CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS
DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
DEPARTAMENTO DE INVESTIGACIONES EDUCATIVAS

LAS SITUACIONES DE REPARTO PARA LA ENSEÑANZA DE LAS FRACCIONES. APORTES PARA LA ELABORACIÓN DE UN ESTADO DEL CONOCIMIENTO

Tesis que para obtener el grado de Maestra en Ciencias con Especialidad en Investigaciones Educativas

Presenta

Martha Dávila Vega
Licenciada en Educación Primaria

Director de tesis

David Francisco Block Sevilla
Doctor en Ciencias

Octubre/2002

CALZADA TENORIOS No. 235 México, D.F. C.P. 14330 APARTADO POSTAL 86-~~355 Tel. 5 483 28 00~~ Fax DIE 5 603 39 57

A mi mac
a mis hijas Martha y Patri(
a Héctor, Víctor, Andrea
a Os
a todos ellos a quienes he descuida
durante un largo tiempo, con el propósito
de cerrar una etapa más de mi vida.

AGRADECIMIENTOS

A David Block Sevilla, por haberme estimulado para superarme, por su paciencia, su confianza, su apoyo, su asesoría, sus atinadas observaciones y por sus esfuerzos para lograr la culminación de este trabajo.

Irma Fuenlabrada Velázquez y Alicia Avila Storer, por la lectura minuciosa de este documento, por sus observaciones, sus comentarios y sus cuestionamientos.

Laura Reséndiz por la ayuda incondicional que me brindó.

Patricia Martínez Falcón por su amistad, su confianza y por su apoyo.

A las autoridades de la escuela que permitieron la realización de la investigación que presento en este documento.

las maestras de los grupos en los que se llevó a cabo la experimentación que aportó elementos importantes para mejorar la enseñanza de las fracciones.

A Elisa Bonilla Rius, Hugo Balbuena Corro, Ma de los Angeles Olivera Bustamante. Irma G. Pasos Orellana, Silvia García Peña, Adriana Loeb García y a Delia Montes, por el apoyo que me brindaron.

Las situaciones de reparto para la enseñanza de las fracciones. Aportes para la elaboración de un estado del conocimiento[1]

Lic. en Educ. Prim. Martha Dávila Vega

Resumen

Este trabajo presenta una revisión bibliográfica de una parte representativa de la abundante producción de investigaciones que se han realizado sobre el papel de las situaciones de reparto en el aprendizaje de las fracciones. En los dos primeros capítulos se aborda una problemática más amplia en aras de situar las situaciones de reparto en el proceso de enseñanza y de aprendizaje de las fracciones.

En una primera parte, se presentan los resultados de algunos estudios diagnósticos destacando las dificultades que enfrentan los niños en el proceso de aprendizaje de las fracciones. En la segunda parte, se presentan aportes teóricos de cinco investigadores sobre la comprensión de la complejidad conceptual desde el punto de vista de su aprendizaje y de su enseñanza (Kiern, Freudenthal, Vergnaud, Nadine y Guy Brousseau).

En el capitulo tres, se presentan las investigaciones directamente relacionadas con el papel que desempeñan las situaciones de reparto en el aprendizaje de las fracciones. El trabajo destaca: 1) la diversidad de aspectos y de variables que han sido considerados en el estudio de las fracciones mediante las situaciones de reparto; 2) las posibilidades que ofrecen estas situaciones para el aprendizaje de las fracciones así como sus límites y, 3) la necesidad de articular los resultados de estas investigaciones con el fin de diseñar secuencias didácticas a lo largo de toda la educación básica que permitan aprovechar de mejor manera las situaciones de reparto en la enseñanza.

Plantea la necesidad de que las situaciones de reparto se acompañen de otro tipo de situaciones que permitan trabajar los mismos aspectos que se ponen en juego a través de las situaciones de reparto y aquellos que no pueden abordarse mediante éstas. Por otro lado, propone revisar y mejorar la jerarquización de los aspectos y situaciones que se proponen sobre el reparto a lo largo de la primaria en los programas de estudio vigentes en México a partir de 1993 ye n los materiales de apoyo para la enseñanza de las matemáticas además de ofrecer una propuesta de los aspectos que pueden trabajarse a lo largo de toda la primaria a través de las situaciones de reparto.

[1] Tesis presentada para obtener el grado de Maestr{ia en Ciencias en la Especialidad de Investigaciones Educativas. Departamento de Investigaciones Educativas del CINVESTAV-IPN, México, D. F. (2002).

The "sharing" situations in the teaching of common fractions. Contributions to the making of an state of knowledge[1]

Martha Dávila Vega, B. Sc on Elementary Education

Abstract

This paper offers a bibliographical review about a significant part of the copious investigations about the role of situations of *sharing* within the context of the teaching and learning process of fractions. The first two chapters deal with a wider issue, in order to place that situations within the mentioned process.

In the first part, results of some works of diagnosis are shown, where difficulties that children confront through the learning process of fractions are highlighted. In the second part, theoretical contributions, authored by five researchers, to the understanding of the conceptual complexity of this issue are given; (Kieren, Freudenthal, Vergnaud, Nadine and Guy Brousseau). The chapter three organizes and presents those investigations directly linked with the role played by the situations of sharing in the learning of fractions.

This paper emphasize: 1) The diversity of aspects and variables considered in the study of fractions from the point of view of the situations of sharing; 2) The possibilities that those situations offer to enrich the learning process of fractions and to overcome its limits; 3) The need to integrate the outcomes of those investigations to design didactical series through the primary education, in order to take the best advantage of the situations of sharing related with the learning process.

It also outlines those issues that can not be analyzed by sharing situations and the need to work with other kind of situations. On the other hand, this work also intends to review and enhance the hierarchy of aspects and situations -concerned with sharing - that have been proposed as a subject of the elementary curricula in México since 1993, and that has also been suggested as ancillary material for the teaching of Mathematics. The paper presents a suggestion about those aspects than can be worked through the complete elementary cycle with the help of sharing situations.

[1] Paper presented to graduate as M. Sc with the major field of study in Educative Researches. Departamento de Investigaciones Educativas, CINVESTAV-IPN, México, D. F., 2002 .

INDICE

INTRODUCCIÓN

Una maestra enseña a sus alumnos cómo obtener el número de enteros que hay en una fracción; para ello trabaja con la fracción $\frac{20}{12}$ y tiene dibujados en el pizarrón dos rectángulos. Mirna, una alumna, pregunta a la maestra[1]:

Mirna: (interrumpe a la maestra) *"Ahí en el doce, ¿lo divide en doce, luego lo divide en veinte o cómo?".*

Mta.: *"¿Cómo?"*

Mirna: *"Es que Nina* (su compañera) *y yo no le entendemos ahí, usted nos dijo que el doce lo divide entre veinte y le saca un entero y después le pone otro entero".*

Mta.: *"¿Aquí?* (señala el pizarrón)*".*

Mirna: *"No, en el veinte, es que el doce divide en doce partes ¿no? el entero. Entonces, luego para ocupar veinte ¿cómo le hace?".*

Mta.: *"Por eso, mira ¿para que tú puedas obtener aquí un entero, dices* (señala la división que está en el pizarrón)".

Mirna: *"¡No!".*

Mta.: *"¿Sí?"*

Mirna: *"¡No!, le estoy diciendo que no, que yo..."*

Mta.: (Interrumpe a Mirna) *"A ver, ¿cuál es tu pregunta?"*

Mirna: *"O sea que usted dice... que el denominador lo divide en doce* (al entero) *y luego entonces, ¿cómo están veinte ahí? ... ¿cómo le va a hacer? ..."*

Mta.: *"Bueno, mira, únicamente voy a hacer esto para poder yo obtener mi entero* (hace la división oralmente), *tengo veinte ¿sí? ... Alicia* (pregunta a otra alumna)*, un entero ¿en cuántas partes lo voy a dividir?"*

[1] El fragmento de clase que se muestra a continuación es parte de la ponencia "La formación de profesores de primaria en el área de matemáticas: aportes para una revisión", realizada por Avila, A. Méndez, R. presentada en el Simposio Nacional sobre procesos de la lengua escrita y la matemática. Organizado por la Universidad Pedagógica Nacional del Estado de Aguascalientes (junio de 1990).

Coro: *“¡En doce!”*

Mta.: (Anota la división 20:12)*. “En doce. ¿Cuántas veces me cabe el doce en el veinte?”*

$$12\overline{)20}$$

Ns.: *“Una”*

Mta. (Anota uno como cociente). *“Una ¿y cuántas me sobran?”*

$$\begin{array}{r} 1 \\ 12\overline{)20} \end{array}$$

Ns.: *“Ocho”.*

Mta. (Anota el 8 en el residuo).

$$\begin{array}{r} 1 \\ 12\overline{)20} \\ 8 \end{array}$$

Mta. *“Ocho. Esta es parte de otro entero”.*

Mirna. *“Entonces, ¿cómo le hace para sacar los veinte?”*

Mta.: *“Porque hay una regla que lo está considerando. O sea, mira esto* (señala la división)*, el de arriba te está diciendo que es un entero, pero te sobra, es un entero y me sobran ocho partes ... ¿Sí?... ¡Fíjate, es una regla, se puede decir que es una regla porque si el numerador es mayor que el de abajo, siempre puedes obtener enteros... Simplemente haces una división ... ¿ya le entendiste?”*

Mirna. (En silencio hace un gesto de duda).

Mta.: *“Fíjate bien, mientras el numerador sea mayor que el denominador podemos obtener enteros y si te faltan fracciones, partes del numerador, para que puedas completarlas. Es lo que te queda en la división. ¿Sí?*

Mirna: (Con gesto de molestia). *“¡Ya me volvió a enredar!”*

Mta.: *“¿Ya te volví a enredar? (*se nota nerviosa)*”*

Mirna: (Molesta) *“!Mejor después nos lo explica¡”*

Este fragmento me evoca no pocas situaciones similares que viví a lo largo de mi experiencia como maestra en mis clases de matemáticas, y que sé que muchos de mis compañeros maestros también han vivido, particularmente al trabajar con el tema de las fracciones.

Igual que la maestra de este registro, cuando los alumnos me cuestionaban o cuando trataba de aclarar sus dudas, más que explicar, repetía las reglas, reglas a cuya validez nos remitimos y nos aferramos porque no tenemos otro recurso. Entre mis compañeros frecuentemente se comentaba que el tema de las fracciones no solamente era difícil para los alumnos, sino que también lo era para nosotros los maestros.

Fueron en parte estos recuerdos y la experiencia como ayudante de investigación en el DIE[2], lo que me motivó a realizar, hace ya varios años, mi primer trabajo de investigación en el que estudié este tema: La enseñanza de las fracciones en la escuela primaria. En los años de 1986-1988 participé como auxiliar en el desarrollo de una investigación sobre la enseñanza de algunos aspectos de la noción de fracción en la escuela primaria[3] y no tuvo que pasar mucho tiempo para que empezara a darme cuenta de que la dificultad del tema de las fracciones no radica solamente en el hecho de que los maestros no "sepamos enseñarlo".

Posteriormente, a finales del año escolar 1987-1988, retomé uno de los problemas que quedaron abiertos en dicha investigación, para realizar mi primer trabajo propio: un estudio sobre la enseñanza de las fracciones, con alumnos que cursaban el primero y el segundo grado de la educación primaria, con el propósito de explorar las posibilidades didácticas de los problemas de reparto equitativo y exhaustivo. Los resultados de esta investigación los presenté como tesis de licenciatura (Dávila 1991), y publiqué un artículo (Dávila, 1992).

Hoy en día puede decirse que los resultados pobres en la adquisición de esta noción están documentados en muchos países ya que hace más de 30 años, numerosos estudios sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas se han abocado a estudiar la complejidad particular de la noción de fracción.

Ahora, con el presente trabajo, vuelvo sobre la misma problemática que abordé en aquel momento: las posibilidades didácticas de los problemas de reparto. Mi intención no es abordar un aspecto más de la noción de fracción mediante otro estudio experimental, sino atender a otra necesidad que se vuelve cada día más apremiante: aportar elementos para la realización de un "estado del conocimiento" sobre la problemática de la enseñanza y del aprendizaje de la noción de fracción. Para ello realicé una revisión, que si bien no es exhaustiva, espero que sí sea representativa de los numerosos estudios que se han llevado a cabo en los últimos treinta años sobre el tema.

Los propósitos del presente estudio son, por lo tanto:

---

[2] Departamento de Investigaciones Educativas del-CINVESTAV-IPN

[3] Los estudios sobre la noción de fracción como cociente que realizaron en sus tesis respectivas Block (1987) y Blabuena (1988).

- Ubicar la problemática del reparto en el contexto amplio de la enseñanza de las fracciones considerando los acercamientos de algunas de las investigaciones más representativas.

- Presentar de manera organizada y comentada la diversidad de estudios que se han realizado, en México y en otros países sobre la complejidad de la enseñanza de las fracciones y la problemática del reparto como fuente de problemas para la enseñanza de ciertos aspectos de la noción de fracción;

- Destacar los aspectos estudiados sobre las situaciones de reparto, los referentes teóricos, los resultados con las que se cuenta, las tendencias recientes, y, de ser posible, las lagunas, las líneas de investigación o las acciones que se puedan realizar a partir de lo que ya conocemos.

En el primer capítulo de este trabajo presento cuatro estudios diagnósticos en los que, por un lado, se puede observar una evolución en la manera en la que los investigadores conciben a la matemática misma, el cómo se enseña y el cómo se aprende. Por otro lado, se ponen de manifiesto las numerosas dificultades específicas que enfrentan los alumnos para comprender la compleja noción de fracción, después de un largo proceso de enseñanza escolar. En la última parte del capítulo se presentan otros estudios que explican algunos de los orígenes de dichas dificultades.

En el segundo capítulo revisaremos, brevemente, cuatro líneas de investigación sobre la complejidad de este tema, en donde los investigadores analizan los diferentes significados que subyacen a la fracción, la importancia de considerar en el proceso enseñanza y de aprendizaje esta polisemia así como a la familia de problemas que las implican.

En la última parte de este capítulo se presenta de manera muy resumida un estudio didáctico realizado por Nadin y Guy Brousseau sobre los números decimales en cuya secuencia coexisten los decimales y las fracciones y se articulan sus diferentes significados.

Finalmente, el tercer capítulo se dedica al tema central de esta tesis: las fracciones en situaciones de reparto. Se organiza y se presenta una parte representativa de la abundante producción en investigación sobre este tema. Entre las investigaciones consideradas, se incluye la que realicé yo misma en 1991.

Por último, a manera de comentario final, presento los resultados de esta revisión bibliográfica, las posibles líneas de investigación que pueden seguirse a partir del conocimiento que ya se tiene, sobre los diferentes aspectos de la fracción estudiados, alrededor de las situaciones de reparto.

I DIFICULTADES EN EL APRENDIZAJE DE LAS FRACCIONES

Los estudios diagnósticos e investigaciones realizadas, en diferentes épocas sobre la enseñanza y el aprendizaje de las fracciones, por un lado, permiten ver que dicha problemática no es nueva ni compete sólo a los maestros y a los alumnos mexicanos y, por otro lado, ponen de manifiesto una evolución en la manera de concebir a la matemática misma, el cómo se enseña y cómo se aprende.

En este apartado presentaré cuatro de los numerosos estudios diagnósticos con los que se han identificado los errores más frecuentes que cometen los alumnos al trabajar con fracciones, así como el resultado de investigaciones que aportan elementos para entender el origen de algunas de esas dificultades manifestadas por los alumnos para comprender la noción de fracción y su operatoria.

I.1 UN CAMBIO DE PERSPECTIVA A LO LARGO DE CUATRO DÉCADAS

Uno de los primeros estudios diagnósticos fue realizado en Escocia por Gardner en 1941. Este estudio fue reportado brevemente por Kieren (1976), quien señala que el propósito de esta investigación era conocer los errores que cometían los alumnos al operar con fracciones para sugerir al maestro tareas que les permitieran mejorar su habilidad para operar. Señala que Gardner trabajó con una muestra de 24,000 operaciones de suma, resta, multiplicación y división de fracciones resueltas por alumnos.

Si bien Kieren no indica de qué manera resolvieron los alumnos esas operaciones, señala que el 36% de las operaciones de suma y un poco más del 50% de las divisiones tuvieron errores y destaca que Gardner concluyó que tales errores se debían a una falta de comprensión de parte de los alumnos, sobre el proceso que se debe seguir al operar, o bien al emplear algoritmos erróneos.

A partir de esta breve descripción del estudio diagnóstico de Gardner se observa una concepción aún vigente en muchas escuelas: saber matemáticas significa saber resolver los algoritmos convencionales, por lo que se privilegia en la escuela su mecanización para desarrollar la habilidad de los alumnos en el cálculo numérico. El hecho de atribuir la responsabilidad de los errores a los alumnos, da cuenta de que en ese momento no estaba en cuestión si esos errores tenían o no alguna relación con la manera en la que se enseñaban las fracciones en la escuela.

Treinta y seis años después, en Londres, Inglaterra el equipo de Kathleen Hart (1981), aplicó en 1977, dos evaluaciones escritas que fueron resueltas por una muestra de aproximadamente 1 000 alumnos de 16 escuelas secundarias públicas. Las edades de los examinados oscilaban entre los 12 y 15 años de edad. La primera evaluación fue diseñada para los alumnos de 12 y 13 años y la segunda, para los de 14 y 15.

Los exámenes constaban de dos partes, la primera estaba conformada por diversos problemas de suma y resta y algunos problemas de multiplicación y división de fracciones, planteados en contextos continuos o discretos a través de un texto o de gráficos. La segunda parte, contenía una serie de operaciones, descontextualizadas, expresadas de la manera convencional, que por cierto, eran las operaciones con las que se pueden resolver los problemas de la primera parte del examen. Además, Hart y su equipo entrevistaron a algunos alumnos con el propósito de indagar lo que habían pensado para resolver el examen.

Antes de aplicar estos exámenes Hart y su grupo consideraban que los alumnos iban a tener más éxito en la resolución de las operaciones que en la resolución de los problemas. A nivel general, el resultado de las evaluaciones fue el siguiente:

- La mayoría de los alumnos tuvo más éxito con los problemas que con las operaciones[4]. Al parecer los alumnos no lograron establecer alguna relación entre las operaciones que conocían y los problemas que se podían resolver con ellas. Por ejemplo, frente al problema:

[4] A un resultado similar llegan T. y D Carraher y A. Schliemann (1991), en un estudio realizado fuera y dentro de la escuela con niños que trabajan.

Una carrera de relevos se corre en etapas de $\frac{1}{8}$ *km. Cada corredor cubre una etapa.*

¿Cuántos corredores se necesitan para cubrir una distancia total de $\frac{3}{4}$ *km?*

Si bien el 30% de la muestra pudo resolver la división $\frac{3}{4} \div \frac{1}{8}$ fuera de un contexto que le diera significado, ninguno planteó explícitamente esta operación para resolver el problema anterior. Sin embargo, encontraron la solución apoyándose en la equivalencia de fracciones. Por ejemplo:

$\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$. *Por lo tanto se necesitan 6 corredores.*

$\frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$. *Por lo tanto se necesitan 3 pares de corredores.*

Hart y su equipo interpretaron este fenómeno de la siguiente manera:

> "*Pareciera como si estuvieran involucradas dos tipos de matemáticas completamente diferentes; una en la que se podía usar el sentido común y la otra en la que se tenía que recordar una regla*" (Hart, 1981:13).

- El porcentaje de alumnos que resolvió con éxito las operaciones de suma y resta decrece conforme aumenta la edad. A este respecto Hart y su equipo tienen la hipótesis de que esto se debe a que conforme pasa el tiempo, los alumnos olvidan los algoritmos enseñados en la escuela primaria.

- Los alumnos recurrieron al uso de diagramas para resolver problemas o para verificar sus resultados aún en aquellos casos en los que los problemas no incluían diagramas en su planteamiento.

A partir del análisis de los errores más frecuentes en la operatoria estos investigadores concluyeron lo siguiente:

- Tal parece que la representación simbólica (convencional) de las operaciones, impide que los alumnos trasladen las estrategias utilizadas para resolver los problemas que las implican. Por ejemplo, frente al problema:

En una panadería se usan $\frac{3}{8}$ *de harina para elaborar el pan y* $\frac{2}{8}$ *para hacer pasteles.*

¿Qué fracción de harina se ha usado?

La mayoría de los alumnos resolvió correctamente el problema. Sin embargo, al resolver la operación $\frac{3}{8}+\frac{2}{8}$, algunos (del 4% al 7% de la muestra) sumaron por separado numeradores y denominadores obteniendo como resultado $\frac{5}{16}$. Se reporta que el 29% de la muestra utilizó este mismo procedimiento para resolver sumas de fracciones con diferente denominador. Por ejemplo: $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{2}{7}$.

La representación simbólica de las fracciones no significaba para los alumnos un número sino dos números aislados sin ninguna relación. Este fenómeno puede observarse al analizar errores como los siguientes:

$$\frac{4}{8} > \frac{2}{4} \qquad\qquad \frac{5}{20} > \frac{1}{4}$$

El 40% de los alumnos de 12 y 13 años de edad no vieron la equivalencia de fracciones como $\frac{5}{20}$ y $\frac{1}{4}$ o, $\frac{4}{8}$ y $\frac{2}{4}$ porque al comparar cada pareja de fracciones centraban su atención en el tamaño del numerador y del denominador. Esto los llevó a considerar que $\frac{4}{8} > \frac{2}{4}$ porque el 4 es mayor que 2 y el 8 es mayor que 4. Por las mismas razones consideraban que $\frac{5}{20} > \frac{1}{4}$.

Otro indicio de este fenómeno lo encontraron al pedir a los alumnos que encontraran el valor de las incógnitas planteadas en la siguiente igualdad:

$$\frac{2}{7} = \frac{\square}{14} = \frac{10}{\bigcirc}$$

Dado que el 16% de la muestra encontró que ○ = 21 o 28, los autores infieren que los alumnos buscaron patrones para encontrar el valor de las incógnitas. Por ejemplo, 21 lo pudieron deducir al considerar que los datos conocidos que aparecen debajo de la línea horizontal aumentaban de 7 en 7 (7, 14, 21), por lo tanto ○ = 21. En cuanto a ○ = 28, este dato pudo haber sido calculado considerando que el valor de los denominadores aumentaban cada vez el doble (7, 14, 28), por lo tanto ○ = 28.

- Al operar, los alumnos transfieren las propiedades de las operaciones con números naturales a las operaciones con fracciones. Este fenómeno puede observarse a través de los siguientes ejemplos:

  Entre el 25 y el 30% de los alumnos invirtieron el orden de la división $3 \div 5$ para obtener el resultado. Hart y su equipo consideran que probablemente aplicaron la idea que usualmente se trabaja para dividir los números enteros: el número mayor se divide entre el número menor.

Si bien en los dos trabajos revisados se pretende detectar las deficiencias en el aprendizaje de los alumnos con respecto a las fracciones, existen entre ellos diferencias importantes:

En resumen, al analizar las respuestas de los alumnos estudiados por Hart y su equipo encuentran: un centramiento en la interpretación de la fracción como una unidad que se divide en un *x* número de partes de las cuales se toman algunas; dificultades para interpretar las fracciones mayores a 1 y para establecer la relación parte-todo; así como una tendencia a trasladar las propiedades de los números enteros y de sus operaciones a las fracciones y sus algoritmos. Consideran que los errores y las concepciones erróneas de los alumnos son responsabilidad de la enseñanza por la manera en la que se presentan las fracciones. Observan la necesidad de revisar los programas de estudio para la educación básica y de encontrar estrategias de enseñanza que permitan a los alumnos una mayor comprensión del concepto de fracción y de sus algoritmos.

Gardner pretendía conocer los errores más frecuentes que cometían los alumnos al operar, para sugerir a los maestros tareas remediales que permitieran a los alumnos resolver correctamente las operaciones. A Hart y a su equipo, más que averiguar el grado de dominio de las técnicas operatorias, les interesaba conocer el concepto de fracción construido por los alumnos, indagar el origen de esas concepciones, averiguar si las operaciones que conocían los alumnos las utilizaban al resolver problemas y, tratar de rastrear el tipo de razonamientos que llevan a los alumnos a cometer errores al operar con fracciones.

En estos dos estudios separados por 30 años, puede observarse un cambio de perspectiva sobre cómo acceder al concepto de fracción, derivada de la concepción que los autores tienen acerca de las matemáticas, de la manera en la que consideran debe enseñarse y de lo que entienden por saber matemáticas (Moreno, A. y G. Waldegg, 1992). Si saber matemáticas significa conocer el lenguaje convencional y los algoritmos canónicos[5], o si saber matemáticas significa tener la capacidad de usar las herramientas matemáticas de una manera flexible para resolver los problemas que se presentan fuera y dentro de la escuela. Estas concepciones han sido construidas a lo largo de la historia de manera colectiva y sus diferencias están mediadas por los resultados de investigaciones epistemológicas, psicológicas y didácticas realizadas por diversos investigadores, interesados en buscar soluciones al problema del aprendizaje de las matemáticas, en particular al problema de la enseñanza y el aprendizaje de las fracciones (Block y Dávila (1993).

I.2 DIFICULTADES EN LA CONSTRUCCIÓN DE LA RELACIÓN PARTE-TODO

I.2.1 EL ESTUDIO DE FIGUERAS

En México, Figueras (1988), llevó a cabo una investigación diagnóstica con una muestra de 111 alumnos de 11 a 14 años recién egresados de la primaria y que cursaban el primer grado de la educación secundaria[6], momento de un "*corte didáctico*", donde los alumnos avanzan de un nivel escolar a otro y en donde los objetivos y los métodos de enseñanza también se modifican[7].

El punto de partida de Figueras para hacer esta investigación diagnóstica fue el siguiente:

> *Los programas de estudio del Ciclo Medio Básico, presuponen que los alumnos han logrado construir, en el nivel anterior, una imagen mental del concepto, de tal forma que éste tiene un status de 'objeto matemático' es decir, para el educando los racionales debieran ya ser pensados como números, y como tales se estudiarán de ahí en adelante, sus propiedades como entes con una estructura* algebraica. (Figueras, 1988:9).

Los propósitos de esta investigación fueron:

- Dilucidar la relación entre la adquisición del concepto de fracción y el desarrollo de habilidades para interpretar y utilizar el lenguaje geométrico-simbólico convencional

[5] Es decir, los procedimientos usuales para resolver las operaciones.
[6] Cabe señalar que la investigación diagnóstica de Figueras que aquí se reporta, forma parte de un proyecto de investigación más amplio, inscrito en la problemática de la enseñanza y el aprendizaje de los números racionales en la escuela secundaria. Dicho proyecto de investigación inició en 1975 .
[7] Esta investigación se inició en 1984 y algunos de los resultados que aquí se presentan forman parte del trabajo presentado por Figueras en 1988.

empleado en los libros de texto de la escuela primaria con los que se inicia el desarrollo del concepto de número racional.

- Reconocer la manera en la que los alumnos conciben a la fracción y las dificultades en su proceso de aprendizaje.

Para facilitar el reporte de la investigación de Figueras, la he desglosado en las siguientes cinco etapas

1ª Etapa. Análisis curricular de algunos libros de texto clásicos de aritmética[8] y las ediciones de los Libros de Texto Gratuito de matemáticas de todos los grados de la educación primaria, utilizados en México desde 1971 a 1979 y desde 1980 a 1984. Estos últimos estuvieron vigentes hasta el año escolar 1992-1993.

El propósito de este análisis fue identificar los modelos utilizados para la enseñanza y el aprendizaje de los números racionales; las características de los recursos gráficos empleados y los significados de la fracción que se ponen en juego. Los resultados reportados del análisis son los siguientes:

Figueras encontró que en dichos textos los números racionales se introducen a través *del significado de fraccionamiento de la unidad* mediante dos modelos de enseñanza el *modelo egipcio primitivo*[9] (desde el primer grado) y el *modelo discreto*[10] (a partir del tercer grado). A lo largo de los seis años de la educación primaria se reforzaba esta concepción particular de los números racionales, otorgándole una posición relevante a la relación *parte-todo*.

Las actividades de enseñanza que se plantean en esos textos para desarrollar la relación *parte todo* se vinculan a las acciones que los alumnos deben realizar sobre un todo, representado en general con figuras planas o tridimensionales (sólidos representados en el plano) con subdivisiones dadas.

[8] Estos libros eran los más utilizados por los maestros en esa época.

[9] En este modelo de enseñanza, el concepto de fracción se define *como una parte del todo* y se relaciona con situaciones de partición de *todos* continuos (superficies, longitudes, volúmenes). El significado que subyace a este modelo de enseñanza es la de fracción *como una parte que se toma de un todo dividido en **n** partes igu*ales. En consecuencia sólo se trabajan fracciones menores que la unidad.

[10] En este modelo de enseñanza, la noción de fracción se define *como un subconjunto de un conjunto* de objetos (susceptibles de ser contados uno a uno) y se trabaja a través de situaciones de reparto. El significado de la fracción que subyace a este modelo de enseñanza, dice la investigadora, es el de cociente, es decir la fracción *como resultado de una división*.

El concepto de fracción de unidad con respecto a todos discretos se enfocaba, en general, hacia el cálculo numérico. La relación parte todo pasaba a segundo término. Las fracciones mayores que la unidad se introducían, en los textos revisados, a partir de la reconstrucción de la unidad utilizando figuras planas o tridimensionales.

La recta numérica aparecía en tercer grado, como un recurso para introducir a los alumnos en el estudio del orden y la equivalencia de fracciones; para medir y comparar magnitudes expresadas con fracciones o con números escritos con punto. Se enfatizaba el uso de los algoritmos y en cuarto grado se introducía el concepto de equivalencia de fracciones mediante situaciones de proporcionalidad, en las que subyace el significado de la fracción como razón.

Figueras destaca que en esos libros se observó una ruptura al interior de las secuencias didácticas utilizadas para trabajar los diferentes aspectos y significados del número racional. Señala también que en general, se establecían vínculos entre el lenguaje aritmético natural (un medio, la mitad), el simbólico ($\frac{1}{2}$) y un lenguaje gráfico-geométrico convencional, con el que se representa la congruencia de las unidades en las que se dividía, de manera exhaustiva, un todo continuo, con elementos simbólicos que simulanban cortes visibles o no (líneas punteadas o continuas).

> *Es decir, las secuencias didácticas asociadas a cada una de las diversas interpretaciones (...) se sostiene en referentes concretos de naturaleza distinta, se despliegan recursos y acciones específicas diferentes, se vinculan a campos de experiencias diversos, y, en ellas se enfatizan aspectos particulares. De manera que para cada significado, se establece una forma concreta, con características propias, de presentarlo.*
>
> (...)
>
> *La existencia de todos estos modos de representación (...) requiere de habilidades diferentes por parte del lector para lograr un nivel apropiado de comprensión.*
>
> *(...)*
>
> *Por estos motivos adquiere una función relevante la relación entre la adquisición del concepto de fracción y el desarrollo de habilidades para interpretar el lenguaje geométrico-simbólico que forma parte de las imágenes que se emplean para contextualizar dicho concepto. (Figueras, 1988:16, 28).*

2ª Etapa. Análisis comparativo de tres investigaciones diagnósticas sobre el aprendizaje de las fracciones (dos estudios realizados en México y uno en Inglaterra[11]).

[11] Los estudios utilizados por Figueras para realizar el análisis comparativo fueron: Hart, K., Kerslaske, D., Ruddock, G., Brown, M. y Kuchemann, D. (1980). Planchart, O. (1984). Padilla, V. (1984).

3ª Etapa. Elaboración del cuestionario diagnóstico. Dada la importancia que se le da a la imagen, para el aprendizaje de los racionales, Figueras seleccionó y rediseñó 48 problemas que incluían representaciones gráficas de colecciones de objetos que no se pueden subdividir, figuras planas y cuerpos geométricos (tridimensionales) representados en el plano con el lenguaje gráfico-geométrico convencional.

Con estos problemas, planteados en forma de preguntas, Figueras evaluó ciertos aspectos relacionados con el número racional bajo el significado de *fraccionamiento de la unidad,* que emerge del modelo de enseñanza *egipcio primitivo y* del modelo *discreto.* Señala que los siguientes aspectos, evaluados a través del examen diagnóstico, son fundamentales para construir la noción de fracción o forman parte de las estrategias de enseñanza o de solución de problemas contextualizados con gráficos:

- La igualdad de las partes.
- La división exhaustiva del todo.
- La identificación de las relaciones parte-todo y parte-parte.
- La invariabilidad de la longitud y el área bajo transformaciones de partición y de movimiento.
- El reconocimiento de partes de una configuración dada.
- La identificación de configuraciones equivalentes bajo un criterio específico.

De acuerdo al tipo de imágenes utilizadas en el diseño de los problemas, éstos se agruparon en tres bloques:

Eje Discreto. Contienen dibujos de colecciones de objetos que no se pueden subdividir. El todo está representado por un conjunto de elementos.

Eje Continuo. Contienen imágenes de figuras cerradas planas[12]. El todo corresponde a una de esas figuras.

Eje Continuo. Contienen representaciones planas de sólidos geométricos[13] El todo corresponde a una de estas ilustraciones.

[12] En algunos problemas se utilizaron figuras conocidas por los alumnos (cuadrados, rectángulos, círculos) y en otros se utilizaron otras figuras poco trabajadas en la escuela

Tomando en cuenta el tipo de acciones (gráficas, numéricas o mentales) que los alumnos podían efectuar sobre el *todo* o la *parte,* los problemas se organizaron en seis secuencias. El nivel de complejidad de los problemas diseñados para el cuestionario diagnóstico aumenta al interior de cada secuencia y entre éstas. Por ejemplo, la primera secuencia consta de problemas en los que la información relevante con la que se resuelven está contenida en la imagen y la última está formada por problemas que, para resolverse, los alumnos requieren: recuperar el todo a partir de la parte representada en el dibujo e interpretar la relación parte-todo expresada en lenguaje natural o numérico.

Las características de los problemas que conformaron el cuestionario diagnóstico son:

- El diseño contiene información relevante para encontrar la solución.
- Para contestar la pregunta se requiere realizar ciertas acciones sobre un diagrama dado por lo que la respuesta debe quedar representada gráficamente.
- El problema requiere que el alumno elabore un dibujo para resolverlo.

4ª Etapa. Piloteo y ajuste del cuestionario diagnóstico.

5ª Etapa. Aplicación del cuestionario. El cuestionario diagnóstico se aplicó, en un mismo plantel, a 111 alumnos de tres generaciones, egresados de 47 escuelas primarias diferentes. Sus edades oscilaban entre los 11 y los 14 años y en ese momento cursaban el primer grado de la educación secundaria. Cada generación de alumnos tuvo aproximadamente tres horas, distribuidas en tres días de clase, para resolver el cuestionario diagnóstico.

6ª Etapa. Análisis de resultados. En esta etapa Figueras realizó dos tipos de análisis de resultados del cuestionario diagnóstico. Un análisis *cuantitativo y comparativo* de aciertos y errores de las tres generaciones de alumnos y un análisis *cualitativo* de las respuestas dadas por los 32 alumnos de la primera generación, a los problemas del eje continuo que incluían diagramas de figuras planas.

El análisis *cuantitativo* permitió identificar algunos elementos que explican las diferencias observadas entre los problemas de cada secuencia. Sin embargo, no proporcionó información suficiente relacionada con las nociones elementales de la fracción que Figueras deseaba investigar y, que estaban presentes en el diseño de los problemas.

---

[13] Este tipo de imágenes se utilizan en la escuela para trabajar la noción de volumen.

En el análisis *cualitativo,* lo que interesaba era tipificar los errores; caracterizar los métodos de solución empleados por los alumnos e identificar los significados que le asignaban a la fracción, expresada de manera natural o numérica. Como resultado de este análisis Figueras detectó algunas concepciones erróneas señaladas ya por otros investigadores y, elaboró hipótesis acerca de otras creencias o concepciones observadas, sujetas a comprobación en futuras investigaciones.

A continuación referiré los resultados más relevantes que se obtuvieron con los problemas que incluían figuras planas y que se publicaron de manera resumida en Figueras, Filloy y Valdemoros (1987), de donde se tomaron algunos ejemplos.

I.2.1.1 PREDOMINIO DE LA CARDINALIDAD DE LA PARTE

En esta categoría Figueras, Filloy y Valdemoros incluyeron respuestas en las que se observa "*una disociación de los elementos constitutivos del númeral o de la relación parte-todo y una tendencia a asignarle al numerador o a la parte una posición de privilegio."* (Figueras, 1988: 50). Por ejemplo:

a) *Centran la atención en el numerador* (las partes que se toman de la unidad o que se sombrean) *desplazando al denominador.*

Problema	Respuesta	Problema	Respuesta
¿Qué fracción está sombreada?	La quinta parte de diecisieis	¿Qué fracción está sombreada?	$\frac{6}{18}$ la sexta parte de 18

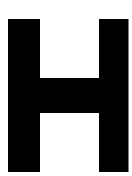
En la segunda respuesta se pueden observar dos significados diferentes entre la representación convencional de la fracción, que indica cuántas partes de la unidad fueron tomadas o sombreadas (enseñanza escolar) y, el significado que el alumno en cuestión le da a esa fracción. A este respecto señalan:

> *"Apoyándonos en la última respuesta (...) podemos advertir una contradicción planteada a nivel del lenguaje, entre las expresiones coloquiales que dan cuenta de los aspectos empíricos y las formas lingüísticas consagradas a las expresiones simbólico-aritméticas."* (Figueras, Filloy, Valdemoros 1987:161).

b) *Centran la atención en el numerador sin considerar al denominador*. Por ejemplo, si el problema consiste en subdividir una figura plana, los alumnos centran su atención en el denominador y tratan de obtener el número de partes señalado por ese número, sin detenerse a observar si las partes generadas son o no iguales.

Problema	Respuesta	Problema	Respuesta
En la siguiente figura representa $\frac{5}{10}$		Dibuja un círculo y representa dos quintos.	

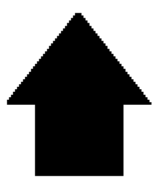
c) *Ven a la fracción como dos números enteros sin ninguna relación y centran su atención en el numerador.* Por ejemplo, con problemas como el siguiente, Figueras pretendía que los alumnos reconstruyeran el todo a partir de la parte dada.

Problema	Respuestas	
Queremos hacer esta figura  Faltan $\frac{20}{8}$ Complétala.		

Analizando esta forma de resolver el problema, Figueras encuentra que los niños que lo resolvieron de esta manera *desconocen a la fracción como tal*, e implementan una estrategia de solución aditiva $(20 - 8 = 12)$. En este sentido los autores del artículo citado señalan la dificultad de los alumnos para reconstituir el todo, formado por $\frac{28}{8}$ (la fracción {$\frac{20}{8}$} que falta por dibujar, más la parte dada en el dibujo {$\frac{8}{8}$}).

I.2.1.2 PREDOMINIO DE LA CARDINALIDAD DEL DENOMINADOR

En la investigación de Figueras, las respuestas incluidas en esta categoría surgieron cuando los alumnos tenían que traducir a un lenguaje numérico, la fracción representada en el diagrama, con cantidades discretas. Sólo en el siguiente problema en el que se utilizaron todos continuos discretizados[14], un alumno le asignó al denominador el significado de 'parte'.

Problema		**Respuesta**
¿Queremos hacer esta figura 	Hay $\frac{9}{16}$ Complétala	

Figueras, Filloy y Valdemoros señalan que al centrarse en uno de los términos de la fracción, la relación parte-todo que expresa una fracción no existe. Para el alumno que dio esta respuesta la fracción $\frac{9}{16}$ significa *"Hay 9 partes faltan 16".*

Figueras destaca que algunas de las situaciones que obstaculizan el aprendizaje de la noción de fracción porque promueven el centramiento de los alumnos en el numerador o en el denominador, son:

> *"Aquellas configuraciones de agrupamientos de objetos en las que el número de grupos coincide con el denominador de la fracción y,*
>
> *Aquellas que incluyen una configuración de objetos que puede aislarse del resto de la imagen, en la que el número de objetos es igual o mayor que el denominador de la fracción".* (Figueras, 1988:58).

[14] Figueras, Filloy, Valdemoros, (1987:10) y Block, Solares, (2001a:15) señalan que los objetos susceptibles de fraccionarse (continuos) constituyen una colección de objetos y por lo tanto es una magnitud discreta.

I.2.1.3 LA NO CONSIDERACIÓN DEL TODO

Las respuestas incluidas en esta categoría surgieron, en el estudio de Figueras, cuando los alumnos debían indicar qué fracción estaba representada en el diagrama, es decir, hacer una traducción del lenguaje gráfico al aritmético. Por ejemplo:

Problema	Respuestas	
	A	B
¿Qué fracción está sombreada?	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$

Figueras (1988) plantea que el alumno que dio la respuesta **A** considera al denominador como complemento del numerador y el que respondió como **B** restringe la lectura a una parte del diagrama. Señala que este tipo de respuestas pone de manifiesto la confusión de los alumnos en cuanto al 'todo', definido a través de un diagrama, asignándole un significado diferente al numerador y al denominador de la fracción.

I.2.1.4 LA DESIGUALDAD DE LAS PARTES Y LAS DIFICULTADES EN LA PARTICIÓN

Este tipo de dificultades surge cuando los alumnos tienen que representar una fracción en situaciones en las que el diagrama (familiar o poco conocido) que representa al todo, no está dividido. Al respecto Figueras señala:

> *"... los ejercicios del modelo egipcio son problemas geométricos de distribución de una superficie, cuya solución requiere de un esquema anticipatorio que se sostiene en una estimación del resultado de las acciones que van a realizar sobre el todo. Intervienen aspectos geométricos como el uso de la simetría y procesos de compensación"* (Figueras, 1988: 65-66 y 278-291)

Destaca que estos aspectos se trabajaban poco en la enseñanza elemental, hasta el momento en el que se realizó este estudio. Otros investigadores como Hiebert y Behr (1988) mencionan también la necesidad de desarrollar en los alumnos estos esquemas anticipatorios de partición.

Si bien coincido con Figueras en la idea de que los aprendizajes construidos por los niños (dentro y fuera de la escuela) se ponen en evidencia cuando estos son capaces de trasladar sus conocimientos en la resolución de otros problemas que los impliquen (planteados en contextos diferentes), me parece que el nivel de complejidad de algunos de los problemas que conformaron el cuestionario diagnóstico de Figueras (ver los ejemplos mostrados en las páginas 23 y 24) rebasaron las posibilidades de los alumnos dado que, desde el análisis curricular realizado por ella misma, pudo observar que en la escuela difícilmente se planteaban situaciones que llevaran a los alumnos a desarrollar esquemas que les permitan anticipar el resultado de las particiones sobre un *todo,* ni situaciones que les permitieran reflexionar sobre la relación parte-todo y, mucho menos la resolución de problemas en las que el diagrama representara sólo la parte de un todo continuo conformado por más de una unidad.

Veamos lo que sucede en otro estudio en el que las figuras y las subdivisiones utilizadas por los investigadores y por los alumnos, son las que usualmente se trabajaban en la escuela (rectángulos, cuadrados, círculos y, en algunos casos, triángulos).

I.2.2 EL ESTUDIO DE ÁVILA Y MANCERA

Ávila y Mancera (1989) realizaron una investigación diagnóstica con 293 niños que cursaban el sexto grado de primaria y el primer grado de secundaria en escuelas públicas y privadas. El propósito era analizar las dificultades de los alumnos en el aprendizaje del concepto de fracción y averiguar la manera en la que los alumnos interpretaban las fracciones a partir de su representación convencional.

Al igual que Figueras, Ávila y Mancera hicieron una revisión previa de los Libros de Texto Gratuito vigentes en México desde 1980 hasta el ciclo escolar 1992-1993, para identificar las interpretaciones de la fracción que se manejaban a lo largo de la educación primaria. En esta revisión encontraron, por un lado, numerosas operaciones con fracciones fuera de un contexto y expresadas de la manera convencional, lo cual denota un centramiento de la enseñanza de los algoritmos de las fracciones.

Por otro lado, encontraron que a lo largo de la primaria se introducían en esos libros, de manera aislada, diversas interpretaciones de la fracción: como parte de una magnitud continua o discreta (figuras geométricas o colecciones de objetos), como porcentajes, como razones y como medidas[15].

Los instrumentos utilizados por Ávila y Mancera para realizar la investigación consistieron en una serie de problemas, planteados como preguntas, que los niños debían contestar por escrito; el uso de diagramas para representar fracciones dadas con los símbolos numéricos (estos diagramas a veces se les proporcionaban y a veces los elaboraban los alumnos) y, entrevistas para averiguar por qué algunas preguntas no tenían respuesta o para tratar de entender respuestas 'raras' o poco claras.

Una de las preguntas planteadas a los alumnos fue la siguiente: *¿Qué quiere decir* $\frac{4}{6}$? De acuerdo al reporte de la investigación, la mayoría de los alumnos (56%) dieron respuestas "*erróneas o insuficientes"* y el 44% restante dieron respuestas correctas relacionadas con el significado de la fracción como parte de una magnitud continua (modelo del pastel) o discreta (colecciones de objetos). Sólo un alumno la interpretó como una razón. En el siguiente cuadro se muestran algunas respuestas representativas para cada caso (Ávila y Mancera, 1989:23):

¿Qué quiere decir $\frac{4}{6}$ **?**			
RESPUESTAS 'CORRECTAS' LIGADAS A		***RESPUESTAS 'ERRÓNEAS' O INSUFICIENTES***	
MODELO DEL PASTEL	***OTRAS INTERPRETACIONES***	***ERRÓNEAS***	***INSUFICIENTES***
- "Un pastel lo dividen en 6 y tomo 4 partes".	- " $\frac{4}{6}$ quiere decir que se toman 4 *unidades* de un conjunto de 6".	- "... que es la cuarta parte de un rectángulo".	- "... que tienes que dibujar 4 partes".
- "Quiere decir que hay 6 partes y dibujas 4".	- "Que hay 6 *cosas* de las cuales se toman 4".	- "... que es la cuarta parte de un sexto".	- "... que coges 4 partes".
- "4 indica qué agarramos y el 6 en los que está dividido el círculo".	- "Que de 6 *cosas*, se ocupan sólo 4"	- " ...que debes colorear cuatro y los seis que te quedan".	
- "Quiere decir que hay una figura dividida en sextos y tomas 4"	- "Que son 4 de 6"	- " ... el numerador es lo que se ilumina, el denominador lo que te queda".	
- "Que en una rueda de 6 partes iguales hay que sombrear 4"			
- "Que pueden ser 6 cuadros y 4 iluminados"			

[15] Más adelante se explican estas categorías.

A partir de las respuestas correctas, Avila y Mancera señalan que la interpretación dominante entre los alumnos es la de la fracción como parte de una figura plana o la fracción como parte de un pastel subdividido.

En cuanto a las respuestas 'erróneas' o 'insuficientes' señalan que el problema fundamental es que los alumnos no logran establecer la relación parte-todo que implica a la fracción. Es decir, no ven a la fracción como un número, sino como dos números enteros separados por una línea sin ninguna relación. Esta tendencia se puso en evidencia cuando se solicitó a los alumnos que señalaran una determinada fracción en diagramas dados. Por ejemplo, se les pidió que sombrearan $\frac{3}{4}$ de una colección de 20 canicas. La mayoría de los alumnos (56% del total de la muestra) hizo lo siguiente:

Colección original

Representación grafica de la fracción $\frac{3}{4}$ realizada por los niños

Al solicitarles que colorearan $\frac{5}{8}$ del mosaico que aparece a la izquierda, la respuesta más común fue como la que se presenta a la derecha:

$\frac{5}{8}$

Mosaico original

Respuesta de los alumnos

Como se puede observar, el mosaico (unidad) sobre el que los niños debían representar la fracción $\frac{5}{8}$ fue dividido previamente en doceavos. El hecho de presentar de antemano la figura subdividida en un número diferente de partes al señalado por el denominador, probablemente propició que los alumnos ignoraran al denominador. En la escuela, cuando se les solicitaba realizar alguna tarea como ésta, en general se presentaban las unidades (figuras planas), divididas en tantas partes iguales como indicaba el denominador de la fracción[16], para resolverla, los alumnos sólo tenían que colorear la fracción que se les solicitaba. Es decir, en general la tarea se reducía a señalar, en la figura, las partes indicadas por el numerador.

Avila y Mancera catalogaron como "insuficientes" este tipo de respuestas, debido al centramiento en el numerador. La explicación de esta conducta la atribuyen a que los alumnos no habían logrado construir la relación parte-todo de las fracciones.

Entre las respuestas que dieron los niños a la pregunta *¿Qué quiere decir* $\frac{4}{6}$*?,* Avila y Mancera catalogaron como erróneas las siguientes: *"... que es la cuarta parte de un rectángulo", "... que es la cuarta parte de un sexto",* porque transformaron el numerador en denominador. Plantean que si se quisiera representar en un diagrama estas respuestas se obtendría lo siguiente:

$\frac{4}{6}$ ".. es la cuarta parte de un rectángulo

$\frac{4}{6}$ ".... es la cuarta parte de un sexto"[17]

---

[16] A partir de 1993, en la currícula para la educación primaria se pospone el estudio de las fracciones hasta el tercer grado y la multiplicación y división de fracciones se aplazan hasta la secundaria. En los libros de texto gratuito para la educación primaria se plantean numerosas situaciones de reparto que los alumnos deben realizar y en las que el todo (objetos continuos) está formado por una o más unidades.

[17] En mi opinión, en este tipo de respuestas el error radica, más que en "transformar el numerador en denominador", en considerar que la expresión $\frac{a}{b}$ representa dos fracciones independientes. En el caso: *"... es la cuarta parte de un rectángulo)*, se considera al numerador de $\frac{4}{6}$ como una fracción ($\frac{1}{4}$) independiente del denominador. Aparentemente el denominador no tiene ninguna relación. Pero, siguiendo la lógica de esta respuesta, es probable que el 6 del denominador signifique otra fracción ($\frac{1}{6}$) independiente de $\frac{1}{4}$. Por lo tanto la fracción $\frac{4}{6}$ puede significar para los niños que contestaron de esta manera $\frac{1}{4}$ y $\frac{1}{6}$. Esta interpretación se refuerza en la segunda respuesta mostrada: *"... es la cuarta parte de un sexto"*. El 4 (numerador) es $\frac{1}{4}$ y el 6 (denominador) $\frac{1}{6}$. La relación entre estas dos fracciones se establece con toda claridad en la respuesta. Este error da cuenta del fuerte centramiento en fracciones unitarias y de la dificultad consecuente para comprender las fracciones no unitarias.

"*Dibuja las figuras que tú quieras para representar* $\frac{17}{9}$ y $\frac{14}{4}$". Esta actividad fue resuelta correctamente por el 7% de la muestra (21 alumnos). Del resto de los alumnos, la mayoría la resolvió más o menos así:

$\frac{17}{9}$ $\frac{14}{4}$

Otros no la resolvieron argumentando lo siguiente:

– "*No se puede contestar, porque 17 no cabe en 9 y* $\frac{14}{4}$ *lo mismo*"

– "*No se puede resolver porque el numerador es menor que el denominador*"

– "*El* $\frac{17}{9}$ *y el* $\frac{14}{4}$ *no se pueden resolver, porque no se puede hacer una figura de 9 y dibujar 17 ni una de 4 y dibujar 14*"

Avila y Mancera consideran que, en los argumentos de los niños y en las representaciones gráficas de $\frac{17}{9}$ y $\frac{14}{4}$ mostradas, subyace una conceptualización generada por la enseñanza de las fracciones a través del fraccionamiento de la unidad. Es decir, estos alumnos conciben a la fracción como *un entero* (figura plana) que se divide en *x* número de partes y de las cuales se toman siempre un número menor al que se dividió el entero. Por lo tanto, tienen dificultad para comprender que el todo repartido puede estar conformado por más de una unidad, por lo que, para representar gráficamente estas fracciones, buscan alguna manera de que el número de partes sombreadas sea menor que el número de divisiones que se realicen al interior de una unidad.

Los que utilizaron el procedimiento arriba mostrado invierten los números que conforman la fracción, convirtiendo $\frac{17}{9}$ en $\frac{9}{17}$ y $\frac{14}{4}$ en $\frac{4}{14}$. Una vez realizada esta inversión, la dificultad que se observa consistió en dividir la unidad en 17 y 14 partes iguales respectivamente.

Puede observarse, en esta última actividad, que los investigadores no dieron a los alumnos la figura plana dibujada, ni dividida en el número de partes iguales señalado por el denominador de la fracción, para que ellos sólo colorearan la parte indicada en el numerador. La necesidad de realizar un dibujo para representar las fracciones $\frac{17}{9}$ y $\frac{14}{4}$ llevó a los alumnos a fijarse en los dos términos de la fracción. Si bien la manera en la que resuelven el problema no es la adecuada, este dato indica que las variables utilizadas para diseñar los problemas pueden tener cierta influencia en la forma en que los niños interpretan a la fracción.

En resumen, Ávila y Mancera, analizan los procedimientos de solución para rastrear los razonamientos que llevan a los alumnos a dar respuestas incorrectas o correctas, tratan de identificar la manera en la que conciben a las fracciones y la relación que establecen entre la representación convencional de las fracciones y los significados, que de manera implícita se presentaban, antes de 1993, en los Libros de Texto Gratuito para la educación básica en México.

Concluyen que los resultados de esta investigación ponen de manifiesto dos problemas fundamentales: *la dificultad de los alumnos para establecer la relación parte-todo y la dificultad para rebasar las conceptualizaciones basadas en el "modelo del pastel".* Estas dificultades, *indican que la lógica subyacente en las fracciones no necesariamente es igual a la que los niños le imprimen*. Enfatizan que el aprendizaje de las fracciones *tiene su propia lógica y su propio proceso, ... que son más complicados y más largos de lo que hasta hoy hemos venido suponiendo.* (Avila y Mancera, 1989:25 y 26).

I.3 LOS *N* DISTRACTORES DE STREEFLAND

Streefland (1978, 1984) señala que las situaciones de subdivisión de cantidades por lo general se realizan con el propósito de obtener partes de esa cantidad y repartirlas. En este sentido Streefland (1993), coincide con Piaget al plantear que conforme los alumnos se enfrenten a experiencias de partición desarrollarán habilidades para realizar subdivisiones pero considera que se debe tomar con cierta cautela el hecho de que los alumnos que cursan la escuela primaria (incluyendo a los alumnos relativamente jóvenes) no logren hacer repartos equitativos y exhaustivos en cierto tipo de particiones, ya que esto puede deberse, más que a una falta de comprensión de lo que significa hacer particiones equitativas, a una carencia de habilidades técnicas para realizarlas.

Recomienda flexibilidad en la demanda de la precisión geométrica, ya que los referentes concretos o gráficos deben ser para los alumnos solamente un medio de razonamiento, es decir, modelos que representan el problema real.

Por otra parte, Streefland, considera que las dificultades que se han presentado en la enseñanza y en el aprendizaje de las fracciones como los que se han mostrado en los capítulos anteriores, se deben a *"... un análisis deficiente del concepto mismo en un sentido matemático didáctico y a la negligencia analítica de sus consecuencias psicológicas"* (Streefland, 1978:1).

En los documentos citados Streefland señala que en la escuela primaria la enseñanza de las fracciones casi siempre se ha iniciado como un ritual, mediante algunos ejemplos concretos de subdivisión de cantidades discretas o continuas en partes iguales, y que el tiempo que se le dedica a este tipo de situaciones es muy breve. Señala que con estos ejemplos, se pretende que los alumnos establezcan la relación parte-todo y la noción de equivalencia e, inmediatamente después, se enseña la representación numérica convencional de las fracciones, con las que se espera que los alumnos aprendan a operar.

Streefland sostiene que el abandono prematuro del trabajo concreto y el paso brusco al uso de la simbología convencional de las fracciones, no permite que los alumnos lleguen a ver a la fracción como un nuevo objeto matemático, con entidad propia que obedece a sus propias reglas operacionales, por lo que los alumnos consideran a la fracción como dos números naturales sin ninguna relación, separados por una línea y sujetos a las mismas propiedades y reglas algorítmicas que rigen a los números naturales.

Esta concepción errónea de las fracciones ha sido documentada por algunos de los investigadores revisados en apartados anteriores y por otros citados por Streefland como Pinchback (1981), Harrison Brindley (1980), Hershkowitz y Vinner (1980) y Hasemann (1980) que, en su conjunto, han recogido una amplia muestra de errores, como los que a continuación se presentan, en los que se pone en evidencia esta problemática. Streefland, tomando ejemplos de Padberg (1983) comenta este hecho:

$$\frac{3}{8}+\frac{2}{5}=\frac{5}{13} \qquad \frac{3}{5}-\frac{1}{2}=\frac{2}{3} \qquad 5+\frac{2}{3}=\frac{5+2}{3} \qquad 5-\frac{2}{3}=\frac{5-2}{3}$$

El ejemplo anterior es un error que se comete frecuentemente al operar, en el que se observa que los alumnos tratan a las fracciones como dos enteros que se suman o se restan por separado (numeradores con numeradores y denominadores con denominadores) como lo hacen al sumar o restar los números enteros (unidades con unidades, decenas con decenas, etcétera). A este fenómeno Streefland lo identifica como *errores por N-distractores*, es decir errores que se originan cuando, al operar con fracciones, aplican el conocimiento que los alumnos tienen sobre las propiedades de los Números Naturales y de sus operaciones. Señala que en este caso, esos conocimientos funcionan como distractores al trabajar con las fracciones.

En este sentido Streefland destaca que estos errores están fuertemente enraizados en los procedimientos de solución de los alumnos y que los intentos para erradicarlos han sido en general fallidos, porque ninguno de estos intentos enfrenta a los alumnos a conflictos cognitivos que les permitan descubrirlos y comprender la naturaleza particular de los números fraccionarios. Plantea que, desde el inicio del proceso de enseñanza y de aprendizaje de las fracciones, puede propiciarse que los alumnos descubran por sí mismos los errores producidos por los *N-distractores,* explotando sus conocimientos previos sobre las fracciones así como su tendencia de partir sucesivamente por mitades, sin pretender que aprendan paso a paso cómo fracturarlas.

I.4 HOMONIMIA DE LOS NÚMEROS ORDINALES Y DE LAS FRACCIONES

Otro problema en el aprendizaje de las fracciones señalado por Hart (1981), Freudenthal (1983), Streefland (1984), Figueras (1988), Lerner (s/f) y Mancera (1992), está relacionado con la homonimia de los números ordinales y de las fracciones.

En México, Valdemoros, Orendain, Campa y Hernández (1996), presentan los resultados de una investigación cuyo propósito era indagar qué procesos de significación desarrollan los alumnos en diversos espacios conceptuales de la aritmética, los contenidos semánticos que generalizan y las interpretaciones que establecen como específicas en cierto conjunto numérico. Los instrumentos utilizados en dicha investigación fueron:

- un cuestionario compuesto por trece tareas diferentes, con todos discretos y continuos, con las que explorarían las nociones de conservación del todo, el reconocimiento de fracciones equivalentes, problemas de reparto, entre otros;

- observación indirecta (exploración de cuadernos de los niños, con el fin de detectar los aspectos en los que se centraba la enseñanza);
- registros de las experiencias de campo;
- una entrevista individual con uno de los alumnos que ofrecía mejores posibilidades para profundizar en la indagación.

Los investigadores señalan que niños de diferentes entidades (rurales, urbanos y marginales), edades, grados escolares y niveles socio-culturales, tienden a interpretar a las fracciones como números ordinales. Apuntan que esta interpretación se puede identificar al observar la manera en la que los niños leen las imágenes que representan al todo sobre el que van a representar cierta fracción, apoyándose en las palabras de conteo *(tercero, cuarto, quinto, sexto, etcétera)"* Agregan que este fenómeno se presenta con mayor frecuencia cuando el todo está conformado por cantidades discretas y cuando las fracciones en juego son unitarias.

Por ejemplo, en el análisis del proceso de solución que siguieron los niños que participaron en esta investigación, los autores de este estudio pudieron detectar el significado ordinal que algunos alumnos le dieron a la fracción presentada de manera natural. Cabe señalar que estas respuestas fueron dadas por 16 alumnos de los 29 que conformaban un grupo de tercer grado.

En un parque hay doce fuentes de agua. El encargado de mantenimiento debe limpiar la tercera parte de éstas, cada semana. Ayúdalo a organizar su trabajo, colocando una cruz junto a las fuentes que limpiará en una semana.

Frente a estas diferentes formas de resolver el problema Valdemoros y su equipo señalan que si bien la solución **A**) es correcta porque indica exactamente el tamaño de la parte solicitada, el significado que le asignaron los alumnos a la expresión *'tercera parte'* no corresponde al de la fracción *"tercera parte"* de doce fuentes. En la entrevista estos alumnos constataron la hipótesis de los investigadores.

> "... *los niños contaron 'primera, segunda, tercera' en cada fila (horizontalmente, de izquierda a derecha para marcar la última fuente de cada alineación, hasta agotar el todo"* (Valdemoros, Orendain, Campa y Hernández, 1996: 446).

En cuanto a las respuestas **B**), **C**) y **D**) los investigadores infieren que estuvieron basadas en otras interpretaciones ordinales. Señalan que en **B**) y **C**), los niños *"leyeron de izquierda a derecha (en uno de ellos se realiza ese reconocimiento una sola vez, hasta contar tres objetos en total, mientras que en el otro se aplica tres veces dicho procedimiento)".* En el procedimiento **D**), *los niños leyeron de arriba hacia abajo, marcando la tercera fuente de cada columna*. (Idem).

Consideran que el significado dado por los alumnos a la expresión 'tercera parte', se basa en la creencia de que para reconocer la fracción solicitada de una colección de objetos, basta con contar, en cierto orden (decidido por el alumno), usando los nombres de los números ordinales, hasta llegar al nombre que el denominador le da a la fracción en cuestión.[18]

Los responsables de esta investigación denominan a este fenómeno *'interpretación ordinal de la fracción'* y concluyen, que este problema se debe a que a algunos denominadores se les ha dado de manera convencional un nombre que ya tiene otros significados en el ámbito de los números naturales y a una falta de estrategias didácticas que permitan a los alumnos distinguir estos diferentes significados.

Es importante señalar que Freudenthal (1983) y Streefland (1984), hacen referencia a los usos lingüísticos históricos de los términos usados para nombrar a ciertas fracciones. Streefland, presenta como ejemplo el siguiente fragmento escrito por Homero en su obra "La Iliada":

"dos partes de la noche han pasado, falta la tercera parte"

[18] Cabe señalar que, "tomar uno de cada tres", es decir, "el tercero", constituye efectivamente una forma de obtener la tercera parte. No obstante, es poco probable que los alumnos piensen en esto.

A partir de expresiones como la anterior Streefland concluye que históricamente los nombres de las fracciones primero fueron considerados como números ordinales y que la partición fue el primer recurso concreto para las fracciones. Al respecto Freudenthal, señala:

> *"... ahora estamos tan acostumbrados a este extraño uso del número ordinal que ya no somos conscientes de lo curioso que es, ni mucho menos nos sentimos inclinados a protestar por ello, ni a preguntarnos por qué año tras año multitudes de alumnos no lo comprenden"* (Freudenthal, 1983:26).

I.5 OBSTÁCULOS EPISTEMOLÓGICOS Y OBSTÁCULOS DIDÁCTICOS

G. Brousseau (1976), señala que algunos de los errores recurrentes que comenten los alumnos en el proceso de aprendizaje de las matemáticas pueden acusar la presencia de obstáculos didácticos cuyo origen puede ser ontogénico, epistemológico o didáctico.

Este investigador relaciona los obstáculos ontogénicos con las limitaciones propias del desarrollo cognitivo de los niños. Considera que los epistemológicos son parte inherente del proceso de aprendizaje de las nociones matemáticas, que surgen al aplicar a un conocimiento nuevo, nociones y reglas construidas para un conocimiento anterior. En cuanto a los obstáculos didácticos, como su nombre lo indica, los relaciona con la manera en la que se enseñan las nociones matemáticas en la escuela.

Según este investigador, algunos de los errores mostrados anteriormente, pueden ser causados por obstáculos epistemológicos o didácticos. Por ejemplo, afirmar sistemáticamente cuando se opera con fracciones, que el producto debe ser mayor que cualquiera de los factores; que el resultado de dividir dos fracciones siempre debe ser menor que el divisor o bien, considerar que un número decimal es mayor entre más cifras tenga. Estas ideas pueden deberse a que los alumnos aplican a las fracciones las reglas que funcionan en los números naturales, es decir, pueden ser manifestaciones de obstáculos epistemológicos.

Errores que provienen de no considerar que el todo puede estar formado por más de una unidad, o tratar a los números fraccionarios como números naturales, pueden ser expresiones de una enseñanza particular, en la que las fracciones se ilustran casi siempre con una sola unidad o por la tendencia, en la enseñanza, de destacar las similitudes entre los números naturales y las fracciones. Estos errores son manifestaciones de obstáculos didácticos y podemos identificar algunos de ellos en ejemplos mostrados por Hart (1980;

1981), Lerner (s/f) Figueras (1988), Avila y Mancera (1989), entre otros muchos investigadores.

> *“El error no es solamente el efecto de la ignorancia, de la incertitud, del azar (...), sino del efecto de un conocimiento anterior, que tenía su interés, su éxito, pero que, ahora, se revela falso, o simplemente inadaptado. Los errores de este tipo no son erráticos e imprevisibles, se han constituido en obstáculos. (..). el error forma parte del sentido del conocimiento adquirido. (Brosseau, 1976:5).*

Comentario

Los estudios diagnósticos cuyos resultados hemos esbozado en este capítulo muestran la magnitud de las dificultades en la enseñanza y en el aprendizaje de la noción de fracción, aún en su interpretación más familiar de "partes de unidad", y de la relación "parte-todo".

Actualmente conocemos mucho mejor que hace 30 años los errores recurrentes de los alumnos y empezamos a comprender algunas de sus causas, epistemológicas o didácticas.

En el siguiente capítulo abordaremos de una manera diferente la dificultad conceptual de la noción de fracción, ya no a partir de diagnósticos, sino del análisis didáctico de la noción misma del número racional, desde distintas perspectivas. En estos análisis se encuentran los fundamentos de numerosos estudios experimentales y de propuestas didácticas que se han realizado en los últimos años.

II EL NÚMERO RACIONAL: UN CONCEPTO COMPLEJO CON MÚLTIPLES SIGNIFICADOS

El estudio de los procesos de adquisición de la noción de número racional lleva, a partir de los años setentas, a identificar formas específicas que asume esta noción en situaciones concretas. En este apartado presentaré los aportes de cuatro investigaciones que han contribuido en el análisis de esta noción desde diferentes perspectivas: Kieren, Freudenthal, Vergnaud y Brousseau.

II.1 LOS SUBCONSTRUCTOS DE THOMAS KIEREN

En los trabajos realizados por Kieren entre 1976 y 1988 y que aquí se revisan, se pueden observar cambios importantes en su acercamiento al concepto del número racional.

II.1.1 DIFERENTES INTERPRETACIONES DEL NÚMERO RACIONAL

Kieren (1976) publica en Canadá, un documento en el que enumera siete interpretaciones de los números racionales, algunas estaban presentes en la currícula de los setentas y otras ya habían sido identificadas por algunos investigadores. A saber:

Los números racionales

- Como fracciones que pueden ser comparadas, sumarse, restarse, multiplicarse o dividirse (presente en la currícula de los 70s).
- Como clases de equivalencia de fracciones.
- Como razones entre dos números.

- Como operadores multiplicativos o como mapeos.
- Como elementos de un campo cociente.
- Como medidas o puntos sobre una línea. (Presente en la currícula de los 70s).
- Como números decimales, extensión de los números naturales. (Presente en la currícula de los 70s).

Para realizar el análisis de cada una de estas interpretaciones Kieren considera la idea matemática de la fracción que subyace en cada interpretación (estructura matemática), lo que los niños debieran aprender al iniciar el estudio de cada interpretación (estructuras cognitivas a desarrollar), los pre-requisitos con los que deben contar los alumnos (estructuras cognitivas desarrolladas) y los recursos de enseñanza (estructuras instruccionales). A continuación comentaré algunos elementos del análisis que hace Kieren para cada una de las interpretaciones señaladas.

II.1.1.1 LOS NÚMEROS RACIONALES COMO FRACCIONES

Kieren señala que bajo esta interpretación, los números racionales se conciben como meros objetos de cálculo y, en consecuencia, los objetivos de enseñanza se orientan al desarrollo de habilidades operativas. La idea matemática de las fracciones se reduce a un conjunto de algoritmos a enseñar. En este sentido, la enseñanza se basa en la manipulación de fracciones a nivel simbólico y en la transmisión de procedimientos que los alumnos deben aprender para desarrollar su habilidad al operar[19].

II.1.1.2 LOS NÚMEROS RACIONALES COMO CLASES DE EQUIVALENCIA

Plantea que la idea matemática que subyace a esta interpretación es la de clase de equivalencia de la que se derivan las propiedades de este conjunto de números. Las fracciones se tratan como parejas de números ordenados y su equivalencia es definida en términos de la igualdad de números enteros ($a/b \approx c/d \Leftrightarrow ad = bc$).

El trabajo con las fracciones bajo esta interpretación culmina con el estudio de las propiedades de los racionales bajo las operaciones de suma y multiplicación, apoyado en

[19] El nombre elegido para esta “interpretación” no es muy afortunado: el uso de los términos ‘*fracción’* y ‘*número racional’* remite, por lo general, a una diferencia en el grado de formalización.

la noción de clase de equivalencia. Por ejemplo, si la adición se define: $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$ donde $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ son representantes de una clase de equivalencia, es importante mostrar que si se suma cualquier representante de una misma clase de equivalencia por otro número el resultado es el mismo, es decir el resultado de ambas sumas es equivalente:

$$\frac{3}{6} + \frac{4}{9} = \frac{31}{54} \quad \text{y} \quad \frac{1}{2} + \frac{4}{9} = \frac{17}{18} \qquad \frac{31}{54} = \frac{17}{18}$$

Es decir, debe demostrarse que la suma (o la multiplicación) tiene un único resultado. Por último, se presenta el concepto de razón de manera formal.

II.1.1.3 Los números racionales como razones entre dos números

Kieren considera que esta interpretación de la fracción se apoya fuertemente en la interpretación de par ordenado de números, de hecho la diferencia entre ambas interpretaciones no es fácil de identificar; considera que las operaciones con razones de números provienen de las nociones de equivalencia y de clases de equivalencia. Por ejemplo: la clase de equivalencia de los siguientes pares de números ordenados (2, 3) o $\frac{2}{3}$ y (1,5) o $\frac{1}{5}$ se generan multiplicando cada elemento por el mismo número (constante). Entonces tenemos:

{2,3} = {(2,3), (4,6), (6,9), (8,12), (10, 15), ...}

{1,5} = {(1,5), (2,10), (3,15), (4,20), (5, 25), ...}

Si se quiere sumar $\frac{2}{3}$ y $\frac{1}{5}$, se busca en las clases de equivalencia correspondientes las parejas que tengan el mismo número en el segundo elemento (10,15) y (3, 15) y se suman obteniendo $\frac{13}{15}$ o (13,15).

De esta manera Kieren sostiene que las operaciones con números racionales basadas en la noción de razón, aunque son algorítmicamente simples, son sofisticadas en cuanto al concepto mismo, apoyadas sobre una relación de conteo numérico y proporcional. Afirma también que la habilidad para su manejo requiere que el niño sea capaz de manipular simbólicamente la noción de equivalencia y establecer relaciones equivalentes.

Así mismo plantea que el desarrollo del concepto de fracción, la noción de orden, de equivalencia y de sus operaciones bajo esta interpretación, se promueven en una estructura de enseñanza esencialmente simbólica.

Probablemente, al afirmar lo anterior, Kieren se ubica en la teoría de las razones y las proporciones, en donde estas nociones y sus propiedades son objeto de estudio en sí mismos, fuera de los contextos en los que se utilizan. Si es así, efectivamente, la comprensión de relaciones como “$a/b \approx c/d \Leftrightarrow ad = bc$” requieren de un dominio de elementos de la teoría de las proporciones, o bien, del álgebra. Sin embargo, estudios más recientes han mostrado que, en otro nivel, el de las magnitudes y medidas concretas, los alumnos, desde temprana edad (9, 10 años), pueden manejar de manera implícita la noción de razón simultáneamente o incluso previamente al estudio de las fracciones. Volveremos sobre este punto al revisar estos estudios.

II.1.1.4 LOS NÚMEROS RACIONALES COMO OPERADORES

El significado de las fracciones como operadores o mapeos (por ejemplo, la escala), se basa en la comparación cuantitativa de dos conjuntos u objetos e implica la noción de proporcionalidad, por lo tanto está estrechamente relacionada con la interpretación de razón.

Si bien esta interpretación de las fracciones es fundamental, Kieren considera que introducir el concepto de fracción como operador tiene algunos inconvenientes: la relación parte-todo no es central en esta interpretación y la interpretación de la fracción como medida y las operaciones aditivas con fracciones se derivan de una manera poco natural.

Cabe suponer que la dificultad radica en que Kieren considera a la relación parte-todo como central en la comprensión inicial de la noción de número racional que, de hecho, es la que se enfatiza más, no siempre de manera adecuada, en las propuestas de enseñanza más comunes.

Por otro lado, Kieren señala que la noción de proporcionalidad, fundamental para la comprensión de la fracción como razón, exige la capacidad para ver una transformación seguida de otra como una sola; la capacidad de reemplazar, conceptualmente, esas transformaciones por un producto y la capacidad para utilizar la reversibilidad de pensamiento en situaciones de identidad. Así mismo destaca, que estas capacidades no se desarrollan totalmente sino hasta el estadio de las operaciones formales.

II.1.1.5 LOS NÚMEROS RACIONALES COMO ELEMENTOS DE UN CAMPO COCIENTE

Kieren plantea que esta interpretación tampoco es adecuada para introducir la noción de fracción porque relaciona a las fracciones con sistemas algebraicos abstractos. El manejo de las propiedades de los racionales y de sus operaciones se desarrolla de forma deductiva, mediante el establecimiento de los siguientes teoremas algebraicos:

- Teorema de relación de equivalencia: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$
- Teorema de la suma de racionales: $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$
- Teorema de la multiplicación de racionales: $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$
- Teorema del Inverso Aditivo: $\frac{a}{b} + \left(-\frac{a}{b}\right) = 0$
- Teorema del Inverso Multiplicativo: $\frac{a}{b} \times \frac{b}{a} = 1$

Kieren señala que introducir los números racionales bajo esta interpretación implica que los alumnos sean capaces de razonar a partir de hipótesis, de generar y trabajar con implicaciones, en el entendido de que las ecuaciones tienen un comportamiento consistente. Apunta también que las estructuras cognitivas necesarias para la enseñanza de las fracciones bajo esta interpretación corresponden al estadio de las operaciones formales e insiste en que las actividades que deben realizarse como antecedente al trabajo con fracciones o con números racionales son las actividades de reparto y partición de cantidades continuas.

Cabe agregar que si bien efectivamente el estudio de los racionales como campo cociente corresponde a una etapa de formación avanzada, esto no excluye la posibilidad de introducir en el nivel básico, el estudio de las fracciones como cocientes en problemas adecuados. Volveremos sobre esto más adelante, en el capítulo dedicado al reparto.

II.1.1.6 LOS NÚMEROS RACIONALES COMO MEDIDAS

En cuanto al desarrollo de la interpretación del número racional como medidas, Kieren señala que permite a los alumnos tener un contacto directo con los números racionales en situaciones de medición, donde la unidad de medida pueda ser dividida en cualquier número de partes iguales, para medir longitudes y compararlas, de manera concreta; interpretarlos como puntos en la recta numérica, así como introducir de manera natural la noción de orden y sus propiedades (tricotomía, antisimetría, transitividad), la noción de equivalencia de fracciones y la suma de fracciones.

Reitera que las situaciones de partición de cantidades continuas son fundamentales para el desarrollo de la noción de fracción como medida y que éstas favorecen el desarrollo de otras nociones como la de conservación de longitudes, sustancia, superficies, volumen y la noción de equivalencia de fracciones. Propone algunas situaciones que propicien la generación de fracciones como la partición de longitudes, cuantificación del resultado de particiones, establecimiento de relaciones de orden y comparación entre dos longitudes (una de ellas es la unidad).

II.1.1.7 LOS NÚMEROS RACIONALES COMO FRACCIONES DECIMALES

El punto de partida para trabajar las fracciones decimales bajo esta interpretación es el conocimiento, previamente construido, sobre los números enteros y sus operaciones del sistema decimal y de las unidades de medida convencionales, la estimación y la comparación de medidas de longitud.

Kieren concluye este análisis proponiendo el uso *“un modelo conglomerado de los números racionales".* Su tesis fundamental es:

> “*... que los números racionales, desde el punto de vista de la instrucción, deben ser considerados bajo todas sus interpretaciones*”*.... “ Una presentación integradora de los racionales deberá permitir la identificación de las complejas estructuras cognitivas que el niño necesita desarrollar para conformar correctamente sus ideas acerca de números racionales”* (Kieren, 1976:64-65).

Evidentemente, Kieren y muchos otros investigadores contemporáneos estaban conscientes de la complejidad del concepto del número racional debida a su naturaleza algebraica y a las diferentes interpretaciones o significados que éstos pueden tener, dependiendo del tipo de situación en la que se involucran. El meollo del asunto era entonces indagar cuál interpretación era la más adecuada para iniciar el estudio de este concepto y que a su vez, permitiera acceder a la comprensión de las otras interpretaciones así como a su operatoria. El problema de la complejidad del concepto del número racional y de su enseñanza estaba sobre la mesa.

En cuanto a las situaciones de partición de cantidades continuas sugeridas reiteradamente por Kieren, si bien reconoce que hasta ese momento se contaba con escasa información acerca de sus posibilidades en la construcción de conocimientos, excepto por los trabajos de Piaget, Inhelder y Szeminska (1960), considera que pueden ser de gran ayuda en el desarrollo de la noción de conservación de longitud, área y equivalencia, además de proporcionar, de manera natural, las experiencias básicas necesarias para desarrollar la noción de fracción y comprender la operación de suma de fracciones.

> "... *la ventaja de los modelos continuos es que admiten una infinidad de subdivisiones distintas, mientras que los modelos discretos más bien permiten conteos, lo cual hace menos evidente el énfasis sobre la unidad*". (Kieren, 1976:77).

Por lo tanto Kieren propone realizar investigaciones que respondan a las siguientes preguntas:

> *¿A qué edad las actividades de partición pueden propiciar aprendizajes sobre los números racionales? ¿Realmente las actividades de partición funcionan para promover el aprendizaje de fracciones equivalentes o para la solución de ecuaciones mediante cocientes? (Idem)*

II.1.2 SUBCONSTRUCTOS DEL NÚMERO RACIONAL

Años más tarde, Kieren (1979, 1980, 1983 y 1988) considera que los subconstructos[20] de medida, cociente, razón y operador son los que permiten a los alumnos construir la noción de fracción o tener una idea de la fracción "*acerca de algo*"[21], que pueden aplicar en un momento dado.

En 1983, Kieren identifica como quinto subconstructo al desarrollo de la relación parte-todo. Considera que además de favorecer la generación del lenguaje fraccionario, puede vincularse con los subconstructos de medida, cociente, razón y operador al identificar, por ejemplo, la unidad de medida apropiada en cada fenómeno. De esta manera, la fracción

---

[20] La mayoría de las veces Kieren las denomina como *subconstructos* a las diferentes maneras de interpretar a las fracciones, aunque a veces para referirse a ellas también utiliza otros términos, por ejemplo: sistemas informales, subsistemas, constructos, o fenómenos del número racional.

[21] En el documento al que se hace referencia, cita al filósofo Bateson (1979) quien señala *"... para que un conocimiento sea útil debe ser "acerca de algo*".

$\frac{3}{4}$ puede relacionarse con las siguientes ideas: tres pasteles entre 4 niños, un pastel dividido en cuatro partes iguales de las cuales se tomaron 3; 3 de cada 4 o 3 es a 4, dependiendo de la 'realidad' (situación) en la que esté involucrada esa fracción.

Además, identifica dos tipos de herramientas o mecanismos mentales que permiten construir el concepto del número racional: los mecanismos constructivos y los mecanismos desarrollo. Relaciona los mecanismos constructivos con aquellos que pueden construirse a través de experiencias escolares y extraescolares y que además, son objeto de enseñanza en la escuela. Relaciona los mecanismos de desarrollo con algunos aspectos del proceso intelectual de los niños, entre los que identifica: a los mecanismos de conservación de número y de cantidades; los mecanismos de reversibilidad o de identidad; entre otros.

Kieren señala a la partición y a la equivalencia como mecanismos constructivos del número racional que pueden ser enseñados y que deben ser considerados con más atención en la currícula de los números racionales. Define a las situaciones de partición como situaciones de reparto de cantidades continuas o discretas:

> *"La partición está definida aquí como una equidivisión de una cantidad en un número dado de partes. Una distribución completa (de fenómenos continuos o de colecciones de objetos) es la base para el lenguaje fraccionario de parte-todo".* (Kieren, 1983:5)

Este investigador considera también que el concepto de equivalencia es de naturaleza multiplicativa y está estrechamente relacionado con el razonamiento proporcional, por lo que su comprensión es fundamental para el desarrollo de los conceptos de número racional o fraccionario en algunos de los otros subconstructos.

II.1.3 EL ESQUEMA DEL CONOCIMIENTO IDEAL DEL NÚMERO RACIONAL

En los documentos publicados en 1988 y 1992, Kieren presenta un "modelo teórico '*ideal'* del conocimiento del número racional" en un sentido amplio. En este esquema se observan diferentes niveles de conocimiento de los números racionales que culminan con la comprensión y la manipulación abstracta de estos números.

RQF (Campo Cociente de números racionales)

CF+ (Campos formales aditivos)

CF_x (Campos formales multiplicativos)

CFE (Constructo formal de Equivalencia)

Cx (Estructura multiplicativa)

CF (Constructo de Relación funcional)

CS (Constructo de Relación Escalar)

CM+ (Constructo Medida)

CQ (Constructo Cociente)

CR (Constructo Razón)

CO (Constructo Operador)

CP (Constructo de partición)

CE (Constructo de equivalencia)

CU (Constructo de formación de unidades divisibles)

C_1 C_2. (Plano más alejado de los hechos)

P_1 P_2 (Plano de los hechos)

Esquema del conocimiento ideal del número racional (Kieren, 1988:2)

Si bien esta “red ideal” de conocimientos constituye en su conjunto el concepto de número racional, Kieren señala que, como modelo teórico, está sujeto a experimentación. Afirma que la construcción del concepto de fracción tiene su origen en el *plano de los hechos* (señalado en el esquema con P1, P2, ...), es decir, su desarrollo se inicia con las acciones concretas que realizan los niños sobre los objetos para, por ejemplo, partir una cantidad y repartirla de alguna manera, hasta dominar una estrategia de partición más eficaz para cierto tipo de particiones, por ejemplo la dicotomía. A este tipo de procedimientos les llama procedimientos *etnomatemáticos*.

Plantea que con la experiencia, los niños logran resolver cierto tipo de situaciones en un *plano más alejado de los hechos* (señalado en el esquema con C_1, C_2...), por ejemplo, frente a una situación de partición que ya dominan, son capaces de indicar cuál es el resultado de un reparto sin necesidad de realizarlo concretamente, pero apoyándose quizás en la evocación mental de sus acciones para partir y repartir. Este tipo de procedimientos les ha llamado *procedimientos intuitivos.*

Kieren destaca que muchas veces los niños, frente a cierto tipo de situaciones han avanzado, del plano de los hechos al plano más alejado de los hechos, sin embargo esto no significa que puedan mantenerse en éste último plano cuando se enfrentan a situaciones más complejas. El uso recursivo de los procedimientos *etnomatemáticos* e *intuitivos* depende del grado de dificultad que represente para los niños las situaciones que enfrentan.

Los mecanismos constructivos de partición (CP), de equivalencia (CE) y de relación parte todo (CU) son la base de la estructura del esquema que permite introducir a los niños a la noción de fracción, desarrollar conocimientos puntuales, construir un lenguaje fraccionario (técnico simbólico) para expresar los resultados relacionados con cualquiera de sus diferentes interpretaciones (CM {constructo medida}, CQ {constructo cociente}, CR {constructo razón}, CO {constructo operador}), iniciando así un proceso que los llevará a establecer nuevas relaciones entre las estructuras y operaciones que hacen al concepto del número racional.

En este esquema, puede observarse también la consideración, en las etapas superiores, de los conceptos de 'campo conceptual aditivo (CF+) y multiplicativo ($CF\times$)' de G. Vergnaud (más adelante hablaremos sobre ellos). Estos conceptos permiten destacar la integración de las fracciones en una organización conceptual más amplia.

Kieren expone otro esquema en el que hace explícitas ciertas ideas sobre cómo considera que se accede a un conocimiento matemático formal, a partir de los conocimientos etnomatemáticos, es decir a partir de los conocimientos previos con los que los niños pueden resolver cierto tipo de situaciones. A este modelo le llama *“Modelo intuitivo de la construcción del conocimiento matemático”* (Kieren, 1988) y toma como referencia a los números racionales.

E**.** Conocimiento etnomatemático
(no escolar y restringido)

I. Conocimiento Intuitivo
(enseñado: se apoya en la imaginación, uso del lenguaje y herramientas de razonamiento)

TS**.** Conocimiento técnico simbólico (uso del lenguaje convencional, notaciones y algoritmos).

A. Conocimiento axiomático
(formal).

Un modelo elaborado de la construcción del conocimiento matemático (Kieren, 1988:15)

Como puede observarse en el modelo, Kieren nuevamente considera que los conocimientos previos que se ponen de manifiesto en los procedimientos empíricos utilizados por los alumnos al resolver problemas, son el punto de partida para llegar a un conocimiento formal, por ejemplo, los relacionados con las situaciones de partición. El lenguaje, en esta etapa, es utilizado por los niños más pequeños de manera limitada, relacionada con sus experiencias cotidianas.

Plantea también que el paso del conocimiento etnomatemático al conocimiento intuitivo se da, en general, en el contexto escolar mediante los mecanismos constructivos a partir de experiencias físicas (concretas). En este nivel, se desarrollan las representaciones mentales (imaginadas) y el lenguaje es utilizado como un recurso para describir el reparto y expresar el resultado, propiciando así la generación de un lenguaje fraccionario incipiente, pero que constituye la base para acceder al conocimiento técnico simbólico.

El lenguaje técnico simbólico se construye por medio del lenguaje y notaciones convencionales, el establecimiento de relaciones lógicas puntuales y de los algoritmos. El conocimiento axiomático implica el establecimiento de relaciones más generales y el manejo de los símbolos y operaciones de manera abstracta.

Kieren deja aún sobre la mesa la siguiente pregunta: ¿Puede desarrollarse un programa de matemáticas con un énfasis apropiado en cada una de las interpretaciones para los racionales?

Otros investigadores han retomado los cuatro constructos básicos destacados por Kieren, ya sea para desarrollar estudios específicos de cada uno de ellos, por ejemplo, Behr, Harel, Post, y Lesh (1990) o para cuestionarlos y proponer otros Olhsson (1988). Mancera (1992), hace un ejercicio de comparación de estos diferentes acercamientos.

II.2 FENOMENOLOGÍA DIDÁCTICA DEL CONCEPTO DE FRACCIÓN DE FREUDENTHAL

Hans Freudenthal (1983), investigador de origen holandés, hace una crítica a la reforma educativa europea de los años 60s, por considerar antididáctico el hecho de iniciar el proceso de aprendizaje de las matemáticas a partir de la enseñaza de conceptos y por pensar que los alumnos podrían adquirir el conocimiento de las estructuras matemáticas o de conceptos mediante la manipulación de ciertos materiales con los que se intentaba 'concretizarlas'.

Freudenthal considera que cuando se habla del aprendizaje de un concepto también se hace referencia a la comprensión del mismo[22]. Por lo anterior, evita el término *'adquisición de conceptos'* y en su lugar utiliza el término *'constitución de objetos mentales'*, para indicar el proceso que antecede a la formación del concepto. Bajo esta idea señala que cada individuo forma sus conocimientos matemáticos conforme comprende su significado en cada uno de los fenómenos en los que ése conocimiento está involucrado y afirma que para llegar a explicitar un concepto y manejarlo a un nivel algorítmico, se deben construir esos significados personales.

Por lo tanto, constituir un objeto mental significa para Freudenthal lograr que el campo semántico personal sobre un concepto determinado sea lo suficientemente amplio que permita interpretar adecuadamente todos los fenómenos que implican el uso de un mismo concepto.

La obra *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures* de Freudenthal (1983), se basa en el análisis de *fenómenos* que implican el uso de cierto concepto o de alguna o algunas de sus propiedades. Se estudia la manera en la que ese concepto organiza a esos fenómenos, se analizan las posibilidades de aprendizaje que ofrecen así como las características de las acciones que se realizan al tratar de resolverlos. A este proceso

[22] *"Begriff"* (alemán), es una traducción de latín *"conceptus"* y *"comprehensio"*. En inglés (to conceive), francés (concevoir) también significa comprensión.

Freudenthal le llama *fenomenología didáctica de los conceptos* y considera que debe realizarse previamente a todo diseño o desarrollo curricular.

El capítulo V de su obra Freudenthal lo dedica a las fracciones en el que plantea que fracciones equivalentes como: $\frac{2}{3}, \frac{4}{6}, \frac{8}{12}$, etcétera, son diferentes expresiones de un mismo número racional que tienen un nombre y una entidad propia. Las fracciones son, dice el autor, '*la fuente fenomenológica de los números racionales'* que permiten introducir a los alumnos a su estudio. Por lo tanto, considera que es más adecuado utilizar el término *fracción* que el término *números racionales positivos*.

En este documento Freudenthal señala que si bien el término fracción está relacionado con la idea de romper, fracturar y, el término racional se relaciona con la idea de razón, en el sentido de proporción o medida, existe una estrecha relación entre las fracciones y las razones. En su obra también dedica un capítulo para presentar una amplia gama de fenómenos relacionados con la razón. Presentaremos primero en un cuadro los papeles que Freudenthal identifica en el uso de las fracciones y después añadiremos algunos comentarios del autor.

Los papeles que juegan las fracciones son los siguientes:

<table>
<tr><th colspan="2">Referente (tipo de objeto)</th><th>Las fracciones aparecen como:</th></tr>
<tr><td rowspan="2">OBJETOS</td><td>Parte-todo</td><td>Operador fracturador
(Obtener la tercera parte de B)
Relación entre la parte y el todo
(A es $\frac{1}{3}$ de B)</td></tr>
<tr><td>Separados</td><td>Comparador
Relación de razón
(A es $\frac{1}{3}$ de B)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Caso Intermedio:
OBJETOS, en situaciones de escala (agrandar, achicar)</td><td>Transformador
(transforma al objeto)</td></tr>
<tr><td colspan="2">VALORES DE MAGNITUD
Y NÚMEROS</td><td>Operador razón (transforma un número, una longitud, un peso, en otro).</td></tr>
</table>

En la fenomenología que presenta, se distingue en primer lugar el tipo de objeto al que pueden aplicarse las fracciones, a saber: objetos concretos, considerando determinada magnitud (longitud, superficie, peso, etcétera); valores de magnitud, esto es cantidades expresadas numéricamente y, finalmente, números.

Después, dejando atrás la esfera de los objetos, se encuentran:

- La fracción en la función de medir ($\frac{3}{4}$ de metro)
- La fracción como punto en la recta numérica
- El operador fracción como inverso del operador multiplicación (como aquello que satisface la necesidad de inversos multiplicativos) y
- La fracción como número racional.

Veamos ahora algunos comentarios del autor.

II.2.1 CON RESPECTO A LA VARIEDAD FENOMENOLÓGICA DEL 'TODO', EN LA RELACIÓN PARTE-TODO

LA FRACCIÓN COMO FRACTURADOR. Es la fracción que se aplica a un objeto (el todo) para obtener una parte de él. Freudenthal analiza primero la existencia de una diversidad de maneras de partir, dividir, quebrar magnitudes (dependiendo del tipo de magnitud). Enseguida habla de las relaciones entre un todo y sus partes. Distingue una variedad fenomenológica de 'todos' posibles:

El todo	
Discreto	Susceptible de contarse uno a uno como: (canicas, personas, etc.)
Continuo	Longitud, Superficie, Volúmenes. Líquidos
Definido	Un cuadrado, un cubo, 5 metros de listón Si es discreto se conoce su cardinal (30 canicas, 3 pasteles, etcétera)
Indefinido	Puede ser discreto o continuo pero se desconoce su cardinal o sus dimensiones. Por ejemplo: la humanidad, las mujeres de un país, el ganado de una región, un segmento de recta, una superficie.
Estructurado	Si es discreto pueden estar ordenados u organizados espacialmente de forma determinada; sus elementos pueden ser diferentes. Por ejemplo, la humanidad formada por hombres y mujeres o ancianos, adultos, jóvenes y niños, canicas rojas, verdes y azules. Si es continuo y definido, puede tener divisiones internas o dibujadas sobre una retícula.
Sin estructura	Si es discreto no hay organización particular. Si es continuo no tiene divisiones previas.

En cuanto a la manera en la que se pueden obtener las partes de un todo bajo la interpretación de la fracción como fracturador, Freudenthal plantea que el todo puede ser dividido de manera estructurada o sin estructura, es decir de una manera *planeada* para obtener partes iguales de un todo continuo o discreto (estructurada) o, tomando al azar una parte de un todo discreto o, haciendo cortes arbitrarios en un todo continuo (sin estructura). Las partes pueden estar conectadas o no, es decir, pueden separarse físicamente y representarse dentro del todo de una manera gráfica.

Con respecto a las posibilidades para establecer relaciones entre las partes y el todo, la atención del alumno puede centrarse en una de las partes, en algunas partes o en todas las partes obtenidas. Los criterios de comparación pueden ser el número de partes y/o su magnitud, con lo que pueden identificarse la equivalencia entre algunas fracciones.

II.2.2 CON RESPECTO A LA TENDENCIA ESCOLAR DE SÓLO CONSIDERAR AL OPERADOR FRACCIÓN

Aunque Freudenthal considera que los fenómenos relativos a las relaciones 'parte-todo' son un eslabón importante en la enseñanza de las fracciones, destaca que basar la enseñanza sólo en la interpretación de fracción como fracturador limita las posibilidades de acceder a este objeto de una manera más extensa ya que implica trabajar sólo con fracciones propias (menores que la unidad). Después, el trabajo con otro tipo de fracciones tiende a realizarse únicamente a nivel formal, sin propiciar la comprensión de las reglas aritméticas, como: por qué $\frac{1}{2}$ *de*, significa lo mismo que $\frac{1}{2}$ *vez. L*a expresión $\frac{1}{2}$ y en general $\frac{a}{b}$ *de*, tiene un fuerte sentido extractivo: tomar la parte de un todo, sin embargo este sentido es limitado, no da cuenta de otros usos importantes de las fracciones cuando expresan por ejemplo, relaciones entre dos cantidades y, sobre todo operadores multiplicativos.

Freudenthal propone, que en la escuela se planteen situaciones "*cíclicas*" en las que factores enteros se alternan con factores fraccionarios para ayudar a los niños a comprender el sentido de expresiones como $\frac{1}{2}$ *vez*: Por ejemplo: *Gira la llave* $2\frac{1}{2}$ *veces en la cerradura*. *El carrusel ha dado la vuelta* $5\frac{1}{2}$ *veces. ¿Dónde estás ahora?* (Freudenthal, 1983:42).

Este investigador afirma que reducir el trabajo con fracciones, a la idea de fracturar o repartir, implicaría además dejar de lado el hecho de que en la vida cotidiana hay numerosos fenómenos que pueden aprovecharse para llegar a la fracción con otras connotaciones, como la relación entre dos cantidades (razón) o la relación parte de parte; propiciando que los alumnos: "... *no tengan ni idea de los que significan las fracciones, ni de lo que se puede hacer con ellas; ... . La pobreza fenomenológica del enfoque me parece, en gran parte responsable de este fallo didáctico*"*.* (Freudenthal, 1983: 20).

II.2.3 CON RESPECTO A LA IMPORTANCIA DE CONSIDERAR LAS MAGNITUDES

Freudenthal fue uno de los primeros investigadores en la enseñanza de las matemáticas (sino es que el primero) en señalar la importancia de tomar seriamente en consideración el plano de las magnitudes, en la enseñanza de las fracciones. Acusa la falta de una teoría de las magnitudes y de la medida, *adecuada* para servir de referencia a los estudios didácticos.

Destaca una gran diferencia entre repartir un conjunto discreto, por ejemplo, 6 panes entre 2, y repartir un objeto, por ejemplo, un pan entre ***n***. Señala que en el primer caso, se trata de dividir un conjunto finito. En el segundo caso no, un pan es pensado como una cantidad arbitrariamente divisible. El modelo que está implícito en esta última división es, justamente, el de la noción de magnitud, en el sentido clásico del término (magnitud continua).

El trabajo con magnitudes requiere, entre otras cosas, de una relación de equivalencia (*¿qué condiciones debe satisfacer un objeto para poder ser sustituido por otro?*), y una unión de objetos, que llevará a la suma.

II.2.4 CON RESPECTO AL OPERADOR FRACCIÓN

Freudenthal destaca la importancia del operador en el estudio de las fracciones. Efectivamente, en la fenomenología de la fracción que esquematizamos anteriormente, el operador fracción aparece en tres ocasiones: Como operador fracturador que actúa sobre objetos concretos, como operador-razón entre valores de magnitud y, finalmente, como operador fracción formalmente definido en un campo numérico. Además, en una etapa intermedia, como transformador de objetos (agrandamientos, achicamientos).

En estas distintas apariciones del operador, puede observarse que éste se va despejando progresivamente de su vestimenta concreta. Más adelante, Freudenthal presenta una secuencia matemática, y una secuencia didáctica para la introducción de los operadores fracciones (introducción que plantea como alternativa a la presentación formal de un campo cociente).

II.2.5 CON RESPECTO A LAS FRACCIONES COMO COMPARADORES

Freudenthal destaca que las fracciones también pueden servir para comparar objetos, cuando éstos pueden separarse concreta o imaginariamente. Señala que esta comparación puede hacerse de diferentes maneras:

a) De manera directa, es decir colocando un objeto junto a otro, siendo uno de ellos la unidad de medida.

b) De manera indirecta, es decir utilizando un tercer objeto como intermediario con el que se miden dos objetos que no se pueden juntar.

c) A nivel abstracto (comparación de números o valores de magnitudes).

Plantea que las situaciones de comparación que generan fracciones son aquellas en las que la magnitud que se compara (unidad de medida) no cabe un número exacto de veces en la otra magnitud, propiciando con ello la subdivisión de la unidad de medida para comparar el resto o la conmensuración[23].

En este sentido, Freudenthal considera que es fundamental el desarrollo de la noción de equivalencia y el establecimiento de relaciones de cantidades en cada clase de equivalencia, para poder construir una magnitud en un sistema de cantidades que permitan sustituir una magnitud por otra y establecer diversas igualdades entre las magnitudes en cuestión. Señala que el desarrollo de esta noción propicia el surgimiento espontáneo de la adición de cantidades así como la multiplicación y la división.

> *"En un enfoque fenomenológico debemos comenzar con los objetos que, mediante una relación de equivalencia, se requieren para formar clases que representan valores de magnitud. La disponibilidad sin restricciones de tales objetos en cada clase es, de hecho, indispensable[24]. Hago hincapié en este punto, que a través de una fenomenología defectuosa ha producido una didáctica defectuosa de las fracciones.* (Freudenthal, 1983:22).

---

[23] Procedimiento que consiste en buscar cuántas unidades de medida y cuántos objetos iguales al que se quiere medir coinciden, con respecto a la magnitud que se esté midiendo. Por ejemplo, si un objeto mide $\frac{3}{4}$ de unidad puede establecerse que 3 objetos miden lo mismo que 4 unidades.

[24] Esta afirmación puede interpretarse de la siguiente manera: Si se quiere establecer que, por ejemplo, una cantidad **A,** es equivalente a 5 veces una cantidad **B** (**A** ≡ 5**B**), es necesario tener a disposición los cinco ejemplares de **B**.

Freudenthal puntualiza que la comparación de fracciones a nivel numérico o considerando sólo el valor de la magnitud es una actividad que debe realizarse después de haber realizado comparaciones directas.

Propone que en la enseñanza de las fracciones se utilicen, además del modelo del pastel, otros modelos como: superficies, longitudes, volúmenes, pesos, la carátula y las manecillas del reloj; porque permiten visualizar magnitudes fraccionarias de diferente manera. Destaca que *las longitudes y áreas son los modelos más naturales para visualizar magnitudes fraccionarias.*

COMENTARIOS

La fenomenología didáctica de Freudenthal constituye una contribución importante para el estudio de los procesos de enseñanza de las fracciones: aporta, en primer lugar una *mirada didáctica* (por así decir), para la cual son relevantes numerosas cuestiones, empezando por las magnitudes mismas, que desde el punto de vista de las matemáticas formales, pasan desapercibidos. En segundo lugar, aporta un acervo de referentes finamente organizados para la construcción de situaciones, incluso, esboza posibles secuencias didácticas. Varios investigadores han seguido desarrollando estudios sobre las fracciones en esta línea (enfoque realístico), en particular Streefland (1993).

Lo que Freudenthal no estudia directamente y que encontraremos en otra línea de investigación, son las situaciones didácticas que podrían favorecer las adquisiciones sucesivas de los distintos aspectos de las fracciones. Tampoco estudia de manera precisa las articulaciones entre las nociones de fracción y de número decimal, o de fracción y de razón.

II.3 HACIA UNA VISIÓN MÁS INTEGRADORA: LOS CAMPOS CONCEPTUALES DE VERGNAUD

Vergnaud, (1988, 1991) considera que la resolución de problemas es lo que promueve el aprendizaje de los alumnos y permite dar significado y sentido a los conceptos matemáticos. Analiza la estructura semántica[25] y sintáctica[26] de diferentes clases de problemas y concluye que un mismo concepto puede estar involucrado en una gran diversidad de problemas y a la vez puede involucrar otros conceptos matemáticos. Clasifica a los problemas en dos grandes clases: el campo conceptual de los problemas con estructura aditiva (incluye a todos aquellos que pueden resolverse con sumas y/o restas) y el campo conceptual de los problemas con estructura multiplicativa que define como el conjunto de situaciones de proporción simple o múltiple que generalmente se resuelven con una multiplicación o con una división.

Señala Vergnaud que los problemas de proporción simple aparecen en diversos contextos, como compra-venta, partición, mezclas, volumen, etc. y que los problemas de proporción múltiple se presentan en contextos de consumo, productividad permanente, espacio, mecánicos, calor, productos de medidas[27], etcétera. Destaca que los problemas de proporción simple y múltiple tienen su propio carácter específico, que los segundos son, para los alumnos, más difíciles que los primeros debido más al contexto, es decir al tipo de magnitudes que se relacionan (masa-calor, velocidad-distancia, tiempo-distancia); que a su estructura multiplicativa.

El investigador jerarquiza el nivel de dificultad de los problemas tomando en cuenta las diferencias entre las relaciones que se establecen entre los datos, el tipo de números que se utilizan y los contextos (magnitudes). Señala que la noción de fracción y de razón están estrechamente relacionadas; constituyen la base del conocimiento del número racional y, que ambas nociones pueden desarrollarse a partir de la resolución de problemas con estructuras multiplicativas en diversos contextos. A este respecto dice:

> *"Antes de que los niños piensen en las fracciones y las razones como números que pueden ser, restados, multiplicados y divididos , las comprenden como operaciones, relaciones, o cantidades. ...Este análisis muestra que no resulta sensato estudiar el aprendizaje y la enseñanza de las fracciones y de las razones independientemente de las estructuras multiplicativas. Es sólo hasta que todos estos significados se sintetizan en el concepto de*

[25] El significado o la interpretación del concepto matemático involucrado en los problemas.
[26] El tipo de relaciones numéricas que se establecen entre los datos para encontrar la solución.
[27] También considera a los problemas de cálculo de área como problemas de proporción múltiple.

> *número racional que es posible pensar en las fracciones y las razones como puros números".* (Vergnaud, 1988:156-158).

II.4 EL ESTUDIO DIDÁCTICO DE LOS DECIMALES, DE NADINE Y GUY BROUSSEAU

El estudio sobre la enseñanza de los decimales que resumiré en este apartado, fue realizado por Nadine y Guy Brousseau a lo largo de aproximadamente 10 años. La secuencia, de más de 40 situaciones didácticas, abarca desde los aspectos iniciales hasta la función de los decimales como operadores multiplicativos ("aplicaciones lineales") (Brousseau, N. y G. Brousseau, 1987).

Los Brousseau aclaran que esta secuencia constituye un estudio de epistemología experimental y no pretende ser un modelo a seguir en la escuela. No obstante, aporta conocimientos valiosos sobre didáctica de las matemáticas y sobre la problemática de la enseñanza de los racionales.

Si bien para los autores el propósito final en la escuela primaria es que los alumnos logren un dominio sobre los decimales, consideran que una comprensión cabal de éstos sólo se puede lograr (con los medios didácticos actualmente disponibles) si los decimales se estudian como un subconjunto de los racionales. Plantean, por ejemplo, que la noción de razón difícilmente podría abordarse directamente desde los decimales.

La secuencia se inicia por lo tanto con el estudio de las fracciones, del que seguirá, como caso especial, el de los decimales, en tanto números más fáciles de manipular y que permiten aproximarse a las fracciones. Después, en cada etapa, fracciones y decimales coexisten.

Un aspecto interesante de esta secuencia tiene que ver con el hecho de que los distintos papeles que pueden jugar las fracciones (llamados también subconstructos, significados o interpretaciones, según los investigadores), se encuentran integrados y articulados a lo largo de una secuencia didáctica, algo que no habíamos visto en ninguno de los trabajos anteriores.

> *"La proporcionalidad juega un papel importante a lo largo de toda la secuencia, pero funciona en el nivel de la acción, no es objeto explícito de estudio"* (Comin, E, 2000:17).

La progresión de situaciones responde básicamente a tres tipos de variables: los números (naturales, racionales positivos, decimales), la función de las razones (escalares, medidas, funciones) y el estatuto de los conocimientos puestos en juego (implícitos, explícitos, formales).

La secuencia de los Brousseau consta de varias fases. En la primera, se construyen las fracciones con la función de expresar medidas, y con el significado de cocientes. En la segunda, los decimales surgen como un subconjunto de los racionales que permite grandes economías en la comparación y en el cálculo. En la tercera se registra la construcción de las fracciones y los decimales como operadores que se aplican a conjuntos de medidas. Finalmente, en la última, se estudian las composiciones de aplicaciones lineales.

A continuación presento, a grandes rasgos, aspectos sobresalientes de la secuencia. Esta presentación se basa en los comentarios que expone Block (2001).

- *Primera y segunda fases.* Construcción de las fracciones cocientes para expresar medidas. Se propicia el uso de parejas de medidas enteras (razones) para dar cuenta de medidas no enteras. La situación fundamental es la medición del espesor de hojas de papel:

Emisores y receptores disponen, cada uno, de cinco paquetes de hojas identificadas con las letras de la ***A*** a la ***E***. Las hojas se distinguen entre sí solamente por su espesor. Los alumnos disponen además de un vernier[28]. Los emisores escogen un paquete y deben enviar información a los receptores para que ellos identifiquen, entre sus paquetes, el que escogieron los emisores. La única restricción es no proporcionar la letra que identifica al paquete.

Dado que es imposible medir el espesor de una sola hoja con los instrumentos de medición disponibles, como la regla o el vernier, la idea de medir el espesor de pequeños paquetes de hojas surge naturalmente. Los niños llegan a utilizar la pareja de datos {N° de hojas, mm de espesor} para identificar el espesor de cada tipo de hoja, por ejemplo: 50 hojas, 4 mm. Logran manejar las variaciones, debidas a la imprecisión en la medición, por ejemplo, las parejas 50 hojas, 4 mm y 52 hojas, 4 mm; corresponden probablemente a hojas con el mismo espesor.

---

[28] Instrumento para medir longitudes (espesores) milimétricas.

Establecen parejas equivalentes, es decir, parejas que expresan un mismo espesor de hoja, por ejemplo 50 hojas, 4 mm y 25 hojas, 2 mm. Mediante estas relaciones de conmensuración, logran también anticipar, entre dos tipos de hoja, cuál tiene mayor espesor, por ejemplo, las hojas que corresponden a 50 h, 4 mm son más gruesas que las que corresponden a 80 h, 4 mm.

El estatuto matemático de estas parejas es momentáneamente ambiguo: en el origen, son parejas de cantidades en relación. Podemos decir que son razones.

En este punto, destaca Block, puede verse con claridad un primer momento en el que una razón entre cantidades enteras permite dar cuenta de una medida no entera, es decir, un momento en el que la razón juega el papel de precursora de la fracción, en la función de expresar una medida.

A partir del momento en el que se obtiene la relación de conmensuración {*n* hojas = *m* milímetros}, es posible plantear relaciones en el nivel de las *medidas* sin recurrir ya a las magnitudes físicas. ¿Cuántos milímetros corresponden a *n'* hojas? O bien, dadas dos relaciones de conmensuración, inferir qué hojas son más gruesas. Hasta este punto, el trabajo se desarrolla con razones, para dar cuenta de medidas fraccionarias.

Es en el nivel de la relación entre *medidas*, en el que ocurre el proceso de expresión de estas razones con un número, es decir, el proceso de construcción de las fracciones. A partir de las parejas del tipo {50 hojas, 4 mm} se introduce la escritura $\frac{4}{50}$ como expresión de la medida de una hoja. Decir que el espesor de una hoja mide $\frac{4}{50}$ con la unidad milímetro, *significa* aquí que 50 veces ese espesor es igual a 4 milímetros, o bien, que ese espesor mide 4 milímetros entre 50.

Número de hojas	Espesor en milímetros
50	4
$(\div 50)$	$(\div 50)$
1	$4 \div 50 = \frac{4}{50}$ (por definición)

La distinción entre el espesor de una hoja y la designación de una pila de hojas, señalan los Brousseau, es esencial pero difícil y sólo se aprende poco a poco. En ese proceso está el paso de la noción de razón, de relación entre dos cantidades, a la noción de número fraccionario. Podemos suponer que serán las relaciones (la comparación) y las operaciones (suma, resta, multiplicación) que los alumnos realizarán sobre esta nueva "notación", $\frac{4}{50}$, a la que le darán, poco a poco, su carácter de número.

Se registra aquí una primera construcción de los racionales, en la función de expresar medidas, con el significado de cocientes. La proporcionalidad constituye el vehículo para lograrlo.

Una vez que las medidas se expresan con fracciones, los alumnos aprenden a sumarlas, a restarlas y a multiplicarlas o dividirlas por un entero, en distintos contextos, con distintas magnitudes.

Posteriormente, empiezan a utilizar a los decimales para acotar las medidas racionales (se introduce el juego de las redes del pescador, en el que los alumnos deben aproximarse lo más posible a un número racional dado. Crean "redes" cada vez más finas, descubren la ventaja práctica de utilizar para ello decimales).

- *Tercera fase.* Construcción de las fracciones en el papel de aplicaciones lineales (operadores multiplicativos constantes).

Esta construcción ocurre en dos momentos: primero, los alumnos aprenden a manejar una relación en la que la razón externa no es entera, mediante un valor unitario fraccionario o decimal. Después, identifican explícitamente el operador externo racional. Antes de continuar, precisemos el sentido que damos a las expresiones razón externa y razón interna.

En una relación entre dos conjuntos de valores, por ejemplo, medidas de una figura **A** y medidas de una figura **A’** a escala de la primera, llamamos razones internas a las que se establecen entre pares de valores de un mismo conjunto. Por ejemplo, entre las medidas de los distintos lados de la figura **A** o entre las de los distintos lados de la figura **A’**.

Llamamos razones externas a las que se establecen entre un valor de un conjunto y el valor que le corresponde en el otro conjunto (por ejemplo, entre la medida de un lado de la figura **A** y la medida del lado correspondiente en la figura **A’**.

Razones Internas

Conjunto 1	**Conjunto 2**
A	A’
B	B’
C	C’
D	D’

Razones Externas

Así mismo llamaremos procedimientos internos a los procedimientos de resolución en los que utilizan explícitamente las razones internas.

PRIMER MOMENTO

Se plantea una primera situación en la que se debe agrandar un rompecabezas como el que se muestra en la página siguiente. En la consigna se informa que el lado, de la figura sombreada, que mide 4 cm, debe medir 7 cm en la reproducción. Los alumnos tienen un dibujo del rompecabezas original, con las medidas indicadas, y además, las piezas sueltas del mismo rompecabezas. Se les pide que se repartan las piezas entre los integrantes de cada equipo.

Frente a este problema, los niños, sistemáticamente, proponen sumar 3 cm a todas las medidas. Sin embargo, la situación proporciona una forma de validación empírica: cuando terminan de construir sus piezas e intentan armar el rompecabezas con ellas, descubren, siempre con azoro, que éstas no embonan.

A partir de esta constatación se suscita la reflexión. Surge primero la sospecha de que se midió mal, se rectifican las medidas. Surgen propuestas diversas como multiplicar por 2, y restar 1", lo cual acusa ya la búsqueda de un operador constante.

En la experiencia que analizan los Brousseau, la solución que, no sin dificultad, se acaba imponiendo es la determinación del valor unitario: 1 $\rightarrow \frac{7}{4}$ cm. Determinar este valor unitario fraccionario puede ser complejo cuando no se dispone aún de la noción de fracción como cociente (será entonces necesario calcular qué fracción de 4 representa 7 (Balbuena y Block 1991).

No obstante las dificultades anteriores, se comprende el interés de institucionalizar en este momento la solución en la que el valor unitario se expresa con una fracción. Aunque los decimales acabarán imponiéndose debido a las facilidades de cálculo que ofrecen, el cálculo con fracciones permitirá *justificar* al cálculo con decimales.

Una vez establecida la razón $1 \rightarrow \frac{7}{4}$ se calculan las imágenes, por ejemplo, para 5 cm:

Figura A	**Figura A'**
$7 \xrightarrow{\div 7} 1 \xrightarrow{\times 5} 5$	$4 \xrightarrow{\div 7} \frac{7}{4} \xrightarrow{\times 5} 5 \times \frac{7}{4}$

El operador externo constante $\times \frac{7}{4}$, comenta Block que subyace al conjunto de razones externas $(7 \rightarrow 4)$, $\left(1 \rightarrow \frac{7}{4}\right)$, $\left(5 \rightarrow \frac{35}{4}\right)$, *no* interviene explícitamente. Por su parte, el operador interno $\times \frac{5}{7}$, subyace a la composición $(\div 7)$ $(\times 5)$ y tampoco interviene explícitamente. Así, hasta este punto, las fracciones intervienen únicamente como medidas, no como relaciones u operadores. Los operadores que intervienen son siempre naturales.

Block compara el valor unitario $1cm \rightarrow \frac{7}{4}cm$ con otro valor unitario que se vio anteriormente: $1\ hoja \rightarrow \frac{4}{50}mm$. Ambos proceden de razones entre medidas enteras $(4cm \rightarrow 7cm)$ y $(50\ h \rightarrow 4mm)$, ambos implican determinar una cantidad fraccionaria mediante una división $(7cm \div 4\ y\ 4\ mm \div 50)$. La diferencia más importante es la función que están destinados a cumplir. En el caso de las hojas, la razón $(50\ h \rightarrow 4\ mm)$ funciona como precursora de una *medida* racional: $\frac{4}{50}\ mm$. No interesó, en ese momento, identificar al operador $\times \frac{4}{50}$. En cambio, en la situación del rompecabezas, la razón $(4cm \rightarrow 7cm)$ aunque también da lugar a una medida fraccionaria , tiene una función que va más allá: dar cuenta de una *transformación* cuantitativa de medidas. En este caso interesará culminar el proceso identificándola explícitamente como el operador multiplicativo constante $\times \frac{7}{4}$.

A partir de este objetivo se comprende, apunta Block, el interés de estudiar el método de reducción a la unidad en el contexto de una relación de semejanza geométrica y no, por ejemplo, de una relación entre magnitudes distintas: 1) el operador que será construido más adelante es un operador sin dimensión, 2) la situación facilita la posibilidad de verificación empírica y 3) la situación da lugar a relacionar varios valores de un conjunto inicial, con varios valores de un conjunto final, condición importante cuando interesa destacar progresivamente la noción de aplicación.

En la secuencia de los Brousseau se propicia, mediante diversas situaciones, que los niños identifiquen la razón $(1 \to \frac{7}{4})$ como una razón privilegiada debido a una serie de ventajas que ofrece: facilita el cálculo de cualquier imagen cuando hay varias escalas en juego; permite distinguir las que "achican" de las que "agrandan" y, sobre todo, permite ordenarlas de la que achica más a la que agranda más. La expresión $1 \to \frac{b}{a}$ de la razón externa, equivalente a $a \to b$, se convierte así en la representante canónica de las transformaciones.

SEGUNDO Y TERCER MOMENTO

Los estudiantes no conocen el sentido de multiplicar por una fracción, pero esto no impide que hayan podido generar conjuntos de pares de cantidades que guardan *una misma razón externa racional* al utilizar los procedimientos internos (como se vio anteriormente). Al hacerlo, el operador racional permaneció implícito. Ahora, N. y G. Brousseau optan por *definir* la noción de operador a partir de dicho conjunto de pares de cantidades, y en particular, a partir de la razón canónica $1 \to \frac{b}{a}$. En el problema de escala se propició el cálculo del valor unitario.

	Figura A	**Figura A'**	
$\div\ 4$	4	7	$\div\ 4$
	1	$\frac{7}{4}$	
$\times\ 5$	5	5 veces $\frac{7}{4}$	$\times\ 5$

Una vez que los alumnos aprendieron a utilizar la razón canónica $1 \to \frac{b}{a}$, por ejemplo $(1 \to \frac{7}{4})$, *se define* al operador racional, destacando la analogía funcional que guarda con el operador natural.

$\times 4$

1	4
5	$4 \times 5 = 20$

$\frac{7}{4}$

1	$\frac{7}{4}$
5	x

Así como la razón $1 \to 4$ corresponde a la multiplicación $\times 4$, la razón $(1 \to \frac{7}{4})$ se define como una multiplicación y se expresa como $\times \frac{7}{4}$.

Por lo tanto, $\times \frac{7}{4}$ significa "la relación que a 1 asocia $\frac{7}{4}$" y , en general, multiplicar una medida ***c*** por un racional ***q*** significa encontrar la imagen de ***c*** dada por la razón $1 \to q$:

$$\begin{array}{ccc} & \times q & \\ 1 & \to & q \\ c & \to & x = c \times q \end{array}$$

El operador $\times q$ se convierte así en una segunda forma de dar cuenta de una transformación multiplicativa, que nace de la forma anterior $1 \to q$. Notemos que la construcción del sentido de la multiplicación de una medida por un operador racional se realiza en el seno de una situación de proporcionalidad.

CUARTO Y QUINTO MOMENTOS

En el cuarto momento se analizan los sentidos de las divisiones que los alumnos han estudiado con anterioridad y se preparan para abordar nuevos sentidos, en particular, el operador división entre un número racional como el inverso del operador multiplicación.

Finalmente, en el quinto momento, estudian las composiciones y descomposiciones de operadores multiplicativos (aplicaciones lineales), dejando atrás los conjuntos de medidas, lo que da lugar a estudiar la multiplicación y la división de operadores.

Los alumnos resuelven diversos problemas como el siguiente:

> *Del presupuesto de una familia, se dedica el 0.7 a gastos de la casa, y de estos, el 0.8 se gasta en renta. ¿Qué parte del presupuesto total se dedica al pago de la renta?*

II.5 LOS ACERCAMIENTOS DE KIEREN, FREUDENTHAL Y BROUSSEAU

Hemos presentado aquí tres acercamientos que han sido fundamentales en el análisis de la problemática de la enseñanza de los números racionales. Es posible identificar en los tres trabajos aspectos comunes, en particular: la necesidad de propiciar el estudio de una diversidad de significados en contextos específicos para dar lugar a la construcción de un concepto amplio de número racional. No obstante, cada uno de los investigadores tiene un acercamiento a esta problemática que difiere en los componentes de la problemática global que enfatizan, y, más ampliamente, en los recursos teóricos y metodológicos que ponen en juego.

Kieren fue probablemente de los primeros investigadores que estudiaron y difundieron la cuestión de la polisemia de la noción de la fracción. Sus estudios, al menos los más conocidos, estuvieron centrados en el análisis conceptual de esta polisemia, con referencias teóricas a lo que puede implicar en el nivel cognitivo. Sus estudios experimentales son menos conocidos.

Freudenthal, extiende a las fracciones un planteamiento general para la enseñanza de las matemáticas en los niveles básicos: la construcción de objetos mentales a partir del estudio sistemático de *fenómenos,* además de aportar lo que podría considerarse una *materia prima valiosa* para el diseño de situaciones didácticas, presenta y fundamenta el esqueleto de una posible progresión de enseñanza, y, del mismo modo, contribuye a cubrir un vacío en la enseñanza, destacado por él mismo, el relativo al trabajo con magnitudes.

El estudio de los decimales de los Brousseau forma parte de un proyecto ambicioso: la construcción de la Teoría de las Situaciones Didácticas (ver Anexo 1), en el que los conocimientos se definen por las situaciones que resuelven.

Cabe preguntarse qué tan profunda es la distancia entre las *situaciones* de Brousseau y los *fenómenos* de Freudenthal. Sin duda no son el mismo objeto, pero parecen cumplir roles semejantes: analizar los conocimientos a la luz de su funcionamiento. Aunque no podemos realizar aquí un análisis más profundo, nos atrevemos a decir, que las secuencias que proponen tampoco son muy diferentes.

Los Brousseau, por su parte van más lejos en cuanto al estudio de secuencias didácticas muy específicas y, más ampliamente, en cuanto al estudio de procesos concretos de matematización en el salón de clases, procesos en los que se asume la problemática del concepto, pero también la de las interacciones en el seno de la clase.

Más allá de las diferencias y semejanzas, puede decirse que estos tres investigadores han abierto las líneas más importantes de la investigación actual sobre la problemática de la enseñanza de las fracciones.

En el capítulo siguiente, haremos una revisión de los estudios que se han centrado en una de las familias de problemas que dan lugar a la utilización de fracciones: los problemas de reparto.

Excepto Brousseau, los investigadores que hemos estudiado, Kieren, Vergnaud y Freudenthal, coinciden en señalar la importancia del reparto y de la partición en el proceso de aprendizaje de las fracciones. Destacan la necesidad de no circunscribir las experiencias a estos problemas, y a los significados que les están asociados (operador fracturador, relación parte todo).

Una parte considerable de los estudios puntuales sobre las fracciones (puntuales en el sentido de estudiar sólo un aspecto del tema), se han realizado en el contexto, del reparto.

III LAS SITUACIONES DE REPARTO

Como se ha visto en los apartados anteriores, Kieren, Freudenthal y Vergnaud, entre otros investigadores, consideran a las situaciones de partición, reparto o distribución de cantidades como indispensables para introducir ciertos aspectos de la noción de fracción y para extender esta noción hacia la construcción de otros aspectos fundamentales del número racional como son: la noción de equivalencia, de proporcionalidad y de razón así como el desarrollo de relación parte-todo y parte-parte.

Dichos investigadores consideran también que las situaciones de reparto favorecen el desarrollo de un lenguaje fraccionario oral y escrito, así como la creación de procedimientos operacionales aditivos y multiplicativos, siempre y cuando se presenten en contextos diferentes y no se reduzcan a la idea de fracturar una sola unidad en partes iguales que generan fracciones menores que la unidad.

Block y Solares (2001), destacan que los problemas de reparto son propicios para establecer un puente entre la noción de fracción como "quebrado" (esto es, con el sentido típico de partir la unidad en partes iguales y tomar algunas partes) y la noción de fracción como resultado de una división de dos enteros. Su planteamiento es el siguiente:

La fracción $\frac{3}{4}$ de unidad, definida como "quebrado", significa la parte que resulta de partir a la unidad en 4 y tomar 3 partes.

La fracción $\frac{3}{4}$ de unidad, definida como cociente (y medida), significa la medida que multiplicada por 4 da 3 unidades, o bien, el resultado de dividir 3 unidades entre 4.

No obstante, agregan los autores, aun cuando los alumnos de la primaria no conozcan el significado de la fracción "como cociente", y solamente conozcan el significado como quebrado, es perfectamente posible que resuelvan un problema de reparto como *3 pasteles entre 4 niños* (mediante particiones de las unidades representadas) y encuentren el cociente $\frac{3}{4}$ de unidad.

En este último caso, la fracción $\frac{3}{4}$ sigue siendo, para los niños, un quebrado (3 pedacitos de un cuarto), pero, a la vez, es el resultado de una división. Los autores proponen llamar a esta fracción cociente "cociente calculado", para distinguirla del “cociente por definición", es decir, de la interpretación $\frac{3}{4}$ como el número que al multiplicarse por 4 da 3. Block y Solares añaden que cuando se divide 3 entre 4 con el algoritmo, el cociente 0.75 es, para los estudiantes, un cociente calculado, *resulta* de la división $3 \div 4$ pero *no significa* 3 entre 4.

Así Block y Solares sostienen que el trabajo con estos *cocientes calculados* puede ayudar a disminuir la distancia entre la fracción quebrado y la concepción de la fracción como cociente de dos enteros.

La importancia de las situaciones de reparto en el aprendizaje de las fracciones se refleja también en el hecho de que una parte considerable de las investigaciones sobre fracciones, realizadas en los últimos 25 años, estudian aspectos diversos de las situaciones de reparto. En el presente capítulo intentaré dar cuenta de algunos de los estudios representativos y también de la diversidad de aspectos en los que se ha centrado la atención.

Organicé los estudios revisados en función del aspecto del reparto en el que se centran, a saber:

- La realización física de repartos, sin cuantificación del resultado. El problema de la equitatividad, de la exhaustividad, y de la comparación de partes obtenidas en repartos.

- La noción de razón o de cociente "indicado" en situaciones de reparto.
- La cuantificación de los resultados del reparto mediante fracciones.

Opté por reportar primero los dos grupos de estudios en los que la fracción permanece implícita y en tercer lugar aquellos que se centran en la cuantificación del resultado del reparto. Es importante aclarar que el orden en el que se presentan los aspectos estudiados no supone que estén secuenciados estrictamente en ese orden, desde el punto de vista del aprendizaje.

III.1 LA REALIZACIÓN FÍSICA DE UN REPARTO SIN CUANTIFICACIÓN. EL PROBLEMA DE LA EQUITATIVIDAD, DE LA EXHAUSTIVIDAD Y DE LA COMPARACIÓN DE PARTES OBTENIDAS EN REPARTOS IDÉNTICOS

Sin duda una de las ventajas didácticas relevantes de las situaciones de reparto equitativo y exhaustivo radica en la posibilidad de realizar los repartos físicamente. Desde hace ya más de medio siglo, los estudios realizados por Piaget y sus colaboradores (1960; 1965; 1966: 1968; 1971), han mostrado que la realización exitosa de estas tareas, incluso en el nivel concreto y todavía sin cuantificación con fracciones, supone un proceso de desarrollo cognitivo así como la necesidad de determinadas experiencias.

Posteriormente, otros trabajos han confirmado los resultados anteriores a la vez que han estudiado una mayor diversidad de aspectos implicados en la acción de repartir.

Dado que los estudios abocados al análisis de los procesos de partición en el nivel concreto, atañen sobre todo a los alumnos de los primeros grados de la educación básica, en este apartado presentaré algunos de los aportes de tres estudios. Empezaré con una revisión breve de los trabajos de Piaget (1965). Enseguida presentaré un estudio realizado en México por Dávila (1991), acerca de las relaciones implicadas en la acción de comparar resultados de repartos idénticos, y un estudio más reciente dirigido por Figueras (1996) que se llevó a cabo durante los ciclos escolares 1993-1994 y 1994-1995 con niños de 4 a 7 años de edad, que cursaban del 2º año de preescolar al 2º año de la educación primaria.

III.1.1 ESTUDIOS PSICOGENÉTICOS SOBRE LAS SITUACIONES DE REPARTO

Presentaré primero un trabajo de J. Piaget y colaboradores (1965), en el cual no se estudia el potencial didáctico de las situaciones de reparto, pero sí da cuenta del proceso de desarrollo cognitivo de los niños y de su capacidad para realizar particiones equitativas y exhaustivas. En numerosas investigaciones posteriores nuevamente se observan los resultados encontrados por Piaget y sus colaboradores.

La génesis de la partición. Empezaré por situar brevemente la teoría piagetiana de corte epistemológico, que revolucionó la concepción de la inteligencia en el ámbito de la psicología así como la concepción de aprendizaje y el papel del error, en el ámbito de la pedagogía y de la didáctica.

Jean Piaget (1968), precursor de la investigación sobre la génesis del conocimiento, observó desde 1919, ciertas regularidades en las respuestas erróneas de los niños al resolver algunos tests de inteligencia.

Se propuso averiguar cuáles eran los razonamientos que llevaban a los niños a responder de una manera equivocada. Con el tiempo y a través de sus experimentaciones, Piaget perfeccionó un método para indagar el origen de los ‘errores’ de los niños frente a ciertas situaciones experimentales, incluyendo a lo largo de las sesiones preguntas directas acerca del por qué de sus respuestas y de sus acciones para resolver las situaciones (además de la observación de su conducta, propia del método clínico). Las respuestas de los niños permitieron a Piaget descubrir razonamientos no esperados, pero que explicaban la lógica de los ‘errores’. Estas investigaciones apuntalaron la construcción de una teoría sobre el desarrollo cognitivo de los niños y del conocimiento.

En la construcción de las categorías de desarrollo intelectual y de la evolución del conocimiento, Piaget tomó en cuenta cuatro factores que contribuyen a dicho desarrollo: a) la adaptación del organismo a su medio a lo largo del crecimiento (madurez neurológica)[29], b) la experiencia con los objetos de conocimiento[30], c) la interacción social y d) los procesos de equilibrio y la auto-regulación progresiva[31]. Identifica cuatro grandes fases en el desarrollo de la inteligencia que a su vez subdivide en *estadios*:

---

[29] Se refiere a la adaptación del organismo a su medio, la adaptación de las estructuras lógicas a nuevos aprendizajes.

[30] Al hablar de la experiencia con los objetos, Piaget se refiere a las interacciones del sujeto con los objetos de conocimiento, que pueden ser objetos materiales u otro tipo de objetos como el lenguaje, la serie numérica oral y escrita, etc.

[31] Se refiere al proceso de asimilación y acomodación de un conocimiento nuevo a las estructuras anteriores relacionadas con ese nuevo conocimiento.

Periodos	Estadios de Desarrollo
I. De la inteligencia sensorio-motriz: (Desde el nacimiento hasta la aparición del lenguaje, aproximadamente los 2 primeros años de vida)	1º De los mecanismos reflejos 2º De las reacciones circulares secundarias y los primeros hábitos 3º De las reacciones circulares secundarias 4º De coordinación de esquemas secundarios 5º De las reacciones circulares terciarias y experimentación activa 6º De transición del acto intelectual Senso-Motor a la Representación
II. De la inteligencia representativa y preoperatoria (Aproximadamente de los 2 a los 7 u 8 años)	1º Del pensamiento preconceptual 2º Del pensamiento intuitivo
III. Periodo de la inteligencia operatoria concreta (Aproximadamente de los 7 u 8 años a los 11 o 12)	1º De las operaciones simples 2º De completamiento de sistemas de clases y relaciones
IV. Periodo de la inteligencia operatoria formal. (Aproximadamente de los 11 o 12 años hasta la adolescencia)	1º De las operaciones combinatorias 2º de las operaciones interproposicionales

Piaget hace hincapié en que si bien el orden de aparición de las etapas señaladas es constante, su desarrollo depende, en cada individuo, del medio social en el que se encuentre y de él mismo. Considera que:

> *"... para conocer los objetos*, *los sujetos deben actuar sobre ellos y, en consecuencia, transformarlos. Desde las acciones sensoriomotrices más elementales hasta las operaciones intelectuales más refinadas ..., el conocimiento está constantemente ligado a acciones o a operaciones, es decir, a transformaciones*.
>
> (.........)
>
> *El conocimiento en sus inicios no parte ni de los objetos ni del sujeto, sino de interacciones, al principio inextricables, entre el sujeto y los objetos.*
>
> *Si el conocimiento de los objetos está subordinado siempre a ciertas estructuras de la acción, estas estructuras deben ser por tanto construidas y no están dadas ni en los objetos, puesto que dependen de la acción, ni en el sujeto puesto que éste debe aprender a coordinar sus acciones que no están programadas hereditariamente ..."* (Piaget, 1968:167-168).

Para 1941, Piaget e Inhelder (1971) habían realizado uno de los descubrimientos más importantes que se relaciona directamente con el aprendizaje de las matemáticas. El proceso de desarrollo de la noción de conservación de la materia o substancia, de la longitud o distancia y del volumen. En el caso de la noción de conservación de la substancia, encuentran que los niños, aproximadamente hacia los 7 u 8 años de edad, están en posibilidades de pensar, por ejemplo, que una cantidad determinada de barro o de plastilina no cambia, aunque ese pedazo de plastilina se le den formas diferentes, siempre y cuando no se le haya agregado ni quitado nada. Antes de ello, durante el proceso de desarrollo cognitivo, los niños menores a 7 u 8 años pueden pensar que ese mismo trozo de plastilina tiene más cantidad o menos, si se le cambia de forma (como una salchicha, como una tortilla, si se hace bolita o si se parte en pedacitos). Los argumentos pueden ser como los siguientes *"tiene más porque es más larga"* (si al pedazo de plastilina original se le da una forma de salchicha) o pueden pensar también que *"tiene menos porque es más delgada".* Si se corta en pedacitos, pueden pensar que *"tienen más plastilina porque antes de partirlo tenían un sólo pedazo y ahora tienen muchos"*, o por el contrario, pueden pensar que hay más plastilina cuando no se ha cortado en pedazos. Estos razonamientos obedecen a la ausencia de una operación cognitiva fundamental, la reversibilidad. Dicho en palabras de Piaget:

> "*... a la irreversibilidad inicial de las acciones corresponde una ausencia de conservación, y a la construcción de estructuras reversibles corresponde la elaboración de nociones de conservación relativas al dominio así estructurado*" (Piaget, et .al. 1965:11).

Es en este punto donde los estudios de Psicología Genética convergen directamente en nuestro objeto de estudio, "la partición". A continuación, reportamos algunos resultados más específicos.

Piaget, Inhelder y Szeminska (1966), reportan los resultados de las entrevistas que realizaron a niños de 4 a 7 años de edad a los que les propusieron diversas situaciones de partición, utilizando modelos concretos de plastilina y/o papel que representaban 'pasteles' con formas diferentes (círculos, rectángulos y cuadrados). La consigna de cada problema era: *Repartir un pastel entre 2 niños, entre 3, 4, 5 y hasta 6 niños*. Después de que los entrevistados realizaron las particiones solicitadas, se les preguntaba, por ejemplo, "*si todas las piezas del pastel juntas hacían la misma cantidad que el pastel original".* Las respuestas fueron como las siguientes:

REPARTO: 1 PASTEL ENTRE 2 NIÑOS

El experimentador coloca frente a cada niño las dos mitades obtenidas por los niños al realizar el reparto, y un pastel completo de la misma forma al que se partió. También se usaron muñecos que representaban a los niños entre los que se hizo el reparto. (Idem pág. 48-50)

> Experimentador: "... *"Bueno, ahora mira: la mamá de las muñequitas le dio a una muñeca esto* (diez piezas en las que acaba de cortar uno de los pasteles) *y a otra esto* (dos medios de pastel) *y a otra esto* (un pastel entero): *¿todas ellas se van a comer el pastel que se les dio?"*
>
> Niño (4,2 años): *"Sí, si comes mucho pastel creces grande, y si comes demasiado te duele la pancita".*
>
> Experimentador: *"... Bueno, dime ¿qué pasará con estas tres muñequitas?*
>
> Niño: *"A ésa* (diez piezas) *le va a doler la pancita; ésa* (dos mitades) *va a crecer como una muchachota, pero ésa, no. Ella no ha comido mucho, sólo este pedazo* (¡el entero!).
>
> __________________ o __________________
>
> Experimentador: *"... ¿hay la misma cantidad de pastel aquí* (señala un pastel entero) *y aquí* (señala dos mitades de pastel)".
>
> Niño (4,8 años): *No, allí hay más* (señala las dos mitades).
>
> ________________ o __________________
>
> Niño (5,6 años): "... dice que las fracciones y un todo *"son lo mismo",* pero cuando se le pide escoger entre un pastel entero y dos mitades, elige el todo diciendo *"así tengo más para comer"*.

En cuanto a la manera en la que los niños hicieron el reparto, los investigadores encuentran que aprender a partir en mitades, tercios, cuartos, quintos y sextos pasa por un largo proceso en el que está en juego, tanto el proceso mental de maduración como las variadas experiencias que los niños puedan tener con situaciones de reparto. Trataré de resumir brevemente este proceso:

- Hasta los 4 o 5 años aproximadamente, los niños:
  - ➢ Tienen mucha dificultad para partir en mitades.
  - ➢ Se niegan a partir el todo; los objetos enteros no los pueden concebir como divisibles.
  - ➢ Logran partir el entero pero lo hacen de la siguiente manera.

    i) Cortan pedacitos, los reparten y continúan cortando pedacitos indefinidamente.

    ii) Cortan dos pedazos del entero, los reparten y se olvidan del resto del pastel.

    iii) Intentan utilizar el todo en su reparto, pero obtienen más partes de las que necesitan; si quieren dos pedazos hacen dos cortes y obtienen tres pedazos.

Reparten a cada niño un pedazo y dejan un residuo sin pensar en la posibilidad de repartirlo.

iiii) Logran partir en dos pedazos sin que les sobre nada.

- El proceso de la partición en cuatro partes es muy semejante al de la partición en dos. Logran hacerlo cuando aceptan que pueden partir un pedazo producto de una partición anterior.

- Partir en tres es un proceso más lento, inician partiendo por mitades hasta obtener cuatro pedazos y el proceso sigue así:
    - Reparten tres pedazos uno a cada niño y dejan un pedazo de residuo.
    - Logran partir el residuo en tres.
    - Logran partir el entero en tres partes desde el primer intento (esto implica anticipar un plan de cortes).

- El proceso continúa con la partición en quintos, en donde la dificultad aumenta por el número de cortes y por la imposibilidad de apoyarse en la dicotomía. Si cortan por mitad les faltan tres pedazos; si cortan en cuartos les falta uno. Logran hacerlo por ensayo y error.

- Para partir en sextos se sigue el mismo proceso que con los quintos.

Según las investigaciones de Piaget e Inhelder (1966), los niños logran hacer particiones hasta sextos entre los 7 y 8 años aproximadamente. Sin embargo, el hecho de que los niños logren hacer particiones entre 2, 3, ... no implica, necesariamente, que hayan construido la relación parte-todo.

En la investigación que realizó Lerner (s/f), sobre el proceso evolutivo de la noción de fracción con niños de 8 a 11 años quienes, según el estudio desarrollado por Piaget, se encontraban en uno de los momentos "*del último estadio de la construcción de la noción de fracción"*. Encuentra que efectivamente, algunos niños pueden partir en mitades, tercios y quintos con relativa facilidad, aunque en general no relacionan los términos tercios o quintos para expresar verbalmente el resultado del reparto correspondiente.

Lerner observó también que otros alumnos, incluso de 5° grado, todavía tenían dificultad para partir en tercios, en cuartos o en quintos porque no podían anticipar el número de cortes que debían hacer para obtener tres o cuatro pedazos. Sin embargo, algunos de estos alumnos manifestaron verbalmente (sin utilizar los términos convencionales), saber que: $\frac{2}{2}=1$; $\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}<\frac{1}{2}$; $\frac{2}{3}>\frac{1}{2}$.

En otros casos, señala Lerner, aunque los alumnos sabían que dos mitades forman un entero y que dos cuartos forman un medio, consideraban que dos tercios es una mitad y que 'una mitad' ($\frac{2}{3}$) y un poquito ($\frac{1}{3}$) forman un entero. Al respecto Lerner considera que estos alumnos, si bien habían construido la noción de invarianza en el caso de los medios y los cuartos, no lo habían logrado en el caso de los tercios.

Piaget, Inhelder y Szeminska (1966), plantean que la noción de fracción depende de dos relaciones fundamentales: *a*) la relación de la parte con el todo y *b*) la relación parte-parte. Plantean que en el proceso de desarrollo de la construcción de esta noción deben considerarse los siguientes aspectos:

- La fracción se deriva de un todo divisible, compuesto por elementos separables.
- Implica un número determinado de partes
- Existe una relación entre el número de partes en las que un todo continuo va a ser dividido y el número de cortes.
- Las partes deben ser iguales
- La división del todo debe ser exhaustiva
- Las fracciones son partes del todo original, son también partes en sí mismas, y como tales pueden ser nuevamente subdivididas.
- La suma de las fracciones iguala al todo original, es decir el todo permanece invariante. La conservación del todo es una condición esencial en la construcción de la noción de fracción.

Como puede observarse, Piaget e Inhelder y Szeminska (1966), muestran que las situaciones de reparto equitativo y exhaustivo no constituyen problemas triviales para los niños. Plantean que llegar a resolverlas con procedimientos óptimos depende de su desarrollo cognitivo y de la diversidad de experiencias de reparto a las que se enfrenten.

III.1.2 LA COMPARACIÓN DE LAS PARTES QUE RESULTAN DE UN REPARTO

La investigación que reseño a continuación fue reportada por Dávila (1991 y 1992). Dicha investigación se llevó a cabo en el Distrito Federal, en una escuela primaria pública con características comunes a la generalidad de las escuelas de este tipo. La experimentación se llevó a cabo con dos grupos, uno de primer grado (30 alumnos) y un grupo de segundo grado (32 alumnos), dentro del horario de clases con el objeto de que las condiciones de trabajo fueran las más cercanas a la realidad escolar. Esto permitió obtener resultados más confiables sobre la factibilidad de la aplicación de las situaciones de reparto y sobre el proceso de aprendizaje de la noción de fracción en el contexto escolar.

La experimentación duró cuatro semanas en las que Dávila trabajó, con cada grupo, dos sesiones de clase por semana teniendo un total de 16 registros de observación elaborados por uno o dos ayudantes que observaban mientras Dávila aplicaba las situaciones diseñadas con los alumnos de cada grado. El tipo de situaciones que enfrentaron los alumnos fueron las siguientes:

- Cinco situaciones en las que los alumnos realizaron repartos concretos (idénticos.[32]) *Repartir "n" pasteles entre "m" niños*; donde *"n"* puede ser 1 o más pasteles (representados por hojas de papel tamaño carta) *y, "m" puede ser 2, 3* o *4 niños.*
- Dos situaciones en las que los alumnos compararon los resultados de un reparto.
- Una situación en las que a partir del resultado de un reparto realizado por otras personas, los alumnos debían determinar el número de unidades repartidas.
- Dos situaciones en las que se pone en juego la interpretación que los alumnos hacen del término "mitad".
- Sólo en 2º grado se aplicó una situación en la que los alumnos, a partir de los datos de dos repartos, debían determinar a qué niños les tocaría más pastel.

El análisis de Dávila (1991) se centra en los dos primeros tipos de situaciones: 1) los repartos de ***n*** pasteles entre ***m*** niños a nivel concreto y 2) la comparación, entre equipos, de los resultados de repartos idénticos.

Con respecto al primer tipo de situación, la originalidad del estudio radica únicamente en su carácter didáctico: no se trata de entrevistas individuales con la finalidad de conocer los procesos de reparto de los niños, sino de una secuencia de situaciones *didácticas* con la que se estudia la posibilidad de propiciar, en los alumnos de 1º y 2º grado, ciertos aprendizajes en el salón de clases.

El segundo tipo de situaciones, en cambio, es menos conocido, incluso en el ámbito de la investigación de corte psicológico. Se intenta explotar didácticamente la diversidad de formas de repartir que surge en el seno de un grupo de alumnos relativamente numeroso, planteando un segundo problema, comparar los diferentes tipos de reparto obtenidos; reconocer su equivalencia y demostrarla con material.

Es importante destacar que a estas situaciones de reparto se le añade una tarea considerablemente compleja. Se debe considerar que las partes resultantes de repartos iguales (mismo número de unidades con las mismas características, entre el mismo número de niños) deben ser iguales, aún cuando presenten múltiples diferencias en su apariencia física (forma de las partes, número de cortes, entre otros). Más adelante se presentan algunos de los resultados más relevantes.

III.1.2.1 ANTECEDENTES

El antecedente de la investigación de Dávila es un estudio realizado por Block (1987) con dos grupo de alumnos, uno de tercero y uno de cuarto grado, sobre la enseñanza de las fracciones en la escuela primaria. En la primera fase de la investigación[33], Block planteó algunas situaciones de reparto de pasteles (representados por hojas de papel tamaño carta) entre dos niños. Los resultados encontrados por Block en esta primera fase de la investigación fueron los siguientes:

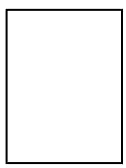
- Los alumnos de tercero y cuarto grado logran resolver sin ninguna dificultad el problema "*Repartir 3 pasteles entre 2^{n} niños"*, generando diferentes tipos de reparto a nivel concreto.
- Todos los alumnos reconocen la igualdad de los repartos sin manifestar ninguna necesidad de verificarlo.

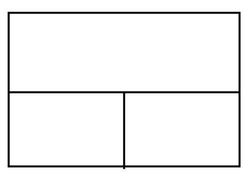
[32] Es decir, todos los niños repartieron la misma cantidad de pasteles entre el mismo número de niños.

[33] En el apartado III.2.2.1 y III.2.2.2 (págs. 130 y 135), se presenta la segunda y tercera fase de esta investigación.

- Logran demostrar que las diferentes formas en las que los equipos hicieron los repartos cumplen con las condiciones de equitatividad y exhaustividad, de manera verbal (utilizando sus propias palabras) o reuniendo en cada caso, las partes para formar el todo.

Sin embargo, Block reporta que algunos alumnos, sobre todo los de tercer grado, al comparar los resultados de los repartos realizados, pusieron en evidencia diferentes niveles en su proceso de desarrollo de la noción de conservación de área y de la relación parte-todo. Por ejemplo, al comparar los medios obtenidos mediante un corte a lo largo de la hoja o un medio obtenido mediante un corte por el ancho de la hoja sucedió lo siguiente:

- Algunos alumnos de tercer grado niegan la igualdad cuando las formas cambian.
- Otros sólo aceptan la igualdad mediante la comprobación empírica (superposición).
- Otros más suponen la igualdad a través de razonamientos compensatorios: "*Son iguales, sólo que éste (*  *) es más gordito y éste (*  *) es más flaquito".*
- Algunos alumnos usaron de manera oral los términos "medios, cuartos, tercios", a veces adecuadamente y a veces no. Por ejemplo, cuando un 'pastel' estaba dividido de la siguiente forma, decían que estaba dividido en 'tercios'.



Otra situación incorporada por Block en su secuencia consistió en que los alumnos identificaran entre varios pedazos con formas diferentes aquellos que fueran "mitad" de una unidad dada (hoja de papel tamaño carta). El propósito era indagar con más profundidad el significado de "mitad" construido por los alumnos.

Cabe señalar que algunos pedazos no eran mitades de la unidad y que otros eran efectivamente mitades pero con formas poco comunes. Los resultados obtenidos al aplicar esta situación en el grupo de tercer grado fueron los siguientes:

- Todos los alumnos identificaron y aceptaron como mitades los siguientes pedazos sombreados, porque caben exactamente dos veces en la unidad.

- Algunos lograron identificar como mitad a la siguiente figura, después de haberla recortado y superpuesto sobre una hoja:

- Otros no aceptaron que esta figura fuera una mitad porque al sobreponerla en el entero (sin recortarla) éste quedaba dividido en tres partes:

- Los alumnos de cuarto grado, lograron identificar las mitades con otros recursos como: cuadricular el entero y los pedazos, contar los cuadritos, recortar y compensar.

Resolver este problema exige saber: que la superficie de las dos partes deben ser iguales; que las dos partes forman el todo; que no importa que las dos partes no tengan la misma forma y desarrollar recursos para comparar superficies.

III.1.2.2 HIPÓTESIS

El hecho de que en el estudio de Block se puso en evidencia que algunos de los alumnos de tercer grado todavía no habían desarrollado la noción de conservación de área y la relación parte todo, nociones necesarias para resolver exitosamente las situaciones planteadas, a pesar de que los alumnos habían iniciado el estudio de las fracciones desde el primer grado[34], me llevó a plantear las siguientes hipótesis:

- El estudio de las fracciones que se propone desde primer grado es prematuro por introducir demasiado pronto la representación simbólica de las fracciones al mismo tiempo que ofrece experiencias pobres en el nivel concreto.

- Mientras para los alumnos una mitad no sea equivalente a dos cuartos, a nivel concreto, probablemente no tenga sentido enseñarles, en el nivel de lenguaje, equivalencias numéricas como $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$.

- En estos grados, en cambio, pueden resultar provechosas ciertas experiencias de reparto concreto, sin cuantificación de las partes con fracciones. En particular, nos preguntamos si los alumnos podrían avanzar en el proceso de repartir equitativamente y exhaustivamente, así como en la comprensión de una relación más compleja, aquella que asegura que las partes obtenidas de repartos equitativos y exhaustivos idénticos (mismo número de unidades, mismas unidades y mismo número de niños), deben ser iguales en tamaño, aunque su forma no sea la misma.

III.1.2.3 Organización y desarrollo de la experimentación

Para iniciar la sesiones de clase en las que se proponía realizar algún reparto, se organizaba al grupo en equipos cuyo número de integrantes dependía del número de niños entre los que se realizarían los repartos, dado que en dos sesiones previas a la experimentación, se pudo observar que los alumnos, en esta edad (6, 7 años) tienen dificultades para desligarse de la situación real en la que se plantea el problema; es decir, si el equipo está formado por cuatro integrantes, tienen dificultades para hacer un reparto entre un número distinto de niños.

En general estas situaciones constaron de tres momentos: la presentación del problema (consigna), el trabajo en equipo y la confrontación colectiva de resultados en donde los alumnos debían opinar y tratar de justificar sus respuestas acerca de los resultados de cada equipo. En este mismo espacio, se planteaba un segundo problema, *comparar los*

---

[34] Hasta 1992, las fracciones $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ y equivalencias como $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$, se estudiaban desde primer grado.

diferentes tipos de reparto y, se propiciaba que los alumnos verificaran su hipótesis en cuanto a la igualdad o desigualdad de sus resultados.

La consigna general de las situaciones de reparto directo fue: *"Repartir **n** pasteles entre **m** niños, que a cada quien le toque lo mismo y que no sobre nada de pastel".*

Después, el experimentador entregaba el material y los alumnos empezaban a realizar la tarea solicitada. Cuando los equipos terminaban de hacer su reparto, el experimentador organizaba la confrontación colectiva de resultados pidiendo a los equipos que habían repartido los 'pasteles' de manera diferente que mostraran a sus compañeros lo que le había tocado a cada integrante y que explicaran cómo habían hecho el reparto. En cada caso, el experimentador preguntaba al grupo si a cada niño le había tocado lo mismo de pastel y si no había sobrado nada. De esta manera, el grupo decidía si el reparto estaba o no bien hecho.

Una vez que los alumnos conocían los diferentes tipos de reparto que se habían generado en el grupo, el experimentador planteaba un segundo problema: la comparación de dos o tres tipos de reparto equivalentes pero con formas diferentes, por ejemplo, se comparaba $\frac{8}{16}$ con $\frac{2}{4}$ y $\frac{1}{2}$. El experimentador preguntaba al grupo si a los niños de distintos equipos les había tocado igual cantidad de pastel.

III.1.2.4 ANÁLISIS DE ALGUNOS RESULTADOS

a) *CON RESPECTO A LOS REPARTOS ENTRE 2^n*

- En la primera sesión todos los equipos, excepto uno de primer año, lograron repartir equitativa y exhaustivamente utilizando la estrategia de partir siempre por mitades. Posteriormente ningún equipo repartió sin cumplir con estas dos condiciones del reparto.
- Todos los alumnos lograron determinar al interior de cada equipo, cuando un reparto cumplía con las condiciones de equitatividad y exhaustividad, aceptaban como buenos a aquellos repartos que daban como resultado pedazos iguales en forma y tamaño.
- Para repartir los 'pasteles' la mayoría de los alumnos hicieron cortes sucesivos por mitad. La estrategia de partir por mitades que utilizaron los alumnos para resolver el problema, fue al parecer la estrategia que ya habían logrado dominar (como se mostró

en los estudios anteriormente revisados), ya que, sin establecer un acuerdo previo explícito, todos los alumnos desde el primer momento en el que iniciaban el reparto hacían este tipo de cortes.

A título de ejemplo, veamos, como realizaron los alumnos de primero y segundo grados la siguiente tarea *'repartir 3 pasteles entre 2 niños'* (primera sesión).

1º y 2ª grados	**Situación: 3 pasteles entre 2 niños (A, B)**

Los repartos del tipo 1, 2 y 3 aparecieron tanto en primer grado como en segundo. En la confrontación, estos repartos fueron aceptados por los alumnos como buenos argumentando que, al interior de cada equipo, al niño **A** y al **B**, les había tocado lo mismo y no había sobrado nada de pastel.

Uno de los equipos de primer año, hizo el reparto del tipo 4, que el grupo rechazó, argumentando que no estaba bien porque a un niño le había tocado más pastel: "*uno tiene cuatro pedazos y el otro sólo dos*". Al preguntar el experimentador qué se podía hacer para que les tocara lo mismo, Erika respondió: *“Pasándole un pedazo al otro niño”*; pasó al pizarrón, lo hace y el grupo aceptó entonces que así a los dos niños les tocaba lo mismo (tres pedazos).

Notemos que en este caso, los alumnos de 1° centran su atención en el número de partes y no toman en cuenta el tamaño de las mismas.

b) *CON RESPECTO A LOS REPARTOS ENTRE 3*

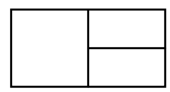
La tendencia de partir por mitades permitió que los alumnos tuvieran éxito en sus repartos entre 2 y entre 4, sin anticipar que este tipo de cortes los llevaría a realizar repartos equitativos y exhaustivos. Dicha tendencia y la falta de anticipación de los resultados que obtendrían se manifiestó con más claridad cuando realizaron repartos entre tres, en donde encontramos que:

- Sólo un equipo de segundo año de entrada partió en tres sus 'pasteles' para hacer el reparto.
- Todos los equipos, excepto uno, utilizaron la estrategia de partir por mitades para realizar los repartos entre tres.
- Después de varios cortes por mitad se dieron cuenta de que partiendo de esta manera siempre obtendrían un pedazo sobrante.

c) *CON RESPECTO AL PEDAZO SOBRANTE*

Se observaron básicamente tres conductas:

- Cuando el pedazo sobrante era muy pequeño, lo cortaban en tres pedacitos más o menos iguales. En este caso, los alumnos lograban la equitatividad y la exhaustividad en sus repartos.
- El pedazo sobrante lo cortaban a la mitad y una de las mitades otra vez a la mitad, logrando la exhaustividad pero perdiendo con ello la equitatividad.



- Al igual que los otros equipos, se dieron cuenta de que si continuaban partiendo por mitad, siempre les iba a quedar un pedazo sobrante. Para resolver el problema se deshicieron de él, escondiéndolo, tirándolo e incluso, un niño de primero para desaparecerlo, se lo tragó. Estos niños argumentaban que ese pedazo ya no se podía repartir o que ya no valía.

COMPARACIÓN DE LAS PARTES QUE RESULTAN DE UN REPARTO

Pasemos ahora al segundo problema, la comparación de dos o tres resultados de repartos equivalentes, pero con formas diferentes. Este problema se planteó sólo en las situaciones de reparto entre 2^n. Se identificaron cuatro grupos de alumnos que se diferenciaban por el nivel de explicación que sustentaban en cuanto a la equivalencia de los repartos.

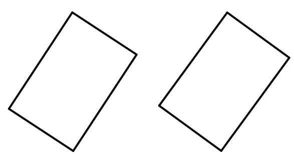
Primer grupo

- Alumnos que habían construido la relación: "Si en dos repartos hay un mismo número de niños y de pasteles, los pedazos que resultan deben ser iguales, independientemente de la forma de los pedazos y del número de cortes". Para estos niños, los datos número de pasteles y de niños, determinaba un único tamaño de pedazo y esto les permitía anticipar la equivalencia.

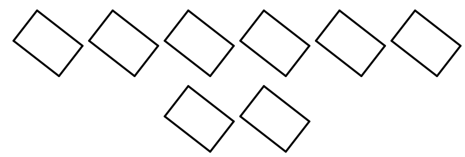
A continuación ejemplificaré con un fragmento del registro de clase en el que se pone de manifiesto las hipótesis de los alumnos de segundo grado acerca de la igualdad o desigualdad de los resultados que obtuvieron después de haber repartido, equitativa y exhaustivamente *1 pastel entre 2 niños*.

El fragmento inicia cuando el experimentador les pidió que intentaran demostrar a sus compañeros sus hipótesis sobre la equivalencia entre dos de los resultados: $\frac{2}{4}$ y $\frac{8}{16}$ [35]

Exp.: *"Bueno, les voy a repartir lo que le tocó al niño del equipo cinco* (reparto tipo 2 {$\frac{2}{4}$}) *y al niño del equipo tres* (reparto tipo 6 {$\frac{8}{16}$}) *para que busquen una manera de demostrar que tienen más, o tienen menos, o tienen igual"* (Entrega a cada equipo los pedazos que corresponden a cada reparto):



(Dos cuartos a cada niño)



(Ocho dieciseisavos a cada niño)

y les pregunta: *"¿Ustedes qué piensan? ¿tienen igual?* (si el equipo responde *"No, tiene más el de ocho pedazos"* o *"Tienen igual"*, les dice): *"Demuéstrenle a sus compañeros lo que dicen, que tienen más o tienen menos o tienen igual".*

Obs.: Una vez que los equipos tienen el material se disponen a trabajar.

(.......)

Exp.: "Ahora pase el equipo dos".

Olmo. "Este tiene más porque tiene ocho y éste menos porque son dos".

Exp.. "Si se comen el pastel ¿quién va a comer más?"

Equipo 2*. "Los que tienen ocho"*

Exp.. *"Ustedes qué piensan, ¿quién se llenaría más pronto si se comen el pastel?, el niño que tiene dos pedazos o el que tiene ocho".*

Niños. "El que tiene ocho".

Carlos. (Con tono de obviedad) *"Es lo mismo, se llenarían igual"*

Niños: *"No. Se llenaría más el que tiene ocho pedazos".*

Exp.: *"A ver, pasa el equipo uno".*

Equipo 1: (Carlos y Silvia traen sobre un cuaderno {$\frac{1}{4}$} y sobrepuestos {$\frac{4}{16}$}. Lo muestran a sus compañeros).

Exp.: *"A ver, explíquenlo".*

[35] Utilizamos aquí las fracciones para simplificar las explicaciones. En clase, nunca se trató de fracciones, sino de los pedazos correspondientes.

Carlos: *"Estos, si los doblamos y los cortamos* (muestra {$\frac{1}{4}$}) *en cuatro pedacitos quedan igual* (muestra los {$\frac{4}{16}$} encimados en el cuarto)*".*

Exp.: (Pregunta a Carlos) *"¿Si los cortamos se hace más o menos?"*

Carlos: *"Queda igual* (dice enojado y continúa). *Si les da cinco pasteles a un equipo y seis pasteles a otro, entonces sí gana el de seis, pero si nos da a todos un mismo pastel, entonces nos toca igual y nadie gana".*

Como se puede observar, Carlos había construido la relación "el número de pasteles y el número de niños determina el tamaño del pedazo", que le permitió anticipar que el pedazo sólo puede ser mayor si se aumenta el número de pasteles que se reparte, conservando el número de niños entre los que se hará dicho reparto. *Lograr construir esta relación implica necesariamente ser conservador de área, pero ser conservador de área no necesariamente implica manejar esta relación.*

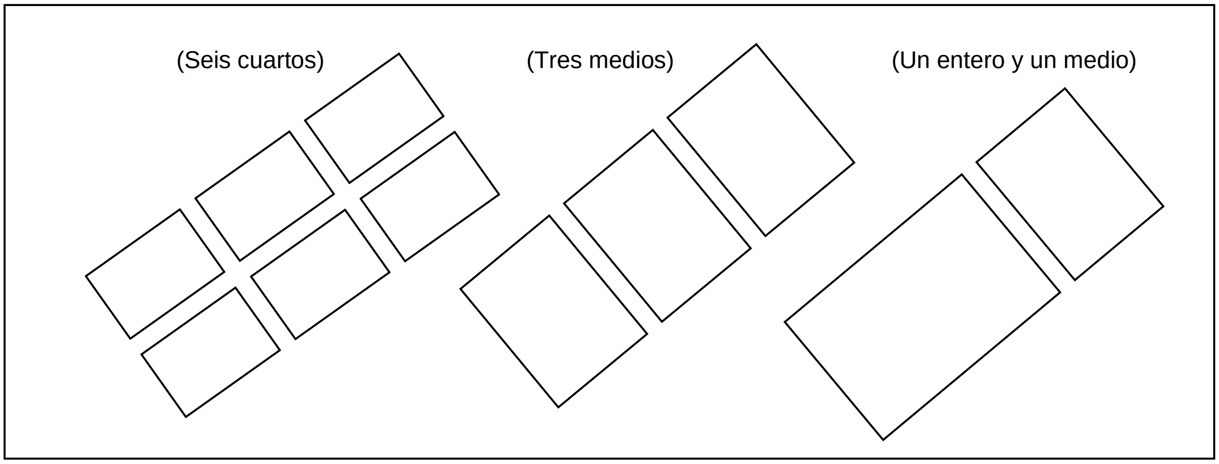
Segundo grupo

- Alumnos que manifiestaron estar en proceso de construir la relación ─a igual número de pasteles y de niños corresponde igual cantidad de pastel─, independientemente de la forma de los pedazos y del número de cortes. Estos alumnos preveían la equivalencia poniendo en juego esta relación en determinadas situaciones, pero dudaban de ella frente a otras en las que las formas de los pedazos no son usuales o en las que la gran cantidad de pedazos producidos en el reparto les dificultaba hacer la comparación visualmente.

El ejemplo que a continuación mostraré es el de Erika, alumna de primer grado que frente a determinados tipos de reparto manifiestaba manejar esta relación y frente a otros volvía a centrarse en el número de pedazos. En este caso se compararon los resultados obtenidos al repartir *3 pasteles entre 2 niños*.

Una vez que todos los equipos habían mostrado la forma en que hicieron su reparto, lo que le había tocado a uno de los niños de cada equipo quedó pegado en el pizarrón. El experimentador planteaba entonces el segundo problema: la comparación de los diferentes tipos de reparto.

Ante la pregunta*: "¿Les tocó lo mismo de pastel a todos los niños?* Los alumnos de primero grado argumentan la equivalencia o desigualdad de la siguiente forma:



Erika: *"Están igual porque a cada uno le tocó lo mismo* (se refiere a los diferentes repartos), *porque es de lo mismo y le tocaron seis pedazos a cada quien* (se refiere al reparto tipo {$\frac{6}{4}$} a cada niño)."

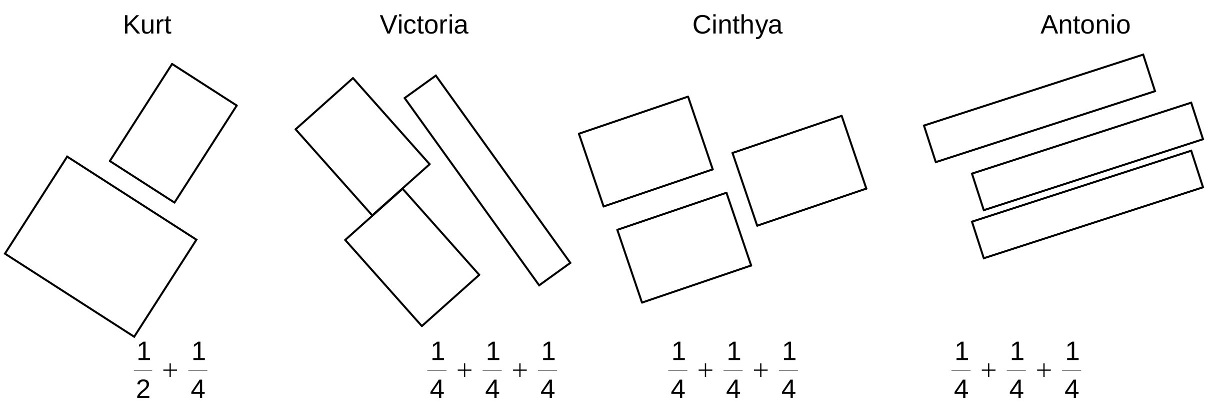
Raúl: *"A los que tienen dos* (pedazos) *les tocó menos* (se refiere al reparto tipo {1 $\frac{1}{2}$})*".*

Erika: *"Les tocó igual* (nuevamente se refiere a todos los repartos), *parecen más porque les tocaron más pedazos* (señala el reparto tipo {$\frac{6}{4}$})*".*

Niños. (Varios dicen) *"Van a comer más pastel los que tienen seis pedazos* (reparto tipo {$\frac{6}{4}$}) *porque tienen muchos pasteles".*

Erika: *"Lo cortaron más chiquito* (se refiere al reparto tipo {$\frac{6}{4}$} contra los repartos tipo {1 $\frac{1}{2}$} y {$\frac{3}{2}$}), *pero les tocó lo mismo".*

En otra sesión se pidió que repartieran '*3 pasteles entre 4 niños*'. En uno de los equipos del primer grado, cortaron sus 'pasteles' de diferente manera y, al repartir los pedazos, cada niño obtuvo lo siguiente:



Veamos lo que sucede cuando el experimentador plantea el segundo problema. comparar $\frac{3}{4}$ de 'pastel' con formas diferentes.

Exp.: *"Fíjense bien en lo que les voy a preguntar: a un niño le tocó ésto* (señala lo que le tocó a Kurt), *a otro ésto* (señala lo que le tocó a Cinthya), *a otro así* (señala lo que le tocó a Antonio), *y a Victoria así* (señala lo que le tocó a Victoria). *¿A todos les tocó lo mismo?"*

Niños: (Todos a la vez gritando): *"¡No, no!, a éste no.* (Señalan al pizarrón)*".*

Exp.: *"¿A cuál no?"*

Niños: (Pasan varios alumnos corriendo al pizarrón y señalan lo que le tocó a Kurt {$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$}).

Exp.: *"¿A éste no?"* (señala {$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$})".

Niños. *"¡No!"*

Exp.: *"¿Y a éstos?* (señala lo de Cinthya {$\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$ anchos}, *Antonio* {$\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$ alargados} *y Victoria* señala {$\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$ ancho y $\frac{1}{4}$ alargado}) *¿les tocó lo mismo?".*

Niños: (La mayoría) *"¡Sí!"*

Exp.: *"¿Cómo saben?"*

Niños. (La mayoría) *"Porque tienen tres pedazos".*

Exp.. "*A ver, vamos a ver. A éste* (señala lo de Victoria {$\frac{2}{4}$ anchos y $\frac{1}{4}$ alargado}) *y a éste* (señala lo de Antonio {$\frac{3}{4}$ alargados}) *¿les tocó lo mismo?"*

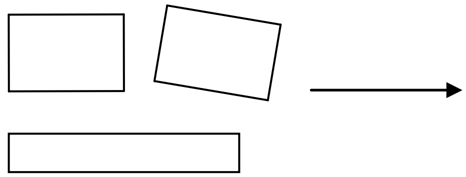
Erika. *"No, porque éstos* (señala los cuartos anchos de Victoria) *están más gorditos y éstos* (señala los cuartos largos) *están más delgaditos".*

Posteriormente, cuando se les pide a los alumnos que busquen una manera de demostrar que es verdad lo que dicen, hacen lo siguiente.

Exp.: *"Bueno, les voy a entregar a cada equipo lo que le tocó a Antonio* ($\frac{3}{4}$ largos) *y lo que le tocó a Victoria* ($\frac{2}{4}$ anchos y $\frac{1}{4}$ largo); *como ustedes dicen que no son iguales, van a buscar una manera de demostrármelo a mi y a sus compañeros"* (reparte $\frac{3}{4}$ largos y $\frac{2}{4}$ anchos y un largo a cada equipo. Recorre los equipos mientras estos trabajan y pregunta): *"¿Qué pasó, son iguales o no son iguales?".*

(........)

Equipo 1 Erika y Ramón: (Toman lo que le tocó a Victoria y cortan los dos cuartos anchos a la mitad y un cuarto largo a mitad).



Ramón: *"Es lo mismo, a los dos les tocó igual"*

Erika: *"Es lo mismo, nada más que así* (junta dos de los pedazos que cortó y forma un cuarto ancho), *son más gorditos".*

Exp.: Llama la atención del grupo y pide que observen lo que hicieron los equipos uno y cuatro.

Claudia: (Equipo 1) *"A los dos* (niños) *les tocó lo mismo"* (muestra como cortaron el cuarto ancho y lo sobrepone en el cuarto largo).

Erika: (Equipo 4) *"Si éstos* (señala en el pizarrón los cuartos largos) *los cortamos así* (muestra como), *nos quedan así* (muestra un cuarto largo cortado a la mitad) *y salen dos pedazos. Y a éste también* (señala un cuarto ancho) *si lo doblamos también salen dos"*

Como se puede observar en el primer ejemplo, Erika podía prever la equivalencia entre $1\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$ y $\frac{6}{4}$, aún antes de comprobarlo con material, haciendo referencia a que no podía ser diferente ya que: *"...a cada uno le tocó lo mismo porque es de lo mismo ...".*

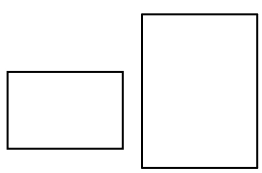
Sin embargo, frente a otras situaciones regresaba al esquema anterior, centrándose primero en el número de pedazos para determinar la equivalencia o no equivalencia de los repartos. Cuando se compararon repartos equivalentes de diferente forma pero con el mismo número de pedazos, Erika se centró entonces en la forma argumentando. *"No,* *porque éstos* (señala los cuartos anchos de Victoria) *están más gorditos y éstos* (señala los cuartos largos) *están más delgaditos".*

A estos alumnos la demostración con material les ayuda a recuperar su hipótesis inicial de equivalencia a través del corte y la superposición de los pedazos, al ver la coincidencia de las partes reconocen la equivalencia.

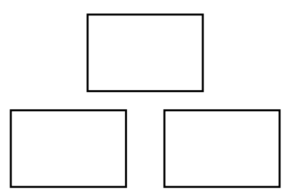
Tercer grupo

- Alumnos que son conservadores de área pero que no logran prever la equivalencia de los repartos, centrándose en un primer momento en el número de pedazos para determinarla o negarla, pero la aceptan frente a los argumentos o demostraciones con material que algunos de sus compañeros presentan. Estos alumnos aunque son conservadores de área no manejan aún la relación 'el número de pasteles y el número de niños, determina el tamaño del 'pedazo''.

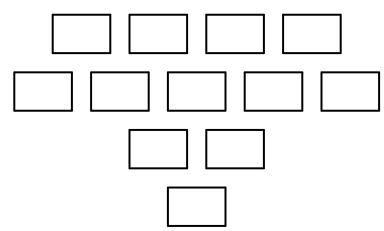
En el siguiente ejemplo, Héctor de segundo grado no prevé la equivalencia de los resultados de repartir '*3 pasteles entre 4 niños'*, pero al superponer los pedazos la reconoce. En este caso se comparan los siguientes resultados.



Un medio más un cuarto a cada niño



Tres cuartos a cada niño



Doce dieciseisavos a cada niño

Exp.: *"Les voy a dar lo que les tocó al equipo 5* (reparto tipo $\{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\}$), *al equipo 1* (reparto tipo $\{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\}$) *y al equipo 3* (reparto tipo $\{\frac{12}{16}\}$). *Me van a demostrar que al equipo 5 o al equipo 1 le tocó más, menos o igual que al equipo 3, según lo que ustedes crean. Demuéstrenme lo que crean que sea cierto"* (reparte el material).

Equipo 5: Mariana: (Sobrepone $\frac{2}{4}$ sobre $\frac{1}{2}$) Dice que les tocó lo mismo.

Lilia: *"¿Qué vamos hacer con los chicos?"* (se refiere a los $\frac{12}{16}$ del reparto tipo 5).

Mariana: *"A ponerlos igual, encima"* (entre los cuatro acomodan los $\frac{12}{16}$ sobre los $\frac{2}{4}$ que están sobrepuestos en el $\frac{1}{2}$).

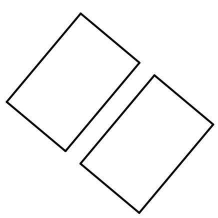
Héctor: *"¡Entonces es lo mismo!"* (asombrado).

Cuarto grupo

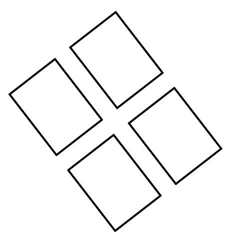
En este último grupo están los alumnos que *no* eran conservadores de área. Estos alumnos estaban convencidos de que mientras más pedazos tenían más cantidad de pastel había, los argumentos de sus compañeros no los convencieron y el tener a su disposición el material no les ayudó para ver esa equivalencia. Las demostraciones de equivalencia de sus compañeros a través de la superposición de pedazos tampoco los convencieron.

A continuación mostraré como ejemplo un fragmento de la sesión en la que se repartió '*1 pastel entre 2 niños'*. En esta sesión se generaron en segundo año los siguientes resultados al realizar el reparto:

(Dos cuartos a cada niños)

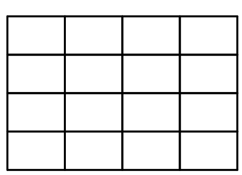


(Cuatro octavos a cada niño)

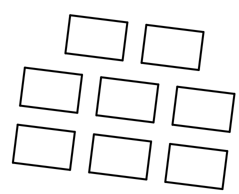


(Treintaidós sesentaicuatroavos a cada niño)

(Dieciseis Treintaidosavos a cada niño)



(Ocho dieciseisavos a cada niño)



La mayoría de los alumnos afirmaba que al niño que le había tocado más 'pastel' era al que le había tocado 32 pedazos ($\frac{32}{64}$) y al que le había tocado menos era al que tenía dos pedazos ($\frac{2}{4}$).

Exp.: (Dice al grupo*): "Fíjense lo que les voy a preguntar. Aquí están los pedazos que le tocaron a este niño, aquí los que le tocaron a éste, y aquí los que le tocaron a éste y a éste* (va señalando los repartos tipo $\left\{\frac{32}{64}\right\}$, $\left\{\frac{2}{4}\right\}$, $\left\{\frac{16}{32}\right\}$, $\left\{\frac{4}{8}\right\}$, y $\left\{\frac{8}{16}\right\}$ producidos por los alumnos). *¿Les tocó lo mismo a todos?".*

Austria: *"Tiene más el equipo dos* (reparto tipo $\{\frac{32}{64}\}$), *porque tiene treinta y dos pedazos".*

Claudia: "Tiene más el equipo 5 (reparto tipo $\{\frac{2}{4}\}$)*".*

Israel: (Del equipo 2) *"Tenemos más los que tenemos treinta y dos pedazos"* (reparto tipo $\{\frac{32}{64}\}$).

Obs.: Todos los niños gritan, se paran de sus lugares, van al pizarrón corriendo para señalar lo que dicen, se crea cierto desorden, no se entiende nada y se deja de defender lo que dicen los niños.

(.......)

Exp.: *"Bueno, les voy a repartir lo que le tocó al niño del equipo 5* (reparto tipo $\{\frac{2}{4}\}$) *y al niño del equipo 3* (reparto tipo $\{\frac{8}{16}\}$) *para que busquen una manera de demostrar si tienen más, o si tienen menos, o igual"* (Entrega a cada equipo los pedazos que corresponden a cada reparto $\{\frac{8}{16}\}$ y $\{\frac{2}{4}\}$ preguntándoles) *"¿Ustedes qué piensan? ¿tienen igual?* (si el equipo responde *"No, tiene más el de ocho pedazos"* o *"Tienen igual"*, les dice): *"Demuéstrenle a sus compañeros lo que dicen, que tienen más o tienen menos o tienen igual".*

Obs.: Una vez que los equipos tienen el material se disponen a trabajar.

Ignacio: (Acomoda los $\{\frac{8}{16}\}$ por un lado y los $\{\frac{2}{4}\}$ por otro) *"Aquí es más* (dice a su compañero señalando los $\{\frac{8}{16}\}$), *tenemos ocho y aquí* (señala los $\{\frac{2}{4}\}$) *menos porque son dos"*

Lilia: (Dice a Mariana y Marisol) *"Ustedes dicen que es lo mismo, ustedes demuéstrenlo".*

(.....)

Ignacio: (Dice a su compañero) *"Entonces así estamos bien, yo tengo mucho porque tengo ocho y tú tienes poco porque tienes dos".*

Obs.: Mientras los equipos tratan de encontrar cómo demostrar lo que dicen, el experimentador va con cada equipo y les pregunta si ya encontraron como demostrarlo. Pide que le expliquen lo que hicieron.

Exp.: (Pasa al frente al equipo 4 para que explique).

Fabiola. *"Tienen igual".*

Obs.: El grupo se desordena, algunos gritan que no es igual.

Ignacio. *“No, no tenemos igual, yo tengo ocho y ella dos”.*

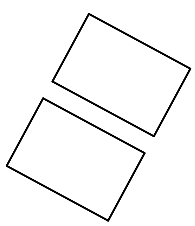
Austria: *"Ella tiene menos porque tiene dos y el ocho es más que el dos".*

Cabe preguntarse si estos niños están comparando las cantidades de 'pastel' en base al número de pedazos, o bien, si han dejado de lado las cantidades de ‘pastel’ y sólo están comparando los números de pedazos, como si la pregunta hubiera sido ¿Quién tiene más pedazos?

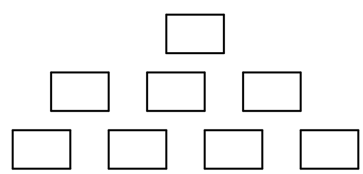
Es probable que la mayoría de ellos estén en el primer caso. Comparan cantidades de pastel centrándose sólo en el número de pedazos, y por lo tanto, manifiestan dificultad para conservar la superficie cuando ésta sufre transformaciones de forma y número de cortes (en particular, no logran aún compensar el número de cortes con el tamaño de los pedazos).

Dentro de este grupo de alumnos, considero que existe un subgrupo que llega a plantearse la posibilidad de la equivalencia si se cortan los pedazos, pero la niegan en cuanto se vuelven a unir. De estos alumnos se puede decir que al menos se plantean una manera de igualar los diferentes tipos de reparto.

En el ejemplo siguiente se están comparando dos de los resultados de repartir ’*1 pastel entre 2 niños’*: $\frac{2}{4}$ y $\frac{8}{16}$. Veamos a Lupita como ejemplo de estos alumnos.



(Dos cuartos a cada niño)



(Ocho dieciseisavos a cada niño)

Exp.: *“A ver, el equipo tres explíquenos qué hicieron”.*

Equipo 3: (Pasan al pizarrón).

Lupita: *“Si estos dos* (muestra los $\{\frac{2}{4}\}$ *los doblamos así* (a la mitad*) y así* (otra vez a la mitad) *y lo cortamos, quedan igual que el otro* (el reparto de $\{\frac{8}{16}\}$)*”.*

Exp.: “*¿Entonces son iguales?.*

Lupita: *“No. Si lo cortan tienen igual, si no, tienen menos”.*

Exp.: *“Si cortan éstos* (muestra los $\{\frac{2}{4}\}$)*, ¿van a tener más pastel?”*

Lupita: “Sí”.

Exp.: *“¿Y ustedes qué piensan?* (pregunta al grupo).

Niños: (Algunos gritan) *“Si los cortan tienen más pastel”*

“Si los cortan es igual al de ocho”

(Otros gritan) *“Es igual”*

Lupita no cae en contradicción. "$\frac{2}{4}$ *es menos que* $\frac{8}{16}$", pero $\frac{2}{4}$ puede aumentar de tamaño al convertirse, mediante cortes, en $\frac{8}{16}$.

Cabe preguntarse si un razonamiento así se sostendría en una situación real (me dan un pastel, lo corto en pedacitos para tener más), o si constituye un argumento cuya función es sólo dar coherencia a la estimación de que $\frac{8}{16}$ es más que $\frac{2}{4}$ y evitar así hacer explícita una contradicción.

III.1.2.5 CONCLUSIONES DEL ESTUDIO

PROCEDIMIENTOS Y CONCEPCIONES DE LOS ALUMNOS EN LOS PROBLEMAS DE REPARTO

Repartos reales: Un problema significativo para alumnos de 1º y 2º. A lo largo de este estudio hemos observado que los alumnos de primer y segundo grado pueden abordar problemas de reparto. Se ha visto también que, para que los problemas de reparto tengan sentido para los alumnos y den lugar a la movilización de sus recursos previos, es necesario que los repartos no sean hipotéticos sino reales, es decir, si se van a repartir, por ejemplo, ‘*3 pasteles entre 4 niños’*, debe haber en el equipo 4 niños.

Cortes por mitad. La estrategia de partir por mitades es la que han logrado dominar, ya que sin establecer un acuerdo previo explícito, todos los alumnos desde el primer momento en el que inician el reparto hacen este tipo de cortes. Esta estrategia les permite resolver exitosamente los repartos entre 2 y entre 4.

En los repartos entre 3, casi todos los alumnos usan la estrategia de partir por mitades, sin poder prever aún que con ese tipo de cortes no podrán resolver el problema, puesto que siempre les quedará un pedazo sobrante. Sólo después de hacer varios intentos algunos niños se dan cuenta de que deben partir el pedazo sobrante en tres partes. Sin embargo, en general no llegan a cortarlo en tres pedacitos más o menos iguales porque lo que hacen es partir sólo una de las dos mitades que ya tienen a la mitad, obteniendo 3 pedacitos desiguales.

Número de cortes. La estrategia de partir por mitades para realizar los repartos propicia que los alumnos obtengan resultados que dependen de la forma en que reparten y del momento en el que dejan de cortar. Se observan las siguientes características en sus formas de cortar:

a) Si en un reparto en el que el número de pasteles alcanza para repartir de entrada uno a cada niño (por ejemplo '*3 pasteles entre 2 niños*'), suele suceder que cada niño tome un pastel y el que queda lo corten sólo una vez por mitad y cada niño se quede con una parte.

   En los repartos en donde el número de pasteles es menor que el número de niños (3 pasteles entre 4 niños), puede suceder que corten sólo las veces necesarias para que a cada niño le toque su parte. Primero 2 pasteles por mitad, reparten una a cada uno y el tercer pastel lo cortan dos veces por mitad ($\frac{4}{4}$) para repartir un pedazo a cada uno.

   También sucede que al recibir el material, decidan de manera implícita, cortar los pasteles en mitades sucesivas hasta que todos estén cortados en pedazos del mismo tamaño para repartirlos en un segundo momento uno a uno a cada niño.

b) El número de cortes puede estar influido también por la hipótesis que algunos niños manejan, a saber: a mayor números de pedazos mayor cantidad de pastel. Es probable que el deseo de obtener más pastel que los compañeros de otros equipos, los lleva hacer más y más cortes.

Equitatividad y exhaustividad. En las situaciones de reparto entre 2 y entre 4 los alumnos logran repartir equitativa y exhaustivamente y son capaces de identificar si los repartos cumplen o no con estas dos condiciones.

En las situaciones de reparto entre 3, una buena parte de los alumnos (sobre todo en primer año), pierden alguna de estas dos condiciones al realizar los repartos. Reconocen no haber cumplido con la condición de la exhaustividad cuando no logran repartir el pedazo sobrante. En los casos en los que cortan el pedazo sobrante en tres partes desiguales, no se dan cuenta de que no cumplen con la condición de equitatividad.

Repartos equivalentes. Los alumnos de primero y segundo grado pudieron resolver exitosamente el primer problema (repartir equitativa y exhaustivamente *x pasteles entre 2* y *4 niños*), mediante la dicotomía sucesiva, generando una variedad de resultados equivalentes. Esta diversidad permitió plantear el segundo problema (comparación de diferentes 'pedazos', producto de repartos idénticos). Se pudieron detectar diferentes niveles de explicación sobre la equivalencia o *no* equivalencia de los repartos.

Los alumnos que afirman que los productos de los repartos a comparar *no* son equivalentes lo manifiestan utilizando los siguientes tipos de argumentos.

- Se centran en el número de pedazos dejando de lado la forma y el tamaño de los mismos ("*tiene más el que tiene más pedazos*").

- Se centran en la forma de los pedazos. Al comparar dos productos repartos equivalentes formados con el mismo número de pedazos pero de diferente forma, toman en cuenta la forma de los mimos *("Este tiene más porque es más gordito y éste tiene menos porque es más flaquito"*).

- Aceptan la equivalencia si y solo si los pedazos no se hubieran cortado, pero la niegan porque se han cortado (por ejemplo: un medio partido en dos cuartos ya no es equivalente a un medio sin partir por el solo hecho de haberse partido).

Debemos distinguir en este grupo de alumnos dos tipos de dificultad: 1) no poder *anticipar* la equivalencia y 2) no aceptar la equivalencia a pesar de la comprobación empírica, mediante cortes y superposición.

La no anticipación del resultado se debe a que estos alumnos no han construido aún la compleja relación "repartos de un mismo número de cosas iguales, entre un mismo número de niños, deben arrojar cosas iguales".

Pero, no aceptar la equivalencia a pesar de la prueba empírica, pone de manifiesto otra dificultad, la no conservación del área.

Conservar el área consiste en aceptar que la cantidad no se altera cuando no se agrega ni se quita cantidad alguna, aun cuando la apariencia (la forma, el número de pedacitos) cambie. Implica por lo tanto coordinar dos parejas de variables, inversamente proporcionales: el largo y ancho de los pedazos (un crecimiento de lo largo se compensa con una disminución de lo ancho) o el número de pedazos y el tamaño de los mismos (más pedazos se compensa con pedazos más chicos).

Por lo tanto, a estos alumnos, el material concreto a la vista y a la mano no les ayuda para descubrir la equivalencia entre estos repartos. Están convencidos de que mientras más pedazos tengan más cantidad de pastel tienen, o de que la equivalencia no se da por el simple hecho de que los pedazos están cortados. En consecuencia, cuando se les pide que verifiquen su hipótesis de *no* equivalencia con el material, no sienten la necesidad de hacer algo con él. Sus compañeros no logran convencerlos de la equivalencia a pesar de los esfuerzos que realizan por demostrárselas a través de la superposición de los pedazos, y mucho menos a través de sus argumentos sobre su igualdad.

En el otro extremo están algunos alumnos, pocos, que logran anticipar la equivalencia de los diferentes tipos de repartos presentados y que además logran establecer una relación que da cuenta del avanzado nivel de explicación que tienen sobre este problema.

Carlos fue un caso excepcionalmente claro: manifestó no solamente ser conservador de área al demostrar empíricamente la equivalencia de los resultados de los repartos que se compararon mediante el corte y superposición de los pedazos de papel, sino que, a través de sus argumentos, demostró de una manera casi explícita, el manejo de la relación ‘a igual número pasteles e igual número de niños corresponde igual tamaño del pedazo, independientemente de la forma en que se hagan los cortes’.

Pudo anticipar que solamente si se aumentaba o diminuía el número de pasteles, conservando la variable número de niños entre los que se haría el reparto, la cantidad de pastel que le tocaría a cada niño cambiaría:

> *“Queda igual (dice enojado y continúa). Si les da cinco pasteles a un equipo y seis pasteles a otro, entonces si gana el de seis, pero si nos da a todos un mismo pastel, entonces nos toca igual y nadie gana”.*

Para los alumnos como Carlos, que son conservadores de área y además manejan dicha relación, el material concreto ya no es necesario para convencerse de la equivalencia de los resultados de los repartos (al menos en estos casos). Hacen uso del material solo para demostrar a sus compañeros su hipótesis. Para ellos, dicha equivalencia tiene ya el carácter de necesaria y evidente, no necesitan ya de demostraciones empíricas.

Entre estos dos extremos, el de Carlos que anticipa la necesidad de equivalencia y el de los niños que no la aceptan ni mediante la comprobación empírica por no conservar aún el área, hay otro grupo de alumnos que son conservadores de área, pero que todavía no logran manejar la relación entre ‘número de pasteles, número de niños y tamaño del pedazo’.

Estos alumnos logran intuir la equivalencia en ciertos tipos de reparto y recurren a las comprobaciones empíricas para demostrarla. Sin embargo, el hecho de que demuestren ser conservadores de área, no significa que puedan anticipar la equivalencia en todos los casos.

Cuando los resultados de los repartos son muy variados (gran cantidad de pedazos, pedazos con formas poco usuales difíciles de ubicar a simple vista dentro de otros pedazos), estos alumnos, regresan a su esquema anterior centrándose en el número de pedazos o en su forma para determinar la equivalencia o *no* equivalencia de los repartos.

Es para estos alumnos para quienes el uso del material concreto es de gran utilidad para descubrir, a través del corte y de la superposición de los pedazos, la equivalencia de esos repartos, recuperando así la explicación de equivalencia que sostenían en casos más sencillos. Erika es un ejemplo claro de este grupo de alumnos.

En resumen, identificamos tres grupos de alumnos en función de las relaciones que logran poner en juego:

- Los alumnos que anticipan la equivalencia los resultados del reparto sin necesidad de comprobación empírica: conservan el área y manejan la relación “a repartos iguales corresponden pedazos iguales”. Hay en este grupo muy pocos niños, solo se tiene un caso bien documentado.

- Los alumnos que sólo anticipan la equivalencia de los resultados del reparto en casos sencillos, y que, en los casos más complejos, pueden constatar la equivalencia mediante la prueba empírica (cortes y superposición). Estos alumnos no manejan la relación antes dicha, pero ya son conservadores de área.

- Los alumnos que no aceptan la equivalencia ni cuando se hace la prueba empírica. Estos alumnos no son aún conservadores de área. Pueden realizar cierto tipo de repartos, pero no pueden considerar aún las equivalencias simples, a nivel concreto, como la de una mitad con dos cuartos.

En cuanto al material concreto, se puede concluir que, para los alumnos que están en los extremos, por un lado los que aún no son conservadores y por otro lado los que ya manejan la relación 'número de pedazos, números de niños, tamaño del pedazo', tener el material concreto no les fue útil para descubrir la equivalencia, por distintas razones a unos que a otros. Es para los alumnos que están en una etapa de transición, es decir para quienes son conservadores pero que aún no construyen la relación mencionada, para quienes el material concreto fue de gran utilidad para comprobar de manera empírica la equivalencia. Lo anterior constituye un ejemplo del carácter relativo de la validación empírica, relacionado con los conocimientos de los niños (Block, 1991).

Queda claro también, que la construcción de 'la relación entre el número de pasteles, el número de niños y el tamaño del pedazo', implica ser conservadores de área, pero que ser conservador de área no necesariamente implica manejar la relación mencionada.

VALOR DIDÁCTICO DE LAS SITUACIONES PLANTEADAS

Cabe preguntarse: ¿cómo logró Carlos construir la relación que le permite anticipar la equivalencia de los resultados de los repartos?

Considerar que la serie de situaciones didácticas planteadas lograron que Carlos construyera la relación mencionada sería un error, como lo sería también pensar que la noción de conservación de área la adquirirían los alumnos a través de situaciones como éstas. Es sabido que la adquisición de este tipo de nociones y relaciones dependen del proceso de maduración cognitiva de cada individuo y de la experiencia con el mundo físico que va más allá de unas cuantas sesiones de clase en la escuela.

Lo que seguramente sí logró construir Carlos a partir de las situaciones didácticas planteadas, de las discusiones que se dieron al interior de los grupos sobre la equivalencia de los repartos, fue la explicitación de la relación mencionada, producto de las reflexiones que hizo sobre el problema, en la búsqueda de argumentos que lograran convencer a sus compañeros de su hipótesis.

Si bien la construcción de ciertas operaciones y relaciones como la conservación de área, la relación 'número de pasteles, número de niños, tamaño del pedazo' no se dan solamente como consecuencia de las situaciones didácticas planteadas, se considera en cambio que estas situaciones pueden formar una parte importante de la experiencia que ayudará a los niños en el proceso de construcción de las mismas.

En la misma dirección, considero importante destacar el valor didáctico de las confrontaciones colectivas. Frente a la necesidad de mostrar la veracidad de sus hipótesis, los alumnos se vieron motivados a probarlas y a defenderlas buscando argumentos, cada vez más contundentes (para ellos) basados en la comprensión, en la apropiación y en la reflexión sobre el problema que les permitió avanzar en la elaboración de sus hipótesis.

Cabe destacar que en este tipo de situación no se trata de llegar necesariamente a acuerdos o a resultados correctos[36], el papel central del maestro no es dar información, sino organizar la actividad a través de la cual los alumnos van a aprender, coordinar las discusiones en las que los propios alumnos son los que van marcando las metas sobre el contenido que se está manejando, presentar los contra-ejemplos que permitan a los alumnos cuestionar sus hipótesis y los lleven a reflexionar sobre el problema. Lograr esto es una tarea difícil.

III.1.3 Los usos del número natural que hacen los niños de preescolar y primero y segundo de primaria al partir y repartir

En México, un grupo de investigadores, encabezados por Figueras, realizó un estudio longitudinal con 17 niños de 4 a 8 años de edad durante dos ciclos escolares (1993-1994 y 1994-1995). Los niños de la muestra cursaban el 2º y 3er grado de preescolar (6 y 4 niños respectivamente) y el 1º, 2º, y 3er grado de la educación primaria (4, 2 y 1 niños respectivamente). En la programación de esta investigación se pretendía entrevistar seis veces a cada uno de los niños de la muestra a lo largo de los dos periodos escolares con los siguientes propósitos (entre otros):

---

[36] Sería prematuro para la mayoría de los alumnos.

> *“Caracterizar las principales estrategias que los niños planean y llevan a cabo en la resolución de problemas en los que subyacen los primeros conocimientos de número natural y del racional”* (Olvera, 2000:2).

> *“Explorar los usos que hacen los niños de los conocimientos matemáticos informales y de los que van construyendo en la escuela acerca de los números naturales y fraccionarios* (Martínez, 2001:35).

La información recabada en las 66 entrevistas logradas, proporcionó información que ha sido parcialmente analizada y reportada recientemente por Olvera, (2000) y Martínez, (2001) quienes se abocaron al análisis de algunas de las entrevistas en las que los niños resolvieron situaciones de reparto de cantidades discretas y continuas.

La metodología usada en este proyecto de investigación fue la siguiente:

- Entrevistas individuales de tipo clínico (videograbadas) en las que se experimentaron, entre otras, algunas situaciones de partición y reparto de cantidades discretas y continuas.

- En algunas de estas situaciones se utilizaba material concreto (discreto o continuo) para que los alumnos realizaran sobre ellos las acciones de partición necesarias y repartirlas entre 2, 3 o 4 niños representados por muñecos de cartón o, para dividirlas en mitades, tercios o cuartos. Cuando los alumnos terminaban de realizar las particiones solicitadas, se les planteaba una situación familiar con la intención de ayudarlos a relacionar los nombres de las fracciones obtenidas en los repartos anteriores.

- En otras situaciones, los experimentadores utilizaron representaciones gráficas de figuras planas─las más usuales para la enseñanza de las fracciones─ que podían simbolizar diferentes objetos de la vida real (galletas, pasteles, chocolates, etcétera). Sobre estas figuras los alumnos debían realizar particiones simbólicas entre 2, 3 y 4 mediante líneas dibujadas sobre las figura. Cabe señalar que la superficie de estas figuras a veces estaba previamente dividida en partes iguales y a veces no.

Las situaciones de partición y reparto de cantidades discretas y continuas utilizadas en esta investigación fueron, en parte, diseñadas por Figueras, Mochón y Ramírez (1991) y en parte, retomadas─con algunas modificaciones─ de otros estudios {Kieren (1983); Hunting y Sharpley (1988); Linchevsky y Vinner (1989); Figueras y Nemirovsky (1990); Pepper y Hunting (1998) y Bell y Bassford (1989)}.

Olvera, (2000:217) señala que si bien pueden identificarse varias líneas de investigación cuyo propósito es:

> *Encontrar los posibles vínculos entre el desarrollo del concepto de número natural y del racional.*

pueden destacarse dos tendencias:

a) *la que busca observar la influencia de las competencias de los niños asociadas con el conteo para resolver problemas de reparto* (Pepper, 1991; Davis y Pepper, 1992; Pepper y Hunting, 1998) *y*

b) *la que busca encontrar procesos cognitivos comunes en el desarrollo de ambos conceptos (Figueras, 1994, 1996)*.

Esta última línea de investigación, ha permitido a Figueras elaborar la siguiente hipótesis apoyada en los resultados de investigaciones previas (Figueras, 1988; Figueras y Nemirovsky, 1990[37]; Figueras, Mochón y Ramírez, 1991); entre otras.

> *"La génesis de los conocimientos de los números racionales está íntimamente relacionada con la de los números naturales"* (Figueras, 1994, 1996:185).

III.1.3.1 RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE REPARTO DE CANTIDADES DISCRETAS

A continuación se describen las situaciones sobre las que Olvera, (2000) y Martínez, (2001) realizaron el análisis de las estrategias de solución y las respuestas que dieron los alumnos al resolver problemas de reparto de cantidades discretas.

1ª entrevista Propósitos: *"Explorar el significado que le dan los niños a la palabra repartir; identificar las estrategias que utilizan los niños para repartir colecciones y, cómo usan los niños sus conocimientos sobre el número natural al resolver estas situaciones".* (Martínez, 2001:60)	
Situaciones de reparto de colecciones de objetos	**Materiales y otras observaciones**
1. Repartir 15 pelotas en 3 cajas del mismo tamaño.	Unidades idénticas en forma y tamaño (5 rojas, 5 verdes y 5 azules) no divisibles.
2. Repartir 18 canastitas en 3 cajas del mismo tamaño	Unidades idénticas no divisibles.
3. Repartir 20 abatelenguas en tres cajas del mismo tamaño	Unidades idénticas y susceptibles de dividirse.

[37] Otros estudios derivados de esta investigación fueron elaborados por: Cázares, (1994); Ramírez, (1994).

La primera entrevista contenía otras actividades para explorar los conocimientos de los niños sobre los números naturales y sus estrategias de conteo. Dado que nuestro interés es exclusivamente el análisis de las situaciones de reparto, sólo se describen las situaciones relacionadas con esta problemática.

<table>
<tr><td colspan="2">3ª entrevista, 1ª parte
Propósito: Identificar estrategias relacionadas con la equipartición de conjuntos formados por unidades compuestas[38] entre dos. (Martínez, 2001:82).</td></tr>
<tr><th>Situaciones de equipartición de unidades compuestas</th><th>Materiales y otras observaciones</th></tr>
<tr><td>“Esta familia hizo estos sombreritos. Esteban y Luis van a venderlos al mercado y cada uno va a poner un puesto de sombreritos.
... ¿cómo piensas que le harías para repartir los sombreritos a Esteban y a Luis?
¿Qué tanto le tocó a Luis?
¿De qué otra manera le podrías llamar a lo que le tocó a Luis?</td><td>- Muñecos de papel (tres niños y un adulto).
- Cuatro grupos de nueve sombreros para repartirlos entre dos niños (muñecos).</td></tr>
<tr><td>“Luis y Esteban acababan de repartirse los sombreros cuando llegó su hermano Juan para ayudarles a vender en otro puesto.
... ¿Cómo piensas que le harías para repartir los sombreritos a Juan, Esteban y a Luis)
¿Les tocó lo mismo a cada niño? ¿Por qué?
De todos los sombreros que hizo la familia ¿qué tanto le tocó a Luis?</td><td>• Modificación de un reparto de unidades compuestas.
- Dos grupos de 18 sombreros (9 en cada uno) para repartirlos entre 3 niños (muñecos).</td></tr>
<tr><td colspan="2">3ª entrevista, 2ª parte
Propósito: Identificar las estrategias que usan los niños para reconstruir el todo conociendo una de las partes y el número de personas entre las que se hizo el reparto. (Martínez, 2001:99).</td></tr>
<tr><td>3. Alma, Marcial, Maru y Pancho son otra familia que también hace sombreros. Si todos hicieron igual de sombreros que Alma ¿cuántos sombreros hizo esta familia?
¿Qué parte de los sombreros de esta familia hizo Alma?</td><td>- Frente a uno de los muñecos hay una pila de sombreros de 2 o 5 unidades simples.</td></tr>
</table>

En el Anexo 2 se muestra una tabla en la que se resumen las estrategias de solución observadas por Olvera y otra tabla con las estrategias de solución observadas por Martínez.

[38] Olvera (2000) y Martínez (2001) llaman unidades simples a cada uno de los objetos que constituyen una colección y unidades compuestas a la unidad fraccionaria conformada por dos o más objetos.

Olvera clasifica las estrategias de reparto utilizadas por los alumnos apoyándose en las categorías de Kieren (1983:8 y 9) que se presentan en las dos primeras columnas de la siguiente tabla. La última columna presenta los nombres de los niños que utilizaron esa(s) estrategia(s) durante el proceso de resolución de los problemas de reparto de cantidades discretas.

Categorías	**Subcategorías**	**Las pusieron en juego**
Separación	• *Dividir el conjunto dado (o la cantidad)*	
	• *Dividir en un número apropiado de conjuntos*	
	• *Clasificar atendiendo a otro criterio distinto del número*	Oswaldo, Oscar
	• *Usar un criterio de división diferente al de la 'igualdad'*	
Igualdad o Suficiencia	• *Algunos conjuntos son iguales, otros no cumplen con ése requisito*	Oswaldo, Oscar,
	• *Reacomodo en función de un criterio de igualdad*	Sak, Oswaldo, Oscar y Omar
	• *Repartir empleando un apareamiento*	Omar, Oswaldo,
Partición algorítmica	• *"Reparto" de uno en uno*	Sak, Oscar,
	• *Conductas "mixtas" de reparto*	Omar, Oswaldo, Oscar,
La partición y el número	• *Vincular la "igualdad" con el número o el tamaño de las particiones resultantes* • *Generalización de la partición ─descripción del proceso y los resultados de una partición asociada a números grandes─ por ejemplo, en 100 partes*	
Partición avanzada	• *Partición repetida* • *Dada una partición, transformarla añadiendo al número de particiones o bien reduciendo su número* • *Dada una partición, visualizar otra inmersa en la anterior*	

Olvera encuentra que los niños de preescolar y primaria pueden resolver situaciones de reparto de cantidades discretas utilizando "... *dos procesos cognitivos relacionados con el* *concepto de número natural para resolver problemas de reparto de cantidades discretas: la correspondencia uno a uno y la clasificación* (Olvera 2000:218)".

Martínez no clasifica las estrategias de Stefany y Mirna como lo hace Olvera, ya que considera que éstas no encajan en las categorías de Kieren dado que utilizan a la vez distintas estrategias en cada una de las situaciones a saber: criterio cromático (clasificación y reparto por color), correspondencias ***n*** a 1; iteración de unidades fraccionarias (sombreros que forman una unidad compuesta), la descomposición de unidades compuestas grandes para formar grupos más pequeños y la compensación[39]

Olvera y Martínez encuentran, que la estrategia privilegiada para realizar repartos de unidades simples es la correspondencia ***n*** a 1.

En las situaciones de reparto de unidades compuestas (pilas de sombreros), Martínez encuentra dos estrategias, independientemente de que éstas llevaran o no a la resolución del problema:

a) descomponer grupos grandes en grupos más pequeños estimando visualmente la altura de los grupos pequeños para igualarlos mediante compensaciones y,

b) descomponer unidades compuestas en unidades simples para repartirlas mediante correspondencias 1 a 1 o ***n*** a 1, previamente calculadas.

Ambos investigadores citan a Kieren, (1983) quien considera que los conocimientos previos que se ponen de manifiesto en los procedimientos empíricos que utilizan los alumnos, para resolver problemas de partición y reparto, son el punto de partida para llegar a un conocimiento formal del número racional; que el lenguaje para indicar el resultado del reparto, es utilizado por los niños más pequeños de manera limitada, relacionada con sus experiencias cotidianas.

Citan también a Piaget y, entre otros, a investigadores como Gelman y Gallistel, (1978); Fuson, (1988); Hunting y Sharpley, (1988), quienes coinciden en considerar a la *clasificación* y a la *correspondencia uno a uno* como algunos de los recursos que

[39] Cabe hacer un comentario sobre el tipo de material utilizado en los trabajos de Olvera y Martínez: me parece que la estrategia de reparto mediante el criterio de color, fue favorecida por las características del material que se utilizó (3 sub-colecciones de 6 pelotas de diferente color) y las condiciones del reparto (entre 3). Es probable que esta estrategia no hubiera aparecido si las pelotas hubieran sido de un solo color.

permiten a los alumnos aprender a contar, asociar el nombre de cada número de la serie que dicen con cada uno de los objetos que señalan y, a construir el concepto de número.

Apoyándose en los resultados de los investigadores citados, Martínez y Olvera sostienen lo siguiente:

> *"... la clasificación y la correspondencia uno a uno son factores fundamentales para la construcción de los conceptos tanto del número natural como del racional. Su uso por parte de los niños se caracteriza de acuerdo al nivel de desarrollo en que se ubiquen, pero regularmente se encuentran presentes en situaciones que se asocian con uno o con otro concepto.* (Olvera, 2000: 174).

Respaldan sus afirmaciones anteriores tomando en cuenta los procedimientos utilizados por Omar, Mirna y Stefany:

> *"... aún cuando Omar no tiene un conocimiento aritmético bien estructurado del número natural no constituye un obstáculo para resolver las tareas de reparto asignadas. (...) se puede argumentar que Omar se encuentra en un proceso de construcción de los conocimientos aritméticos en los que subyacen los conceptos del número natural y racional usando para ello procedimientos comunes que apoyan la generación de conocimientos asociados a dichos conceptos".* (Olvera, 2000: 175).
>
> *Los distintos procedimientos que las dos niñas ponen de manifiesto ...* (al repartir cantidades discretas)[40] *permiten suponer que la construcción del conocimiento del número racional requiere de varias competencias numéricas y no sólo de unas en particular y a su vez algunas de estas herramientas mentales también juegan un papel importante en la construcción del conocimiento del número natural.* (Martínez, 2001:216).

A este respecto Figueras (1996), y Figueras, Mochón y Ramírez (1991), sostienen:

> *"Las habilidades numéricas vinculadas a la eficiencia en el "conteo", no necesariamente forman una base para la resolución de los problemas verbales de reparto y partición". (Figueras, 1991:9).*

En cuanto al fraccionamiento de la unidad, ningún niño optó por fraccionar los palitos para lograr un reparto equitativo. A este respecto Olvera y Martínez señalan que pudo influir en esta actitud el tipo de material que se utilizó (abatelenguas de madera) o, la idea que se inculca a los niños de que el material que se usa en la escuela no debe romperse[41].

[40] Lo escrito en el paréntesis lo agregué para contextualizar el texto de Martínez.

[41] ¿Qué sucedería si en vez de abatelenguas de madera usaran tiras de papel o cartoncillo?. Quizás en este caso se les hubiera ocurrido a los alumnos doblar y cortar logrando implícitamente la equitatividad y exhaustividad en el reparto.

III.1.3.2 RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE REPARTO DE CANTIDADES CONTINUAS

A continuación se describen la situaciones de reparto de cantidades continuas que enfrentaron los alumnos en la 2ª entrevista y, en el Anexo 3 se presentan los procedimientos que utilizaron los alumnos para resolverlas. Más adelante resumiré los resultados del análisis de Olvera y Martínez sobre las estrategias de solución de los alumnos.

<table>
<tr><td colspan="2">2ª entrevista
Propósito general: “Identificar las posibles estrategias de anticipación, partición y verificación que los niños utilizan en un reparto de una cantidad continua en cuatro y en tres partes iguales, así como los vocablos que utilizan para denominar tales fracciones”. (Olvera, 2000:180)</td></tr>
<tr><th>Situaciones de reparto de cantidades continuas</th><th>Propósitos específicos y/o materiales que se utilizaron</th></tr>
<tr><td>1. Este señor es dueño de una fábrica de cuerdas. Y estos niños (4) fueron a visitar la fábrica de cuerdas. Cuando termina la visita el señor les regala esta cuerda para que hagan unas reatas.
¿Podrías ayudar a repartir la cuerda entre los niños?
¿Cómo le harías?
Marca con un plumón el lugar donde cortarías la cuerda.
¿Las reatas que obtuviste, ¿son del mismo tamaño?
¿Cómo puedes saber si las reatas son del mismo tamaño?
¿Puedes decirle a (alguien) cómo le hiciste para repartir la cuerda?
¿Qué tanto de la cuerda le tocó a cada niño?</td><td rowspan="2">- Cuerdas de la misma longitud, plumones de colores diferentes, tijeras y 5 muñecos de papel (un adulto y cuatro niños).
- El entrevistado tiene a la vista los muñecos entre los que se debe hacer el reparto.
- A la unidad se le llama ‘cuerda’ y a la fracción ‘reata’.
- Si los alumnos no tenían éxito en la equipartición entre 4 y entre 3, se les solicita hacerla entre 2.</td></tr>
<tr><td>2. Misma situación que la anterior pero entre tres niños.</td></tr>
<tr><td>3. Comparación de los resultado en cada reparto.</td><td>• Establecer relaciones de orden.</td></tr>
<tr><td>4. Situación familiar con la que se intenta ayudar a los alumnos a relacionar el término ‘medio’, ‘mitad’, tercio y tercera parte con el resultado de los repartos anteriores.</td><td>• Nombrar a cada parte resultante de los repartos anteriores “mitad” o ‘cuarta parte’
- El experimentador dobla una cartulina a la mitad. Pregunta cómo le llamaría a cada una de las partes, si no lo sabe se le indica.</td></tr>
<tr><td>5. Representación escrita de los resultados de un reparto diferente, en el mismo contexto.</td><td>• Relacionar el término ‘mitad’ con el resultado de un reparto en 2 partes iguales.
- Dibujo de una niña, con dos cuerdas del mismo tamaño y un niño con una cuerda dividida en dos partes iguales.</td></tr>
</table>

En estas entrevistas no se pidió a los alumnos, de manera sistemática, que anticiparan cómo iban a partir; ni en todos los casos se les invitó a realizar nuevos intentos para resolver el problema. Además, si al terminar de realizar los repartos, los alumnos no usaban de manera espontánea los nombres de las fracciones para indicar sus resultados, se les planteaba una situación más familiar para que los alumnos lograran establecer una relación entre los nombres de las partes obtenidas y los resultados de los repartos que habían realizado anteriormente.

NÚMERO DE CORTES Y NÚMERO DE PARTES QUE SE OBTIENEN

Los alumnos de 1º y 2º de primaria (Sak Nikte, Mirna y Oscar), logran desde el primer intento anticipar los cortes que deben hacer para obtener las cuerdas que necesitan en cada problema. Los de 3º de preescolar (Oswaldo y Stefany) hacen tantas marcas de corte como número de cuerdas necesitan y Omar (2º de Presc.), al resolver los tres problemas de reparto de longitudes, al parecer no toma en cuenta ninguno de los datos, excepto en el primer intento del segundo problema. Además, este último niño y Stefany (3º de Presc.) no consideran necesario repartir la cuerda sobrante.

ESTRATEGIAS PARA PARTIR EL TODO CONTINUO

Olvera destaca diferencias importantes en las estrategias de partición utilizadas por los niños. Señala que la estrategia “*estima visualmente para equidistribuir* (las marcas de corte)*”* la usaron los tres niños más grandes de la muestra que cursaban, respectivamente, el 3º de Presc. y 1º y el 2º de primaria. La estrategia de *doblar el cordón por mitades* , la usaron dos niños, uno de primero y uno de segundo, para realizar el reparto entre 4. Y la estrategia de *doblar la cuerda en tres partes iguales* sólo la utilizó el niño que cursaba el 2º grado de primaria. Esta observación le permitió a Olvera concluir lo siguiente:

> *“Al parecer, las estrategias de partición usadas por los niños sufren una evolución de acuerdo con la edad que cada uno de ellos tiene, esto es, el niño más pequeño usa procedimientos menos eficientes que no cumplen con los requisitos necesarios para la solución del problema y los niños mayores van incorporando estrategias más sistemáticas que les permiten obtener el resultado deseado”.* (Olvera, 2000: 206)

Martínez encuentra que Stefany (3º de preescolar) y Mirna (1º de primaria) estiman visualmente la distancia en la que hacen las marcas, destaca la estrategia de Stefany quien al resolver el primer problema (1 cuerda entre 4), pone en juego un criterio diferente a los que utilizaron los demás alumnos: considera una de las magnitudes de los muñecos (ancho) para determinar el tamaño de las reatas. Martínez destaca que esta estrategia se justifica en una situación real porque una reata debe ajustarse al tamaño de quien la va a utilizar.

ESTRATEGIAS DE VERIFICACIÓN DE LA IGUALDAD DE LAS PARTES

Olvera señala que no es posible observar una evolución entre las estrategias utilizadas por los alumnos y las clasifica de la siguiente manera[42]:

a) Usar procesos de medición

b) Estimar visualmente

c) Comparar físicamente la cuerda después de cortarla

d) Por dicotomía

e) Comparar físicamente las cuerdas sin cortarlas

Sobre la manera en la que los alumnos establecieron relaciones de orden entre los resultados de los dos repartos realizados (una cuerda entre 4 y una cuerda entre 3), Olvera encuentra que los niños más pequeños (Omar, Oswaldo y Sak Nikte) y Mirna en el caso de Martínez, comparan las longitudes de las reatas mediante estimaciones visuales. Usan términos referidos al tamaño de pedazo (*más grandes*, *medianas*, *más medianitas, chicas*) para establecer relaciones de orden . En cambio, Oscar (7 años, 2º de Prim.) toma en cuenta las variables 'número de unidades y número de personas' para determinar que entre mayor sea el número de personas entre las que se hace el reparto de una misma unidad el pedazo es más chico[43].

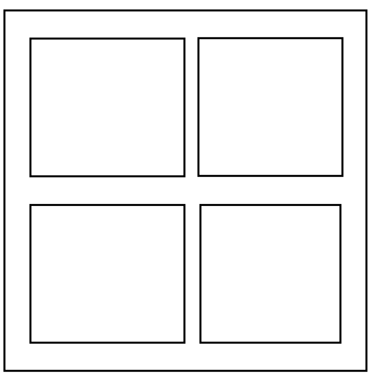
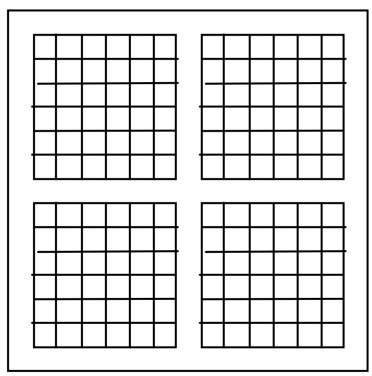
En cuanto a las expresiones que los alumnos usan para indicar cuánto de la cuerda le tocó a cada uno de los niños, en los repartos realizados, Olvera y Martínez señalan que los alumnos utilizan, de manera espontánea, expresiones pre-numéricas como: *poco*, *menos*, *más, mucho,* además del uso de los números naturales *uno, dos, ...* . Otras expresiones en las que subyacen nociones vinculadas con los números racionales, también son utilizadas por los alumnos, por ejemplo: *iguales, una parte de la cuerda, media parte, la mitad*.

[42] Con respecto a la forma en la que Olvera clasifica estas estrategias, considero que no es del todo clara debido a que las estrategias b), c), d) y e) son procesos de medición y por lo tanto están incluidas en a).
[43] Al igual que Carlos, el alumno de 2º grado del estudio de Dávila (1991).

En la situación familiar diseñada para ayudar a los niños a relacionar los nombres de ciertas fracciones con los resultados de los reparto, sólo Mirna y Oscar identifican el término *'mitad'* para señalar la parte que se obtiene al partir un todo continuo en dos partes iguales pero en otras situaciones también la utilizan para denominar otros pedazos o partes que no son mitades.

A continuación revisaremos el análisis realizado por Martínez sobre el primer problema de partición en contextos continuos planteado en la quinta entrevista así como las situaciones de reparto de la sexta entrevista.

<table>
<tr><td colspan="2">5ª entrevista
Propósito: Identificar: los distintos trazos que usan los niños para dividir entre cuatro una misma figura (Olvera, 2000:113-115)</td></tr>
<tr><td>Situaciones de partición de cantidades continuas</td><td>Materiales y otras observaciones</td></tr>
<tr><td>Divide entre cuatro cada cuadrado de diferentes maneras. Representa cada forma de partirlo en los cuadrados que aparecen a continuación.

Problema 1

Problema 2
</td><td>- En estas situaciones no se utiliza material concreto sino hojas de papel blancas o cuadriculado en las que se trazaron las formas geométricas más usuales en la enseñanza para representar fracciones unitarias.

- Plumones de colores.</td></tr>
</table>

Martínez señala la diferencia entre los problemas planteados en la 3ª entrevista (partición de longitudes) y los problemas planteados en la 1ª parte de la quinta entrevista de la siguiente manera.

En este caso: *" ... Aunque siguen siendo objetos concretos, éstos ahora se encuentran representados en una hoja de papel y sobre ellos se pretende que los niños lleven a cabo acciones con el lápiz, por ello la acción de repartir o fracturar se puede considerar como simbólica y el objeto sobre el cual se pretende que se centre la atención es el área y además el criterio de igualdad de las partes se transfiere a la igualdad de áreas. En ese sentido las acciones que deben realizar los niños son distintas. (...) se representan los resultados de las acciones pero no son en sí mismas las propias acciones; es a esto a lo que se llama partición gráfica"*. (Martínez, 2001:145)

En el siguiente gráfico se muestra como resolvió Mirna el primer problema después de anticipar en cada caso la manera en la que planeaba dividir la hoja.

Divide entre cuatro el cuadrado de diferentes maneras. Representa cada forma de partirlo en los cuadrados que aparecen a continuación.

Respuestas de Mirna (Martínez, 2001:157)

Martínez destaca que Mirna hace uso de sus conocimientos adquiridos en la vida cotidiana para realizar los trazos, ya que de manera inmediata divide el cuadrado **a)** y el **b)** con una *'cruz'* y un *'tache'*. Al realizar estas acciones, a mano alzada, genera partes desiguales mismos que identifica. Martínez señala que esta imprecisión en los trazos se deben a errores motrices finos o, como señala Streefland (1993), la desigualdad de las partes obtenidas se debe más a una carencia de habilidades técnicas para realizarlas que a una falta de comprensión de lo que significa hacer particiones equitativas.

Frente a las estrategias de partición comentadas, Martínez apunta:

> *"Indudablemente la menor despliega un cúmulo de conocimientos, que no precisamente son habilidades o estrategias enseñadas en la escuela para equipartir un cuadrado".*
>
> *(....)*
>
> *"El criterio de igualdad se sustenta fuertemente en la visualización al parecer considerando forma y tamaño que conduce matemáticamente a la congruencia" (*Martínez, 2001:165)

Martínez considera los términos que Mirna utiliza para comparar los pedazos obtenidos en el cuadrado **e)**, como un indicio de que Mirna toma un pedazo (*un cacho*) como unidad de medida de superficie para compararlo con los otros:

El experimentador pregunta a Mirna si las partes que obtuvo en el cuadrado **e)** son o no iguales.

Mirna: *No.*

Exp.: *¿No, por qué no?*

Mirna: *Todas son diferentes.*

Exp. *¿Por qué todas son diferentes?*

Mirna: *Si ésta tiene un cacho y éste tiene un poco más de cacho, éste un cachito, ésta ocupa más del cacho, pues sí, no son iguales.*

Aunque en el documento no se indica, es probable que el primer ‘cacho’ que Mirna señala es el que está en la parte superior del cuadrado “**e**”.

En cuanto al problema 2 (cuadrados trazados en hojas cuadriculadas), Martínez comenta que se suponía que el papel cuadriculado facilitaría a los alumnos la resolución del segundo problema. Sin embargo, Mirna tuvo más éxito en la partición de unidades sin estructura que con unidades estructuradas. Concluye que las subdivisiones dadas por la cuadrícula, fueron para Mirna un obstáculo que le dificultó usar el conteo o correspondencias uno a uno para realizar las particiones necesarias, o pensar en la posibilidad de utilizar los procedimientos con los que tuvo éxito en la partición de los cuadrados sin subdivisiones previas.

En la siguiente página se describen las situaciones derivadas de un reparto que enfrentaron los alumnos en la sexta entrevista, en las que según Martínez, subyacen las nociones de razón y proporción simple.

<table>
<tr><td colspan="2">6ª Entrevista
Propósito: Explorar las actuaciones de los niños de los primeros grados de primaria al resolver problemas de proporción simple.</td></tr>
<tr><td>Situaciones de partición de cantidades continuas</td><td>Propósitos específico y/o materiales que se utilizaron</td></tr>
<tr><td>La pizzería ‘Las sabrosas’ hace su inauguración, todos los clientes que lleguen hoy comerán gratis</td><td>- De esta situación se derivan 7 problemas</td></tr>
<tr><td>1. Juan y María llegaron muy contentos, se sentaron en una mesa y el mesero les trajo tres pizzas para los dos.
- Reparte las pizzas entre Juan y María de manera que los dos coman ‘lo mismo’.
- ¿Les tocó lo mismo a Juan y María?
- Cuánto le tocó a Juan?
- Escríbelo para que Alma que está en el otro salón sepa cuánto le diste a María.</td><td>- Dos niños (muñecos de cartón) y 3 pizzas circulares (de masa).</td></tr>
<tr><td>2. Misma situación pero el reparto es 6 pizzas entre 4 niños (Antonio, Ana, Ángel y Alejandra).</td><td>- 4 niños (muñecos de cartón) y 6 pizzas circulares (de masa)</td></tr>
<tr><td>3. Con los resultados a la vista de los dos repartos anteriores, se plantean las siguientes preguntas:
-¿Comieron lo mismo? o
-¿Juan comió más que Antonio? o
-¿Juan comió menos que Antonio?</td><td>• Comparación de los resultados anteriores, representados gráficamente
• Se debe concluir que la pizzería da a cada persona la misma cantidad.</td></tr>
<tr><td>4. Llegaron seis niños. ¿Cuántas pizzas les trae el mesero?</td><td>- Hojas con el dibujo de 6 niños
• Dada la parte, encontrar el todo.</td></tr>
<tr><td>5. El mesero llevó a la mesa 12 pizzas. ¿Cuántos niños había en la mesa?</td><td>- Hojas con el dibujo de 12 pizzas circulares.
• Encontrar el número de personas entre las que se repartió, conociendo la parte y el tamaño del todo.</td></tr>
<tr><td>6. Hay cinco niños en la mesa. ¿Cuántas pizzas les dio el mesero?</td><td>• Reconstruir el todo, (formado por un número mixto) a partir de la cantidad que le tocó a una persona.
- Hojas con el dibujo de 5 niños.</td></tr>
<tr><td>7. A estos cinco niños el dueño les regaló un chocolate como éste (mostrar el chocolate).
¿Cómo se lo reparten para que les toque lo mismo? ¿Cuánto de la barra de chocolate le tocó a cada quien?</td><td>• Repartir un todo previamente subdividido en un número de partes no divisible entre enteros.
- Hojas con los dibujos de 5 niños y el dibujo de una barra de chocolate subdividida en 8 partes.</td></tr>
</table>

A continuación describiré la manera en la que Mirna resolvió estas situaciones y posteriormente presentaré las conclusiones de Martínez.

Problema 1. (3 pizzas entre 2). Mirna anticipó que para repartir debía entregar una pizza a cada niño y partir la otra pizza a la mitad para darle una mitad a cada uno. Frente a la pregunta *¿Cuánto le tocó a cada niño?* Mirna dijo a cada uno le tocó *"uno y medio"* y lo escribió de la siguiente manera *"1 y medio".*

Problema 2. (6 pizzas entre 4). Al parecer Mirna tomó como referencia el resultado anterior. Anticipó que para repartir entregaría a cada niño *1 pizza y un cacho* (marcando la mitad con un corte imaginario) de otra pizza. Realizó el reparto dando una pizza a cada niño y cortando dos pizzas por mitad. Indicó oralmente que a cada niño le tocó *"uno y medio".* y lo representó por escrito de la siguiente manera *'1 y medio'*

Problema 3. (Comparación entre los resultados de los repartos anteriores). Mirna determinó que a todos les tocó lo mismo porque *"hice lo mismo"* (dar una pizza entera a cada niño, partir las pizzas sobrantes a la mitad y entregar una mitad a cada uno).

Problema 4. (Llegaron seis niños. ¿Cuántas pizzas les trae el mesero?) Averiguar el todo repartido a partir del conocimiento del número de niños entre los que se hizo el reparto y la parte que le toca a cada uno, aumenta el nivel de dificultad en comparación con las actividades anteriores. Sin embargo, Mirna logró estimar que debían llevarles 10 pizzas, tal vez apoyándose en el siguiente razonamiento: 'si son 6 pizzas apenas alcanza una para cada niño, entonces se necesitan más de 6 pizzas'.

Martínez comenta que la primera acción de Mirna, para averiguar si efectivamente eran 10 pizzas las que se necesitaban, fue: contar las pizzas considerando una y media por muñeco, después escribió lo siguiente y trató, sin éxito, de sumar, como sabía hacerlo con los números enteros:

1 y medio
1 y medio
1 y medio

Posteriormente, Mirna representó con rueditas (de tamaños diferentes) las 10 pizzas; agrupó con una línea las seis pizzas enteras que le tocarían a cada niño. Dividió por mitad (con una línea) cada pizza a la vez que señalaba (con puntitos) cuál de las dos mitades obtenidas le correspondía a cada pizza entera. Continuó de la misma manera hasta que terminó de hacer corresponder media pizza con cada una de las seis pizzas enteras. Finalmente Mirna contó las pizzas enteras y las divididas por mitad y encontró que a los seis niños les deberían traer 9 pizzas y no 10 como lo había estimado inicialmente, por lo que tachó la décima pizza que había dibujado.

Con respecto a las dificultades que Mirna puso de manifiesto al tratar de operar números y palabras, Martínez cita a Figueras (1988) quien dice lo siguiente:

> *En el proceso de aprendizaje de símbolos, el estudiante debe relacionar tres elementos: una idea, una palabra asociada a ésa y un símbolo. Con frecuencia, las dificultades que los educandos enfrentan surgen de la naturaleza compleja de las interrelaciones entre estos tres elementos.*
>
> *Un paso importante en el aprendizaje es el establecimiento de las conexiones entre diferentes sistemas de simbolización.* (Figueras, 1988: 86)

En cuanto a los dibujos realizados por Mirna para valorar su resultado, Martínez señala que Mirna los usa como un medio de comunicación, para mostrar lo que está pensando y para verificar su respuesta. Cita nuevamente a Figueras que al respecto dice lo siguiente:

> *"...los diagramas parecen ser útiles; algunas veces, éstos se emplean directamente*[44]*, pero en ocasiones, el educando manifiesta necesidad de utilizarlos para verificar su resultado o para apoyar su afirmación"* (Figueras, 1988:100)

Problema 5. (El mesero llevó 12 pizzas. ¿Cuántos niños había? Al tratar de resolverlo, Mirna olvidó la cantidad constante por niño ($1\frac{1}{2}$) que se había venido manejando a lo largo de la sexta sesión, por lo que en su primer respuesta considera que en la mesa hay 12 niños. Después de varios intentos y con un apoyo gráfico proporcionado por el experimentador Mirna logra encontrar el resultado.

Problema 6. (Hay cinco niños en la mesa. ¿Cuántas pizzas les dio el mesero?). Mirna nuevamente olvidó la cantidad constante que debía tomar en cuenta para resolver el problema. Una vez que el experimentador le recuerda que a cada niño le debía tocar $1\frac{1}{2}$ pizza, Mirna anticipa que el mesero debe llevar 10 pizzas. Para verificar su anticipación colocó debajo de los muñecos que representan a los niños una pizza entera y, posteriormente, colocó media pizza sobre la pizza entera de cada muñeco. Al terminar, cuenta primero las pizzas enteras y después cada dos mitades continuó el conteo hasta llegar a 8.

[44] Se refiere al uso de los diagramas para plantear el problema

Finalmente Mirna dijo al experimentador que el mesero debía llevar 8 pizzas, porque si pedía 7 iba a hacer falta *'media'* pizza para un niño y si pedía 8, le sobraría *'media'* pizza. El problema del medio sobrante Mirna lo resuelve cortándolo en 6 pedacitos, que agrega de uno en uno a los muñecos. Los dos últimos pedazos los deja al último muñeco de la fila. Escribe: *'8 pizzas'* y *'1 y medio y un cacho',* para representar cuántas pizzas debía llevar el mesero y la parte que le tocaba a cada niño. En este caso, el término *'un cacho'* Mirna lo utilizó para referirse a un pedazo más chico que media pizza.

Los dibujos que hace Mirna ilustran la condición enunciada por Streefland (1993), según la cual *los referentes concretos o gráficos deben ser para los alumnos un medio de razonamiento, modelos que representan el problema real.*

Las resoluciones a estos seis problemas permiten ver que un alumno de primer grado puede no solamente resolver problemas de reparto sencillos, sino variables de los mismos tales como iterar una porción fraccionaria (varias veces $1\frac{1}{2}$) tanto para dar cuenta del total (multiplicación implícita) como para dar cuenta del número de iteraciones (división implícita).

En cambio, no resulta claro en qué medida intervienen las nociones de razón y proporción, puesto que desde el segundo problema Mirna asume que las porciones por niño deben ser siempre de un entero y un medio. Así, por ejemplo, para resolver el reparto 6 pizzas entre 4 niños, Mirna *no necesita* considerar la relación que éste guarda con el anterior (3 pizzas, 2 niños), pues de antemano asume que el resultado debe ser $1\frac{1}{2}$ para todos los repartos que se le presenten.

III.1.3.3 CONCLUSIONES DEL ESTUDIO

Martínez señala que los números naturales fueron usados sobre todo en las situaciones de reparto de cantidades discretas. Destaca el uso de tres estrategias:

- Procedimientos de conteo
    - Uso del principio de cardinalidad para indicar el todo a repartir y el resultado del reparto.

- Uso del cardinal para indicar la igualdad o la desigualdad entre las partes (si cada parte tiene el mismo número de objetos significa que a todos les tocó lo mismo).

  Olvera incluye en esta categoría el criterio de clasificación utilizado por los alumnos que en un reparto nuevo toman como referencia la cantidad de objetos que habían repartido en el problema anterior.

- Estimación cuantitativa

  - Anticipar cómo cuántos objetos le tocan a cada persona en un reparto de cantidades discretas.

- Construcción de diferentes tipos de correspondencias

  - Distribuciones cíclicas y distribuciones cíclicas mixtas: 1 a 1; 2 a 1; 5 a 1; 6 a 1.

  Olvera y Martínez señalan que este procedimiento puede utilizarse para hacer equidistribuciones[45] o equiparticiones[46]. Distinguen estas formas de repartir apoyándose en Gelman y Gallistel (1978).

Con base en los postulados de Kieren, Martínez afirma:

> *"...se ha mostrado que la construcción de correspondencias diversas aparecen en las formas en las que las niñas realizan la partición de colecciones de entidades simples o unidades compuestas .... por ello se afirma que las acciones asociadas a procesos de correspondencia influyen también en el mecanismo constructivo de la partición,* (Martínez, 2001:214).

Finalmente Martínez y Olvera concluyen:

> *"Los distintos procedimientos que las dos niñas ponen de manifiesto ... permiten suponer que la construcción del conocimiento del número racional requiere de varias competencias numéricas y no sólo de unas en particular y a su vez algunas de estas herramientas mentales también juegan un papel importante en la construcción del conocimiento del número natural". (Martínez, 2001:216)*

> *"Los alumnos que intervienen en el presente estudio usan dos procesos cognitivos relacionados con el concepto de número natural para resolver problemas de reparto de cantidades discretas: la correspondencia uno a uno y la clasificación...."* (Olvera 2000:219)

[45] *Equidistribuir implica acciones de reparto que no conllevan a agotar toda la colección o todo el continuo, a pesar de que se establecen relaciones de equivalencia numérica o cuantitativa entre los subconjuntos o partes.* (Martínez, 2001:214)

[46] *La equipartición consiste en repartir todos los objetos o todo el continuo en el número de partes solicitado siendo condición que halla lo mismo en cada una en términos de cantidad".* (Martínez, 2001:214*)*

Con respecto a las situaciones de reparto de cantidades continuas, Martínez destaca las siguientes estrategias.

- Estimación visual de la distancia entre las marcas de corte sobre una longitud, la altura de las pilas de sombreros, el ancho de las franjas verticales al tratar de partir un cuadrado en cuatro partes iguales, el punto de corte en la circunferencia para obtener dos partes iguales.
- Uso de unidades (arbitrarias) de medida para equipartir cantidades continuas.

  Martínez señala que Mirna se apoya en la estimación visual de las partes, mediante el uso de segmentos visuales (determinados por la ubicación de puntos imaginarios) sobre longitudes o una de las dimensiones de las figuras planas y a través de procesos de medición antropomórfica, es decir utilizando sus dedos como unidad de medida.

- Con respecto a las formas de comunicación, Martínez destaca las expresiones verbales, gráficas y pictográficas como recursos para comunicar lo que se piensa o para verificar sus anticipaciones (ver actuaciones de Mirna en la sexta entrevista).

  A este respecto, la investigadora señala que Mirna usa el término *'mitad'*, de manera espontánea en las situaciones de reparto de cantidades continuas, sin embargo lo usa también para nombrar las partes obtenidas al dividir entre 2, 3 o 4.

  Aunque Mirna utiliza frecuentemente los términos *'cacho','pedazo', 'mitad' y medio* como sinónimos, Martínez apunta que el hecho de que se refiera a la unidad fraccionaria con el término *'mitad'* es un ejemplo de las relaciones que pueden establecerse entre las partes y el todo.

  Martínez confirma que la representación pictórica es la más cercana a las acciones concretas y sirve a los alumnos para verificar su respuesta o corregirla. Como lo señala Kieren (1992), la representación gráfica del problema permite conectar el plano de los hechos a un plano más alejados de los hechos o, como lo plantea Streefland (1993), *"los referentes concretos o gráficos deben ser para los alumnos un medio de razonamiento, modelos que representan el problema real".*

  Olvera, señala que en los casos que él analizó:

> *"Los niños usan vocablos de tipo pre-numérico*[47] *para denominar el tamaño de la parte que obtuvieron, o bien para llevar a cabo un proceso de comparación entre cantidades que pueden ser referidas a números naturales o racionales, o en su caso a ambos.* (Olvera, 2000:219).

Con base en las estrategias de solución y las respuestas de los casos que él analizó Olvera propone a los maestros de los primeros grados de preescolar y primaria, incluir tareas que propicien procesos de conteo y partición ya que estos ayudarán a los alumnos a superar las dificultades del aprendizaje del número racional que se derivan del aprendizaje de los números naturales.

III.1.4 COMENTARIO SOBRE EL VALOR DIDÁCTICO DE LAS SITUACIONES DE REPARTO SIN CUANTIFICACIÓN

Las experiencias que se han reportado aportan evidencias de la fecundidad de las situaciones de reparto aplicadas en primero y segundo grados, para el aprendizaje de aspectos básicos, anteriores a la representación simbólica, que subyacen a la noción de fracción como partes de unidad. Los alumnos pueden poner en juego destrezas previamente adquiridas para realizar los repartos y avanzar en su dominio.

Más precisamente, con magnitudes continuas, los alumnos pueden:

a) Realizar repartos entre 2^n
b) Comprobar la equitatividad y la exhaustividad, al interior de cada reparto
c) Identificar el problema del residuo en el caso de los repartos entre 3 y, eventualmente, algunos pueden empezar a resolverlo
d) Enfrentar, en distintos niveles, el problema de la comparación de resultados de repartos idénticos, con apariencia distinta (distinto número de pedacitos, o distinta forma), aunque no necesariamente puedan resolverlo
e) Construir argumentos para explicar, para demostrar o para refutar

Sin embargo, excepto en el caso de las dos primeras tareas (a y b), las experiencias muestran también que no puede esperarse que la mayoría de los alumnos alcancen desempeños homogéneos exitosos, en el sentido de obtener resultados y de proporcionar argumentos estrictamente correctos. Fue bastante claro, me parece, que la resolución de

[47] *"poco", "más", "menos", "mucho", "poquito", "iguales", "más grande", "menos grande",*

los problemas implica nociones y operaciones lógicas que los alumnos están en proceso de adquirir y que no es posible “enseñar” directamente.

Las tareas más complejas (c, d, e), en los primeros grados de la escuela primaria, pueden dar lugar a experiencias fecundas solamente si se logran valorar los procesos mismos que propician, sin exigir, o esperar, resultados correctos y sin considerar que el no obtenerlos constituye una carencia. ¿Es esto posible? O es más prudente esperar hasta tercer grado para proponer estas tareas, al menos las más complejas.

Cuando en el año de 1991, terminé la parte experimental del estudio que reporté aquí (apartado III.1.2), las fracciones se enseñaban desde primer grado, solamente las más simples, $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}$, pero incluyendo ya la representación simbólica y las equivalencias en ese nivel. En aquél momento mi conclusión fue enfática: la enseñanza de las fracciones debía posponerse hasta tercer grado.

Una segunda revisión de mi propio estudio y de los estudios realizados posteriormente, me llevan a matizar dicha conclusión: las experiencias más simples de reparto (repartos entre 2^n) podrían realizarse desde primer grado, cuidando la forma en que se nombra el contenido (no “fracciones”, tal vez “repartos en el nivel concreto”) y precisando lo que es factible esperar.

Con respecto a la introducción de los términos ‘*medios’, ‘cuartos’,* etcétera, y sobre todo, con respecto a la introducción de los símbolos numéricos correspondientes, mi punto de vista sigue siendo que es necesario esperar hasta segundo o tercer grado.

Por otra parte, el estudio de Figueras destaca también el potencial didáctico de las situaciones de reparto con magnitudes discretas, desde el punto de vista del desarrollo de la noción de número, tanto natural como racional. Cabe señalar que actividades como las referidas en dicho estudio ya están contempladas en los programas y materiales actuales de 1º y 2º grados de primaria, aunque no con el propósito final de que los niños usen fracciones para describir las partes que resultan de los repartos, sino con el de apoyar el desarrollo de la noción de número natural, y, al mismo tiempo, como antecedente para la enseñanza de la división de números naturales.

III.2 LA NOCIÓN DE RAZÓN EN SITUACIONES DE REPARTO

En este apartado presentaremos primero algunos estudios que, de manera explícita o implícita, han prestado atención a la noción de equivalencia y de orden entre razones, dentro de un contexto de reparto (razones del tipo '*3 pasteles para 4 niños*'), previamente a la cuantificación de la parte con una fracción. Enseguida, comentaremos una investigación que propone una construcción de las fracciones a partir de estas razones.

III.2.1 LA NOCIÓN DE RAZÓN EN UN REPARTO, PREVIA LA CUANTIFICACIÓN CON UNA FRACCIÓN

Todo problema que implica multiplicar o dividir, constituye un problema de proporcionalidad. Este hecho, como ya se comentó, fue destacado por Vergnaud (1988), desde sus primeros trabajos sobre el campo conceptual de las estructuras multiplicativas (ver apartado II.3).

Por otra parte, varios investigadores, entre ellos Kieren (1988); Behr, Harel, Post, y Lesh (1990); Vergnaud (1991) y Block y Solares (2001), han destacado el hecho de que los aspectos fundamentales de la noción de número racional se construyen en el marco de las relaciones de proporcionalidad. Los problemas de reparto equitativo y exhaustivo, cuyo resultado es una medida fraccionaria no son la excepción.

Varios estudios realizados sobre la familia de problemas de reparto han destacado y explotado, implícita o explícitamente, esta característica {Balbuena, C. y H. Espinoza, Fregona y Saíz (1984), Block (1987 y 2001), Streefland (1993), Solares (1999)}.

Consideremos, por ejemplo, el reparto "*3 pasteles entre 4 niños*"

Si la pregunta es *¿qué fracción de pastel toca a cada niño?*, podemos esquematizar las relaciones en juego de la siguiente manera:

Número de niños	Número de pasteles
4	3
1	X

Se destaca así el hecho de que hay una relación de proporcionalidad entre dos conjuntos de medidas (números de niños, números de pasteles).

Como en toda relación de este tipo, pueden identificarse las siguientes propiedades, que dan lugar a dos tipos de procedimiento de resolución:

La razón interna entre los dos valores del primer conjunto (de 4 niños a 1 niño, “4 veces menos”, o “entre 4”) debe conservarse en el segundo conjunto (a 1 pastel corresponde una cantidad 4 veces menor que 3 pasteles)

$\div 4$ $\qquad\qquad$ $\div 4$

Número de niños	Número de pasteles
4	3
1	X

Por lo tanto, $X = 3$ pasteles entre 4

La *razón externa* entre cada valor del primer conjunto con el valor que le corresponde en el segundo, es constante:

$\times \frac{3}{4}$

Número de niños	Número de pasteles
4	3
1	X

Por lo tanto, $X = 1$ niño $\times \frac{3}{4}$ (o $\frac{3}{4}$ de 1 pastel)

Naturalmente, en un problema como éste, no es la razón externa constante a la que se apelaría espontáneamente.

Consideremos ahora la siguiente tarea: se trata de calcular la cantidad de pasteles que tendría que haber si hubiera 12 niños y se quisiera que, a cada uno, le tocara la misma porción que a los del primer reparto. El esquema ahora es el siguiente:

Número de niños	**Número de pasteles**
4	3
12	X

Pueden considerarse dos caminos para resolver el problema: uno, calcular primero cuánto pastel le toca a cada niño en el primer reparto ($\frac{3}{4}$ de pastel) y después multiplicar esa cantidad por 12 niños; otro, considerar la razón interna entre las cantidades de niños (triple) y conservarla en el segundo conjunto: a 12 niños les corresponden 3 veces 3 pasteles, es decir, 9 pasteles.

	Número de niños	Número de pasteles	
$\times 3$	4	3	$\times 3$
	12	9	

Esta segunda resolución presenta un interés didáctico especial: permite generar parejas de datos de repartos a los que corresponden porciones iguales, *SIN* necesidad de cuantificar el tamaño de la porción, y por lo tanto, en casos como éste (razón interna entera), *SIN* necesidad de utilizar medidas fraccionarias.

Las parejas de datos (4 niños, 3 pasteles) y (12 niños, 9 pasteles) son equivalentes desde el punto de vista del tamaño de la porción resultante. Pueden ser consideradas como razones externas equivalentes:

"*3 pasteles para 4 niños = 9 pasteles para 12 niños*"

o como cocientes "indicados" iguales:

3 pasteles entre 4 = 9 pasteles entre 12

Las fracciones que expresan las medidas de las porciones resultantes permanecen implícitas.

Los investigadores citados destacan, de distintas maneras, el interés de este tipo de resoluciones:

- El uso implícito de algunas propiedades de la proporcionalidad favorece la apropiación de las mismas.
- Permiten desarrollar, implícitamente, la noción de equivalencia de fracciones desde la perspectiva de la proporcionalidad.
- Permiten trabajar con medidas fraccionarias antes de poder incluso expresar estas medidas con fracciones.

III.2.1.1 LAS TAREAS PLANTEADAS

Las tareas más recurrentes en los trabajos de los investigadores citados consisten en determinar un valor faltante, como la que hemos mostrado. Por ejemplo:

En el estudio realizado por Balbuena, C. Espinosa, H. Espinosa, Fregona y Saíz (1984), los alumnos debían completar tablas como las siguientes:

Pasteles	3	6	12	15			
Niños	4	8			1	2	

Streefland (1993), planteó problemas que consistían en distribuir, en un número diferente de mesas, un determinado número de niños y de pizzas que se iban a repartir, de tal manera que a todos los niños les tocará la misma cantidad de pizza. Por ejemplo:

> *En un restaurante están sentados alrededor de una mesa 24 niños y sobre la mesa hay 18 pizzas que se va a distribuir equitativamente entre todos los niños*[48]*.*

El esquema con el que Streefland presentó el problema es el siguiente:

El círculo representa a la mesa. El número que está dentro del círculo representa el total de pizzas a repartir y el número que está fuera del círculo representa a los niños que están alrededor de la mesa entre los que se va a hacer el reparto de las pizzas.

Dado que en un restaurante se puede cambiar la distribución de las mesas, es posible también distribuir el número de niños y de pizzas. La condición es que esta distribución sea proporcional para conservar la repartición equitativa de las pizzas entre todos los comensales. Por ejemplo:

[48] Martínez (2001) utilizó este tipo de problemas, con algunas modificaciones, con el propósito de explorar el uso de los números naturales al resolverlos.

El problema puede ampliarse si se condiciona la distribución de los comensales. Por ejemplo, distribuyendo las pizzas y los niños en 6 o 4 mesas los diagramas quedan como sigue:

En el trabajo de Block (1987), encontramos tres tipos de situaciones. Por ejemplo, en la primera fase de la investigación sobre la enseñanza de las fracciones, planteó la siguiente situación que formaba parte de la secuencia diseñada:

Entregó a los alumnos una tabla con la siguiente información

Equipo 1	2 pasteles entre 3 niños
Equipo 2	2 pasteles entre 4 niños
Equipo 3	1 pasteles entre 3 niños
Equipo 4	3 pasteles entre 2 niños
Equipo 5	1 pasteles entre 2 niños
Equipo 6	3 pasteles entre 6 niños
Equipo 7	2 pasteles entre 6 niños
Equipo 8	6 pasteles entre 4 niños

Antes de que realizaran los repartos, el maestro les planteaba dos problemas diferentes:

- primero debían anticipar si, al hacer cada reparto, le tocaría a cada niño un pastel entero, más de un pastel o menos de un pastel y,
- después, se les pedía que compararan los datos de dos repartos para anticipar a cuáles niños les tocaría más pastel y a cuáles les tocaría la misma cantidad.

Al final, para verificar sus anticipaciones los alumnos realizaban los repartos.

Block (2001), en su trabajo sobre la noción de razón, estudió la manera en la que los alumnos resolvían (entre otros problemas que no conciernen al reparto) otros dos tipos de problemas: repartos simplificables y comparación de repartos.

a) *REPARTOS SIMPLIFICABLES*

Con respecto a este problema Block observó que cuando los datos de los repartos no son primos entre sí (es decir, son simplificables), como en '*6 pasteles entre 4 niños'*, los alumnos de cuarto a sexto de primaria, en el proceso de repartir con apoyo gráfico, lograron identificar la equivalencia de dicho reparto con '*3 pasteles entre 2 niños'* lo que les permitió simplificar la tarea: haciendo dos repartos de 3 pasteles entre 2 niños (esta situación es semejante a la que estudia Streefland (1993).

b) *COMPARACIÓN DE REPARTOS*

Block estudió las resoluciones de alumnos de 4° a 6° grados de primaria frente a problemas de comparación de repartos, como lo siguientes:

En la mesa **A** se repartió *1 pastel entre 3 niños*, y en la mesa **B** se repartieron *2 pasteles entre 7 niños*. ¿En cual de las dos mesas le toca más pastel a cada niño?

Comenta que varios niños lograron resolver el problema trabajando en el nivel de las razones: *si en la mesa **A** hubiera 2 pasteles y 6 niños les tocaría lo mismo, y como en la mesa **B** hay 7 niños, a éstos les toca menos.*

Señala también que los alumnos que optaron por calcular los valores unitarios (las fracciones de pastel por niño) casi nunca tuvieron éxito debido a su bajo dominio de estos números.

Esta familia de problemas, destaca Block, son interesantes porque permiten a los alumnos extender el uso de las herramientas adquiridas con los números naturales, para explorar relaciones a las que subyacen medidas no enteras. Con ello, al mismo tiempo que los alumnos desarrollan un trabajo que implica relaciones de proporcionalidad, crean un antecedente para la comprensión de las medidas fraccionarias, y de sus relaciones, sobre todo el orden y la equivalencia. De manera indirecta, encontramos este mismo punto de vista en Behr, Harel, Post y Lesh (1992:316):

> ”*Fundamentalmente, la cuestión de determinar si dos números racionales son equivalentes o de saber cuál es menor, es una cuestión de invarianza o de variación de una relación multiplicativa".*

III. 2.1.2 COMENTARIOS

Como vemos, se hace presente el campo conceptual de las estructuras multiplicativas señalado por Vergnaud. Cualquier situación que implica a las fracciones, por específica que sea, permite encontrar vínculos con otros conceptos de este campo, y con otros significados de las fracciones, en este caso, con la noción de razón.

Esta posibilidad, trabajar las situaciones de reparto en el nivel de razones, es decir de relaciones entre parejas de cantidades enteras, parece permitir un enriquecimiento de la noción de equivalencia (de razones) a la vez que ofrece un contexto más para el estudio de relaciones de proporcionalidad.

Por otra parte, cabe señalar, que no siempre los investigadores dejan suficientemente clara la diferencia entre dos niveles de estudio: el de las razones que subyacen a la medida fraccionaria y, el de la medida fraccionaria explícita. En particular, muchas veces no queda claro cómo pueden vincularse estos dos niveles de trabajo, cómo pueden pasar los alumnos de la relación ‘*3 pasteles entre 4*’, da lo mismo que ‘*6 pasteles entre 8*’ a la relación "$\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$", como si la vinculación se pudiera dar espontáneamente.

III.2.2 DE LA NOCIÓN DE RAZÓN A LA DE FRACCIÓN COMO COCIENTE DE DOS ENTEROS. ESTUDIO EXPERIMENTAL DE D. BLOCK

Un reparto se puede realizar físicamente sin que sea necesario cuantificar la medida del pedazo resultante. La obtención de la medida requiere de una pregunta adicional: *¿qué fracción de unidad* (de pastel, de pizza, etc.) *le toca a cada quién?*

Una característica de los estudios que se realizan en el marco de la Teoría de las Situaciones Didácticas (ver Anexo 1), es la búsqueda de situaciones que hagan necesario la puesta en juego del conocimiento en cuestión, de manera que éste se construya como respuesta a una necesidad de la misma situación, y no a una demanda del maestro.

Para cumplir con esta condición, Block (1987) plantea una secuencia de situaciones a un grupo de tercer grado y uno de cuarto, cuyo propósito es que los alumnos se vean en la necesidad de expresar la medida del pedazo resultante de un reparto, en función de la unidad.

Frente a una situación que exige medir "la parte" con la unidad, Block buscó que los alumnos establecieran relaciones de conmensuración entre la parte y la unidad, relaciones de las que se desprenden razones que permiten dar cuenta de la medida.

La secuencia de situaciones consta de tres fases. En la primera fase, los alumnos realizan, en el nivel concreto, repartos de "pasteles" entre niños, como los que ya se han comentado en el apartado III.1.2.1.

En la segunda fase de la investigación de Block (1987), se plantearon variantes de un problema de reparto cuyo propósito era que los alumnos establecieran la relación de equivalencia entre el total de unidades repartidas y el total de porciones, por ejemplo, *'3 barras enteras es igual a 4 porciones'.*

Finalmente, en la tercera fase, se planteó una situación de medición con la expectativa de que los alumnos utilizaran la relación anterior, relación de conmensuración entre enteros y porciones, como recurso para dar cuenta del tamaño de las porciones, usando los enteros como unidad. A continuación mostramos brevemente las situaciones y los resultados de las dos últimas fases.

III.2.2.1 SEGUNDA FASE: VARIANTES DEL REPARTO PARA ESTABLECER LA RELACIÓN "TOTAL DE ENTEROS = TOTAL DE PORCIONES"

Los propósitos de las situaciones fueron:

- Que los alumnos hicieran explícita la relación *n* enteros = *m* pedazos y la utilizaran, al resolver problemas.

- Que asociaran paulatinamente los datos del reparto (*n, m*) con el tamaño del pedazo.

- Facilitar la puesta en juego de la conmensuración entre enteros y pedazos como estrategia de solución de los problemas que se aplicarían en la tercera fase.

En la siguiente página se presentan los problemas. La diferencia entre los dos primeros problemas radica en que en un caso los alumnos deben seleccionar el chocolate entero entre varios posibles, mientras que el segundo, más complejo, deben construirlo. Los tres problemas favorecieron que los alumnos consideraran la relación de conmensuración "total de partes = total de enteros".

FRENTE AL PROBLEMA: "SELECCIONAR EL TAMAÑO DE LOS CHOCOLATES QUE SE REPARTIERON"

Sólo algunos alumnos de tercero no lograron resolver este problema, los demás tomaron en cuenta que el total de pedazos debía ser igual al total de enteros repartidos. Por lo tanto, unieron (alineados) tantos 'pedazos' como niños habían participado en el reparto y seleccionaron el entero que, al iterarlo un cierto número de veces, coincidiera con los 'pedazos' alineados.

FRENTE AL PROBLEMA "CONSTRUIR EL CHOCOLATE ENTERO"

Un poco más de la mitad del grupo de 4° grado pudo realizar la acción inversa del reparto, es decir: los alumnos se dieron cuenta que el 'pedazo' es el producto de una transformación de partición de los chocolates enteros, por lo tanto unieron los 'pedazos', reprodujeron la longitud alcanzada por estos y dividieron esta longitud entre el número de chocolates que se repartieron. Este procedimiento se ilustra a continuación con el problema que se presenta en la página 132.

Segunda fase Problemas derivados del reparto				
Número de chocolates que se repartieron.	Tamaño de los Chocolates que se repartieron	Número de niños entre los que se hizo el reparto	Tamaño de la parte que le tocó a cada niño	Problema
Se conoce	No se conoce pero cada equipo cuenta con tres ejemplares posibles, de diferente tamaño	Se conoce	Se conoce. Cada equipo cuenta con varios ejemplares de la porción por niño	1.Seleccionar, entre tres ejemplares, el tamaño de los chocolates que se repartieron
Se conoce	No se conoce	Se conoce	Se conoce. Cada equipo cuenta con varios ejemplares de la porción por niño	**2.** Construir un chocolate entero
No se conoce	Se conoce Cada equipo cuenta con varios ejemplares	No se conoce	Se conoce Cada equipo cuenta con varios ejemplares	**3.** Averiguar cuántos chocolates se repartieron y entre cuántos niños se hizo el reparto
Los ‘chocolates’ (unidades) y los ‘pedazos’ estaban representados por tiras de cartón del mismo ancho pero de diferente longitud. El material utilizado para elaborar los ‘chocolates enteros’ y los ‘pedazos de chocolate’ era de cartón grueso y rígido por lo que los alumnos no podían doblarlo para resolver los problemas. La longitud de los ‘pedazos’ era a veces más grande y a veces más chica que los ‘chocolates’ repartidos. Cada equipo tenía una tira larga de papel con la que debían construir la longitud de los chocolates enteros.				

Se repartieron 4 chocolates entre 5 niños. A cada niño le tocó un pedazo como éste:

¿De qué tamaño eran los chocolates?

Como se puede observar, al efectuar estas acciones los alumnos, de manera implícita, están efectuando dos operaciones: primero, multiplican la longitud del pedazo por el número de niños entre los que se hizo el reparto y después dividen esa longitud entre el número de chocolates.

Block señala que la mayoría de los alumnos de tercer grado no logró resolver estos problemas. Tendieron a efectuar sólo una de las dos operaciones (por ejemplo, iterar el pedazo tantas veces como niños había, pero no dividieron esa longitud total). Destaca que estos alumnos manifestaron dificultades incluso para resolver los problemas de reparto directo, planteados en la primera fase de la experimentación.

Con respecto a los alumnos de 4° grado, reporta que no todos lograron establecer la relación de conmensuración. Algunos intentaron encontrar la medida del pedazo y, a partir de ésta, reconstruir el entero, pero se toparon con dificultades. A continuación se muestra un ejemplo.

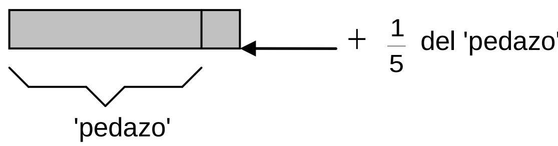
Se repartieron 4 chocolates entre 5 niños. A cada niño le tocó un pedazo como éste:

¿De qué tamaño eran los chocolates?

Los alumnos partieron de una representación gráfica del reparto para determinar la medida del pedazo, dibujando 'chocolates de cualquier longitud:

Determinaron que a cada niño le tocó $\frac{4}{5}$ de chocolate y concluyeron que al pedazo que le tocó a cada niño le falta $\frac{1}{5}$ de chocolate pata tener un chocolate entero. Hasta aquí el procedimiento es correcto (y lúcido).

El error fue el siguiente: dividieron uno de los 'pedazos' en 5 partes iguales (en vez de dividirlo en 4) y, agregaron una de esas partes a otro 'pedazo'.



*E*L TERCER PROBLEMA: *“A*VERIGUAR CUÁNTOS CHOCOLATES SE REPARTIERON Y ENTRE CUÁNTOS NIÑOS SE HIZO EL REPARTO*”*

En este problema los alumnos debían determinar los datos del reparto a partir del conocimiento del tamaño del pedazo y del chocolate entero. Este problema fue resuelto por la mayoría de los alumnos de cuarto grado mediante el procedimiento de conmensuración. Algunos alumnos encontraron que el problema admite varias respuestas correctas posibles.

Algunas de estas variantes de los problemas de reparto fueron estudiadas nuevamente por De León H. (1996) en un trabajo de investigación de tipo clínico, realizado con 36 alumnos de 1° a 6° grado de primaria y reportado por De León y Fuenlabrada, (1996).

Entre los resultados de esta investigación, De León y Fuenlabrada encontraron indicios claros de obstáculos ontológicos, propios de los alumnos de estas edades. Señalan, por ejemplo, que en las situaciones: *seleccionar entre varios pedazos, el que le había tocado al repartirse un chocolate entre 3 niños (*$\frac{1}{3}$*) o tres chocolates entre 4 niños (*$\frac{3}{4}$*),* conociendo el tamaño del chocolate y los datos del reparto los niños procedieron de la siguiente manera:

a) Los niños de primer grado no lograron resolver ninguno de estos dos problemas porque en ese momento todavía no habían construido la relación parte todo. Transformaron el problema, repartiendo los pedazos que tenían entre los muñecos.

b) Algunos niños de segundo grado lograron resolver el primer problema (1 chocolate entre 3), midiendo el chocolate con cada pedazo hasta encontrar el pedazo que cabe tres veces en el chocolate entero. En el segundo problema *($\frac{3}{4}$)* estos alumnos no tienen éxito, porque no encuentran ningún pedazo que quepa cuatro veces en un chocolate.

En otros casos, señalan que la relación parte todo aparece de manera más clara ya que para resolver el primer y el segundo problema, ponen en juego dicha relación *en un procedimiento que apela a la conmensuración,* con las siguientes diferencias:

c) En el problema ($\frac{3}{4}$), algunos alumnos de 2º y 3er grado tratan de buscar el empate entre varios pedazos y varios enteros, pero *no anticipan* una relación adecuada entre el número de pedazos y el número de chocolates. No tienen éxito.

d) Algunos alumnos de 4º, 5º y 6º grado, aunque no anticipan dicha relación, por ensayo y error encuentran el pedazo correspondiente mediante la conmensuración.

e) Sólo dos niños, uno de 4º grado y otro de 5º, logran resolver el problema anticipando la relación 3 chocolates, 4 pedazos y la verifican mediante la conmensuración.

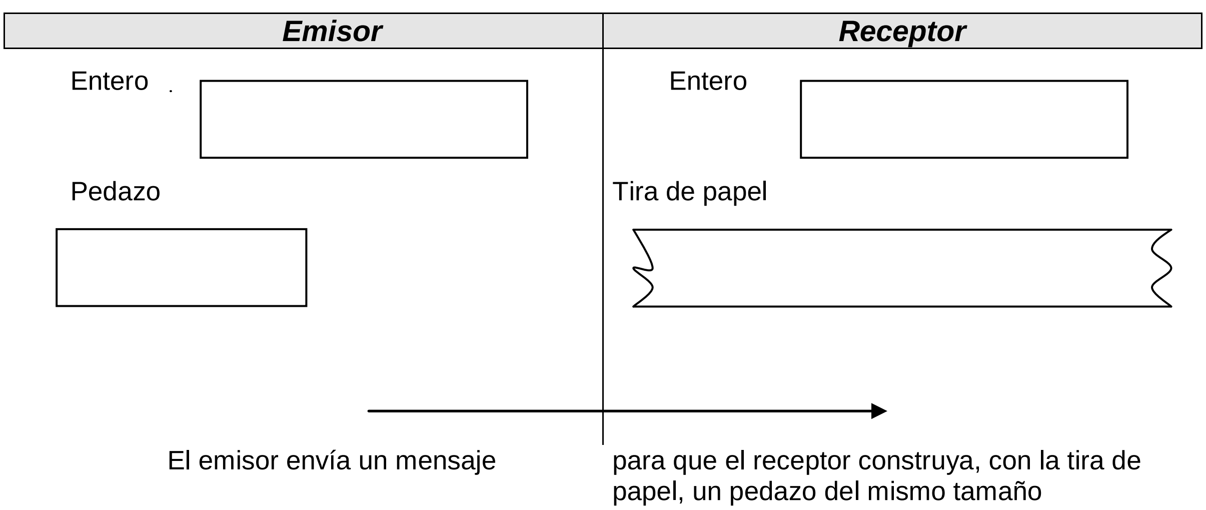
Concluyen relacionando las actuaciones de los niños descritas en (a) con obstáculos relacionados con el desarrollo conceptual de los alumnos (obstáculos ontológicos). El fracaso de la estrategia descrita en b) y c) para resolver el problema ($\frac{3}{4}$), los relacionan con obstáculos epistemológicos originados en la didáctica, es decir, por la tendencia escolar de trabajar sólo con fracciones unitarias mediante el fraccionamiento de una unidad.

La dificultad de anticipar la relación de igualdad entre los 3 chocolates y los 4 pedazos (d), la relacionan con obstáculos didácticos, es decir *por una ausencia del trabajo didáctico correspondiente.*

III.2.2.2 TERCERA FASE: DE LA RELACIÓN DE CONMENSURACIÓN A LA FRACCIÓN COMO COCIENTE DE DOS ENTEROS

En esta fase de la secuencia, Block (1987) utilizó una situación de comunicación como situación fundamental, que guarda semejanzas importantes con la situación "El espesor de las hojas de papel" de Brousseau[49]. En este caso, la medición de longitudes con unidades de medida arbitrarias y la comunicación de dichas mediciones fue la tarea central. A continuación se describe en qué consistió el problema:

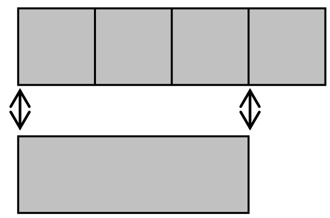
Se organiza el grupo en parejas de equipos 'emisor-receptor'. El emisor tiene varios 'chocolates enteros' (tiras de cartón de determinada longitud) y varios 'pedazos' iguales de esos chocolates (también tiras de cartón, con el mismo ancho que las anteriores). La longitud de estos pedazos es igual a una fracción determinada del entero. El receptor sólo tiene ejemplares de los chocolates enteros y una tira larga de papel para recortar, del mismo ancho que los chocolates. Los emisores deben enviar un mensaje a los receptores, para que éstos últimos construyan un pedazo del mismo tamaño que el que tienen los emisores (la magnitud que está en juego es la longitud). El mensaje debe poderse decir por teléfono es decir, no se pueden incluir dibujos. Además, se excluye el uso de la regla graduada.



[49] Esta actividad se describió en el Capítulo II, apartado II.4

Block señala que en este tipo de problemas se pone en juego el uso de la fracción para determinar la medida del pedazo con respecto al entero repartido y destaca, entre otros, dos procedimientos con los que se puede resolver:

Fraccionamiento del entero. Procedimiento que permite buscar qué fracción del entero es igual al pedazo.



El pedazo = tres cuartos del entero

Conmensuración del entero y del pedazo. Procedimiento que consiste en buscar cuántos pedazos y cuántos enteros alineados, coinciden en longitud.

4 pedazos = 3 enteros

Señala que a este último procedimiento subyace, en primer lugar, la idea razón (4 pedazos igual a 3 unidades) y después, al considerar la medida de un solo pedazo, la de cociente, pues un pedazo mide 3 enteros divididos entre 4, o, dicho de otra forma, un pedazo tiene la medida que repetida cuatro veces es igual a tres unidades.

Al plantear la situación fundamental de medición en la tercera fase de la experimentación, la pregunta de Block era: ¿Podrán los alumnos usar la relación de conmensuración cuando se trate de comunicar la medida del pedazo? ¿Las actividades de la segunda fase podrían contribuir a ello?

Efectivamente, la mayor parte de los equipos recurrió a la relación de conmensuración para dar cuenta del tamaño del pedazo.

Los mensajes elaborados por los alumnos al principio fueron extensos por lo que se incorporó una condición en su elaboración. *“Ganan los equipos que elaboren el mensaje más corto”.* Al término de la experiencia se obtuvieron los siguientes resultados:

- Los alumnos de cuarto grado lograron construir un lenguaje de parejas de números (*a,b*) muy cercano al convencional, en donde “*a*” representaba el número de unidades repartidas y “*b*” el número de pedazos.

- Poco a poco reconocieron a la pareja “*a,b*” como expresión del tamaño de un 'pedazo', producto de un reparto.

- Pudieron encontrar y justificar parejas de números que arrojan como resultado ‘pedazos’ del mismo tamaño y comparar medidas expresadas con estas parejas de números[50].

Notemos que en esta experiencia, lo que los alumnos generan de entrada son razones. Hay todavía un proceso en el que los alumnos empezarían a concebir estas relaciones como nuevos números, como medidas.

Pese a los resultados positivos de esta experiencia, el mismo investigador señala limitaciones importantes de la misma:

a) La construcción de las fracciones a partir de la relación de conmensuración es demasiado poco común en el ámbito de la enseñanza como para que tenga posibilidades de introducirse como propuesta general.

b) La secuencia presenta limitaciones intrínsecas: el recurso a la conmensuración se vio inducido por las situaciones previas (fase 2). En otros documentos {(Block y Fuenlabrada (1988) y Balbuena (1988)}, los autores comentan que, unos meses después, se volvió a plantear esta situación al mismo grupo y que fueron muy pocos niños quienes recurrieron a la conmensuración. La mayoría intentó fraccionar la unidad[51].

---

[50] En un estudio posterior (Balbuena, 1988), realizado con el mismo grupo de alumnos, ya en 5° año, los alumnos llegaron incluso a sumar "fracciones" con diferente denominador.

[51] A diferencia de la situación del espesor de las hojas de papel, diseñada por N y G Brousseau (1987), en la situación fundamental planteada por Block (1987), la conmensuración no es un procedimiento que utilicen los alumnos de manera espontánea.

Sigue pendiente el estudio de la vinculación de la razones que se desprenden de una situación de reparto como las que hemos visto (y de otras situaciones), con la noción de fracción cociente y, a su vez, con la noción típica de fracción “quebrado” (fracción como partes de unidad). Más adelante, Solares (1999) vuelve sobre este punto, desde otro ángulo. Comentaremos su estudio en el apartado III.3.3.

Las situaciones de la fase 2, que Block consideró como preliminares para la fase 3, probablemente son las que resultan más viables para enriquecer el acervo de situaciones de reparto de la escuela primaria, con un objetivo preciso: ayudar a concebir la relación de igualdad entre el todo y las partes.

III.3 LA CUANTIFICACIÓN DE LOS RESULTADOS DEL REPARTO MEDIANTE FRACCIONES

Una parte importante de los estudios sobre las fracciones en el contexto del reparto abordan el problema de la cuantificación del resultado mediante una fracción. En estos estudios el motivo de la cuantificación, es decir, el para qué medir el pedazo resultante con la unidad, no constituye, como lo intentó Block en su trabajo, una exigencia de la situación misma, sino una demanda explícita del investigador o del maestro mediante preguntas como: *¿cuánto le toca a cada quién?*, o más explícito *¿qué fracción de pastel le toca a cada quién?*.

Por otra parte, la fracción con la que se cuantifica el resultado de los repartos es la fracción típica concebida como partes de unidad, o como suma de fracciones unitarias (el “quebrado”). No es directamente, por lo tanto, la fracción concebida como cociente de dos enteros la que está en juego. En el apartado III.3.3, precisaremos este punto.

Presentaremos primero un estudio en este ámbito de Streefland (1993), quien fue de los primeros investigadores (si no es que el primero) que, desde la perspectiva de las “matemáticas realistas” de filiación fenomenológica, mostró el potencial didáctico de las situaciones de reparto para estudiar fracciones.

Enseguida, presentaremos otras investigaciones que han estudiado explícitamente el efecto de determinadas variables de la situación de reparto sobre los procedimientos de los alumnos.

III.3.1 LOS ESTUDIOS DE LEEN STREEFLAND

A continuación presentaré algunos resultados de la primera etapa de un proyecto de investigación experimental realizado por Streefland (1984, 1993). Esta experimentación se llevó con un grupo de 16 alumnos de cuarto grado (9-10 años de edad)[52], en una escuela de estimulación, inmersa en un medio poco privilegiado. El objetivo era documentar el proceso de aprendizaje individual de los alumnos sobre las fracciones, durante un periodo de dos años. Los principios básicos del marco teórico en el que se enmarcó dicho proyecto eran los siguientes: (Streefland, 1984:144-145)

- Que los propios alumnos construyeran conceptos operacionales de las fracciones como una realidad matemática que posteriormente sería utilizado.
- Propiciar que construyeran el concepto de fracción a partir de situaciones ‘realistas’ que permitieran generarlas.
- Respetar y explotar las ideas previas de los niños acerca de las fracciones simples que conocieran, así como sus relaciones.
- Favorecer el desarrollo de esas ideas construidas previamente, empezando por sus conocimientos informales y favorecer sus propias estrategias espontáneas para que el aprendizaje del tema fuera útil.
- Favorecer la construcción de un lenguaje fraccionario, reglas y procedimientos para operar con fracciones así como la construcción de un lenguaje para describir esas reglas y esos procedimientos (proceso de matematización).
- Propiciar la construcción de modelos y esquemas visuales como herramientas organizadoras de los procesos de matematización.
- Propiciar que los alumnos produjeran nuevos problemas y ejercicios a partir de los problemas dados.

La mecánica de las clases se llevó de la siguiente manera: antes de que los alumnos intentaran resolver el problema, el experimentador solicitaba que estimaran el resultado

[52] Es probable que estos alumnos tuvieran ciertos conocimientos acerca de las fracciones dado que estaban en 4º grado de primaria y expresan sus resultados con los nombres convencionales de las fracciones.

expresándolo oralmente. Después, los alumnos se hacían cargo de realizar el reparto apoyándose en representaciones gráficas. Posteriormente, se les solicitaba que describieran por escrito lo que le había tocado a cada niño. En este último momento los alumnos usaban sus conocimientos escolares o extra-escolares acerca de las fracciones para expresar sus resultados.

En la siguiente tabla se muestran algunos ejemplos de los problemas que formaron parte de la secuencia experimental así como los procedimientos utilizados por los alumnos y la manera en la que expresaron sus resultados. (Streefland, 1984:146-147).

Situaciones	***Procedimientos observados***	***Descripciones dadas por los alumnos y representación simbólica de las descripciones***
"Dividir 3 panqués entre 4 niños"	Dividiendo panqué por panqué.	- *Un cuarto y un cuarto y un cuarto* - *Tres veces un cuarto* - *Tres cuartos* $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$ $3\times\frac{1}{4}$ *o* $\frac{3}{4}$
	Distribuyen dos panqués divididos en mitades y uno en cuartos	- *Una mitad y un cuarto.* - *Una mitad y una mitad de una mitad.* - *Cada uno se lleva ½ panqué y después ¼ más;* $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$ $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}$ $\frac{3}{4}$
	Dividen cada panqué en dos partes. Una de ¾ y otra de ¼	- *Tres cuartos.* - *Uno entero menos un cuarto.* - *Un cuarto y un cuarto y un cuarto.* - *Tres veces un cuarto.* $\frac{3}{4}$ $1-\frac{1}{4}$ $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$ $3\times\frac{1}{4}$
	Dividen sucesivamente los tres panqués tomando en cuenta el resultado previamente conocido	- *Tres cuartos.* - *Uno entero menos un cuarto* - *Un cuarto y una mitad.* - *Una mitad y un cuarto* $\frac{3}{4}$ $1-\frac{1}{4}$ $\frac{1}{4}+\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$

En relación con este tipo de problemas destaca que al resolverlos, además de propiciar el establecimiento de la relación parte-todo, los alumnos tienen la posibilidad de involucrar reglas algorítmicas informales en las que a veces las fracciones tienen la función de un operador, por ejemplo: *Una mitad y una mitad de una mitad* o bien $\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\right)$. Con las diferentes formas de expresar el resultado de este reparto se ilustran los procesos informales de subdivisión.

a) $\frac{3}{4}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$ b) $\frac{3}{4}=3\times\frac{1}{4}$ c) $\frac{3}{4}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$

d) $\frac{3}{4}=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}$ e) $\frac{3}{4}=1-\frac{1}{4}$

Streefland en la obra citada destaca que los dibujos que realizan los alumnos para resolver el problema, son un referente concreto, en el que pueden apoyarse para asegurar simbólica y mentalmente que $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$ o $\frac{2}{4}$ son diferentes expresiones de una misma cantidad. Sin embargo, cuando se les pidió que intentaran expresar de una manera más breve lo que le había tocado a cada niño surgieron los errores por *N-distractores,* es decir, los alumnos aplicaron las propiedades de los números enteros y de sus operaciones sumando o restando por separado los numeradores y denominadores de las fracciones. Las siguientes operaciones fueron resueltas por Mike, uno de los alumnos que participaron en este proyecto, en donde se muestran algunos errores de este tipo.

$\frac{2}{8}+\frac{2}{8}=\frac{4}{16}$ $\frac{1}{4}-\frac{1}{2}=\frac{0}{2}$ $\frac{2}{8}-\frac{2}{8}=\frac{0}{0}$ $\frac{1}{2}+\frac{2}{8}+\frac{1}{4}=\frac{4}{14}$

Streefland Señala que en un segundo intento, la mayoría de los alumnos lograron descubrir y corregir estos errores, gracias a los referentes concretos construidos a partir de los problemas de reparto. Al respecto dice:

> *"Los alumnos que pasan por el largo periodo del proceso de aprendizaje de las fracciones necesitan encontrar repetidamente conflictos con N-distractores. El objetivo es desarrollar una actitud de identificación y descubrimiento de esos distractores de manera apropiada. A partir de la preferencia de los niños de partir sucesivamente por mitades en contextos y con relaciones numéricas como las que se han descrito... los alumnos pueden empezar a construir estas actitudes desde un principio.* (Streefland, 1984:150).

Posteriormente se planteó el siguiente problema:

Situaciones	***Procedimientos observados y resultados dados por los alumnos***
"6 panqués entre 8 niños"	1. Franz, uno de los alumnos que al parecer tenía mayores dificultades de aprendizaje dibuja lo siguiente: *“Esto fue lo mismo que 3 panqués entre 4 niños. Sólo que ahora es el doble”*.
	2. Margarita al parecer representó gráficamente los 6 panqués, dividió cada uno en 8 partes y utilizó los números 1, 2, ..., 8, para indicar las piezas que recibiría cada persona. Después dibujó lo siguiente para expresar su resultado.
	3. María escribió: *Primero cada una se lleva una mitad y después un cuarto.*
	4. Kevin dibujó las 6 piezas de panqué y 8 platos. Distribuyó cada pieza sistemática y equitativamente en cada plato, uniendo con líneas cada una de las partes con el plato correspondiente.

Hagamos un paréntesis en esta descripción para comentar los procedimientos mostrados por Streefland. Si bien Kevin y Margarita necesitan representar gráficamente la manera en la que repartirían el pastel en la realidad, hay diferencias importantes. Kevin, indica a través de su dibujo lo que le tocaría a cada niño pero no llega a cuantificar el resultado. Margarita se apoya en la representación gráfica de los panqués *divididos en octavos* para establecer igualdades y dar un resultado gráfico equivalente a $\frac{3}{4}$. Esto hace suponer que sabe que $\frac{4}{8}$ hacen $\frac{1}{2}$ y que $\frac{2}{8}$ hacen $\frac{1}{4}$.

El caso que encontramos más interesante es el de Franz quien determina la equivalencia de los repartos (*3 panqués entre 4 niños y 6 panqués entre 8 niños*), al observar que los dos datos del segundo problema aumentaron al doble. Es decir, establece, de manera espontánea, una relación proporcional, 6 entre 8 es igual a 3 entre 4.[53]

[53] Más adelante comentaremos los estudios que han destacado la presencia de procedimientos basados en relaciones proporcionales, para resolver problemas de reparto.

Continuemos con Streefland. Para favorecer la búsqueda de equivalencias y dar así un resultado abreviado, planteó el mismo problema a través de la historia de un restaurante francés en donde, para distribuir los panqués entre los comensales, dividían de uno en uno los panqués. Este procedimiento lo utilizaron todos los alumnos para resolver el problema de los '*6 panqués entre 8 niños'*, obteniendo como resultado:

$$\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{6}{8}.$$

Cuando Streefland solicitó a los alumnos que abreviaran la descripción de su resultado, éstos establecieron diversas relaciones de equivalencia generando variadas estrategias para sumar y expresiones equivalentes del resultado. A continuación se muestra cómo realizaron los alumnos esta tarea.

Situaciones	***Procedimientos y resultados***
"6 panqués entre 8 niños"	$\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{3}{4}$ 1) $\frac{1}{8}$ 2) $\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{4}$ 3) $\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{3}{8}$ 4) $\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{2}$ 5) $\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{5}{8}$ 6) $\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{3}{4}$
	$\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{3}{4}$ 1) $\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{4}$ 2) $\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{3}{8}$ 3) $\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{2}$

Situaciones	***Procedimientos y resultados***
"6 panqués entre 8 niños"	$\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{3}{4}$ 1) $\frac{1}{8}$ 2) $\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{4}=\frac{2}{8}$ 3) $\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=\frac{3}{8}$ 4) $\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{2}{4}=\frac{4}{8}$ 5) $\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{2}{4}+\frac{1}{8}=\frac{5}{8}$ 6) $\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{3}{4}=\frac{6}{8}$

Con estos ejemplos Streefland muestra que las situaciones de reparto fueron de gran utilidad para favorecer en los alumnos el avance en su conocimiento sobre las fracciones, ya que les permitieron: construir los elementos necesarios para establecer y verificar relaciones de equivalencia, llegar a la cuantificación del resultado utilizando sus propios algoritmos, evitando así caer en errores provocados por los *N-distractores*.

Además, señala que uno de los avances importantes fue el hecho de que al menos uno de los alumnos empezó a utilizar las representaciones gráficas como modelos de la realidad ya que, en algunos casos, sustituyó por cuadrados a los esquemas circulares, con los que en general representaban las pizzas. Probablemente esta sustitución la hizo para facilitarse la subdivisión requerida y encontrar el resultado con más rapidez.

> *"... el estímulo del medio ambiente es una condición necesaria, pero a pesar de eso, yo he observado que el niño progresa mentalmente para transformar la noción requerida, y después de algún tiempo de latencia, las reproduce (esas nociones) en un estado más abstracto."* (Streefland, 1978:22).

Al igual que Piaget, Inhelder y Szeminska (1960), Streefland considera, que los niños son capaces de identificar resultados de particiones equivalentes aunque no las puedan producir por lo que recomienda ser flexibles en la demanda de la precisión geométrica, ya que los referentes concretos o gráficos deben ser un medio de razonamiento, modelos que representan el problema real. Un ejemplo que justifica esta recomendación se comentó en las páginas 115 y 116 del apartado III.1.3.1.

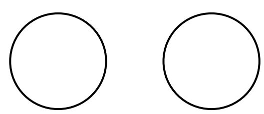
III.3.2 ESTUDIO DE VARIABLES Y ASPECTOS ESPECÍFICOS DE LA SITUACIÓN DE REPARTO: THOMAS KIEREN

Kieren, T. Doyal y Grant (1985), publicaron los resultados parciales de una investigación en la que aplicaron un test con 24 problemas de reparto directo a cientos de estudiantes del 4º al 8º grado (primaria y secundaria)[54]. Los problemas se presentaron mediante textos cortos en los que planteaba la consigna (*repartir **n** pizzas o chocolates entre **b** niños*) acompañada por diagramas (figuras geométricas que representaban las pizzas o las barras de chocolate). En algunos casos, se pedía que cuantificaran el resultado del reparto.

El interés de estos investigadores era analizar las representaciones gráficas (correctas o incorrectas), para tratar de interpretar, los conceptos subyacentes sobre las fracciones y el rumbo de su desarrollo. En el documento citado, los investigadores resumen los resultados obtenidos con los alumnos del 6º, 7º y 8º grados[55], apoyándose en cuatro problemas tipo que formaban parte del test.

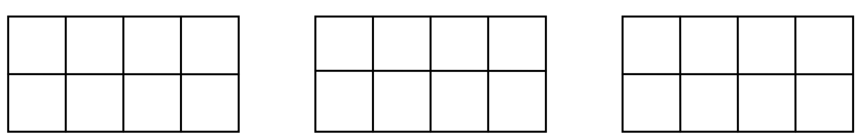
1. *Tres personas están repartiéndose estas dos pizzas medianas de peperoni en partes iguales.*

   Sombrea lo que le tocó a una persona.



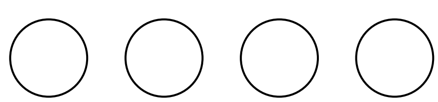
2. *Cuatro personas se reparten estas tres barras de chocolate en partes iguales.*

   a) Sombrea lo que le tocó a cada persona *b) ¿Cuánto se llevó cada persona?*



3. *Aquí hay 4 minipizzas. Muestra cómo se repartirían entre tres personas.*

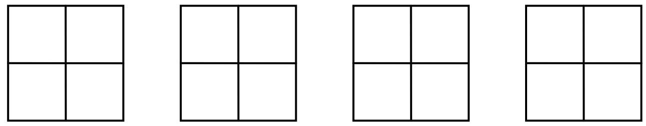
   a) Sombrea lo que le toca a una persona. b) ¿Cuánta pizza tendría esa persona?



[54] Los investigadores señalan que en un documento anterior {Kieren y Doyal, (1981)} se describieron en detalle las bases parciales con las que se elaboró el documento que se analiza en este apartado.
[55] En México equivalen, respectivamente, a 6º de primaria y a 1º y 2º de secundaria.

4. Tres personas se están repartiendo cuatro barras de chocolate del mismo tamaño.

a) Sombrea lo que le toca a cada persona *b) ¿Cuánto se lleva cada persona?*



Si bien los investigadores señalan la diferencia en el tamaño y la forma de las unidades a repartir así como las subdivisiones contenidas en los problemas 2 y 4 como elementos que aumentan la complejidad de los problemas, también se pueden observar en estos problemas otras variables no mencionadas pero que probablemente fueron consideradas y que influyen en el desempeño de los alumnos.

- El total de unidades a repartir a veces es mayor y a veces es menor que el número de personas entre las que se reparten (cociente mayor y menor que 1).
- El reparto debe realizarse entre un número del tipo 2^n o distinto de 2^n
- Las subdivisiones contenidas en algunas figuras no corresponden al número de personas entre las que se va a hacer el reparto (pero el total de subdivisiones es divisible entre el número de niños, excepto en un problema).

III.3.2.1 Resultados de la investigación con los alumnos del 6º, 7º y 8º grado

A partir de la observación y de las acciones que realizaron los alumnos antes de sombrear la parte que le corresponde a cada una de las personas entre las que se debían repartir las ‘pizzas’ y las ‘barras de chocolate’, Kieren, Doyal y Grant plantean que, al parecer, la diferencia entre los procedimientos que utilizaron radica en la manera en la que conciben la unidad que se reparte.

Por ejemplo, señalan que los alumnos del 8° grado (2º de secundaria), primero dividían el número de ‘pizzas’ o ‘barras de chocolate’ entre el número de personas a quienes se les repartía (no indican cómo hacían esta división, parece que se refiere a que lo hacían mentalmente a nivel numérico) y después representaban su resultado de manera gráfica en los diagramas.

Estas acciones y el hecho de que la mayoría de estos alumnos representaron en una sola ‘pizza’ la parte que le tocó a cada niño, es para los investigadores un indicio de que, para estos alumnos, la unidad es el total de objetos a repartir. Esta idea se ve con más claridad en los procedimientos utilizados para resolver los problemas en donde el número de objetos que se reparten es menor al número de personas entre las que se hace el reparto. Por ejemplo:

Kieren, Doyal y Grant, fundamentan su hipótesis con los procedimientos **A**, **B**, **D** y destacan, de una manera especial, el procedimiento **C** (generado por un alumno del 8° grado), como una manera gráfica de representar la unidad formada por tres 'barras de chocolate' que se divide en cuatro partes iguales. Señalan que casi todos los alumnos del 8º grado usaron el procedimiento **B** y que estos no necesitaron apoyarse en los diagramas para resolver los problemas porque contaban con estrategias de cálculo que les permitían resolverlo a nivel numérico. Podríamos agregar que probablemente estos alumnos, además de considerar al total de objetos a repartir como unidad, saben ya que ***a*** unidades entre ***b*** es igual a $\frac{a}{b}$ de unidad (fracción como cociente).

Los siguientes procedimientos fueron generados por la mayoría de los alumnos del 6° y 7° grado y algunos del 8°. Con ellos Kieren, Doyal y Grant, muestran que los alumnos que los utilizaron consideran a cada ‘pizza’ o ‘barra de chocolate’ como unidades independientes, ya que las dividen por separado entre el número de personas indicado en cada caso y toman un pedazo de cada unidad, para encontrar el resultado. Señalan también que estos alumnos todavía necesitaban apoyarse en los diagramas para resolver los problemas.

El procedimiento **F** lo utilizaron la mayoría de los alumnos del 6° y 7° grado. Los procedimiento **H** e **I** los usaron la mitad de los alumnos del 7° grado y algunos del 8°. En cuanto al último problema, los investigadores señalan que sólo uno de cada 2 alumnos del 8° grado y 1 alumno de cada 3 del 7° grado, dieron una respuesta gráfica correcta con el procedimiento **J**.

Entre los procedimientos **F** y **G**, los investigadores consideran más avanzado el **G** porque en una ‘pizza’ representaron los $\frac{2}{3}$ que le corresponden a cada persona.

Con respecto al problema *3 barras de chocolate entre 4*, Kieren, Doyal y Grant observaron que los alumnos del 6º grado tuvieron mayores dificultades para representar lo que le tocaba a cada persona, debido a las subdivisiones previas que funcionaron como *distractores*. Sin embargo, señalan que los alumnos lograron resolverlo con el procedimiento **I** (considerando el total de subdivisiones y dividiéndolo entre 4) o con alguna otra variante.

En cuanto a la manera en que cuantificaban los resultados de cada reparto, los investigadores encontraron lo siguiente en cada problema:

2 pizzas medianas entre 3 personas. No se pedía la cuantificación pero de manera espontánea algunos alumnos del 6°, 7° y 8° la representaron de la siguiente manera: $\frac{1}{3}\ y\ \frac{1}{3}$ o $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}$

4 pizzas entre 3 personas. La mayoría de los alumnos del 6° y 7° grado lo hicieron así: $1\frac{1}{3}$ *o* $\frac{4}{3}$ y algunos del 6° grado lo representaron así: $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}$

3 barras de chocolate entre 4 personas. Los estudiantes del 8º grado representaron la cuantificación de su reparto como $\frac{3}{4}$ y los del 6º y 7º grado como $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$ o $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$.

4 barras de chocolate entre 3 personas. Los estudiantes que lograron resolver este problema cuantificaron el resultado de la siguiente manera: $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\ de\ \frac{1}{4}$.

De estos resultados, Kieren, Doyal y Grant destacan dos de las dificultades ya encontradas por otros investigadores revisados anteriormente, para el caso de los repartos entre 3. A saber, la dificultad de partir en tres partes iguales y la tendencia de partir por mitades sucesivas para obtenerlas. Sin embargo, algunos alumnos lograron eludir la dificultad de partir, directamente en tercios buscando otras estrategias. Por ejemplo:

Kieren, Doyal y Grant señalan que para cuantificar el resultado, algunos de los alumnos que usaron el procedimiento **K** escribieron: $\frac{4}{6}$; con el procedimiento **L**: $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$ (aunque en realidad es $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$ *de* $\frac{1}{2}$), con el **L'**: $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{3}$ *de* $\frac{1}{4}$ y con **L''** $1\,\frac{2}{6}$

Comentan también que otros alumnos, al parecer sabían que para resolver el problema debían dividir los objetos en tres partes iguales, pero no lo lograron, probablemente por la dificultad que aún representaba para ellos dividir en tercios. Esta dificultad los llevó a dar respuestas como las siguientes:

Kieren, Doyal y Grant, consideran que los alumnos que resolvieron con el procedimiento **M**, **N** y **O**, saben que a cada persona le toca un pedazo más grande que $\frac{1}{2}$ pero más chico que $\frac{3}{4}$ y los que lo resolvieron con el procedimiento **P**, saben que a cada persona le toca una 'pizza' entera y un pedazo de 'pizza' más grande que $\frac{1}{4}$ pero más chico que $\frac{1}{2}$ por lo que sombrean en el primer caso un poco más de la mitad de 'pizza' y, en el segundo, sombrean una 'pizza' y un poco menos de la mitad de la otra.

En cuanto al problema *4 barras de chocolate entre 3 personas*, resuelto con los procedimientos **Q** y **R**, los investigadores destacan que este problema resultó más difícil que el problema *3 barras de chocolate entre 4 personas*. Si bien no lo dicen explícitamente, al parecer consideran que el aumento en la complejidad se debió a que, las subdivisiones no eran múltiplos del número de personas entre las que se debía realizar el reparto.

Estos investigadores señalan también que algunos alumnos del 8º grado sabían, a partir de sus cálculos, que a cada persona le correspondía $1\frac{1}{3}$ de chocolate (así lo representaron numéricamente), sin embargo, las respuestas gráficas son solo aproximaciones de ese resultado. Podríamos pensar que en este caso, los alumnos del 8º grado utilizaron los gráficos como lo señala Streefland (1993), como un referente o como un recurso que apoya su razonamiento.

En cuanto a la tendencia de dividir en mitades sucesivas, Kieren, Doyal y Grant señalan que ésta persiste en algunos de los alumnos del 6° y 7° grado quienes resolvieron los problemas de la siguiente manera:

Para indicar lo que le tocaba a cada persona los alumnos registraron lo siguiente:

V: $1+\frac{1}{2}$ o $1+\frac{1}{4}$, **W**: $1\frac{1}{3}$ y **Z**: $1\ y\ \frac{1}{4}\ y\ \frac{1}{4}\ de\ \frac{1}{4}\ y\ \frac{1}{4}\ de\ \frac{1}{4}\ de\ \frac{1}{4}$

Si bien con estos procedimientos los investigadores destacan la tendencia de los alumnos a partir por mitades y la dificultad de algunos alumnos del 6° y 7° grado para partir en tercios, vale la pena hacer las siguiente observaciones: si a cada una de las tres personas entre las que se hizo el reparto, se les entrega una parte de ‘pizza’ como la sombreada en los procedimientos **S**, **T** y **U**, tenemos que, aunque todas las personas tendrían la misma cantidad de pizza, hay un sobrante ¿Qué pensaban los alumnos que respondieron de esta manera acerca del sobrante?

Esta es una pregunta sin respuesta ya que en la investigación no se les cuestionó para averiguarlo. Estrictamente hablando, podría decirse que las respuestas del problema son correctas, porque en la consigna sólo se indica, de manera explícita, la igualdad en el reparto, pero no se indica que éste debe ser exhaustivo, es decir que no debe sobrar pizza.

Kieren, Doyal y Grant señalan que el hecho de haber utilizado en su investigación objetos con formas diferentes (círculos, rectángulos, cuadrados) y haber incorporado previamente subdivisiones en algunos de los objetos, aumentó el nivel de complejidad de los problemas, pero también proporcionaron información interesante. Les permitió comprobar las posibilidades que ofrecen las situaciones de reparto para desarrollar en los alumnos algunos procesos cognitivos y construir ciertas nociones importantes para el desarrollo del concepto del número racional. A saber:

- la construcción del concepto de unidad (que puede o no estar conformada por más de un objeto),
- el desarrollo de habilidades para dividir en partes iguales diferentes a las mitades,
- el desarrollo de la relación parte-todo,
- el uso de la representación numérica convencional de las fracciones para cuantificar el resultado de un reparto,
- la construcción del concepto de equivalencia entre las fracciones y,
- la posibilidad de introducir la suma de fracciones y la relación parte de parte a la que subyace una división de una fracción entre un entero.

En México y en otros países se han realizado numerosas investigaciones en las que se han obtenido resultados similares, por ejemplo, Hunting y Korbosky (1984), D. Block (1987), H. Balbuena (1988), entre otros han experimentado algunas situaciones de reparto directo, con alumnos de los diferentes grados de preescolar y primaria, encontrando las mismas dificultades para partir en tercios, la tendencia de partir por mitades sucesivas y, cuando ya manejan la representación convencional de las fracciones, la tendencia de expresar de manera aditiva los resultados del reparto.

III.3.3 ESTUDIO DE LA RELACIÓN "*a* UNIDADES ENTRE *b* = $\frac{a}{b}$ DE UNIDAD". BLOCK Y SOLARES

Block y Solares (2001) plantean que, en las situaciones clásicas de reparto como las que hemos visto anteriormente, el hecho de que el resultado de repartir ***a*** pasteles entre ***b*** sea una fracción de pastel cuyo numerador es ***a*** y cuyo denominador es ***b***, constituye, para los niños que resuelven el reparto, un hecho casual, no anticipado, que puede incluso pasar inadvertido. Los niños obtienen dicha fracción, como ya hemos visto, mediante la suma de las fracciones unitarias que se derivan de la partición que realizan, por ejemplo, en el reparto '*3 pasteles entre 4 niños*', dependiendo de cómo realicen el reparto en el nivel concreto, pueden obtener:

$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ o bien $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

Por lo tanto, agregan los autores, los niños pueden obtener el cociente "$\frac{3}{4}$ de pastel" del reparto '3 pasteles entre 4', sin que por ello podamos decir que "conciben las fracciones como cocientes" (es decir, en este caso, sin concebir $\frac{3}{4}$ como la medida que multiplicada por 4, da 3).

Para más precisión, proponen distinguir la noción de "fracción cociente *calculado*" de la noción de "fracción cociente por *definición*". La primera es la noción que está en juego cuando los niños realizan los repartos, mientras que la segunda normalmente no se introduce en la escuela primaria, sino más adelante, al estudiar álgebra.[56]

Así, los problemas de reparto contribuyen a enriquecer la noción de quebrado que los niños están en proceso de adquirir, al hacerla jugar el papel de un cociente *calculado*, pero no necesariamente llevan a construir la noción de fracción cociente por *definición.*

No obstante, los autores plantean que es posible, en la escuela primaria, ir un poco más lejos del cociente "calculado" y propiciar que los alumnos anticipen que el resultado de un reparto de ***a*** unidades entre ***b*** *debe ser* la fracción $\frac{a}{b}$ de unidad. De esta manera, se tendería un puente entre las dos concepciones de la fracción.

Con respecto a este propósito, Block y Solares (2001) plantean que la problemática puede ser distinta si las unidades que son objeto del reparto están físicamente separadas, como los pasteles, o constituyen una magnitud continua, como una longitud (variable "tipo de magnitud"). Con respecto al primer caso, los autores hacen un comentario breve, mientras que para el segundo caso, Solares (1999), presenta los resultados de un estudio experimental con un grupo de quinto grado. A continuación presentamos ambos casos.

III.3.3.1 Primer caso: La división de cantidades "discretas divisibles"

Block y Solares (2001), proponen una variante del reparto directo que les permita comprender que ***n*** unidades divididas entre ***m*** es igual a ***n*** *veces* una unidad dividida entre ***m***. La variante es simple. Se trata de realizar numerosos repartos en los que el

[56] Hemos visto dos estudios experimentales en los que se introdujeron las fracciones como cocientes "por definición": el del espesor de las hojas de papel de Brousseau, N y G. Brousseau (1987), y el de la relación de conmensuración entre enteros y pedazos de Block (1987).

divisor sea constante, por ejemplo: '*un pastel entre 4 niños',* después '*dos pasteles entre 4 niños'*, '*tres pasteles entre 4 niños',* ... etcétera. Esta variante—dicen los autores— favorece que los niños, para economizar, consideren por ejemplo que, si un pastel entre 4 es $\frac{1}{4}$, dos pasteles entre 4 es el doble, o sea $\frac{2}{4}$, etcétera.

÷ 4

	N° de pasteles	Cantidad de pastel por niño	
	1	$\frac{1}{4}$	
doble	2	$\frac{2}{4}$	doble
triple	3	$\frac{3}{4}$	triple
***n** veces*	***n***	$\frac{n}{4}$	***n** veces*

Así, ***n*** pasteles entre 3 niños es ***n*** *veces* 1 pastel entre 4 niños, es decir $\frac{n}{4}$ de pastel.

Otra forma más concreta de sugerir el mismo razonamiento consiste en pensar que los ***n*** pasteles se reparten uno por uno entre los 4 niños:

Del primer pastel, a cada niño le toca $\frac{1}{4}$ de pastel.

Del segundo pastel, a cada niño le toca otro $\frac{1}{4}$ de pastel. Van $\frac{2}{4}$

Del tercer pastel, a cada niño le toca otro $\frac{1}{4}$ de pastel. Van $\frac{3}{4}$

Si se les reparten 3 pasteles les tocarán $\frac{3}{4}$

Del *enésimo* pastel, a cada niño le toca otro cuarto de pastel. Van $\frac{n}{4}$

Señalan que este objetivo, establecer el algoritmo *a* unidades entre *b* = $\frac{a}{b}$ de unidad, no debería, sin embargo, considerarse *demasiado pronto* , porque podría evitar los procesos de partición de unidad y la riqueza de relaciones asociadas a éste.

III.3.3.2 SEGUNDO CASO: LA DIVISIÓN DE UNA MAGNITUD CONTINUA

Las situaciones que estudia Solares (1999), contienen problemas como el siguiente. *"Si un robot avanza 3 varas en cuatro pasos, ¿cuánto avanza en un paso?"*. La investigadora hace notar que la magnitud en juego es una longitud y su medida se expresa con unidades no convencionales.

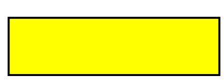
En su estudio Solares muestra que los alumnos, frente a este tipo de problemas, no parten unidad por unidad como lo hacen en los problemas de reparto donde las unidades (pasteles) están separadas, sino que se plantean la pregunta: *¿Qué medida, repartida 3 veces, es igual a 4 unidades?* Para contestarla, desarrollan una gama de procedimientos que no aparecen, o no aparecen de la misma manera, en los repartos de pasteles. A continuación se describe la situación fundamental de la secuencia propuesta por Solares, y se esbozan los procedimientos que la investigadora identificó.

Cuatro robots avanzan cierta distancia (medida con unidades arbitrarias) *con un número determinado de pasos* (cada robot siempre da los pasos del mismo tamaño).

Robot	Distancia recorrida en 5 pasos	Distancia recorrida en 1 paso
A	1 unidad	
B	2 unidades	
C	3 unidades	
D	4 unidades	

El problema para los niños consiste, a veces, en construir una longitud (tira de papel) del tamaño del paso de cada robot o en determinar la medida del paso (esto último no se pide en las primeras aplicaciones del problema). Los materiales con los que contaban los alumnos para resolver las situaciones fueron los siguientes:

- Una ficha de trabajo con una tabla como la anterior en la que se presentaban los datos del problema,
- Una tira numerada como la siguiente:
- Una tira unidad de la misma longitud que las unidades contenidas en la tira numerada



- Una tira larga de papel, sin ninguna graduación, para construir el paso

Con esta situación Solares intentaba favorecer la puesta en juego del siguiente procedimiento, por considerarlo el más económico y el más adecuado para, comprender la relación: $a \div b = \frac{a}{b}$:

Para calcular, por ejemplo, el cociente de 3 unidades entre 5 el procedimiento sería:

> *"Si un robot avanza una unidad en 5 pasos, el tamaño de su paso es fácil de determinar: $\frac{1}{5}$ de unidad. Un robot que recorre, en ese mismo número de pasos, 3 unidades, debe tener un paso tres veces mayor. Su paso mide entonces 3 veces $\frac{1}{5}$ de unidad."* (Solares 1999:¿?).

	Robot	Distancia recorrida en 5 pasos	Distancia recorrida en 1 paso	
3 :	A	1 unidad	$\frac{1}{5}$ de unidad	3 :
	B	3 unidades	$\frac{3}{5}$ de unidad	

Como se puede observar, en este procedimiento subyace una de las propiedades de las situaciones de proporcionalidad directa, es decir, se conservan las razones internas entre cada pareja de números. A decir de la investigadora, este procedimiento permite establecer la siguiente relación:

$$\boldsymbol{a} \text{ unidades} \div \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} \textit{ veces } (1\text{u} \div b) = \boldsymbol{a} \textit{ veces } \frac{1}{b} \text{ de unidad} = \frac{a}{b} \text{ de unidad.}$$

Solares señala que los alumnos podían verificar los resultados empíricamente (cortando la tira de papel con la medida estimada e iterarla sobre la tira numerada) o, aritméticamente (sumando o multiplicando la medida estimada).

La experimentación de Solares se llevó a cabo en 8 sesiones de clase con un grupo de 36 alumnos de 5° grado de primaria[57]. En las tres primeras sesiones, se plantearon 3 situaciones problemáticas un tanto diferentes a la fundamental, con el propósito de que los alumnos se familiarizaran con este tipo de problemas, comprendieran la consigna y las relaciones entre los datos (tamaño de un paso, número de pasos, distancia total recorrida). En la cuarta sesión se planteó la situación fundamental y, en las subsiguientes, otras situaciones similares con los siguientes propósitos:

> *"... brindar otras experiencias que permitieran a los alumnos mejorar sus procedimientos, difundir los procedimientos de resolución y propiciar su discusión, estudiar la aplicación de relaciones y procedimientos a situaciones con la misma estructura pero en diferente contexto"* (Solares, 1999).

Los resultados de la experimentación de Solares pusieron de manifiesto que los alumnos de 5º grado contaban con recursos para abordar este tipo de problemas. Entre los procedimientos iniciales que los alumnos pusieron en juego para resolver los primeros problemas, la investigadora señala los siguientes: para averiguar el tamaño del paso del robot que avanza, por ejemplo, 3 unidades con 5 pasos, algunos alumnos recurrieron al procedimiento de ensayo y error de la siguiente manera:

CORTAR UN PEDAZO DE LA TIRA LARGA DE PAPEL E ITERARLA SOBRE LA NUMERADA PARA VER SI LLEGABA O NO A LA META. De acuerdo al resultado cortaron un pedazo más grande o más chico que el anterior hasta lograr construir un pedazo que, al repetirse 5 veces cubriera las 3 unidades.

Construir una tira del tamaño de la distancia recorrida y subdividirla en 5 partes iguales.

En este procedimiento y en el anterior, para cuantificar el tamaño del 'paso', algunos de los alumnos estimaron su medida comparándolo con la tira unidad (*más de la mitad, menos de la mitad)* o, doblando la tira unidad en mitades sucesivas y

[57] La escuela primaria es de nivel socio económico heterogéneo y se caracteriza por un buen nivel académico.

comparándola con el 'paso' obtenido, hasta aproximar la medida del 'paso' en octavos.

SIN UTILIZAR EL MATERIAL ESTIMABAN UNA FRACCIÓN DE UNIDAD. Por ejemplo, para averiguar el tamaño del 'paso' del robot que avanza 9 unidades con 7 pasos, la mayoría de los alumnos probaron casi siempre con fracciones unitarias ($\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, etcétera), las sumaron 7 veces y, si se pasaban de la meta o si les faltaba para llegar a ella, buscaban otra fracción. Otros, alumnos seguramente observaron que si el 'paso' era del tamaño de la unidad, con 7 pasos recorrerían 7 unidades, por lo que de entrada consideraron que la medida del 'paso' era más grande que la unidad. En uno de los equipos, por ejemplo, probaron primero con un pedazo de tira que medía $1\frac{1}{2}$ unidad y la iteraron sobre la tira numerada, después probaron con otra tira de $1\frac{1}{4}$, después con $1\frac{1}{3}$ y luego, se enfrascaron en una discusión, en la que comparaban fracciones para buscar una fracción mayor que $\frac{1}{4}$ pero menor que $\frac{1}{3}$, que al repetirse 7 veces cubriera una distancia de 9 unidades.

Debido a que se centraron en fracciones unitarias, al parecer los alumnos concluyeron que la fracción buscada no existía.

Posteriormente, surgieron procedimientos más sistemáticos como los siguientes:

BUSCAR UNA PARTICIÓN CÓMODA DE LA UNIDAD. Los alumnos que pusieron en marcha procedimientos de este tipo, sabían que el problema se resolvía con una división. El reto para ellos era encontrar un número que, al dividirlo entre el número de 'pasos', no tuviera residuo, es decir necesitaban encontrar un número que fuera múltiplo del número de pasos que daba el robot. Algunas variantes de este procedimiento fueron las siguientes:

PARTIR UNA UNIDAD EN DÉCIMOS. En algunos casos, por ejemplo con el robot que avanzaba 2 unidades con 5 pasos, algunos alumnos multiplicaron 2 x 10 y dividieron con el algoritmo $20 \div 5$ obteniendo 0.4 como cociente que representaron como $\frac{4}{10}$. Al sumar cinco veces esta fracción obtuvieron $\frac{20}{10} = 2\ \textit{unidades}$. De esta manera encontraron que el paso de este robot medía $\frac{4}{10}$ de unidad.

PARTIR UNA UNIDAD EN EL NÚMERO DE PASOS QUE DA EL ROBOT. Uno de los equipos que había empezado a buscar, de manera implícita, un número que al dividirlo entre el número de pasos no tuviera residuo, descubre que el número de pasos indica la partición deseada. Por ejemplo, con el robot que avanza 4 unidades con cinco pasos, multiplican el número de unidades (4) por el número de pasos (5) y al resultado (20, que expresa que en 4 unidades hay 20 quintos) lo dividen entre el número de pasos (5), encontrando que la medida del paso de este robot es de ¡Cuatro quintos!. Con este procedimiento logran resolver otros problemas. Este procedimiento se difundió rápidamente entre otros alumnos.

Los autores, sin dejar de observar que el logro de estos alumnos fue muy importante, señalan que este procedimiento, si bien permite entender que ***a*** unidades entre ***b*** es igual a $\frac{a}{b}$ de unidad, no favorece la comprensión del porqué la fracción resultante tiene como numerador al dividendo y como denominador al divisor, dado que el procedimiento que siguieron los alumnos implica varias operaciones que sólo pueden explicarse algebraicamente.

$$a \div b = \frac{ab}{b} \div b = \frac{(ab \div b)}{b} = \frac{a}{b}$$

EL ALGORITMO DE LA DIVISIÓN CON COCIENTE DECIMAL. Unos cuántos alumnos intentaron dividir (con el algoritmo) el número de unidades que avanzaba el robot entre el número de pasos que dio. Mientras los alumnos trataban de resolver estos problemas con el algoritmo, Solares observó las siguientes dificultades: 1) falta de dominio del algoritmo, 2) dificultades para interpretar los decimales que aparecen en el cociente dado que estos no son ni decímetros ni centímetros porque la unidad utilizada era arbitraria, 3) al parecer lo alumnos consideraban que el resultado de la división debe ser exacto. Por ejemplo, en una hoja de trabajo de uno de los alumnos, aparecen las siguientes operaciones para resolver el problema de un robot que avanza 7 unidades con 6 pasos:

$$\begin{array}{r} 1.1 \\ 6\overline{)7} \\ 10 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcr} 1.1 & \qquad\qquad & 1.2 \\ 1.1 & & 1.2 \\ 1.1 & & 1.2 \\ 1.1 & & 1.2 \\ 1.1 & & 1.2 \\ \underline{1.1} & & \underline{1.2} \\ 6.6 & & 7.2 \end{array}$$

Solares señala que, al parecer, este alumno intentaba aproximarse al cociente exacto mediante sumas sucesivas, enfrentándose a un nuevo problema relacionado con la densidad de los números racionales ¿hay o no un número comprendido entre 1.1 y 1.2 que al sumarse 6 veces dé como resultado 7 unidades*?*

IDENTIFICAR LAS RELACIONES INTERNAS. Cómo ya se ha señalado, este procedimiento era el que Solares pretendía propiciar. Sin embargo, señala que muy pocos alumnos lograron desarrollarlo. Veamos las explicaciones que dieron algunos de los alumnos que identificaron estas relaciones para explicar el resultado que obtuvieron.

Para un robot que avanza 2 unidades en 5 pasos.

Erick: *Primero dividimos la unidad de medida en cinco partes, que es el robot A (el robot A avanza 1 unidad en 5 pasos), y después como son dos unidades (robot B), es lo doble de A.*

Para un robot que avanza 5 unidades en 7 pasos.

Maltos: *Si quisiéramos llegar a la unidad en siete pasos nada más necesitaríamos un séptimo y si quisiéramos llegar a dos unidades serían dos séptimos y así va aumentando hasta llegar al cinco y cinco séptimos y llegamos a la quinta unidad.*

INDICACIÓN DE LA MEDIDA DE UN PASO COMO FRACCIÓN UNITARIA DEL RECORRIDO TOTAL. Solares destaca que este procedimiento fue generado por uno de los equipos que, para resolver los primeros problemas, habían construido una tira tan larga como la distancia recorrida por el robot en cuestión. Para encontrar el tamaño del paso de un robot que avanza, por ejemplo, 3 unidades en 7 pasos, describieron su solución de la siguiente manera: *"Divide 3 unidades entre 7 pasos, el resultado va a ser el tamaño del paso", o bien,* $\frac{1}{7}$ *de 3 unidades"*.

Solares comenta que este procedimiento causó polémica entre los alumnos ya que el nuevo concepto de unidad que implica no era comprendido por aquellos que continuaban centrados en el fraccionamiento de cada unidad. Sin embargo, señalan que permitió que los alumnos se dieran cuenta de que el resultado obtenido con este procedimiento era equivalente al que ellos habían encontrado con procedimientos diferentes.

III.3.3.3 CONCLUSIONES DEL ESTUDIO

El análisis de los procedimientos generados por los alumnos para resolver los problemas planteados a lo largo de la experimentación, permitió a Solares concluir lo siguiente:

- El tipo de magnitud que se utiliza influye de manera determinante en la manera de abordar un problema de partición. El problema ahora no es, directamente, partir cada unidad, sino, más ampliamente, encontrar una medida que, repetida ***n** veces*, sea igual a otra medida ***m***.
- Dado que sólo unos pocos alumnos lograron identificar las relaciones internas de las razones involucradas en los problemas, no se puede afirmar que la secuencia de problemas propicie el desarrollo de este procedimiento.
- La mayoría de los alumnos establecieron la relación $\boldsymbol{a} \div \boldsymbol{b} = \frac{a}{b}$ y su recíproca, dada una fracción, que indica la medida del paso, los alumnos identificaron la medida del recorrido (numerador) y el número de pasos dados por el robot (denominador). Pero muy pocos comprendieron el por qué de esa relación. Solares destaca también que el hecho de que algunos alumnos lograron anticipar la fracción resultante de una división "no significa que se hayan apropiado del significado de la fracción como cociente pero sí permite tender un puente hacia esa concepción.
- Este tipo de problemas brinda la posibilidad de estudiar aspectos de las fracciones que normalmente no se problematizan. A saber, la densidad del orden de las fracciones y su relación con los decimales.

Así, el estudio de Solares pone de manifiesto una variable que incide de manera significativa en los problemas de partición, y que hace que la determinación del cociente (fracción) se realice poniendo en juego acciones muy distintas. En la variable que Solares estudia, el cociente asume más explícitamente el carácter de un factor faltante en una multiplicación, aunque, como se vio, en este caso resultó más difícil para los niños establecer la relación:

$$\textbf{\textit{a}} \text{ unidades entre } \textbf{\textit{b}} = \frac{a}{b} \text{ de unidad}$$

Con este trabajo se cierra la revisión de los numerosos aspectos de las situaciones de reparto que han sido objeto de estudio desde el punto de vista del aprendizaje de las fracciones. En las conclusiones haremos un comentario final sobre esta línea de trabajo.

COMENTARIO FINAL

Los diagnósticos que presentamos en el primer capítulo ponen de manifiesto, de manera empírica, la existencia de numerosas dificultades para los alumnos de la primaria y de la secundaria en la comprensión de los distintos aspectos de la noción de fracción.

La complejidad de esta noción ha sido también puesta en evidencia, de manera teórica, a partir del análisis del concepto de número racional desde el punto de vista de las formas que asume en problemas específicos. En el segundo capítulo hemos revisado los principales aportes de investigadores que han abierto vías originales de análisis en esta dirección: T. Kieren, H. Freudenthal; G. Vergnaud, N. y G. Brousseau.

Hemos encontrado cierto nivel de consenso con respecto a algunas consideraciones fundamentales:

- considerar la polisemia de la noción de fracción y, más precisamente, el hecho de que la noción de número racional se construye mediante la articulación de sus múltiples significados;

- favorecer aprendizajes en situaciones contextualizadas, con magnitudes y números concretos antes que con números abstractos;

- propiciar los procesos de adquisición del lenguaje y de las reglas de operación sobre la base de los conocimientos informales, intuitivos.

Los estudios que revisamos en este segundo capítulo aportan recursos teóricos que permiten traducir estas consideraciones generales en estudios más específicos y que apuntalan el desarrollo de propuestas didácticas. Disponemos ya de conocimientos importantes acerca de los significados que subyacen a la fracción, de los fenómenos y de las situaciones didácticas que los vehiculizan (por así decir), y de hipótesis acerca de cómo articular los distintos significados en progresiones didácticas.

Una de las situaciones problema cuyo potencial didáctico, desde preescolar hasta secundaria, ha sido destacada por la mayoría de los estudios, es la del reparto equitativo y exhaustivo. Hemos dedicado el capítulo tres a la revisión de una parte de la variedad de investigaciones realizadas.

A continuación, en calidad de síntesis y de comentario final, voy a intentar precisar algunas cuestiones que se pueden desprender de la nutrida producción de estudios sobre el reparto:

- ¿Qué aspectos de las fracciones es posible abordar mediante los problemas de reparto?
- ¿Qué otras nociones están implicadas en estos problemas?
- ¿Qué aspectos, en cambio, no pueden abordarse?

LA PARTICIÓN Y LA NOCIÓN DE PARTES EQUIVALENTES

En el nivel más concreto, el del reparto físico de cantidades discretas o continuas, sin cuantificación del resultado, los problemas de reparto propician el desarrollo de la capacidad para realizar particiones en partes equivalentes y la asignación de una parte a cada uno de los participantes en el reparto. El resultado no es igual a todas las partes, sino a la parte que le toca a cada uno, la cual debe ser equivalente a las demás.

En esta situación está implicada, en primer lugar, la noción de cantidades equivalentes. Esta noción no es trivial, como lo han demostrado los estudios piagetianos sobre la conservación. Su complejidad va a la par con la complejidad del tipo de magnitud en juego: discreta o continua, así como al interior de las cantidades continuas: longitud, superficie, masa, etcétera. La realización de problemas de reparto con una magnitud específica, requiere que los alumnos puedan identificar cuándo dos partes son equivalentes (por ejemplo, mediante el conteo, la comparación directa de longitudes y superficies), sin lo cual el problema mismo de reparto equitativo y exhaustivo carece de sentido. No obstante, no se descarta que las experiencias de reparto puedan también contribuir a ello.

Por otra parte, en relación con las cantidades continuas, las particiones entre factores distintos a 2^n tampoco son triviales para los alumnos de los primeros grados. Hay un proceso en el cual los alumnos desarrollan la capacidad de anticipar las formas de partir.

Algunos de las dificultades que deben superar son: constatar que las particiones sucesivas en 2^n no producen una partición en 3; constatar que el número de cortes es menor (en uno) que el número de partes que se desea obtener. (ver trabajos de Figueras, Dávila, Olvera y Martínez, y Kieren pp. 22-26; 84-97; 108,109, Anexo 3 y 150-153 respectivamente).

EL TAMAÑO DE LAS UNIDADES, EL NÚMERO DE LAS UNIDADES Y EL NÚMERO DE PARTES DETERMINAN UN TAMAÑO ÚNICO DE LA PARTE

Dado por ejemplo un tamaño de pastel, los datos "***n*** pasteles, ***m*** niños", determinan un tamaño único de la parte que toca a cada quién. Dicha determinación permite:

- Anticipar que los resultados de varios repartos que comparten esos datos, son equivalentes, aunque su apariencia física cambie (forma, número de cortes)

- Comunicar 'la medida' del pedazo resultante, puesto que la información '***n*** pasteles, ***m*** partes' determina su tamaño.

Hemos reportado dos tipos de estudios que apelan a esta determinación, en uno, al plantear la comparación de resultados de un reparto en el nivel concreto, sin cuantificación y, en el otro, en una situación de comunicación del tamaño del pedazo mediante los datos del reparto.

Con respecto al primer tipo de situación, vimos que la realización de un mismo reparto en el seno de varios equipos puede dar lugar a la comparación de resultados distintos en apariencia física (forma, número de cortes), pero equivalentes en tamaño, generados por las distintas formas de realizar el reparto. Hemos podido comprobar que los alumnos de segundo grado de primaria pueden ya abordar el problema en un nivel empírico, aunque pocos pueden todavía *anticipar* utilizando la relación de determinación antes dicha (ver trabajo de Dávila pp. 85-95). Esta afirmación ha sido ya constatada por otros investigadores (ver por ejemplo Olvera pp. 109-111).

En el segundo estudio, unos alumnos deben comunicar a otros la información necesaria para que los segundos construyan un pedazo del mismo tamaño que el que tienen los primeros. Ambos disponen de “enteros”. Las situaciones previas facilitaron, en 4º grado, el procedimiento de conmensuración que consiste en “empatar” pedazos con enteros para encontrar la relación “***n*** enteros = ***m*** pedazos” y utilizarla como medio para comunicar la medida del pedazo. Esta situación se utilizó con la finalidad de introducir la noción de fracción como razón primero y como cociente después (ver trabajo de Block, pp. 133-138).

No obstante, se considera que la secuencia presenta todavía dificultades y puntos débiles tales como: la construcción de las fracciones a partir de la relación de conmensuración es poco común en el proceso de enseñanza y esta estrategia no surge de manera espontánea entre los alumnos, es necesario plantear situaciones previas para inducir el uso de esta estrategia.

LA UNIÓN DE LAS PARTES ES IGUAL AL TODO

Intercambiando los papeles del dato conocido e incógnita en un reparto, pueden generarse nuevos problemas que propician y enriquecen el estudio de esta relación. Dado el pedazo y los datos del reparto (Nº de enteros, Nº de niños), los alumnos de 4º grado muestran poder reconstruir el entero, uniendo primero todos los pedazos para obtener “todo” lo que fue repartido, y después dividiendo esa unión entre el número de enteros. También, conociendo el tamaño de un entero y el de un pedazo, pudieron encontrar los datos del reparto, iterando enteros y pedazos hasta encontrar coincidencia (ver trabajo de Block, pág. 131).

EXPRESANDO MEDIDAS, DEFINIDAS COMO ‘PARTES DE UNIDAD’ O ‘QUEBRADOS’

Intentemos precisar qué significados de la fracción son los que entran en juego cuando se cuantifica el tamaño de la parte que resulta de un reparto.

La cuantificación de la parte, en los problemas típicos de reparto, se realiza mediante la suma de fracciones unitarias. La fracción que resulta tiene por lo tanto el sentido típico de un “quebrado” que expresa una medida (ver trabajo Kieren, pp. 146-152).

Notemos que en esta cuantificación (*3 barras de chocolate entre 4 personas*), por ejemplo, " a cada uno le tocan $\frac{3}{4}$ de pastel", el quebrado $\frac{3}{4}$ no es concebido ni como el cociente 3 entre 4 (aunque juega como cociente *calculado*), ni como relación de razón entre el todo y la parte, en el sentido de que la parte es al todo como 3 es a 4, o bien en el sentido de que 4 veces la parte es igual a 3 veces el todo.

En este caso, la fracción $\frac{3}{4}$ expresa, únicamente, una medida y significa 3 veces $\frac{1}{4}$, es decir, un quebrado. Esta precisión no demerita a la situación de reparto para estudiar fracciones, pretende únicamente ayudar a evitar ciertos malentendidos (como pensar que si los alumnos son capaces de resolver este tipo de problemas ya conciben a la fracción con otros significados diferentes al de quebrado), y, a la vez, sugiere la necesidad de considerar otras situaciones, que no se limiten al fraccionamiento de unidades "físicamente separadas" en las que las fracciones resultantes sólo pueden ser entendidas como la suma de fracciones unitarias.

Podemos precisar entonces ciertas ventajas y ciertas limitaciones de los problemas de reparto desde el punto de vista de la cuantificación del resultado con una fracción:

VENTAJAS:

- Dependiendo de la forma de partir, es posible obtener distintas escrituras aditivas de fracciones unitarias y estudiar su equivalencia;
- Los cocientes pueden ser mayores o menores que una unidad;
- Los problemas de cuantificación de la parte, pueden complejizarse, considerando unidades previamente subdivididas en un número de partes no múltiplo del divisor. Esta variante propicia centraciones en el numerador o en el denominador, y por lo tanto presenta una mayor exigencia para los alumnos (ver los resultados de repartir 4 barras de chocolate entre 3 personas en el trabajo de Kieren pp 146-149).

LIMITACIONES:

- Los problemas típicos de reparto imponen una restricción a la noción de fracción no unitaria: ésta solamente puede ser comprendida como suma de fracciones unitarias, no directamente como relación entre dos cantidades, o como cociente de dos cantidades.

Esta limitación no debe subestimarse en virtud de que está comprobado que los alumnos tienen dificultad para apropiarse principalmente de las fracciones no unitarias de manera funcional.

- Los problemas de reparto normalmente no hacen necesaria la cuantificación de la parte, es decir, la fracción no juega como recurso para lograr una meta que vaya más allá de la fracción misma. Las situaciones en sí mismas tampoco proporcionan una forma de saber si la fracción que se obtuvo es correcta, por lo que para validar el resultado es necesario plantear preguntas que lleven a los alumnos a buscar estrategias que les permitan saber si la fracción que se obtuvo es o no correcta.

LA NOCIÓN DE RAZÓN

Aunque las fracciones con las que se cuantifican los repartos normalmente no expresan razones ni cocientes, en ciertas variantes de los problemas de reparto es posible hacer intervenir estas nociones.

Los datos de un reparto, por ejemplo, “3 pasteles, 4 niños”, o mejor aún, “3 pasteles, 4 porciones”, pueden ser vistos como razones entre cantidades, o “cocientes indicados”. Ya vimos antes, que estas razones determinan el tamaño de la parte. En varios estudios se explora, además, la posibilidad de que los alumnos realicen anticipaciones sobre la equivalencia y el orden de las porciones resultantes, sin expresar su medida con una fracción, a partir de razonamientos sobre estas razones, por ejemplo, el pedazo que resulta de “3 pasteles entre 4 niños” es igual al pedazo que resulta de “6 pasteles entre 8 niños”, porque en el segundo hay el doble de pasteles y también hay el doble de niños.

En este marco, se trabaja con la noción de equivalencia *entre razones*. Se utilizan para ello, implícitamente, propiedades de las razones (la razón (*a,b*) es equivalente a la razón (*ka, kb*), propiedades que pueden ubicarse también en el contexto de las relaciones de proporcionalidad (la conservación de las razones internas) (ver los trabajos de Ballbuena C. y H. Espinosa, Fregona y Saíz; Balbuena, Block, Streefland, en el apartado II.2.1.1

En este punto se hace explícita la inserción de las situaciones de reparto en el campo conceptual de las estructuras multiplicativas.

Desde el punto de vista de la concepción de una secuencia amplia de situaciones, lo que aún no queda muy claro en los trabajos revisados, es la articulación de estas relaciones en el nivel de las razones con las fracciones explícitas. Por ejemplo, los alumnos pueden determinar que "*3 pasteles entre 4*" es equivalente a "*6 pasteles entre 8*". En algún momento sería deseable que pudieran inferir de ello que las fracciones $\frac{3}{4}$ de pastel y $\frac{6}{8}$ de pastel son equivalentes. De esta manera, la equivalencia de fracciones conquistaría un referente más, o para decirlo en términos de Freudenthal, tendría una fuente fenomenológica más: la equivalencia de las razones.

Sin embargo, el paso de los datos del reparto (*3 pasteles, 4 niños*) a la fracción que mide al porción resultante no es obvio. Esto parecen pasarlo por alto algunos de los estudios revisados. Hace falta aquí un trabajo específico sobre este punto.

LA NOCIÓN DE FRACCIÓN COCIENTE

Hemos visto ya que las fracciones con las que se cuantifican los repartos, si bien son cocientes *calculados* de una división, no están *definidas*, ni son concebidas como cocientes (ver el trabajo de Solares y Block, pp. 153-161).

Hemos revisado dos vías en las que se establece un vínculo más explícito entre los repartos y la noción cociente. Uno fue el camino en el que se establecen relaciones de conmensuración entre porciones y enteros como medio para comunicar la medida de las porciones (ver el trabajo de Block, pp. 129-134).

El otro camino no propone una introducción de las fracciones como cocientes, sino una forma de "acercar" las fracciones quebrado a la idea de fracción cociente. Más precisamente, propone que los alumnos logren anticipar (y comprender) que el resultado de cualquier reparto de ***a*** unidades entre ***b*** debe ser la fracción quebrado $\frac{a}{b}$ de unidad, en distintos contextos (o con distintas magnitudes).

Probablemente ésta sea la relación que permitiría transitar más fluidamente del nivel de las razones (***a*** unidades, ***b*** porciones) al nivel de las fracciones ($\frac{a}{b}$ de unidad), favoreciendo de esta manera cierta articulación de los conocimientos de quebrado, razón y cociente.

EN RESUMEN

Considerar a las situaciones de reparto dentro de la constelación amplia de los aspectos de la noción de fracción que deben estudiarse en la escuela, permitió destacar la fecundidad de estos problemas al mismo tiempo que algunas de sus limitaciones.

Podemos resumir destacando que es la fracción “quebrado”, definida como suma de fracciones unitarias, la que se propicia en mayor medida en las situaciones de reparto. De manera menos directa, pero muy factible también, puede propiciarse el estudio del componente de razón implícito en las comparaciones de repartos, y también un vínculo hacia la fracción cociente.

En un trabajo previo a la cuantificación, los problemas de reparto favorecen el estudio de nociones “primitivas” fundamentales, como el de la congruencia de cantidades y el de la partición.

No entran en juego otros aspectos de las fracciones, en particular, el significado de la fracción definida como un operador multiplicativo constante entre conjuntos de cantidades variables (función lineal)[58], y tampoco la expresión decimal de las fracciones y su uso en distintos contextos[59]. Es claro que las situaciones de reparto deben acompañarse, en la enseñanza, de otro tipo de situaciones que apunten tanto a los mismos aspectos, como a aquellos que no pueden abordarse mediante el reparto.

¿QUÉ PUEDE INFERIRSE PARA LA ENSEÑANZA DE LAS FRACCIONES EN LA ESCUELA PRIMARIA?

En México, a partir de la reforma al currículo de 1993, se introdujeron, en los programas y Libros de Texto Gratuitos de la primaria, las situaciones de reparto como uno de los contextos para el estudio de las fracciones.

Me parece que hoy en día vale la pena revisar y mejorar la jerarquización de los aspectos y situaciones que se proponen sobre el reparto a lo largo de la primaria. Sin contar las

[58] No obstante, el estudio de la multiplicación y de la división en cierto nivel sí es factible, cuando el multiplicador o el divisor son enteros. N. González (Tesis de maestría en proceso), estudia, por ejemplo, situaciones en las que la cantidad que se reparte es una fracción de unidad, es decir, estudia el problema de obtener y cuantificar “partes de partes”.

[59] En cambio, otros problemas de división como el determinar la medida que resulta de dividir una longitud en partes iguales pueden poner en juego de manera funcional los números decimales, como lo muestra el trabajo de Solares (1999).

últimas modificaciones que se hicieron en los libros de matemáticas de quinto (2000) y sexto grado (2001), los problemas de reparto tendían a consistir, de tercero a sexto, en repartos típicos, con pequeñas variantes como el tipo de objeto que se reparte, galletas, pasteles o pizzas.

La diversidad de los aspectos que pueden estudiarse mediante este tipo de situaciones, y el interés didáctico que éstos presentan, sugiere mejorar la jerarquización de situaciones. En el cuadro de la siguiente página presento un ejercicio, a modo de ejemplo, sobre este punto.

¿CUÁLES SON ALGUNOS DE LOS ASPECTOS ESTÁN PENDIENTES DE ESTUDIAR?

Me parece que en este momento hacen falta, más que otros estudios sobre los procesos de los niños en situaciones de reparto típico, el estudio de *formas de articular* distintos aspectos que gravitan en torno a las situaciones de reparto, especialmente quebrado, cociente y razón, y la *ubicación de las situaciones* de reparto, en relación a una gama amplia de situaciones para la enseñanza de las fracciones.

Por otra parte, creo que hace falta también hacer un mayor esfuerzo por delimitar qué aspectos de las fracciones se considera necesario que los alumnos aprendan en la escuela primaria, y con qué profundidad y un esfuerzo por integrar en mayor medida los resultados de las investigaciones sobre distintos aspectos de la fracción.

Puede ocurrir, lo digo solamente en calidad de sospecha, que la atención que se ha prestado a la problemática de la enseñanza de las fracciones, la cantidad de aspectos que han sido estudiados, aunado a una integración todavía insuficiente de los resultados, pueda tener un efecto de sobre valoración de este contenido en la enseñanza primaria, o si no, por lo menos de multiplicación un poco incontrolada de aspectos y situaciones.

Por ejemplo, cabe preguntarse si la reacción que se tuvo, hace veinte o treinta años, contra la enseñanza mecánica de los decimales, y de la cual surgió la propuesta del estudio de las fracciones *como fundamento* de los decimales, no ha excedido su propósito inicial al grado en que ahora el estudio de los decimales aparece apenas como un pequeño apéndice de las fracciones. En todo caso, es un hecho que las investigaciones sobre la enseñanza y el aprendizaje de los decimales no es abundante.

Aspectos relativos a las situaciones de reparto

Grado	En el nivel concreto	Cuantificación (Quebrado)	Razón	Cociente
1º y 2º	Repartos entre 2^n sin cuantificación Verificación de la igualdad de las partes, y de la exhaustividad		o	
3º y 4º	Idem. Además: Repartos entre números distintos a 2^n Comparación de productos de repartos iguales, con apariencia física distinta	Cuantificación mediante sumas de fracciones unitarias Equivalencia	Comparaciones a partir de los datos del reparto: Comparación contra el entero (¿En qué repartos el pedazo saldrá más grande que un entero?) y comparaciones entre sí, casos sencillos (3p : 4n) vs (3p : 6n)	
5º y 6º	Solamente para verificar anticipaciones	Cuantificación directa: a : b = a/b	Idem, casos más complejos Estudio de la equivalencia de razones y su traducción a fracciones Otras situaciones: Repartos “simplificables”, por ejemplo, para 4p : 6n conviene hacer 2p : 3n Reconstrucción del entero; ¿cuántos niños, cuántos pasteles había?	Establecer la relación **a** unidades entre **b** = a/b de unidad en varios contextos (Situaciones: repartos con divisor constante; divisiones de otras magnitudes)

ANEXO 1

APORTES DE LA TEORÍA DE LAS SITUACIONES DIDÁCTICAS DE GUY BROUSSEAU

Desde hace más o menos cuatro décadas Guy Brousseau ha llevado a cabo, en Francia, numerosos proyectos de investigación experimental en contextos escolares ubicados en una corriente identificada como didáctica constructivista de las matemáticas.

LA TEORÍA DE LAS SITUACIONES DIDÁCTICAS

El avance de dichas investigaciones permitió a Brousseau, desarrollar una Teoría de las situaciones didácticas cuyo propósito es *"... organizar localmente el aprendizaje de conocimientos elementales considerando su adecuación a las circunstancias y a las posibilidades del sujeto ..."* (Brousseau, 2000:18). La Teoría de situaciones didácticas es, para Brousseau, el instrumento científico que proporciona, a la didáctica de las matemáticas, conceptos y métodos de estudio permitiendo con ello una mayor comprensión de las posibilidades de mejoramiento y de regulación de la enseñanza de las matemáticas.

LA SITUACIÓN DIDÁCTICA

A diferencia de lo que en general se entiende por 'situación didáctica'[1], para Brousseau significa *"...una situación que describe el entorno didáctico del alumno, comprende todo aquello que concurre para enseñarle algo"*. Es decir, en el término 'situación didáctica

[1] Todo aquello que sirve para enseñar con o sin la intervención del maestro.

’engloba, al *alumno*, al *maestro*[2], al *saber* y al *medio* (con el que se pretende que los alumnos construyan ese saber), en el proceso de aprendizaje de las matemáticas.

En otros textos, Brousseau, interpreta a la situación didáctica *“... como un sistema de interacciones entre estos diversos subsistemas de la situación: los alumnos, el medio (y el maestro), el saber”* (Block, 2001:25).

EL MEDIO O SITUACIÓN PROBLEMÁTICA

A partir de la manera en que Brousseau interpreta a las situaciones didácticas, *el medio*, que favorece el proceso de aprendizaje de los alumnos es, en sentido restringido, la tarea específica con la que interactúa el alumno (situación). En este sentido, dicho *medio* puede ser un problema, un juego, un ejercicio o una secuencia de problemas que favorecen el desarrollo de un conocimiento.

En un sentido más amplio, Brousseau considera que *el medio* incluye también, otros elementos como son las acciones directas o indirectas del maestro y la ausencia de sus intervenciones, la consigna, las restricciones que pone para resolver la situación, los materiales que se utilizan.

De manera parecida a lo que planteó Vergnaud, (1988) en su teoría de campos conceptuales, Brousseau considera que cada concepto matemático está involucrado en un conjunto de problemas específicos y que las acciones que realizan los alumnos para resolverlos así como las conductas que manifiestan, revelan la manera en la que funcionan esos *medios*. Ahora se trata de un "medio" en el sentido amplio:

> *“Un medio efectivo reúne a familias de situaciones que ponen en juego conocimientos estructurados por relaciones lógicas, relaciones de conveniencia, de co-presencia frecuente, etc.”* (Brousseau, 2000:22).

EL MEDIO Y LAS INTERACCIONES DEL ALUMNO

La solución de un problema que implica un conocimiento específico es la tarea central a la que se enfrentan los alumnos durante el desarrollo de una situación didáctica. El tipo de interacción que establecen los alumnos depende del tipo de tarea diseñada (*medio*) y del propósito de la situación didáctica.

[2] Ya sea que el maestro intervenga o no durante el desarrollo de la situación.

> *"Hemos llamado "situación" a un modelo de interacción de un sujeto con cierto medio que determina un conocimiento dado como el recurso del que dispone el sujeto para alcanzar o conservar en este medio un estado favorable"*.
>
> (...)
>
> *"Cada una de estas interacciones se modela mediante tipos de situaciones diferentes y pone en juego repertorios de recursos diferentes".* (Brousseau, 2000:10 y 20)

Brousseau distingue tres tipos de situaciones cuya estructura coloca a los alumnos y al maestro en posiciones diferentes dado que las reglas del juego, el tipo de interacción entre los alumnos, las actividades planteadas y el repertorio de recursos que utilizan para resolverlas también son diferentes[3]:

- Situaciones de acción
- Situaciones de comunicación
- Situaciones de validación

SITUACIONES DE ACCIÓN. El objetivo es que los alumnos resuelvan un problema que puede presentarse como un juego o como una actividad, por ejemplo, repartir un listón de 5 metros de largo entre 4 o entre 3 niñas. Las experiencias y los conocimientos construidos con anterioridad sobre este tema, permiten al alumno comprender el problema y hacerse cargo de la búsqueda de estrategias de solución, que pueden ir desde el ensayo y error hasta el uso de procedimientos más formales. Los conocimientos que se construyen en estas fases pueden permanecer *implícitos.*

SITUACIONES DE COMUNICACIÓN. En general el propósito de estas actividades es que los alumnos comuniquen algo a sus compañeros de manera oral o por escrito. Para que esta comunicación tenga un sentido concreto, el maestro organiza actividades en las que los alumnos tengan la necesidad de enviar mensajes. Por ejemplo: la situación fundamental propuesta por Block (1987)[4] en la que un grupo de alumnos (emisores) tiene varios 'chocolates enteros' (tiras de cartón de determinada longitud) y varios 'pedazos' iguales de esos chocolates (tiras de cartón, con el mismo ancho que las anteriores). La longitud de estos pedazos es igual a una fracción determinada del entero. Los receptores sólo tienen ejemplares de los chocolates enteros y una tira larga de papel para recortar, con el

[3] A este tipo de situaciones Brousseau (1970), las denominaba fases del proceso de desarrollo de una situación didáctica. Sin embargo, el hecho de que actualmente las llame situaciones no significa que dentro de una sesión de clase de matemáticas puedan presentarse como fases. Es decir, un momento en el que los alumnos actúan por su cuenta realizando acciones para resolver el problema, otro en el que comuniquen a sus compañeros cómo lo resolvieron con la intención de validar o invalidar procedimientos y resultados.

[4] Ver en este documento páginas 135 a 138.

mismo ancho que los anteriores. Los emisores deben enviar un mensaje a los receptores, para que éstos últimos construyan un 'pedazo de chocolate' del mismo tamaño que el que tienen los emisores (la magnitud que está en juego es la longitud). El mensaje se debe poder decir por teléfono es decir, no se pueden incluir dibujos. Además, se excluye el uso de la regla graduada.

Este tipo de actividades tiene una gran riqueza didáctica. En el ejemplo anterior, la necesidad de comunicar a sus compañeros lo que deben hacer para reproducir el pedazo de chocolate, los obliga a buscar una estrategia que les permita comunicar lo que deben hacer para construirlo. Al final de la sesión, se analiza el trabajo de los alumnos que no tuvieron éxito en la tarea, para averiguar si el error se debió a que no entendieron el problema, a una mala interpretación del mensaje, o a la falta de claridad o de información en el mensaje. Este análisis les permite también darse cuenta de las consecuencias de los errores y de la omisión de ciertas información.

SITUACIONES DE PRUEBA O VALIDACIÓN SOCIAL. El propósito de estas actividades es que los alumnos prueben las hipótesis construidas acerca de la manera en la que puede resolverse un problema o demuestren la validez de un procedimiento específico para resolver cierto tipo de problemas. Para ello, el maestro organiza situaciones en las que los alumnos tengan la necesidad de demostrar a sus compañeros que la estrategia utilizada es correcta o incorrecta o en las que puedan probar si ese procedimiento sirve para resolver diversos problemas con la misma estructura o para probar hipótesis.

Por ejemplo, cuando los alumnos se dan cuenta de que si se duplican o triplican los datos de un reparto (número de pasteles y número de niños) el resultado que se obtiene es el mismo, el maestro puede pedir que prueben sus hipótesis realizando diferentes repartos y que busquen en qué casos no sucede lo mismo. Este último problema dará lugar a discusiones interesantes en las que probablemente lleguen a concluir que se obtienen resultados diferentes si uno de los datos del reparto se mantiene constante y el otro cambia o cuando los datos no varían proporcionalmente.

En las situaciones de comunicación y de validación se registra un proceso de hacer explícitos ciertos conocimientos. Este proceso continúa en las situaciones de institucionalización que analizaremos con detalle más adelante.

Es importante señalar que los tres tipos de situaciones señaladas por Brousseau, pueden formar parte de una secuencia de situaciones de enseñanza, susceptible de repetirse con algunas modificaciones a lo largo del proceso de adquisición de un conocimiento nuevo. Un aspecto importante a considerar es que una misma situación problemática puede presentarse primero como una situación de acción y después como una situación de comunicación o de validación.

COMPONENTES ADIDÁCTICOS Y DIDÁCTICOS DE LAS SITUACIONES

En la Teoría de las Situaciones de Brousseau se señala que el desarrollo de una situación didáctica puede descomponerse en un momento o componente *adidáctico* y en un momento o componente *didáctico,* independientemente del tipo de situación de enseñanza (acción, comunicación o validación) que se plantee (Brousseau, 2000).

Este investigador llama componente adidáctico al momento en el que el maestro deja a los alumnos la responsabilidad de resolver un problema sin que él intervenga. En este momento, los alumnos comentan de qué manera pueden resolverlo y toman decisiones por cuenta propia. Bolck (2001), señala las características que deben tener los problemas para favorecer que se dé esta relación adidáctica entre el alumno y la situación problemática:

- Que el problema implique al conocimiento nuevo como recurso óptimo de resolución.
- Que puedan generarse diferentes variantes del mismo problema a través de la modificación de ciertas variables
- Que los alumnos puedan lograr ciertas aproximaciones a la solución en las primeras variantes del problema, con los conocimientos previos que poseen.
- Que las subsecuentes variantes los obliguen a abandonar sus estrategias de solución iniciales para buscar estrategias de solución que se aproximen al conocimiento deseado.
- Que todas las variantes de la situación permitan a los alumnos verificar por sí mismos (sin ayuda del maestro) si el procedimiento que siguieron los llevó o no a la solución del problema.

> *"Una situación adidáctica normalmente está destinada a aplicarse varias veces, con el mismo grado de dificultad o con uno mayor. Las repeticiones son una condición para permitir a los alumnos desarrollar nuevos recursos y cesan cuando los alumnos disponen ya de una estrategia que permite resolverla de manera sistemática. A esta estrategia subyace, en principio, un nuevo conocimiento"* (Block, 2001:28)

Los momentos en el que el maestro interviene para provocar la situación de enseñanza, para orientarla, acotarla y controlarla son considerados por Brousseau como el componente didáctico de la situación didáctica. Una fase del proceso que típicamente corresponde a estos momentos didácticos es la institucionalización.

LA INSTITUCIONALIZACIÓN DEL SABER

La institucionalización del conocimiento (Brousseau, 1970) debe darse después de una o varias sesiones de trabajo a través de las cuales los alumnos han logrado poner en juego el conocimiento matemático involucrado en los problemas como un recurso, como una herramienta matemáticas que sirve para resolver ese tipo de problemas. El maestro da a conocer entonces a sus alumnos que esas nuevas herramientas constituyen un nuevo conocimiento. Les asigna el nombre convencional (por ejemplo, fracciones) y los identifica como un conocimiento establecido.

Llegar a la aproximación matemática de las estrategias de solución de un problema determinado, es un proceso largo que se inicia en la búsqueda de estrategias iniciales y, a través de una secuencia de situaciones didácticas, culmina con la institucionalización del objeto de conocimiento construido.

SITUACIONES FUNDAMENTALES

Si bien Brousseau considera que existe una gran cantidad de problemas que implican a cada uno de los contenidos matemáticos y que éstos pueden ser presentados como situaciones de acción, de comunicación y de validación, afirma que sólo algunas o al menos una de esas situaciones permiten: engendrar un conocimiento nuevo como recurso de solución; generar diferentes versiones del mismo problema, más simples o más complejos, modificando algunas variables; diseñar una secuencia de problemas que propicien el desarrollo del conocimiento en cuestión, aproximando a los alumnos al conocimiento formal. A estas situaciones Brousseau las identifica como *situaciones fundamentales.* (Brousseau, 2000).

EL ROL DEL MAESTRO

Bajo esta perspectiva, el rol del maestro dentro de una situación didáctica con las características mencionadas, va más allá del de un coordinador de actividades. El maestro debe seleccionar y organizar las situaciones, proporcionar los materiales y las consignas necesarias, cuestionar, sin validar o invalidar los procedimientos desarrollados por los alumnos, organizar los debates derivados de las situaciones de comunicación y validación, ayudar al grupo a llegar a conclusiones y por último a relacionar el nuevo conocimiento adquirido con el objeto de conocimiento establecido, es decir institucionalizar el conocimiento construido por los alumnos.

En resumen, la Teoría de las Situaciones Didácticas implica una concepción de enseñanza y de aprendizaje diferente a la tradicional, cuyo propósito es desarrollar en los alumnos su capacidad de razonamiento a partir de la resolución de problemas, lograr que éstos aprendan a tomar decisiones de manera autónoma y responsable, que sean capaces de reconocer cuándo han tenido o no éxito al realizar alguna tarea, mediante el intercambio de ideas y debates entre pares.

Bajo la luz de esta Teoría es posible producir problemas o ejercicios adecuados al nivel de conocimientos de los alumnos y a las necesidades de la enseñanza, facilita la comprensión de lo que hacen los profesores y los alumnos al interactuar con el *medio* y a establecer una comunicación más efectiva entre investigadores y maestros.

J. Perez (1982), describe el proceso de enseñanza-aprendizaje de la siguiente manera:

> *"El camino que hemos seguido consiste primeramente en construir un proceso de aprendizaje en el que el conocimiento no sea enseñado directa o indirectamente por el maestro, sino que aparezca progresivamente en el niño a partir de confrontaciones con cierto tipo de obstáculos hallados en el curso de su actividad. Son pues las múltiples acciones en el seno de la situación las que deben provocar por sí solas las modificaciones en el alumno y favorecer así la aparición de los conceptos deseados... Si el conocimiento contemplado por el aprendizaje debe aparecer en la medida en que se vuelve necesario para adaptarse a una situación que se ha vuelto problemática las estrategias empleadas espontáneamente se revelan ineficaces, todos los esfuerzos del didacta deben orientarse hacia esa situación. El problema primordial consiste en primer lugar en saber, en efecto, en qué es realmente problemática la situación".*

1ª Entrevista	Olvera, (2000)				Martínez, (2001)	
Niños	Omar (4 años, 2º Preesc.)	Oswaldo (5 años,3º Preesc.)	Sak Nikte (6 años1º de Prim.)	Oscar (7 años 2º de Prim.)	Stefany (5 años,3º Preesc.)	Mirna (6 años,1º de Prim.)
Situaciones de Reparto	Sabe la serie del 1 al 17	Sabe la serie del 1 al 20	Sabe la serie del 1 al 41 o más	Sabe la serie del 1 al 41 o más	Sabe la serie del 1 al 16	Sabe la serie del 1 al 41 o más
15 pelotas en 3 cajas	Distribuye mediante correspondencias 3 a 1 y 1 a 1	Distribuye por color	Correspondencia 1 a 1	Distribuye por color y mediante correspondencias 1 a 1 y 2 a 1	Sistemáticamente usa el criterio de color. Conserva este criterio para compensar, apoyándose en la cardinalidad de las partes	Distribuye mediante correspondencias 2 a 1 y 1 a 1
18 canastas o cubos en 3 cajas	Apareamiento. Una canasta junto a cada canica	Apareamiento. Una canasta junto a cada canica. Después correspondencia 1 a 1		Correspondencias 5 a 1 y 1 a 1	Pone en juego implícitamente estrategia aditiva. Después compensa	Correspondencias 6 a 1
20 palitos en 3 cajas	Correspondencias 5 a 1 y 1 a 1		Coloca 6 palitos en cada caja. Le sobran 2. Da por terminado el reparto. Después reparte el sobrante. Pierde equitatividad	Correspondencias 1 a 1	Pone en juego implícitamente estrategia aditiva. Después compensa	Distribuye mediante correspondencias 6 a 1 y le sobran 2. Después usa correspondencia 1 a 1 y sobran 2
Cómo saben si son iguales las partes	Contando		Equivalencia basada en correspondencias 1 a 1	Contando		
Dificultades	En el conteo para determinar la cardinalidad de las partes en el tercer problema	No se da cuenta que las partes son desiguales	Observa que las partes no son iguales pero no se plantea la posibilidad de fracturar las unidades para igualarlas. Propone comprar los 2 palitos que faltan	Se da cuenta de que siempre le sobrarán 2 palitos sin importar el orden en el que reparta. No se plantea la posibilidad de fracturar los palitos. Propone no repartir el resto	Se da cuenta de que las partes no son iguales. No se plantea la posibilidad de fracturar las unidades para igualar las partes. Para lograrlo agrega otros objetos	No fractura los palitos. Propone tirar o guardar el sobrante

<table>
<tr><td>3ª Entrevista</td><td colspan="3">Martínez, (2001)</td></tr>
<tr><td>Propósitos</td><td colspan="2">Identificar las estrategias que usan los niños al repartir unidades compuestas entre 2 y entre 3</td><td>Identificar las estrategias que usan los niños para reconstruir el todo dada una de las partes.</td></tr>
<tr><td>Situaciones / Niños</td><td>1. Repartir entre 2 niños, 4 pilas de nueve sombreros cada una</td><td>2. Repartir entre 3 niños, 2 pilas de 18 sombreros cada una</td><td>3. Alma, Marcial, Maru y Pancho son otra familia que también hace sombreros. Si todos hicieron igual de sombreros que Alma ¿cuántos sombreros hizo esta familia? ¿Qué parte de los sombreros de esta familia hizo Alma?</td></tr>
<tr><td>Stefany
(5 años)
3º Preesc.
Sabe la serie del
1 al 16</td><td colspan="2">• No anticipa cómo piensa hacer el reparto
• Para repartir, descompone las pilas de sombreros en pilas más pequeñas.
• Estima visualmente la altura de las pilas y las compensa quitando o agregando sombreros de uno en uno. (presiona algunas pilas para tratar de igualar las alturas).
• En el primer problema no distribuye las pilas exhaustivamente, de manera espontánea. En el segundo sí.
• Los criterios para determinar si el reparto fue o no justo son: el número de pilas que tiene cada niño y la altura de las pilas. No logra hacer repartos equitativos dado que el número de unidades simples de cada pila es diferente.
• En la actividad familiar no identifica los términos mitad, medio, tercio, tercera parte. Usa los términos ‘más grande’ o ‘más chiquita’ para referirse a esas partes.</td><td>Se le presentan los cuatro personajes. Pancho tiene al frente 2 sombreros.
• Primer intento de solución, al parecer cuenta con sus dedos en voz baja y dice seis. Quizá no considera los sombreros que hizo Pancho.
• Segundo intento. Pide más sombreros y coloca 2 frente a cada muñeco. Los cuenta y dice ocho.</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Mirna
(6 años)
1º de Prim.
Sabe la serie del 1 al 41 o más</td><td colspan="2">• Anticipa cómo va a repartir. En el proceso afina su estrategia.</td><td>Se le presentan los cuatro personajes. Uno de ellos tiene al frente 5 sombreros.</td></tr>
<tr><td>Desintegra las unidades compuestas en unidades simples y las reparte una a una hasta que cada niño tiene una pila de siete sombreros. Se queda con un resto que sólo reparte (con la misma estrategia) por insistencia del entrevistador.</td><td>Estima que cada niño puede tener 10 sombreros. Forma 3 pilas de 10 contándolos de uno en uno. El resto lo reparte mediante correspondencias 2 a 1.</td><td rowspan="2">Sabe que 5 + 5 = 10, pero se le dificulta contar de 5 en 5 hasta 20.
1er. intento. Calcula 30 sombreros. Al cuestionarla se observa que implícitamente hizo: 5+5+(10+10). Después, de manera oral cuenta 10, 20, 30, 40.
2º intento. Coloca frente a cada muñeco 5 sombreros a la vez que cuenta mentalmente, dice 20. Corrige diciendo 30.</td></tr>
<tr><td colspan="2">• Al cuantificar el resultado cuenta los sombreros que contiene cada pila e indica su cardinalidad, pero se equivoca en el conteo.
• Identifica como mitad a la naranja partida en dos o tres partes iguales. (Situación familiar)
• Usa el término mitad para nombrar el resultado de repartir entre 2 o entre 3.</td></tr>
</table>

Anexo 3

Problemas Niños	Partir una cuerda en 4 partes	Partir una cuerda en 3 partes	Partir una cuerda en 2 partes	¿Cómo sabe si las partes son o no iguales?
Omar 2º Preesc.	Hace 5 marcas sobre la cuerda. Al parecer no toma en cuenta el número de reatas que debe obtener, ni el número de marcas de corte que necesita.	1º Toma en cuenta las reatas que necesita y hace 3 marcas de corte (más o menos a la misma distancia) utiliza menos de la cuerda. Obtiene 4 reatas. 2º Trata de medir con la regla (no sabe usarla). De manera asistemática realiza 11 marcas de corte sobre la cuerda a diferentes distancias. Propone dar una reata a cada niño y amarrar el sobrante.	En el centro de la cuerda, hace 4 marcas a la misma distancia. Obtiene 5 reatas. Asigna una reata a cada niño. No considera el sobrante.	En el primer problema dice no saber cómo averiguar si las partes son o no iguales. En el segundo, usa la regla para medir los pedazos resultantes en cada reparto. Se da cuenta que no son iguales porque "*tienen números diferentes".* No usa los términos 'cuarto', 'cuarta parte', 'medio' y 'mitad'.
Oswaldo 3º Preesc.	1º Distribuye los 5 personajes de extremo a extremo de la cuerda. Hace una marca de corte del tamaño del espacio que hay entre cada personaje. 2º Hace cuatro marcas. Estima visualmente la misma distancia entre cada marca. Obtiene 5 pedazos, dos desiguales y tres casi del mismo tamaño. Observa que sobra una reata. Elimina una de las marcas para tener 4. Redistribuye las 3 marcas estimando visualmente la distancia.	1º Hace 4 marcas de corte estimando visualmente la misma distancia entre éstas. Obtiene 5 reatas. 2º Mediante preguntas de los entrevistadores, logra hacer sólo dos marcas de corte estimando la misma distancia. Obtiene 3 reatas más o menos iguales.	Estima visualmente la mitad de la cuerda y hace una marca de corte. Obtiene 2 reatas casi del mismo tamaño.	Compara visual y directamente la longitud de las reatas (cortadas). En el problema <1 cuerda entre 2>, dobla otra cuerda en dos partes iguales. Compara su longitud extendiéndola, sobre la cuerda marcada, a partir de un extremo y hasta el punto de corte. Corta y empata las cuerdas para verificar si son o no iguales. Usa los términos: 'grande', 'mediana', 'poco mediana', 'chica' e 'iguales' para diferenciar el tamaño de las partes. No usa los términos 'cuarto', 'cuarta parte', 'medio' y 'mitad'.

Problemas / Niños	Partir una cuerda en 4 partes	Partir una cuerda en 3 partes	Partir una cuerda en 2 partes	¿Cómo sabe si las reatas son o no iguales?
Stefany 3º Preesc.	1º. Toma en cuenta el ancho de los muñecos. Hace 4 marcas. Obtiene 5 reatas desiguales. 2º. Coloca tres muñecos sobre la cuerda. Hace dos marcas. Reacomoda un muñeco sobre el primer segmento de la cuerda limitado por el extremo izquierdo y la 1ª marca. Sobre el 2º segmento coloca al 2º muñeco. El 3er muñeco lo coloca justo en el límite derecho del 2º segmento. Estima el espacio que ocupa el 3er muñeco sobre la cuerda y hace una 3ª marca. Coloca el 4º muñeco sobre el 4º y último segmento de la cuerda. Obtiene 4 reatas desiguales. 3º. Trata de obtener cuatro reatas iguales compensando. No lo logra.	No la realiza	Sobre la mitad izquierda de la cuerda hace dos marcas más o menos a la misma distancia Obtiene tres reatas. Corta, y reparte una reata a cada muñeco. Para igualar las reatas entregadas las une por los extremos. Sugiere cortar el sobrante de la reata más grande.	Compara visualmente la longitud de las reatas. No usa los términos medios, mitad, tercios, tercera parte y cuartos o cuarta parte. Usa sus dedos para indicar su longitud.
Sak Nikte 1º Prim.	1º. Anticipa 3 puntos de corte. Estima visualmente la distribución de las marcas. 2º. Dobla por la mitad la cuerda haciendo una marca en el punto medio y otras dos marcas en la parte media de la cuerda doblada. Obtiene 4 reatas.	En dos intentos, hace tres marcas más o menos a la misma distancia. Obtiene 4 reatas. 3º. Hace dos marcas de corte sobre la cuerda, más o menos a la misma distancia, considera los extremos.	No la realiza	Compara visualmente. Determina que no son iguales.

Anexo 3

Problemas / Niños	Partir una cuerda en 4 partes	Partir una cuerda en 3 partes	Partir una cuerda en 2 partes	¿Cómo sabe si las reatas son o no iguales?
Mirna 1º Prim.	Anticipa 3 cortes. La distancia entre las marcas de corte que realiza es casi la misma pero diferente a la distancia entre los extremos de la cuerda y la 1ª y última marca.	A partir del extremo izquierdo de la cuerda, hace dos marcas de corte más o menos a la misma distancia. Obtiene 3 reatas. Identifica la reata más grande y las más chicas.	Hace una marca de corte fuera del punto medio de la cuerda. Obtiene 2 reatas desiguales. Identifica la desigualdad.	Compara visualmente la longitud de las reatas. Se da cuenta que dos son más chicas que las otras 2. No usa espontáneamente los nombres de las fracciones. Sólo lo hace a partir de la situación familiar que se le presenta para responder a las preguntas.
Oscar 2º Prim.	Anticipa los puntos de corte. En los tres primeros intentos, estima visualmente la distancia entre los puntos de corte. Hace tres marcas y obtiene 4 reatas más o menos del mismo tamaño. 4º Estima la mitad de la cuerda. Dobla la cuerda a la mitad y nuevamente a la mitad. Obtiene 4 pedazos iguales.	1º. A partir del extremo izquierdo de la cuerda, hace dos marcas de corte más o menos a la misma distancia. Obtiene 3 reatas. 2º. Dobla la cuerda en tres partes iguales	No la realiza	Visualmente compara las longitudes de las reatas. En el último intento determina que no son iguales. No usa los nombres de las fracciones.

BIBLIOGRAFÍA

Ávila, A., E. Mancera. (1989). “La fracción: una expresión difícil de interpretar”. En: *Pedagogía, Revista de la Universidad Pedagógica Nacional*. Vol. 6 Nº 17 pp 21-26, México.

Ávila, A. R. Méndez. (1990) *La formación de profesores de primaria en el área de matemáticas.* Ponencia presentada en el Simposio Nacional sobre procesos de la lengua escrita y la matemática. Organizado por la Universidad Pedagógica Nacional del Estado de Aguascalientes.

Balbuena H., C. Espinosa, H. Espinosa, D. Fregona e I. Saiz. (1984). *Descubriendo las fracciones*. En: Cuaderno del Laboratorio de Psicomatemática. N° 5. DIE-CINVESTAV-IPN, México.

Balbuena, H. (1988). *Análisis de una secuencia didáctica para la enseñanza de las suma de fracciones en la escuela primaria”*. Tesis para obtener el grado de Maestro en Ciencias en la especialidad de Matemáticas Educativa. Aprobada para publicarse en la serie: Opus Prima de la Sección de Matemática Educativa, CINVESTAV-IPN, México.

Balbuena, H., D. Block. (1991) "¿Qué significa multiplicar por $\frac{7}{4}$? Reflexiones sobre lo que sucedió en una clase de matemáticas para maestros". En: *Cero en conducta. La enseñanza de las matemáticas.* N° 25, pp. 21-32

Behr, M., G. Harel, T. Post, R. Lesh. (1992). “Rational number, ratio, and proportion”. En Dougleas a. Grouws (ed.) *Handbook on Research on Mathematics Learning and Teaching,* Nueva York, MacMillan, p. 296 – 333.

Block, D. (1987). *Estudio didáctico sobre la enseñanza y el aprendizaje de la noción de fracción en la escuela primaria”.* Tesis para obtener el grado de Maestro en Ciencias en la Especialidad de Educación. Departamento de Investigaciones Educativas, DIE-CINVESTAV-IPN, México.

Block, D. e I. Fuenlabrada (responsables) C. Álvarez, H. Balbuena, M. Dávila (colaboradores). (1988). *Informe final del proyecto: Alternativas curriculares para la enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria*. Informe presentado al DIE-CINVESTAV-IPN y a CONACYT. México, D. F.

Block, D.(1991). "La validación empírica del conocimiento en la clase de matemáticas en la primaria". *Cero en conducta.* Año 6 Nº 25, pp 4-9, México.

Block, D. y M. Dávila (1993). "La matemática expulsada de la escuela". En: *Educación matemática*. Vol. 5, Nº 3. Ed. Grupo Editorial Iberoamérica, S. A. de C. V. México.

Block, D., (2001). *La noción de razón en las matemáticas de la escuela primaria. Un estudio didáctico*. Tesis presentada en el DIE-CINVESTAV-IPN, para obtener el grado de Doctor en Ciencias en la especialidad de Educación. México, D. F.

Block, D. y D. Solares (2001). "Las fracciones y la división en la escuela primaria: Análisis didáctico de un vínculo". En: *Educación Matemática* . Vol. 13, No 2 pp 5-30. Ed. Grupo Editorial Iberoamérica, S.A. de C. V. México.

Brousseau, G., (1970). "Processus de mathématisation". En: *La mathématique à l'école élementaire*, Pariís, APMEP, N especial. pp 428-457.

Brousseau, G., (1976), *Los obstáculos epistemológicos y los problemas de matemáticas.* Ponencia presentada en la reunión de la C.I.A.E.E.M. en Lourain-La Neuve, Bélgica.

Brousseau, N. et Brousseau, G. (1987). Rationnels et décimaux dans la scolarité obligatoire. En *Document pour les enseignants et pour les fromateurs.* IREM de Bordeaux.

Brousseau, G. (2000). "Educación y Didáctica de las Matemáticas" En: *Educación Matemáticas* Vol. 12, Nº 1, pp 5-38, Grupo Editorial Iberoamérica, S. A. de C. V., México.

Carraher, T. Carraher, D. Carraher, A. Schliemann (1991). *En la vida 10, en la escuela cero*. Ed. Siglo XXI Editores, 1ª Ed. En español.

Comin, E. (2000). *Proportionalite et fonction lenéaire. Caracteres, causes et effects didactiques des evolutions et des reformes dans la scolarite obligatoire.* Tesis de doctorado. Universite Bordeaux.

Dávila, M. (1991). *Situaciones de reparto: Una introducción a las fracciones.* Tesis presentada para obtener el grado de Licenciada en Educación Primaria. SEP. Universidad Pedagógica Nacional, Unidad 094, México, D. F.

Dávila, M. (1992). "El reparto y las fracciones". En: *Educación Matemática.* Vol. 4 N° 1, pp. 32-45. Grupo Editorial Iberoamérica, S. A. de C. V. México.

De León, H. (1996). *Procedimientos de niños de primaria en la solución de problemas de reparto.* Tesis de maestría en la especialidad de investigaciones educativas, presentada en el DIE-CINVESTAV-IPN, México.

De León, H. e I. Fuenlabrada. (1996). "Procedimientos de solución de niños de primaria en problemas de reparto". En: *Revista Mexicana de Investigación Educativa.* Vol. 1 N° 2, pp. 268-282

Figueras, O., E. Filloy, M. Valdemoros. (1987). "Distorsiones que obstruyen la construcción del concepto de fracción." En *Memorias de la Primera Reunión Centroamericana y del Caribe Sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa*. Comité Editorial Elisa Bonilla, Olimpia Figueras, Fernando Hitt. Mérida, Yuc. México.

Figueras, O. (1988). *Dificultades de aprendizaje en dos modelos de enseñanza de los racionales*. Tesis de doctorado. Sección de Matemática Educativa, CINVESTAV-IPN. México.

Figueras, O. (1996). "Juntando partes. Hacia un modelo cognitivo y de competencia en la resolución de problemas de reparto". En *Investigaciones en Matemática Educativa.* Grupo Editorial Iberoamérica, S. A. de C. V. Editor Fernando Hitt Espinosa, pp 173-196.

Freudenthal, H., (1983). *Fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas*. *Textos seleccionados.* Reproducción en español con la autorización de Kluwer academic Publishers Group, Traducido por Luis Puig., CINVESTAV-IPN, 1994

Hart, K., Kerslaske, D., Ruddock, G., Brown, M. y Kuchemann, D. (1980). *Concepts in Secondary Mathematics an Science* (CSMS)", Chelsea College, Univiersity of London. Traducción interna del DIE-CINVESTAV-IPN.

Hart, K. (1981). "Fracciones" (Cap. 5) En: *Children's Understanding of Mathematics: 12-16*, Editorial John Murray Publishers, Londres, pp. 66-81. Reporte de la investigación realizada por el grupo "The CSMS Mathematics Team" en Chealsea College, University of London en el periodo 1974-1979. (CSMC. Concepts of Secundary Mathematics and Science). Traducción interna del DIE-CINVESTAV-IPN.

Kieren, T. (1976). "Acerca del conocimiento matemático de los números racionales y los fundamentos para su enseñanza". En: Lesh, R. (de) *Number and Measurement: Papers from a research workshops*: ERC/SMAC, University of Alberta, Cánadá. Traducción de D. Block para uso interno del DIE-CINVESTAV-IPN.

Kieren, T., B. Southwell. (1979,). "The Development in Children and Adolescents of the Construct of Rational Numbers as Operators". En: *Alberta Journal of Educational Research*, 25 (4), pp. 234-247.

Kieren, T. (1980), "Rational Numbers: Ideas and Symbols". En: *Mathematics. M.* Lindquest (Ed.), Chicago: NSSE.

Kieren, T. (1983). ”La partición, la equivalencia y la construcción de ideas relacionadas con los números racionales”. En: *Proccedings of the Fourth International Congress on Mathematical Education*. De. M. Sweng, T. Green, J. Kilpatrick, H. pollack y M. Suydam, Birkhaüser, EEUU, p. 506-508. Traducción de Olimpia Figueras, Sección de Matemática Educativa, CINVESTAV-IPN, México,1990.

Kieren, T., N. Doyal, S. Grant. (1985). “Algoritmos gráficos en tareas de Partición”. En: *The Journal of Mathematical Behavior* 4, pp. 25-36.

Kieren, T., (1988). “Personal Knowledge of Rational Numbers: Its Intuitive and Formal Development”. En: *Number Concepts and Operations in the Middle Grades*, Vol. 2, Eds. James Hiebert, University of Delaware and Behr Merkyn, Northem Illinois University. Research Agenda Mathematics Education, Lawrence Erlbaum Associates, National Council of Teachers of Mathematics. Traducción de Olimpia Figueras, CINVESTAV-IPN, México

Kieren, T. (1992) "Rational and Fractional Numbers as Mathematical and Personal Knowledge: Implications for Curriculum and Instruction". En *Analysis of Arithmetic for Mathematics Teaching.* Leinhardt, G., Putman, R. Y Hattrap, R. (edits). New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

Lerner D., (sin fecha) *La construcción de la noción de fracción. Implicaciones pedagógicas.* República de Venezuela. Ministerio de Educación. Fundación ME-VAL, Caracas.

Mancera, E., (1992), "Significados y significantes relativos a las fracciones". En Revista Educación matemática, Vol 4, N° 2, Grupo Editorial Iberoamérica, México.

Martínez A. (2001). *Los usos que hacen los niños del número natural al partir y repartir*. Tesis para obtener el grado de Maestría. CINVESTAV-IPN, México.

Moreno, A., G. Waldegg. (1992). “Constructivismo y educación matemática” En *Revista Educación Matemática* Nº 2, Vol. 4, pp 7-15, México.

Olvera, F. (2000). *Uso de los conocimientos del número natural en la resolución de problemas de partición y reparto*. Tesis para obtener el grado de Maestría, CINVESTAV-IPN, México.

Perez, J. (1982) “Utilisation de la théorie des situations didactiques en vue de l’dentification des objets et des phénoménes pertinents au cours de l’activité de construction d’un code de désignation à l’école maternelle”. Conferencia dictada en la Segunda Escuela de Verano de Didáctica de las matemáticas. Escuela de Educadores Especializados. OLIVET. (mimeo p 3).

Piaget, J, B. Inhelder, A. Szeminska. (1960).. *The child's conception of geometry.* London, Routledge and Kegan Paul. Reino Unido.

Piaget, J. et al. (1965). “Las estructuras matemáticas y las estructuras operatorias de la inteligencia”. En: *La enseñanza de las matemáticas*. Madrid, Aguilar.

Piaget, J., B. Inhelder, A. Szeminska. (1966) “Subdivisión de áreas y el concepto de fracciones” (Escrito con la colaboración de M. Muller). En: *The childs conception of geometry*. Routledge and Reagan Paul. London. Repinted 1966, 1970. Traducción interna del DIE-CINVESTAV-IPN.

Piaget, J. (1968) “El punto de vista de Piaget”. En: *Lecturas de Psicología del niño* (pág. 166-185), Tomo 1, Comp. Juan Deval, Edit. Alianza, Madrid.

Piaget, J., B. Inhelder. 1971. *El desarrollo de las cantidades físicas en el niño*. Edit. Nova Terra, Barcelona.

Solares, D. (1999). *Las fracciones y la división. Estudio didáctico de algunos vínculos*. Tesis de Maestría. Departamento de Investigaciones Educativas CINVESTAV-IPN.

Streefland, L., (1978), "Resultados de algunas observaciones acerca de la construcción mental del concepto de fracción*".* Ponencia presentada en la primera conferencia del G.I.P.E.M. (Grupo Internacional para la Psicología de la Educación Matemática), en Utrecht, Agosto de 1977. En: *Educational Studies in Mathematics* 9 pp. 51-73, Reidel Publishing Company, Dordrecht, Holland. Traducción de Figueras, O. Departamento de Matemática Educativa CINVESTAV-IPN.

Streefland, L. (1984). "Unmasking N-Distractors as a source of failures in learning fractions". In: *Proceedings of the Eight Annual International conference for the Psychology of Mathematics Education*, pp. 142-152. (Eds.) B Sowtewll, R. Eyland, M. Cooper, y K. Collis, Sidney: Mathematical Association of New South Wales.

Streefland, L., (1987), “Free production of fraction monographs” In: Bergeron, J., N. Herscovics, y C. Kieran Ueds.) *Psycholohy of Mathematics Education: PME-XI* (Vol. 1., pp. 405-410).

Streefland, L., (1993), "Fractions: A realistic approach". En *Rational Numbers. An integration of Research.* Edited by Thomas P. Carpenter, Elizabeth Fennema, Thomas A. Romberg, University of Wisconsin-Madison. Lawrence Erlbaum Associates, Publishers, Hillsdale, New Jersey.

Valdemoros M., M. Orendain, A. Campa y E. Hernández. (1996). “La interpretación ordinal de la fracción”. En: *Investigaciones en Matemática Educativa*, Grupo Editorial Iberoamérica, S. A. de C. V. México.

Vergnaud, G. (1988). “Multiplicative Structures”. En: *Number Concepts and Operations in the Middle Grades*. Vol 2. En. J. Hiebert, y M. Behr (Eds). Lawrence Erlbaum Associates National Council of teachers of Mathematics.

Vergnaud, G. (1991). *El niño, las matemáticas y la realidad. Problemas de la enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria*. Edit. Trillas, 1a Ed, traducción al español. México.

REFERENCIAS SECUNDARIAS

Behr, M., Harel, G., Post, T., & R. Lesh, (1990). "On the operator construct of rational numbers: towards a semantic analysis". *Paper presented at the anual meeting of the American Educational Research Association*, Boston*.*

Bell, A. y D. Bassford, (1989). "A conflict and investigation teaching method and an individualised learning scheme─a comparative experiment on the teaching of fractions". En *Psychology of mathematics education*. Eds. Fergnaud, G. J. Rogalski, M. Artigue, pp. 125-132. Francia, París

Cázares, J. (1994). *Un modelo de enseñanza para el conteo.* Tesis de Maestría. Universidad de las Américas, A. C. México.

Davis G. y Pitkethly (1990). "Cognitive aspects of sharing". En *Journal for Research in Methematics Education.* Vol. 21, Nº 2.

Davis, G. y K. Pepper, (1992). "Mathematical problem solving by pre-school children". In: *Educational Studies in Mathematicas,* 23 (4), pp. 397-412.

Figueras, O y M. Nemirovsky. (1990). *Proyecto de investigación sobre el conocimiento etnomatemático del número y las operaciones.* Documento interno del Departamento de Matemática Educativa. CINVESTAV-IPN, PNFPM y CONACYT. México.

Figueras, O., S. Mochón, M. Ramírez. (1991). Protocolo de entrevista, problemas de reparto. En Arana, A., S. Cárdenas, O. Figueras, S. Mochón, M. Ramírez; M. Ríos y M. Sánchez: problemas aditivos, reparto y práctica docente. Documento interno de la Sección de Matemática Educativa, CINVESTAV-IPN, PNFPM y CONACYT. México.

Figueras, O. (1994). "Children's ideas about partition and sharing". *Proceeding of the sixteenth annual meeting, North American. Chapter of the International Group for the Psychology of Matehematics Education, 1, (p.61).* Lousiana State University, EE.UU.

Fuson, K. (1988). *Children's counting and concepts of number.* New York. Springer-Verlag.

Gelman, R. y C. R. Galistel. (1978). *The child's understanding of number.* Cambridge, MA: Harvard University Press.

Harrison, B., Brindley. S. (1980), en M. P. "Bye Effects of a Process-Enriched Approach to Fractions". In: *Proceedings of the Fourth International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, Karplus, R. (De.) Berkeley, pp. 75-82.

Hasemann, K. (1980): "On the understanding of concepts and rules in Secondary Mathematics: Some examples illustrating the difficulties"*. Proceedings of the Fourth International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, Karplus, R. (De.) -Berkeley, pp. 68-75.

Hershkowitz, R., Vinner, S. (1980), en M. Bruckheimer: "Some cognitive factors as causes of mistakes in the addition of fractions"*. Proceedings of the fourth International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, Karplus, R. (De.), Berkeley, pp24-32.

Hiebert, J. Y M. Behr, (1988), "Introduction: Capturing the major themes"*.* En: *Number Concepts and operations in the middle grades. Research Agenda for Mathematics Education*, Vol. 2, pp1-18. Hiebert, J. Y Behr, M. (Eds.). Lawrence Erlbaum Associates-National Council of Teachers of Mathematics, E.E. U.U.

Hunting, R. P. And Korbosky, R. K. (1984). "Processes Used to Learn Fractions". *Final report to the Academic Staff Development committee. Divission of Arts, Education, and Social Sciences*. Western Australian Institute of Technology.

Hunting, R. y Ch. Sharpley, (1986). "Fraction Knowledge in preschool children". *Journal of Research in Mathematics Education*, Vol. 17, N° 3, pp. 175-179.

Hunting, R. y Ch. Sharpley, C. (1988). "Preschooler's cognition of fractional units. *The British Journal of Educational Psychology*, Vol. 58, parte 2, pp. 177-183.

Kieren, T., N. Doyal. (1981). "Partitioning and unit recongnition in performances on rational number tasks". In: *<ptovrrfinhd og yhr Yhitf Snnusl <mrryinh og yhr <notyh Smrtivsn Vhspyrt og IGPME.* (PP.91-102). Mineapolis.

Linchevsky, L. y S. Vinner (1989). "Canonical Representations of Fractions". En *Psychology Mathematics Education.* (Eds.): Vergnaud, G. J. Rogalski y M. Artigue, pp. 242-249. Francia, París.

Ohlsson, S., (1988). "Mathematical Meaning and Applicational Meaning in the Semantics of Fractions and Related Conceptos". En: Hiebert, J., & Behr, M.; *Number Concepts and Operations in the Middle Grades: Research Agenda for Mathematics Education*, Lawrence Erlbaum Associates, National Council Teachers of Mathematics.

Padberg, F. (1983). *Aber Schulerfehler In: Bereich der Bruckrechnung.* H,. J. volrath (ed.) Zahlbereiche, Stuttgart, pp. 45-58.

Padilla, V. (1984). *Un estudio empírico sobre las dificultades en la adquisición de los conceptos sobre fracciones*. Tesis de Maestría. Sección de Matemática Educativa. CINVESTAV-IPN. México.

Pepper, K. L. (1991). “Preschoolers. Knowledge of counting and sharing in discrete quassettings”. In: R: P. Hungting and G. Davis (Eds), *Recent Research in Psychology: Fraction Learning.* Springer-Verlag, New York, pp. 103-127.

Pepper, K. L. y R. Hunting. (1998) “Preschoolers counting and sharing”. *Journal for research in mathematics education*, 29:2, págs. 164-183.

Pinchback, C. L., (1981), *Computational error of seventh and eight grade students.* Equiupe de Recherche Pedagogique, (De.) Grenoble, pp. 210-216.

Planchart, O. (1984). *Estudio experimental e interpretativo sobre la enseñanza de las fracciones* (estudio realizado con niños de primer año de secundaria). Tesis de Maestría. Sección de Matemática Educativa. CINVESTAV-IPN. México.

Pothier, Y. y D. Sawada (1989) “Children’s Interpretation of Equality in early Fraction Activities”. *Focus on Learning Problems in Mathematics* (págs. 27-38).

Ramírez, M. (1994). *La partición mecanismo constructivo de los racionales*. Estudio de casos. Tesis de maestría. CINVESTAV-IPN. México.

SEP, (1971-1977) Matemáticas Primer Grado, Comisión Nacional de los Libros de Texto Gratuito.

SEP. (1971-1979) Matemáticas Segundo Grado, Comisión Nacional de los *Libros de Texto Gratuito.*

SEP. (1972-1979) Matemáticas Tercer Grado, Comisión Nacional de los Libros de Texto Gratuito.

SEP. (1980 1993) Matemáticas Cuarto Grado, Comisión Nacional de los Libros de Texto Gratuito.

SEP. (1980-1993) Matemáticas Quinto Grado, Comisión Nacional de los Libros de Texto Gratuito.

SEP. (1978-1993) Matemáticas Sexto Grado, Comisión Nacional de los Libros de Texto Gratuito.

SEP. (1978-1993) Mi libro de Primero. Segunda Parte, Comisión Nacional de los Libros de Texto Gratuito.

SEP. (1979-1993) Mi libro de Segundo. Primera Parte, Comisión Nacional de los Libros de Texto Gratuito.

SEP. (1979-1993) Mi libro de Segundo. Segunda Parte, Comisión Nacional de los Libros de Texto Gratuito.

SEP. (1980-1993) Matemáticas Tercer Grado, Comisión Nacional de los Libros de Texto Gratuito.

Steffe (1989), “Children’s construction of number sequences and multplying schemes”. En: J. Hiebert, y m. Behr (Eds), *Number Concepts and operations in the middle grades.* Vol. 2, pp. 119-140. Lawrence Erlbaum Associates. National Council of Teachers of Mathematics.