CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

DEPARTAMENTO DE INVESTIGACIONES EDUCATIVAS

CONCEPCIONES DE LOS MAESTROS DE PRIMARIA EN TORNO A LA MEDICIÓN. EXPERIENCIAS EN UN TALLER DE ACTUALIZACIÓN.

TESIS

Que presenta para obtener el grado de Maestra en Ciencias con especialidad en Investigaciones Educativas

MARÍA LUCÍA MORENO SÁNCHEZ
Lic. en Filosofía

Directoras de Tesis:
M. en C. Irma Rosa Fuenlabrada Velázquez
Dra. Guillermina Waldegg Casanova

Enero 1998

SAN BORJA No. 938 MÉXICO, D.F. C.P. 03100 APARTADO POSTAL 19-197 Tels. 559-4080 559-4077 559-4232
FAX DIE 575-0320

CAPÍTULO 2

La medición: su interpretación escolar y principios básicos

CAPÍTULO 3

Concepciones de los maestros de primaria en torno a la medición

mi pequeña gran familia:
Mirel, Axel y Egdardo

Agradecimientos

En la realización del presente trabajo han tenido
Amplia participación —aunque ellos no lo sepan— Mis compañeros de Laboratorio de Psicomatemáticas;
Ale, Ruth, Leove, Bertha, Humberto, Zoro, y Néstor.
Gracias por su apoyo.

Gracias también a mis compañeros de trabajo,
En particular; a los asesores de matemáticas con
Quienes he aprendido a disfrutar la aventura de llegar
A ser asesor.

A mis queridas maestras: Irma Fuenlabrada y
Guillermina Waldegg, les agradezco el tiempo que
Compartimos, su paciencia y su amistad.

Finalmente, quiero agradecer a las maestras
Eva Taboada y Alicia Carvajal el entusiasmo
Con el que acogieron la tarea de hacer
Comentarios a este trabajo. Sus observaciones
Contribuyeron enormemente al diseño final de
Esta tesis

INTRODUCCIÓN

La práctica profesional de los maestros de primaria se desarrolla básicamente en la escuela y, aunque los maestros a menudo no reparen en ello, una buena parte del producto de esta actividad escolar acompañará a sus alumnos a lo largo de su existencia.

Es por ello conveniente que los maestros de primaria reconozcan la importancia de su labor en tanto co─partícipes en la construcción de nociones, conocimientos y habilidades que contribuirán para que los alumnos sigan aprendiendo una vez concluida su estancia en la escuela primaria.

Desde su surgimiento, la didáctica se ha preocupado por optimizar las relaciones entre el docente y sus alumnos en función de un objeto de conocimiento. Esta disciplina, modificada recientemente gracias a la investigación sistemática, ha motivado trabajos encaminados a establecer condiciones de aprendizaje y acciones de enseñanza particulares en diversas áreas del conocimiento.

Conocer las expectativas que los maestros de primaria tienen acerca de su función como docentes, así como sus concepciones sobre los contenidos que enseñan, constituye un espacio de investigación propio de la didáctica como disciplina que estudia los componentes de la interacción maestro─alumno─conocimiento.

El presente trabajo se inscribe en la línea de investigación encaminada a reconocer como parte de la didáctica, las concepciones que tienen los maestros sobre los contenidos que enseñan y sobre su propia función como docente. En un marco más general, el trabajo pertenece a la línea de investigación que algunos autores denominan estudio sobre "la epistemología del profesor" (Artigue 1995) y algunos otros llaman "las representaciones metacognitivas" (Robert y Robinet 1989a), o concepciones de los profesores sobre las matemáticas, sobre la manera como se enseñan y aprenden, así como sobre las consecuencias de estas concepciones en su práctica docente.

El propósito general de este estudio es documentar algunas de las concepciones de los maestros acerca de las matemáticas y, en particular, de los temas relacionados con la medición, a partir de la experimentación del material *La enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria. Taller* *para maestros* (Block (coord) et al. 1995a), propuesta de actualización que circula en México desde el ciclo escolar 1996—1997 y, que en lo sucesivo se denominará "paquete didáctico".

Las "concepciones" de los maestros en este trabajo, son las ideas, representaciones y creencias que orientan su labor docente cotidiana. Se trata de una red de información, imágenes, relaciones, anticipaciones e inferencias alrededor de una idea (Moreno y Waldegg 1992) que han construido en su tránsito por las escuelas, que han modelado durante su formación como docentes y que a veces comparten con sus colegas. Las concepciones de los maestros son producto de sus experiencias previas y orientan la organización de su trabajo y sus actitudes frente al grupo.

Las concepciones de los maestros constituyen un vasto campo de investigación para la didáctica, puesto que los programas educativos son instrumentados por estos sujetos, cuyas experiencias van conformando día con día creencias y maneras de actuar, a partir de las cuales interpretan las propuestas de trabajo y organizan sus actividades. Por tanto, conocer las concepciones de los maestros permite anticipar sus formas de proceder frente a sus alumnos y ofrece una información relevante para diseñar los programas de actualización y analizar si, en cuanto al contenido y las situaciones didácticas propuestas, son pertinentes los esfuerzos institucionales que promueven su actualización y superación profesional.

Este trabajo pretende contribuir a mostrar que, para transformar la práctica docente en la dirección planteada por el *Plan y programas de la educación básica* (SEP 1993a y 1993b) donde se invita a promover un aprendizaje de las matemáticas a través de la solución de problemas, es necesario que los maestros modifiquen ciertas concepciones acerca del conocimiento, de las matemáticas en general y de su enseñanza que pueden resultar incompatibles con esa dirección. Ésta es una hipótesis que se fundamenta en una revisión de los diferentes currícula que han orientado el quehacer educativo de los maestros de primaria y de la observación de sus modos de proceder al realizar las actividades propuestas para su actualización.

1. Metodología de la investigación

La caracterización de algunas de las concepciones de los maestros de primaria acerca de la medición y de las matemáticas en este trabajo, se derivan del análisis de los registros de observación realizados en el proyecto de investigación: "Estudio de una propuesta de actualización en matemáticas para profesores de educación primaria en servicio". Esta investigación se planteó como objetivo principal: observar y registrar las acciones de un grupo de maestros frente a la propuesta de actualización contenida en el paquete didáctico. (Fuenlabrada 1994). El análisis de los procesos registrados es una ardua labor que ha motivado entre otros, esta tesis.

Para la realización de dicho proyecto, se contó con la participación de aproximadamente 23 maestros en servicio, que reunidos en las instalaciones de una Escuela Normal del Estado de México y coordinados por un miembro del equipo de investigación, llevaron a cabo las actividades del paquete didáctico citado, respetando el orden y desarrollo de las situaciones didácticas presentadas en la propuesta de actualización.

2. La propuesta de actualización

El paquete didáctico a que nos referimos, está conformado por dos cuadernos de trabajo: *La enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria. Primera parte y Segunda parte*; una selección de lecturas y un cuadernillo recortable que apoya la realización de algunas actividades de los cuadernos de trabajo.

La propuesta de actualización *La enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria* (Block et al. 1995a) destaca en la primera unidad, algunos aspectos fundamentales de los procesos de aprendizaje y de enseñanza de esta asignatura en la escuela primaria, que analizaremos a continuación.

En primer lugar, se define a los *problemas* como fuente principal de los conocimientos y se aclara que, para que una situación sea un *problema* interesante (Block et al. 1995a, 18) debe:

- Plantear una meta comprensible para quien la va a resolver.
- Permitir aproximaciones a la solución a partir de los conocimientos previos de la persona.
- Plantear un reto, una dificultad.

En segundo lugar, se invita a los maestros a reconocer que sus alumnos pueden plantear soluciones diversas a los problemas y crear herramientas a partir de sus conocimientos previos. Promueve además, la práctica de estimaciones y de recursos no convencionales como procesos que preparan la comprensión del significado de los procedimientos convencionales utilizados en esta asignatura.

La intención de promover la actualización de los docentes de primaria a partir de la solución de "situaciones problemáticas" está sustentada en experiencias de investigación relacionadas con la formación de los docentes, a partir de las cuales se postula que, para lograr que los maestros se apropien de una metodología, es necesario hacerlos participar en una situación de aprendizaje análoga a la que se espera que desarrollen en su salón de clases. (Fuenlabrada y Block 1994).

Hace falta destacar que la "situación problemática" no consiste en problemas al estilo tradicional que supone plantear una serie de datos para hallar un resultado, sino que constituyen problemáticas abiertas que permiten la movilización de procedimientos diversos para su solución, la confrontación de resultados y la argumentación de las respuestas.

Para el caso de los docentes, la situación didáctica se supone que debe ofrecer condiciones para que el maestro logre algunas conceptualizaciones matemáticas pero además, en virtud de las experiencias obtenidas en la interacción con sus compañeros y con el objeto de estudio en cuestión, tienda a reconceptualizar su función como docente. Se trata primero de cuestionar sus saberes, de hacerlos dudar acerca de lo que ellos creen que saben y de que aprendan a valorar los procedimientos informales para resolver las situaciones, como práctica que permite reconocer el significado de los procedimientos convencionales.

A diferencia de otras experiencias de formación docente que han pugnado porque los maestros de primaria aprendan matemáticas de nivel superior, o bien, que se empapen de información sobre teorías didácticas, pedagógicas o psicológicas; en ésta, se pretende que los maestros profundicen y enriquezcan sus conocimientos de la aritmética, la geometría elementales y la medición, al mismo tiempo que redefinen sus estrategias de enseñanza en función de su propio aprendizaje en el proceso de actualización.

Esta propuesta de actualización deriva de estudios previos de investigación en formación docente que permitieron a investigadores del DIE—CINVESTAV concluir que: "... los docentes no necesitan tanto conocer temas matemáticos de niveles superiores como conocer con mayor profundidad los mismos temas que ellos enseñan, y sobre todo, necesitan reconceptualizar su idea de lo que es hacer matemáticas, así como su idea de cómo se aprenden y cómo se enseñan" (Balbuena et al. 1991, 56).

La filiación de la propuesta de actualización con las investigaciones previas antes citadas, sobre formación docente no es explícita. Sin embargo, en ambas subyacen los mismos fundamentos teóricos, respecto a las secuencias de situaciones problemáticas para movilizar las ideas de los maestros hacia saberes constituidos.

3. Las actividades sobre medición en la propuesta de actualización

La unidad sobre medición consta de veinte actividades que posibilitan el tratamiento de cuatro temas: 1.Medición y aproximación; 2. Perímetro y superficie; 3. La capacidad y el volumen; 4. Otras magnitudes.

En este trabajo se analizan solamente las intervenciones de los maestros relacionadas con las actividades de los temas 1 y 2. El tratamiento del Tema 1, *Medición y Aproximación*, (Anexo 1) nos ha permitido identificar algunas concepciones de los maestros acerca de la medición y de las matemáticas; el tratamiento del Tema 2, *Perímetro y superficie*, (Anexo 2) nos ha permitido identificar secuencias didácticas que parecen haber impactado las creencias y prácticas docentes de algunos maestros.

4. La organización del grupo estudiado

Cabe señalar que, aunque el paquete didáctico propicia el autoestudio entre los maestros, la modalidad instrumentada por el proyecto de investigación del que forma parte esta tesis, fue la conformación de un grupo de estudio bajo la modalidad de curso—taller, coordinado por un miembro del equipo de investigación cuya formación y experiencia permitiera orientar a los maestros en la realización de las actividades con estricto apego al enfoque que subyace a los materiales.

Es importante destacar que la presencia de este coordinador posibilitó la experimentación completa del paquete didáctico en 200 horas de trabajo (50 sesiones de 4 horas).

Al taller asistieron voluntariamente maestros en servicio que asumieron el compromiso de asistir regularmente a una sesión semanal, a colaborar en sus respectivos equipos y a realizar tareas entre una sesión y otra. El taller incluyó también un periodo intensivo de ocho días con sesiones de ocho horas diarias, durante el verano de 1995. La escasa deserción y el entusiasmo mostrado por los participantes han evidenciado el interés y la buena disposición de los maestros por acceder a procesos de actualización que les permitan ser "mejores" profesionistas.

Tanto para la investigación rectora como para el trabajo de esta tesis, se ha requerido el registro de los procesos vividos en el aula durante el curso—taller. Los registros de observación incluyen información acerca de quiénes fueron los participantes, la duración de las actividades y de la sesión completa, las respuestas, actitudes y producciones de los maestros, las intervenciones del coordinador así como notas del observador que completan y complementan las participaciones registradas.

A diferencia de otros estudios sobre las concepciones de los maestros que derivan de encuestas (Eudave 1995), o de estudios de casos (Carrillo Yáñez 1996), en este estudio, hemos decidido hacer un análisis cualitativo de los registros de procesos vividos por maestros en servicio que buscaron participar en un taller de actualización, y cuando es posible, el análisis se enriquece estudiando su actuación en el aula mediante "huellas indirectas" (Robert y Robinet 1989b), puesto que no se trata de la observación directa de las sesiones de clase.

Esta metodología investigativa se apoya en la opinión de algunos autores que han subrayado la importancia de los estudios cualitativos para la investigación educativa en general, (Erickson 1986; Woods 1986; Rockwell 1986; Edwards 1990) y en particular, para estudiar los saberes docentes:

Los maestros han generado una diversidad de recursos en los que se expresan saberes docentes ... desde esta perspectiva, la exploración, la descripción y el análisis de los saberes docentes son posibles a través de una estrategia de investigación pertinente a ese objeto de conocimiento, que implica una conceptualización que presuponga su existencia. (Mercado 1994, 55).

La participación de los maestros en un curso–taller ofrece la posibilidad de documentar sus creencias a partir de los comentarios y acciones al realizar las actividades propuestas y por esto es que tiene sentido el uso de una metodología cualitativa.

El estudio que estamos reportando refiere en particular, las concepciones de los maestros de primaria en torno a la medición a partir de la realización de actividades de la propuesta de actualización contenida en el paquete didáctico *La enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria.* Se trata de un estudio centrado en las intervenciones de los maestros durante este proceso de actualización y aunque se observaron directamente las sesiones del curso–taller, no puede asegurarse que tales concepciones orienten sus acciones docentes frente al grupo. Se trata sin embargo, de ofrecer algunas explicaciones sobre tales concepciones y de hacer aproximaciones acerca de las condiciones que favorecen su transformación.

Interesa destacar que las situaciones enfrentadas durante el curso—taller, fueron propicias para que los maestros manifestaran consciente o inconscientemente sus concepciones acerca de las matemáticas en general, y de la medición en particular, así como de las acciones que se pueden emprender para favorecer su aprendizaje. Para documentar tales concepciones, centramos la atención en los siguientes elementos:

1) las interacciones verbales y no verbales entre los maestros y con el coordinador del curso—taller;

2) el significado que los maestros otorgaron a las interacciones al interior de los equipos y con el grupo;

3) las interpretaciones que los maestros hicieron de las instrucciones verbales y escritas;

4) el valor que otorgaron a las ilustraciones y a algunos textos en particular;

5) los comentarios colectivos acerca de las soluciones halladas;

6) los resultados obtenidos por los maestros a situaciones presentadas por la propuesta y las maneras de argumentarlos.

Finalmente, el diseño de secuencias didácticas para tratar algunos temas de la primaria es un elemento importante para recuperar los significados que algunos maestros dan a las actividades de la propuesta de actualización. Se recuperaron trabajos de los niños — de actividades de medición — organizadas por una maestra para cumplir con una condición impuesta por el proyecto de investigación a que nos referimos.

5. Etapas de la investigación

Las actividades que permitieron la realización de este estudio fueron:
1. El análisis de la unidad sobre medición y de los materiales que conforman el paquete didáctico.
2. Observación de las seis sesiones del curso—taller durante el tratamiento de la unidad sobre medición, apartado al que se destinaron 24 de las 64 horas que constituyeron la fase intensiva del curso-taller (julio de 1995).
3. Elaboración de los protocolos de acuerdo a las condiciones acordadas por el equipo de investigación responsable del seguimiento del curso—taller.
4. Análisis de los protocolos y de los materiales recopilados.

6. Organización del presente reporte

En primer lugar, se reseñan algunos de los estudios realizados sobre las concepciones de los maestros con el fin de establecer la relevancia de este estudio.

En el capítulo 2, se hace una exposición de los fundamentos conceptuales y de los procesos psicológicos asociados a la medición con el fin de valorar la importancia que cobra este eje conceptual en el currículo de la primaria actualmente.

Finalmente, en el capítulo 3, se ofrece una descripción detallada, utilizando fragmentos de los protocolos elaborados durante el trabajo de campo, que permiten ilustrar algunas concepciones de los maestros acerca de la medición, de las matemáticas, de las acciones que promueven su aprendizaje y en algunos casos, de posibles reconceptualizaciones acerca de estos tópicos que orientan la labor de algunos maestros hacia un nuevo estilo de docencia en la primaria.

CAPÍTULO 1

ESTUDIOS REALIZADOS SOBRE LAS CONCEPCIONES DE LOS MAESTROS

La acción de los maestros es una práctica intencional en tanto que busca "enseñar", "hacer comprender", presentar una serie de contenidos o de actividades que propicien el conocimiento y el desarrollo de habilidades y de actitudes entre sus alumnos. Se trata entonces de acciones que persiguen un fin y que están guiadas implícita o explícitamente, por las concepciones y creencias que los maestros tienen acerca de la disciplina en estudio, de su acción como docentes y de las acciones que propician su aprendizaje.

La investigación sobre las concepciones de los maestros es un campo recientemente abordado. Algunos reportes de investigación datan de los ochenta, otros, los más nuevos, son tesis presentadas en esta década. La premisa de estos trabajos en general, es que para entender la perspectiva de enseñanza que asumen los maestros, conviene conocer las creencias con las que definen su trabajo. (Robert y Robinet 1989a).

Algunos estudios refieren la experiencia con maestros de matemáticas de los niveles medio y medio superior. (Thompson 1984; Robert y Robinet 1989a y 1989b). Hay también estudios orientados a conocer las concepciones de los maestros durante su proceso de formación inicial (Azcárate 1995; Camacho et al. 1993; Flores 1995; Carrillo Yáñez 1996; Peltier 1997). Asimismo, hay estudios sobre las concepciones de los maestros de primaria en servicio (Méndez 1991, Ávila 1996) y de aquéllas que ha sido posible constatar durante procesos de actualización (Flores et al. 1994; Block et al. 1995b; Ávalos 1997).

Las investigaciones enunciadas son experiencias que en algunos casos, se plantean conocer las concepciones de los maestros así como las condiciones que propician su posible transformación. Este tipo de investigación se ha centrado en mayor medida en los maestros cuya especialidad es la enseñanza de las matemáticas y más recientemente, se han realizado estudios sobre las concepciones de los maestros de primaria que aunque tratan con las matemáticas, son responsables además, de la enseñanza de las otras asignaturas que corresponden a este nivel educativo.

El estudio sobre las concepciones de los maestros de primaria se ha hecho también desde una perspectiva histórica que busca reconocer los "saberes" docentes como apropiación de contenidos, de teoría pedagógica y de habilidades para organizar al grupo:

> ... los saberes sociales integrados a la práctica docente no remiten sólo al ámbito de la experiencia individual, sino que también se constituyen en producto colectivo, social. En la resolución del quehacer docente cotidiano, los maestros incorporan experiencias y saberes de origen histórico diverso, es decir, en ellos se expresa una acumulación histórica, matizada desde luego por características particulares de los sujetos y de las escuelas que enmarcan la práctica docente cotidiana. (Rockwell y Mercado 1986, 69).

En estos estudios se asume que los saberes que sustentan la labor docente se explicitan en la realización de prácticas específicas (Mercado 1994) y por ello, para identificar los saberes docentes resulta fundamental observar las acciones de los maestros en su labor cotidiana:

> Afirmar que una parte fundamental de la formación de los maestros tiene lugar en el ejercicio de su trabajo diario no significa adoptar una postura empirista al respecto. Implica asumir que en ese trabajo se expresan conocimientos históricamente construidos, que son articulados durante la acción por el sujeto particular. Cada maestro aporta la diversidad de sus propias referencias así como las posibilidades de observación y reflexión involucradas en la resolución de su trabajo[...] La identificación empírica de este proceso es producto de un trabajo analítico pues no se manifiesta evidente en la cotidianidad escolar. Está imbrincado en la heterogénea trama de la práctica docente. Se reconoce más en las acciones cotidianas del aula que en lo que dicen los maestros acerca de su propio trabajo. (Mercado 1994, 54).

En este trabajo buscaremos recuperar algunos de los aportes de la investigación sobre las concepciones de los maestros de primaria y sus prácticas docentes. Pretendemos contribuir a este conocimiento en el terreno de la medición y sugerir posibles explicaciones de las concepciones constatadas.

1. Estudios relacionados con las concepciones de los maestros de matemáticas del nivel medio y medio superior

Alba González Thompson (1984) es pionera en este tipo de estudios, su propósito inicial es romper con la tradición investigativa que se había encargado de hacer estudios sobre la cantidad de conocimientos matemáticos que manejaban los maestros de la especialidad, y por esto intenta más bien, hacer un estudio que permita comprender las formas de actuación de los maestros antes que valorar qué tantas matemáticas saben.

En el texto "La relación de las concepciones de los maestros de matemáticas y la enseñanza de las matemáticas en prácticas instruccionales" (Thompson 1984) se estudian los casos de tres maestras estadunidenses de secundaria, cuyo análisis comparativo permite a la autora afirmar que: "...las creencias, puntos de vista y preferencias (de los maestros) juegan un rol importante en sus acciones de enseñanza" (Thompson 1984, 105). Aunque no siempre hay una relación directa, de causa—efecto, entre las concepciones y las formas de proceder en el aula, en virtud de que hay concepciones que se manifiestan conscientemente y otras que pueden ser creencias o intuiciones traídas de fuera de la experiencia docente y sobre las cuales el maestro tal vez no ha reflexionado.

En este estudio, Thompson se propuso responder dos grandes cuestiones:

1. ¿Las creencias, opiniones y preferencias de los maestros se reflejan en sus prácticas instruccionales?

2. ¿La conducta de los maestros está influenciada por sus concepciones?

    a) ¿Hay incongruencia entre sus acciones y sus creencias?

    b) ¿Cómo pueden explicarse las incongruencias si las hay?

    c) ¿Hay diferencias entre las prácticas instruccionales y sus creencias acerca de las matemáticas y la enseñanza de las matemáticas?

Para intentar responder estas preguntas, la autora observó las sesiones de tres maestras de secundaria durante cuatro semanas complementando sus apuntes con entrevistas personales. Algunos de los aportes de este trabajo se reseñan a continuación:

1. Las concepciones de los maestros no se relacionan de manera simple con sus decisiones y conductas al momento de enseñar. Muchos factores intervienen en la concepción de los maestros acerca de las matemáticas y sus acciones de enseñanza, se incluyen creencias ajenas a las matemáticas. (Thompson 1984, 124).

2. Los maestros tienen concepciones acerca de la enseñanza que no son exclusivas de la enseñanza de las matemáticas. Tienen concepciones particulares acerca de los estudiantes y los factores sociales y emocionales de sus clases. **Estas concepciones juegan un rol significativo en sus decisiones y conductas en el momento de enseñar.** (subrayado nuestro).

3. Se recomienda que haya investigaciones basadas en observaciones que permitan estudiar la "estabilidad" de las concepciones de las matemáticas y

sus formas de enseñanza, específicamente encaminadas a identificar las condiciones que permiten la transformación, de las concepciones en estudio (Thompson 1984, 125).

Robert y Robinet (1989a y 1989b) en Francia hicieron estudios acerca de las concepciones de los maestros de secundaria dirigidos, inicialmente, a entender las modificaciones que éstos hacían a las secuencias didácticas que se les ofrecieron con fines experimentales. Las modificaciones que los maestros observados hicieron al plan propuesto llevaron a los autores a la consideración de que:

> ...había 'por encima' de cualquier situación de clase particular, y en todo profesor, implícita o explícitamente, concepciones sobre la enseñanza, en relación con sus conductas (especies de 'teoremas en acto del profesor'), sobre lo que es necesario hacer (o decir) o no hacer (o no decir) en clase[...] sobre lo que es necesario favorecer o impedir en los alumnos, en suma sobre la manera 'correcta' de enseñar matemáticas[...] y estimamos que esas concepciones en parte eran las responsables[...] de su interpretación de las secuencias que les eran proporcionadas, sean cuales fueran los detalles dados por los autores. (Robert y Robinet 1989a, 1).

Robert y Robinet asumen la tarea de estudiar las concepciones de los maestros desde su postura como didactas —diseñadores de secuencias para tratar los contenidos— y en su planteamiento, recuperan las aportaciones que para el caso de las "concepciones" ha hecho la psicología social.

En el terreno de la psicología social (Abric 1987 y Jodelet 1989 citados por Robert y Robinet 1989a y 1989b), las concepciones son identificadas más bien como "representaciones sociales" o sistemas de interpretación que rigen las conductas y las comunicaciones sociales. Se supone que las representaciones constituyen un sistema simbólico organizado y estructurado que permite al sujeto interpretar su entorno social y guiar sus comportamientos.

Robert y Robinet exponen su filiación a los estudios que emanan de la psicología social aunque aclaran que para los fines del didacta, conviene más referirse a las "representaciones metacognitivas" del profesor en tanto que se estudia exclusivamente al sujeto dentro del contexto escolar:

> ...**las ideas** (que se expresan, preconscientes) de los maestros (respecto de los alumnos) **sobre las matemáticas y la manera de aprenderlas y enseñarlas**, vistas desde su relación dialéctica potencial con las prácticas nos parecen derivarse de la categoría de las representaciones introducidas por los psicólogos sociales,

> pero **como sólo conciernen a un aspecto de la vida profesional de los maestros (o de los alumnos), adoptamos el término 'representaciones metacognitivas' para designarlas.** El adjetivo califica, en efecto, la especificación que aportamos al término. (Robert y Robinet 1989a, 13 subrayado nuestro).

Con el fin de identificar algunas "representaciones metacognitivas", Robert y Robinet han utilizado las transcripciones de sus observaciones durante la experimentación de las secuencias didácticas y entrevistas espontáneas, así como el análisis del boletín francés de la Asociación de Profesores de Matemáticas (APM), por ser un documento que expone el punto de vista de diversos maestros acerca de las matemáticas. Estos recursos son identificados por los autores como "huellas indirectas espontáneas".

Del análisis del boletín de la APM y de las transcripciones de dos secuencias de clases, los autores concluyen que, en las representaciones metacognitivas de los profesores se pueden reconocer tres dimensiones:

─ Dimensión epistemológica o concepciones acerca de las matemáticas.

─ Dimensión social, relacionada con el papel social de las matemáticas y del profesor de matemáticas.

─ Dimensión cognitivo─pedagógica que reagrupa las ideas sobre el aprendizaje en general sea éste escolar o individual.

Los hallazgos de estos autores les han llevado a hacer consideraciones en torno al éxito o fracaso de algunas propuestas educativas:

> Tal vez los fracasos de políticas educativas pasan porque hay una 'discordancia' entre la propuesta y aquello que los maestros creen (acerca de) las matemáticas, para qué sirven, cómo hacerlas aprender y qué significa aprender matemáticas[...] En esta perspectiva, lo que se puede llamar resistencia a ciertos cambios podría entonces ser atribuida al hecho de que las concepciones de un individuo son frecuentemente bastante estables, por simples razones de equilibrio personal, y también porque una parte de las concepciones corresponde algunas veces a convicciones[...] admitidas sin que se tenga conciencia del fenómeno o sin que se pueda argumentar sobre ellas[...] (Robert y Robinet 1989b, 3).

El interés inicial de estos investigadores trascendió de transmitir secuencias de clase a los maestros al intento de comprender lo que sucede durante las clases por mediación de las concepciones de los maestros. Al ofrecer posibles explicaciones acerca de las concepciones de los profesores, Robert y Robinet destacan lo siguiente:

> Esas concepciones nos aparecen incluso socialmente fechadas, reveladoras de un cierto contexto y de una cierta época, podría decirse que de un cierto 'ambiente'. Posiblemente están reforzadas por el simple hecho de ser compartidas por muchos docentes, y por la precariedad de las situaciones de aquellos que van contra la corriente. (Robert y Robinet 1989b,4).

Las concepciones de los sujetos —agregan estos autores— dependen también, de experiencias personales, de sus conocimientos individuales; así como del medio social y cultural en el que se desenvuelve el individuo. Por tanto, las concepciones "No son necesariamente coherentes ni definitivas para un mismo individuo[...] e incluso pueden variar de un sujeto a otro[...] lo que es convicción para uno, puede ser 'representación' argumentada para el otro" (ibidem).

Tenemos así, un panorama general de estudios realizados con maestros cuya especialidad es la enseñanza de las matemáticas, las concepciones en estos casos, afloran en sus acciones de enseñanza y tal vez, son reflejo de su formación inicial como docentes.

Para tratar de averiguar si los estudios iniciales de los maestros propician algunas modificaciones de sus concepciones originales acerca de las matemáticas y de los procesos involucrados en su enseñanza y aprendizaje, se han realizado investigaciones cuyas aportaciones se reseñan a continuación.

2. Estudios sobre las concepciones de los maestros durante su formación inicial

2.1 Las representaciones de los maestros acerca de las matemáticas en el proceso de formación inicial

En el Instituto Universitario de Formación de Profesores París VII, Marie Lise Peltier ha realizado estudios sobre las concepciones de futuros maestros de primaria acerca de las matemáticas. Peltier recupera la caracterización de Robert y Robinet (1989a y 1989b) sobre las "representaciones metacognitivas" en tanto sistema que se constituye de representaciones, informaciones, actitudes y creencias o visión del mundo que da sentido a las conductas de los individuos (Peltier 1997), y utiliza cuestionarios para precisar algunas representaciones de sujetos encaminados a fungir como maestros de primaria.

La autora utiliza los cuestionarios como instrumento para registrar las concepciones "declaradas" de 100 estudiantes de este Instituto y reconoce que sus estudios sólo dan cuenta de las grandes tendencias de pensamiento. Con el fin de poder constatar posibles transformaciones de las concepciones iniciales de algunos de los estudiantes, Peltier ha mantenido la indagación a lo largo de varios ciclos escolares y, cuando ha sido posible, observa algunas sesiones de clase conducidas por los sujetos encuestados. Algunos de estos estudios, le han permitido extraer conclusiones relevantes para el diseño de estrategias de formación docente. En opinión de Peltier, algunos de los alumnos (futuros profesores) observados:

─ Durante su práctica docente, repiten el esquema de sus maestros de escuela formadora y de los maestros que han observado. Están poco habilitados para hacer un análisis de la práctica docente.

─ Han comprendido bien el enfoque sobre la enseñanza de las matemáticas pero si sus conocimientos matemáticos no son sólidos, optan por una forma de enseñanza fuera del enfoque con el que supuestamente están comprometidos.

Estos hallazgos invitan a la autora a mantener una línea de investigación que permita conocer más ampliamente los vínculos entre la formación de los docentes de primaria y sus prácticas en el desarrollo de su profesión.

2.2 Experiencia durante el proceso de formación inicial de maestros de primaria

Actualmente, en la Universidad de Cádiz, hay una línea de investigación encaminada a diseñar, desarrollar y evaluar estrategias de formación inicial y permanente para profesores de educación primaria. Se asume como un proceso de investigación─acción, en el que se ofrece al maestro la posibilidad de reflexionar sobre su propia práctica a través de la experimentación de unidades didácticas que abordan diferentes tipos de contenidos y que contemplan un proyecto de acción a desarrollar en el aula. (Azcárate 1995).

Desde la perspectiva investigativa aquí implicada, se procura que el profesor en formación participe como investigador de los procesos desarrollados en su propia aula, con el fin de avanzar hacia la reestructuración de sus concepciones iniciales.

El objetivo de todo proceso de formación es la construcción significativa de un conocimiento profesional, considerado:

> ... como proceso evolutivo dinámico y relativo que permite la continua reestructuración de las ideas primarias. Para que dicha reestructuración sea relevante es necesario, por un lado, la implicación activa en el proceso[...]es necesario también el ajuste continuo a lo largo del proceso entre las ideas iniciales y la información puesta en juego en su desarrollo. Es la interacción entre las viejas y las nuevas ideas lo que propicia un desarrollo profesional significativo (Azcárate 1995, 42).

En esta línea de investigación se asume, como premisa fundamental, que el hecho de conocer las concepciones es la clave fundamental para comprender el funcionamiento de los profesores antes y durante la acción y para poder incidir en su transformación. (Clark y Peterson 1990 citado por Azcárate 1995, 42). Por ello, se reconoce como tarea de las escuelas formadoras de docentes, la acción de movilizar las concepciones de los futuros profesores en determinada dirección con el fin de contribuir a la modificación de ciertos estilos de docencia:

> El diseño de las estrategias a desarrollar en los procesos de formación ha de partir de la exploración, contraste y reflexión sobre las concepciones iniciales del profesor para facilitar el avance gradual y continuo de las mismas. En otras palabras, **conocer las concepciones de los profesores es una pieza clave para el formador a la hora de diseñar y desarrollar procesos de formación**, del mismo nivel que para el profesor es conocer las concepciones de sus alumnos (Azcárate 1995, 42).

Así planteado, parece que las concepciones son estados de desarrollo que se pueden estimular, el reporte consultado reseña una experiencia con estudiantes que se preparan para fungir como maestros de primaria, aunque no se hace una reflexión profunda acerca del origen de las concepciones y de sus formas de expresión.

A propósito de la incorporación del conocimiento estocástico en el currículo español, Azcárate ha diseñado un estudio que intenta ilustrar cómo es que los futuros docentes de primaria caracterizan los fenómenos aleatorios y si es que utilizan modelos normativos para analizar, interpretar y decidir en situaciones de incertidumbre:

> El primer estudio que hemos realizado ha estado focalizado en detectar las concepciones de un grupo de estudiantes del tercer curso de Magisterio sobre algunas de las nociones elementales del conocimiento estocástico, más concretamente sobre: aletoriedad y probabilidad. (Azcárate 1995, 44).

Es un estudio inicial, no propositivo, que se hizo con la intención de explorar cómo es que los estudiantes interpretan la información disponible sobre situaciones de incertidumbre, cómo proceden y cuáles pueden ser los obstáculos que reflejan sus formas de concebir el conocimiento probabilístico. Para ello, se elaboró un instrumento que solicitaba decisiones y opiniones en variados contextos, con preguntas abiertas justificativas de la elección tomada en cada caso. Después, se realizaron entrevistas con un grupo de sujetos seleccionados, representativos de las distintas tendencias detectadas y se establecieron categorías de análisis.

Algunas de las conclusiones generales de este estudio son que, en este grupo de futuros profesores, la concepción que presentan de aleatoriedad es muy limitada:

> Gran parte de sus explicaciones sobre la aleatoriedad, se basan en la falta de control sobre las causas que originan el fenómeno. Analizan dichas causas, observan que su funcionamiento no se rige por leyes estables, y concluyen que el resultado no puede ser controlado y, por tanto, es aleatorio. Ello refleja el fuerte poder de la visión determinista de la realidad, a la hora de enfrentarse con situaciones dominadas por la incertidumbre[...] Se detecta, (además), un desconocimiento significativo del tratamiento matemático de este tipo de sucesos y una falta de herramientas intuitivas y normativas, para resolver las distintas situaciones, incluso en aquellas más elementales, como las relacionadas con los juegos de azar (Azcárate 1995, 45).

El reporte termina con la consideración acerca de la necesidad de instrumentar en las escuelas del Magisterio, una formación matemática sobre el conocimiento probabilístico y orientaciones acerca de la complejidad de su enseñanza y aprendizaje en el aula.

2.3 Estudio sobre las concepciones y actitudes de futuros profesores de secundaria hacia la matemática y su enseñanza: Un estudio descriptivo

Se trata de un reporte parcial de una investigación encaminada a analizar los cambios que experimentan los alumnos a lo largo de la Licenciatura de Matemáticas —profesores de secundaria en formación—, en relación con sus concepciones, creencias y actitudes hacia las matemáticas y sus diversas ramas, así como de su comportamiento frente a la resolución de problemas. Es un estudio encaminado a analizar los estados de opinión y actitudes que se dan en los alumnos de la Facultad de Matemáticas de la Universidad de La Laguna en Tenerife, España. Con el fin de tener elementos de contraste se analizan en esta experiencia, las respuestas de alumnos de la Facultad de

Matemáticas y las de alumnos de la licenciatura en Ciencias que aspiran a ser profesores de Matemáticas y para ello, realizan el curso de Aptitud Pedagógica en Matemáticas.

La información se obtiene a través de un cuestionario diseñado por Wain y Woodrow (1980), con algunas modificaciones como producto de ensayos preexperimentales. El cuestionario quedó conformado por 45 preguntas distribuidas en secciones donde se destacan opiniones acerca de:

– la matemática como disciplina científica;

– el papel de la matemática en la sociedad y,

– el papel de la enseñanza y el aprendizaje de la matemática.

Al cuestionario original se agregó un cuarto apartado destinado a obtener información acerca de la matemática como contenido de estudio, pero los resultados de este último apartado, no se analizan en el reporte. (Para un análisis puntual de este instrumento, cfr. Camacho et al. 1995, 90-97).

La muestra de este estudio estuvo integrada por 61 alumnos del quinto curso de la especialidad de Matemática Fundamental (futuros profesores de secundaria); 17 licenciados en Economía, 19 estudiantes de Matemáticas de la especialidad de Estadística e Investigación Operativa, 20 estudiantes de ciencias físicas y 8 de Matemáticas (estudiantes de carreras afines que pueden hacer el Curso de Aptitud Pedagógica en Matemáticas y aspirar a ser maestros de secundaria).

Los resultados obtenidos en el primer apartado (la matemática como disciplina científica), muestran la existencia aparente de un común acuerdo en considerar a la matemática como el lenguaje de las relaciones y las estructuras. Sin embargo, sólo el 19% de los encuestados opinan que la matemática equivale a resolver problemas; hecho preocupante que deriva de la formación eminentemente teórica que ha prevalecido en las escuelas. Un grupo amplio de alumnos piensa que la deducción es el método central que emplea la matemática y solamente 17 de los alumnos encuestados piensan que la invención forma parte importante de los métodos de trabajo de la matemática.

Respecto al segundo apartado (la matemática en la sociedad), en general, se percibe que los alumnos consideran que las matemáticas juegan un papel importante en la sociedad, pero fundamentalmente como lenguaje de las ciencias y por sus aspectos aplicados.

En el tercer apartado (enseñanza y aprendizaje de las matemáticas) son pocos los encuestados que opinan que se debe enseñar las matemáticas constructivamente, así como los que piensan que la resolución de problemas debe ser el mejor camino para entenderlas.

Los autores concluyen que no existen diferencias significativas entre las respuestas dadas por los dos grupos encuestados. Por tanto, se sugiere durante la formación de profesores, la instrumentación de programas de actuación similares a aquéllos que se pretende que lleven a sus aulas, con el fin de conseguir cambios de actitudes favorables hacia la matemática y su enseñanza. (Camacho et al. 1995, 88).

2.4 Estudio sobre las creencias y concepciones de los futuros profesores de matemáticas del bachillerato

Flores (1995) reporta una investigación encaminada a "determinar los contenidos de las concepciones y creencias sobre las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje de los estudiantes para profesor de matemáticas del bachillerato, y examinar cómo evolucionan estas concepciones y creencias tras el 'primer encuentro con la práctica docente' ". (Flores 1995, 122).

Es un estudio desarrollado con 25 alumnos del 5o. curso de la licenciatura en matemáticas en la Universidad de Granada, durante el desarrollo de la asignatura "Prácticas de Enseñanza".

Los elementos claves de esta investigación fueron: el comentario de textos como instrumento de toma de datos, y la "rejilla" o sistema de categorías de los constructos, como instrumento de categorización. Esto en virtud de que el autor reconoce que:

> Las concepciones y creencias de los sujetos son constructos psicológicos que no son directamente observables. Pertenecen a un nivel de información profundo, inconsciente muchas veces, por lo que se precisan métodos indirectos que las hagan emerger (Flores 1995, 123).

Con el fin de que los alumnos expresaran sus creencias acerca de las matemáticas y sus formas de enseñanza se les solicitó que comentaran el texto "Constructivismo y educación matemática" aparecido en la revista *Educación Matemática* (Moreno y Waldegg 1993). Texto que sirvió como "test" para inferir las concepciones de los alumnos antes y después de haber cursado la asignatura "Prácticas de Enseñanza". Los comentarios iniciales de los alumnos se enriquecieron con entrevistas personales que sirvieron para aclarar las concepciones y creencias de los participantes.

Empleando el comentario de texto como reactivo y la rejilla como instrumento de recolección y análisis de datos, se estudiaron las creencias y concepciones colectivas del grupo en dos momentos del desarrollo de la asignatura "Prácticas de Enseñanza". Sin embargo, no aparecieron diferencias sustantivas en las respuestas del grupo de estudiantes antes y después de realizar las prácticas, aunque sí aparecieron diferencias significativas en estudiantes concretos, hecho que motivó al autor a continuar con la investigación en la dirección del estudio de casos.

El reporte de esta investigación sólo enuncia su centramiento en el estudio de caso de dos alumnos cuyas producciones y opiniones han permitido obtener el perfil de sus creencias respecto a: la forma en que se caracteriza la enseñanza, cómo conciben su proceso de formación y qué expectativas se plantean como profesores.

Las investigaciones que acabamos de reseñar nos muestran en qué medida los estudios sobre las concepciones de los maestros son eminentemente cualitativos y tienden a convertirse en estudios de caso. Los resultados obtenidos son siempre preliminares y motivan más bien el desarrollo de investigaciones ulteriores.

Existen también reportes de investigación que tratan sobre las concepciones de maestros de primaria durante el ejercicio de su profesión; son artículos breves a propósito de temas específicos y que motivan reflexiones en torno a las necesidades de crear programas de formación y de actualización docente que consideren estos "saberes docentes" expresados en las prácticas rutinarias de algunos maestros mexicanos. Enseguida reseñamos dos, cuya información fue obtenida durante la observación directa de sesiones de matemáticas.

3. Estudios sobre las concepciones de maestros de primaria en servicio

Con el fin de estudiar de qué manera las creencias de los profesores orientan su labor educativa, Méndez (1990) analiza el proceder de una maestra de 5o. año durante una sesión encaminada a lograr que sus alumnos llegaran a establecer relaciones de orden entre fracciones comunes.

El autor destaca la importancia que la maestra otorga al empleo de los signos "mayor que" y "menor que", al elemento convencional gráfico, como prueba de aprendizaje y al privilegiado empleo del "modelo de pastel" para comparar fracciones, anunciando además que:

> En este caso la profesora ha escogido un tema que ni siquiera aparece en el programa del grado ni en el libro del alumno y es ella quien va haciendo los cuestionamientos sobre las figuras que propuso, la discusión más parece seguir la lógica de la maestra que la de los alumnos, quienes hasta el momento tienen como única actividad seguir el discurso de la maestra pues les está vedado el siquiera tener lápiz y cuaderno sobre la mesa. (Méndez 1990, 36-37).

Las observaciones del trabajo de los maestros en el aula permiten por un lado, identificar aquéllos elementos que destacan como fundamentales para el aprendizaje de sus alumnos; pero también suelen ser evidencias de errores conceptuales o contenidos que se manejan con deficiencia, datos que pueden ser relevantes para el diseño de estrategias de formación y de actualización docente.

Otro ejemplo sobre las concepciones de los maestros de primaria, lo ofrece uno de los estudios de Ávila (1996) a propósito del empleo de los nuevos libros de texto que en México circulan a partir de 1994.

En opinión de la autora, para algunos maestros resulta inútil realizar actividades de medición directa como acercamiento inicial al cálculo de áreas y por ende, siguen privilegiando el empleo de las fórmulas para hacerlo, pese a la secuencia propuesta en los libros de texto (comparar y ordenar, mediante estimación y superposición, algunas superficies; hacer el conteo de las veces que una unidad de medida cabe en una figura y determinar así su área):

> A lo largo de la secuencia no se sugiere el uso de fórmulas, pues la intención es ofrecer experiencias de medición directa y proponer situaciones problemáticas en las que los niños generen sus propias estrategias de solución (Ávila 1996, 11).

Esta secuencia en particular, ha de competir con una fuerte tradición de enseñanza basada en el empleo de las fórmulas para calcular el área:

> Se piensa que aplazar el uso de las fórmulas e incorporar actividades de medición directa para calcular áreas (o volúmenes) es innecesario y, por lo mismo pérdida de tiempo. Es la enseñanza procedimental respaldada por la tradición educativa *vs.* la enseñanza constructiva y comprensiva del nuevo enfoque (de los programas de estudio y de los libros de texto) (Ávila 1996, 13).

La autora, si bien admite que algunos planteamientos de enseñanza postulados por el nuevo currículo en México tienden a ser interpretados por los maestros a partir de esquemas de actuación docente heredados por una añeja tradición educativa, subraya también que es posible transformar tales esquemas de actuación y que, en ese proceso, juega un papel fundamental el empleo de los libros de texto:

> Muchos investigadores cuestionan la posibilidad de lograr cambios en el aula con la simple incorporación de nuevos materiales curriculares. Esta afirmación debe revisarse. Como aquí hemos visto, si bien se expresan opiniones que cuestionan la incorporación de actividades tendentes a promover aprendizajes no sólo procedimentales sino significativos, se da también una posibilidad real de modificar la tradición, al menos en algunos sectores del magisterio[...] Es el caso de maestros que han asumido el riesgo de impulsar entre sus alumnos otro tipo de actividades y acercamientos (propuestos en los libros de texto) (Ávila 1996, 14).

En estos casos, se observa que las consideraciones que emanan de estudios centrados en el aula, refieren el tratamiento de temas específicos: la comparación de fracciones, la medición de áreas. La particularidad de los estudios, sin embargo, no es obstáculo para ofrecer recomendaciones de carácter general:

— Considerar las concepciones actuales de los maestros como retos que deben enfrentarse en procesos de formación y de actualización.

— Reconocer que hay indicios de ciertas transformaciones de las concepciones y de las prácticas docentes de los maestros de primaria, a partir de la puesta en marcha de algunas actividades propuestas en los libros de texto.

Como ya se ha visto, los estudios sobre la práctica docente, permiten identificar algunas de las concepciones —tal vez las más dominantes— de los maestros y, por ende, invitan a tratar de proponer sus posibles transformaciones mediante procesos de actualización. A continuación, reseñamos algunas experiencias de actualización que han permitido, primero, identificar ciertas concepciones de los docentes y, en algunos casos, mostrar condiciones útiles para propiciar su transformación.

4. Estudios sobre las concepciones de los maestros durante procesos de actualización

4.1 Estudio basado en las actuaciones de maestros excepcionales

Como se dijo al inicio del capítulo, Alba González Thompson es pionera en la investigación encaminada a estudiar las concepciones de los maestros. Sus estudios iniciados en los ochenta, continuaron hasta lograr publicar una síntesis de las investigaciones realizadas al respecto. (Thompson 1992).

Al inicio de esta década, Thompson publica un texto donde describe los niveles de desarrollo en las concepciones de los maestros, caracterizadas a partir de su experiencia investigativa en este terreno. Según esta autora, hay tres niveles de desarollo en las concepciones de los maestros (Thompson 1991).

En el primer nivel, los maestros consideran que:

– Aprender matemáticas es dominar las habilidades presentadas en el libro de texto.

– El papel del maestro es mostrar los procedimientos.

– La meta de la enseñanza es obtener respuestas precisas.

En el segundo nivel, "las concepciones de las matemáticas y del aprendizaje se amplían para incluir una apreciación de las razones que justifican las reglas, pero éstas se hallan todavía predeterminadas y dominan todo el trabajo en la clase de matemáticas" (Thompson 1991, citado por Flores et al. 1994, 38).

En este nivel también, los maestros proponen el uso de materiales manipulativos, aunque su empleo se valora más por razones de actitud que cognitivas y las decisiones pedagógicas se basan en lo que el "experto" dice que es correcto.

La característica del tercer nivel en cambio, es la utilización explícita de principios cognitivos en las decisiones de la enseñanza. En este nivel, los maestros conciben la enseñanza de las matemáticas como investigación y descubrimiento por parte de los alumnos; utilizan representaciones gráficas y físicas como contextos en los que los alumnos pueden realizar tareas cuidadosamente diseñadas. En suma, en este nivel, el papel del maestro consiste en guiar a los alumnos a pensar productivamente en forma matemática; por ende, la calidad de la enseñanza se enuncia en términos de los logros alcanzados por los alumnos.

Guiados por la caracterización de estos niveles de desarrollo de las concepciones de los maestros, un grupo de investigadores ha emprendido estudios con el propósito de "identificar maestros que están cambiando la forma en que las matemáticas son enseñadas y aprendidas, y describir las características de ellos en cuanto a su formación, su concepción de la enseñanza, y su práctica docente" (Flores et al. 1994, 32).

Esto es, se trata de estudios sobre maestros que han alcanzado el tercer nivel de desarrollo de las concepciones, nivel que según Thompson:

> ...es el más difícil de alcanzar pues requiere una reestructuración a fondo de esquemas conceptuales, para lo cual se necesita un esfuerzo concentrado y sostenido. Y nosotros agregamos que se requiere una cantidad de reflexión por parte del maestro. Los datos indican que los docentes aquí descritos han logrado o están logrando esta reestructuración en sus concepciones (Flores et al. 1994, 32).

Para realizar este estudio se eligieron cuatro "maestros extraordinarios" de escuelas estadunidenses dispuestos a participar en la investigación, organizando sesiones destinadas a la enseñanza y el aprendizaje de los conceptos de número racional y cantidad en los grados 5o., 6o. y 7o. Los criterios utilizados para calificar a estos maestros como "extraordinarios" son los siguientes:

> Son reconocidos dentro de la comunidad local de educación matemática, han elegido participar en programas de desarrollo profesional, actúan en la asociación de profesores de matemáticas de la ciudad, y frecuentemente son escogidos para participar en proyectos locales y estatales, tales como reforma de planes y programas, y de evaluación, proyectos de liderazgo profesional y de investigación, y programas de desarrollo profesional para otros maestros de matemáticas. El uso de estos criterios contrasta con los usuales en Estados Unidos, que utilizan las calificaciones de los exámenes estandarizados, y la recomendación por parte de los directores (Flores et al. 1994, 33).

Es pues una investigación encaminada a estudiar la congruencia entre lo que dicen estos maestros y lo que hacen en el aula. La información fue recabada a través de entrevistas con los maestros al principio del proyecto, de una evaluación escrita de su conocimiento del contenido matemático, y de las interacciones generadas entre los maestros y el equipo de investigadores durante seis seminarios de tres horas cada uno, organizados como parte de esta indagación.

Los datos se complementaron con la información registrada durante las observaciones de la actuación de los maestros en el aula. Estas observaciones, las realizaron dos investigadores al mismo tiempo, quienes utilizaron grabadoras e hicieron un reporte escrito inmediatamente después de cada observación. Este reporte además de ofrecer observaciones generales, precisa información sobre cuatro aspectos: 1) contenido matemático de la clase; 2) representaciones de enseñanza y herramientas utilizadas; 3) oportunidades para desarrollar ideas matemáticas, y 4) espacio intelectual. (Para una revisión puntual del instrumento de observación, véase Flores et al. 1994, 43-45).

Algunas conclusiones derivadas de este estudio son cuestiones que estos cuatro "maestros extraordinarios" mostraron en común. Los maestros en cuestión:

— Han participado en actividades diversas de desarrollo profesional.

— Manifestaron su interés por conocer textos publicados por organizaciones profesionales y de aquéllos publicados por las autoridades estatales sobre la enseñanza de las matemáticas y temas afines.

— En el examen, los maestros mostraron conocimientos de las diferentes concepciones de número racional. No se limitaron a la noción de parte de un todo.

— Durante las entrevistas, los maestros mencionaron que uno de sus principales retos consiste en cambiar la actitud de los alumnos que sólo quieren saber qué regla aplicar y conducirlos a que comprendan que ellos pueden descubrir y hacer sus propias reglas.

— Los cuatro maestros han establecido como prácticas regulares de sus clases: el trabajo en equipo, la elaboración de un diario y la organización de actividades utilizando materiales.

En este estudio se manifiestan también las dificultades que estos maestros han enfrentado en su intento por organizar lecciones creativas como son la presión de las autoridades escolares y de los padres de familia.

Sin embargo, se destaca en mayor medida, su interés y buena disposición por llegar a ser "mejores" maestros. Al respecto, los autores de la investigación destacan el desarrollo de la capacidad de reflexión que los maestros mostraron en los diferentes momentos que constituyeron la investigación:

> Los cuatro maestros de este estudio ven su profesión como un constante cambio y desarrollo[...] Para estos maestros, el proceso de cambio fue gradual y continuo[...] En nuestro trabajo con estos cuatro profesores, fue evidente una y otra vez la calidad de reflexión de su pensamiento y su práctica[...]Durante las

> entrevistas, muchas veces daban respuestas inmediatas, claras, bien estructuradas, revelando que antes habían pensado cuidadosamente acerca de estas cuestiones. Durante los seminarios escuchaban atentamente a los demás y eran capaces de ayudarse unos a otros para articular su pensamiento. Creemos que esta cualidad de reflexión ha sido un factor clave en los cambios que tales exponentes de la docencia matemática han tenido desde sus primeros años de enseñanza (Flores et al. 1994, 40).

El reporte finaliza señalando que el interés de los investigadores consiste no sólo en descubrir "maestros extraordinarios" sino en señalar las condiciones que permitan a estos maestros *ser la regla y no la excepción*.

4.2 Estudios sobre las concepciones de los maestros de primaria durante procesos de actualización

En México, algunos miembros del Departamento de Investigaciones Educativas han desarrollado una línea de investigación encaminada a vincular la investigación didáctica o "de laboratorio" y la práctica docente; para ello, han organizado talleres de actualización con maestros en servicio con la intención de que las vivencias obtenidas por los maestros en estos eventos, logren impactar algunas de sus prácticas docentes (Gálvez 1982, Fuenlabrada y Nemirovsky 1988, León y Venegas 1990).

En particular, el grupo del Laboratorio de Psicomatemáticas —coordinado actualmente por Irma Fuenlabrada y David Block— ha diseñado talleres de actualización donde los maestros son enfrentados a situaciones que les permitan experimentar procesos de construcción de conocimientos y cobrar conciencia de la importancia que tiene para éstos, la interacción con el objeto de conocimiento y con el entorno social. Estas experiencias en las que el docente interactúa con los objetos y con otros colegas, buscan que el maestro replantee a nivel teórico, su papel como profesor dentro del aula (Fuenlabrada y Nemirovsky 1988, 82).

La realización de estos proyectos de investigación, ha permitido entre otras cosas, conocer las creencias de los profesores; probar algunas secuencias para el tratamiento de ciertos contenidos y en ocasiones, valorar el impacto de algunas acciones emprendidas durante los talleres.

A continuación se reseñan dos de las experiencias emprendidas por este grupo de investigadores que son antecedentes inmediatos al trabajo que aquí presentamos.

4.2.1 Curso—taller "Los problemas de matemáticas"

El tema deriva del proyecto *Formación de profesores sobre áreas fundamentales de la educación básica* (Block, Fuenlabrada y Nemirovsky (coords) 1989), investigación que se realizó con maestros de dos escuelas oficiales del Distrito Federal donde se realizaron sesiones de tres horas cada quince días, durante el ciclo escolar 1988─1989.

> Con esta periodicidad intentamos por un lado que las sesiones de taller fueran frecuentes, pero que a la vez hubiera un espacio entre cada par de sesiones, durante el cual los maestros realizarían diversas tareas, entre las cuales la más importante sería poner en práctica en su clase, elementos derivados directa o indirectamente de las actividades realizadas en el curso-taller (Block et al. 1995b, 7).

Debido a la relevancia de los problemas en la enseñanza de las matemáticas, y al interés que podía cobrar entre los maestros de los seis grados de primaria, se decidió desarrollar como contenido general de este curso─taller el tema "Los problemas de matemáticas" y de acuerdo con las inquietudes manifestadas por los maestros a lo largo de las sesiones, se fueron definiendo las temáticas particulares:

> Las sesiones de resolución de problemas con maestros se organizaron poniendo en juego los mismos recursos de enseñanza que interesaba que ellos probaran, poco a poco, en sus grupos[...]Dos de los recursos que se utilizaron sistemáticamente en estas sesiones fueron: no dar orientaciones previas acerca de cómo se resolvían los problemas planteados, y analizar, al final, los distintos procedimientos con los que los maestros llegaban a las soluciones[...] (Block et al. 1995b, 12).

Además de las observaciones de las sesiones del curso─taller realizadas por miembros del equipo de investigación. En este proyecto se realizaron tres tipos de observación de clase:

─ Observaciones de clases impartidas por maestros participantes. Los registros fueron responsabilidad de los investigadores y forman parte del material de análisis del proceso. Algunas de estas observaciones formaron parte de los materiales de apoyo durante el curso─taller.

─ Una inter─observación mensual entre los maestros participantes. "Con esta actividad se buscó dar la posibilidad al maestro de observar una clase desde una perspectiva distinta al de quien la imparte, y enriquecer así el intercambio crítico de experiencias entre los participantes. (Block et al. 1995b, 7).

— Una autobservación mensual, es decir, una clase registrada por el mismo maestro que la imparte. El registro de esas sesiones permitió que el propio maestro reflexionara sobre las decisiones tomadas en clase.

El énfasis puesto en el análisis de las observaciones de clase deriva de la intención general de este proyecto de investigación: "asumir la práctica de los maestros como el espacio en el que se identifican algunos problemas, y en el que se estudia la factibilidad de alternativas didácticas" (Block et al. 1995b, 6).

Algunas conclusiones de este proceso de investigación son las siguientes (Fuenlabrada y Block (coords) et al. 1990, 120—122):

— Las observaciones del trabajo del aula, realizadas por los capacitadores, son una fuente de datos fundamental para orientar las acciones didácticas de la capacitación porque permiten entre otras cosas: identificar dificultades de tipo metodológico y de orden conceptual que no son evidentes para los maestros.

— Para los maestros es fundamental analizar los registros de dichas observaciones durante el desarrollo de los talleres, ya que de esa manera se contribuye a que reflexionen sobre sus propias modalidades de trabajo. Además, algunos registros de clase, evidencian cierta evolución de las estrategias didácticas incorporadas por los maestros a sus prácticas y conviene valorar esa evolución aunque, para que esto sea posible, se precisa que la realización de los talleres sea al menos de un par de meses y las observaciones sean frecuentes y regulares.

— Una de las características más destacable y positiva es "hacer en vivo" situaciones didácticas —siguiendo la modalidad de que los capacitadores intentan que adopten los maestros en su rol docente—, lo que facilita que los maestros se involucren en el enfrentamiento y resolución de un problema, a través de la interacción en pequeños grupos, donde el capacitador asuma el rol de coordinador de la actividad, y no el de "informador", esta estrategia no consiste en realizar una réplica del aula donde los maestros asumen el rol de niños, sino que participan como adultos en situación de aprendizaje.

— Es altamente conveniente proporcionar a los maestros sugerencias de actividades específicas para que realicen durante los períodos inter---talleres. De esta manera encuentran una forma de llevar a la práctica alternativas didácticas referidas a los aspectos que se están trabajando en los talleres y, también, constituyen puntos de apoyo para que elaboren otras propuestas.

— Es necesario destacar que los cambios detectados en los maestros durante el desarrollo de una capacitación son resultado de un proceso que no termina con la finalización del proyecto. Lo anterior implica que, para saber si dichos cambios se incorporaron de manera estable, se requiere realizar un seguimiento del proceso de los maestros a largo plazo.

En particular, sobre la temática de "los problemas de matemáticas" ha podido constatarse que, en el corto plazo, la mayoría de los maestros que participaron en esta experiencia de actualización empezaron a valorar el razonamiento subyacente a los procedimientos no esperados, o sea, se empezó a comprender y a valorar el trabajo de búsqueda. (Block et al. 1995b, 25).

Los resultados del seguimiento instrumentado con algunos de los maestros participantes, se encuentran en proceso de análisis; pero se adelanta que aunque puedan tratarse de ligeros cambios, es importante reconocer que: "la forma como cada maestro incorpora en su práctica innovaciones didácticas, depende en gran medida de su experiencia profesional y de su trayectoria personal" (Block et al. 1995b, 26).

Esta investigación desarrollada con maestros de dos escuelas primarias, ofreció condiciones para realizar un seguimiento posterior con algunos de ellos una vez concluido el curso—taller. Se trata de una experiencia que dio especial atención al análisis de las observaciones de clase y que permitió la prueba de una estrategia de actualización que consiste en ofrecer a los maestros situaciones problemáticas que les permitan reconceptualizar algunos saberes, así como redefinir su actuación docente.

Algunos de los hallazgos de este proceso de actualización y de otras experiencias relacionadas con la formación de docentes, permitieron al equipo de matemáticas del Departamento de Investigaciones Educativas, capitalizar su experiencia en este terreno para diseñar el paquete didáctico *La enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria*, material cuya experimentación con un grupo de maestros en servicio, ha hecho posible indagaciones acerca de las concepciones de los maestros y de las condiciones que propician su transformación, según reseñamos a continuación.

4.2.2 Estudio sobre las transformaciones que sufren las concepciones de los maestros sobre contenidos geométricos en un curso de actualización

El estudio deriva de la puesta en práctica de las actividades de la unidad V Geometría del paquete didáctico *La enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria* con un grupo de maestros en servicio, bajo la modalidad de curso-taller coordinado por un miembro del equipo de matemáticas del Departamento de Investigaciones Educativas.

En este trabajo, primero, se reseñan algunas concepciones que los maestros de primaria tienen acerca de los contenidos geométricos. La autora reconoce que las investigaciones sobre este tema, son aproximaciones de tipo cualitativo: "se pide al maestro, en entrevistas semi—estructuradas, que exprese sus ideas sobre lo que tendría que ser relevante en cuanto al contenido geométrico y la forma de abordarlo, para contrastarlas, en un segundo momento, con la manera en que posiciona a los niños frente al conocimiento en el salón de clases" (Ávalos 1997, 11), que han permitido identificar algunas creencias de los maestros de primaria sobre la geometría, tales como:

1) La geometría es un conjunto de configuraciones que los niños tienen que identificar.

Por tanto, se privilegia la percepción como medio para identificar las figuras, distinguirlas y nombrarlas.

2) Las figuras y cuerpos geométricos se definen en términos de su posición relativa y se denominan en términos de su "regularidad".

Esta creencia se sustenta en las prácticas de enseñanza que privilegian la clasificación de las figuras únicamente por la percepción de las dimensiones y el número de lados de la figura, en detrimento de la definición correcta de figura regular que es aquella que tiene sus lados y ángulos interiores congruentes. (Ávalos 1997, 13).

3) La geometría es un conjunto de configuraciones que los niños tienen que saber trazar.

Situación en la que cobra especial relevancia el empleo "correcto" del juego de geometría (escuadras, regla y compás) y que contribuye, a considerar a las figuras geométricas más por el tamaño de sus dimensiones que por sus propiedades y las relaciones que guardan entre sí.

4) La medición forma parte de los conocimientos geométricos.

El cálculo de magnitudes aparece como un espacio privilegiado para ejercitar la operatoria aritmética —a través de la correcta sustitución en un fórmula—, y como posibilidad de darle significado al aprendizaje de la geometría, pues el cálculo de perímetros, áreas y volúmenes aparece como la vinculación de la geometría con posibles soluciones a problemas de la "vida real".

5) El estudio de la geometría en la primaria se ha centrado en las figuras planas.

En la opinión de la autora de este estudio: "La geometría del espacio ha sido para los maestros un conjunto de cuerpos regulares que el niño tiene que saber construir. La clasificación de los sólidos ha sido muy pobre o ha estado ausente en los programas[...]" (Ávalos 1997, 17).

Esta lista inicial de concepciones permite a la autora valorar algunas de las situaciones didácticas diseñadas para la actualización de los maestros, encaminadas a favorecer algunos cambios conceptuales y de orden metodológico en el tratamiento de la geometría en la escuela primaria.

En las conclusiones derivadas de este proceso de investigación se destaca:

— Que son escasos los estudios relacionados con las concepciones de los maestros acerca de contenidos geométricos así como sobre secuencias didácticas para tratarlos. En particular, se señalan algunos indicios que permiten suponer la transformación de ciertas concepciones iniciales de los maestros, como efecto del taller de actualización (Ávalos 1997, 152-154):

— Algunos maestros actuaban de acuerdo con la creencia de que las figuras y las relaciones geométricas se caracterizaban mediante la asignación de un número, producto de una medición lineal. Con estas ideas, enfrentaban situaciones de trazo de triángulos aunque poco a poco y gracias a la intervención del coordinador —que sugirió evitar el empleo de la regla graduada durante las sesiones de geometría—, los maestros abandonaron la idea de esa caracterización, centrando su atención en propiedades métricas.

— Algunos maestros también caracterizaban las figuras de acuerdo con su posición con respecto a los bordes de la hoja; y los cuerpos con respecrto a la cara en la que se "apoyan". Las actividades que promueven el análisis de las características geométricas de las figuras, así como actividades de trazo y construcción, permitieron que los maestros empezaran a prescindir de la posición como elemento característico de las figuras.

— El análisis también reveló la pertinencia de ofrecer a los maestros situaciones didácticas que propicien la elaboración de proposiciones que den cuenta de las relaciones intra e interfigurales. Proposiciones que funcionan como conjeturas y en cuya argumentación resulta altamente significativo el trabajo en grupo.

Cabe aclarar que de no haberse propiciado situaciones grupales de confrontación en el curso, los resultados no habrían sido los mismos, porque el centramiento excesivo en la verificación de resultados mediante la percepción visual, propuesto en las actividades del paquete didáctico, anula la posibilidad del razonamiento geométrico, de la validación del resultado, y por ende de la prueba (Ávalos 1997, 154).

El estudio se cierra con la consideración acerca de la necesidad de realizar investigaciones posteriores que permitan identificar tales "concepciones transformadas" en las acciones docentes de los maestros involucrados en este proceso de actualización.

La tesis que aquí presentamos pertenece a la línea de investigación reseñada en los párrafos anteriores, estudia las acciones de los maestros de primaria durante un proceso de actualización donde los maestros enfrentaron "situaciones problemáticas" y que estuvo coordinado por un miembro del equipo de investigación.

En este trabajo —a diferencia del proyecto *Formación de profesores sobre áreas fundamentales de la educación básica* también realizado por el Laboratorio de Psicomatemáticas—, las posibilidades de realizar tareas de seguimiento con los maestros involucrados en el curso—taller se limitaron a solicitar la realización de alguna secuencia didáctica de los temas tratados con sus alumnos, y los materiales empleados, así como las opiniones escritas por los maestros a propósito de estas actividades, forman parte de los registros del proyecto. Estos materiales constituyen "huellas indirectas" o evidencias de las transformaciones conceptuales y/o metodológicas, que algunos maestros han logrado incorporar a su práctica diaria en el aula.

Es posible también dejar planteada la posibilidad de que tales evidencias sean sólo producto de la inmediatez de las tareas propuestas como parte del curso—taller y no se constituyan en las prácticas habituales una vez concluido este proceso de actualización. En todo caso, importa rescatar el impacto de algunas "situaciones problemáticas" como secuencias que posibilitan la transformación de ciertas concepciones y de algunos saberes docentes.

CAPÍTULO 2

LA MEDICIÓN: SU INTERPRETACIÓN ESCOLAR Y PRINCIPIOS BÁSICOS

Las concepciones de los maestros de primaria se han conformado con aprendizajes generados en su tránsito por la escuela, las experiencias de formación docente, el intercambio de impresiones con sus colegas y en general, con las experiencias curriculares de las que han sido partícipes como alumnos o como maestros.

> Los saberes docentes de los maestros incluyen información relativa a la enseñanza que les ha sido significativa durante su formación académica. Esos saberes también se conforman por referencias de compañeros o familiares maestros, cuya influencia les resultó importante y por las prácticas de otros maestros que han observado en las escuelas por las que han pasado como alumnos y como docentes (Lortis 1975 citado por Mercado 1994, 54).

En este capítulo reseñamos la interpretación escolar de la medición que ha prevalecido en México y que permite explicar algunas creencias y comportamientos de los maestros frente a las actividades de este aspecto de las matemáticas.

1. Dos ejemplos del tratamiento de la medición en la escuela primaria

Ya en el capítulo 1 se anticipó que las prácticas de la medición en la primaria se han hecho privilegiando el empleo de las fórmulas para calcular perímetro, área o volumen de figuras y cuerpos geométricos.

Algunas observaciones de clases de matemáticas en la primaria han permitido constatar que entre los alumnos de 5o. y 6o. hay escasa comprensión del concepto de área (Ávila 1990); algunas otras, permiten evidenciar que las lecciones de geometría son en realidad, lecciones de medición reducidas a ejercicios aritméticos basados en la sustitución de fórmulas que anulan cualquier consideración sobre las características geométricas de las figuras cuyas magnitudes se calculan. (Méndez 1991).

La medición, por lo que aquí se puede ver, ha sido considerada un apartado de la geometría que permite la ejercitación de las operaciones aritméticas sin ofrecer condiciones para la aprehensión conceptual de los procesos implicados en ella.

A continuación reseñamos las experiencias curriculares que han propiciado este tratamiento de la medición en la escuela primaria y cuya interpretación se pretende erradicar con el Plan y programas para la Educación Básica (SEP 1993a).

2. La medición en los currícula de educación primaria

En México, surge la primera propuesta curricular de carácter nacional hacia la década de los cuarenta; desde entonces, ha habido cinco reformas curriculares (1944, 1960, 1972, 1978 y 1980, 1993) que motivaron cambios en los programas oficiales de las matemáticas.

En el estudio de Ávila (1988), se señala que, en los planes de estudio de la década de los cuarenta, los temas recurrentes tratados como parte de la geometría eran las figuras regulares (líneas, superficies, volúmenes) en escasa relación con el espacio circundante y que se daba especial valor a la "habilidad" con la que se empleaban las fórmulas.

Respecto a la propuesta curricular de los años sesenta, la misma autora señala que la geometría era:

> Una serie de productos acabados que toman la forma de datos, de descripciones y clasificaciones. A la vez, es un conjunto de habilidades: para trazar, medir, memorizar y aplicar fórmulas... el énfasis está puesto en la fórmula, la destreza y la aplicación (Ávila 1988, 27).

Se tiene entonces que, en los sesenta los temas de medición tienen un gran peso en la geometría escolar que debe ser tratada en las aulas de la primaria.

Hacia 1972 se conforma un currículo para la primaria organizado en áreas del conocimiento y las matemáticas incluyen temas no sólo de Aritmética y Geometría sino también de Lógica, Probabilidad, Estadística y Variación funcional (ésta última sólo en sexto grado).

La medición continúa formando parte de la geometría pero no se reduce sólo al empleo de las fórmulas para cuantificar magnitudes de figuras regulares sino que se incluyen algunos cálculos de superficies y volúmenes de figuras irregulares, con el propósito de destacar relaciones y métodos generales:

> La geometría también toma un ángulo distinto con respecto a programas anteriores: se trabajan conceptos, relaciones y

> métodos más que algoritmos, fórmulas y clasificaciones... la idea de área (se relaciona fundamentalmente con figuras irregulares)... y El volumen ... se asocia a métodos para calcular el volumen de cuerpos irregulares (Ávila 1988, 71).

Este planteamiento de la geometría, que permite que la medición se aplique también a las figuras irregulares y resta énfasis al empleo de las fórmulas, prepara el terreno para que la reforma educativa de 1978 ofrezca condiciones propicias para el desarrollo de la medición desde una perspectiva más centrada en la actividad del alumno.

La reforma curricular de 1978 abarcó sólo los tres primeros grados de la primaria. Se trataba de una experiencia "integradora" para el primer ciclo y una redefinición del programa de tercer grado. En esta experiencia curricular, la medición empieza a ganar terreno en el apartado de geometría, incorporándose a través de comparaciones entre longitudes; se promueve el uso de unidades no convencionales para medir, así como el estudio del perímetro de regiones regulares e irregulares, además de aquéllos temas usualmente tratados en la primaria: medidas de los lados de las figuras, uso del metro, decímetro y centímetro, cálculo de perímetros y áreas.

Por tanto, los temas relacionados con la medición corren mejor fortuna en la propuesta curricular de 1978 pues, aunque se presentan como parte de la geometría, se establecen con algunas novedades que anteceden la actual experiencia curricular que hace de la medición uno de los *ejes conceptuales* para la educación básica.

Debido a que la reforma curricular de 1978—1980, tocó sólo los tres primeros grados de la primaria, la medición en los otros grados, se mantuvo dentro del marco de una geometría que permitía la ejercitación numérica:

> Para los contenidos relacionados con áreas, longitudes y volúmenes, se sugiere un tratamiento en el que se parte del **cálculo** intuitivo de las dimensiones de segmentos, figuras u objetos. Posteriormente se introduce la idea de unidad de medida y es sólo al final de los procesos que se apuntan las **fórmulas para calcular** las medidas señaladas pero siempre con la idea de que sea el niño quien las deduzca (SEP 1982a, 62, subrayado nuestro).

Los sistemas de medida también formaron parte de las recomendaciones generales para tratar los contenidos de la geometría:

> En este grado (5o.) el niño deberá calcular las áreas, longitudes o volúmenes con diferentes unidades (metros, kilómetros,

> decímetros) dependiendo de la precisión que se requiera o de la unidad que resulte conveniente utilizar (SEP 1982b, 62).

En la práctica, sin embargo, el problema de la medición quedó reducido al uso generalizado de fórmulas y ejercicios numéricos de conversión de unidades. (Ávila 1996, 11).

Este tratamiento indiferenciado de la geometría y la medición, que se dictó desde los programas oficiales, ha favorecido entre los maestros la creencia de que el cálculo de áreas o volúmenes es un problema propio de la geometría. (Véase por ejemplo la afirmación: "Veamos ahora cómo enfrenta un grupo de alumnos de 6o. grado **un típico problema de geometría: calcular el área de un trapecio**" (Block y Dávila 1993, 20, subrayado nuestro).

La medición aparece como un componente particular de las matemáticas por primera ocasión, en una propuesta curricular denominada *Propuesta para el aprendizaje de la lengua escrita y la matemática* (PALEM) (Cortés et al. 1991). Propuesta que emana en principio, de investigaciones realizadas en la Dirección General de Educación Especial y que logra cobertura nacional, aunque para el caso de las matemáticas, se restringe a primer grado.

3. La medición en la reforma curricular de 1993

A diferencia de experiencias curriculares anteriores en donde la medición formó parte sustancial de la geometría de la primaria, en el currículum de la Primaria desde 1993, este tema se presenta como un eje conceptual, con un lugar específico, proponiéndose como un espacio de experiencias que permite a los alumnos de primaria desarrollar las nociones de longitud, superficie, capacidad, peso, tiempo, volumen, y de medidas angulares, y favorece la comprensión de que, para cada magnitud, se requieren de unidades de medida específicas.

De acuerdo con el *Plan y programas para la educación básica. Primaria* (SEP 1993a), los aspectos de la medición que se tratan a lo largo de la primaria son:

– El estudio de las magnitudes.

– La noción de unidad de medida.

– La cuantificación, que resulta de medir dichas magnitudes.

Tenemos así que, el programa de educación primaria vigente (1993) ofrece un espacio especial a los temas relacionados con la medición, de ahí que: "Las nociones sobre las diferentes magnitudes de peso, capacidad, superficie, volumen y tiempo, así como el concepto de medición, se desarrollan durante los seis años de la primaria..." (Fuenlabrada 1995, 11); y esto permite que el estudio de la geometría se independice y amplíe sustancialmente.

La geometría en la propuesta curricular de los noventa, descargada de las prácticas relativas al cálculo de superficies, longitudes y volúmenes, se abre como un espacio de trabajo escolar destinado a propiciar la reflexión sobre las características geométricas y la transformación de unas figuras en otras:

> Se propone un trabajo didáctico que favorezca el desarrollo de la percepción geométrica, así como un trabajo más extenso sobre propiedades geométricas, transformaciones geométricas y reproducción de figuras y cuerpos geométricos. (Fuenlabrada 1995, 12).

Según los planteamientos del Plan y programas de estudio 1993: "el desarrollo del razonamiento geométrico tendría que lograrse mediante el desarrollo de tres líneas: la ubicación espacial, el análisis de la figura geométrica y el análisis del cuerpo geométrico" (Ávalos, 1997, 20).

Respecto a la medición, el currículo vigente la establece como un eje conceptual, cuyo primer propósito es:

> *...* iniciar desde primer grado el desarrollo de las nociones (de longitud, capacidad, superficie, peso y tiempo) mediante experiencias en las que los alumnos empiecen a establecer ciertas comparaciones de longitud, superficie, capacidad y peso sin llegar a la cuantificación convencional, y en las que, paralelamente, comprendan que para realizar comparaciones en cada una de estas magnitudes necesitan utilizar elementos con características determinadas (SEP 1994a, 12).

En sentido opuesto a la tradición educativa que privilegia los cálculos numéricos con unidades convencionales y el uso de algunos instrumentos de medición, este *eje conceptual* adquiere un carácter cualitativo que favorece la comparación, el ordenamiento y la medición de las magnitudes, utilizando medidas arbitrarias, como acciones previas al tratamiento de las unidades convencionales y sus relaciones numéricas:

> En segundo grado, los alumnos continuarán realizando este tipo de actividades (comparaciones directas, estimaciones), al utilizar sistemáticamente unidades arbitrarias de medida, para que a

> través de la cuantificación de las unidades utilizadas, comparen y ordenen las diferentes magnitudes de los objetos. A través de estas actividades los alumnos profundizan su conocimiento sobre el concepto de longitud, superficie, capacidad y peso, y sobre los procesos de medición y la noción de unidad de medida (SEP 1994c, 36).

Se plantea entonces la necesidad de practicar la medición como la iteración de una unidad en la magnitud que se mide, acción que supuestamente permite evidenciar además, que para medir se utilizan unidades de la misma especie que la magnitud en estudio. Es a partir de acciones prácticas que se pide abundar en el concepto de medición y reconocer la existencia de unidades diversas para ofrecer el resultado de las mediciones de distintas maneras o con mejores aproximaciones.

La modernización educativa (SEP 1992a) es la primera reforma que concibe un Plan general para la educación básica (preescolar, primaria y secundaria) y los programas de estudio correspondientes (SEP 1993a y 1993b), con el fin de evitar discrepancias de un nivel educativo a otro.

En preescolar, la medición es tratada a través de acciones tales como ordenar, comparar y medir objetos utilizando las manos o los pies. Estas actividades no están aisladas sino que se desarrollan como parte de situaciones, acontecimientos y proyectos (SEP 1992b).

En la primaria por su parte, las matemáticas se organizan en *ejes conceptuales* que se tratan a lo largo de los seis grados: Los números, sus relaciones y sus operaciones; Medición; Geometría; Tratamiento de la información; Procesos de cambio y Predicción y azar. Estos ejes se reorganizan en la secundaria donde se presentan como: Aritmética, Álgebra, Geometría, Presentación y tratamiento de la información y Probabilidad.

La medición en la secundaria, desaparece como eje conceptual y se incorpora de nueva cuenta a la geometría. En el *Libro para el maestro. Educación Secundaria. Matemáticas* (SEP 1994e, 19) se señala como uno de los propósitos de primer grado:

> Practicar los trazos geométricos como una forma de acostumbrarse (sic) y perfeccionar el uso de los instrumentos de dibujo y medición, explorar las propiedades de las figuras y apropiarse gradualmente del vocabulario básico de la geometría; resolver problemas que conduzcan al cálculo de perímetros y áreas de las figuras usuales.

En segundo grado de secundaria se señala como un propósito de Geometría:

> Seguir practicando el dibujo y los trazos geométricos, y avanzar hacia la adquisición permanente del uso de los instrumentos de dibujo y medida. Resolver problemas que conduzcan a calcular el área de las figuras comunes y de otras formadas por su combinación (op. cit. p. 26).

Finalmente, en tercer grado uno de los propósitos es:

> Utilizar las fórmulas para el cálculo de perímetros, áreas y volúmenes, así como los teoremas de semejanza, de Pitágoras y la trigonometría, para resolver numerosos problemas de cálculo geométrico (op. cit. p. 33).

Parece entonces que esta incorporación de la medición a la geometría en la secundaria, seguiría propiciando el uso aritmético de la medición a través del empleo de las fórmulas. Sin embargo, en el apartado denominado *Medición y cálculo geométrico* del *Libro para el maestro. Matemáticas. Educación Secundaria* se advierte que:

> ...la presentación de las fórmulas para el cálculo de áreas y volúmenes deberá estar precedida de numerosas actividades para revisar y enriquecer las nociones de área, desarrollar la imaginación espacial y comprender las relaciones que existen entre las nociones de capacidad y volumen... (SEP1994e, 251).

También relacionado con la medición, en el libro para el maestro de secundaria, aparece en un apartado de la Aritmética el tema: *"Las razones y el esquema derivado de medición"*, espacio destinado a proponer acciones que preparan a los sujetos hacia la comprensión de las mediciones teóricas implicadas en otros aspectos de las matemáticas:

> ...cuando una cantidad se mide por medio de la razón entre dos cantidades, se está utilizando el llamado *esquema de medición derivado*. Este esquema de medición es muy importante en nuestros días, cuando además de magnitudes físicas y geométricas, interesa medir las características y comportamientos de ciertos procesos poblacionales. (op.cit, p.107)

En la educación secundaria, la medición se incorpora de nueva cuenta al terreno de la Geometría y se trata paralelamente en el apartado de Aritmética. Por otra parte, la medición tiene un lugar relevante en el programa de Física de 2o. grado de educación secundaria (SEP 1993b) donde se enuncian como temas fundamentales del curso de Física I: "¿Para qué medimos?", "La medición como resultado de una comparación", "Concepto de medición" y "Concepto de patrón de medida". Además, como parte de los temas de Física en la secundaria, aparecen: el Sistema Internacional de Unidades y un estudio sobre los instrumentos de medida.

El tema inicial del curso Física I es una Introducción a las propiedades físicas y su medición:

> ...parte (que) suele descuidarse en los cursos introductorios; sin embargo, una buena comprensión de la necesidad de medir, comparar y cuantificar, en términos de unidades específicas, permite al alumno entender mejor los conceptos que se utilizarán posteriormente (SEP 1995, 60).

Encontramos así que el desarrollo conceptual de la medición iniciado en la primaria se continúa en los cursos de Física de la secundaria. Parece que en el terreno de las matemáticas, se pierde la oportunidad de tratar a la medición como acción que posibilita contextualizar el empleo de los números decimales.

Para los fines de la presenta exposición resulta fundamental subrayar el propósito principal de este *eje conceptual* en la primaria, pues hacer consciente al maestro de los propósitos que se persiguen al instrumentar las actividades de la medición, permitiría la mejor utilización de sus auxiliares didácticos.

Resulta igualmente importante ofrecer al docente información que le permita ampliar la perspectiva que tiene acerca de su labor educativa. Esto es, que reconozca que el tipo de nociones que sus alumnos desarrollan les permitirá un trabajo conceptual más adelante. Si los maestros de primaria lograran tener presente que las prácticas relacionadas con la medición están preparando a sus alumnos para la comprensión de relaciones teóricas entre magnitudes, tal vez ofrecerían constantemente actividades en las que los alumnos tuvieran necesidad de iterar una unidad, de buscar las relaciones existentes entre las magnitudes y de comunicar los resultados obtenidos.

4. Principios básicos y procesos psicológicos asociados a la medición

La medición es una actividad que consiste en comparar cuantitativamente una cierta magnitud con una unidad de medida: "Por medición entendemos el proceso por medio del cual asignamos un número a una propiedad física de un objeto o de un conjunto de objetos con el fin de comparar y evaluar dicha propiedad". (Cortés et al. 1990, 47).

La asignación de un número implica que el resultado de medir involucra un proceso de conteo: "Efectuamos una medición cuando contamos el número de veces que una unidad previamente fijada puede ser trasladada sobre el objeto a medir" (Sáiz y Fuenlabrada 1981, 148).

Así tenemos que la acción de medir sintetiza dos aspectos: la elección de una magnitud unidad que debe ser iterada sobre la magnitud que se desea medir y el conteo del número de veces que la unidad ha sido iterada en dicha magnitud; la medida resultante es, "el número de unidades de la propiedad seleccionada" (Cortés et al. 1990, 47).

Para medir, es necesario que la unidad de medida tenga características afines con la magnitud que se mide: se utilizan unidades lineales para medir longitudes; usamos una superficie para medir superficies; un litro como medida de capacidad, etc: "El esquema fundamental de la medición consiste en comparar una magnitud con una unidad de la misma especie, para ver cuántas veces cabe la segunda en la primera" (SEP 1994e, 107).

En todos los casos, la unidad de medida es una magnitud arbitraria que ha pasado por el consenso de los usuarios y no varía, ya que se trata de un acuerdo necesario para hacer posible la comunicación de los resultados: "Medir es, en realidad, realizar una comparación indirecta en la que se escoge de antemano el objeto que se usará como intermediario en la comparación para que sirva como referencia única (unidad)... "(Chamorro y Belmonte 1991, 62).

La unidad de medida puede formar parte además, de un sistema de medidas. Utilizar unidades de diferente tamaño y conocer las relaciones entre ellas permite hacer mejores aproximaciones de la medida de la magnitud que se quiere cuantificar utilizando ese sistema y además, es posible expresar la medida con cualquiera de las unidades del sistema a través de las equivalencias.

En suma, la medición es la acción de cuantificar el número de veces que una unidad cabe en la magnitud en estudio y se relaciona con un sistema de medida que permite la comunicación de los resultados empleando unidades diversas.

Desde el punto de vista psicológico, la medición de magnitudes geométricas se reconoce como un proceso que involucra dos acciones: las subdivisiones y los cambios de posición.

La subdivisión se aplica en dos momentos de la medición: al definir la unidad y al aproximar la medida. Primero, las acciones de subdivisión permiten la definición de una unidad, reconociéndola como una parte definida del todo y, segundo, permiten aproximar la medida tanto como se desee, dividiendo la unidad prefijada tantas veces como sea necesario hasta agotar la magnitud original.

Por su parte, los cambios de posición permiten iterar la unidad las veces necesarias para cuantificar su total en la magnitud que se mide.

Estas dos acciones interiorizadas constituyen las operaciones asociadas a la medición, cuya característica principal es su reversibilidad.

La subdivisión y el cambio de posición son operaciones involucradas en la medición de magnitudes geométricas y, por tanto, continuas (longitud, superficie y volumen) que preparan al sujeto para realizar mediciones de otras magnitudes físicas en donde no son evidentes estas operaciones —por ejemplo, en el caso de la medida del tiempo o del peso, no es claro el cambio de posición de la unidad— o que simplemente no se presentan como tales como en la medida de la velocidad, la fuerza, la potencia.

Esta primera generalización prepara a su vez al sujeto para el estudio de "mediciones" que no involucran magnitudes continuas y con las que tendrá que enfrentarse en su vida futura, como las medidas del comportamiento de una población, de la producción de un país, entre otros.

Las operaciones involucradas en las acciones de medir preparan al sujeto en dos terrenos: la medición práctica y la medición teórica. En el primer caso, se trata de acciones que el sujeto realiza frente a una magnitud iterando una unidad. El segundo caso, se refiere a los procesos intelectuales que el sujeto utiliza para establecer y generalizar relaciones cuantitativas entre cantidades, sean éstas continuas o discretas, con el fin de realizar "medidas indirectas", esto es, pensar y operar con magnitudes que no son tangibles sino que requieren el establecimiento de relaciones por parte del sujeto.

Adicionalmente, las operaciones psicológicas que involucran la subdivisión de una magnitud preparan al sujeto para la comprensión de los *procesos de aproximación teórica* y, con ello, para la comprensión del concepto de *variación continua,* fundamental en la matematización del mundo físico. La necesidad de aproximar una magnitud más allá de los límites prácticos nos lleva a plantearnos la pregunta de si este proceso tendrá un término —por la vía de perfeccionar cada vez más nuestros instrumentos de medida— o bien, nos conducirá a un proceso infinito. La respuesta a esta pregunta está relacionada con los orígenes del cálculo diferencial e integral.

Tenemos así un panorama general de los terrenos para los que prepara el tratamiento de la medición en la primaria. La medición en tanto actividad "práctica" permite la realización de operaciones en la vida cotidiana, pero trasciende las fronteras de ese hacer de la vida diaria puesto que la comprensión de las relaciones cuantitativas, producidas por el hecho de medir, preparan intelectualmente al sujeto, lo encaminan hacia la comprensión de mediciones que ya no son tangibles y que han sentado las bases para la explicación matemática de los fenómenos físicos.

5. La medición en la primaria ¿por qué? y ¿para qué?

Desde hace una década, la medición ha sido objeto de instrucción obligatoria en los países más desarrollados (Del Olmo et al. 1989), son variados los textos que justifican su importancia para la realización de actividades cotidianas y para comprender los avances tecnológicos logrados gracias a la precisión en las mediciones.

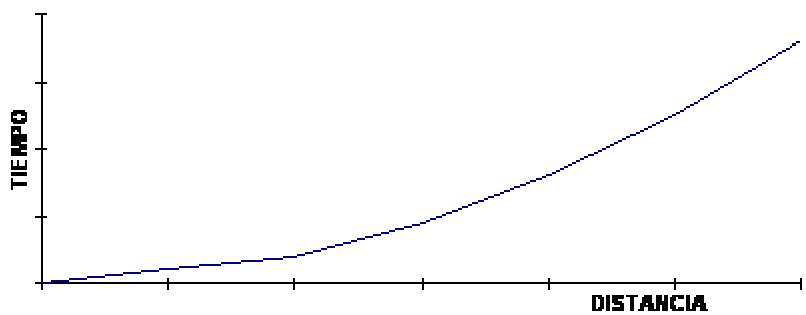
La medición es un espacio de acciones didácticas en el que confluyen aspectos geométricos, aritméticos y de resolución de problemas cuya práctica permite además, el desarrollo de destrezas y habilidades sin las cuales no puede hablarse de educación integral. (Del Olmo et al. 1989, 11). El tratamiento de la medición en la escuela primaria posibilita ese desarrollo y prepara al sujeto para nuevos aprendizajes como son la comprensión amplia del número y las tareas del cálculo.

Históricamente, la medición aparece como un principio básico de la síntesis teórica de la aritmética y la geometría, planteada inicialmente por Simon Stevin en el siglo XVI (Waldegg 1996). Esta síntesis posibilita un amplio desarrollo de las matemáticas, en tanto que sienta las condiciones propicias para el surgimiento de la Geometría analítica y más tarde del Cálculo.

La medición impuso la necesidad de ampliar el concepto de número para incluir a los números racionales, a fin de garantizar que toda magnitud pudiera ser descrita por medio de un número. Los procesos de aproximación infinita incorporaron también a los números irracionales a este dominio numérico ampliado. La definición y construcción del concepto de número real fue originalmente motivado por la medición de magnitudes continuas.

El principio de que toda magnitud continua puede ser representada por un segmento rectilíneo permitió, además, simbolizar geométricamente las magnitudes y **cuantificar** las relaciones entre ellas y favoreció la comprensión de la variación continua. Por ejemplo, ante la representación del movimiento mediante el siguiente diagrama, en donde tanto el tiempo como la distancia están representados como segmentos que pueden ser cuantificados sobre los ejes coordenados, es posible establecer una relación entre estas dos magnitudes que permita la definición y el estudio de una tercera magnitud: la velocidad.

Δt



En todo caso, lo importante es reconocer que los principios de la medición, que consisten en subdividir un todo e iterar una unidad, están aquí presentes y que ponen en relación dos magnitudes que nos permiten definir una tercera que resulta de esta relación. Las operaciones involucradas en la medición teórica son las que aparecen sintetizadas en el manejo de relaciones funcionales que permiten el cálculo de diversas magnitudes.

El papel que ha jugado la medición dentro del desarrollo de la matemática, no ha tenido un reflejo en la asignatura escolar. En el ámbito de la educación básica, la medición se ha reducido, durante la historia reciente, a sus aspectos puramente numéricos.

Como afirma la propuesta de actualización, "...el estudio de la medición se reduce, en muchos casos, a la memorización de fórmulas" y las confusiones para utilizarlas se deben al: "...uso prematuro de fórmulas que se dan como recursos aislados y carentes de significado" (Block (coord) 1995a, 203 y 211).

En la primaria, la medición se ha tratado regularmente como parte de la geometría pero, en los hechos, se ha limitado a cálculos numéricos a través de las fórmulas establecidas.

Desde que surge la primera propuesta curricular de carácter nacional hacia la década de los cuarenta, se puede observar que los temas relacionados con la medición han formado parte de las experiencias curriculares diseñadas para la educación básica en nuestro país, a veces, claramente localizados en la aritmética (conversiones entre unidades del sistema métrico decimal), y en la mayoría de los casos, como parte de la geometría (uso de fórmulas para calcular áreas y volúmenes).

En los casos donde la medición formaba parte de la geometría, no fue planteada como producto de las relaciones geométricas, no estaba dirigida a propiciar reflexión alguna acerca de las características de las figuras y de su vinculación con las fórmulas que permitían el cálculo de la superficie, el perímetro y el volumen. Se propició en realidad sólo el aspecto aritmético de la medición pues se planteaba bajo el pretexto de cuantificar las magnitudes, siguiendo las fórmulas convencionales.

Este tratamiento de la medición, tuvo amplia difusión en nuestro país con la circulación de los libros de texto gratuitos hacia la década de los sesenta y echó raíces en el mundo magisterial, pues aunque esos primeros libros de texto han dejado de circular, entre los maestros pueden constatarse todavía en estos días, concepciones que vinculan a la medición con el sólo empleo de las fórmulas y definiciones con un limitado trabajo de conceptualización.

Es hasta finales de los setenta que en el currículum de los tres primeros grados de la primaria, la medición aparece como ejercitación práctica sobre los objetos del entorno y que se abre la posibilidad de utilizar otras unidades de medida además de las convencionales. Esta oportunidad para la medición responde sin duda, a una concepción acerca del aprendizaje de las matemáticas para la cual es fundamental que los alumnos interactúen con los objetos y no sólo con sus representaciones.

Se ve así que desde finales de los setenta, en virtud de un enfoque que hace de las matemáticas una herramienta de interacción con el mundo y un lenguaje que permite expresar fenómenos y situaciones de la realidad, que la medición aparece en su versión "práctica" de establecer comparaciones, de elegir las unidades de medida adecuadas, antes que la sola aplicación de las fórmulas. Se trata sin embargo, de una experiencia curricular limitada pues refiere la reorganización del tratamiento de contenidos exclusivamente para los tres primeros grados de la primaria.

Esta breve reseña de experiencias curriculares en nuestro país permite destacar la importancia que adquiere la medición en la propuesta para la educación básica postulada en los años noventa. En ésta, la medición aparece como un *eje conceptual* que se desarrolla a lo largo de la educación primaria, lo que da oportunidad a que el tratamiento de la geometría se amplíe y modifique sustancialmente; descargada de la cuantificación de las magnitudes, la geometría en consecuencia, ha ganado un lugar particular para el tratamiento de las relaciones espaciales.

La medición, por su parte, es planteada como espacio de trabajo que permite desarrollar nociones y habilidades que preparan al sujeto para nuevos aprendizajes. Se tratan las relaciones de las unidades del sistema métrico decimal y se ejercita la cuantificación de las magnitudes dando prioridad a los procedimientos informales y a la estimación, antes que al empleo de las fórmulas convencionales.

Esta incorporación de la medición como *eje conceptual* se limita sin embargo, a la educación primaria. En la secundaria, la medición en matemáticas vuelve a formar parte de la geometría y se desarrolla fundamentalmente en las asignaturas de Física y Química.

Esta situación motiva interrogantes acerca de la experiencia curricular diseñada para la educación básica: ¿por qué es importante tratarla de manera particular en la primaria?; ¿por qué desaparece en el apartado de matemáticas de la secundaria?; ¿qué tipo de nociones y habilidades desarrolla la práctica de la medición en la primaria que son útiles para las asignaturas de Física y Química en la secundaria?.

Las respuestas a este tipo de interrogantes permitirían cobrar conciencia acerca de la importancia de instrumentar las actividades propias de la medición que tradicionalmente habían formado parte de la geometría; puesto que la medición, planteada como un *eje conceptual* en la primaria que no tiene continuidad en las matemáticas de la secundaria, no ayuda a la comprensión del por qué aparece o para qué sirve.

En suma, la medición en la propuesta curricular de los años noventa en nuestro país ha ganado un estatus nominal: aparece en el ciclo de la primaria con la intención de propiciar la estimación, el uso de unidades arbitrarias para medir y de procedimientos informales para cuantificar las magnitudes, como actividades previas a la formalización de los contenidos. Pero en la secundaria, la medición incorporada de nueva cuenta a la geometría, vuelve a propiciar sólo su uso aritmético al referirse exclusivamente al uso de fórmulas para calcular áreas y volúmenes.

Parece que en el fondo, entre los diseñadores del currículum no hay un acuerdo respecto al tema, que de continuidad al tratamiento de la medición de la primaria a la secundaria. Una posibilidad de dar continuidad a la medición en la secundaria sería estudiar la relación de las subdivisiones con el todo y con la iteración continua, procesos que preparan la comprensión de los modelos teóricos de variación continua.

Además, las prácticas de la medición como parte de la geometría le restan importancia al terreno que ésta última había ganado en la primaria puesto que, al igual que en las experiencias curriculares anteriores, la geometría en la secundaria, lejos de apuntar hacia el desarrollo del pensamiento deductivo, se torna cálculo aritmético de las magnitudes de las figuras y los cuerpos geométricos.

No obstante esta discontinuidad entre el curriculum de la primaria y el de la secundaria, conviene reflexionar acerca de la importancia que cobra la medición en la educación primaria puesto que aparece como *eje conceptual* o sea, que aparece por primera vez como un espacio particular que no la reduce ni a la aritmética ni a ser sólo un apartado de la geometría.

Esta circunstancia plantea la siguiente interrogante ¿cómo lograr que los maestros de primaria, habituados a operar las fórmulas frente a temas que aparecían como propios de la geometría, empiecen a reconocer la medición como una acción práctica en la que confluyen tanto la aritmética como la geometría?.

La respuesta podría ser parte de la propuesta de actualización que busca, además de poner al día el conocimiento de los maestros acerca de las matemáticas, habituarlos a utilizar una metodología particular para su enseñanza. En el último capítulo de este trabajo ofrecemos, a manera de ejemplo, situaciones que han propiciado una reconceptualización de la medición entre los maestros y apuntamos como condición básica para el diseño de propuestas de actualización, el conocimiento de las concepciones que prevalecen entre los maestros de primaria sobre este tópico.

CAPÍTULO 3

CONCEPCIONES DE LOS MAESTROS DE PRIMARIA EN TORNO A LA MEDICIÓN

El presente capítulo pretende mostrar que, para asumir el trabajo con la medición y con la geometría como ejes que interaccionan con fines diferentes, es necesario que los maestros reconceptualicen las tareas relativas a la medición y reconsideren algunas de sus concepciones a este respecto, producidas por una práctica escolar que ha tratado a la medición como sinónimo de geometría y la ha circunscrito a la manipulación aritmética.

Los maestros de primaria, creyendo proponer actividades apegadas a la geometría (cálculo de longitudes, áreas y volúmenes), efectúan en realidad actividades propias de la medición pero, en tanto que las realizan a partir del empleo de las fórmulas, reducen la medición a un mero ejercicio aritmético. Este acercamiento a la medición no permite valorar las relaciones geométricas de las figuras cuya magnitud se mide ni tampoco favorece la conceptualización de la medición.

La medición se torna un problema aritmético sin verdadera significación geométrica, puesto que se limita a ejercitar las operaciones aritméticas fundamentales, mediante la evaluación de datos de una fórmula, considerando valores establecidos previamente. En tanto que el cálculo de longitudes, áreas y volúmenes aparece como la labor más importante de las actividades geométricas, los maestros, más que reflexionar acerca de la construcción y caracterización de las figuras, han enfatizado los cálculos numéricos a propósito de ellas.

La medición, referida exclusivamente al cálculo numérico y a la cuantificación de algunas magnitudes, se convierte en un espacio de privilegio para practicar las operaciones aritméticas, en tanto que las figuras geométricas son sólo un pretexto para ilustrar los datos que permiten utilizar una fórmula.

El empleo de unidades y su inserción en un sistema de medida se ha tratado regularmente en la primaria como ejercicios de conversión entre unidades, campo propicio para la práctica de multiplicaciones y divisiones decimales. El sistema de medida se presenta tradicionalmente como un conjunto de unidades convencionales en donde aparece "la unidad" y sus múltiplos y submúltiplos; "la unidad" con sus respectivas subdivisiones; esta presentación no permite reconocer que cada submúltiplo, por ejemplo, puede hacer las veces de unidad. En este sentido, las unidades no pueden ser iteradas en una magnitud pues sólo se presentan en una relación numérica que, por guardar una relación decimal, permiten ejercitar las multiplicaciones y las divisiones abreviadas por y entre potencias de diez.

Como antes apuntamos, este aspecto de la medición fue parte constitutiva de la geometría escolar desde la década de los setenta, y "su estudio se reduce a la memorización... de reglas para hacer conversiones entre las unidades del Sistema Métrico Decimal" (Block (coord) et al. 1995a, 203). La ejercitación de conversiones en el sistema decimal es muestra también de una concepción según la cual la matemática escolar se reduce al ejercicio continuo de los algoritmos.

La medición, planteada con las características que hemos señalado, no ha permitido que se le reconozca como espacio de intersección de la aritmética y la geometría; lugar donde confluyen las propiedades de las figuras y la cuantificación de las magnitudes que las conforman y que permite mostrar una visión unificada de la matemática escolar.

Para hacer realidad los postulados curriculares de los noventa es necesario ofrecer las condiciones para que los maestros reconceptualicen los propósitos de la geometría y las actividades de la medición, modificando concepciones y prácticas producto de tradiciones fuertemente enraizadas.

La tradición escolar antes señalada ha conformado ciertas creencias o concepciones de los maestros acerca de la medición. Algunas de estas concepciones se han podido constatar a través de comentarios y acciones durante la realización de las actividades de medición propuestas en el taller de actualización *La enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria.* (Block (coord) et al. 1995a). En el desarrollo de las actividades sobre medición también se han puesto de manifiesto concepciones acerca de las matemáticas y de sus procedimientos de enseñanza.

A partir de la transcripción de los diálogos registrados en el taller, en este capítulo se ilustran, primero, las concepciones de los maestros acerca de la medición y, después, se presentan las concepciones de los maestros acerca de las matemáticas, entendida como "ciencia de los números", disciplina exacta por naturaleza, que no permite ni las ambigüedades, ni las distintas interpretaciones de los sujetos que las utilizan; en las matemáticas de la primaria se enfatiza el "uso correcto" de los números y sus operaciones, considerando los otros temas como auxiliares de esta tarea.

Entre los maestros es muy frecuente considerar que las matemáticas son una "ciencia exacta" que no admite discusión o interpretaciones y cuyas formas de expresión única son los números; las matemáticas en la primaria según esto, son exclusivamente relaciones aritméticas y se promueve su aprendizaje con actividades y materiales que las hacen "concretas". Esta manera de concebir las matemáticas convierte a la medición en el establecimiento de "resultados precisos" y se vincula con una práctica escolar que privilegia el empleo de las unidades lineales convencionales para determinar mediciones y el uso de las fórmulas para cuantificar las magnitudes, por tratarse de los procedimientos "matemáticos" más eficaces para hallar un resultado.

Finalmente en este capítulo, se ofrecen algunos indicios que permiten anticipar posibles reconceptualizaciones de los maestros acerca de las matemáticas y de la medición y que perfilan ciertas modificaciones de la práctica docente en la primaria.

En suma, en este capítulo documentamos ciertas concepciones de los maestros de primaria acerca de la medición, de las matemáticas y de cómo promover su aprendizaje, así como algunas circunstancias que han propiciado ciertas reconceptualizaciones entre algunos maestros.

1. Concepciones de los maestros sobre la medición

1.1 Acerca de las magnitudes y las unidades

El tema de medición en la escuela primaria se ha relacionado con la asignación de un número para identificar y determinar las magnitudes de los cuerpos y las figuras geométricas; su estudio está centrado — como ya se señaló — en el empleo de fórmulas para calcular área, longitud de un contorno y volumen, únicas magnitudes que se reconocen inicialmente en la escuela.

Estas concepciones generales se aprecian en la siguiente transcripción donde también aparecen, a nivel discursivo, otras magnitudes físicas como el tiempo y el peso cuya cuantificación no depende, en principio, del empleo de una fórmula. Posteriormente se identifica la medición con el empleo de las unidades para medir y las tareas de conversión entre múltiplos y submúltiplos de un sistema.

1.1.1 Consideraciones generales

* *L es el Coordinador del taller*

(Obs. 32)
Es la actividad inicial de la unidad VI Medición y el coordinador del Taller formula una pregunta para invitar a los maestros a que opinen.
L:... ¿A qué se reduce el estudio de la medición en la primaria?
Javier: A calcular.
L: ... ¿Calcular qué?
Darío: Areas y volúmenes.
Ulises: También longitud.
Vero: El peso, el tiempo.
L: Qué poco…
Luis: Comparar longitudes, peso, tiempo, volumen, perímetro.
L: Luis dice que comparar (repite lo que dijo Luis) ¿están de acuerdo?
Mariana:... pensar las equivalencias de un medio o de un cuarto por ejemplo si hablamos de longitud o de peso.
L: (escribe en el pizarrón las respuestas de los maestros) La pregunta dice a qué se reduce...
Mariana: Se reduce a darlo teóricamente.

El primer punto que hay que destacar en este diálogo es la respuesta rápida de Javier que señala el rasgo más característico de la medición en la primaria: "la medición se reduce a calcular".

Aunque la respuesta está inducida por la pregunta del coordinador "¿A qué se reduce el estudio de la medición en la primaria?", parece que en las respuestas de los maestros no habría variaciones sustantivas al referir el trabajo de la medición en sentido amplio. Como se verá a lo largo de este protocolo, la medición es, para el maestro, fundamentalmente un problema de cálculo aritmético en donde se asignan (por algún método) valores numéricos a ciertas magnitudes geométricas (por ejemplo, lados de figuras rectilíneas regulares) y se demanda una serie de operaciones aritméticas con estos valores.

En lo que concierne a las magnitudes que son medibles en la primaria, destaca en particular la alusión al perímetro pues se le señala como otra magnitud distinta y no como la longitud que conforma el contorno de una figura.

Respecto a las unidades de medida, a nivel verbal, hay una asociación entre éstas y la magnitud que se mide, la respuesta es: "... pensar las equivalencias de un medio o de un cuarto por ejemplo si hablamos de longitud o peso", esta intervención nos remite nuevamente a un problema aritmético relacionado ahora con las operaciones con fracciones; aunque el coordinador del taller ya había llevado la discusión al problema de la comparación, supuestamente entre magnitudes de la misma especie, la maestra Mariana la regresa al punto del cálculo: "pensar las equivalencias de un medio o de un cuarto...".

Estas respuestas nos llevan a reforzar la hipótesis de que los problemas de medición han sido tradicionalmente problemas aritméticos en donde se pueden ejercitar las operaciones elementales a distintos grados de dificultad. La referencia a "un cuarto y a un medio" remite a un terreno de ejercitación inmediato de las fracciones comunes.

Finalmente, conviene destacar la consideración de que "la medición en la primaria se reduce a darla teóricamente", afirmación que puede interpretarse al menos de tres maneras, como:

— Acciones que no guardan relación con la vida cotidiana.

— Acciones que no propician el movimiento o desplazamiento de los sujetos.

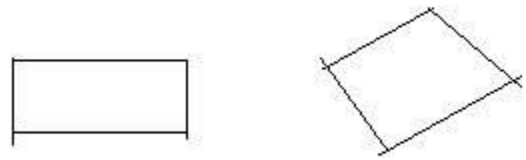
— Acciones que no promueven la manipulación de materiales.

Y que, por lo tanto, — en opinión de los maestros —, no favorecen el aprendizaje de las matemáticas según se aprecia a continuación.

1.1.2 Consideraciones acerca del perímetro y el área

> (Obs 34).
> Se trata de una conversación previa al tratamiento del Tema 2, *Perímetro y superficie*
> L: A ver... ¿Qué dificultades han encontrado al tratar los temas de perímetro y superficie?... O si quieren hablar de las dificultades que tienen ustedes como maestros para tratar estos temas.
> Sara: Les puse ejercicios de sacar área y (los alumnos) confundían área del cuadrado con el perímetro (del cuadrado).
> Karina: Llegan a confundir el perímetro con el área.
> L: ¿Cómo te has dado cuenta de eso?
> Karina: Porque colocan centímetros cuadrados en el resultado de perímetro o viceversa...
> L: ¿Qué debemos hacer los maestros para que los niños no confundan perímetro y área?
> Sara: Hacerlo práctico... Manipular material...
> Judith: Por ejemplo, usar el cordón o un mecate y formar las figuras pintándolas con gis en el patio.

L: (tratando de mostrar en el pizarrón lo que ha dicho Judith) Tú dices que hay que trazar con el mecate y pintar con el gis las figuras en el patio así:



Judith: … al contorno se le llama perímetro.
Javier: … en mi grupo, caminamos por el contorno de la cancha (de básquetbol) y después nos agarramos de las manos y caminamos, todos caminando por la superficie. Después, regresamos al salón y (los alumnos) dibujan en el rectángulo, de rojo el perímetro y de azul el área... y con todo eso, todavía los niños se equivocan.
L: Otra manera de identificar el área, ahí en el patio, en vez de pintar... (dice como invitando a que los maestros relaten otras experiencias).
Darío: Que entren los chavos (a la figura trazada), que queden dentro de la superficie.
Ernesto: Como en 4o. que construyan su metro cuadrado y que construyan un área… van superponiendo (el metro cuadrado) y así siguen …
Caro: ...cubriendo la superficie con aserrín. Yo lo he hecho, trazar la figura en el patio y cubrir su superficie con aserrín...
L: ¿Y así ya no se les olvida? (en tono de duda).
Caro: Pues yo veo que no.

A continuación, el coordinador invita a los maestros a que observen y comenten algunas de las actividades de medición del libro de matemáticas de 2o. donde se puede apreciar a los alumnos utilizando unidades no convencionales en actividades que realizan en el patio.

En este diálogo podemos observar, en primer lugar, que aparece la concepción ya mencionada de que la medición es una actividad que permite y facilita la ejercitación de operaciones aritméticas, de acuerdo con los parámetros indicados en las fórmulas para calcular superficie y perímetro de las figuras: "Les puse ejercicios de sacar área...". Las actividades de medición se presentan como un terreno idóneo para plantear ejercicios cuya complejidad varía en función del rango numérico que se utiliza: números naturales primero, números decimales posteriormente. En estos casos, se trata de evaluar la eficiencia en el cálculo numérico y de ofrecer un resultado utilizando las unidades correspondientes que permitan "recuperar" el contexto "de medición" del cual se partió.

Por su parte, los alumnos parece que viven esta experiencia de cálculo aritmético sin referencia a la magnitud que se trata. Utilizan las fórmulas indistintamente y ofrecen los resultados de las operaciones agregándoles, a veces, las unidades convencionales adecuadas para señalar que se trata de un cálculo propio de la medición. En palabras de la maestra Karina, los alumnos: "Llegan a confundir el perímetro con el área; colocan centímetros cuadrados en el resultado de perímetro o viceversa..."

Con el fin de superar las frecuentes confusiones de los alumnos acerca del perímetro y la superficie, los maestros ofrecen experiencias de aprendizaje vinculadas a la acción "práctica" y a la manipulación de materiales diversos: "usar el cordón o un mecate para formar las figuras..."; "caminar por el contorno de la cancha..."; "que entren los chavos... que queden dentro de la figura": "cubrir la superficie con aserrín..."; "dibujar en el rectángulo, de rojo el perímetro y de azul el área...".

A propósito de estos comentarios es importante destacar que los maestros consideran "la actividad" de los sujetos como parte fundamental del aprendizaje. Esa "actividad" sin embargo, no se refiere propiamente a una actividad intelectual, al establecimiento de relaciones entre conceptos, sino a una especie de "activismo" que tiene que ver con el empleo de materiales diversos y movimiento físico de los alumnos.

La necesidad de los maestros por hacer "concreta" o "interesante" la tarea de matemáticas, les lleva a utilizar materiales de apoyo que les resultan "novedosos". Algunos ejemplos de esta incorporación de materiales a la práctica docente se presentan al finalizar el presente capítulo.

Estos comentarios constituyen también la evidencia de que los maestros detectan los problemas, reconocen las dificultades de los alumnos al tratar estos temas y, aunque las alternativas que ofrecen pueden tener magros resultados: *"caminamos por el contorno de la cancha (de básquetbol) y después nos agarramos de las manos y caminamos, todos caminando por la superficie...Después, regresamos al salón y (los alumnos) dibujan en el rectángulo, de rojo el perímetro y de azul el área... y con todo eso, todavía los niños se equivocan",* lo que interesa destacar es de qué manera, los maestros enfrentan los problemas de enseñanza detectados como un reto propio de su profesión, que resuelven con la información y los recursos acumulados durante su experiencia como docentes: Programas de estudio, libros de texto, auxiliares didácticos, documentos de actualización, sus propias intuiciones y las experiencias comentadas con otros colegas. Es decir, los maestros enfrentan las tareas propias de su profesión a partir de sus saberes docentes. (Mercado 1994).

Las sugerencias de estos maestros plantean un aprendizaje apegado a la percepción: "que sientan la magnitud, que la vean y la distingan trazándola o iluminándola", ideas propias de la didáctica sustentada en los libros de texto de la década de los sesenta: ir de lo concreto a lo abstracto, basar la enseñanza en manipulaciones experimentales y el manejo de objetos, realizar actividades prácticas antes de tratar las operaciones con símbolos. (Cfr. Ávila 1988).

En estas circunstancias, la labor del maestro consiste en variar los materiales y en invitar a los alumnos a que realicen actividades relacionadas con acciones motrices como caminar o como iluminar.

En todo caso, interesa destacar que hay maestros que empiezan a identificar la medición como una práctica de comparación entre magnitudes, y que a ello ha contribuido el empleo de los libros de texto, que desde la década pasada han postulado un tratamiento cualitativo de la medición y que se rescata en los materiales de apoyo de los programas de educación básica de 1993, por ejemplo: "Como en 4o. que construyan su metro cuadrado y que construyan un área... van superponiendo (el metro cuadrado) y así siguen...".

Tal vez motivado por la intervención del maestro Ernesto, el coordinador propone la revisión de algunas lecciones del libro de segundo grado, vigente desde 1994 en las escuelas primarias, con el fin de que los maestros del taller reconozcan prácticas deseables en la escuela que contribuyan a la comprensión de la medición, como la cuantificación de una magnitud con la unidad que se mide.

Esta intervención apoya las inquietudes expresadas en el capítulo 1 de este trabajo acerca de la manera en que algunas lecciones de los libros de texto impactan el quehacer docente de ciertos maestros (Ávila 1996). En el caso ilustrado más arriba se trata de avanzar paulatinamente en el trabajo conceptual de la medición de áreas.

1.2 La ausencia de consideraciones geométricas en las actividades de medición. A propósito de las relaciones entre medición lineal y de superficie

Al inicio del capítulo 2 se describió cómo el propio diseño de los programas de estudio en la educación primaria, posibilitó el ejercicio aritmético de las acciones de medición dejándolas desprovistas del referente geométrico. La ausencia de consideraciones geométricas en las creencias de los docentes es pues, un resultado histórico y no un patrimonio exclusivo de su profesión.

A continuación se presentan ejemplos que muestran a las actividades de medición desprovistas de consideraciones de orden geométrico y que emergieron durante este proceso de investigación.

La distinción entre perímetro y área es un problema ampliamente identificado en distintos estudios (Sáiz y Fuenlabrada 1981, Sáiz y Fregona 1982, Domínguez 1984, Fuenlabrada 1984). Los maestros del taller también han manifestado, como se vio en el apartado anterior, que el problema principal en el tratamiento de estos temas es que los alumnos no logran distinguir el perímetro y la superficie y también, que no logran identificar la fórmula adecuada para calcular el perímetro o el área.

Parece un problema trivial puesto que si el contorno de la figura es el perímetro y la magnitud que alberga ese contorno es el área ¿por qué se dificulta su distinción?

En nuestra opinión, la dificultad estriba en que los recursos didácticos ofrecidos a los maestros y la práctica docente basada en ellos, ha hecho de la medición un problema aritmético sin significación geométrica. Se efectúan cálculos numéricos sin reparar en las relaciones geométricas de las figuras cuyas magnitudes se calculan. Las figuras geométricas son sólo un esquema para identificar los datos necesarios para utilizar las fórmulas al calcular el perímetro o el área y la situación gráfica es la misma para ambos casos y la medición, en estos casos, es la gran ausente.

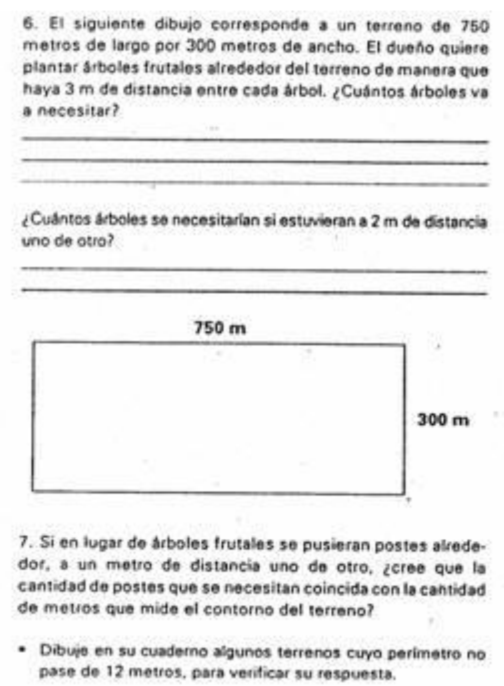
Con base en lo anterior y en relación con lo que se afirma en la propuesta de actualización para maestros *La enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria* (Block (coord) et al. 1995a, 211*):*

> Uno de los errores frecuentes que se presentan en los problemas de medición consiste en confundir lo que significa medir el perímetro con la medición de la superficie. Entre las razones que propician esta confusión, tal vez la más importante sea el uso prematuro de fórmulas que se dan como recursos aislados y carentes de significado.

Sobre la base de los principios didácticos de la propuesta, se esperaría que las situaciones problemáticas sugeridas bloquearan de entrada el uso de las fórmulas y la consecuente resolución aritmética de las situaciones planteadas. Aunado a ello, también sería deseable que la interacción de los maestros con la secuencia didáctica del apartado sobre medición, les permitiera paulatinamente reparar en las relaciones geométricas de las figuras cuyas magnitudes calculan. Todo esto con la finalidad de posibilitar entre los maestros, una resignificación de la función de las fórmulas que no la limitara a la ejercitación de las operaciones aritméticas.

1.2.1. Ausencia de consideraciones geométricas en relación con el perímetro

(Obs 34).
Los maestros realizan el punto 6 de la actividad 1 del Tema 2.



6. El siguiente dibujo corresponde a un terreno de 750 metros de largo por 300 metros de ancho. El dueño quiere plantar árboles frutales alrededor del terreno de manera que haya 3 m de distancia entre cada árbol. ¿Cuántos árboles va a necesitar?

¿Cuántos árboles se necesitarían si estuvieran a 2 m de distancia uno de otro?

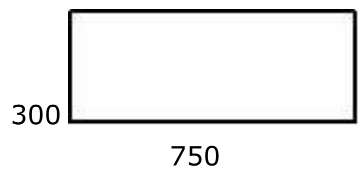
7. Si en lugar de árboles frutales se pusieran postes alrededor, a un metro de distancia uno de otro, ¿cree que la cantidad de postes que se necesitan coincida con la cantidad de metros que mide el contorno del terreno?

- Dibuje en su cuaderno algunos terrenos cuyo perímetro no pase de 12 metros, para verificar su respuesta.

Se trata de una actividad que busca evidenciar la iteración de "una nueva unidad" que mide tres metros, en una longitud poligonal. Tal y como está planteada, la situación no permite la reflexión acerca de la necesidad de iterar una unidad de longitud distinta porque la unidad (3) cabe un número exacto de veces (en el 750 y en el 300) y los maestros no sienten la necesidad de iterarla al resolver el problema planteado. Establecen automáticamente una relación aditiva, conocen el perímetro y después, dividen entre 3 y así averiguan (correctamente) cuántos árboles se pueden colocar cada tres metros.

Pensar las posibilidades de iterar una unidad en una línea recta o en una línea poligonal permitiría un acercamiento al razonamiento geométrico, que no ocurre en este caso, porque el manejo que los maestros tienen de la fórmula para calcular el perímetro de un rectángulo los lleva a recurrir a la aritmética como vía de solución al problema planteado.

> Los maestros están trabajando en equipo. En éste hay tres.
> Karla: (Lee) "El siguiente dibujo corresponde a un terreno de 750 metros de largo por 300 metros de ancho. El dueño quiere plantar árboles frutales alrededor del terreno de manera que haya 3 metros de distancia entre cada árbol. ¿Cuántos árboles va a necesitar?



> Rosa: Es alrededor, quieren perímetro.
> Karla: 750 más 750 igual a 1500.
> Caro: No.
> Rosa: No, son 2100 entre 3 igual a 700.
> Caro: No, déjame terminar a mi manera, 750 entre 3, 750 entre 3, 300 entre 3, 300 entre 3... son 700 (250 más 250, más 100 más 100).

En este equipo, las maestras identifican el cálculo del perímetro a partir de una palabra clave "Es alrededor, quieren perímetro". Acto seguido suman las longitudes y dividen entre 3, considerando que se trata de colocar postes cada tres metros.

Este caso evidencia el vínculo automático que las maestras establecen entre el perímetro y las relaciones aditivas, y el uso de las figuras geométricas como elemento que ilustra la distribución de los números que permiten utilizar una fórmula.

El proceder de las maestras Rosa y Karla no les permite hacer consideraciones acerca de la figura geométrica. Utilizan la fórmula "Dos por largo más dos por ancho" y el resultado lo dividen entre tres con el fin de determinar cuántos árboles plantar a lo largo de ese perímetro. Se ocupan de operar con números y, al resolver la situación numéricamente, pierden de vista la magnitud sobre la cual están operando y el problema de medición.

La maestra Caro por su parte, parece que intuye "algo" que no funciona bien en el modo de proceder de sus compañeras. Razona sobre la magnitud de cuatro líneas por separado: "No, déjame terminar a mi manera, 750 entre 3, 750 entre 3, 300 entre 3, 300 entre 3..."

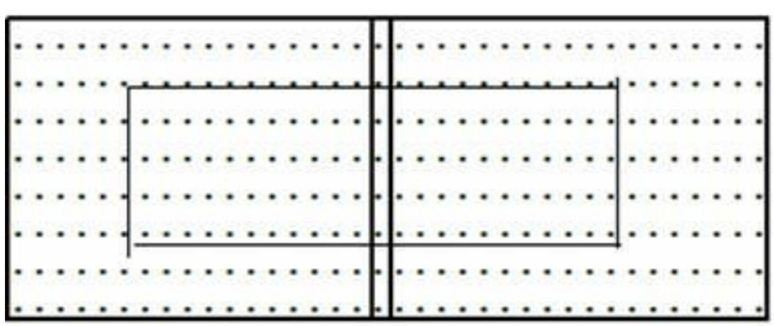
Caro estuvo en la posibilidad de darse cuenta que sobre un segmento (de 750 metros), se pueden colocar 250 + 1 árboles cada tres metros, así se consideran los dos extremos, de la misma manera que en un segmento de 300 metros se pueden colocar 100 + 1 árboles cada tres metros, ¿qué pasaría con estos cuatro árboles de más, cuando se tiene que pensar en estos cuatro segmentos unidos en sus extremos conformando un rectángulo?

La solución planteada por Caro, tal vez hubiera motivado ciertas reflexiones de carácter geométrico relacionadas con la iteración de la unidad en un segmento rectilíneo o en una línea poligonal pero, al enfrentar "actividades de medición", entre los maestros hay una acentuada tendencia a privilegiar el empleo de las fórmulas y los cálculos numéricos que de éstas derivan como efecto de una práctica docente históricamente determinada así.

En el caso de la maestra Caro, el razonamiento aritmético y el conocimiento de la fórmula se impuso sobre un posible razonamiento geométrico.

Contrario al apego sobre una fórmula, hay otros procedimientos que pueden favorecer el razonamiento geométrico. Veamos el siguiente ejemplo donde se anticipa un trabajo más reflexivo acerca de las medidas y su relación con el espacio geométrico.

> (Obs 34).
> En el equipo 5 resuelven la misma actividad así:
> Javier: Estos 300 metros, los podemos ver como 300 milímetros (Utiliza la regla y un geoplano para representar el terreno de 750 por 300 metros).
> En el equipo 5 colocan dos geoplanos para representar el terreno.
>
> Los geoplanos están así:

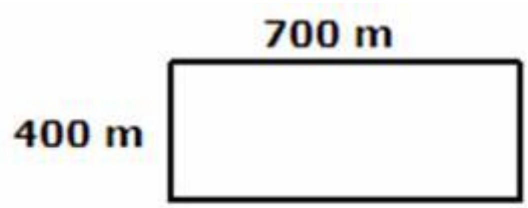


Este otro procedimiento desarrollado por los maestros, permite la representación de la figura considerando sus dimensiones y, en tanto que éstas se hacen evidentes, los maestros no recurren a la fórmula para hallar la respuesta. Los maestros utilizan el geoplano por iniciativa propia y el modelo que construyen les permite "ver" las unidades de 3 metros.

Lo que importa destacar en este ejemplo es que, la construcción del rectángulo permite contar los clavos como si se tratara de los árboles que se pueden plantar cada tres metros, esto probablemente haya propiciado que los maestros se percataran de la necesaria existencia de un árbol-origen en un segmento que es también el final de otro.

En esta experiencia, el hecho de que los clavos del geoplano se encuentren a 3 centímetros de distancia, es una circunstancia que favoreció la construcción de un modelo. El ejemplo muestra además, cómo es que los maestros se apoyan en los recursos que tienen a su alcance para intentar argumentar sus respuestas, por lo que tal vez convendría que, desde la propuesta de actualización, se propiciara el uso del geoplano en problemas como el que se analiza y en otras actividades de medición que permitan a los maestros reparar más en las características de las figuras cuyas magnitudes se calculan.

La situación ayuda a cancelar la posibilidad de emplear la fórmula como recurso útil, si se establecen para los lados del rectángulo, medidas que no sean múltiplos de tres, por ejemplo:

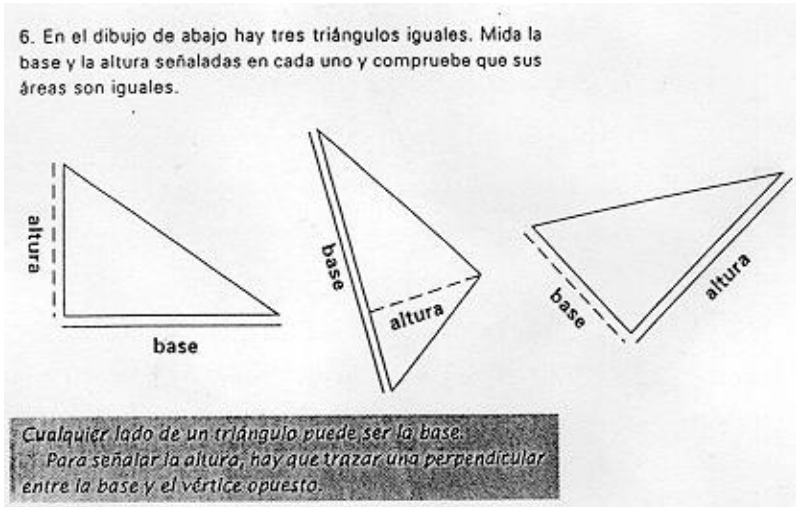


Situación que invita a reflexionar qué ocurre cuando se intenta iterar una determinada unidad en una línea poligonal.

1.2.2 Ausencia de consideraciones geométricas en relación con el área

Otros ejemplos que guardan relación con las magnitudes y la inexistencia de un razonamiento geométrico al resolver actividades de medición en la propuesta, lo hallamos en los intentos de los maestros por demostrar la existencia de tres superficies triangulares iguales.

La actividad establece la consigna "En el dibujo de abajo hay tres triángulos iguales. Mida la base y la altura señaladas en cada uno y compruebe que sus áreas son iguales"



Pese a que la intención de la actividad es llevar a los maestros a la reflexión de una propiedad geométrica de los triángulos: "Cualquier lado de un triángulo puede ser la base. Para señalar la altura, hay que trazar una perpendicular entre la base y el vértice opuesto". (Información que aparece en un recuadro gris), se impuso entre los maestros participantes del taller de actualización, el proceder aritmético que caracteriza indebidamente toda actividad relacionada con la medición cuando las fórmulas no son significativas.

Antes de hacer el análisis de lo que hicieron los maestros frente a esta situación, conviene hacer algunas consideraciones sobre qué se entiende por "hay tres triángulos iguales".

La "igualdad" o congruencia entre triángulos se define geométricamente como: "Dos triángulos son congruentes si dos de sus lados y el ángulo comprendido entre ellos son congruentes". En este caso, el segundo triángulo no es rectángulo como los otros dos por tanto, no es posible que sean iguales. Entonces, "la igualdad" entre los triángulos en esta situación, debe entenderse como la "igualdad entre las áreas" conforme a lo planteado en la consigna. Mida la base y la altura y compruebe que sus áreas son iguales.

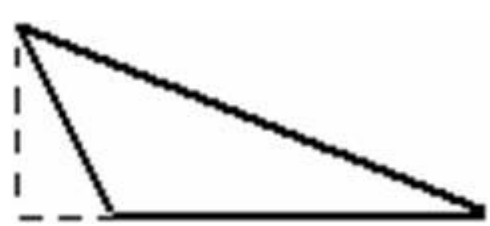
Por esto, los maestros actúan en concordancia con aquello que se les solicita y tratan de hallar la igualdad numérica de las áreas de los triángulos aunque para ello deban ajustar las medidas y el trazo del segundo triángulo.

Los maestros en este caso, asumen un rol que se juega frecuentemente en el ámbito escolar y que consiste en dar respuesta tratando de atender a las expectativas de quienes solicitan determinada tarea.

> (Obs 35)
> Ernesto: (midiendo) Cinco punto ocho (5.8) de base y dos punto cinco (2.5) de altura (son las medidas del segundo triángulo).
> Karla lee el recuadro de la página 223 donde se afirma: "Cualquier lado de un triángulo puede ser la base. Para señalar la altura, hay que trazar una perpendicular entre la base y el vértice opuesto"
> Ernesto: La altura algunas veces está fuera del triángulo.

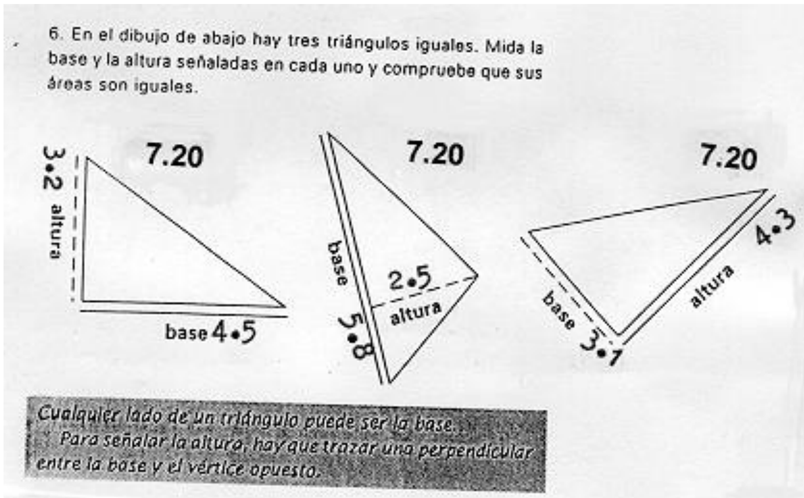
En primer lugar, conviene destacar que, de acuerdo con la consigna "Mida la base y la altura señaladas en cada uno y compruebe que sus áreas son iguales" en tanto que la medida de la base y de la altura depende de las mediciones que realicen los sujetos, es difícil lograr "comprobar que sus áreas son iguales" pues las medidas pueden variar en virtud de los instrumentos utilizados y de las acciones emprendidas por cada maestro en particular. Los maestros, no obstante, se empeñarán en buscar la igualdad numérica que demuestre incluso aquello que no es posible. Parece que los maestros no se han planteado la medición como un proceso que arroja resultados relativos o inexactos; asumen que medir consiste en ofrecer un resultado numérico y no reparan en que las condiciones en que se realizan las mediciones pueden hacer variar los resultados.

En segundo lugar, destaca la información que lee la maestra Karla y que parece encaminada a propiciar que los maestros reparen en el hecho de que para calcular el área de un triángulo, cualquiera de sus lados puede ser la base y a partir de ese lado, se traza una perpendicular hacia el vértice opuesto con el fin de determinar la altura. La actividad dice: "Cualquier lado de un triángulo puede ser la base. Para señalar la altura, hay que trazar una perpendicular entre la base y el vértice opuesto" pero el maestro Ernesto lejos de ratificar la información tomando como ejemplo alguno de los triángulos aquí propuestos, toma un triángulo ajeno, escaleno, en el que la altura es exterior al triángulo, como en el caso siguiente:



Aquí, la información sobre las alturas de los triángulos está presente, los maestros la leen pero no la relacionan con la intención de la actividad propuesta.

Ernesto tiene los siguientes datos en la página 223:



Con base en los datos de los triángulos A y B, el maestro Ernesto calcula (A: 4.5 por 3.2 igual a 14.40; 14.40 entre 2 igual a 7.20; B: 5.8 por 2.5 igual a 14.50; 14.50 entre 2 igual a **7.25**) y realiza un primer "arreglo" para que los cálculos del área en cada caso sean igual a 7.20. Esta manera de proceder va encaminada a demostrar que las áreas de los triángulos son iguales, a partir de la evidencia de que se obtiene el mismo dato numérico luego de efectuar los cálculos correspondientes.

En un segundo "arreglo" numérico, Ernesto escribe 7.20 como área del triángulo C pese a que al operar con los datos 3.1 y 4.3 se obtenga como resultado 6.66 (3.1 por 4.3 igual a 13.33; 13.33 entre 2 igual a 6.66).

Este procedimiento evidencia también que, las figuras geométricas son sólo un elemento para ilustrar la distribución de los datos y que aquello que interesa es ofrecer un resultado numérico que pase el "juicio" de quien está pidiendo la tarea, es decir, se ofrece un resultado que pruebe la supuesta equivalencia de áreas entre estas tres superficies triangulares.

La realización de esta misma actividad en otro equipo, también constata la ausencia de consideraciones de orden geométrico y de los resultados "inexactos" de una medición cuando se utiliza la regla. Los maestros se ocupan de dar "una respuesta aritméticamente correcta" aunque en el camino se permiten hacer algunas modificaciones.

(Obs 35)
En el equipo 4, los datos con los que obtienen el área de cada triángulo son los siguientes:

Triángulo 1: base: 4.4 altura: 3.2 área: 14.4

Triángulo 2: base: 5.7 altura: 2.4 área: 13.68

Triángulo 3: base: 3.1 altura: 4.5 área: 14.26 (no reparan en que se señala la medida de la base con línea discontinua mientras que la referencia a la base en los otros triángulos aparece con línea continua)

Eva: Todas (las áreas) nos salen diferentes.

Mónica: Si le abres tantito (cambia la altura del segundo triángulo)...,¿cuánto sale 5.7 por 2.5?

Judith: Catorce punto veinticinco (14.25).

Eva: Yo creo que allí está la diferencia.

En este equipo también existe la tendencia a "ajustar" las medidas de los triángulos con el fin de obtener tres áreas iguales, según lo indica la consigna de la actividad. Las maestras se permiten remodelar el segundo triángulo gráficamente "Si le abres tantito..." hasta encontrar dos medidas que al multiplicarse ofrezcan un resultado más cercano al 14 pero además, la maestra Mónica pierde de vista que la altura del triángulo es perpendicular a la base y que en cuanto se permite "abrir tantito" para modificar la medida de la altura, ésta deja de ser perpendicular a la base y por ende, deja de ser altura del triángulo.

En este caso, los elementos geométricos se modifican a voluntad con el fin de hallar la igualdad numérica. Prevalece la aritmética y las magnitudes se reducen a elementos gráficos susceptibles de ser modificados en la búsqueda de lograr el resultado numérico esperado.

De acuerdo con la experiencia de los dos equipos, los triángulos sólo constituyeron un referente para adecuar los datos numéricos de modo que, al aplicarles la fórmula "base por altura entre dos", permitieran el arribo a un resultado cercano que hiciera evidente la equivalencia de sus áreas.

Las relaciones geométricas de las figuras (en este caso: la congruencia de lados y el ángulo comprendido entre ellos para determinar su igualdad, y que, cualquiera de sus lados puede ser la base y la perpendicular hacia el vértice opuesto, la altura) no forman parte de las consideraciones que ponen en juego los maestros al enfrentar situaciones relacionadas con el cálculo de superficies triangulares.

Parece además que la actividad así planteada no conflictúa a los maestros, que recurren al solo empleo de la fórmula para hallar el mismo número como resultado del cálculo. De modo que la información resaltada en el recuadro gris: "Cualquier lado de un triángulo puede ser la base. Para señalar la altura, hay que trazar una perpendicular entre la base y el vértice opuesto", no resulta significativa para los maestros y éstos mantienen formas de solución heredadas culturalmente: para calcular el área del triángulo basta con usar la fórmula base por altura entre dos.

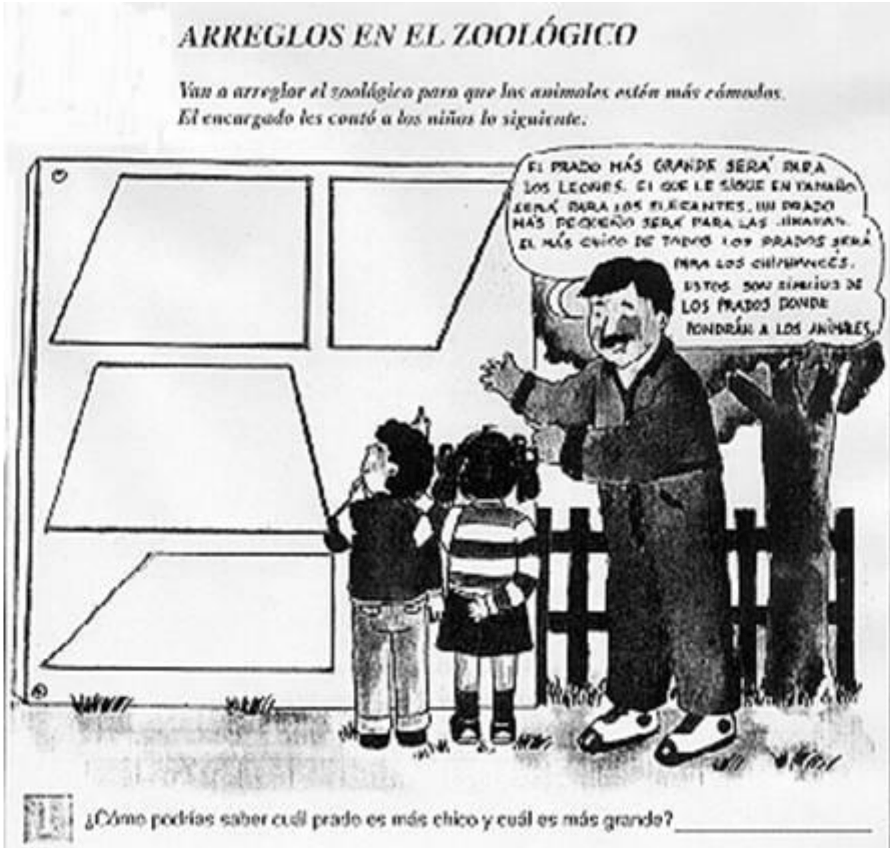
Los ejemplos tratados evidencian así que la información se lee pero no impacta las formas de proceder para resolver la situación.

1.2.3 Ausencia de consideraciones geométricas en las variaciones entre el perímetro y el área

El tratamiento de la medición, privilegiando los cálculos numéricos y al margen del establecimiento de relaciones geométricas, ha favorecido la conformación de concepciones "erróneas" acerca de las variaciones entre el perímetro y la superficie de las figuras, tema que nos ocupa a continuación.

En los comentarios y acciones de los maestros que derivan del trabajo sobre estos temas, es frecuente encontrar referencias que establecen que un perímetro dado alberga siempre la misma área, independientemente de la forma de la superficie.

> (Obs 33)
> Eva lee la página 62 del Libro de texto Matemáticas 3o., ésta forma parte de la lección 10 "Arreglos en el zoológico" que introduce la medición de superficies. Ahí aparecen cuatro cuadriláteros que representan prados de diferente tamaño y forma.
> Cristina: (leyendo) "¿Cómo podrías saber cuál prado es más chico y cuál es más grande?", **sacando el perímetro** (respuesta inmediata).



La respuesta inmediata que se ofrece a la pregunta planteada: “sacando el perímetro” está respaldada por una creencia muy común entre los maestros y los alumnos que consiste en atribuir la medida del perímetro como un contorno que alberga unívocamente un área. Así, reconocer el prado de mayor área implica reconocer cuál es la medida del perímetro, como si perímetro máximo implicara área máxima.

Cabe mencionar también que: en tanto que es una pregunta formulada para que sean los niños quienes respondan, el hecho de saber cuál es más chico y cuál es más grande puede remitirlos a la medición de las áreas utilizando el material recortable, pero esta misma pregunta, formulada a los maestros, puede resultar ambigua y por eso responden considerando el perímetro antes que el área.

Además, como los cuadriláteros en cuestión son todos trapezoides puede ser que esto haya motivado a Cristina a pensar en el perímetro que sí puede calcular y no en el área de cada figura porque "no sabía" ninguna fórmula para calcular el área de estos cuadriláteros.

En todo caso, la respuesta de Cristina lleva implícita la creencia de que la figura de mayor área es necesariamente la figura que tiene el perímetro mayor.

Esta creencia, aunque errónea, no es privativa de los maestros de primaria, en la historia de la humanidad se sabe que Tucídides estimó el área de la isla de Sicilia midiendo el tiempo empleado en circunnavegarla (es decir, estableciendo una medida de su periferia). (Domínguez 1984).

Las variaciones entre perímetro y área son motivo de reflexión y creemos que, en tanto se logre una mayor comprensión de las características geométricas de las figuras, estas variaciones pueden ser mejor comprendidas.

A continuación se revisa otra actividad en la que los maestros también manifiestan estas ideas equivocadas de la relación entre área y perímetro.

(Obs 34)
La actividad 2 del Tema 2, se llama Cuadros chicos y grandes y en ella se propone que los maestros calculen el área de tres figuras trazadas en cuadrículas de diferentes tamaños.

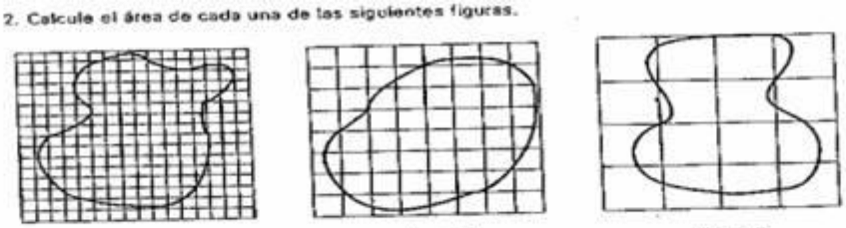

2. Calcule el área de cada una de las siguientes figuras.

Figura A Figura B Figura C

¿Cuál tiene menor área? ______

¿Cuál es el área de cada figura?
figura A = ______ figura B = ______ figura C = ______

¿Cuál es el área de la figura B, medida en cuadros chicos?
______

¿Cuál de las tres figuras tiene mayor área? ______
Observe que un cuadro grande equivale a 4 cuadros medianos o 16 cuadros chicos.

Darío y Ulises trabajan en pareja, utilizan un hilo (recurso utilizado en una de las actividades iniciales de la unidad) para medir el contorno de la figura A. Señalan con rojo la longitud del contorno de la figura A en el hilo que utilizan como intermediario y luego, trasladan esa medida a los cuadros de la figura C que son los cuadros más grandes.
OBS: ¿Utilizan el hilo para medir el contorno de cada figura?

Darío: Sí
OBS: ¿Y a partir de eso van a determinar cuál figura tiene menor área?
Darío: Bueno, ahorita primero cuánto mide el contorno.
Darío y Ulises utilizan el hilo para trasladar la medida del contorno de la Figura A, y formar un cuadrado con esa medida, utilizando la cuadrícula de la figura C.
Darío: Vamos a formar un cuadro de 3 por 3 (en la figura C) Entonces, éste (A) es de mayor área.
Ulises: En B éstos son 4, (se refiere a que cuatro cuadritos de B forman un cuadrito de C) entonces serían 36. (o sea, 9 cuadritos de C equivalen a 36 cuadritos de B)...
Darío: Sigue la figura B... necesitamos sacar el contorno... Tenemos que medir el contorno de B.

Los maestros Darío y Ulises consideran que conocer la medida del perímetro les permitirá averiguar qué figura tiene menor o mayor área: "necesitamos sacar el contorno... Tenemos que medir el contorno de B..."

Los maestros están tratando de medir la superficie considerando las unidades cuadradas de la figura C quizás porque se acercan más a lo que puede ser la representación de "centímetros cuadrados". Para ello utilizan la longitud del perímetro que "captura" la superficie de la figura A y la trasladan a la cuadrícula de la figura C construyendo un cuadrado de 3 por 3.

Los maestros han identificado la equivalencia de las cuadrículas y por eso concluyen que si la superficie de la figura A mide 9 cuadritos de la cuadrícula C, entonces mide 36 cuadritos de la cuadrícula de la figura B (pues 4 cuadritos de B equivalen a 1 cuadrito de C):. Vamos a formar un cuadro de 3 por 3 (en la figura C)...En B éstos son 4, (se refiere a que cuatro cuadritos de B forman un cuadrito de C) entonces serían 36. (o sea, 9 cuadritos de C equivalen a 36 cuadritos de B).

En este ejemplo, conviene considerar dos cuestiones:

1. Los maestros suponen que el perímetro conserva el área independientemente de la forma que tenga la superficie. Así, transforman la figura A en un cuadrado cuyos lados miden 3 unidades de la cuadrícula C.

2. Los maestros transforman la figura A en un cuadrado. ¿Estarán pensando que sólo se puede medir el área de las superficies conocidas? En este caso, el recurso propuesto (contar los cuadritos de las cuadrículas) pasó desapercibido.

Tal vez, medir superficies los remite al empleo de unidades cuadradas y éstas resultan sólo contables en figuras como el cuadrado. Aunada a estas consideraciones, es importante destacar la "idea errónea" de estos maestros que consiste en creer que la medida del perímetro determina la medida de la superficie. Esta creencia es cuestionada por otro miembro del mismo equipo.

> Teresa observa las mediciones que hacen Darío y Ulises en la cuadrícula de la figura C.
> Teresa: Sí, pero un perímetro no nos da la misma área.
> Darío: ¿Por qué no?
> Teresa: Si mide un rectángulo de 2 por 3, su área es 6 (y su perímetro 10)... Si ustedes lo transforman en otra figura, por ejemplo, de 2 por 5 su perímetro es 14 centímetros (y su área serían 10 unidades cuadradas), pero su área no es la misma, mide 10 unidades cuadradas.
> OBS: A ver maestra, cómo estuvieron los ejemplos.
> Teresa: Si trazan el perímetro de un rectángulo de 1 por 6, su área es de 6 unidades cuadradas (y el perímetro es de 14); y si (la figura es de) 2 por 5 es el mismo perímetro (o sea 14) sin embargo, su área es de 14 unidades cuadradas (en realidad sería de 10 unidades cuadradas)... Entonces, no veo por qué ellos (Darío y Ulises) dicen que el contorno les va a permitir decidir qué figura tiene menor área.
> Darío no se muestra muy convencido de la argumentación de la maestra Teresa.
> Darío y Ulises utilizan nuevamente el hilo que señala la medida del contorno de la figura A para formar un cuadrado utilizando los cuadros grandes de la figura C.
> Darío:... tiene razón la maestra (Teresa) de que si estamos haciendo una figura diferente, (pero esto no es lo que dice Teresa) el perímetro puede variar... (lo que dice Teresa es que lo que va a variar es la superficie) pero no estamos haciendo una figura diferente (queda pensativo... como si "capturar" el contorno de la figura en el hilo fuera garantía de que se trata de la misma y no de otra)…

Aunque la maestra Teresa realiza los cálculos numéricos equivocadamente, lo que trata de explicar es que una misma longitud puede constituir el contorno de áreas diferentes. Por ejemplo, un perímetro de 14 centímetros puede ser el contorno de rectángulos de 6 unidades de largo y 1 unidad de ancho (entonces, su superficie mide 6 unidades cuadradas); de 5 unidades de largo y 2 unidades de ancho (figura con una superficie de 10 unidades cuadradas) o de 4 unidades de largo y 3 unidades de ancho (cuya superficie mide 12 unidades cuadradas).

La explicación de la maestra Teresa no es un ejemplo que resulte contundente a los otros dos maestros, para evidenciar que no es cierto que el perímetro encierra siempre la misma superficie. Ella sabe que conocer la medida de los perímetros no garantiza que se pueda determinar cuál es la figura de menor área pero su argumento es accidentado, no logra impactar las creencias de los maestros Darío y Ulises, quienes concluyen: "tiene razón la maestra (Teresa) de que si estamos haciendo una figura diferente, el perímetro puede variar... (lo que dice Teresa es que lo que va a variar es la superficie) pero no estamos haciendo una figura diferente..."

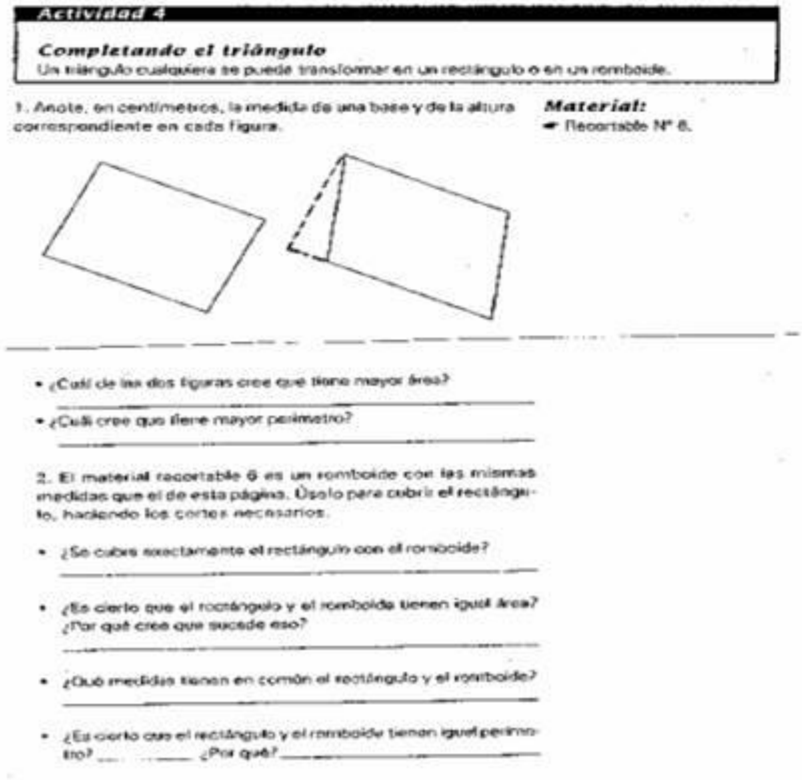
Los maestros en este momento, están refiriéndose sólo al cuadrado que construyen en la cuadrícula de la figura C, han perdido de vista la figura A cuyo contorno utilizaron para crear esta otra superficie.

Lo relevante es dar constancia de que una "idea errónea" no se modifica fácilmente, pues en este caso, la participación de una compañera de equipo que procura explicar el supuesto equivocado que orienta las acciones de Darío y Ulises, se interpreta como explicaciones que no corresponden a aquello que ellos están realizando.

Así como hay maestros que mantienen concepciones erróneas acerca de las variaciones entre perímetro y área, dentro del grupo de trabajo existen ejemplos que permiten identificar a maestros que gracias al trabajo desarrollado con las actividades del paquete didáctico, lograron identificar tales variaciones y hasta hacer ciertas consideraciones de orden geométrico, según documentamos a continuación.

1.3 El reconocimiento de las características geométricas de las figuras como condición para establecer las variaciones entre el perímetro y el área

(Obs 35)
Realizan la actividad 4 del tema 2 "Completando el triángulo"



Actividad 4

Completando el triángulo

Un triángulo cualquiera se puede transformar en un rectángulo o en un romboide.

1. Anote, en centímetros, la medida de una base y de la altura correspondiente en cada figura.

Material:
Recortable N° 6.

- ¿Cuál de las dos figuras cree que tiene mayor área?
- ¿Cuál cree que tiene mayor perímetro?

2. El material recortable 6 es un romboide con las mismas medidas que el de esta página. Úselo para cubrir el rectángulo, haciendo los cortes necesarios.

- ¿Se cubre exactamente el rectángulo con el romboide?
- ¿Es cierto que el rectángulo y el romboide tienen igual área? ¿Por qué cree que sucede eso?
- ¿Qué medidas tienen en común el rectángulo y el romboide?
- ¿Es cierto que el rectángulo y el romboide tienen igual perímetro? ______ ¿Por qué? ______

> Mariana: Vamos a trazar la altura.
> Vero: O una perpendicular para llegar a un vértice.
> Mariana: (Leyendo) "¿Cuál de las dos figuras cree que tiene mayor área?", igual (leyendo) "¿Cuál cree que tiene mayor perímetro?", el romboide porque la "diagonal" mide más que una perpendicular (llama diagonales a las líneas inclinadas del romboide, en contraste con las perpendiculares a la base que conforman los lados del rectángulo).

Las integrantes del equipo escriben los comentarios de Mariana como respuesta en su cuaderno de trabajo.

Las maestras de este equipo saben, gracias a las sesiones previas de geometría, que para determinar la altura de las figuras propuestas deben trazar una perpendicular desde la base hacia el vértice opuesto: "O una perpendicular para llegar a un vértice". Se refieren al romboide de esta página, donde han tenido que prolongar el segmento de una de las bases para trazar una perpendicular que les permita relacionar un vértice con este segmento.

En relación con el enunciado: "el romboide porque la diagonal mide más que una perpendicular" interesa destacar que la maestra Mariana utiliza el término "diagonal" para referirse a las líneas inclinadas con respecto al segmento que eligieron como base, que conforman los lados del romboide y no de acuerdo con su definición geométrica: “línea que une dos vértices no consecutivos”. Mariana, aunque no utiliza los términos convencionales, razona considerando elementos geométricos: los lados inclinados del romboide son más largos que los lados perpendiculares del rectángulo, por tanto, el romboide tiene un perímetro mayor que el rectángulo.

> Las maestras empiezan a contestar el punto 2: "El material recortable 6 es un romboide con las mismas medidas que el de esta página. Úselo para cubrir el rectángulo, haciendo los cortes necesarios". Sacan el recortable 6.
> Mariana superpone una pieza del recortable 6 en el rectángulo del cuaderno de trabajo, usa escuadra y regla.
> Mariana: ¿No lo vamos a pegar?
> Blanca: No... allí está Vero (traza una perpendicular en el romboide del material recortable y forma un rectángulo).
>
> 
>
>
> Mariana: ¿Es cierto que tienen igual área? (inicia las respuestas a las preguntas del paquete didáctico: "¿Es cierto que el rectángulo y el romboide tienen igual área?: "¿Por qué cree que sucede esto?")
> Vero: Sí
> A Blanca le parece difícil argumentar por qué tienen la misma área, Mariana intenta darle una explicación:
> Mariana: (a Blanca) Sólo se transforma la figura y conserva su misma área. (Leyendo) "¿Qué medidas tienen en común el rectángulo y el romboide?"
> Blanca: La base y la altura.
> Vero: (Leyendo) "¿Es cierto que el rectángulo y el romboide tienen igual perímetro?".
> Mariana: No.
> Vero: (Lee) "¿Por qué?".
> Mariana: Porque (el rectángulo) tiene dos perpendiculares que no miden lo mismo... dos de sus lados (del romboide) van a ser mayores que los lados del rectángulo; la diagonal del romboide (se refiere al lado "a" de la figura anterior) es mayor que la altura del rectángulo .

Las maestras han utilizado los centímetros para determinar cuánto mide la base y la altura de cada figura y aunque conocen esos datos numéricos, no utilizan de manera inmediata las fórmulas para calcular el perímetro y el área de las figuras en estudio. Su razonamiento se apega más a consideraciones de orden geométrico: "¿Cuál cree que tiene mayor perímetro?", el romboide porque la diagonal (se refiere al lado "a" de la figura) mide más que una perpendicular... (se refiere al lado "b" del dibujo).

El ejemplo demuestra que las maestras no han recurrido a una regla graduada para comprobar la diferencia entre los perímetros del romboide y del rectángulo; sus argumentos están relacionados con la variación de la medida de los lados en virtud de que las líneas de los lados de las figuras sean perpendiculares (para el caso del rectángulo) o inclinadas (para el caso del romboide) respecto al segmento elegido como base.

El ejemplo muestra los logros alcanzados por las maestras respecto al reconocimiento de las características geométricas de las figuras y cómo las consideraciones de orden geométrico evitan creencias erróneas acerca de la medición del perímetro y sus relaciones con el área. Los argumentos adquieren el carácter de necesidad lógica que vuelve superflua la verificación empírica.

1.4 Hacia la reconceptualización de las relaciones entre perímetro y área

Con relación al cálculo del perímetro de un terreno rectangular que mide 750 metros de largo y 300 metros de ancho, (ver apartado *1.2.1 Ausencia de consideraciones geométricas en relación con el perímetro* de este trabajo), los maestros empiezan a realizar actividades que involucran la variación de las relaciones entre el perímetro y la superficie.

> Rosa: (lee el punto 7) "Si en lugar de árboles frutales se pusieran postes alrededor, a un metro de distancia uno de otro, ¿cree que la cantidad de postes que se necesitan coincide con la cantidad de metros que mide el contorno del terreno?
> Karla: Sí coincide.
> L: Compruébenlo, hagan un terreno con un perímetro de 12, pueden usar una hoja cuadriculada.
> Ernesto dibuja varios terrenos y comprueba sus respuestas. Los terrenos que dibujó Ernesto son:

A partir de estos elementos gráficos, el maestro Ernesto comprueba que la medida de un perímetro (12) puede encerrar áreas diferentes. Experiencia que le permite reconsiderar sus ideas iniciales respecto a la relación que guarda el perímetro y el área de las figuras. Estas reconsideraciones las muestra en la siguiente actividad.

> Karla: (lee la primera pregunta de la actividad 2 del Tema 2) "Determine, con el procedimiento que quiera, el área de la siguiente figura".

> Karla: Con hoja cuadriculada (propone). (Lo dice motivada probablemente por la actividad siguiente que presenta figuras similares en cuadrículas diferentes)
> Ernesto: Usar estambre, formar el perímetro y con ese perímetro formar un círculo... el mismo perímetro no garantiza lo mismo creo (evoca los terrenos que dibujó en la actividad anterior y se da cuenta que un mismo perímetro no implica la misma superficie); no, no es válido el procedimiento.

Aunque la primera reacción de Ernesto apunta a la utilización de una fórmula conocida (la del círculo), la construcción de varias superficies con el mismo perímetro le ha permitido reparar en el hecho de que un mismo perímetro encierra diferentes áreas, por lo que abandona su idea inicial de calcular el área de la figura presentada utilizando la longitud de su perímetro.

Esta modificación de una "idea errónea" inicial se ha logrado entre algunos maestros, después de realizar actividades de la propuesta de actualización que problematizan las variaciones entre perímetro y área en modos diversos, según se ha podido constatar por reportes de trabajo realizados con sus alumnos. En la parte final de este capítulo se ofrece, a título de ejemplo, cómo este tema resultó significativo para los maestros y ello orienta sus esfuerzos para que los alumnos lleguen a la consideración de que "un mismo perímetro puede encerrar áreas diferentes".

1.5 Concepciones de los maestros acerca de las unidades de medición

1.5.1 Sobre las unidades de superficie

Hay una serie de asociaciones inmediatas (a nivel de "palabra clave") que se hacen al resolver problemas aritméticos "contextualizados" mediante figuras geométricas. Así, es usual entre los maestros identificar el área de una figura con el establecimiento de resultados utilizando unidades cuadradas. Los maestros saben que el cálculo de cualquier área significa que el resultado se ofrece considerando unidades cuadradas.

> (Obs 34)
> Ernesto: (lee)... "¿Qué unidad de medida utilizó Juan para medir la superficie de la mesa?"... Centímetros cuadrados.
> Rosa: Cuadrados no.
> Ernesto: Pero dice medir la superficie... operaciones rápidas.

Las "operaciones rápidas" del maestro Ernesto implican palabras claves. Esto, en parte, es prueba del vacío conceptual con el que se han desarrollado las actividades de medición, pues se relaciona perímetro con el empleo de unidades lineales y área con el uso de unidades cuadradas, luego de ejecutar los procedimientos implicados en las fórmulas más conocidas. Ocurre como en el caso de los niños que tratan de identificar la operación que les permita resolver un problema, a partir de las palabras contenidas en su redacción.

1.5.2 Las unidades como criterio de validez

En el momento de evaluar actividades sobre medición, también resulta importante, para algunos maestros, utilizar la "unidad adecuada" en el resultado y consideran que el manejo de las unidades lineales o cuadradas es indicio de la comprensión de los conceptos de perímetro o de superficie respectivamente. El uso de unidades "correctas" proporciona al maestro un primer nivel de evaluación basado, también, en el uso de palabras clave.

> (Obs 34)
> Se trata de una conversación previa al tratamiento de las actividades del Tema 2 *Perímetro y Superficie*
> L: Vamos a platicar, qué tipo de dificultades han encontrado en sus niños para la comprensión del perímetro y la superficie...

Los maestros guardan silencio
L: ¿Qué pasó? (dice como esperando alguna respuesta)
Karina: Llegan a confundir el perímetro con el área
L: ¿Cómo te has dado cuenta de eso?
Karina: Porque colocan centímetros cuadrados en el resultado de perímetros o viceversa...

Tenemos así que una práctica escolar, que ha reducido las tareas de la medición a un ejercicio numérico, ha contribuido a que las unidades de medida aparezcan como el nombre final de un número que se ofrece como resultado y cuya (quizás única) función es dar una aparente valoración inmediata a la comprensión del problema.

En un proceso de aprendizaje conceptual de la medición, determinar la unidad de medida es el primer paso (Cortés et al. 1990, 47). Sin embargo, en las prácticas de enseñanza dominantes, las unidades se utilizan al final porque se tratan como una denominación que acompaña al resultado numérico.

A continuación veremos cómo la iteración de las unidades para medir una superficie, es decir, realizar prácticamente la acción de medir, se dificulta entre los maestros. Esto es quizás evidencia de que en el ámbito escolar no se han utilizado suficientemente unidades de superficie para medir áreas.

1.5.3 Sobre la iteración de las unidades

(Obs 34)


Actividad 1

El terreno y la cerca

Para medir perímetros se utilizan unidades de medida de longitud. Para medir una superficie es necesario compararla con otra superficie.

1. Elija tres objetos planos diferentes que tenga a la mano y úselos como unidades de medida para medir tres veces la superficie de la mesa en la que está trabajando. Haga un registro en la siguiente tabla:

Unidades de medida	Medidas

¿Cuáles de los objetos que utilizó cupieron un número exacto de veces en la superficie de la mesa?

¿Cuál de las medidas que obtuvo cree que es más precisa?

¿Por qué?

2. Pedro midió la superficie de la mesa con una hoja de papel tamaño carta; la medida fue aproximadamente 14 hojas.

Material:
- Tres objetos planos (hojas, credenciales, tarjetas, etcétera.)
- Material recortable Nº 5.
- Un juego de Tangram (lo encuentra en el Recortable. Matemáticas. Primer grado).

M A T E M Á T I C A S 217

Los maestros realizan la actividad 1 del Tema 2.

> En el equipo 5, los maestros utilizan una hoja tamaño carta, un sobre y una credencial para medir la superficie de su mesa.
> L: (al equipo 5) Si les estamos diciendo... credencial, hoja ¿cuál creen que sea más precisa? (lo pregunta porque al observar el desarrollo de la actividad se percata de que los maestros al responder a la pregunta "¿Cuál de las medidas que obtuvo cree que es más precisa?", consideran que la unidad más precisa es la más grande, que en todos los casos fue la hoja tamaño carta).
> Karina: Yo digo que la hoja.
> Javier: ¿Por qué?
> Karina: Porque es más grande y te equivocas menos. Es más fácil llevar la cuenta...
> Javier: Yo digo que es más precisa la credencial, porque al medir, si hay partes que te quedan (sin medir) son menos...
> Karina: Lo que pasa es que esta credencial tiene una parte curva (porque se trata de una credencial enmicada).
> Nancy: Yo digo que podemos resolverlo ya que terminemos de medir con los tres (hoja, sobre, credencial).

La actividad promueve la comparación "práctica" de dos magnitudes: la superficie de la mesa y otra que hace las veces de unidad de área: una hoja tamaño carta, un sobre o una credencial.

Se trata de iterar la unidad en la superficie de la mesa, se sugiere una práctica de la medición que no ha sido la habitual en el ámbito escolar y por ello, algunos maestros consideran que la unidad más grande ofrece mejores condiciones para dar una respuesta precisa: "... la hoja porque es más grande y te equivocas menos...". La maestra alude a la precisión en términos de manipular con mayor facilidad la unidad más grande, también considera que la unidad más grande se itera menos veces, lo que facilita su cuantificación: "Es más fácil llevar la cuenta...". Se identifica "precisión" con la menor posibilidad de error por parte del sujeto que utiliza las unidades y no con la posibilidad de aproximar mejor la magnitud que se está midiendo.

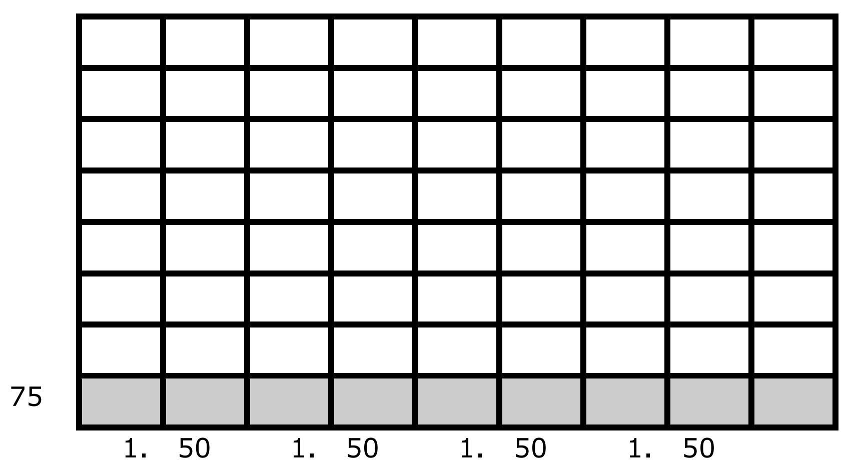
En contraste con esta postura, el maestro Javier considera que entre la hoja y la credencial, ésta última arroja resultados más precisos por tratarse de la unidad más pequeña. Sustenta su argumento en el hecho de que las partes que ya no son susceptibles de ser medidas con esa unidad, pueden depreciarse sin que esto afecte demasiado el resultado de la medición: "Yo dije que con la credencial porque al medir, si hay partes que quedan (sin medir) son menos...”; (mientras que al utilizar las hojas) "... te sobran pedazos grandotes..."

Estas intervenciones ilustran de qué manera una actividad es enriquecida por los maestros organizados en equipo, en el momento de la confrontación de los resultados, las respuestas pueden ser distintas y el argumento que las acompaña cobra especial relevancia. Antes que imponer un criterio o bien, ofrecer un resultado que convenza a todos, importa explicar las razones de una respuesta, actitudes que permiten avanzar hacia la consideración de que las matemáticas no se limitan a buscar un resultado incuestionable y que son favorecidas por la propuesta en tanto que invita a los maestros a realizar las actividades en colaboración con otros compañeros.

Los maestros de este equipo utilizaron una hoja como unidad y la fueron iterando por la superficie de la mesa; obtuvieron como superficie de la mesa 14 hojas. A continuación utilizaron un sobre y lo iteraron pero a diferencia de lo que había ocurrido con la hoja, consideraron partes del sobre para medir la totalidad de la superficie.

> Luis: Nueve sobres (se refiere a la medida del largo de la mesa, que comparó con el largo del sobre).
> Javier: Siete punto setenta y cinco (se refiere a la medida del ancho de la mesa, que comparó con el ancho del sobre. Así, considera siete veces el ancho del sobre y un pedazo más)... Siete punto setenta y cinco por nueve sobres... (utiliza la calculadora y dice) 69.75 sobres... casi 70 sobres.

Con el empleo de los sobres, la cuantificación de la iteración empieza a dificultarse. Frente a este problema, los maestros — a diferencia de los niños — no realizan compensaciones entre las áreas de los sobres que no caben completas en la superficie. Una posible compensación sería:



Sobres: 63 completos + 6 completos + 3/4 igual a 69 + 3/4 o 69.75

Para los maestros, el conocimiento que tienen de la fórmula los lleva a la aplicación de ésta, dejando de lado las compensaciones.

Es decir, en virtud de que cuantificar los pedazos de sobre les resulta difícil, entonces, los maestros recurren a la práctica que mejor conocen: identificar la medida del ancho y del largo para establecer una relación multiplicativa que les permita, mediante el uso de una fórmula, determinar cuánto mide el área de la mesa. En este procedimiento, "quedan ocultas" las magnitudes lineales en juego, y el tipo de unidad de superficie que así se construye.

Los maestros no se dan cuenta que cuando aplican la fórmula "largo por ancho", la unidad lineal que utilizan para medir el largo o el ancho es la misma, por ejemplo el "centímetro". En el caso de los sobres, la unidad lineal que está midiendo el largo es "el largo del sobre" mientras que la unidad lineal utilizada para el ancho es el "ancho del sobre". No obstante que la relación multiplicativa entre el largo y el ancho medido "con estas dos unidades" distintas permite obtener un resultado correcto, los maestros razonan sobre la unidad de superficie como si se tratara de una unidad cuadrada y no rectangular; una vez que identifican el 9 y el 7.75, operan sólo números, utilizan la calculadora y pueden asegurar que la superficie de la mesa mide "exactamente" 69.75 sobres, o bien, aproximadamente 70 sobres.

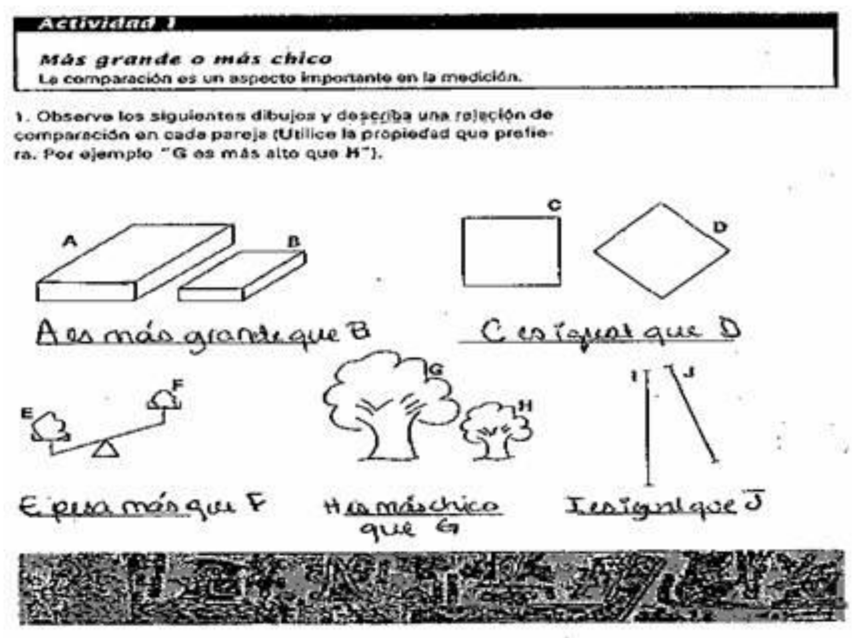
Este resultado aunque es correcto como ya se asentó, es producto de la utilización de un procedimiento que privilegia las relaciones numéricas: (9 por 7 sobres), donde el 7 funciona como operador; los maestros no están considerando las relaciones de las medidas lineales involucradas sino las veces que cabe el sobre en la mesa.

El ejemplo muestra cómo se pierde la iteración de la unidad con el surgimiento de los datos numéricos que permiten el arribo al resultado esperado.

1.6 La medición vinculada exclusivamente a los cálculos numéricos

Los maestros reconocen que existen diversas magnitudes susceptibles de ser medidas pero, en cuanto se les sugiere comparar las propiedades de dos objetos, deciden aparentemente considerar sólo longitudes y superficies. Retoman el significado de la medición que conocen más: el empleo de fórmulas para calcular perímetros o áreas.

(Obs 32)
Se trata de la primera actividad de la unidad VI Medición.
El coordinador hace una adecuación de la actividad en virtud de que los asistentes al taller no cuentan con el material impreso. En vez de comparar los dibujos propuestos, el coordinador sugiere comparar objetos cercanos.


Actividad 1

Más grande o más chico

La comparación es un aspecto importante en la medición.

1. Observe los siguientes dibujos y describa una relación de comparación en cada pareja (Utilice la propiedad que prefiera. Por ejemplo "G es más alto que H").

A B C D

A es más grande que B   C es igual que D

E F G H I J

E pesa más que F   H es más chico que G   I es igual que J

L: (escribe en el pizarrón) "Describa una relación de comparación y anote las propiedades o cualidades que se comparan"
L: (al grupo) Aquí tenemos botellas, vasos, pritt, geoplanos (dice más objetos) elijan dos objetos y compárenlos, van a anotar la cualidad que se compara, elijan dos objetos y los comparan... un par de objetos por equipo.
En el equipo 5, los maestros comparan un icosaedro (poliedro construido con veinte triángulos equiláteros del material recortable 4 durante una sesión de geometría) y un objeto de forma cilíndrica que es el envase de su barra adhesiva (Pritt).
Javier: Para calcular medimos su área (dice la fórmula para sacar el área de las caras del cilindro), vamos con esto (el poliedro)... al descomponer el poliedro vemos caras planas y de forma triangular.
Karina: Forma de triángulos equiláteros.
Javier: Sí, para obtener el área total (de las caras triangulares) se obtiene el área de una de las caras...
Luis: Y se multiplica por 20 (el número de caras triangulares del poliedro)... para calcular necesitamos medir

> Javier: ¿Cómo ven? ¿Habrá algo que se nos escape?... el área ya entra dentro de su forma.

Al comparar dos objetos volumétricos, los maestros de este equipo manifiestan la necesidad de establecer numéricamente la medida del área de las caras laterales que constituyen cada objeto, a pesar de que la consigna pedía sólo "comparar", sin hacer alusión a la cuantificación de esa comparación.

Las afirmaciones: "para calcular medimos..." y "para calcular necesitamos medir" que vimos anteriormente, refieren la necesidad de conocer las medidas lineales o de superficie (cuánto miden los lados del triángulo y las bases circulares) y así, aplicar las fórmulas para calcular las áreas.

Esta respuesta complementa aquélla que el propio maestro Javier ofreció ante el cuestionamiento "¿A qué se reduce el estudio de la medición en la primaria?"

Javier: A calcular.

La medición entre algunos maestros existe sólo como el hecho de hacer cálculos numéricos a partir de fórmulas que se conocen de memoria. En este sentido, es interesante observar cómo, ante dos cuerpos volumétricos, los maestros deciden calcular las áreas respectivas y no los volúmenes, porque la presencia del icosaedro invita más bien a realizar el cálculo del área total de los triángulos que lo conforman y no el volumen del cuerpo, cuya fórmula no está en la "lista básica" de fórmulas del maestro: "... al descomponer el poliedro vemos caras planas y de forma triangular"; "para obtener el área total... se obtiene el área de una de las caras... y se multiplica por 20".

Los maestros describen el cuerpo cilíndrico de manera análoga al icosaedro como figura plana y determinan: "dos caras circulares y una rectangular".

Los maestros del equipo 5 eligen comparar el área y no el volumen de los dos cuerpos porque tienen la posibilidad de "tomar" de los cuerpos las magnitudes necesarias para aplicar las siguientes fórmulas, que conocen bien:

Área igual a largo por ancho.

Área igual a base por altura entre dos.

Área igual a π por radio al cuadrado.

Puede ser también, que los maestros estén más habilitados para operar con dos dimensiones (largo y ancho; base y altura) que con tres dimensiones. En otra actividad relacionada con el volumen, un maestro reconoció que: "lo que pasa es que cuando se construye un prisma, un cubo, la relación entre sus medidas no es... en dos dimensiones sino en tres, es tridimensional, son tres medidas involucradas: largo, ancho y altura... Generalmente aprendemos a pensar (sólo) en dos dimensiones..."

Asimismo, cabe advertir que esas tres dimensiones (largo, ancho y alto) son perceptibles sólo en cuerpos como el paralelepípedo y el cilindro; en el caso del icosaedro como en muchos otros cuerpos, "el largo, el ancho y la altura" no significan medidas en particular, lo cual es muestra de uno entre muchos discursos que circulan en la escuela carentes de significado. Por esto resulta razonable que los maestros transformen el icosaedro en su desarrollo plano y calculen el área total de sus caras, antes que su volumen.

Este ejemplo sirve para ilustrar también cómo el proceder de los maestros está determinado por aquello que saben que funciona, resuelven a partir de sus certezas, en este caso, se sienten más seguros de ofrecer un resultado adecuado calculando área que volumen.

Los maestros deciden hacer una comparación de los objetos que sea "matemática", y por lo tanto, actúan de acuerdo con lo que conocen bien: las fórmulas para calcular el área. El hecho de recurrir a las fórmulas les obliga a conocer las medidas de las magnitudes y con este fin, transforman los cuerpos geométricos en su desarrollo plano.

La medición, tratada como ejercicios numéricos que permiten evaluar los parámetros de una fórmula, es resultado también de una forma particular de concebir el trabajo escolar de las matemáticas.

Parece que las matemáticas de la primaria se reducen al tratamiento de las operaciones fundamentales, se han tratado exclusivamente como aritmética, lo que ha fomentado prácticas escolares apegadas al ejercicio continuo de mecanizaciones que se van complejizando conforme al rango numérico empleado y al grado escolar al cual están dirigidas.

A continuación ilustramos algunas de las concepciones de los maestros de primaria acerca de las matemáticas.

2. CONCEPCIONES DE LOS MAESTROS DE PRIMARIA SOBRE LAS MATEMÁTICAS

2.1 Las matemáticas de la primaria y su privilegiada vinculación con la aritmética. La cuantificación de las magnitudes.

En las aulas de primaria se encuentran con frecuencia escritas en el pizarrón operaciones aritméticas que los maestros proponen como tarea a sus alumnos. Esta ejercitación de las operaciones parece ser el rasgo que caracteriza la actuación docente en las aulas, promovida por una visión de las matemáticas ligada exclusivamente al cálculo numérico.

A lo largo de la experimentación del paquete didáctico *La enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria,* se pudo constatar que los maestros de primaria actúan asociando permanentemente las matemáticas a los cálculos numéricos. Trabajando en el contexto de "hacer matemáticas", los maestros tienden a buscar relaciones numéricas, resultados únicos y respuestas "correctas" por tratarse de una ciencia "exacta". Esta visión de las matemáticas reduce las acciones prácticas de la medición, a la ejercitación numérica a través de las operaciones básicas que se pueden desprender del empleo de las fórmulas.

Al iniciar la unidad sobre medición el coordinador, en ausencia del material impreso, propone como primera actividad que los maestros compararen dos objetos cualesquiera (cuadernos, envases, gomas, etc.). Es una actividad ideada por el coordinador que busca ser equivalente a la propuesta en el paquete didáctico y que consiste en comparar objetos dibujados (Anexo 1 Actividad 1 "Más grande o más chico"). Las comparaciones iniciales de los maestros fueron básicamente descripciones de los objetos.

> Obs 32)
> Llega el coordinador al equipo 5
> L: ¿ Ya hicieron una comparación?
> Javier: Comparamos el área de las caras del cilindro y del poliedro.
> Vimos que el cilindro tiene dos caras circulares y una rectangular y en el poliedro 20 caras en forma triangular.
> Más tarde, el coordinador sugiere que, considerando una propiedad común de los objetos elegidos, formulen un enunciado del tipo "A es más alto que "B". (El coordinador retoma esta sugerencia del paquete didáctico donde las comparaciones se han hecho respecto a objetos dibujados).
> Los maestros sin embargo, consideran ese enunciado muy general, vago o solo apegado a la percepción, ellos intentarán más bien, formular un enunciado que evidencie un "tratamiento matemático" de la comparación, estableciendo para ello una relación numérica que precise "qué tanto más " grande es un objeto que el otro.

(Obs 32)
L: Ahora quiero que en un enunciado…por ejemplo "Sara es más baja que Darío"…de todo lo que ya encontraron formen un enunciado.
Javier propone un enunciado al resto del equipo.
Javier: "El poliedro tiene un área mayor que el cilindro".
Karina: Pero qué tanto más.
Luis: Es más o menos a cálculo (aproximadamente).
Javier: Es equilátero (las caras triangulares del poliedro). Hay que multiplicar 4 por 3.2 (base por altura).
Karina realiza el cálculo utilizando la calculadora.
Karina: Catorce (pero el resultado correcto sería 4 por 3.4 igual a 12.8; 12.8 entre 2 igual a 6.4).
Javier: Por veinte (hace el cálculo utilizando la calculadora)… el poliedro es igual a 280.

Los maestros, después de calcular el área total de las caras del icosaedro y de imaginar la superficie total de las caras del cilindro, pueden decir estimando "a cálculo", (es decir, aproximadamente) que: "el poliedro tiene un área mayor que el cilindro", pero la tendencia a identificar la medida exclusivamente como una relación numérica, los motiva a establecer "qué tanto más" grande es el poliedro que el cilindro.

Utilizan una regla graduada para determinar los datos de las caras del icosaedro a fin de utilizar la fórmula A = $\frac{\text{Basexaltur a}}{2}$ x 20 para conocer cuánto mide la superficie total de las caras que conforman este cuerpo geométrico.

Sin embargo, al hacer los cálculos numéricos, los maestros omiten parte de la fórmula (dividir entre dos): "Hay que multiplicar 4 por 3.2 (base por altura)", y pese a que utilizan la calculadora, equivocan el resultado de la multiplicación.

Considerando que la base del triángulo mide 4 centímetros y su altura es de 3.2, los cálculos deberían ser:

3.2 X 4 = 12.8; 12.8:2 = 6.4 y 6.4 X 20 = 128

La diferencia de resultados es aquí lo menos relevante, lo que interesa destacar es la tendencia de los maestros a buscar un resultado numérico proveniente del empleo de las fórmulas para calcular la superficie total de este icosaedro.

Nancy saca el área del círculo, multiplica 1.25 (radio) por 3.14.
Javier: Y luego, ¿el radio cuánto es?
Nancy: 1.25.
Javier multiplica 1.25 por 3.14 (El resultado debería ser 3.9250).
Javier: Sale diferente.
Nancy: 4.90 es el área de un círculo por 2 es igual a 9.8 (Nancy está utilizando la fórmula "π por radio al cuadrado" pero omite el "cuadrado" y multiplica por 2 porque está considerando las dos bases del cilindro).
Javier: 9.8 (es la suma de las superficies de las bases circulares) hora el rectángulo con un hilo.
Karina mide la altura del cilindro.
Nancy: Y la circunferencia (de las caras circulares del cilindro) va a ser el ancho del rectángulo.
Javier: Aquí (la altura del cilindro) va a ser 9, multiplicamos 7.8 que es el ancho del rectángulo (lo sacaron midiendo con el hilo la circunferencia de las caras circulares del cilindro):
7.8 x 9 = 70.2 y 70.2 + 9.8 = 80.0

Los maestros consideran el desarrollo plano del cilindro como un rectángulo y dos círculos. Establecen la medida del radio utilizando una regla graduada, miden el diámetro (2.50) y obtienen la medida del radio (1.25), esto les permite utilizar la fórmula Área = π x r^2 para calcular la superficie de cada círculo.

Para determinar la altura del cilindro utilizan como intermediario un hilo y la longitud la miden con una regla graduada concluyendo que mide 9 centímetros. Están midiendo la cara lateral de un cilindro pero la "piensan" como si fuera un rectángulo que mide de largo 9 centímetros y de ancho 7.8: "El ancho del rectángulo va a ser la circunferencia (de las caras circulares del cilindro)".

Javier: ¿Cuántas veces cabe el 80 (área total de las caras que conforman el cuerpo cilíndrico) en el 280 (área total de las caras del poliedro).
Karina hace la división.
Karina: El poliedro es 3.8 veces más grande.
Javier: El área del poliedro es 3.8 veces más grande que el área del cilindro (Aunque el resultado correcto de la división es 3.5).
Karina: Es más bonito ese enunciado.

Con el fin de elaborar un enunciado que precise qué tanto más grande es el poliedro que el cilindro, los maestros establecen una relación multiplicativa, en la que pueden omitir las unidades, y ellos las omiten (correctamente) sin caer en la cuenta de lo que están haciendo. Es así que una actividad destinada a establecer una comparación cualitativa entre objetos, se transformó en este equipo, privilegiando el empleo de las fórmulas para calcular las superficies de las caras que conforman cada uno de los objetos.

El manejo de las fórmulas tiene, aparentemente, como supuesto la creencia de que al enfrentar situaciones relacionadas con las matemáticas, es imprescindible ofrecer un resultado estableciendo relaciones numéricas: "El área del poliedro es 3.8 veces más grande que el área del cilindro… Es más bonito ese enunciado".

En este caso, los maestros no se sienten conformes con el enunciado que establece que el poliedro tiene una superficie mayor que el cilindro, su interés por establecer "qué tanto más", los lleva a efectuar las cálculos numéricos necesarios utilizando para ello las fórmulas que han memorizado en su tránsito por la escuela.

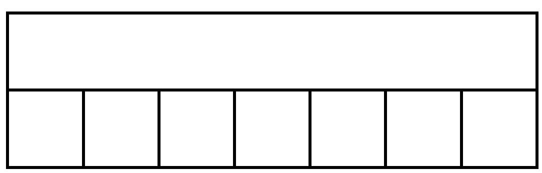
Respecto al empleo de las fórmulas, diremos que los maestros las utilizan "automáticamente" y apresuran los cálculos numéricos. Ocurre también que los maestros aplican las fórmulas omitiendo algunos de los procedimientos en ellas enunciados: en el caso del icosaedro se olvidan de dividir entre 2 al calcular el área de cada triángulo y en el cálculo del área del círculo del cilindro, multiplican "πpor radio" y no π por radio al cuadrado". Esto contradice, en los hechos, la importancia que el maestro da a los cálculos y a los supuestos "resultados exactos" hacia los que está dirigido su esfuerzo en el aula; puede ser también un indicio de que el aprendizaje de la fórmula ha sido sólo memorístico, sin que se haya logrado construir un significado para ella.

2.2 La creencia de que la ejercitación de las matemáticas es ofrecer un resultado numérico "exacto". El caso de la iteración de las unidades.

Al inicio del capítulo apuntamos que una de las novedades en el tratamiento de la medición en la primaria consiste en promover la iteración de las unidades como ejercicio comparativo que permite reflexionar en el concepto de medición y en la utilidad de un sistema de medidas.

La propuesta de actualización *La enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria (Block (coord) et al. 1995ª)* ofrece a los maestros diversas actividades con el fin de que practiquen la medición de longitudes y superficies utilizando unidades arbitrarias, la invitación implícita es que iteren la unidad y obtengan una medida. Al enfrentar estas situaciones, los maestros suelen atender esta invitación; sin embargo, en los casos relacionados con la medición de superficies realizan multiplicaciones y calculan el área utilizando la fórmula correspondiente. La tarea “práctica” de llevar a cabo la medición es remplazada por la ejercitación de las operaciones aritméticas elementales que se ajustan a los requerimientos de las fórmulas empleadas.

> (Obs. 34)
> Se trata de una actividad que consiste en medir la superficie de la mesa utilizando tres unidades arbitrarias (Anexo 2 Actividad 1, “El terreno y la cerca”). En este equipo han decidido utilizar dos credenciales y una hoja tamaño carta.
> Karla: La tarjeta no, dos credenciales y una hoja.
> Caro: Vamos a medir aquella mesa (se refiere a una mesa vacía que se encuentra en el extremo del salón).
> Los maestros empiezan a medir el ancho de la mesa con una hoja.
> Karla: Uno (pone una hoja en lo ancho de la mesa y va contando, marca la mesa e iteran la hoja para seguir midiendo).
> Caro: Dos.
> Ernesto marca un tercio de la tercera hoja.
> Los maestros empiezan a medir el largo.
> Ernesto: No marcaron de este lado (se confunden al marcar la hoja en la mesa, abandonan el procedimiento de usar una sola hoja y marcar. Usan varias hojas y las alinean en lo largo de la mesa).



> Ernesto: Serían seis y ...
> Rosa: Dos más fraccion (se refiere a la medida de lo ancho) y seis más fracción (se refiere a la medida de lo largo).

Al realizar las mediciones del largo de la mesa, los maestros consideran que iterar una misma hoja los lleva a cometer errores en el momento de contar, por lo que deciden utilizar varios modelos de la unidad, así es que colocar varias hojas a lo largo de la mesa.

Debido a que están utilizando una unidad de superficie rectangular para medir la mesa, utilizan el largo de la unidad para medir el largo de la mesa y el ancho de la unidad para medir el ancho de la mesa. Al medir el largo y el ancho de la mesa usan en realidad unidades lineales distintas. En el resultado: "Dos más fracción… y seis más fracción…" La primera fracción se hace considerando el ancho de la hoja y la segunda, el largo de la misma.

Los maestros aplican la unidad 6 veces en el largo y utilizan el 2 como operador para decidir cuántas veces cabe la unidad en la superficie de la mesa. En este caso, la fórmula "largo por ancho" funciona pero no la utilizan considerando las longitudes que están en juego. Para que eso fuera posible, la propuesta de actualización tendría que ofrecer una situación que llevara a los maestros a plantearse la diferencia de utilizar rectángulos en lugar de cuadrados para medir una superficie.

Esto es, la situación didáctica que se ofrece tiene un buen inicio en tanto que sugiere el empleo de unidades rectangulares para medir la superficie de la mesa, pero no logra cuestionar a los maestros acerca de las implicaciones que esto trae consigo y sobre la conveniencia de utilizar las unidades cuadradas para determinar las fracciones de la unidad, considerando la misma longitud en lo largo y en lo ancho.

Los maestros en ningún momento reparan en el hecho de que las fracciones provienen de longitudes diferentes, en cuanto en su razonamiento incorporan las relaciones numéricas, ambas longitudes (el largo y el ancho) son tratadas por igual. Es así que el trabajo sobre la medición de superficie se transforma en cuantificación de longitudes hasta, finalmente, reducirse a un problema aritmético.

Así podemos ver que si los maestros conocen las medidas del largo y del ancho, piensan "automáticamente" en el uso de la fórmula "largo por ancho" para calcular la superficie de la mesa y, con el fin de optimizar las condiciones para ofrecer un resultado más exacto, los maestros buscan precisar datos.

Ante Los datos: "Dos más fracción y seis más fracción", los maestros de este equipo no cuestionan las unidades enteras, centran su atención más bien, en buscar la precisión de las fracciones utilizando para ello un recurso que el maestro Ernesto descubrió en una lección del libro de texto de 4º. ("En partes iguales y sin doblar" SEP 1994f, 18) y que consiste en dividir la hoja blanca en segmentos iguales utilizando para ello los renglones de una hoja rayada o cuadriculada.

Con ese recurso, estos maestros precisan que el ancho de la mesa mide $2\frac{10}{17}$ el largo mide $6\frac{15}{18}$, datos que utilizan para calcular el área de la superficie de la mesa aunque sin mencionar la fórmula. Los maestros hacen una multiplicación de fracciones sin reflexionar sobre el resultado que arroja tal multiplicación pues al colocar varias hojas sobre la mesa utilizaron 12 hojas completas, mientras que al realizar el cálculo numérico el resultado es mayor que 17.

Los maestros ya tienen las medidas de $2\frac{10}{17}$ de ancho y $6\frac{15}{18}$ de largo, Rosa multiplica:

$$2\frac{10}{17} \times 6\frac{15}{18}$$

$$\frac{44}{17} \times \frac{123}{18} \text{ igual a } 17\frac{6}{10} \text{ ó } 17\frac{68}{100}$$

Ernesto escribe como resultado en su cuaderno de trabajo

$$17 + \frac{17}{25}$$

Al realizar la operación, Rosa convierte correctamente los números mixtos en fracciones comunes:

$$2\frac{10}{17} \text{ X } 6\frac{15}{18} \qquad \frac{44}{17} \text{ X } \frac{123}{18}$$

$$\begin{array}{r|l} & 17.68 \\ \hline 306 & 5412 \\ & 2352 \\ & \;\;2100 \\ & \;\;\;\;2640 \end{array}$$

Y encuentra el producto de las fracciones multiplicando numerador por numerador (44 x 123 = 5412) y denominador por denominador (17 x 18 = 306). Efectuada la multiplicación, Rosa intenta convertir la fracción obtenida $\frac{5412}{306}$ en un número mixto, y su afán por conseguir una mayor precisión del resultado, la lleva a realizar una aproximación decimal de la fracción obteniendo como resultado: $17\frac{6}{10}$ ó $17\frac{68}{100}$.

La operación que realiza Rosa es así:

El ejemplo muestra nuevamente cómo una actividad "práctica" de medición que consiste en comparar una superficie con otra que hace las veces de unidad, se transforma en un ejercicio de multiplicación de fracciones. La medición se pierde ante el surgimiento de las relaciones numéricas que invitan a la ejercitación de operaciones que, aunque llevadas a buen término, no tienen relación con la magnitud que les dio origen.

Los maestros al iterar las hojas sobre la mesa utilizaron 12 unidades completas, y los cálculos numéricos realizados les llevaron a obtener como resultado 17 + $\frac{17}{25}$ el hecho de que no hayan surgido comentarios acerca de la diferencia de resultados, puede ser un indicador de la ausencia de significado con la que se ha tratado la matemática escolar.

En la propuesta de actualización hay un buen intento de propiciar la iteración de la unidad de superficie sobre la mesa pero en tanto que no problematiza a los maestros acerca de las implicaciones que tiene usar una unidad rectangular en lugar de una unidad cuadrada, los procedimientos que siguen los maestros para medir la superficie de la mesa tienden más hacia el cálculo numérico y la búsqueda de la exactitud que a la iteración de la unidad y a las compensaciones para cubrir el área en estudio.

Cabe destacar además, que el afán de los maestros por ofrecer un resultado lo más preciso posible, los lleva a establecer fracciones de la unidad muy sofisticadas, improbables de tratar cotidianamente pues $\frac{17}{25}$ de una hoja tamaño carta no tiene referente con alguna situación posible de la vida diaria.

Los maestros establecen fracciones más usuales cuando utilizan una credencial para medir la misma superficie que midieron con la hoja. En este caso son 8 $\frac{1}{3}$ de ancho por 27 $\frac{1}{2}$ de largo; prevalece, sin embargo, la reducción de la medición a ejercicios aritméticos pues buscan fracciones equivalentes para facilitar la realización de la multiplicación de los números fraccionarios.

> (Obs. 34)
> La actividad consiste en medir la superficie de la mesa utilizando hojas, sobres o credenciales. En este equipo, los maestros utilizan primero, credenciales.

Caro: Ocho enteros y un tercio de ancho y veintisiete enteros y un medio de largo (estiman aproximadamente las fracciones).

Ernesto: Ponle en medios $\frac{2}{6}$ (está pensando en convertir los tercios de los ocho enteros en sextos para obtener equivalencias).

Caro: (escribe $8\frac{2}{6}$ x $27\frac{3}{6}$). Ya, lo sumamos.

Ernesto: Los debes de multiplicar (se refiere a las fracciones $\frac{2}{6}$ y $\frac{3}{6}$).
Caro: Yo los sumé.

En primer lugar, cabe destacar la solución propuesta por Caro quien pese a la intervención de Ernesto, mantiene su propuesta de resolver la situación con una suma de fracciones. Tal vez Caro supone que la solución es a través de una suma porque ya se ocuparon de convertir los medios y los tercios a sextos para tener fracciones con el mismo denominador.

Los maestros multiplican por separado los enteros y las fracciones:
8 X 27 = 216

$\frac{2}{6} \times \frac{3}{6} = \frac{6}{36}$

Luego, usan otro procedimiento, convertir ambos factores a sextos y multiplicar, esperan obtener el mismo resultado
Ernesto: Transformemos todos a sextos:

$8\frac{2}{6} = \frac{50}{6}$; $27\frac{3}{6} = \frac{165}{6}$

$\frac{50}{6} \times \frac{165}{6} = \frac{8250}{36} = 229.16$

Los maestros se sorprenden de que no coinciden los resultados.
Caro: Nos equivocamos.
Ernesto pide prestada una calculadora que opera con fracciones.

Hay que señalar que para realizar la multiplicación, los maestros transfieren el algoritmo de la suma de números mixtos al algoritmo de la multiplicación con números mixtos, por esta razón buscan las fracciones equivalentes de un tercio y de un medio en sextos para operar con denominadores iguales. Convierten $8\frac{1}{3}$ en $8\frac{2}{6}$ y $27\frac{1}{2}$ en $27\frac{3}{6}$.

Con estos datos los maestros proceden de dos maneras:

Primero, multiplican los enteros: 8 x 27 igual a 216 y realizan la multiplicación de las fracciones $\frac{2}{6}$ x $\frac{3}{6}$ de donde obtienen $\frac{6}{36}$.

Entonces suman 216 + $\frac{6}{36}$ igual a $216 \frac{1}{6}$.

Sólo que en esta forma de proceder, los maestros no consideran la distributividad de la multiplicación respecto a la suma. La operación: $8 \frac{2}{6}$ por $27 \frac{3}{6}$ debe ser planteada (8 + $\frac{2}{6}$) X (27 + $\frac{3}{6}$), por tanto, a los maestros les falta multiplicar el 8 x $\frac{3}{6}$, y el $\frac{2}{6}$ x 27.

El resultado correcto debería ser: 216 más $\frac{24}{6}$ + $\frac{54}{6}$ + $\frac{6}{36}$ = $229 \frac{1}{6}$.

Este procedimiento empleado por los maestros es entonces, un recurso aritmético incompleto.

Los maestros de este equipo intentan un segundo procedimiento: Ernesto propone la conversión de los números mixtos en fracciones comunes y obtienen lo siguiente:

$$8 \frac{2}{6} \times 27 \frac{3}{6}$$

$$\frac{50}{6} \times \frac{165}{6} = \frac{8250}{36} = 229.16$$

El resultado final es $229 \frac{6}{36}$ o bien, $229 \frac{1}{6}$, hecho que les sorprende pues es distinto al que obtuvieron primero: $216 \frac{1}{6}$ que como ya vimos es el resultado de una multiplicación incompleta.

La diferencia de los resultados, motiva a los maestros a utilizar una calculadora que opere con fracciones, con el fin de comprobar sus cálculos numéricos. Aparece entonces la calculadora como instrumento que permite validar “sin error” un resultado y por ello gana una incuestionable seguridad en el momento de realizar las operaciones aritméticas.

Los maestros reconocen que “se equivocaron” pero no analizan el origen del error que consistió primero, en suponer que la multiplicación de fracciones podría tratarse como suma de fracciones. Segundo, porque realizan una multiplicación de fracciones sin considerar la distributividad con respecto a la suma. El “error” lo consideran una falla en los cálculos y no una distorsión del procedimiento.

Los maestros, como los niños, han aprendido los algoritmos sin que medie la construcción del significado de la operación correspondiente. Como consecuencia, tanto éstos como aquéllos, saltan pasos, invierten la secuencia o modifican el algoritmo.

La aparición de la calculadora como instrumento que permite validar aquello que los maestros no han logrado, es también evidencia de que los maestros, frente a una situación que suscita sus dudas, utilizan los recursos que tienen a la mano para resolver el conflicto planteado. Como todos reconocen su falta de habilidad numérica, se refugian en una tecnología que les asegura remediar esta falta de habilidad. Esto resulta importante para el diseño de situaciones didácticas: si el maestro enfrenta situaciones que le causen dudas sobre aquello que sabe, busca recursos que le permitan solucionar los problemas inmediatos.

2.3 Las Matemáticas, ciencia exacta. El empleo de unidades.

Con base en las ideas expresadas por algunos maestros durante las actividades del taller, ha podido corroborarse que la matemática en la primaria, es solo aritmética y ésta, según algunos maestros, constituye la herramienta para llegar a resultados precisos.

A través de una actividad que promueve la medición utilizando unidades lineales arbitrarias (Anexo 1 Act. 2, “Tres cuartas y una goma”), podemos documentar la creencia de los maestros acerca de que la ejercitación numérica es síntoma de cientificidad y exactitud.

Actividad 2

Tres cuartas y una goma

Lo que se mide en un objeto no es el objeto mismo, sino alguna de sus propiedades o cualidades.

1. Mida, con un lápiz, el ancho de la mesa donde está trabajando. Después, repita la medición con los siguientes objetos: una goma de borrar, la tira de cartoncillo, el cordón y la distancia entre los extremos de sus dedos pulgar y meñique con la mano extendida, es decir, su cuarta. Anote las medidas en la siguiente tabla.

Material:
- Una tira de cartoncillo de 1 cm de largo.
- Un cordón de 40 cm de largo.

Unidades de medida	lápiz	goma	tira	cordón	cuarta
Medidas					

¿Hay números iguales en la tabla? ____________
Si los hay, ¿a qué se debe ? ____________
¿Sólo hay números diferentes? ____________
¿A qué se debe que resulten números diferentes? ____________

2. El hecho de que haya distintos números en el renglón que dice "medidas", ¿significa que el ancho de la mesa tiene varias medidas diferentes? ____________
¿Por qué? ____________

3. En la columna donde dice lápiz, Juan anotó 5 y en la columna donde dice goma, anotó 15. Describa una relación entre las longitudes del lápiz y la goma que utilizó Juan. Hágalo de tres maneras diferentes.

Primera: ____________
Segunda: ____________
Tercera: ____________

¿Qué es más, 0 + 1 + 2 + 3 o 0 x 1 x 2 x 3?

4. Al medir con su lápiz, Pedro encontró que el ancho de la mesa mide 6 lápices. Además observó que:

1 lápiz = 3 gomas   1 lápiz = $1 + \frac{1}{4}$ tiras
1 lápiz = $\frac{1}{2}$ cordón   1 lápiz = $\frac{3}{4}$ de cuarta

(Obs. 33)
L: ¿Quién quiere comentar sus dificultades para encontrar la equivalencia entre la goma y la tira ?... a ver, Javier.
Javier: Nosotros vimos primero que la goma no cabe 3 veces en la tira, tenía que ser más de un tercio. Luego hicimos operaciones (con la calculadora) en centésimos hasta milésimos… (Después) medimos la goma y la tira, dividimos exactamente la tira en tercios y la goma quedaba en medio de un medio y un tercio y llegamos a la conclusión que era $\frac{5}{12}$ aproximadamente (la medida de la goma en la tira).
Luis: Es exacto.
L: ¿Por qué?
Luis: Porque lo comprobamos aritméticamente.

L: A ver chequen.
Javier: La goma mide 6.6 centímetros.

Los maestros, en este caso, encuentran las respuestas estableciendo comparaciones numéricas y no haciendo la iteración de la unidad goma sobre las otras longitudes. Es probable que esta tendencia esté propiciada también por los datos que establece la actividad. Por ejemplo, establecer la relación entre el cordón y la tira es posible porque la tira mide 16 centímetros y el cordón 40 centímetros por tanto, al conmensurar la tira sobre el cordón se obtienen 2 tiras y la mitad de otra.

En el caso de la conmensuración de la unidad "goma" sobre las longitudes del cordón, la cuarta y la tira, al actividad se complejiza porque la unidad no cabe un número exacto de veces sobre las longitudes propuestas, de ahí que los maestros privilegien un procedimiento numérico apoyados en la calculadora que les garantiza la "exactitud" de los cálculos necesarios para hallar las respuestas. Los maestros consideran además que su respuesta es la adecuada por ser el resultado de una "comprobación aritmética". Al parecer la "comprobación aritmética" según lo expresado por el maestro Ernesto, es signo de la exactitud característica de las actividades matemáticas.

Esta tendencia a relacionar las actividades de matemáticas con la búsqueda de resultados numéricos precisos, parece que puede ser relativizada si en el desarrollo de las actividades sobre medición se llama la atención sobre el empleo de los materiales propuestos que sirven como unidades de medida.

2.3.1 El cálculo numérico y su "comprobación"

En el ejemplo que se presenta a continuación, se puede observar una vez más la tendencia de los maestros a relacionar las actividades de matemáticas con el cálculo numérico utilizando las fórmulas que conocen de memoria.

(Obs. 36)

Actividad 7

Las ruedas del carrito

En esta actividad se analiza la relación entre una circunferencia y su radio.

1. Uno de los recursos que se utilizan para trazar una circunferencia es el que se muestra en el dibujo de abajo.

Material:

- $\frac{1}{4}$ de cartulina.

Si aumenta la longitud del radio, también aumenta la circunferencia. Si disminuye la longitud del radio, también disminuye la circunferencia.

¿Cree que si la longitud del radio aumenta al doble, suceda lo mismo con la longitud de la circunferencia?

____

¿Cómo lo podría comprobar?

____

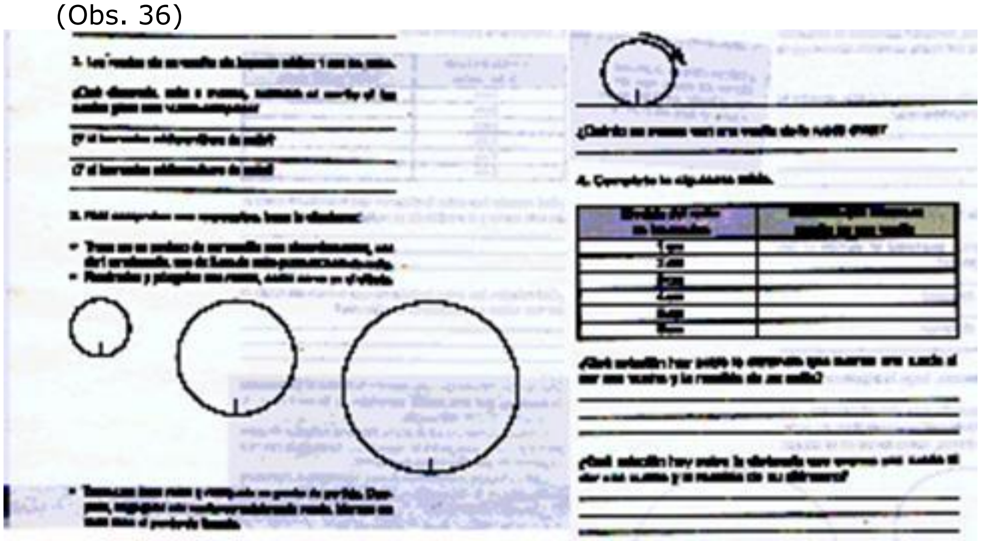
____

> Ernesto: Rosita, si el radio aumenta el doble, ¿Aumenta al doble la longitud de la circunferencia? (Karla asiente) ¿Cómo lo comprobaron?
> Rosa: Con la fórmula … después lo hicimos con los hilitos… este hilito es la circunferencia de éste, y éste hilito es el diámetro de éste, entonces si éste cabe 3 veces y un cachito en éste, tiene que dar lo mismo aquí, y es lo mismo.
> Karla: Luego los dos diámetros con los perímetros y sí es lo doble.
> Ernesto: (leyendo) “¿Cómo lo podrías comprobar?”, ¿Cómo lo dirías?
> Rosa: Utilizando un cordón para medir el diámetro lo relaciono con otro que sea igual a la circunferencia…
> Ernesto: ¿Para medirlo dijiste?
> Rosa: Ajá y relacionarlo con otro hilo que sea igual a la circunferencia, y esto se haría en circunferencias que tengan el doble.
> Caro: Si, con la fórmula da también, primero lo hicimos con la fórmula y luego lo hicimos con la circunferencia.

En esta actividad en particular, se propició que los maestros hicieran la “actividad práctica” para confirmar los resultados obtenidos por el uso de la fórmula “π por diámetro”. Los maestros saben que esta fórmula los conduciría al resultado esperado y aunque realizaron la “actividad práctica” lo hicieron con el fin de cumplir con las consignas de la propuesta de actualización.

Esto es muestra del arraigo de las concepciones de los docentes y del reto que implica proponer situaciones didácticas que contribuyan a su transformación.

(Obs. 36)



Ernesto (leyendo): "¿Qué distancia avanzará el carrito si las ruedas giran una vuelta completa?" Se supone que π es el número de veces que cabe el diámetro.
Rosa: Si.
Ernesto: Este tiene dos, avanza 6 centímetros y cachito ¿No? (Rosa asiente) ¿Qué distancia avanzará más o menos el carrito?
Rosa: A ver son dos centros de diámetro, y cabe 3 veces y un cachito.
Ernesto: …en alrededor….
Caro: 6 centímetros y 3 cachitos… 2 y 2 son cuatro… 4 por 3.1416, 12.56.
Ernesto: 6.28.
Caro: 6.2832.
Rosa: 6.28 quítenle el 16 (al valor de π).

Los maestros interpretan la instrucción y operan con la fórmula para calcular la medida de la circunferencia como resultado de multiplicar "π por diámetro". Por esta razón establecen que una circunferencia cuyo radio mide 1 centímetro, tiene de diámetro 2 centímetros: "Este tiene dos, avanza seis centímetros y cachito… "(porque 2 por 3.14 es 6.28), "A ver son dos centímetros de diámetro y cabe tres veces y un cachito…"

Caro calcula que si el diámetro mide 4 centímetros (o sea que tiene de radio 2 centímetros), la circunferencia mide 12.56, los cálculos numéricos derivan del empleo de la fórmula "π x d" (3.1416 x 6 = 12.5664). Lo mismo ocurre con la circunferencia cuyo radio mide 1 centímetro, (3.1416 x 2 = 6.2832) aunque en este caso, los maestros deciden considerar el valor de π en 3.14, de donde obtienen como medida de la circunferencia 6.28.

Los maestros enfrentan esta actividad "práctica" de la medición, utilizando primero la fórmula para conocer la medida de la circunferencia y una vez que conocen los resultados, realizan la actividad de hacer rodar las ruedas del carrito como comprobación de los resultados que antes obtuvieron con el procedimiento formal.

> Rosa: ¿Cuánto te salió con ésta Karla? (refiriéndose a la circunferencia de 2 centímetros de radio)
> Karla: Me salió 13… 12.Ernesto: 12.56.
> Karla: No, ahí me salió casi los 13, 12.9.
> Rosa: Es que se me mueve…
> Rosa: ¿Cuánto te salió en la de uno?
> Caro: 5.6.
> Rosa: A ver… 6.6.
> Ernesto: Bueno, cuando el radio de la rueda es un centímetro, avanza 6.28 cm
> Rosa: ¡Ayi no inventes.
> Ernesto: Científicamente comprobado, 6.28.

En los intentos por comprobar las respuestas haciendo rodar las circunferencias en una línea recta, los resultados varían de la siguiente manera:

> Si el radio es de 1 centímetro, avanza 5.6, 6.6.
> Si el radio es de 2 centímetros, avanza 13, 12.9, 12.8 y medio.
> Si el radio es de 3 centímetros, avanza 18.9.

Las explicaciones a esas variaciones son "Es que se me mueve (la circunferencia al rodar)"; "Se te resbaló por ahí"; "Me faltó, ya estaba llegando". Con el fin de evitar esas posibles variaciones, Ernesto asegura que el cálculo "científicamente comprobado" demuestra que la circunferencia, cuyo radio es de un centímetro, avanza 6.28 centímetros sobre la línea recta. Atribuye la "cientificidad" de este resultado al empleo de la fórmula "π por diámetro".

En este caso, los maestros realizan la actividad propuesta empleando la fórmula que les permite lograr un “resultado correcto” y realizan la tarea expresada en la consigna como posible “prueba empírica” del resultado obtenido. Parece que la tendencia a buscar un resultado incuestionable, no les permite considerar a la medición como un proceso de aproximaciones y así, en la concepción de los maestros de este estudio, usar la fórmula les garantiza una respuesta precisa, correcta y rápida y la situación física se puede incluso deformar para dar lugar a una “comprobación empírica” del resultado hallado previamente.

Los ejemplos antes presentados, dejan abierta la posibilidad de reflexionar sobre el tipo de actividades que bloquean los procedimientos formales que los maestros manejan mecánicamente. Es decir, sobre el diseño de situaciones para las cuales el empleo de fórmulas no sea en principio un recurso utilizable.

Hasta aquí se ha visto que los maestros tienden a la “aritmetización” de los procesos, el recurso a las fórmulas como medio para resolver problemas de medición.

En este sentido, hay coincidencia con otras experiencias reportadas (Ávila 1988, 1991ª y 1996). Sin embargo, lo que aquí cabe destacar es que en el proceso de aprendizaje en general, y de los procesos de actualización en particular, se pretende que los sujetos cognoscentes pasen de un nivel de conocimiento a otro.

Las actividades aquí reseñadas sólo propician que los maestros pongan en juego lo que ya saben y actúan de manera mecánica en la solución de algunos problemas de medición. Es decir, estas actividades no promueven la movilización de las ideas originales de los maestros. No obstante, en la propuesta de actualización, existen otras actividades que se ha visto que permiten a los maestros reconceptualizar alguno de sus saberes y emprender una nueva manera de promover la enseñanza de las matemáticas.

A continuación se presenta un ejemplo que muestra las aportaciones del grupo de maestros a una actividad propuesta, y otros, que ilustran las posibles reconceptualizaciones logradas por una maestra en relación con la medición, las matemáticas y su proceso de enseñanza.

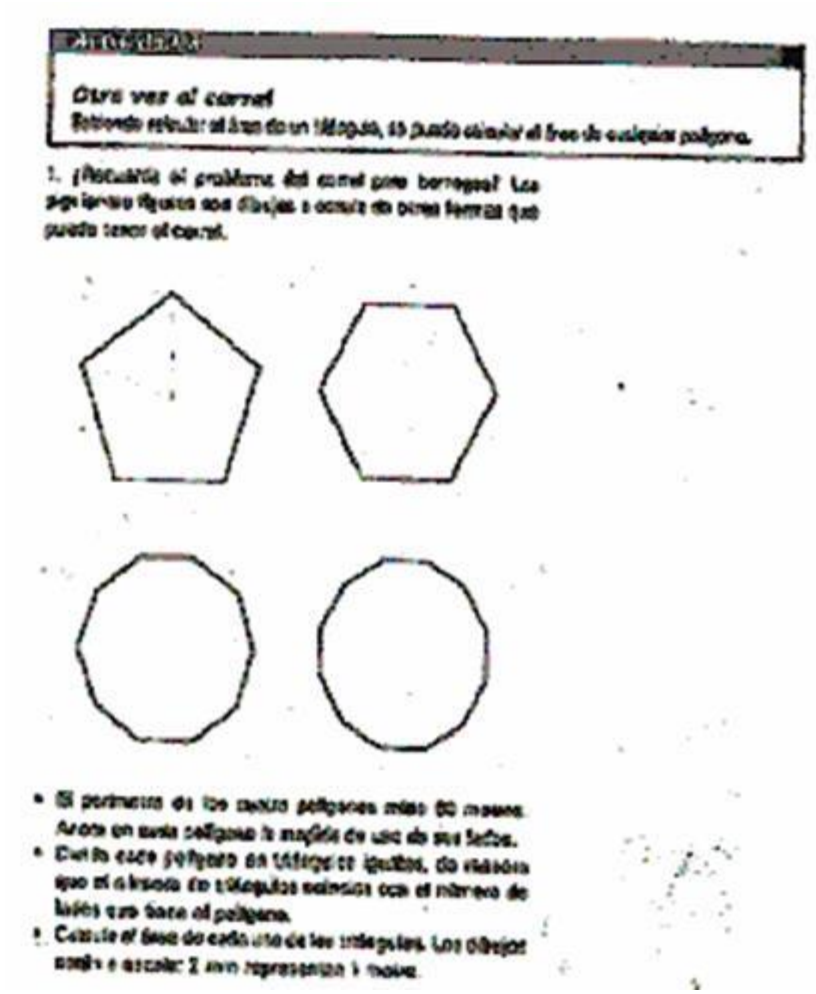
3. HACIA LA RECONCEPTUALIZACIÓN DE LA MEDICIÓN, LAS MATEMÁTICAS Y LA PRÁCTICA DOCENTE

Para el caso que nos ocupa, es importante señalar que, en tanto que se modifiquen ciertas creencias acerca de las matemáticas, la medición puede resultar una experiencia con mayor significación geométrica y estas reconceptualizaciones sobre la disciplina pueden desencadenar una práctica docente que considere con mayor énfasis los aprendizajes de los alumnos y sus procesos.

3.1 Otra manera de lograr la cuantificación de las magnitudes. Importancia de las consideraciones de orden geométrico

Los maestros, al realizar las actividades de la propuesta de actualización, han enfrentado situaciones que promueven la medición de áreas con recursos como la triangulación y la transformación de unas figuras en otras. Actividades destinadas a encontrar el significado de algunas fórmulas y que posibilitan que los lectores puedan, en algunos momentos, inventar sus propias fórmulas.

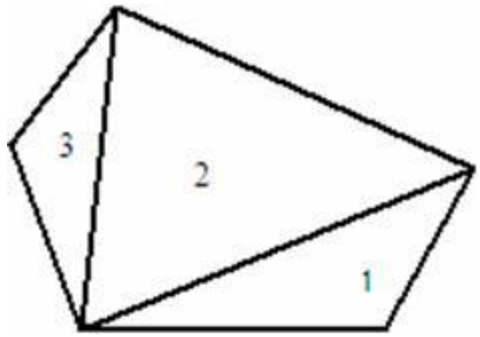
Los maestros, a través de estas actividades, descubren que hay diferentes maneras de encontrar el resultado de una medición.



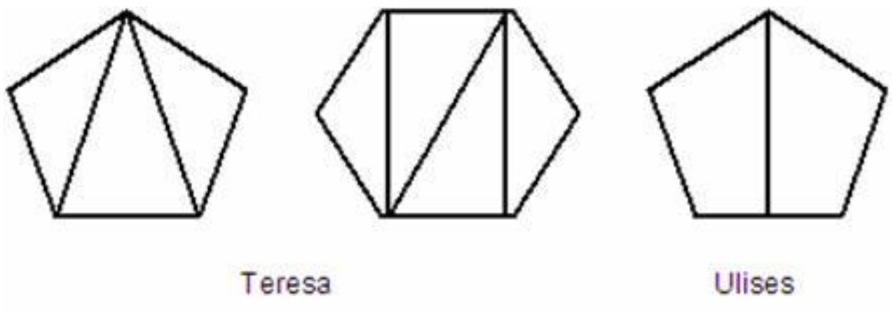
El propósito de la actividad es demostrar que, conociendo el área de un triángulo se puede calcular el área de cualquier polígono. Por tanto, se pretende que los maestros tracen triángulos convenientes en cada figura: "Divida cada polígono en triángulos iguales, de manera que el número de triángulos coincida con el número de lados que tiene el polígono".

No obstante, que se propone una "partición" geométrica que ha aparecido repetidamente en las lecciones de los libros de matemáticas diseñados en la década de los setentas (Cfr. SEP 1982c, Lección 26), paradójicamente los maestros no la evocan a fin de resolver la actividad planteada.

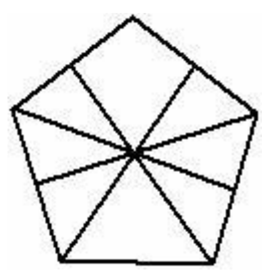
Es probable que estas "triangulaciones" deriven de una experiencia realizada en la misma propuesta, relacionada con la triangulación como un recurso para calcular el área de algunas figuras. Previamente en la actividad 6 (Cfr. Anexo 1.2 actv 6), los maestros han sido invitados a realizar triangulaciones similares a las que ellos han trazado en este caso, para calcular el área de una figura.



Al llevar a cabo la tarea de dividir el polígono en triángulos iguales, algunos maestros ignoran la consigna y resuelven la situación así:



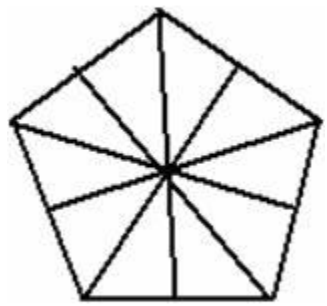
El trazo del maestro Ulises, bien puede ser la construcción inconclusa de los triángulos planteados a continuación por Luis y Javier, quienes interpretan la consigna como la creación de triángulos a partir de los lados de cada polígono.



Luis

La consigna dice: “Divida cada polígono en triángulos iguales, de manera que el número de triángulos coincida con el número de lados que tiene el polígono” y parece que los maestros Luis y Javier interpretan que cada lado del polígono sirve para trazar triángulos, pues marcan perpendiculares que van del punto medio de cada lado al vértice opuesto.

Para el caso del hexágono, Javier completa la creación de triángulos trazando rectas que van de vértice a vértice, además de las perpendiculares trazadas del punto medio de cada lado hacia el lado opuesto (apotemas).

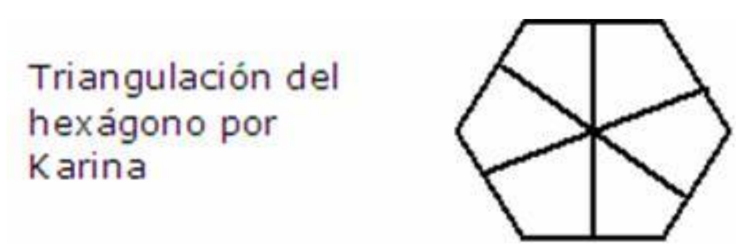


Javier

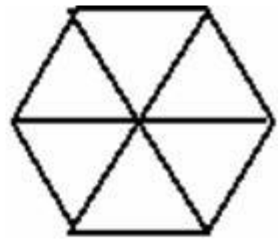
En estos casos, los maestros interpretan de manera distinta la consigna y trazan triángulos considerando cada lado de la figura sin lograr hacer coincidir el número de triángulos con el número de lados de las figuras de acuerdo con lo que se les solicita. Esto se debe, tal vez, al escaso tratamiento de los contenidos geométricos que ha caracterizado a la educación en nuestro país (Ávalos 1997), pues parece que los maestros no están habituados a interpretar las instrucciones relacionadas con el trazo de figuras geométricas.

Estos ejemplos muestran los intentos por construir triángulos dentro de cada polígono. Los intentos de atender a la consigna: "Divida cada polígono en triángulos iguales, de manera que el número de triángulos coincida con el número de lados que tiene el polígono", estuvieron lejos de apuntar hacia la respuesta esperada: la triangulación "clásica" de los polígonos que aunque seguramente los maestros han visto en su tránsito por la escuela, no les ha resultado significativa porque no han tenido oportunidad de dar significación geométrica a las figuras y a los trazos que conocen.

Por esta razón, los maestros atienden a la consigna de crear triángulos iguales de acuerdo con el número de lados de cada polígono, haciendo particiones como las que parecen a continuación.



Posteriormente, Karina descubre que lo que obtuvo no son triángulos y que para obtener seis triángulos iguales en el hexágono debe trazar líneas de "vértice a vértice".



Sería conveniente que la propuesta de actualización propiciara la reflexión sobre las condiciones necesarias para determinar el centro de polígonos cuyo número de lados es impar (pentágono, eptágono) y la determinación del centro en los polígonos cuyo número de lados es par (hexágono, octágono, decágono), donde el centro se puede determinar trazando perpendiculares desde cada vértice hacia su opuesto. Estas consideraciones de orden geométrico, en este caso, fueron propiciadas por el coordinador del grupo según se aprecia a continuación.

> L: ¿De qué otra manera pueden saber con exactitud si sus triángulos van a ser iguales?... ¿Qué pasó Darío?
> Darío: Uniendo los vértices pasando por el centro, y en el centro se juntan todos.
> L: ¿Y cómo le hacen en el pentágono?
> Darío: Sacando una mediatriz.
> L: ¿Sacando una mediatriz?
> Darío: Sí, para encontrar el centro, de ahí se une a los vértices
> L: ¿Por qué es importante encontrar el centro?
> Mtros: (Respuesta ininteligible).
> Ernesto: Porque es el centro del círculo. A ver explícanos eso.
> L: cómo es el centro del círculo si yo no veo ningún círculo.
> Darío: Ah! porque es una figura regular y los vértices tienen que estar en una circunferencia.

En este caso, el coordinador retoma los conocimientos de Darío sobre construcción geométrica: "(Para localizar el centro) ¿Cómo le hacen en el pentágono?" y lo encamina a que subraye la regularidad de los polígonos a partir de su inscripción en la circunferencia, circunstancia que posibilita la ubicación geométrica del centro en el caso de los polígonos cuyo número de lados es impar.

Estas experiencias fundadas en la percepción y la construcción geométrica hacen evidente la urgencia de conocer las concepciones de los maestros sobre estos aspectos. Al respecto también resulta oportuno destacar la función del coordinador del taller o del asesor de los círculos de estudio, pues debido a que la medición ha sido tratada al margen del razonamiento geométrico, algunas actividades de la propuesta de actualización corren el riesgo de no ser comprendidas suficientemente.

En todo caso, este estudio muestra la necesidad de abundar en el estudio de las concepciones de los maestros acerca de la medición pues ello sería información valiosa al momento de diseñar posibles "situaciones problemáticas" que lleven al maestro a reconceptualizar sus propios conocimientos y a reconocer, como se verá más tarde, posibles secuencias didácticas para tratar estos temas con sus alumnos.

Las vicisitudes durante la realización de la actividad sin embargo, no impidieron que los maestros ampliaran su perspectiva en cuanto a las formas diversas de calcular la superficie de los polígonos. De hecho, en cuanto los maestros "descubrieron" el contexto geométrico de la actividad, lograron entusiasmarse y "planear" posibles acciones con sus alumnos.

L: ¿Lo lees por favor?
Mariana: (Leyendo) "Como podrá observar conociendo el área de uno de los triángulos, basta con multiplicar por el número de triángulos para calcular el área del polígono"…
L: Ahora miren, ese es el recurso de la triangulación. Pero luego dice abajo, en el punto 2 (Leyendo) "Describa una fórmula que sintetice el procedimiento anterior" el área es igual a…
Ernesto: Base por altura.
Rosa: Base por altura del triángulo…
L: A ver, vamos a ver por acá.
Ernesto: ¿Yo? ¿La que yo escribí? Sale... (escribe en el pizarrón)

$A = \frac{bxa}{2xn}$ (*n* = número de lados de la figura)

Ernesto: Base por altura entre dos es básicamente para encontrar el área de cada triángulo que se formó en la figura, "n" seria el número de lados que tiene la figura, o el número de triángulos que se formó al interior de esa figura.
L: ¿Alguien tiene otras? Una que no sea la convencional.
Darío: Yo tengo una parecida (y pasa a escribir en pizarrón)

$A = \frac{bxh}{2} \; x \; n$ _____

Javier: “*n*” sería el número de triángulos de la figura.
El coordinador escribe en el pizarrón.

$$A = \frac{Pxa}{2}$$

L: (…) la letra “*P*” es el perímetro del polígono y la letra “*a*” es la apotema, o sea la altura del triángulo, aquí dice:
“Calcule el área de las siguientes figuras, utilizando las dos fórmulas…

La fórmula convencional para calcular el área de cualquier polígono aparece así como un recurso más en medio de otros. A partir de consideraciones geométricas, los maestros han tenido la posibilidad de crear sus propios recursos; sin invalidar éstos, el coordinador ofrece el procedimiento usual para calcular el área de los polígonos e invita a los maestros a que reflexionen acerca de los procedimientos implicados en esa fórmula.

Parece que, en tanto que se aclaran las relaciones geométricas entre las figuras, los maestros pueden entender que existe más de un procedimiento para cuantificar una magnitud. Y el entusiasmo por hacer de la medición una actividad más geométrica les lleva a hacer consideraciones que atañen a la organización escolar:

Conversación en el equipo 2
Ernesto: Voy a tener 5° grado, o sea voy a tratar de que mis chavos hagan esto.
Karla: Hay otro aspecto, olvídate de utilizar la fórmula.
Rosa: Voy a cambiar mi grupo, fíjate, estoy pensando seriamente en cambiar mi grupo, voy a pedir 5° grado.
Karla: 4°
Rosa: No 5°
Ernesto: ¿Por qué vas a pedir 5°?
Rosa: Porque a ver qué puedo hacer en dos años.
Ernesto: ¿Dos años? ¿También tienes 4°?
Rosa: O sea que voy a pedir 5°, para 5° y 6°
Karla: ¿Y serán los mismos niños? ¿Crees que te dejen los mismos niños?
Rosa: Sí

El hecho de que los maestros reconceptualicen las tareas matemáticas y su función como docentes implica, en cierta medida, la reorganización de los tiempos de trabajo. Parece que la maestra Rosa empieza a vislumbrar que la tarea de hacer consideraciones de orden geométrico al realizar actividades de medición le implican procesos más largos y por ello, planea trabajar con su grupo durante dos ciclos escolares.

Los posibles cambios en las concepciones de los maestros y en su práctica docente, ocurren luego de un proceso largo. Se sabe además, que los cambios logrados por los procesos de actualización dependen, entre otras cosas, de las expectativas de los maestros frente al proceso, de sus experiencias previas y de su trayectoria personal (Block et al.1995b, 26).

3.2 Una nueva manera de organizar las clases. El caso de la maestra Karina

La parte final de este trabajo está encaminada a mostrar la actuación docente de una maestra que participo en el curso–taller y que muestra algunas modificaciones en sus concepciones acerca de la medición, de las matemáticas y de las maneras de proporcionar su aprendizaje.

Es importante mencionar que se trata de una maestra con tres años de experiencia frente a grupo, que tenia especial interés en conocer los materiales de apoyo para la enseñanza de las matemáticas y de saber cómo organizar las actividades de los alumnos de cuarto grado, durante las clases de matemáticas. Todo esto, en virtud de que, al egresar de la Normal, fue incorporada a una escuela cuya organización era el trabajo por asignaturas en sexto grado. Esta circunstancia hizo que la maestra se "especializara" en la enseñanza de la historia y que fuera responsable de tratarla con los alumnos de tres grupos de sexto. Al ser nombrada responsable de un cuarto grado, donde debía impartir todas las asignaturas, la maestra encontró en el curso–taller, una manera de recuperar sus "certezas" como docente para impartir las clases de matemáticas.

A continuación presentamos a título de ejemplo, la reorganización de la enseñanza emprendida por la maestra Karina y que muestra posibles modificaciones en sus concepciones acerca de la medición.

Al iniciar el tratamiento de la unidad sobre medición, la maestra Karina:

1. Aunque sin hacerlo explicito, consideraba que la distinción entre perímetro y área se favorecía con acciones como representarlos con diferentes colores y trazándolos en el patio o en el cuaderno utilizando diversos materiales (Véase Obs.34).

2. Consideraba que sus alumnos confundían el perímetro y el área de las figuras porque al ofrecer el resultado de sus cálculos numéricos, utilizaban indistintamente unidades lineales o cuadradas (Véase Obs. 34).

Creencias que probablemente han sido superadas según dejan ver los siguientes ejemplos.

A diferencia de otros proyectos de investigación cuyo diseño ha permitido realizar observaciones posteriores en el aula de maestros participantes en el taller de actualización (Block et al. 1995b), en esta investigación, solo fue posible solicitar a los maestros que una vez concluidas las sesiones del taller *La enseñanza de las matemáticas en la escuela*, diseñaran "situaciones didácticas" de los temas que estuvieran tratando con su grupo, o que fueran de su preferencia.

Es así que el estudio sobre las formas de actuación de los docentes en su grupo, sólo ha sido posible a través de sus reportes personales y de muestras de los trabajos realizados por sus alumnos. Son "huellas indirectas" (Robert y Robinet 1989ª y 1989b) que nos acercan a identificar posibles transformaciones de las concepciones de los maestros sobre la matemática en general, y sobre las acciones que propician su aprendizaje.

Una manera posible de identificar las "concepciones transformadas" de los maestros puede ser el análisis de la planeación de sus clases y ejemplos de los trabajos realizados por sus alumnos.

El trabajo al que nos referiremos a continuación pertenece a la maestra Karina, quien (como ya se ha dicho(era responsable de un cuarto grado y que adelanta algunas características de sus alumnos afirmando que "los niños durante el ciclo escolar anterior no utilizaron el libro de matemáticas... y hay alumnos que suelen faltar continuamente…". Seguido de lo cual, expone la planeación de cinco "secuencias didácticas".

Relacionados con la medición, la maestra trata temas sobre las magnitudes y sobre el empleo de unidades de medida, el primero lo vincula con el estudio de las variaciones entre el perímetro y área, como introducción al cálculo posterior de estas magnitudes; el segundo, implica la ejercitación de mediciones con centímetros y sus equivalencias con los milímetros como dos formas posibles de expresar un resultado.

En ambos casos, la maestra ha incorporado a su práctica docente algunos recursos como el geoplano y el tangram; ha considerado las lecciones de los libros de texto como corolario de una serie de actividades que retoma de los ficheros y de los juegos matemáticos y reconoce que un acercamiento a las clases de matemáticas, enriquecido con actividades que no se limitan a un tratamiento numérico de esta disciplina, le ha permitido concluir que "si realmente lleváramos (los maestros) un trabajo así, ¡qué diferente sería el nivel educativo de los mexicanos!".

El hecho de que la maestra retome el empleo de materiales de apoyo como el geoplano y el tangram nos permite suponer que si los maestros descubren "materiales novedosos", los incorporan a su práctica docente, pero en el caso de la maestra Karina además, según puede apreciarse en los siguientes ejercicios, las actividades están acompañadas de cuestionamientos que buscan la reflexión por parte de sus alumnos. "Analiza la relación entre el tamaño de la figura y el número de veces que cabe en el cuadrado" (actividad tomada del Fichero de matemáticas SEP 1994g 16).

El uso que hace la maestra Karina de los materiales, nos recuerda la caracterización de Thompson (1992) acerca del tercer nivel de desarrollo en las concepciones de los maestros, donde los maestros conciben la enseñanza como investigación y descubrimiento; utilizan representaciones gráficas y físicas como contextos en los que los alumnos pueden realizar tareas cuidadosamente diseñadas (Thompson 1992 citado por Flores et al. 1994). En el desempeño de estas acciones, los materiales diseñados para la enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria juegan un papel fundamental actualmente.

No buscamos ubicar a la maestra Karina en este tercer nivel, pues ello seria prematuro, toda vez que se trata del análisis de una secuencia desarrollada para cumplir con un requisito impuesto por este proceso de investigación, y no tenemos indicios de que esta forma de proceder corresponda a su práctica docente cotidiana. Por ello nos limitaremos a hacer el análisis de las "secuencias didácticas" relacionadas con los temas de medición, aventurando la hipótesis de que se trata de evidencias de "concepciones transformadas" que probablemente sean consistentes y aparezcan en futuras acciones docentes.

3.2.1 Acerca de las variaciones entre perímetro y área. Experiencias en un cuarto grado de primaria

Antes de hacer la exposición de resultados obtenidos por Karina, conviene dejar apuntado que las variaciones entre el perímetro y el área son tratadas en la propuesta de actualización *La enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria* (Block (coord) et al. 1995a) en una actividad en la que se logra establecer una secuencia didáctica que permite a los maestros reconceptualizar la creencia de que la figura de mayor perímetro es necesariamente la de mayor área (Ver Anexo 2 Actividad 5) y es sin duda, resultado de trabajos experimentales previos (Sáiz y Fuenlabrada 1981, Sáiz y Fregona 1982, Fuenlabrada 1984).

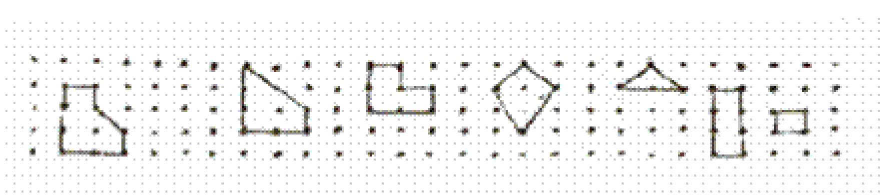
Esta secuencia didáctica logró impactar las creencias iniciales de algunos maestros y muestra un logro importante de la propuesta de actualización puesto que además de modificar una "idea errónea", encamina hacia la reorganización de la enseñanza según se documenta a continuación.

En el trabajo de la maestra Karina, la planeación del tema "Formación y dibujo de figuras de igual perímetro y diferente área y viceversa" expresa lo siguiente: "El presente tema tiene un doble propósito: introducir la noción de perímetro y área y examinar aunque brevemente que a figuras de igual perímetro no corresponden necesariamente áreas iguales y viceversa".

Las variaciones entre perímetro y área es, sin duda, uno de los temas que más ha impactado la experiencia docente de los maestros, como dijimos antes, Karina trata este tema con sus alumnos y organiza las actividades considerando primero la construcción de figuras en el geoplano, utiliza posteriormente actividades del Fichero de 5º. "con adaptaciones" y después, la lección del libro de texto relacionada con este tema: "Hilaza para el contorno". Finalmente, promueve la superposición de figuras y la transformación de unas figuras en otras, utilizando al tangram.

Así, parece que, en tanto que la maestra Karina experimentó una secuencia didáctica encaminada a reconocer las variaciones entre perímetro y área, remodela sus ideas iniciales acerca de estos temas y de sus formas de enseñanza. El reporte que hace sobre las secuencias didácticas implementadas consta de un informe personal, un archivo de los materiales utilizados, todas las respuestas de sus alumnos incluyendo fotocopia de las lecciones de los libros de texto y fotografías de sus alumnos realizando las actividades que reporta.

Los ejercicios en el geoplano son una seria de actividades en el siguiente orden.

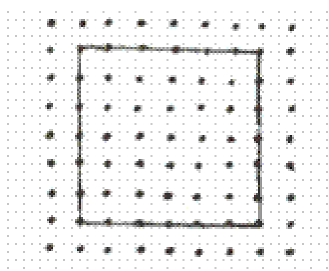


Primero se trata de cubrir el área de un cuadrado con unidades del tipo

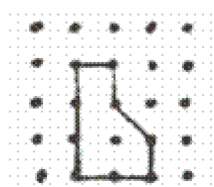
La maestra promueve, en primer lugar, el empleo de unidades poco usuales para cubrir una superficie y hasta el final sugiere el empleo de un cuadrito. En este ejercicio, se deja planteada la posibilidad de hallar un resultado aproximado y se solicita hacer el análisis de las mediciones consignadas en una tabla.

ACTIVIDAD 1.1 NOMBRE ___________________________

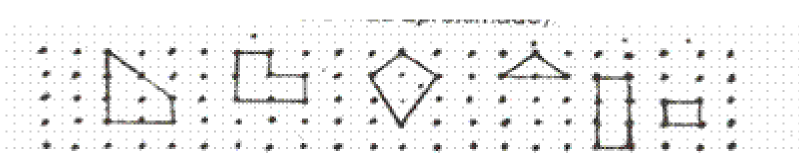
Construye este cuadrado en tu geoplano



Cúbrelo, sin que queden huecos, con figuras como ésta:



Ahora inténtalo con cada una de las siguientes figuras y registra en la tabla el número de figuras necesario para cubrir todo el cuadrado (si no es posible cubrirlo totalmente coloca el número más aproximado).



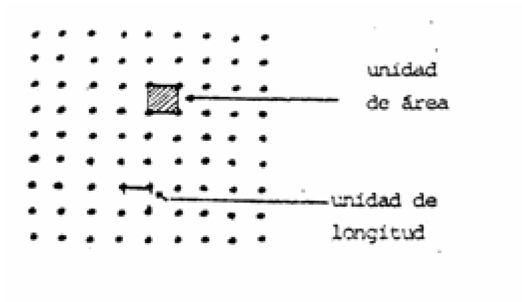
Figuras							
No. de figuras necesario	8	8	12	8	36	12	36

Analiza la relación entre el tamaño de la figura y el número de veces que cabe en el cuadrado.

La pregunta final está encaminada a que sean los niños quienes establezcan las relacio0nes que se ilustran y la escriban para que las escriban a manera de conclusión.

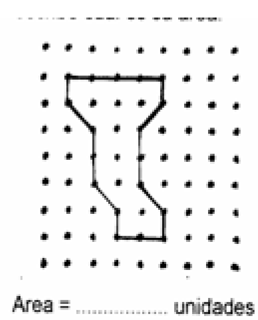
En segundo lugar, la maestra sugiere la construcción de otras figuras cuya área debe medirse considerando un cuadrito como unidad de medida, En este ejercicio también se aclara cuál es la unidad de longitud y la unidad de área.

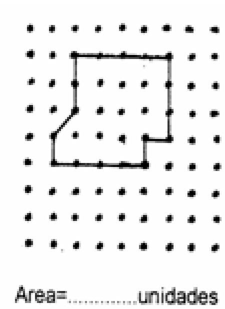
ACTIVIDAD 1.2 NOMBRE ________________________
EXPLICACIÓN



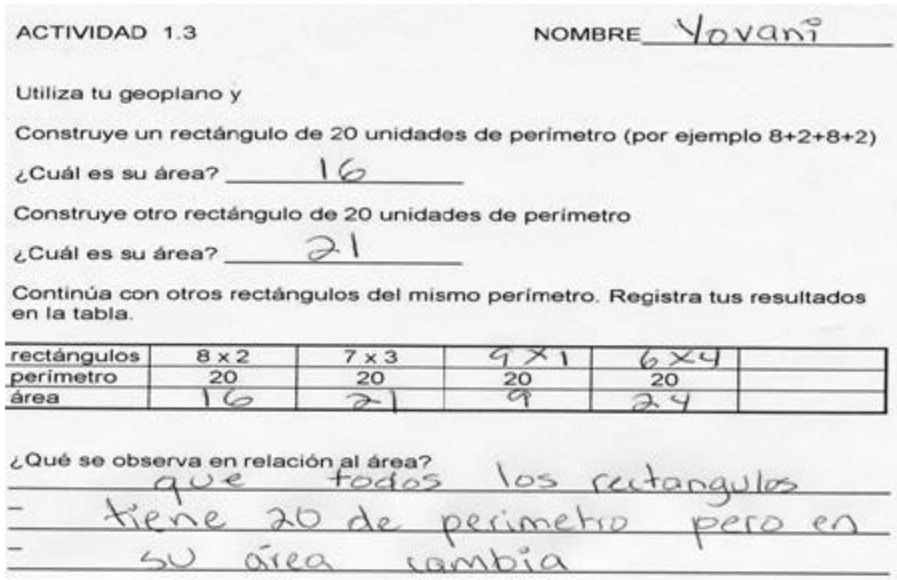
Nota: Tomaremos a la longitud de un lado de un cuadrito
del geoplano como unidad de longitud y a la superficie de un cuadrito
como unidad de área

Construye estas figuras en tu geoplano y de acuerdo a la anterior explicación escribe cuál es su área.





Las variaciones entre perímetro y área se constatan a través de la construcción de distintos rectángulos que tengan 20 unidades de perímetro. Planteado el perímetro constante, se invita a los alumnos a que expliquen sus observaciones a partir de la información que ofrece la tabla donde registraron sus datos.


ACTIVIDAD 1.3 NOMBRE Yovani

Utiliza tu geoplano y

Construye un rectángulo de 20 unidades de perímetro (por ejemplo 8+2+8+2)

¿Cuál es su área? 16

Construye otro rectángulo de 20 unidades de perímetro

¿Cuál es su área? 21

Continúa con otros rectángulos del mismo perímetro. Registra tus resultados en la tabla.

rectángulos	8 x 2	7 x 3	9 x 1	6 x 4	
perímetro	20	20	20	20	
área	16	21	9	24	

¿Qué se observa en relación al área? que todos los rectangulos tiene 20 de perimetro pero en su área cambia

En los trabajos de los niños ha podido verificarse que, ante la pregunta "Qué se observa en relación al área?, la mayoría responde que "el perímetro no es igual que el área" tratan de explicar que, aunque el perímetro siempre mide 20, eso no garantiza que el área permanezca igual.

Respuestas más claras sobre estas variaciones son: "Qué todos los rectángulos tiene 20 de perímetro pero en su área cambia"; "Pasa que aunque tengan igual perímetro, no es la misma área por el tamaño" y "Qué el área cambia pero el perímetro no". Parece que a partir de estas actividades, los alumnos de este grupo saben que el área de una figura no depende de la medida de su perímetro.

La maestra por su parte, en su informe personal, reconoce que: "… el geoplano ha inquietado (despertado) el interés de los educandos de una forma especial… es sorprendente observar la creatividad que tienen al acomodar de distintas formas las figuras…"

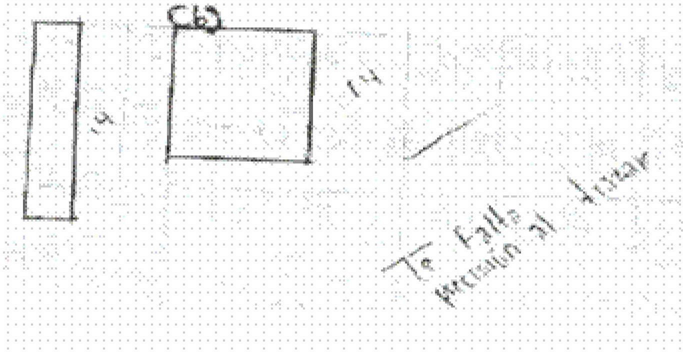
En la actividad 4 del geoplano, se propone la construcción de figuras que hacen evidente las variaciones entre el perímetro y el área. Hay constancia de estas variaciones creadas por los niños porque la maestra solicitó, además la reproducción de alguno de estos ejercicios en hojas milimétricas.

ACTIVIDAD 1.4 NOMBRE_______________________

Construye en tu geoplano 2 figuras en cada uno de los casos

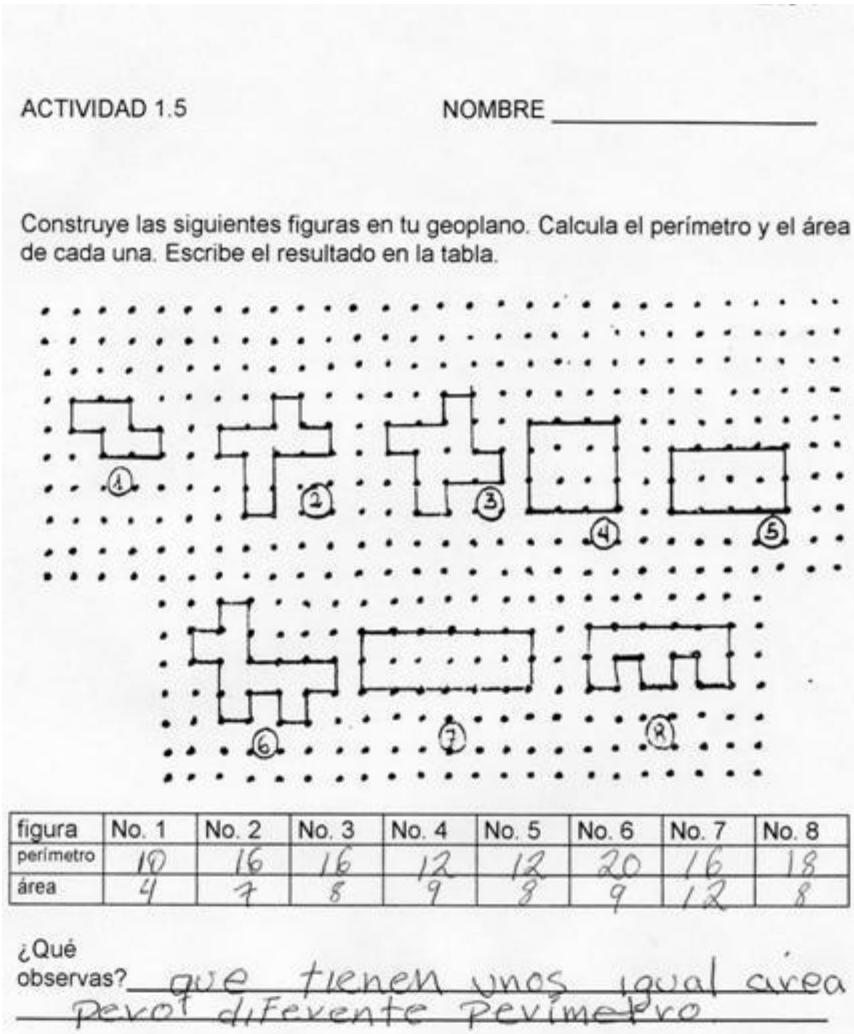
a) Con igual área y diferente perímetro
b) Con igual perímetro y diferente área
c) Una con mayor perímetro y mayor área que la otra

d) Una con mayor perímetro y menor área que la otra



Reproduce en una hoja milimétrica las figuras del inciso que más te hayan agradado.

La actividad siguiente está destinada a medir el perímetro y el área de algunas figuras propuestas gráficamente y que cada niño debía reproducir en el geoplano para luego explicar sus observaciones (Es parte inicial de la ficha 16 del fichero de matemáticas SEP 1994g).



ACTIVIDAD 1.5 NOMBRE ____________________

Construye las siguientes figuras en tu geoplano. Calcula el perímetro y el área de cada una. Escribe el resultado en la tabla.

figura	No. 1	No. 2	No. 3	No. 4	No. 5	No. 6	No. 7	No. 8
perímetro	10	16	16	12	12	20	16	18
área	4	7	8	9	8	9	12	8

¿Qué observas? que tienen unos igual area pero diferente perimetro.

Las conclusiones de los niños versan sobre las variaciones entre el perímetro y el área de las figuras propuestas. Ante la pregunta "¿Qué observas?", numerosas respuestas refieren la diferencia entre perímetro y área: "Yo observo que el área no es igual que el perímetro"; "Que las figuras nos son iguales"; "Que hay diferencia entre perímetro y área".

Más cercanas a establecer las variaciones son respuestas del tipo: "que algunas tienen área igual y el perímetro no". Y un alumno llega a la conclusión de que: "Hay figuras que tienen el mismo perímetro pero diferente área y que algunos tienen igual área pero diferente perímetro".

A las actividades en el geoplano, sigue la implementación de la Fichas 71 y 72 del fichero de matemáticas de 5º. (SEP. 1994h) que se vinculan directamente con estos temas, *El perímetro y el área I* (variación del perímetro en figuras de área constante) y *El perímetro y el área II* (variación del área en figuras de perímetro constante).

En tercer lugar, se realiza la lección "Hilaza para el contorno" del libro de matemáticas 4º (SEP 1994f, 42); según el informe de la maestra parece que esta lección fue resuelta sin dificultades y los alumnos pudieron constatar una vez más que "Hay figuras que tienen igual perímetro pero diferente área".

Finalmente, la maestra implementa una actividad que propicia la reflexión sobre las características geométricas de las figuras como necesario antecedente a la cuantificación de las magnitudes. Recordemos que se planteó el estudio de las variaciones del perímetro y el área como introducción a la "noción de perímetro y área", para ello la maestra sugiere la realización de una actividad por equipo en la que los alumnos utilizan las piezas del tangram para verificar cuántas veces caben unas figuras en otras.

ACTIVIDAD TANGRAM NOMBRE________________________

Utilice las piezas del tangram para completar los datos que faltan en la siguiente tabla. Se trata de medir cada una de las piezas que aparecen en la primera columna con cada una de las piezas que aparecen en el primer renglón.

	Triángulo mediano	*Triángulo chico*	*cuadrado*	*romboide*
TRIANGULO GRANDE	2	1	2	2
TRIANGULO MEDIANO	1	2	1	1
ROMBOIDE	1	2	1	1
CUADRADO	1	2	1	1

Esta actividad forma parte del paquete didáctico *La enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria*. (Anexo 2 Actividad 1). Se trata sin duda, de una actividad que la maestra retoma consciente de la utilidad que representa el sobreponer unas figuras en otras para la comprensión de las relaciones numéricas implicadas al calcular su área.

En el informe sobre la implementación de cada secuencia, la maestra señala que esta serie de actividades fue desarrollada en tres sesiones de 90 minutos y que el tratamiento de este terma continúa en lecciones posteriores.

La maestra reconoce la “secuencia didáctica” implementada como una serie de actividades cuya dificultad va en aumento y que se trata a lo largo de varias sesiones. Parte de construcciones en el geoplano, induce el empleo de unidades lineales y de área no convencionales y trata la formalización a partir de los ejercicios propuestos en las fichas y en las lecciones de los libros de matemáticas.

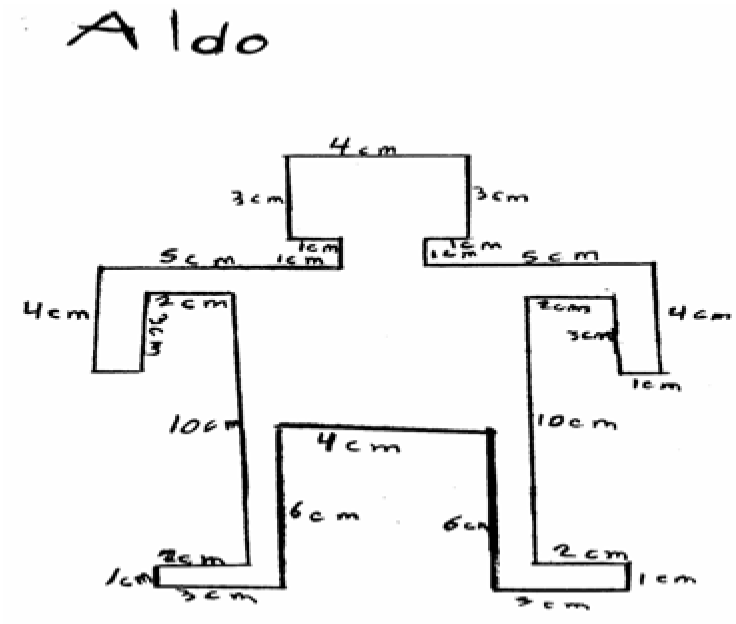
Es de destacar la labor preliminar de esta maestra, que diseña sus propios materiales con ejercicios que incluyen breves explicaciones y la invitación a que sus alumnos escriban comentarios de aquello que observan. Promueve así la búsqueda de relaciones entre los datos numéricos y una visión de las matemáticas como disciplina donde resulta fundamental argumentar las repuestas y en la que es posible crear otras situaciones además de las propuestas.

A manera de conclusión en este apartado diremos también que la maestra ha aprendido a “ver” y a interpretar las creaciones de sus alumnos, pues le parece sorprendente “observar la creatividad que tiene al acomodar de distintas formas las figuras”. Además, organiza una serie de actividades y no sólo una actividad para cada tema, abre espacios de expresión para los alumnos y se permite reconocer como válidas varias respuestas a un mismo cuestionamiento: “Al ver que algunos alumnos fueron muy rápidos (Para llenar el cuadro de la actividad 1.1) para llenarlo y hacerlo de formas diferentes, te hace comprender (como maestro), las limitantes que a veces ponemos a los alumnos al hacerlos dependientes” (obligándolos a encontrar una sola respuesta). Actitudes que la acercan hacia un nuevo estilo de docencia.

3.2.2 Acerca del empleo de unidades de medida. Experiencias en un cuarto grado de primaria

El segundo aspecto de la medición tratado por la maestra Karina se refiere al empleo de unidades de medida. En la planeación del tema “Mediciones en diferentes unidades de medida” puede leerse: “El propósito central es la importancia del trazo de medidas con milímetros y centímetros”.

La maestra trata mediciones de longitud primero promoviendo la realización de la segunda versión del juego ¿Cuánto mide? Del libro Juega y aprende matemáticas (Fuenlabrada et al. 1991) donde se sugiere la elaboración de “mensajes” con el fin de que el receptor logre reproducir un dibujo igual en forma y tamaño de aquél que tiene el emisor. Subraya la novedad que le causó utilizar este recurso: “Me agradó la aplicación del juego… porque el aplicar algo que nunca había utilizado… resulta interesante…”



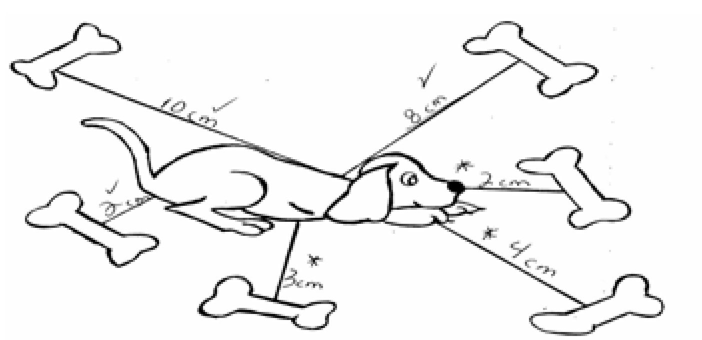
En segundo lugar, al maestra ejercita a sus alumnos en las estimaciones que ella denomina mediciones "a ojo" (a); posteriormente pide medir con centímetros la distancia entre dos puntos determinados (b) y finalmente ofrece un ejercicio que comprende ambos aspectos (c): una estimación de los centímetros que mide una cierta longitud y la verificación de esa estimación utilizando regla graduada.

a) Mediciones "a ojo".

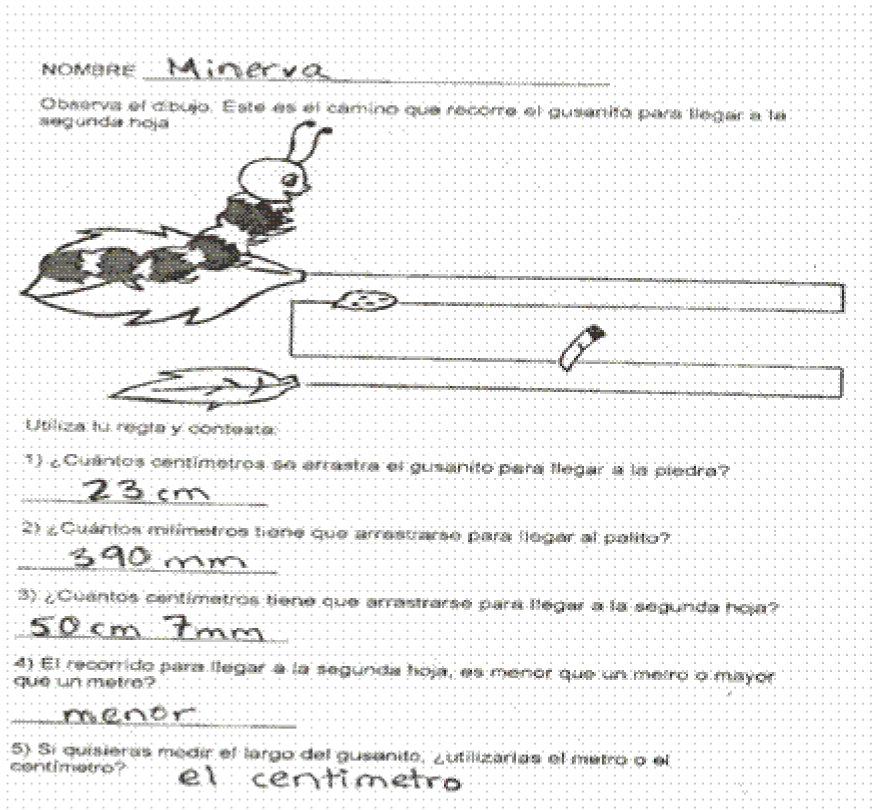
NOMBRE ____

Observa el dibujo. Vas a medir "a ojo", cuántos centímetros hay del lugar

Donde está el perro a cada uno de los huesos



b) Mediciones con centímetros



NOMBRE Minerva

Observa el dibujo. Este es el camino que recorre el gusanito para llegar a la segunda hoja.

Utiliza tu regla y contesta:

1) ¿Cuántos centímetros se arrastra el gusanito para llegar a la piedra?

23 cm

2) ¿Cuántos milímetros tiene que arrastrarse para llegar al palito?

390 mm

3) ¿Cuántos centímetros tiene que arrastrarse para llegar a la segunda hoja?

50 cm 7mm

4) El recorrido para llegar a la segunda hoja, es menor que un metro o mayor que un metro?

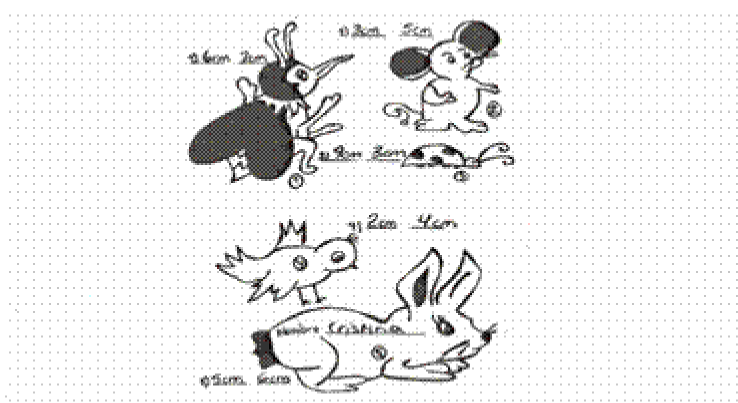
menor

5) Si quisieras medir el largo del gusanito, ¿utilizarías el metro o el centímetro?

el centimetro

c) Estimaciones y verificaciones.

A veces hay que medir cosas pequeñas, ¿Cuánto crees que mide la altura de cada animalito?. Anota sobre la primer línea lo que tú creas y en la segunda el resultado después de haberlo medido con tu regla.



El tratamiento de este tema concluye con la resolución de la lección "Dibujos y medidas" del libro de matemáticas de 4º. (SEP1994F, 54), donde es posible reconocer las equivalencias entre milímetros y centímetros.

La maestra estableció la realización de esta “secuencia didáctica” en dos sesiones de 90 minutos y advierte sobre las dificultades de sus alumnos para realizar trazos cuyas medidas se ofrecen en milímetros. Lo mismo que en el caso anterior, destaca la importancia que la maestra otorga al trabajo de “preparación”; ella diseña ejercicios que propician acciones en las que pretende que sus alumnos reflexionen.

Parece que en el quehacer docente se otorga un valor especial a los “materiales de apoyo”, a los elementos gráficos que apoyan las explicaciones de los maestros; quizás por esta necesidad de “concretizar” las matemáticas, la maestra incorporó con cierta facilidad actividades con el geoplano y con el tangram a sus acciones docentes cotidianas.

Es así que una concepción de las matemáticas que promueve la búsqueda de resultados diversos y en la que tiene cabida la argumentación de las respuestas halladas, posibilita un ejercicio de la docencia que considera los saberes de los alumnos y hace más creativa la acción del maestro.

En relación con la medición, la maestra se ha apropiado de una metodología que promueve la estimación, los procedimientos informales para medir y el uso de unidades convencionales, como necesaria preparación que antecede la utilización de los procedimientos formales y las unidades convencionales. Ha aprendido, en suma, a utilizar sus auxiliares didácticos; situaciones promovidas por el paquete didáctico que tal vez han sido respaldadas por comentarios con sus colegas y que le han empezado a resultar útiles en su práctica diaria, conformando probablemente nuevas creencias o concepciones para orientar sus acciones docentes, ya que:

> La creencia es un estado interno del sujeto que puede explicar comportamientos diversos frente a estímulos variados (…) La creencia determina una estructura general de conducta, guía y orienta las acciones pero además, toda creencia, se lleva a cabo *sub especie veri*, pues sólo creemos lo que consideramos verdadero (Villoro 1982, 36 y 60).

Puede ser que la maestra Karina, habiendo probado esta forma de organizar la enseñanza, se la apropie y la utilice para tratar otros temas generando así, un estilo de docencia que vaya más allá de haber cumplido con un requisito académico.

En todo caso, esta experiencia apoya conclusiones extraídas de otros talleres de actualización organizados por el Laboratorio de Psicomatemáticas del Departamento de Investigaciones Educativas, a saber:

> … que la enseñanza de la matemática en la escuela primaria elevará su calidad en la medida en que el maestro sea el auténtico protagonista de las estrategias de organización de las actividades de aprendizaje y no solamente un ejecutor. Esta autonomía en el desempeño laboral pasa por un requisito importante: que el maestro esté convencido racionalmente de que las opciones que toma en su ejercicio docente son mejores que las que desdeña. (Fuentelabrada 1989, 80).

Las secuencias creadas por la maestra Karina –creemos–, son evidencia de un trabajo de actualización que se propone poner al día los conocimientos de los maestros y que busca además incidir en la práctica docente cotidiana.

Con el fin de optimizar los resultados de actualización, conviene que, en el diseño de las situaciones problemáticas para el caso de la medición, se trate de bloquear la tendencia de los maestros para utilizar las fórmulas como el recurso más útil y que se propicien consideraciones de orden geométrico que pueden ofrecer mayor significado a los recursos empleados. Por ello, como producto de este análisis, se ve conveniente revisar las situaciones relacionadas con el empleo de unidades y su inserción en un sistema de medidas (Anexo 1.2 Act. 2); actividades relacionadas con la medición de áreas utilizando unidades no convencionales (Anexo 1.2 Act. 1) y la actividad propuesta para analizar la relación entre la medida de una circunferencia y la medida del radio (Anexo 1.2 Act. 7).

El desarrollo de las actividades propuestas por la maestra Karina son fruto –entre otras cosas- de actividades de la propuesta de actualización que favorecen la reflexión de las características de las figuras geométricas y de las variaciones entre el perímetro y la medida de su superficie (Anexo 1.2 Act. 5).

Por otro lado, durante la experimentación de la propuesta de actualización también se pudo observar la conveniencia de tratar las actividades en forma colectiva puesto que así se posibilita la confrontación de resultados, el intercambio de experiencias y la motivación para la realización de las tareas. Por lo que es recomendable recuperar esta modalidad de trabajo en la implementación del taller de actualización.

Finalmente, es importante señalar que los ejemplos documentados en este trabajo, son producto de condiciones establecidas por un proyecto de investigación particular: un grupo permanente de estudio, sesiones regulares y la presencia de un coordinador con experiencia y conocimiento profundo de la propuesta. Los resultados de un proceso de actualización bajo la modalidad de un proceso de autoestudio –como lo propone el paquete didáctico– son objeto de otra investigación que podrá dar cuenta tal vez, del perfil de profesores que han optado por esta última modalidad.

El trabajo que aquí concluye aporta solo elementos que permiten valorar algunas situaciones didácticas diseñadas para la actualización de los maestros de primaria y sugerir posibles modificaciones en alguna de ellas.

---

* Todas las intervenciones del coordinador del taller se señalan como L.

CONSIDERACIONES FINALES

Acerca de los estudios sobre las concepciones de los maestros

La investigación sobre las concepciones de los maestros es un campo recientemente abierto y se trata "probablemente de una de las líneas de investigación en educación matemática menos trabajada en México" (Waldegg 1995, 58).

Los estudios existentes han centrado su atención en los maestros cuya especialidad es la enseñanza de las matemáticas, por ende, son estudios relacionados con la educación media básica, media superior, superior. En este sentido es que este trabajo procura hacer una aportación en el conocimiento de las concepciones de los maestros de primaria cuyo estudio —según lo reportado en el capitulo 1— es escaso.

Se ha visto que los estudios sobre las concepciones de los maestros son indispensables para el diseño de las propuestas de actualización pero además, para lograr plantear con más eficacia las propuestas curriculares que acompañan a las reformas educativas. Esto es, conocer algunas de las concepciones de los maestros de primaria permitiría ofrecer alternativas viables para su actualización y optimizaría los recursos destinados a la implementación de las propuestas curriculares.

Para el estudio de las concepciones de los maestros de primaria, conviene recuperar los análisis existentes sobre su práctica docente, toda vez que estos dan cuenta de la trascendencia de la actuación de los maestros dentro y fuera del aula. Estos estudios permiten además, conocer los espacios susceptibles de ser modificados y la necesaria continuidad de ciertos procesos.

En relación con las concepciones de los maestros sobre las matemáticas y la medición

Las intervenciones de los maestros de este estudio, nos han permitido identificar la estrecha vinculación que los maestros de primaria establecen entre la matemática escolar y la ejercitación aritmética. Además, por tratarse de una asignatura formal que no admite discusiones según la creencia dominante, existe una privilegiada tendencia por hallar los resultados numéricos precisos y la incuestionabilidad de las respuestas. Creencias que se han propiciado entre los maestros por una tradición educativa y por una situación cultural ─Planes y programas de estudio, libros de texto, experiencias como alumnos y como maestro─ que recientemente empiezan a ser cuestionadas.

Estas ideas acerca de las matemáticas han hecho de la medición una práctica privilegiada pera ejercitar los cálculos numéricos y los resultados precisos. En esta práctica, se han omitido: las acciones "prácticas" de medir y el establecimiento de las relaciones entre las magnitudes y las unidades que se utilizan para medir, así como la posibilidad de entender que la medición es un proceso de aproximaciones sucesivas.

La medición en la primaria además, ha sido interpretada como la geometría escolar, espacio que permite la ejercitación de las operaciones básicas con distinto grado de dificultad.

Los maestros reconocen las magnitudes como cualidades de un objeto, susceptibles de ser medidas, pero se encuentran más habituados a tratar sólo longitudes y áreas. Reconocen que el volumen, por ser una magnitud que tiene tres dimensiones, es difícil su cuantificación.

En la primaria, se ha privilegiado el uso de unidades de longitud y ha habido escasa práctica de mediciones utilizando unidades de superficie, volumen y capacidad.

A medida que los maestros hacen consideraciones de orden geométrico pueden evitar la solución aritmética como única vía de solución a los problemas de medición y dotar de significado los procedimientos convencionales para cuantificar las magnitudes. (Cfr. Ejemplos sobre cálculo de áreas).

La investigación básica ha permitido la identificación de algunas "ideas erróneas" arraigadas entre los maestros, lo que ha posibilitado el diseño de situaciones problemáticas que encaminan hacia una reconceptualización de tales ideas.

Si los maestros participan de una secuencia de situaciones que les permita reconceptualizar algunos saberes, están en mejores condiciones de iniciar una nueva práctica docente (Cfr. Ejemplos sobre las variaciones entre perímetro y área)

Para lograr un nuevo estilo de docencia entre los maestros de primaria, resulta fundamental que acepten que es posible que haya diversas soluciones a un cuestionamiento y que además del resultado, es fundamental argumentar las respuestas. Las actividades "prácticas" de la medición pueden servir como ejercicio que alienta —por ejemplo— la búsqueda de respuestas aproximadas. Y esto a su vez constituye un nuevo proceso de enseñanza donde tienen cabida los saberes informales de los alumnos y sus posibles argumentaciones.

Los maestros saben de memoria los procedimientos convencionales (fórmulas) para cuantificar las magnitudes y los reconocen además, como la mejor opción para hallar soluciones, por tanto, el reto en el diseño de situaciones para actualizar a los maestros de primaria, consiste en proponer situaciones para las cuales las fórmulas resulten insuficientes. (Cfr. Ejemplo para calcular el área de un triángulo dibujando una cuadrícula).

Es conveniente explorar más sobre los conocimientos de los maestros acerca de la geometría puesto que en las prácticas educativas dominantes, la geometría ha sido el espacio para el reconocimiento de figuras y cuerpos geométricos, cuyas dimensiones son motivo de cálculos numéricos. De modo que, en cuanto se proponen situaciones que exigen el reconocimiento de las características geométricas de las figuras, los maestros las obvian y buscan, más bien, el empate aritmético de los resultados. (Cfr. Ejemplos para calcular el área de tres superficies triangulares y sobre las triangulaciones de los polígonos).

Para iniciar el tratamiento de la medición en la primaria, es fundamental que los maestros admitan que se trata de un proceso de aproximaciones que se puede enunciar de modos diversos y que existen diferentes maneras de cuantificar las magnitudes. Se trataría también de empezar a dotar de significación geométrica los procesos convencionales que conocen.

Es igualmente conveniente ofrecer más oportunidades para que los maestros realicen estimaciones y reconozcan la importancia de instrumentar ese tipo de actividades con sus alumnos, pues en la propuesta de actualización que es objeto de estudio, la estimación es escasamente favorecida.

Sobre el proceso de actualización

Respecto al funcionamiento de la propuesta de actualización, conviene recordar las condiciones que hicieron posible esta investigación de formación docente: la permanencia de un grupo de maestros, sesiones regulares para llevar a cabo el curso—taller y la coordinación de un maestro con experiencia, condiciones que propiciaron que algunos participantes reconceptualizarán aspectos de la matemática escolar y que dieran muestras de una posible reorganización de sus acciones docentes, como puede constatarse en los ejemplos expuestos al final del presente trabajo.

Si la propuesta de actualización busca, además de, poner al día los conocimientos de los maestros sobre las matemáticas, modificar su práctica docente, es razonable plantear la actualización como proceso permanente que compromete a los interesados a vivir algunos aprendizajes de manera similar a como lo viven sus alumnos; constatar sus puntos de vista en pequeños grupos de estudio; revisar el tratamiento de los temas en sus auxiliares didácticos y ampliar la información a través de lecturas de apoyo.

Los resultados expuestos nos invitan a considerar que los logros de la propuesta se pueden optimizar si la puesta en marcha del proceso de actualización logra garantizar la existencia de asesores o promotores de círculos de estudio entre los maestros, puesto que propiciar el aprendizaje en pequeños grupos puede enriquecer las experiencias de los docentes y se pueden lograr resultados en núcleos más amplios de maestros, encaminados a la transformación de la práctica docente como estrategia de conjunto y no individual, en las escuelas.

Por otro lado, conviene mencionar que la circulación de la propuesta de actualización *La enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria*, puede constituirse en espacio de privilegio para el estudio de las concepciones de los maestros de primaria en otros tópicos relacionados con la matemática escolar. Además, los maestros —a diferencia de otras experiencias de actualización— cuentan actualmente, con gran número de recursos (libros de texto, libros del maestro, ficheros de actividades didácticas, juegos matemáticos, video y audiocintas), destinados a apoyar la enseñanza de esta asignatura, lo que permitiría estudiar si son consistentes las “concepciones transformadas” generadas en el taller con su práctica docente cotidiana.

Por último, es destacar que esta experimentación, ha hecho evidente las aportaciones derivadas de investigaciones previas sobre formación docente, por lo que se destaca la necesidad de mantener el apoyo a la investigación básica de los procesos de actualización y formación docente, puesto que conocerlos, permitirá optimizar los recursos destinados a garantizar la calidad de la educación en el nivel básico.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Acuerdo Nacional para la Educación Básica 1992. México, 1992.

Ávalos, A (1997). *Estudio de las transformaciones que sufren las concepciones de los maestros sobre contenidos geométricos en un curso de actualización*. Tesis de maestría. México, D.F. Departamento de Investigaciones Educativas del Centro de investigación y de estudios avanzados del Instituto Politécnico Nacional.

Aldaz, I (Responsable) (1994). *Las matemáticas en la escuela primaria. Seminario Encuentro con los autores. Memoria.* Instituto Estatal de Educación Pública de Oaxaca. México.

Artigue, M (1995). "Ingeniería didáctica". En *Ingeniería didáctica en educación matemática*, M. Artigue, R. Douady, L. Moreno y P. Gómez (ed.) México: Grupo editorial Iberoamérica.

Ávila, A. (1988). La enseñanza oficial de las matemáticas elementales en México; su psicopedagogía y transformación (1944—1986). (Cuadernos de cultura pedagógica. Serie: Investigación No. 6) México: Universidad Pedagógica Nacional.

Ávila, A. (1991ª). “Matemáticas, enseñanza y formación de profesores”, en Pedagogía 7 (21), 11 — 18, México.

Ávila, A (1991b). “La reforma a las matemáticas en primaria. Lo posible y lo necesario”. En Educación Matemática 3 (3), 31 — 39. México: Grupo editorial Iberoamérica.

Ávila, A (1996). “La comprensión y el procedimiento”. En Básica No. 11, 6 —14, México. Fundación SNTE para la cultura del maestro mexicano.

Balbuena, H., D. Block, I. Fuenlabrada, L. Ortega, R. Valencia (1991). “Reflexiones en torno a la modernización educativa. El caso de las matemáticas en los primeros grados de la primaria”. En Educación Matemática 3 (3), 40 —57. México: Grupo editorial Iberoamérica.

Ballenilla, F (1992). "El cambio de modelo didáctico, un proceso complejo". En *Investigación en la escuela 18*. Sevilla: Díada Editores.

Block, D., M. Dávila (1993) "La matemática expulsada de la escuela". En *Educación Matemática 5* (3),

Block, D (coord) H. Balbuena, D. Block, M. Dávila, M. Schulmaister, V. García, E. Moreno (1995). *La enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria. Taller para maestros. Primera parte*. México: Secretaría de Educación Pública.

Block, D., M. Dávila, P. Martínez (1995). "La resolución de Problemas: Una experiencia de formación de maestros". *Educación Matemática* 7 (3), 5 – 26.

Block, D., I. Fuenlabrada (1996) "Cómo elaborar materiales de matemáticas para el nivel básico". En *Educación 2001 (8).* México. 31 – 37.

Block, D., I. Fuenlabrada (1996a). *Innovaciones curriculares en matemáticas. Primer ciclo de la Educación Primaria. (Documento DIE 45)*. México, D.F: Departamento de Investigaciones Educativas del Centro de Investigación y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional.

Block, D., I. Fuenlabrada (1996b). *El problema de la enseñanza. Distintos acercamientos teóricos.* Presentación en el Simposio Caminos de la Investigación Educativa. 25 años del DIE. México.

Camacho, M., J. Hernández, MM. Soccas (1995). "Concepciones y actitudes de futuros profesores de secundaria hacia la matemática y sus enseñanza: un estudio descriptivo. En Blanco y Mellado (coords) *La formación del profesorado de ciencias y Matemáticas en España y Portugal*, Departamento de Didáctica de las Ciencias Experimentales y de las Matemáticas de la Universidad de Extremadura Badajoz.

Carrillo Yáñez, J. (1996). "Modos de resolver problemas y concepciones sobre matemáticas y su enseñanza propuestas por profesores de alumnos de más de 14 años. Algunas aportaciones a la metodología de la investigación y estudio de posibles relaciones". Tesis doctoral reseñada en Educación Matemática (8) 3, 124 – 127. México: Grupo editorial Iberoamérica.

Cortés, D., V. Eloy, H. Espinosa, R. Helguera, C. Linares, I. Medina, E. Ordóñez (1990). Propuesta para el aprendizaje de la matemática. Primer grado (PALEM). México. Secretaría de Educación Pública.

Chamorro, C., J.M. Belmonte (1991). El problema de la medida. Didáctica de las magnitudes lineales. Madrid: Síntesis.

Chevallard, Y (1988). "Sobre la ingeniería didáctica". En *Lecturas en torno al debate de la didáctica y la formación de profesores*, Susana Barco de Surghi (comp.) México: Escuela Nacional de Estudios Profesionales Aragón.

Del Olmo Ma. A, Ma. F. Moreno y F. Gil Cuadra (1989). Superficie y volumen. ¿Algo más que el trabajo con fórmulas?. Madrid: Síntesis.

Domínguez, R (1984). *Conceptualizaciones y procedimientos de medición de áreas en la escuela primaria*. Tesis de Maestría. México, D. F: Departamento de Investigaciones Educativas del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional.

Douady, R (1995). "La ingeniería didáctica y la evolución de su relación con el conocimiento". En *Ingeniería didáctica en educación matemática*, M.Artigue, R. Douady, L. Moreno y P. Gómez (ed.) México: Grupo editorial Iberoamérica.

Eudave, D (1994). "Las actitudes hacia las matemáticas de los maestros y los alumnos de Bachillerato". En Educación matemática (6) 1, 46 – 58. México: Grupo editorial Iberoamérica.

Edwards, D. (1990). "El papel del profesor en la construcción social del conocimiento". En Investigación en la escuela 10. 33 – 49.

Erickson, Frederick (1986). "Métodos cualitativos de investigación sobre la enseñanza". En la investigación en la enseñanza, II. Métodos cualitatios y de observación. Merlin C. Wittrock (ed): Barcelona: Paidós.

Figueras, O, G. Waldegg (1986). La medición en la escuela secundaria (Cuadernos de investigación 2), México: Sección Matemática Educativa del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional.

Figueras, O., G. Waldegg (1987). "Algunas consideraciones sobre la enseñanza de la medición". *Revista informativa del profesor de matemáticas (Asociación nacional de profesores de matemáticas A.C) 1* (5), 4 – 8.

Figueras, O., G. Waldegg (1986). *La medición en la escuela secundaria (Cuadernos de investigación 2)*, México: Sección Matemática Educativa del

Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional.

Flores, A, E. Phillipp, M. Sowder y J. Schappelle (1994). "La reflexión en la práctica de la enseñanza de las matemáticas. Cuatro maestros extraordinarios". En *Educación Matemática (6) 1, 32 — 41. México: Grupo editorial Iberoamérica.*

Flores, P. (1995). "Creencias y concepciones de los futuros profesores sobre las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje. Evolución durante las prácticas de enseñanza". Tesis doctoral reseñada en Educación matemática (8) 3, 122 — 124. México: Grupo editorial Iberoamérica.

Fuenlabrada, I., G. Gálvez, I. Sáiz (1979). *Informe sobre el proyecto de enseñanza de la matemática en la escuela primaria.* Documento interno. Departamento de Investigaciones Educativas del Centro de Estudios Avanzados del Insituto Politécnico Nacional.

Fuenlabrada, I (1984). *Cuantificación de la geometría. Fichas de Trabajo*. Curso IV impartido a profesores de educación primaria. México.

Fuenlabrada, I (1987). *La conmensuración y el fraccionamiento de la unidad. Una experiencia con maestros.* Ponencia presentada en la Primera Reunión centroamericana y del Caribe sobre formación de profesores e investigación en Educación Matemática. Mérida, Yuc. México.

Fuenlabrada, I., M. Nemirovsky (1988). "Experiencias didácticas con maestros". En *Formación de maestros e innovación didáctica*, México, D.F: Memorias del Departamento de Investigaciones Educativas del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional.

Fuenlabrada, I (1989). *La enseñanza y el aprendizaje de la matemática. Un problema de investigación.* Ponencia presentada en el Primer Encuentro Académico entre Profesores de Matemáticas de los Niveles Medio Superior y Superior del Instituto Politécnico Nacional, México.

Fuenlabrada, I (1990). *Las situaciones didácticas*. Documento interno. México, D. F.: Departamento de Investigaciones Educativas del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional.

Fuenlabrada, I., D. Block (cords), M. Dávila, P. Martínez, L. Ortega, R. Valencia (1990). *Formación de profesores sobre áreas fundamentales de la* *educación básica, Informe final.* México, D.F: Departamento de Investigaciones Educativas.

Fuenlabrada, I (1991). "La investigación en didáctica de la matemática: un problema actual". *Avance y perspectiva 10*, 226 – 230. México, D.F: Centro de investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional.

Fuenlabrada, I., D. Block (1994). *La enseñanza de las matemáticas en el primer ciclo de la escuela primaria.* Ponencia presentada en el Seminario "Encuentro con los autores" organizado por el Instituto Estatal de Educación Pública de Oaxaca. Oaxaca, Oax. México.

Fuenlabrada, I. (1994). *Estudio de una propuesta de actualización en matemáticas para profesores de educación primaria en servicio. Proyecto de investigación. (Documento interno)*. México: Departamento de Investigaciones Educativas del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional.

Fuenlabrada, I (1995). "Innovaciones de la matemática en la escuela primaria". En Cero en conducta 40 – 41, 5 –13. México: Educación y cambio.

Fuenlabrada, I (1996). "El conocimiento del espacio y el de la geometría ¿Qué es y cómo se enseña?. En *Básica* 11, 61 – 68. México: Fundación SNTE para la cultura del maestro mexicano.

Fuenlabrada, I (1996a) *Calidad y equidad en la política educativa de México.* Ponencia presentada en el Seminario Internacional "Enseñanza básica en América Latina", organizado por el programa PREAL, Río Janeiro, Brasil.

Gálvez, G (1982). Enseñanza de la matemática en la escuela primaria. Documento interno del Laboratorio de Psicomatemáticas del Departamento de Investigaciones Educativas, México.

Grupo de Psicomatemática (1977). Trabajos prácticos de Matemática. Serie V: Concepto de medida. Fichas de trabajo. Curso para profesores dictado en la Universidad de Nacional de Comahue. Facultad de Ciencias de la Educación. General Roca (Río Negro) Argentina.

León A.I, N. Venegas (1990). "El maestro, la reflexión sobre su práctica y la construcción de estrategias didácticas". En Primer encuentro de innovaciones en educación básica. México: Esfinge.

Méndez, R (1990). “La enseñanza de la geometría en un quinto grado de primaria”. en *Pedagogía* (7), México.

Mercado, R. (1994). “Los saberes docentes en el trabajo cotidiano de los maestros”. Documento DIE 33B. México, Departamento de Investigaciones Educativas del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. Moreno, L., G. Waldegg (1992). "Constructivismo y educación matemática" *Educación Matemática 4* (2) , 7 — 15.

Peltier, M. L (1993). "Una visión general de la didáctica de las matemáticas en Francia". *Educación Matemática 5* (2) , 4 — 10.

Peltier, M.L (1997) “Las representaciones de los maestros acerca de las matemáticas”: México: Centro de estudios educativos.

Robert, A, J. Robinet (1989ª). Répresentations des ensignants de mathématiquw sur les Mathématiques et leur ensignement. París : Université Paris VII — IREM (Cahier de DIDIREM. Didactique des matehématiques. (Traducción de Alejandra Ävalos Rogel).

Robert, A, J Robinet (1989b). Énoncés d´exercices de manuels de seconde et representations des auteurs de manuels. París. Université Paris VII — (Cahier de DIDIREM 4. Didactique des mathématiques). (Traducción de Alejandra Ávalos Rigel).

Rockwell, E. (1986). “Etnografía y teoría en la investigación educativa”. En Enfoques. Bogotá: Centro de Investigaciones, Universidad Pedagógica Nacional.

Rockwell, E. (1986). "La práctica docente y la formación de maestros". En *La escuela, lugar del trabajo docente* (Cuadernos de investigación). México, D.F: Departamento de investigaciones educativas del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional.

Rockwell, E., D. Block, A. Candela, I. Fuenlabrada, L. Navarro, E. Taboada. (1989). *Investigación básica e innovación didáctica: El nuevo manual del Instructor Comunitario.* Ponencia presentada en el Primer Encuentro de Innovaciones en Educación Básica, organizado por el Centro de Estudios Educativos, A. C. y el Centro de Integración Educativa Sur. México.

Sáiz, I., I. Fuenlabrada (1981). *Sistemas Decimales de Medida.* Escuela de Verano para profesores de matemáticas.Laboratorio de Psicomatemática del Departamento de Investigaciones Educativas del Centro de Investigación y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional.

Sáiz, I. (1981). *Sistema métrico decimal*. Curso para profesores dictado a maestros de la Escuela Kaipilli, Cuajimalpa, México.

Sáiz, I., D. Fregona (1982). *Medición de áreas y perímetros*. Taller para maestros impartido en Cuernavaca, Morelos, México.

Santos, T.M (1995). "¿Qué significa el Aprender Matemáticas?". En *Educación Matemática 7 (1)*, 46 – 62.

Secretaría de Educación Pública (1993). *Libro para el maestro. Matemáticas. Tercer grado*.

Secretaría de Educación Pública (1993). *Libro para el maestro. Matemáticas. Cuarto grado.*

Secretaría de Educación Pública (1993). *Libro para el maestro. Matemáticas. Quinto grado*.

Secretaría de Educación Pública (1993). *Plan y programas de educación básica. Primaria.*

Secretaría de Educación Pública (1994). *Libro para el maestro. Matemáticas. Sexto grado.*

Secretaría de Educación Pública (1994). *Libro para el maestro. Matemáticas. Primer grado.*

Secretaría de Educación Pública (1994). *Libro para el maestro. Matemáticas.*

Segundo grado.Thompson, A.G. (1984). "The relationship of teachers´conceptions of Mathematics and matematics teaching to instructional practice". En *Educacional Studies in Mathematiques* (15) 105 –127, New York USA. citado por Flores, Phillipp, Sowder, chappelle (1994). "La reflexión en la práctica de la Enseñanza de las Matemáticas. Cuatro maestros extraordinarios. En Educación Matemática (6) 1, 32 – 41. México, Grupo editorial Iberoamérica.

Thompson, A.G. (1984). “The relationship of teachers´conceptions of mathematics teaching to instructional practice”. En Educacional Studies in Mathematiques teaching” citado por Flores, Phillipp, Sowder, Schappelle (1994). “La reflexión en la práctica de la Enseñanza de las Matemáticas. Cuatro maestros extraordinarios. En Educación Matemática (6) 1, 32 – 41. México, Grupo editorial Iberoamérica.

Vergnaud, G (1991). *El niño, las matemáticas y la realidad*, México: Trillas.

Villoro, L (1982). Creer, saber, conocer. México: Siglo XXI.

Waldegg, G (1982). *Notas del curso de Geometría I (Niveles Básico y Medio Básico). resumen de los capítulos I a VI del libro "Child's conception of Geometry" de J. Piaget*, México: Sección Matemática Educativa del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional.

ANEXO 1

Block, D (coord.): et al (1995). La enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria.

Taller para maestros, SEP, Pronap, México.
Parte 1

VI

Medición

Los aspectos relacionados con la medición ocupan un lugar relevante en la educación primaria, porque constituyen una fuente muy rica de situaciones y un punto de enlace con otros temas. No obstante, su estudio se reduce, en muchos casos, a la memorización de fórmulas o de las reglas para hacer conversiones entre las unidades del Sistema Métrico Decimal.

Con las situaciones que se presentan en cada uno de los temas de este capítulo, se pretende dar mayor significado a los conocimientos que manejan los maestros y proveerlos de herramientas para que puedan enriquecer las situaciones que trabajan con sus alumnos. La estimación, el uso de unidades de medida arbitrarias y, en general, el uso de procedimientos informales para resolver problemas, ocupan un lugar importante en el desarrollo de las actividades.

De igual manera que en los capítulos anteriores, en éste se dedica un espacio considerable al análisis de los materiales de trabajo que el maestro tiene a su disposición para realizar su labor docente.

Tema 1
Medición y aproximación

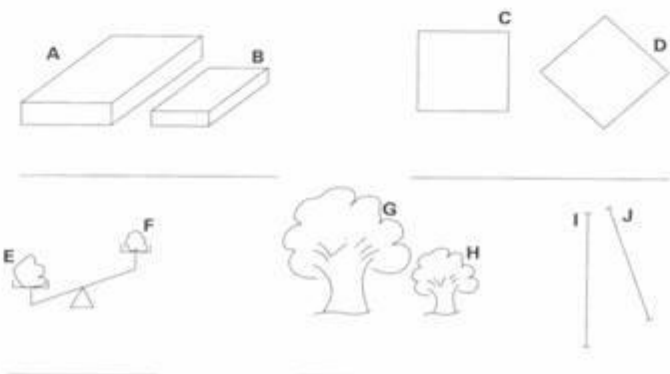
En este tema se plantean actividades que permiten reflexionar acerca de lo que significa medir, así como poner en claro la relación que existe entre el proceso de medición y el sistema de medida que se utilice.

Actividad 1

Más grande o más chico

La comparación es un aspecto importante en la medición.

1. Observe los siguientes dibujos y describa una relación de comparación en cada pareja (Utilice la propiedad que prefiera. Por ejemplo "**G** es más alto que **H**").



2. Anote la propiedad o cualidad que comparó en cada pareja.

A y B ____________ C y D ____________

E y F ____________ G y H ____________

I y J ____________

3. Observe los siguientes segmentos y escriba una relación de comparación entre ellos. Hágalo de tres maneras distintas.

Primera: ____________

Segunda: ____________

Tercera: ____________

Lea las siguientes relaciones de comparación y comente las diferencias que encuentra entre ellas.

- El segmento **CD** es menor que el segmento **AB**.
- La longitud del segmento **CD** es $\frac{1}{3}$ de la longitud del segmento **AB**.

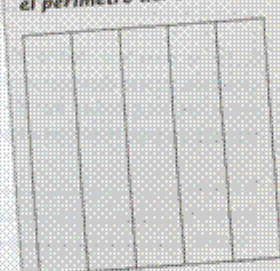
¿Qué diferencias encuentra?

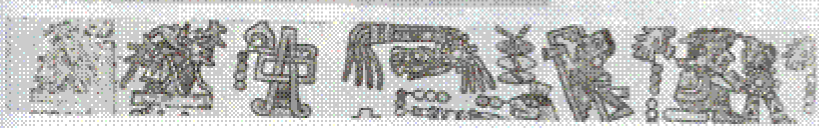
____

La comparación es una actividad inherente a la medición. Algunas veces el resultado de la comparación es únicamente cualitativo (mayor que, menor que, igual a). Por ejemplo, "me tocó menos fruta que a ti"; "mi hermano es más alto que yo".

Otras veces la comparación es cuantitativa, por ejemplo, "tengo 3 veces la edad que tú tienes"; "mide 5 metros".

La figura está dividida en 5 rectángulos iguales. Sabiendo que el perímetro de uno de los rectángulos es de 30 unidades, ¿cuál es el perímetro del cuadrado?





Actividad 2

Tres cuartas y una goma

Lo que se mide en un objeto no es el objeto mismo, sino alguna de sus propiedades o cualidades.

1. Mida, con un lápiz, el ancho de la mesa donde está trabajando. Después, repita la medición con los siguientes objetos: una goma de borrar, la tira de cartoncillo, el cordón y la distancia entre los extremos de sus dedos pulgar y meñique con la mano extendida, es decir, su cuarta. Anote las medidas en la siguiente tabla.

Unidades de medida	lápiz	goma	tira	cordón	cuarta
Medidas					

¿Hay números iguales en la tabla? ____________________
Si los hay, ¿a qué se debe ? ____________________
¿Sólo hay números diferentes? ____________________
¿A qué se debe que resulten números diferentes? ____________

2. El hecho de que haya distintos números en el renglón que dice "medidas", ¿significa que el ancho de la mesa tiene varias medidas diferentes? ____________________
¿Por qué? ____________________

3. En la columna donde dice lápiz, Juan anotó 5 y en la columna donde dice goma, anotó 15. Describa una relación entre las longitudes del lápiz y la goma que utilizó Juan. Hágalo de tres maneras diferentes.

Primera: ____________________
Segunda: ____________________
Tercera: ____________________

4. Al medir con su lápiz, Pedro encontró que el ancho de la mesa mide 6 lápices. Además observó que:

1 lápiz = 3 gomas   1 lápiz = $1 + \frac{1}{4}$ tiras
1 lápiz = $\frac{1}{2}$ cordón   1 lápiz = $\frac{3}{4}$ de cuarta

Material:

- Una tira de cartoncillo de 16 cm de largo.
- Un cordón de 40 cm de largo.

¿Qué es más, 0 + 1 + 2 + 3 o 0 x 1 x 2 x 3?

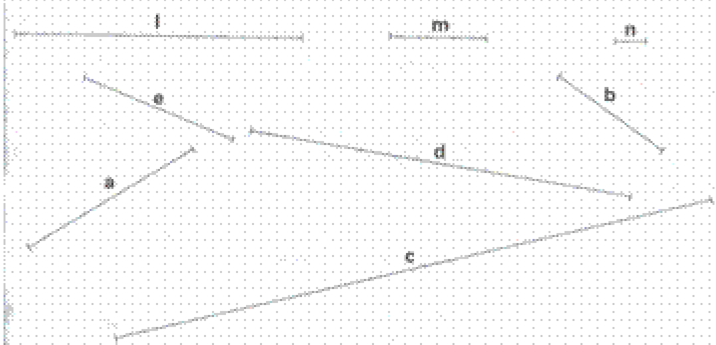
4. Anote los números que faltan en la siguiente tabla utilizando la información que obtuvo Pedro.

Unidades de medida	lápiz	goma	tira	cordón	cuarta
Medidas	6				

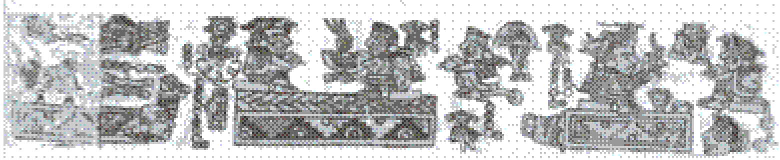
5. Utilice la información que obtuvo Pedro para completar lo siguiente:

1 goma = ... cordón 1 goma = ... tira
1 goma = ... cuarta 1 cordón = ... tiras

6. Utilice como unidades de medida los segmentos l, m y n para medir los demás segmentos. Por ejemplo, el segmento b mide m + n.



7. Utilice los segmentos l, m y n como unidades para trazar segmentos con las siguientes medidas: 2 n, 2 m + n, $\frac{3}{4}$ l, $\frac{1}{2}$ l + m



Actividad 3

Nuestros materiales de trabajo

Al conocer los libros del alumno, el maestro puede prever lo necesario para que las actividades resulten más interesantes.

1. Resuelva las siguientes lecciones en el L. T. M. 1°. Después conteste las preguntas que aparecen en seguida.

Material:

- Libros de texto, Matemáticas (L. T. M.) 1°, 2° y 3er grado

Lección 13 "Lo que cabe y lo que no cabe" (pág. 21).
Lección 15 "Grandes, medianas y chicas" (pág. 23).
Lección 17 "Los caminitos del puma y del león" (págs. 26 y 27)
Lección 61 "Compara distancias" (pág. 78).

¿En cuál de las lecciones que resolvió se hace una comparación solamente "a ojo"?

____

¿En cuál de las lecciones se realiza una comparación directa entre dos longitudes?

____

¿En cuál de las lecciones se utiliza una longitud intermediaria para comparar?

____

¿En cuál de las lecciones se utiliza una unidad arbitraria para medir?

____

¿Cuál es esa unidad arbitraria?

____

¿Qué otras unidades arbitrarias se podrían utilizar para realizar la misma actividad?

____

2. En el L. T. M. 2°, resuelva las siguientes lecciones, para que pueda contestar las preguntas que vienen después.

Lección 9 "Rayuela con corcholatas" (pág. 18).
Lección 13 "¿Cuántas varitas caben?" (pág. 24).

Lección 26 "Marca el camino" (pág. 40).
Lección 32 "Cuidemos el agua" (pág. 51).
Lección 60 "Los caminos del gallo" (pág. 92).
Lección 73 "¿Con qué vara se midió?" (págs. 110-111).
Lección 96 "La regla" (pág. 149).

a) Anote a continuación de cada lección cuál es la unidad de medida arbitraria que se usó para medir.

b) ¿En cuál de las lecciones que resolvió se hace primero una estimación y después se verifica con la unidad arbitraria?
____

c) ¿En cuál de las lecciones se propicia la necesidad de establecer una unidad de medida común?
____

d) ¿Cuáles son las características de la regla que se construye al resolver la lección de la página 149?
____

3. En el L. T. M. 3°, págs. 16 y 17, revise la lección "Medimos listones", para que pueda contestar las siguientes preguntas:

¿Cuáles unidades de medida se utilizan en esta lección?
____
____

¿En qué consiste la actividad de estimación que se plantea en esta lección? ______________________________
____

¿Cuáles unidades de medida utilizan los niños al realizar la última actividad de la lección?

____

Es importante que los niños midan con unidades arbitrarias como la "cuarta", antes de usar las unidades convencionales, para que puedan comprender el significado de medir, así como las ventajas que, en ciertas circunstancias, tiene el usar medidas convencionales.

4. En el mismo libro, resuelva la lección "Arreglos en el zoológico", págs. 62 y 63, y describa los aspectos sobre medición que se trabajan en ella. ____

____

____

Actividad 4

Veamos lo que hacen los niños

En esta actividad el maestro conocerá algunos procedimientos de medición que alumnos de 1º o de 2º grado ponen en juego.

Si usted atiende primero o segundo grado, realice con los niños la ficha 44 "Del más chico al más grande II". Observe lo que hacen los niños y las expresiones que utilizan al explicar sus procedimientos o cuando tratan de demostrar que su resultado es correcto.

Material:

☛ *Fichero de actividades didácticas. Matemáticas. Primer grado.*

1. Después de realizar la actividad, anote en su cuaderno sus puntos de vista en relación con las siguientes cuestiones:

a) El interés que despertó la actividad entre los niños.

b) Los procedimientos que utilizaron, las dificultades que encontraron.

c) Las dificultades que usted tuvo para realizar la actividad.

d) Las modificaciones que considera habría que hacer a la actividad a partir de su experiencia.

ANEXO 2

Tema 2
Perímetro y superficie

Uno de los errores frecuentes que se presentan en los problemas de medición consiste en confundir lo que significa medir el perímetro con la medición de la superficie.

Entre las razones que propician esta confusión, tal vez la más importante sea el uso prematuro de fórmulas que se dan como recursos aislados y carentes de significado.

Con las actividades de este tema, se pretende propiciar el uso de procedimientos informales para medir perímetros y superficies que ayuden a dar significado a los procedimientos formales.

Actividad 1

El terreno y la cerca

Para medir perímetros se utilizan unidades de medida de longitud. Para medir una superficie es necesario compararla con otra superficie.

1. Elija tres objetos planos diferentes que tenga a la mano y úselos como unidades de medida para medir tres veces la superficie de la mesa en la que está trabajando. Haga un registro en la siguiente tabla:

Unidades de medida	Medidas

¿Cuáles de los objetos que utilizó cupieron un número exacto de veces en la superficie de la mesa?

____

¿Cuál de las medidas que obtuvo cree que es más precisa?

____

¿Por qué?

____

2. Pedro midió la superficie de la mesa con una hoja de papel tamaño carta; la medida fue aproximadamente 14 hojas.

Material:

- Tres objetos planos (hojas, credenciales, tarjetas, etcétera.).
- Material recortable Nº 5.
- Un juego de Tangram (lo encuentra en el Recortable. Matemáticas. Primer grado).

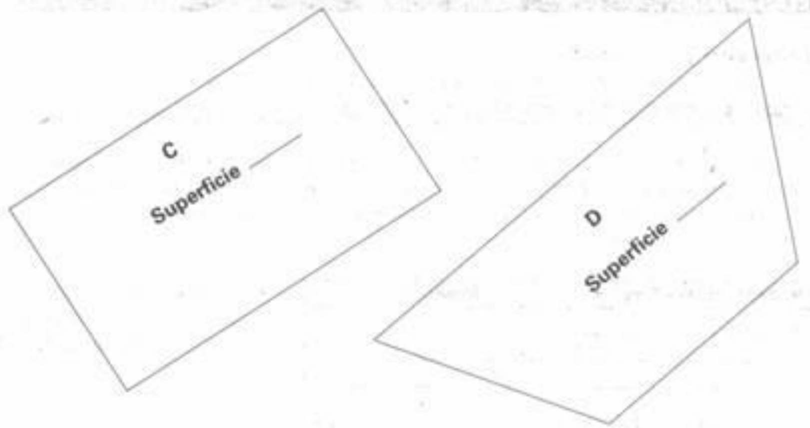
Coloque 10 sillas en una habitación cuadrada, de tal forma que haya el mismo número de sillas contra cada pared.

Después midió la superficie de la hoja de papel con una credencial, la medida fue 10 credenciales. ¿Cuánto mide aproximadamente la superficie de la mesa si se mide con la credencial?

____

3. Para medir la superficie de la mesa, Juan midió con los centímetros de su regla el largo y el ancho, después multiplicó esas medidas. ¿Qué unidad de medida utilizó Juan para medir la superficie de la mesa? ______________________

4. Utilice como unidades de medida las figuras del material recortable Nº 5 para medir la superficie de las figuras **C** y **D**.



5. Utilice las piezas del tangram para completar los datos que faltan en la siguiente tabla. Se trata de medir cada una de las piezas que aparecen en la primera columna con cada una de las piezas que aparecen en el primer renglón.

	triángulo mediano	triángulo chico	cuadrado	romboide
triángulo grande				
triángulo mediano		2		
romboide				
cuadrado			1	

6. El siguiente dibujo corresponde a un terreno de 750 metros de largo por 300 metros de ancho. El dueño quiere plantar árboles frutales alrededor del terreno de manera que haya 3 m de distancia entre cada árbol. ¿Cuántos árboles va a necesitar?

___

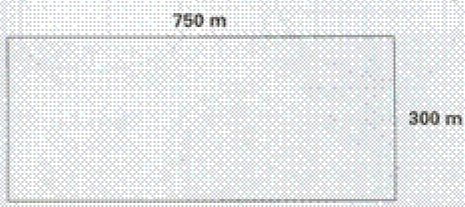
___

___

¿Cuántos árboles se necesitarían si estuvieran a 2 m de distancia uno de otro?

___

___



7. Si en lugar de árboles frutales se pusieran postes alrededor, a un metro de distancia uno de otro, ¿cree que la cantidad de postes que se necesitan coincida con la cantidad de metros que mide el contorno del terreno?

- Dibuje en su cuaderno algunos terrenos cuyo perímetro no pase de 12 metros, para verificar su respuesta.

Sin hacer cuentas, escriba el resultado que falta en la pirámide.
Verifique los resultados con la calculadora. ¿Qué regularidades encuentra en estas dos pirámides?

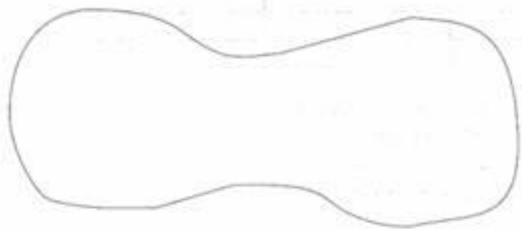
1 x 1	=	1
11 x 11	=	121
111 x 111	=	12321
1111 x 1111	=	1234321
11111 x 11111	=	

Actividad 2

Cuadros chicos y grandes

Existen varios recursos diferentes para calcular el área de una figura.

1. Determine, con el procedimiento que quiera, el área de la siguiente figura.



2. Calcule el área de cada una de las siguientes figuras.

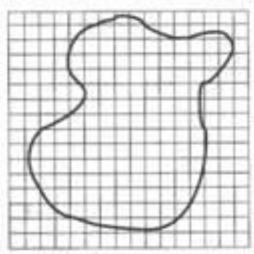


Figura A

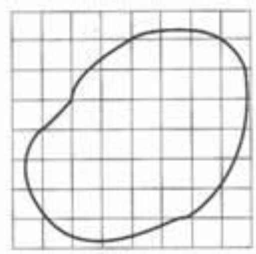


Figura B

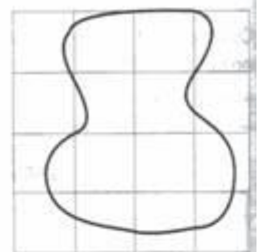


Figura C

¿Cuál tiene menor área? ______________________

¿Cuál es el área de cada figura?

figura A = ______ **figura B =** ______ **figura C =** ______

¿Cuál es el área de la figura **B**, medida en cuadros chicos?

____

¿Cuál de las tres figuras tiene mayor área? ______________

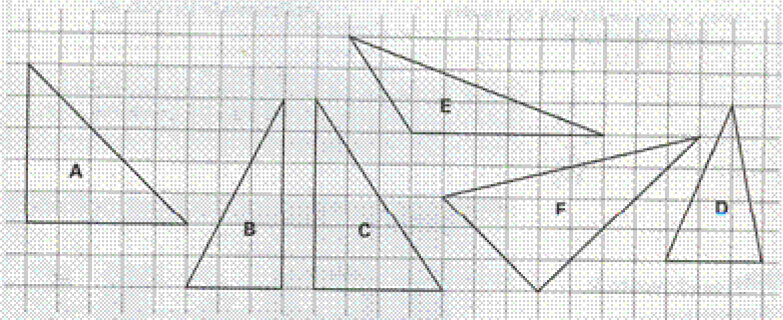
Observe que un cuadro grande equivale a 4 cuadros medianos o 16 cuadros chicos.

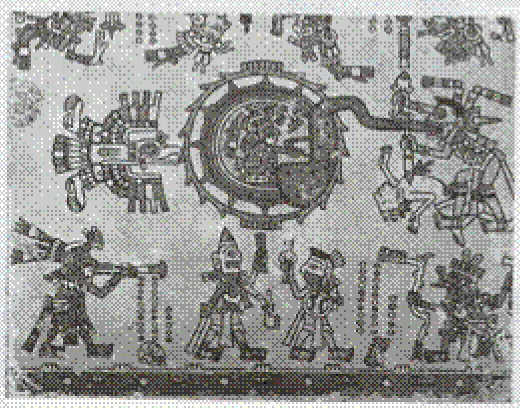
¿En cuál de las tres figuras la medida es más precisa?

Uno de los recursos para calcular el área de una figura es el cuadriculado. Entre más chica es la unidad, la medida es más precisa.

Si los cuadritos miden un centímetro por lado, se llaman ***centímetros cuadrados****.*

3. Utilizando como unidad de medida un cuadrito, calcule el área de las siguientes figuras:





4. Para calcular el área de la figura **F**, en un grupo de alumnos se utilizaron los siguientes procedimientos. Hay uno que da una medida aproximada y otro que es incorrecto. Averigüe cuál es el procedimiento incorrecto y explique por qué.

Procedimiento 1:

Contando los cuadritos, hay 8 cuadritos completos, 7 mitades de cuadrito y con las otras partes se forman como dos cuadritos. En total son:

$$\begin{array}{r} 8 \\ 3\frac{1}{2} \\ +\ 2 \\ \hline 13\frac{1}{2} \end{array}$$

Procedimiento 2:

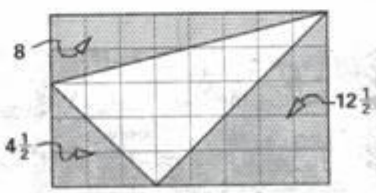
La figura es un triángulo rectángulo. la base mide 3 y la altura 5. Aplicando la fórmula es:

$3 \times 5 = 15$

$15 \div 2 = 7\frac{1}{2}$ **cuadritos**

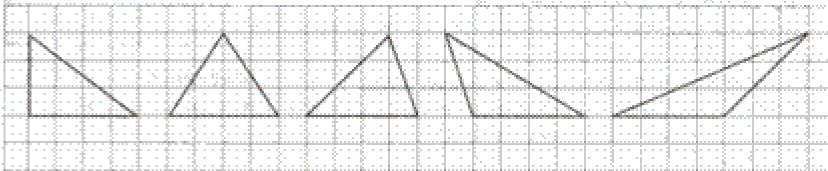
Procedimiento 3:

Se encierra el triángulo en un rectángulo de 5 x 8 = 40 cuadritos. Quitando las tres partes que sobran queda:



$$\begin{array}{r} 40 \\ -\ 12\frac{1}{2} \\ \hline 27\frac{1}{2} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 27\frac{1}{2} \\ -\ 4\frac{1}{2} \\ \hline 23 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 23 \\ -\ 8 \\ \hline 15 \end{array}$$

5. Calcule el área de cada triángulo usando como unidad de medida un cuadrito.



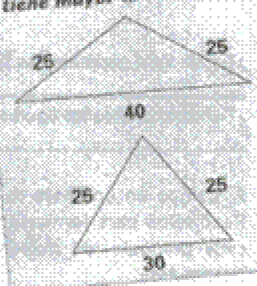
¿Por qué cree que todos los triángulos tienen la misma área a pesar de que no tienen la misma forma?

____

____

Seguramente observó que aunque los triángulos tienen diferente forma, todos tienen dos dimensiones iguales, una base y una altura. A eso se debe que tengan la misma área.

Los lados de un triángulo miden 25 m, 25 m y 30 m. Los lados de otro triángulo miden 25 m, 25 m y 40 m. ¿Cuál de los dos triángulos tiene mayor área?



Actividad 3

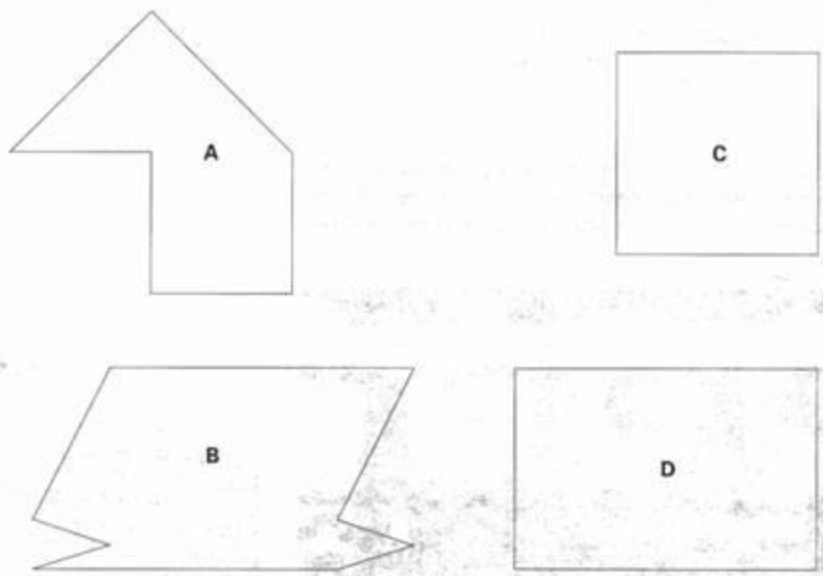
Las formas se transforman

Transformar figuras puede ayudar a encontrar maneras de calcular su área.

1. Calque las figuras **A** y **B** en una hoja blanca. Haga un corte recto en cada una, de manera que al acoplar las partes se formen, respectivamente, las figuras **C** y **D**.

Material:

- Hojas blancas.



¿Tienen igual perímetro las figuras **A** y **C**?

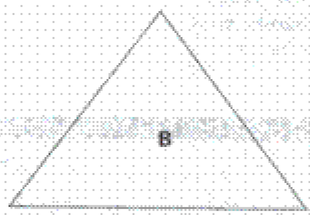
____

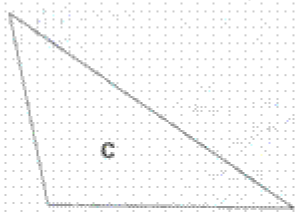
¿Tienen igual área las figuras **B** y **D**?

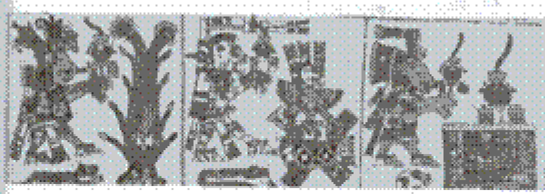
____

2. Calque en una hoja de papel los siguientes triángulos. Recórtelos para formar un rectángulo o un romboide con cada triángulo, de manera que ambas figuras tengan la misma área.

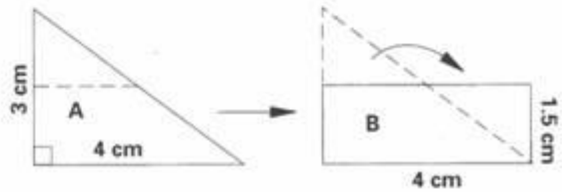
Pegue junto a cada triángulo el rectángulo o/el romboide que formó, y anote en ambas figuras la medida de una base y la altura correspondiente.







3. El triángulo **A** se transformó en el rectángulo **B**. Anote las operaciones con las que calcularía el área del rectángulo y el área del triángulo.



*El rectángulo **B** tiene igual área que el triángulo **A**. Observe que el área del triángulo **A** se puede calcular multiplicando la base por la mitad de la altura. ¿Qué pasaría si se multiplicara la altura por la mitad de la base?*

Transformar figuras sin aumentar ni disminuir su superficie, como se puede hacer con las piezas del tangram, ayuda a reflexionar sobre las nociones de área y perímetro.

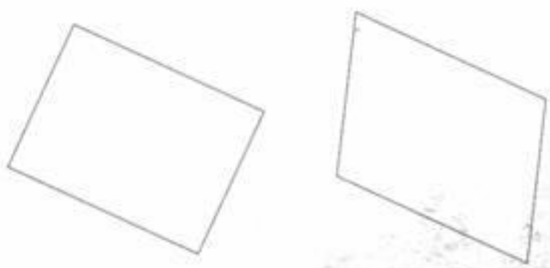
Actividad 4

Completando el triángulo

Un triángulo cualquiera se puede transformar en un rectángulo o en un romboide.

1. Anote, en centímetros, la medida de una base y de la altura correspondiente en cada figura.

Material:
- Recortable N° 6.



• ¿Cuál de las dos figuras cree que tiene mayor área?

____

• ¿Cuál cree que tiene mayor perímetro?

____

2. El material recortable 6 es un romboide con las mismas medidas que el de esta página. Úselo para cubrir el rectángulo, haciendo los cortes necesarios.

- ¿Se cubre exactamente el rectángulo con el romboide?

____

- ¿Es cierto que el rectángulo y el romboide tienen igual área? ¿Por qué cree que sucede eso?

____

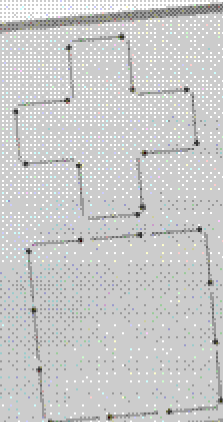
- ¿Qué medidas tienen en común el rectángulo y el romboide?

____

- ¿Es cierto que el rectángulo y el romboide tienen igual perímetro? __________ ¿Por qué? ______________

Un romboide se puede transformar en un rectángulo, conservando las medidas de la base y la altura. Entonces, el área de un romboide también se puede calcular multiplicando la base por la altura.

Suponiendo que todos los cerillos midan una unidad de largo, la figura 1 tendría un área de 9 unidades cuadradas y la figura 2 tendría un área de 5 unidades cuadradas. Con esos doce cerillos forme una figura cuya área sea 4 unidades cuadradas.



3. Con cada uno de los siguientes triángulos trate de formar un rectángulo o un romboide, agregando un triángulo igual, como en el ejemplo:

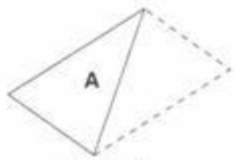


figura A

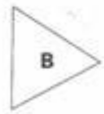


figura B

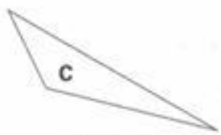


figura C

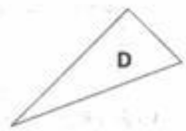


figura D

4. Calcule el área de las figuras que formó y anótelas en los espacios de abajo. ______________________

Figura A = __________ **Figura B =** __________
Figura C = __________ **Figura D =** __________

5. Anote en los espacios de abajo el área de cada uno de los triángulos originales.

Triángulo A = __________ **Triángulo B =** __________
Triángulo C = __________ **Triángulo D =** __________

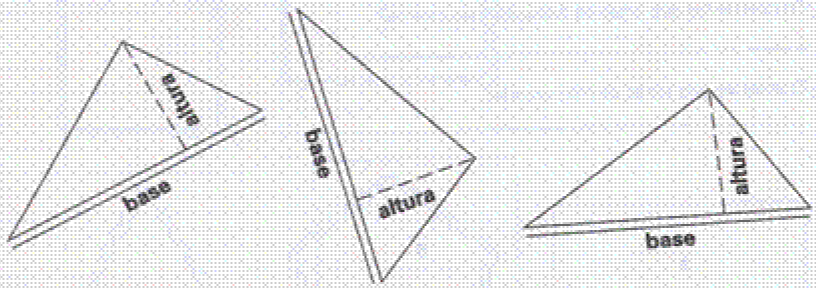
¿Qué relación hay entre el área de las figuras que formó y el área de los triángulos originales?______________________

Cualquier triángulo se puede convertir en un rectángulo o en un romboide, agregándole un triángulo igual.

Si el área del rectángulo o del romboide se puede calcular multiplicando la base por la altura, el área de un triángulo se puede calcular multiplicando la base por la altura y dividiendo el resultado entre dos.

Se tienen dos dados cúbicos; uno tiene una arista de 2 cm, la arista del otro es de 6 cm. ¿Cuántos cubos pequeños caben en el grande?

6. En el dibujo de abajo hay .... triángulos iguales. Mida la base y la altura señaladas en cada uno y compruebe que sus áreas son iguales.



Cualquier lado de un triángulo puede ser la base.

Para señalar la altura, hay que trazar una perpendicular entre la base y el vértice opuesto.

Actividad 5

La forma del corral

Un perímetro y una superficie se pueden medir de varias maneras.

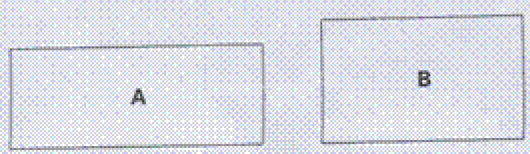
1. En el dibujo de abajo hay dos terrenos. Los dueños de los dos terrenos quieren cercarlos con tela de alambre y después sembrar alfalfa.

¿En cuál se gastará más tela de alambre?

____

¿En cuál se podrá sembrar más alfalfa?

____



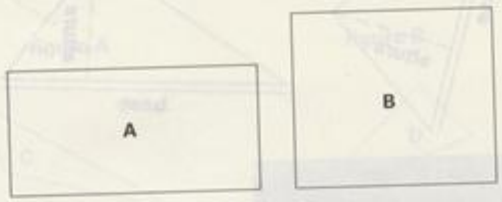
2. En el dibujo de abajo hay dos lonas para protegerse de la lluvia. Las dos lonas tienen cuerda alrededor para poder sujetarlas.

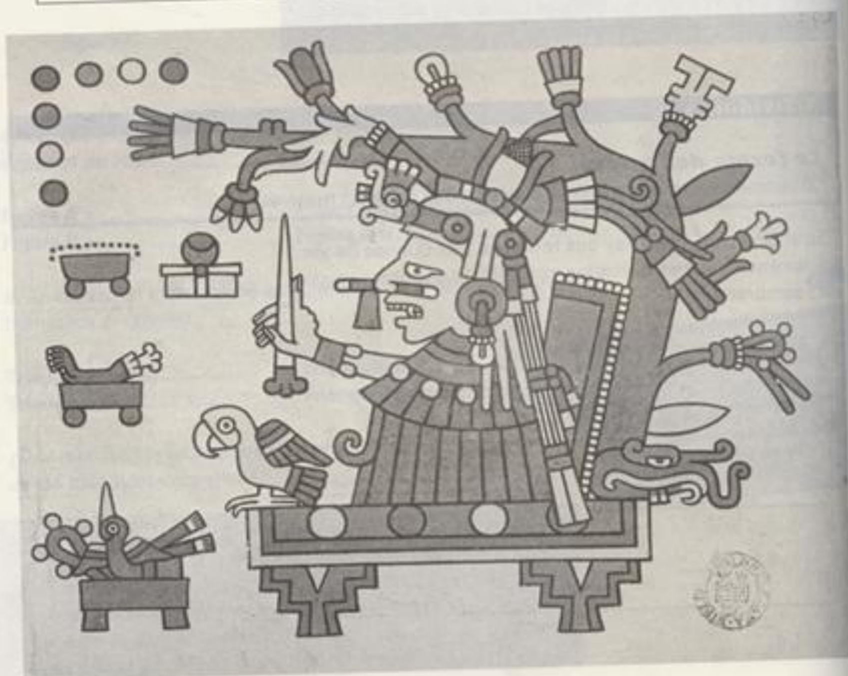
- ¿En cuál de las dos lonas se necesitó más cuerda?

____

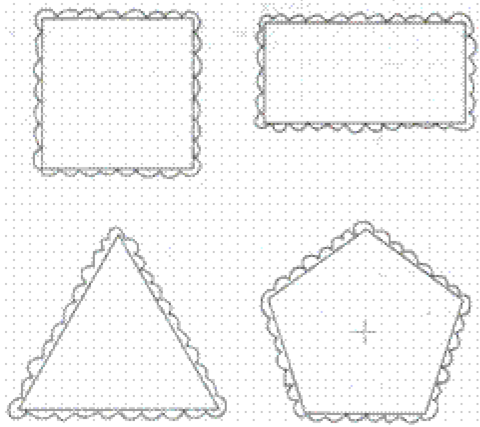
- ¿Cuál de las dos lonas es más grande?

____





3. En el dibujo de abajo hay 4 manteles con encaje alrededor.



• ¿En cuál de los manteles se usó más tela?

____

• ¿En cuál de los manteles se usó más encaje?

____

• ¿Cuál de los cuatro manteles es más grande?

____

La cantidad de metros de tela de alambre que se necesitan para cercar un terreno, la cantidad de metros de cuerda que hay alrededor de una lona o la cantidad de centímetros de encaje en un mantel, son los perímetros del terreno, de la lona y del mantel, respectivamente.

La cantidad de metros cuadrados de terreno sembrado de alfalfa, la cantidad de metros cuadrados de lona y la cantidad de centímetros cuadrados de tela para los manteles, son el área del terreno, de la lona y de los manteles, respectivamente.

4. Los terrenos **A** y **B** que aparecen dibujados abajo se quieren cercar con alambre de púas. En ambos terrenos se van a colocar cuatro hiladas de alambre, y se dejará una entrada de un metro de ancho.

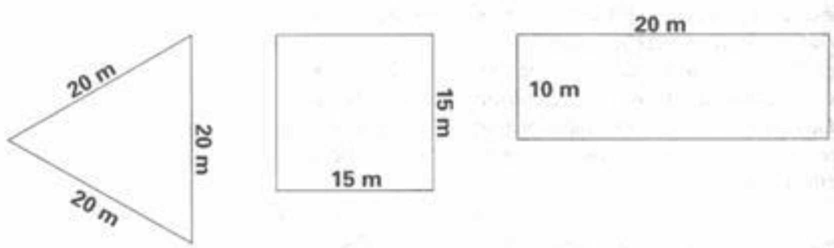
- ¿En cuál de los dos terrenos se usará más alambre?

- ¿Cuál de los dos terrenos tiene más área?

- ¿Cuál de los dos terrenos tiene más perímetro?

5. Un ganadero dispone de 60 metros de tela de alambre para construir un corral. ¿Qué forma le conviene darle al corral para que quepa más ganado? Trate de fundamentar su respuesta.

6. Averigüe, con el procedimiento que quiera, cuál de las siguientes formas le conviene al ganadero para hacer el corral. En los tres casos el perímetro es igual a 60 metros.



7. A continuación se proporcionan las dimensiones de varios rectángulos. Encuentre el perímetro y el área de cada uno.

Rectángulo	Largo	Ancho	Perímetro	Área
A	7 cm	5 cm		
B	9 cm	3cm		
C	11 cm	1 cm		
D	24 cm	2 cm		
E	16 cm	3 cm		
F	8 cm	6 cm		

¿Qué conclusiones se pueden desprender de los resultados anteriores? ____

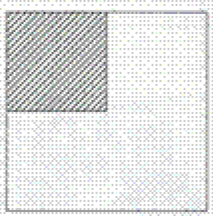
____

____

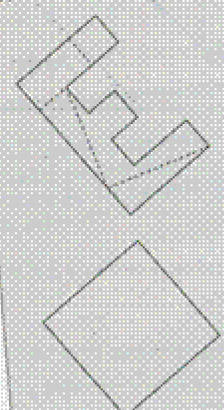
8. Un terreno cuadrado y otro rectangular miden, cada uno, 144 metros cuadrados de superficie. Calcule:

- La medida de un lado del terreno cuadrado.
- El perímetro del terreno cuadrado.
- Dos medidas posibles del terreno rectangular y el perímetro respectivo.

9. Un hombre era propietario de un terreno cuadrado. Al morir heredó la cuarta parte a la esposa y el resto a los cuatro hijos, con la condición de que lo subdividieran en cuatro lotes del mismo perímetro y la misma área. Encuentre las cuatro subdivisiones de la parte que no está sombreada.



Calque la letra E y recórtela sobre las líneas punteadas. Con las piezas que obtuvo cubra el cuadrado.



Actividad 6

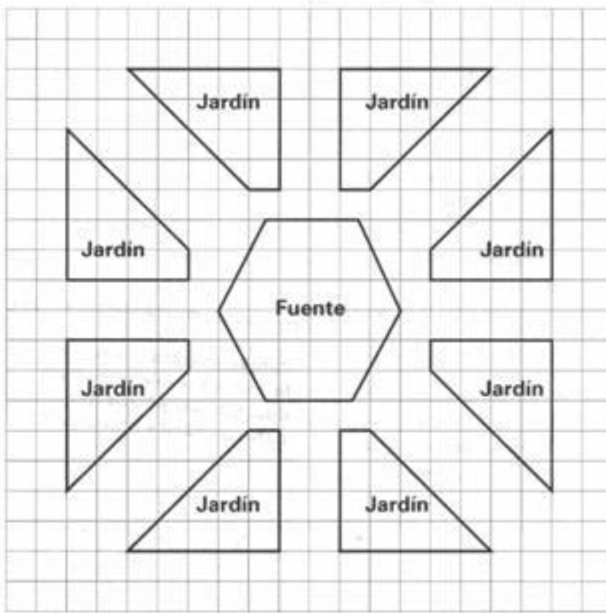
Croquis y planos

La triangulación es un procedimiento útil para calcular el área de cualquier polígono.

1. El dibujo de abajo es el croquis de un parque público. Calcule las medidas necesarias para contestar las preguntas. Utilice como unidad de medida un cuadrito.

Material:

- *Lecturas.*



- ¿Cuál es el área total que ocupan los jardines?

___

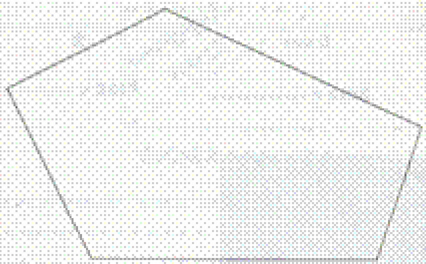
- ¿Cuál es el área de la fuente?

___

• ¿Cuál es el área de los andadores?

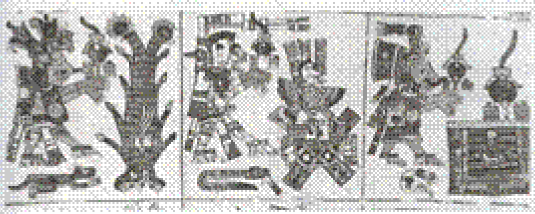
• ¿Cuál es el área del parque?

2. Calcule el área de la siguiente figura utilizando como unidad de medida un centímetro cuadrado.

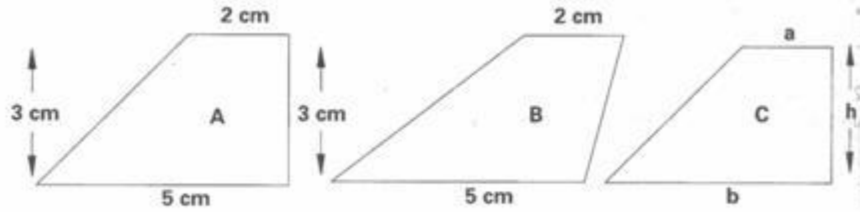


Un recurso útil para calcular el área de la figura de arriba es el de la triangulación.

Si un ladrillo pesa 4 Kg, ¿cuánto pesará otro ladrillo hecho a escala $\frac{1}{2}$ del primero?

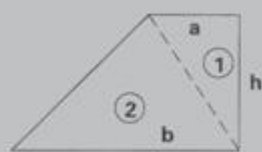


3. Utilice el procedimiento de triangulación para calcular el área de las siguientes figuras:



Área = ________ **Área =** ________ **Área =** ________

La figura **C** puede dividirse en dos triángulos:



El área del triángulo 1 es $\frac{ah}{2}$ el área del triángulo 2 es $\frac{bh}{2}$

el área de la figura **C** es $\frac{ah}{2} + \frac{bh}{2} = \frac{ah + bh}{2} = \frac{(a + b)\,h}{2}$

¿El resultado obtenido tiene algo que ver con la fórmula usual para calcular el área de un trapecio?

4. En el artículo "La matemática expulsada de la escuela" ("Lecturas", a partir del 2° párrafo de la pág. 20 hasta el 4° párrafo de la pág. 22), se describe una experiencia de clase sobre el cálculo del área de un trapecio. Léalo y después conteste las siguientes preguntas:

¿Cuántos procedimientos distintos utilizaron los niños a los que se hace referencia en el artículo, para calcular el área de un trapecio? ________________________________

____

____

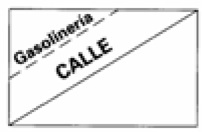
____

Si los niños no conocían la fórmula respectiva, ¿cómo se explica que hayan podido calcular el área? ______________________

____

____

5. Roberto vendió la mitad de su terreno para la construcción de una calle y una gasolinería. Observe el dibujo y conteste las preguntas.



ESCALA: 1mm = 3m

¿Cuál es el área del terreno completo?

____

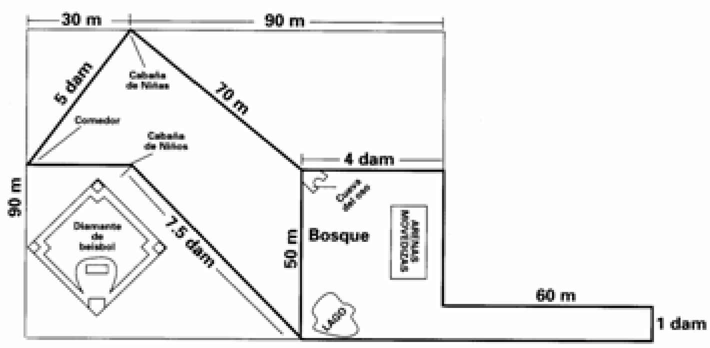
¿Cuál es el área de la parte vendida?

____

¿Cuál es el área del terreno que ocupará la gasolinería?

____

6. Los alumnos de una escuela fueron a un campamento. Abajo aparece el mapa del campamento.



Tomando en cuenta que las líneas gruesas del mapa son las banquetas y que sólo se puede caminar por ellas, conteste:

a) Para que los niños puedan ir de su cabaña a la cueva del oso,

____

b) ¿Cuánto mide el perímetro del bosque?

____

c) ¿Cuánto mide el perímetro de todo el campamento?

____

d) ¿Cuál es el área del bosque?

____

e) ¿Cuál es el área de la zona donde están las cabañas y el comedor?

____

Actividad 7

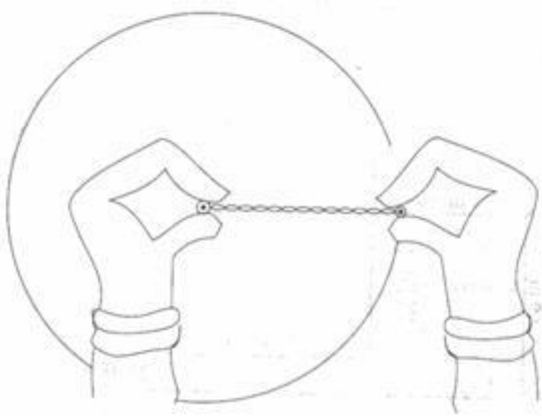
Las ruedas del carrito

En esta actividad se analiza la relación entre una circunferencia y su radio.

1. Uno de los recursos que se utilizan para trazar una circunferencia es el que se muestra en el dibujo de abajo.

Material:

- $\frac{1}{4}$ de cartulina.



Si aumenta la longitud del radio, también aumenta la circunferencia. Si disminuye la longitud del radio, también disminuye la circunferencia.

¿Cree que si la longitud del radio aumenta al doble, suceda lo mismo con la longitud de la circunferencia?

____

¿Cómo lo podría comprobar?

____

____

¿Cómo llegar a medir 5 litros de agua con un recipiente de 7 litros de agua, y con otro de 3 litros?

2. Las ruedas de un carrito de juguete miden 1 cm de radio.

¿Qué distancia, más o menos, avanzará el carrito si las ruedas giran una vuelta completa?

____

¿Y si las ruedas midieran 2 cm de radio?

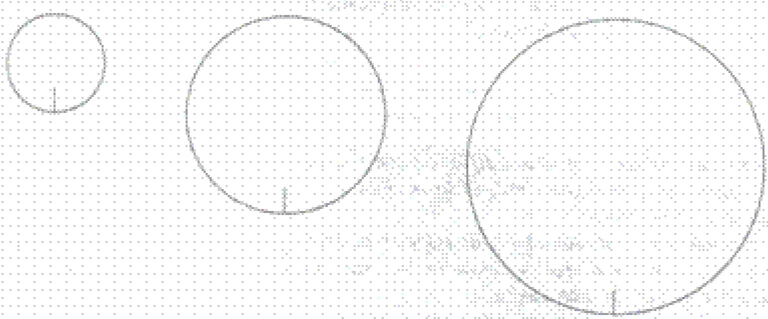
____

¿Y si las ruedas midieran 3 cm de radio?

____

3. Para comprobar sus respuestas, haga lo siguiente:

- Trace en un pedazo de cartoncillo tres circunferencias, una de 1 cm de radio, una de 2 cm de radio y una de 3 cm de radio.
- Recórtelas y póngales una marca, como se ve en el dibujo.



- Trace una línea recta y márquele un punto de partida. Después, haga girar una vuelta completa cada rueda. Marque en cada caso el punto de llegada.

¿Cuánto se avanza con una vuelta de la rueda chica?

4. Complete la siguiente tabla.

Medida del radio de las ruedas	Distancia que avanza el carrito en una vuelta
1 cm	
2 cm	
3 cm	
4 cm	
5 cm	
6 cm	

¿Qué relación hay entre la distancia que avanza una rueda al dar una vuelta y la medida de su radio?

¿Qué relación hay entre la distancia que avanza una rueda al dar una vuelta y la medida de su diámetro?

El perímetro de una rueda es igual a la distancia que avanza la rueda al dar una vuelta completa. Es la medida de la longitud de la circunferencia.

Como se puede ver en la tabla, hay una relación directamente proporcional entre la medida del radio de la rueda y la distancia que avanza en una vuelta.

La longitud del radio cabe aproximadamente 6.2 veces en la longitud de la circunferencia.

La longitud del diámetro cabe aproximadamente 3.14 veces en la longitud de la circunferencia.

5. ¿Cuál es la longitud de la circunferencia si el radio mide 10 cm?

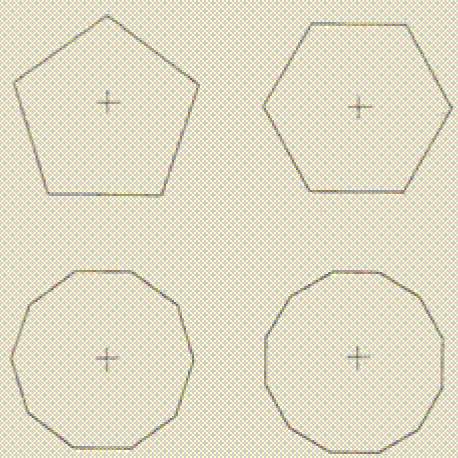
6. ¿Cuál es la longitud del radio si la circunferencia mide 60 cm?

Actividad 8

Otra vez el corral

Sabiendo calcular el área de un triángulo, se puede calcular el área de cualquier polígono.

1. ¿Recuerda el problema del corral para borregos? Las siguientes figuras son dibujos a escala de otras formas que puede tener el corral.



- El perímetro de los cuatro polígonos mide 60 metros. Anote en cada polígono la medida de uno de sus lados.
- Divida cada polígono en triángulos iguales, de manera que el número de triángulos coincida con el número de lados que tiene el polígono.
- Calcule el área de cada uno de los triángulos. Los dibujos están a escala: 2 mm representan 1 metro.

- Calcule el área de cada polígono.

Pentágono: ____________ **Hexágono:** ____________
Decágono: ____________ **Dodecágono:** ____________

¿Cuál cree que sea el área del corral si su forma es un polígono regular de 20 lados? ____________

2. Como podrá observar, conociendo el área de uno de los triángulos, basta con multiplicar por el número de triángulos para calcular el área del polígono.

- Describa una fórmula que sintetice el procedimiento anterior:
  A = ____________

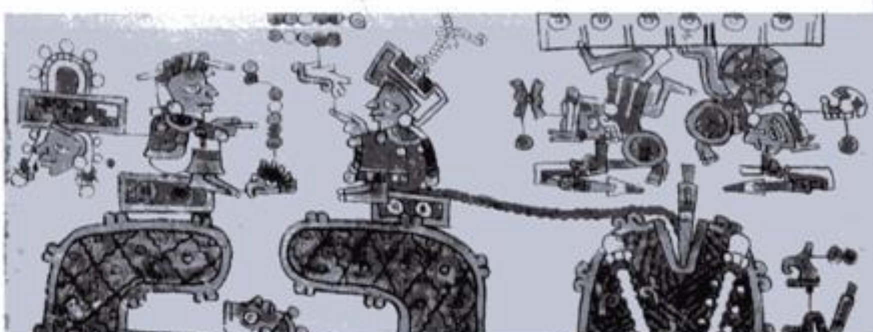
3. Debajo de cada fórmula escriba el nombre de la figura cuya área se puede calcular.

$A= \frac{(b \times h)8}{2}$ ____________

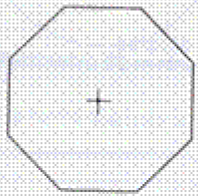
$A= \frac{(b \times h)10}{2}$ ____________

$A= \frac{(b \times h)50}{2}$ ____________

$A= \frac{(b \times h)n}{2}$ ____________



4. En algunos libros de matemáticas aparece esta fórmula: $\frac{P \times a}{2}$ para calcular el área de los polígonos regu-regulares. La letra **P** es el perímetro del polígono y la letra **a** es el apotema, es decir, la altura de un triángulo. Calcule el área de la siguiente figura, utilizando estas dos formulas: $A = \frac{(b \times h) \times 8}{2}$; $\frac{P \times a}{2}$

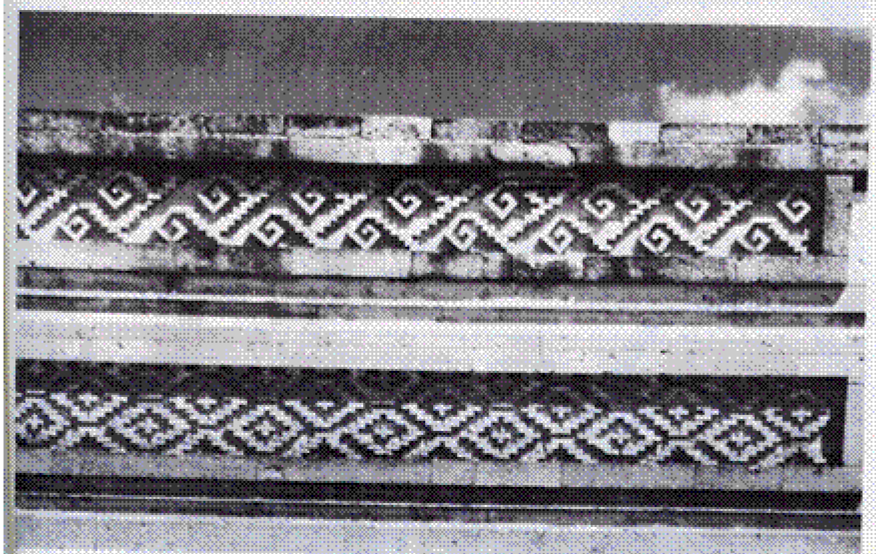


¿Por qué cree que se obtiene el mismo resultado con los dos procedimientos?

____

____

____



Actividad 9

De muchos lados

Al aumentar el número de lados de un polígono regular, éste se va pareciendo a un círculo.

1. El dibujo de abajo es un polígono regular de 24 lados. Calcule el área del polígono utilizando las siguientes fórmulas: $A = \frac{(b \times h) \times 24}{2}$; $A = \frac{P \times a}{2}$

Sin hacer ningún otro cálculo, dé una aproximación del área del círculo que circunscribe al polígono de 24 lados.

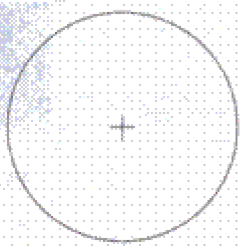
2. Observe que, al aumentar el número de lados, el polígono se parece más a un círculo y la longitud del apotema se aproxima a la longitud del radio.

De acuerdo con lo anterior, se puede desprender una fórmula para calcular el área del círculo:

Área de polígonos regulares	Área del círculo
$A = \frac{P \times a}{2}$	$A = \frac{P \times r}{2}$

Para terminar con el problema del corral para borregos, determine cuál sería el área si el corral fuera circular. Recuerde que el perímetro debe ser 60 metros.________________________

____



Perímetro 60 metros

Finalmente, ¿cuál es la forma que más le conviene al ganadero para hacer el corral? ______________________________

____

3. Calcule el área de las partes sombreadas en cada una de las siguientes figuras.

Describa su procedimiento:

____

____

____

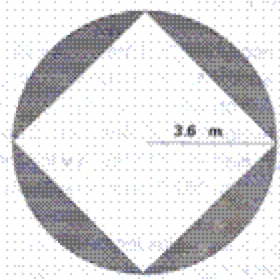
____

____

____

____

____



Describa su procedimiento:

____

____

____

____

____

____

____

____

____