CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS
DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
DEPARTAMENTO DE INVESTIGACIONES EDUCATIVAS

LOS ADULTOS NO ALFABETIZADOS Y SUS PROCESOS DE ACCESO A LA SIMBOLIZACIÓN MATEMÁTICA

Tesis que para obtener el grado de Maestra en Ciencias con Especialidad en Investigaciones Educativas

Presenta

María Fernanda Delprato
Licenciada en Ciencias de la Educación

Directora de tesis

Irma Rosa Fuenlabrada Velázquez
Maestra en Ciencias

Julio/2002

CALZADA TENORIOS No. 235 México, D.F. C.P. 14330 APARTADO POSTAL ~~86-355 Tel. 5 483 28 00~~ Fax DIE 5 603 39 57

Al recuerdo de mi abuelo, Martín Emilio Gsponer,
un transportista semi-analfabeto,
que cuando yo iba a 2do. ó 3er. grado
me enseñaba –presumiendo- sus cuentas;
y así me mostró la dignidad que otorga
acceder a conocimientos “ajenos”.

A mis padres, Raquel y Ángel,
que por caminos diversos,
la educación y la militancia,
me formaron en la necesidad
de las utopías populares.

A los sueños y luchas de
Carmen, Sofía y Olga,
aunque no sean
sus verdaderos nombres.

AGRADECIMIENTOS

Una de mis creencias heredadas es en las obras colectivas, y esta tesis tiene ese carácter por las voces que invoca o que interpela, y por las presencias desde el acompañamiento y la solidaridad. Por ello, este espacio está destinado a nombrar a estas voces y presencias para así reconocerlas.

A Irma Fuenlabrada, mi directora y maestra, por su compromiso, esfuerzo y contención en la realización de esta tesis, que arraigaron como prácticas las lecturas continuas y minuciosas y las sesiones extensas e intensas de asesoría.

A mis lectores, Alicia Ávila, Guillermina Waldegg y David Block, por sus aportes y su comprensión de las prisas que suponían mis sujeciones laborales.

A Josefina Granja, por su escucha y mediación comprometida para garantizar condiciones que me posibilitaran concluir.

A Bertha Vivanco y Laura Reséndiz, por sus continuos "¿cómo vas?, ¿qué necesitas?", ejercidos desde una inmensa solidaridad.

A mis maestras, Dilma Fregona y Liliana Vanella, por su apoyo.

A Teresa, de la Cooperativa "Mujeres para hoy", por su creencia en este proyecto, así como a Mercedes Ruiz que ofició de intermediaria para el acercamiento.

Al Instituto Nacional de Educación de Adultos, por la posibilidad de trabajar y de conocer sus espacios y propuestas.

A mis… entrañables e indecibles Leticia Landeros, Teresa Negrete, Ligia Ramírez y Sonia Luquez, indecibles pues no encuentro modo de nombrar todos los espacios que ocuparon en estos tiempos de aprendizajes, nostalgias, dificultades, rupturas y posicionamientos.

A mis "cuates" de México, Esteban Cortés y Saúl Vázquez, por el encuentro.

A los que dejé en mi tierra, por sus gestos de compañía a la distancia y por invocar el reencuentro, entre ellos: Inés, César, Anita, mis primas Mariana y Silvana, Laura, Silvina, Iara, Gogó, Susana y Otto, y especialmente a Marcos e Ignacio, mis hermanos.

A mi abuela Gabriela, que sigue sin entender por qué tengo que seguir estudiando, pero sin demandar espera el regreso.

A mis alumnos de tercer y cuarto grado que cuestionan esto de que mis maestros no vayan para mi ciudad (Córdoba, Argentina), y que sea yo la que tenga que trasladarme.

Finalmente, pero vinculado al comienzo, a los sueños compartidos de Octavio Falconi, que implicaron la concreción de este espacio formativo postergado.

INDICE

INTRODUCCIÓN

La problemática del analfabetismo es la de la marginación de una simbolización con valor social. En esta tesis se retoma esta agenda desde el campo de la exclusión del dominio de la simbolización matemática (los números y las “cuentas” de suma y resta) procurando -en el proceso de diseño y experimentación de una ingeniería didáctica que tienda a una distribución más equitativa de estos saberes- esclarecer variables didácticas relevantes en el trabajo de estas nociones con adultos analfabetos. Por ello, las pretensiones de esta indagación son más cercanas a una exploración de condicionantes de una propuesta de enseñanza que a aspiraciones de constituir una secuencia paradigmática.

La implementación de la ingeniería didáctica está dirigida a tres mujeres atendidas de modo individual mediante acciones específicas pertinentes a cada entrevistada, aunque regidas por las mismas asunciones generales. Esta modalidad se emparenta formalmente con uno de los estilos vigentes en el Instituto Nacional de Educación de Adultos, la asesoría individual, pero a la vez se diferenciaría en su contenido.

La ingeniería didáctica elaborada retoma posturas de los escenarios de la educación de adultos y de la didáctica de la matemática, en torno a la importancia de la simultánea recuperación y problematización-extensión de los saberes previos (nociones y sus usos sociales) de los sujetos de aprendizaje, así como del acceso a las funciones y las leyes constitutivas de un sistema simbólico. La primera de estas premisas conllevó un proceso de indagación de estos conocimientos anteriores (concretado mediante entrevistas semi-estructurada y clínica), y de revisión de antecedentes al respecto, así como su consideración como insumos del proceso de intervención didáctica, en tanto criterios de selección de contextos de las situaciones problemáticas, de los referentes de uso y función de las nociones, y de la graduación de los niveles de dificultad (cercanos pero desafiantes) a que se enfrenta al sujeto. Esto último demandó un continuo análisis de los alcances (en términos de potencialidades y límites) de los recursos previos de los sujetos así como de sus visiones sobre los mismos y sobre el saber matemático en general. Asimismo, constituyeron vías de promoción de una adquisición significativa y relevante de los símbolos matemáticos.

En este proceso de diseño y en los resultados obtenidos se manifiestan también polémicas con algunos de los antecedentes respecto del uso de algoritmos intermedios como registro de procedimientos de cálculo mental, y del vínculo entre el dominio reflexivo de la simbolización numérica y de los algoritmos convencionales, dado que el objeto de la ingeniería didáctica desarrollada era la enseñanza de los algoritmos convencionales de suma y resta postulando su interdependencia con el sistema de numeración en el que operan. A su vez, la experiencia estaba regida por el compromiso con el logro de este acceso en condiciones de ejecución específicas que hacían valorar alternativas didácticas. La valoración era realizada en función de este doble propósito de recuperar y valorar las nociones previas pero atender a la vez a la necesaria extensión de las mismas, arribando así al uso de una simbolización con sentido de la que son y están excluidos los adultos analfabetos.

El trabajo se organiza en cuatro capítulos, en el primero se plantea y contextualiza el problema de estudio, así como se caracteriza su procedimiento general de abordaje. En el Capítulo II se describe y analiza la ingeniería didáctica diseñada en este trabajo, en términos de sus presupuestos y características globales, y exponiendo la secuencia implementada y la lógica de las decisiones que la nutrieron. El Capítulo III presenta una mirada inicial y genérica de cada una de las entrevistadas, proporcionando una semblanza que procura desentrañar sus relaciones con sus saberes previos y el saber matemático escolar. En el Capítulo IV se analiza la evolución del desempeño de las entrevistadas en cuanto a sus posibilidades de representación de la numeración, de la operatoria y de los problemas. Finalmente el estudio se cierra con un apartado de Conclusiones que procura dar cuenta de algunas variables didácticas cuya importancia fue detectada en el transcurso del mismo.

CAPÍTULO I

EL PROBLEMA, SUS ANTECEDENTES Y SU ABORDAJE METODOLÓGICO

"Escribo la historia de una carencia, no la carencia de una historia."
(Andrés Rivera)

Definición del problema

La escritura puede ser tematizada como un dominio de lo simbólico y un dominio simbólico. En la enseñanza de las matemáticas se ha procurado la transmisión de este saber tanto como un quehacer y como un lenguaje. Desde este último sentido, y recuperando la doble tematización aludida de lo simbólico, es relevante preguntarse por las formas de promover la adquisición del lenguaje matemático (dominio de lo simbólico), especialmente cuando puede constituirse en un bien cultural cuya distribución tiene implicancias en términos de distinción social (dominio simbólico)[1].

Esta preocupación por la adquisición de las formas de escritura matemáticas deriva a su vez en la problemática de cómo coadyuvar a la apropiación de símbolos con sentido para el sujeto. En esta búsqueda de significación de la enseñanza de la escritura, como en otros dominios, se ha recurrido a la articulación desde la enseñanza entre conocimiento escolar y conocimientos previos de los sujetos, a partir del reconocimiento de la existencia de una génesis en la constitución del conocimiento[2].

---

[1] "Existe también un interés legítimo de las personas: aprender aquello que los otros saben, y de la manera en que esos otros lo saben, porque desean interactuar en condiciones de igualdad. En otras palabras, también demandan de la escuela colaboración para dejar su condición de marginados" (Avila y Waldegg, 1994, p.28)

[2] "Sin duda el problema del aprendizaje y enseñanza de las matemáticas no se agota con vincular la experiencia y el saber formal. Tal vinculación, no obstante, es condición indispensab [illegible] a construir una propuesta de promoción de aprendizaje que responda a los intereses y forma de cons [illegible] onocimiento de la población adulta de escasa escolaridad" (Avila y Waldegg, 1994, p.27)

Recuperando el interés por facilitar una adquisición significativa de los símbolos matemáticos, es que se delimita como problema a investigar, el *diseño de una secuencia didáctica para la enseñanza de algoritmos convencionales de suma y resta a adultos de baja o nula escolaridad.*

En este diseño subyacen los propósitos de contribuir a aproximar alternativas a problemas propios de la educación y de la educación de adultos. Entre estos problemas resaltan algunos comunes a los diversos niveles del sistema educativo, específicamente la de la calidad de sus servicios, que asumen características específicas en la educación de adultos. Si consideramos a la relevancia social como uno de los indicadores de la calidad[3], y simultáneamente reconocemos que esta relevancia no existe sino para grupos que hacen usos diversos del saber, aparece cuestionada la tradicional concepción curricular de la educación de adultos como análoga a la de la educación infantil[4]. ¿Por qué? ¿Cuál es la particularidad del vínculo con el saber que establece esta población? Esta particularidad consistiría en el desarrollo de un conocimiento cotidiano que, por ejemplo en el ámbito de la matemática, le permita enfrentar las situaciones que plantee su contexto inmediato. Es decir, que aquí se agudiza el posible distanciamiento entre el conocimiento escolar y el cotidiano.

Con relación a la temática de estudio seleccionada estas problemáticas se manifiestan como opciones posibles de criterios para el diseño de una secuencia didáctica para la enseñanza de la noción en juego, "las cuentas". Efectivamente si se asume el cuestionamiento de la pertinencia y eficiencia de la reproducción del modelo de enseñanza infantil, para dotar a este diseño de relevancia, debe procurarse adoptar como criterio la recuperación del conocimiento extraescolar (las nociones sobre el sistema de numeración, los algoritmos mentales usados por los adultos) y a su vez la diferenciación del mismo [5].

La problemática de la relevancia demanda entonces la incorporación de la validez social como criterio a considerar en la selección de saberes. No obstante, alude a su vez a la dialéctica compleja de la inclusión de saberes previos y su extensión a nuevos contextos.

---

[3] "Es sin duda de todos conocido como la falta de calidad y relevancia se convierten después en causa de insuficiente cobertura y desperdicio educativo, pues el sistema deja de tener capacidad de asegurar el tránsito regular de los alumnos por el sistema y de retenerlos el tiempo suficiente para que terminen un ciclo educativo"(Schmelkes, 1996, p.5)

[4] "Sin duda, un factor que ha contribuido a la baja demanda y eficiencia terminal de la educación básica (de adultos) es la desvinculación entre contenidos e intereses (…)" (Avila y Waldegg, 1994, p.21)

[5] "(…) el contexto de aprendizaje formal no debe mantener permanente identidad con el contexto vital (…)" (Avila y Waldegg, 1994, p.28)

En este plano de argumentación puede reconocerse entonces la inscripción del problema de estudio en una preocupación por la calidad de los servicios educativos, definida en términos de relevancia social. Y a su vez puede identificarse una *fuente de sentido para la relevancia: la tensión entre saber cotidiano y escolar*[6]*, entre las fuentes de recontextualización*[7] *de un saber y su expresión académica*.

Ubicación del problema

Una mirada retrospectiva y a la producción teórica vigente, permite detectar campos que convergen en el estudio de la temática, así como los aspectos enfatizados y las metodologías utilizadas en su abordaje, y los debates que emergen de este estudio.

Pueden señalarse cuatro fuentes que han aportado a la reflexión y práctica de la enseñanza matemática en educación de adultos: la didáctica de la matemática, las indagaciones sobre nociones matemáticas extraescolares, las experiencias alternativas, y las redes internacionales.

Algunos aportes de la Didáctica de la Matemática

Las producciones en el campo de la Didáctica de la Matemática adhieren a diversas tradiciones. Puede identificarse una línea "francesa" en la que se distinguen diferentes aproximaciones no excluyentes: “cognitiva”, de los “saberes” y de las “situaciones” (Artigue y Douady, et al., p. 11).

Al interior de esta línea, en sus diversas aproximaciones, no se han detectado estudios directamente relacionados con la temática de este proyecto, pero se rescatan a continuación algunas construcciones conceptuales y formas de abordaje aunque no se hayan encontrado antecedentes de producciones teóricas específicas.

Y. Chevallard (1998) con su **mirada antropológica** acerca de los procesos de comunicación y uso de los saberes, aporta -entre otras consideraciones- una tematización de la necesidad de regulación de la distancia entre conocimiento escolar y cotidiano. El *riesgo de pérdida de legitimidad social de la enseñanza* plantea el

[6] “Ese *envejecimiento histórico* de los objetos de enseñanza tiene dos aspectos: por un lado, no permite mantener adecuadamente la distinción entre los lugares didácticos (se refiere al del docente y al del alumno); por otro lado, llegado el caso, *en relación con la sociedad* (los padres, los contribuyentes, etc.), no permite en adelante marcar la diferenciación entre el saber “lego” y el saber de los “sabios”, lo que tiende a erosionar la *legitimidad social del proyecto de enseñanza*, en tanto el envejecimiento afecta a sus objetos (…)” (Chevallard, 1998, p.90)

[7] “(…) (el docente) debe producir una recontextualización y una repersonalización de los conocimientos (…) Cada conocimiento debe nacer de la adaptación a una situación específica (…)” (Brousseau, 1986, p.38)

fenómeno de la diferenciación del conocimiento escolar del conocimiento cotidiano, procurando a la vez que esta diferenciación no conlleve la exclusión de las posibilidades de algún tipo de acompañamiento o tutela del proceso escolar por la familia. Podría deducirse entonces el distanciamiento de esta línea de lo que se desarrollará en torno a la pedagogía legitimista, aunque este autor no aluda a un plano propositivo (como serían las producciones de esta visión pedagógica) sino a una descripción de una necesidad del sistema educativo, es decir su legitimación por la realización de una función específica distinta de la de otras instancias educativas.

G. Brousseau (1986) también delimita como objeto de estudio de la Didáctica de la Matemática a los procesos de comunicación de conocimientos y las transformaciones que sufre la comunicación y el conocimiento mismo objeto de la transmisión. No obstante, profundiza en un abordaje sistémico de la interacción de los subsistemas didácticos (docente, alumno, medio, conocimiento) desglosada en **situaciones**. Desde esta perspectiva también surgen resultados de investigación que no sólo aluden a un plano descriptivo (detectan fenómenos didácticos), y a un plano teórico, sino que también experimentan secuencias de enseñanza mediante el uso de la metodología nominada *ingeniería didáctica*. Estas realizaciones didácticas –como se especificará luego- procuran poner en acción ciertos conocimientos didácticos, focalizando en el diseño del *medio* con el que aprende el sujeto a partir de su interacción.

Estudios sobre conocimientos matemáticos no escolares

Desde la segunda perspectiva, bajo la preocupación en torno a la génesis del conocimiento, se realizan investigaciones sobre conocimientos matemáticos implícitos utilizados en ámbitos no escolares, inicialmente de niños y posteriormente de adultos en prácticas laborales diversas (Carraher y Carraher, et al., 1997). El propósito de estos trabajos era, mediante el uso del método clínico piagetiano y el experimental, indagar estas nociones matemáticas subyacentes empleadas en contextos culturales diversos (escolar-cotidiano, diferentes prácticas laborales), para así cuestionar la concepción académica de la inteligencia que excluye a la inteligencia práctica y a la importancia de la situación social como condicionante de la organización de las acciones que realiza un sujeto.

Convergiendo con los supuestos mencionados en torno a la inteligencia, y en definitiva a los modos de producción del conocimiento, es posible identificar dos líneas actuales de investigación referidas a la **“cognición en la práctica”** y al estudio de conocimientos previos y cotidianos.

Las investigaciones relativas a procesos cognitivos utilizados en prácticas cotidianas, buscan reconstruir la lógica matemática práctica utilizada por ejemplo en procesos de adquisición de productos alimenticios para una dieta (Lave, 1991). Cuestionando la división tajante entre Psicología y Antropología, contrastan la reconstrucción de esta lógica de los sujetos en distintos contextos (problemas “escolares” y compra en el supermercado), y en función de ciertas características sociales de estos sujetos (diferencias de género, roles en la división del trabajo familiar, niveles de ingresos y de escolaridad). La metodología empleada conjuga entrevistas, entrevistas clínicas y observaciones etnográficas de la preparación y realización del proceso de compra. Mediante estas formas intensivas de registro, se buscan establecer las prácticas y nociones aritméticas involucradas en las decisiones de compra.

Existen otros estudios que giran en torno a los conocimientos cotidianos de adultos de baja o nula escolaridad (Avila, 1990; Ferreiro y Fuenlabrada, et al., 1987; Mariño, 1986; Valiente, 1995), que se dedican a las **concepciones extraescolares de nociones matemáticas específicas**. Estos trabajos recurren para la indagación a entrevistas clínicas, y buscan dar cuenta de las lógicas y nociones matemáticas implícitas en las resoluciones no escolares de problemas. Entre sus resultados pueden citarse la reconstrucción de los algoritmos usados en el cálculo mental, así como el establecimiento de criterios para identificar niveles de desempeño en su utilización. Como puede vislumbrarse, estas producciones son un insumo relevante para este proyecto dada su estrecha vinculación con los diseños de secuencias para la enseñanza de los algoritmos convencionales.

En función de este interés, es que se desarrollarán algunos de los resultados de estas investigaciones, escogiéndose aquellos que planteen aportes diversos. En primer término, Alicia Ávila (1990) define como su interés de estudio algunas ausencias:

> “(…) no se ha estudiado si estos procedimientos [de cálculo no escolar] ocurren de manera diferenciada o si son comunes a todos los analfabetos (…) no se conocen los principios en que se basan los mecanismos de resolución. Tampoco se conoce la génesis y el desarrollo de tales procesos. (…)
>
> Vale la pena indagar, sin embargo, si en cualquier condición los analfabetos *sólo* pueden ver y pensar el mundo desde los datos de la experiencia o si, por el contrario, existen grados en la capacidad de abstracción y generalización dados por la intensidad y complejidad de la

experiencia. Esto es, se plantea el problema de la posible existencia de distintos grados de 'analfabetismo matemático'.

Queda por responder si el conocimiento de los símbolos está relacionado con la habilidad en el cálculo y si –como afirman Acioly y Días Schielman- el manejo de números grandes obliga a los sujetos a usar lápiz y papel; o, en un sentido inverso, si cierta complejidad en el cálculo constituye un límite precisamente porque no se cuenta con un sistema de escritura" (pp.57-58).

Así Ávila (1990) plantea interrogantes dirigidos a los tipos de cálculos construidos por los analfabetos y su génesis, la capacidad de generalización de los mismos, y el vínculo entre conocimiento de los símbolos numéricos y la habilidad para el cálculo.

En cuanto a las *estrategias de cálculo* (Avila, 1990, p.60), confirma los hallazgos previos sobre el uso de la adición como "estrategia universal del cálculo adulto no escolarizado" (p.60), y distingue tres grados de desarrollo a su interior: inicial, intermedio y final. Para ello emplea como criterios la eficacia, eficiencia[8], destreza, la necesidad de apoyo en objetos físicos y conteo, la capacidad de generalización, agilidad y flexibilidad. A partir de estos criterios los niveles son caracterizados en la siguiente forma[9]:

"El **nivel inicial** se caracteriza por una mezcla ocasional de los datos de la experiencia personal con los datos del problema matemático planteado.

Los sujetos realizan tanteos para resolver los cálculos, recurren al apoyo de objetos físicos (además del conteo con los dedos) para obtener las soluciones, y son incapaces de obtener resultados satisfactorios cuando aparece la reagrupación (en la suma) la desagrupación (en la resta) (…)

Asimismo, los sujetos del nivel inicial verbalizan sólo fragmentos de las estrategias de cálculo.

En el **nivel intermedio**, los sujetos ya no mezclan los datos de la experiencia personal con los datos del problema matemático planteado.

Los tanteos para resolver los cálculos han disminuido en relación con el nivel antecedente, así como la recurrencia a los objetos físicos para obtener las soluciones. En cambio ha aumentado la agilidad en los cálculos y la reagrupación y desagrupación han desaparecido como obstáculos. El residuo permanece como impedimento y las estrategias de cálculo, en la mayor parte de los casos, no son verbalizadas de forma sistemática y global.

---

[8] "eficiencia, es decir, número de tanteos necesarios para lograr resultados correctos; (…) eficacia, entendida como la capacidad de obtener resultados correctos;" (Avila, 1990, p.60)

[9] Se retomará de la caracterización realizada por la autora los rasgos generales y lo relativo a las operaciones que aquí interesan, es decir la suma y la resta, a pesar de que ella contempla también la multiplicación y división.

> El **nivel final** se caracteriza por la agilidad con que se resuelven los cálculos, por la ausencia de errores y tanteos (…), así como por la capacidad de obtener satisfactoriamente todos los resultados, de flexibilizar, complementar o modificar estrategias, y por la capacidad generalizada de verbalizarlas sistemáticamente. En este nivel, la reagrupación, la desagrupación y el residuo ya no son obstáculos para el cálculo, y el apoyo en objetos físicos se torna innecesario. (…) Además, es amplia la capacidad de generalización de las estrategias de cálculo (…)" (el destacado no aparece en el original; pp.60-61).

Estos niveles detectados son parte del desarrollo de las estrategias de cálculo y devienen de las exigencias de cálculo de la vida laboral y cotidiana de sus integrantes.

Otra contribución es reconstruir los *principios subyacentes* a las estrategias encontradas. En cuanto a la adición o suma, fue nominada "procedimiento indoarábigo" por su sentido decreciente (es decir, de los agrupamientos mayores a los menores identificados en el número descompuesto), vinculado a la lógica de manejo del dinero en la que primero se cuentan los billetes y luego las monedas. Respecto de la sustracción o resta, se trabaja con dos estrategias la de procedimiento indoarábigo -ya mencionada- y la de complemento aditivo. Su aplicación está vinculada a la complejidad del cálculo, si no existe desagrupación se acude al procedimiento indoarábigo, y la resolución de sustracciones con desagrupación se realiza mediante complemento aditivo. Esta última estrategia no aparece en el primer nivel, en el segundo emerge apoyada en el conteo y el uso de objetos físicos, para consolidarse en el tercero sin necesidad ni de apoyos físicos, ni tanteos, ni conteos.

La *capacidad de generalizar las estrategias de cálculo* varía también en función del nivel en que estén situados los sujetos. Así, los adultos del primer nivel -que presentan dificultades en esta capacidad- recurren a modalidades diferentes de fusión de los datos de su experiencia y los del problema: centralización en la experiencia particular; canjeo de los datos numéricos del problema por los datos de la experiencia personal; canjeo del contexto del problema –y conservación de los datos numéricos- para reinterpretarlo y resolverlo con base en una acción conocida; yuxtaposición, o sea, intento de solución con los datos del problema hipotético y regreso, en una etapa avanzada del proceso de resolución, a los datos de la experiencia personal.

Finalmente, el vínculo entre conocimiento de los símbolos numéricos y capacidades de cálculo analfabeto es negado:

> "(…) no existe relación entre el uso de símbolos numéricos o la posesión de un sistema gráfico de registro, y el desarrollo de estrategias de cálculo. No contar con un sistema gráfico

de registro no es un obstáculo para el cálculo y, en sentido inverso, contar con él tampoco asegura el desarrollo del mismo: las estrategias analfabetas de cálculo son, finalmente, estrategias ágrafas. (…) en el cálculo analfabeto, el sistema de registro –necesario fundamentalmente en el primer nivel- se constituye a partir de los dedos de las manos, las monedas y los billetes, cuya manipulación sustituye la posesión de un código gráfico" (pp.83-84).

Desde estos hallazgos Alicia Ávila formula algunas reflexiones que se erigen en ámbitos de debate para la enseñanza a adultos: la opción por consolidar y desarrollar estas estrategias de cálculo mediante su formalización o por introducir los algoritmos escolares; la diversificación de la experiencia como estrategia frente a los distintos niveles de resolución; el cuestionamiento de tácticas uniformes para destinatarios diversos en sus conocimientos previos.

Ferreiro y Fuenlabrada, et al. (1987) presentan una indagación de conceptualizaciones matemáticas de adultos no alfabetizados en relación con la resolución de problemas aritméticos, a la producción e interpretación de representaciones gráficas y a los objetos portadores de signos. Debido a la temática objeto de este proyecto se profundizará a continuación en los dos primeros tópicos, excluyendo el tratamiento del tercero, ya que los portadores no constituyen conceptualizaciones centrales en esta tesis sino situaciones de uso de las nociones en juego.

En cuanto al *desempeño en la resolución de problemas aritméticos*, en esta investigación de carácter exploratorio, se delimitaron tres niveles de desempeño (alto, medio, bajo), en función del tipo de números involucrados (números redondos o compuestos), la rapidez en la respuesta (acertada o aproximada) y el tipo de operaciones aritméticas que el sujeto es capaz de abordar con soltura. Se identificaron, a su vez, procedimientos generales de resolución (recuperación de un resultado ya conocido, estimación y descomposición de las cantidades); procedimientos compartidos por algunas operaciones (aproximaciones sucesivas, para la división y la resta; suma iterada, para la multiplicación y la división); y procedimientos específicos de la suma (diversas formas de descomposición, y la formación de números compuestos), de la resta (complemento aditivo, transformación del minuendo y sustraendo para cancelar cantidades iguales, transformación del minuendo o del sustraendo para trabajar con cantidades más accesibles), y de la división (descomposición del dividendo o del divisor). En estos procedimientos subyacen elementos matemáticos implícitos referidos a propiedades de los números naturales (su descomposición) y de las operaciones (propiedad asociativa, conmutativa y de cancelación de la suma; propiedad distributiva de la multiplicación y división respecto a la suma). Estas propiedades subyacen también en los algoritmos convencionales.

Respecto de la *representación gráfica*, por un lado, se identificaron cinco niveles de desempeño en la producción de signos: uso convencional de signos sin dificultad; uso convencional de signos con dificultad (en el valor posicional, en cifras de dos y más dígitos, en cifras con ceros); utilización de signos con criterios no convencionales; utilización de representaciones gráficas individuales (recuperando los aspectos figurales del objeto, grafías únicas, grafías por correspondencias biunívocas con las cantidades); y no utilización de representaciones gráficas. Y, por otro lado, se categorizaron cuatro niveles de desempeño en la *interpretación de signos*: interpretación convencional sin dificultad; interpretación convencional con dificultad (las mismas evidenciadas en la producción de signos); interpretación individual (interpretación de numerales como letras, a la inversa o indistintamente; confusión entre numerales de un dígito; interpretación de signos no numerales como otros signos); y la no interpretación de los signos.

En virtud de los conocimientos encontrados en los adultos entrevistados, se enuncian *consideraciones generales para el trabajo pedagógico en cursos de alfabetización*, a saber: partir de situaciones que permitan a los sujetos tomar conciencia de su saber; incorporar y vencer las resistencias a instrumentos de registro (lápiz y papel); trabajo individualizado para adecuar las situaciones didácticas a los niveles heterogéneos de conocimiento matemático; organizar la enseñanza en función de aquellos conocimientos que no poseen ya los adultos; desarrollo simultáneo de la representación convencional de los números y de algoritmos propios; propiciar y validar la estimación de resultados; considerar el manejo previo de las propiedades en que se sustentan los algoritmos en su enseñanza y permitir modificaciones al algoritmo convencional; propiciar que los sujetos tomen conciencia de sus procedimientos de resolución de operaciones; no limitar los problemas a aquellos planteados en términos de suma; no restringir los problemas a las cantidades que tradicionalmente se consideran más fáciles; y utilizar problemas contextuados y significativos.

Otro estudio relevante, es el realizado por Valiente (1995), en el que se indagaron mediante entrevistas y cuestionarios, puntualmente los procedimientos de resolución de operaciones aritméticas elementales.

Como resultado de este estudio de casos se obtuvieron 17 algoritmos de resolución de las cuatro operaciones básicas (suma, resta, multiplicación y división). No obstante, el procedimiento general detectado fue la descomposición de uno de los datos o los dos, en dos o tres sumandos para operar con resultados parciales a partir de dicha descomposición. A su vez, las operaciones con números decimales son convertidas a operaciones con números naturales, colocando el punto decimal al final del proceso de resolución. Es decir, que se reducen las operaciones a aquellas más fáciles de operar mentalmente, dado que los sujetos no dominan las acciones escritas convencionales. También se vio como recurrente que los sujetos muestran más habilidades para resolver problemas contextualizados que operaciones con datos abstractos.

Interpelando las experiencias alternativas

Asimismo, existe un conjunto de experiencias alternativas para dicha enseñanza o de sugerencias didácticas y curriculares (Avila, 1997; Avila y Waldegg, 1994; Mariño, 1997; Soto, 1997), así como materiales recientes del Modelo de Educación para la vida del INEA (Instituto Nacional de Educación de Adultos) editados en el 2000. Algunas de estas producciones (Ávila, 1997; y Ávila y Waldegg, 1994) especifican algunos criterios generales para la enseñanza de las matemáticas a adultos, a saber: promover la interacción como forma de construcción del saber; diversificar la experiencia para avanzar en los niveles de generalidad de los conocimientos previos; vincular-desvincular el conocimiento y los contextos específicos de la experiencia; articular el aprendizaje con intereses y expectativas vitales; llevar desde la forma específica con que opera el adulto a las formas y procedimientos convencionales. Para ello se proponen algunos ejes que articulan las propuestas curriculares: la vinculación con el mundo de las experiencias vital y laboral; y la consideración de los intereses y necesidades diversos de los diferentes grupos de población (mujeres, urbano-marginales, campesinos, jóvenes).

Pueden señalarse como importante en algunas de estas experiencias, la búsqueda de formas de escritura intermedias que reflejen los procedimientos encontrados en la resolución mental, recurriendo al desocultamiento de los procesos de descomposición numérica subyacentes en los algoritmos convencionales.

Específicamente, Mariño (1997) analiza la enseñanza de algoritmos en diferentes experiencias de alfabetización, a la luz del tipo de recuperación que se realiza de los saberes previos de adultos no alfabetizados. Sustenta este análisis el supuesto del reconocimiento de la existencia de saberes matemáticos previos y no escolares de jóvenes y adultos. Este supuesto se fundamenta en resultados de investigaciones que señalan: el uso de algoritmos diferentes a los empleados convencionalmente para la resolución de las cuatro operaciones básicas (suma, resta, multiplicación y división). Entonces, arguye que la principal dificultad del adulto no la constituye su carencia de conocimiento sino la carencia de escritura, ya que puede operar aunque con otra lógica.

Partiendo de este reconocimiento de saberes matemáticos previos la problemática es cómo incorporarlos a la enseñanza. El autor distingue dos posturas: la tendencia populista, que reifica los saberes populares; y la perspectiva del diálogo cultural, que propone el intercambio entre saber popular y saber académico. Esta última postura, asumida por el autor, se traduce en la recuperación simultánea de estrategias de cálculo mental y de la notación convencional en el proceso de enseñanza de algoritmos. Argumenta esta opción del autor el análisis que presenta de las potencialidades y limitaciones de propuestas de alfabetización en diversos países de América Latina, que oscilan también entre las dos tendencias mencionadas.

No obstante este posicionamiento del autor, en esta escritura simultánea de ambas notaciones se observan algunas dificultades. Este paralelismo consiste en la escritura por un lado, de una forma de notación que recupere los procedimientos usados por los adultos (como los ya mencionados de descomposición y de resolución en el sentido de las mayores cantidades hacia las menores), y de la notación convencional que demanda una escritura posicional y una resolución en el sentido opuesto, es decir de las menores cantidades hacia las mayores, como puede verse en el ejemplo[10] siguiente:

Estefanía le dio a su mamá 147 mangos y a su cuñado 85 mangos. ¿Cuántos mangos le dio?

100	40	7	**147 +**
	80	5	**85 =**
100			
100	20		
	10	2	
200	30	2	**232**

(Mariño, 1997, p.95)

[10] Este ejemplo es extraído por Germán Mariño de las cartillas producidas en el *Proyecto movilizador de alfabetización y educación básica para todos* (1990), Ministerio de Educación de El Salvador, proyecto en el cual Mariño participó como consultor.

Un primer posible cuestionamiento es que la articulación entre ambas notaciones es presentada, no constituida en objeto de reflexión. Otra consideración es que el conocimiento que articula ambas notaciones en realidad es, según lo que se argumentará posteriormente, el conocimiento del sistema de numeración.

En cambio, la propuesta del INEA recupera el cálculo mental como modo inicial de cálculo, no siendo objeto de escritura mediante algoritmos alternativos ni articulado con la presentación posterior de los algoritmos convencionales. En los materiales analizados (INEA, 2000a; INEA, 2000b; INEA, 2000c; INEA, 2000d; INEA, 2000e; INEA, 2000f; INEA, 2000g; INEA, 2000h; INEA, 2000i; INEA, 2000j; INEA, 2000k) se pudieron identificar dos planos analíticos diversos: los propósitos y sus modos de concreción en criterios de secuencia y de organización de actividades.
Las metas que parecen subyacer en algunas orientaciones para los asesores son la búsqueda de estrategias para revertir modelos escolares previos memorísticos y repetitivos, al mismo tiempo que se pretende recuperar y valorizar los saberes anteriores de los adultos. El primer propósito mencionado se explicita por ejemplo en el siguiente discurso:

> "Recuerda que los ejercicios tradicionales y repetitivos son poco provechosos y poco interesantes para los adultos y que, más bien, es importante que reflexionen y utilicen diversas estrategias al resolver los problemas que se han planteado" (INEA, 2000h, p.29).

El segundo propósito general, legitimar y rescatar los saberes previos de los adultos, se evidencia por ejemplo en el fragmento que sigue:

> "El propósito del módulo de *Matemáticas para empezar* es que al término de su estudio, usted desarrolle habilidades y formalice los conocimientos que tiene sobre algunos aspectos básicos de:
>
> - geometría - medición
> - resolución de problemas - conocimiento de números hasta de 6 cifras y …
> - al mismo tiempo ¡aprenda a hacer operaciones de suma y resta!
> - Hasta ahora, usted ha resuelto los problemas que la vida le ha planteado, o ¿no?
> - ¡Sí! No se sorprenda. Usted ya posee muchos conocimientos que ha adquirido en su vida diaria y en la convivencia con otras personas" (INEA, 2000ª, pp. VI-VII).

Asimismo, puede reconocerse una mirada no ingenua de este último objetivo pues simultáneamente se atienden las recomendaciones hechas por algunas autoras (Avila y Waldegg, 1994) de diversificación de los contextos vitales y de incorporación del saber tanto informal como escolar. La diversificación de contextos[11] se manifiesta en la presencia de una variedad de situaciones y espacios en que se presentan las nociones para darle familiaridad y situarlas en modos sociales de uso. Así se recuperan los contextos siguientes:

- *Datos personales*
- *Documentación* (boleta de calificación, credencial IFE, recibos, acta de nacimiento, certificado del INEA) y otros *portadores* (receta médica, calendario, nota de remisión, solicitud de empleo, cartilla del servicio militar, lista de compras, abono mensual, periódico)
- *Trabajos, producciones y servicios existentes en el país.*
- *Transportes masivos:* contador del metro, número de estaciones de cada línea de metro.
- *Juegos:* inventados o existentes.
- *Estadísticas:* medios de traslado al trabajo, viviendas, habitantes, votaciones, alfabetización, capacitación, temperaturas en el país, de producciones, etcéterera.
- *Ganancia o salario, y gastos diarios o mensuales, descuentos salariales.*
- *Pago de impuestos y servicios* (cálculo del gasto y vuelto).

La incorporación simultánea del saber escolar y formal aparece como conflictiva, pues no son claros siempre sus modos y la intensidad de su articulación, poniendo en tensión la concreción del propósito de "formalización de conocimientos previos". Cabe señalar que el uso de los contextos ya aludidos posibilita una ruptura con planteos de materiales anteriores que eran "autocontenidos", debido a "(…) la ausencia de referencias al saber, las actividades y necesidades cotidianas (…)" (Avila, 1993, p.68). Sin embargo, simultáneamente, los criterios de secuencia contradicen este principio de interacción del saber informal y el escolar pues persisten los modos de enseñanza lineal de la numeración y de la aritmética, como puede vislumbrarse en la reconstrucción de la secuencia de enseñanza de ambas nociones:

Número	▪ del 1 al 9 ▪ del 1 al 20 ▪ del 0 al 100 (0 al 20, 20 al 30, 0 al 100) ▪ agrupamiento en unidades, decenas y centenas (u, d y c) ▪ hasta el 1 000 ▪ identificación y equivalencia entre u, d, c y unidades "de millar" ▪ hasta el 100 000 (hasta el 10 000, hasta 90 000, hasta 100 000) ▪ identificación y equivalencia entre en u, d, c, unidades y decenas "de millar" ▪ hasta 1 000 000
Situaciones de: comparación, lectura y escritura de números y sus nombres. Luego se pide la identificación de los agrupamientos bajo su nominación convencional (u, d, c,…). Habitualmente la presentación de los primeros agrupamientos recupera algún contexto plausible (paquetes, cajas, pilas de tablones de madera, plantíos, grupos de certificado, ábaco de papel) o representación gráfica, para posteriormente prescindir de ellos en agrupamientos mayores.	

[11] Cabe señalar que la diversificación de contextos también se vehiculizó en los "módulos alternativos" de Matemáticas (que se entregan bajo petición especial) presentes –de los niveles analizados, Inicial e Intermedio- en el Nivel Intermedio: "Números y cuentas para el hogar", "Números y cuentas para el comercio", "Números y cuentas para el campo".

Problemas Aditivos	■ resolución “libre” con explicación del procedimiento ■ cálculo mental, explicitación de estrategias viables de sujetos hipotéticos (se recuperan las documentadas en investigaciones) ■ presentación del algoritmo (con dígitos, con bidígitos[12] –luego de presentar las unidades, decenas y centenas- del 10 al 20, hasta 50, del 50 al 100, problemas con uso del cero) ■ en la resolución de problemas con bidígitos se introduce la explicación del procedimiento (sentido de derecha a izquierda, primero sin canje y luego con canje –también se explica este reagrupamiento o desagrupamiento-) y se reiteran estas instrucciones en los tridígitos; y luego de explicado el procedimiento, se aplica en situaciones con contexto y en “cuentas” aisladas.

Los supuestos que subyacen serían algunos de los ya mencionados por Alicia Ávila en el análisis de otros materiales, a saber: “a) la serie numérica está por conocerse y construirse; b) la serie numérica se construye linealmente (…)” (Avila, 1993, p.62). Cabe señalar, sin embargo, que la adhesión a estos supuestos puede devenir no de una opción vivida como ideal, sino como plausible, pues esta graduación de los contenidos puede haber sido diagnosticada como una práctica que facilita la gestión del espacio áulico por los asesores. Así, persiste la duda de los motivos de esta decisión: ¿prevalecen evaluaciones de condiciones de recepción de los materiales o asunciones sobre los modos de construcción de la noción involucrada?

Independientemente de los motivos detrás de la decisión, esta linealidad de la construcción de la serie contradice la posibilidad de recuperar las regularidades visualizadas en el sistema numérico cuando se le aborda de modo no tan fragmentado -esto se profundizará en el Capítulo II, en la revisión del trabajo de Lerner y Sadovsky (1994)-. Esta fragmentación por agrupamientos imposibilitaría recuperar y argumentar las regularidades que construye –en grados diversos- cualquier usuario del sistema de numeración. Asimismo, la presentación de los agrupamientos del sistema decimal de numeración es mediante colecciones organizadas, y no como estrategia del sujeto para el conteo y, si bien propende a la identificación de los mismos, no recupera en su tratamiento los conocimientos previos de los sujetos sobre las leyes de escritura de este sistema simbólico, en tanto restricciones que se asientan en las leyes de posicionalidad y de cambio del sistema de numeración.

La linealidad de la construcción de los algoritmos adhiere a un supuesto que es compartido por este trabajo, la necesidad de familiaridad con las leyes del sistema de

[12] Se denominarán **bidígitos** a los números de dos cifras. Así como se aludirá con **tridígitos** a los números de tres cifras, y con **cuatridígitos** a los números de cuatro cifras.

numeración para poder operar con él. No obstante, el tipo de tratamiento propuesto para el sistema de numeración decimal focaliza la identificación y equivalencias entre agrupamientos no siendo propedéutico para desentrañar la lógica subyacente del algoritmo, pues no se fomenta el trabajo de reagrupamientos[13] y desagrupamientos[14] en situaciones de transformación vinculadas a necesidades operatorias. Por ello, el algoritmo aparece como una técnica presentada, donde el procedimiento de resolución es desgajado de su imbricación con las leyes del sistema en que opera y de su vínculo con la eficacia. Así, una vez abordado el sistema de numeración con las características enunciadas, se muestra la resolución algorítmica (luego de una primera aproximación mediante sumas horizontales calculadas mentalmente) del siguiente modo:

"**Otra forma como se pueden encontrar estos totales, es sumando en columnas.**
Para saber cuántos labiales son por las dos semanas, ***sumamos:***

	Decenas	Unidades	
	D	U	
Labiales de la primera semana	1	8	
Más			+
Labiales de la segunda semana	2	1	
Total de labiales para dos semanas	**3**	**9**	

- ¿Cómo se suma?

Primero: se colocan las unidades de las cantidades que deseamos sumar, en la columna de las unidades y las decenas, en la columna de las decenas.

Decenas	Unidades	
D	U	
1	8	
2	1	+

Segundo: se *suman* o se *juntan* las unidades con las unidades.

Decenas	Unidades	
D	U	
1	8	
2	1	+
	9	

Decenas Unidades

[13] Reagrupamiento: acción de cambiar 10 de un grupo menor por 1 del inmediatamente mayor, comúnmente llamado "llevar"

[14] Desagrupamiento: acción de cambiar 1 de un grupo mayor por 10 del inmediatamente menor, comúnmente llamado "pedir"

Tercero: se *suman* las decenas.

D	U	
1	8	+
2	1	
3	**9**	

(INEA, 2000b, pp.48-49; destacado en el original)

Así, el sentido de encolumnar y de la dirección del cálculo, no son explicitados pues no se involucra al adulto en un proceso de optimización y comprensión de esta técnica. Además no queda claro el nuevo lugar del cálculo mental una vez instaurado este mecanismo, pues no se efectúan pedido de estimaciones o de rectificaciones mediante su empleo. A su vez, las transformaciones son abordadas también siendo presentadas y no tematizadas[15]:

"**Primero:** se suman las unidades
con las unidades.
En este caso observamos
Que al sumar 5 + 7 obtenemos 12.
El número 12 está compuesto
Por 2 unidades y 1 decena:

Decena
1

D	U
1	5
2	7
	2

Unidades

Por eso sólo escribimos el **2**
en el lugar de las **unidades.**
El 1 que corresponde a **una decena,**
Lo agregamos en el lugar de las decenas:

D	U
1	5
2	7
4	**2**

(INEA, 2000b, p.51 ;destacado en el original)

Áreas de interés en la red internacional ALM

Recientemente ALM (Adults Learning Mathematics), un foro de investigación internacional fundado en 1994, ha difundido algunas de sus producciones en una publicación (Coben, O´Donoghue, y FitzSimons (Eds.), 2000) que adquiere el carácter de un "estado del arte" del campo. Este compendio está organizado en cuatro grandes áreas de interés reseñadas en cada una de las cuatro secciones del libro: perspectivas

[15] "La noción piagetiana de *tematización* es esencial para comprender esto. Significa que algo que ha sido inicialmente utilizado como instrumento de pensamiento puede convertirse en un objeto de pensamiento, cambiando al mismo tiempo su estatus en tanto elemento del conocimiento. (…)
La tematización implica pues un cierto grado de toma de conciencia" (Ferreiro, 1998, p.33)

de investigación en el aprendizaje adulto de matemática; adultos, matemáticas, cultura y sociedad; adultos, matemáticas y trabajo; perspectivas en enseñanza matemática a adultos.

La sección I, relativa a "Perspectivas de investigación en aprendizaje adulto de matemática", algunas de sus líneas se relacionan, por ejemplo, con:

- la indagación de "historias matemáticas de vida", con una preocupación tanto por hacer tangible las "matemáticas invisibles"[16] -dado su vínculo con el sentido común-, como por explorar el significado de las matemáticas en las vidas adultas;
- el empleo del método piagetiano clínico en la indagación de nociones matemáticas de adultos con baja escolaridad, afirmando la posibilidad de transferencia de conocimientos entre contextos;
- la importancia de considerar la tensión entre los dominios cognitivos y afectivos (auto-percepción sobre posibilidades de éxito en matemáticas, constituida en relación con las experiencias anteriores y los estilos de enseñanza vividos) del aprendizaje, y de intervenir en ella desde la enseñanza.

La sección II, "Adultos, Matemática, Cultura y Sociedad", gira en torno a las implicancias sociales de la educación matemática de adultos, con una preocupación por formas más equitativas de distribución de la educación matemática. Bajo esta intención reflexiva y de intervención, se habla del "empoderamiento" que posibilita esta disciplina y de su inscripción en movimientos sociales. Además se retoma "lo social" en otro sentido, como son las miradas posibles de la matemática como disciplina (como infalible, objetiva, cierta y neutral, o como construcción social); o la importancia de la "alfabetización estadística" para la formación de una ciudadanía efectiva; o, finalmente, la incidencia de factores culturales y de la afectividad (auto-identidad, relaciones con otros, creencias sobre las matemáticas) en las estrategias de resolución de problemas aplicadas por los adultos.

La sección III, "Adultos, Matemáticas y Trabajo", presenta varios aportes en el sentido de reconocer saberes matemáticos involucrados en los lugares de trabajo (incluso los femeninos), establece los conocimientos necesarios que califican para el cambio tecnológico, y reseña la situación de la matemática en la educación vocacional y en los sistemas de entrenamiento o adiestramiento. En este marco, se identifica a la

[16] "The mathematics one can do but wich one does not recognise as mathematics, we term 'invisible mathematics' (…)" (Coben, 2000, p.55)

"numeracy"[17] como una competencia transversal del mercado de trabajo y contextualizada. Subyace en esta sección el propósito de la inclusión de la matemática en una enseñanza desde los lugares de trabajo.

La sección IV, "Perspectivas en Enseñanza Matemática a Adultos", expone cursos experimentales (enseñanza de álgebra a nivel universitario); así como propuestas de revisiones curriculares (en el mismo nivel educativo, bajo la premisa de matematizar y trabajar con problemas reales). También problematiza sobre: diseños de instrumentos de evaluación de "numeracy"; cómo enseñar matemáticas para que pueda ser transferida; y la escasa formación docente de aquellos que trabajan en "numeracy" adulta. La preocupación y premisa común de estos estudios es la especificidad de la enseñanza matemática a adultos y sus problemáticas, adhiriendo a la importancia y la centralidad de los intereses y necesidades de los adultos.

Estas áreas de investigación y práctica, si bien esbozan planteos y nociones relevantes para esta tesis, denotan a la vez la falta de experiencias didácticas de enseñanza en el campo de "numeracy", pues las reseñadas en la última sección no abordan esta temática salvo desde la problemática de su evaluación.

Acerca de las ausencias

Como pudo evidenciarse en este esbozo del acervo teórico propio y cercano a la temática de la enseñanza de algoritmos de las operaciones básicas a adultos de baja o nula escolaridad, existen también algunas ausencias que sustentarían la necesidad de su abordaje. Entre ellas puede citarse el estudio científico de situaciones didácticas para la enseñanza de nociones matemáticas a adultos, qué especificidades y variables didácticas deben ser manipuladas en su diseño. Si bien se han mencionado algunos supuestos didácticos generales no existen trabajos que den cuentan de este tipo de variables vinculadas más directamente con el diseño de situaciones.

Además ya se anticipó que las propuestas reportadas, procurando integrar saberes previos, los constituyen objeto de escritura no tematizando las dificultades existentes para la traducción entre ambas notaciones. A su vez, se identificó como saber que propiciaría esta articulación entre algoritmos mentales y convencionales, a los principios del sistema de numeración decimal. Este presupuesto a indagar se sustenta en la

[17] "The term 'numeracy' was introduced for the first time in the United Kingdom in the late 1950s as a parallel to the concept of 'literacy' (Cockroftt, 1982). The need was felt for a concept to cover necessary, basic arithmetical operations corresponding to the concept used for reading and writing skills" (Wedege, 2000, p.196)

premisa de que los algoritmos para la resolución de operaciones básicas se asientan en los principios constitutivos del sistema de numeración en el que operan.

Estas ausencias y disidencias justifican entonces la pertinencia de un estudio que procure desentrañar las variables didácticas a regular en el diseño de una secuencia de enseñanza.

En este proyecto se postuló específicamente como hipótesis a indagar que las formas de enseñanza alternativas mediante la dotación de escritura a cálculos y algoritmos mentales previos, enfrentan en realidad dificultades derivadas de la escasa toma de conciencia de algunos principios del sistema de numeración decimal. Es por ello que se planteó como diseño opcional a probar, la enseñanza previa de este sistema como propedéutica de cambios en las estrategias de los sujetos en el sentido de las demandadas por los algoritmos convencionales de la suma y la resta.

En esta enseñanza se recuperaron las nociones previas de los adultos sobre los números, en función de sus posibilidades e hipótesis en la producción e interpretación de los mismos. El sentido de los conflictos planteados y de su secuencia se constituyó a partir de estas nociones. A su vez, es importante puntualizar que si bien la noción en juego son los principios que fundamentan el sistema de numeración con el que habitualmente se escriben los números (los agrupamientos decimales y los valores posicionales), esto no significa que se asuma de antemano la adopción de ciertas modalidades de enseñanza explícita de estos principios (como se analizará en el Capítulo II). En cambio, se recuperaron las experiencias cotidianas de representación de cantidades y de cambio en el ámbito comercial como recurso y contexto para hacer concientes los principios del sistema de numeración, y así desentrañar la lógica subyacente en los algoritmos convencionales.

Procedimiento general para abordar el objeto de estudio

Preguntas iniciales que guiaron el proyecto

El problema mencionado de este estudio, es decir, el diseño de una secuencia didáctica para la enseñanza de algoritmos convencionales de suma y resta a adultos de baja o nula escolaridad, demandó preguntas más específicas que orientaron el proceso de diseño. Estas preguntas se conformaron a partir de esta problemática y en función de los aportes de los antecedentes revisados, tanto en términos de presencias como de ausencias, siendo las siguientes:

¿Cómo recuperar las nociones previas de los adultos y tender a la vez a su extensión mediante la apropiación de la simbolización numérica?
¿Qué características debe reunir una estrategia de intervención para la enseñanza de algoritmos de las operaciones básicas de suma y resta para adultos no alfabetizados que promueva procesos de simbolización con sentido?
Y puntualmente: ¿Qué incidencia tiene el aprendizaje de la escritura e interpretación de símbolos numéricos en el mejoramiento de las estrategias espontáneas de cálculo de las operaciones de suma y resta?

Opción metodológica

En este apartado se manifestarán asunciones metodológicas de corte general, es decir, la metodología en la que se inscribe esta investigación, una descripción de los instrumentos empleados y una somera anticipación de sus criterios de análisis y de sus resultados.
La metodología adoptada fue la de ingeniería didáctica (Chevallard, 1982; Artigue, 1995), pues la problemática ameritaba un enfoque de intervención y de investigación que posibilitara la resolución de un problema concreto, es decir –en esta investigación- el acceso a la simbolización matemática, particularmente de la numeración, la operatoria (de suma y resta) y los problemas correlacionados.
El interés en la inscripción en esta metodología devenía, además de la problemática de la intervención como preocupación subyacente a esta metodología, de su inclusión del análisis de las concepciones de los estudiantes, lo que posibilitaba la recuperación de las trayectorias de los sujetos respecto de los contextos y niveles de competencia matemática, suministrados por entrevistas. Asimismo, se optó por esta metodología por la delimitación que realiza del campo de la didáctica, por su lógica de validación y sus fases en tanto metodología de investigación. La virtud de esta noción surgida en el contexto de la teoría de las situaciones, es la de procurar incluir en el campo de la didáctica tanto conocimientos producidos en el ámbito científico como las problemáticas de la acción, mediante realizaciones didácticas efectivas y no meras recomendaciones prescriptivas y externas para la acción. Es por ello que no recurre a metodologías externas a la clase sino a estudios de caso, que a diferencia de la experimentación clásica, procede por una validación interna confrontando análisis a priori y análisis a posteriori.

Entendida como metodología de investigación, la ingeniería didáctica tiene un proceso temporal en el que pueden distinguirse fases (Artigue, 1995): análisis preliminares; concepción y análisis a priori de las situaciones didácticas; experimentación; análisis a posteriori y evaluación (estas fases serán desarrolladas ampliamente en el Capítulo II).

En el proceso de diseño e implementación de la secuencia se recurrió a estas fases para ir alimentando el proceso de intervención y para realizar una evaluación final de sus alcances. No obstante, no debe entenderse que estas fases se realizarán en el orden mencionado dado que los análisis iniciales, parciales y finales demandaban, en ocasiones, predicciones y evaluaciones tanto generales como más locales, durante el transcurso mismo de la secuencia. Por ello, sesión a sesión se acudió al análisis a priori y a posteriori que conformaron los análisis parciales que posibilitaron ir ajustando y diseñando la secuencia.

Constitución del referente empírico

Referente empírico y condiciones de funcionamiento. En el planteamiento inicial de esta investigación se había establecido como referente empírico a un grupo de seis adultos de baja o nula escolaridad que ya estuviera constituido formal (grupo de alfabetización) o informalmente.

El grupo no pudo ser contactado ni constituido debido a diversos motivos. En primer término, se intentó detectar uno en el INEA pero el grupo de alfabetización ofrecido con mayor cantidad de miembros (2) no llegaba a cubrir la composición numérica esperada (6). Además, cuando se conoció al grupo se constató que sus integrantes no coincidían permanentemente en el horario y días de cursado dadas sus obligaciones familiares y laborales. Ante este funcionamiento complejo e inestable, se optó por no trabajar con un grupo en este contexto. Por ello se procuró formar uno convocándolo desde una organización cooperativa de mujeres de una Colonia popular. Este intento también resultó fallido, no se logró formarlo pero sí, contactar a una mujer que, a pesar de su interés, por dificultades de salud y su horario de trabajo, no podía asistir a un “curso”.

Frente a la imposibilidad de poder constituir un grupo para la realización del trabajo en todo este proceso de búsqueda en diversos espacios posibles para su realización, y dado que en dicho proceso se entrevistó a las interesadas constatando que eran en sí casos atractivos dada la diversidad de puntos de partida, se decidió redefinir el referente empírico. Es así que la investigación viró hacia un estudio en casos por el interés que generó la continuidad del trabajo con las mujeres contactadas[18], y porque se visualizó como opción más pertinente a las condiciones de la población destinataria de la propuesta (inestabilidad de la asistencia a instituciones como el INEA, imposibilidad de asistencia por el desempeño laboral). La modalidad de trabajo individual permitió una inserción que garantizara la continuidad y el sostenimiento de la propuesta, concurriendo al lugar de trabajo (puesto de dulces) de la entrevistada (Carmen) que no podía asistir a una institución y, posibilitó ir al INEA en horarios y/o días diferentes según las obligaciones y dificultades de las entrevistadas. Además esta adaptación supuso ciertas posibilidades como el seguimiento individual y el consecuente ajuste inmediato del diseño de la secuencia. Pero a la vez acarreó algunas desventajas por la ausencia de pares con quienes confrontar, lo cual conllevó algunos recaudos respecto al proceso de validación, que serán especificados en el Capítulo siguiente.

Las mujeres entrevistadas poseen algunos rasgos comunes, son migrantes y utilizan conocimientos matemáticos en el ámbito comercial. Carmen, con la que se trabajó en su puesto de dulces, tiene 46 años y es de Toluca, y logró cursar hasta segundo grado de primaria. En cambio Sofía y Olga, contactadas en un grupo de alfabetización del INEA, no poseían escolaridad previa, tienen 25 y 28 años (respectivamente), provienen de los estados de Hidalgo y de Guerrero y trabajan como empleadas domésticas. La descripción de sus desempeños está ampliamente caracterizada y analizada en los Capítulos III y IV.

Esta redefinición del referente empírico, junto con las entrevistas de indagación de saberes matemáticos previos y de antecedentes escolares, conllevaron otras constricciones en la implementación de la secuencia que ameritan ser mencionadas.

En primer lugar, trabajar en los contextos mencionados produjo condiciones específicas de funcionamiento. Así, interactuar con Sofía y Olga en el INEA supuso encontrarse con estilos propios del “punto de encuentro” en el que se trabajó y particularmente, una convivencia con contratos didácticos del espacio de la asesoría. Entre otros, puede mencionarse aquellos que fueron advertidos más fuertemente en la secuencia por la entrevistadora a través de las propias entrevistadas que le mostraban, por iniciativa propia, sus materiales de trabajo y sus cuadernos para poner en evidencia sus avances, para consultarle dudas o, incluso, usándolos como auxiliares.

[18] El nombre de las entrevistadas se cambió para salvaguardar su identidad. En este trabajo se refiere a ellas con los nombres: Carmen, Sofía y Olga.

En estos intercambios no previstos llamó la atención una situación, que será relatada en el Capítulo III (en el que se presentan breves semblanzas de cada una de las entrevistadas, en términos de sus datos personales, de su vínculo con el saber inicial e inferido de sus comportamientos en la implementación de la secuencia). Sofía recurre a notas de su cuaderno donde había indicaciones para la resolución de los algoritmos respecto a "por dónde empezar", "en qué sentido ir". Lo cual, como se verá, esbozaba indicios de la probable valorización de lo simbólico en el espacio de la asesoría y de sus modos de control meramente simbólicos, es decir de la ausencia –quizás- de referentes para ejercer este control.

Otro gesto que devino interesante por su reiteración estuvo referido al conteo, pues las dos entrevistadas (uso del conteo "bajo la mesa" en Sofía, y desplazamiento de este recurso inicial en Olga) mostraron indicios de que su uso estaba vedado, o existía alguna necesidad de discreción en su utilización a pesar de su empleo inicial.

Finalmente, otro dato relevante fue respecto al uso del tiempo. En el transcurso de la implementación de la secuencia pudo observarse, desde los intercambios imprevistos y desde las manifestaciones de la directora sobre los avances de las entrevistadas, que el uso del tiempo en estos espacios simultáneos (la secuencia y la asesoría) difería, pues se avanzaba con más celeridad en la asesoría del INEA.

En el caso de Carmen, trabajar en el puesto de dulces supuso condiciones diversas. El uso de este espacio generó continuas interrupciones pues la entrevistadora estaba interviniendo mientras la venta se realizaba, lo que significaba una dinámica del uso de reiteraciones para inscribir nuevamente a Carmen en lo que se venía trabajando. Si bien aparentemente la ausencia de inserción institucional podría a la vez significar la "no intromisión" de otros contratos en la secuencia, se verá que las instituciones escolares pueden vincularse a la trayectoria de un sujeto que está en sus márgenes a través de mediaciones. Así, el seguimiento que Carmen realiza de la escolaridad de una de sus nietas constituye un contacto que le proporciona ciertos indicios sobre el funcionamiento escolar del conocimiento, lo cual se desarrollará con más detalle en su semblanza –en el Capítulo III-.

Además existieron condicionamientos impuestos por la propia lógica de esta investigación, pues las dos entrevistas que se realizaron para explorar nociones matemáticas previas y trayectorias escolares, instalaron algunas premisas que rigieron luego el desarrollo de la secuencia.

Una de ellas fue el seguimiento personal. Al incluir como una sección de la 1ª entrevista el pedido de información sobre su historia escolar, vinculada sin duda a sus historias de vida, este pedido operó a la vez como una exigencia de compromiso a la entrevistadora. En la secuencia fue recurrente la presencia de espacios al empezar o al culminar la sesión donde se hablaba y, por ende, se seguían las problemáticas y preocupaciones de las entrevistadas. Este modo de acompañamiento generó una disposición favorable hacia el aprendizaje que contribuyó al sostenimiento de la propuesta, pues lejos de garantías meramente institucionales su continuidad dependía fundamentalmente del compromiso e interés personal de las entrevistadas.

A su vez, el interés por indagar las nociones matemáticas previas de Carmen, Olga y Sofía, cimentó otro presupuesto, el de reconocerlas como sujetos de saber. Presupuesto que fue convalidado con decisiones de la secuencia como el retomar inicialmente los ámbitos de uso de la matemática que les eran familiares y el priorizar el avance sobre "lo que falta" a partir de lo que ya disponían.

Cuerpo de datos. El cuerpo de datos requerido para esta investigación fue constituido con fuentes diversas. Si bien en todas las instancias se recurrió a la entrevista como instrumento, ésta fue usada con diferentes modalidades e intencionalidades. Por ello se reserva el nombre de "entrevista" para las realizadas al inicio del trabajo y, como se detallará, con el objetivo de indagación de concepciones previas y antecedentes de las entrevistadas. Y aquellas entrevistas en las que se realizó ya una intervención directa inscritas en la metodología de ingeniería didáctica, se nominarán como "sesiones" o se aludirá a todas ellas como la "secuencia".

Las preguntas y las consignas fueron presentadas en forma oral para no obstaculizar la posibilidad de interpretación por el nivel de dominio de la lectoescritura.

Los protocolos de observación tanto de las entrevistas como de las sesiones se reconstruyeron mediante: grabación de audio; inclusión de transcripción de producciones escritas de las entrevistadas –como respuesta a pedidos explícitos de registro y como recurso opcional de apoyo-; y notas de campo de la entrevistadora.

La opción por el uso de estos medios de registro paralelos con su reconstrucción posterior y no por la videograbación se sustentó en el tipo de población con que se trabajaba. Es decir, se tomó como recaudo usar medios de registro que minimizaran inhibiciones en las entrevistadas.

Con el propósito de dar cuenta de las nociones previas de las participantes de la experiencia se emplearon una combinación de entrevistas sobre antecedentes escolares y extra-escolares, y entrevistas clínicas. En este apartado se detallarán los contenidos de dichos instrumentos pero sólo se explicitarán resultados generales pues esto será objeto del Capítulo IV.

Las entrevistas tuvieron como finalidad, por un lado, la indagación de antecedentes escolares personales y de otras personas cercanas o componentes del núcleo familiar. Así como también, se exploraron antecedentes extra-escolares referidos a ámbitos de uso de nociones matemáticas vinculadas a la numeración y al cálculo, o sea contextos vitales y/o laborales en que se utilizan las matemáticas.

Por otro lado, se buscó identificar nociones sobre contenidos matemáticos específicos, a saber: hipótesis sobre el sistema de numeración y rango de números conocidos y aquellos empleados más familiarmente; estrategias de resolución de problemas referidos a operaciones matemáticas básicas de suma y resta, específicamente algoritmos y formas de dar una solución al problema.

Estos contenidos diversos implicaron el uso de modalidades también diversas de entrevista para su exploración. Así, para indagar las trayectorias escolares y los ámbitos de uso de la matemática se recurrió a la inclusión de un fragmento de *entrevista* de corte *semiestructurada* en el transcurso de la 1ª entrevista. Esta modalidad fue seleccionada por su potencial para atender simultáneamente al discurso del sujeto y a la predefinición de temáticas de interés. Es decir, que si bien existía un conjunto de preguntas referidas a los tópicos predeterminados ya mencionados, los formatos y secuencias de estas preguntas podían variar en función de la dinámica de la interacción con cada entrevistada. Además las respuestas posibles no estaban limitadas de antemano, eran abiertas y por tanto sin categorías prefijadas (Ruiz Olabuenaga, 1996).

En esta parte de la 1ª entrevista los contenidos ya mencionados fueron abordados mediante las siguientes preguntas:

Datos personales y antecedentes escolares (personales y familiares): ¿cuál es tu nombre?; ¿dónde naciste?; ¿cómo llegaste al DF?; ¿en qué colonia vives?; ¿qué edad tienes?; ¿tienes hijos, de qué edades?; ¿con quiénes vives?; ¿qué estudios tiene tu … (pregunta sobre los diversos miembros del núcleo familiar)?
Ámbitos de uso de la matemática: además del trabajo de su casa, ¿realizas otro trabajo afuera?;¿me podrías contar para qué / cuándo usas los números?; ¿ y las cuentas mentales?

En cambio, para identificar las nociones matemáticas previas se optó por la *entrevista clínica* puesto que posibilitaba acercarse a los conocimientos implícitos de los sujetos, en tanto estructuras subyacentes a los comportamientos externos[19]. Este potencial se considera que permite superar la observación experimental pura e incluso las pruebas de rendimiento, pues además recupera los aciertos y errores con una importancia explicativa. Esta modalidad de entrevista se caracteriza por los siguientes rasgos (Berthoud-Papandropoulou y Ackermann-Valladao, 1986; Carraher y Carraher, et al., 1997): gira en torno a una situación concreta sobre la que se pueden realizar adaptaciones según las hipótesis que construye el entrevistador sobre las respuestas del sujeto, y además se piden justificaciones de la acción efectuada. Es decir que es una entrevista de corte no estandarizado, en la que se procura seguir el razonamiento de los entrevistados.

La implementación de la entrevista clínica fue realizada en dos instancias y dirigida a contenidos distintos: durante la 1ª entrevista se exploraron concepciones sobre el sistema numérico, rango conocido y utilizado asiduamente; en la 2ª entrevista se indagaron las estrategias de resolución de problemas de operaciones de suma y resta en el ámbito del intercambio comercial (compras en el supermercado o en el mercado, pago de impuestos) porque se constató que era el ámbito de uso común de la matemática, espacio de empleo personal e incluso coincidente con competencias requeridas para el desempeño laboral de las entrevistadas.

La *1ª entrevista* versó, más específicamente, en torno a los siguientes aspectos del conocimiento del sistema de numeración:

- Hipótesis y posibilidades de interpretación: lectura de números en diversos contextos, o sea de cuantificación (cantidad de billetes, cantidad de dinero) y de denominación (números de playeras de jugadores, de teléfonos, de rutas de peseros);
- Hipótesis y posibilidades de producción: escritura de números como registro (de cantidades de dinero) y ante dictado.
- Hipótesis y posibilidades de seriación: comparación de números, comparación y posibilidades de conteo de billetes de diversa denominación.

Respecto de la <u>interpretación</u>, las posibilidades recurrentes fueron la identificación de todos los dígitos, y el reconocimiento de diversas funciones de los números

[19] "Claparède (1923) da la siguiente descripción del método: '…la novedad estriba en el hecho de que el experimentador no anota simplemente la respuesta que el niño da a la pregunta sino que lo hace hablar… El objetivo (del método de Piaget) es observar lo que se oculta tras las apariencias. Es una suerte de auscultación mental… uno no se detiene cuando el niño da una respuesta incomprensible o contradictoria; por el contrario, con este método uno trata de acercarse más y más a los pensamientos infantiles fugitivos… hasta que uno puede resolver claramente el enigma de su estructura.' El método clínico ha sido refinado y luego adaptado a los desarrollos de la teoría, pero sus características básicas, como están descritas por Claparède, siguen siendo las mismas" (Berthoud-Papandropoulou y Ackermann-Valladao, 1986, p.39)

(denominativa, cuantitativa). Simultáneamente existían en cada entrevistada condiciones dispares de exploración de la serie numérica escrita.

Las posibilidades de producción no se manifestaron como en simple correspondencia con las de interpretación. Existían dos procedimientos recurrentes: la utilización de lo ya conocido como un recurso facilitador (por ejemplo la lectura del dígito inicial para deducir nudos desconocidos) y algunas veces como obstaculizador (reducción de tridígitos y cuatridígitos a números de un orden menor conocido); y el apoyo en la serie oral para reconocer las partes de un número compuesto y deducir su modo de escritura.

En cuanto a la seriación, resultó más complejo articular el ordenamiento de una serie de varios números que una más reducida, recurrían como estrategia a la centración en pares o en tríadas, lo cual generaba a veces errores en el ordenamiento por no contemplar la serie en su totalidad. Además pudo observarse que a veces la interpretación se convertía en obstáculo para la comparación, pues la lectura incorrecta de un número por reducción al orden precedente generaba errores en el ordenamiento (como se verá en Carmen); y la ausencia de lectura a veces favorecía la posibilidad de comparación en forma adecuada por centración en criterios de comparación relativos a indicadores del tamaño del número en juego (por ejemplo en Sofía). A su vez, pudo constatarse -en situaciones de conteo de billetes y monedas- que el conocimiento de las series de los distintos números variaba. Se visualizó también, que ante las dificultades en el conteo no siempre se advertía como recurso a la comparación con una serie semejante en los dígitos (2 y 2, 4; entonces 20 y 20, 40), ni el conocimiento de los canjes entre agrupamientos (por ejemplo usar el conteo de la cantidad de billetes para determinar si era viable que 10 billetes de 20 fueran $220).

La *2ª entrevista* se centró en las estrategias de resolución de problemas de suma y resta y tuvo como criterios de diseño los siguientes:

- Tipos de estructuras: se usaron como contextos las diferentes estructuras aditivas[20] (Vergnaud, 1991) para ver cómo afectaba esta estructura semántica de los problemas las posibilidades y las estrategias de resolución.
- Modos de contextualización (en el sentido de familiarización): se emplearon problemas del contexto vital de las entrevistadas (intercambio comercial, sueldo, pago

[20] "Por 'problemas de tipo aditivo' entendemos aquellos cuya solución exige adiciones o sustracciones; de la misma manera que por 'estructuras aditivas' entendemos las estructuras o las relaciones en juego que sólo están formadas de adiciones o sustracciones". (Vergnaud, 1991, p. 161)

de impuestos) de modo de garantizar que la familiaridad permitiera evidenciar las estrategias más óptimas de las entrevistadas.

- Números involucrados: se consideraron cantidades con diversos grados de dificultad por su tamaño, es decir por su cantidad de cifras (tridígitos o bidígitos).
- Dificultades operatorias: se incluyeron operaciones con y sin reagrupamientos y desagrupamientos.
- Soportes: se planteó como condición de la resolución la posibilidad de uso de soportes materiales y gráficos.

Los criterios relativos a diversidad de estructuras aditivas, números involucrados y dificultad operatoria antes enunciados, fueron abordados presentando siempre situaciones de mayor complejidad, disminuyéndola ante la presencia de dificultades. Dicha complejidad fue regulada entonces al interior de cada estructura aditiva presentando primero las situaciones más difíciles, por las incógnitas propuestas, el tipo de número involucrados (tridígitos) y la dificultad operatoria (con transformación). Si se constataba que la dificultad estaba vinculada con la imposibilidad de identificar la relación involucrada se disminuía la complejidad de la incógnita con el mismo grado de dificultad operatoria. Si, en cambio, se interpretaba correctamente la situación pero existía una dificultad vinculada a la operatoria se disminuía su complejidad en alguno o en los dos sentidos siguientes: ausencia de transformación, disminución del tamaño de los números a bidígitos.

Como se verá en el Capítulo IV, se puso de manifiesto que estos criterios de diseño previstos como posibles variables incidentes en el desempeño operaron como tales. Así, los tipos de contextos (con sus variantes de complejidad posible en función de la incógnita planteada) afectaron las posibilidades de identificación de la operación pertinente para resolver la situación y el tipo de estrategia empleada (convencional o no convencional). A su vez, la dificultad operatoria y los números involucrados incidieron en la obtención de una resolución exitosa una vez interpretada la relación en juego.

Como se detallará, el uso de la escritura como soporte de la operatoria varió en función de las posibilidades de escritura de las entrevistadas y del valor que otorgaban a este instrumento no sólo como apoyo sino también como mecanismo de obtención de sus respuestas.

En el análisis de estos dos conjuntos de entrevistas se empleó el programa informático Atlas.ti por las posibilidades que brindaba para efectuar comparaciones del desempeño de Carmen, Sofía y Olga, y porque dado que permite una categorización en el transcurso mismo del proceso de análisis resultó adecuado a la lógica de los instrumentos diseñados (entrevista semiestructurada y clínica). Las confrontaciones buscadas fueron la sistematización de antecedentes escolares y otros datos personales (edad, procedencia), así como de usos extraescolares de la matemática. Esta aproximación general a las trayectorias escolares y no escolares tenía el propósito de rastrear los contextos de uso atribuidos y en que se ejercían los saberes previos en torno al sistema de numeración y el cálculo. Otra instancia analítica fue la reconstrucción de tipologías sobre concepciones en torno a los contenidos a abordar, procurando caracterizar hipótesis y estrategias empleadas, y buscando también jerarquizar sus desempeños en función de criterios especificados.

En cuanto a las sesiones, como se anticipara, la investigación implicó tanto su diseño como su experimentación. Es decir que no se procuró indagar problemáticas de la replicabilidad en condiciones reales de una secuencia ya diseñada, sino que se abordó directamente la problemática del diseño e incluso de adecuación de actividades existentes. Para sustentar este proceso de diseño e implementación hubo una serie de instrumentos analíticos con diversa temporalidad y propósitos, orientados por las fases mencionadas de la metodología de Ingeniería Didáctica, que serán profundizados en el siguiente Capítulo.

Como se señalara anteriormente el objeto de este Capítulo era inscribir de modo general al presente trabajo en una línea metodológica de indagación y producción, explicitando los instrumentos empleados, sus contenidos, algunas anticipaciones de sus resultados y el modelo analítico. En el próximo Capítulo se profundizará una de las instancias aquí anticipadas, las sesiones, procurando desentrañar los supuestos en que se asentaron en su conjunto, develar las decisiones más locales que afectaron su diseño y brindar una descripción de toda la secuencia. Esto contribuirá a conocer más detalladamente la ingeniería diseñada –descrita en el Capítulo II- a la que fueron enfrentadas las entrevistadas y que constituye el antecedente necesario para comprender la evolución de sus desempeños iniciales a partir de su participación en la secuencia, efectos de la secuencia que son expuestos en el Capítulo IV.

CAPÍTULO II

INGENIERÍA DIDÁCTICA DISEÑADA

En este Capítulo se presentará la ingeniería diseñada, pero antes se dará cuenta de premisas globales consideradas en su diseño así como de características más generales como su duración, su implementación y registro. Finalmente, entonces, se mostrará la secuencia didáctica y las decisiones más locales que la acompañaron y la constituyeron.

Asunciones generales

Estas asunciones de la secuencia aluden a diversos aspectos como expectativas, referentes del diseño, hipótesis en torno a los contenidos, su tratamiento didáctico general y diferenciado en función de los casos, y la modalidad de abordaje y sus implicancias didácticas. A continuación se expondrán estas diversas consideraciones que rigieron el diseño de la secuencia en su totalidad.

Expectativas

Los propósitos del diseño giraban en torno a la ampliación de los saberes previos de las entrevistadas en tres sentidos: la extensión del rango numérico de competencia, la consolidación o el dominio de la operatoria (procedimiento y lógica de los algoritmos de suma y resta) y la diversificación de estructuras aditivas en las que se identificara la operación pertinente para su resolución.

El carácter de esta extensión estaba regido simultáneamente por otra expectativa, el acceso a una simbolización con sentido, procurando restaurar el sentido de una simbolización ya conocida o propiciando el conocimiento de dicha simbolización y de su sustento. Bajo este propósito se constituyó como una premisa la importancia de la explicación y de la argumentación de las resoluciones simbólicas, cuyos referentes serán explicitados luego.

Referentes

Los referentes del diseño fueron de diverso orden, tanto matemáticos como relativos al aprendizaje de las nociones en juego.

Entre los referentes matemáticos puede citarse la adopción de la hipótesis sobre la vinculación existente entre la operatoria y las leyes del sistema en que se inscribe. El sistema de numeración que usamos es un sistema de base (decimal, o sea de base 10) y posición, es decir con las siguientes características:

> “a) BASE de un sistema de numeración es el número de unidades de un orden cualquiera necesario para formar la unidad de orden inmediato superior y ese número es el mismo para todos los órdenes.
>
> b) La BASE determina el número de los diferentes símbolos que se emplean para construir los numerales.
>
> c) La posición de un símbolo en el numeral define la potencia de la base de la cual él es el coeficiente
>
> En un sistema de Base 4
>
> $2013 = 2x4^3 + 0x4^2 + 1x4^1 + 3x4^0$
>
> d) La escritura de los símbolos en el numeral se realiza en forma horizontal de derecha a izquierda, en el orden de valores crecientes.” (Fuenlabrada y Espinosa, et al., 1984, p.63)

Estos rasgos, como se sugiere por el tipo de actividades propuestas en el documento citado (posibilidad y dificultad de registro de operaciones en sistemas no posicionales, leyes de transformación en sistemas de diversas bases), conllevan rasgos peculiares de los algoritmos usados. Entre estos rasgos podemos citar, dado el carácter posicional y el número de símbolos limitados a diez, los dígitos (del 0 al 9), la posibilidad de operar sobre cada agrupamiento (los unos, dieces y cienes) como si se lo hiciera sobre dígitos (por ejemplo, en 42+35 se puede sumar el segundo orden considerando que hay 4 decenas y 3 decenas, es decir 4+3, 7). Otra característica es, dadas las leyes de transformación, en la suma si se obtienen 10 de un orden o grupo, deberán ser transformados en 1 del orden inmediato superior (reagrupar), y cuando una cifra de algún orden del minuendo es menor que la correspondiente del sustraendo en la resta, se debe transformar 1 del orden inmediato anterior por 10 del orden en que se está operando, para así poder quitar la cifra del sustraendo (desagrupar). Las reglas de cambio se sustentan en el carácter posicional y en el tipo de base (10) del sistema de numeración con el que habitualmente se escriben los números.

Este vínculo también se evidencia en algunos estudios referidos a la problemática del aprendizaje de estos contenidos (Bednarz y Janvier, 1982; Bednarz y Janvier, 1988; Jones y Thornton, 1993; Jones y Thornton, et al., 1994; Jones y Thornton, et al., 1996; Lerner y Sadovsky, 1994; Ross, 1986; Ross, 1989a; Ross, 1989b; Ross, 1990; Steffe y Cobb, et al., 1988; reportados en Cortina Morfín, 1997), dado que si bien conceptualizan de modo diverso las habilidades implicadas en la construcción del valor posicional, algunos de ellos reconocen al conocimiento de las leyes del sistema como necesario para el desentrañamiento de los algoritmos convencionales.

Uno de los estudios mencionados (Lerner y Sadovsky, 1994) pareciera contradecir la afirmación anterior, por ello ha sido seleccionado para profundizar en esta aparente controversia y contribuir así a la explicitación de esta presunción.

La contradicción aparente se produce porque sostienen como hipótesis que la construcción del sistema convencional de escritura de números se logra mediante la "acción intelectual sobre las escrituras numéricas", por lo cual la adquisición de la variación del valor de las cifras en función del lugar en que se encuentren pareciera anteceder al conocimiento de las razones que sustentan esta variación, es decir la agrupación recursiva en diferentes potencias de base 10. O sea que la posibilidad de producción e interpretación de escrituras convencionales es anterior a la posibilidad de argumentarlas en la "ley del agrupamiento recursivo".

Esta conjetura conduce a las autoras a cuestionar algunos de los rasgos de la enseñanza tradicional de este contenido, donde se plantea un supuesto contrario al sostenido por ellas, es decir la necesidad de la enseñanza de la decena como precedente del conocimiento de los números mayores a 10, lo que puede observarse en el siguiente interrogante:

> "Cabe preguntarse entonces: ¿aprender el concepto de decena ayuda realmente a conocer los números? ¿O es más bien el conocimiento de los números –y de su escritura– lo que ayuda a comprender el concepto de decena?" (Lerner y Sadovsky, 1994, p.109).

Incluso también cuestionan otro de sus rasgos, refutando supuestamente la hipótesis de este trabajo, que caracterizan del siguiente modo:

> "La modalidad que en general asume la enseñanza de la notación numérica puede caracterizarse así:
> (…) – La explicitación del valor posicional de cada cifra en término de 'unidades', 'decenas', etc., para los números de un cierto intervalo de la serie se considera requisito previo para la resolución de operaciones en ese intervalo" (Lerner y Sadovsky, 1994, p.136) .

No obstante, relativizan este cuestionamiento con relación a los algoritmos convencionales, pues afirman que el conocimiento de los agrupamientos es necesario si se procura la enseñanza de algoritmos convencionales y no lo sería si se promueve el uso de algoritmos alternativos:

> "Anticipamos una objeción posible: aunque se pueda prescindir de unidades y decenas cuando sólo se trata de leer y escribir números, no será posible dejarlas de lado en el momento de resolver operaciones. Esta objeción es parcialmente válida: lo es si se piensa en los algoritmos convencionales –en los famosos 'me llevo uno' y 'le pido al compañero'– como único procedimiento posible; deja de serlo cuando se admiten algoritmos alternativos" (Lerner y Sadovsky, 1994, p.137).

Cabe señalar que este rechazo de la objeción se asienta además en la consideración de desventajas de los algoritmos convencionales con relación a los alternativos desarrollados por los alumnos en su estudio.

No obstante, como se dijera en el Capítulo anterior, la problemática de esta investigación es precisamente el modo de acceso al modo de resolución convencional de las cuentas y no la mera perpetuación de algoritmos alternativos, porque sería un modo de consolidación de la exclusión de los adultos analfabetos.

Una vez expuestas las principales contradicciones es necesario argumentar por qué se concibe aquí como aparente la confrontación entre la hipótesis del estudio reseñado brevemente y la que sostuvo el diseño de la secuencia que será descrita. El argumento fundamental es que el alcance de ambas afirmaciones es diverso.

En el estudio referido se busca reconstruir la génesis de una noción, el valor posicional, llegándose a concluir que "(…)la noción de agrupamiento no es el origen de la comprensión de la posicionalidad: los chicos descubren este principio de manera totalmente independiente de las acciones de agrupar y reagrupar objetos, lo elaboran a partir de su acción intelectual sobre las escrituras numéricas que los rodean" (Lerner y Sadovsky, 1994, p.139). No obstante, no se niega el vínculo entre la noción de agrupamiento y la posibilidad de comprender los algoritmos convencionales.

En cambio, la hipótesis de este estudio no desconoce esta génesis del valor posicional, ni que la exploración de las regularidades presentes en la serie numérica pueda conducir a una búsqueda de las leyes del sistema que sustentan los criterios de comparación, producción e interpretación de números. Tampoco se contradice la potencialidad de partir de la exploración de algoritmos alternativos y, mediante la búsqueda de mayor eficacia, arribar a la operatoria convencional y a develar las leyes del sistema implícitas. Lo que sí se sostiene aquí es que la pertinencia de estos caminos diversos debe ser juzgada en términos de su eficacia y adecuación a la problemática didáctica abordada.

La pretensión en esta experiencia no sólo era de extender y sistematizar las posibilidades de producción, interpretación y comparación de números, sino de proveer de razones a sus criterios constitutivos. En la operatoria, a su vez, la preocupación también giraba en torno a la argumentación de procedimientos algorítmicos correctos y a la rectificación de algoritmos personales erróneos. Las posibilidades de argumentación y de rectificación pretendidas no podían limitarse entonces a una exploración de la serie numérica.

Además, la eficacia de esta exploración se evidenció como poco viable dados los límites temporales de esta experiencia. El reconocimiento informal, propuesto a las entrevistadas, de la noción de agrupamiento y de las transformaciones entre agrupamientos de diverso orden posibilitó un acceso más pronto a las leyes del sistema en que se fundan los procedimientos algorítmicos. Es importante aquí destacar la diferencia existente entre este modo de acceso informal a la noción de agrupamiento, y su abordaje -como reportan algunos autores (Block y Alvarez, 1999) en la década de los 70- de modo explícito y como prerrequisito del avance en la serie numérica. Este distanciamiento deviene de las formas de explicitación. En la secuencia diseñada la explicitación no se promueve mediante el enfrentamiento a bases diversas, ni tampoco, a través de un énfasis en actividades aisladas de identificación y de equivalencia entre agrupamientos. A diferencia de esto último, se propicia un trabajo con los agrupamientos imbricado con la comprensión de la representación de los números y de la lógica de la operatoria. Es decir, que se explicitan estos agrupamientos pero en tanto herramientas para develar las razones de la representación numérica y de los procedimientos algorítmicos.

Así, a partir de estas hipótesis se seleccionaron como contenidos a abordar al sistema de numeración y la operatoria. Esta selección tenía entonces como supuesto que una mejora en el dominio del sistema numérico, implicaría una mejora también de la competencia operatoria. En este aspecto, como podrá observarse en la descripción de la secuencia, hubo una oscilación y tensión entre los modos de definición de las evidencias de dominio del sistema numérico. Específicamente, la tensión se manifestó entre circunscribir el conocimiento del sistema de numeración a la familiaridad con la serie numérica (que luego devendría en el acceso a las leyes del sistema) o a "explicitar" también sus leyes constitutivas (sistema posicional y decimal). En la resolución de esta tensión, como ya se ha dicho, jugó un papel preponderante la eficacia de ambos rumbos de enseñanza en el marco de las condiciones específicas en que se realizaba la experiencia.

Tratamiento didáctico general

El tratamiento de los contenidos mencionados asumió como premisa la pertinencia de la conservación, al inicio, de los ámbitos de uso de la matemática detectados en las entrevistadas, es decir el intercambio comercial propio de sus vidas cotidianas y de sus desempeños laborales. Por ello, se empleó al sistema monetario como referente de las leyes constitutivas del sistema de numeración, recuperando los billetes y monedas que correspondieran a la organización decimal del sistema ($100, $10 y $1)[21]. Este referente tiene la ventaja de no requerir de una familiarización con sus reglas de cambio, ya que las entrevistadas hacen uso de él en su vida diaria. Pero conllevó algunas restricciones, pues en la manipulación del sistema monetario no existe una necesidad pragmática de reagrupar, aunque sí de desagrupar. Es decir, cotidianamente uno puede disponer de cambio sin el requerimiento de cumplir con los agrupamientos exhaustivos (en unos, dieces y cienes) requeridos en la representación simbólica convencional de la cantidad. Por ejemplo, podemos tener $100 formado por 1 billete de $100, o sea la representación vinculada a su escritura, pero también, por 10 monedas de $10 ó 100 monedas de $1, o todas las combinaciones posibles de monedas de $10 y monedas de $1 para tener $100. No existe en el contexto del referente necesidad ni sanción a formaciones que no estén en correspondencia con su escritura canónica. Este fue, como se verá, uno de los condicionamientos del uso de dicho referente que devino en la necesidad de hacer uso de las leyes de escritura como otro contexto analizado.

[21] "(…) hoy sabemos que el dinero es el modelo en el cual los analfabetos basan su estructura de pensamiento aritmético. La referencia al manejo cotidiano de billetes y monedas daría la oportunidad de vincular naturalmente el cálculo aritmético cotidiano y el cálculo escolar expresado en símbolos numéricos" (Avila, 1993, p.69)

En la operatoria, recuperando la toma de conciencia de los adultos de la importancia de la eficacia, se incorporó en su tratamiento el uso del algoritmo ampliado[22] de la suma y de la resta. Pero su presentación se hizo además procurando que la evocación del sistema permitiera sustentar y explicar con autonomía el proceso algorítmico realizado.

Tratamiento didáctico diferenciado

Existieron además divergencias entre las expectativas planteadas para cada entrevistada, en función de lo detectado en las entrevistas. Así, el propósito central con Carmen era el acceso a la operación en el plano simbólico, sin desestimar ni invalidar el uso del cálculo mental, sino planteando los límites de su eficacia frente a una mayor complejidad operatoria. Este propósito se asentaba en la sobrevaloración que adjudicaba Carmen al uso del cálculo mental y en su éxito relativo como recurso, pues le resultaba provechoso para operar sobre cierto tipo de números. También se buscaba extender las estructuras aditivas reconocidas por Carmen y los contextos de uso de la operatoria (no sólo el ámbito comercial).

Con Sofía la meta era la ruptura de sus algoritmos (de suma y resta) personales erróneos (reagrupaba o desagrupaba siempre de las centenas), a los que se adicionaba una sobrevaloración de lo simbólico. Por ende, fue necesario romper su resistencia a evocar las mencionadas leyes del sistema funcionalizadas con el sistema monetario.

Finalmente, con Olga se pretendía la ampliación del rango numérico dominado (desde su familiarización con bidígitos hasta el 20 a su extensión a tridígitos), el conocimiento de las leyes del sistema mediante la evocación del referente y el uso de dichas leyes en la operatoria. Es decir que se procuraba revertir su ausencia de registro para la resolución, tanto de las cantidades involucradas como de la operación, que restaba eficiencia y eficacia a sus cálculos espontáneos.

Puede observarse en esta manifestación de intenciones que existen diferencias pues sólo con Carmen se buscaba ampliar el conocimiento de las estructuras aditivas, estando ausente esta pretensión en Sofía y Olga. Esta divergencia se asienta, como se expondrá luego, en la valoración de las posibilidades iniciales. Por ello, tanto con Sofía como con Olga era fundamental la ruptura o el acceso a la operatoria, para reajustar o

---

[22] Se denomina **algoritmo ampliado** a aquel en el que se incorporan anotaciones marginales para indicar las transformaciones realizadas, es decir los reagrupamientos en la suma ("lo que me llevo") y los desagrupamientos en la resta ("lo que pedí").

instalar el cálculo escrito, lo cual (junto con la ampliación del rango numérico) se priorizó por sobre la extensión de las estructuras aditivas.

Modalidad de abordaje

La modalidad escogida de desarrollo de estos contenidos con el tratamiento didáctico mencionado fue la interacción personal entre la entrevistadora y la entrevistada, por la viabilidad de su implementación. Esta modalidad implicó ciertas ventajas y algunos condicionamientos. Entre sus ventajas pueden citarse la posibilidad de un seguimiento muy cercano con la consecuente oportunidad de ir realizando ajustes inmediatos. Pero conllevó además ciertos recaudos respecto del proceso de validación[23] derivados de la ausencia de otros pares. Ante esta ausencia se procuró instalar una distancia de la entrevistadora de este proceso de modo de que las fases de conclusión (o sea, una vez finalizada la resolución) no se constituyeran en instancias de evaluación sino que procuraran un mayor protagonismo de las entrevistadas.

Para ello se recurrió a portadores usados socialmente que posibilitaran una autoverificación empírica (es decir, una demostración de la validez o falsedad de los resultados mediante las retroacciones ocasionadas en la manipulación del material), como eran los billetes y monedas, y el uso del directorio y de la sección amarilla. Así, los algoritmos podían ser confrontados con la resolución haciendo uso de los billetes y monedas, y la ubicación y comparación de páginas, constatándolas en la sección amarilla o en el directorio.

Los materiales (sistema monetario, sección amarilla y directorio) seleccionados se constituyeron entonces en mediadores para el razonamiento y reflexión, posibilitando además un distanciamiento, por parte de la entrevistadora, de la acción de validación. La selección de estos materiales se vinculó con la preocupación por el uso de referentes de las entrevistadas que permitieran a la vez presentar las nociones de numeración y de agrupamientos en algunas de sus situaciones de uso (la paginación y el dinero).

Asimismo, la modalidad operó como restricción en términos de las posibilidades de socialización y de confrontación de producciones. Por ello, en determinadas situaciones de la secuencia se propició que existiera una confrontación consigo mismas. Por ejemplo, en una rutina de memorización de sumas y restas con dígitos ante lo ficticio de

[23] Se rescata de la noción de **validación** la preocupación sobre la validez pragmática, es decir, "… la apreciación sobre la eficacia del enunciado." (Brousseau, 1986, p.96)

una competencia entre entrevistadora y entrevistadas[24] se generó un reto individual al ir comparando el número de aciertos y tiempo insumido en diversas sesiones para esta rutina. Sólo se recuperó la competencia entre entrevistadora y entrevistada en el caso que el éxito en el juego no dependiera del dominio de conocimientos sino del azar, como fue en el *Juego del Cajero*[25].

Conviene mencionar también que los ajustes realizados no sólo operaron sobre los contenidos abordados y el diseño de las sesiones sino también sobre los contratos didácticos, es decir una distribución implícita de responsabilidades entre docente y alumnos, unas reglas de juego constituidas a partir de reiteraciones en las prácticas de enseñanza docentes:

> "[En todas las situaciones didácticas] Se establece una relación que determina – explícitamente en una pequeña parte, pero sobre todo implícitamente– lo que cada participante, el profesor y el alumno, tiene la responsabilidad de hacer y de lo cual será, de una u otra manera, responsable frente al otro. Este sistema de obligaciones recíprocas se parece a un contrato (…) lo que nos interesa de ese contrato es la parte específica del contenido, es decir, el contrato didáctico." (Brousseau, 1986, p.299; citado por Avila, 2001)

Los análisis parciales de las sesiones también procuraban explicar ciertos fenómenos desde este aspecto. Esta toma de conciencia de la incidencia de los contratos propiciados desde la secuencia y de la intromisión de otros contratos simultáneos vinculados a prácticas del INEA, permitía operar sobre dichos contratos para consolidarlos, rectificarlos o reorientarlos:

> "(…) en la relación didáctica el profesor se manifiesta también por la elección, la ruptura y la sustitución de contratos siguiendo índices de regulación que condicionan la evolución del sistema didáctico (cf. Brousseau; 1995; 17) y permiten mantenerlo en un ámbito de eficacia aceptable.
>
> Desde su perspectiva sistémica, Brousseau considera que las regulaciones son inherentes a la acción (…) La regulación conduce al uso de diversos métodos y, eventualmente, a la celebración de un nuevo contrato (cf. Brousseau; 1995). Porque hay límites más allá de los cuales las correcciones no serán ya posibles en el propio sistema; esto determinará los fracasos y comprometerá un nuevo proyecto, otro funcionamiento (cf. Brousseau; 1995).

[24] El riesgo visualizado en esta rutina de memorización era extremar la "paradoja del comediante" (Brousseau, 1986), ya que el conocimiento previo del saber a transmitir (en este caso los resultados de sumas y restas de dígitos) no podía ser negado por la entrevistadora. Enfrentamiento que hubiese generado condiciones asimétricas de competencia si se hubiesen enfrentado entrevistadora y entrevistada en la implementación de la rutina.

[25] El Juego del Cajero (Fuenlabrada y Block, et al., 1991, pp. 19-25) funcionalizó las leyes de agrupamiento y desagrupamiento del sistema decimal de base y de posición, una descripción más amplia del juego se encuentra en la página 51.

> Es decir, habrá rupturas del equilibrio en el funcionamiento de la relación didáctica que podrán ser resueltas al interior de las condiciones contractuales prevalecientes, otras, en cambio, conducirán a cambios de sujeción. El rol del profesor es entonces gestionar regulaciones no sólo intra-contratos sino también inter-contratos." (Avila, 2001, p.16).

Este recurso fue implementado además por el interés en optimizar el uso del tiempo dado el compromiso que existía con el avance en el desempeño de cada entrevistada. O sea que el tiempo fue una dimensión relevante a la hora de valorar la eficacia de las decisiones tomadas en el desenvolvimiento de la secuencia.

Descripción de la secuencia didáctica

Características generales

La secuencia didáctica tuvo una extensión de diez sesiones, pero con diferencias en su aplicación y duración. Estas diferencias obedecen a ajustes realizados en el transcurso mismo de la implementación que ocasionó divergencias en la cantidad de sesiones aplicadas con cada entrevistada, como puede verse en la siguiente tabla:

Entrevistada	**Cantidad de Sesiones**	**Duración temporal**
Carmen	10	425 minutos (7 horas 5 minutos)
Sofía	9	420 minutos (7 horas)
Olga	8	370 minutos (6 horas 10 minutos)

La experimentación de la secuencia didáctica fue realizada por la misma tesista. Esta opción estuvo sustentada en que las entrevistas eran individuales, modalidad que permitía el desempeño simultáneo del rol de entrevistadora y observadora. Superposición de roles que permitía además solucionar la necesidad de garantizar el acuerdo con opciones epistemológicas asumidas en el diseño.

Su proceso de diseño fue realizado con base a las expectativas y opciones esbozados en el análisis a priori. No obstante, a su vez el proceso mismo fue alimentado por los análisis parciales efectuados en el transcurso de la ejecución de la secuencia, lo que permitió ir realizando ajustes y decidiendo el curso de las posteriores sesiones.

Estos análisis parciales fueron realizados a partir de los protocolos de las clases. Las observaciones, estuvieron orientadas por los propósitos de cada sesión; es decir que se buscó constatar la ocurrencia o ausencia de los efectos deseados en el diseño. No obstante las intenciones de las sesiones operaron como tamiz para la observación, también se registraron fenómenos y respuestas no previstas en el diseño que permitieron reorientarlo. Por ello, este modo de observación recuperó una intencionalidad de descripción de lo que acontecía en las sesiones pero con el propósito de validación o refutación de las hipótesis de trabajo.

Descripción por sesión

A continuación se describirá la secuencia implementada por sesión, haciendo señalamientos de cada entrevistada cuando exista alguna particularidad en términos del impacto y de divergencias en el diseño. El impacto de cada sesión sólo será descrito de modo genérico pues se detalla en el Capítulo IV, y se presentará sólo para alimentar la reconstrucción del proceso de toma de decisiones a lo largo de la secuencia.

La descripción retomará como eje de presentación la secuencia seguida con Carmen con las especificaciones necesarias para Sofía y Olga. Cuando las divergencias sean sustanciales en términos del tipo y contenido de la intervención o en cuanto a la temporalidad en que fue abordado un contenido, se optará por una presentación en la que se detallará lo realizado con cada entrevistada en la sesión objeto de análisis.

La opción por usar la secuencia de Carmen como eje de presentación obedece a que ella fue un referente importante en el diseño de la secuencia en su conjunto. Su calidad de referente se constituyó por distintos motivos. Uno de ellos fue que en las entrevistas iniciales fue la que obtuvo un mayor desempeño, entonces, dadas sus posibilidades, se conjeturaba que si una intervención no era exitosa con Carmen difícilmente fuera provechosa con las restantes por sus desventajas iniciales con relación a ella. Otro motivo fue su facilidad y disposición para comunicar sus vivencias, adquisiciones y dificultades en las sesiones, lo cual permitía advertir las razones tras de algunos comportamientos reiterados en las tres entrevistadas.

Para perfilar la descripción de la secuencia se recurrirá a una estructura que posibilite desentrañar sus diversos aspectos como son: aspectos abordados del contenido, expectativas, rango numérico, validación, materiales, estructura y actividades, y adecuaciones a los diversos casos. Cabe señalar que se empleará como insumos los análisis a priori efectuados y, para evidenciar el impacto, los análisis a posteriori realizados de cada sesión.

Las decisiones más relevantes. En la posterior descripción podrá advertirse que hubo regulaciones de mayor importancia e incidencia en la secuencia como algunas relativas a ruptura de contratos, o referidas a la inclusión de una actividad (el cajero), o respecto a recursos provistos para el control de lo simbólico (algoritmo ampliado).

Una de las rupturas de *contrato didáctico* que puede anticiparse fue operado con Sofía en la 6ª sesión. Esta ruptura consistió en otorgar evidencias de que es posible aprender sin la provisión de información para resolver por parte del docente. Las evidencias se explicitaron mediante el pedido de identificación de las operaciones subyacentes en situaciones aditivas resueltas sin recurrir al algoritmo formal, sino al registro en una tabla de las cantidades parciales de dinero y sus totales. Esta identificación operó como una intervención externa que permitió a su vez reconocer saberes legítimos (las cuentas de suma y resta) en las situaciones a las que se la había enfrentado.

La concepción de esta intervención como ruptura deviene de que no fue una mera institucionalización de saberes pues tuvo el sentido no sólo de formalizar y desocultar el saber negado, sino también de usar estas evidencias para validar también un contrato diferente. Era necesario la ruptura del contrato, sostenido por Sofía, de reproducción de un modelo provisto, donde los saberes previos no escolares no son relevantes pues no son reconocidos como fuente de aprendizaje. Este contrato dificultaba la negociación de dos aspectos: el lugar de estos saberes previos en dicho proceso de aprendizaje y el estatuto de lo simbólico.

Por ello, la ruptura de este contrato pudo darse a partir del reconocimiento de la presencia de los saberes válidos mencionados (sumas y restas) en situaciones propias de la cotidianeidad de Sofía (el uso del dinero en intercambios comerciales), y propiciando el uso de este referente para controlar sus producciones simbólicas de modo de revertir la aceptación incondicional de simbolismos sin sentido.

Otra ruptura propiciada fue la desagregación de los momentos de resolución y de argumentación. En la 7ª sesión se advirtió que Carmen tenía dificultades en la resolución de algoritmos por esta exigencia simultánea de resolver e ir explicando y argumentando dicho proceso. Ante el fracaso se desnudó este contrato que había sido instalado desde las entrevistas de indagación, donde se pedía acompañar la resolución de verbalizaciones que posibilitaran, a la entrevistadora, ir siguiendo el procedimiento seguido. Por ello se optó por explícitamente hacer caduco este contrato solicitando, desde la 8ª sesión, la disociación de estos momentos, como puede observarse en la siguiente cita:

"E- Vamos a trabajar hoy de otra forma.
C- Ahá.

E- Hasta ahora a medida que vas resolviendo la operación, la cuenta, me vas explicando lo que vas haciendo.
C- Uhum.
E- Lo que te voy a pedir es que me digas primero qué operación es, tú me acabas de decir que es una suma.
C- Es una suma.
E- Que después la resuelvas sola.
C- Ahá.
E- Y una vez que termines me vas … vamos a hablar sobre lo que has hecho." (8ªS.2[26])

Otra de las decisiones importantes fue la introducción del *juego del cajero* porque significó un ajuste en el modo de tratamiento del sistema de numeración. Dadas las dificultades que se vislumbraban en su tratamiento mediante la exploración de la serie numérica a través de, actividades de escritura, lectura y comparación de páginas de la sección amarilla (de una zona de la ciudad) y del directorio (según el rango numérico trabajado), se optó por este cambio. Las dificultades que se presentaron fueron en las posibilidades de usar el conocimiento de la serie para anticipar desplazamientos que implicaran reagrupamientos o desagrupamientos en órdenes menores (unidades, decenas). Probablemente hubiesen sido superadas con un mayor tiempo asignado a este tipo de actividades (se realizaron desde la 1ª a la 3ª sesión). Pero estos indicios de que la ampliación de los números conocidos no iba siendo acompañada de las razones que sustentan los criterios de comparación, ubicación y de anticipación de desplazamientos en la serie, implicaba una dificultad para el abordaje posterior de los algoritmos de suma y resta, pues develar la lógica de estos procedimientos demanda, como se expuso, la posibilidad de explicitar y conocer las leyes del sistema.

El juego del cajero propiciaba una familiarización informal con los procedimientos de agrupar y desagrupar requeridos para la resolución de algoritmos convencionales. Si bien las entrevistadas ya estaban inmersas en estos procedimientos por la vivencia cotidiana del uso del dinero, esta actividad posibilitaba una explicitación de dichos procedimientos de cambio y permitía a la vez sistematizarlos. Esta explicitación de la regla de cambio fue acompañada de otros conocimientos, el reconocimiento de los agrupamientos que componen el sistema (los cienes, dieces y unos) y su vínculo con la escritura de los números. Es decir, que el cajero era un recurso potente no sólo en términos de la familiarización con procedimientos informales de suma y resta previos a la introducción en el conocimiento del algoritmo, sino que además propiciaba el desocultar las leyes del sistema que devienen en la escritura convencional de los

[26] Se empleará "S" como abreviatura de "sesión", seguido del número de página del protocolo, por ejemplo: 8ªS.2, hace referencia a la 8ª sesión, página 2 del protocolo.

números respetando el criterio de posicionalidad y de agrupación recursiva en base 10. Como se verá, esto se constituyó en un elemento de control de la interpretación y producción de números desconocidos, lo cual coincide con lo señalado por otras autoras (Lerner y Sadovsky, 1994):

> "(…) la búsqueda de procedimientos para resolver operaciones no es sólo una aplicación de lo que los chicos ya saben del sistema, es también el origen de nuevos conocimientos sobre las reglas que rigen la numeración escrita" (p.171).

No obstante, cabe mencionar que la situación original del juego del cajero sufrió adaptaciones para su inclusión en la secuencia. Un cambio no menor fue la sustitución del material original (corcholatas de diversos colores) por el sistema monetario vigente (sólo los billetes de $100 y las monedas de $10 y $1). Anteriormente se mencionó que esta opción estuvo fundamentada en la recuperación de un material con el que las entrevistadas ya estuvieran familiarizadas, que posibilitaba a la vez reafirmar la premisa de retomar los ámbitos de uso extraescolares de la matemática. Estos argumentos estaban vinculados a las preocupaciones en torno a la optimización del uso del tiempo y a la consolidación de la valorización de los saberes previos de estas mujeres. Una maximización del tiempo disponible debía, además, recurrir a una alternativa que eludiera la adhesión –o incluso la reproducción– a un contrato de proveer información sobre reglas y procedimientos sin sentido.

Por último, la introducción del *algoritmo ampliado* fue un recurso introducido por su potencialidad para optimizar el control simbólico de la operatoria, pero por supuesto un control reflexivo. Su introducción, o incluso la rectificación de los existentes, fue argumentada desde la eficacia de la resolución que propicia. Para ello se complejizó la dificultad operatoria en la que se presentó como recurso y se planteó como una de las alternativas a los errores cometidos fundamentalmente en la resta con desagrupamientos sucesivos. Asimismo, lejos de presentar un procedimiento simbólico sin posibilidades de controlarlo, se propició la recuperación de la lógica subyacente de los algoritmos (o sea las leyes del sistema aplicadas a procesos de reagrupar y desagrupar) como referente para la resolución y para la argumentación de los procedimientos.

Situaciones principales de la secuencia. Como podrá visualizarse en los dos apartados siguientes, si bien hubo diferencias en la temporalidad y en otras componentes del tratamiento didáctico, todas las entrevistadas fueron enfrentadas a las siguientes actividades y situaciones:

- Exploración de regularidades de la serie numérica mediante búsquedas y ubicación de páginas en diversos portadores (directorio y sección amarilla de zona) en función del rango trabajado.
- Identificación de agrupamientos y de su escritura, y de transformaciones entre agrupamientos (reagrupar y desagrupar) mediante la implementación del juego del cajero y del uso de un instrumento de registro (tabla con agrupamientos identificados).
- Producción de números relativos a cantidades representadas materialmente con o sin correspondencia con la escritura convencional, en situaciones de problemas.
- Interpretación de números escritos y representación material de los mismos, en situaciones de problemas.
- Interpretación de números enunciados y representación material de los mismos, en situaciones de problemas.
- Resolución de problemas aditivos del contexto comercial, mediante el uso de material y de registro en una tabla.
- Reflexión sobre componentes de la eficacia del registro en la tabla (encolumnar, dirección de la resolución).
- Resolución de problemas aditivos del contexto comercial, mediante el uso de procedimientos sucesivos (uso de material y uso de algoritmos) y su comparación (de sus lógicas y de sus registros).
- Resolución de operaciones de suma y resta sin contexto, usando el algoritmo ampliado como recurso para controlar las transformaciones.

1ª sesión. En esta sesión el *contenido* abordado fue el conocimiento de la serie numérica, particularmente la comparación, interpretación y producción de números en un contexto de uso como ordinal.

Las *expectativas* eran optimizar los criterios previos de comparación, interpretación y producción de números, mediante la generación de conflictos que posibilitaran dotarlos de procedimientos sistemáticos.

Como lo prioritario era cuestionar y así sistematizar y consolidar los criterios previos se optó por trabajar con el *rango numérico* de competencia para poder explicitar estos criterios. Dada la diversidad en el rango de competencia inicial, con Carmen se trabajó con números del 100 al 900, con Sofía del 10 al 200 y con Olga del 10 al 100. Este rango de trabajo con Olga fue estipulado porque su rango de competencia –hasta el 20– era insuficiente para el logro del propósito buscado.

Se utilizó como *material* la sección amarilla (de una zona de la ciudad), pues posibilitaba validar empíricamente las situaciones propuestas y porque es un soporte que posibilitaba situar a la serie numérica (específicamente números menores al 1 000) en una de sus funciones sociales, la paginación. Además se utilizaron números escritos o formados con cartones. Los números escritos fueron los nudos del rango trabajado, es decir los múltiplos del diez y/o del cien: el 100, 200, 300, …, 900, con Carmen; el 10, 20, 30, …, 200, con Sofía; y el 10, 20, 30, …, 100, con Olga. Fueron empleados para realizar actividades de ordenación y de interpretación, facilitada la primera de ellas por la movilidad que permitían los cartones. Los números formados con cartones eran producidos por la combinación de cartones con dígitos y fueron empleados para las actividades de comparación de la ubicación de páginas y de producción del antecesor y sucesor de un número. Estos usos obedecían a motivaciones diversas. En la actividad de comparación su empleo estaba centrado en la comunicación, y puesto que los números habían sido producidos en la computadora e impresos, esto garantizaba una comunicación más fiable y posibilitaba ir proveyendo información en forma parcial. En la actividad de producción del antecesor y sucesor, la descomposición del número en dígitos propiciaba la orientación de la reflexión sobre las partes del número que se verían afectadas por estos desplazamientos en la serie.

La *estructura* de la sesión y las *actividades*[27] empleadas fueron las siguientes:

a) Función de la paginación y del índice.

¿Has usado la sección amarilla para buscar teléfonos? ¿cómo harías para buscar una información aquí? ¿dónde estará indicado? ¿cómo?
Fíjate, aquí dice que “automóviles-agencias y compra-venta” está en la página 138, quieres que veamos si es cierto. Para recordar el número fórmalo con los cartones.
A ver, fíjate cómo están organizadas las páginas, hojea un poco la sección amarilla.

b) Interpretar, ordenar e intercalar nudos del rango.

Sabes cómo se llaman estos números (*los nudos escritos en cartones*), los leemos. Ordénalos de menor a mayor. (*Si se desconoce su nominación insistir en su lectura. Si hay error pedir lectura de la serie formada y su verificación*)
Ahora cierra los ojos, yo voy a retirar algunas tarjetas y te voy a pedir que las ubiques (*Carmen: 300, 600 y 700; Sofía: 30, 60, 170 y 70; Olga: 30, 60, 70*).
Ahora nos repartiremos las tarjetas. Debemos ir tirándolas en orden y decir su nombre. ¿Quién empieza?
Tomaré una tarjeta (*Carmen: 400; Sofía: 140; Olga: 40*) y te pediré que me busques una tarjeta mayor o menor a la que tengo.

c) Ubicar nudos en la sección amarilla.

---

[27] Recuérdese que en toda la secuencia las consignas fueron enunciadas de modo oral para que los niveles de dominio de la lectoescritura no fueran un obstáculo en el desarrollo de las sesiones.

A ver por dónde estarán los … (*ir mencionando en orden cada uno de los agrupamientos ya ordenados, que siguen estando a la vista*).
Fíjate bien y marca dónde comienzan y dónde terminan todos los … (*ir mencionando en orden cada uno de los agrupamientos ya ordenados, que siguen estando a la vista. Exigir criterios estrictos para agotar el rango. Si hay fracaso se lo explicita y luego se pide su nueva lectura y ordenamiento. Para indicar los extremos de cada rango se usan dos papeles de un mismo color, teniendo el primero escrito el nudo correspondiente*)

d) Ubicar números con y sin referencia a los nudos marcados.

¿Por dónde crees que está la página … (*leída y escrita con cartones. Carmen: 715; Sofía: 176; Olga: 76*)? Pero, no se vale explorar, ya estuvimos mirando ahora debes decirme entre cuáles estará. (*No se sugiere ningún criterio de ubicación para ver si recurre a los nudos marcados como recurso de ubicación. Si fracasa se trabaja con un número menor*)
De cuál de estos dos números (*los extremos del grupo seleccionado*) crees que estará más cerca la página que buscamos. (S*e procede a ubicarla y marcarla*)
Ahora piensa por dónde estará esta otra página … (*leída y escrita con cartones. Carmen: 805; Sofía: 109; Olga: 67*). (*Se trabaja con un número de mayor dificultad, es decir si son tridígitos, con cero intermedio; si son hasta el 100 se trabaja con números similares en su escritura*)
¿Estará a la derecha o a la izquierda de la página que ya marcamos?
Ahora sacaremos los papeles que nos marcaban algunas páginas y buscaremos otra página. ¿Por dónde estará la página … (*leída y escrita con cartones. Carmen: 850; Sofía: 159; Olga: 85*)?

e) Comparar la ubicación de números de páginas disponiendo sólo parcialmente de uno de ellos.

¿Cuál de estas dos páginas está antes / después? ¿por qué?

Carmen:	Número completo:	763	Número a completar:	771
	Número completo:	809	Número a completar:	821
Sofía:	Número completo:	163	Número a completar:	190
Olga:	Número completo:	63	Número a completar:	71

(*Se forma con cartones un número completo y en el otro sólo se muestran la cifra de la izquierda y se van precisando sucesivamente las siguientes, luego de que se realiza una anticipación sobre la comparación. Se orientará así un procedimiento sistemático para el análisis de las cifras a fines comparativos.*)

f) Producción de nudos.

¿Cómo se escribirá entonces la página … (*de los diversos nudos: Carmen: 100 al 900; Sofía. 100 al 200; Olga 10 al 100*)? Busquemos en las que ya leímos.
¿Y la página …? (*Desplazándose en nudos de un mismo orden, nudos al interior de nudos y nudos semejantes al interior de nudos distintos. Carmen: 660, 960, 690, 530, 930; Sofía: 60, 160, 30, 130; Olga: no se realizó por su imposibilidad en el rango trabajado*)

g) Producción (mediante el uso de cartones con dígitos) del antecesor y sucesor a un número.

Forma con los cartones un número menor que éste (*Carmen: 771, y luego 809; Sofía: 71 y 189; Olga: 71 y 89*) reemplazando sólo un cartón. Compruébalo en la sección amarilla.
Ahora forma uno mayor, sólo cambiando un cartón. Compruébalo en la sección amarilla.
Ahora forma el número que está inmediatamente antes de este número (*Ídem*), sólo cambiando un cartón. ¿Cuál cambiarías? Compruébalo en la sección amarilla.
Ahora forma el que está inmediatamente después, sólo cambiando un cartón. ¿Cuál cambiarías? Compruébalo en la sección amarilla.

2ª sesión. El *contenido* objeto de esta sesión fue el mismo que en la 1ª sesión, es decir la serie numérica, específicamente la comparación, interpretación y producción de números en un contexto de uso como ordinal.

Las *expectativas* eran consolidar los criterios de comparación, interpretación y producción de números mediante su extensión a rangos no familiares. Además se propició también la afirmación de la comparación de números, mediante la promoción de la anticipación en la ubicación de uno de ellos.

Dado que se buscaba extender las posibilidades mencionadas se decidió trabajar con un *rango numérico* próximo pero que superara el de competencia. Así, con Carmen se trabajó con los números del 1 000 al 5 000 y con Sofía, del 100 al 2 000. Cabe señalar que si bien no se implementó esta sesión con Olga, se había previsto trabajar con los números del 100 al 900.

Puesto que el rango numérico era diverso se seleccionó como *material* tanto la sección amarilla (en el caso de Olga) como el directorio (para Carmen y Sofía). Los criterios de selección fueron los ya mencionados, o sea la posibilidad de realizar autoverificaciones empíricas de las actividades y porque son portadores sociales de la serie en una de las funciones sociales que asume el número como ordinal. También como en la sesión previa se emplearon números escritos o formados con cartones. Los números escritos fueron, nuevamente, los nudos del rango trabajado (ahora ampliado): el 1 000, 2 000, 3 000, …, 5 000, con Carmen; el 100, 200, 300, …, 2 000, con Sofía.

La *estructura* de la sesión y las *actividades* propuestas fueron las mismas que en la sesión anterior pero aplicadas a otro rango numérico. El único cambio realizado fue en la actividad d) Ubicar números sin referencia a los nudos marcados.

Ahora sacaremos los papeles que nos marcaban algunas páginas y buscaremos otra página. ¿Por dónde estará la página … (*leída y escrita con cartones. Carmen: 1 050; Sofía: 1 690*)? Intenta hacerlo abriendo el directorio la menor cantidad de veces posible.

Como se observa, se pidió una anticipación de la ubicación procurando disminuir la búsqueda al azar, poniendo como exigencia adicional optimizarla, es decir usar menos intentos para encontrar la página.

En estas dos primeras sesiones se observaron algunas limitantes al trabajar con la exploración de la serie numérica como conocimiento tendiente a mejorar las posibilidades de la operatoria previa o para introducir la operatoria.

Así, en la 1ª sesión, Carmen tuvo dificultades en la producción del antecesor y sucesor de un número, pues planteaba como sucesor al nudo posterior y como antecesor al último número del agrupamiento anterior. Esta última dificultad fue superada en el trabajo con números menores, es decir más familiares, y extendida a números mayores, recuperando también el uso de la sección amarilla para validar sus resoluciones.

Y esta dificultad se reiteró en la 2ª sesión tanto con Carmen como con Sofía, extendiéndose no sólo a actividades de producción sino también de interpretación y de comparación. En cuanto a la interpretación, la dificultad se manifestaba en los números con cero intermedio (en el lugar de las centenas), es decir del primer intervalo de cada nudo (por ejemplo del 1 000 al 1 100, o del 2 000 al 2 100). Usan como estrategia desplazar las decenas y unidades al lugar de las centenas y decenas respectivamente para tener "algo susceptible de ser leído" en las centenas (por ejemplo, 2 069 es leído como 2 690), o bien sustituyen la ausencia de centenas por la primera centena que reconocen perdiendo el control sobre las decenas y las unidades (por ejemplo, el 2069 es leído como 2 190).

Respecto de la producción, las dos presentan dificultades para producir el sucesor de un número anterior a un cambio de centena, aplican la idea de "sucesor" a la unidad de mil siguiente, por ejemplo al 1 099 le sigue, según ellas, el 2 000. En este aspecto Sofía fue revisando su hipótesis y encontrando regularidades, pudiendo anticipar. Pero Carmen, a pesar de la confrontación hecha con el directorio, no pudo incorporarlo como criterio.

Finalmente, en las actividades de ubicación de páginas, es decir de comparación, no pudieron usar establemente criterios de comparación como modos de anticipar la ubicación relativa de dos páginas.

Ante estas evidencias y dado que la aplicación de esta sesión a Olga estaba prevista después de las de Carmen y Sofía, se optó por no enfrentarla a este tipo de problemáticas, por ello sólo se analizó el impacto y las actividades realizadas con Carmen y Sofía.

Asimismo se decidió realizar una reorientación de la secuencia, introduciendo la identificación y operación con agrupamientos y suspendiendo la exploración sistemática de la serie numérica, lo cual se profundizará en la próxima sesión.

3ª sesión. Como se anticipara, aquí hubo un cambio en el *contenido* trabajado, se abordó el sistema decimal de numeración, puntualmente la identificación de los agrupamientos (unos, dieces y cienes) y el procedimiento de reagrupar involucrado en el algoritmo de la suma.

Las *expectativas* eran diversas, con Carmen se procuraba fundamentalmente consolidar su dominio previo de la operatoria, con Sofía rectificarla y con Olga introducirla. Para ello se recurrió a reflexionar sobre las leyes del sistema que la sustentan y a familiarizarlas informalmente con los procedimientos involucrados, es decir el reagrupamiento y el desagrupamiento.

Este propósito demandaba enfrentarlas a una dificultad operatoria que posibilitara no sólo consolidar los dominios previos dotándolos de argumentación, sino también rectificar algoritmos personales (con Sofía). Entonces se seleccionó como *rango numérico* a los tridígitos (salvo para Olga) porque se consideró que permitía cumplir los objetivos mencionados, pues si se escogía un rango menor no se enfrentaría la hipótesis de Sofía, es decir que cuando existe una transformación se afecta a la cifra del extremo izquierdo, lo cual sí se aplica en bidígitos. Se escogió el rango numérico más familiar para cada entrevistada, así con Carmen se optó por trabajar hasta el 900 y con Sofía hasta el 200. En cambio con Olga, si bien se trabajó con un rango menor (hasta el 100), se escogió un rango más amplio que el de competencia (hasta el 20), para extender sus posibilidades de interpretación y de producción de números. Lo cual sería facilitado por el uso del dinero, ya que Olga podía recuperar su dominio de los nombres de las cantidades, propiciándose una correspondencia con su representación escrita.

Se emplearon como *material* los billetes y monedas ($100, $10 y $1), porque son portadores sociales de uso conocidos por las entrevistadas, y están asentados en las leyes decimales de cambio. Se consideró entonces un mediador interesante, familiar y cercano al entorno cotidiano de las entrevistadas. Además, para implementar el juego del cajero, se recurrió a tres dados con los números de las monedas y billetes en circulación (uno con el 1, 2 y 5; otro con el 10, 20 y 50; y otro con el 100, 200, 500). El registro era realizado en una tabla con tres columnas sin encabezados.

La *estructura* de la sesión y las *actividades* desarrolladas fueron las siguientes:

a) Juego del cajero.

Vamos a jugar al cajero. Este juego consiste en ir tirando el dado para formar cantidades hasta que gane alguno de los jugadores por llegar a 900. Luego de tirar tengo que juntar el dinero que me salió y anotar cuánto llevo, se puede ir pidiendo cambio.
¿Cuánto vas? ¿por qué? ¿cuántos billetes de $100 y monedas tienes?
(*Estos interrogantes se irán haciendo en el transcurso del juego, para propender, en acto, a la identificación de la correlación entre el número y sus agrupamientos materializados con billetes*)

b) Reflexión sobre el registro producido.

Fíjate cómo cambian los números de esta columna. (*los correspondientes al mayor orden*)
¿Y los de esta columna (*los ubicados en la segunda columna en orden decreciente*)? ¿y estos últimos? (*Se propiciará una reflexión sobre el incremento o disminución de los dígitos y sus razones, cuáles son las cifras posibles*)
Si aquí me hubiese salido … (*se escogerán cantidades que impliquen un cambio de nudos en los diversos órdenes involucrados*), ¿cuánto dinero tendría?
Y si hubiese llegado a … (*se escogerán cantidades que impliquen un cambio de nudos en los diversos órdenes involucrados*), ¿cuánto me salió en el dado?

c) Reflexión sobre el registro hipotético.

Fíjate en este registro de una partida, ¿a dónde están los $100, $10 y $1? ¿cuántos son?
(*Se propenderá a la reflexión sobre el vínculo entre escritura y agrupamientos, ahora sin la evidencia del material*)

Esta sesión sólo fue aplicada con Carmen y dadas algunas dificultades observadas se decidió reformularla antes de aplicarla con las demás. Estas dificultades de diseño fueron las siguientes: en la secuencia de tipos de representación, en la modalidad gráfica del instrumento de registro previsto (la tabla) y en la poca claridad de la obligatoriedad de la aplicación de la regla de cambio.
Si bien estaba previsto en la estructura que en el juego del cajero la secuencia fuera de tomar el material y luego registrar cuántas monedas y billetes se tenía de cada tipo, en la implementación el orden fue inverso. Esta secuencia impidió reflexionar en los reagrupamientos sobre la necesidad del respeto de la regla de cambio para arribar a la escritura convencional de los números, pues una vez calculado el total se representaba de modo convencional la cantidad obtenida. Además esto limitó las posibilidades de vincular la disminución en una columna con el reagrupamiento realizado, pues esta acción efectivamente no era efectuada con el material sino en el cálculo mental.
La ausencia de encabezados en el instrumento de registro le restaba claridad, lo cual no posibilitó la reflexión en torno al vínculo entre la escritura convencional de los números y su descomposición en agrupamientos, y significó también el establecimiento de la escritura en columnas como un arbitrario sin ningún sentido representativo. Otra dificultad del registro fue la confusión sobre cómo distinguir los sumandos de los subtotales.

4ª sesión. En esta sesión, con base en las observaciones precedentes, se incorporaron algunas modificaciones en el diseño de la sesión. El *contenido* fue el mismo pero se adicionó el procedimiento implícito en la resta, desagrupar. Las *expectativas*, el *rango numérico* y el *material* también fueron sostenidos, afectándose fundamentalmente el tipo de registro y la estructura.

En cuanto al registro se incorporó en la tabla encabezados en cada columna que identificara el agrupamiento correspondiente ($100, $10 y $1, en este orden), y se empleó como procedimiento de registro la escritura, tanto de los datos como del resultado, uno debajo de otro, destacando con marcador el resultado. La introducción de la tabla con identificación de los agrupamientos fue una opción sustentada en que es un registro que intermedia con la escritura convencional de los números en un sistema de posición, pues permite dotar de sentido a cada posición al identificarse sus agrupamientos.

En relación a la *estructura* se modificó la secuencia, el juego lo iniciaba la entrevistadora de modo de ejemplificar el procedimiento general y de registro, y se explicitaba claramente la secuencia del juego (tirar los dados, pedir el dinero, constatar la aplicación de la regla de cambio y anotación). Además, dada la incorporación del tratamiento del procedimiento de desagrupar se incluyeron dos versiones del juego del cajero, ascendente y descendente.

La estructura de la sesión y las *actividades* implementadas quedaron entonces del siguiente modo:

a) Juego del cajero ascendente.

Vamos a jugar al cajero. Este juego consiste en ir tirando el dado para formar cantidades hasta que gane alguno de los jugadores por llegar a … (*Carmen, 900; Sofía, 200; y Olga, 100*). Luego de tirar tengo que juntar el dinero que me salió y anotar cuánto llevo. Cada vez que tengo diez monedas de un peso DEBO cambiarlas por otra de diez pesos, y cuando tengo diez monedas de diez pesos DEBO cambiarlas por un billete de cien.
Secuencia del juego:
Tiro de los dados: los tres simultáneamente.
Pedido del dinero correspondiente: ¿cuánto dinero te tengo que dar? ¿cómo podemos hacer si no tenemos billetes / monedas de … (100, 10 ó 1)? ¿cuántos billetes / monedas de … (100, 10 ó 1) serían?
Me fijo si puedo cambiar dinero, si es así DEBO cambiar.
Anotación en cada columna: ¿cuántos de cien tienes? ¿cuántos de diez? ¿cuántos de uno?
Lectura de la cantidad de cada agrupamiento que se tiene: entonces, ¿cuántos de cien tienes? ¿cuántos de diez tienes? ¿cuántos de uno tienes? (*Estos interrogantes se irán haciendo en el transcurso del juego, para propender, en acto, a la identificación de la correlación entre el número y sus agrupamientos materializados con billetes*)
Resaltar los subtotales.
Relacionar la serie oral con el registro: ¿cuánto dinero tienes? ¿eso está escrito en algún lado?

b) Reflexión sobre el registro producido.

Ahora vamos a registrar los totales que fuimos obteniendo, los que destacamos, en otra tabla.
¿Cómo cambiaron los números? ¿puedo escribir en esta columna 10, 11, 12, 14? ¿por qué? (*Analizar los dígitos posibles en cada agrupamiento, cada columna, contradiciendo la regla de cambio*)
Vamos a formar con billetes y monedas estas cantidades. ¿Esta cifra qué quiere decir, que tengo billetes o monedas de qué tipo? ¿y esa misma cifra en este número qué quiere decir? (*Seleccionar números que tengan la misma cifra en diversas posiciones*)

c) Reflexión sobre el registro hipotético.

(Introducirlo para la reflexión de la posicionalidad si no es viable en el registro propio)

Fíjate en este registro de una partida. Vamos a formar con billetes y monedas estas cantidades ¿esta cifra qué quiere decir, que tengo billetes o monedas de qué tipo? ¿y esa misma cifra en este número qué quiere decir? (*Seleccionar números que tengan la misma cifra en diversas posiciones*)

d) Juego del cajero descendente.

Ahora vamos a jugar nuevamente al cajero pero en vez de ir juntando dinero vamos a ir dando la cantidad de dinero que nos indiquen los dados. Empezamos desde … (*Carmen, 900; Sofía, 200; y Olga, 100*) y gana la primera que llegue a 0. Luego de tirar tengo que devolver el dinero que me salió y anotar cuánto me queda.
Secuencia del juego: (ídem)

e) Reflexión sobre el registro producido.

Ahora vamos a registrar los totales que fuimos obteniendo, los que destacamos, en otra tabla.
¿Cómo cambiaron los números? ¿puedo escribir en esta columna 10, 11, 12, 14? ¿por qué? (*Analizar los dígitos posibles en cada agrupamiento, cada columna, contradiciendo la regla de cambio*)
Vamos a formar con billetes y monedas estas cantidades. ¿Esta cifra qué quiere decir, que tengo billetes o monedas de qué tipo? ¿y esa misma cifra en este número qué quiere decir? (*Seleccionar números que tengan la misma cifra en diversas posiciones*, *si no es viable trabajar con el registro hipotético del mismo modo*)

Trabajo con desplazamientos -en los diversos agrupamientos y con canjes- luego de culminado el trabajo en sentido CRECIENTE y DECRECIENTE:
(*Registrar la cantidad a trabajar en una tercera tabla. Primero tomar el material correspondiente a la cantidad seleccionada –interpretación–*)
Si me sale … (*se escogerán cantidades que impliquen un cambio de nudos en los diversos órdenes involucrados*) ¿cuánto me queda? ¿cómo queda el registro?

Lo recurrente en todas las entrevistadas fue la dificultad para aplicar la regla de cambio en situaciones (reales o hipotéticas) del cajero ascendente. Ya se mencionó el origen de esta dificultad, es decir la ausencia de sanción de los modos de representación material sin correspondencia con la escritura. En el cajero descendente la sujeción a la regla de cambio es una estrategia vinculada a la resolución de la posibilidad de operar, es necesario tener cambio para entregar exactamente la cantidad requerida. Esta constatación condujo a algunas modificaciones en el modo de tratamiento del mismo contenido (la operatoria) en la sesión siguiente.

5ª sesión. El *contenido* objeto de esta sesión fue el mismo que en la sesión anterior, pero en el contexto ya más formalmente de problemas aditivos y tematizando además la diferencia entre las posibles representaciones materiales y su representación convencional en correspondencia con la escritura canónica de los números.

Es decir que a las *expectativas* de la sesión previa se agrega esta pretensión de distinción entre la variación existente en los modos de conformar o representar una cantidad con dinero y la representación escrita de dicha cantidad, por lo cual se verá en el diseño de las actividades que existe la variante de entrega de cantidades formadas con o sin correspondencia con la escritura convencional.

Si bien se sostuvo el grado de complejidad operatoria se decidió ampliar el *rango numérico* en Sofía y Olga para trabajar con todos los tridígitos, usando la representación material como referente para la representación escrita y la interpretación de números desconocidos.

El *material* empleado fue parcialmente el mismo, los billetes y monedas mencionados y la tabla. No se emplearon ya los dados pues el contexto de trabajo ya no sería el juego sino problemas aditivos con las mismas estructuras implícitas en el juego del cajero: composición de dos medidas, búsqueda de la medida compuesta; y medida⇨ transformación negativa⇨ medida, búsqueda del estado final. Esta selección obedece a su menor complejidad por el tipo de relación implicada y porque fueron las que ocasionaron menor dificultad en la 2ª entrevista. Además el uso de problemas con datos predefinidos permitió manipular deliberadamente la complejidad operatoria (tridígitos con transformación), lo cual no era posible en la situación del juego pues eso estaba librado al azar. Estos problemas eran formulados retomando como ámbito el contexto comercial pues se lo había detectado como ámbito de uso común de la matemática de todas las entrevistadas.

La *estructura* de la sesión y las *actividades* desarrolladas fueron las siguientes:

a) Revisión de reglas y modo de registro en el juego del cajero.

Te acuerdas que la sesión pasada jugamos al juego del cajero. ¿Recuerdas cómo escribíamos las cantidades? ¿y cuál era la regla del juego? (*Explicitar modo de registro y la regla de cambio*)

b) Operaciones en contextos aditivos (composición de dos medidas -búsqueda de la medida compuesta-, o medida⇨ transformación negativa⇨ medida –búsqueda del estado final–) con registro de cantidades representadas en correspondencia con la escritura convencional.

P1[28]. Esta semana tú cobras por tu trabajo esta cantidad de dinero (274)[29] ¿Cuánto dinero es? ¿Cómo se escribe ese número? Ahora escríbelo en la tabla. Compara las dos escrituras que hiciste.

---

[28] Se usará “P” como abreviatura de “Problema”.

[29] Las cantidades escritas entre paréntesis fueron mostradas formadas por la entrevistadora con billetes y monedas.

Pero además tu patrón te da este dinero (83) de premio. ¿Cuánto dinero te dio de premio? Escríbelo en la tabla.
¿Cuánto dinero cobraste esta primera semana? [357][30] ¿qué puedes hacer con todas las monedas que tienes para saber cuánto dinero es?
Ahora escríbelo en la tabla, ¿puedes escribirlo así, qué harías? ¿de qué otra forma puedes formar esa cantidad? (*Reflexionar sobre la regla de cambio como restricción de la escritura a pesar de los modos diversos de representar materialmente la cantidad*)
(*Posterior a la escritura*) ¿Dónde están los otros 10 / 100 que tenías?

P2. La segunda semana cobras esta cantidad de dinero (264), ¿cuánto te pagaron esta quincena? [621]

P3. Pero llegan los recibos del teléfono y del gas que debes pagar. Esta (258) es la cantidad que debes pagar de teléfono. ¿Cuánto dinero es? Escríbelo en la tabla.
Y esto (185) es lo que debes pagar de gas. ¿Cuánto dinero es? Escríbelo en la tabla.
¿Cuánto es lo que debes pagar de servicios? [443]

P4. Usas lo que cobraste esta quincena, que era $621 (*cantidad ya obtenida en P2, re-escrita en la tabla*), ¿te animas a formarlo?, para pagar estos gastos por $443 (*se muestra la cantidad escrita en la tabla*). ¿Cuánto te sobra? [178]

P5. La próxima quincena ganas, la primera semana, esta cantidad de dinero (285) ¿Cuánto dinero es? Ahora escríbelo en la tabla.
Pero además tu patrón te da este dinero (97) de premio. ¿Cuánto dinero te dio de premio? Escríbelo en la tabla.
¿Cuánto dinero cobraste esta primera semana? [382] ¿qué puedes hacer con todas las monedas que tienes para saber cuánto dinero es?
Ahora escríbelo en la tabla, ¿puedes escribirlo así, qué harías? ¿de qué otra forma puedes formar esa cantidad? (*Reflexionar sobre la regla de cambio como restricción de la escritura a pesar de los modos diversos de representar materialmente la cantidad*)
(*Posterior a la escritura*) ¿Dónde están los otros 10 / 100 que tenías?

P6. La segunda semana cobras esta cantidad de dinero (237), ¿cuánto te pagaron esta quincena? [619]

c) Operaciones en contextos aditivos, con registro de cantidades representadas sin correspondencia con la escritura convencional.

P7. Además gastaste para trasladarte en una semana esto (88) ¿Cuánto dinero es? Escríbelo en la tabla. Y la próxima semana gastaste esta cantidad de dinero (109). ¿Cuánto gastaste en total? [197]

P8. Lo que te quedaba de tu quincena luego de unas compras era $484 (*se muestra la cantidad escrita en la tabla*), ¿te animas a formarlo? Con ese dinero pagaste el gasto de transporte por $197 (*se muestra la cantidad escrita en la tabla*). ¿Cuánto dinero te queda? [287]

Las actividades previstas fueron diseñadas de modo de que existiera la posibilidad de regularlas en función del ritmo de cada entrevistada, lo prioritario era cubrir todos los rubros previstos y la resolución de todas o algunas de las situaciones contempladas en cada aspecto fue sopesada en función de ello.

[30] Las cantidades escritas entre corchetes son las soluciones correctas de los problemas.

En general no hubo dificultades en el logro de las expectativas pensadas, sólo Olga presentaba problemas en la producción de cantidades representadas sin correspondencia con la escritura convencional y en la consecuente aplicación de la regla de cambio para producir la escritura de cantidades donde era posible realizar reagrupamientos.

6ª sesión. El *contenido* de esta sesión fue el mismo que en la anterior, pero hubo algunas divergencias entre los contenidos abordados con cada una. Con Carmen se trabajó la lógica implícita del algoritmo mediante la comparación de la lógica de la tabla con la del algoritmo, y la eficacia de los sentidos de resolución (de izquierda a derecha o de derecha a izquierda). Con Sofía y Olga se reflexionó en torno a la eficacia de los sentidos de resolución en la tabla (o sea de izquierda a derecha o de derecha a izquierda) y sólo con Sofía se abordó la identificación de operaciones en la tabla de modo de mostrar que en el tipo de actividades realizadas existía un conocimiento válido implícito.

Las *expectativas* eran las mismas que en la sesión previa, agregándose el propósito de explicitación de la lógica subyacente de los algoritmos en Carmen, y la identificación del sentido de resolución de derecha a izquierda como el más eficaz, en Sofía y Olga. Con Sofía además se procuraba mostrarle evidencias de que estaba aprendiendo un conocimiento legítimo, las cuentas.

El *material* empleado fue el mismo, el dinero y la tabla. La *estructura* tuvo divergencias en función de las diferencias señaladas en cuanto a contenidos abordados y expectativas, no obstante puede reconocerse una secuencia básica con diferencias en las situaciones o en lo demandado a cada una de las entrevistadas en dichas situaciones. La estructura básica de la sesión y las *actividades* implementadas fueron:

a) Revisión de logros de la sesión previa.

Te acuerdas que la sesión pasada estuvimos calculando los importes de tus quincenas y de tus gastos. ¿Recuerdas cómo escribíamos las cantidades, qué hacíamos cuando teníamos diez o más monedas de un mismo tipo? ¿cómo hacíamos /haremos para no borrar?
(*Explicitar modo de registro, la regla de cambio, eficacia de los sentidos de resolución de los algoritmos: de derecha a izquierda o de izquierda a derecha)*

b) Operaciones en contextos aditivos (composición de dos medidas -búsqueda de la medida compuesta-, o medida⇨ transformación negativa⇨ medida –búsqueda del estado final–) con registro de cantidades representadas sin correspondencia con la escritura convencional.

P1. Vas con una amiga a hacer una compra grande al mercado para un convivio, gastas en carne de puerco esta cantidad de dinero (144) ¿Cuánto dinero es? ¿Cómo se escribe ese número? Ahora escríbelo en la tabla. Compara las dos escrituras que hiciste.
Pero además gastas este dinero (98) en carne de pollo. ¿Cuánto dinero gastaste en carne de pollo? Escríbelo en la tabla.
¿Más o menos cuánto dinero gastaste en carne? ¿Qué números te sirven para saber cuánto es más o menos? ¿Ahora fíjate exactamente cuánto dinero es? [242]
Ahora escríbelo en la tabla, ¿puedes escribirlo así, qué harías? ¿de qué otra forma puedes formar esa cantidad? (*Reflexionar sobre la regla de cambio como restricción de la escritura a pesar de los modos diversos de representar materialmente la cantidad*)

P2. Además compras de verdura esta cantidad de dinero (278) (*con Carmen se trabaja con los mismos números del problema anterior: 144 y 98*).
¿Más o menos cuánto dinero gastaste en total en el mercado? ¿qué números te sirven para saber cuánto es más o menos? ¿Ahora fíjate exactamente cuánto dinero es? [531] [Carmen: 242]

P3. Pagas con $450 (*se muestra la cantidad ya escrita en la tabla*), ¿te animas a formarlo?, la compra de la carne por $242 (*se muestra la cantidad ya escrita en la tabla*). ¿Cuánto te sobra más o menos? ¿en qué te fijas? ¿Cuánto dinero te queda exactamente? [208]

P4. Y pagas con $500 (*se muestra la cantidad ya escrita en la tabla*) (*Carmen, con $450*), ¿te animas a formarlo?, la compra de la verdura por $278 (*se muestra la cantidad ya escrita en la tabla*) (*Carmen, $242*), ¿cuánto te sobra? [222] [Carmen, 208]

P5. Vas al super por refrescos y hielo. Gastas en refrescos esta cantidad de dinero (255) ¿Cuánto dinero es? Escríbelo en la tabla.
Y gastaste esta cantidad de dinero (107) en hielo ¿Cuánto dinero es? Escríbelo en la tabla.
¿Cuánto gastaste en total? [362] (*sólo se aplica con Carmen*)

P6. En las compras en el mercado te habían dado de vuelto, en el puesto de carne $208, ¿te animas a formarlo? Y en el puesto de verduras $222, ¿te animas a formarlo? ¿Cuánto dinero te quedaba? [430] (*sólo se aplica con Carmen*)

Con Carmen se trabajó en las dos situaciones primeras con los contextos mencionados pero con los mismos números en ambas situaciones, es decir 144 y 98. Los procedimientos de resolución propuestos fueron diversos, para el 1er problema fue el algoritmo de la suma y para el 2do la tabla. Esta sucesión de procedimientos procuraba explicitar las reglas subyacentes del algoritmo de la suma (por dónde comienza la resolución, qué significa “llevar”) evocando el funcionamiento de la tabla. En el 3er y 4to problema se replican las mismas cantidades aplicando en el primero de ellos el algoritmo de la resta y en el segundo la resolución en la tabla, de modo de contrastar ambos procedimientos para explicitar también las reglas subyacentes del algoritmo de la resta: por dónde se comienza y qué significa “pedir”. Finalmente el 5to y el 6to problema fueron resueltos por procedimientos sucesivos, la tabla y el algoritmo, para consolidar este vínculo e instalar a la tabla como referente para comprender y argumentar la lógica de los algoritmos.

En cambio con Sofía las adecuaciones fueron distintas a las de Carmen, pues se trabajaron las situaciones enunciadas pero agregando algunas consignas adicionales en el sentido de pedir la identificación de la operación antes de su resolución en la tabla, y la colocación de signos gráficos (de la operación y del resultado). Por ejemplo, en P1 otras consignas consideradas fueron:

¿Qué cuenta harías para saber cuánto dinero gastaste en total en carne? ¿sabes cómo se indica esa operación? Escríbelo en la tabla.
¿Cómo harías para indicar que estás por escribir el resultado?
¿Ahora fíjate exactamente cuánto dinero es? [242] ¿Por dónde empezarías a contar para no borrar? Ahora escríbelo en la tabla,
¿Puedes escribirlo así, qué harías? ¿de qué otra forma puedes formar esa cantidad? (*Reflexionar sobre la regla de cambio como restricción de la escritura a pesar de los modos diversos de representar materialmente la cantidad*)

En este marco Sofía manifestó dificultades para la identificación propuesta de ambas operaciones, por lo cual esto sería objeto nuevamente de la sesión posterior.

Con Olga se aplicó la estructura y las actividades previstas sin adecuaciones, pues el propósito prioritario con ella era consolidar la regla de cambio como recurso para la escritura canónica de los números y para aplicar informalmente los procedimientos de reagrupar y desagrupar. En este sentido, Olga avanzó en la adopción de las restricciones de la escritura pero persistía su dificultad para introducir espontáneamente la regla de cambio en el reagrupamiento.

7ª sesión. Las dificultades detectadas en la 6ª sesión incidieron en decisiones tomadas para el diseño de esta sesión. Por ello con Sofía se decidió sostener el trabajo de operaciones con contexto y en un ámbito familiar (el comercial), para consolidar la identificación de las mismas, complejizando sólo el contenido abordado (se incorpora la confrontación de procedimientos). En cambio con Olga se decidió seguir trabajando en la tabla de modo de propiciar el uso espontáneo y de modo anticipado de la regla de cambio, incorporando solamente la identificación de las operaciones implícitas en los problemas.

Entonces el *contenido* abordado y las *expectativas* con cada entrevistada fueron nuevamente diversos. Con Carmen se trabajan los mismos contenidos de la sesión anterior pero buscando extender sus posibilidades a otros contextos, es decir a ámbitos no comerciales, y se incorpora el desplazamiento en torno a nudos. Con Sofía se decide develar la lógica implícita de los algoritmos de la suma y de la resta. Y con Olga se procura la identificación de las operaciones.

En el *material* no hubo cambios pero sí en la *estructura*, pues no existe una secuencia básica para las tres, sólo son próximas las actividades previstas para Sofía y Olga.

En cuanto a Carmen, la estructura y actividades fueron las siguientes:

a) Operaciones en contextos aditivos (composición de dos medidas -búsqueda de la medida compuesta-, o medida⇨ transformación negativa⇨ medida –búsqueda del estado final–) con registro de cantidades representadas sin correspondencia con la escritura convencional.

P1. En la biblioteca de la escuela de sus nietos reciben 579 libros de texto para primer año y 325 para segundo, ¿cuántos libros reciben en total para primer y segundo año? [904] *(Pedir argumentación del algoritmo: regla de cambio y sentido convencional de resolución)*

P2. Del total de libros, 904, han entregado 415 libros, ¿cuántos libros quedan? [489] *(ídem)*

P3. De los libros restantes, deciden devolver 47 de primero y 48 de segundo porque tienen errores de impresión, ¿cuántos devolvieron en total? [95]
(Pedir argumentación del algoritmo: regla de cambio, sentido convencional de resolución, sentido de la ubicación en columnas o presentación de registro mal hecho -puedes hacerlo así, qué harías, por qué-)

P4. Si devuelven esos 95 libros, ¿cuántos libros quedan en la escuela? [394] *(ídem)*

b) Desplazamiento en torno a nudos.

(Si está consolidada la argumentación de la lógica subyacente del algoritmo)
P5. Se entregan 4 libros más, ¿cuántos libros quedan en total? [390]
P6. Luego entregan 1 más, ¿cuántos quedan ahora? [389]
P7. ¿Y si entregan 10 más? [379]
P8. ¿Y si entregan 100 más? [279]
P9. Resulta que reciben 11 libros más de primero, ¿cuántos libros tienen ahora en total? [290]
P10. También reciben 110 de segundo, ¿cuántos libros tienen ahora en total? [400]

Con Sofía y Olga, en cambio, la estructura y las actividades fueron las que siguen:

a) Operaciones en contextos aditivos (composición de dos medidas -búsqueda de la medida compuesta-, o medida⇨ transformación negativa⇨ medida –búsqueda del estado final–) con registro de cantidades conformadas sin correspondencia con la escritura convencional (se recuperan los P5 y P6 de la sesión anterior no aplicadas, que corresponden aquí a los P1 y P3).

P1. Sigues haciendo las compras con tu amiga para el convivio. Vas al super por refrescos y hielo. Gastas en refrescos esta cantidad de dinero (255) ¿Cuánto dinero es?
Y gastaste esta cantidad de dinero (107) en hielo ¿Cuánto dinero es?
¿Cuánto gastaste en total? [362]

P2. Pagas con $500, ¿te animas a formarlo?, la compra de la verdura que habías hecho que era de $278, ¿cuánto te sobra? [222]

P3. En las compras en el mercado te habían dado de vuelto, en el puesto de carne $208, ¿te animas a formarlo? Y en el puesto de verduras $222, ¿cuánto dinero te quedaba? [430]

P4. Con los $430, pagas tu compra en el super por $362, ¿cuánto dinero te queda? [68]

Puesto que existían diferentes contenidos y expectativas propuestos para cada una de ellas, hubo adecuaciones de esta secuencia básica. Así con Sofía se empleaban diversos recursos de resolución: la estimación, identificación de la operación, algoritmo personal (pidiendo la máxima explicitación del procedimiento), verificación en la tabla y argumentación de las causas del acierto o del error. Con Olga en la 1ª y 2ª actividad lo prioritario era propender a la anticipación de la regla de cambio como estrategia de la operatoria y restricción de la escritura. Ya en la 3ª y 4ª actividad se adicionó el pedido de identificación, luego de la resolución, de la operación realizada y la colocación de los signos gráficos respectivos:

¿Sabes cómo se llama la cuenta que hiciste? ¿Con qué signo se indica que estás haciendo esa operación? Escríbelo en la tabla. ¿Cómo se indica que esta parte de la cuenta es el resultado?

Con Carmen se puso en evidencia su dificultad para operar en otros contextos que no fueran comerciales, pero quizás por ciertas características de los enunciados que los distanciaban de una formulación más típica. Por ejemplo, la situación de entrega de libros a la escuela y de entrega por parte de la escuela dificultaba su comprensión de la situación. Además, empieza a observarse que Carmen tiene dificultades si el orden de los datos no coincidía con la utilización de ellos en la operación. Por ello, en la próxima sesión se decidió extender nuevamente el contexto de los problemas pero cuidando el modo de formulación para evitar confusiones y concentrar la dificultad en lo operatorio.

En el caso de Sofía se detectó una escasa familiarización con resultados de las sumas y restas con dígitos, ante lo cual se decidió incluir una actividad en la sesión siguiente para atender a esta problemática y hacerla extensiva también a Olga. También se visualizó una persistencia de la dificultad para rectificar su algoritmo personal erróneo y para operar en la resta cuando el minuendo es un número redondo (por ejemplo 500).

8ª sesión. Se sostuvo el *contenido* de sesiones previas (operatoria en contextos aditivos) pero con Carmen, además, se abordó también el algoritmo de ambas operaciones sin contexto, con Sofía sólo se trabajó con operaciones sin contexto, y con Olga también se trabajó en el proceso de identificación de las cuentas y su registro fuera de la tabla. Asimismo, al introducir operaciones con ausencia de contexto en las sesiones con Carmen y con Sofía, se abordó con ellas también la interpretación de algoritmos ya escritos (es decir, la identificación de la operación registrada).

Los contenidos abordados con Carmen y Sofía tuvieron como propósito cumplir con la *expectativa* de consolidar el proceso algorítmico concentrando la atención en el mismo. Para el cumplimiento de este objetivo contribuyeron también otras decisiones como la redefinición del contrato didáctico con Carmen, pidiendo que postergue la explicación y argumentación realizándolas una vez concluida la resolución.

En Olga, en cambio, la expectativa era introducir los algoritmos de la suma y la resta por lo cual se trabajó con registros sucesivos, primero la tabla y luego las cuentas.

Tanto el *rango numérico* como el *material* en general no fueron alterados, pero sí el rol de este último fue diverso. Con Carmen no se sugirió su uso sino como alternativa frente a dificultades de resolución. En Sofía se lo utilizó como recurso para resolver su dificultad para operar en la resta cuando el minuendo es un número redondo, y como alternativa frente a otras dificultades en la resolución. En cambio en Olga se planteó como un recurso de resolución mientras se familiarizaba con los algoritmos. A su vez, se introdujo un nuevo material para Sofía y Olga, cartones con dígitos para la rutina de memorización de las relaciones aditivas entre ellos.

El uso divergente del dinero puede observarse, a continuación, en las distintas *estructuras* y *actividades* previstas para cada entrevistada.

Con *Carmen*, la estructura y actividades previstas fueron las que siguen:

a) Operaciones en contextos aditivos (composición de dos medidas -búsqueda de la medida compuesta-, o medida⇨ transformación negativa⇨ medida –búsqueda del estado final–) con una formulación estereotipada.

P1. En una granja tienen gallinas ponedoras. El lunes ponen 297 huevos, el martes ponen 318, ¿cuántos huevos han puesto en total en los dos días? [615]
(*Pedir identificación de la operación, resolución, posterior argumentación de la lógica del resultado y de la resolución algorítmica*) ¿Te parece que el resultado es correcto? ¿por qué?
P2. El martes en la tarde del total de huevos que había en la granja, es decir 615 huevos, se dan 526 huevos a un vendedor, ¿cuántos huevos quedan? [89] (*ídem)*

P3. Quedan 89 huevos y el miércoles las gallinas ponen 337 huevos más, ¿cuántos huevos hay ahora en total? [426] (*ídem)*

P4. Se realiza otra entrega, de los 426 huevos se dan 158 a un vendedor, ¿cuántos quedan? [268] (*ídem)*

b) Operaciones sin contexto.

Fíjate en estas cuentas, cuáles son de suma. ¿Y cuáles son de resta?

Op1[31]. 500	Op2. 325	Op3. 329	Op4. 751	Op5. 700
- 278	+ 589	+ 397	- 473	- 164

Ahora resuelve esta cuenta … (*escribir en otra hoja sucesivamente, cada una de las operaciones ya mostradas)* y luego me explicas cómo la hiciste.
(Pedir identificación de la operación, resolución, posterior argumentación de la lógica del resultado y de la resolución algorítmica) ¿Te parece que el resultado es correcto? ¿por qué?

Con Sofía si bien las "cuentas" fueron las mismas variaron sus modos de presentación, además se incluyó una rutina previa de memorización para consolidar también el proceso algorítmico, que en su implementación incorporó además un espacio de reflexión sobre los errores y la posibilidad de rectificarlos a partir de la recuperación de algunas propiedades de estas operaciones. La estructura y las actividades, quedaron del siguiente modo:

a) Rutina de memorización[32].

Vamos a hacer un juego para que puedas recordar rápidamente los resultados de sumas y restas con números pequeños. No es que esté mal que cuentes con los dedos para calcular un resultado, pero sería muy bueno que sepas estos resultados para que cuando hagas cuentas con números grandes puedas decir: 5+4, 9; 8+7, 15; 9–3, 6; 18–9, 9.

Suma
(*Se elige un cartón con un dígito que permanece visible. Se van sacando cartones con dígitos del 0 al 9 de un montón en que están todos volteados, se debe decir inmediatamente el resultado de sumar ambos números. Si el resultado es correcto se le entrega un frijol. Se van realizando cortes cada un minuto para contabilizar la cantidad de aciertos. No se predetermina un orden para el tratamiento de los diversos dígitos.*)

Resta
(*Se elige un cartón con un dígito que permanece visible. Se van sacando cartones con dígitos -menores al minuendo- de un montón en que están todos volteados, se debe decir inmediatamente el resultado de la resta. Si el resultado es correcto se le entrega un frijol. Se van realizando cortes cada un minuto para contabilizar la cantidad de aciertos. No se predetermina un orden para el tratamiento de los diversos dígitos.*)

b) Operaciones sin contexto (las mismas que se trabajaron con Carmen) pero empezando con la resta en la que tuvo dificultad, es decir con minuendo con número redondo, proponiéndole resolverla con la tabla.

Vamos a resolverla usando la tabla, escríbela allí y dime cuántas monedas o billetes necesitas para el quinientos.
Ahora vamos a ver cómo la resolverías en la cuenta. *(Promover la extensión de la reflexión sobre la lógica de resolución en la tabla al algoritmo)*

[31] Se usará "Op" como abreviatura de "Operación".
[32] Adaptación del juego *Basta numérico* (Fuenlabrada y Block, et al., 1991, pp.53-55).

Posteriormente se trabajó con las operaciones restantes pidiendo la identificación de la operación y su resolución autónoma. En este proceso se observaba si recurría a la tabla (evocándola o usándola) para corregir su algoritmo espontáneo, y si no se la sugería como recurso recordando la dificultad observada en la sesión previa en la aplicación de su algoritmo personal incorrecto.

Finalmente con Olga la estructura y las actividades aplicadas fueron las siguientes:

a) Rutina de memorización (igual a la trabajada con Sofía).

b) Operaciones en contextos aditivos (composición de dos medidas -búsqueda de la medida compuesta-, o medida⇨ transformación negativa⇨ medida –búsqueda del estado final–).

P1. En el puesto de quesadillas y sopes el sábado juntan con las ventas esta cantidad de dinero (297) ¿Cuánto dinero es? Escríbelo en la tabla.
Y el domingo juntan esta cantidad de dinero (318) ¿Cuánto dinero es? Escríbelo en la tabla.
¿Cuánto dinero juntaron entre los dos días? [615]
¿Qué cuenta harías? Escribe entonces su signo, ¿lo recuerdas? ¿cómo indicas que ahí abajo va el resultado?
Ahora vamos a escribir la cuenta que hiciste en el cuaderno.

P2. El patrón con lo que juntó con las ventas, $615, paga a las personas que atienden el puesto $326, ¿cuánto dinero le queda? [289] *(ídem)*

P3. Al patrón le quedó de ganancia en el fin de semana $289. El lunes las ventas son de $ 337, ¿cuánto dinero tiene el patrón ahora en total? [626] *(ídem)*

P4. Con los $626 paga $158 a las personas que atienden el puesto, ¿cuánto dinero le queda? [468] *(ídem)*

9ª sesión. El *contenido* de esta sesión fue el mismo de sesiones anteriores, la operatoria, pero en Sofía sólo se trabajó con operaciones de suma y resta sin contexto, en cambio con Olga se trabajaron dichas operaciones tomando como contexto problemas de tipo aditivo, y con Carmen se trabajaron operaciones con y sin contexto. Estas diferencias obedecen a la decisión por continuar trabajando sobre el proceso algorítmico con Sofía, y con Olga, dadas las dificultades manifiestas en la sesión anterior en la identificación de la resta, se optó por continuar trabajando con operaciones con contexto para consolidar la identificación. Con Carmen la combinación de operaciones con y sin contexto tuvo que ver con la búsqueda de extensión de sus posibilidades en ambos sentidos, de resolución de nuevas estructuras aditivas y de operaciones con mayor complejidad. Como en las operaciones con contexto había una mayor complejidad en la incógnita, se retomó el contexto comercial para disminuir la probable complejidad adicional de trabajar con un contexto menos familiar.

Un punto común en todas, fue la introducción del algoritmo ampliado como un recurso que apoya la operatoria y que posibilitaría resolver algunas dificultades visualizadas en la sesión previa. Una de ellas fue el error cometido por Carmen en la resolución de la resta porque olvidaba los desagrupamientos realizados. Otra dificultad de Carmen fue en la resolución simbólica de las restas que tenían como minuendo un número redondo. Sofía además persistía en la aplicación de su algoritmo personal y el algoritmo ampliado permitía controlarlo y así rectificarlo. Olga manifestaba confusiones en las decisiones del registro de los reagrupamientos en la suma que también podían ser abordadas desde el algoritmo ampliado.

En cuanto a las *expectativas*, esta diversidad de contenidos implicó que fueran diferentes. Así con Carmen se pretendía consolidar la operatoria e incluso extenderla trabajando con una mayor cantidad de sumandos, combinando sumandos de diversa cantidad de dígitos, y resolviendo sumas con dos sumandos pero cuatridígitos, y también se buscaba trabajar con incógnitas más complejas. Puesto que la redefinición del contrato (primero resolución y luego explicación y argumentación) posibilitó en la 8ª sesión una resolución consistente y dado que se iba a complejizar la dificultad operatoria, se decidió mantener esta última definición del contrato.

En el caso de Sofía se pretendía seguir consolidando la operatoria para lo cual se mantuvo el propósito de que memorizara resultados de sumas y restas con dígitos, y se insistió en el pedido de argumentación de resultados y en la evocación de la tabla en este proceso.

Con Olga también se sostuvo la búsqueda de memorización de resultados, reafirmándola como recurso para la resolución de algoritmos, para que asuma con mayor responsabilidad la obtención del resultado correcto en la rutina de memorización. A su vez, se pretendía afirmar sus posibilidades de identificación de las operaciones pertinentes para la resolución de algunas estructuras aditivas.

Con las tres entrevistadas se procuraba además optimizar sus registros mediante la incorporación del algoritmo ampliado, y que lo validaran como un recurso potente para la resolución.

No hubo cambios en el *rango numérico*, salvo con Carmen, pues se siguió trabajando con tridígitos. El *material* tuvo una pequeña variación en Sofía y Olga, porque se quería dar como tarea la ejercitación de sumas y restas con dígitos. Se armaron tarjetas que en su frente tenían escritas las operaciones y en el reverso, sus resultados correctos. Al finalizar la sesión algunas fueron entregadas a las entrevistadas para su práctica.

La *estructura* y *actividades* propuestas fueron de diversa índole. Con Carmen el orden fue alterado, primero se trabajó con operaciones sin contexto y luego con operaciones con contexto, como puede verse a continuación:

a) Operaciones sin contexto.

(*Dictar las siguientes operaciones*)

Op1.	Op2.	Op3.	Op4.
	87		259
5 738	476	6 594	97
+ 3 549	+ 588	+ 3 907	+ 389
[9 287]	[1 151]	[10 501]	[745]

(*Pedir identificación de la operación, resolución, posterior argumentación de la lógica del resultado y de la resolución algorítmica*) ¿Te parece que el resultado es correcto? ¿por qué?

b) Operaciones en contextos aditivos (medida⇨ transformación positiva o negativa⇨ medida –búsqueda de la transformación–).

Transformación negativa
P1. Habías ganado con las ventas del puesto $800 y te quedan $137, ¿cuánto dinero gastaste? [663] (*Pedir resolución, identificación de la operación 800 –137*)

Transformación positiva
P2. Te quedaban $196 de ganancias por las ventas del puesto, hiciste nuevas ventas y ahora tienes en total $925, ¿cuánto dinero ganaste ahora con las ventas del puesto? [729] (*Pedir resolución, identificación de la operación 925 –196*)

c) Operaciones en contextos aditivos (medida⇨ transformación positiva o negativa⇨ medida –búsqueda del estado inicial–).

Transformación negativa
P3. Haces compras de dulces para el puesto por $577, pagas y te dan de vuelto $313, ¿con cuánto dinero pagaste? [890] (*Pedir resolución, identificación de la operación 577+313*)

Transformación positiva
P4. Ya tenías algo de mercadería para el puesto. Hiciste compras por $577 y ahora tienes $834 de mercadería en total. ¿cuánto dinero tenías en mercadería al principio, antes de hacer la nueva compra? [257] (*Pedir resolución, identificación de la operación 834 –257*)

Con Sofía y Olga las operaciones en juego fueron las mismas, pero en el caso de Sofía fueron planteadas sin contexto y en el de Olga con contexto. Con Sofía fue necesaria una redefinición de contrato para insistir en la necesidad de evocación del dinero como referente para corregir su algoritmo y, en el uso del algoritmo ampliado:

Vas a resolver las cuentas que te voy a dictar. Pero ten en cuenta que la semana pasada no las resolviste correctamente. Luego las hicimos bien pensando como si estuviéramos trabajando con dinero. Por eso vas a resolverlas sola pero pensando como si estuvieras trabajando con dinero. Además ten en cuenta de escribir bien esos números pequeños que haces, como vimos recién, así no te equivocas.

Primero me dices qué cuenta es, la resuelves y luego platicamos sobre cómo hiciste para hacerla.

Como puede observarse en la última frase, se retoma también la redefinición de contrato ya hecha con Carmen (primero resolución, luego explicación y argumentación), por su eficacia para el logro de consistencia en la resolución.

Con *Olga* se sostuvo la estructura de la sesión previa (rutina de memorización y operaciones en contextos aditivos) y los tipos de situaciones aditivas trabajados (composición de dos medidas -búsqueda de la medida compuesta-, o medida⇨ transformación negativa⇨ medida –búsqueda del estado final–). Las actividades implementadas fueron las siguientes:

P1. Este mes pagas de luz $476 y de gas pagas $388, ¿cuánto pagas en total? [864]
¿Qué cuenta harías? ¿te animas a escribirla en el cuaderno?
Puedes resolverla, si necesitas, usando la tabla o los billetes y monedas. Vamos a ir agregando arriba de la cuenta algunas anotaciones que nos ayuden a recordar si hemos cambiado monedas o billetes y cuántos nos quedan.

P2. Luego pagas de teléfono $589 y de agua $114, ¿cuánto pagas en total? [703] (*ídem)*
P3. Vas al banco con $925 y pagas una cuenta de $196, ¿cuánto dinero te sobra? [729] (*ídem)*
P4. Vas al banco nuevamente y pagas con $800 una cuenta de $137, ¿cuánto te dan de vuelto? [663] (*ídem)*
P5. Tienes $502 y pagas en la escuela de tus niños $314, ¿cuánto dinero te queda? [188] (*ídem)*

P6. Tenías $299 y tu patrona te paga, de tu semana y una propina, $622, ¿cuánto dinero tienes ahora? [921] (*ídem)*

10ª sesión. En esta última sesión, como el logro de las expectativas de la 9ª sesión fue parcial se decidió sostener los *contenidos* de la sesión anterior, tanto en Carmen como en Sofía. Esta decisión se vincula con las dificultades que tuvo Carmen para extender su dominio de la operatoria de tridígitos a cuatridígitos, así como para encolumnar sumas con varios sumandos con diversa cantidad de cifras y para resolver restas con desagrupamientos sucesivos. En el caso de Sofía, si bien en la sesión previa comenzó a tomar conciencia del carácter orientador del algoritmo ampliado, no podía aún argumentarlo pues no evocaba el uso del material.

Con Olga, dado que no presentó ya dificultades en la identificación de las operaciones pero sí era necesario consolidar el proceso algorítmico, se decidió trabajar con operaciones sin contexto. Además, puesto que presentó problemas al leer y producir números se previó un modo alternativo de control de estas dificultades (la identificación de agrupamientos) y se introdujeron números que posibilitaran evidenciar estos errores (números con cero intermedio como 703)

Las *expectativas* eran entonces iguales para Carmen y Sofía, pero con Olga el cambio estuvo en que se concentró el esfuerzo en optimizar y consolidar el proceso de resolución y de registro de los algoritmos de suma y resta.
Tampoco hubo cambios en el *material* ni en los *rangos numéricos* trabajados. Pero sí el lugar del material era diverso, pues era presentado como un recurso alternativo de resolución ante cualquier dificultad en este proceso o de validación de una resolución simbólica en la que hubiera dudas.
La *estructura* de la sesión aplicada con cada entrevistada fue, entonces, como se detalla a continuación. Con Carmen se trabajó primero con operaciones sin contexto, luego con operaciones en los mismos contextos aditivos que la sesión anterior, y finalmente, nuevamente con operaciones sin contexto. Con Sofía se aplicó la misma estructura (rutina de memorización, operaciones sin contexto) recordándole su falta de eficacia en la resolución y en la necesidad de "pensar como si estuviera trabajando con dinero", o sea, de lo imperioso de evocar el material como un recurso de control de su resolución. Con Olga se aplicó ahora la misma estructura que con Sofía, pero combinando en las actividades dictado de operaciones con lectura de operaciones ya escritas, para consolidar y rectificar también su interpretación y producción de números. Frente a dificultades en este último aspecto, se pedía que corrigiera verificando si el número escrito o leído era el que había dicho o escrito, en función de los billetes y monedas necesarios para formarlo.

Síntesis del recorrido. En este apartado, se esbozará una reconstrucción sintética de la secuencia aplicada con cada entrevistada, rescatando el número de sesión y sus contenidos y/o actividades centrales, de modo de posibilitar una identificación del recorrido seguido por cada una.

Carmen recorrió la siguiente trayectoria en la secuencia:

1ª sesión: conocimiento de la serie numérica (comparación, interpretación y producción de números en un contexto de uso como ordinal) mediante búsquedas y ubicación de páginas en la sección amarilla en el rango del 100 al 900.
2ª sesión: conocimiento de la serie numérica (comparación, interpretación y producción de números en un contexto de uso como ordinal) mediante búsquedas y ubicación de páginas en el directorio en el rango del 1 000 al 5 000.

3ª sesión: sistema decimal de numeración (identificación de agrupamientos y acción de reagrupar) mediante el juego del cajero ascendente aplicado al rango del 0 al 900.
4ª sesión: sistema decimal de numeración (identificación de agrupamientos y acciones de reagrupar y desagrupar) mediante el juego del cajero ascendente y descendente aplicado al rango del 0 al 900.
5ª sesión: leyes de escritura del sistema decimal de numeración, operatoria en contextos aditivos mediante problemas del contexto comercial con cantidades representadas con y sin correspondencia con la escritura convencional.
6ª sesión: operatoria en contextos aditivos (problemas del ámbito comercial), lógica implícita de los algoritmos, eficacia de los sentidos de resolución de los algoritmos.
7ª sesión: operatoria en contextos aditivos, pero de ámbitos no comerciales, desplazamiento en la serie numérica (en torno a nudos).
8ª sesión: operatoria en contextos aditivos (problemas de ámbitos no comerciales con una formulación estereotipada), operaciones sin contexto (algoritmo de la suma y de la resta).
9ª sesión: operaciones sin contexto de mayor complejidad (varios sumandos con diversa cantidad de cifras, sumas de dos sumandos que sean cuatridígitos), operatoria en contextos aditivos trabajados pero con incógnitas más complejas (problemas del ámbito comercial), algoritmo ampliado.
10ª sesión: ídem 9ª sesión.

En cambio Sofía transitó en el siguiente recorrido:

1ª sesión: conocimiento de la serie numérica (comparación, interpretación y producción de números en un contexto de uso como ordinal) mediante búsquedas y ubicación de páginas en la sección amarilla en el rango del 10 al 200.
2ª sesión: conocimiento de la serie numérica (comparación, interpretación y producción de números en un contexto de uso como ordinal) mediante búsquedas y ubicación de páginas en el directorio en el rango del 100 al 2 000.
3ª sesión: no fue aplicada.
4ª sesión: sistema decimal de numeración (identificación de agrupamientos y acciones de reagrupar y desagrupar) mediante el juego del cajero ascendente y descendente aplicado al rango del 0 al 200.
5ª sesión: leyes de escritura del sistema decimal de numeración, operatoria en contextos aditivos mediante problemas del contexto comercial con tridígitos representados con y sin correspondencia con la escritura convencional.
6ª sesión: operatoria en contextos aditivos (problemas del ámbito comercial con tridígitos), eficacia de los sentidos de resolución en la tabla, identificación de operaciones en la tabla.

7ª sesión: operatoria en contextos aditivos (problemas del ámbito comercial con tridígitos), identificación de operaciones en la tabla, lógica implícita de los algoritmos.

8ª sesión: operaciones sin contexto (algoritmo de la suma y de la resta con tridígitos).

9ª sesión: operaciones sin contexto (algoritmo de la suma y de la resta con tridígitos), algoritmo ampliado.

10ª sesión: ídem 9ª sesión.

Por último Olga participó en la siguiente secuencia:

1ª sesión: conocimiento de la serie numérica (comparación, interpretación y producción de números en un contexto de uso como ordinal) mediante búsquedas y ubicación de páginas en la sección amarilla en el rango del 10 al 100.

2ª y 3ª sesión: no fueron aplicadas.

4ª sesión: sistema decimal de numeración (identificación de agrupamientos y acciones de reagrupar y desagrupar) mediante el juego del cajero ascendente y descendente aplicado al rango del 0 al 100.

5ª sesión: leyes de escritura del sistema decimal de numeración, operatoria en contextos aditivos mediante problemas del contexto comercial con tridígitos representados con y sin correspondencia con la escritura convencional.

6ª sesión: operatoria en contextos aditivos (problemas del ámbito comercial con tridígitos), eficacia de los sentidos de resolución en la tabla.

7ª sesión: operatoria en contextos aditivos (problemas del ámbito comercial con tridígitos), identificación de operaciones en la tabla.

8ª sesión: operatoria en contextos aditivos (problemas del ámbito comercial con tridígitos), identificación de operaciones en la tabla, algoritmo de suma y resta (registro posterior a su resolución con la tabla).

9ª sesión: ídem 8ª sesión pero incorporando el algoritmo ampliado.

10ª sesión: operaciones sin contexto (algoritmo de la suma y de la resta con tridígitos), algoritmo ampliado, producción e interpretación de números.

CAPÍTULO III

SEMBLANZA DE LAS MUJERES ENTREVISTADAS

Y SUS VÍNCULOS CON EL SABER

En este Capítulo se esbozarán algunos de los rasgos que identifican a cada una de las entrevistadas. Para ello se recuperarán como insumos sus datos personales, su inserción laboral, su trayectoria educativa y algunas constantes de su desempeño inicial y en el desarrollo de la secuencia didáctica, procurando reconstruir también el vínculo con el saber que evidenciaron en estos espacios.

Carmen

Carmen es una mujer de 46 años, originaria de Toluca, con baja escolaridad (cursó hasta 2º grado) y sin inserción educativa actual. Por ello el contexto en el que se trabajó fue en su lugar de trabajo (un puesto de dulces), con las dificultades de interrupciones sucesivas que esto acarreó. Asimismo, su historia educativa conlleva expectativas educativas postergadas que asocia con su condición de género y su origen socioeconómico, como puede observarse en el siguiente fragmento donde habla sobre su trayectoria educativa no concluida:

"(…) yo sí hija, yo, mi anhelo más grande era ser maestra y le decía yo a mi mamá 'Ay mamá!' En los pueblos ya ves que se sufre mucho, le decía yo 'yo mamá de grande quiero ser maestra para este ... para ayudarle y que tengan dinero y sacarnos adelante'. Pero luego los papás son difíciles 'pues no… qué vas a estudiar, para qué? Na' más pa' que le escribas una carta al novio y luego el otro se va' y le decía yo'. No, que al rato no es así es que yo tengo ganas de estudiar', 'Y no vas'. Como fuimos muchos, fuimos nueve de familia. Y le decía yo a mi papá 'pues no, yo quiero estudiar'. Y le digo que, na' más llegué hasta segundo y ya después ya no me quisieron apuntar porque, primero por los cuadernos porque pues antes los libros te los daban, los obsequiaban y todo pero pues que, para los cuadernos, los lápices o lo que nos pedían no tenían, si le digo por eso no." (1ª E.1[33])

[33] Se empleará "E" como abreviatura de "entrevista", seguido del número de página del protocolo, por ejemplo: 1ªE..1, hace referencia a la 1ª entrevista, página 1 del protocolo.

No obstante, tiene seguridad y confianza en sus saberes matemáticos previos quizás porque hace uso de ellos en diversos ámbitos. Uno de ellos es en su desempeño laboral (atiende un puesto de dulces), donde reconoce su uso y la facilidad que deviene del rango numérico que demanda:

“C- Aquí pues, se me grabó fácil todo. (se ríe) Sí, le digo.
E- Y la ventaja de los dulces es que siempre son cifras pequeñas, ¿no?
C- Ándele, son cifras pequeñas y ya.” (1ª E.3)

También los utiliza en el ámbito comercial pero ya no vinculado a su trabajo sino para resolver sus necesidades cotidianas, donde manifiesta su orgullo por sus posibilidades de control de las cuentas a las que se enfrenta en el mercado: “ (…) ya ve que va una al mercado y cuando me hacen mi cuenta yo si luego saco: ‘es tanto’. ‘¿Sí señora?’ ‘Sí’. Y hasta le digo: ‘es tanto’. ‘No, no’. Ya cuando me hacen ellos la cuenta ‘Sí, sí, está bien’ ” (1ª E.3).

Finalmente, hace uso de estos saberes en el seguimiento de la escolaridad de una de sus nietas, donde rescata sus posibilidades de acompañamiento y el reconocimiento por otros miembros de la familia (su hija). Así por ejemplo, ante el pedido de confirmación de si también utiliza la matemática para ayudarle a su nieta responde: “Ahá, sí, con las tareas luego me dice ‘abuelita ahorita me dejaron desde tres mil hasta el diez mil de dos en dos’. Entonces yo y le voy diciendo ‘vas poniendo tres mil dos, tres mil cuatro’ y ya más o menos. Y entonces baja mi hija y dice ‘no, sí mamá, sí va bien’ " (1ª E.4).

Este vínculo con sus saberes se asienta fundamentalmente en el uso del cálculo mental y de la estimación como referente para el control de sus producciones. El cálculo mental opera como modo de control de sus producciones incluso en rangos numéricos que no son los de mayor competencia, pues tiene un mejor desempeño en tridígitos (tiene dificultades en la interpretación y producción de cuatridígitos, tiende a reducirlos a tridígitos, en cambio puede interpretar, producir y operar correctamente con tridígitos). A través del recurso a la estimación puede rectificar errores cometidos en la resolución de algoritmos con cuatridígitos.

Por ejemplo, en una resta sin contexto que es dictada a Carmen en la décima sesión (9 032–7 568), había llegado a un resultado incorrecto (2 064 en vez de 1 464) pero ante el cuestionamiento de la entrevistadora y el pedido de estimación puede deducir que el resultado es inapropiado:

“E- Si yo a nueve mil, este (señala el 9 032) le quito siete mil quinientos, como cuánto me va a dar.
C- Uhm … setecientos …
E- Nueve mil, le quito siete mil quinientos.
C- Quedan mil quinientos.
E- Mil quinientos y a ti te ha dado dos mil sesenta y cuatro.

C- Uhum.
E- Vamos a ver qué es lo que … Parece que el resultado no es correcto. Es mucho más grande de lo que pensamos.” (10ªS.7)

O incluso, haciendo uso también de la aproximación del resultado, puede rectificar la identificación de operaciones en estructuras aditivas menos familiares (sólo resuelve inicialmente mediante un algoritmo la estructura aditiva “composición de dos medidas”, cuando la incógnita es la búsqueda de la medida compuesta). Por ejemplo, en el problema “Luego de hacer el pago en el banco, te quedaban $567. Pero tu hijo te da un dinero y ahora tienes en total $836, ¿cuánto dinero te dio tu hijo? [269]”, Carmen puede responder al pedido de estimación que le realiza la entrevistadora, diciendo que el resultado será aproximadamente de $300. Con base en esta estimación puede rectificar su identificación inicial incorrecta de la suma como operación para resolver el problema: “Una su … una suma … no” (10ªS.21). Llegando así posteriormente a la identificación de la operación pertinente, es decir la resta: “(silencio) Una de a menos” (10ªS.21).

Sin embargo, esta confianza en sus propias posibilidades de cálculo mental opera como obstáculo para el acceso a modos de registro confiables de los algoritmos cuando tiene que utilizarlos con números que le son poco familiares. No registra inicialmente en el algoritmo convencional los reagrupamientos y desagrupamientos realizados en la suma y resta, respectivamente, cuya ausencia le ocasionan errores en la operatoria cuando razona sólo sobre lo simbólico (9ªS.7):

Su anotación es:

$$\begin{array}{r} 6594 \\ -\ 3907 \\ \hline 2587 \end{array}$$

La entrevistadora le insiste en el uso del algoritmo ampliado (de la suma y la resta) luego de su validación como mecanismo de explicitación de sus cálculos realizados mentalmente. No obstante, Carmen sigue manifestando resistencias usando parcialmente dicho registro, pues habitualmente lo utiliza en el agrupamiento en el que va a operar sin registrar la transformación del agrupamiento afectado, lo cual limita su eficacia cuando sobre un agrupamiento se realizan varias transformaciones sucesivas:

Su anotación es:

“C- (va diciendo en voz baja mientras resuelve) Quince (escribe 15 arriba de las unidades).

C- A quince le quitamos siete … ocho. Ocho (escribe 8 en el resultado en las unidades).

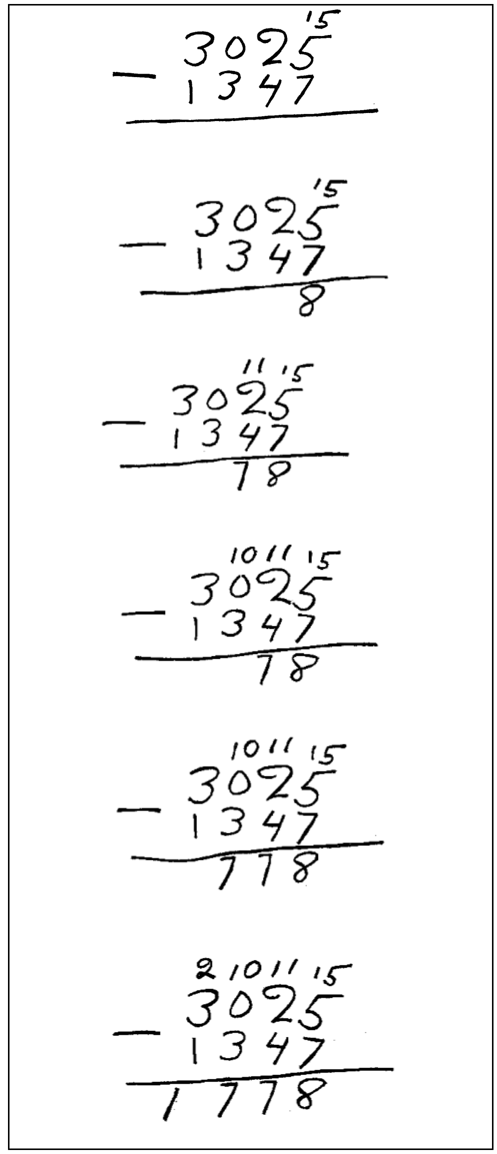
C- A doce … a once (escribe 11 arriba de las decenas) le quitamos … cuatro … siete (escribe 7 en el resultado en las decenas).

C- Siete. Uhm …o sea que …diez (escribe 10 arriba de las centenas).

C- A diez le quitamos tres, quedan … siete (escribe 7 en el resultado en las centenas que es incorrecto).

C- Siete. Al dos (escribe 2 arriba de los miles) le quitamos una … queda una (escribe 1 en el resultado en los miles).

(10ªS.14)



Como puede observarse en el anterior fragmento, el uso del registro como mecanismo de explicitación y no como apoyo evitando la necesidad de memorización, impide que Carmen recuerde que las centenas han sido afectadas por varios cambios sucesivos quedando nueve centenas en vez de diez, pues debió desagrupar una para tener once decenas en el minuendo y así poder restar. Finalmente, ante la posibilidad de usar el cálculo mental como recurso de control de sus resoluciones, detecta sus errores y adopta el uso del algoritmo ampliado como apoyo de la resolución de las operaciones.

Este parcial acceso a lo simbólico y a los mencionados recursos propios de validación le otorgan cierta autonomía y confianza en sus posibilidades de resolución independiente. Pero simultáneamente con este reconocimiento y valorización de sus saberes previos, presenta una mayor familiaridad con modos de formulación de situaciones problemáticas más estereotipados (uso de palabras claves para interpretar los problemas, uso como acompañamiento de la operatoria de los vocablos “llevar”, “pedir”). Probablemente, dado el tiempo que ha transcurrido de su escolaridad, esta mayor familiaridad con formulaciones estereotipadas se haya constituido en el contacto mediado por las trayectorias familiares con el espacio escolar, particularmente en el acompañamiento de la escolaridad de una de sus nietas:

“E- ¿Qué cosas te son difíciles?
C- Los números romanos, que lo que me dice mi hija que ... arábigos o no sé qué me dice mi … pues eso yo no sé ... Todo eso pero lo demás sí.
E- Y los números que nosotros manejamos, ¿cuáles son los que sientes que te cuestan más?
C- Por decir esos lo, que de esos que tienen que mayor que menor... este... otros que vienen luego en cifras creo horizontales (se refiere a operaciones escritas de modo horizontal); que ya me explicó mi nieta ‘cuenta aquí abuelita y es lo mismo, te da la misma cantidad’. O sea que vienen o sea haga de cuenta aquí, vienen cerrados en un cuadrito y eso es lo que luego y no sé cómo.” (1ª E.3)

Como se anticipara, una de las evidencias de esta familiaridad sería el uso de palabras claves como referentes de interpretación de los problemas. Por ejemplo, frente a un problema de la séptima sesión que planteaba entregas sucesivas de libros de la biblioteca escolar a los alumnos, luego de la última entrega quedaban 379 libros y se le pregunta a Carmen cuántos quedarían si la escuela entrega 100 libros más. Carmen, retomando la expresión “más”, confunde la situación e interpreta que se incrementaría el total de libros a 479: “¿Cien libros más? Son trescientos … serían … cuatrocientos setenta y nueve” (7ªS.4). Es decir que recuperando la palabra “más” como clave considera que la escuela recibirá en vez de entregar libros: “(interrumpe) Y va a recibir cien libros (se refiere a la escuela)” (7ªS.4).

Otra evidencia de la familiaridad con usos del espacio escolar, sería la escritura de datos directamente como para poder operar sobre ellos (escribe uno debajo de otro de modo encolumnado), respetando el orden en que se dicen los datos en el enunciado:

“E- Recuerda, si quieres puedes anotar la información primero y después decides qué operación haces. Resulta que pagas en el banco el recibo del teléfono por cuatrocientos cincuenta y seis pesos.
C- (escribe 456)
E-Y te dan de vuelto ciento catorce pesos.
C- Ciento qué …
E- Catorce.
C- (escribe abajo, encolumnado, 114)
(10ªS.22)

Su anotación es:

456
114

También puede ser otra evidencia el acceso al lenguaje “escolar” de acompañamiento de los cambios efectuados en la operatoria (“llevar”, “pedir”). Así por ejemplo, en la resolución de un problema de la sexta sesión en el que se preguntaba cuánto dinero gastó en carne, si había gastado junto con su comadre $144 en carne de puerco y $98 en carne de pollo, Carmen usa como estrategia la cuenta 144+98. Una vez escrita la cuenta, acompaña su resolución del comentario: "(comienza a sumar en sentido de derecha a izquierda) Ocho y cuatro, doce, llevamos una …" (6ªS.3).

Asimismo, en la décima sesión mientras argumenta su resolución de la operación sin contexto 9 032–7 568, frente a la pregunta sobre cómo había hecho para tener doce en las unidades del minuendo en vez de dos, señala: "(interrumpe) Pedí prestado aquí (señala las decenas)" (10ªS.8).

Sofía

Sofía es una mujer de 28 años, también proveniente de un pueblo del interior del país, de Hidalgo, y sin acceso previo a la escolaridad. Está inscrita en el INEA, al inicio de este trabajo formaba parte de un grupo de alfabetización. Actualmente ya ha sido promovida a primaria.

Desde esta exclusión previa, pareciera haber construido una mirada del valor del acceso a lo simbólico y de su importancia en el ámbito escolar. Aunque desde su inserción laboral como empleada doméstica, cuando se le pregunta sobre ámbitos de uso extraescolares de la matemática, reconoce al intercambio comercial:

"S- Cuando pago las cuentas, cuando voy de compras, ¿no?. Cuando voy de compras o aquí también.
E- O sea más que nada en el mercado …
S- Sí, o en el super." (1ª E.1-2)

Pareciera que, a pesar de este reconocimiento, desconoce a este ámbito como un espacio de saber, su lógica es reconocida como dispar de la simbólica y por ende manifiesta resistencias a usarla como referente de control de lo simbólico.

Por ello, al resolver en la octava sesión la operación sin contexto 500–278 por métodos sucesivos (primero la tabla y luego el algoritmo), a pesar de la obtención del mismo resultado por ambos procedimientos e incluso a pesar del uso de la tabla como referente de resolución del algoritmo ante la dificultad de Sofía para operar con un minuendo que sea un número redondo, insiste en la distinción:

"S- Y casi es lo mismo, ¿no?
E- ¿El resultado es el mismo o no es igual?
S- Es el mismo. Nada más que aquí (señala la tabla) es con el dinero, ¿no?" (8ªS.6)

Este vínculo con el saber centrado en un control de lo simbólico en sí mismo, sin hacer uso de referentes para su control, genera inicialmente una actitud frente al saber de ausencia de responsabilidad sobre el resultado, con una fuerte demanda de validación externa por parte de la entrevistadora:

"S- ¿Sí está bien?
E- Está bien. Qué te parece, ¿está bien o mal? Según lo que me explicaste recién.
S- Sí, es el mismo resultado. Sí está bien.
E- Sí está bien.
S- Está bien resuelto, ¿no?" (10ªS.10)

Así como también conlleva un constante uso de lo simbólico para la resolución. Recurso persistente que se visualiza en el registro espontáneo de datos y contexto de los mismos durante el transcurso de la primera entrevista. Por ejemplo, en una situación de conteo de billetes y monedas, en la que sólo se demandaba el conteo de modo oral Sofía pregunta: "¿Tengo que anotar algo?" (1ª E.3). Y posteriormente, a pesar de la aclaración de que no era lo pedido y de que el registro era voluntario insiste y espontáneamente en un momento comienza a registrar las soluciones obtenidas.

En la segunda entrevista, también hace uso de la escritura autónoma de datos y de su contexto, en este caso para la resolución de los diversos problemas planteados. Por ejemplo frente al problema: "En el servicio medido se detalla el importe de las llamadas locales, y el costo de las llamadas de larga distancia. Si pagas $108 de llamadas locales, y $223 de servicio medido, ¿cuánto pagaste por las llamadas de larga distancia?", su registro espontáneo es el siguiente (2ª E.2):

Su anotación es:

LOCALES 108 PESOS PAGO Y $ 223 Servicio medido Larga dinta

La dificultad que esta preeminencia de lo simbólico ocasionó en Sofía fue su búsqueda de modos de control intrínsecos a lo simbólico, es decir demanda procedimientos para su control que le posibiliten prescindir de algún referente concreto. Así se constituiría un contrato subyacente de pedido de provisión de elementos técnicos de control de lo simbólico que se manifiesta, por ejemplo, en la décima sesión frente al pedido de argumentación de la operación sin contexto 502–314 (siendo el resultado obtenido incorrecto: 202). Sofía había resuelto la resta en las unidades operando en sentido inverso, es decir que al sustraendo (4) le había quitado el minuendo (2) dada la dificultad de que el minuendo era menor que el sustraendo, y ante el señalamiento de este error manifiesta: "Entonces se tiene que resolver de arriba para abajo. ¿Es de la derecha a la izquierda?" (10ªS.10). Y ante la respuesta proporcionada por la entrevistadora basada en el referente monetario (del tipo: "con este número –el minuendo– debes pagar este –el sustraendo–") acude a su cuaderno del INEA buscando normas de control de lo simbólico, expresadas como mecanizaciones:

"S- ¿Puedo ver algo que tengo en el cuaderno (saca su cuaderno de clases del INEA donde tiene escrito normas para resolver las operaciones, por dónde empezar, etc.)? Es de derecha a izquierda, ¿verdad? ¿Cómo era? De derecha a izquierda … (lee en su cuaderno). Esta es la derecha y la izquierda es esta (señala las cifras de arriba y de abajo)." (10ªS.10)

Por ello, ante este vínculo de otorgar un gran valor a la simbolización, se generó en ocasiones la necesidad de reorientar la secuencia didáctica. Específicamente en la sexta sesión se percibió que Sofía manifestaba una menor disposición hacia el aprendizaje por el continuo trabajo con el referente monetario, percepción que determinó la decisión de proponer en la próxima sesión la identificación de las operaciones presentes en el trabajo con este referente, dándole así un estatuto simbólico y, por ende, válido. Asimismo se plantearon instancias de resolución sucesivas usando diversos procedimientos (primero mediante el algoritmo personal y luego usando una tabla en que se registran en columnas billetes y monedas necesarias para formar cantidades así como los totales de las operaciones realizadas). La confrontación de estos procedimientos permitió, paralelamente, evidenciar las dificultades presentes en el algoritmo personal y legitimar el uso del referente (los billetes y monedas) como medio de resolución y de rectificación, es decir de control de la resolución simbólica mediante la "cuenta".

Finalmente, cabe señalar como otro rasgo de su modo de contacto con el saber, y particularmente con su mediador en la secuencia (la entrevistadora), que si bien existía inicialmente un pedido de validación externa, también, quizás por la ausencia de referentes para controlar lo simbólico, existía a la vez una responsabilidad personal vivida de modo angustiante. Así como también, una aparente necesidad de mantener distancia entre ambos lugares (docente y alumna) manifiesta en la rigidez y solemnidad de su ingreso y saludo.

Olga

Olga es una mujer de 25 años, originaria de Guerrero, manifiesta una fuerte expectativa de acceso a lo educativo (no tiene ninguna escolaridad). Su migración al Distrito Federal estuvo claramente asociada con la reapertura en su historia de esta posibilidad al inscribirse en el INEA en un grupo de alfabetización, donde se la contactó:

" E- ¿Hace mucho que viniste?
O- No, tengo como … como 5 meses.
E- Uy! Y llegaste y hace cuánto empezaste el INEA.
O- Quería estudiar pero ahora sí que yo oí hablar del INEA nada más que allá es difícil, te salen caros los materiales, entonces no, no …Y aquí, aparte de que trabajo, eso me da campo de estudiar, me da campo.
E- Así que cinco meses en el DF y un mes y medio en la escuela, cuántas novedades juntas, ¿no?
O- Sí.
E- Y por eso es, como me decías, que quisieras que fuera más rápido, ¿no?
O- Ahá! Es que a veces me anseo (sic) viendo libros, y me gustan las páginas y no las puedo estudiar, a veces hasta tengo que copiar el abecedario y es así como le voy entendiendo.
(…)
O- Sí, sí es como yo decía, yo quiero seguir estudiando y que no me llegue a pasar nada y mientras pueda voy a echarle ganas a estudiar porque me da pena ver que otras personas saben y yo no." (1ª E.1)

Posibilidad que valora desde sus alcances más amplios que el de la titulación, como por ejemplo desde la redefinición de sus posibilidades de acompañamiento educativo de sus hijos:

"O- ¡Sí! Las otras veces nomás los miraba y ni pío porque no sabía ni qué. Y ahorita ya deletreo por ejemplo, me dieron uno y este fin de semana que pasó lo he estudiado, los cuatro, ellos tres (se refiere a sus hijos) y yo. Ya más … como le fuimos entendiendo, ellos y yo, ya le fui escribiendo lo que le fui entendiendo.
E- ¡Qué bueno Olga! Vas a ver como van a cambiar tus posibilidades como madre de ayudar a tus hijos.
O- ¡Sí! Ya ahorita …" (10ªS.1)

A pesar de la vivencia de la exclusión y de la valorización del acceso a la escolaridad, tiene seguridad y confianza en sus saberes matemáticos previos aunque no tuviera un acceso inicial a lo simbólico (en las entrevistas previas no acudió al registro como apoyo de la resolución y sólo interpretaba y producía números con soltura hasta el 20), ausencia que Olga reconoce en las siguientes expresiones pero desde el lugar de lo que sí sabe (conocimiento de la serie oral): "Pues sí, o sea no los conozco (se refiere a los números) en la forma de … como por ejemplo el número 14 pues … para escribirlo no lo sé. (…) Para contar sí, cuento de 1, 2, hasta el 200, 300, ¡el 500, 1.000! Pero nada más en voz, no para verlos ni para …" (1ª E.2).

Esta confianza se manifiesta también en su adopción del contrato subyacente en la secuencia: el reconocimiento de sus saberes previos y de sus posibilidades como sujeto de saber. En el contexto de este contrato se manifiestan dos situaciones que explicitan su suscripción por Olga: la confianza que le otorga, y su adopción extrema desencadenando una irresponsabilidad por su desempeño. Esta última actitud evidenciaría los límites de este contrato, la posibilidad de instaurar en el adulto –paradójicamente- una desvalorización de la responsabilidad e importancia del propio desempeño, cuando la pretensión inicial era revalorizarlo, deviniendo así la auto-confianza en irresponsabilidad.

La confianza que le otorga este contrato en sus propias posibilidades se plasma por ejemplo en las modificaciones que realiza en el uso de las anotaciones de los desagrupamientos en la resta. En el siguiente registro puede observarse que omitió escribir los cambios sucesivos en las decenas (primero 10 y luego 9), para escribir directamente el cambio final (9):

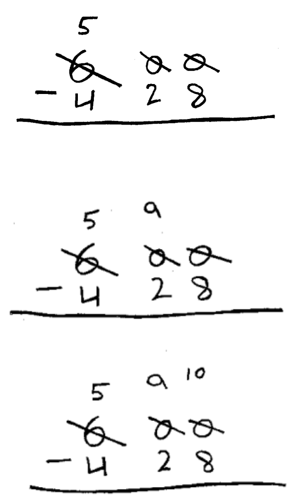
"E- La resuelves, lo vas a hacer sola. Recuerda de ir anotando los cambios que vas haciendo.
O- Sí. A ver … no … cambiaría qué … uhm … cien para … cien para acá (señala las decenas) me quedarían … seis, me quedarían cinco (escribe arriba de las centenas 5).

O- Uno para acá (vuelve a señalar las decenas) … tendría … nueve … (escribe 9 arriba de las decenas).

O- Cambiaría … para acá (señala las unidades) tendría … diez (escribe 10 arriba de las unidades), diez de a peso."

(10ªS.7)

Su anotación es:



Los límites de este contrato se expresaron en su incursión provisoria en una actitud de no valorización de la exactitud de sus resultados, frente a una rutina de memorización de sumas y restas con dígitos propuesta al comienzo de la octava sesión. Actitud sorprendente pues contradice su desempeño exitoso en el uso de estos resultados para resolver algoritmos. No obstante, como se señalará en el siguiente Capítulo, pueden haber interactuado en este fenómeno tanto los límites del contrato mencionado con la coexistencia de otros contratos del espacio de la asesoría, donde aparecería como prioritaria la rapidez por sobre la exactitud.

En cuanto a los modos de control de sus producciones, prosiguiendo con esta adopción del contrato propuesto, utiliza como referente para el control de sus producciones al sugerido, es decir la alusión al dinero. Lo cual pudo ser observado en el transcurso de la décima sesión en la resolución de una operación sin contexto (622+299) escrita por la entrevistadora:

E- Sigue a ver si puedes hacerlo sola.
O- Uhm … dos … nueve … diez, nueve … diez, once, doce. U … hum …(niega). Cambiaría diez, tengo once …
E- Tienes doce.

O- Cambiaría diez para acá (señala las centenas), una de a diez … (observa en silencio) cambié qué … diez. Tengo … (suma nuevamente las decenas) nueve, diez, once, doce. Cambiaría uno … por un billete de a cien, a ver … (escribe 1 arriba de las centenas).

(10ªS.4)

Su anotación es:

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1} \\ 622 \\ +\ 299 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1\,1} \\ 622 \\ +\ 299 \\ \hline \end{array}$$

Cabe señalar que este referente era ya un elemento cotidiano en su trabajo (es empleada doméstica) reconocido frente a la pregunta de cuándo usa los números en su vida cotidiana lo asocia a su desempeño laboral: “Pues por ejemplo cuando me manda mi patrón a comprar, pues para hacer cuentas las hago con los dedos, contando. Si son de pesos, cuento por pesos, un peso, dos pesos, tres pesos, cuatro pesos. Si son de diez pesos o de cien pesos, también voy contando con los dedos” (1ª E.2).

Pero también reconoce al contexto monetario como un ámbito de uso personal cuando se le pregunta por el uso de los números fuera del espacio laboral: “Pues … por ejemplo cuando … cuando voy a dar … por ejemplo que a veces compro algo o voy a dar el cambio, también es cuando yo uso contar todo eso. Empiezo a contar con dedos o con mi misma mente pero acá sobre los dedos. O sea siempre uso los dedos para hacer cuentas. Y a veces también los ocupo para … para copiar alguna cosa, o si debo una cuenta” (1ª E.3).

Pero lo interesante es que, si bien todas las entrevistadas coinciden en el ámbito comercial de uso de la matemática, Olga usa como referente aludido al contexto monetario como medio de control y de argumentación de sus producciones, como pudo observarse en la resolución antes citada de una operación en el desarrollo de la décima y última sesión.

CAPÍTULO IV

LAS POSIBILIDADES INICIALES Y LOS DESEMPEÑOS EN EL TRANSCURSO DE LA SECUENCIA

La organización de este Capítulo tiene como criterio general una presentación de modo jerárquico, según el desempeño de cada entrevistada, tomando como referencia sus actuaciones iniciales observadas en las entrevistas y las registradas en el transcurso de la secuencia. El orden escogido es de un mayor a menor desempeño. Las razones de esta modalidad en la presentación de los datos son la búsqueda de comparaciones entre los casos estudiados, para ello se recupera una ordenación jerárquica y una estructuración de la información en función de los diversos contenidos trabajados. Se observará entonces, que esta lógica de presentación no es necesariamente coincidente con el desarrollo temporal de la secuencia implementada en cada uno de los casos.

Los apartados que componen este Capítulo entonces son el vínculo con la representación de los diferentes contenidos propuestos, es decir:

- Representación de la numeración: interpretación, producción, comparación, desplazamientos en la serie, leyes del sistema, leyes de escritura. En este apartado el criterio de presentación, dada la existencia de una constante, es el desempeño individual en las entrevistas y en la secuencia.
- Representación de la operatoria: dominio del algoritmo, del algoritmo ampliado y de su lógica subyacente. Aquí, dada la oscilación de la jerarquía en función del criterio escogido, se optó por combinar dos estilos de presentación, primeramente se describe y jerarquiza el desempeño inicial en la 2ª entrevista, y posteriormente, se realiza un ordenamiento en función de la respuesta frente a la intervención didáctica diseñada en la secuencia.

- Representación simbólica de un problema: su presentación rescata como criterio central una jerarquización de estructuras aditivas según el grado de consenso en su interpretación exitosa en la 2ª entrevista, es decir la posibilidad de entender la estructura involucrada aunque la resolución no sea la óptima. Además se distingue entre aquellas estructuras donde las resoluciones fueron más cercanas a la resolución convencional ocupando un lugar previo a aquellas en las que si bien hubo el mismo grado de consenso que en otras, las resoluciones fueron no convencionales. Así se combinan dos criterios de ordenamiento de las estructuras aditivas: el grado de consenso en la identificación de la estructura y el grado de convencionalidad de las resoluciones. Pero se incorpora también otro criterio para ordenar el análisis al interior de las estructuras así presentadas, el establecimiento de una jerarquía de desempeños individuales, donde se caracteriza el tipo de estrategia utilizada para la resolución en función del grado de convencionalidad y de su aplicación correcta o incorrecta. Finalmente se describe el desempeño de las entrevistadas en la secuencia, con mayor extensión en el caso de Carmen, pues fue la única con la que se procuró extender las estructuras aditivas.

El interés por sostener como eje de análisis el vínculo con la representación deviene del modo de definición de la problemática de estudio: la relación con lo simbólico. Opción de mirada del problema que no es arbitraria si se considera que la problemática del analfabetismo es, entre otras, la de la exclusión del dominio de lo simbólico.

Representación de la numeración

Interpretación

Si se entiende por interpretación las posibilidades de lectura convencional de un número dado (es decir, establecer un vínculo entre la serie escrita y la serie oral), y se considera como criterio de jerarquización el rango numérico en el que cada entrevistada interpreta correctamente, el orden de mayor a menor desempeño sería: Carmen, Sofía y Olga. No obstante, cabe señalar que con Olga no se trabajaron cuatridígitos por los motivos expuestos en la descripción de la ingeniería, pero, como se verá a continuación, persisten algunas dificultades en el trabajo con tridígitos.

El orden establecido recupera el desempeño manifestado en la 1ª entrevista, donde pudo observarse que Carmen conocía los cuatridígitos pero con algunas dificultades, en cambio Sofía desconocía algunos cuatridígitos pero disponía de criterios para deducir esta parte de la serie menos familiar y, por último, Olga sólo conocía con soltura bidígitos hasta el 20 y no era consistente en la aplicación de criterios de interpretación. A su vez, esta jerarquía se sostiene en el desempeño durante la implementación de la secuencia, donde se manifiesta la oscilación entre Carmen que puede hacer uso de la interpretación para rectificar sus producciones numéricas, y Olga que persiste en sus dificultades de interpretación pero disponiendo ahora de instrumentos de corrección.

En el caso de *Carmen*, en la 1ª entrevista pudo identificar todos los dígitos, y reconocer diversas funciones de los números (denominativa, cuantitativa). Asimismo, si bien parecía tener inicialmente posibilidades para interpretar números hasta cuatridígitos sin dificultad, cuando realizó tareas de ordenamiento de cifras cometió errores de interpretación. El error recurrente era leer algunos de los cuatridígitos como tridígitos y posteriormente, a partir de la confrontación con otros cuatridígitos leídos correctamente, rectificaba su interpretación en el sentido correcto, por lo cual parecía sostener como criterio de interpretación que la equivalencia en la cantidad de cifras demanda una lectura dentro del mismo agrupamiento (miles, cienes, etcétera). Por ejemplo, durante una actividad en la que se comparaban cifras escritas en cartones (1, 2, 8, 6, 9, 0, 12, 10, 21, 11, 30, 33, 63, 36, 90, 60, 13, 82, 28, 300, 310, 130, 860, 680, 330, 333, 2 000, 5 300, 5 030, 9 000, 7 500, 5 700), inicialmente lee el número 5 030 como 530 y posteriormente, a partir de la lectura correcta del 5 300 plantea: "Estos son cinco mil trescientos (lo lee correctamente), no son quinientos, entonces estoy mal ahí (señala el 5 030). Aquí son trescientos treinta y tres (vuelve hacia los números anteriores en el ordenamiento realizado), aquí son cinco mil treinta (rectifica su lectura anterior en la que había leído al 5 030 como 530)." (1ª E.8)

Durante el transcurso de la secuencia interpreta correctamente tridígitos, tanto números redondos como compuestos. Así en la 1ª sesión puede leer correctamente los nudos del 100 al 900 y, a su vez, puede decir cuáles son los resultados de las operaciones efectuadas con tridígitos en diversas sesiones. Simultáneamente, si bien interpreta correctamente los cuatridígitos trabajados en la 2ª sesión (del 1 000 al 5 000) a veces interpreta cuatridígitos como tridígitos, por ejemplo en la 2ª sesión mientras ubica el final y comienzo de cada grupo de mil en el directorio aparecen las siguientes confusiones:

"C- Quinientos (viendo páginas correspondientes al grupo de los 5 000).
E- ¿Quinientos?
C- ¡Cinco mil! Cuatrocientos noventa y nueve (mostrando la página 4 999).
E- ¿Qué número …?

C- (interrumpe) Cuatro mil novecientos noventa y nueve (rectifica).” (2ªS.3)

A estas posibilidades de rectificación de la interpretación, se suma el uso que realiza de sus posibilidades de interpretación también como recurso de rectificación de errores en la producción. Por ejemplo, en la 10ª sesión ante el dictado de sumas con sumandos con diversa cantidad de cifras (tridígitos y bidígitos) incurre en errores de escritura para compensar la dificultad del encolumnamiento, así en la operación sin contexto: 615+88+274, escribe inicialmente 888 en vez de 88. Pero, cuando se le pide que lea el número escrito inmediatamente borra el 888 y escribe el número dictado encolumnándolo correctamente. También en la 10ª sesión, en el dictado de la operación sin contexto: 9 032–7 568, escribe 932 en vez de 9 032. Luego se le demanda que lea el primer número escrito y lo lee correctamente (novecientos treinta y dos), lo que le permite darse cuenta de su error y rectifica (9 032).

En cuanto a Sofía, en la 1ª entrevista reconocía, al igual que Carmen, las diversas funciones de los números (denominativa, cuantitativa), y pudo leer correctamente números de hasta tres cifras, aunque hasta el 200 con total seguridad. En números mayores presentó dudas y algunas dificultades, por ejemplo leyó el 860 como seiscientos ochenta, y disminuyó la celeridad de su lectura en estos tridígitos y en los cuatridígitos. No obstante presentó estas dificultades, disponía de recursos de interpretación de números menos familiares, usaba como criterio el tamaño de los números, y así anticipaba la lectura de nudos desconocidos y de números comprendidos entre nudos. Respecto de la lectura de cantidades en billetes, leía el nombre del número escrito en el billete para su identificación sin recurrir a la interpretación de la cantidad escrita (1ª E.5).

En el desarrollo de la secuencia lee correctamente todas las decenas pertenecientes al intervalo del 0 al 100 y los nudos de las decenas del 100 al 200, en una actividad de interpretación de números escritos en cartones (1ªS.1). Así como también interpreta las centenas escritas en cartones del intervalo seleccionado de 100 al 2 000 y puede leer los resultados de las operaciones con tridígitos. Pero presenta dificultades en la lectura de los números del intervalo del 1 000 al 1 100, por ejemplo en la actividad de comparación y ubicación de páginas en el directorio lee el 1 099 como 1 199 o como 1 999; 1 002 como 1 102 o 10 002; 1 069 como 1 690 o 1 190 (2ªS.1).

Finalmente, Olga en la 1ª entrevista reconoce, como lo hicieron las otras dos entrevistadas, las funciones denominativa y cuantitativa de los números y pudo interpretar los números menores al 20, pero dudó en aquellos cuya escritura no se corresponde con la manera en que se nombran por la ausencia de soporte en su conocimiento de la serie escrita; así presentó dudas al leer los números 12, 13 y 15 escritos en las camisetas de jugadores de fútbol (1ª E.3).

En los números bidígitos mayores a 20, confundió a los números con cifras iguales pero en distinta posición, rectificando ante la evidencia de lectura homogénea para dos cantidades diversas, por lo cual parecía reconocer como criterio la necesaria diversidad de lecturas para números distintos aunque con cifras iguales. Por ejemplo en la lectura de un número de teléfono (56 65 31 13), al último par (13) inicialmente lo leyó como treinta y uno, pero ante la pregunta de si son iguales los dos últimos pares (es decir 31 y 13) rectificó: "(silencio) el trece (corrige su lectura reemplazando al 31 por el 13) " (1ª E.4).

Asimismo pudo interpretar sin dificultad hasta tridígitos del nudo 100, pero desconocía los nudos mayores, para los cuales utilizaba la primera cifra como indicio para su interpretación. Por ejemplo, para leer el 300 escrito en un cartón dijo: "(…) tres (pensando), ¿trescientos?" (1ª E.4)

Pero cuando se enfrentó a tridígitos (escritos también en cartones) con el cero en las unidades recuperó en ocasiones el conocimiento del nombre de los tridígitos leyendo la parte restante sin tener en cuenta la función del cero. Por ejemplo, 310 lo lee como trescientos uno (301) (1ª E.4). Otras veces para dar cuenta del nombre del tridígito lo transformaba en un bidígito invirtiendo la posición de los dígitos ubicados en las centenas y las decenas, así, por ejemplo, el 130 lo lee como treinta y uno (31) (1ª E.4). Traducción que también utilizó para la lectura de cuatridígitos, reduciéndolos a un número de tres cifras y trasladando con dudas a la cifra ubicada en los miles a la posición de las unidades, por ejemplo en la lectura del 7 500 reconoció al siete y al quinientos, entonces lo leyó como quinientos siete (1ª E.5).

Respecto de la lectura de cantidades en billetes, utilizaba indicadores sensoriales, el color, combinado con un criterio numérico, pues si el color es similar se fijaba en el primer número: "Me fijo en los colores, si se da cuenta hay veces que el billete de a cincuenta es mucho parecido (sic) con el de cien y el de a cien a veces se parece con el de a quinientos. Y al menos yo no sé contar, como le digo, pero en ese tipo de billetes yo siempre me voy fijando en el número, hay billete de cinco (señalando el de 500), billete de dos (señala el 200), billete de uno (señala el 100), el de cinco (se refiere al 50) y el de dos" (1ª E.3).

En la secuencia en la 1ª sesión lee correctamente algunas decenas escritas en cartones, tiene dudas con el 20 (lo confunde con el 200) y respecto al 50, el 60 y el 70 (muestra confusiones entre ellos). En las decenas que no conoce es capaz de relacionar, no sin dudas, los nombres de los múltiplos de diez que de alguna manera conoce, a partir del nombre del dígito correspondiente. Por ejemplo al leer el ochenta manifiesta: "Ocho … ¿ochenta?" (1ªS.1).

En las sesiones en que se trabaja con operaciones con tridígitos puede leer los números con los que opera y los resultados, pero persisten algunos problemas en la interpretación de números, pues recurre a una reducción a bidígitos usando sólo la primera cifra como indicio (lee el 864 como ochenta). Además, a veces realiza una interpretación de la escritura como si fuera producida bajo un sistema aditivo (en correspondencia con la numeración hablada) y no posicional, puntualmente frente a números con un cero en el lugar de las decenas (lee el 703 como setenta y tres) (9ªS.7). Pero posteriormente logra rectificar estas lecturas (10ªS.8) a partir de la identificación sugerida de los agrupamientos y de su conocimiento del nombre de los múltiplos de cien. Así en el 864 reflexiona: "Es … ocho billetes de a cien", y haciendo uso de este recurso corrige: "Ocho billetes de a cien … son … ocho de a cien … Son … (cuenta usando los dedos) cien, doscientos, trescientos, cuatrocientos, quinientos, seiscientos, setecientos, ochocientos", llegando a la interpretación correcta (9ªS.7).

Producción

Si se comprende a la producción como las posibilidades de escritura convencional de números, y se contempla como indicador para la jerarquización también al rango numérico en el que cada entrevistada produce de modo correcto, el orden de mayor a menor desempeño sería –al igual que en la interpretación–: Carmen, Sofía y Olga. No obstante, cabe recordar que con Olga no se trabajaron cuatridígitos, porque, como se explicitará, existen incluso algunas dificultades en el trabajo con tridígitos.

El orden propuesto rescata sus desempeños iniciales y durante la secuencia de la ingeniería, en los cuales se evidenció que Carmen conocía los cuatridígitos con mayor familiaridad que Sofía, que esta última va construyendo hipótesis de escritura en el transcurso mismo de la entrevista y las va consolidando en el desarrollo de las sesiones, y que Olga oscilaba inicialmente entre varias hipótesis de escritura en tridígitos y cuatridígitos, y sólo se desempeña con soltura con bidígitos hasta 20 y durante la secuencia presenta dificultades en la escritura de tridígitos pero adquiere instrumentos de corrección.

En Carmen se observó en la 1ª entrevista que sus posibilidades de producción tienen algunas recurrencias con las de interpretación pero a su vez, existen algunos saltos cualitativos que nos hablan de la imposibilidad de estipular una simple correspondencia entre estos dos procesos. En dicha entrevista demostró poseer criterios para producir números en forma correcta hasta cuatridígitos, no obstante presentó algunas oscilaciones muy esporádicas en el tratamiento reduccionista de los tridígitos con cero en las decenas escribiéndolos como si fueran bidígitos, por ejemplo escribió 204 como 24 e inmediatamente lo corrigió.

Durante el transcurso de la secuencia produce tridígitos sin dificultades, tanto números redondos como compuestos en situaciones específicas de escritura de números o como medio para la resolución de problemas, y también cuatridígitos de las mismas características. Pero presenta errores en la producción frente a la combinación de sumandos bidígitos y tridígitos (dificultad operatoria sólo trabajada con Carmen), quizás para equipararlos y por la aplicación de la escritura mecánica de sumandos a partir del inicio del sumando previo. Como ya se citara, en la 10ª sesión en la operación sin contexto 615+88+274, escribe inicialmente 888 en vez de 88 (10ªS.5). En la misma sesión también comete un error, ya mencionado, en la escritura de cuatridígitos con cero en las centenas, por ejemplo, el 9 032 lo escribe como tridígito, 932, quizás porque se apoya en la oralidad para escribirlo, es decir que va haciendo una correspondencia entre los dígitos presentes en las cifras dichas (9, 3 y 2) y su escritura (10ªS.6).

Respecto a Sofía, en el transcurso mismo de la 1ª entrevista fue construyendo algunas hipótesis para la producción de los números que desconocía, es decir los tridígitos no familiares y los cuatridígitos. La primera de ellas era la generalización, a partir de los nudos conocidos (100, 1 000), de que los nudos de un mismo orden llevan la misma cantidad de ceros y que la escritura del siguiente orden debe llevar un cero más que el orden anterior. Así inicialmente en una situación de dictado de números escribió el 700 como 777, centrándose en su tamaño, y luego se interrogó : “Es que se ponen dos ceros, ¿no? (Se refiere a su escritura del 700 como 777)” y rectificó su escritura. Entonces cuando se le dictó el 7 000 dedujo: “Uhm … ¿con tres ceros? “ (1ª E.11).

Pero esta hipótesis le generaba contradicciones en la escritura de números cuatridígitos compuestos por dos nudos de diverso orden como es el caso del 1 500 (cuya oralidad le sugiere 1 000 y 500): “Uhm … ¿dos ceros o tres?” (1ª E.11). Entonces recurrió a un procedimiento de producción para números compuestos que consistía en la escritura del nudo y la sobreescritura de la otra cantidad identificada en el nombre del número que le sugiere una relación aditiva (por ejemplo, doscientos cuarenta = 200 40). Al mismo tiempo, puede anticipar que si no recurre a la sobreescritura[34] va a producir un número, que si bien no conoce su nombre, sí sabe que será “muy grande”. Por ejemplo, explicitó este recurso para escribir la cantidad 240 formada con billetes en una situación en la que se le pedía que respondiera cuánto dinero había y que registrara dicha cantidad:

“S- ¿Así, no (muestra su escritura de 240 pesos)?
E- A ver, está bien. ¿Cómo hiciste para hacerlo?
S- Le quité los dos ceros (refiriéndose al 200) porque son doscientos cuarenta.
E- O sea le quitas los dos ceros …
S- Sí, porque si le pongo los dos ceros me salieran dos mil, dos mil cuatrocientos, dos mil cuarenta saliera (realmente le saldría 20 040), ¿no? Pero tengo que borrar los ceros para poner el cuarenta. ¿Sí está bien?” (1ª E.7)

En la secuencia produce en general sin dificultades números tridígitos redondos y compuestos, en la escritura de nudos durante la 1ª y 2ª sesión, así como en la escritura de datos para operar. No obstante, manifiesta algunas dudas en la escritura de algunos nudos que no están dentro de su rango inicial de competencia (hasta los tridígitos menores). Por ejemplo, en la 1ª sesión cuando se le propone que escriba los nudos con los cuales ha trabajado, al 110 inicialmente lo escribe como 1010 pero, luego de confrontar con su escritura en cartones usados para otras actividades de la misma sesión y del señalamiento de que cuente la cantidad de cifras del agrupamiento de los cienes, puede rectificar. Además en la 2ª sesión, cuando intenta registrar los nudos con los cuales ha trabajado, tiene dudas en la escritura de números menos familiares para ella, tanto tridígitos como cuatridígitos, a pesar de que la mayoría de sus anticipaciones son correctas:

“S- Novecientos (escribe 900). ¿Se escribe así, verdad?
E- ¿Quieres que busquemos el cartón? Ahí está el novecientos (le muestra el cartón usado con el número 900). ¿Está bien escrito?
S- Sí. Novecientos … (reitera) ¿sigue el mil?
E- Mil.
S- ¿Es tres ceros?
E- A ver …
S- Tres ceros.

[34] Este procedimiento es similar al reportado por Lerner y Sadovsky (1994, pp.129-131) en niños, en el que se utilizan los nudos como modelo para la escritura de otros números, puesto que posibilitan determinar la cantidad de cifras del nuevo número, completando luego las cifras restantes sustituyendo los ceros. Este recurso empleado de modo anticipatorio por Sofía, denota su toma de conciencia del conflicto en la articulación entre la numeración hablada (que remite a una descomposición aditiva de los números) y los principios de la numeración escrita.

E- Fíjate (le muestra el cartón con el número 1 000).
S- Sí son tres.
E- Después seguía el mil cien.
(…)
S- Así, ¿no (escribe 110)?
E- Mil cien. El mil tiene cuántas cifras … cuatro, ¿no? Una, dos, tres, cuatro (cuenta en su escritura).
S- Ah! Se le pone otro …
E- Y el mil cien tiene que tener también cuatro.
S- ¿Así (muestra su escritura corregida, ahora dice 1100)?" (2ªS.3)

Por último, Olga en la 1ª entrevista produjo todos los dígitos, y hasta bidígitos menores que 20. Utilizaba como pauta en los nudos que desconocía el comienzo del número y su tamaño (miles, cienes). Así, para registrar una cantidad dada de dinero ($50) dijo: "Cinco … (silencio, piensa). No sé si está bien (mostrando su escritura: 50)" (1ª E.8).

En la escritura de tridígitos inicialmente los redujo a bidígitos y presentó dificultades asociadas a que reconoció, en números compuestos, que si la parte restante del número aludía a una decena (por ejemplo 40 en el 240, ó 50 en el 150) debía escribirse con un cero sin discriminar a dónde debía colocarlo. Por ejemplo cuando se le entregaron 240 formado con billetes, al intentar escribir la cantidad inicialmente escribe 24. Luego la entrevistadora para generarle contradicción le entrega $204 y le pide que registre esta cantidad. Olga escribe nuevamente 24 y la entrevistadora cuestiona la producción de dos escrituras iguales para dos números diferentes, entonces Olga manifiesta: "Uhum (silencio). Este llevaba cero (señalando el 24 que representa al 240. Lo corrige y escribe 204)" (1ª E.9). Como puede observarse en el ejemplo anterior reconocía que el 240 lleva un cero pero desconocía en qué lugar debía colocarlo.

En la producción de tridígitos Olga combinaba –como lo hiciera en el caso de la interpretación– diversas hipótesis para su escritura, oscilando entre ellas. La más consolidada parecía ser la necesidad de diversidad en la escritura de números distintos, para lo cual optaba entre el reconocimiento de una escritura asociada al tamaño de los números (reflejada en la cantidad de cifras utilizadas) y una escritura aditiva apoyada en la relación aditiva que sugiere la serie oral (ciento cinco: 100 5). El sostenimiento de esta escritura aditiva en los tridígitos le generó dudas importantes en la producción de cuatridígitos compuestos en los que se articulaban dos nudos conocidos como el 1 000 y el 500 para el 1 500, porque ello producía un número de tamaño excesivo (1ª E.8). Pero también conjugaba como criterio el reconocimiento de que en "los cienes" debía haber algún cero, por ello quizás escribe el 555 como 5055 (1ª E.8).

Durante el transcurso de la secuencia en la 1ª sesión produce los nudos del intervalo del 10 al 100 en general sin dificultades, salvo en el 100 que duda sobre si se escribe con dos o tres ceros, y mediante la confrontación con el billete correspondiente resuelve su duda. Posteriormente produce números tridígitos para el registro de datos de problemas o para la resolución de operaciones y presenta dificultades pues escribe 61 para representar al seiscientos (seis … (6) … cien (1) tos) (9ªS.7). Finalmente logra rectificar las dificultades en la escritura de números que no conoce mediante la sugerida identificación de los agrupamientos. Así corrige su escritura del 600, a partir del reconocimiento de que seiscientos quiere decir que tiene seis billetes de $100. Entonces al volver sobre su escritura (61) observa que ha escrito seis de diez y no, seis de cien, lo que le permite rectificar su producción inicial:

"E- Seiscientos tú dijiste que eran seis de a cien. ¿Tienes monedas de a diez, tienes monedas de a peso? ¿En el seiscientos?
O- Uhm … No.
E- Entonces, cuando uno no tiene pone cero. A ver, cómo le harías. Seis de a cien, no tienes monedas de a diez y no tienes monedas de a peso.
O- Seis … (borra el 61). Sí. Seis … (escribe 600)." (10ªS.9)

Comparación

Si se concibe a la comparación como aquellas posibilidades de ordenamiento convencional de números, es decir de comparar la relación de orden existente entre dos o más números y el conocimiento de una serie de números, y si se tiene en cuenta como criterios para identificar los niveles de desempeño el rango numérico de competencia, las posibilidades de ordenar e intercalar en un ordenamiento, la contemplación total o parcial de dicho ordenamiento, la seriación de billetes y monedas de diversa denominación, el orden resultante de mayor a menor desempeño es nuevamente: Carmen, Sofía, Olga.

El orden establecido considera que en la 1ª entrevista Carmen no tuvo dificultades en la seriación de billetes de diversa denominación, conoce las diversas series. En cambio Sofía y Olga no tienen el mismo dominio de todas las series y de todos los intervalos de dichas series. Además con Carmen se trabajaron situaciones de comparación de páginas (en el directorio) en rangos mayores. No obstante, podrá observarse que existen estrategias similares como la segmentación de una serie amplia, o el planteo de un número hipotético cuando uno de ellos está incompleto.

En cuanto a *Carmen*, como se anticipara, en la 1ª entrevista en la seriación no presentó dificultades en las situaciones vinculadas al conteo de billetes, incluso no recurrió al conteo oral para deducir una cantidad de dinero entregada en billetes. Simultáneamente pudo ordenar los billetes y monedas en forma decreciente, y realizar un ordenamiento creciente de una serie reducida de números hasta el 109. En esta última serie empleó como criterio de comparación la observación inicial del comienzo de los números para discriminar entre bidígitos y tridígitos (observa el 1 y el 10 respectivamente), y en aquellos números de la misma cantidad de cifras e igual comienzo observa el número final:

"E- ¿Cómo haces, en qué te fijas?
C- En el … en los números que van cambiando.
E- ¿Por ejemplo?
C- Éste por decir es más grande que el ciento tres (señala el 109).
E- ¿Y cómo te das cuenta?
C- Porqueee … es diferente el nueve el tres (se refiere a la última cifra) y el diez (se refiere al diez inicial de 103 y 109) pues sigue siendo el mismo entonces nomás aumenta pero va cambiando … es igual." (1ª E. 3-4)

No obstante, tuvo dificultades para realizar ordenamientos decrecientes en series de mayor cantidad de números y con diversa cantidad de cifras (dígitos, bidígitos, tridígitos y cuatridígitos). Consecuentemente, presentó mayor seguridad en el ordenamiento inverso, es decir creciente, pero manifestó otras dificultades asociadas fundamentalmente a errores de interpretación (lee algunos cuatridígitos como tridígitos, aunque oscilaba en este criterio y a veces lo rectificaba, como ya se ha explicitado) y a la centración de su atención en segmentos de la serie. Así en un ordenamiento creciente de números escritos en cartones, leyó incorrectamente el 7 500 como setecientos cincuenta y lo colocó antes que el 2 000. Y cuando rectifica su lectura inicial de algunos cuatridígitos, al centrarse en una parte de la serie realiza un ordenamiento incorrecto, quedando su ordenamiento final del siguiente modo: 0, 1, 2, 6, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 21, 28, 30, 33, 36, 60, 63, 82, 90, 130, 300, 310, 330, 333, 680, 860, 5 030, 5 300, 5 700, 7 500, 9 000 (leído como 900), 2 000.

Durante el transcurso de la secuencia en la 1ª y 2ª sesión realiza correctamente las actividades de ordenar e intercalar nudos de tridígitos y cuatridígitos escritos en cartones. Además puede ubicar correctamente números de páginas (con o sin referencia a nudos marcados con indicadores de colores, ubicados por ella misma), tanto si son números tridígitos (1ªS.1-3) como cuatridígitos (2ªS.1-3). En los cuatridígitos a veces considera a aquellos menores que la primera centena como ubicados en otra (por ejemplo al 2 099 como perteneciente al grupo del 2 900). En la comparación de la ubicación de dos páginas (en las que una de ella no está completa) recurre a hipotetizar el número incompleto (tanto en tridígitos como cuatridígitos), no explicitando que no dispone de información suficiente para compararlos. Pero, cuando dispone de la cifra que "desempata", compara correctamente (1ªS.4 / 2ªS.4). Así, por ejemplo, cuando compara dos tridígitos que comienzan igual (número incompleto –717–, sólo se ve la cifra de la izquierda, las dos restantes están volteadas; número completo: 763) primero conjetura que el indicador del número de la página que está incompleto estará después que 763, y cuando se da vuelta la 2ª cifra (el 1) expresa:

"E- Cuál de los dos es más grande, segura.
C- El seis (se refiere al 6 del 763).
E- El seis. Pero …
C- (interrumpe) El de arriba es más grande (se refiere al 763).
E- El de arriba es más grande, ¿estás segura?
C- Ahá.
E- ¿Aunque no sepas este número (le señala la última cifra del número incompleto, aún volteada)?
C- Sí." (1ªS.4)

En el caso de Sofía en la 1ª entrevista se puso en evidencia que no conocía de memoria todas las series propuestas (las correspondientes a los diversos billetes y monedas del sistema monetario mexicano: 1, 10, 100; 2, 20, 200; 5, 50, 500), pero lo mismo pudo efectuar el conteo. Para ello usó distintos recursos, en las series del 50 y del 500, fue ensayando con dificultad. En las series del 2, del 20 y del 200, usaba el conteo en voz baja de los números intermedios (por ejemplo contando monedas de $2 dos dice los siguientes números: "Doce, catorce, quince (dice bajito), dieciséis pesos …" (1ªE.3), o recuperaba a veces su conocimiento de las series relativas a la unidad, traduciendo por ejemplo la serie del 200 a la del 2: "Doscientos … dos, cuatro, seisss … seiscientos, ocho, diez (va traduciendo a dígitos)" (1ªE.11). A pesar del uso de estos recursos, a veces cometió errores en el conteo y si bien podía anticipar la cantidad de billetes contenidas en un reagrupamiento (por ejemplo cuántos billetes de 20 habrá si contó $200), no tradujo esta posibilidad en un criterio de rectificación y de control del conteo.

En cuanto a sus posibilidades de comparación, realizó prácticamente sin dificultad el ordenamiento de una serie pequeña de números hasta tridígitos del intervalo 100 a 110. En una serie más amplia con números hasta cuatridígitos, no disponía de un criterio sistemático de búsqueda, pero a medida que iba realizando el ordenamiento iba detectando los errores y rectificaba su orden inicial intercalando números, como puede observarse en el siguiente fragmento donde buscaba el número siguiente al 2 000 en un ordenamiento decreciente:

"S- ¿Trescientos treinta y tres (escribe 333 pesos luego del 2 000)?
E- Escribe directamente el número, con eso basta.
S- ¿Sí, le va a entender?
E- Sí, lo entiendo. No te preocupes. Trescientos treinta y tres y, ¿luego?
S- Trescientos treinta, ¿no (mira asombrada sin escribirlo)?
E- ¿Qué pasó? Miraste para el costado y te encontraste con otros números, ¿no?
S- Sí (se ríe). Son más grandes, ¿no?
E- ¿Y entonces?
S- Son ochocientos … (pensando), ochocientos sesenta es el más grande.
E- Claro, ¿entonces?
S- Tendría que borrarlo (se refiere al 333 que había escrito), ¿puedo?" (1ªE.10)

Para realizar este ordenamiento usó como criterios combinados el tamaño del número (cantidad de cifras) y, ante la presencia de números de igual tamaño, observaba cómo comienzan:

"E- ¿Cómo te diste cuenta?
S- Porque estos son muy chicos, ¿no? (señala arriba de la hoja donde están los dígitos y bidígitos), este es muy chico, este también, aquí llega a dos mil, cinco mil.
E- ¿Cómo te das cuenta que son chicos o grandes?
S- Por la cantidad (parece referir al valor de los dígitos), ¿no?
E- ¿Menos cantidad o menos números?
S- Menos números.
E- Pero estos tienen la misma cantidad (señalando los miles), cómo te das cuenta cuál es el más grande.
S- Porque este es el nueve … mil, nueve, este es el siete mil quinientos, cinco mil … setecientos (lee el 5 700, recalcando la primera cifra)." (1ª E.9)

En la secuencia en la 1ª y 2ª sesión, en actividades de seriación de nudos escritos en cartones ordena correctamente todas las decenas (del 10 al 200) (1ªS.1) y todas las centenas (del 100 al 2 000). Tampoco tiene dificultad para intercalar en la serie en el intervalo del 10 al 200 y del 100 al 2 000. Recurre a la repetición de la serie para controlar, sólo se confunde en el número 190 que casi coloca luego del 170 pero rectifica inmediatamente (1ªS.1). Identifica el mayor y menor a un nudo bidígito, tridígito y cuatridígito, e incluso el inmediatamente mayor e inmediatamente menor. Puede ubicar páginas usando las referencias de los nudos marcados y de los números ya ubicados, o incluso sin referencias (1ªS.3), así como establecer de cuál de los extremos del grupo estará más cerca, y ubicar dentro del grupo trabajado anteriormente (las decenas) sin indicadores. Incluso puede ubicar números sin referencia a nudos marcados, para abrir el directorio la menor cantidad de veces posibles, primero abre al azar, luego comete errores vinculados a que su interpretación del número (1 690) es incorrecta (confunde con el 1 069), por ello no realiza una búsqueda óptima, lo hace en 11 intentos. A medida que corrige su interpretación va estimando mejor sus desplazamientos. Puede comparar la ubicación de dos páginas en el intervalo del 10 al 200 (1ªS.4), pero, en el intervalo del 100 al 2 000, en la comparación de números con uno parcialmente visible, inicialmente busca hipotetizar un número, no tiene claro la exhaustividad de los criterios y a veces puede comparar correctamente pero la confunde el aspecto ordinal del número, por tanto, si bien maneja los criterios de comparación de números no puede usarlos para anticipar. Por ejemplo, comparando dos cuatridígitos que comienzan con la misma cifra (una completa: 1 073; y la otra –1 090– con sólo la cifra de la izquierda visible), primero señala que la 2ª cifra mostrada del número incompleto es el cero y que esta segunda página es la que está antes. Posteriormente, al ver ambos números completos reconoce que el 1 090 es más grande que el 1 073 pero persiste en que el 1 090 está antes (2ªS.2). Pero luego, usa el criterio de la información provista por la cifra que “desempata” (es decir aquella que permite distinguir cuál de las dos páginas comparadas está antes, en el ejemplo anterior sería la comparación de las decenas -7 y 9- de ambos números) para anticipar cuál estará antes. Esta dificultad ya fue señalada en Carmen pero en Sofía se manifiesta en un rango numérico menor.

En cuanto a Olga, en la 1ª entrevista pudo ordenar en forma decreciente los billetes y monedas con los apoyos sensoriales y numéricos ya mencionados, y realizar conteo de billetes o monedas de las series de la unidad y sus derivadas (1, 10, 100) y del cinco (5, 50, 500) pero con mayor seguridad hasta el 35 y 350 (en las series del 5 y 50 respectivamente). No siempre utilizaba en estas situaciones el conteo oral, y en las series que desconocía de memoria a veces decía los números intermedios de la serie o recuperaba su conocimiento de la serie de dígitos en la que se asentaba por ejemplo, en la del 100, recuperó la serie del uno: “cien, dooscientos, trescientos …” (1ªE.12). No obstante, a veces cometió errores en las series desconocidas, y no pudo tampoco convertir las equivalencias entre agrupamientos como criterio de control del conteo, por ello sin conflicto pudo reafirmar el resultado de su conteo de billetes de $20 (llegó a 220) aunque constatara que había contado 10 billetes.

Respecto a las posibilidades de comparación, pudo ordenar la serie pequeña de números de hasta tres cifras del intervalo del 100 al 110. En la serie de mayor cantidad de números hasta cuatridígitos, presentó dificultades asociadas a la centración en la comparación de pares y/o tríadas, por ejemplo el ordenamiento inicial que realizó pone en evidencia este procedimiento ocasional de comparación sólo de segmentos de la serie que han sido agrupados para su visualización, reiterándose los que componen diversos grupos: { (9 000, 7 500, 5 700); (5 700, 5 030); (5 300, 860, 680); (2 000, 300); (330, 130); (333, 310); (310, 60, 36, 28); (30, 63, 82); (90, 33, 12); (21, 13, 11, 10, 9, 8, 6, 2, 1, 0)} (1ª E.13). También se observa en parte del ordenamiento (30, 63, 82) la aplicación ocasional de un orden inverso, o sea creciente.

Asimismo se evidenció otra dificultad asociada a la imposibilidad de articular y jerarquizar diversos criterios de comparación como son el tamaño del número, el comienzo del número y la siguiente cifra. La confusión en la combinación de los criterios de tamaño del número y su comienzo, se expresó, por ejemplo, cuando revisaba el ordenamiento citado y quiso colocar el 860 luego del 9 000 porque "Ah, un nueve … nueve (mirando la cifra de la izquierda), aquí debía haber sido el … 8 … (…) Este es el que debiera ir encima (señalando el 860)" (1ªE.11). La dificultad para ver la pertinencia de recurrir a la cifra siguiente a la de la izquierda como criterio de comparación se manifestó también en el momento de revisión de la serie decreciente producida, allí propone cambiar el 36 antes del 60 y cuando se le pregunta en qué se fija responde: "En el segundo (compara el 0 de 60 con el 6 de 36)" (1ªE.13).

Este tipo de habilidad sólo se trabajó con Olga en la secuencia durante la 1ª sesión, como ya se señalara, donde ordena e intercala correctamente nudos pertenecientes al intervalo del 10 al 100 (1ªS.1). Inicialmente no puede ubicar páginas usando las referencias de los nudos marcados, pero luego recuperando la lectura del número (setenta … setenta y seis) supera la dificultad aunque a veces se confunde en la identificación del intervalo e inmediatamente rectifica (el 76 está entre el 60 y el 70, luego dice: entre el 70 y el 80). Puede recuperar para la ubicación de nuevos números los ya ubicados, o incluso puede hacerlo sin referencias, así como puede compara la ubicación de dos páginas (1ªS.2).

Desplazamientos en la serie numérica

Si se entiende a este contenido como la capacidad para realizar y anticipar desplazamientos o movimientos en la serie en los diversos agrupamientos que lo componen (unos, dieces, cienes, miles), desplazamientos que se asientan en el dominio de las leyes constitutivas del sistema (en este caso posicional y decimal), nuevamente se observa el siguiente orden de desempeño: Carmen, Sofía y Olga.

Este ordenamiento se fundamenta en que Carmen tiene un mayor conocimiento de la serie, tanto en términos de rango en el que puede desempeñarse, como en términos de sus posibilidades de anticipación del comienzo y final de un agrupamiento. En el caso de Sofía, además de su menor conocimiento de la serie, presentó dificultades para anticipar correctamente el comienzo y final de cada grupo. Y finalmente Olga, si bien con ella sólo se trabajó una sola sesión y en un menor rango (hasta el 100), no dispone de hipótesis para anticipar el final de cada grupo.

En el caso de *Carmen* durante la secuencia, tanto en tridígitos (1ªS.3) como en cuatridígitos (2ªS.2), identifica los agrupamientos en forma estricta y anticipa el término de cada grupo en una actividad en la que se le pide que ubique el comienzo y final de un grupo determinado (por ejemplo el 100, el 2 000) en la sección amarilla y en el directorio. Además reconoce al final de un nudo como el anterior al inicio del grupo siguiente, por ello una vez que localiza el nudo posterior (por ejemplo ya ubicado el 100, encuentra el 200) da vuelta la página hacia atrás ubicando el final del nudo previo (199 en este ejemplo) (1ªS.3 / 2ªS.3).

Además puede producir números mayores y menores de un número tridígito y de uno cuatridígito, en una actividad que consistía en la formación de la página siguiente o de la anterior a una página dada (formada con cartones). Pero tiene dificultades para producir el antecesor y sucesor. En tridígitos generalmente plantea como sucesor a un nudo posterior (por ejemplo plantea como posterior al número 861 al 900) y como antecesor al último del agrupamiento anterior (así, reconoce como anterior al número 771 al 769) (1ªS.6).

No obstante, esta dificultad no se presenta en los números tridígitos menores, quizás por su mayor grado de familiaridad. Así reconoce como posterior al número 361 al 362 de modo inmediato y sin dudar, cuando no pudo hacerlo en el ejemplo anterior de formación del posterior al 861 (1ªS.7).

Esta posibilidad de formar el antecesor y el sucesor a un número tridígito menor, junto con el uso de la sección amarilla como medio de validación empírica, le permite ir revisando sus hipótesis iniciales sobre los desplazamientos en tridígitos mayores:

“E- Entonces me dijiste que el que sigue del trescientos sesenta y uno es …
C- Trescientos sesenta y dos.
E- Fíjate ahora, del setecientos sesenta y uno (forma con los cartones el 761), cuál seguirá.
C- Setecientos sesenta y dos.
E- Claro y recién …
C- Y recién (se ríe).
E- Y del … (forma el 901) novecientos uno, cuál seguirá.

C- Novecientos dos.
E- Novecientos dos. Y del novecientos setenta y uno (forma el 971).
C- Novecientos setenta y dos.
E- Exacto. Y del novecientos setenta y uno cuál será la página que está antes.
C- ¿Antes? Novecientos setenta.
E- Novecientos setenta, muy bien, muy bien, ahora sí.
C- Sí (se ríe), ya la agarré." (1ªS.7)

En cuatridígitos también presenta esta dificultad (2ªS.8), fundamentalmente en la búsqueda del sucesor de números anteriores al cambio de centena, y no encuentra regularidades a partir de la confrontación sugerida, estipula siempre que el siguiente al 99 será un cambio en el nudo de las unidades de mil, por ejemplo: al 3 099 le sigue el 4 000; o si se le pide el anterior al nudo de la centena dice que es la centena anterior, por ejemplo: al 1 200 le antecede el 1 100, al 1 400 el 1 300, pero del 1 600 ya duda, al 1 800 dice que le antecede el 1 700 (2ªS.10). Posteriormente esta dificultad vuelve a manifestarse no pudiendo hacer anticipaciones en desplazamientos que impliquen reagrupamientos o desagrupamientos en las decenas por incremento o disminución, respectivamente, en las unidades, no siendo así en desplazamientos en torno a agrupamientos de mayor orden que no conllevan transformaciones. Así plantea que si a 394 se le quitan 4 quedarán 309; expresa también que si al 390 se le quita 1 quedarán 399 (7ªS.7). Pero cuando se presentan desplazamientos en grupos mayores no presenta dificultad, así si al 389 se le quitan 10 dice (luego de rectificar su comprensión de la relación) que quedarán 379, y si al 290 se le agregan 110 expresa que resultarán 400.

Sofía en la 1ª sesión de la secuencia identifica los agrupamientos en forma estricta, además reconoce a los números 99 y 199 como anteriores, respectivamente, al 100 y 200. Reconoce los nudos al interior del intervalo del 0 al 100, y a partir de la observación va generalizando que el anterior a un nudo es el último número del agrupamiento anterior. Así, una vez localizado el inicio del grupo de los veinte en la sección amarilla, buscando su final al encontrar la página 30 voltea y localiza la página 29 (1ªS.2). En la misma sesión, inicialmente tiene dificultades en los números mayores a 100 para identificar comienzo y final de cada intervalo, confunde el comienzo del próximo nudo con el fin del anterior por ejemplo, ante la pregunta: "¿Dónde termina el grupo del ciento veinte?" responde que en el número 130. Luego va rectificando a partir de la intervención (1ªS.2). Asimismo puede producir números mayores y menores de un número bidígito y tridígito, así como puede armar el antecesor y sucesor: del 71, 81 y 70; del 189, 188 y

190, en una actividad en la que se le pide que forme una página mayor o menor, o la siguiente y luego la anterior, a una página dada.

En la 2ª sesión, en la que fue trabajado el intervalo del 100 al 2 000 en el directorio, identifica los agrupamientos (de centenas) en forma estricta y su ubicación en el tomo pertinente. Anticipa el final estricto de cada agrupamiento aunque tiene algunas dificultades para la interpretación (la ya señalada). Además lo reconoce al final de un nudo como el anterior al inicio del nudo siguiente (da vuelta la página una vez localizado el nudo posterior) (2ªS.1).

Al igual que Carmen, tiene dificultades para formar el sucesor de números cuatridígitos que impliquen un cambio de centena, pues estipula siempre que el siguiente al 99 implicará un cambio en el nudo de las unidades de mil, por ejemplo considera que la página siguiente a la 1 099 será la 2 000 (2ªS.3). Pero posteriormente encuentra regularidades a partir de la confrontación sugerida, rectificación que Carmen no pudo realizar. Por ejemplo, ya duda al aplicar esta hipótesis para decir cuál es la página siguiente a la 1 299: “Mil doscientos noventa y nueve … mil … ¿cien? No. Noventa y nueve … ¿dos mil? No, ¿verdad? Mil doscientos … mil doscientos noventa y nueve … dos mil no, ¿verdad?” (2ªS.4). Y posteriormente logra decir correctamente el sucesor sin necesidad de recurrir al directorio: “Mil trescientos (rectifica sin ver)” (2ªS.4). Luego se le pregunta sobre la página siguiente a la 1 899 y deduce que es la 1 900. Es decir, que Sofía si bien tiene un desempeño menor que Carmen puesto que parte de un menor conocimiento de la serie, puede recuperar (a diferencia de Carmen) las regularidades en el cambio de centena.

Finalmente Olga en la 1ª sesión de la secuencia identifica los agrupamientos en forma estricta pero sólo puede, inicialmente, anticipar el comienzo del intervalo y el final lo va confirmando al hojear la sección amarilla. Pero en el transcurso de la sesión va generalizando que es el anterior al comienzo del nudo siguiente, por ello cuando se le pregunta dónde terminará el grupo de los veinte hojea el material y cuando encuentra la página 30 busca la página anterior. Lo mismo realiza en los grupos siguientes (30, 40) y ya en el grupo de los 50 cuando llega a la página 59 se detiene para indicar que es el final del grupo (1ªS.1). En esta sesión también pone en evidencia que puede formar tanto el antecesor como el sucesor a un número bidígito.

Leyes del sistema de numeración decimal

Las leyes constitutivas del sistema de numeración usual son la posicionalidad y la organización decimal. Los criterios entonces para valorar el desempeño de las entrevistadas fueron la posibilidad de identificación de los agrupamientos del sistema (nominados aquí aludiendo a billetes y monedas, es decir billetes de $100, monedas de $10 y de $1), y de la relatividad del valor de las cifras según su posición. En función de estos criterios tanto Carmen como Sofía tienen un desempeño equivalente, pero con Carmen se llegó a explorar la operatoria en rango mayores permitiendo evidenciar su posibilidad de trasladar la identificación de agrupamientos en rangos mayores. Olga contrasta por sus dificultades en el transcurso de la secuencia para hacer uso de la identificación de agrupamientos en actividades de escritura de cantidades no agrupadas exhaustivamente en unos, dices y cienes y en la interpretación y representación con material.

En cuanto a Carmen, durante la secuencia, en números tridígitos identifica los agrupamientos haciendo uso del referente monetario (cuántos billetes de $100 hay, cuántas monedas de $10 y de $1) (3ªS.1,4,5), así como puede diferenciar el valor relativo de la misma cifra en posiciones diferentes (3ªS.6 / 4ªS.2). No sólo puede identificar estos agrupamientos en cantidades ya producidas, sino que además puede codificar (4ªS.1) y decodificar tridígitos (4ªS.2) usando dichos agrupamientos. A su vez, cuando se la enfrenta a operaciones sin contexto con cuatridígitos, en el transcurso de la argumentación que brinda de sus algoritmos primero identifica al grupo de los miles con billetes de cien, pero ante el señalamiento de la existencia de dos cifras en un mismo número perteneciente al mismo orden rectifica y puede identificar a dicho grupo como el de los miles (9ªS.1-2). En sesiones posteriores también hace uso de la identificación del grupo de los miles para justificar sus algoritmos.

Sofía en la secuencia en general no presentó dificultades para codificar o decodificar (5ªS.1) usando los agrupamientos sugeridos por el material, aunque las cantidades estén formadas con o sin correspondencia con su escritura convencional. Por ejemplo en un problema aditivo se le entrega $88 formado por 7 monedas de $10 y 18 monedas de $1, primero cuenta las monedas de $10 y escribe 7 en la columna correspondiente, luego al contar las de $1 se detiene al constatar que tiene 10 y pide cambiarlas por una de a $10 y corrige su registro inicial, escribiendo 8 en la columna de $10 (4ªS.1). Incluso va reconociendo, paulatinamente, la variación del valor de un número en función de su posición. Así, por ejemplo, reconoce que la cifra 4 en el número 84 significa que hay 4 monedas de $1 y en el número 43 significa que hay, en cambio, 4 monedas de $10 (4ªS.1).

Por último Olga en la secuencia inicialmente no presentó dificultades para codificar o decodificar cantidades formadas con correspondencia con la escritura convencional, usando los agrupamientos sugeridos por el material, incluso reconoce, aunque no verbaliza, la variación del valor de un número en función de su posición (4ªS.1 / 5ªS.1). Pero luego presenta dificultades para codificar una cantidad formadas sin correspondencia con la escritura convencional, como por ejemplo cuando se le entrega $109 formado por 10 monedas de $10 y 9 monedas de $1, reconoce que no puede escribir 10 en la columna de las monedas de $10 y propone efectuar el cambio pero por monedas de $1 en vez de billetes de $100 (5ªS.2). Así como también tiene problemas para decodificar una cantidad y representarla con material, por ejemplo representa el 621 con 4 billetes de $100, 10 monedas de $10 y 1 moneda de $1. Pero luego, como se ve en el ejemplo siguiente, puede recuperar como recurso para representar la cantidad la identificación de las relaciones multiplicativas en la numeración hablada (por ejemplo, "veinti…" remite a 2 monedas de $10). Asimismo, la posibilidad de la representación material a partir de este recurso, es recuperada también por la entrevistadora buscando articular la representación material y escrita de la cantidad en juego, explicitando otro recurso disponible, el uso de la escritura como indicio de la descomposición de la cantidad:

"E- Fíjate aquí (señala el 1 del 621) tú miraste que tenías uno en la columna de un peso.
O- Uhum.
E- Entonces me pediste una moneda de a peso. ¿Cuántas monedas de a diez harán falta? Fíjate (le señala la tabla) ¿cuánto está escrito en cada columna?
O- Uhm … me hace falta … (observa la escritura de 621 en la tabla) me hace falta de a diez … (silencio, observa nuevamente) ¿una?
E- ¿Una (se la entrega)? Tienes que formar el seiscientos veinti (con énfasis) uno.
O- Seiscientos veinti … me hacen falta dos.
E- Dos (le entrega la faltante). Y cuántos billetes de a cien.
O- Uhm …
E- Para tener seiscientos.
O- (observa los 5 billetes de $100 ya pedidos) Me falta uno.
E- Te falta uno (se lo entrega). Entonces … vamos a fijarnos una cosa Olga …
O- Uhum.
E- Yo voy a contar cuántos billetes de cien tienes … uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis.
O- Seis.
E- ¿No es lo que está escrito ahí (señala el 6 del 621)?
O- Seis.

E- Seis billetes …
O- De a cien.
E- … de a cien. ¿Cuántas monedas de a diez tienes? Dos (se las muestra).
O- Dos.
E- Y aquí está escrito … (señala el 2 del 621) dos.
O- Dos.
E- En dos monedas de a diez. ¿Y cuántas monedas de a peso?
O- Una (mirando el 1 del 621).
E- Y tienes una (le muestra la moneda de $1). Entonces, cuando está escrito el número tú puedes directamente decir necesito (va señalando la cifra que lee y el encabezado de la columna en que está) seis de a cien, dos de a diez y …
O- Y una de a peso." (5ªS.5)

En sesiones posteriores supera la dificultad para codificar una cantidad formada sin correspondencia con la escritura convencional (6ªS.1), sujetándose a las restricciones de la escritura (ver leyes de escritura). Y también supera la dificultad para decodificar una cantidad y representarla con material, incluso autónomamente usa la escritura como indicio de la descomposición de la cantidad, pudiendo pedir la cantidad de billetes y monedas necesarios para formar una cantidad determinada observando su escritura. Por ejemplo, mirando el 450 escrito en la tabla pide: "Cuatro de a … cien." y "Cinco de a diez" (6ªS.3).

Leyes de escritura

Las leyes de escritura están emparentadas con las mencionadas leyes del sistema, porque la posicionalidad y la organización decimal conllevan la variación del valor de las cifras en función de su posición y la oscilación de las mismas en cada agrupamiento desde el 0 al 9. Las posibilidades de identificación en la producción haciendo uso de agrupamientos (cienes, dieces, unos) a la escritura convencional, así como el reconocimiento de la variación de los dígitos que pueden escribirse en cada agrupamiento, fueron utilizados como criterios para el orden propuesto, a saber: Carmen, Sofía y Olga.

Carmen durante la secuencia reconoce la variación posible del valor de las cifras (del 0 al 9) en cada grupo, por ello cuando se le pregunta por el número mayor susceptible de escribir en cada agrupamiento responde:

"E- Bueno. Te hago otra pregunta. Yo llegué al novecientos sesenta y seis (señala el 1 966). Si hubiese tirado otra vez más (le enseña el dado del 100), a qué número probablemente hubiese llegado. Dentro de qué números …
C- Como al mil y cachos.
E- Como al mil y cacho (reitera). ¿No hay otro número aparte del nueve? ¿Ya tengo que pasar como …

C- Al mil y …
E- Claro, o sea que ya dentro de los cienes …
C- Se pasa (completa).
E- Me paso. El último es el nueve.
C- Uhum.
E- Y acá qué pasa, dentro de los dieces qué pasa, ¿hasta qué número puedo llegar?
C- Hasta el nueve.
E- Hasta el nueve (le confirma). ¿Y acá en los últimos (señala las unidades)?
C- Igual.” (3ªS.4)

A su vez, identifica en la producción con agrupamientos (de base diez) a la escritura convencional (4ªS.3), explicitándose en mayor grado en dos situaciones: en la comparación de dos escrituras de un mismo número (una realizada al dictado, es decir apoyada en correspondencia con su nombre y otra en función de los agrupamientos propuestos –cienes, dieces, unos–) y en la producción de cantidades formadas sin correspondencia con la escritura convencional o producto de un reagrupamiento. Por ejemplo para escribir $357 formado por 2 billetes de $100, 15 monedas de $10 y 7 monedas de $1, cambia 10 monedas de $10 por un billete de $100 antes de registrarlo y aduce como motivo las restricciones, que empieza a reconocer, de la escritura de esa cantidad, es decir la imposibilidad de escribir un número mayor que nueve en cada orden (5ªS.2). Así va consolidándose la incorporación de la regla de cambio como instrumento para cumplir con las restricciones de la escritura de una cantidad, y también como estrategia en la operatoria, como puede observarse en parte de la resolución que realiza de la operación 144+98 (6ªS.1). Nótese que Carmen usa la regla de cambio (cuando tengo diez de un orden menor puedo formar un grupo más del orden mayor) para esta resolución:

“C- (cuenta las monedas de $1) Dos, cuatro … seis, ocho, diez. La cambiaría por una moneda de a diez. (las entrega).
E- Bueno, ahí te doy (le entrega una moneda de $10).
C- Diez … me quedan … dos pesos.
E- ¿Dos pesos? Bueno, ve anotando.
C- Dos pesos (anota 2 en la columna de $1).”
(6ªS.1)

Registro observado:

$100	$10	$1
1	4	4
	9	8
		2

En cuanto a Sofía en la secuencia, inicialmente no reconocía ningún vínculo entre la producción con agrupamientos y la escritura convencional. No obstante, paulatinamente va induciendo que las disminuciones en el registro ya producido en el juego del cajero, o sea la escritura de los tiros y los subtotales, están asociadas a cambios de agrupamiento. Por ejemplo, al explicitar la relación entre la regla de cambio y las restricciones de la escritura (pues si tengo 10 debo cambiar por un orden mayor por lo cual la cifra mayor viable en cada agrupamiento es el 9), reflexiona al mirar lo escrito en el juego del cajero en la tabla:

"E- El número más grande que se puede escribir en la columna de a diez …
S- (silencio).
E- … es el nueve.
S- ¿Nada más también?
E- Nada más el nueve. Porque …
S- (interrumpe) Ya llego a diez monedas de … a diez, tengo que poner cero porque tengo que cambiar, ¿no?
(…)
E- ¿Está? Entonces siempre, en cualquier columna, el número más grande al que puedes llegar es el nueve.
S- Nueve nada más, porque sino llega a diez.
E- Si pasas al diez, ya te pasas a tener una moneda de a diez o sea que pones cero en la de a peso y …
S- (interrumpe) ¡Tiene que cambiar!
E- Ya cambias. Como dijiste, efectivamente." (4ªS.8)

No obstante, tiene oscilaciones para aplicar esta regla como restricción para la escritura, por ejemplo propone escribir el 107 anotando 10 en la columna de la tabla correspondiente a las monedas de $10, sin hacer el cambio por un billete de $100 de modo de ajustarse a su escritura convencional (4ªS.7). Paulatinamente el vínculo entre el rasgo del sistema de numeración de ser una base diez y su escritura comienza a explicitarse en las dos situaciones ya mencionadas: en la comparación de dos escrituras de un número (una apoyada en correspondencia con su nombre y otra en función de los agrupamientos propuestos –cienes, dieces, unos–) (5ªS.2); y en la escritura de cantidades formadas sin correspondencia con la escritura convencional o producto de un reagrupamiento (5ªS.3). Por ejemplo cuando va a registrar una cantidad (88) representada sin correspondencia con su escritura (7 monedas de $10 y 18 monedas de $1), explicita la necesidad de respeto de la regla de escritura:

"E- ¿Cuántas tienes en total (se refiere a las monedas de $1)?
S- Dieciocho.
E- Dieciocho monedas de a peso. ¿Y no puedes anotar ahí dieciocho (le señala la columna de $1)?
S- No. Puedo cambiar por una moneda … (se refiere a una moneda de $10)." (5ªS.3)

Se consolida de este modo la incorporación de la regla de cambio como instrumento para cumplir con las restricciones de la escritura de una cantidad. Y, como fue anticipado, también se afirma en su uso en el contexto de resolución de operaciones, particularmente en las situaciones de reagrupamiento (6ªS.1 / 7ªS.11). En la 6ª sesión, por ejemplo, cuando realiza la operación con contexto 144+98 al contar las monedas de $10 que tiene esgrime la necesidad del cambio: "(comienza a contar las monedas de $10)

Cincuenta, sesenta … ocho … (llega a contar 10 monedas) un billete de a cien, creo, ¿no?" (6ªS.4).

En el caso de Olga durante el transcurso de la secuencia inicialmente no reconocía ningún vínculo entre la producción con agrupamientos y la escritura convencional, para luego identificar en esta producción a la escritura convencional. Inicialmente presenta dificultades para operar espontáneamente con la regla de cambio en el cajero ascendente, quizás debido a que no era una necesidad pragmática pues es posible formar una misma cantidad de modo diverso haciendo uso de billetes y monedas (4ªS.2). No obstante, de modo incipiente empieza a visualizar una relación entre la regla de cambio con las reglas de escritura (4ªS.7). Así, niega que pueda escribirse 12 y 11 en la columna de $1, respecto al 10 inicialmente considera que sí se puede escribir en cada columna (de los cienes, dieces, y unos) pero luego de considerar la regla de cambio concluye que la cifra máxima es el nueve:

"E- ¿Puedo escribir aquí diez monedas de a peso (señala la columna de $1 de la tabla)?
O- Sí.
E- ¿Sí? ¿Y no era que si yo tenía diez tenía que cambiar por una moneda de diez pesos?
O- Sí.
E- Entonces … vamos a hacer el caso. Yo tiro y junto diez monedas de un peso, ¿no? Si yo junto diez monedas de un peso (toma contando 10 monedas de $1), ¿cuál es la regla del juego, si yo tengo diez de un tipo qué tengo que hacer?
O- Cambiarlas.
E- Las cambio …
O- Por una de a diez.
E- Por una de a diez (reitera y las cambia). ¿Cómo anoto que tengo una de diez? ¿Voy a anotar diez monedas de a peso, o voy a anotar una moneda de diez pesos y ninguna moneda de a peso? ¿Qué te parece?
O- Una moneda de a diez.
E- Y ninguna de a peso (anota). Entonces, ¿puedo escribir diez aquí (señala la columna de $1)?
O- No.
E- Tú dijiste que doce no se podía, que once no se podía, me dijiste, acabamos de ver que diez tampoco se puede, ¿hasta qué número se puede escribir si yo respeto esta regla de que cuando llego hasta diez tengo que ir cambiando?
O- Hasta el nueve." (4ªS.8)

Posteriormente este vínculo comienza a explicitarse nuevamente en la escritura de cantidades producto de un reagrupamiento, no obstante con oscilaciones y por ende, no suficientemente consolidada como estrategia.

Por ejemplo inicialmente registra sin respetar las restricciones de las reglas de escritura sobre la oscilación del valor de las cifras en cada agrupamiento, así en la 5ª sesión cuando suma la operación con contexto 274+83 cuenta las monedas de $10 y registra, sin ninguna contradicción, el total -es decir 15- en la columna de $10. Luego de pedirle que escriba la cantidad de dinero que tiene y a partir de la diferencia con la cantidad escrita en la tabla, la entrevistadora evidencia que el origen de la diferencia entre ambas escrituras es el no respeto de la regla de cambio.

Posteriormente en la misma sesión en la operación con contexto 357+264 constata que tiene en total $621 (formado por 5 billetes de $100, 11 monedas de $10 y 11 monedas de $1), pero cuando va a registrar las monedas de $10 cuando se le pregunta si puede escribir once responde negativamente y propone cambiar pero sin respetar la regla de cambio:

"E- ¿Entonces … qué hacemos? Tienes once monedas de a diez, qué harías.
O- Cambiar.
E- Cambiar, cuántas vas a cambiar.
O- Una … dos.
E- ¿Dos?
O- Sí.
E- ¿Para llegar hasta el nueve?" (5ªS.6)

Nótese que su propuesta se asienta en el respeto de las restricciones de la escritura, pues la cifra máxima a escribir en cada columna es el 9. Manifiesta una confusión al procurar articular la regla de cambio y la de escritura, se centra en esta última por lo cual propone registrar el valor máximo (el 9) perdiendo así el control sobre el cambio y por ende, sobre el procedimiento de registrar lo restante en el grupo en que se produce el reagrupamiento (en este caso las decenas).

Finalmente logra incorporar la regla de cambio como restricción de la escritura y estrategia de la operatoria, incluso de modo anticipado sin necesitar la evidencia de la escritura errónea para proponer la corrección (7ªS.1). Por ejemplo en la 7ª sesión se le entrega la cantidad $255 formada por 1 billete de $100, 15 monedas de $10 y 5 monedas de $1, reconoce la cantidad de dinero que se le entrega pero cuando va a escribirla, luego de que se le recuerda la regla sobre el valor máximo de cada columna (o sea 9), propone: "Tengo que cambiar por un billete de a cien (se refiere a las monedas de $10)" (7ªS.1).

Asimismo, cuando suma la citada cantidad (255) con el 107, al contar las monedas de $1 y ver que son 12 señala: "Doce de a peso, las voy a cambiar por … de a diez. (separa 10 monedas de $1 y las entrega)" (7ªS.2).

Representación de la operatoria

Como se dijera al inicio del Capítulo, en este apartado se recurrirá a dos criterios de presentación. En primer lugar se describirá el desempeño inicial en la 2ª entrevista del dominio del algoritmo escrito, donde éste podía ser utilizado como recurso para la resolución de operaciones planteadas en contextos de diversas estructuras aditivas. En segundo lugar se recuperará el desempeño en el desarrollo de la secuencia en términos de respuesta a la propuesta realizada.

Algoritmo, resoluciones iniciales

Si se considera como criterio de jerarquización del desempeño inicial al conocimiento o no del algoritmo escrito y al éxito en su resolución cuando involucra una dificultad operatoria de transformación (reagrupamientos o desagrupamientos), el orden sería: Carmen, Sofía, Olga.
Este orden obedece a que Carmen conocía el algoritmo escrito de la suma hasta tridígitos, al igual que Sofía (en el mismo rango numérico), pero sólo Carmen lo aplicó correctamente cuando demandaba algún tipo de transformación. En cambio Olga sólo recurrió a algoritmos mentales para la resolución de las situaciones aditivas presentadas. Cabe señalar que si bien algunas de las situaciones aditivas seleccionadas requerían como estrategia convencional de resolución la aplicación de la resta, ninguna de las dos entrevistadas que recurrieron al cálculo escrito (Carmen y Sofía) la identificaron como la operación pertinente, por lo cual inicialmente no pudo observarse el uso del algoritmo y del algoritmo ampliado que hacían en dicha operación.

Carmen en la 2ª entrevista utilizó como estrategias globales a la escritura de todos los datos numéricos encolumnados, listos para operar sobre ellos, o al registro de sólo uno de ellos (generalmente el total al que arribar, buscando el complemento aditivo). Pudo resolver operaciones con tridígitos con transformación, lo que incidió en su éxito o fracaso fue la posibilidad de identificar la operación pertinente, que se analizará luego. En general el tipo de registro que hizo es de datos encolumnados para operar, estando ausente el signo de la operación y algún modo de registro de reagrupamientos o desagrupamientos realizados (algoritmo ampliado). Por ejemplo para resolver la operación con contexto 156+226, escribió los datos uno abajo de otro y encolumnados y su algoritmo es el siguiente:

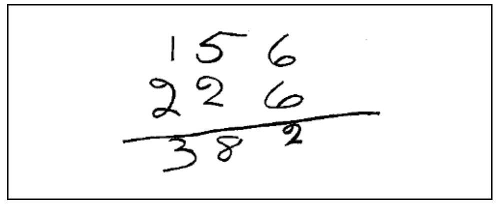
“C- Son doce (escribe 2 en el resultado en las unidades) …

Su anotación es:

$$\begin{array}{r} 156 \\ 226 \\ \hline 2 \end{array}$$

C- … ocho (escribe 8 en el resultado en las decenas y 3 en el resultado en las centenas). Trescientos ochenta y dos (lee su resultado).”

(2ª E.3)



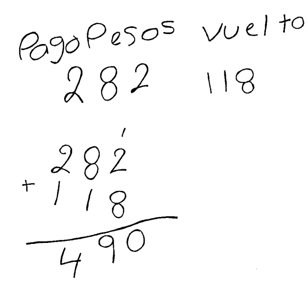
En el caso de Sofía en la 2ª entrevista usó como estrategias globales de resolución al registro de los datos numéricos y algún dato de su contexto, cuando escribía la operación no siempre anotaba el signo de la misma. Utilizó en la suma el algoritmo ampliado pero con una anotación confusa de los reagrupamientos, pues los escribió no encolumnados con el grupo al que afectaría sino en el grupo de origen. Además aplicaba todas las transformaciones al orden mayor, es decir a las centenas. Por ejemplo nótese en el siguiente algoritmo que la nueva decena obtenida producto del reagrupamiento (pues el resultado parcial de las unidades es 10) fue escrita en la columna de las unidades. A su vez, obsérvese que este reagrupamiento fue aplicado a las centenas en vez de a las decenas, pues sumando 1+1+2 es que obtuvo el resultado escrito en las centenas, o sea 4.

(luego de que lo resuelve la entrevistadora le cuestiona el resultado obtenido)

“E- Cuatro, dos más uno, cuatro.
S- Sí, y uno (refiriéndose al "que se llevaba" de las unidades. Es decir que en vez de agregarlo en las decenas lo hace en las centenas).
E- Ah! Está. Y uno de aquí (señalando el 1 escrito sobre las unidades).
S- Sí, y uno, cuatro.”

(2ª E.9)

Su anotación es:



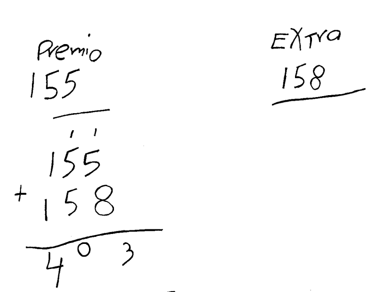
Este procedimiento algorítmico también fue implementado cuando existían varios reagrupamientos, así en la siguiente operación retomó los dos unos escritos arriba de las unidades y las decenas, y los agregó en las centenas, pues 1+1+1+1 le dio 4.

(luego de que resuelve la operación en silencio la entrevistadora le pide que la argumente)

“S- Me salió cuatrocientos tres. (es incorrecto)
E- ¿Cuatrocientos tres? A ver cómo le hiciste.
S- Sí porque son trece (resultado de sumar las unidades 5+8). Son 10 (suma las decenas), llevamos una (se refiere al 1 que escribió en la columna de las decenas). Y dos, más los dos (señala los 1 "que se llevaba"), cuatro. “

(2ª E.33)

Su anotación es:



Como se anticipara Olga en la 2ª entrevista no hizo uso de ningún algoritmo escrito, se basó en el cálculo mental para resolver. Tampoco escribía ningún dato necesario para su resolución, por lo cual demandaba continuamente la reiteración de los mismos por la entrevistadora.

Respuesta a la intervención

Este apartado tiene como criterios para jerarquizar el desempeño frente a la secuencia las respuestas frente al abordaje de la identificación de la lógica subyacente al algoritmo y del uso de un algoritmo más eficaz (en su procedimiento y en la implementación del algoritmo ampliado)

La lógica implícita del algoritmo. En cuanto a este primer aspecto, se recurrió para ello al referente de la resolución con el dinero por la familiaridad de las entrevistadas con situaciones de cambio en este contexto. La jerarquía en este aspecto particular, a diferencia de lo observado en el apartado “la representación de la numeración” e incluso en este mismo apartado en lo referente al uso inicial del algoritmo, sería Carmen, Olga y Sofía. Si bien las tres ofrecen resistencias iniciales a identificar la regla de cambio como una necesidad no sólo derivada de la ausencia o no de cambio (particularmente en situaciones de reagrupamiento) sino con las mencionadas restricciones de la escritura, las entrevistadas tienen diverso grado de dificultad para reconocer estas restricciones y recuperar el referente como instrumento de argumentación de esta lógica. Así Carmen no presenta dificultades en general para hacer uso del referente y vincular, posteriormente, a la regla de cambio con un instrumento de la operatoria para cumplir con las leyes del sistema y por ende, de su escritura. En cambio Olga, aunque no presenta dificultades para recuperar el referente propuesto (pues no dispone de elementos simbólicos de partida), tiene problemas para introducir la regla de cambio en el sentido mencionado. Y por último Sofía, a pesar de que opera antes que Olga con las leyes del sistema, se apropia más tardíamente de la lógica subyacente al algoritmo porque tiene resistencias a invalidar su algoritmo personal erróneo ya consolidado y a hacer uso del dinero como referente de control de lo simbólico, recuérdese que una de las características mencionadas de Sofía en la semblanza inicial fue su sobrevaloración de lo simbólico como componente de lo escolar.

En cuanto a Carmen, durante la 4ª sesión respeta la regla de cambio en el juego del cajero ascendente y descendente, pero en la actividad de trabajo con el registro hipotético del cajero ascendente tiene dificultades para operar de modo espontáneo con esta regla, lo hace luego de constatar que se contradicen las reglas de escritura y después de que la entrevistadora le recuerda la regla de cambio (4ªS.3). Esto se confirma en la 5ª sesión donde manifiesta una asociación inmediata de la regla de cambio sólo a la necesidad de desagrupar en el cajero descendente.

Respecto de las posibilidades de trasladar esta regla a la argumentación del procedimiento algorítmico se logra explicitar esta lógica subyacente mediante la contrastación de los procedimientos de resolución de la tabla y del algoritmo (suma 6ªS.2 / resta 6ªS.9). Posteriormente el referente de la tabla es utilizado para argumentar los reagrupamientos y desagrupamientos, así como recurre a restricciones de la escritura (7ªS.6). Así luego de la resolución de la operación con contexto 47+48 en su argumentación señala:

"E- Noventa y cinco. Tú dijiste que llevabas una. Qué es lo que hiciste ahí, por qué te llevabas una. Tú dijiste 'siete y ocho quince'.
C- Sí, porque aquí (señala las unidades del resultado) no puedo escribir los quince.
E- No puedes escribir los quince.
C- No. Los cambié por una … por monedas de a diez.
E- Ahá. Entonces tienes una más.
C- Más.
E- Y ahora tienes …
C- (interrumpe) Nueve." (7ªS.6)

Su anotación es:

$$\begin{array}{r} 47 \\ 48 \\ \hline 95 \end{array}$$

En el caso de Olga las dificultades anticipadas para reconocer y operar con la regla de cambio se evidencian fundamentalmente en su no respeto espontáneo en situaciones del cajero ascendente, a pesar de su reiterada explicitación y de las evidencias de su comprensión. En el cajero descendente se visualiza más que como una regla como una necesidad derivada de la ausencia de cambio (4ªS.4). No obstante, en la sesión posterior su recuerdo inmediato parece estar relacionado con el reagrupamiento en el cajero ascendente (5ªS.8), pero no la introduce espontáneamente en el reagrupamiento, ni le genera contradicción, inicialmente, su escritura sin reagrupar, pero paulatinamente la va incorporando como restricción para la escritura de las cantidades (5ªS.8 / 6ªS.5-6).

"O- (cuenta las monedas de $1) Cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve, diez, once, doce.
E- Bueno, pero las tienes que ir anotando, o sea vas contando y vas anotando. Tienes doce.
O- Doce (anota 12 en la columna de $1).
E- Bueno ¿Puedes anotar doce en esa columna?
O- No (muy bajo).
E- Y entonces, ¿qué harías?
O- Cambiaría una de … diez de a peso por una de a diez.
E- Bueno.
O- (cuenta 10 monedas de $1 para cambiar) Dos, cuatro, cinco … diez.
E- Diez. Bueno … (le entrega 1 moneda de $10 a cambio) entonces, lo que tienes que hacer, siempre, para no borrar como estás borrando, si tienes diez, cambias.
O- (corrige, borra el 1 del 12).
O- (cuenta las monedas de $10) Dos, cuatro, cinco, seis … siete, ocho, nueve, diez (las coloca en un grupo aparte). Once, doce, trece, catorce. Estas las cambiaría por uno de a cien."
(6ªS.5-6)

Registro observado:

$100	$10	$1
1	4	4
	9	8
		12

$100	$10	$1
1	4	4
	9	8
		2

Finalmente logra incorporar la regla de cambio como estrategia de la operatoria, incluso de modo anticipado sin necesitar la evidencia de la escritura errónea para proponer la corrección, así realizando una suma con contexto aplica directamente la regla de cambio:

"O- Dos, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve, diez, once, doce (cuenta las monedas de $1).
E- Uhum (asiente). Tienes doce de a peso.
O- Doce de a peso, las voy a cambiar por … de a diez (separa 10 monedas de $1 y las entrega)."
(7ªS.2)

Incluso esta lógica logra extenderse a la del algoritmo mediante la actividad de resolución sucesiva (primero la tabla y luego el algoritmo), evidenciándose que la lógica subyacente a ambos procedimientos es la misma (suma 8ªS.2 / resta 8ªS.4).

Finalmente Sofía coincide en la dificultad ya mencionada para respetar inicialmente de modo espontáneo la regla de cambio en situaciones del cajero ascendente, pues en el cajero descendente –como ya fuera dicho– aparece más como una necesidad práctica (4ªS.4). Esta dificultad se confirma en que en la revisión de la 4ª sesión anterior que se realiza al inicio de esta sesión, su recuerdo inmediato también está relacionado con la necesidad de desagrupar en el cajero descendente (5ªS.6). No obstante, comienza a introducirla en ambos contextos, de desagrupar y también de reagrupar, como ya se anticipara, en estrecho vínculo con las reglas de escritura (5ªS.7). Así cuando realiza la operación con contexto 258+185, cuando cuenta las monedas de $10 manifiesta:

"S- (…) Dos, cuatro, seis, ocho, diez. ¿Me puede cambiar estas (le entrega a la entrevistadora 10 monedas de $10)?
E- ¿Por qué quieres cambiar?
S- Por un billete de a cien.
E- Ahá (le entrega 1 billete de $100). Si no vas a tener el problema de la otra vez, ¿no?
S- Sí.
E- Que no lo podías escribir." (5ªS.7)

Paulatinamente entonces se va consolidando la incorporación de la regla de cambio como estrategia en la operatoria (6ªS.1), explicitándose en la actividad de contrastación de la lógica de la tabla y del algoritmo. No obstante Sofía, si bien reconoce que la lógica subyacente a ambos procedimientos es la misma, considera que el contexto es diverso, como ya se citara, adjudica a la tabla el contexto del dinero a diferencia de la cuenta que adheriría meramente al lenguaje simbólico (8ªS.2). Por ello presenta, como ya se ha dicho, resistencias al uso del dinero y los procedimientos de cambio en este contexto como referente de argumentación y de interpretación de la lógica de los algoritmos, esto podrá observarse en la persistencia en una justificación meramente simbólica de las cuentas que será abordada a continuación.

Algoritmo. Respecto de la adopción de este segundo aspecto, el uso de un algoritmo de mayor eficacia por la aplicación de un procedimiento válido (encolumnar, reagrupar y desagrupar correctamente, operar en sentido de derecha a izquierda) y por la utilización del algoritmo ampliado (es decir con anotaciones marginales de los cambios realizados), el ordenamiento posible es Olga, Carmen y Sofía. Como puede observarse, aquí existe un cambio en relación al ordenamiento constante en el primer apartado y en el desempeño inicial en lo relativo al algoritmo (Carmen, Sofía y Olga), incluso también se diferencia de la respuesta frente al primer aspecto, la lógica implícita del algoritmo (Carmen, Olga y Sofía).

Esta jerarquía responde a que si bien Olga tiene un acceso más tardío a lo simbólico por su ausencia inicial de registro, responde de un modo más natural y fluido a la intervención didáctica, es decir que presenta menos resistencias a la propuesta. Carmen tiene un mejor desempeño que Sofía pues incluso en situaciones difíciles para ambas, como operar con un minuendo que sea un número redondo, puede aplicar correctamente el algoritmo recuperando el uso del referente, lo cual le permite además argumentar los cambios realizados en la suma y en la resta. No obstante incorpora más tardíamente que Sofía el uso del algoritmo ampliado por su confianza en sus posibilidades de cálculo mental, que en esta parte del proceso se manifiesta como un obstáculo para actuar sobre lo simbólico, particularmente en cuatridígitos, o sea en el rango que no es de su competencia. En cambio Sofía si bien hace uso del algoritmo ampliado y corrige las dificultades iniciales detectadas (encolumnar el cambio sobre el grupo de origen en vez de sobre el grupo al que afectará) no puede hacer uso del referente para argumentar estos cambios y por ende, se bloquea su posibilidad de recuperarlo para corregir su procedimiento algorítmico erróneo descrito consistente en aplicar todas las transformaciones al grupo de las centenas.

Olga durante la secuencia en la resolución de operaciones con tridígitos reflexiona sobre la eficacia de la aplicación de un sentido de derecha a izquierda o de izquierda a derecha, ante la evidencia del error que le ocasiona operar en sentido de izquierda a derecha (5ªS.14 / 6ªS.6), y logra introducir los signos gráficos que permiten identificar a cada operación y al resultado, ante lo cual sólo tuvo dudas en la resta (pensaba que el signo era el "=") y en la ubicación espacial de los signos y de la raya indicadora del resultado (7ªS.2); pudiendo posteriormente usar los signos como criterio de identificación de la operación en su interpretación. Incluso posteriormente reflexiona sobre este logro y su importancia:

"O- Y … y esto era que yo me comía estos signos. Por ejemplo, este … (señala el signo menos).
E- Ah! Este es de a menos.
O- Este es de a menos. Este (señala el signo más) es para sumar. Además. Y hay otro que es para …
E- Multiplicar.
O- Exacto. Y eso es lo que yo le erraba en esos signos. Por ejemplo este (señala el signo menos), pues no le entendía. Ese (señala el signo más) sí sabía, yo sí sé que es para la suma. El que se me hacía difícil era este (señala nuevamente el signo menos) y el otro, ese que es como una equis.
(…)
E- Conoces más el signo más que el signo menos.
O- Sí. Porque fue lo que a mí. Porque siempre fue lo primero que me enseñaron. Este signo (señala el signo más). Y me ponían o sea de a … dos, una. Y ya yo lo iba sumando. Lo único que ella (se refiere a su asesora del INEA) me explicó es que tenía que poner la misma cantidad pero si eran dos lo tenía que poner abajo. Y yo ya contaba con mis dedos. Ya ahorita que me han estado enseñando, bueno que Usted me ha enseñando, este me quedo así y digo: 'para qué, para quitar o para poner'." (10ªS.2-3)

Otra dificultad detectada fue la escasa memorización de resultados de sumas y de restas con dígitos. Por ello se introdujo una *rutina de memorización*[35] en la que

[35] Esta rutina consistía, como se explicara en el Capítulo II, en decir los resultados de sumas y restas escritas en cartones que iba mostrando la entrevistadora durante un minuto.

inicialmente se pudo observar que los resultados erróneos de las sumas en general no eran ni siquiera aproximados. Algunos de estos resultados, parecían sustentarse en algunas de las siguientes opciones: procede como si uno de los sumandos (el primero o el segundo) fuera una decena (por ejemplo: 2+0=20, 7+1=17) (8ªS.1); no identifica al +1 como el que genera al sucesor, a veces es tratado como una decena (como ya fue citado) y otras como elemento neutro (por ejemplo: 2+1=2) (8ªS.2); se multiplican los sumandos cuando el sumando es dos, es decir que se duplica al segundo sumando (por ejemplo: 2+9=18) (8ªS.2). Esta última opción puede obedecer a la confusión de signos que la misma entrevistada reconoce. Su desempeño inicial en las restas es mejor, quizás por el ajuste de definición de la preeminencia de la exactitud sobre el tiempo de ejecución. Podría conjeturarse que, dada la coexistencia de esta rutina con el abordaje en su cursado en el INEA de las tablas de multiplicar, la rutina de memorización propuesta se inscribió en el contrato de esta otra tarea, las tablas, donde habitualmente existe una preponderancia de la importancia de la rapidez. Además, cuando Olga le enseña a la entrevistada que estaba “aprendiendo las tablas” y manifiesta su dificultad para su memorización, ante la pregunta sobre si hubo alguna reflexión en torno a algunas propiedades de la multiplicación (por ejemplo la conmutativa) que permitieran operar como recursos de apoyo del recuerdo, Olga manifiesta su asombro y niega que esto haya sido abordado en la asesoría.

Paulatinamente su desempeño va mejorando, aunque insumiendo un tiempo mayor. Se recupera su recurso del conteo con los dedos (probablemente invalidado por la lógica del aprendizaje escolar de las tablas de multiplicación descrita), conservando una de las cantidades como insumo para la resolución, así como recurrir a los resultados ya conocidos comparando los sumandos (9ªS.1). Asimismo se instaló la responsabilidad sobre el éxito en la rutina (10ªS.1) y su importancia como insumo para la resolución de los algoritmos.

En la resolución usando directamente el algoritmo de la *suma* y recuperando la tabla o el contexto monetario como alusión, se presentaron algunas dificultades en las decisiones del registro de los reagrupamientos (¿si tengo 16 monedas de $1 debo cambiar, qué registro en las unidades o monedas de $1 el 6 ó el 1?), y en el mismo reagrupamiento hubo inconsistencias en el respeto de la regla de cambio (¿a diez monedas de $10 las cambio por 10 billetes de $100 ó por 9?) (8ªS.6). Obsérvese que la última dificultad anterior, responde también a la centración mencionada en las reglas de escritura y la persistencia del problema anticipado para articularlas con la regla de cambio. Probablemente esta constancia obedece al no respeto de sus tiempos didácticos, pero existía un compromiso institucional con el INEA y personal sobre la obtención de resultados en los plazos estipulados. Por otro lado en la resta, existe, al igual que en la suma, dificultad inicial para la resolución autónoma (evocando la tabla o el contexto monetario) del algoritmo (8ªS.9).

Dadas las dudas que presentaba en los reagrupamientos en torno al modo de registro, se introduce el algoritmo ampliado, inicialmente realizado en forma conjunta con la entrevistadora pero puede recuperarlo en la suma como apoyo de la operatoria, pues le queda claro que escribir en una columna lo reagrupado es un indicador de que es un sumando que debe ser agregado en dicha columna (9ªS.2). Va logrando paulatinamente mayor independencia (9ªS.3) hasta lograr incorporar las modificaciones sugeridas al algoritmo ampliado, pudiendo operar con autonomía usando como referente aludido el dinero como puede observarse en el siguiente fragmento en que resuelve la operación con contexto 589+114 en la 9ª sesión:

“O- Nueve … ¿más cuatro?
E- ¿Cuánto es?
O- Uhm … nueve … (cuenta en voz baja). ¿Trece pesos?
E- Trece. A ver cómo le harías.
O- Cambiaría las de a peso por de a diez.
E- Ahá.
O- (anota el 1 arriba de las decenas).
E- Muy bien, cuántas te quedan.
O- Uhm … me quedan ¿tres (escribe el 3 en las unidades)?
(…)

Su anotación es:

$$\begin{array}{r} \scriptstyle 1 \\ +\ 589 \\ 114 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \scriptstyle 1 \\ +\ 589 \\ 114 \\ \hline 3 \end{array}$$

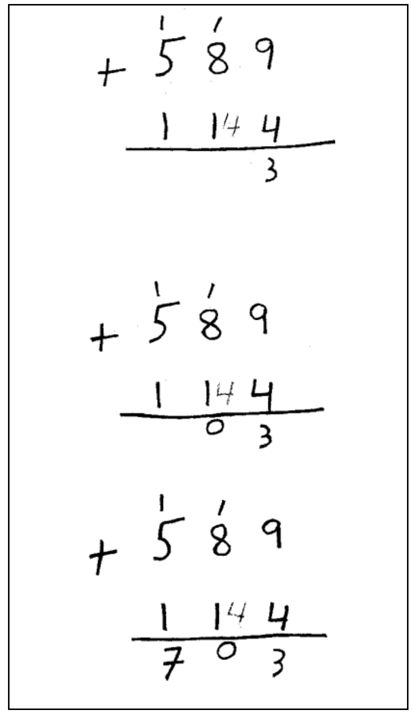
E- ¿Está? Bueno, vamos a seguir cuenta cuántas hay de a diez.
O- De a diez uhm … diez … ¿once?
E- A ver, cuenta. Ocho …
O- Ocho … diez. Ocho, nueve, diez.
E- Diez.
O- Diez monedas de a peso.
E- Diez monedas ¿de? De a diez.
O- De a diez.
E- ¿Puedes escribir diez ahí (en el resultado)?
O- Uhm … no.
E- Qué harías.
O- La cambiaría.
E- Por cuánto.
O- ¿Por un billete?
E- Por un billete de cien. Entonces qué haces cuando cambias, para no olvidarte.

O- Le pongo (escribe 1 arriba de las centenas).

E- Exacto. Cambiaste diez monedas de a diez por un billete de a cien. Cuántas monedas te quedaron.
O- ¿Ni una?
E- Y entonces qué pones. Para indicar que no te queda nada.
O- ¿Cero?
E- Ahá.
O- (escribe 0 en las decenas).
E- Bueno.

O- Uhm … cinco, seis … cinco, seis. ¿Siete?
E- Siete.
O- (escribe el 7 en las centenas).

(9ªS.3)



No obstante, inicialmente tiene algunas dificultades con el algoritmo derivadas del no respeto de la regla de cambio –ya mencionado– que rectifica a partir del conocimiento que ahora tiene de las restricciones de la escritura de los números. Por ejemplo en la 10ª sesión en la operación 622+299, primero escribe 11 en el resultado en las unidades pero cuando se le pregunta si puede escribir once en la columna de $1 borra el 11 escrito y propone realizar el cambio por 1 moneda de $10 (10ªS.3).

Asimismo, en la resta luego de que se le mostró el registro de los desagrupamientos y se alertó sobre la necesidad de registrar lo restante en aquel grupo que haya sido afectado por esta acción (9ªS.5 / 10ªS.5), logra autonomía en la resolución e incluso realiza modificaciones al registro ampliado al anticipar los cambios sucesivos, o sea que en vez de anotar todos los cambios directamente anota lo restante al final, luego de los diversos cambios. Así, como se mencionara en la semblanza inicial, cuando efectúa la resta 600–428, en vez de escribir 10, tachar y luego escribir 9 en las decenas, directamente anota 9 (10ªS.7).

En cuanto a *Carmen* también reflexiona sobre la eficacia del sentido de resolución de derecha a izquierda (suma 6ªS.2 / resta 6ªS.9) y de la ubicación en columnas de los números con qué operar (7ªS.9). A su vez, manifiesta una diferencia entre el desempeño en operaciones con números tridígitos y con cuatridígitos. En el caso de tridígitos puede decodificar (8ªS.6), resolver y argumentar operaciones con o sin contexto (8ªS.2 / suma 8ªS.6). Aunque en la resta, enfrentada a la resolución simbólica sin posibilidades de usar como recurso al cálculo mental, tiene dificultades cuando el minuendo es un número redondo. Ante la imposibilidad de quitarle al cero replica la cifra del sustraendo, por ejemplo al restar 500–278 obtiene como resultado 378, es decir que en las decenas y unidades procede como si estuviera restando las cifras del sustraendo a las del minuendo (contrariamente a lo convencional). Pero luego advierte (con base en su competencia en el cálculo mental) que el resultado es ilógico, observa el resultado desconcertada, así que recurre a la resolución haciendo uso del material y en este contexto se le explica el uso del algoritmo ampliado (8ªS.6). Es decir que en la resta de tridígitos con una mayor dificultad operatoria (el minuendo es un número redondo) si bien manifiesta problemas para su resolución simbólica tiene recursos de control y de resolución alternativos, pues su estimación le permite rectificar y el uso del referente le posibilita resolver.

En los cuatridígitos puede decodificar y resolver la suma con éxito, pero con dificultades iniciales para extender la argumentación sostenida en el trabajo con tridígitos (por ejemplo de los reagrupamientos) (9ªS.1), que luego va superándose pudiendo argumentar el orden sobre el que operan los reagrupamientos realizados e identificar que estos reagrupamientos involucran una situación de cambio (10ªS.1). Pero tiene dificultades para explicitar la regla de cambio, no discrimina que cambia diez y anota lo restante en el agrupamiento precedente. Oscila en identificar la regla de cambio con el número objeto del cambio, o con la cantidad de grupos formados del orden mayor (10ªS.2), a pesar de su expresión por la entrevistadora (10ªS.2). Así en la argumentación de la operación sin contexto 2 485+6 879 resuelta en la 10ª sesión, cuando se le pregunta cuántas monedas de peso junta para cambiar por una de $10 Carmen duda en su respuesta, primero dice que junta 14, y cuando se le insiste en la pregunta de cuántas cambió responde: "Cambié cuatro (señala el 4 escrito en el resultado en las unidades). Ay! No. Catorce, cambié una."

En el algoritmo de la resta aplicado a cuatridígitos puede interpretar la operación pero comete algunos errores vinculados a que sigue resistiéndose a recurrir al algoritmo ampliado como apoyo de la operatoria, dada su sobrevaloración de sus posibilidades de cálculo mental (9ªS.6-7/ 10ªS.7). Así en la operación sin contexto 6 594–3 907, como ya se mencionara en la semblanza inicial, al no registrar los cambios realizados considera que en las centenas lo restante es 4 en vez de 5 pues no recuerda que este grupo no ha sido objeto de cambios, como puede observarse en el algoritmo ya citado (9ªS.7):

Su anotación es:

$$\begin{array}{rcccc} & 6 & 5 & 9 & 4 \\ - & 3 & 9 & 0 & 7 \\ \hline & 2 & 5 & 8 & 7 \end{array}$$

Es decir que manifiesta dificultades en los desagrupamientos sucesivos, pero detecta ya la inconsistencia (10ªS.8) aunque no sabiendo de dónde desagrupar si no es del grupo anterior, ante lo que propone desagrupar el sustraendo (10ªS.8-10). Así en la resta sin contexto 9 032–7 568 inicialmente al argumentar su resolución manifiesta su toma de conciencia del error:

"C- Y luego aquí (señala las decenas) según le pedí diez, pero no … (observa confundida la cuenta).
E- Cómo hiciste, ¿a ver? No tienes billetes de cien.
C- No tengo de cien.
E- ¿De dónde cambiaste?
C- No, no cambié. Me equivoqué." (10ªS.8)

Su anotación es:

$$\begin{array}{rcccc} - & 9 & 0 & 3 & 2 \\ & 7 & 5 & 6 & 8 \\ \hline & 2 & 0 & 6 & 4 \end{array}$$

Finalmente logra resolver una resta en condiciones de relativa autonomía, pues persiste su dificultad en los desagrupamientos sucesivos, pero ya utiliza el algoritmo ampliado como apoyo (10ªS.18). Por ejemplo en la resta 2 002–733, duda en las decenas pero logra superarlo a partir de la sugerencia de retomar su registro en el algoritmo ampliado:

"C- (duda en las decenas).
E- Aquí (señala las centenas). Tú tenías diez y pusiste nueve.
C- Ahá.
E- Es porque vas a cambiar uno de a cien. Por qué lo vas a cambiar.
C- Por monedas de a diez.
E- Entonces escribe por cuánto.
C- Por … nueve.

E- ¿Por cuántas? Un billete de a cien por cuántas de a diez se cambian.
C- Por diez. Entonces sería diez (escribe 10 arriba de las decenas)."

(10ªS.18)

Su anotación es:

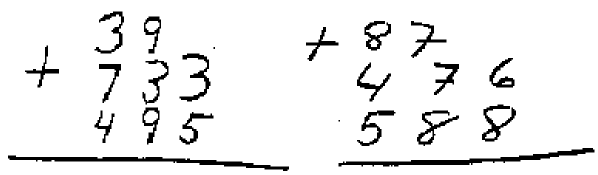
$$\begin{array}{rcccc} & & 9 & & \\ & 1 & 10 & & \\ & 2 & 0 & 0 & 2 \\ - & & 7 & 3 & 3 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{rcccc} & & 9 & & \\ & 1 & 10 & 10 & \\ & 2 & 0 & 0 & 2 \\ - & & 7 & 3 & 3 \\ \hline \end{array}$$

Es decir, que ante el reconocimiento de los límites de sus posibilidades de cálculo mental opta por el cambio de estrategia sugerido y adopta como recurso de resolución al algoritmo ampliado, siendo tardía esta adopción dada su resistencia inicial por su confianza en su cálculo mental como medio de control y de obtención de los resultados.

En la suma con un mayor número de sumandos con diversa cantidad de cifras (bidígitos y tridígitos), inicialmente tiene dificultades para encolumnar las cifras, obsérvese los siguientes algoritmos por ejemplo de la 10ª y 9ª sesión, respectivamente:

Se le dicta: treinta y nueve, más setecientos treinta y tres, más cuatrocientas noventa y cinco. Para la segunda suma: ochenta y siete, más cuatrocientos setenta y seis, más quinientos ochenta y ocho. Su anotación es:



Aparentemente usaba como estrategia la escritura mecánica de sumandos a partir del inicio del sumando previo o incluso emplea alteraciones en la producción (añade cifras a un número para equiparar la cantidad de cifras) como compensación de la diferencia en la cantidad de cifras, así cuando se le dicta seiscientos quince más ochenta y ocho en vez de 88 escribe 888 (10ªS.5). Es probable que en el intercambio con su nieta en el acompañamiento de su escolaridad, no haya tenido oportunidades de enfrentarse situaciones de este tipo, o sea el dictado de cantidades para operar sobre ellas.

Pero puede rectificar haciendo uso de sus posibilidades de estimación del resultado (9ªS.3) (por ejemplo en la segunda suma citada estima que el resultado será "Mil y feria", entonces el resultado obtenido de 1 864 le parece excesivo); o recurre a la sugerida identificación de los agrupamientos (10ªS.3), así en la justificación de la primera suma (39+733+495) citada se evidencia que por la ubicación de los sumandos está juntando las "9 de a peso" con las monedas de $10:

"C- Aquí (señala las unidades) son pesos, tenía ocho, no cambié.
E- Son de peso, ocho. ¿Y treinta y nueve? ¿Estas (señala el 9 del 39) cuáles son?
C- Monedas de a diez.
E- ¿Monedas de a diez en treinta y nueve?
C- Treinta y … uhm … de a peso.
E- ¿Y por qué no estás juntado estas (vuelve a señalar el 9 del 39) con las de a peso?
C- (observa en silencio) Ay! Cierto.
E- Tú las has puesto, las has juntado con las de a diez.
C- Ay! Sí." (10ªS.4)

Inicialmente no recurre al algoritmo ampliado como apoyo de la operatoria que la lleva a cometer errores, fundamentalmente –como ya se mencionara– de la resta cuando realiza desagrupamientos sucesivos (8ªS.5). Posteriormente, al vincular al algoritmo ampliado con la eficacia en la resolución, va introduciéndolo primero en la parte del proceso que le resulta más conflictiva (es decir el grupo afectado por varios desagrupamientos, 8ªS.8) y luego, ante la insistencia de la entrevistadora de vincularlo con la posibilidad de exactitud, lo incorpora en la suma y en la resta. Pero en la *resta* en un principio lo usa como recurso de explicitación (lo cual fue analizado en la semblanza inicial) más que como apoyo para los cambios sucesivos, pues habitualmente registra lo restante en un agrupamiento cuando va a operar sobre él, lo cual limita su eficacia cuando sobre un agrupamiento se realizan varios cambios sucesivos pues debe memorizar lo restante. La toma de conciencia de que no puede controlar este cálculo mental le permite empezar a reconocer la función del algoritmo ampliado. Finalmente lo usa en la resta citada anteriormente (2 002–733) como apoyo en el transcurso de la resolución (reemplazando la memorización) y no como mera explicitación (10ªS.18).

En síntesis, puede señalarse que Carmen comienza a perder confianza sobre su cálculo mental, en tanto éste no le permite encontrar el resultado exacto, cuando se la enfrenta a la resta con tridígitos complicados (con ceros en el minuendo) y tiene que razonar sobre lo simbólico, pero dispone del referente y de la estimación para darse cuenta que el resultado que encontró es incorrecto, teniendo la posibilidad de rectificar. Asimismo esta dificultad de dominio de lo simbólico sigue evidenciándose cuando se amplía el rango de trabajo a cuatridígitos, manifestando inicialmente problemas para argumentar el resultado obtenido en las sumas y en la resolución exitosa de las restas por su resistencia inicial al uso del algoritmo ampliado como apoyo de la operatoria, que termina por reconocer como útil en el manejo (y argumentación) del proceso simbólico.

Por último Sofía también logra reflexionar en torno a la eficacia de la aplicación de un sentido de derecha a izquierda o de izquierda a derecha, inicialmente esta inquietud fue instalada por la evidencia del error que le ocasiona operar en sentido de izquierda a derecha:

"E- Volviste a borrar, ¿no?
S- Sí, porque tuve que cambiar.
E- Ahá. Hay una forma de evitar que uno borre.
S- ¿Cómo?
E- Ah! Ya lo vamos a ver.
S- (se ríe)." (5ªS.9)

Posteriormente, luego de agotar todas las alternativas, se identifica al sentido de derecha a izquierda como el más eficaz (6ªS.9 / 7ªS.10). Asimismo puede interpretar la operación en juego (suma o resta) según el signo.

Se comienza a cuestionar su algoritmo, mediante la contrastación de los diversos procedimientos de resolución utilizados (algoritmo personal y tabla) (7ªS.5), pero sin que Sofía pueda identificar el origen de la dificultad, no pudiendo anticipar y corregir el funcionamiento de su algoritmo personal lo que conlleva la necesidad de una revisión de sus algoritmos acompañada por la entrevistadora (8ªS.7). La persistencia en el error y la imposibilidad de su corrección anticipada también se vincula con la resistencia al uso espontáneo de la tabla como recurso aludido para la resolución, aunque sí opera como recurso de validación y de detección del origen de la dificultad de su algoritmo personal (suma 8ªS.8 / resta 8ªS.10). Esta resistencia estaría vinculada a su rasgo de centración en lo simbólico.

Particularmente en la resta se puso de manifiesto también otra dificultad, la de operar cuando el minuendo es un número redondo (7ªS.9), por ejemplo cuando intenta restar 500–278, ante la presencia de ceros en el minuendo invierte la operación procurando quitarle al sustraendo el minuendo: "Dos. Ocho menos cero, cero" (7ªS.9). Cuando se le indica este error no sabe cómo proceder para quitarle 8 al cero, entonces propone:

"E- Ahá. ¿Y puedes quitarle al cero ocho, qué haces?
S- Cero, ¿no?
E- Uhm … ¿te acuerdas?
S- Se baja el ocho, ¿no? No." (7ªS.9)

Además contribuyó a dificultar la resolución la escasa memorización de algunos resultados. Por ello se propone (como se hizo con Olga) una rutina de memorización de resultados de sumas y de restas con dígitos, mediante la cual se logró instalar la necesidad de la memorización (8ªS.1), que lleva incluso a copiar resultados dados para su estudio en tarjetas (10ªS.1). Esta responsabilidad sobre el resultado es consistente con el hecho de que incluso sus resultados erróneos son aproximados (8ªS.1). No obstante su desempeño exitoso, vuelve a presentar inseguridad respecto al mismo, lo cual constituye una constante de su vínculo con sus aprendizajes (9ªS.1). En la última sesión se introduce como recurso para la resolución de la rutina de memorización a la recuperación de resultados ya conocidos comparando los sumandos (10ªS.1).

Otra dificultad estuvo vinculada a un uso confuso del algoritmo ampliado, como son la escritura en la suma de los reagrupamientos realizados en forma no encolumnada, y la omisión en la resta de la escritura de lo restante en los grupos afectados por los desagrupamientos, como puede verse en los siguientes registros (8ªS.7):

Su anotación es:

$$\begin{array}{r} \scriptstyle /\;\;/\;\;\; \\ 325 \\ +\;589 \\ \hline 1004 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 7'5'1 \\ -\;473 \\ \hline 388 \end{array}$$

Por ello se propició una corrección del algoritmo ampliado, lográndose primero iniciar algunas reflexiones en torno a la importancia de encolumnar en la suma como estrategia para esclarecer el orden en el que opera el reagrupamiento (9ªS.1) y en la resta se validó el registro de los desagrupamientos y se alertó sobre la necesidad de anotar lo restante en aquel grupo que haya sido afectado por esta acción (9ªS.2):

"E- ¿Está? Entonces, es importante que lo que tú has descubierto que es muy bueno, que es esto de escribir al costadito, para ayudarte, que te sirva realmente. Entonces cuando sumas lo que te llevas lo pones bien en la columna donde te lo vas a llevar.
S- De la columna ahí arriba." (9ªS.3)

Es decir, que en general se inició una reflexión sobre el algoritmo ampliado como recurso para apoyar el cálculo, al permitir la escritura de las acciones de reagrupar y desagrupar, explicitando los agrupamientos a los cuales afectan estas acciones. En síntesis, se logró introducir al algoritmo ampliado como una estrategia válida que además permitía desde la intervención rectificar el algoritmo personal de Sofía. Esto se logró poniendo en evidencia que algunos de los errores en el algoritmo ampliado ya utilizado por Sofía eran uno de los causantes del fracaso en el cálculo (9ªS.3).

En cuanto al algoritmo de la suma, se lograron introducir modificaciones – al comienzo sólo parciales– al algoritmo ampliado para otorgarle mayor precisión al sentido de los reagrupamientos (9ªS.4). Al principio, si bien rectifica el encolumnar persiste con el procedimiento de reagrupar todo en las centenas, como puede observarse en el siguiente algoritmo pues en las centenas 4+3+2 le da como resultado 9:

Su anotación es:

$$\begin{array}{r} \scriptstyle /\;\;/\;\;\; \\ 476 \\ +388 \\ \hline 964 \end{array}$$

Además tiene dificultades para operar aludiendo al contexto del dinero de modo autónomo (9ªS.5 / 9ªS.6). Luego comienza a tomar conciencia del carácter orientador del algoritmo ampliado para la operatoria de la suma, teniendo dificultades para argumentarlo porque no había operado con respaldo en la lógica subyacente al algoritmo sino rectificando su creencia previa de "a dónde llevar" (9ªS.7), es decir que persiste en la argumentación desde el manejo de lo simbólico, "Porque lo tenía que poner ahí", sin acudir al referente sugerido, el del dinero:

"E- Ahora, explícame una cosa Sofía. Por qué te llevas uno ahí (señala el 1 escrito arriba de las decenas), por qué te llevas uno ahí (señala el 1 escrito arriba de las centenas). Qué quiere decir eso de que te llevas uno. No te estoy diciendo que esté mal. Quiero que me expliques qué es lo que quiere decir.
S- Porque aquí (señala las unidades) era … uhm … nueve más dos, diez, once.
E- Once.
S- Y no lo puedo poner aquí (señala las unidades en el resultado), lo puse acá (señala el 1 escrito sobre las decenas).
E- Por qué lo pusiste ahí, a ver.
S- Porque lo tenía que poner ahí." (10ªS.3)

Su anotación es:

$$\begin{array}{r} 1\;1\;\; \\ 622 \text{ R=} \\ +299\;\;\;\; \\ \hline 921\;\;\;\; \end{array}$$

Posteriormente, al visualizar la dificultad para justificar los reagrupamientos empieza a reconocer que la sugerencia de utilizar el referente del dinero le posibilita controlar lo simbólico. Así en la argumentación del reagrupamiento de decenas a unidades realizado en la cuenta anterior recurre al dinero: "Porque aquí (señala el 1 escrito sobre las decenas) lo cambié por de a diez. No le puedo poner el número completo así que …" (10ªS.3).

En cuanto al algoritmo de la resta, Sofía inicialmente no pudo resolverlo de modo autónomo, y nuevamente presenta dudas respecto a, en este caso, los desagrupamientos, pues no sabe cuál es el grupo que se ve afectado por este proceso. Por ejemplo en la 9ª sesión en la resolución de la resta 925–196, al procurar restar las unidades manifiesta:

"E- Bueno. Cuántas monedas de a peso tienes.
S- Cinco.
E- Y tienes que quitarle cuántas.
S- Seis.
E- ¿Puedes?
S- No.
E- ¿Qué vas a hacer?
S- Convertirlo en quince, ¿no?
E- Convertirlo en quince. Y cómo es que conviertes en quince. De dónde sacas esos diez restantes.
S- Sí porque no puedo …
E- No puedes, está bien, tienes razón. Pero cómo le haces para tener quince.
S- O también puedo poner ¿cero? No, ¿verdad?" (9ªS.9)

Posteriormente en la misma sesión, cuando realiza una resta de modo autónomo replica su algoritmo personal sin considerar, una vez más, las recomendaciones en torno al algoritmo ampliado (9ªS.13). En este rechazo a la adopción del algoritmo ampliado pareciera subyacer una tensión entre este algoritmo y el personal.

No obstante, mediante su resolución posterior con material (dinero) se logra constatar la ineficacia de su registro ampliado que omite los cambios sobre el grupo afectado por los desagrupamientos. Así, obsérvese en el uso del algoritmo ampliado que realiza para resolver 800–137, si bien escribe los desagrupamientos (los 10 escritos en decenas y unidades), no registra el origen de estos cambios no anotando en las centenas que quedan 7 en vez de 8, ni en las decenas que quedan 9 en vez de 10 (9ªS.13):

Su anotación es:

$$\begin{array}{r} 8\,{}^{1}0\,{}^{1}0 \\ -\,1\;3\;7 \\ \hline 7\;7\;3 \end{array}$$

Luego, como se dijera, cuando resuelve con material (dinero) se logra evidenciar la ineficacia de su registro ampliado que omite lo restante en cada agrupamiento afectado por desagrupamientos, así por ejemplo en la revisión de la resta previa cuando observa que ante la ausencia de monedas de $1 (unidades) debe cambiar un billete de $100 se le cuestiona que no ha registrado este cambio:

"E- (…)¿Y anotaste ahí que en vez de ocho te quedó un billete menos?
S- (observa en silencio).
E- Cada vez que haces un cambio lo tienes que anotar.
S- Ay! Sí. Cierto.
E- Cuántos billetes te quedan ahora.
S- Entonces eran siete … (tacha y escribe 7 arriba de las centenas)." (9ªS.13)

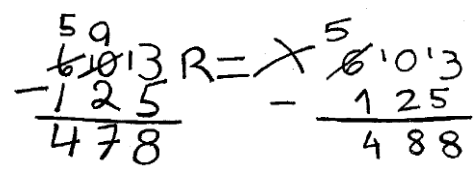
Su anotación es:

$$\begin{array}{r} \overset{7}{\cancel{8}}\,{}^{1}0\,{}^{1}0 \\ -\,1\;3\;7 \\ \hline 7\;7\;3 \end{array}$$

A partir de estas evidencias corrige su algoritmo ampliado y posteriormente logra rectificar su resultado. Pero en la ejecución en la siguiente sesión opera inicialmente sin estas correcciones en el algoritmo ampliado no pudiendo resolver con autonomía pues no utiliza el referente sugerido para el control de lo simbólico. Por ello cuando realiza la resta 502–314, obtiene como resultado inicial 202, luego 200, y 290. En esta última resolución ya registra los desagrupamientos pero sigue sin anotar ni considerar lo restante en los grupos afectados por este proceso (10ªS.5). Posteriormente se logra rectificar sus algoritmos utilizando como referente al dinero y realizando la resolución en forma conjunta con la entrevistadora, la cual le va sugiriendo además que vaya anotando los cambios realizados (10ªS.6). Paulatinamente va teniendo mayor autonomía en la resolución, pero teniendo dificultad fundamentalmente en el registro del desagrupamiento de decenas a unidades (10ªS.7). Esta dificultad es reconocida por Sofía en la confrontación de una misma cuenta resuelta autónomamente y luego con acompañamiento de la entrevistadora:

"S- Es que me faltó este (señala el 9 escrito sobre las decenas).
E- Exactamente, te faltó …
S- Anotar aquí (vuelve a señalar el 9).
E- Exacto. Tú hiciste la primera vez así (señala la última cuenta escrita). Tú dijiste que te faltó este de aquí (señala el 9). Te olvidaste que para tener trece cambiaste una moneda de a diez. Entonces en vez de diez te quedaron … nueve.
S- Nueve.
E- Entonces tú lo que hiciste aquí (señala en la última cuenta las decenas) fue restar diez menos dos, era nueve menos dos.
S- (se ríe) Era menos." (10ªS.7)

Su anotación es:



Finalmente, logra resolver una resta de modo autónomo así como argumentar el resultado obtenido (10ªS.8).

Resumiendo, puede decirse que Sofía va aproximándose paulatinamente al uso de un algoritmo convencional procurando controlarlo y realizarlo meramente en el plano simbólico. Por ello, primero rectifica la ubicación de las anotaciones marginales en la suma, colocándolas sobre el grupo que van operar pero persiste en su procedimiento de reagrupar todo en las centenas. Luego rectifica también este procedimiento recuperando el indicio del ordenamiento gráfico ya incorporado (la escritura por columnas también de las anotaciones superiores) como apoyo de la resolución, es decir sumando todo lo que está en una misma columna (sumandos y "lo que se lleva"). Y recién al final, puede acompañar este procedimiento algorítmico correcto de una argumentación aludiendo al referente.

En cuanto a la resta, primero incorpora el registro de los desagrupamientos pero sin saber su origen, entonces persiste en su algoritmo personal de desagrupar todo de las centenas. Después de constatar la ineficacia de su algoritmo ampliado que omite lo restante en los grupos afectados por los desagrupamientos, logra rectificar esta omisión en las centenas haciendo uso del referente sugerido, pero no lo realiza en las decenas.

Luego de reconocer esta dificultad, puede finalmente operar autónomamente pero sustentándose ahora en el uso del referente para controlar el procedimiento algorítmico y el registro.

Representación simbólica de un problema

La representación simbólica de un problema es entendida como la posibilidad de interpretar las relaciones existentes entre los datos involucrados. Es decir, como el esbozo de una representación mental sobre el modo de operar con los datos del problema. Este último señalamiento permite considerar como válidas aquellas representaciones que no acudan a la escritura de operaciones como mecanismos de resolución o que empleen como mecanismos operaciones no previstas en la resolución convencional, o incluso que no arriben al resultado correcto. O sea que el grado de convencionalidad y la eficacia del procedimiento de resolución no es el elemento distintivo de esta posibilidad, sino que sólo caracterizan el tipo de mecanismo empleado para la obtención de una respuesta en las estructuras interpretadas con éxito.

Por ello, la presentación de los datos recuperará dos criterios combinados: el grado de consenso en las posibilidades de identificación – por parte de las entrevistadas- de cada categoría o estructura aditiva y el grado de convencionalidad de las soluciones, con un criterio de desempeño individual al interior de cada estructura. Cabe señalar que los problemas aditivos planteados en la 2ª entrevista y su ordenamiento en función de su complejidad de resolución fueron diseñados recuperando las categorías aditivas propuestas por Vergnaud (1991), que serán explicadas a medida que se vayan planteando las respuestas de las entrevistadas.

En función del primer criterio las estructuras serán presentadas en el siguiente orden: 1ª categoría, 2ª categoría, 5ª categoría, 4ª categoría, 6ª categoría y 3ª categoría. Esto obedece a que tanto la 1ª como la 2ª categorías pudieron ser identificadas con éxito por todas las entrevistadas con el mismo grado de complejidad de la incógnita planteada, pero en la 1ª categoría existe un mayor número de resoluciones convencionales (2) que en la 2ª (sólo 1). A su vez, tanto la 5ª como la 4ª pudieron ser interpretadas también por todas las entrevistadas pero en la 5ª sólo dos de las entrevistadas coinciden en el grado de complejidad de la incógnita resuelta y en la 4ª, en cambio, no hay recurrencias en el tipo de incógnita interpretada. La 6ª categoría sólo pudo ser identificada por dos de las entrevistadas, y en la 3ª ninguna tuvo éxito.

Al interior de cada categoría el análisis será presentado rescatando la siguiente jerarquía del desempeño individual de cada entrevistada: Carmen, Olga y Sofía. Este orden recupera como sustento las posibilidades de control, de eficacia y de eficiencia[36] en la obtención del resultado de cada entrevistada. Así Carmen posee mayores posibilidades de control de su resultado dada su aplicación correcta del algoritmo de la suma y su recurso al cálculo mental combinado con la escritura de datos que apoyan la resolución. En cambio Olga, si bien puede identificar la misma cantidad de estructuras que Carmen, no dispone de instrumentos de registro de los datos de los problemas lo cual le resta eficiencia a sus resoluciones, pues debe rectificar a medida que se van evidenciando sus errores en la memorización de los datos involucrados. Finalmente Sofía, dada su sobrevaloración del cálculo escrito, la estimación y el cálculo mental aparecen sólo como un primer intento de resolución, no válido para ella en el ámbito escolar, por lo cual aplica su algoritmo personal erróneo como modo de resolución, no pudiendo obtener la solución pertinente. Además, a diferencia de Carmen y de Olga, no pudo identificar la 6ª categoría.

1ª categoría: Composición de dos medidas. Esta categoría consiste, como su nombre lo indica, en que se componen dos medidas (que serán llamadas elementales) para generar otra medida (denominada medida compuesta). La complejidad de la incógnita buscada puede variar, pues puede ser la búsqueda de una de las medidas elementales o de la medida compuesta. El primer caso es de mayor dificultad y demanda para su resolución convencional de una sustracción, ninguna de las entrevistadas pudo resolver este tipo de incógnita, por ejemplo proponían la identificación de la incógnita con la medida elemental ya proporcionada, o sumar ambos datos, o recuperar conocimientos previos del costo del servicio (el problema aludía a costos de llamadas de teléfono).
En cambio, todas pudieron identificar la situación en que se proporcionaban las dos medidas elementales y se pedía encontrar la medida compuesta. Puede citarse como ejemplo el problema planteado en la entrevista: “Recibes la boleta del teléfono. Pagas $156 de renta y $226 de servicio medido, ¿cuánto pagaste en total?” [156+226=382]

[36] Recuérdese que son definidas como: “eficiencia, es decir, números de tanteos necesarios para lograr resultados correctos; (…) eficacia, entendida como la capacidad de obtener resultados correctos;” (Ávila, 1990, p.60)

Carmen resuelve con éxito este problema registrando los datos encolumnados como para operar sobre ellos, y recurriendo posteriormente al uso de la estrategia convencional correcta, es decir el algoritmo de la suma.

Olga[37] hace uso de diversas estrategias no convencionales (algoritmo mental) hasta llegar al resultado correcto. La dificultad estaba en que si bien operaba correctamente, cometía errores propiciados por la ausencia de registro de los datos involucrados. Así en su resolución inicial agrega 200 a 156, en vez de 226. Luego de la reiteración de que el sumando es 226 no 200, rectifica su resultado incorporando solamente la cifra que alcanza a retener (el 6):

"O- Son … trescientos … sesenta y dos (…)
O- Conté primero los … junté los seis (se refiere al 6 del 156 y el 6 del 226) que son doce.
E- Sí …
O- Y luego los ciento cincuenta y los doscientos."

(2ª E.2)

Reconstrucción del cálculo mental:
Resolución convencional: 156+226

descompone los sumandos, el 156 (150+6) y el 226 (200+6, no retiene el 20)

6 y 6 **= 12** (6+6=12)[38]
150+200=(350)

$$\left(\begin{array}{r} 12 \\ +\ \underline{350} \\ 362 \end{array}\right)$$

Finalmente, frente al nuevo señalamiento de su confusión en el sumando (opera con 206 en vez de 226) corrige y obtiene el resultado correcto.

Sofía emplea inicialmente una estrategia no convencional aproximándose al resultado, pues estima sumando mentalmente las centenas (de 156 y 226) le da 300. Pero una vez identificada la operación (suma) pregunta si los puede sumar con una cuenta por escrito y aplica una estrategia convencional, pero como hace uso de su algoritmo personal erróneo ya descrito no llega al resultado correcto, su resultado es 472 en vez de 382.

2ª categoría: una transformación opera sobre una medida para dar lugar a una medida. En esta categoría la relación ternaria se establece ahora entre medidas y transformaciones. La complejidad de la situación también puede variar, en función del signo de la transformación (positiva o negativa) y de la incógnita (medida inicial,

---

[37] En Olga, dada la complejidad de su cálculo mental, se combinarán diversas estrategias de simbolización como la escritura de operaciones implícitas en la resolución, del modo presentado en esta categoría, y el uso de diagramas.

[38] Se indican entre paréntesis las operaciones o resultados implícitos. Lo que está escrito destacado es lo que dice la entrevistada, "expresado" simbólicamente.

transformación o medida final). Todas las entrevistadas pudieron resolver la situación de mayor dificultad, la búsqueda del estado inicial cuando la transformación es negativa, es decir el siguiente problema: “Pagaste la boleta del teléfono por $ 282 y te dieron de vuelto $118, ¿con cuánto dinero pagaste?” [282+118 =400]

No obstante, las estrategias utilizadas varían, Carmen y Olga usan estrategias no convencionales y Sofía inicialmente también, pero recurre a su algoritmo personal, porque para ella este recurso es el que “debe de ser utilizado”. A su vez, como se verá, Carmen y Olga hacen uso de procedimientos de cálculo mental diversos.

Carmen en primer lugar estima incorrectamente aunque la operación que subyace es correcta, posteriormente rectifica su cálculo, luego tiene dificultades para convalidar su resultado con la identificación de la operación, pues cuando opera sobre los datos escritos realiza una resta en vez de una suma:

“E- (…) y la pregunta es con cuánto dinero pagaste.
C- ¿Con uno de quinientos (es incorrecto el cálculo pero no la operación)?
E- A ver, cómo hiciste.
C- Son qué, doscientos ochenta y dos. Y me regresaron …
E- Ciento dieciocho (aclara).
C- Entonces le di cuatrocientos pesos (corrige su resultado anterior de 500, ahora es correcto).
E- Cómo hiciste, a ver.
C- A ver (se ríe). ¿Ciento qué?
E- Ciento dieciocho (completa).
C- Uhm … Son doce (va restando 282–118 en su escritura previa. Escribe como resultado a 12–8=4).
E- Doce menos ocho, cuatro (reitera).

C- Seis (se refiere al resultado que obtiene en las decenas luego del desagrupamiento previo; al 7 le quita 1. Escribe 6).
E- Ahá.

C- Dos, tres (calcula sumando el 2 y el 1, se confunde de operación, nunca registra el signo de la operación que realiza. Escribe 3 quedando como resultado final 364).

E- Ah, pero aquí estabas restando (marcando el resto de los números, es decir el 8 y el 2 del 282) y ahí dos menos uno te dio tres.
C- Ay, no, está mal.
E- Pero recién me dijiste cuatrocientos, creí que …
C- (se ríe). Sí, entonces así, dos menos uno, uno … (comienza a corregir su error en la resta, borra y pone como resultado en vez de 364, 164).
E- Pero me dijiste que habías pagado con cuatrocientos.
C- (silencio).” (2ª E.3-4)

Resolución convencional:

282+118=400

Su anotación es:

$$\begin{array}{r} 282 \\ 118 \\ \hline 4 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 282 \\ 118 \\ \hline 64 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 282 \\ 118 \\ \hline 364 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 282 \\ 118 \\ \hline 164 \end{array}$$

Posteriormente recurre a la aproximación sumando únicamente las centenas, y finalmente arriba al resultado correcto resolviendo mentalmente con apoyo en los sumandos escritos y operando con los tridígitos en el sentido del algoritmo, es decir de derecha a izquierda.

Olga primero estima un valor que corresponda al de un billete vigente ($500), y ante el pedido de explicitación del procedimiento de resolución da tres argumentaciones diversas y no muy claras. Finalmente descompone los sumandos y opera agrupando los sumandos descompuestos para llegar a números redondos (los cienes):

"O- (…) Son trescientos (suma 18 –del 118– a 282, aproximándose al resultado). Son cuatrocientos, no son quinientos (rectifica cuando se da cuenta que al sumar a 300 los 100 que faltaban del 118 llega a 400, y su solución ahora es correcta)." (2ª E.4)

Reconstrucción del cálculo mental:
Resolución convencional: 282+118

(282+18) **= 300**
(300+100) **= 400**

Sofía usa nuevamente una estimación inicial correcta, operando con uno de los sumandos redondeados (el 282 a 300), pero otra vez manifiesta inseguridad sobre el cálculo mental por lo cual usa como medio de resolución la estrategia convencional, o sea el algoritmo escrito personal incorrecto, su resultado es 490 en vez de 400.

5ª categoría: una transformación opera sobre un estado relativo (una relación) para dar lugar a un estado relativo. La relación presente en esta categoría involucra la dificultad de que las cantidades en juego no corresponden ya a medidas sino a estados relativos, es decir que indican una relación. El nivel de complejidad de la situación se ve afectado por el signo de la transformación (positiva o negativa) y por la incógnita planteada (estado inicial, transformación o estado final). Aquí, como se anticipara, si bien las tres entrevistadas pudieron trabajar con transformaciones negativas no coincidieron todas en la incógnita resuelta, Carmen y Olga pudieron resolver la búsqueda del estado inicial, o sea que se enfrentaron con éxito al siguiente problema: "Estás cancelando de a poco una deuda. Este mes pagaste $152 y debes aún $279, ¿qué deuda tenías antes del pago de este mes?" [152+279=431]

En cambio Sofía, pudo identificar la relación presente cuando la incógnita era la búsqueda de la transformación, donde el problema presentado fue: "Estás cancelando de a poco una deuda de $433. Este mes pagaste algo de dinero y debes aún $320, ¿cuánto pagaste este mes?" [433–320=113]

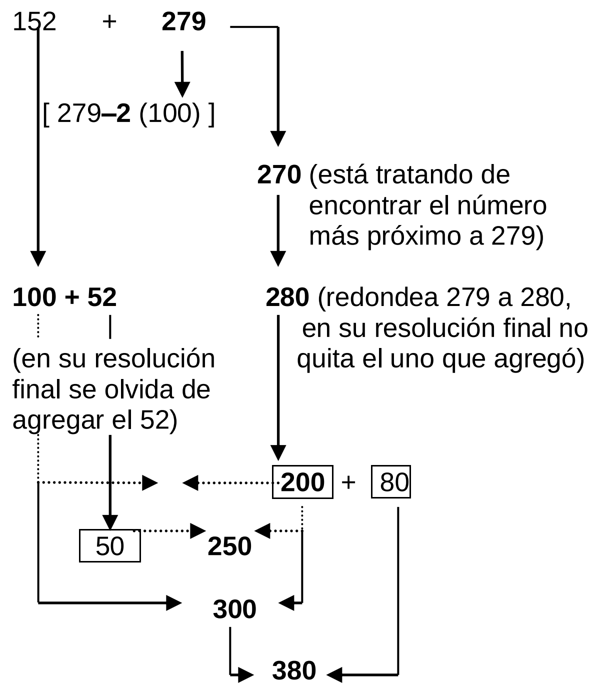
Carmen emplea una estrategia no convencional correcta que consiste en la descomposición de ambos sumandos, el primer sumando (152) lo descompone en 150 y 2 y hace una interesante descomposición del segundo sumando (279) en 250 y 29 que puede interpretarse como una anticipación que le permita la obtención de un número redondo; por lo que opera en sentido de izquierda a derecha, o sea desde las centenas a las unidades. Así primero suma 150+250, obteniendo 400 como resultado, y luego le agrega 31 resultantes de sumar 2+29.

Olga[39] resuelve la misma incógnita pero sin éxito, pues redondea y descompone el sumando mayor pero olvida los sumandos parciales:

"O- Doscientos setenta y nueve le quito los dos (se refiere a los 200), doscientos setenta (está tratando de encontrar el número más próximo al 279), doscientos ochenta (redondea 279 a 280) … y doy de abono ciento (piensa en el 100 del 152) …
E- Ciento cincuenta y dos.
O- Cincuenta y dos (no considera el 100 del 152 y los 52 los redondea a 50) son … doscientos (piensa en el 200 del 280 que ya había obtenido) … ciento (retoma el 100 del 152) … doscientos cincuenta (suma 200 del 280 con los 50 del 52), trescientos (suma ahora el 200 del 280 pero con el 100 del 152), trescientos. ¿Debía trescientos ochenta (recupera el 80 del 280 provenientes del 279, que suma a los 300 recién obtenidos)?"

(2ª E.15)

Reconstrucción del cálculo mental:
Resolución convencional: 152+279



Motivos de **fracaso**: olvida agregar 52 y quitar el uno que agregó en el redondeo de 279 a 280 (380+52–1=431)

[39] En esta categoría se empleará una reconstrucción diferente del cálculo mental mediante un diagrama, en el cual se representan con líneas punteadas aquellos intentos no recuperados en la resolución.
Cabe advertir que en los registros de Olga hay un uso diverso de la oralidad, como apoyo de la resolución, (es decir la operación sobre cantidades) y como recurso para suplir la ausencia de registro. Este último sentido podrá advertirse en el uso de reiteraciones para retener los datos, o incluso en la expresión del análisis que va realizando de las cantidades, como puede ser el número redondo del que está más próximo, o la descomposición de los números.

Sofía emplea por primera y única vez una estrategia no convencional sin recurrir a la verificación mediante una cuenta escrita. Resuelve (433–320) buscando el complemento aditivo de 320 al 433, y para ello redondea al minuendo, trata al 433 como si fuera 400 pero no compensa este redondeo. Probablemente recupere un resultado conocido, es decir la distancia entre 320 y 400 que es de 80, sin realizar las adecuaciones pertinentes.

4ª categoría: composición de dos transformaciones. En esta categoría la dificultad de la situación varía según si las transformaciones son positivas o son opuestas, y si la incógnita es una de las transformaciones elementales o la búsqueda de la transformación compuesta.

Carmen resuelve la situación de mayor complejidad, es decir la búsqueda de una transformación elemental cuando las transformaciones son opuestas. El problema que se le presentó fue: "Pagas en el super la compra y la cajera no tiene para darte tu vuelto de $65. Entonces la cajera te pide algo de cambio. Se lo das. Si te dan $110 de vuelto, ¿cuánto te pidió de cambio la cajera?" [110–65=45]

Hace uso de una estrategia no convencional, busca el complemento aditivo por aproximaciones sucesivas calculando en sentido de menor a mayor, controlando mentalmente lo que va sumando:

"C- (silencio) Eh … ¿Cuarenta y cinco (es correcto)?
E- A ver, ¿cómo hiciste?
C- Sumé.
E- Sí, yo escuchaba que en voz bajita decías sesenta y cinco.
C- Setenta, ochenta, noventa, cien, ciento diez. ¿Sí?"

(2ª E.9)

Reconstrucción del algoritmo mental:
Resolución convencional: 110–65

(sólo escribe uno de los datos: 65)
45
argumentación:

65 (+5) = **70**	5
(70+10) = **80**	+10
(80+10) = **90**	+10
(90+10) = **100**	+10
(100+10) = **110**	+10
	45

Olga, en cambio, pudo resolver la misma incógnita -la búsqueda de una transformación elemental-, pero cuando las transformaciones son positivas, es decir una situación menos compleja. Puntualmente el problema que puede interpretar es el siguiente: "Si no faltas tu patrón te prometió un premio de $155 por mes. Pero además este mes, como vinieron visitas, también te pagaron algo extra. Si lo que cobrarás extra este mes en total es $323, ¿cuánto te pagaron extra por la limpieza cuando hubo visitas?” [323–155=68]

La estrategia de solución empleada es no convencional pero incorrecta. Su procedimiento algorítmico es descomponer el minuendo (323) para cancelar el sustraendo (155) de uno de los sumandos en que fue descompuesta dicha cantidad. Así descompone al 323 en 200 y 123, pero cancela sólo el 123 como si fuera igual al 155, quedándole 200 en vez del resultado correcto 168.

Sofía reitera su forma de proceder, primero mediante una estrategia no convencional con posterior resolución mediante el algoritmo escrito incorrecto. La situación que puede interpretar es una que involucra transformaciones positivas y donde la incógnita es la búsqueda de la transformación compuesta, es decir de menor complejidad que las situaciones identificadas por Carmen y Olga. El problema específico que procuró resolver fue: “Si no faltas tu patrón te prometió un premio de $155 por mes. Pero además este mes, como vinieron visitas, también te pagaron $158 extras, ¿cuánto cobrarás extra este mes?” [155+158=313]

La resolución inicial mediante cálculo mental consistía en descomponer ambos sumandos y operar sumando primero los sumandos mayores y al final los menores:

“S- Dos … (comienza a sumar por las centenas).
E- Son dos … (doscientos).
S- Trescientos (aquí suma los 200 ya obtenidos más los 100 provenientes de los 50 del 155 y del 158) … ¿ocho (agrega sólo los 8 del 158)? No.”

(2ª E.32)

Reconstrucción del cálculo mental:
Resolución convencional: 158+155

[1 (100)+ 1 (100)]= **2** (100)
(50+50 = 100)
(200+100) = 300
(300+8)= **308**

Motivos de **fracaso**: olvida uno de los números en que fue descompuesto uno de los sumandos (el 5 del 155)

Luego, dada su desconfianza en el cálculo mental, aplica su algoritmo personal erróneo arribando nuevamente a un resultado incorrecto 403.

6ª categoría: composición de dos estados relativos. Esta estructura sólo pudo ser interpretada por Carmen y Olga, e incluso ambas resolvieron la situación más difícil, la búsqueda de uno de los estados relativos, o sea el siguiente problema: “En el super haces una compra por $303. Como no te alcanza decides dejar las cajas de leche y pagas por tu compra $258, ¿cuánto costaban las cajas de leche?” [303–258=45]

Carmen obtiene un resultado incorrecto (pero aproximado) utilizando un algoritmo mental en el que descompone el minuendo (303) en 200 y 103 y el sustraendo (258) en 200 y 58 de modo de poder cancelar las cantidades iguales (200) para proceder por complemento aditivo con cantidades menores (o sea entre 103 y 58). Una vez que ha logrado reducir las cantidades sobre las que tiene que operar, busca el complemento aditivo por aproximaciones sucesivas. Empieza por redondear 58 a 60, suma 40 a 60 para llegar a 100, finalmente suma 3 al 40 para llegar al 103, pero olvida sumar los 2 que inicialmente le agregó al 58, obteniendo 43 en vez del resultado correcto 45:

(escribe los datos encolumnados uno debajo de otro)
Argumentación:
"C- Aquí (señala el 258) lo sumé, para sesenta, dos.
E- Ah, está!
C- Y … cuarenta más tres, cuarenta y tres."

(2ª E.8)

Reconstrucción del algoritmo mental:
Resolución convencional: 303–258

escribe 303
258

(58+2) = **60 2**
(60+40 =100)
40+3= 43

Motivos de **fracaso**: olvida un resultado parcial (el 2 que agregó inicialmente al 58) en la recuperación de los subtotales

Olga aplica nuevamente una estrategia no convencional, pero comete errores vinculados a su ausencia de registro de los datos y de la solución. Así busca el complemento aditivo por aproximaciones sucesivas entre 258 y 303, redondeando ambos datos 258 a 250, y 303 a 300 y buscando la diferencia entre 250 y 300 (que sabe son 50, aunque también sabe que este número no es el sumando exacto que debe agregar al 258 para obtener 300). Resuelve bien que a los 50 (300–250) le debe quitar 8 y llega a 42. Pero luego comete errores al compensar el redondeo del 303 al 300, pues recuerda 2 unidades en vez de 3, y al comunicar el resultado dice 54 (en vez de 44, resultado sobre el que sí opera luego de la corrección, por lo cual parece que dijo 54 aunque estaba pensando en el 44):

“O- Doscientos cincuenta y ocho son … trescientos y doscientos cincuenta … doscientos cincuenta … doscientos cincuenta … doscientos cincuenta y ocho … doscientos cincuenta, le quito los ocho … son … doscientos, trescientos, al cincuenta le quito ocho pesos son … cuarenta y dos, más dos que tenían que sobrarme … ¿Me sobraría cincuenta y cuatro pesos de los trescientos, de los trescientos dos pesos?”

(2ª E.18)

Reconstrucción del cálculo mental:
Resolución convencional: 303–258

258 + ☐ = **300** (250+50=300)
(250) (303) (redondea 258 a 250 y 303 a 300, sabe que la diferencias entre 300 y 250 son 50)

250
250
250 (trata de averiguar cómo juega el 8 en
258 el 50 que agregó para llegar a 300)

250 (258**–8)**

200 + ☐ = **300**
(250)

(compensa el redondeo de 258 a 250)

50–8=42

+2

(302–2) **54** (44)

(compensa el redondeo de 303 a 300 pero recuerda 302 en vez de 303)

Motivo del fracaso: compensa incorrectamente el redondeo de 303 a 300, pues recuerda 302 en vez de 303, se confunde al decir el resultado.

Pero, como se anticipara, cuando se le recuerda el minuendo (303), corrige su resultado inicial agregándole 1 a 42+2, y llegando así finalmente al resultado correcto 45.

Sofía, como se anticipara, no puede interpretar esta estructura aunque se le propusieron incógnitas de diversa complejidad (búsqueda de una de los estados relativos y luego del estado final). En la situación ya mencionada en que se demandaba que se encontrara uno de los estados relativos, primero identifica la incógnita con el estado relativo ya proporcionado, o sea con el monto inicial que debe pagar por su compra (303). Ante la corrección rectifica y propone al saldo final (208) como respuesta. Es decir, oscila e identifica alternativamente a la incógnita con algunos de los dos datos ya proporcionados.

Cuando se observa esta dificultad de interpretación se le propone una incógnita menos difícil, la búsqueda del estado final, siendo el problema el siguiente: “En el super haces una compra por $303. Como no te alcanza decides dejar las cajas de leche por $35, ¿cuánto pagaste entonces?” [303–35 =268].

Pero persisten sus dificultades, pues primero identifica a la incógnita con el estado relativo inicial (303) y luego de la corrección decide operar sobre los datos pero propone sumarlos en vez de restarlos.

3ª categoría: relación “tanto menos” o “tanto más” entre dos medidas. Ninguna de las entrevistadas pudo resolver ninguna de las dos relaciones mencionadas. Todas cometen los mismos errores, oscilan en identificar a la incógnita (la otra medida) con la medida elemental ya proporcionada o con la relación. Por ejemplo en el problema: “Si pagas $307 de luz y $219 menos de agua que de luz, ¿cuánto pagas de agua?” [307–219=88], las respuestas dadas fueron 307 ó 219.

En la relación “tanto más” se observaron también otras respuestas adicionales. Cuando Olga y Sofía toman conciencia de que deben operar sobre los datos para encontrar la incógnita proponen operaciones incorrectas (como la división) o correctas pero sin una buena interpretación de la situación. Incluso, ante la evidencia del error, Olga recupera conocimientos provenientes de la realidad: “pues me fui imaginando lo que gasté de luz yo.”

Olga, por ejemplo, decide operar con los datos del problema mencionado, y para ello selecciona la división, como evidencia de su conciencia de la necesidad de operar pero sin claridad respecto de la operación involucrada. Entonces toma el número 219 y lo divide entre dos:

“O- Doscientos diecinueve, uhm … son … (silencio). ¿Ciento cuatro pesos con cincuenta centavos (es incorrecta la operación. Pareciera que pretende dividir entre dos el 219, pero su resultado corresponde a dividir entre 2 el 209)?
E- ¿Ciento cuatro pesos con cincuenta centavos? A ver, cómo lo haces.
O- Estoy contando, como quien decir, los nueve en dos (no considera el 10 del 219).
E- Sí. Está. Ahora vamos a probar con otro.
O- Y parto los cinco y me sale, cuatro con cincuenta centavos (aproxima el 9 al 10). Porque si agarro cinco pues serían diez (explica los 4.50 recuperando el ajuste de 9 a 10).” (2ª E.5)

Luego se enfrenta al siguiente problema relativo a la relación “tanto más”: “En verano pagas $297 de luz y en invierno pagas $115 más que en verano, ¿cuánto pagas de luz en invierno?” [297+115=412]. Olga sugiere la operación correcta (suma) pero manifiesta confusiones en la interpretación de la situación, pues trata a la relación como si fuera en realidad la incógnita que busca (el costo de la luz en invierno): “Ciento quince pesos más. O sea en total sería … ciento … Lo que quiere es que resuma (sic) lo del invierno con lo del verano” (2ª E.7).

Pero frente a la dificultad y su reconocimiento por la propia entrevistada hace uso de otro recurso, recuperar información de su vida cotidiana:

“O- Pues … en … en invierno …
E- ¿Sí?
O- Se ocupa más la luz.
E- Sí.
O- Y en verano no.
E- Uhum (asiente).

O- Porque está más claro. En invierno lo ocupas tanto a veces porque hace frío, como que se siente más calorcito. Y en … y en verano no, porque sientes hasta calor, porque está claro.
E- Claro. Pero cómo te diste cuenta del número, de ciento veinte (es el resultado dado anteriormente por Olga, en el que parece redondear 115 a 120). Porque como tú me dijiste entonces queda así. Pagas doscientos noventa y siete en verano y pagas ciento veinte en invierno.
O- Ciento veinte en invierno.
E- Eso es lo que tú me dijiste.
O- No … (silencio) … en invierno es cuando se paga más (le desconcierta el dato 120 relacionado con el invierno, que es menor que 297 relacionado con el verano).
E- Claro.
O- Que en verano, porque en verano pagas menos (ahora le desconcierta el dato 297 relacionado con el verano "que debería" ser menor que el 120 relacionado con el invierno).
(…)
E- ¿Cuánto pagarías en invierno?
O- (silencio) Doscientos … ¿doscientos ochenta y siete pesos (decide, en apego a la realidad, que la cantidad mayor es la del invierno 297, aunque la recuerda como 287)?
E- A ver, doscientos ochenta y siete, cómo hiciste para calcularlo.
O- Pues me fui imaginando lo que gasté de luz yo (pagó más en invierno que en verano)."
(2ª E.8)

Sofía presenta también la dificultad de interpretar correctamente la operación en el último problema mencionado sobre la relación "tanto más". Manifiesta la misma confusión que Olga, pues también trata a la relación como si fuera la incógnita buscada (cuánto pagaste de luz en invierno) lo que se refleja en su nominación de los datos (lo de invierno y lo de verano):

"S- ¿No lo puedo sumar?
E- ¿Cuánto pagas de luz en invierno?
S- En invierno ciento quince (es incorrecto, pero es el dato que hace referencia al invierno).
E-¿En invierno ciento quince?
S- Sí, y en verano doscientos noventa y siete. Pago más en verano (se centra en una comparación entre las dos cantidades 297 –verano– y 115 –invierno–)." (2ª E.13-14)

Si se recuperan los éxitos y la operación involucrada se vislumbran algunas conclusiones generales que ameritan su explicitación. En primer lugar, puede observarse como constante la ausencia de identificación de la resta como operación pertinente para la resolución de varias de las estructuras presentadas, pues recurren generalmente a la búsqueda del complemento aditivo.

Este procedimiento es coincidente con lo planteado por Vergnaud respecto de la 4ª categoría (donde Carmen hace uso de este recurso): "Este procedimiento del 'complemento' surge naturalmente en el ejemplo 1[40], puesto que hay que buscar lo que hay que agregar a la transformación elemental T_1 para encontrar la compuesta T_3"

[40] El ejemplo 1 cumple con las siguientes condiciones: $|T_1| < |T_3|$ $T_2 > 0$. Donde T_1 es la transformación elemental 1, T_3 es la transformación compuesta y T_2 es la transformación elemental buscada.

(Vergnaud, 1991, p.183). Así como también ha sido reportado en diversas investigaciones (Avila, 1990; Ferreiro y Fuenlabrada, et al., 1987) como una constancia, entre otras, del uso de la suma como estrategia de resolución de diversas operaciones que realizan adultos de baja o nula escolaridad.[41]

A su vez, coincidentemente, existe un mayor éxito en las incógnitas de las diversas estructuras que demanden una suma para su resolución (en la 1ª categoría, en la 2ª, dos de la 5ª y una de la 4ª), pues de las 14 situaciones resueltas exitosamente 9 son de suma y sólo 5 demandan una resta.

Por último, puede observarse que a medida que disminuye la familiaridad con la situación disminuye el recurso a estrategias convencionales en aquellas entrevistadas que disponen de este recurso (Carmen y Sofía). Así la 1ª categoría es la que presenta mayor grado de resoluciones de este tipo, es decir mediante algoritmos escritos, siendo escaso o nulo su uso en el resto de las categorías. Incluso Carmen, como se señalara, en la 2ª categoría no puede convalidar su estimación con un algoritmo escrito porque identifica la operación inapropiada.

Desempeño en la secuencia. Como se explicitara en la descripción de la secuencia, dadas las mayores dificultades operatorias de Sofía (por su algoritmo personal erróneo) y de Olga (por su desconocimiento), se decidió que sólo con Carmen se procuraría avanzar en la extensión de las posibilidades de uso de estrategias convencionales a nuevas estructuras aditivas y a contextos no monetarios.

Carmen en general en la secuencia no tuvo dificultades para identificar la operación cuando se formulaban en contextos monetarios y en las estructuras de mayor familiaridad (1ª estructura y 2ª estructura). Cuando se procuró realizar una extensión del *contexto*, hubo dificultades para identificar la operación en contextos que no impliquen el manejo de dinero. Se presentaron dificultades para operar vinculadas algunas de ellas a oscilaciones en la identificación de la operación pertinente (7ªS.1). La inestabilidad en la identificación de la operación obedecía a diversos motivos relacionados con el modo de formulación del problema. Uno motivo era por ejemplo una confusión entre la situación de entrega de libros **de** la escuela que conlleva una disminución de la cantidad de libros

[41] "Tales estrategias (se refiere a las de cálculo) son diferentes a las que implican los algoritmos escolarizados y tienen en la base a la adición, operación que se muestra como estrategia universal del cálculo adulto no escolarizado. Así, la resta se traduce en una adición que permite calcular un faltante (…)" (Avila, 1990, p.60)
"Como hemos visto, los sujetos pueden resolver problemas que implican las cuatro operaciones valiéndose únicamente de la suma (…)" (Ferreiro y Fuenlabrada, et al., 1987, p.186)

disponibles (resta), y la situación de entrega de libros **a** la escuela que implica un aumento de los libros (suma) (7ªS.4). Otro motivo fue que el orden del enunciado no coincidía con el de la operación, pues se decía primero el sustraendo y luego el minuendo (7ªS.5).

Frente a estas dificultades, al recurrir a la formulación estereotipada de los problemas en contextos aditivos (composición de dos medidas -búsqueda de la medida compuesta-; medida⇨ transformación negativa⇨ medida –búsqueda del estado final–) puede identificar la operación pertinente (8ªS.1).

Respecto de la extensión en las *estructuras* aditivas, en la estructura medida⇨ transformación negativa⇨ medida –búsqueda de la transformación–, si bien en la 2ª entrevista no se la había enfrentado a esta incógnita, no tuvo dificultades para reconocer a la resta como la operación pertinente para su resolución (9ªS.10 / 10ªS.19).

En las otras situaciones propuestas: medida⇨ transformación positiva⇨ medida –búsqueda de la transformación– y medida⇨ transformación positiva o negativa⇨ medida –búsqueda del estado inicial–, presenta dificultades para identificar la operación involucrada, pudiendo rectificar su planteo inicial a partir de la contradicción provocada por el resultado obtenido y sus estimaciones mediante el cálculo mental.

Así en la estructura: medida⇨ transformación positiva⇨ medida –búsqueda de la transformación–, identifica como operación a la suma en vez de la resta, quizás orientada por el tipo de transformación (positiva), pero posteriormente detecta el carácter ilógico del resultado (9ªS.10). Por ejemplo frente al problema: "Te quedaban $196 de ganancias por las ventas del puesto, hiciste nuevas ventas y ahora tienes en total $925, ¿cuánto dinero ganaste ahora con las ventas del puesto?" [925–196=729], propone sumar y obtiene como resultado 1 121. Pero cuando se reinserta este resultado en el enunciado del problema, es decir que 925 sería el total de las ganancias iniciales (196) más las nuevas ventas (1 121), deduce que es incorrecto.

No obstante, debido a que los datos no están en el orden necesario para operar persiste en querer operar con la suma (9ªS.12). La identificación de la operación es promovida por la entrevistadora, reformulando la situación con números dígitos (3 y 5) y verificando que la resta permite encontrar el "faltante para llegar a…".

En la siguiente sesión inicialmente tiende a identificar la operación con el signo de la transformación (positiva, es decir, suma) pero antes de realizarla rectifica y propone la operación correcta (10ªS.20). Así cuando se le plantea el siguiente problema: "Vas al banco con $905, pagas una cuenta y sales con $567, ¿cuánto dinero pagaste?" [905–567=338], haciendo uso de la aproximación del resultado puede corregir su interpretación inicial. Estima que el resultado será cercano a trescientos y entonces desecha la suma: "Una su … una suma … no."

Pero además, si bien usa como recurso la estimación se explicita en este contexto la limitación del cálculo mental para la obtención del resultado exacto. Entonces propone, en otro problema planteado, el uso de la resta e incluso reordena los datos para poder operar:

"E- Te digo otro. Luego de hacer el pago en el banco a te quedaban quinientos sesenta y siete, ¿verdad?
M1- Quinientos sesenta y siete (escribe 567).
E- Bueno. Pero tu hijo te da un dinero, y ahora tienes en total ochocientos treinta y seis pesos.
M1- Ahá.
(…)
C- (silencio) Una de a menos.
E- Una de a menos. Suma tú dijiste que no, cómo harías ¿a ver? ¿Qué le quitarías a qué?
C- Al ochocientos treinta y seis.
E- ¿Le quitarías?
C- Quinientos sesenta y siete." (10ªS.21)

En la estructura: medida⇨ transformación negativa⇨ medida –búsqueda del estado inicial–, identifica como operación a la resta en vez de la suma, quizás orientada por el tipo de transformación (negativa), pero posteriormente también detecta el carácter ilógico del resultado (9ªS.13). En la siguiente sesión inicialmente persiste en la identificación de la operación con el signo de la transformación (es decir una resta) pero luego rectifica a partir, también, de la estimación del resultado (10ªS.22).

Finalmente, en la estructura: medida⇨ transformación positiva⇨ medida –búsqueda del estado inicial–, identifica como operación a la suma en vez de la resta, quizás orientada por el tipo de transformación (positiva), pero aquí también detecta el carácter ilógico del resultado (9ªS.14). En la siguiente sesión, la 10ª, deduce la operación correcta, es decir la resta. Primero intenta escribirla en el orden del enunciado, a pesar de haberla dicho correctamente, y luego rectifica a partir de que la entrevistadora le recuerda el orden inicial que había planteado (10ªS.23). Este intento de correspondencia entre el orden de los datos en el enunciado del problema y el orden en la operación, se da a pesar de la reflexión de la entrevistadora que procura su distinción (10ªS.20) y le recomienda revisar su estrategia de registrar los datos "listos para operar" a medida que se dicen.

En síntesis, existen logros limitados en la extensión de estructuras aditivas, pero aunque no se haya consolidado esta posibilidad dados los tiempos limitados de intervención, se logró cuestionar la eficacia del cálculo mental para la exactitud cuando existe una mayor complejidad operatoria por los números involucrados (en este caso tridígitos compuestos que dificultaban la aplicación del cálculo mental).

Olga inicialmente respondió sin dificultad a la propuesta de identificar las operaciones (7ªS.2) en las estructuras aditivas trabajadas (composición de dos medidas -búsqueda de la medida compuesta-; medida⇨ transformación negativa⇨ medida –búsqueda del estado final–). Puede reconocerlas y entonces se le propone colocar los signos gráficos que las identifican y que delimitan en el algoritmo el resultado. Pero luego presenta dificultades para el reconocimiento de la resta (8ªS.8) como operación pertinente para la resolución de la estructura: medida⇨ transformación negativa⇨ medida –búsqueda del estado final–, lográndose finalmente consolidar la identificación de las operaciones.

En Sofía, como se señalara, dado su desempeño inicial en la entrevistas, en la secuencia se atendió fundamentalmente a la dificultad operatoria. Asimismo a esta dificultad se agregó en algunas sesiones una identificación inestable o ausente de la operación en los contextos de menor dificultad ya mencionados (composición de dos medidas –búsqueda de la medida compuesta–, 6ªS.6; medida⇨ transformación negativa⇨ medida –búsqueda del estado final–, 6ªS.7). Por ello se procuró consolidar la identificación de las operaciones en estos contextos, sin extenderlos, lo cual se logra (7ªS.8) permitiendo concentrar la reflexión en la dificultad en la resolución del algoritmo.

CONCLUSIONES

"Quiero esa fe de los pájaros cuando se arrojan al aire..."
(Pedro Mairal)

Concluir aúna diversos gestos, la revisión de la frontera del "hasta aquí" y la mirada sobre lo inabarcable del "después". Aquí se procurará conjugar ambos gestos recuperando de este estudio algunos hallazgos que puedan orientar otras experiencias.

Este doble propósito remite a respuestas encontradas a las preguntas iniciales, tendiendo así a la identificación de variables sobre las que operar en una propuesta didáctica para adultos no alfabetizados. Esto último no se dirige a una búsqueda de replicabilidad de la secuencia didáctica diseñada en este trabajo, sino hacia contribuir a discriminar y a advertir variables didácticas relevantes que ameritan reflexión e intervención.

Las preguntas que orientaron la indagación del problema, es decir, el *diseño de una secuencia didáctica para la enseñanza de algoritmos convencionales de suma y resta a adultos de baja o nula escolaridad*, fueron las siguientes:

- ¿Cómo recuperar las nociones previas de los adultos y tender a la vez a su extensión mediante la apropiación de la simbolización numérica?
- ¿Qué características debe reunir una estrategia de intervención para la enseñanza de algoritmos de las operaciones básicas de suma y resta para adultos no alfabetizados que promueva procesos de simbolización con sentido?
- ¿Qué incidencia tiene el aprendizaje de la escritura e interpretación de símbolos numéricos en el mejoramiento de las estrategias espontáneas de cálculo de las operaciones de suma y resta?

Para dar respuesta a estas preguntas se usan como insumos las respuestas dadas a interrogantes que se plantearon al final de la intervención -al constatar las oscilaciones de desempeño de las entrevistadas en el análisis de sus posibilidades de representación de: la numeración, la operatoria y los problemas, a saber:

- ¿A qué obedecen las variaciones en los niveles de desempeño al interior de un mismo eje analítico?
- ¿Y las divergencias entre distintos ejes?
- ¿Qué implicaciones tuvieron estos diversos niveles de desempeño y sus condicionantes, en las decisiones tomadas en el curso de la secuencia didáctica?

La experiencia que fue objeto de este trabajo alerta sobre miradas ingenuas de la problemática de **recuperar las nociones previas de los adultos**. El recaudo deviene de su vínculo con las posibilidades de nuevos aprendizajes.

En tal sentido se mostró la importancia de clarificar los tipos de nociones previas y sus posibles incidencias como recursos facilitadores y/u obstaculizadores para la extensión de lo sabido a nuevas situaciones con nuevas dificultades. Esta caracterización de los saberes anteriores permitiría avanzar en la dirección de prever los alcances y límites de las estrategias previas para así tender a ampliar su alcance mediante su optimización y/o cuestionamiento.

En las entrevistas iniciales y en la implementación de la secuencia, se pudo observar la necesidad de pormenorizar, por ejemplo, las estrategias previas de cálculo. Así se constató que la incidencia de estas estrategias en el desarrollo ulterior se vinculaba no meramente al acceso a un cálculo mental o simbólico (algoritmo escrito) sino también al nivel o modo de acceso y el valor otorgado por el sujeto a dicha estrategia.

Por ejemplo, el dominio inicial del algoritmo de Carmen estaba sostenido en un conocimiento implícito de su lógica subyacente que el uso del referente le permitió explicitar y reconocer, algoritmo controlado fundamentalmente desde el cálculo mental, forma de control que obstaculizó su acceso al algoritmo ampliado como recurso auxiliar de apoyo de la operatoria. Este recurso fue un obstáculo puesto que Carmen tenía una fuerte creencia en sus posibilidades de eficacia, creencia enraizada en que su cálculo mental al ser un algoritmo mental (o sea, un procedimiento sistemático) y estar apoyado en la escritura de los datos, le permitía en su contexto cotidiano realmente operar con eficacia. Pero la ampliación del rango cuestionó este modo de control al limitar su eficacia (es decir la posibilidad de obtener un resultado exacto), ineficacia reconocida a la vez desde las potencialidades de este cálculo mental, particularmente de la estimación, para controlar sino la exactitud, el orden del cual será el resultado.

En síntesis, se observa que el cálculo mental en su estatuto de “el” recurso de resolución tiene particularidades con relación a su estatuto de mecanismo de validación, en términos de su incidencia en un proceso de enseñanza que pretenda un acceso a lo simbólico con sentido. Así, el cálculo mental como “el” recurso de resolución puede generar resistencias al acceso a un algoritmo más eficaz (es decir, una optimización del control simbólico) sino se obtura la posibilidad de control del algoritmo meramente desde el cálculo mental, aumentando la complejidad operatoria mediante la manipulación de la variable del tamaño del número combinada con la variable del número de transformaciones realizadas. Por ello, la resta con cuatridígitos donde el minuendo es un número redondo o que meramente requiera desagrupamientos sucesivos es una situación que puso en entredicho este recurso, y por ello fue considerada como una situación potente.

En tanto mecanismo de validación, el cálculo mental mostró ser una estrategia valiosa que posibilita la rectificación y toma de conciencia de, paradójicamente, sus propias limitantes para la eficacia en situaciones de mayor complejidad operatoria.

En cambio Olga, que disponía de un cálculo mental sin apoyo en la escritura y con menores posibilidades de eficacia y de eficiencia, accedió sin resistencias a una simbolización presentada con sentido, el algoritmo, y adopta fácilmente el algoritmo ampliado como apoyo de sus resoluciones.

Entonces, el tipo de cálculo mental inicial pareciera generar disposiciones diversas hacia el aprendizaje de formas simbólicas de control del cálculo (algoritmo ampliado), en función de sus niveles iniciales de eficacia y de eficiencia, y de los recursos de apoyo en que se sustenta (la escritura de datos o la reiteración). Estos rasgos contribuyen a su consolidación como “la” estrategia predilecta de resolución o como una estrategia provisoria frente a la carencia de alternativas.

La toma de conciencia simultánea de las potencialidades del cálculo mental (como recurso de validación mediante la estimación) y de sus alcances (o sea sus límites ante la complejidad operatoria), pareciera ser una vía para cuestionándolo proponer medios alternativos de resolución: la escritura. Así el algoritmo escrito, e incluso el algoritmo ampliado, logran instalarse como recursos frente a un propósito de eficacia en el cálculo, ante la tematización propuesta de los límites de estrategias ágrafas por su demanda de retención de información y de control continuo sobre esta retención.

Por último, la estrategia inicial de Sofía era el algoritmo escrito que, a diferencia de Carmen, estaba sustentado en procedimientos sin sentido e incluso incorrectos, es decir sin reconocimiento –ni aún de modo implícito- de su lógica subyacente, y era controlado meramente desde lo simbólico. Esta ausencia de conocimiento de la lógica subyacente al algoritmo le posibilitaba su adhesión a procedimientos no válidos asentados en una aceptación sin cuestionamiento, quizás por generalización excesiva del procedimiento algorítmico en bidígitos –cuando "pido" o "llevo" lo hago siempre de la cifra de la izquierda-. Por ello se procuró instalar al referente como recurso de validación y rectificación pues no utilizaba para ello al cálculo mental, entonces había que dotarla de recursos de control de lo simbólico que posibilitaran, por ende, rectificar su algoritmo personal.

Simultáneamente, la introducción del algoritmo ampliado fue facilitada por su adhesión a los mecanismos de control simbólico, mecanismos que se obturaron en la secuencia al demandar una explicación y argumentación del proceso algorítmico, y al manipular la complejidad operatoria de las cuentas planteadas, siendo su mayor dificultad la aplicación de reiteradas transformaciones a un mismo agrupamiento. Esta complejidad puso en entredicho no sólo la eficacia de un control mental del procedimiento (recurso que no utiliza Sofía) sino también, la prescindencia del dominio de la lógica subyacente y, por ende, del uso del referente como mecanismo para su explicitación, reconocimiento y consecuente control. Esto último vuelve a poner en evidencia la potencialidad de la resta con transformaciones sucesivas como situación de ruptura de procedimientos espontáneos de resolución.

En síntesis, el previo acceso a lo simbólico tiene especificidades en tanto recurso de apoyo de la operatoria y como recurso de validación y de control sin un referente que lo provea de sentido. La toma de conciencia de la función de lo simbólico como auxiliar de la operatoria posibilita un acceso sin resistencias a algoritmos con características vinculadas a una mayor eficacia, por ejemplo al uso del algoritmo ampliado. El uso, en cambio, de lo simbólico como mecanismo auto-referencial ocasiona resistencias a su cambio de estatuto, es decir, hacia su visión como simbolismo con una lógica relacionada con las leyes del sistema en que se sitúa la operatoria.

En otro sentido, esta pretensión de recuperar nociones previas conllevó además retomar inicialmente el contexto comercial como ámbito de trabajo. Lo cual posibilitó familiarizar las nociones trabajadas por el uso de este contexto cotidiano, pero supuso también ciertas dificultades que se enfrentaron desde el diseño con respuestas no igualmente óptimas. El trabajo con el ámbito comercial y particularmente con el dinero como referente, generó una restricción de situaciones posibles por ejemplo de cantidades con las cuales efectuar pagos. La búsqueda de variedad en las cantidades involucradas en el cálculo significó, en algunos problemas de la secuencia, sacrificar la verosimilitud planteando, por ejemplo, el pago con cantidades que no eran creíbles. Pero también se manifestaron resoluciones más óptimas de esta misma problemática, modificando el significado de las cantidades involucradas. Así, en vez de emplear "cantidades con las que se efectúa el pago" (que remite a las combinaciones posibles y viables de los billetes y monedas vigentes), se recuperaban cantidades referidas a "dinero disponible antes del pago".

Es relevante entonces destacar la necesidad de un espacio para la reflexión sobre las restricciones que puede significar la búsqueda de contextualización de las nociones y su resolución, limitando la pretensión simultánea de diversificación de la experiencia. Este espacio posibilitaría contemplar alternativas a esta tensión entre verosimilitud y ampliación de las experiencias, incorporándolas como criterios coexistentes de selección y diseño de situaciones.

La búsqueda de una **simbolización con sentido** condujo, en la experiencia, a relacionarla con un referente y argumentarla desde motivos de eficacia.

Así se instauró como referente a las situaciones cotidianas de cambio de dinero, de modo de desentrañar a la vez la lógica del sistema de numeración (decimal y posicional) y de los algoritmos convencionales de suma y resta. Cabe señalar que la selección del referente, como se explicitó en el Capítulo II, estuvo imbricada con la preocupación ya esbozada sobre la recuperación de conocimientos previos. En este sentido, la preferencia por el sistema monetario obedeció a la validación de estos conocimientos previos y a la familiarización implícita con las leyes de cambio relacionadas con el carácter "decimal" del sistema de numeración. No obstante, el uso de este recurso tuvo sus limitantes (desarrolladas en el Capítulo II) para desarrollar la posicionalidad del sistema vinculada a la exigencia de un agrupamiento exhaustivo (de diez en diez). Si bien las entrevistadas podían interpretar la variación del valor de las cifras en función de la posición, el reagrupamiento no era contemplado como una demanda en el contexto del manejo del dinero, pues no existen allí exigencias de agrupamientos exhaustivos.

Entonces, instaurar al sistema monetario como referente de las leyes del sistema de numeración y, por ende, de los algoritmos, posibilita hacer a ambos inteligibles pero, dada la ausencia de restricciones en este contexto sobre representaciones diversas de una misma cantidad y sin correspondencia con la escritura, es conveniente una reflexión paralela sobre la presencia de estas restricciones en la escritura de los números. Esto fue concretado en la experiencia mediante el tratamiento de las distancias entre las múltiples representaciones posibles de una cantidad con billetes y monedas (en situaciones de interpretación de cantidades representadas sin correspondencia con su escritura, o en sumas con transformaciones), y la representación de esta cantidad que se corresponde con su escritura. Es decir, que fue realizado convirtiendo en objeto de reflexión las diferencias entre las constricciones que operan en el plano de la representación material (mediante el sistema monetario) y en el de la representación escrita de una cantidad.

Asimismo, otra vía de construcción del sentido de la simbolización fue el enfrentamiento a las razones de eficacia detrás de los procedimientos algorítmicos canónicos. La selección de una situación (El juego de El Cajero) de empleo informal de acciones básicas de los procedimientos algorítmicos convencionales de suma y resta (reagrupar y desagrupar, respectivamente) posibilitó deconstruir la lógica de estos algoritmos. Pero, a la vez, la utilización de un registro (la tabla) coadyuvó a preguntarse en torno a la eficacia del procedimiento de registro. Específicamente, la indagación se dirigió al sentido de encolumnar las cantidades y de operar de derecha a izquierda. Esto permitió implicar a las mujeres en la develación de las razones de constitución detrás de la convención, es decir, detrás de procedimientos algorítmicos de resolución en forma escrita que están arraigados socialmente.

Estas opciones didácticas se contraponen a algunos de los antecedentes mencionados en los Capítulos I y II. En cuanto a dotar de sentido a las estrategias de cálculo convencionales, “las cuentas”, pueden reconocerse dos grandes posturas en la bibliografía revisada: el uso de algoritmos alternativos y el vínculo entre la operatoria y el sistema de numeración en que se inscribe. Lerner y Sadovsky (1994) y Mariño (1997) propician el uso inicial de algoritmos alternativos pero los campos en que se pronuncian y el grado de “normatividad” en los algoritmos alternativos que promueven son diversos. Así, Lerner y Sadovsky esgrimen esta postura en la enseñanza para niños sin predeterminar los algoritmos utilizados sino que surgen de la búsqueda de procedimientos de resolución por los mismos niños, instituyéndose al final del proceso los algoritmos convencionales como respuesta a una pretensión de mayor economía en la resolución. En cambio Mariño, como se presentó en el Capítulo I, promueve el uso de algoritmos alternativos en la enseñanza a adultos como una estrategia de inteligibilidad de los algoritmos convencionales, previendo y recurriendo a la escritura de la descomposición aditiva de las cantidades con que se opera en sus agrupamientos decimales.

La diferenciación de la propuesta de esta tesis de la sostenida por Lerner y Sadovsky obedece a los tiempos didácticos de la experiencia, pues la exploración de la serie numérica y de algoritmos alternativos hubiese excedido el tiempo previsto. A partir de esta preocupación en torno a los tiempos disponibles, en vez de esperar que mediante la exploración de regularidades se instalara la pregunta sobre las razones detrás de las mismas, se intervino procurando develar estas razones enfrentando a las entrevistadas a situaciones en las que se tematizaba el vínculo entre la escritura y la representación material (en correspondencia con la escritura) de una cantidad, así como de la relación entre la serie oral y los modos de representación (material y escrita). En el marco de esta sujeción al tiempo disponible, tampoco se esperó a que los algoritmos convencionales se constituyeran en el marco de un proceso de búsqueda de la eficacia, explorando algoritmos alternativos diversos hasta arribar a los convencionales. En cambio, se familiarizó a las entrevistadas con los procedimientos algorítmicos mediante la recuperación de situaciones cotidianas de cambio, vinculando estas situaciones con las transformaciones implicadas en las operaciones, y se tematizó además la eficacia del tipo de registro de los algoritmos convencionales. Estas decisiones, como se analizara en el Capítulo II, no implican desconocer la génesis de la noción de la posicionalidad como precedente a la noción de agrupamiento, o de las potencialidades de explorar algoritmos alternativos para arribar a los convencionales como culminación de este proceso. Más bien, estas decisiones procuraron intervenir no el sentido de reproducir el proceso de génesis de las nociones, sino de optimizarlo mediante la toma de conciencia de la noción de agrupamiento como herramienta de comprensión y control tanto de la representación de los números (su interpretación y producción), como de la operatoria, es decir de los procedimientos algorítmicos convencionales.

Pero más allá de los límites temporales de la experiencia esta decisión estuvo sustentada también en el enfrentamiento de una problemática enunciada de la alfabetización de adultos, su baja eficiencia terminal en estrecha relación con la baja relevancia de sus propuestas. Por ello, existía como condicionante y preocupación adicional el proveer de evidencias de aprendizaje a las mujeres de la experiencia en el menor tiempo posible, toma de conciencia del aprendizaje vinculada a su vez con el dominio del conocimiento social, en este caso, los algoritmos convencionales. Cabe recordar aquí, por ejemplo, que el trabajo en la secuencia con operaciones realizadas mediante el uso del dinero pero sin una simbolización canónica, significó el riesgo de pérdida de Sofía, ante lo cual se debió intervenir en el sentido de institucionalizar las operaciones implícitas para que reconociera que estaba aprendiendo en este proceso, y así tender a revalorizarlo.

La divergencia con la propuesta de Germán Mariño obedece a la búsqueda en este estudio de un acceso a los algoritmos convencionales pero con instrumentos de control sobre esta simbolización. Como ya se analizara, Mariño lejos de tematizar los algoritmos convencionales los presenta, no reconociendo que el conocimiento que posibilita comprender la descomposición aditiva implícita en los algoritmos convencionales es el del sistema de numeración, y que incluso su explicitación mediante la escritura demanda el acceso a este saber, sino lo canónico deviene en arbitrario. La preocupación por el control que se le proporciona al sujeto sobre su saber se constituyó en esta tesis desde la pretensión de permitirle al sujeto interactuar autónomamente con ese saber.

El reconocimiento de la necesidad de este saber, el sistema de numeración, pareciera ser una coincidencia con la nueva propuesta del Instituto Nacional de Adultos (INEA), pero la modalidad de acceso difiere de la planteada en esta tesis en términos de los elementos de control que provee en este proceso de acceso. La propuesta del INEA promueve un trabajo con el sistema de numeración pero no en el sentido de develar la lógica implícita de los algoritmos, pues no propicia el trabajo informal con sus procedimientos subyacentes (reagrupamientos y desagrupamientos) sino que privilegia el trabajo de identificación de los agrupamientos del sistema. Además, no aborda las razones de eficacia que están detrás de la constitución de una técnica como canónica, lo cual distancia también el tratamiento de los algoritmos que se realiza en los materiales del INEA del que aquí se ha desarrollado. Esto último también puede visualizarse en la mera “presentación” de los algoritmos que efectúa Mariño.

Este **vínculo entre la escritura y la interpretación del sistema de numeración y el desarrollo de estrategias previas de cálculo** fue evidenciado con distintas implicancias, dada la diversidad inicial de estrategias de cálculo.

A Olga el acceso a la representación escrita la proveyó de un recurso más eficaz para “representar” los problemas y para su resolución. Su dominio de la escritura significó el desplazamiento de la reiteración de los datos del problema como mecanismo (gesto propio de las culturas orales) para su recuerdo. Asimismo, dados sus niveles iniciales fundamentalmente de ineficiencia en el cálculo (pues efectuaba varios intentos hasta arribar al resultado correcto), la escritura conllevó también un mejor desempeño en este aspecto.

En Sofía, el modo de tratamiento de deconstrucción de la lógica de escritura de los números y de “las cuentas”, la dotó de posibilidades de rectificación de su algoritmo inicial erróneo y de argumentación del nuevo procedimiento. Tanto la ruptura con su algoritmo inicial, como la rectificación y la construcción de un procedimiento correcto, fueron viables mediante el recurso de la resolución sucesiva mediante mecanismos diferentes: su algoritmo personal y el uso de la tabla. La tabla se constituyó de este modo en un recurso de verificación del algoritmo y de inteligibilidad del mismo.

En Carmen, como ya se mencionara antes, la “explicitación” de la lógica subyacente al algoritmo posibilitó una extensión y optimización de su buena competencia operatoria inicial, mediante una dotación de elementos simbólicos de control del algoritmo (las anotaciones marginales del algoritmo ampliado). Esto le permitió ampliar el alcance de sus posibilidades de resolución (en un rango mayor, con mayor dificultad operatoria por la cantidad de transformaciones) y de argumentación (por ejemplo, dándole un sentido al “llevar” y al “pedir”).

Puede concluirse entonces que el acceso a la representación escrita, si bien existen estrategias de cálculo ágrafas potentes y eficaces en determinado contexto, promueve la optimización de modos de resolución al dotar de mecanismos de sustitución o alternativos a la memorización, o al dotar de criterios de argumentación y control del propio cálculo, y por ende, de generalización. Esto último demanda un modo de acceso a la escritura no signado por la arbitrariedad sino por el dominio de las leyes constitutivas de este sistema de representación. Asimismo esta evidencia contribuye a relativizar la afirmación ya citada de que “(…) no existe relación entre el uso de símbolos numéricos o la posesión de un sistema gráfico de registro, y el desarrollo de estrategias de cálculo” (Ávila, 1990, pp.83-84). Si bien la autora efectúa este planteo procurando enfrentar los mitos de que un analfabeto no dispone de estrategias de cálculo y de que por ser analfabeto no dispone de un sistema de registro, y para ello muestra la existencia de estrategias de cálculo y sistemas de registro alternativos, la anterior descripción de la evolución de las entrevistadas permite reconocer a la vez los límites de la eficacia de estas estrategias y sistemas de registro alternativos. Lo cual, lejos de pretender ser un argumento de desvalorización de los mismos, procura advertir sobre la importancia de la socialización de los saberes convencionales.

No obstante, el acceso a la reflexión y producción de registros (los números y las cuentas) no es suficiente para permitirle al sujeto interactuar con las diferentes estructuras aditivas (como pudo verse en Carmen, a pesar de la disminución de la complejidad operatoria efectuada en el proceso de implementación). Lo cual significa que la representación de los números y de la operatoria son elementos que optimizan la resolución una vez que existe una representación sobre los vínculos existentes entre los datos del problema, pero no contribuyen a develar la interpretación ausente.

Pero también en esta investigación se constataron, en general, la incidencia en una propuesta de enseñanza de ciertos estilos diferentes de aprendizaje, en términos de vínculos con recursos de resolución (lo simbólico, el cálculo mental). Esta evidencia conduce a un nuevo interrogante: ¿cómo gestionar esta diversidad?

La heterogeneidad (si bien aquí se han brindado elementos para su caracterización) es una constante en toda práctica educativa y en general existen dos alternativas: diseñar una propuesta con pretensiones de unificación que la eluda, o decidir asumir la complejidad de gestionarla. Evidentemente el trabajo individual permite un acercamiento a la diversidad que dé respuestas e intervenciones más inmediatas a la misma. En este sentido, la resignificación de una de las prácticas instauradas en el INEA (fundamentalmente en los grupos iniciales de alfabetización), la asesoría individual, sería una alternativa.

Este espacio, el trabajo individual, merece algunos recaudos. Uno de ellos es respecto a las intervenciones docentes en dicho espacio. En el transcurso de la secuencia existieron intervenciones de carácter correctivo que es pertinente someter a análisis. Uno de los condicionantes de las decisiones didácticas fue, como se dijera, la preocupación en torno a los tiempos didácticos de la experiencia. No obstante, esta sujeción trasciende a las condiciones de la experiencia y se hace presente también en el espacio de la asesoría. Anteriormente se mencionó que la evidencia de aprendizaje sería una componente que dota de relevancia a las propuestas de educación de adultos, y se analizó en el marco de la necesidad de evidencias sobre el acceso a conocimientos convencionales. Pero a su vez, la demanda de estas evidencias condiciona los tiempos viables para el logro de estos aprendizajes. En este contexto, las intervenciones de la entrevistadora en la experiencia procuraron propiciar una mayor celeridad en el acercamiento entre saberes previos y saberes convencionales. El recaudo que amerita ser mencionado es la distancia existente entre una intervención docente que propicie la articulación de ambos tipos de saberes y otra que se deslinde de este proceso de articulación. Este enlace fue promovido priorizando intervenciones correctivas fundamentalmente bajo las siguientes modalidades: evidenciar contradicciones y regularidades, consistencias e inconsistencias; pedidos de aplicación de recursos de control alternativos (por ejemplo, representación y resolución con material, estimación, interpretación de lo producido o recuperación del dinero como referente, etc.); demandas de argumentación. Estas modalidades procuraban generar un tipo de corrección que involucraran al adulto en procesos de detección de errores y aciertos y de argumentación de los mismos; así como de extensión de saberes implícitos mediante su tematización para así propender a su generalización. No obstante, cuando existieron persistencias en el error a pesar de estos espacios, se optó por marcar su presencia asumiendo la entrevistadora el proponer alternativas para su rectificación.

Pero el trabajo individual conlleva además otro riesgo, la ausencia de participación de un proceso de validación autónomo, por la carencia de pares con quienes confrontar las estrategias empleadas. Este riesgo revela la importancia del empleo de referentes que operen como intermediarios entre el asesor y el adulto para distanciar al asesor del proceso de validación. En la secuencia esto fue implementado mediante el uso de referentes (directorio, sección amarilla, billetes y monedas, tarjetas) que posibilitaban una verificación empírica. Algunos de estos referentes, al ser portadores sociales de uso del sistema de numeración, permitieron a la vez dotar a las mujeres de recursos de apoyo para el aprendizaje más allá del ámbito escolar.

Pero tanto en la asesoría individual como en el trabajo grupal un primer gesto para gestionar la diversidad es su reconocimiento. Indagar por ejemplo los saberes previos del adulto y acerca de su mirada sobre el conocimiento matemático del que dispone y del que está excluido, es decir sobre sus desventajas en la participación de saberes sociales validados (por ejemplo el saber escolar). Preguntarse sobre los recursos que utiliza dada su relativa exclusión de los convencionales y analizar sus alcances, para así intervenir en ellos en los sentidos ya planteados (extensión y/o cuestionamiento). Pero en todas estas alternativas subyace fundamentalmente una premisa, la necesidad de restaurar la mirada del otro como sujeto de saber, el "respeto intelectual", lejos de una mirada que reifique el saber escolar y desconozca otros ámbitos de producción de saberes[42].

[42] "Saber algo acerca de cierto objeto no quiere decir, necesariamente, saber algo socialmente aceptado como 'conocimiento'. 'Saber' quiere decir haber construido alguna conceptualización que da cuenta de cierto conjunto de fenómenos o de objetos de la realidad." (Ferreiro, 1998, p.18)

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Artigue, M. (1995). Ingeniería didáctica. En P. Gómez (Ed.), Ingeniería didáctica en educación matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. (pp. 33-59). México (DF): Grupo Editorial Iberoamérica.

Artigue, M., Douady, R., Moreno, L. y Gómez, P. E. (1995). Ingeniería didáctica en educación matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. México (DF): Grupo Editorial Iberoamérica.

Avila, A. (2001). El maestro y el contrato en la teoría Brousseauniana. Educación Matemática, Vol. 13 No. 3. pp. 5-21. México (DF): Grupo Editorial Iberoamérica.

Avila, A. (1997). Repensando el currículo de matemáticas para la educación de adultos. En UNESCO-SANTIAGO (Ed.), Conocimiento matemático en la educación de jóvenes y adultos. Jornadas de reflexión y capacitación sobre la matemática en educación (pp. 101-118). Santiago de Chile, Chile: UNESCO-SANTIAGO-OREALC.

Avila, A. (1993). El saber Matemático Extraescolar en los Libros para la Educación de Adultos. Educación Matemática, Vol. 5 No. 3. pp. 60-77. México (DF): Grupo Editorial Iberoamérica.

Avila, A. (1990). El saber matemático de los adultos analfabetos. Origen y desarrollo de sus estrategias de cálculo. Revista Latinoamericana de Estudios Educativos, Vol. XX No. 3. pp. 55-95. México (DF): Centro de Estudios Educativos.

Avila, A. y Waldegg, G. (1994). Hacia una redefinición de las matemáticas en la educación básica de adultos. México (DF): INEA.

Berthoud-Papandropoulou, I. y Ackermann-Valladao, E. (1986). ¿Cómo pueden formularse temas sugeridos por la epistemología genética en problemas susceptibles de investigación experimental? En J. Piaget, L. Apostel, et al., Construcción y validación de las teorías científicas. Contribución a la epistemología genética (pp. 38-45). Buenos Aires, Argentina: Paidós.

Block, D. y Alvarez, A. (1999). Los números en primer grado: Cuatro generaciones de situaciones didácticas. Educación Matemática, Vol. 11 No. 1. pp. 57-76. México (DF): Grupo Editorial Iberoamérica.

Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la mathématiques. Recherches en didactique des mathématiques, Vol. 7 No. 2. pp. 33-116. Bourdeaux, Francia: La Pensée Sauvage.

Carraher, T., Carraher, D. y Schliemann, A. (1997). En la vida diez, en la escuela cero (Cuarta edición). México (DF): Siglo XXI.

Chevallard, Y. (1998). La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado. Buenos Aires, Argentina: AIQUE.

Chevallard, Y. (1982). Sur l´ingénierie didactique. Ponencia presentada en Deuxieme Ecole d´Eté de Didactique des Mathématiques. Orléans, Juillet 1982.

Coben, D. (2000). Mathematics or Common Sense? Researching 'Invisible' Mathematics trougth Adults' Mathematics Life Histories. En D. Coben, J. O´Donoghue y G. FitzSimons (Eds.), Perspectives on Adults Learning Mathematics. Research and Practice. (pp. 53-66). Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Coben, D., O´Donoghue, J. y FitzSimons, G. (Eds.). (2000). Perspectives on Adults Learning Mathematics. Research and Practice. Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Cortina Morfín, J. (1997). Conceptualización y operación del valor posicional en diferentes situaciones. Un estudio con niñas y niños mexicanos de segundo, tercer y cuarto grados. Maestría en Educación, Universidad de las Américas, México (DF): (Documento publicado en versión rústica).

Ferreiro, E. (1998). Alfabetización. Teoría y práctica. México (DF): Siglo XXI.

Ferreiro, E., Fuenlabrada, I., Nemirovsky, M., Block, D. y Dávila, M. (1987). Conceptualizaciones matemáticas en adultos no alfabetizados. México (DF): (Documento publicado en versión rústica, DIE-CINVESTAV).

Fuenlabrada, I., Block, D., Balbuena, H. y Carvajal, A. (1991). El cajero, Basta numérico. En Juega y aprende matemáticas. Propuestas para divertirse y trabajar en el aula. México (DF): Libros del Rincón SEP.

Fuenlabrada, I., Espinosa, C. y Dávila, M. (1984). Sistemas de numeración. Cuaderno de trabajo. México (DF): (Documento publicado en versión rústica, DIE-CINVESTAV).

INEA. (2000a). Matemáticas para empezar. Libro del adulto 1. México (DF): Educación para la vida. Matemáticas. INEA.

INEA. (2000b). Matemáticas para empezar. Libro del adulto 2. México (DF): Educación para la vida. Matemáticas. INEA.

INEA. (2000c). Matemáticas para empezar. Libro del adulto 3. México (DF): Educación para la vida. Matemáticas. INEA.

INEA. (2000d). Los números. Libro del adulto 1. (Vol. 1). México (DF): Educación para la vida. Matemáticas. INEA.

INEA. (2000e). Cuentas útiles. Libro del adulto 1. (Vol. 1, 2, 3, 4). México: Educación para la vida. Matemáticas. INEA.

INEA. (2000f). Matemáticas para empezar. Guía del asesor. México (DF): Educación para la vida. Matemáticas. INEA.

INEA. (2000g). Matemáticas para empezar. Lecturas del asesor. México (DF): Educación para la vida. Matemáticas. INEA.

INEA. (2000h). Los números. Guía del asesor. México (DF): Educación para la vida. Matemáticas. INEA.

INEA. (2000i). Los números. Lecturas del asesor. México (DF): Educación para la vida. Matemáticas. INEA.

INEA. (2000j). Cuentas útiles. Guía del asesor. México (DF): Educación para la vida. Matemáticas. INEA.

INEA. (2000k). Cuentas útiles. Lecturas del asesor. México (DF): Educación para la vida. Matemáticas. INEA.

Lave, J. (1991). La cognición en la práctica. Barcelona, España: Paidós.

Lerner, D. y Sadovsky, P. (1994). El sistema de numeración: un problema didáctico. En C. Parra e I. Saiz (Eds.), Didáctica de las matemáticas. Aportes y reflexiones. (pp. 95-184). Buenos Aires, Argentina: Paidós.

Margolinas, C. (1993). De l´importance du vrai et du faux dans la classe de mathématiques. París, Francia: La Pensée Sauvage.

Mariño, G. (1986). Cómo opera matemáticamente el adulto de sector popular (Constataciones y propuestas). Bogotá, Colombia: Dimensión Educativa.

Mariño, G. (1997). Los saberes matemáticos previos de jóvenes y adultos: alcances y desafíos. En UNESCO-SANTIAGO (Ed.), Conocimiento matemático en la educación de jóvenes y adultos. Jornadas de reflexión y capacitación sobre la matemática en educación. (pp. 77-100). Santiago de Chile, Chile: UNESCO-SANTIAGO-OREALC.

Ruiz Olabuenaga, J. (1996). Metodología de la Investigación Cualitativa (Vol. 15). Bilbao, España: Universidad de Deusto.

Schmelkes, S. (1996). Evaluación de la educación básica (Vol. 46). México (DF): Documento DIE.

Soto, I. (1997). Algunas proposiciones sobre la didáctica para la enseñanza de las matemáticas de jóvenes y adultos. En UNESCO-SANTIAGO (Ed.), Conocimiento matemático en la educación de jóvenes y adultos. Jornadas de reflexión y capacitación sobre la matemática en educación. (pp. 119-130). Santiago de Chile, Chile: UNESCO-SANTIAGO-OREALC.

Valiente, S. (1995). Análisis de cuatro algoritmos operatorios obtenidos en investigación de campo con adultas analfabetas. Educación Matemática, Vol. 7 No. 2. pp. 60-73. México (DF): Grupo Editorial Iberoamérica.

Vergnaud, G. (1991). El niño, las matemáticas y la realidad. México (DF): Trillas.

Wedege, T. (2000). Technology, Competences and Mathematics. En D. Coben, J. O´Donoghue, y G. FitzSimons (Eds.), Perspectives on Adults Learning Mathematics. Research and Practice. (pp. 191-207). Netherlands: Kluwer Academic Publishers.