLOCK y NEMIROVSKY 1989), es necesario que los docentes reflexionen sobre la metodología de enseñanza utilizada para que ellos aprendan.

La propuesta debería basarse en los siguientes principios de actualización de maestros:

- Favorecer la interacción personal o colegiada con los materiales de apoyo al trabajo docente proporcionados por la S. E. P.
- Proponer situaciones que permitan el análisis de la metodología propuesta en los libros de texto.
- Proponer situaciones que ayuden a los maestros a identificar secuencias didácticas (Temas, complejidad, importancia de los materiales didácticos...).

- Favorecer el análisis de las producciones de los niños tendientes a problematizar la evaluación.
- Introducir a los maestros a lecturas de divulgación de investigaciones sobre educación matemática.

Estos principios se expresan a través de una alternativa de organización para la implementación y desarrollo del taller:

- El diseño de un curriculum centrado en el aprendizaje de las matemáticas por áreas.
- La posibilidad de trabajar los materiales de manera autodidacta o colegiada.
- La coherencia entre los contenidos de la propuesta con los contenidos del curriculum de las matemáticas para la educación básica.
- El desarrollo de actividades que permitan al maestro encontrar una coherencia entre la propuesta de enseñanza y los mecanismos de evaluación;
- El análisis de algunos de los materiales de apoyo para el trabajo docente.
- El análisis de procedimientos, respuestas y errores frecuentes de los alumnos de primaria.

2. Análisis de la propuesta en el área de geometría en función de sus principios

Para hacer el análisis de la propuesta de geometría, en primer término se verificará la coherencia entre el desarrollo de los temas que constituyen la unidad con los principios pedagógicos y de formación de docentes de la propuesta. Posteriormente, en cada uno de los temas se identificarán situaciones didácticas, que serán analizadas para verificar su pertinencia matemática y su conformidad en el marco de la metodología del aprendizaje a través de problemas.

2.1 Tema 1: simetría

2.1.1 *Coherencia con los principios pedagógicos de la propuesta*

La propuesta de geometría comienza con el estudio de la simetría. Sin embargo, el análisis de la simetría como una propiedad métrica de las relaciones interfigurales e intrafigurales, no logra consolidarse con el desarrollo de este tema. En efecto, se propone que el docente perciba esta propiedad en algunas configuraciones, que trace figuras simétricas en el geoplano, que verifique la simetría mediante el espejo y el doblado de papel, en otras palabras, hay actividades de acción en el sentido de Brousseau (GÁLVEZ 1994a) pero no hay actividades de formulación, de validación, ni de institucionalización. Las actividades permiten a los maestros recurrir a sus conocimientos previos sobre la simetría para realizar las actividades, pero en general las situaciones, por sí mismas, no permiten la reorganización de dichos conocimientos que tienda a la reconceptualización de la simetría como una propiedad métrica de figuras y relaciones geométricas.

Parecería que en la resolución de algunas de las lecciones de los libros de texto de primaria que abordan el tema, incluidas en la propuesta, el maestro lograría sistematizar el conocimiento relativo a la simetría. Sin embargo, este propósito se vuelve ambiguo al pedir al maestro que aborde la resolución de las lecciones desde dos miradas distintas: desde una posición de “aprendiz”, pues tiene que “aprender” un contenido, y desde una posición de docente, pues tiene que analizar, desde el punto de vista metodológico, la pertinencia de las secuencias.

Pero adoptar una posición de “aprendiz” (aprender mediante las actividades de los libros de texto), pone al maestro frente a la disyuntiva de elegir entre dos posturas contradictorias: simular que es un “niño” y reaccionar como cree que tendrían que reaccionar sus alumnos en el salón, o adoptar una posición de “adulto” resolviendo situaciones creadas para ser resueltas por niños.

Si las actividades de la propuesta permitieran la reconceptualización de la simetría como propiedad de las figuras, entonces se daría la posibilidad al maestro de construir nuevos criterios de clasificación de figuras -como el comportamiento de las diagonales o el paralelismo de los lados en los cuadriláteros-, y dotarlo de otras herramientas de apoyo para el proceso de elaboración y argumentación de conjeturas geométricas.

Aún cuando la propuesta no permite la reconceptualización de la simetría, sí es posible considerar que apela a algunos conocimientos previos de los maestros, como la identificación de configuraciones simétricas y de los ejes de simetría, la certeza de que es posible realizar transformaciones rígidas en el plano, la percepción de la congruencia de figuras en configuraciones simétricas y, en algunos casos, la utilización de manera no tematizada, de la transformación isométrica de una figura con respecto a un eje.

Otras habilidades, como la comunicación de resultados, no tienen lugar porque desde las actividades de la propuesta no se favorecen los procesos argumentativos. En la mayoría de las situaciones de este tema se propone verificar la simetría mediante diversos procedimientos (como el espejo, el doblado de papel, o la hoja cuadriculada); pero no hay espacios que permitan la elaboración de conjeturas al respecto.

Podría considerarse incluso que la verificación de relaciones geométricas puede convertirse en un obstáculo para la argumentación en la demostración matemática, porque fija al sujeto en un caso particular, impidiéndole aislar los elementos estudiados y lograr generalizaciones y abstracciones.

Los autores de la propuesta afirman que las secuencias didácticas que conforman este tema se componen de actividades y juegos que permiten analizar la simetría como una propiedad de algunas figuras geométricas. Sin embargo, en el desarrollo del tema no se encontraron juegos. Hay 3 actividades lúdicas paralelas al desarrollo de las situaciones didácticas, pero sólo una aborda la simetría. En cuanto a las otras, en una de ellas se pretende que el maestro utilice su percepción geométrica para identificar triángulos en una configuración, y la otra es una actividad de imaginación espacial para el trazo.

En cuanto a la integración con otros contenidos matemáticos, en el desarrollo de este tema se introducen actividades tendientes a la reconceptualización de la perpendicularidad y del paralelismo. Sin embargo, como se analizará más adelante, la vinculación con estos contenidos fue fallida por el mal diseño de las secuencias didácticas.

2.1.2 *Coherencia con los principios de actualización de docentes*

La propuesta de actualización lanza explícitamente la apuesta a que el docente, además de "reaprender" matemáticas, va a tener la ocasión de analizar la metodología propuesta en los libros de texto. Sin embargo, en general, se hace poca referencia a la metodología que se intenta funcionalizar durante el taller; tampoco se analizan desde ese punto de vista los materiales de apoyo al trabajo docente.

El análisis de la metodología se concentra básicamente en la actividad 3 de la propuesta "Nuestros materiales de trabajo". Las preguntas que guían al docente en el análisis de las lecciones enfatizan la identificación del contenido en cada lección y, en algunas ocasiones, el grado de dificultad entre dos lecciones. Algunas preguntas hacen referencia al recurso utilizado. También se le propone que modifique algunas actividades de lecciones de los libros de texto, que abordan contenidos de paralelismo y de perpendicularidad, en función del tema de simetría. Al final del tema hay un recuadro que sugiere una secuencia de los contenidos de simetría para toda la primaria.

Además, se sensibiliza al docente de que hay ejercicios que es imposible realizar por el diseño del libro y que hay lecciones que pueden ser difíciles para el alumno. En particular se pide al docente que prevea algunas dificultades de los alumnos para identificar los ejes de simetría.

El maestro tiene que argumentar por qué considera más fácil o difícil una lección que la otra. Los argumentos pueden ser desde el punto de vista de lo que considera son los contenidos, de las habilidades que se le solicitan al niño, de lo que cree capaz al niño de hacer, etc. En suma, desde sus concepciones sobre el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas, y no desde el punto de vista de la nueva metodología. Sería deseable que el maestro pudiera analizar las producciones de los niños sobre el tema y confrontar sus puntos de vista al respecto con los de otros compañeros; esto permitiría sensibilizarlo sobre el valor de las producciones de los niños y ver en ellas una marca de desarrollo y no una respuesta que tendría que ser sancionada como buena o mala .

2.1.3. *Análisis de las situaciones didácticas*

En el desarrollo de las actividades de este tema se identificaron cuatro situaciones didácticas: 1. Problemas de percepción geométrica, 2. Clasificación de figuras, 3. Análisis de propiedades geométricas de figuras y 4. Problemas para la reconceptualización de relaciones geométricas (simetría y paralelismo).

1. Problemas de percepción geométrica:

En estos problemas se pide al docente identificar el eje de simetría de la composición obtenida al trazar líneas con un hilo mojado en tinta en medio de una hoja de papel doblado, con el fin de que la marca del hilo quede en ambos dobleces de la hoja (Ver ilustración). Además el maestro tiene que identificar figuras geométricas en la configuración resultante.

Primeramente, se pide al docente marcar “**el**” eje de simetría de la configuración y cada línea con su simétrica, dándose por hecho de que existe únicamente un eje de simetría. Pero en un segundo momento se problematiza la unicidad de dicho eje cuando se pregunta por el número de ejes de simetría de la composición, como si existiera la posibilidad de encontrar otros ejes.

Si el maestro elabora alguna hipótesis sobre la existencia de otros ejes de simetría, la propuesta le sugiere comprobar dicha hipótesis doblando la hoja a lo largo del eje o ejes y viendo a trasluz, es decir, tiene que recurrir a la verificación mediante la percepción, sin que medie una argumentación en la que se involucren los elementos geométricos y métricos de la simetría.

Todos los problemas de esta sección se caracterizan por requerir del docente una fuerte componente de percepción geométrica, y un mínimo de conceptualización de la relación estudiada.

En un segundo momento se pide al maestro que encuentre figuras geométricas en la configuración y que las registre. Lo interesante de la actividad es pedir al maestro que indique el **número** de triángulos y cuadriláteros encontrados, y que identifique otros polígonos. Al pedirle un número, el profesor intenta dar una respuesta única, es decir, un número lo más exacto posible al total de las figuras existentes en la configuración. De ahí que tenga que estar verificando permanentemente si las ha visto todas o no, para después contarlas. El maestro puede descubrir otros triángulos y cuadriláteros que en un primer momento no había percibido en la actividad de conteo de figuras resultantes.

2. Clasificación de figuras

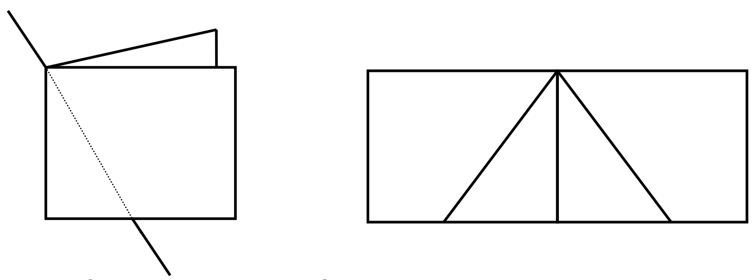
Se proponen los criterios para la clasificación de las figuras percibidas en la configuración, por su número de lados y, para los triángulos, por la abertura de los ángulos (acutángulos, rectángulos y obtusángulos) sin problematizar dichos criterios. La propuesta supone que los maestros en su escolaridad han tenido contacto con la identificación de las características geométricas de las figuras y con la realización de ciertas operaciones lógicas -como la clasificación-.

Es muy probable que los docentes proporcionen una clasificación en términos del tamaño de los lados de las figuras geométricas, por ejemplo, triángulos equiláteros, isósceles, escalenos.

3. Análisis de figuras geométricas

Las siguientes actividades tienen como objetivo que el maestro analice algunas figuras geométricas desde el punto de vista de su simetría, en particular los triángulos isósceles y algunos paralelogramos -el rectángulo y el romboide-.

La primera, es el trazo de triángulos isósceles, con el hilo mojado en tinta, y considerando el doblez de la hoja como el eje de simetría del triángulo resultante (La ilustración muestra lo que se espera de los maestros, no forma parte del material).



La problematización de la simetría como una propiedad de las figuras geométricas podría haberse desarrollado a partir de la actividad que se solicita al docente. Pero desafortunadamente no hay espacio para esa reflexión.

En la segunda actividad, se solicitan hipótesis sobre la posición de ejes de simetría en el rectángulo y en el romboide, y que se comprueben mediante el espejo. De nuevo la verificación impide el análisis de la relación.

4. Actividades que posibilitan la reconceptualización de relaciones geométricas

La propuesta pretende que los maestros reconceptualicen mediante las actividades de este tema dos relaciones geométricas: la simetría y el paralelismo. A continuación se especifica en qué consisten dichas actividades y el porqué se considera que no logran su objetivo.

Con respecto a la simetría, se pretende que el docente reconceptualice la simetría axial como una propiedad de algunas figuras geométricas -relación interfigural, es decir, una relación entre elementos geométricos de una figura- y la simetría entre figuras con respecto a un eje de simetría -relación intrafigural, o sea relación de elementos entre dos o más figuras distintas.

Desde la geometría, dos objetos son simétricos con respecto a una recta cuando se establece una correspondencia entre sus puntos, de tal suerte que los puntos correspondientes equidisten de la recta dada, donde la distancia de un punto a una recta es la longitud del segmento perpendicular que une al punto con dicha recta.

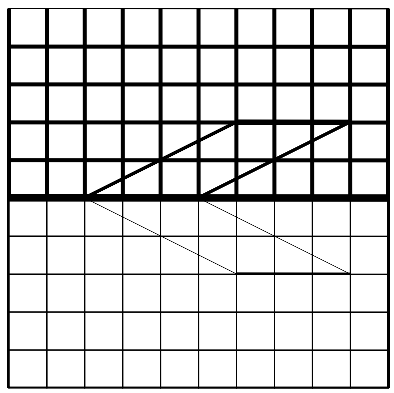
Para ello se proponen únicamente actividades de trazo, en particular la construcción y reproducción de composiciones simétricas utilizando distintos soportes e instrumentos de trazo: hilo mojado en tinta entre una hoja de papel doblado, el doblado de papel, el geoplano y la hoja cuadriculada.

También se proponen algunos medios para la verificación de la simetría de las composiciones obtenidas, basados únicamente en la percepción: la utilización del espejo y la percepción de la configuración a trasluz (en el caso de que sea posible doblar la hoja de papel por el eje de simetría de la construcción).

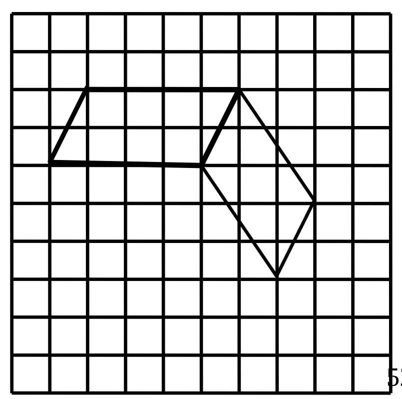
De los tres soportes, el menos interesante es el del hilo mojado en tinta, porque con este medio no hay manera de controlar la perpendicularidad ni la equidistancia. En el caso del geoplano y la hoja cuadriculada, la latiz rectangular da la posibilidad de trabajar sobre la perpendicularidad, siempre y cuando el eje o ejes de simetría se encuentren sobre la latiz; y la equidistancia se podría controlar mediante la medición del punto de referencia al eje, por conteo de unidades. Sin embargo, como la consigna lleva al docente a identificar la figura simétrica sobre el geoplano mediante el espejo, las relaciones se establecen desde la percepción geométrica, sin que haya nada que lleve al maestro a reflexionar sobre las características métricas de la relación.

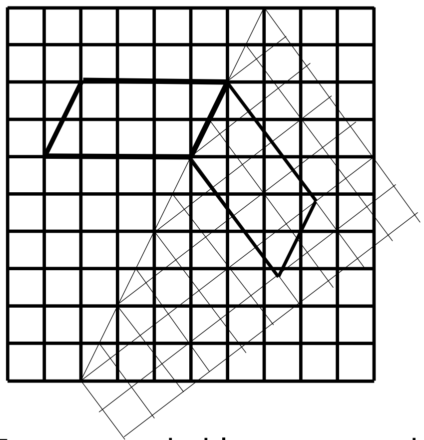
Este punto hace crisis cuando se pide al maestro trazar sobre papel cuadriculado un romboide y lo que se ve en la imagen especular, cuando el espejo está sobre un lado del romboide o sobre una de sus diagonales, y además posteriormente, se solicita al docente el trazo del eje de simetría de las configuraciones resultantes.

El planteamiento de este problema tiene dos variantes: si un lado o alguna de las diagonales del romboide coincide, simultáneamente, con la cuadrícula del geoplano y la línea del espejo, la configuración puede reproducirse en papel cuadriculado, y es posible encontrar el eje de simetría en la configuración. En el siguiente ejemplo, las líneas suaves indican la imagen especular.



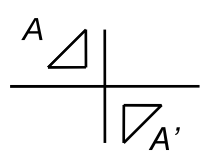
Si el lado o las diagonales del romboide no coinciden con la cuadrícula del geoplano, es decir, si el espejo está colocado en alguna diagonal de la cuadrícula, entonces la configuración observada en la imagen especular no puede reproducirse “detrás” del espejo, porque la latiz de la imagen especular no coincide con la latiz real, y por lo tanto, las figuras resultantes en caso de querer realizar el trazo sobre la cuadrícula original, no son simétricas. En la segunda ilustración, se presenta una posible aproximación del trazo sobre la cuadrícula del geoplano, que los maestros realizarían con ayuda de la imagen en el espejo.





Es poco probable que a partir de este problema el docente conceptualice las características de la simetría. Pero aún en el caso de que logre la construcción factible, verá como poco ventajoso trabajar con el geoplano, el espejo y el papel cuadriculado.

El trabajo con el espejo es interesante porque la imagen especular conserva la perpendicularidad y la equidistancia; sin embargo, cuando se trata de trazar una figura simétrica a otra en el geoplano, dados dos ejes de simetría perpendiculares, se corre el riesgo de que, por limitaciones del espejo, el maestro divida el problema en dos partes: primero fijar la atención en la relación de la figura con un eje para trazar una figura simétrica, y posteriormente, resolver el problema con el otro eje, abstrayendo el resultado parcial anterior. Por lo anterior es difícil que el docente se percate de la rotación de las dos figuras y de la existencia del punto de homotecia. Por ejemplo en el siguiente caso:



Es poco probable que el maestro conceptualice la simetría como una propiedad métrica de las figuras geométricas y entre figuras geométricas, dadas las condiciones establecidas por las actividades. Podría considerarse que el geoplano es un material pertinente, pero la introducción del espejo como medio de identificación, si bien ayuda para el trazo y verificación de la simetría de figuras, crea condiciones adversas para la conceptualización, por la fijación que crea en la percepción.

Por otro lado, podría haberse explotado de manera más conveniente el doblado de papel para la creación de configuraciones simétricas, evitando que sea utilizado solamente como medio de verificación de la simetría.

Ahora bien, el trabajo tendiente a la reconceptualización del paralelismo no es menos conflictivo. Se pide al maestro que marque con el hilo en una hoja doblada tres rectas, de manera que al desdoblar, las rectas simétricas mantengan la "misma posición con respecto al eje". Esta consigna carece de sentido, porque en ningún momento en el texto de la propuesta se precisa lo que se entiende por "posición". Tampoco hay ilustraciones que den información al respecto (ver recuadro). Cabe señalar que en el terreno de la geometría euclidiana el término "posición" no está definido. Pero además, no existe relación entre lo que se entendería por conservación de la "posición" de una recta con respecto a otra desde el sentido común -que no se muevan-, y el paralelismo entre ellas.

> 4. En otra hoja doblada, marquen con el hilo tres rectas de manera que, al desdoblar la hoja, las rectas simétricas mantengan la misma posición respecto al eje. Conteste las siguientes preguntas:
> a) ¿Qué posición guardan entre sí las rectas marcadas?
>
> b) ¿En qué posición se debe colocar el hilo para lograr formar paralelas?

Ahora bien, en el contexto de la primaria, el paralelismo tradicionalmente se ha visto como la equidistancia entre dos rectas, y este conocimiento no es recuperado en ninguna situación de la propuesta. Además, pretender que el maestro conceptualice el paralelismo a partir de rectas simétricas con respecto a un eje sólo crea confusiones[10]. En conclusión, la propuesta no brinda situaciones

[10] Y es una petición de principio puesto que el "eje de simetría", por definición, implica la equidistancia entre puntos correspondientes.

donde el maestro pueda reconceptualizar o validar sus conceptos previos respecto al paralelismo.

2. 2 Tema 2: Triángulos y cuadriláteros

2.2.1 *Coherencia con los principios pedagógicos de la propuesta*

Los autores de la propuesta afirman que el desarrollo del tema permite el análisis de los polígonos, en particular las características geométricas de los triángulos y los cuadriláteros.

Se encontró que, en efecto, las actividades abordan el estudio de los cuadriláteros desde el punto de vista del comportamiento de sus diagonales y del paralelismo de sus lados; posteriormente, se aborda el análisis de los triángulos, en particular la relación métrica entre las dimensiones de los lados conocida como "la desigualdad del triángulo" (la suma de dos lados de un triángulo es siempre mayor que el tercer lado); finalmente, se abordan, aunque de manera menos sistemática, algunas propiedades de otras figuras geométricas.

Las situaciones didácticas pretenden un acercamiento diferente a los elementos geométricos de las figuras, conceptualizando primero las relaciones entre éstos y estableciendo conjeturas sobre la relación de los elementos de la figura y la figura misma. En efecto, la idea básica que subyace a las actividades de la propuesta es evitar partir de la figura misma para obtener conjeturas sobre sus características geométricas; más bien se proporciona lo que serían los elementos geométricos de las figuras y la manera como se relacionan, y en un segundo momento se propone construirlas y caracterizarlas.

Por ejemplo, en la actividad 4 el maestro analizará las propiedades del triángulo a través de su trazo, dadas tres longitudes. En este caso confrontar las concepciones de los maestros sobre los triángulos escalenos, con construcciones imposibles dadas tres longitudes de segmentos cualesquiera, les obliga a elaborar conjeturas sobre características de los triángulos en función de las dimensiones de sus lados.

Esta última parte de la propuesta lleva a pensar que ciertas actividades de los materiales están diseñadas teniendo en mente algunas prácticas docentes frecuentes en las clases de matemáticas; la actividad recién comentada pretende llevar al maestro a que reflexione que no con todas las longitudes para lados de triángulos que se inventan en el aula, es posible obtener triángulos. La misma actividad pretende llevar al docente a la reflexión de que el triángulo tiene tres alturas, contrariamente a lo que tradicionalmente manejan con los niños.[11]

En cuanto a la integración de los contenidos de geometría con otros contenidos de la propuesta, es posible ver el intento por establecer algunos antecedentes a la unidad de medición. Un ejemplo es la actividad 5, que consiste en pedir al maestro transformar un triángulo en un paralelogramo. Se anuncia que esta actividad se retoma en la unidad de Medición, donde se requiere el cálculo de áreas a partir de maneras conocidas de obtención de áreas.

Ahora bien, al igual que en el tema anterior, en este tema se proponen ejercicios lúdicos paralelos a las actividades. El primero de ellos propone la “transformación” de un cuadrado en 5 cuadrados, donde la restricción es la conservación del “área total” del cuadrado.

La solución consistiría en trazar dos segmentos que se corten en el centro de simetría de la figura, de tal suerte que se obtengan cuatro cuadrados pequeños y el cuadrado grande del contorno, lo que haría los cinco cuadrados pedidos. Sin embargo esta actividad, -que habría sido interesante como problema de

[11] Se ha reportado que los maestros identifican como contenido geométrico la obtención de áreas de triángulos, proporcionando como dato la longitud de uno de los lados y la de la altura correspondiente, valores que son sustituidos posteriormente en una fórmula (AVALOS y MÉNDEZ 1995).

percepción-, se vuelve no sólo confusa sino matemáticamente errónea al pedir que “el área total” de los cinco cuadrados sea la misma que la del cuadrado original.

Salvo estas actividades destinadas al ejercicio de la percepción de figuras, en el desarrollo de este tema no se encontraron juegos, tal y como lo habían anunciado los autores. Algunas de las actividades de la propuesta también aparecen en los libros de texto bajo forma de juegos para los niños; un ejemplo es el punto 4 de la actividad 1, que consiste en armar diversas figuras geométricas con todas las piezas del Tangram y que aparece, como juego, en el libro de texto de 5° año de primaria, donde los ganadores son los niños que logran completar figuras con todas las piezas. Habría que valorar en investigaciones posteriores el peso del carácter lúdico que tendrían las situaciones dirigidas a los niños, y el carácter de esas mismas situaciones, pero ahora dirigidas a adultos, desprovistas del componente juego.

2.2.2 *Coherencia con los principios de actualización de docentes*

En este tema se propone al maestro hacer una lectura de los materiales de apoyo al trabajo docente que apunte a la reflexión sobre la metodología. Por ejemplo, se sugiere la lectura del juego “Rompecabezas” del libro *Juega y aprende matemáticas*. (FUENLABRADA, BLOCK, CARVAJAL Y BALBUENA 1992), el análisis de algunas fichas de los *Fichero de actividades didácticas*, y la lectura de la parte correspondiente a la geometría en los *Libros del Maestro*.

En particular una de las actividades de la propuesta es la identificación de secuencias didácticas (Temas, complejidad, materiales...).Por ejemplo, el docente dará cuenta de los distintos grados de dificultad en los 3 tipos de rompecabezas que se proponen en el libro de texto de 1er. grado (los cuadrados bicolores, las “gallinas” y el Tangram).

Por otro lado, se pide al maestro que diseñe o modifique actividades de los materiales a su alcance.

Finalmente se pretende que el maestro reflexione sobre la utilidad de ciertas lecciones de los libros de texto, pensando en los conocimientos previos que pueden tener los niños y en las habilidades que desarrollan para interpretar instrucciones con dibujos, interpretar instrucciones orales para el trazo, comunicar instrucciones de manera oral, y trazar figuras con regla y compás.

También se le proporciona información en la propuesta misma sobre el objetivo de trabajar con algunos materiales didácticos en la primaria; por ejemplo, en un recuadro se explica que el Tangram propicia el análisis de las figuras, el desarrollo de la imaginación espacial en el niño y su capacidad de percepción geométrica; en otro recuadro se explica la progresión de los contenidos de geometría desde 1° a 6°.

Por otro lado, una de las actividades de la propuesta tendientes a que el maestro comprenda la metodología en lo que se refiere a la enseñanza de la geometría, es la lectura del artículo “La descripción de las figuras geométricas en el aprendizaje de la geometría” de Grecia Gálvez (GÁLVEZ 1994). Se espera que esta lectura lleve al docente a reflexionar sobre el uso de expresiones informales de los niños cuando tienen que describir una figura geométrica. Se pide al maestro que analice si esa manera de describir figuras ayuda o dificulta el proceso de estudio de las mismas por parte de los niños, y se le pide que escriba un breve comentario a la lectura.

Sin embargo, algunos reportes de experiencias de cursos de actualización (FUENLABRADA 1988), muestran que los maestros no tienen el hábito de leer artículos de divulgación de investigaciones sobre la enseñanza o el aprendizaje de las matemáticas, y por lo tanto, es difícil que logren hacer un análisis de la lectura.

2.2.3. *Análisis de las situaciones didácticas*

En las actividades de este tema se identificaron las siguientes situaciones didácticas: 1. Elaboración de criterios de clasificación de figuras, 2. Construcción de figuras a partir de otras, y 3. Trazos de cuadriláteros y triángulos con diferentes recursos.

1. Elaboración de criterios de clasificación de figuras

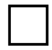
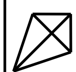
Los cuadriláteros y sus diagonales

Esta secuencia didáctica tiene como antecedente una investigación llevada a cabo por el DIE, documentada en *Los cuadriláteros y sus diagonales* (FUENLABRADA 1986). A lo largo de las actividades, los docentes trabajan con tiras de cartoncillo que simulan diagonales, imaginan los cuadriláteros obtenidos y los determinan en función de las características del comportamiento de las diagonales.

A pesar de que es una secuencia que ha sido experimentada en otros talleres de formación de maestros y que ha mostrado resultados satisfactorios (FUENLABRADA, BLOCK y NEMIROVSKY (coord.) 1989), en esta propuesta se presenta muy cargada de actividades; en total hay siete actividades: una actividad de combinación de tiras de cartoncillo, dos de clasificación de cuadriláteros, dos de trazo de cuadriláteros (sobre papel, con ayuda de las tiras, y en el geoplano, donde dos ligas simulan las diagonales) y dos de descripción de cuadriláteros en función de sus diagonales.

Primeramente se pide a los maestros las combinaciones resultantes de la variación del tamaño de las diagonales, del punto de su intersección y del ángulo que forman, de tal suerte que obtengan 12 combinaciones. Se les dan las tres primeras relaciones de elementos de las diagonales, con el fin de que descubran una regularidad en las combinaciones.

La primera actividad de clasificación consiste en clasificar cuadriláteros usando una tabla, que tiene 4 entradas que corresponden a : tamaño de las diagonales, perpendicularidad de las diagonales, puntos donde se cruzan y paralelismo de los lados del cuadrilátero.

		Diagonales perpendiculares			**Diagonales no perpendiculares**		
Diagonales del mismo tamaño	Dos puntos medios	 hay cuadrado		No			No hay
	Un punto medio	No hay					
	Ningún punto medio	No hay					
Diagonales de diferente tamaño	Dos puntos medios						
	Un punto medio						
	Ningún punto medio						
		Dos pares de lados parale- paralelos	Un par de lados paralelos	Ningún lismo	Dos pares de lados paralelos	Un par de lados paralelos	Ningún parale- lismo

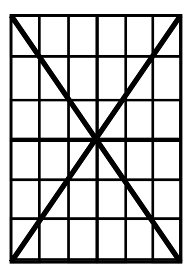
Las dos últimas entradas -puntos donde se cruzan y paralelismo de los lados- son subclases de las dos primeras, de tal suerte que el maestro tiene que identificar primero la clase -por ejemplo, diagonales del mismo tamaño-, y luego la subclase -si se cortan en sus puntos medios, en un punto medio o en ningún punto medio-. De las 36 casillas, sólo 9 se pueden completar con el nombre de alguna figura, el resto se completa con la expresión “No hay”. La clasificación en esta actividad, además de presentar las dificultades lógicas de la clasificación misma, requiere del docente el control de las entradas del cuadro, en particular pasar de un clase a una subclase y viceversa, y cuidar las intersecciones entre clases y subclases. Aunque la consigna indica que se anote el nombre de la figura, la muestra indica que hay que trazar también la figura.

En un momento posterior, tiene que utilizar dicho cuadro como herramienta para resolver el problema de determinar la pertenencia o no de una figura en una clase, o determinar diferencias entre figuras de clases distintas, en una actividad de descripción.

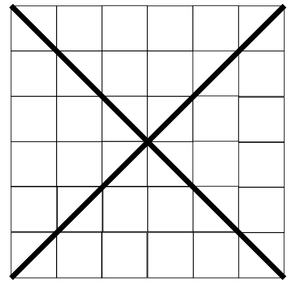
Ahora bien, la propuesta presenta una segunda actividad de descripción de cuadriláteros que consiste en describir a otro compañero las características de un cuadrilátero elegido previamente, desde el punto de vista del comportamiento geométrico de sus diagonales. Esta actividad es innecesaria porque en una actividad anterior se describieron cuadriláteros en función de sus diagonales.

En cuanto a las actividades de trazo, en un primer momento se pide a los maestros que con ayuda de las tiras de cartoncillo, tracen los cuadriláteros que resultan de todas las combinaciones de tamaño, ángulo, y punto de intersección entre ellas. Además, se les pide que describan las características de los cuadriláteros formados, aunque para este fin se destina un espacio de un renglón de 5 centímetros, en el que seguramente sólo escribirán el nombre de la figura.

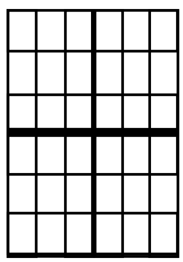
En una segunda actividad de trazo, innecesaria porque es una repetición de la anterior, se pide a los maestros que coloquen en el geoplano dos ligas, aparentemente “diagonales” a la latiz del geoplano, y que construyan cuadriláteros cuyas diagonales serán las ligas. Esta actividad es ambigua por la ilustración que presenta una retícula rectangular en lugar de presentar una cuadrícula, de donde los ángulos formados por las supuestas ligas no son rectos.

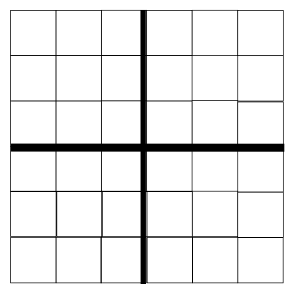


Pero si los maestros colocan las ligas “diagonales” a la cuadrícula del geoplano, los ángulos formados por las ligas van a ser rectos, y sólo podrán construir ciertos cuadriláteros.



Posteriormente en la misma actividad, utilizando para la ilustración la misma retícula rectangular, se pide que construyan con ligas dos segmentos siguiendo la perpendicularidad de la retícula, y que serán a su vez las diagonales de los cuadriláteros ¡Y los maestros vuelven a obtener segmentos perpendiculares, y sólo podrán trazar los cuadriláteros ya trazados!





En general, se considera que en esta secuencia didáctica hay actividades que se repiten, aunque aparentemente son distintas por el tipo de material empleado.

Trazo de triángulos a partir de las medidas de sus lados

Se indica a los maestros que tracen triángulos dadas tres magnitudes, mediante el trazo de dos circunferencias cuyos radios son dos de las magnitudes proporcionadas, teniendo como centros los extremos de un segmento, cuya magnitud es la tercer medida proporcionada.

Los docentes tendrían que identificar que la circunferencia es el lugar geométrico de los puntos que equidistan del centro. Es decir, que el radio tiene magnitud invariante. Por otro lado, se espera que con esta actividad los maestros descubran que las circunferencias, cuando son secantes, tienen dos puntos de contacto simétricos con respecto a la línea de los centros, y que los puntos de contacto determinan el tercer vértice de un triángulo, puesto que los otros dos vértices serán los extremos del segmento.

El confrontar a los docentes con construcciones imposibles les obliga a tomar en cuenta las dimensiones de los lados. En efecto, aunque en la ilustración del material no se haga explícito, es probable que los maestros identifiquen en el otro punto de contacto, el vértice de un triángulo simétrico al encontrado al unir el punto de contacto con los extremos del segmento.

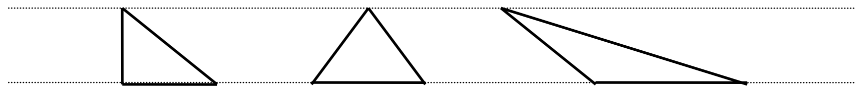
Podría considerarse que uno de los catalizadores en el proceso de análisis de los datos del problema, es el apelar a procesos de anticipación de los docentes sobre la viabilidad de la construcción, y no precisamente a la aritmetización del problema.

Identificación y trazo de alturas de triángulos

Es probable que los docentes manejen alguna idea intuitiva de lo que es la altura de un triángulo, dado que es necesaria para el cálculo de áreas, contenido que ha permanecido en las curricula de la educación básica desde 1944 (Ávila 1988). Sin embargo, el concepto de altura que han venido manejando los docentes es incompleto, porque que consideran que en un triángulo hay sólo una altura (AVALOS Y MÉNDEZ 1995).

A pesar de que el contenido es relevante, esta actividad presenta algunos problemas; en primer término, la confusa definición de altura que proporciona el libro: “En un triángulo, la ***perpendicular*** de un vértice al lado opuesto (o a la prolongación del lado opuesto) es la ***altura*** con respecto a ese lado” (BLOCK (coord.) 1994, 172); por la manera como está redactada pareciera que es el vértice el que tiene una perpendicular, lo que es erróneo. En segundo término, las actividades no rescatan las características geométricas de una altura, en particular la perpendicularidad con respecto a uno de los lados.

En el primer punto de la actividad se pide al docente que identifique lo que tienen en común tres triángulos, colocados de manera tal que uno de sus lados está en una línea y sus vértices están en una paralela a dicha línea.



El problema para el docente consiste en identificar dos relaciones geométricas: que la distancia entre dos paralelas es constante y que esa distancia entre las dos paralelas es la misma que entre el vértice y el lado opuesto, o la prolongación del lado opuesto. Con estas dos informaciones, se espera que el docente establezca que los tres triángulos tienen la misma altura. Pero no es evidente que una altura es un segmento perpendicular a uno de los lados del triángulo.

En el segundo punto de la actividad se pide que tracen una altura a los triángulos proporcionados, y en la actividad siguiente el docente tendría que deducir que un triángulo tiene 3 alturas. En ningún momento se hace referencia a la perpendicularidad del la altura con respecto a los lados del triángulo. No hay indicaciones de secuencias para obtener la altura, aunque el maestro podría retomar la idea del primer punto, es decir, trazar dos líneas paralelas que pasen, una por la base y la otra por el vértice opuesto, y deslizar la escuadra sobre cualquiera de las dos líneas, tratando de unir el vértice con el segmento opuesto.

2. Construcción de figuras geométricas a partir de otras figuras

Construcción de un paralelogramo a partir de un corte en un triángulo

Se pide al maestro que haga un solo corte en un triángulo rectángulo dado, y que, acomodando las partes obtenidas, obtenga una figura con lados paralelos. No se especifica si el maestro va a obtener un paralelogramo, o si va a obtener una figura con sólo un par de lados paralelos.

El problema consiste en que el docente tiene que analizar el tipo de corte que puede hacer. Si el corte es una altura de un triángulo, que finalmente es lo que se trabaja en esta actividad, tiene la ventaja de que va a obtener dos ángulos rectos, producto de la perpendicularidad de la altura. Esto le puede asegurar el paralelismo de algunos lados, pero la figura resultante no es precisamente un paralelogramo. En el caso de que se quiera un paralelogramo, la solución es utilizar una variante del “Teorema de Tales”: hay que trazar una paralela a cualquiera de los lados del triángulo, que pase por el punto medio, obteniendo triángulos semejantes. Al trazar la paralela se asegura el paralelismo de por lo menos dos lados (ver fig. 1). La semejanza asegura la congruencia de los ángulos (ver figura 2 y 3).

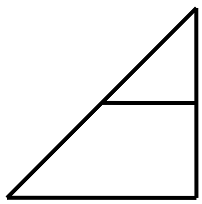


Fig. 1

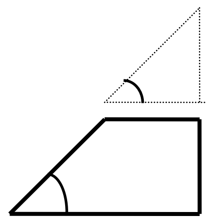


Fig. 2

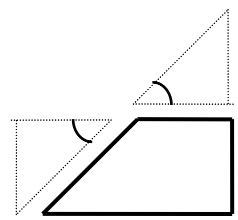


Fig. 3

Es probable que los maestros hagan la actividad por ensayo y error, haciendo cortes hasta obtener el corte correcto, sin hacer ningún razonamiento de tipo geométrico, y sin posibilidad de establecer ninguna conjetura sobre las relaciones involucradas.

Análisis de triángulos construidos a partir del trazo de una de las diagonales de un cuadrilátero

El docente tendría que verificar si los triángulos formados al interior de un cuadrilátero construido en el geoplano, al haberse trazado una diagonal, son simétricos o congruentes. Lo que es problemático en esta parte de la propuesta es la manera como se propone verificar la congruencia de los triángulos, es decir, mediante la percepción; la congruencia en este punto es definida como la igualdad de forma y tamaño de las figuras, olvidando los criterios para la congruencia de triángulos (que tres lados sean congruentes, que dos lados y el ángulo comprendido entre ellos sean congruentes o que dos ángulos y un lado común sean congruentes).

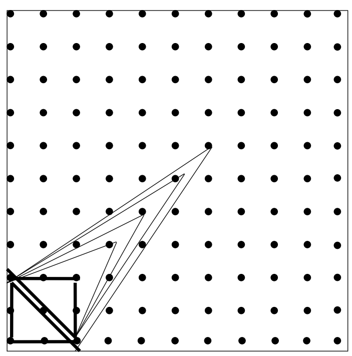
En el caso de que se trace algún paralelogramo, la posición de los triángulos podría hacerle dudar sobre la congruencia, aunque a simple vista podrían parecer triángulos congruentes. Es probable que algún maestro recurra a la medición para verificar la congruencia.

3. Trazos de figuras con diferentes recursos

Trazo de triángulos isósceles sobre el geoplano

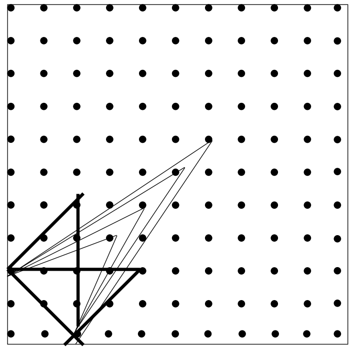
Se pretende que el docente trace sobre el geoplano triángulos isósceles, moviendo el tercer vértice de un triángulo isósceles previamente construido. El problema se complica cuando se piden 10 triángulos isósceles, teniendo fijo el lados AB y móvil el vértice C. Los docentes tienen que tomar la decisión de colocar en un lugar específico su triángulo inicial, y de considerar dentro de los 10 triángulos, a dicho triángulo y al triángulo simétrico.

A



B

La otra decisión que se podría tomar es considerar los 8 triángulos que se formar al prolongar el vértice opuesto al lado AB (ver figura), y mover lateralmente el vértice, de tal suerte que se obtenga un segmento congruente con el segmento AB, obteniéndose un triángulo isósceles, y hacer lo mismo del lado opuesto, obteniéndose otro triángulo isósceles congruente con el anterior.



Una hipótesis que al respecto podría plantearse es que la búsqueda por ensayo error dura poco, pues el docente puede encontrar una regularidad en el trazo de los triángulos: el vértice siempre está sobre una línea de clavos.

Construcción de figuras en el geoplano

El objetivo es que el docente construya algunas figuras geométricas (cuadrado, rectángulo, romboide, rombo, trapecio y triángulo equilátero).

Todas las figuras propuestas son factibles de ser construidas en el geoplano, salvo el triángulo equilátero. Se espera que por sí mismo el maestro se percate de que es imposible construir en el geoplano triángulos equiláteros y pruebe la congruencia de los lados del triángulo mediante la relación entre la cuadrícula del geoplano y los segmentos que ha construido.

2.3 Tema 3: paralelas, perpendiculares y trazos interesantes

2.3.1 *Coherencia con los principios pedagógicos de la propuesta*

Desde la propuesta se afirma que los trazos con regla y compás permiten al maestro el análisis de algunas propiedades de las figuras geométricas. Sin embargo, tal como está presentado, este tema sólo requiere de los maestros habilidades de percepción geométrica para identificar rectas paralelas en cierta configuración, de anticipación de resultados cuando se disponen a realizar algún trazo, de interpretación de instrucciones con dibujos y por escrito, y habilidades en el manejo de instrumentos de trazo.

Los autores explicitan que los maestros conceptualizarían las relaciones geométricas a través del trazo, e incluso a través de la reproducción de figuras: “...las actividades sobre trazos con regla y compás constituyen otra interesante manera de analizar algunas propiedades de las figuras geométricas” (BLOCK (coord.) 1994, 180); “...la reproducción de una configuración geométrica con regla y compás conlleva un interesante análisis de sus características geométricas” (*Ibid*., 184), pero no es evidente que a partir de las actividades de construcción con regla y compás se reconceptualicen algunas relaciones; en particular lo que no es claro en la propuesta es cómo y en qué momento se lograría esa conceptualización: antes del trazo -cuando se diseña la estrategia y la secuencia de los trazos-, después del trazo -cuando se reflexiona sobre lo realizado-, o en el momento que se está haciendo el trazo -cuando se tiene que abrir el compás, desplazar escuadras, etc.-, o si depende de otro tipo de variables, como la socialización de resultados obtenidos, o la comunicación entre maestros de secuencias de trazos.

En el contexto escolar el trazo se ha planteado como una actividad de tipo individual, en la que el sujeto tiene que seguir una secuencia dada previamente, sin que se analicen las relaciones geométricas que se ponen en juego y sin que exista la posibilidad de argumentar por qué la construcción es válida. Y la propuesta no es la excepción.

Los maestros tienen que realizar al menos ocho trazos siguiendo secuencias que se presentan de maneras distintas: únicamente con dibujos, con instrucciones numeradas por escrito, o la combinación de ambas. Sólo en una actividad se pide al maestro que diseñe su propia secuencia para trazar con regla y compás una paralela a otra recta, dado un punto A. Sin embargo, la propuesta no propone mecanismos que permitan al docente elaborar un razonamiento que lo lleve a probar que la recta que obtiene con la secuencia diseñada por él mismo, es efectivamente la paralela a la recta buscada.

Al respecto, en una actividad de reproducción de una configuración, el único mecanismo que se ofrece para que el maestro sepa si la secuencia de trazos que diseñó es la correcta, consiste en proporcionar una posible secuencia, con el dibujo que resultaría al final, en el que se incluyen los trazos auxiliares.

Por el tipo de lenguaje utilizado, se da por hecho que los maestros poseen un manejo del código propio del dibujo, tanto a nivel de las instrucciones en lenguaje natural, como a nivel de la representación figural; por ejemplo, la manera como se nombran los objetos geométricos -los puntos con letras apostrofadas (A, A'); las rectas con letras y subíndices (L_1), los segmentos (BC, MN)-, las acciones a realizar - "hacer centro en...", "cortar con un arco un segmento", etc.-.

No hay ninguna actividad donde el docente tenga que comunicar instrucciones o secuencias de trazos de manera oral, escrita, o mediante dibujos que permitan la funcionalización del lenguaje propio del dibujo; tampoco hay actividades que permitan confrontar resultados. De las cuatro actividades que constituyen este tema, sólo en una actividad -que consiste en la construcción de un lugar geométrico- se solicita al docente que intercambie y discuta con otros compañeros sus resultados.

Una de las finalidades de la enseñanza de la geometría es el desarrollo de un razonamiento geométrico, es decir, la posibilidad de elaborar conjeturas sobre ciertas relaciones geométricas y poder argumentar su validez, en función del conjunto de las relaciones geométricas involucradas. Sin embargo, cuando los maestros tienen que interpretar y seguir una secuencia para un trazo, hay poca cabida a la elaboración de conjeturas.

En el caso de la construcción del lugar geométrico pedido, las conjeturas giran en torno al conjunto solución que satisfaría las condiciones planteadas. Los maestros podrían iniciar la solución ubicando puntos aislados, y verificando si cumplen con las condiciones por medio del ensayo error (BLOCK (coord.) 1994, 188). Además en esta actividad es posible que los maestros diseñen argumentos en el proceso de comparación y validación de los resultados.

2.3.2 *Coherencia con los principios de actualización de docentes*

Al final de este tema hay una actividad que está dedicada íntegramente al análisis de algunas lecciones y fichas referentes al trazo, desde el punto de vista del grado de complejidad, de la factibilidad en su realización y de la adecuación al grado al que van dirigidas, pero se hace poca referencia a la metodología. A lo más, se solicita al maestro que diseñe variantes de alguna lección o ficha.

A partir de los materiales de apoyo al trabajo docente, en particular el Libro del maestro de 4° grado, el maestro tendría que reflexionar sobre la importancia del trazo y reproducción de figuras en la primaria. Sin embargo, nada en la propuesta apunta a modificar la concepción que los docentes tienen sobre el trazo: en general consideran que es un contenido que tiene que enseñarse “per se”, como si se tratase de contenidos de dibujo, sin considerar que el trazo es un recurso más en la solución de problemas geométricos, que permitirían efectivamente desarrollar en los niños un razonamiento geométrico.

Más aún, en la propuesta hay demasiadas actividades de trazo con respecto a la proporción en el curriculum de la primaria, lo que favorecería la tendencia a pensarlo como un contenido. Además, no existe la posibilidad, desde los materiales, de que el maestro diseñe sus propias secuencias de trazo, pues la propuesta proporciona sistemáticamente una secuencia para cada trazo, salvo en el caso del trazo de una paralela a una recta dada por un punto extrerior a ella.

Por otro lado, se rescatan poco actividades de trazo con otros instrumentos propuestos en los libros de texto (el método del jardinero, el doblado de papel...).

Sólo hay una pregunta que hace referencia a los instrumentos de dibujo que emplearía el maestro para resolver la lección “Dibujos y perpendiculares” del Libro de texto de 4°, y que lo llevaría a pensar sobre las estrategias y los instrumentos a los que recurriría él y los que utilizarían los niños. Sin embargo no se hace ningún análisis de producciones infantiles.

Un elemento importante en el análisis de la metodología es la reflexión que aparece en un recuadro al final de la actividad 3 “Un problema ecológico” y que hace referencia a la importancia del ensayo y error en la solución del problema de construir un lugar geométrico como una heurística en la solución de un problema. Por otro lado, esta actividad también es importante porque presenta al docente un problema geométrico de tipo “enunciado”. Una concepción difundida entre los docentes es que los contenidos geométricos son esencialmente escolares, y que tienen poca aplicación en la vida cotidiana. Con este problema se da la oportunidad al maestro de pensar el problema geométrico en otros términos.

En la sección correspondiente al análisis de los materiales de trabajo, se propone un recuadro que subraya la importancia de la clasificación de figuras, su reproducción, su construcción y su descripción oral y escrita como actividades básicas en toda la primaria. Sin embargo, queda poco claro por qué la reproducción y la construcción de figuras es importante en la primaria.

2.3.3. *Análisis de las situaciones didácticas*

A continuación se analizarán las situaciones didácticas y las situaciones problemáticas que constituyen este tema, para indagar en qué consiste el reto intelectual desde los principios de la propuesta y qué habilidades se espera que el maestro desarrolle. Las situaciones didácticas que se identifican son las siguientes: 1. Problemas de percepción geométrica, 2. Trazos con regla y compás, y 3. Construcción de lugares geométricos.

1. Percepción geométrica

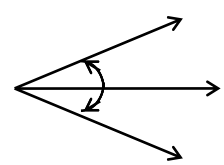
Identificación de ángulos congruentes y rectas paralelas

En esta actividad los maestros tienen que identificar ángulos congruentes y rectas paralelas en una configuración donde hay supuestamente dos grupos de líneas paralelas, intersecadas por una transversal.

Este problema lleva al maestro a un centramiento en la percepción de lo que podría ser la congruencia entre ángulos y el paralelismo de algunas rectas, y no en el análisis de las relaciones geométricas involucradas en la configuración. En efecto, de no ser “a ojo”, desplazando las escuadras, o midiendo con la regla y el transportador, el maestro no tiene forma de controlar simultáneamente el paralelismo y la congruencia de los ángulos, porque la propuesta no le da los elementos suficientes: si el texto le diera las parejas de ángulos que son congruentes, el maestro tendría la posibilidad de saber qué rectas son paralelas; o bien, si el texto le indica qué rectas son paralelas, sería posible saber qué ángulos entre ellas y la transversal son congruentes.

Una segunda confusión se introduce cuando se pide al maestro que, a partir de lo percibido, complete la proposición : “Si dos ángulos comparten un lado, y además son iguales, los otros dos lados de los ángulos son ___________”, que parecería ser la proposición recíproca de la que establece que si dos rectas paralelas son atravesadas por una transversal, los ángulos correspondientes son congruentes.

Una interpretación es la siguiente:



los dos ángulos son congruentes y comparten un lado, y sin embargo los otros dos lados de los ángulos no guardan ninguna relación geométrica entre ellos.

2. Trazos con regla y compás

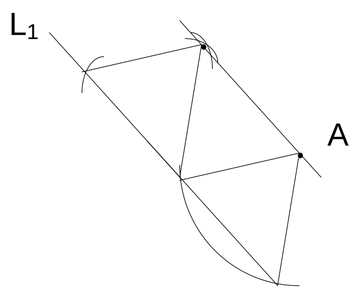
Trazo de ángulos congruentes

En esta actividad se propone que el docente trace un ángulo igual a otro ángulo dado. El problema consiste en la decodificación de las ilustraciones que indican los pasos a seguir en el trazo y en la interpretación de las indicaciones verbales que parecen corresponder a las ilustraciones.

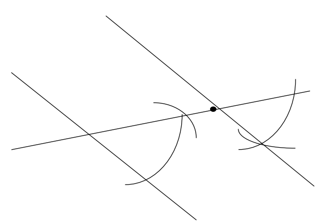
Trazo de una recta paralela a otra que pase por un punto dado

Se indica trazar una paralela a una recta que pase por un punto dado utilizando regla y compás. Este trazo es el único que no tiene una secuencia dada. A pesar de que es el segundo trazo que realizan desde el inicio del tema, los conocimientos que poseen hacen que sea un problema con un grado de dificultad deseable, que puede ser abordado con un razonamiento geométrico.

Los maestros tienen algunos conocimientos que les permitirían hacer la construcción: uno de ellos es trazar dos triángulos con la misma altura y unir sus vértices, aspecto que vieron en el punto 1 de la actividad 5. Para ello, podrían trazar dos triángulos equiláteros o isósceles, de altura equivalente a la distancia del punto A a la recta L_1.



Otra manera de trazar paralelas es utilizando la construcción que acaban de utilizar para la reproducción de dos ángulos:



El docente tiene que recurrir a la anticipación de resultados para prever la secuencia de los trazos que tiene que realizar para obtener la paralela.

Trazo de una recta perpendicular a otra que pase por un punto dado sobre la recta. Trazo de las mediatrices de un triángulo, localización del circuncentro y trazo de la circunferencia circunscrita. Trazo de las bisectrices de un triángulo, del incentro, y de la circunferencia inscrita

La característica de todas estas actividades de trazos consiste en proponer secuencias de instrucciones. No hay nada que lleve al maestro a reflexionar sobre la necesidad de dichas secuencias, o si es posible lograr el mismo trazo a través de otras. En algunos casos, se da la definición de lo que se está obteniendo, generalmente en un recuadro al final de la secuencia de instrucciones, como en el caso de la mediatriz de un segmento o de la bisectriz de un ángulo, sin que exista desde la propuesta la posibilidad de establecer alguna conexión entre la definición y el trazo .

Reproducción de una configuración con regla y compás

El problema consiste en que el maestro diseñe una secuencia para reproducir la configuración dada. Para ello tiene que buscar en la configuración misma los elementos que le permitan economía en el trazo, y por consiguiente obtener la secuencia más sencilla.

Este ejercicio es interesante dada la cantidad de figuras que hay que trazar, y la restricción de respetar la congruencia. Sin embargo, no hay en la definición de congruencia propuesta por el texto[12] elementos y relaciones geométricas que permitan a los maestros argumentar sobre la congruencia de la configuración obtenida, con respecto a la configuración propuesta en el material. Peor aún, la propuesta propone la superposición de las figuras y verlas a trasluz como medio para la verificación de la congruencia, sin que medie ningún razonamiento geométrico.

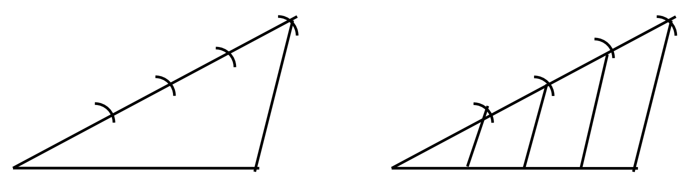
Hay que señalar que en la hoja siguiente hay una secuencia para el trazo, e incluso el dibujo que tendrían que ver los docentes al terminar de haber realizado los trazos, incluyendo los trazos auxiliares.

[12] "...que quede del mismo tamaño y de la misma forma" (BLOCK (coord.) 1994, 184).

Posiblemente los docentes van a recurrir a su percepción geométrica para analizar la configuración, por ejemplo, pueden percatarse de que los dos triángulos comparten la misma línea recta, que son rectángulos, que la hipotenusa de uno es el diámetro de la circunferencia, etc.

División de un segmento dado en un número *n* de partes

Se propone la división de un segmento en un cierto número de partes. El problema sigue siendo la interpretación de instrucciones. El docente tiene que percatarse de que hay que unir el último corte del arco, con el extremo del segmento que se quiere dividir, y que después sólo hay que trazar paralelas, pero en la ilustración no es evidente.



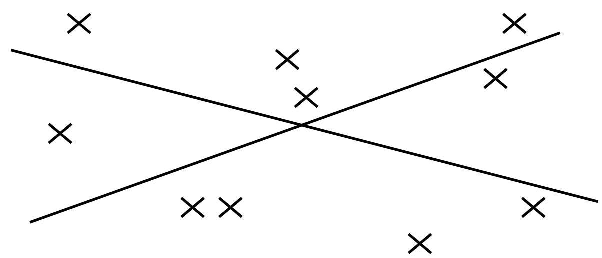
En este caso se da la secuencia mediante las ilustraciones del trazo. Se utiliza el "Teorema de Tales" para esta construcción, pero la propuesta no lo hace explícito.

3. Construcción de lugares geométricos

Construcción del lugar geométrico de los puntos que equidisten a lo más de un centímetro de dos rectas transversales y por lo menos a dos centímetros de 10 puntos posicionados dados

El problema dice textualmente:

Se desea instalar una fábrica de tal manera, que no quede a más de un kilómetro de la carretera para evitar gastos excesivos en el traslado de equipo, maquinaria y mercancía. Por otra parte, para proteger a la comunidad de la posible contaminación producida por dicha fábrica, se exige que la construcción se lleve a cabo, por lo menos, a 2 kilómetros de la casa más cercana. Observe el plano de la zona en la que se quiere construir la fábrica. Cada kilómetro está representado por un centímetro, cada casa por una equis y las carreteras por las dos líneas. Marque todos los lugares que cumplen con las dos exigencias y en los cuales es posible construir la fábrica.



BLOCK (coord.) 1994, 187.

El problema consiste en buscar el conjunto de puntos que cumplan con las dos condiciones simultáneamente. También será motivo de reflexión las regiones donde no se cumple una condición, pero sí la otra. Los autores indican en el recuadro al final de la actividad, que es probable que se hagan intentos iniciales con la ubicación de puntos aislados que satisfagan las dos condiciones.

Se espera que los maestros se den cuenta de que el lugar geométrico que satisface la condición es un conjunto de puntos ubicados en la intersección de dos regiones: la que está entre dos rectas paralelas y la que está fuera de las regiones circulares.

La búsqueda del lugar geométrico es un problema interesante porque lleva al maestro al análisis de las propiedades geométricas de ciertas figuras, -como la circunferencia-, y de propiedades métricas de algunas relaciones geométricas -como la equidistancia entre paralelas-.

Otra actividad de construcción de lugares geométricos se propone a los maestros al resolver la lección “El lugar del tesoro” (Libro de texto 4° p. 142). Al igual que en el caso de la construcción del lugar geométrico anterior, este problema consiste en buscar el conjunto de puntos que cumplan simultáneamente con dos condiciones dadas (ver ilustración).

Para la localización del lugar geométrico, los autores del libro sugieren la utilización del compás. A partir de eso, es posible que los maestros hagan una reflexión sobre el significado de la circunferencia como lugar geométrico, y sobre las propiedades geométricas inherentes a los instrumentos de trazo.

2.4 Tema 4: Los poliedros

2.4.1 *Coherencia con los principios pedagógicos de la propuesta*

Al inicio del tema se indica que el objetivo es abordar “las características geométricas de diversos poliedros, mediante actividades como la construcción y la clasificación” (BLOCK (coord) 1994, 191). Para las actividades de construcción, los maestros disponen de plantillas que les permitirán la construcción de poliedros, las que, a diferencia de las plantillas comerciales, están constituidas por un conjunto de polígonos aislados, con pestañas para que se puedan pegar unos a otros y poder formar los cuerpos.

La relación entre el tipo de figuras y el número de caras necesarias para construirlo, es la única característica geométrica de los cuerpos que los maestros descubrirían mediante la construcción; esto se logra supuestamente con la conjunción de 3 actividades: la construcción de dos poliedros con triángulos equiláteros; la respuesta a las preguntas “a) ¿Cuántos triángulos utilizó para construir cada uno de los poliedros?” y “b) ¿Cuál es el menor número de triángulos que necesita para construir un poliedro regular, es decir un poliedro con todas sus caras iguales?” (*Ibid.*, 192); y el llenado de un cuadro de doble entrada en el que se pide el número de caras, de aristas y de vértices de los poliedros construidos Sin embargo, no es evidente que el maestro logre establecer relación alguna solamente realizando las actividades planteadas. No hay nada que lleve al maestro a elaborar alguna hipótesis sobre por qué es posible construir con triángulos equiláteros un poliedro de 8 caras, y no un poliedro por ejemplo de 10 caras.

Ahora bien, para las actividades de clasificación, se propone que los maestros trabajen con lecciones de los libros de texto de la primaria. Al igual que muchas de las actividades para este tema, se espera que los docentes clasifiquen cuerpos geométricos a través de actividades dirigidas a los niños, es decir, mediante la lectura o realización de las actividades del fichero y la resolución de algunas lecciones de los libros de texto. Posteriormente, los maestros verifican sus resultados mediante el cotejo con la información proporcionada por la propuesta misma.

La mayor parte de las actividades sugeridas para este tema no entran en un enfoque de organización de los conocimientos a partir de una situación problemática. Los maestros llevan a cabo una serie de actividades de construcción para validar una afirmación dada previamente en el texto. Actúan con un objeto concreto, pero no es evidente que con esa acción logren reorganizar una idea matemática sobre las características geométricas de los cuerpos y mucho menos el planteamiento de conjeturas.

Solamente con un juego que consiste en adivinar a través de preguntas el tipo de poliedro escondido, los maestros están interactuando con una serie de constructos geométricos sobre los cuerpos. Además, durante el juego de adivinar y construir el poliedro, se recupera parte del proceso argumentativo del docente, tanto en las preguntas que pretendan describir al objeto, -momento en que se rescatan las concepciones sobre los cuerpos geométricos y las categorías elaboradas-, como en la confrontación posterior.

2.4.2 *Coherencia con los principios de actualización de docentes*

El estudio de los cuerpos geométricos es un tema que aparece nuevamente en el curriculum de la educación básica, y que es incluido en esta propuesta.

El primer análisis que se pide al maestro sobre los materiales de trabajo es la identificación del nivel de dificultad entre varias lecciones que abordan el mismo tema o que lo abordan de una manera similar. Una referencia es la actividad que ellos mismos han realizado en el marco de esta propuesta. El segundo análisis que se solicita al maestro, es la identificación del tipo de aproximación a las características de los poliedros que realizarían los niños, a partir de las actividades de las lecciones de los libros de texto.

No hay en la propuesta ninguna discusión sobre el código de la representación de cuerpos en el plano (la representación mediante alguna perspectiva, poner punteadas las aristas no visibles, sombrear la figura, etc.) y la manera como tendría que aprenderlo el niño.

Con la lectura de lo relativo a “Sólidos geométricos” en el *Libro del Maestro* de 4° grado, el maestro tendría que hacer una reflexión sobre su rol en la enseñanza de los cuerpos y sus propiedades; en primer término, se le indica que es deseable que utilice desde un principio la terminología adecuada que describa al cuerpo, o alguna característica geométrica, por ejemplo, que utilice “vértice” en lugar de “pico”. Además se le indica la conveniencia de que los niños analicen los errores que lleguen a cometer en el momento de la elaboración de las preguntas que les servirán para identificar cuál es el cuerpo que tienen que construir, pues es en el análisis de los errores, donde los niños reorganizan sus conocimientos. Finalmente, se le propone que aliente a los alumnos a la elaboración de anticipaciones respecto al cuerpo que puede ser armado.

Sin embargo, la propuesta no proporciona elementos que ayuden al maestro a sistematizar sus reflexiones.

Un elemento interesante que los autores proponen para el análisis de la metodología propuesta en los materiales de la SEP, es el acercamiento a reportes de resultados de investigaciones que se han llevado a cabo en México y en todo el mundo. La lectura del artículo “El modelo de razonamiento de Van Hiele como marco para el aprendizaje comprensivo de la geometría. Un ejemplo: los giros.” de Ángel Gutiérrez y Adela Jaime (GUTIÉRREZ y JAIME 1991), permite al maestro valorar el nuevo enfoque, y tener una base teórica para entenderlo. Sin embargo, la propuesta no ha resuelto didácticamente la manera en que los maestros podrían abordar estos artículos. En primer término, este documento no tiene relación con el tema “Poliedros”, que es el que se está trabajando. Por otro lado, la propuesta no ofrece los medios para el análisis del documento, o para sistematizar las reflexiones de los maestros. Tampoco los maestros están en posibilidad de verificar el impacto de los resultados de la investigación en la constitución de la metodología, o en diseño de las situaciones didácticas en geometría.

2.4.3. *Análisis de las situaciones didácticas*

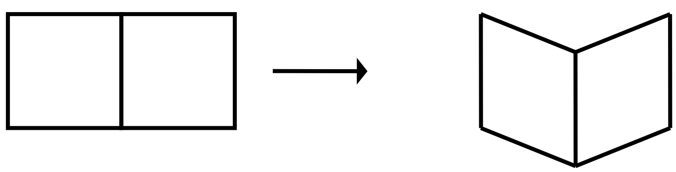
En este tema se identificaron las siguientes situaciones didácticas: 1. Construcción de poliedros, 2. Clasificación de poliedros y 3. Descripción de poliedros.

1. Construcción de poliedros

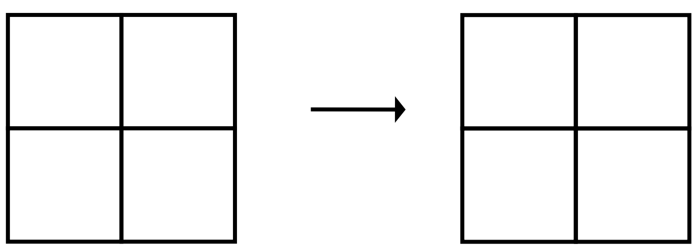
Se propone que se recorten algunos triángulos equiláteros del material recortable, de tal manera de que se construyan dos poliedros diferentes.

El problema consiste en construir dos poliedros regulares sin tener una plantilla única, tratando de acomodar figuras planas, en este caso triángulos equiláteros, para obtener un cuerpo. Desde la geometría las únicas soluciones a este problema, para el caso de poliedros convexos y regulares, son tres de los cuerpos platónicos: el tetraedro, con 4 caras triangulares, el octaedro, con 8 caras triangulares, y el icosaedro, con 20 caras triangulares. Además, se pide al maestro que construya otros poliedros utilizando otro tipo de figuras.

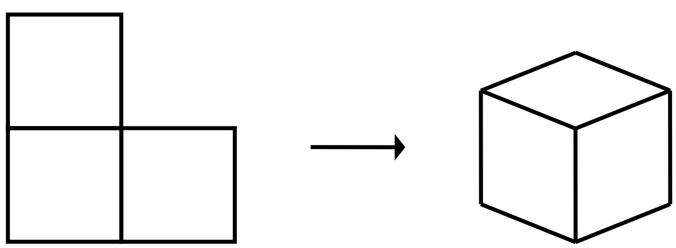
Es probable que el maestro haga algunos poliedros por ensayo y error, tratando de ajustar figuras. Lo interesante de esta actividad, es que el maestro pueda percibir, al juntar caras planas, en qué momento se hace un ángulo diedro con ellas, y en qué momento logra hacer un vértice, es decir, si tiene por ejemplo, dos cuadrados, puede hacer un ángulo diedro, pero no un vértice.



Si tiene 4 cuadrados, no puede formar, ni ángulo diedro ni vértice.



Pero si tiene 3 cuadrados puede formar tres ángulos diedros y un vértice.



Sin embargo en toda esta sección no se presentan situaciones que favorezcan la reflexión sobre las características de las figuras planas que permitan formar vértices al unirse.

En cada una de las cuatro situaciones didácticas de construcción, (poliedros regulares con caras triangulares, prismas, pirámides y poliedros con caras de distintos tipos de polígonos), la actividad se inicia con un recuadro donde se da la definición del cuerpo en cuestión. Después, se pide al maestro que arme plantillas con sus materiales recortables. En realidad ninguna de dichas situaciones se presenta un reto intelectual al maestro; se trata de leer bien la definición dada para tener los elementos necesarios que permitan llevar a cabo la construcción de los cuerpos. Las preguntas que vienen en seguida se refieren al contenido del recuadro más que a despertar conjeturas sobre las características geométricas de los cuerpos que se acaban de construir.

Inmediatamente después de la actividad de construcción de poliedros regulares a partir de triángulos equiláteros, se muestra una ilustración indicando qué es un vértice, qué es una cara y qué es una arista, y se solicita que, después de la construcción de algún poliedro regular, sea llenado un cuadro de doble entrada donde se pide el número de caras, de aristas y de vértices de los poliedros construidos (Ver ilustración).

Todo hace parecer que estas actividades están encaminadas a obtener de alguna manera la fórmula de Euler; en el caso del poliedro regular $\{ p , q \}$ -que significa que sus caras son p-gonales y que hay q de ellas en cada vértice-, sus propiedades numéricas satisfacen la siguiente relación:

$$qV = 2A = pC,$$

donde V es el número de vértices, A es el número de aristas y C es el número de caras (COXETER 1988). Sin embargo, no hay más reflexión al respecto, y es poco probable que el maestro por sí mismo encuentre la relación, si es que esta era la intención de los autores. De no ser esa la intención, puede tratarse sólo de un ejercicio de identificación de vértices, aristas y caras.

Ahora bien, una actividad que puede ser interesante y novedosa para el maestro es la resolución de la lección: "Construimos poliedros" del *Libro de texto* de 4° grado. El problema consiste en discriminar entre varias plantillas las que son posibles de ser armadas. Para resolver este problema, es necesario armar un cuerpo mentalmente a partir de una plantilla que se tiene frente a sí, es decir, verificar si las figuras planas logran formar un vértice al unirse. No sólo es necesario saber cuántas y qué tipo de figuras se necesitan para armar un poliedro: también es necesario saber qué características geométricas deben tener para que puedan unirse unas con otras.

Una de la concepciones de los maestros sobre los cuerpos es que su desarrollo es único, donde las caras guardan siempre una relación fija, sin que haya una justificación geométrica al respecto; por ejemplo, en el desarrollo de una pirámide las caras triangulares van unidas entre sí, y el polígono de la base va unido a cualquiera de ellas.

Es posible que los maestros que tienen problemas para hacer el armado mental de los desarrollos propuestos en la lección del libro de texto, establezcan una correspondencia entre los lados de las figuras no compartidos, -haciendo marcas, poniendo letras, etc.-, buscando aquellos que podrían formar aristas, para en un segundo momento, buscar los vértices.

2. Clasificación de poliedros

El tema de los cuerpos geométricos desapareció del curriculum de las matemáticas de la educación básica desde 1972 (ÁVILA 1988), es decir, hace ya 24 años. No es extraño que los docentes no posean conocimientos al respecto, al menos desde su práctica docente. Desde este argumento se entiende que en el material de la propuesta no se retomen conocimientos o saberes previos de los docentes con respecto a los cuerpos geométricos. Sin embargo, lo que no se justifica es que se pretendan abordar las características de los poliedros y su clasificación mediante actividades propuestas en los libros de texto, ya que los problemas que se plantean en esos materiales consisten en analizar cuerpos geométricos y verificar si ruedan o no, o si tienen vértices y aristas, y en función de esas características, clasificarlos en poliedros y cuerpos redondos. La percepción del comportamiento físico del objeto, que va a estar ligada a la acción que se ejerza sobre el objeto, da la pauta para encontrar algunas características geométricas., y esta puede ser una actividad interesante para los niños.

Pero, desde la problemática de reorganización del conocimiento en los maestros, la propuesta no favorece la argumentación de los resultados encontrados, sólo se da en un recuadro las características de los cuerpos que entran en la clasificación esperada, con el propósito de que el maestro verifique si lo que obtuvo es correcto o no.

3. Descripción de poliedros

Esta actividad se propone como un juego en el que un maestro tiene que preguntar a otro sobre las características geométricas de un poliedro elegido para el caso, para que pueda a su vez armarlo con ayuda de la descripción. Lo central en la actividad es encontrar un poliedro poco conocido; esto crea cierta dificultad para su identificación, pero despierta la necesidad de hacer un recorrido lo más exhaustivo posible sobre las características geométricas de los cuerpos.

Se propone la variante de que sean compartidos dos juegos iguales de poliedros, tanto por el equipo que pregunta, como por el equipo que responde.

Hay varios problemas en la actividad: el primero es tener en mente las características geométricas de los cuerpos, para poder preguntar al compañero si el cuerpo que tiene frente a sí posee esas características; el segundo, es poder expresar oralmente dichas características; el tercero reside en que sea compartido el sistema de significados para describir las características geométricas de un cuerpo, tanto por el que describe, como por el que recibe e interpreta la descripción; y el cuarto, es retomar las respuestas afirmativas, conjuntarlas, y construir el cuerpo.

Lo interesante para la construcción de los conocimientos es en el momento en que se comparan los cuerpos, el original, con el que fue construido: el análisis de las diferencias, los aciertos y errores en los cuestionamientos y en las respuestas permiten reflexiones más finas sobre las características de los cuerpos desde las concepciones de los maestros.

Conclusión

Esta propuesta de formación de profesores en su conjunto tiene la ventaja de capitalizar resultados importantes de investigaciones anteriores sobre formación de docentes. Sin embargo, a partir del análisis de las secuencias de geometría, es notoria la falta de investigación sobre la enseñanza de la Geometría que hay en todo el mundo.

Si partimos del punto de vista de la caracterización de las situaciones didácticas de Brousseau (BROUSSEAU 1993), muchas de las situaciones que se proponen para el desarrollo de los temas, son situaciones de acción y de formulación, pero no siempre hay situaciones de validación. En algunas ocasiones se sugiere la verificación de los resultados mediante la percepción visual, lo que no permite un razonamiento geométrico que de cuenta de la pertinencia de la relación geométrica involucrada.

E incluso, sobre todo en la última parte hay una gran cantidad de actividades que se realizan en base a definiciones previas, como si se tratara de verificar la veracidad de la definición, a la manera de los libros de texto de geometría de enfoques tradicionales.

En cuanto al análisis de las secuencias didácticas, no todos los principios se cumplen de manera homogénea. Hay pocas situaciones que propician la elaboración de conjeturas; no hay mucha claridad entre las secuencias para trazos diseñadas por los maestros, y los procesos argumentativos que tendrían que desarrollarse.

Por otro lado, escapa a la propuesta la línea curricular que corre a lo largo de la primaria sobre ubicación espacial.

En cuanto a los principios de formación de docentes, tampoco se cumplen completamente. Hay una sola aproximación al análisis sobre la producción de los niños.

Capítulo III. Transformaciones de las concepciones sobre la geometría, sus significados y sus representaciones (conocimiento matemático)

Introducción

Al menos desde 1940, en educación básica, los contenidos geométricos han sido en primer término, un conjunto de nombres y clasificación de figuras que deben ser memorizados, trazos de algunas figuras geométricas, la presentación del paralelismo y la perpendicularidad y la identificación de algunas relaciones en y entre figuras, como la simetría axial (ÁVILA 1988, FUENLABRADA 1994, LLUIS 1986).

Pero por otro lado, también se ha considerado a la medición como un contenido geométrico, sobre todo porque aparece en el cálculo de perímetros y áreas de figuras. En efecto, hasta la reforma de 1970, en la educación básica la medición ha abarcado tres aspectos: el estudio de unidades de medida convencional (unidades lineales, unidades de superficie y unidades de volumen, como el sistema métrico decimal), la obtención de perímetros y áreas de figuras y, en algunas ocasiones, la medición con regla graduada de los lados de figuras geométricas (MÉNDEZ y AVALOS 1995).

Actualmente, se propone que los contenidos de geometría abarquen aproximadamente el 30% del curriculum y se desarrollen independientemente de la medición, - y que simultáneamente se encuentren con ésta última y con el desarrollo de la aritmética en el cálculo de perímetros, áreas y volúmenes-. En cuanto a contenidos geométricos, se aborda el análisis de figuras y cuerpos, y la estructuración del espacio.

Los nuevos contenidos curriculares son interpretados por los maestros desde sus concepciones sobre la naturaleza de los objetos geométricos -concepciones que se han conformado por la influencia de los contenidos curriculares anteriores-, desde la información y presentación de los contenidos geométricos en los libros de texto anteriores, desde los procesos de formación inicial y continua de los maestros, desde los saberes sobre los procesos de aprendizaje que han ido elaborando en el contacto cotidiano con los niños y desde sus expectativas sobre lo que tendrían que saber los niños.

El taller de actualización pretende modificar esos saberes hacia otros que subyacen en la propuesta curricular vigente desde 1993.

A lo largo del taller de actualización para maestros se detectaron algunas concepciones sobre el carácter del objeto geométrico. Del análisis que se presenta a continuación es posible adelantar la conclusión de que el objeto geométrico al que se refieren los docentes es concebido en función de sus magnitudes y su posición relativa con respecto al borde del libro o del cuaderno. Sin embargo, dichas concepciones son susceptibles de verse modificadas cuando el maestro se enfrenta a problemas geométricos con sus saberes geométricos previos y sus propias estrategias. El grado de transformación que sufrieron las concepciones está en función de las situaciones didácticas planteadas y de los procesos de validación que se llevaron a cabo durante el taller.

El objetivo de esta sección es identificar algunos procesos por los que atraviesan las concepciones de los docentes sobre contenidos geométricos, sus significados y sus representaciones, que tienen lugar en un proceso de actualización.

Algunas investigaciones realizadas en la última década sobre concepciones de los docentes, entre las que se encuentran las del equipo de matemáticas del DIE (FUENLABRADA, 1988), han detectado por un lado algunas concepciones de los docentes relativas al conocimiento matemático y por otro los escenarios que facilitarían la reconceptualización de contenidos.

Ahora bien, desde los principios didácticos de esta propuesta de actualización, se espera que el docente en proceso de actualización reorganice:

- Conocimientos y saberes previos frente a las problemáticas que se le plantean;
- Habilidades y capacidades previas
- Hipótesis sobre el funcionamiento de los objetos matemáticos.

La recuperación de los significados y su recontextualización sólo es posible si se han movilizado conocimientos previos y si se han actualizado habilidades. Es decir si el maestro recrea su herramienta que evoluciona al resolver problemas, si modifica ideas anteriores al interactuar sobre situaciones problemáticas nuevas, y si con todo ello genera sus propios recursos, entonces estará en posibilidad de disponer de un conocimiento cada vez más general y más estructurado que le servirá en futuras ocasiones.

Estos principios se expresan a través de situaciones que posibilitan una actividad del sujeto, tanto externa como intelectual, con una dirección y sentido sobre el objeto matemático y con otros sujetos de su entorno.

En base a los resultados de esas investigaciones, y a las hipótesis que se elaboraron en el análisis de los materiales de la propuesta[13], se propone el siguiente plan de presentación del análisis de los protocolos y de las producciones de los maestros que asistieron al taller:

1. El objeto aritmético-geométrico y el objeto geométrico
2. El objeto geométrico y su posición
3. Las propiedades y nomenclatura de las figuras geométricas
4. Aritmetización de algunas relaciones geométricas
5. Aparición de las relaciones lógicas
    - 5.1 La conjetura
    - 5.2 El razonamiento argumentativo

1. El objeto aritmético-geométrico y el objeto geométrico.

En este trabajo se llama objeto aritmético-geométrico a la relación geométrica, figura geométrica o cuerpo geométrico que, en el ámbito escolar, se determina en función de sus dimensiones por sobre sus propiedades geométricas. Dichas dimensiones se obtienen mediante un proceso de medición, que consiste en la comparación de algún elemento de la figura o de la relación entre figuras con una medida convencional, que puede estar dada desde un instrumento de medición, -v. gr. centímetros-, o desde la cuadrícula del cuaderno.

La razón por la cual se define el objeto aritmético-geométrico es, entre otras cosas, porque se sabe por ejemplo, que en la escuela el área de las figuras no se

[13] cfr. Capítulo 2.

obtiene a través de la cuantificación de unidades de superficie (convencionales o no), sino que se recurre a la aplicación de alguna fórmula. El profesor proporciona a los niños datos numéricos que corresponden generalmente al valor de ciertos elementos geométricos lineales, como por ejemplo, una base y una altura en el caso de los triángulos, haciendo caso omiso en algunas ocasiones de las unidades de medida que se están utilizando previamente, y después les pide que realicen los cálculos numéricos correspondientes a la fórmula. En este tipo de situaciones, la actividad del alumno consiste en sustituir los valores y realizar las operaciones, utilizando una lógica relacionada con las propiedades de la igualdad y con el orden en la realización de operaciones, dejando de lado el análisis geométrico (ÁVILA 1991, MÉNDEZ 1991a) e incluso el concepto de medida. La figura en este tipo de situaciones sirve únicamente como ilustración, o como modelo explicativo en la solución de los problemas planteados (PARRA 1989).

Además, las figuras y relaciones geométricas en el contexto del aula quedan determinadas por sus **medidas**, y no por su forma o sus características geométricas: la magnitud engloba tamaño y forma. Incluso algunas figuras quedan definidas únicamente en función de la magnitud de sus lados. Por ejemplo, se establece que un polígono es regular solamente si sus lados tienen la misma medida (MÉNDEZ 1991a).

Ahora bien, en el mismo orden de ideas sobre el objeto aritmético-geométrico, se tiene que, desde el conocimiento geométrico, para las figuras no rígidas, el tamaño de los lados no es suficiente para determinarlas, se precisan otras características geométricas; en el caso por ejemplo de los cuadriláteros se recurre a la dimensión y al comportamiento geométrico de sus diagonales, o al comportamiento de sus ángulos interiores. No obstante en el contexto escolar la determinación de figuras se sostiene desde el tamaño de los elementos lineales y desde la percepción, misma que ha estado estrechamente ligada a la enseñanza de las figuras mediante la ostensión de la figura[14], lo que ha obstaculizado que los

[14] cfr. *supra* Capítulo 1, sección 1 , inciso 1.

niños -y también muchos maestros- consideren otras características que la definirían geométricamente.

En el caso de los triángulos, por ser figuras rígidas, quedan determinados por las relaciones métricas entre sus lados. Incluso en función de ello, los triángulos se pueden clasificar en equiláteros, isósceles y escalenos. Sin embargo, determinar de esa manera a los triángulos, lleva a los maestros (esto se analizará posteriormente) a sustituir una relación métrica por una relación entre magnitudes que consiste en querer dar cualquier medida a las longitudes de los lados, sin considerar que éstas están supeditadas a una relación que se conoce como la "desigualdad del triángulo": la suma de dos lados cualesquiera de un triángulo es mayor que el tercer lado.

En el contexto escolar no es relevante que los lados de un triángulo tengan una medida que obedezca a una restricción geométrica, lo importante es tener un valor numérico asociado a ellos, porque lo único que se necesita en la "actividad geométrica" escolar, es sustituir dichos valores en una fórmula y hacer una operación, y para ello no existe restricción geométrica.

Por lo antes expuesto, es necesario ver cómo juega este objeto aritmético-geométrico en el hacer de los maestros cuando se enfrentan a problemas geométricos.

Gracias a los resultados de investigaciones previas (FUENLABRADA 1994), los autores de la propuesta tenían conocimiento de algunas concepciones de los docentes sobre ese objeto aritmético-geométrico, de ahí que, por ejemplo, hayan ofrecido actividades de trazo de triángulos de diversas medidas en la propuesta de actualización. En el punto 1 de la actividad 4 "Algo más sobre los triángulos" del tema 2 "Triángulos y cuadriláteros" (BLOCK (coord.) 1994, 169), se cuestiona la posibilidad de asignar magnitudes cualesquiera a los lados de los triángulos, al proponer la construcción de un triángulo cuyos lados midan 9, 3 y 4 centímetros respectivamente. A continuación se presenta un fragmento del registro que da cuenta cómo se desarrolló la actividad en un equipo de maestros que asistieron al taller:

Ague (Leyendo): ... aquí dice “de 9, de 3 y de 4 centímetros”. ¡Imagínate lo que hice! (Silencio)

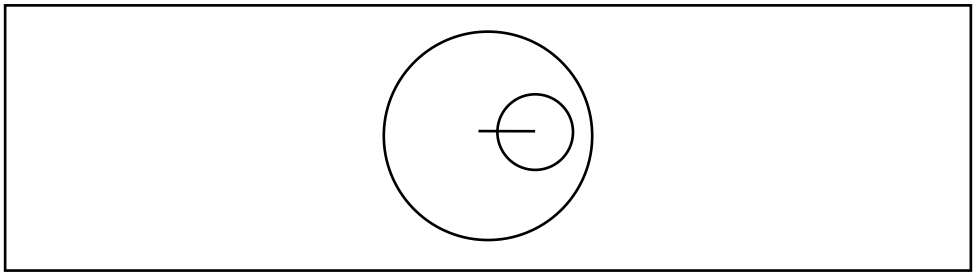


FIG. 11 AGUE INTENTÓ HACER EL TRIÁNGULO DE 3, 9 Y 4 CENTÍMETROS

Ague: Lo hice y al hacer los círculos no se cruzaron
Jesús: Aquí no se dónde se van a cruzar, mejor lo hago completo.
Lety: Tres...
Clis: Aquí está.
Lety: Ay, el último no se puede,
Clis: ... es que tienes que hacerlo de ladito.
Lety: Ay, el último no se puede, no puede ser 9, 3 y 4.
[...]
Ague: Pero por qué no se puede... Por qué las líneas de los círculos no logran cruzarse
Clis: Escaleno, ¿podría medir...ser de 9...?
Jesús: Escaleno de 9 centímetros...
Clis: 9, 3, y 4
Jesús: No se van a cruzar, si pongo la recta de 9 centímetros ...
Ague: Ya lo hice
Clis: Al revés, 3, 4 y 9 tampoco
Jesús: Yo tengo que tener la experiencia directa ...
Clis: A ver, no
Jesús: 3 centímetros, 3 centímetros...
Ague: Ya hice la de 9, ya hice de 3 ¿De 4?
Jesús: No se cruzan
Clis niega con la cabeza
Jesús: No, no se cruzaron.
Lety: ¿En qué es diferente éste y éste?
Jesús: En que voy a empezar por la base... de 3 centímetros, partir de este punto con el círculo... el de 4 ¿Es éste? Yo empecé por la línea de 9 centímetros, después hice un círculo de 4 centímetros y luego con el de 3. (Leyendo) “No siempre es posible trazar un triángulo con medidas dadas, a continuación se analizará cuándo es posible y cuándo no [...]

El equipo pensaba que era posible trazar un triángulo dadas las longitudes de tres segmentos cualesquiera. La figura del registro de observación muestra cómo Ague intentó trazar el triángulo de 4, 9 y 3 centímetros. Primero trazó un segmento de 4 centímetros, abrió su compás 3 centímetros, y apoyándose en uno de los extremos del segmento, trazó la circunferencia de radio 3; después abrió su compás 9 centímetros, y apoyándose en el otro extremo del segmento, trazó la circunferencia de radio 9. Pero las circunferencias no se cruzaron. Esta experiencia obligó al equipo donde estaba Ague a elaborar una serie de hipótesis sobre el porqué no se cruzaban.

Los maestros elaboraron una primera hipótesis que se relacionaba con su experiencia sobre el valor de la ***posición*** de las figuras. Cuando Clis sugiere a su compañera Lety "... es que tienes que hacerlo de ladito" supone que el problema se encuentra en la manera como se realiza el trazo en cuanto a su posición respecto a los bordes de la hoja sobre la que están trabajando, como si el objeto que se está construyendo fuera dependiente de la posición. Lo que se estaba jugando era la habilidad de trazar en relación a la posición y no la posibilidad de obtener el lugar geométrico que se pedía, que es independiente de la posición.

Otra hipótesis se relacionaba con la idea de que la ***forma*** de los triángulos dependía del lado por el que empezarían el trazo, es decir se preguntaban cuál de las rectas proporcionadas iban a considerar como el segmento que uniría los centros de las circunferencias que determinarían el tercer vértice. Suponían que era probable que con alguno de los segmentos proporcionados no fuese posible realizar el trazo, y que por lo tanto, alguno de los tres segmentos dados sí permitiría obtener el triángulo. Es por eso que hicieron el intento de trazar el triángulo iniciando el trazo cada vez con cada uno de los tres segmentos.

El problema para los maestros no consistía en buscar la relación entre los lados, sino en encontrar el segmento adecuado, relacionado con la idea de hallar la "base del triángulo" entre los segmentos dados, que hiciera posible la construcción. De alguna manera aquí también se atraviesa la idea de que la posición de la figura es relevante para determinarla.

Los integrantes del equipo consideraban que un triángulo podía ser trazado con tres medidas distintas cualesquiera; en particular un triángulo escaleno para ellos es aquel que tiene sus tres lados desiguales, lo que en medición equivaldría a decir que precisan de tres magnitudes lineales distintas, condición suficiente para que quede determinado. Cuando no lograron realizar el trazo, se preguntaron si había alguna restricción en su definición de triángulo escaleno, algo referente a las medidas: “Escaleno, ¿podría medir...ser de 9...?”. No es gratuito que se detuviesen a reflexionar momentáneamente en la medida de este lado, que podría considerarse como “demasiado grande” para poder realizar el trazo esperado. Posiblemente si hubieran reparado que “haciendo más corto ese segmento demasiado grande” resultaba la construcción esperada, habrían descubierto otras relaciones; o podrían haberse apropiado de la relación métrica que subyace a los triángulos. Pero el conocimiento previo pesó más, pues reconocieron que había en efecto tres medidas diferentes, situación que concordaba con su definición de triángulo escaleno. Fue entonces que desecharon la hipótesis de alguna restricción referente a las medidas.

Cuando se realizó el análisis del documento de la propuesta, se estableció como hipótesis que, una vez realizado un primer intento de construcción del triángulo, los maestros recurrirían a procesos de anticipación que les permitirían dar cuenta de la imposibilidad de tal construcción. Sin embargo, después del análisis del registro, se observó que los saberes de los maestros sobre los triángulos escalenos (todos aquellos triángulos que tienen lados “desiguales”), forman parte de una red de informaciones y creencias sobre las características de las figuras geométricas. Así mismo se constató que los procesos de anticipación de construcciones geométricas forman parte de otra red constituida por experiencias de secuencias de trazo; pero los nodos de la primera red parecen no estar relacionados con los de la segunda. El peso de los saberes de la primera red se constituye en un obstáculo en su intento por resolver el problema. Comparan una y otra vez las construcciones realizadas tratando de encontrar “el error” en el trazo. No hay en su bagaje la idea de que dos círculos son secantes dada una condición, y tampoco el obstáculo encontrado les permite cuestionar sus conocimientos previos sobre los triángulos escalenos.

Saben que en el material hay cuadros explicativos que, a veces, dan información referente al problema que se está desarrollando[15], y entonces sólo les queda recurrir a la lectura del material para saber la razón del porqué la construcción no es posible.

Sin embargo, no obstante que el conflicto lo resolvieron leyendo la información correspondiente, la concepción sobre la posibilidad de trazar un triángulo con tres medidas cualesquiera sí se vio modificada por el taller de actualización; porque durante el desarrollo de la unidad de Geometría de la propuesta, cuando hacían referencia a un triángulo, y en particular a sus medidas, verificaban primero si las medidas eran viables de acuerdo a la desigualdad del triángulo; posteriormente examinaban si concordaban con otra relación geométrica involucrada.

Por ejemplo, una vez concluida la actividad que consistía en realizar un sólo corte en un triángulo de tal suerte que reacomodando la piezas se obtuviera un paralelogramo (Punto 6, Actividad 5 “Triángulos y alturas”, Tema 2 “Triángulos y cuadriláteros” (BLOCK (coord.) 1994, 173), Jesús evoca la manera como lleva a los niños a deducir la fórmula del área del triángulo; para explicar a sus compañeras el proceso que sigue para obtener la fórmula, Jesús recurrió entonces a un triángulo particular.

[15] El capítulo de Geometría está ubicado en quinta posición con respecto al resto de los capítulos, de ahí que los maestros participantes conozcan bien el funcionamiento del texto en ese momento.

Jesús: Mira, cuando tú le das a los niños a que encuentren el área de este triángulo, les das así unas medidas... ahora sí deja pensar, 8 y acá como 6 y acá como 4 (Risas)

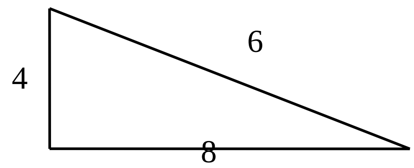


FIG. 36. CONSTRUCCIÓN DE JESÚS

Clis: Ahora sí ya (Risas)
Rodo: ¿A poco este puede medir 6?
Jesús: No, pero más o menos, oye, luego nos metemos a la onda de las hipotenusas (Risas)
Rodo: Ya estuvo que no porque además este ... al revés
Clis: Este debe medir más
Jesús: Debe de medir mucho más... Vamos a ponerle como ...
Ague: Como 8
Clis: Como 9
Jesús: 9 más o menos sale ¿Sale? [...]

Con la expresión "...ahora sí deja pensar", Jesús reconoce que anteriormente daba medidas cualesquiera a los triángulos, y que ahora prefiere analizar primero si lo que va a proponer es viable. Las risas de sus compañeras, aunadas a la expresión "Ahora sí ya", hacen suponer que también ellas habían pensado en lo mismo.

Como la explicación que quería dar Jesús tenía que ver con un triángulo rectángulo, el equipo tuvo que verificar en un segundo momento si las medidas dadas correspondían a esta nueva restricción de tipo geométrico: que el cuadrado de la hipotenusa fuese igual a la suma del cuadrado de los catetos. Las medidas proporcionadas originalmente no concordaron con la restricción, de tal suerte que Jesús tuvo que adecuarlas. La adecuación no fue del todo exitosa, porque la hipotenusa con las medidas de los catetos proporcionados, tenía un valor igual a la raíz cuadrada de 80, y Jesús le da un valor de 9 que sería la raíz de 81; sin embargo está consciente de que lo que ha dado como medida es una aproximación.

Cabe destacar que uno de los elementos que permitió que esa concepción del objeto aritmético-geométrico se modificara en el transcurso del taller fue la explicitación de una parte del contrato didáctico[16] establecido entre la conductora del curso y los maestros. La explicitación iba en el sentido de evitar en lo posible el uso de la regla graduada como instrumento de medición, buscando recursos "más geométricos" que dieran cuenta de la magnitud de un segmento, si es que ésta era necesaria.

> Y: A ver déjenme hacer un paréntesis, he estado viendo en algunos de los... (...) desde ayer apareció la mala maña, y ahora la siguen medio utilizando en algunos momentos, ya traen la mala maña, de recurrir a la medición para resolver el trabajo; la geometría se resuelve sin medición, (...) lo que se espera, y lo vamos a estar trabajando en el taller es justamente ir revisando los recursos geométricos para resolver la geometría; entonces traten de resolver las cosas sin medir.

Durante toda la parte de geometría la conductora y maestros vigilaron que se respetara el contrato; pero el abandono del instrumento de medición se hizo muy gradualmente. En algunas ocasiones consideraron que era mucho más seguro recurrir al instrumento de medición -en este caso la regla graduada-. En efecto, los maestros sentían control sobre la situación, lo que podían obtener como resultado les parecía más "confiable", incluso considerando los posibles errores en la medición.

Contrariamente a lo que se había adelantado en el análisis de los materiales de la propuesta, en el caso de actividades sobre el geoplano, no consideraron en primera instancia apoyarse en la latiz para medir: consideraban que la cuadrícula del geoplano podía estar "mal hecha", que los clavos podían estar mal pegados, introduciendo un error no controlable por ellos.

[16] Se entiende por contrato didáctico "una relación que determina -explícitamente, en una pequeña parte, pero sobre todo implícitamente- lo que cada participante, el enseñante y el enseñado, tiene la responsabilidad de producir y de lo que será de una u otra manera, responsable ante el otro" (BROUSSEAU 1993, 15)

Cuando por ejemplo se analizó el punto 2 de la actividad 6 del tema 2 “Triángulos y cuadriláteros” (BLOCK (coord) 1994, 174), en la que se pregunta a los maestros si es posible obtener en el geoplano un triángulo equilátero, se consideró la hipótesis de que los maestros recurrirían a la latiz del geoplano para verificar si había congruencia entre los lados del triángulo obtenido en la actividad, y de esta manera concluir que era imposible obtener triángulos equiláteros en el geoplano.

A esta conclusión llegaron algunos maestros al término de la actividad, pero utilizando como recurso la medición con regla.

En el fragmento de registro que a continuación se presenta, el equipo desarrollaba una parte del punto 1 de la actividad 6 “Construyendo figuras en el geoplano” del tema 2 “Triángulos y cuadriláteros” (*Ibid.*, 174), que consiste en construir un triángulo equilátero. Jesús y Lety comparan sus resultados y coinciden en que no es posible formar triángulos equiláteros. En seguida preguntan a sus compañeras si lograron construirlo:

Clis: Y el de nosotros sí
Jesús: ¿Cómo le hicieron?
Clis: O sea ninguno de los dos pasa por uno de los lados del cuadrado, tomando en cuenta son ...
Ague: Todos pasan
Jesús: Ah, está un cuadrado ¿Cuánto miden?
Clis: Más o menos 12 y medio

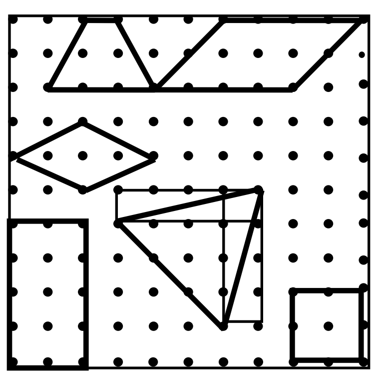


FIGURA 24: CONSTRUCCIONES DE CLIS. LA DISCUSIÓN SE CENTRA EN EL TRIÁNGULO “EQUILÁTERO”.

> Ague: Una pequeña diferencia pero no está tan diferente
> Clis: 12 y medio, ajá y...
> Lety: No 13
> [...]
> Clis: Bueno si empiezo y empiezo a tomar desde la orilla del clavo, de este lado, y de acá ya varió un milímetro. Sí pero mira, entonces vamos a decir que son 13 y nos vamos acá ¿Cuánto tiene? No vamos a contar los cuadros porque no te va a coincidir, y si nos vamos aquí, así, pues cuánto son, dos milímetros. Toma en cuenta que a lo mejor no está bien cuadriculado y dos milímetros está perdiendo ahí [...]

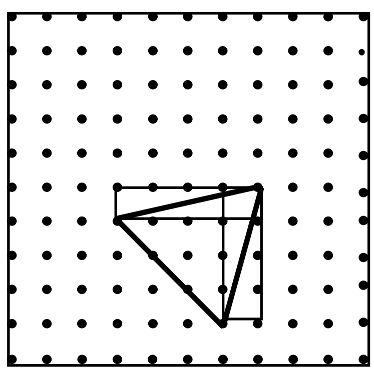
En esta secuencia las maestras que afirman haber obtenido el triángulo equilátero, recurren a la medición de los lados de la figura para verificar que lo que obtuvieron es efectivamente un triángulo equilátero. Sin embargo ellas mismas reconocen que los resultados de la medición no son los mismos, pero atribuyen la diferencia a un error en la medición y a la latiz que podría estar mal construida; no cabe la posibilidad de que fuese imposible construir el triángulo.

Durante toda la parte de geometría los maestros vigilaron más o menos entre ellos que se respetara el contrato, aunque a veces fue difícil. En un primer momento recurrían de manera casi mecánica a la medición; posteriormente trasladaban una longitud con el lápiz o con otro objeto lineal cerca de otra para compararla, tratando de respetar el contrato de no utilizar la regla para asignar un número. Esto efectivamente estaba validado por la parte del contrato didáctico que se había hecho explícita, sin embargo fue necesario hacerlo evolucionar: frente a la insistencia de los maestros por recurrir a la medición con regla y ante la percepción de la conductora respecto a que los maestros no movilizaban otros recursos, ella aprovechó en una construcción de un triángulo equilátero sobre el geoplano que los maestros habían realizado para hacerlos reflexionar sobre otros recursos geométricos que pudiesen asegurar la igualdad o no de las longitudes.

Uno de los procedimientos usados para obtener y comparar longitudes de segmentos sobre el geoplano, sin tener que recurrir a la asignación de un número dado por la regla, era identificar si el segmento o segmentos en cuestión se encontraban en el lado recto de las latices del geoplano, para lo cual sólo era necesario contar los segmentos entre los clavos. Cuando las longitudes no se ubicaban de esa manera, era necesario "mirarlas" como diagonales de cuadrados o rectángulos y comparar posteriormente éstos.

En el siguiente fragmento se muestra cómo, durante un momento de confrontación de resultados, se introduce la idea de que es posible comparar longitudes cuando éstas son diagonales de algún cuadrado o rectángulo formado por la cuadrícula.

Y: ... La parte simétrica, fíjense aquí ¿Cómo me podrían ustedes asegurar que esta línea es la misma que ésta, que esta magnitud es la misma que ésta, que ésta, y que ésta, sin usar la regla, desde luego, sin tomar la regla.
T: Tomando como punto de referencia que el compañero tomaba...
Y: Así lo construyó. Pero ya cuando está así, geométricamente...
T: ...los clavos están a una distancia...
P: Con los cuadros ¿No?
Y: Con los cuadros ¿Qué le ve a los cuadros, maestra?
P: Habría triángulos, cuando partimos rectángulos, habría triángulos.
Y: La maestra está queriendo ver esta línea como la diagonal de un rectángulo formado por cuatro cuadritos, esta línea es la diagonal de un rectángulo formado por cuatro cuadritos, como los cuadritos que hay aquí son de la misma magnitud de los que hay acá, estas diagonales son iguales, esta diagonal viene a ser la diagonal de un rectángulo formado por cuatro cuadritos y esta diagonal de un rectángulo formado por cuatro cuadritos. Entonces todas estas líneas son las diagonales de los mismos rectángulos, entonces miden lo mismo.



En cambio aquí (señala la otra línea del triángulo) ¿Qué pasa? Esta línea ¿Qué es? ¿La diagonal de quién?
Algunos: De un polígono.
A: De un cuadrado de 3 unidades, de lado 3.
Y: De un cuadrado formado con 9 unidades cuadradas, de 3 x 3 [...]

El supuesto geométrico consiste en recurrir a la definición de congruencia: en dos figuras congruentes las partes homólogas también son congruentes. En este caso, en cuadriláteros congruentes las diagonales son congruentes.

La parte del contrato didáctico que se hizo explícita llegó a ejercer tal influencia en los maestros, que en el desarrollo de la unidad de medición, -que trabajan después de la de geometría-, en múltiples ocasiones ya no procedían a utilizar la regla, sino que recurrían a reproducir la configuración en el geoplano y a identificar relaciones geométricas que les dieran cuenta de la longitud de un segmento, sin recurrir a la regla graduada.

2. El objeto geométrico y su posición

En la sección anterior se inició la discusión sobre las concepciones de los maestros sobre la relación entre los objetos geométricos y su posición. La idea de que la posición de la figura con respecto al borde inferior de la hoja del cuaderno o del pizarrón permite determinarla, también es frecuente en el ámbito escolar:

> ... respecto a las figuras geométricas, aparecen en los libros de alguna manera orientadas sobre los bordes de la página del libro. Esto ha ocasionado en los niños una mala conceptualización de lo que es la figura geométrica (...) si uno les recorta por ejemplo un triángulo, uno se los da y les pregunta '¿Cómo se llama esa figura?', sí reconocen que es un triángulo pero dicen 'Es un triángulo, pero si está puesto así', y lo colocan como lo han visto representado en su libro. (FUENLABRADA 1994).

En general, se acostumbra presentar cualquier polígono con al menos uno de sus lados paralelos al borde; tal es el caso del triángulo, frecuentemente isósceles, cuyo lado desigual es paralelo al borde inferior de la hoja. Los niños consideran este segmento como la base del triángulo -para ellos única-. Esa presentación del triángulo posibilita una rápida identificación y trazo de la altura; es la más socorrida cuando se trata de ilustrar un problema de cálculo de área del triángulo por medio de la fórmula: "base por altura entre dos", ejercicio que los maestros consideran como geométrico, y no como un problema de medición o aritmético. (MÉNDEZ 1991a).

Además, los cuadriláteros que tienen al menos un par de lados paralelos, generalmente se trazan con dichos lados también paralelos al borde inferior, con excepción del rombo, que se representa con una de sus diagonales, de preferencia la menor, paralela al borde de la hoja, “apoyado” sobre uno de sus vértices. Esta posición relativa de la diagonal con respecto al borde es lo que determina geométricamente a esa figura en el contexto de la escuela: un rombo sería el cuadrilátero que tiene dos diagonales perpendiculares, una de ellas paralela al borde de la hoja.

Cuando las figuras cambian de posición ya no son reconocidas como las mismas, porque sus características geométricas dependen de esa posición; sufren una especie de transformación no rígida, e incluso tienen que cambiar de nombre. Un triángulo reconocido como isósceles, al rotar y quedar apoyado en alguno de los lados congruentes, puede ser reconocido como escaleno; un rombo al quedar apoyado en uno de sus lados puede ser identificado como romboide; un cuadrado, cuando queda apoyado en uno de sus vértices, con una diagonal paralela al borde, se convierte por ese hecho en rombo.

> En el caso del cuadrado, aparece con uno de los lados paralelo al borde inferior del libro, pero cuando se trata de un rombo parece que se pone paradito sobre uno de sus vértices y muchos niños piensan que el rombo es un cuadrado puesto en una posición distinta... (FUENLABRADA 1994).

En el transcurso del taller se manifestaron algunos comentarios respecto a la relación entre la figura geométrica y su posición; el siguiente comentario tiene lugar cuando los maestros intentan establecer las características geométricas de los cuadriláteros en un momento de confrontación grupal:

> F.: El cuadrado al cambiarlo de posición se le atribuye... un rombo. (Los maestros estuvieron de acuerdo con el comentario de Fernando)
> Y.: Sí eso es cierto, digo, es cierto en cuanto a qué se dice, que sea cierto lo que se dice, eso es otra cosa.

La afirmación de ese maestro no va en el sentido de reconocer una "transformación" de las propiedades geométricas de la figura, es decir, no afirma que al cuadrado le haya pasado algo más que un cambio de posición; según dice "se le atribuye" otro nombre que está asociado a la posición ¡el problema es que un rombo no es un cuadrado "apoyado" en un vértice!

Según Bishop (1986) la problemática reside en considerar equivalentes la forma de la representación en geometría (la manera en que se representan las relaciones espaciales) y su contenido (lo que es representado). La concepción de la equivalencia, como fue analizado en el capítulo 1 de este trabajo, tiene sin duda sus raíces en la escuela, en la enseñanza por "ostención" de la figura, y el aprendizaje mediante la percepción, donde lo que es percibido no es una relación, sino una totalidad perceptual, que incluye la figura geométrica y el escenario donde se encuentra.

Sin embargo, parece ser que esas concepciones son susceptibles de cambiar, gracias a situaciones didácticas pertinentes que las cuestionen. Un indicio de que se lograron movilizar dichas concepciones, por efecto de las actividades propuestas en el taller, lo encontramos en los comentarios de Jesús y sus compañeras cuando inician el trazo de las alturas de diversos triángulos que no se presentan con uno de los lados paralelos al borde del libro (Punto 2, 3 y 4 , Actividad 5 "Triángulos y alturas", Tema 2 "Triángulos y cuadriláteros" (BLOCK (coord.) 1994, 171-172)).

> Jesús: Hay algo muy curioso, en el libro de 4° grado ... y en un artículo de una revista de educación matemática, decía que un triángulo tiene 3 alturas.
> Ague: Bueno, si ahorita la mueves... (y hace un gesto, "barriendo" la altura entre dos paralelas)
> Jesús: Ahorita me acuerdo, vas a ver. (leyendo) "Traza una altura a cada uno de los siguientes triángulos"

Clis: A lo mejor aquí viene lo que tu decías, mira, la altura que yo le quiero trazar es ésta. [...]
Jesús: [...] Generalmente cuando en la primaria les estás enseñando a los niños, les enseñamos que tomen la altura a partir de la base y después lo haces a veces como están estos. Ponemos éste que está aquí de piquito, podemos decir que no está en su base, está así de piquito, pero ahora hago esto para encontrar la altura de este triángulo...

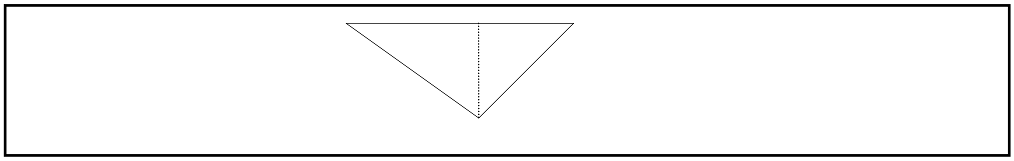


FIG. 17. DIBUJO DE JESÚS

...se puede trazar de este punto al lado contrario, de este vértice al lado contrario, esta es una altura, y también la podemos encontrar de este vértice al lado contrario, pero que sea perpendicular.

Jesús consideraba como algo "curioso" que en el libro de 4° grado y en otras fuentes se afirme que un triángulo tiene tres alturas, pues siempre había considerado que un triángulo tiene una altura única porque sólo tiene una base, es decir el segmento del triángulo que es paralelo al borde de la hoja.

Ague considera que si se "mueve" la altura, es decir, si se trazan varios segmentos congruentes paralelos al segmento considerado inicialmente como altura, esos segmentos también van a ser "alturas", pero no está pensando en las otras alturas del triángulo. La reflexión de Ague está sustentada de nuevo en una concepción de la existencia de una altura para cada triángulo, a la que es necesario asignar un número.

En un momento determinado Jesús propone identificar la altura en un triángulo colocado "de piquito" en el salón de clases, para que los niños identifiquen que la altura es un segmento perpendicular a uno de los lados que pasa por el vértice opuesto, dejando en claro con sus compañeras que en un triángulo existen solamente tres alturas independientes de la posición del triángulo, es decir, que las alturas se pueden "ver" aunque el triángulo no esté dibujado como usualmente se hace.

La idea de que la posición determina al objeto geométrico se ve modificada por algunas actividades propuestas en el taller en las que se contempla:

a) sacar la figura del plano de la hoja para analizar sus propiedades geométricas (actividades de clasificación de conjuntos de figuras recortadas, o actividades con el Tangrama);

b) partir de algunos elementos geométricos de las figuras para su análisis y posterior clasificación (actividades con las tiras de mecano que serían diagonales de cuadriláteros);

c) realizar construcciones sobre materiales que imponen restricciones a la construcción de figuras (actividades en el geoplano);

d) analizar figuras que no conserven la posición conocida en contextos escolares.

3. Las propiedades y nomenclatura de las figuras geométricas

En geometría se conoce como polígonos regulares a los que tienen lados y ángulos congruentes; es decir, la regularidad se basa en ciertas propiedades geométricas de la figura. En el contexto del taller, algunos maestros afirmaban que los polígonos regulares eran las figuras que tenían nombre; parecería que la regularidad estaba en función de una variable lingüística -tener nombre o no- y no en las propiedades geométricas de las figuras. El siguiente fragmento de registro da cuenta de un momento de socialización de los resultados de la identificación de cuadriláteros en una configuración simétrica (Punto 2, Actividad 1 "Fórmalo con rectas", Tema 1 "Simetría" (BLOCK (coord.) 1994, 153)), y en el que los maestros intentan hacer una clasificación de cuadriláteros:

> Y: ...luego con el ejercicio, al principio parecía que no había más que cuadriláteros de esos feos, pero cuando estaban hablando acerca de los cuadriláteros había quienes decían que no había cuadriláteros regulares, decían son cuadriláteros irregulares, y alguien dijo que eran trapezoides.

¿Cuáles son los cuadriláteros regulares? (Y. escribe en el pizarrón conforme van dando respuestas)
Bertha: El cuadrado...
Ague: El cuadrado nada más.
Y.: El cuadrado
Mtro.: El rectángulo
Y.: El rectángulo
Mtro.: El rombo
Y.: El rectángulo, rombo ¿Qué otro?
Clis: Regulares son que sus lados y ángulos ¿No?
Mtro.: Trapecio
Y.: El trapecio ¿Algún otro?
Beto: Romboide

Regular (Cuadrilátero) -	Cuadrado
	rectángulo
Irregular:	rombo
Trapezoides	trapecio
	romboide

FIG. 15. PIZARRÓN

Y.: Romboide ¿Ustedes no se acuerdan si son cuadriláteros regulares?
Alicia y Ague: No.
Mtro.: Son los que tienen nombres
Y.: Exacto, sólo si eso es cierto, eso de ser regular ¿tendrá que ver con que la figura tenga nombre? Porque hasta ahorita ustedes pensaron en cuadriláteros regulares y me dieron una lista de los nombres de los cuadriláteros conocidos. Vean ustedes ¿la regularidad tendrá que ver con eso de tener nombre?
Clis: Regular es que tenga sus lados y ángulos iguales

Parece ser que en este contexto, la regularidad en los cuadriláteros está asociada también a que la figura tenga comportamientos geométricos “regulares” tales como: congruencia entre lados, congruencia entre ciertos ángulos interiores, o simplemente percepción de alguna simetría en la figura; por ejemplo, el rectángulo tiene lados opuestos congruentes, el romboide tiene ángulos opuestos congruentes, incluso el trapecio, que podría ser el “menos regular” de todos los cuadriláteros “regulares” por el paralelismo de sólo dos de sus lados, es posible que se considere cuadrilátero “regular” cuando se le representa como trapecio isósceles, pues dos de sus lados además son congruentes.

La observación de la “regularidad” en el comportamiento geométrico de algunas figuras ha coincidido con el hecho de que tengan nombre genérico. Sin embargo, los cuadriláteros que se consideran como “irregulares” tienen todos el nombre genérico de trapezoides; en general, los polígonos “feos”, es decir, los que no son “regulares”, no tienen nombre.

Cuando el cuadrilátero tiene un comportamiento “regular” desde el punto de vista de los maestros, pero no tiene nombre genérico, el cuadrilátero es “bautizado”, y se le asigna un nombre. Tal es el caso del “papalote” y la “flecha”. El papalote es un trapezoide que tiene dos pares de lados consecutivos congruentes; la flecha es un cuadrilátero no convexo, que no entra en la categoría de los cuadriláteros “feos”, porque también tiene dos pares de lados congruentes consecutivos.

Siguiendo más de cerca las participaciones de los maestros en la confrontación grupal arriba transcrita, se observa a la maestra Clis en dos momentos, uno con duda y otro con menos duda, pero de todas formas con desconocimiento de causa, afirmando que “regular es que tenga lados y ángulos iguales”, pero ese saber no está dado más que a nivel de discurso, ya que eso no ayuda a Clis para cuestionar la clasificación que los maestros estaban elaborando, ni tampoco lo funcionaliza para resolver algún problema o cuando enfrenta una nueva situación.

Para favorecer un cambio en esa concepción, la conductora propició momentos de confrontación como el arriba mencionado. Además desde los materiales se hacen algunas propuestas de construir figuras regulares sobre el geoplano, centrando al maestro sobre las características geométricas de la figura, al confrontarlo con la restricción que le impone la latiz. En esta última actividad los maestros verificaron la regularidad de la figura midiendo los lados, aunque en ningún momento se centraron en la congruencia de los ángulos. Sin embargo, la propuesta favorece pocas situaciones en las que los maestros funcionalicen su “saber discursivo” en la argumentación de la regularidad de alguna figura.

4. Aritmetización de algunas relaciones geométricas

En la sección anterior se expusieron algunas concepciones sobre los objetos geométricos de algunos maestros participantes en el curso de actualización. En esta sección se analiza la manera en que los profesores asistentes al curso de actualización establecieron relaciones entre esos objetos como una estrategia para abordar las situaciones didácticas propuestas y resolver los problemas que planteaban dichas situaciones; las más son relaciones geométricas, y empiezan a aparecer relaciones lógicas, sobre todo en situaciones de validación de resultados.

Es posible establecer una relación geométrica cuando se ponen en juego las características y propiedades geométricas de los objetos para satisfacer una cierta condición geométrica. Por ejemplo, dos objetos geométricos son simétricos con respecto a una recta cuando se establece una correspondencia entre sus puntos de tal suerte que dichos puntos equidisten de una recta dada.

Desde la ingeniería didáctica se afirma que en el contexto escolar, la restricción geométrica puede ser planteada desde una situación didáctica, en la que gracias al planteamiento de un problema se establece alguna relación (ARTIGUE 1995a, 1995b; DOUADY 1995b).

Para que sea posible definir relaciones entre objetos geométricos dada una situación, es preciso atender tanto a las características geométricas del objeto como a la restricción geométrica que impone la situación didáctica planteada; el proceso consiste en satisfacer simultáneamente ambas cosas. No hay que perder de vista que de este proceso y de los momentos en que se realiza la validación de los resultados, se desprenderá la determinación de las características geométricas de la relación.

Sin embargo, la determinación de las características de la relación entre objetos geométricos por parte de los maestros, está multidetermidada por los siguientes aspectos: a) las concepciones sobre las características del objeto,
-aspecto analizado en el punto 1 de este capítulo; b) la tendencia de los maestros a asignar a la relación un valor numérico como resultado de un proceso de medición; c) la lógica de las anticipaciones de la secuencia de acciones para establecer la relación y resolver el problema, y d) por la lógica de la argumentación y la contra argumentación en el momento de la socialización de resultados. El punto c) y d) son objeto del análisis del apartado 5 de este capítulo.

Al parecer, las relaciones geométricas, al igual que los objetos geométricos, también habían sido definidas preliminarmente desde contextos de medición. En el caso de la congruencia entre figuras, para algunos maestros dos figuras eran congruentes si a sus lados se les podía asignar el mismo número, y esta concepción es la que ponen en juego al aproximarse a la solución de los problemas propuestos. La propuesta propone recurrir a la superposición de figuras para verificar su congruencia, lo que no favorece mucho la evolución de las concepciones sobre la congruencia.

La concepción de los maestros sobre el paralelismo también está anclado en la idea de que dos rectas son paralelas si son equidistantes, en el sentido de que al medir entre ellas, en distintos puntos, el resultado es el mismo número. Si hay variación en la medida, entonces significa que las rectas no son paralelas, y se cortarán del lado donde la medición arroje el menor dato. Cabe aclarar que los maestros no contemplan que lo que miden es la longitud de un segmento perpendicular a ambas rectas. Una de las actividades propuestas en el taller con las que los maestros reconceptualizarían el paralelismo es la del trazo de paralelas con materiales no convencionales (hilo mojado en tinta entre una hoja de papel doblado). Para lograr el trazo de las paralelas, los maestros mideron desde el doblez de la hoja, hasta el punto donde colocarían el hilo mojado en tinta, para asegurar con ello que las rectas resultantes fueran paralelas. En otras palabras, los maestros recurrieron a sus concepciones de lo que son rectas paralelas, concepciones en las que subyace la idea de asignar un número entre las dos rectas, producto de una medición con regla graduada, y utilizarlo como mecanismo de control para asegurarse de que lo que obtendrían serían justamente rectas paralelas.

Como se había anticipado en la sección de este trabajo relativa al análisis de las actividades de los materiales, y tomando en cuenta lo que hicieron los maestros, esta actividad no permite la movilización de las concepciones de los docentes, explícitas en sus estrategias espontáneas.

Una de las metas del curso de actualización es justamente que los maestros recurran a sus conocimientos previos para resolver los problemas planteados por las situaciones didácticas, que en la solución de esos problemas modifiquen sus concepciones sobre las relaciones y construyan otras. Sin embargo, a partir del análisis de los materiales y de los registros de observación, es posible señalar que algunas situaciones de la propuesta, como las relacionadas con el paralelismo, no permitieron por sí mismas la conceptualización de nuevas relaciones; fue necesaria la intervención de la conductora para movilizar algunas ideas de los maestros, sobre todo se aprovecharon espacios de confrontación colectiva para cuestionar lo que dicen o hacen los maestros.

5. Aparición de las relaciones lógicas

En el punto anterior se analizó la manera como algunos maestros modificaron sus concepciones sobre las características de ciertas relaciones geométricas mediante la intervención didáctica. Ahora bien, es posible que esa reconstrucción de las características de las relaciones por parte de los maestros este supeditada a: 1) una lógica en la secuencia de las acciones que les permitirían resolver los problemas; y 2) a la confrontación con el resto de sus compañeros, de los resultados obtenidos en los problemas planteados por las situaciones didácticas, teniendo por objetivo validar las características geométricas de la relación puesta en juego.

Con respecto al primer punto, con la intención de resolver el problema planteado por la situación didáctica, es probable que algunos maestros retomen en primera instancia algunas características geométricas de los objetos que de manera personal consideren como válidas, que elaboren una serie de hipótesis sobre las características de la relación que necesitan establecer desde sus concepciones y saberes previos y que, posteriormente, consideren lo que tienen que hacer para resolverlo, en particular deben considerar la secuencia de acciones que tienen que llevar a cabo. Según Piaget, las presuposiciones del sujeto son condiciones necesarias para su actividad (PIAGET 1979).

Las hipótesis sobre los objetos y las relaciones geométricas, junto con el diseño de la secuencia de acciones, van a conformar una estrategia de solución que tiene en sí misma la estructura de un razonamiento. Como la estrategia de solución depende de las condiciones específicas del problema que se está resolviendo, el razonamiento puede ser demasiado "local", de tal suerte que no contemple las implicaciones de sus afirmaciones en otras situaciones, y sin que por lo tanto llegue a tener un cierto grado de generalidad.

Es por esto último que, didácticamente, es importante que la reconstrucción de las características de las relaciones geométricas a partir de un problema también esté supeditada a la confrontación de los resultados obtenidos con el resto de los compañeros. La validación por parte del grupo consiste en reconocer, desde los conocimientos socialmente compartidos, las características geométricas de la relación puesta en juego; aunque dicha relación haya sido elaborada en el marco de un contexto específico, será reconocida por los demás en su generalidad. Cabe subrayar que el conocimiento social de referencia también es local y, por ende, los razonamientos siguen siendo "puntuales".

Cuando los maestros logran conformar una idea sobre el comportamiento de la relación geométrica, y en particular, sobre la manera como operan los elementos de la relación, entonces están en posibilidad de elaborar una conjetura sobre las propiedades geométricas de la relación.

El objetivo de la primera parte de esta sección es identificar algunas características del razonamiento subyacente a la secuencia de acciones, en particular, de qué manera algunos maestros lograron formular conjeturas sobre el funcionamiento de ciertas relaciones geométricas.

Ahora bien, en el momento de la socialización y la confrontación de resultados, los maestros necesitan retomar las características geométricas de los objetos y de las relaciones, cuyas significaciones sabrían compartidas, y que ellos pusieron en juego en la elaboración de la conjetura, para “probarla” mediante un razonamiento que los demás maestros tendrían que considerar como válido.

El objetivo de la segunda y tercera partes, es abordar el análisis de los argumentos, la manera como son organizados y, en general, la estructura de los razonamientos argumentativo y deductivo, en los momentos en que los maestros necesitan “probar” a los demás que la conjetura a la que llegaron es válida.

5.1. La conjetura

Para el caso de la resolución de problemas que permitirían la conceptualización de algunas relaciones geométricas, es posible identificar dos tipos de situaciones: la primera, cuando las relaciones geométricas tienen que ser reconceptualizadas como resultado de toda una secuencia didáctica, como por ejemplo las actividades de simetría, en las que los maestros inician la secuencia propuesta reconociendo figuras simétricas en una configuración (actividad 1), identificando la simetría con ayuda del espejo (actividad 2, punto 1), y construyendo figuras simétricas a otras sobre el geoplano, dado un eje de simetría y con la ayuda del espejo (actividad 2, punto 2). En este caso es probable que los maestros elaboren hipótesis sobre las características de las relaciones, partiendo de considerar válidas las características geométricas de los objetos que conforman la relación.

Y la segunda situación, cuando algunas propiedades de la relación geométrica se dan de manera explícita y el maestro tiene que verificar qué características se cumplen y cuáles no, para el caso particular de un problema. Por ejemplo, cuando se proporcionan al maestro dos piezas de Mecano del mismo tamaño que tendrían que unir por la parte media y verificar qué propiedades geométricas, para el caso de los cuadriláteros formados por los extremos de las tiras, se cumplen y cuáles no: paralelismo de los lados, congruencia de lados, de ángulos opuestos o de ángulos colaterales, etc. Para este tipo de situaciones, el maestro tiene que elaborar hipótesis sobre cuáles características geométricas tendría que hacer intervenir.

En cualquiera de las dos situaciones, los maestros se aproximan al problema de la situación elaborando una serie de hipótesis desde saberes y conocimientos, acotados por las restricciones de la situación, no siempre explicitadas, pero que funcionarán como puntos de referencia para la conformación de una conjetura sobre la manera como es establecida la relación geométrica desde las características geométricas del objeto.

Se considerará en este trabajo que una conjetura es una afirmación sobre las características o la manera como se relacionan los objetos matemáticos, en este caso los objetos geométricos, previamente a la demostración o constatación. Matemáticamente esta afirmación tiene una estructura ternaria: dos proposiciones, o grupos de proposiciones, y una relación de implicación lógica. Para que la conjetura sea válida, la relación de implicación debe ser verdadera, y por eso es preciso someterla a una prueba de validez formal. Esto se analizará más adelante cuando se aborde el razonamiento deductivo.

Desde el punto de vista didáctico, la conjetura es elaborada desde las concepciones del sujeto sobre los objetos matemáticos, desde una suposición socialmente compartida de la manera como se establecen las relaciones entre ellos, y desde una suposición elaborada por los participantes en la relación didáctica, en función de la situación didáctica planteada y del contrato didáctico establecido. Cada uno de estos elementos interviene de manera determinante en la elaboración de la conjetura, en el sentido que permite una desestructuración de las concepciones previas sobre el comportamiento de la relación geométrica, un reordenamiento de los elementos que intervienen en la relación y la búsqueda de un sistema semiótico -y posteriormente un registro de representación[17]- que permita comunicar el nuevo concepto.

Cabe señalar que desde la metodología con la que se diseñó y experimentó el curso de actualización, el problema planteado por la situación didáctica debe permitir la desestructuración de las concepciones de los maestros para dar cabida a la conceptualización de nuevas relaciones. Pero si el problema no es lo suficientemente desestructurante, el sujeto adecúa el objeto matemático a sus conocimientos, a su actividad y, sobre todo, a sus expectativas: lo obliga a tener las características que él espera. Las relaciones que plantea la conjetura así obtenida, están más apegadas al contenido de la actividad y a las concepciones del sujeto, que a las características geométricas de la relación establecida.

Uno de los casos observados durante el curso, que ya se ha tenido oportunidad de comentar en un punto anterior, es el que se refiere a la realización de la actividad 1 “Trázalo con rectas” de la primera unidad “Simetría” por el equipo 1. La actividad consistía en doblar una hoja y pasar un hilo mojado en tinta entre el doblez de la hoja y presionar para que quedara marcado el hilo. Como se había señalado anteriormente, las maestras realizaron otra actividad distinta a la señalada por la consigna: en lugar de doblar la hoja, trazaron rectas con el hilo mojado sobre la hoja extendida, en la que quedaba la marca de un doblez hecho previamente, de tal suerte que obtuvieron una configuración simétrica con respecto a dos ejes.

La pregunta obligada es ¿Qué es lo que las lleva a modificar la consigna, sin haber hecho ni siquiera un intento por realizar la actividad tal y como se les indicaba? Es probable que la manera como se plantea la lección haya influido en las expectativas de lo que tendrían que obtener, y que su actividad se haya visto conscientemente modificada. En la primera hoja de los materiales se lee el título

[17] De acuerdo a R. Duval, las representaciones semióticas “...están constituidas por el empleo de signos”; a su vez dichas representaciones muestran registros diferentes: “Cada registro remite a un sistema semiótico que tiene dificultades propias de significado y de funcionamiento” (DUVAL 1993, 118-119).

“Simetría” y se anuncia como objetivo del tema, que las actividades “...permiten analizar varias propiedades de las figuras geométrica, en particular, la simetría” (BLOCK (coord.) 1994, 152). En el objetivo de la actividad se especifica que “...se buscan diferentes maneras de construir composiciones simétricas”, y posteriormente se da la consigna para realizar la actividad. El título y los objetivos permiten suponer a los maestros que lo que tienen que obtener es una configuración que se perciba como simétrica, conforme con lo que sería su concepción de simetría: hay simetría si existen dos ejes perpendiculares y que, a ojo, se “perciba simetría”.

La consigna, confrontada al título y a los objetivos, les permite elaborar una serie de expectativas sobre la configuración resultante. Al respecto, es posible elaborar dos hipótesis: o bien tenían claro el tipo de configuración que iban a obtener, es decir que la configuración resultante sólo tendría un eje de simetría, lo que no concordaba con su concepción de simetría; o bien no estaban seguras si lo que iban a obtener era una configuración simétrica, lo que no concordaba con los objetivos anunciados, los que consideraban valiosos, desde el punto de vista de sus saberes profesionales.

Cambiar la consigna les daba la certeza de que por un lado, la configuración estaría más cercana a sus expectativas, -a su concepción de la simetría- y por otro, a lo que para ellas eran las expectativas del grupo y de la conductora: de alguna manera los maestros tienen conciencia que existe un conocimiento compartido.

Ahora bien, el mismo fenómeno de conformación de una conjetura desde una suposición socialmente compartida tiene lugar cuando el equipo afronta el momento de la prueba, es decir, cuando la conductora se acerca a supervisar el trabajo: ella dobló la configuración y la puso a contraluz, para verificar la simetría y afirmó que su configuración no era la correcta porque las líneas no se superponían. Las maestras atribuyeron entonces el error a la imprecisión del trazo, y no a la modificación de la consigna.

Equipo 1: Tomy, Francisca, Félix y Yola.

Prácticamente no hablaban entre ellas. Doblaron una hoja por los puntos medios de sus lados adyacentes. Mojaron el hilo en el cojín con tinta, colocaron el hilo mojado sobre el papel extendido, procurando hacerlo pasar de un vértice a otro. Yola deslizaba el dedo sobre el hilo para que quedara una marca.
"A ojo" procuraban hacer coincidir las marcas en el centro. También trazaron los ejes de la hoja. Además, trazan algunas rectas procurando pasar por los puntos medios de los dobleces.

Y. llega a verificar el trabajo.

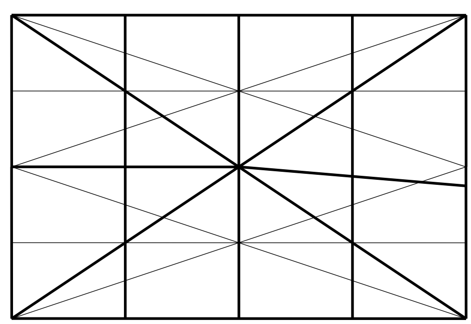


FIG. 3. CONFIGURACIÓN RESULTANTE DEL TRABAJO DEL EQUIPO 1.

Félix: Son simétricos.
Tomy: Trazamos el eje de simetría, y está a la mitad.
Y.: A ver. (Y. dobla la configuración por la mitad, a lo ancho de la hoja colocándola a trasluz) ¿Por qué creen que esta línea les salió chueca a ésta? (Señala la línea que en la ilustración aparece con línea más gruesa).

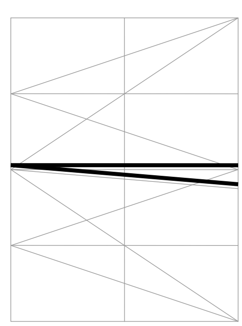


FIG. 4. Y. DOBLA LA CONFIGURACIÓN Y LA PEGA CONTRA LA VENTANA PARA VERLA A TRASLUZ.

> Tomy: Empezando por el hilo, que no tenía tinta y se movía.
> Y.: Se movía... yo estaba viendo que estaban haciendo otra cosa (Risas). A ver pásenme la regla.
> Tomy: Después del hilito, sí, ya le marcamos con otro color, con la regla.
> Y.: Pero yo vi que estaban ustedes haciendo otra cosa, pusieron esto (señala el punto medio), la hoja aquí, y luego marcaron esta... (señala el otro eje)
> Tomy: Sí
> Félix: Estas son las que sobran ¿No?
> Y.: ¿Y cómo debían de haberlo hecho?
> Tomy: Deberíamos nada más de haber marcado en una, doblar la hoja, y marcarle...

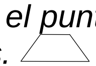
La explicación que las maestras elaboraron a partir de la pregunta de la conductora sobre el porqué una línea no había quedado sobre la otra, se remitía a una creencia socialmente compartida sobre la imprecisión de los trazos debida al instrumento. En ningún momento indican que modificaron la consigna; es posible que ni siquiera se percataran de que la configuración que obtuvieron es imposible de obtener de haber seguido de cerca las indicaciones.

Al centrar su atención en la obtención de una configuración simétrica con respecto a dos ejes, la que de manera conjunta querían obtener, nunca tuvieron en la mira a la figura que se obtendría siguiendo los pasos de la actividad; en ningún momento hacen referencia a la dificultad de obtener por ejemplo, las líneas perpendiculares a un eje. De esta manera, su argumentación no se basa en el análisis geométrico de la configuración, sino en lo que se suponen son los conocimientos compartidos.

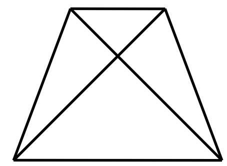
Cabría agregar que en el mismo material se incita a los maestros a la elaboración de conjeturas desde el análisis de la configuración resultante. Las conjeturas sobre si hay otra simetría en la figura tendrían que surgir cuando se les pregunta en el inciso b) por el número de ejes de simetría de la composición, como si existiera la posibilidad de encontrar otros ejes.

Ahora bien, los maestros también pueden elaborar conjeturas desde alguna suposición de la manera como se relacionan los objetos geométricos, en función de la situación didáctica planteada y del contrato didáctico explicitado. Esto se puede observar en el siguiente fragmento de los apuntes de una maestra sobre la actividad que estaba realizando, actividad que consistía en analizar las características geométricas de todos los cuadriláteros que se formaban con los extremos de dos tiras de cartoncillo del mismo y de diferente tamaño; que se unían en su punto medio, en el punto medio de una de ellas y en un punto distinto del punto medio de la otra, y en puntos distintos de sus puntos medios; formando además un ángulo recto entre ellas y sin formar ángulo recto (Actividad 3 “Los cuadriláteros y sus diagonales”, del Tema 2 “Triángulos y cuadriláteros” (BLOCK (coord.) 1994, 163-168)). En otras palabras, se pretendía que a través de la actividad se analizaran algunas características de los cuadriláteros formados, dados los comportamientos de sus diagonales, tales como la congruencia de lados o de ángulos, o el paralelismo de los lados.

En el caso particular del siguiente apunte, la maestra registró sus conclusiones sobre la situación en que se tienen dos tiras del mismo tamaño, unidas por un punto distinto al punto medio, y formando un ángulo recto, y un ángulo distinto al ángulo recto.

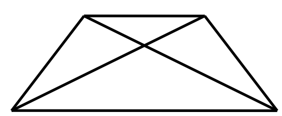
Los dos puntos de la orilla sin tocar el punto medio y formando ángulo recto
= *trapecio regular o trapecio isósceles.* 
Variando el ángulo se forma el mismo trapecio
Sólo varía el tamaño de sus bases y su altura.
El punto donde se cruzan tiene la misma distancia de sus vértices.
[Ague]

La primera conjetura que la maestra obtiene es que si une dos tiras del mismo tamaño en un punto distinto al punto medio y perpendiculares entre sí, entonces el cuadrilátero resultante es un trapecio isósceles.

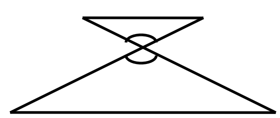


La maestra lo llama también “trapecio regular” porque la longitud de los lados no paralelos es la misma, así como la medida de los ángulos adyacentes a los lados paralelos. Ya se había discutido en el punto 1.3 de este trabajo, intitulado “Las propiedades y nomenclatura de las figuras geométricas” que si algunos maestros que asistieron al curso percibían alguna regularidad en el comportamiento de algunos elementos de la figura, la figura era para ellos “regular”.

La segunda conjetura obtenida se refiere a lo que sucedería con los elementos del cuadrilátero en el caso de la variación del ángulo entre las dos tiras. Para la maestra, al variar el ángulo, la figura sigue siendo la “misma”, es decir, pertenece a la clase de los trapecios isósceles.



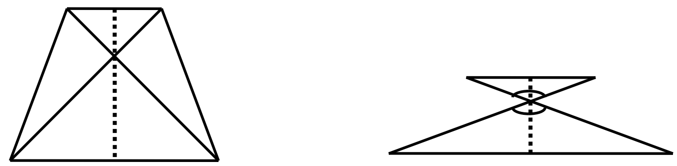
La maestra afirma que si varia la medida de los ángulos formados por las tiras, se modifica la longitud de las bases del trapecio y la longitud de la altura. Para analizar la conjetura de la maestra, es preciso aislar los dos triángulos de la configuración cuyos lados son las bases del trapecio.



Después, se consideran dos casos en la variación de la medida del ángulo marcado (que inidialmente es recto):

1. La medida del ángulo aumenta y tiende a dos rectos (la medida de un ángulo de lados colineales)
2. La medida del ángulo va disminuyendo y tiende a cero

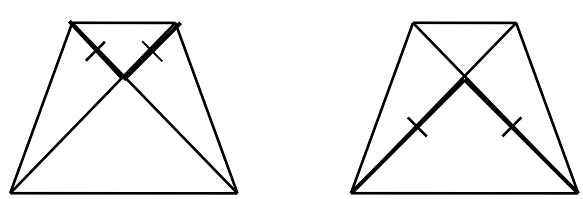
Al aumentar la medida de los ángulos marcados, la altura de cada uno de los triángulos tiende a cero. Como la altura del trapecio es la suma de las alturas de los triángulos, también tiende a cero.



Ahora bien llamemos $\overline{AB}$ y $\overline{DE}$ a los lados de los triángulos que son las bases del trapecio. Si el tamaño del ángulo aumenta, la longitud de $\overline{AB}$ tiende al valor de la suma de las longitudes de $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$, y la longitud de $\overline{DE}$ tiende al valor de las longitudes de $\overline{DC}$ y $\overline{EC}$.

Al disminuir la medida de los ángulos marcados, la altura del trapecio tiende a la longitud de las diagonales, y la longitud de las bases tiende a cero.

Finalmente, la tercer conjetura registrada por la maestra se refiere a que las distancias de los vértices de la base menor al punto donde se cruzan las diagonales del cuadrilátero son iguales, así como las distancias de dicho punto a los vértices de la base mayor.



Cabe aclarar que este resultado es una conjetura elaborada a nivel grupal durante la discusión. A continuación se presenta el fragmento del registro donde se discute sobre dicha conjetura.

> Y: Son trapecios isósceles dice la maestra [...] o sea que hay trapecios isósceles que sus diagonales pueden estar cortadas de manera perpendicular, o no, ¿pero qué tienen esos trapecios isósceles? ¿Dónde se cortan? (sus diagonales. Tomy comprueba utilizando sus lápices)
> Alicia: Cerca de una de las bases.
> Y: Pues "cerca" sí, pero un poquito más preciso que cerca.
> Bertha: En el punto medio.
> Y: No, no es en el punto medio.
> Clis: A ver
> Y: ¿Cómo es la distancia entre el punto donde se están cortando esas diagonales y los vértices?
> Jesús: Constante
> Mtros: Iguales
> Y: Es igual a dos vértices y luego es igual a los otros dos vértices. Entonces se produce la simetría, por eso son trapecios isósceles, ¿Si? Son trapecios isósceles [...]

Es interesante observar que Ague no participa directamente en la discusión, pero hace suya la conclusión al registrarla en su cuaderno.

La situación didáctica que plantea el trabajo con las diagonales del cuadrilátero permitió a la maestra elaborar conjeturas que, desde el diseño de los materiales no se habían previsto: en los materiales se solicitaban los nombres y algunas características de los cuadriláteros que podrían formarse, en particular el paralelismo de sus lados. Sin embargo, la pertinencia de la situación didáctica permitió que algunos maestros, como el caso de Ague, lograran la elaboración de conjeturas sobre las características y el comportamiento geométrico de algunos cuadriláteros.

5.2 El razonamiento argumentativo

Un aspecto esencial desde el marco teórico en la metodología que se aplicó en el desarrollo del taller de actualización, es la validación de los resultados obtenidos por los maestros en la resolución de los problemas. Ésta consiste en la confrontación y socialización de los resultados obtenidos con el resto del grupo.

Guy Brousseau, parafraseado por Grecia Gálvez, identifica este tipo de eventos como *situaciones de validación* en las que "...se trata de convencer a uno o varios interlocutores de la validez de las afirmaciones que se hacen. En este caso los alumnos deben elaborar pruebas para demostrar sus afirmaciones. No basta la comprobación empírica de que lo que dicen es cierto; hay que explicar que, necesariamente, debe ser así." (GÁLVEZ 1994a, 43).

Para los maestros del taller, la socialización y validación de resultados consistió en explicar a sus compañeros las hipótesis que establecieron, los procedimientos que siguieron y las estrategias que utilizaron en la búsqueda de la solución a la situación problemática, así como los diversos resultados obtenidos. A su vez los demás maestros tenían que discutirlos y confrontarlos con sus conocimientos previos y con los resultados a los que ellos mismos habían llegado, y de estar conformes, validarlos, o en caso contrario, proponer los suyos y someterlos a consideración de los demás.

En el contexto del desarrollo de la parte de geometría, la importancia de este tipo de situaciones radica en que es posible que la desestructuración de concepciones sobre contenidos geométricos, y la estructuración de otras, tenga lugar en ese momento; además es factible que se produzca una reorganización de relaciones geométricas distintas a las relaciones propuestas en las estrategias de solución. Finalmente también se espera que los maestros organicen lógicamente sus proposiciones en la elaboración y presentación de sus resultados.

Siguiendo a Balacheff, se entenderá por *explicación* "... un discurso que quiere hacer inteligible el carácter de verdad adquirido por un expositor (locutor) de una proposición o de un resultado" y por *prueba* "... una explicación aceptada por una comunidad dada en un momento dado. " (BALACHEF 1994, 8). Ya se había mencionado en este trabajo que los maestros sabían, de alguna manera, cuáles podrían ser los conocimientos compartidos que les servirían de referentes a sus explicaciones sobre el porqué de sus resultados.

Ahora bien, se ha podido detectar que en las situaciones de validación que tuvieron lugar durante el taller, las explicaciones, y por ende las *pruebas*, tomaron la estructura, en forma y contenido, de lo que Raymond Duval ha denominado el *razonamiento argumentativo*. Según Duval, lingüísticamente la argumentación tiene una estructura binaria, constituida por proposiciones que "...se relacionan en función de las relaciones semánticas de los contenidos, es decir, en función de las relaciones de inclusión o exclusión entre sus significados" (DUVAL 1991, 31).

En el caso de las situaciones de validación del taller, los maestros recurrían a diversos conocimientos recientemente producidos al interior del grupo como resultado del desarrollo de las situaciones de la propuesta, -y que por ende sabían compartidos-, para la construcción de las *pruebas* que servirían para validar sus resultados. Por ejemplo, más adelante se analizará que para *probar* a sus compañeros que algunas de las construcciones con regla y compás eran válidas, -como la mediatriz o la bisectriz-, los maestros recurrieron a conocimientos derivados del desarrollo de las situaciones didácticas sobre el tema de simetría. En efecto, sabían que el eje de simetría de una figura determinaba dos secciones congruentes, y que si dos figuras eran simétricas con respecto a un eje, también eran congruentes entre sí. La identificación de la simetría en los trazos de la mediatriz o la bisectriz les permitía elaborar una argumentación, que por estar basada en conocimientos compartidos, sería aceptada por la mayoría de sus compañeros.

Respecto a las reglas de inferencia que permiten la concatenación de proposiciones, Duval afirma que el razonamiento argumentativo "... recurre a reglas implícitas que se derivan en parte de la estructura de la lengua y en parte de representaciones de los interlocutores..." (*Ibid*., 25). En efecto, considera que frecuentemente se utilizan algunos conectivos - o, pero, porque, si...entonces, pues, etc.- que permiten hacer explícita la relación establecida entre el contenido de las proposiciones, su reforzamiento o su oposición. Estos conectivos son los que le dan una forma a la explicación que se asemeja a la de un discurso.

Por otro lado, la transición de un argumento a otro se hace a través del mismo tipo de conectivos, lo que determina que el encadenamiento dentro de una argumentación se lleve a cabo nuevamente mediante conexión extrínseca, es decir, mediante una articulación lingüística.

De esto se concluye que sólo hay un nivel de organización, tanto para la fase de inferencia como para la fase de encadenamiento, basado en la relación semántica de las proposiciones, y un principio organizador: relacionar las proposiciones mediante conectivos que hacen explícita la relación.

En los siguientes registros se analizará la organización discursiva de algunas "pruebas", que permitirían validar resultados de problemas de construcción, para cuya organización los maestros recurrían a ciertas relaciones geométricas implicadas en el trazo.

Con este fin, se identificará la manera en que se da la inferencia de una proposición a otra y el encadenamiento de argumentos. El fragmento corresponde a la socialización de resultados del punto 5 de la actividad 1 "Paralelas y perpendiculares", del Tema 3 "Paralelas, perpendiculares y trazos interesantes". El problema consistía en trazar las mediatrices de los 3 lados de un triángulo para obtener el circuncentro, utilizando el procedimiento descrito en el punto 4 de la misma actividad. En el punto 4 se da la secuencia para trazar una perpendicular a una recta L_1 que pase por el punto **A**.

En el capítulo 2 del presente trabajo, correspondiente al análisis del material, se había formulado la hipótesis de que no sería evidente para el maestro que la construcción del punto 4 pudiese servirle para determinar la mediatriz de un segmento, en particular encontrar el punto medio. Una de las razones es que en el problema del punto 4 se proporciona un punto **A** y, con una abertura del compás *fija* haciendo centro en A, se determina un segmento del que el punto A sería el punto medio, (lo que está garantizado por la medida constante de los radios);

mientras que en el punto 5, que corresponde al problema del trazo de las mediatrices, es justamente el punto medio lo que hay que encontrar, en este caso, de cada uno de los lados de un triángulo.

Al parecer, por el fragmento de registro que a continuación se presenta, la construcción del punto 4 causó mayor problema que la construcción de la mediatriz de un segmento. La maestra Paty estaba en el pizarrón. Trazó un segmento, y sobre él el punto A.

> Paty: Bien si tenemos una ¿Ésta? (Señala el segmento. Y. asiente) ... se abriría el compás y se marca el punto de giro... (Marca los extremos del segmento).
> Y.: ... pero aquí está el punto... (Señala el punto A. Paty no le presta atención).
> Paty: ...se abrirá el compás, y se hace una marca (señala un arco), vamos a marcar arriba y marcamos abajo, nos apoyamos de este lado (se coloca en el otro extremo del segmento), y marcamos arriba y abajo, y uno los puntos.

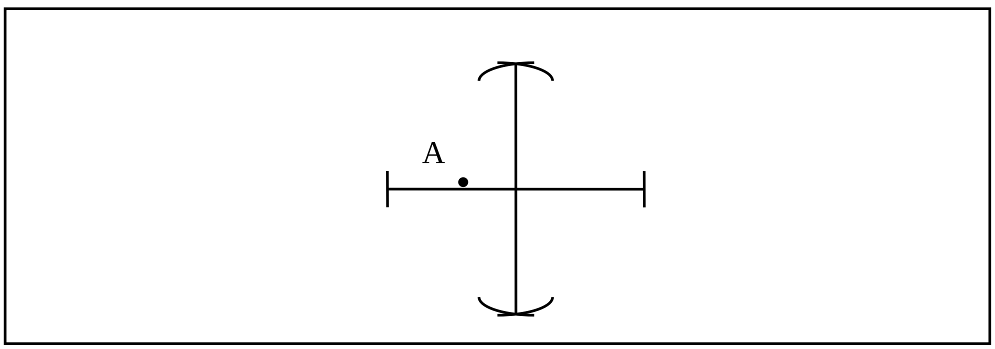


FIG. 19. PRIMER TRAZO DE PATY

> Y.: Sale una perpendicular, pero no pasa por el punto A, si salió la perpendicular, pero yo quería que pasara perpendicular por el punto A. El problema es yo tengo una línea y marco un punto y yo quiero que por ese punto pase una perpendicular.

Por la manera como hace el trazo en el pizarrón, y por el hecho de que no considera como referente la secuencia del punto 4[18], es probable que la maestra

[18] En el punto 4 de la propuesta se proporciona la secuencia para el trazo de la perpendicular a una recta, dado un punto sobre ella. En el momento de la confrontación grupal se supone que la maestra ya realizó el trazo propuesto al interior de su equipo.

haya tenido como conocimiento previo el trazo, con regla y compás, de la mediatriz a un segmento dado.

Parece ser que los demás maestros también compartían dicho conocimiento, pues no les causaba dificultad describir la secuencia que siguieron en el trazo de mediatrices. Esto coadyuvó a que los maestros centraran su reflexión sobre la validez del trazo resultante, en particular, sobre las relaciones geométricas implicadas en el trazo y la manera como se presentarían dichas relaciones.

Con el fin de organizar la secuencia de validación de la obtención del cincuncentro de un triángulo dado, la conductora propuso entonces a otra maestra que indicara verbalmente el procedimiento que siguió para obtener, en primer término, la mediatriz de un segmento cualquiera. La maestra afirmó que en primer lugar abrió su compás "... a una distancia mayor de la mitad del lado", determinándola "a ojo". Apoyó su compás en cada uno de los extremos del segmento, y marcó arcos a ambos lados del segmento, procurando que se intersecaran. Todos los maestros estuvieron de acuerdo que el segmento que unía los puntos donde se cortaron los arcos, era perpendicular y mediatriz del lado.

La conductora solicitó entonces a otra maestra que *probara* que el segmento estaba pasando por el punto medio:

> Y. (Dirigiéndose a Paty): ... ¿Por qué está usted segura, maestra, que está pasando por el punto medio?
> Clis (En voz baja, a Ague): ¿Por qué?
> Ague (En voz baja): Quién sabe... Sí sale
> Y.: ¿Por qué podría uno estar seguro que está pasando por el punto medio?
> Lety: ¿Sería por el cruce de los arcos?
> Jesús: Está trazando otra vez un triángulo.
> Paty: Porque ahí en esos puntos donde se cortaron esos arcos que se habían marcado, es donde también se encuentran dos círculos que tienen sus centros en A y en B. Es un procedimiento semejante al que hicimos para la mediatriz, ahí, donde es también posible tomar como extremo a A y como extremo a B para poder trazar los arcos. Si trazamos la perpendicular solamente nos saldría un punto.
> Y.: Esa sería una explicación que tiene un poquito ahí medio oscuro, porque usted dice que A es el centro de un círculo y B es el centro de otro círculo igualito al otro. Lo que está usted queriendo decir es que cuando dos

círculos iguales se cortan, la línea que pasa por sus centros es perpendicular, y la línea que une a esos puntos de intersección del círculo pasa por el punto medio que une a la línea de los dos centros del círculo, ¿Sí? ¿Es lo que está diciendo? Alguna explicación un poquito más sencilla.
Fer: Está formando triángulos isósceles
Y.: Está formando un triángulo ¿Equilátero?
Mtros: Isósceles
Y.: Isósceles, en el caso de la maestra era isósceles porque ella tomó un poquito más de la mitad a ojo y trazó aquí, entonces realmente aquí está trazando, y al ponerse acá, está trazando un triángulo isósceles, un triángulo isósceles arriba y aquí está trazando un triángulo isósceles ¿Qué?
Jesús: Abajo
Y.: ¿Cómo es este triángulo con respecto a este?
Clis y otros Mtros: Simétrico
Y.: ¿Simétrico respecto a qué?
Mtros: A la línea AB
Y.: Respecto a la línea que pasa por A y B. Esa es una cosa, y la otra cosa es ¿Dónde está la otra simetría?
Clis: En la perpendicular
Y.: En la perpendicular ésta, porque está en un triángulo isósceles, su eje de simetría es perpendicular, es la mitad justamente del triángulo sobre la base que es distinta, sobre el lado que es diferente; tenemos dos lados iguales y uno diferente, el eje de simetría parte a la mitad la figura, entonces sabemos que es efectivamente el punto medio, porque lo que estamos trazando es el eje de simetría de un triángulo isósceles y la simetría es lo que dice ¿No? una figura tiene un eje de simetría; si yo al doblarla coincide, significa que las longitudes perpendiculares al eje están partidas por la mitad.

Cabe señalar que este registro da cuenta del momento en que por primera vez en todo el taller, y a diferencia de otras situaciones de validación realizadas en momentos anteriores, la demanda de elaboración de una prueba es explícita y contundente. De ahí la sorpresa de algunos maestros quienes, en voz baja, empezaron a elucubrar al respecto.

La elaboración de pruebas en el tratamiento de los contenidos geométricos ha estado fuera del alcance de los objetivos de la escuela primaria al menos desde 1944 (ÁVILA 1988), y es poco probable que los maestros que asistieron al taller hayan tenido acceso a la demostración durante su formación (salvo los tres maestros de matemáticas de la Escuela Normal, que seguramente llevaron cursos específicos de matemáticas, en particular de geometría euclidiana, o el caso de algunos maestros que recuerdan haber realizado demostraciones geométricas cuando fueron estudiantes de secundaria).

Por otro lado, como se analizó en el capítulo 2 de este trabajo, las situaciones de la propuesta, en lo que a la unidad de geometría se refiere, han llevado a los maestros al interior de los equipos a la elaboración de conjeturas -que son afirmaciones sobre el comportamiento de los objetos y relaciones geométricas- , sin que se haya propuesto en los materiales del taller situaciones que permitan la elaboración de pruebas sobre la validez de los resultados obtenidos.

Por las dos ideas anteriormente expuestas, no es extraño que en la primera intervención haya aparecido la elaboración de una conjetura sobre el comportamiento de la relación geométrica, en lugar de la exposición de argumentos mediante los cuales se intentase probar que el segmento trazado biseca al segmento dado.

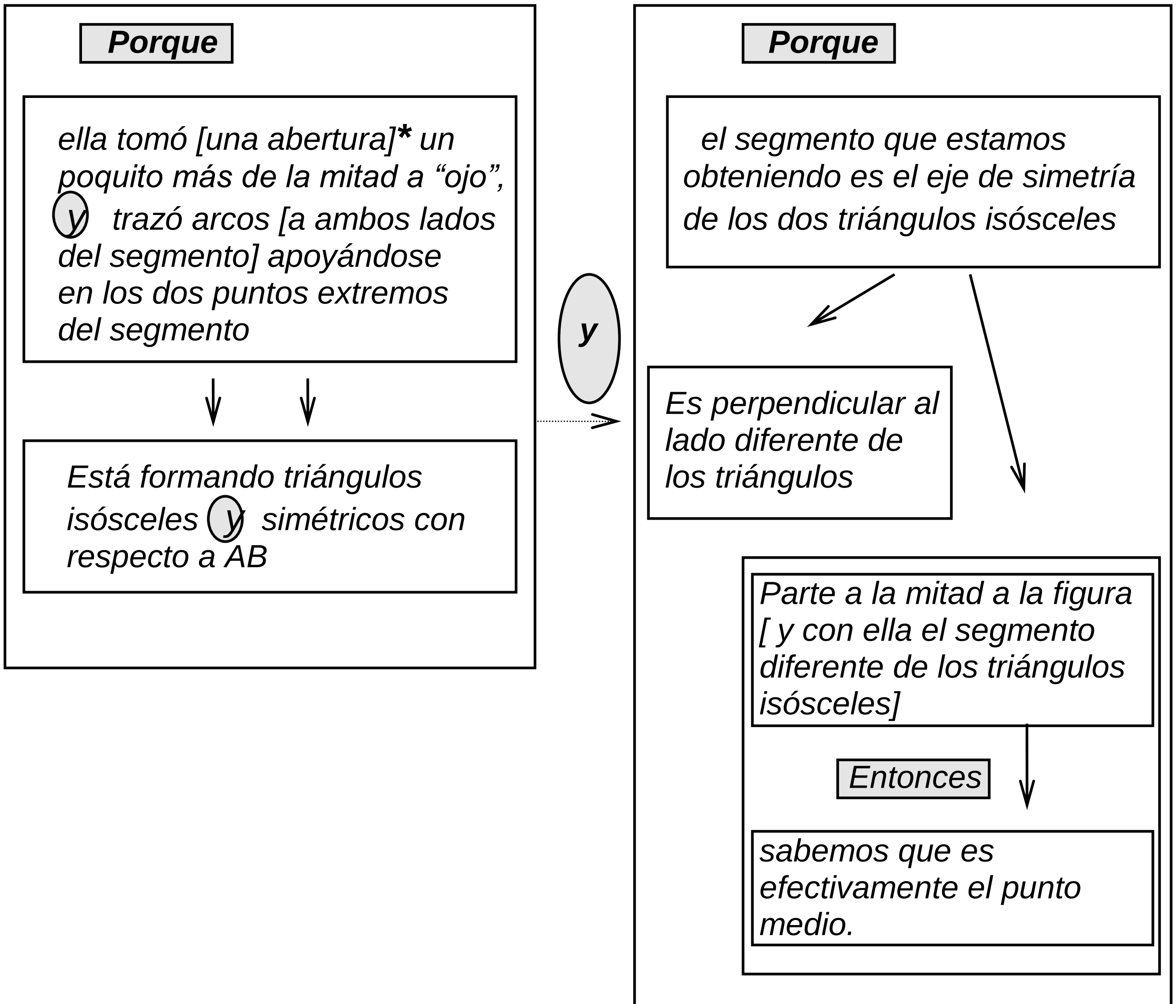
En efecto, la maestra Paty fue elaborando su conjetura mediante la identificación de cada uno de los elementos de la construcción y la manera como estaban relacionados. Reconoce que los arcos, cuyos cruces determinan el segmento obtenido, forman parte de dos circunferencias congruentes; que los centros de las circunferencias son los extremos del segmento dado; que el segmento obtenido es perpendicular al segmento que une los centros de las circunferencias, y que el punto donde se cruzan los segmentos es el punto medio. Además, de alguna manera reconoce la implicación; parafraseando a la conductora, cuando dos círculos congruentes se cortan, la línea que une a los puntos de intersección de los círculos es perpendicular y pasa por el punto medio de la línea que une los centros de los círculos.

Aunque la conjetura fue construida por la maestra en una situación de validación y, a pesar de que era más compleja con respecto a las que se obtuvieron como resultado de las situaciones didácticas propuestas en el taller, la conjetura no fue considerada una prueba, y así fue reconocido tanto por la conductora del taller como por los maestros asistentes al curso, aunque ninguna de las partes hizo explícito el porqué no se consideró como una prueba.

Desde el presente análisis, se ha afirmado que una conjetura está formada por dos proposiciones relacionadas por una operación lógica de implicación, mientras que una prueba es un conjunto de proposiciones organizadas en dos niveles determinados por principios de inferencia y de encadenamiento respectivamente. En la segunda intervención es posible identificar cada uno de estos niveles mediante los cuales están organizadas las proposiciones, así como el valor epistémico[19] de las proposiciones involucradas en la explicación. A continuación se exponen las razones sobre el porqué se podría afirmar que esta intervención sí da cuenta de una posible prueba de la validez de lo que se obtuvo como resultado de la construcción con regla y compás, y cuyo discurso fue organizado mediante un razonamiento argumentativo.

En efecto, si se esquematiza la manera como fue presentada la explicación, incluyendo los conectores y las proposiciones que los participantes utilizaron, con el fin de visualizar los dos niveles del razonamiento, -el inferencial y el de encadenamiento-, se tiene el siguiente esquema:

[19] En el que el contenido semántico de las proposiciones se revela como significativo, y necesario, para la construcción de la red inferencial.



* Lo que está entre corchetes se agregó para hacer más inteligible las frases.

Cada una de las proposiciones que intervienen en el razonamiento argumentativo están encerradas en un cuadro; en pantalla rectangular se encuentran los conectivos lingüísticos que permiten relacionarlas. Las flechas **no** indican implicación lógica, ni estatuto operatorio alguno; simplemente que las proposiciones se están relacionando.

Además, se identifican dos grupos de inferencias reunidas en recuadros más grandes; a este grupo se le llamará argumento. El conectivo lingüístico en pantalla circular que está entre los dos recuadros grandes relaciona dos argumentos. La flecha punteada marca la relación - o encadenamiento- entre los argumentos.

Primer nivel: la inferencia.

En el caso del razonamiento argumentativo, la inferencia tiene una estructura binaria: una proposición de entrada y una conclusión. La regla de inferencia es implícita. Ya se había señalado que la regla de inferencia se deriva de la estructura de la lengua y del contenido semántico de las proposiciones.

En el razonamiento que se analiza, hay dos argumentos, el primero con dos inferencias y el segundo con tres inferencias:

1er. argumento.

En este argumento está constituido por dos inferencias, que en el discurso no se encuentran aisladas; tanto las dos proposiciones de entrada como las conclusiones están enlazadas mediante la conjunción gramatical “y”.

En un afán de encontrar la lógica subyacente al argumento, se podrían separar las dos inferencias de la siguiente manera:

Proposición de entrada	Conclusión
Ella tomó una abertura un poquito más de la mitad a ‘ojo’	Está formando triángulos isósceles
Trazó arcos, apoyándose en los dos puntos extremos del segmento	Está formando triángulos simétricos con respecto a AB

En su conjunto el argumento busca establecer las relaciones que permitan validar en el trazo dos objetos geométricos: primero, los triángulos isósceles, y segundo la simetría de los triángulos obtenidos con respecto a AB (y por ende su congruencia).

La lógica de la inferencia en este razonamiento sólo se podría entender si se consideran las relaciones de inclusión o exclusión de significados, frecuentemente implícitos, de las proposiciones implicadas en la inferencia.

En efecto, en el caso de la proposición de entrada de la primera inferencia "Porque ella tomó un poquito más de la mitad a 'ojo' " se relaciona con la conclusión "Está formando triángulos isósceles" en el sentido de que la proposición de entrada, engloba un conjunto de significados implícitos que garantizan la existencia de los triángulos isósceles (en la elaboración de la red inferencial fue necesario considerar dos de dichos significados, e insertarlos con corchetes en el cuadro, con el fin de hacer la red inteligible). Los significados implícitos, en la proposición de entrada, que podrían considerarse son los siguientes:

- Lo que toma la maestra es una abertura del compás, es decir, la longitud de un radio de circunferencia, que es fija durante todo el trazo;
- El hecho de que la abertura tenga una cierta longitud, mayor a la mitad del segmento, garantiza que los arcos se puedan cruzar, y que los triángulos se puedan construir (por la relación de "desigualdad del triángulo", ya conocida por los maestros).

Este último significado garantiza la existencia de los triángulos, y el primero que dos de los lados de los triángulos sean congruentes, y que por lo tanto los triángulos sean isósceles.

En el caso de la proposición de entrada de la segunda inferencia "Trazó arcos, apoyándose en los dos puntos extremos del segmento", los significados implícitos son los siguientes:

- La maestra trazó arcos, con una abertura fija, a ambos lados del segmento dado;
- Dos circunferencias secantes tienen a lo más dos puntos de intersección, simétricos con respecto a la línea que une los centros;
- Los puntos donde se intersecan los arcos, con la abertura fija, equidistan de los centros de las circunferencias
- Los triángulos obtenidos comparten un lado.

Los dos primeros significados garantizan la simetría de los vértices, y los siguientes dos, garantizan la congruencia de los triángulos.

2o. argumento.

Este argumento está constituido por dos inferencias que comparten la misma proposición de entrada; a su vez una de las conclusiones está formada por otra inferencia.

Para encontrar la lógica subyacente de las inferencias principales del argumento, se podrían separar de la siguiente manera:

<table>
<tr><th>Proposición de entrada</th><th>Conclusión</th></tr>
<tr><td rowspan="2">El segmento obtenido es el eje de simetría de los triángulos [isósceles]</td><td>Es perpendicular al lado diferente de los triángulos</td></tr>
<tr><td>Parte a la mitad la figura, entonces sabemos que es el punto medio</td></tr>
</table>

El argumento busca establecer las relaciones que permitan validar la existencia de la perpendicular y la obtención del punto medio, que son los elementos geométricos que caracterizan a la perpendicular mediatriz.

El significados implícito de la proposición de entrada que da lugar a cada una de las conclusiones es el siguiente:

- Dos puntos son simétricos con respecto a una recta si equidistan de ella; es decir, si se encuentran sobre una perpendicular a dicha recta y si las longitudes de los segmentos que determinan con dicha recta son iguales.

Cada una de las condiciones de la simetría va a dar lugar en la inferencia analizada, a una conclusión diferente: que el eje de simetría de los triángulos es perpendicular a su lado común, y que divide a dicho lado en dos segmentos congruentes.

La inferencia que se encuentra en la segunda conclusión, podría esquematizarse de la siguiente manera:

Proposición de entrada	Conclusión
Parte a la mitad a la figura	sabemos que es el punto medio

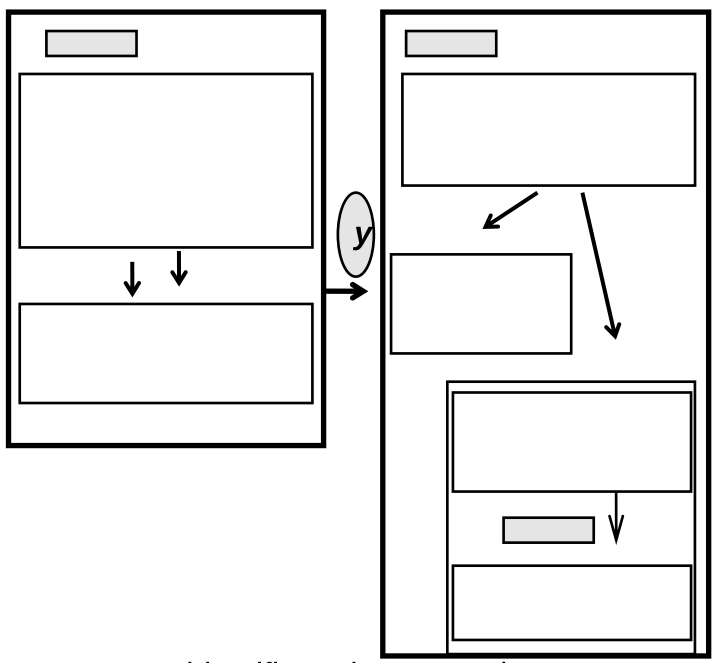
El significados implícito de la proposición de entrada es el siguiente:

- Si, en un segmento, un punto determina dos segmentos congruentes, entonces es el punto medio.

La relación entre la proposición de entrada y la del significado implícito es una relación de parte-todo, pues el segmento bisecado formaba parte de la figura.

Segundo nivel: el encadenamiento.

Retomemos los cuadros del esquema original.



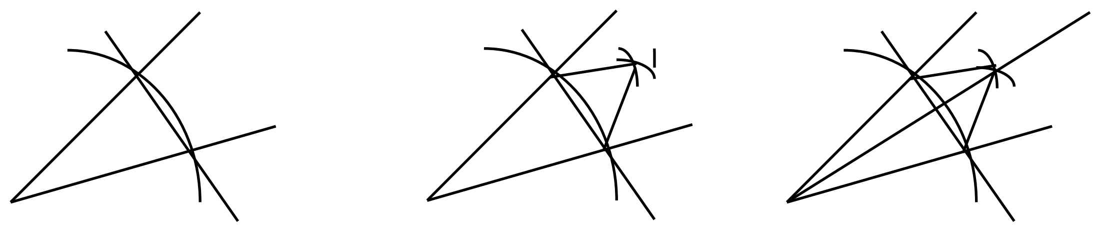
A partir del esquema se identifican dos pares de argumentos insertos en los dos recuadros más grandes, mismos que fueron analizados en el punto anterior. Al igual que esos argumentos, se puede establecer un encadenamiento entre los dos grupos. Al igual que las inferencias del razonamiento argumentativo, la relación se explicita mediante un conectivo lingüístico -"porque", "entonces", "y"-, aunque frecuentemente la relación entre los argumentos se presenta en el discurso únicamente como una relación de continuidad.

Sin embargo, por los contenidos de los argumentos del ejemplo que se está analizando, es posible afirmar que podría establecerse una relación en la que el primer argumento vendría a ser la condición para que se diera el segundo, es decir, que se requería haber establecido previamente que los triángulos fueran isósceles y simétricos para que se pudiese analizar la naturaleza y el comportamiento geométrico del segmento que une los vértices simétricos.

Como es posible observar, en los dos niveles de organización del razonamiento, la inferencia y el encadenamiento, el principio de organización es el mismo, tanto entre las proposiciones de las inferencias, como entre los argumentos, las relaciones se establecen mediante conectivos lingüísticos que hacen explícita la relación, y se basan en la relación de inclusión o exclusión de significados, frecuentemente implícitos.

Los maestros llegaron a ser capaces por sí solos de elaborar sus propios razonamientos argumentativos que les permitían probar la validez de alguna construcción pedida. Un ejemplo es el registro de la intervención siguiente que da cuenta del la situación en la que se pretendía validar la construcción de la bisectriz de un ángulo propuesta en el punto 5 de la actividad 1 “Paralelas y perpendiculares”, del Tema 3 “Paralelas, perpendiculares y trazos interesantes” (BLOCK (coord.) 1994, 183). El problema consistía en trazar las bisectrices de los 3 ángulos de un triángulo para obtener el incentro.

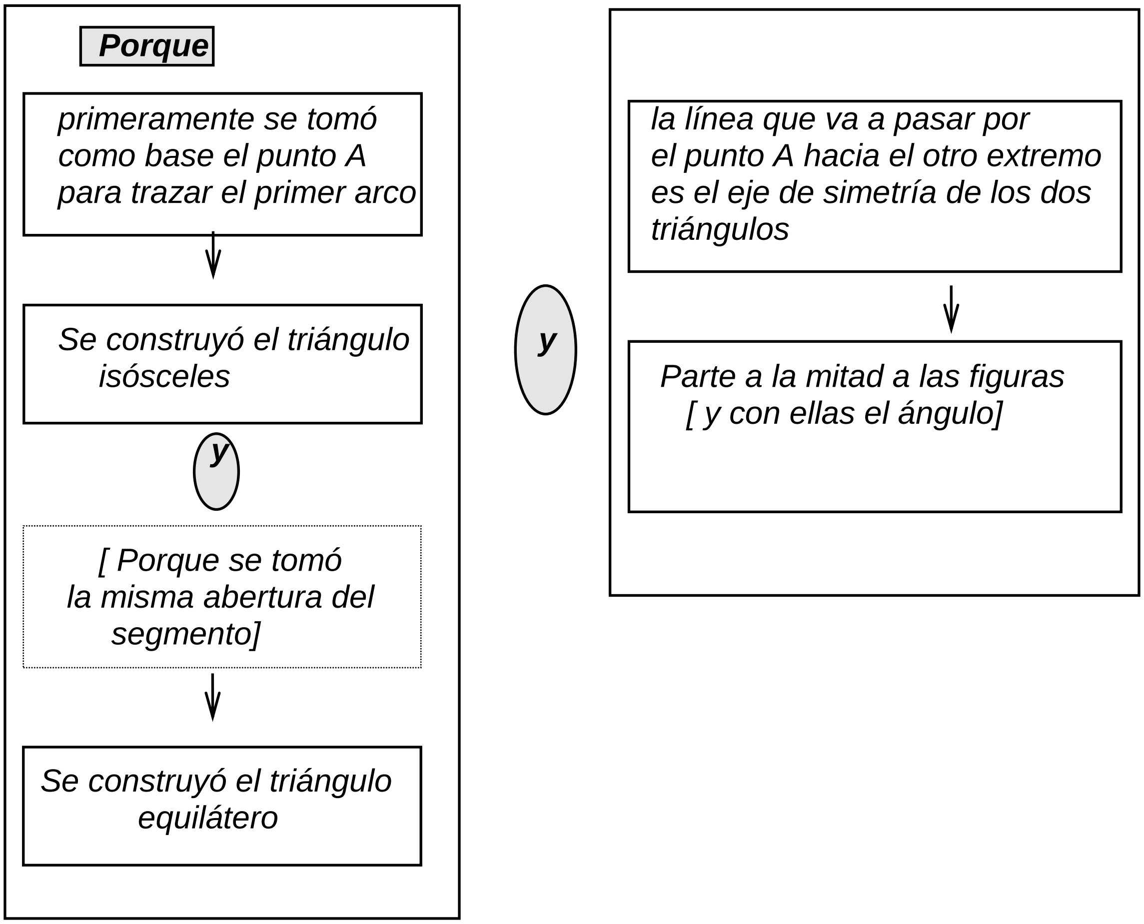
Para obtener este trazo, los maestros tomaban con el compás una abertura arbitraria, y haciendo centro en el vértice del ángulo, cortaban los lados del ángulo, obteniendo dos puntos con los que determinaba un segmento. Posteriormente, con una abertura igual a la longitud del segmento obtenido, y haciendo centro en los extremos de dicho segmento, trazaban un triángulo equilátero. Finalmente, unían el vértice del triángulo obtenido con el vértice del ángulo dado, obteniendo así la bisectriz del ángulo.



En el siguiente fragmento de registro, uno de los maestros da una explicación que le permitiría validar la construcción.

> Y.: ¿Por qué estoy segura que estoy pasando por la mitad?
> Jesús: Porque primeramente se tomó como base el punto A para trazar el primer arco
> Y.: ¿Y luego?
> Jesús: A partir de ahí se construyó el primer triángulo isósceles y posteriormente se continúa con el otro triángulo equilátero, y esa línea que va a pasar por el punto A hacia el otro extremo va a ser el eje de simetría de los dos triángulos.
> Y.: Es eje de simetría de los dos triángulos. Esta línea que trazamos aquí es eje de simetría de los dos triángulos. Siendo eje de simetría, si nosotros dobláramos los triángulos, partiría ese lado donde está pasando el eje a la mitad. Entonces así se calculan las mitades de los ángulos.

El esquema de la red inferencial que se propone para el razonamiento antes expuesto es el siguiente:



Como en el esquema anterior, fue necesario agregar entre corchetes algunos significados implícitos para hacerlo inteligible.

Como señala Duval (DUVAL 1991, 27), la ventaja de estos esquemas radica en que es posible identificar si existe alguna relación de implicación entre las proposiciones o entre los argumentos que permitan suponer que se realizan algunas operaciones lógicas.

Como en el caso del primer esquema analizado, la explicación toma la forma de un razonamiento argumentativo: se basa en los mismos principios organizativos y la inferencia entre proposiciones se apoya en los contenidos semánticos de éstas. Con este ejemplo, en el que la conductora casi no interviene, se quiere mostrar que los maestros comprendieron la estructura de las explicaciones que tendrían que elaborar en situaciones de validación, misma que utilizaron para validar los resultados de otros trazos.

Se podría afirmar que los maestros lograron construir razonamientos argumentativos gracias a dos determinantes: las situaciones de socialización de resultados que se fueron dando desde el inicio del taller, y por lo tanto, era algo novedoso tener que defender y argumentar a favor de sus resultados; por otro lado, la petición explícita de la conductora de que probaran la validez de los resultados de sus trazos.

Desde el punto de vista de Duval (*Ibid.*, 33) es posible que un alumno con cierto dominio del razonamiento argumentativo tenga acceso al razonamiento deductivo, si las situaciones didácticas le provocan la necesidad de utilizar las relaciones entre proposiciones como operaciones.

En oposición al razonamiento argumentativo, Duval considera que la estructura del razonamiento deductivo es ternaria: existen dos proposiciones, una de entrada, una de salida, y una tercer proposición que es la regla de inferencia, explícita en este tipo de razonamientos. La “inferencia”, o paso de razonamiento, consiste en pasar de una proposición considerada como premisas, a otra proposición -la conclusión-, mediante una regla de inferencia derivada de una teoría local (axiomas, teoremas, definiciones).

De esta manera, las proposiciones se relacionan en función de su estatuto operatorio, es decir, del papel que juega cada una de las proposiciones dentro de la estructura ternaria (entrada, regla de inferencia o conclusión); además se considera relevante su valor de verdad.

Cuando hay más de dos inferencias en el razonamiento deductivo, Duval identifica una etapa de encadenamiento: la proposición que fungió como conclusión de la primer inferencia pasa a ser la hipótesis de la segunda inferencia, y así sucesivamente se van “reciclando” las proposiciones.

Cabe señalar que las proposiciones que aparecen en un razonamiento argumentativo no se reciclan, sino que son interpretadas desde puntos de vista distintos.

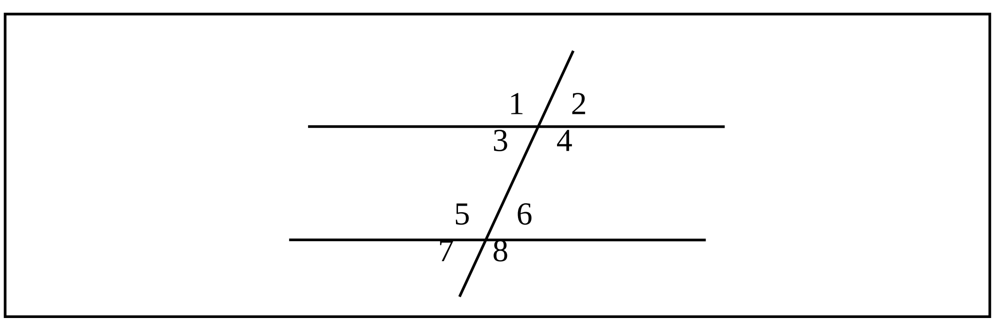
En conclusión, Duval considera que el razonamiento deductivo tiene dos niveles de organización, que se rigen por principios de organización distintos:

1) Nivel de organización de la fase de inferencia, cuyo principio organizador es el estatuto operatorio de las proposiciones, y

2) Nivel de organización de la fase de encadenamiento, cuyo principio organizador es el reciclaje.

A continuación se identificarán los dos niveles en un fragmento de registro que da cuenta de uno de los pocos momentos en los que los maestros que asistieron al curso de actualización lograron articular una prueba cuyo funcionamiento está más próximo al razonamiento deductivo que al razonamiento argumentativo. Se trata de la socialización de resultados del punto 2 de la actividad 1 “Paralelas y perpendiculares”, del Tema 3 “Paralelas, perpendiculares y trazos interesantes”(BLOCK (coord.) 1994, 169).

El ejercicio consistía en la identificación de ángulos congruentes en una configuración en la que había un conjunto de rectas, de las cuales algunas aparentemente, eran paralelas atravesadas por una transversal. Una vez que los maestros dijeron cuáles eran los ángulos que consideraban congruentes, la conductora pidió que se “demostrara” que en efecto eran congruentes. El dibujo en el pizarrón que se tomaba como referencia es el siguiente:



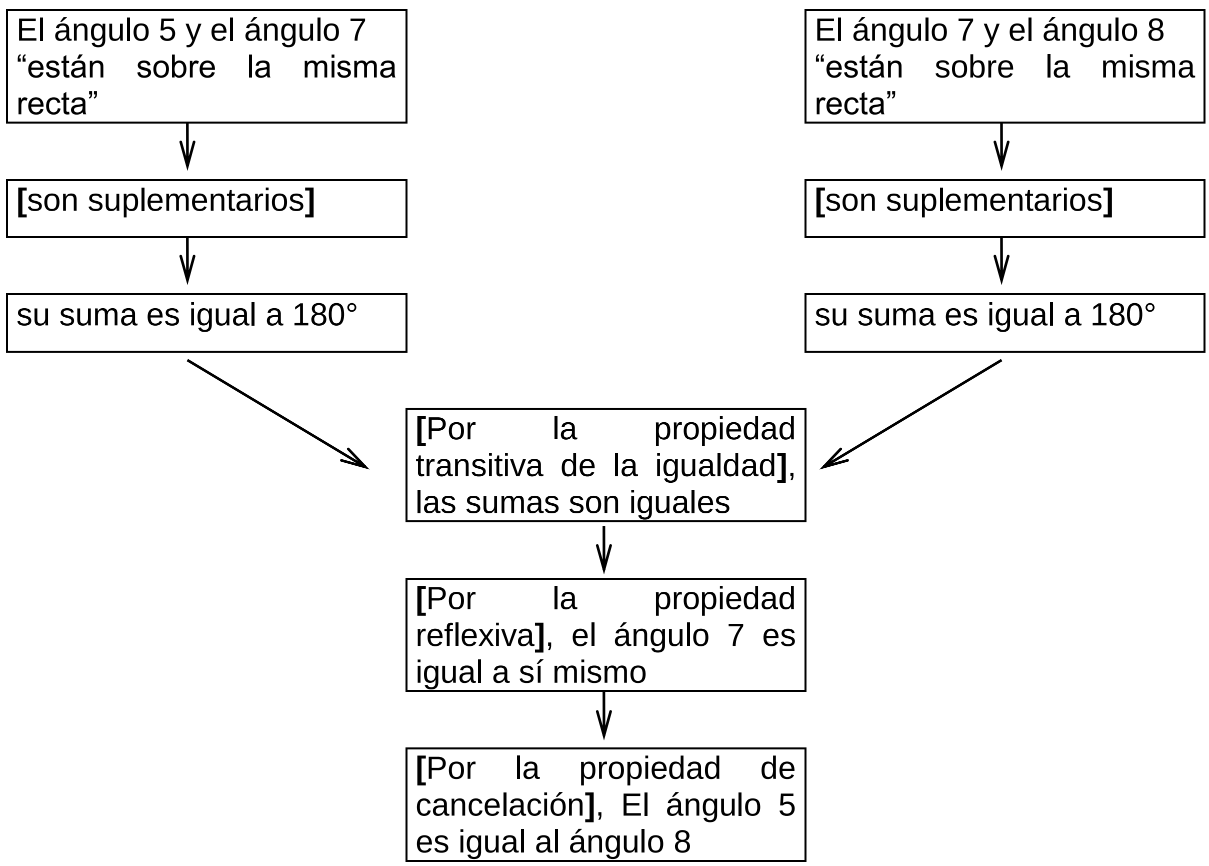
Los maestros partieron de la afirmación de que había un par de rectas paralelas atravesadas por una transversal.

> Y.: ¿Sí? ¿Seguro? A ver maestra venga para acá, ahora demuéstreme que el ángulo 5 es igual al ángulo 8. Porque ahí dice que el ángulo 5 es igual al ángulo 8, ¿Entonces cómo se va a demostrar? (Los maestros comentan entre ellos)
> Ceci: Pues porque ... por lo mismo ¿No?
> Y.: ¿Qué es lo mismo? Pero ¿Cómo lo escribe?
> Ceci: El ángulo 5 más el ángulo 7, me da 180 (Y. asiente) Y el ángulo 6 más el ángulo 8 (Los maestros la interrumpen. Dicen que no, algunos dicen 5)
> Y.: Pero tiene cuatro ángulos diferentes
> Ceci: Ah sí es cierto...
> Y.: Entonces ¿Cómo se comportan esos cuatro?
> Ceci: Aquí, 5 y 8
> Clis: No, 5 y 6
> Ceci: El ángulo 5 más el ángulo 7 me da 180 (Y. asiente) y el ángulo 7 más el ángulo 8 también me da 180.
> Y.: ... y también le da 180 ¿Ahora qué? ¿Esas dos sumas qué tienen en común?
> Ceci: El ángulo 7...
> Y.: ... el ángulo 7 que sumado con otra cosa ...
> Ceci: ... me da 180
> Y.: ... 180, entonces esa otra cosa tiene que ser igual en las dos sumas ¿No?
> Ceci: Sí
> Y.: ... entonces esa otra cosa en la primer suma es 7 y esa otra cosa en la suma número dos es 8, entonces 7, el ángulo 7 tiene que ser igual al ángulo 8 ¿Será?
> Jesús: El 5
> Y.: El 5 igual a 8. El 7 es el común
>
> (Escribe en el pizarrón)

$$\hat{5} + \hat{7} = 180°$$
$$\hat{7} + \hat{8} = 180°$$

FIG. 11. PIZARRÓN.

El esquema que permitiría identificar el funcionamiento operatorio de la “prueba” que está dando la maestra Ceci se muestra a continuación. La proposición entre corchetes que se refiere a que los ángulos son suplementarios, es el único significado que no aparece explícitamente en el discurso; las otras proposiciones entre corchetes -que se refieren a propiedades de la igualdad- no fueron enunciadas de esa manera, pero en el discurso se hacía referencia explícita a ellas. En este caso, las flechas sí indican implicación lógica, es decir, representan una operación cognitiva.



1) Nivel de organización de la fase de inferencia. En general, el principio organizador fueron las propiedades de la igualdad, relevantes sobre todo en la introducción al final del razonamiento, cuando se introduce la propiedad transitiva, la reflexiva y la de la cancelación. Cabe subrayar que la propiedad transitiva de la igualdad es la primera proposición que se introduce con un estatuto fuertemente operatorio entre las dos cadenas.

2) Nivel de organización de la fase de encadenamiento. Los maestros parten de la afirmación de que dos pares de ángulos están sobre una misma recta; desde esa premisa, se van dando una serie de inferencias, que van corriendo en paralelo, de tal suerte que lo que había sido conclusión de la inferencia anterior, se convierte en premisa de la siguiente, reciclándose de esta manera cada una de las proposiciones.

De este análisis se puede concluir que, si se proponen situaciones didácticas apropiadas, los maestros construyen razonamientos deductivos que implican una lógica -la de la inferencia-, y una operatoria -la de las propiedades de la igualdad-; también logran recuperar algunos conocimientos en esta situación particular - lo que se refería a los ángulos colineales y suplementarios-.

Sin embargo, para que los maestros lograran elaborar más “pruebas” con características de razonamiento deductivo, habría sido necesario proponerles más situaciones de validación desde los materiales, y no sólo que hubiesen sido propiciadas por un medio social -en este caso la conductora y el grupo-.

Conclusiones

Una de las finalidades centrales de la propuesta de actualización para profesores de educación básica *La enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria. Taller para maestros* (BLOCK (coord.) 1994) consiste en que los maestros reorganicen sus conocimientos previos sobre contenidos matemáticos. Según los autores, esto se debe lograr a través de secuencias conformadas por situaciones didácticas que permitan hacer evolucionar las estrategias informales de los maestros hacia estrategias más convencionales. Las situaciones didácticas que posibilitarían dicha evolución son las situaciones problemáticas, es decir aquellas que presentan un reto intelectual al sujeto, quien reorganiza sus conocimientos previos para diseñar una herramienta que posibilite resolver el problema propuesto.

El objetivo de la investigación, cuyas conclusiones se exponen a continuación, consistió en indagar si las concepciones de los maestros sobre contenidos geométricos se vieron modificadas por el desarrollo del taller de actualización, bajo la modalidad de curso dirigido por un conductor. Para ello fue necesario hacer el análisis de la pertinencia de los materiales a nivel de los contenidos geométricos, de la secuencia didáctica, y la coherencia entre los propósitos de los autores y su instrumentación en los materiales. También fue necesario observar el desarrollo del taller, elaborar los registros de observación y analizarlos, con la finalidad de identificar cuáles eran las concepciones sobre contenidos geométricos que los maestros hacían intervenir durante la resolución de los problemas planteados en la propuesta, y si esas concepciones eran distintas o no al resolver problemas posteriores.

A continuación se exponen algunas conclusiones de los análisis realizados, y se establecen las interrogantes que darían lugar a otras investigaciones enmarcadas en la problemática derivada de la instrumentación de un taller como el propuesto.

a) Respecto al análisis de las secuencias didácticas de los materiales de la propuesta de formación.

El análisis de la propuesta en la parte que corresponde a la unidad de geometría (Capítulo 2), dio como resultado la categorización de las situaciones problemáticas propuestas en los materiales para el tema de geometría, que permitirían la reorganización de conocimientos previos de los maestros y el perfeccionamiento de algunas habilidades como la percepción geométrica, la imaginación espacial, la anticipación de formas en los trazos y construcciones, y el manejo de instrumentos de dibujo. Estas situaciones son las siguientes:

1. Problemas de percepción geométrica. Los maestros tienen que encontrar figuras o identificar relaciones geométricas en configuraciones.
2. Problemas que propician el análisis de propiedades métricas de figuras y cuerpos, para la elaboración de criterios de clasificación.
3. Clasificación de figuras y cuerpos geométricos a partir de criterios conocidos o de criterios elaborados por los mismos maestros.
4. Descripción de figuras y cuerpos geométricos.
5. Problemas para la reconceptualización de relaciones interfigurales (simetría y paralelismo).
6. Trazos de figuras y configuraciones con diferentes recursos, a partir de secuencias previamente diseñadas.
7. Construcción de poliedros a partir del armado de plantillas. Las plantillas se construyen a partir de figuras aisladas, proporcionadas en el cuadernillo de material recortable.
8. Construcción de un lugar geométrico a partir de un problema “cotidiano”. Se plantea un problema de tipo “enunciado”, en el que es necesario encontrar una región sobre el plano, respetando restricciones geométricas.

- El análisis de estas situaciones didácticas mostró que el nivel matemático de algunos contenidos geométricos era heterogéneo. Por ejemplo, las situaciones propuestas para la reconceptualización del paralelismo involucran conceptos equívocos como el de “posición”, mientras que la actividad tendiente a la clasificación de los cuadriláteros en función de sus diagonales mostró ser pertinente por la manera como se involucra el análisis de diversos elementos geométricos intrafigurales de los cuadriláteros (paralelismo de sus lados, propiedades métricas de las diagonales, tamaño de los lados).

- También es posible concluir que algunas de las situaciones propuestas no son realmente problemas, en tanto no presentan un reto intelectual al maestro que posibilite la evolución de estrategias no convencionales. Por ejemplo, casi todas las situaciones propuestas de trazo con regla y compás requieren del maestro la habilidad de seguir instrucciones por escrito, sin apelar a sus conocimientos previos al respecto.

- No se identificó secuencias didácticas en el conjunto de las actividades propuestas en los materiales. Desde la teoría de las situaciones didácticas desarrolladas por Brousseau (1993, 1994), una secuencia didáctica estaría formada por situaciones de acción, de formulación, de validación, y de institucionalización. El análisis mostró que sólo existen situaciones de acción y de formulación, no hay situaciones de validación ni de institucionalización. Se identificó que, sobre todo en las situaciones tendientes a la reconceptualización de la simetría y el paralelismo, se propone la verificación perceptual como medio para la comprobación de la existencia de alguna relación geométrica, sin favorecer situaciones de validación de los resultados que involucren un razonamiento geométrico que de cuenta de la necesidad de dicha relación. Tampoco se identifica una secuencia en cuanto a la presentación de los contenidos geométricos, que aparecen como si estuvieran aislados.

- Finalmente se concluye que no todos los propósitos enunciados al inicio se cumplen de manera homogénea en el desarrollo de las actividades propuestas.

- Para el diseño de secuencias didácticas dirigidas a estudiantes de cualquier nivel educativo, se requiere de estudios de ingeniería didáctica que den cuenta de la pertinencia de dichas secuencias. El diseño de las secuencias didácticas para esta propuesta no es la excepción. Sin embargo, esta propuesta de taller, sobre todo en lo que se refiere a contenidos geométricos, tuvo muy poco apoyo de investigaciones previas sobre el efecto de secuencias didácticas para maestros, que son adultos, con intereses profesionales específicos. Más aún, a nivel mundial hay pocos estudios de ingeniería didáctica sobre secuencias destinadas al aprendizaje de la geometría bajo esta metodología. En particular, ha habido pocos intentos de caracterización del tipo de problemas que favorecerían la contextualización del conocimiento geométrico, las situaciones problemáticas que permitirían hacer evolucionar estrategias espontáneas a estrategias convencionales, y las situaciones que posibilitarían que los estudiantes desarrollaran un razonamiento geométrico.

- La geometría escolar está determinada por distintas tradiciones sobre la enseñanza de la geometría, cada una con su propia lógica, tal como fue analizado en el capítulo 1. Los autores de la propuesta están permeados por esas mismas concepciones. En el diseño de las secuencias se advierte la influencia de dichas tradiciones en las concepciones de los autores sobre lo que tendría que ser la geometría. Por ejemplo, los autores intuyen que las situaciones de trazos con regla y compás permiten la adquisición de conocimientos geométricos, y suponen que la conceptualización de relaciones geométricas se logra siguiendo una gran cantidad de secuencias de trazo diseñadas previamente.

- Como se verá en el apartado siguiente, el éxito del curso de actualización observado se debió en buena medida a la intervención del conductor que propició situaciones validación y de institucionalización, al abrir espacios de confrontación y análisis de los resultados obtenidos de los problemas propuestos a nivel grupal. Sería conveniente investigar si una mejor secuencia didáctica propuesta desde los materiales, posibilita una optimización en el desarrollo del taller.

- Siguiendo el mismo orden de ideas del punto anterior, la modalidad autodidacta de la propuesta sería factible si se incluyen en los materiales situaciones didácticas que permitan a los maestros explicar la necesidad de los resultados a los que llegaron, y validarlos en función de los contenidos ya abordados.

b) Respecto al curso de actualización.

El curso de actualización impartido a maestros en servicio, y que se llevó a cabo en las instalaciones de una Escuela Normal del Estado de México, permitió aquilatar la buena disposición de los maestros a participar activamente en su actualización y la valiosa intervención del conductor.

- A pesar de que las actividades de los materiales no conforman secuencias didácticas, la propuesta en su conjunto mantiene la atención y el compromiso de todos los maestros que estuvieron interesados en seguir el curso. En el caso particular de la unidad de geometría, el abordar problemas que requirieron el uso de materiales didácticos, como el geoplano y el Tangram, llevó a los maestros a mostrar interés en las actividades.

- A pesar de que los maestros estaban familiarizados con ciertos contenidos geométricos y con la lógica escolar que los sustenta, y de que había actividades que no tenían orden en su secuencia[20], que no eran correctas matemáticamente, o en las que no era evidente su necesidad geométrica[21], los maestros depositaron su confianza en el curso, y siempre trataron de encontrar una lógica en lo que se les proponía. El desarrollo del curso llegó a mostrar que los maestros logran dar sustento a un determinado argumento en la solución de un problema geométrico con sus conocimientos previos.

- Los maestros no se mostraron renuentes a resolver las lecciones de los libros de texto, aunque, por algunas expresiones al respecto, dejaban entrever que eso violentaba su condición de maestros, sobre todo cuando ellos mismos no podían resolver los problemas que se proponían para los niños. Al respecto sería conveniente que se llevase a cabo una investigación sobre las concepciones de los maestros sobre la manera como aprenden los niños en función de la manera como ellos mismos aprenden, de lo que creen que es factible que los niños hagan en función del grado de dificultad que ellos mismos afrontan y lo que creen posible realizar con los materiales que utilizan para su aprendizaje y los que sirven de recursos didácticos para trabajar con los niños. También sería interesante investigar sobre las concepciones de los maestros sobre el sistema didáctico y la relación educativa: la representación que ellos se han formado del escenario que deben construir en su propio salón de clases al momento de instrumentar la metodología propuesta y el significado que dan a la matemática en un determinado contexto.

[20] Como la actividad en la que se pretendía que los maestros conjeturaran sobre la congruencia de ángulos correspondientes con tan sólo "haber mirado" una configuración en la que aparentemente había conjuntos sobrepuestos de rectas paralelas atravesados por una transversal.

[21] Por ejemplo, parecería que la secuencia de trazos para dividir un segmento en un número *n* de partes fue producto del azar, pues no se hace referencia al teorema de Tales.

- La presencia del conductor fue exitosa porque permitió la confrontación de los resultados, dio dirección a las discusiones y abrió los espacios, a través de preguntas pertinentes, para el desarrollo de situaciones de validación e institucionalización de resultados. En ese sentido sería deseable que se hiciera una investigación sobre la viabilidad del taller de actualización con la modalidad autodidacta -que en principio es la que se propone-.

c) Respecto al análisis de los protocolos de observación del curso de actualización.

El análisis de los protocolos de observación del curso en donde se instrumentó la propuesta de actualización permitió identificar algunas concepciones docentes, que han sido documentadas por otros investigadores y cuyo estado de conocimiento fue objeto de la primera parte del capítulo 1, en la manera de abordar los problemas geométricos planteados por la propuesta. En un segundo momento se examinó si las concepciones que los maestros utilizaban en problemas posteriores eran las mismas que utilizaban al inicio, o si se habían modificado como consecuencia del taller.

Los maestros recurrían, en primera instancia, a sus concepciones sobre contenidos geométricos cuando intentaban resolver los problemas planteados por la propuesta. Pero para resolver dichos problemas, pero sobre todo en la confrontación grupal de resultados, los maestros requerían reorganizar sus conocimientos previos, y establecer relaciones distintas que dieran lugar a conocimientos nuevos. El éxito que obtenían al utilizar sus nuevos conocimientos en la situación para la que habían sido creados, los alentaba a aplicarlos en un momento posterior al abordar otras situaciones problemáticas. Para fines analíticos de esta investigación, este segundo momento fue muy valioso porque permitió verificar si las concepciones habían sufrido alguna transformación, y en qué sentido se habían transformado.

Las concepciones de los maestros que se modificaron son las siguientes:

- Algunos maestros tenían la concepción de que las figuras y relaciones geométricas se caracterizaban mediante la asignación de un número producto de una medición a algunas de dimensiones lineales. Con esta concepción los maestros se aproximaban a la solución de algunos problemas, en particular las actividades de trazo de triángulos.

  Poco a poco, los maestros abandonaron la idea de esa caracterización, centrando su atención en propiedades métricas de las figuras. Cabe aclarar que uno de los elementos que permitió que se transformara esta concepción fue la intervención del conductor quien, por iniciativa propia, estableció el contrato con el grupo de maestros de evitar en lo posible el uso de la regla graduada.

- En la aproximación a los problemas planteados los maestros también se referían a la caracterización de las figuras y cuerpos geométricos en función de su posición relativa con respecto a los bordes de la hoja, en el caso de las figuras, y con respecto a la cara en la que se “apoyan”, en el caso de los cuerpos.

  Algunas actividades de análisis de las características geométricas de las figuras, y otras tantas de trazo y construcción, permitieron que los maestros prescindieran de la posición para caracterizar a las figuras.

- Los docentes destacaban la importancia de considerar “regulares” a las figuras que tenían un nombre, y que perceptualmente presentaban alguna una regularidad, como la congruencia de algunos lados o ángulos, alguna simetría, etc.

  Las actividades de análisis de las propiedades geométricas de las figuras tendientes a la elaboración de criterios de clasificación permitieron a los docentes abandonar la idea de la “regularidad” de una figura asociada a su nomenclatura.

- El análisis también reveló que la geometría requiere para su estudio abordar en primer término, secuencias constituidas por situaciones didácticas que permitan a los maestros la elaboración de proposiciones que den cuenta del comportamiento de las relaciones de tipo geométrico -intra e interfigurales- que tienen lugar durante el proceso de resolución de un problema geométrico; a estas proposiciones se les dio el nombre de conjeturas.

  Algunas actividades del curso permitieron la elaboración de conjeturas.

- También a través del análisis de los protocolos fue posible advertir que el trabajo grupal fue indispensable para el desarrollo de la propuesta de actualización, pues durante la confrontación de los resultados de los problemas -y en este caso, de las conjeturas-, surge el imperativo de elaborar argumentos que permitan justificar la pertinencia de dichas conjeturas. En el proceso de argumentación se ponen en juego conocimientos previos personales y los conocimientos compartidos. En otras palabras, al solicitar un argumento sobre la validez de la conjetura, por parte del conductor o del grupo, se crea la urgencia en el maestro de elaborar una “prueba” que muestre a los demás compañeros que su conjetura es necesariamente la correcta. En esa interacción social se reorganizan los conocimientos previos que se saben compartidos por los compañeros, la coherencia y rigor lógico cobran importancia, y los contenidos geométricos adquieren sentido por encontrarse en un contexto de validación de resultados. Cabe aclarar que de no haberse propiciado situaciones grupales de confrontación de resultados en el curso, los resultados no habrían sido los mismos, porque el centramiento excesivo en la verificación de resultados mediante la percepción visual[22], propuesto en las actividades de los materiales del taller, anula la posibilidad del razonamiento geométrico, de la validación del resultado, y por ende de la prueba.

El alcance manifestado por las transformaciones de las concepciones observadas en el curso es válido únicamente para el ámbito del desarrollo de las actividades de geometría, aunque fue posible observar la aplicación de estrategias que los maestros utilizaron en actividades de geometría, en la solución de problemas posteriores planteados en la unidad de medición. Sería objeto de otro trabajo de investigación saber si los maestros que participaron en el curso afrontan los problemas de enseñanza desde sus concepciones aparentemente ya transformadas.

[22] Verificar, por ejemplo, si dos figuras son congruentes al superponerlas.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ARTIGUE, Michèle (1995a). “Ingeniería didáctica”. En ***Ingeniería didáctica en educación matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas***. Pedro GÓMEZ (ed.). Bogotá: Grupo Editorial Iberoamérica.

ARTIGUE, Michèle (1995b). “El lugar de la didáctica en la formación de profesores”. En ***Ingeniería didáctica en educación matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas***. Pedro GÓMEZ (ed.). Bogotá: Grupo Editorial Iberoamérica.

AVALOS ROGEL, Alejandra y Rodolfo MÉNDEZ BALDERAS (1993). “Un punto de vista para la enseñanza de la geometría”. ***IV Congreso de profesores de matemáticas. Zona metropolitana.*** México: Colegio de Bachilleres - Asociación Nacional de Profesores de Matemáticas.

AVALOS ROGEL, Alejandra y Rodolfo MÉNDEZ BALDERAS (1995). “La formación de profesores y la enseñanza de la geometría”. En ***Memorias del V Simposio Internacional en Educación Matemática Elfriede Wenzelburger***, P. BALDERAS, A. CARLÓN, S. CRUZ, J. ESTRADA, A. MARTÍNEZ, M. MEDA y J. RECIO (comps.). México: UACPyP (CCH - UNAM) - Grupo Editorial Iberoamérica.

ÁVILA STORER, Alicia (1988). ***La enseñanza oficial de las matemática elementales en México; su pedagogía y transformación (1944-1986)***. Cuadernos de cultura pedagógica (Serie Investigación Núm. 6). México: Universidad Pedagógica Nacional.

ÁVILA STORER, Alicia (1991). “Matemáticas, enseñanza y formación de profesores”. ***Pedagogía 7 (21)***, 11-18. México: Univesidad Pedagógica Nacional.

ÁVILA STORER, Alicia y Hugo BALBUENA CORRO (Coord.); ÁVILA Alicia, Hugo BALBUENA CORRO, Pedro BOLLÁS y J. CASTREJÓN (Autores) (1994). ***Matemáticas. Tercer grado***. México: Secretaría de Educación Pública.

ÁVILA STORER, Alicia, Hugo BALBUENA CORRO y Pedro BOLLÁS (Autores) (1995). ***Matemáticas. Cuarto grado***. México: Secretaría de Educación Pública.

BALACHEFF, Nicolas (1994).“Procesos de prueba y situaciones de validación“. En ***Memorias de la III Jornada sobre la enseñanza de la Geometría***. ACUÑA, Claudia y Gonzalo ZUBIETA (ed.). México: Departamento de Matemática Educativa del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional y Programa Nacional de Formación y Actualización de Profesores de Matemáticas de la Secretaría de Educación Pública .

BERTHÉLOT, Réné y Marie Hélène SALIN (1994) ***L'enseignement de l'espace et de la géometrie dans la scolarité obligatoire***. [Tesis para obtener el grado de Doctor en la especialidad de Didáctica de las Matemáticas]. Paris: Univesidad de Bordeaux I.

BISHOP, Alan J. (1980). “Habilidades espaciales y educación matemática. Una reseña”. ***Educational Studies in Mahtematics. 11*** (3). Boston: D. Reidel Publishing Co.

BISHOP, Alan J. (1986). “What are some obstacles to learning geometry?”. En ***Mathematics education. Teaching of geometry. 5.*** R. MORRIS (ed.). París: UNESCO.

BISHOP, Alan J. (1993). “Implicaciones didácticas de la investigación sobre visualización”. En ***Antología en educación matemática***. [Materiales de apoyo en Educación Matemática/ 1]. R. CAMBRAY NÚÑEZ, E. A. SÁNCHEZ y G. ZUBIETA (comps). México: Departamento de Matemática Educativa del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional.

BLOCK SEVILLA, David, Martha DÁVILA y Patricia MARTÍNEZ (1990). “Los algortimos en la resolución de problemas: concepciones de los maestros”. Trabajo presentado en el I Congreso Iberoamericano de Educación Matemática. Mecanograma. Sevilla.

BLOCK SEVILLA, David (coord.); BALBUENA CORRO, Hugo, David BLOCK SEVILLA, Martha DÁVILA VEGA, Mónica SCHULMAISTER LAGOS, Víctor GARCÍA MONTES, Eva MORENO SÁNCHEZ (Autores) (1994). ***La enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria. Taller para maestros***. ***Primera y segunda partes. Programa de actualización permanente***. México: Secretaría de Educación Pública, Dirección General de Materiales y Métodos Educativos de la Subsecretaría de Educación Básica y Normal.

BLOCK SEVILLA, David e Irma Rosa FUENLABRADA VELÁZQUEZ (coord.); BLOCK SEVILLA, David , Irma Rosa FUENLABRADA VELÁZQUEZ, Alicia CARVAJAL, y N. Patricia MARTÍNEZ (Autores). (1995). ***Matemáticas. Primer grado***. México: Secretaría

BONILLA RIUS, Elisa, Alba MARTÍNEZ OLIVÉ y Rodolfo RAMÍREZ RAYMUNDO (coord.). (1994a). ***Libro para el maestro. Matemáticas. Primer grado***. México: Secretaría de Educación Pública, Subsecretaría de Educación Basica y Normal.

BONILLA RIUS, Elisa, Alba MARTÍNEZ OLIVÉ y Rodolfo RAMÍREZ RAYMUNDO (coord.). (1994b). ***Libro para el maestro. Matemáticas. Segundo grado***. México: Secretaría de Educación Pública, Subsecretaría de Educación Basica y Normal.

BONILLA RIUS, Elisa, Alba MARTÍNEZ OLIVÉ y Rodolfo RAMÍREZ RAYMUNDO (coord.). (1994c). ***Libro para el maestro. Matemáticas. Tercer grado***. México: Secretaría de Educación Pública, Subsecretaría de Educación Basica y Normal.

BONILLA RIUS, Elisa, Alba MARTÍNEZ OLIVÉ y Rodolfo RAMÍREZ RAYMUNDO (coord.). (1994d). ***Libro para el maestro. Matemáticas. Cuarto grado***. México: Secretaría de Educación Pública, Subsecretaría de Educación Basica y Normal.

BONILLA RIUS, Elisa, Alba MARTÍNEZ OLIVÉ y Rodolfo RAMÍREZ RAYMUNDO (coord.). (1994e). ***Libro para el maestro. Matemáticas. Quinto grado***. México: Secretaría de Educación Pública, Subsecretaría de Educación Basica y Normal.

BONILLA RIUS, Elisa, Alba MARTÍNEZ OLIVÉ y Rodolfo RAMÍREZ RAYMUNDO (coord.). (1994f). ***Libro para el maestro. Matemáticas. Sexto grado***. México: Secretaría de Educación Pública, Subsecretaría de Educación Basica y Normal.

BROUSSEAU, Guy (1993). “Fundamentos y métodos de la didáctica de las matemáticas”. En ***Lecturas en didáctica de las matemáticas: Escuela Francesa*** [Grupo de estudios sobre la Enseñanza de las Matemáticas en el Bachillerato], SÁNCHEZ SÁNCHEZ, Ernesto A. y Gonzalo ZUBIETA B. (comps.). México: Departamento de Matemática Educativa del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional.

BROUSSEAU, Guy (1994). “Los diferentes roles del maestro”. En ***Didáctica de matemáticas. Aportes y reflexiones***. C. PARRA e I. SAIZ (comps.) Buenos Aires: Paidós.

CHETVERUKHIN, N. F. (1986). “Una investigación experimental sobre los conceptos e imaginación espaciales de los estudiantes”. En ***Proceedings of the Academy of Pedagogical Sciences of the RSFSR. 21***. (1949) Moscu: RSFSR. (Traducido al español por Olimpia Figueras).

COXETER, H.S.M. (1988). ***Fundamentos de geometría***. México: Limusa.

DIENES, Z. P. y GOLDING, E. W. (1969). ***La geometría a través de las transformaciones 1, 2***. Barcelona: Teide.

DOUADY, Régine (1995a). “Nacimiento y desarrollo de las matemáticas en Francia”. En ***Ingeniería didáctica en educación matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas***, Pedro GÓMEZ (ed.). Bogotá: Grupo Editorial Iberoamérica.

DOUADY, Régine (1995b). “La ingeniería didáctica y la evolución de su relación con el conocimiento”. En ***Ingeniería didáctica en educación matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas***. Pedro GÓMEZ (ed.). Bogotá: Grupo Editorial Iberoamérica.

DUVAL, Raymond (1991). “Estructura del razonamiento deductivo y aprendizaje de la demostración” [Síntesis del original en francés por Figueroa, Marván y Zubieta]. En ***Memorias de la III Jornada sobre la enseñanza de la Geometría***. Claudia ACUÑA y Gonzalo ZUBIETA (ed.) (1994). México: Departamento de Matemática Educativa del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional y Programa Nacional de Formación y Actualización de Profesores de Matemáticas de la Secretaría de Educación Pública .

DUVAL, Raymond (1993). “Semiosis y noesis”. En ***Lecturas en didáctica de las matemáticas: Escuela Francesa***. Ernesto A. SÁNCHEZ SÁNCHEZ y Gonzalo ZUBIETA BADILLO (ed.) (1993). México: Departamento de Matemática Educativa del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional.

EDWARDS, D. (1990). “El papel del profesor en la construcción social del conocimiento”. ***Investigación en la escuela 10***. 33-49

ERICKSON, Frederick (1986). “Métodos cualitativos de investigación sobre la enseñanza”. En ***La investigación de la enseñanza, II. Métodos cualitativos y de observación***. Merlin C. WITTROCK (ed.) . Barcelona: Paidós.

Fichero. Actividades didácticas. Matemáticas. Primer grado. (1994). México: Secretaría de Educación Pública, Dirección General de Materiales y Métodos Educativos de la Subsecretaría de Educación Basica y Normal.

Fichero. Actividades didácticas. Matemáticas. Segundo grado. (1994). México: Secretaría de Educación Pública, Dirección General de Materiales y Métodos Educativos de la Subsecretaría de Educación Basica y Normal.

Fichero. Actividades didácticas. Matemáticas. Tercer grado. (1994). México: Secretaría de Educación Pública, Dirección General de Materiales y Métodos Educativos de la Subsecretaría de Educación Basica y Normal.

Fichero. Actividades didácticas. Matemáticas. Cuarto grado. (1994). México: Secretaría de Educación Pública, Dirección General de Materiales y Métodos Educativos de la Subsecretaría de Educación Basica y Normal.

Fichero. Actividades didácticas. Matemáticas. Quinto grado. (1994). México: Secretaría de Educación Pública, Dirección General de Materiales y Métodos Educativos de la Subsecretaría de Educación Basica y Normal.

Fichero. Actividades didácticas. Matemáticas. Sexto grado. (1994). México: Secretaría de Educación Pública, Dirección General de Materiales y Métodos Educativos de la Subsecretaría de Educación Basica y Normal.

FIGUERAS, Olimpia (1988). ***Dificultades de aprendizaje en dos modelos de enseñanza de los racionales. Tesis de doctorado.*** México: Departamento de Matemática Educativa del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional.

FIGUERAS, O., E. FILLOY y M. VALDEMOROS (1985). “Ponencia sobre el desarrollo de habilidades de imaginación espacial y estrategias de contextualización: modelos basados en la enseñanza de las fracciones”. Texto de la presentación en la ***Sexta Conferencia Interamericana de Educación Matemática***. Guadalajara.

FILLOY YAGÜE, Eugenio (1977). “La geometría y el método axiomático. Cuarta parte: Euclides”. ***Revista Matemática. Matemáticas y enseñanza 9***. México: Sociedad Matemática Mexicana.

FUENLABRADA VELÁZQUEZ, Irma Rosa (coord.) (1984). ***Formación de profesores, metodología de enseñanza de la matemática en la escuela primaria***. Informe Final. México: Departamento de Investigaciones Educativas - Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional.

FUENLABRADA VELÁZQUEZ, Irma Rosa (coord.) (1986). ***Los cuadriláteros y sus diagonales***. (DIE Cuadernos de Educación). México: Departamento de Investigaciones Educativas - Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional.

FUENLABRADA VELÁZQUEZ, Irma Rosa (1994). "La geometría en la escuela primaria". ***Programa de actualización del magisterio. Serie: el conocimiento en el aula. (Audiocinta) Matemáticas 8.*** México: S.E.P.-Subsecretaría de educación básica - Universidad Pedagógica Nacional.

FUENLABRADA VELÁZQUEZ, Irma Rosa (1995a). "Actualización en la enseñanza de las matemáticas". ***Sinéctica 7.*** Tlaquepaque: Departamento de Educación del ITESO-Jalisco.

FUENLABRADA VELÁZQUEZ, Irma Rosa (1995b). ***Investigación evaluativa de una propuesta de actualización en matemáticas para profesores en servicio (Proyecto de investigación)***. México: Departamento de Investigaciones Educativas - Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional.

FUENLABRADA VELÁZQUEZ, Irma Rosa; David BLOCK SEVILLA y Miriam NEMIROVSKY (coord.); BLOCK SEVILLA, David, Alicia CARVAJAL, Martha DÁVILA VEGA, Irma Rosa FUENLABRADA VELÁZQUEZ, P. MARTÍNEZ, Juan Leove ORTEGA, M. PARRA y Ruth VALENCIA (invests.) (1989). ***Formación de profesores en áreas fundamentales de la educación básica***. Informe Final. México: Departamento de Investigaciones Educativas - Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional.

FUENLABRADA VELÁZQUEZ, Irma Rosa, David BLOCK SEVILLA, Alicia CARVAJAL y Hugo BALBUENA CORRO (1992), ***Juega y aprende matemáticas. Actividades para divertirse y trabajar en el aula***. México: Secretaría de Educación Pública, Libros del Rincón.

FUENLABRADA VELÁZQUEZ, Irma Rosa (coord.); H.J. DE LEÓN, Néstor GONZÁLEZ, Irma Rosa FUENLABRADA VELÁZQUEZ, M. R. GUZMÁN, Zorobabel MARTIRADONI y Juan Leove ORTEGA. (1995c). ***Matemáticas. Segundo grado***. México: Secretaría de Educación Pública.

FUENLABRADA VELÁZQUEZ, Irma Rosa y Miriam NEMIROVSKY (coord.) (1988). ***Formación de maestros e innovación didáctica***. (DIE Memorias). México: Departamento de Investigaciones Educativas - Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. .

GALVEZ, Grecia (1985). ***El aprendizaje de la orientación en el espacio urbano. Una proposición para la enseñanza de la geometría en la escuela primaria***. [Tesis para obtener el grado de Doctor en Ciencias en la especialidad de Educación]. México: Departamento de Investigaciones Educativas - Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional.

GÁLVEZ, Grecia (1994a). "La didáctica de las matemáticas". En ***Didáctica de matemáticas. Aportes y reflexiones***. C. PARRA e I. SAIZ (comps.) Buenos Aires: Paidós.

GÁLVEZ, Grecia (1994b). "La geometría, la psicogénesis de las nociones espaciales y la enseñanza de la geometría en la escuela elemental". En ***Didáctica de matemáticas. Aportes y reflexiones***. C. PARRA e I. SAIZ (comps.) Buenos Aires: Paidós.

GREEN, T.F. (1971). ***The activities of teaching***. New York: McGraw-Hill.

GUTIÉRREZ Ángel y Adela JAIME (1991). "El modelo de razonamiento de Van Hiele como marco para el aprendizaje comprensivo de la Geometría. Un ejemplo: Los Giros". ***Educación Matemática 3*** (2). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

HEATH, Sir Thomas L. (1956). "Introduction". En ***The thirteen books of Euclid's elements***. EUCLIDES (1908). New York: Dover.

KLINE, Morris (1986). ***El fracaso de la matemática moderna. Por qué Juanito no sabe sumar***. México: Siglo XXI.

KRUTETSKII, V. A. (1976). ***The Psychology of Mahtematical Abilities in Schoolchildren***. Chicago: The University of Chicago Press.

LLUIS, Emilio (1986). "Enseñanza de geometría en América Latina". En ***Estudios en educación matemática. Enseñanza de geometría. 5*** Montevideo: UNESCO-ROSTLAC. (La enseñanza de las ciencias fundamentales. Matemáticas).

MÉNDEZ BALDERAS, Rodolfo (1991a). “La enseñanza de la geometría en un quinto grado de primaria”. ***Pedagogía. Revista de la Universidad Pedagógica Nacional 7 (21)***, 19-26. México: Universidad Pedagógica Nacional.

MÉNDEZ BALDERAS, Rodolfo (1991b). “Algunas concepciones de los maestros en la enseñanza de las matemáticas”. ***Cero en Conducta 6*** (25), 33-37. México: Educación y cambio.

MORENO ARMELLA, Luis y Guillermina WALDEGG (1992). “Constructivismo y educación matemática”. ***Educación Matemática 4*** (2). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

NEMIROVSKY, Myriam (Coord.) (1990). ***Situación actual de la enseñanza de la matemática en el nivel preescolar. Informe de investigación***. México: Seción de Matemática Educativa - Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional.

PAPERT, Seymour (1993). ***La máquina de los niños. Replantearse la educación en la era de los ordenadores.*** Buenos Aires: Paidós.

PARRA MOSQUEDA, Blanca Margarita (1989). “Acerca del papel de la representacion en la resolucion de problemas”. ***Pedagogía 6 (17)***, 33-40. México: Univesidad Pedagógica Nacional.

PEREZ HERNÁNDEZ, Esnel y Gonzalo LÓPEZ RUEDA (coord.); PÉREZ HERNÁNDEZ, Esnel, Gonzalo LÓPEZ RUEDA, S. RUBIO, Santiago VALIENTE, M.A. GARCÍA, M. RIVERA, María de Jesús SENTÍES NACASPAC, y E. GARCÍA (Autores) (1994). ***Matemáticas. Quinto grado***. México: Secretaría de Educación Pública.

PEREZ HERNÁNDEZ, Esnel y Gonzalo LÓPEZ RUEDA (coord.); PÉREZ HERNÁNDEZ, Esnel, Gonzalo LÓPEZ RUEDA, M. A. GARCÍA, M. RIVERA, E. GARCÍA y Rafael DURÁN PONCE. (Autores) (1995). ***Matemáticas. Sexto grado***. México: Secretaría de Educación Pública.

PIAGET, Jean *et al.* (1964). ***L’ Épistémologie de l’espace***. París: P.U.F.

PIAGET, Jean (1979). “Los problemas principales de la epistemología de la matermática”. En ***Tratado de lógica y conocimiento científico. III. Epistemología de la matemática.*** Jean PIAGET (ed.). Buenos Aires: Paidós.

QUINTIL CASTREJÓN, Juan (1991). “La matemática vista desde una aula de primaria”. ***Pedagogía. Revista de la Universidad Pedagógica Nacional 7 (21)***, 57-66. México: Univesidad Pedagógica Nacional.

QUIROZ, Rafael (1988). “Introducción”. En ***Formación de maestros e investigación educativa***. [Memorias DIE]. Rafael QUIROZ (coord.). México: Departamento de Investigaciones Educativas - Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional.

QUIROZ, Rafael (1991). “Obstáculos para la apropiación del contenido académico en la escuela secundaria”. ***Infancia y Aprendizaje 55***. Madrid.

ROCKWELL, Elsie (1986a). “Etnografía y teoría en la Investigación educativa”. ***Enfoques***. Bogotá: Centro de Investigaciones, Universidad Pedagógica Nacional.

ROCKWELL, Elsie (1986b). “De huellas, bardas y veredas: una historia cotidiana en la escuela”. En ***La escuela, lugar del trabajo docente. Descripciones y debates***. México: Departamento de Investigaciones Educativas - Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional.

ROCKWELL, Elsie (1987). “Reflexiones sobre el proceso etnográfico (1982-1985)”. ***La práctica docente y sus contextos institucional y social II. Para observar la escuela, caminos y nociones (Informe final)***. Elsie ROCKWELL y Justa EZPELETA (coord.). Bogotá: Centro de Investigaciones, Universidad Pedagógica Nacional. México: Departamento de Investigaciones Educativas - Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional.

ROCKWELL, Elsie y Ruth MERCADO (1986). “La práctica docente y la formación de maestros”. ***La escuela, lugar del trabajo docente. Descripciones y debates***. México: Departamento de Investigaciones Educativas - Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional.

S.E.P. (1995). ***Plan y programas de estudio 1993. Educación Básica. Primaria***. México: 1993.

THOMPSON, A. G. (1992). “Teacher´s beliefs and conceptions: a syntesis of the research”. En ***Handbook of Research in Mathematics Teaching and Learning***. GROUWS, D. A. (ed.). New York: McMillan.

WALDEGG, Guillermina (coord.) (1995). ***Procesos de enseñanza y aprendizaje II, Vol. 2***. México: Consejo Mexicano de Investigación Educativa, A.C. -

Fundación SNTE para la Cultura del Maestro Mexicano. [La investigación educativa en los ochenta, perspectivas para los noventa].

WOODS, Peter (1986). ***La escuela por dentro. La etnografía en la investigación educativa.*** Barcelona: Paidós

BIBLIOGRAFÍA CONSULTADA NO REFERIDA

ABRIC, J.C. (1987). ***Cooperation, compétition et répresentations sociales***. Suiza: Del Val.

ACUÑA, Claudia y Gonzalo ZUBIETA (ed.) (1994). ***Memorias de la III Jornada sobre la enseñanza de la Geometría***. México: Departamento de Matemática Educativa del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional y Programa Nacional de Formación y Actualización de Profesores de Matemáticas de la Secretaría de Educación Pública.

ACUÑA, Claudia, Román HERNÁNDEZ, Luz María MARVÁN y Gonzalo ZUBIETA (ed.) (1995). ***Memorias de la IV Jornada sobre la enseñanza de la Geometría***. México: Departamento de Matemática Educativa del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional y Programa Nacional de Formación y Actualización de Profesores de Matemáticas de la Secretaría de Educación Pública.

ARSAC, Gilbert (1988). "Les recherches actuelles sur l'apprentissage de la démonstration et les phénomènes de validation en France". ***Recherches en Didactique des Mathématiques 9 (3)***, 247-280. Paris: La Pensée Sauvage.

ARTIGUE, Michèle (s.f.). "Modelización y reproducción en la enseñanza de las Matemáticas". ***Cuaderno de didáctica de las Matemáticas 8***. París: I.R.E.M.- Paris VII.

Avance programático. Primer grado. Educación básica. (1994). México: Secretaría de Educación Pública, Dirección General de Materiales y Métodos Educativos de la Subsecretaría de Educación Basica y Normal.

Avance programático. Segundo grado. Educación básica. (1994). México: Secretaría de Educación Pública, Dirección General de Materiales y Métodos Educativos de la Subsecretaría de Educación Basica y Normal.

Avance programático. Tercer grado. Educación básica. (1994). México: Secretaría de Educación Pública, Dirección General de Materiales y Métodos Educativos de la Subsecretaría de Educación Basica y Normal.

Avance programático. Cuarto grado. Educación básica. (1994). México: Secretaría de Educación Pública, Dirección General de Materiales y Métodos Educativos de la Subsecretaría de Educación Basica y Normal.

Avance programático. Quinto grado. Educación básica. (1994). México: Secretaría de Educación Pública, Dirección General de Materiales y Métodos Educativos de la Subsecretaría de Educación Basica y Normal.

Avance programático. Sexto grado. Educación básica. (1994). México: Secretaría de Educación Pública, Dirección General de Materiales y Métodos Educativos de la Subsecretaría de Educación Basica y Normal.

BARQUÍN RUIZ, Javier (1991). "La evolución del pensamiento pedagógico del profesor". ***Revista de Educación 294.*** 245-274.

BISHOP, Alan J. (1989). "¿Cuáles son algunos de los obstáculos para el aprendizaje de geometría?". En ***Estudios en educación matemática. Enseñanza de geometría. 5.*** Montevideo: UNESCO-ROSTLAC. (La enseñanza de las ciencias fundamentales. Matemáticas).

BLOCK SEVILLA, David, Martha DÁVILA y Patricia MARTÍNEZ (1995). "La resolución de Problemas: Una experiencia de formación de maestros". ***Educación Matemática 7 (3)***. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

BONILLA RIUS, Elisa, David BLOCK SEVILLA y Guillermina WALDEGG (1993). ***La investigación educativa en los Ochenta, perspectiva para los Noventa. Estados de conocimiento. Enseñanza y aprendizaje delas matemáticas. Cuaderno 10.*** México: Comité Organizador del 2° Congreso Nacional de Investigación Educativa - Sindicato Nacional de Trabajadores de la Educación.

BROUSSEAU, Guy (1993). "Fundamentos y métodos de la didáctica de las matemáticas". En ***Lecturas en didáctica de las matemáticas: Escuela Francesa*** [Grupo de estudios sobre la Enseñanza de las Matemáticas en el Bachillerato], SÁNCHEZ SÁNCHEZ, Ernesto A. y Gonzalo ZUBIETA B. (comps.). México: Departamento de Matemática Educativa del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional.

CARRILLO, José y Luis C. CONTRERAS (1994). "The relationship between the teacher's conceptions of mathematics and of mathematics teaching. A model using categories and descriptors for their analysis". En ***Proceedings of the 18th PME Conference (II)***.

CARRILLO, José y Luis C. CONTRERAS (1995). "Un modelo de categorías e indicadores para el análisis de las concepciones del profesor sobre la matemática y su enseñanza". ***Educación Matemática 7 (3)***. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

COLLETTE, Jean-Paul (1979). ***Historia de las matemáticas I y II***. México: Siglo XXI.

COMITI, C. y D. GRENIER (1993). ***L´observation, outil de modélisation de l´enseignant, acteur du système didactique***. St-Sauves-d´Auvergne: Atelier de l´École d´Été de Didactique des Mathématiques.

DE IBARROLA, María (1995). ***Repensando el curriculum***. (Documento DIE 9). México: Departamento de Investigaciones Educativas, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional.

DIENES, Z. P. y GOLDING, E. W. (1969). ***La geometría a través de las transformaciones 1, 2***. Barcelona: Teide.

DUCOING, PASILLAS, SERRANO, TORRES, RIBEIRO y PINEDA (1993). ***Formación de docentes y profesionales de la educación. La Investigación Educativa en los Ochenta, Perspectiva para los Noventa. Estados de conocimiento. Cuaderno 4.*** [2o. Congreso Nacional de Investigación Educativa]. México: SNTE.

DOUGHERTY, Barbara J. (1990). “Influences of teacher cognitive/conceptual levels on problem-solving instruction”. En ***Proceedings of the 14th PME Conference (I)***. George, BOOKER, Paul COBB, y Teresa N. de MENDICUTI (ed.). México: CONACYT-Gobierno del Estado de Morelos-IBM de México S.A.- Sección de Matemática Educativa del CINVESTAV.

DUCOING, PASILLAS, SERRANO, TORRES, RIBEIRO y PINEDA (1993). ***Formación de docentes y profesionales de la educación. La Investigación Educativa en los Ochenta, Perspectiva para los Noventa. Estados de conocimiento. Cuaderno 4.*** [2o. Congreso Nacional de Investigación Educativa]. México: SNTE.

DUVAL, Raymond (1988). “Gráficas y ecuaciones: la articulación de dos registros”. En ***Antología en Educación Matemática*** [Materiales de apoyo en Educación Matemática/ 1]. Rodrigo CAMBRAY NÚÑEZ, Ernesto A. SÁNCHEZ SÁNCHEZ y Gonzalo ZUBIETA BADILLO (comps.) (1993). México: Departamento de Matemática Educativa del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional.

FENEMA, E. y M.L. FRANKE (1992). “Teacher´s knowledge and its impact”. En ***Handbook of Research in Mathematics Teaching and Learning***. D.A. GROUWS (ed.). New York: McMillan.

FILLOY YAGÜE, Eugenio (1976a). “La geometría y el método axiomático. Segunda parte: Los presocráticos Tales y Pitágoras”. ***Revista Matemática. Matemáticas y enseñanza 5 y 6***. México: Sociedad Matemática Mexicana.

FILLOY YAGÜE, Eugenio (1976b). “La geometría y el método axiomático. Tercera parte: La época de Platón y Aristóteles”. ***Revista Matemática. Matemáticas y enseñanza 7 y 8***. México: Sociedad Matemática Mexicana.

FILLOY YAGÜE, Eugenio (1980a). “La geometría y el método axiomático. Quinta parte: Evolución del método axiomático”. ***Revista Matemática. Matemáticas y enseñanza 13***. México: Sociedad Matemática Mexicana.

FILLOY YAGÜE, Eugenio (1980b). “La geometría y el método axiomático. Sexta parte: Un ejemplo de desarrollo axiomático de la geometría”. ***Revista Matemática. Matemáticas y enseñanza 14***. México: Sociedad Matemática Mexicana.

FUENLABRADA VELÁZQUEZ, Irma Rosa, Juan Leove ORTEGA y Ruth VALENCIA (1996). “La geometría en los Libros de Texto de Matemáticas del primer ciclo de la primaria”, conferencia presentada en el ***III Congreso Nacional de Investigación Educativa***. México: Departamento de Investigaciones Educativas - Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional.

FUENLABRADA VELÁZQUEZ, Irma Rosa y Eva TABOADA (1992). “Curriculum e investigación educativa: una innovación para la educación básica”. ***Perspectivas 81***. París: UNESCO.

GÁLVEZ, Grecia (1994). “La descripción de las figuras geométricas en el aprendizaje de la geometría”. En ***La enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria. Taller para maestros. Lecturas.*** David BLOCK, (coord.). México: Secretaría de Educación Pública, Dirección General de Materiales y Métodos Educativos de la Subsecretaría de Educación Básica y Normal.

GARCÍA BARROS, S., MARTÍNEZ LOSADA, M.C. y M. MONDELO ALONSO (1995). “El trabajo práctico. Una intervención para la formación de profesores”. ***Revista de las Ciencias. Revista de Investigación y experiencias didácticas 13 (2)***. Valencia: Institut d´l Educatio’ de la Universitat Autonoma de Barcelona-Vice-Rectorat d´ Investigatio’ de la Universitat de Valencia.

GÓMEZ, Pedro (Ed.) ARTIGUE, Michèle, Régine DOUADY, y Luis MORENO. (Autores) (1995). ***Ingeniería didáctica en educación matemática. Un***

esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. México: Grupo Editorial Iberiamérica.

GUTIERREZ, Angel y Adela JAIME (1995). ***Geometría y algunos aspectos generales de la educación matemática.*** México: Grupo Editorial Iberoamética.

FUENLABRADA VELÁZQUEZ, Irma Rosa y Eva TABOADA (1992). "Curriculum e investigación educativa: una innovación para la educación básica". ***Perspectivas 81***. París: UNESCO.

FUENLABRADA VELÁZQUEZ, Irma Rosa, Juan Leove ORTEGA y Ruth VALENCIA (1996). "La geometría en los Libros de Texto de Matemáticas del primer ciclo de la primaria", conferencia presentada en el ***Congreso Nacional de Investigación Educativa***. México: Departamento de Investigaciones Educativas - Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional.

GÓMEZ, Pedro (Ed.) ARTIGUE, Michèle, Régine DOUADY, y Luis MORENO. (Autores) (1995). ***Ingeniería didáctica en educación matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas***. México: Grupo Editorial Iberiamérica.

HEMMERLING, Edwin M. (1971). ***Geometría elemental.*** México: Limusa Wiley.

LABORDE, Colette (1988). "L' enseignement de la géométrie en tant que terrain d' exploration de phénomènes didactiques". ***Recherches en Didactique des Mathématiques 9 (3)***, 337-364. Paris: La Pensée Sauvage.

LARA ARZATE, Luis y Neptalí ORTEGA CAMPIRÁN (1991). "La formación de maestros de primaria en el área de matemáticas. Relato de una experiencia en el Estado de México". ***Pedagogía. Revista de la Universidad Pedagógica Nacional 7 (21)***, 99-106. México: Universidad Pedagógica Nacional.

LEGRAND, Marc (1988). "Rationalité et démonstration mathématiques, le rapport de la classe à une communauté scientifique". ***Recherches en Didactique des Mathématiques 9 (3)***, 365-406. Paris: La Pensée Sauvage.

LINARES, Salvadora y Victoria SÁNCHEZ (1989). "Las creencias epistemológicas sobre la naturaleza de las matemáticas y su enseñanza y el proceso de llegar a ser un profesor". ***Revista de educación 290***, 389-406. [sep.-dic. 1989]. España.

MANSFIELD, Helen y Joy SCOTT (1990). “Young Children Solving Spatial Problems”. En ***Proceedings XIVth PME Conference***. G. BOOKER, P. COBB y T. N. de MENDICUTI (comps.). México: International Group for the Psychology of Mathematics Education - Program Committee of the 14th PME Conference.

MARCELO GARCÍA, Carlos (1987). ***El pensamiento del profesor***. Barcelona: Ediciones CEAC.

MAURY, Sylvette (1988). “Denise GRENIER: Construction et étude du fonctionnement d’ un processus d’ enseignement sur la symétrie orthogonale pour des élèves de sixième (Thèse présentée à l’ Université Joseph Fourier, Grenoble I)”. ***Recherches en Didactique des Mathématiques 9 (2)***, 229-232. Paris: La Pensée Sauvage

MESQUITA, Ana (1990). “L´influence des aspects figuratifs dans le raisonnement des élèves en Géométrie”. En ***Proceedings XIVth PME Conference***. G. BOOKER, P. COBB y T. N. de MENDICUTI (comps.). México: International Group for the Psychology of Mathematics Education - Program Committee of the 14th PME Conference.

PIAGET, Jean y Rolando GARCÍA (1984). ***Psicogénesis e historia de la ciencia.*** México: Siglo XXI editores.

PIAGET, Jean y Rolando GARCÍA (1989). ***Hacia una lógica de significaciones.*** Barcelona: Gedisa.

POSTIC, Marcel (1982). ***La relación educativa***. Madrid: Narcea.

QUEZADA, Rocío (1988). “¿Por qué formar profesores en estrategia de aprendizaje?”. ***Perfiles educativos 19***, 28-41. México: CISE-UNAM.

RAMON MEDINA, Emilio (1982). “Los programas de formación de profesores de matemática para la educación media. Un estudio evaluativo”. ***Investigaciones educativa venenzolanas 2*** (3), 5-11, julio 1982. Venenzuela.

ROBERT, Aline y J. ROBINET (1989a). “Représentations des enseignants de mathématiques sur les mathématiques et leur enseignement”. ***Cahier de DIDIREM 1***. París: Institut de Recherche pour l´Enseignement des Mathématiques. Didactique des mathématiques. Université Paris VII.

ROBERT, Aline y J. ROBINET (1989b). “Énoncés d´exercices de manuels de seconde et représentations des auteurs de manuels”. ***Cahier de DIDIREM***

4. París: Institut de Recherche pour l´Enseignement des Mathématiques. Didactique des mathématiques. Université Paris VII.

ROBERT, Aline e Isabelle TENAUD (1988). “Une expérience d’ enseignement de la géométrie en terminale C”. ***Recherches en Didactique des Mathématiques 9 (1)***, 31-70. Paris: La Pensée Sauvage.

ROGALSKI, Janine (1988). “Nicolás BALACHEFF; Une étude des processus de preuve en mathématique chez les élèves de collège (Thèse d’ état présentée à l’ Université Scientifique et médical de Grenoble, 1988)”. ***Recherches en Didactique des Mathématiques 9 (2)***, 221-228. Paris: La Pensée Sauvage

ROUCHIER, André y Heinz STEINBRING (1988). “The practice of teaching and research in didactics”. ***Recherches en Didactique des Mathématiques 9 (2)***, 189-220. Paris: La Pensée Sauvage

SALCIDO RIOS, Tenochtitlán (1989). “La especialización en educación matemática. Una experiencia curricular”. ***Perfiles educativos 45-46***, 59-64 [jul.-dic. 1989]. México: CISE-UNAM.

SÁNCHEZ GARCÍA, Victoria (1995). “La formación de los profesores y las matemáticas. Algunas implicaciones prácticas de las investigaciones teóricas”. ***Revista de Educación 306***, 397-426.

SÁNCHEZ SÁNCHEZ, Ernesto A. (1992). ***Antología en educación matemática.*** [Materiales de apoyo en Educación Matemática/ 1]. México: Departamento de Matemática Educativa del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional.

SÁNCHEZ SÁNCHEZ, Ernesto A. y Gonzalo ZUBIETA B. (Ed.) (1993). ***Lecturas en didáctica de las matemáticas: Escuela Francesa.*** [Grupo de estudios sobre la Enseñanza de las Matemáticas en el Bachillerato]. México: Departamento de Matemática Educativa del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional.

SANTILLÁN, Marcela (1994). “La geometría en la escuela secundaria”. En ***Programa de actualización del magisterio. Serie: el conocimiento en el aula. (Audiocinta) Matemáticas 9.*** México: S.E.P.- Subsecretaría de educación básica - Universidad Pedagógica Nacional.

SCHOENFELD, Alan H. (1993). “Exploraciones sobre las creencias y conducta matemáticas de los estudiantes” En ***Antología en educación matemática***. [Materiales de apoyo en Educación Matemática/ 1]. R. CAMBRAY NÚÑEZ,

E. A. SÁNCHEZ y G. ZUBIETA (comps). México: Departamento de Matemática Educativa del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional.

TALYZINA, N. F. (1988). “Las propiedades de las deducciones en la resolución de los problemas de geometría”. En ***Problemas de la enseñanza de las matemáticas***. A. LÓPEZ YÁÑEZ (coord.). México: UNAM - PORRÚA.

THOMPSON, A. G. (1984). “The relationship of teacher´s conceptions of mathematics teaching to instructional practice”. ***Educational Studies in Mathematics 15 (2)***.

WENTWORTH Jorge y David Eugenio SMITH (1915). ***Geometría plana y del espacio***. Boston: The Atheneum Press.