¿Es de suma o de resta?

Experiencias con situaciones aditivas
para maestros de primaria

Ana Laura Barriendos Rodríguez

Asesora
Irma Rosa Fuenlabrada Velázquez

Para la realización de este trabajo se contó con una beca CONACYT

Como dicen todos los que se ganan un Óscar, nunca se termina de agradecer ni se menciona a todos los que tuvieron que ver en la hechura de algo, especialmente en un trabajo recepcional que supone un proceso de formación del propio autor. Tras la advertencia, empiezo:

Gracias a los profesores del DIE, con especial cariño a David Block, María de Ibarrola, Ruth Paradise, Justa Ezpeleta, Alejandra Pellicer y Eduardo Weiss. Al grupo de la maestría, abrazos para Toño, Abel, Maru, Paloma, Romali, Gaby, Silvia y Elena. A Rosy, por toda la lata en dos años y pico. A todos los del seminario de matemáticas. A Bertha, Juan, Laura y Ruth (gracias por los registros). A Yimmy, mi querida asesora por todo lo que he aprendido de ella, que desde luego va mucho más allá de la didáctica. A mis parientes en el exilio voluntario. A todos los amigos que me prestaron sus nombres para los problemas de la investigación. A mi pequeña familia, Daniel, Sebastián y Joel, los amo.

Resumen

El propósito de la investigación que se presenta es caracterizar los recursos didácticos de una propuesta de enseñanza para maestros de la primaria, misma que se planteó como objetivo que ellos revaloraran la importancia del establecimiento de la relación semántica entre los datos de un problema, no sólo como una componente central del aprendizaje matemático sino como un requisito previo a la elección de una (o varias) operación(es) como primer estrategia de resolución de los mismos, ya que para no pocos docentes esta es “la manera” de encontrar respuesta a la(s) pregunta(s) planteada(s).

El recurso metodológico utilizado fue el diseño de una ingeniería didáctica, en cuya secuencia didáctica se abordaron problemas aditivos (los que se resuelven con una suma o una resta) pertenecientes a la 4ª categoría, según la clasificación de G. Vergnaud. Se presumía que estos resultarían poco familiares a los maestros por no ser objeto de enseñanza en la primaria (posibilitan la presencia de los números con signo). Además, la elección de los problemas conllevó un propósito secundario: que en el proceso, los maestros encontraran otros significados –diferentes a los que habían reconocido– de la suma y de la resta.

Participaron seis profesores de distintos grados de primaria y la secuencia se experimentó en seis sesiones de 2 hrs. cada una. La representación gráfica de la relación semántica se constituyó en el nodo central de la secuencia en situaciones de formulación (definidas por Brousseau). Las representaciones espontáneas fueron interpeladas por el esquema propuesto con el mismo fin, por el propio Vergnaud. En los resultados obtenidos, el tipo de problemas elegido y las situaciones de formulación se evidenciaron como recursos pertinentes para centrar el trabajo de los maestros en el establecimiento de la relación semántica. Se reconocen aspectos que fueron confusos, poco efectivos o innecesarios en la ingeniería y se analizan las principales dificultades que manifestaron los maestros al trabajar los problemas, especialmente en cuanto a las ideas sobre los números negativos, la operatoria y el orden temporal en el que aparecen los datos en los problemas.

Abstract

The intention of this investigation is to characterize the didactic resources of an educational proposal for teach elementary school professors, in which the objective was that they revalued the importance of the establishment of the semantic relation between the data of a problem, not only like a central component of the mathematical learning but like a previous requirement to the election of one (or several) calculations like first strategy of resolution, since for some teachers this is "the way" to find the answer(s) to the question(s).

The methodologic resource was the design of a didactic engineering, in whose didactic sequence teachers deal with additive problems (those that are solved with an addition or a subtraction) pertaining to 4ª category, according to the classification of G. Vergnaud. It was presumed that these problems would be unfamiliar to the teachers, because they are not concern to the elementary school (they make possible the presence of numbers with sign). In addition, the election of the problems entailed a secondary intention: that in the process, the teachers found other meaning - different from which they already had recognized - of the addition and the subtraction.

Six professors teaching in different grades of elementary school participated, and the sequence was experimented in six sessions, 2 hrs each. The graphical representation of the semantic relation was constituted in the central node of the sequence in formulation situations (defined by Brousseau). The spontaneous representations were questioned by the scheme proposed with the same aim, by the own Vergnaud. In the obtained results, the chosen kind of problems and the situations of formulation were demonstrated like pertinent resources to center the work of the teachers in the establishment of the semantic relation. Aspects are recognized that were confused, little effective or unnecessary in engineering and the main difficulties of the teachers when they deal with the problems, specially the ideas showed about negative numbers, the calculation and the temporary order in which appear the data in the problems.

Índice

INTRODUCCIÓN

Ubicación de la problemática

Los problemas son el corazón de las matemáticas (Puig, 1996).

Definir lo que es un problema matemático escolar no es sencillo. Los podemos encontrar en prácticamente cualquier libro de texto y programa educativo ya que han estado presentes en la enseñanza de las matemáticas desde hace varios siglos (Verschaffel, *et al*, 2000), aunque su función ha ido cambiando de acuerdo a distintos enfoques teóricos y didácticos, a lo que la primaria mexicana no ha sido ajena. En los programas escolares de las últimas décadas, de manera general, pueden reconocerse varias intenciones al usar problemas de matemáticas (Block, *et al*, 2000). Una de ellas consistió principalmente en brindar un espacio de práctica para aplicar otros conocimientos matemáticos (especialmente de las operaciones aritméticas). Desde esta mirada subyacía la premisa de que si no se enseñaban explícitamente conocimientos matemáticos formales, los alumnos no podrían resolver problemas que involucraran dichos conocimientos. Así, la enseñanza del algoritmo y otros conocimientos formales, precedía a la aplicación de dicha técnica en los problemas. Más adelante, se comenzó paulatinamente a considerar a los problemas como un espacio que podía propiciar que los alumnos construyeran conocimiento matemático, aunque no siempre tales ideas se concretaron en las lecciones de los libros. La reforma de los noventas, además de hacer algunos cambios en los contenidos, enfatizó la importancia de que los alumnos comprendieran los conceptos y algoritmos matemáticos, y la principal estrategia didáctica para lograrlo se centró en el diseño de un tipo particular de problemas que permitieran: a) propiciar el aprendizaje del significado del instrumental matemático (número, operaciones, etc.); b) funcionalizar el uso de las estrategias convencionales de resolución (operatoria como procedimiento eficiente y eficaz); y c) profundizar, ampliar y enriquecer un conocimiento (Block y Fuenlabrada, 1996).

Para los maestros de primaria mexicanos el cambio curricular ha sido importante (probablemente más en lo concerniente al enfoque didáctico que a los cambios en los contenidos matemáticos) y esta distinta función de los problemas en la clase de matemáticas, a más de diez años de lanzada la propuesta, parece seguir quedando poco clara para muchos[1]. Los problemas implican más que la sola mecanización de los algoritmos, sin embargo tradicionalmente la "cuenta" ha sido vista por los maestros como la parte medular en su resolución (Block, *et al*, 2000; Ávila, 1996; Chapman, 2000). Por ello, aunque hablar de un programa de estudios de matemáticas basado en la resolución de problemas es hoy parte habitual del discurso educativo, algunos opinan que dichos esfuerzos en la práctica se han quedado al nivel de "las buenas intenciones" (Puig y Cerdán, 1988, p. 209).

Lo que este trabajo pretende es incidir en esta problemática abordando con algunos profesores de primaria, en un espacio de resolución de problemas, un contenido matemático generalmente percibido por ellos como menos problemático que otros[2]: la suma y la resta. La intención fue que, bajo una estrategia didáctica como la que se pretende que ellos pongan en práctica con sus alumnos en la que la resolución de los problemas sea ese espacio generador de conocimiento del que se habló, los maestros participantes pusieran en juego sus ideas y conocimientos sobre los tipos de problemas aditivos (los que pueden resolverse con una suma, una resta o ambas).

Problemas aditivos en el Curso Nacional de Actualización (Pronap)

Ante un cambio curricular como el planteado a los maestros en los noventas, se hace indispensable la puesta en marcha de estrategias de actualización docente. El Programa Nacional de Actualización Permanente (Pronap) se crea con esa intención y aquí interesa analizar brevemente la parte que el Curso Nacional de Actualización (CNA) *La enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria* (Block, *et al*, 1994) dedica a los problemas aditivos por ser

---

[1] En una investigación que se propuso averiguar las opiniones de maestros de primaria acerca de los nuevos programas tras la reforma de 1993, Alicia Ávila (1996) reporta que echan en falta el predominio de la práctica de los algoritmos convencionales. "Algunos profesores de este grado [1°] nos dijeron al respecto: 'Sería bueno que se profundizara un poquito más, más ejercicios, sumas, restas, ya con decenas, números más grandes'. 'Faltan más, más mecanizaciones. Las operaciones son fundamentales'". La autora agrega que los algoritmos tienen una importante tradición en la educación mexicana, "Socialmente son muy valorados: los docentes los aprecian; los padres y los directores los exigen. De acuerdo con ésta tradición, muchos profesores creen que posponer la simbolización y formalización de los algoritmos, tal como se propone en el nuevo currículo, disminuye la calidad de los aprendizajes. Se piensa que aplazar el uso de las fórmulas e incorporar actividades de medición directa para calcular áreas (o volúmenes) es innecesario, y por lo mismo, pérdida de tiempo" (pp. 8 y 13).

[2] Esta afirmación se sustenta en comentarios que hacen los profesores en espacios de actualización. Cuando manifiestan qué contenidos matemáticos desean tratar en los cursos o talleres con la esperanza de obtener estrategias didácticas que les ayuden a resolver problemáticas específicas en el aula, la suma y la resta son escasa o nulamente mencionadas.

una oferta de actualización vigente, de cobertura nacional y diseñada con el propósito que los maestros profundicen sus conocimientos sobre algunos contenidos matemáticos y sobre el enfoque propuesto, entre otros.

El estudio de cuestiones del sistema numérico decimal y de situaciones aditivas se realiza en la primera parte del Taller. Bajo el título de "La suma y la resta" se abordan aspectos relacionados con la reflexión de la base decimal. En seguida se consideran los distintos tipos de problemas de suma y de resta que pueden aparecer en la primaria clasificados según Carpenter y Moser (1982)[3]. Se distingue entre los de *Cambio*, *Combinación*, *Comparación* e *Igualación* así como la relación dinámica o estática que supone cada tipo. También se explicitan las diferencias que surgen al variar la posición de la incógnita y porqué ello se traduce en distintos niveles de dificultad para los alumnos. Se abordan las diferencias en los problemas en tanto las formas de presentación (en dibujos, texto, tablas, etc.); los tipos de contexto en los que se sitúa la historia; si se proporcionan más, menos o los datos estrictamente necesarios para resolverlo; y el tipo de respuesta que se espera (exacta o aproximada). Reconoce el énfasis que los maestros suelen poner en que los alumnos aprendan a hacer cuentas y que ello no garantice que vayan a saber cómo aplicarlas en los problemas, por lo que recomienda que la enseñanza de los algoritmos y la resolución de problemas sean simultáneas. Se remite al maestro al libro de lecturas en el que encontrará dos capítulos dedicados a los diferentes tipos de problemas aditivos, uno escrito por Alicia Ávila titulado "Problemas fáciles y problemas difíciles" en el que se abordan las cuestiones que surgen mediante la variación de la posición de la incógnita y se menciona la distinción de Gerard Vergnaud (1985) entre el "cálculo numérico" y el "cálculo relacional". El otro se llama "Problemas aditivos simples" (SEP) y en él se tratan los problemas de acuerdo a la clasificación de Carpenter y Moser (1982).

En el Taller los maestros escriben problemas aditivos variando la posición de la incógnita, la cualidad de la transformación y el tipo de problema. También clasifican una lista de problemas de acuerdo a lo anterior y al tipo de relación entre los datos (dinámica o estática). Posteriormente analizan estos tipos de problemas en diversas lecciones de los libros para los alumnos resolviéndolas y reflexionando sobre los procedimientos que utilizaron.

Desde este trabajo se considera al Taller como una propuesta congruente con sus propios objetivos y con los señalados en el enfoque con el que se estructura la enseñanza de las matemáticas en la educación primaria. La parte medular del trabajo en el capítulo dedicado a la suma y a la resta es el reconocimiento de la propuesta, es decir, que los profeso-

[3] En el capítulo II se analizará esta clasificación de los tipos de problemas aditivos.

res conozcan los materiales de trabajo con los que cuentan, que analicen posibles respuestas y procedimientos de los alumnos, que desarrollen habilidades de estudio y que hagan algunas reflexiones sobre su práctica docente. En la mayor parte de las actividades que les propone realizar el Taller los profesores no interactúan directamente con problemas aditivos como un contenido de aprendizaje para ellos como alumnos en el Taller, sino que los “reconocen” en las actividades una vez que han leído los artículos que les proporcionan información para posteriormente demostrar que han comprendido lo leído a través de una serie de actividades. El profesor no siempre se ve retado a interactuar con los problemas aditivos porque es poco probable que encuentre una situación problemática para él en las actividades que se le proponen.

Propósito de la investigación

A diferencia de lo que se propone en el capítulo de “La suma y la resta” del CNA, en esta investigación la intención fue que el profesor se enfrentara a problemas aditivos que representasen un reto para él para que pudiera cuestionar sus conocimientos e ideas sobre ellos y las movilizara hacia otras más eficientes y eficaces que implican la consideración del establecimiento de relaciones semánticas entre los datos, su control a través de una representación gráfica y la correspondencia entre dicha relación y los recursos de cálculo (operatoria mental o escrita, convencional o no) que hacen posible la resolución de los problemas.

Si bien es cierto que el tipo de problemas que se emplearon con los maestros no son parte de los aprendizajes que se esperan de los alumnos de primaria, es importante que los maestros manejen conocimientos matemáticos más amplios que les permitan maniobrar más cómodamente en clase (Fuenlabrada, 1988). Se presume que si los docentes conocen distintos tipos de situaciones aditivas y cómo las operaciones de suma y resta adquieren significados diferentes en ellas, podrán contar con más y mejores recursos didácticos. Vergnaud afirma:

> “En lo que concierne al aprendizaje de las matemáticas es, sólo un conocimiento claro de las nociones que se van a enseñar el que puede permitir al maestro comprender las dificultades encontradas por el niño y las etapas por las cuales pasa.” (1985, p. 9)
>
> “Las estructuras aditivas son un campo conceptual difícil, más difícil de lo que muchos maestros suponen. Comprender las estructuras aditivas comprende un proceso a largo plazo que comienza con algunos problemas simples de encontrar-estado-final y va hasta la adolescencia con la sustracción de transformaciones de signo opuesto.” (1985, p. 58)

Además, el abordaje de problemas que para ellos representaran un reto, permitió evidenciar la parte esencial del enfoque propuesto: una enseñanza que pretende construir los conocimientos y habilidades a través de la resolución de problemas (y no los problemas para practicar operaciones y fórmulas). Se piensa que ello puede favorecer la disposición de los maestros a utilizar los problemas de manera exploratoria, lo que podría tener una importante influencia en su práctica, por ejemplo al seleccionar o diseñar los problemas que utilicen en clase o en la evaluación que hacen a las preguntas, respuestas y procedimientos de los alumnos (Verschaffel, *et al*, 2000*).*

Resumiendo, el propósito de esta investigación fue *diseñar y experimentar, en el contexto de una ingeniería didáctica, una secuencia de enseñanza y de aprendizaje que pusiera en juego los conocimientos y estrategias que los maestros poseen acerca de problemas aditivos con la intención de que reconocieran la importancia del establecimiento de la relación semántica entre los datos*. Cabe señalar que la ingeniería didáctica en la investigación es un recurso exploratorio que no pretende ser paradigmático.

Descripción de la organización del documento

Este documento está dividido en cuatro capítulos. En el primero se comenta brevemente el proceso de resolución de problemas desde los requerimientos cognitivos del sujeto, seguido por una descripción general de lo reportado en algunas investigaciones acerca de las características que adquiere la resolución de problemas matemáticos en contextos escolares, mirándolos desde el alumno, el maestro y el problema mismo. El segundo capítulo está dedicado a explicitar qué referentes teóricos y metodológicos se eligieron para realizar el presente trabajo, comenzando por discutir distintas clasificaciones de los problemas aditivos, la elección de la 4ª categoría de Vergnaud (1985) como tipo principal de problemas para abordar en la parte experimental con los maestros, y el esquema que propone dicho autor para representar la relación entre los datos de problemas de la 4ª categoría. La representación, tanto a nivel mental como externo, cobra en este trabajo una gran importancia ya que constituyó la principal estrategia didáctica que se siguió en la parte experimental, por lo que se le dedica un apartado. Parte medular del análisis y del propio diseño de las situaciones que se propusieron a los maestros deviene de la Teoría de las situaciones didácticas de G. Brousseau, que se retoma también en el capítulo segundo. Se refiere a continuación cuál fue la opción metodológica elegida: la ingeniería didáctica. Al final de dicho capítulo se describen los referentes empíricos que se pretendían obtener de la fase experimental. El tercer capítulo se dedica al análisis de la fase experimental a nivel global con la intención de ofrecer un panorama general de la secuencia de la ingeniería (los resultados obtenidos se comentan a profundidad hasta el capítulo IV). Comienza haciendo un recuento de las fases en el diseño de la ingeniería y de la toma de decisiones para las sesiones experimentales. A continuación se describe la secuencia que se siguió en las seis sesiones experimentales y posteriormente se hace una semblanza de los maestros con el fin de dar a conocer quiénes eran los participantes. En el cuarto y último capítulo se analizan los datos obtenidos en la experimentación bajo dos categorías: El “dato faltante” y Procesos de representación. Como parte final, se ofrecen algunas conclusiones y comentarios.

Capítulo I PROBLEMAS MATEMÁTICOS ESCOLARES

Los problemas matemáticos escolares han sido definidos (Gerofsky, 1996; Verschaffel, *et al*, 2000) como descripciones de situaciones problemáticas que plantean alguna historia enmarcada en un contexto, en los que al menos aparecen dos datos numéricos y una o más preguntas dirigidas generalmente a la obtención de otro dato numérico que pueden responderse realizando una o más operaciones entre los datos numéricos dados. La situación esbozada en el texto y que contextualiza los datos numéricos suele ser hipotética, y puede o no ser cercana a problemas reales. La forma de presentación varía y puede incluir una tabla, un gráfico o un dibujo o plantearse oralmente. En los problemas se distinguen varios componentes comprendidos en dos estructuras:

1) *Estructura matemática*. Comprende la naturaleza de las cantidades dadas y desconocidas involucradas en el problema así como la clase de operaciones matemáticas mediante las cuales a partir de las cantidades dadas es posible obtener las desconocidas.
2) *Estructura semántica*. Comprende la manera en la que se establecen en el texto las relaciones matemáticas, el contexto que se plantea en el problema, el formato en el que se presenta (que incluye la ubicación de la pregunta, la complejidad léxica y gramática, la presencia de información superflua, etc.) (Verschaffel, *et al*, 2000).

1 Resolución de problemas. Aspectos cognitivos

> "Se entiende por proceso de resolución de un problema la actividad mental desplegada por el resolutor desde el momento en que, siéndole presentado un problema, asume que lo que tiene delante es un problema y quiere resolverlo, hasta que da por acabada la tarea." (Puig y Cerdán, 1988, p. 21)

La identificación de las acciones físicas y mentales que el resolutor exitoso lleva a cabo al enfrentarse a un problema ha sido una meta de la psicología educativa y de la didáctica. Conocer cómo y en qué orden ocurren dichas acciones permitiría, según algunos, contar con un modelo contra el cual comparar procedimientos no exitosos e incluso que el propio modelo podría ser llevado al aula como objeto de enseñanza (Marshall, 1995; Maza, 1995). Diversos autores se han ocupado de dicha tarea[4]. De estos trabajos cabe señalar el de Romberg (1982) que apunta la importancia de comprender el significado semántico antes que proceder a la cuantificación de los elementos, ya que así la semántica implicada en el problema puede expresarse sintácticamente en forma de una operación, luego habría que efectuar el cálculo y expresar el resultado. Por su parte, representarse las cantidades numéricas del problema, comprender las relaciones entre ellas y la cantidad buscada, y establecer una relación de equivalencia entre las acciones efectuadas y el resultado final forman parte del análisis que Maza (1995) señala. Descaves[5] plantea dos fases en interacción: la construcción de lo que llama la representación del problema y el cálculo de su solución. La interacción entre ellas estaría mediada por ciertos registros semióticos como esquemas o dibujos que pueden funcionar a manera de interfases interpretándose primero como modelización de la situación y después como soporte que permitiría transformaciones simbólicas de los problemas. La actividad cognitiva en torno a la resolución de problemas se desarrolla en dos vertientes, según Julo[6], una relativa a la representación y la otra a la acción. Éstas se encuentran ligadas e incluyen la interpretación y selección de la información, el proceso de estructuración de la representación y el proceso de operacionalización. Novick[7] señala una diferencia interesante, los procesos involucrados en la resolución de problemas son distintos dependiendo de si la solución es obvia o no para el sujeto. Cuando lo es, al sujeto le basta recordar procedimientos que anteriormente fueron exitosos, pero cuando no es el caso debe construir nuevas formas de operar a partir de lo que conoce y sabe hacer. Así, los nuevos procesos son cimentados por analogía.

Hay que señalar sobre los procesos de resolución que lo "problemático" de un problema no es un atributo del mismo sino un valor que se obtiene al considerar la relación entre el problema (de qué clase es, qué tipo de números aparecen en él y en qué orden, cómo se presenta, etc.) y el resolutor (los conocimientos y habilidades con los que cuenta). Para que un problema resulte problemático para el sujeto que lo recibe, debe situarse a una distancia cognitiva lo suficientemente lejana de sus conocimientos como para establecer un reto

---

[4] Para una descripción detallada ver Puig y Cerdán, (1988).
[5] Citado en: Peltier, (2003).
[6] Citado en: Peltier, (2003).
[7] Citado en: Maza, (1995).

pero sin alejarse tanto que se vuelva inalcanzable. Así, un problema puede ser problemático para un alumno y no serlo para el de al lado.

2 Planteamiento de problemas de matemáticas en la escuela

Es común escuchar que los alumnos no comprenden los problemas, que alumnos capaces de efectuar cálculos algorítmicos tienen dificultades al resolver problemas principalmente porque no saben qué operaciones deben efectuar, cómo acomodar las cantidades en ellas y cómo interpretar el resultado del cálculo. Por ello, los alumnos suelen preguntarle al maestro si el problema "es de suma o de resta", lo que es también conocido como "el problema de los problemas".

Una de las interpretaciones que se han hecho desde la investigación ante los resultados poco alentadores de los alumnos en la resolución de problemas matemáticos, es que en los problemas el vínculo con la "vida real" es difuso o incluso inexistente, y que por lo tanto, no se favorece en los alumnos la adquisición de sentido a través de contextos que sean "reales" o posibles. La idea de que la solución es llevar al aula situaciones "reales" tal y como se manifiestan fuera de ella es ingenua, porque no podría efectuarse con los mismos significados, consecuencias, intereses y grado de involucramiento en la situación por parte de los resolutores. Además, parte de las características de la resolución de problemas en situaciones no-escolares es la evitación del cálculo numérico hasta donde sea posible, lo que no es consecuente en cierta forma con los objetivos escolares (Lave, 1992). Nesher (1980)[8] los considera "estereotipos" de situaciones hipotéticas que resultan significativos sólo entre las paredes del aula; y Lave (1992, p. 76) afirma que los problemas son una manera de "(…) transmitir a los niños el mensaje de que cuando crezcan y se muevan en el mundo realmente *van a necesitar* las matemáticas que están aprendiendo." El "realismo" en el aula (entendido en esta forma) ciertamente puede contribuir a que los problemas obtengan una ganancia en contextos y formas de presentación, pero no puede garantizar que se traduzca en una ganancia de sentido para los alumnos.

Algunas reacciones tras los primeros análisis de estudios como el de "La edad del capitán" fueron de preocupación e incluso de indignación por los comportamientos irracionales e incluso subnormales que alumnos "normales" mostraron (Baruk, 1985)[9], pero una mirada más abarcativa al trabajo en el aula permitió comenzar a comprender fenómenos complejos como el establecimiento de un "contrato didáctico" (concepto que se comentará en el ca-

[8] Citado en: Puig, Luis y Cerdán, Fernando (1988).
[9] Citado en: Verschaffel, *et al* (2000).

pítulo II) para explicarse las respuestas aparentemente inverosímiles que daban los alumnos a esos problemas. Brevemente, podría decirse que los alumnos infieren las reglas explícitas e implícitas que permiten el trabajo en el aula, pues mediante dicho contrato alumnos y maestro crean un discurso común y establecen formas de proceder constantes que permiten el intercambio de informaciones y la interpretación de ellas. Ciertos tipos de "contrato" pueden favorecer el desarrollo de estrategias superficiales para resolver problemas de matemáticas. Es muy común en las aulas el uso de un esquema para todos los problemas aritméticos en el que el alumno debe escribir los *Datos*, la *Operación* (casi siempre es una sola) y el *Resultado*, lo que no le evita la elección de una operación y la interpretación del resultado. Es también frecuente la búsqueda de palabras "clave" en los enunciados (como "le regalan", "se come", "junta", etc.) que no necesariamente propicia la comprensión de la relación semántica y que además tiene un considerable margen de error[10]. Después de algunos años de experiencia bajo dichas prácticas, los estudiantes suelen resolver los problemas de una manera mecánica que puede llegar incluso a parecer más un asunto de simulación (en términos de sentido y utilidad), en el que el principal reto que enfrentan los alumnos es desenmarañar las "reglas del juego" (Verschaffel, *et al*, 2000), es decir, construir ideas acerca del papel de los problemas en la enseñanza, sobre la estructura de los problemas típicos y sobre algunas reglas implícitas para resolver ambigüedades y omisiones en los enunciados. Ello puede explicar, al menos en parte, las respuestas aparentemente inverosímiles de los alumnos ante problemas matemáticos. Tiene sentido para ellos realizar algún cálculo con los datos numéricos dados (asumen que como alumnos es lo que deben hacer), aunque el resultado del problema no tenga sentido en términos matemáticos o contextuales.

Algunas de las características que adquieren los problemas matemáticos cuando se plantean en la escuela tienen también que ver con el grado de "enseñabilidad" de lo matemático (Block y Fuenlabrada, 1996). Los elementos instrumentales (como técnicas, procedimientos, reglas, etc.), es decir, la sintaxis de ese sistema simbólico que la matemática ha construido para sí misma, es relativamente más enseñable en términos de lo directamente evidenciable. Esto resulta cierto tanto para el maestro en su calidad de enseñante de las reglas del sistema simbólico, como para el alumno en su papel de receptor de tales conocimientos, ya que para ambos es evidente el error y el acierto. En cambio, la parte del sentido en las matemáticas, aquello que involucra las relaciones entre los elementos considerados o dicho de otra manera, la semántica de ese sistema simbólico, no es evidente, consiste en

[10] Como cuando en un problema dice "¿cuánto hay *entre los dos*?" y los alumnos efectúan una división.

abstracciones que para ser enseñadas necesitan "materializarse", hacerse ver mediante elementos perceptibles sensorialmente para lograr cierto grado de "evidencialidad".

Además del tratamiento didáctico, es claro que el éxito de los alumnos en la resolución también está en función de la estructura del problema, la ubicación de la incógnita y el contexto planteado en el enunciado, principalmente. Vergnaud (1982) clasifica los problemas aditivos en seis categorías[11] y señala que aunque la operación que los resuelva sea la misma[12], hay una gran diferencia para los alumnos entre los problemas de la 1ª categoría y los de la 2ª (que pueden resolver uno o dos años más tarde que los de la 1ª), o bien los de la 4ª categoría (en la que el 75% de los alumnos todavía falla a los 11 años). No es cuestión de enseñar a los alumnos alguna clasificación de problemas aditivos, sino de reconocer y comentar en la clase de matemáticas que dentro de los problemas que pueden resolverse efectuando una suma o una resta, existen diversos tipos, y ofrecer a los alumnos un menú más variado de problemas. Ello necesariamente requiere de un profesor que maneje cómodamente las estructuras aditivas y que sepa cómo instrumentar el enfoque.

Resumiendo. Existen distintas maneras de analizar los procesos de resolución que llevan a cabo los sujetos al enfrentarse a un problema de matemáticas, pero entre los investigadores del tema hay coincidencia en la importancia del establecimiento de la relación semántica entre los datos (la comprensión de cómo juegan esos datos numéricos o la toma de sentido, como lo llaman algunos) como punto de partida para las posteriores acciones. Ese primer paso no siempre se ve favorecido ni por el tipo de problemas que se encuentran usualmente en los libros (referidos a contextos típicos, agrupados por tipo de operación o incluso con encabezados como "problemas de resta", generalmente conteniendo sólo los datos necesarios, con palabras en la pregunta como "¿cuántos *quedan*, o *sobran*, o *le restan*?", etc.); ni por el tratamiento didáctico que muchas veces se les da en el aula (cuyo énfasis suele estar centrado en la capacidad del alumno para aplicar un algoritmo). Las características del problema (como la estructura, la posición del dato que debe hallarse, el contexto, etc.) son también elementos que hacen variar su dificultad, y ello no siempre es reconocido, explicitado y abordado en el trabajo escolar.

[11] La caracterización que Vergnaud hace sobre el particular, se discutirá en el capítulo II.

[12] Por ejemplo, en el problema *"En la juguetería venden balones de fútbol y de básquetbol. En total hay 15 balones, de los cuales 8 son de básquetbol. ¿Cuántos son de fútbol?"* la operación que resuelve es 15 - 8; y en *"Angélica tenía 8 barcos de papel. Construyó otros y ahora tiene 15. ¿Cuántos construyó?"* también resuelve 15 - 8, pero el nivel de dificultad es distinto.

Capítulo II **REFERENTES TEÓRICO Y METODOLÓGICO**

1 Clasificaciones de los problemas aditivos

Los problemas que involucran relaciones aditivas han sido clasificados de acuerdo a diversos criterios. Poder señalar diferencias entre uno y otro tipo de problema resulta útil para comprender las habilidades y los conocimientos que cada uno demanda para su resolución, lo que eventualmente podría traducirse en estrategias didácticas específicas.

Una de las clasificaciones más utilizadas en la primaria para distinguir qué tipo de relación semántica se establece entre los datos numéricos es la de Thomas Carpenter y James Moser (1982). Ellos distinguen tres dimensiones en los problemas aditivos de acuerdo a las acciones o relaciones establecidas entre los números de los problemas. La *primera dimensión* distingue si el tipo de relación entre los objetos implicados es dinámica o estática. Una relación dinámica supondría cambios en alguna colección inicial, en cambio en una estática no existe ninguna acción que modifique a las cantidades (como cuando se comparan dos colecciones ya que no se altera ninguna). La *segunda dimensión* señala si hay una relación de inclusión entre las cantidades del problema, es decir, si dos de ellas son subconjuntos de una tercera, que es el conjunto que comprende a las dos anteriores. Para problemas en los que se establece una relación dinámica (aquellos que involucran acción) hay una *tercera dimensión*, que distingue entre problemas en los que resulta un incremento de la cantidad inicial, o un decremento. Así pues, señalan seis clases de problemas aditivos a los que llaman: *Juntando*, en los que por medio de alguna acción se juntan dos cantidades; *Separando*, involucran un decremento en la cantidad inicial; *Parte-Parte-Todo*, describen la relación entre una entidad y sus partes; *Comparación*, en los que se comparan dos cantidades disjuntas; *Igualar-sumando* e *Igualar-restando*, comprenden la comparación y la acción hasta lograr la igualación entre dos cantidades disjuntas. Posteriormente redefinen su clasificación y sólo consideran cuatro tipos de problemas, los de *Cambio* (que incluyen a los de Juntando y Separando), los de *Combinación* (llamados antes Parte-Parte-Todo), *Comparación* (que no sufre cambios respecto a la anterior clasificación) e *Igualación* (sin distinguir si es sumando o restando).

Tal análisis ha tenido una fuerte influencia en el diseño de los contenidos escolares en aritmética, predominando los de Cambio y Combinación casi siempre ubicando la incógnita en el tercer elemento. De hecho, el asunto de la posición de la incógnita es también considerado por ellos como otra variable en los problemas aditivos, así, en cada una de las cuatro clases de problemas hay tres posibilidades dependiendo del lugar en el que se sitúe la pregunta. Por ejemplo, en el problema:

> *A Daniel le regalaron 13 carritos en su cumpleaños. Salió a jugar con ellos y al volver a casa notó que había perdido 7. ¿Cuántos carritos le quedan a Daniel?*

En el problema se consideran tres elementos numéricos, la cantidad inicial, una transformación sobre esa cantidad y una nueva cantidad que resulta de la acción y es la que el resolutor debe calcular. En términos aritméticos el problema estaría planteado como 13 - 7 = ? y podría efectuarse una resta sin alterar el orden en el que aparecen los datos en el enunciado. Los problemas en los que la pregunta se sitúa al final se conocen como “de tipo canónico” por ser los más usuales en la escuela. Ahora bien, si el problema fuera:

> *A Daniel le regalaron 13 carritos en su cumpleaños. Salió a jugar con ellos y se le perdieron algunos. Al volver a casa los contó y sólo le quedaban 6. ¿Cuántos carritos perdió Daniel?*

El problema es muy parecido al anterior pero ahora la pregunta está en otro sitio. El enunciado nos proporciona una cantidad inicial y una final, y lo que hay que averiguar es la transformación que tuvo que haber sufrido la cantidad inicial para dar como resultado la final, o sea que la pregunta está situada en el segundo elemento, la transformación. Aritméticamente sería 13 - ? = 6 y para resolverlo el alumno tendría que “contar hacia arriba” desde el 6 hasta llegar al 13, o bien restar 13 - 6. Ambos casos suponen una alteración del orden de los datos de acuerdo a como aparecen en el problema. Una tercera posibilidad sería:

> *A Daniel le regalaron algunos carritos en su cumpleaños. Salió a jugar con ellos y perdió 7. Ahora sólo le quedan 6. ¿Cuántos carritos le regalaron a Daniel?*

Este tipo de problemas son más difíciles para los alumnos ya que se desconoce el punto de partida, la cantidad inicial, es decir ? - 7 = 6. Hay que averiguar la cantidad desconocida atendiendo a la transformación que sufrió esa cantidad y a lo que resultó una vez efectuada la acción. El alumno podría optar por una estrategia de “ensayo y error” hasta encontrar qué número cumple la condición de “si le resto 7 obtengo 6” o bien, sumar la transformación y el resultado final. Aunque en los tres problemas los datos numéricos involucrados son los mismos y son todos de *Cambio*, la incógnita no está ubicada en el mismo lugar y por ello cambia la dificultad para los alumnos.

Gerard Vergnaud realiza una clasificación de las situaciones aditivas considerándolas como un *campo conceptual*

> "(…) cuyo dominio se desarrolla a través de un largo periodo de tiempo mediante la *experiencia, maduración* y *aprendizaje.* Por campo conceptual me refiero a un informal y heterogéneo conjunto de problemas, situaciones, conceptos, relaciones, estructuras, contenidos, operaciones de pensamiento conectadas unas a otras y susceptibles de ser combinadas durante el proceso de adquisición." (1982, p. 40)

Vergnaud pretende comprender en su clasificación a todas las clases de problemas aditivos y no sólo brindar un marco basado en las operaciones. Problematiza el término "dinámico" (usado por Carpenter y Moser) para describir una relación que involucra acción, señalando que dicha acción ejercida por un personaje en la historia del problema puede no significar ninguna transformación de las cantidades numéricas y viceversa, una transformación puede no tener un correlato de acción por parte de los personajes. Así, afirma que debe distinguirse cuidadosamente entre *acción* (lo que hace un actor), *transformación* (cambio en el estado inicial o uno intermedio) y *operación* (procedimiento usado para resolver un problema).

La clasificación de Vergnaud considera seis categorías que se sustentan en tres conceptos principales: *medida*, *transformación temporal* y *relación estática.* En cuanto a las medidas, un elemento que supone una importante diferencia entre ésta clasificación y la descrita anteriormente, es la distinción entre dos tipos de números: los *naturales* y los *relativos*. Un número natural es aquel que expresa una cantidad o medida y no tiene signo, es un número para contar. El número relativo sí tiene signo y como su nombre lo indica, es relativo a uno natural, es decir, está en función de una medida. En la expresión "hay 8 vasos en la alacena" el 8 es un número natural porque expresa una medida, dice cuántos vasos hay. En "hay 8 vasos más en la alacena" el 8 es ahora relativo, supone 8 vasos adicionales a una cantidad que ya hay en la alacena (aunque puedan ser cero vasos). Incluso si dicha información no se proporciona podría afirmarse que hay +8 vasos. Desde este trabajo, se añadiría un elemento que altera en cierta forma la distinción entre naturales y relativos que hace Vergnaud. Los números enteros poseen un aspecto cardinal, así pues, los negativos también sirven para contar (piénsese diversos aspectos económicos en los que hay déficit y superávit, por ejemplo), por lo cual también podría hablarse de números naturales (según nomenclatura de Vergnaud) con signo, el número negativo puede ser una medida y también una transformación; sobre el particular se regresará cuando se analice la experiencia.

El que una relación sea dinámica o estática (según los términos de Carpenter y Moser) tiene que ver con si en el problema hay o no una transformación temporal. Por ejemplo, en los siguientes problemas:

En una canasta hay 19 frutas de las cuales 14 son manzanas y el resto son peras. ¿Cuántas peras hay? y,
Joel tenía 14 estampas y hoy compró algunas más. Ahora tiene 19. ¿Cuántas estampas compró hoy?

La relación en el primero no supone ningún cambio en cualquiera de las dos colecciones (manzanas y peras) sino una combinación en la que no se altera la identidad de los subconjuntos y que plantea una situación atemporal en la que el orden de los mismos podría variarse sin modificar el resultado. El segundo problema presenta una cantidad inicial que se modifica para dar lugar a una nueva, y el orden temporal (que podría distinguirse incluso si no contuviera la palabra "hoy") resulta imprescindible para comprender la relación. En éste sí se alteraría el problema si se cambiara el orden temporal, por ejemplo:

Joel tenía 19 estampas por la mañana. Le regaló una estampa a cada una de sus hermanas y ahora tiene 14. ¿Cuántas hermanas tiene Joel?

Vergnaud desarrolla de manera paralela un sistema de representación simbólica de las seis categorías de problemas aditivos, ya que, según su visión, la relación semántica que se establece entre los datos (a la que llama "cálculo relacional") en algunas de las categorías no puede ser expresada mediante ecuaciones algebraicas o diagramas de Venn, sistemas comúnmente utilizados en la escuela. En sus esquemas es posible distinguir cuando un número es natural o relativo (y si es el caso, su cualidad positiva o negativa) y si en la relación debe o no considerarse cierto orden temporal, entre otras cosas.

Las seis categorías se describen a continuación y se transcriben los ejemplos que elabora el autor para cada una (Vergnaud, 1985):

Primera categoría: dos medidas se componen para dar lugar a una medida.
Pablo tiene 6 canicas de vidrio y 8 de acero. En total tiene 14 canicas
6, 8, 14 son números naturales

Segunda categoría: una transformación opera sobre una medida para dar lugar a una medida.
Pablo tenía 7 canicas antes de empezar a jugar. Ganó 4 canicas. Ahora tiene 11
7 y 11 son números naturales, +4 es un número relativo, y
Pablo tenía 7 canicas antes de empezar a jugar. Perdió 4 canicas. Ahora tiene 3
7 y 3 son números naturales, -4 es un número negativo

Tercera categoría: una relación entre dos medidas.
Pablo tiene 8 canicas. Jaime tiene 5 menos; entonces tiene 3.
8 y 3 son números naturales, -5 es un número relativo

Cuarta categoría: dos transformaciones se componen para dar lugar a una transformación.
Pablo ganó 6 canicas ayer y hoy perdió 9. En total perdió 3.

+6, -9 y -3 son números relativos

Quinta categoría: una transformación opera sobre un estado relativo (una relación) para dar lugar a un estado relativo.

Pablo le debía 6 canicas a Enrique. Le devuelve 4. Sólo le debe 2.
-6, +4 y -2 son números relativos

Sexta categoría: dos estados relativos (relaciones) se componen para dar lugar a un estado relativo.

Pablo le debe 6 canicas a Enrique, pero Enrique le debe 4. Pablo le debe entonces sólo 2 canicas a Enrique. También,
Pablo le debe 6 canicas a Enrique y 4 canicas a Antonio. Debe 10 canicas en total.
-6, +4 y -2 son números relativos

Para hablar del tipo de procesos que los resolutores llevan a cabo al enfrentarse a los problemas Vergnaud (1982) distingue entre el “cálculo numérico” y el “cálculo relacional” (que en este trabajo es llamado establecimiento de la relación semántica entre los datos). El primero alude a la realización de las cuatro operaciones aritméticas mientras que el segundo se refiere a “(…) las operaciones de pensamiento que son necesarias para manejar las relaciones involucradas en la situación (…) no son necesariamente expresadas o explicadas por los niños, sólo pueden ser hipotetizadas observando las acciones de los niños.” (p. 40). Depende del “cálculo relacional” elegir qué operación debe efectuarse para resolver un problema considerando la posición de la pregunta.

Para efectuar el “cálculo relacional” el sujeto pone en juego ideas o conceptos, experiencias y aprendizajes previos que le permiten darle sentido a la situación. Vergnaud utiliza el concepto de “teorema en acción” para explicar esas ideas o conceptos que implícitamente orientan los procedimientos que los resolutores siguen al enfrentarse a un problema, y añade que para un niño que ha establecido una relación semántica correcta entre los datos, la operación que debe realizar es obvia. “(…) comprender un nuevo invariante relacional o una nueva propiedad de un invariante provee la elección de la operación numérica correcta. El niño es ahora capaz de ‘aritmetizar’ una estructura cualitativa.” (1982, p. 58).

1.1 Cuarta categoría de relaciones aditivas de Vergnaud

Los problemas aditivos, como se vio, no tienen el mismo nivel de dificultad. Además de las diferencias entre categorías, elementos como la posición de la incógnita, el cálculo numérico necesario, el orden y la presentación de la información, y el tipo de contenido y de relaciones consideradas, hacen variar la dificultad. Vergnaud (1985) señala:

> “El contenido de los problemas, el dominio de relaciones a las cuales hacen referencia, pueden también desempeñar un papel importante. Canicas ganadas o perdidas, cantidades de dinero gastadas o ganadas, kilómetros recorridos, cantidades físicas consumidas o producidas, no pueden ponerse en el mismo plano en la enseñanza primaria, por

> la simple razón de que las nociones que se requieren no son del mismo nivel (…) Por otra parte, la forma misma de la relación puede desempeñar un papel. No es necesariamente equivalente para el chiquillo decir que ‘ganamos 12 canicas’ a decir que ‘tenemos 12 canicas más’.” (pp. 176-177)

Las tres primeras categorías de la clasificación de Vergnaud son abordadas en la escuela primaria (aunque no con la misma frecuencia y variedad de situaciones), a diferencia de las últimas tres que no se consideran objeto de enseñanza de ese nivel educativo por presentar mayores dificultades (debido a que operan sobre estados relativos y transformaciones y no con cantidades o medidas, y a que se efectúan cálculos con números negativos). En categorías 4ª, 5ª y 6ª el resolutor puede tener la sensación de que opera en estados de transición y sentir desconcierto (Vergnaud, 1982) o incluso llevarlo a pensar que es un problema que no puede resolverse porque le falta información (no encuentra siquiera un dato numérico que pueda tomar como base para que sobre él actúen las transformaciones).

Para que los problemas de suma y de resta representaran un reto para los maestros de primaria se consideró necesario utilizar una categoría no tan frecuentemente empleada en ese nivel y se eligió la 4ª, en la que dos transformaciones se componen para dar lugar a otra transformación. Aunque Puig y Cerdán (1988) señalan, refiriéndose a los problemas de la 4ª categoría, que:

> “Las dificultades nuevas que presentan estos problemas tienen su raíz en los aspectos conceptuales nuevos que traen consigo estos nuevos tipos de números, y no en la estructura semántica del problema; esto es, desde el punto de vista de las cantidades, sin hacer referencia a qué tipo de cantidades se están manejando, la estructura de estos problemas es idéntica a la de los problemas que aparecen en los primeros niveles del currículo.” (p. 108)

Desde este trabajo se considera que el desconocimiento de medidas plantea una dificultad distinta para los resolutores independientemente del tipo de número que se emplee. Considerando un punto de vista meramente matemático, efectivamente sólo se trata de números nuevos en estructuras conocidas, pero esos “nuevos aspectos conceptuales” a los que aluden Puig y Cerdán tienen que ver, entre otras cosas, con una manera diferente de concebir en sus usos y funciones a “la suma y la resta”. De hecho, “la resta” desaparece como tal para dar lugar a una nueva suma (algebraica).

Puesto que se trabajará con la 4ª categoría, cabe hacer una distinción entre lo que es propiamente una composición de transformaciones, las transformaciones elementales y la transformación compuesta. Las elementales (dos o más) están ligadas a la temporalidad y la compuesta las sustituye sin el elemento temporal, es decir, las elementales inciden sobre el estado inicial transformándolo con cierto orden según aparecen en la redacción del problema dando lugar a uno o más estados intermedios, mientras que la elemental prescinde de esos momentos en el tiempo y permite ir del estado inicial al final. Como ejemplos de problemas de la categoría en cuestión, se transcriben los siguientes[13]:

1. *Juan jugó dos partidos de canicas. En el primero ganó 16 canicas. En el segundo ganó 9. ¿Qué sucedió a fin de cuentas?*
2. *Juan jugó dos partidos de canicas. En el primero ganó 16 canicas. En el segundo perdió 9. ¿Qué sucedió a fin de cuentas?*
3. *Juan jugó dos partidos de canicas. En el primero ganó 9 canicas. En el segundo perdió 16. ¿Qué sucedió a fin de cuentas?*

Todos los datos numéricos de estos problemas corresponden a alguna transformación y estas, como se sabe, pueden ser positivas o negativas. Los resultados (en términos de ganancia o pérdida) de los dos partidos de canicas son la primera y segunda transformaciones elementales, respectivamente. Efectuando una “composición” de estas dos transformaciones elementales se obtiene la transformación compuesta (que es el dato que debe hallarse en los ejemplos 1, 2 y 3). En cambio, en el problema:

4. *Juan jugó dos partidos de canicas. Jugó el primero y cuando jugó el segundo perdió 16 canicas. Haciendo un balance de los dos juegos, notó que había perdido 7 canicas. ¿Qué pasó en el primer juego?*

En los dos partidos de canicas siguen estando las dos transformaciones elementales, pero una es desconocida. La transformación compuesta es el balance de canicas tras los dos partidos y para responder la pregunta (ubicada en la primera elemental o el primer partido) debe hacerse una composición de la segunda elemental (las 16 canicas que perdió en el segundo partido) y la compuesta (las 7 canicas que perdió tras los dos partidos).

Como se ve en los ejemplos, en la 4ª categoría puede desconocerse una de las transformaciones elementales o la transformación compuesta. La siguiente tabla considera los casos posibles de problemas de la cuarta categoría cuando trata de hallarse la transformación compuesta[14]. (Tablas similares pueden hacerse si la incógnita está en T_1 o T_2).

	$T_1 > 0$ $T_2 > 0$	$T_1 < 0$ $T_2 < 0$	$T_1 > 0$ $T_2 < 0$	$T_1 < 0$ $T_2 > 0$
$\|T_1\| > \|T_2\|$	**1** $T_C > 0$	$T_C < 0$	**2** $T_C > 0$	$T_C < 0$
$\|T_1\| < \|T_2\|$	$T_C > 0$	$T_C < 0$	**3** $T_C < 0$	$T_C > 0$

T_1 es la primera transformación elemental, T_2 la segunda y T_C la transformación compuesta. Los números en negritas que aparecen en la tabla corresponden a los problemas 1 al 3 de los ejemplos anteriores.

[13] Tomado de: Vergnaud, Gerard (1985, p. 180).
[14] Tomado de: Vergnaud, Gerard (1985).

Como se afirmó, los valores absolutos de las transformaciones y la posición de la incógnita hacen variar de nivel de dificultad a los problemas de la 4ª categoría. Vergnaud (1982) reporta algunos resultados empíricos cuando contrasta la actuación de alumnos de cinco grados (de 1º a 5º de primaria) ante problemas de la 2ª y 4ª categorías, ambas considerando la misma información numérica. Se presentaron seis problemas de dos en dos (uno de la 2ª y otro de la 4ª) variando la posición de la incógnita entre cada par de problemas. Dos de los problemas planteados fueron los siguientes:

> *Bertrand juega un partido de canicas. Pierde 7 canicas. Después del juego tiene 3 canicas. ¿Cuántas canicas tenía antes del juego?*
>
> *Bruno juega dos partidos de canicas. Juega el primer partido, luego el segundo. En el segundo pierde 7 canicas. Después de esos dos partidos ha ganado 3 canicas en total. ¿Qué pasó en el primer partido?*

En los dos problemas se desconoce un primer dato numérico (una medida en el caso del problema de Bertrand, correspondiente a la 2ª categoría, y la primera transformación elemental en el caso del de Bruno, perteneciente a la 4ª). A pesar de que el cálculo numérico necesario para resolver los problemas era el mismo en las dos categorías consideradas (7 + 3), los pertenecientes a la 4ª categoría presentaron mayores dificultades para los alumnos, tanta como tres años de diferencia para resolver exitosamente el segundo.

Simbólicamente el problema de Bruno podría representarse:

T_1	T_2	T_C
?	-7	+3

Pero también dentro de la 4ª categoría hubo diferencias entre los tres problemas presentados. El problema de Bruno resultó más difícil que otros como:

> *Christian juega dos partidos de canicas. En el primer partido gana 5 canicas. Juega un segundo partido. Después de los dos partidos ganó 9 canicas en total. ¿Qué pasó en el segundo partido?*

El problema de Christian tiene una estructura como la siguiente:

T_1	T_2	T_C
+5	?	+9

La pregunta en el problema de Christian está puesta en la segunda transformación elemental y al ser los dos datos numéricos positivos, el problema podía fácilmente interpretarse como uno de la 2ª categoría (estado inicial, transformación, estado final). Por la misma razón, cuando la incógnita se situó en el tercer dato numérico la dificultad fue menor, como en el problema de Pierre:

> *Pierre juega dos partidos de canicas. En el primero gana 6 canicas. En el segundo pierde 4 canicas. ¿Qué pasó tras los dos partidos?*

Que tiene la siguiente estructura:

T_1	T_2	T_C
+6	-4	?

La tendencia de los alumnos a considerar a las transformaciones como estados en ocasiones les permitió resolver el problema, pero también los extravió. Puede resultar correcta cuando T_1 y T_2 son positivas (como en el problema de Christian) o siendo T_1 positiva y T_2 negativa pero $|T_1| > |T_2|$ (como en el problema de Pierre). Resulta incorrecto si $T_1 > 0$ y $T_2 < 0$ y $|T_1| < |T_2|$, como en "en el primer partido gana 6 canicas y en el segundo pierde 7" porque los alumnos suelen convertirlo en "si tenía 6 y perdió 7 ya no le queda ninguna canica".

En el mismo trabajo (Vergnaud, 1982) se plantearon cinco problemas a los estudiantes en los que se buscaba T_2 haciendo variar los valores y el signo de T_1 y de T_C. Especialmente fue muy difícil cuando $T_1 > 0$ y $T_C < 0$ ya sea que $|T_C| > |T_1|$ ó $|T_C| < |T_1|$. El 80% de los estudiantes del último grado de la primaria no pudieron resolverlos. Los alumnos parecían considerar que T_C operaba sobre T_1, especialmente en el segundo caso ($|T_C| < |T_1|$) que resultó el tipo de problema más difícil de la 4ª categoría. Por ejemplo, el problema podría decir:

> *Hugo jugó dos partidos de canicas. En el primer partido ganó 9 canicas, luego jugó un segundo partido. Haciendo un balance de los dos juegos notó que había perdido 5 canicas. ¿Qué pasó en el segundo partido?*

Los estudiantes contestaron cosas como "le quedan 4 canicas". Tampoco es raro que los alumnos cambien una ganancia por una pérdida o viceversa cuando no han podido establecer correctamente la relación semántica entre los datos o el cálculo numérico se dificulta.

En otro trabajo, Marthe (1979)[15] reporta que para estudiantes de secundaria de 11 a 15 años, los problemas con transformaciones elementales de signo opuesto fueron más difíciles que aquellos en los que eran del mismo signo. Aunque los alumnos mejoraron sus actuaciones a medida que aumentaba su edad, concluye que el campo de las estructuras aditivas requiere un largo proceso y no se ha completado a la edad de 15 años.

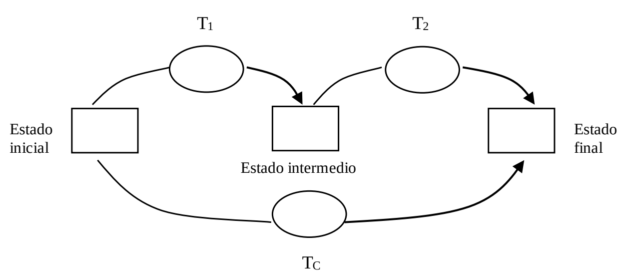
En las investigaciones analizadas sobre problemas de la 4ª categoría siempre se trabajó con alumnos desde 6 a 15 años, fuera de este rango de edad se encontró la investiga-

[15] Citado en: Vergnaud, Gerard (1982).

ción de Bruno y García (2004) que se centra en la clasificación de problemas aditivos que emplean números negativos realizada por futuros profesores de primaria y secundaria. Utilizaron problemas de *Combinación*, *Cambio*, *Comparación* y *Dos cambios*. Las primeras tres corresponden a la clasificación de Carpenter y Moser descrita anteriormente, y la última es idéntica a la definida por Vergnaud como 4ª categoría de problemas aditivos. Tras una fase de instrucción sobre las distintas clases de problemas aditivos y una prueba escrita, los investigadores realizaron entrevistas para analizar el conocimiento construido por los futuros maestros tanto en lo referente a la resolución como a la clasificación de problemas. Los resultados obtenidos en la prueba escrita fueron muy bajos, por lo cual concluyen que es un campo de conocimiento problemático para los futuros maestros o que la instrucción no fue exitosa. En los problemas de *Dos cambios* los futuros maestros confundieron *variaciones* (números relativos, según Vergnaud) con estados, por lo cual estos problemas fueron clasificados como de *Combinación* y otras veces como de *Cambio*, dificultades que también manifestaron los niños en el trabajo que se comentó de Vergnaud.

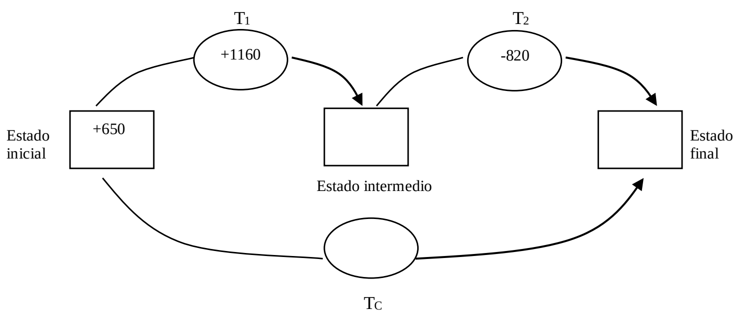
1.2 El esquema de Vergnaud para la 4ª categoría

Para Vergnaud, la temporalidad, la cualidad positiva o negativa de las transformaciones, la ubicación de la incógnita y la distinción entre las transformaciones elementales y la compuesta, son elementos que debían poder representarse gráficamente[16]. Aunque esta categoría omite datos sobre las medidas o estados, también consideró importante hacerles un sitio en la representación, ya que el hecho de desconocerlos (y de que no son necesarios para resolver problemas de la 4ª categoría) no significa que han dejado de existir. Se pensó que para los propósitos de esta investigación, el esquema de Vergnaud (1985) era pertinente.

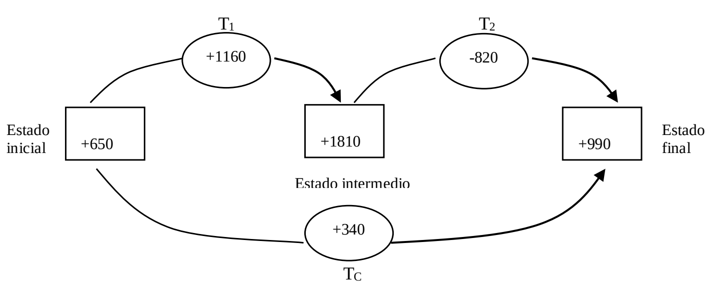


[16] Vergnaud (1982) discute sobre las posibilidades de representación que ofrecen distintos esquemas (diagramas de Euler-Venn, diagramas de transformación, ecuaciones algebraicas, diagramas de vector y diagramas de distancia) y aporta resultados experimentales que apuntan a que funciona mejor en términos didácticos el que él elabora para distinguir entre problemas de las cuatro primeras categorías.

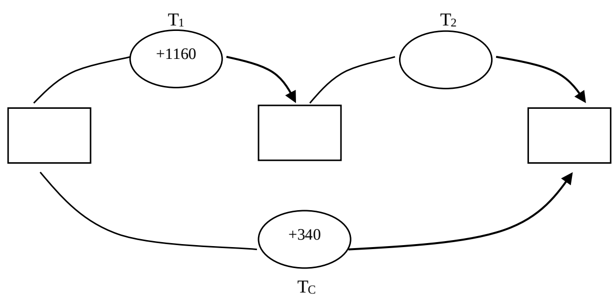
En el esquema aparecen rectángulos y óvalos unidos por líneas o flechas de dirección. Como se dijo, en la 4ª categoría se desconocen los estados, pero a manera de ejemplo puede suponerse una situación que proporcione todos los datos para poder explicar el esquema y su funcionamiento. El enunciado diría: *Una papelería abrió el lunes temprano contando con $650 en la caja. Durante el día se vendieron $1160. Justo antes de cerrar llegó un proveedor y la papelería le compró productos por $820. ¿Con cuánto dinero se quedó la caja respecto a lo que tenía al abrirse la papelería?* El esquema con la información numérica que proporciona el enunciado, se vería así:



Comenzando por el primer rectángulo del lado izquierdo, el Estado inicial serían los $650 con los que la tienda inicia el día, es un estado porque el 650 supone una medida, una cantidad de dinero. Ese estado se transforma positivamente por las ventas del día, T_1 son los $1160. El pago que se hace al proveedor supone T_2 en este caso, negativa. Si se calcula cómo opera T_1 sobre el Estado inicial, se tienen $1810 en el Estado intermedio. Esa cantidad se transforma ahora al restarle los $820 del pago ($T_2$) y quedan $990 que son el Estado final. Por la parte de abajo, al componer las dos transformaciones elementales (T_C), en un solo paso es posible notar que del Estado inicial al final ocurrió un incremento, esa cantidad se trasformó positivamente, ahora hay $340 más de lo que había al inicio. Con toda la información numérica, el esquema sería:



En la 4ª categoría no se conocería ninguno de los estados, pero aún así, es posible calcular lo que ocurre con las transformaciones. En el supuesto siguiente, el enunciado está planteado en términos de un problema aditivo de la categoría que interesa. *Una papelería abrió el lunes temprano. Durante el día se vendieron $1160. Justo antes de cerrar llegó un proveedor y la papelería le compró algunos productos. En total, la caja de la papelería tenía al cierre de ese lunes $340 más de lo que tenía cuando abrió. ¿Cuánto pagó la papelería al proveedor?* La pregunta estaría formulada sobre T_2 y el esquema se vería así.



Para averiguar lo que sucedió es preciso encontrar la diferencia entre las dos transformaciones conocidas, es decir, hacer una composición de transformaciones (T_1 y T_C).

Así pues, tras analizar la clasificación de problemas aditivos hecha por Carpenter y Moser y la realizada por G. Vergnaud, se retoma para éste trabajo la segunda por considerarse que las tres últimas categorías que plantea el autor pueden ser problemáticas para maestros de primaria. De entre ellas se eligió a la 4ª categoría y al esquema que Vergnaud propone para representarla, ya que permite mostrar los elementos que la caracterizan.

2 Representación

> "(…) no hay conocimiento que un sujeto pueda movilizar sin una actividad de representación." (Duval, 1999, p. 25)

El humano es un ser simbólico, representa lo que ve, lo que oye, lo que siente. Sin negar la existencia de lo real, toda la información que recibimos nos llega a través de los sentidos, de manera subjetiva, es personal y única pero a la vez es social porque la vida en grupos (la humanidad vista como un grupo, o una familia, o un salón de clases) posibilita el intercambio de percepciones y la creación de significados compartidos. En esta investigación la representación es un concepto central, pues la principal estrategia didáctica con los maestros durante la parte experimental de la ingeniería involucró la elaboración de un mensaje con la información de un problema aditivo que otros maestros debían interpretar. Por ello, resulta importante analizar la relación entre la representación mental o interna y la externa (que puede manifestarse gráficamente), y cómo se modifican mutuamente, así como la utilización de signos y símbolos que pudieran constituirse como un mensaje efectivo, es decir, que el receptor pudiera interpretar lo que el emisor tenía pensado.

"Representación" es un concepto escurridizo que hace alusión a múltiples acepciones. Seeger (1998) distingue cuatro maneras de entender el término: cualquier estado mental con un contenido específico; la reproducción mental de un estado mental anterior; un equivalente a "presentación" a través de dibujos, símbolos o signos; y cuando se coloca algo "en el lugar de" algo. Las dos primeras remiten a procesos internos, las otras dos a manifestaciones externas.

La relación entre las representaciones externas e internas ha sido interpretada desde distintos ángulos. Tradicionalmente se ha visto a lo externo como una manifestación fiel de lo interno y viceversa, pero una visión más cuidadosa permitiría notar que las representaciones reflejan nuestra actividad en el mundo y no el mundo en sí (Seegler, 1998), y de igual manera puede afirmarse que reflejan alguna actividad en nuestra mente, pero no nuestra mente. La representación gráfica, como manifestación externa, no es una fotografía de la representación interna, tampoco un reflejo exacto de contenidos o procesos cognitivos, ni de la situación que la origina, ni de la realidad[17]. En este trabajo se plantea una interpretación que considera que ambas representaciones (interna y externa) son instrumentos que median entre el exterior y el interior, entre la percepción del mundo y las estructuras cognitivas, y que a tra-

[17] El asunto de la realidad es muy complejo y ciertamente rebasa los intereses de este trabajo, sin embargo, no quisiéramos dejar pasar la oportunidad de hacer lo que es, a nuestro juicio, una precisión. Términos como "vida real" o "vida cotidiana" han sido frecuentemente empleados en las últimas décadas en la investigación educativa, aludiendo generalmente a todo lo extraescolar, a lo que sale del aula. Esto, en el ánimo de hacer notar una diferencia sustancial en cuanto a la atribución de sentido entre situaciones que puede encontrar un alumno, por ejemplo, al repartir de manera equitativa entre él y su hermano los 45 minutos que su mamá les dio permiso para usar un videojuego, a diferencia de cuando tiene que hacer en la escuela la división 45 ÷ 2. La precisión que queremos hacer no apunta a señalar si en verdad los sujetos atribuyen diferentes sentidos a una actividad y a otra, los resultados de investigación son contundentes a ese respecto, sino más bien al uso de los términos para separar lo escolar de lo extraescolar que intentan llamar "cotidiano". ¿Hasta qué punto 9 o más años de escolaridad básica no se vuelven parte de lo cotidiano o de lo real en la vida de los niños?, ¿cómo podríamos hablar de una "ausencia de sentido" en las actividades escolares tras años de experiencia en el "ser alumno" y en el "ser maestro"? Parece más bien que habría que pensar en la escuela como un contexto específico, como un escenario o una "arena" (en palabras de Lave) con reglas y significados particulares, nunca carente de sentido sino con un sentido propio. Por ello, nos parece más preciso hablar de lo "escolar" y lo "no-escolar", sin pretender que estos términos sean ideales o que no puedan ser interpretados de distintas maneras.

vés de distintos mecanismos se modifican una a la otra, de tal manera que podemos hablar de una relación de interacción.

Ello no supone que cuando una persona expresa gráficamente algo sea capaz de manifestar exactamente lo que piensa, pues los mecanismos que posee pueden no ser eficaces para lograr que su representación externa corresponda a la interna[18] (Duval, 1999). Las posibilidades de representación gráfica de un sujeto son construidas y suponen habilidades de comunicación y transformación que eventualmente lo llevan a modificar sus propias representaciones internas. Pero, aunque un sujeto poseyera todos los mecanismos posibles, tampoco podría lograr esa correspondencia exacta entre una representación interna y una externa, porque toda representación externa (representante) es capaz de abarcar sólo parte de aquello que intenta captar (representado). Por ello, puede haber múltiples representaciones externas de una misma situación (algunas pueden ser más parecidas a lo que intentan representar que otras, o más transparentes según el término empleado por algunos autores), pero ninguna es total.

Comentado [bara1]: Párrafo para análisis

Debe considerarse también que el sujeto puede tratar a cierta representación externa como representante y como representado[19], pero para poder verla de una u otra manera requiere conciencia, supone que sea capaz de considerarla como un objeto en sí misma. Las representaciones externas, pues, son susceptibles de volverse objetos de estudio y trascender sus vínculos con lo real, con aquello que intentaban reflejar para dar lugar a conocimientos nuevos o a situaciones hipotéticas, "(…) emergen estructuras representadas simbólicamente que se vuelven objetos de reflexión y elaboración, independientes de sus raíces con el mundo real." (De Corte, *et al*, 1996, p. 500)[20], a diferencia de las representaciones internas que sólo pueden ser representantes.

Por este sentido de elaboración e incluso de independencia con lo real, no se puede pensar en las representaciones externas como "naturales". Aquella marca gráfica que esté destinada a cumplir una función comunicativa entre dos o más sujetos, debe ser consensuada. Además, los signos empleados deben pertenecer a un tipo particular de sistema semiótico para que las representaciones puedan ser transformadas y no pierdan sentido. Duval llama a esos mecanismos "reglas de conformidad".

Comentado [bara2]: Párrafo para análisis

[18] Esto es claro cuando un niño pequeño dibuja un objeto. Aunque conozca el objeto a la perfección, los elementos de los que dispone para elaborarlo pueden ser limitados y no reflejar todo lo que él sabe de ese objeto (el color, la textura, la perspectiva, etc.).
[19] Piénsese en lo siguiente: un artista elabora una pintura (representante) a partir de un paisaje (representado), pero esa misma pintura en una escuela de dibujo se vuelve el representante, y los bocetos de los alumnos serían los representados.
[20] Citado en: Verschaffel, *et al*, (2000).

> "(…) el punto de arranque es que casi nada es por sí mismo evidente en las representaciones, diagramas y esquemas. Son herramientas y como parte de la cultura, uno tiene que ser introducido en su uso; al ser herramientas simbólicas, uno tiene que aprender su lenguaje (…) La representación tiene que ser entendida en términos de mediación… significa que los significados culturales se insertan entre la representación y lo que representa. El proceso de representación está culturalmente mediado. Uno podría decir que la representación y la cultura se crean y se sostienen mutuamente. Así, la representación de la cultura debe ser también vista como la cultura de la representación." (Seegler, 1998, p. 310)

> "[Nuestra postura] rechaza la visión de que el significado matemático es inherente a las representaciones externas y en su lugar propone como principio básico que los significados matemáticos dados a esas representaciones son los productos de la actividad interpretativa de los alumnos." (Cobb, Yackel and Wood, 1992, p. 2)[21]

Siguiendo la idea de la transformación de las representaciones, Duval (1999) afirma que ni las representaciones internas ni las externas son estáticas, pero que se transforman de manera distinta. Mientras las internas se transforman de manera cuasi-instantánea, las externas requieren al menos el tiempo que le toma al sujeto hacerlas conscientes, es decir, son transformaciones intencionales que a su vez están determinadas por el horizonte de posibilidad que les permiten las representaciones internas.

Las consideraciones anteriores (la posibilidad de volver a las representaciones externas un objeto de reflexión independiente de su representado, el hecho de que no son "naturales" y el proceso que requiere el sujeto para poder transformarlas) cobraron en esta investigación especial relevancia para analizar los datos obtenidos en la parte experimental, ya que la estrategia didáctica que se siguió involucró que los sujetos reflexionaran sobre sus propias representaciones gráficas y sobre las que se les presentaron a propósito de los problemas aditivos de la 4ª categoría de Vergnaud. Éste proceso, eventualmente llevó a los maestros participantes a transformarlas.

2.1 Transparencia

Cuando alguien intenta explicarle alguna cuestión a otra persona, se esfuerza por encontrar las palabras y los gestos que según su percepción, harán efectivo el mensaje comunicando aquello que quiere transmitir. Un dibujo, un esquema o una explicación que el profesor utiliza en clase intenta "mostrar" las características principales dejando de lado aquellas no relevantes de cierta situación para que el alumno las "vea". Aunque, como se dijo, ninguna repre-

[21] Citado en: Seeger, Falk (1998). Traducción nuestra. p. 326.

sentación externa es total, algunas guardan más parecido con aquello que intentan representar y reflejan menos significados adicionales, es decir, son más transparentes.

Pero hay otro elemento a considerar respecto a la transparencia: el grado en el que una representación logre reflejar al representado ante los ojos de un sujeto dependerá de los conocimientos previos con los que éste cuente, así pues, la transparencia debe pensarse no como una condición inherente a una representación, sino como la relación que guarda con el representado, con otras representaciones y con el sujeto que las elabora, percibe o transforma. La condición de transparencia es además, dinámica, ya que en algún momento una relación entre cierta representación y un sujeto puede considerarse transparente, pero ante un cambio cognitivo en el sujeto que lo lleve a darle otro sentido a un símbolo, por ejemplo, o cuando dicha representación se utiliza para un nuevo referente[22], el grado de transparencia se ve modificado.

No obstante, la condición de transparencia entre un sujeto, un representante y un representado, no es suficiente para que el otro "vea" lo que el representante intenta. Cuando un alumno emplea un tipo de representación externa para resolver situaciones escolares (por ejemplo fichas de colores para hacer sumas y restas), se encuentra en el plano de los "conocimientos construidos" que pueden realizarse en el marco de una sola representación externa, lo que puede propiciar que los sujetos no sean capaces de diferenciar entre dicha representación y aquello que intenta representar (no hay clara distinción entre el representante y el representado). Duval (1999) considera que cuando el sujeto posee al menos dos formas de representación y es capaz de hacer conversiones entre ellas, es decir, pasar de uno a otro registro casi sin notarlo y conservando las reglas sintácticas de cada sistema semiótico, la representación funciona realmente como una representación y no se confunde con el representado. Poder operar con varias formas de representación resulta muy útil porque cada representación selecciona ciertas partes importantes del representado y "muestra" cómo se relacionan entre sí, y el usar una segunda manera de representación permite que sean otras las características seleccionadas u otra la manera de mostrar las relaciones, lo cual contribuye al enriquecimiento del sentido. El autor considera incluso que la conversión entre representaciones es un requisito necesario para la comprensión. En el mismo sentido, Silver (1987, p. 56) señala que:

> "El conocimiento explícito de los procesos de representación, como crear símbolos, dibujos, diagramas o modelos gráficos de la situación que un problema plantea, necesitan ser ejemplificados y discutidos por los maestros. Los estudiantes necesitan ver que a

[22] Por ejemplo, cuando el signo "más" (+) ha sido utilizado para denotar acciones de juntar, unir, agregar, y de pronto en clase de álgebra aparece entre dos números negativos, es decir, denotando una suma algebraica.

> menudo hay más de una manera de representar la información de un problema y que pueden hacerse correspondencias entre y dentro de varias representaciones."

Aunque no se planeó abordar el concepto de transparencia con los maestros que participaron en la experiencia, se consideró que dicho concepto sería útil para el análisis de las discusiones originadas por las diferentes interpretaciones que hicieron de las representaciones externas elaboradas por ellos mismos.

2.2 Representación en la escuela

Se ha discutido ampliamente el carácter predominantemente verbal de las prácticas escolares. El lenguaje es, sin duda, uno de los signos[23] más poderosos, actúa regulando la conducta y creando un plano de conciencia que permite el intercambio entre la mente y el exterior, posibilita la adquisición de significados que se encuentran fuera del sujeto y así, los reconstruye permanentemente. Además del lenguaje, hay representaciones externas que también resultan primordiales en la escuela. El énfasis en ellas tiene sustento didáctico por tres razones, relacionadas con la memoria: el nivel de recuerdo es alto, se codifican de manera distinta a la memoria verbal proveyendo un segundo modo de acceso a la información almacenada y, las imágenes brindan un marco efectivo para organizar el material que debe ser recordado. Se podría decir que son efectivas para crear, evocar y modificar esquemas cognitivos (Reese, 1977)[24].

Comentado [bara4]: Párrafo para análisis

En las matemáticas como disciplina escolar podemos distinguir varios planos de representación, y en cada uno, varios niveles de abstracción; se pasa del lenguaje verbal, al lenguaje escrito, a los símbolos propios de las matemáticas, a los dibujos, gráficas, etc., no necesariamente de manera lineal. Dentro de esos planos de representación debe distinguirse a aquellos que resultan arbitrarios (con una débil transparencia, como los signos matemáticos o el lenguaje) y aquellos que se parecen a lo que intentan representar (que pudieran ser más transparentes, como algunos esquemas o dibujos). Ambos tipos, sin embargo, son dotados de significado culturalmente[25].

---

[23] Se usa el término "signo" en el sentido vigotskyano que alude a instrumentos mediadores que cumplen en primera instancia una función comunicativa para ser reconstruidos posteriormente en un plano interno.

[24] Citado en: Silver, Edward (1987). Traducción nuestra.

[25] Encontrarle parecido a una representación con su representado no es tampoco obvio. Piénsese en el dibujo de una pelota rebotando (que no tiene movimiento sino alguna marca que lo simula, y que es plana en el papel) y cómo luce la misma cuando de hecho la vemos rebotar. Lograr interpretar el dibujo como una representación de dicha acción es algo que debe ser aprendido.

Los alumnos deben poder hacer las traducciones necesarias entre esos distintos niveles de abstracción, y para ello, la escuela crea sistemas que intentan “mostrar” conceptos matemáticos que difícilmente pueden ser abstraídos por un ejercicio sensorial de los propios alumnos, o que si lo hicieran tomaría mucho tiempo. Dentro de esos materiales de enseñanza, Maza (1995) distingue dos: los manipulativos (como cubos, fichas, regletas, etc.) y los gráficos. Sin embargo, es posible que un material gráfico pueda ser considerado manipulativo también, en la medida en la que permita hacer operaciones en él.

En éste punto resulta oportuno volver al concepto de la “no naturalidad” de las representaciones externas. Como se dijo, el dominio de lo simbólico es una práctica central en la educación formal que le confiere estabilidad y permanencia a la cultura escolar, pero, como casi todo lo que forma parte de lo cotidiano en las instituciones sociales, de aquello que nos deja por herencia la humanidad, esos elementos simbólicos se dan por hecho, se asume que así son y siempre han sido y no se les ve como un artefacto cultural. Por este efecto, los actores que conforman lo escolar suelen considerar a muchas representaciones externas (manipulativas y gráficas) que se usan en el aula, como artefactos que hablan por sí mismos, cuando en realidad, para poderlas entender se requiere tener alguna idea del tipo de información que puede obtener de ellas, o no podrá encontrárseles sentido debido a que comprenderlas no es un asunto de obviedad. Si se llega a experimentar que *una imagen vale más que mil palabras* es debido a que la imagen significa algo, a que se le puede atribuir sentido porque se cuenta con experiencia que la involucra. Dice Wittgenstein[26] “Deja que el uso *te enseñe* el significado”.

Otro efecto de la percepción de “naturalidad” puede verse en la práctica escolar cuando una representación que aparece en el libro de texto o que hace el maestro en el pizarrón, es interpretada por los alumnos como *la* representación correcta, única, total y fuera de toda discusión. Se espera que a partir de entonces los estudiantes la incorporen en sus tareas y ejercicios escolares sin cuestionarla ni modificarla, hasta que en el trabajo áulico se decida dejarla a un lado o reemplazarla. Por ello, el uso escolar de las representaciones externas puede parecer cristalizado, limitado a la apropiación de un *modus operandi* que maestros y alumnos deben seguir al pie de la letra incluso cuando dificulte más la tarea o cuando su uso ya sea obsoleto. Las representaciones externas, en cambio, debieran considerarse “exploratorias” o “ambiguas” (Seegler, 1988, p. 333) ya que así brindarían orientación,

> “(…) porque son diferentes de aquello que supuestamente representan justamente porque no reflejan el territorio sino posibles trayectorias de actividad en ese territorio (…) que no serían posibles en un modelo 1 a 1 o que si lo fueran no tendrían sentido.”

---

[26] Wittgenstein (1953), citado en Stevens, and Rogers (1998). La cursiva es textual.

Comentado [bara5]: Párrafo para análisis

Comentado [bara6]: Párrafo para análisis

El uso de representaciones externas en la escuela no debe ser considerado el objetivo de la enseñanza, sino un medio que deja de ser útil cuando el alumno ya no lo requiere, cuando ha internalizado las acciones que los materiales intentan representar (Maza, 1995). Además, debe considerarse que los conceptos aritméticos (y muchos matemáticos) no tienen origen en los objetos sino en las relaciones que se establecen entre ellos, por lo cual, el empleo de materiales debe servir para evidenciar éstas. Si se usa material, su función es construir las acciones internas del aprendiz (Seegler, 1998). Puede afirmarse entonces que usar mucho material manipulable o muchas representaciones gráficas no es en sí mismo más útil y deseable que si no se ocupan, especialmente cuando se trata de contenidos matemáticos difíciles para algunos alumnos, como en casos en los que el representado no es asequible intuitivamente, como se dijo. Es común pensar que si se presentan mediante o acompañados de elementos gráficos, la naturaleza de dicho saber será obvia y evidente para los alumnos cuando en realidad podrían estar enfrentándose a dos problemas: a) entender qué está queriendo decirse en la representación gráfica, y b) cómo es que ésta se relaciona con un contenido específico, es decir, cómo es que a través de dicha representación externa van a poder comprender el saber específico que antes no habían logrado aprender.

Comentado [bara7]: Párrafo para análisis

Entonces, el simbolismo matemático es parte de la cultura escolar de la que los estudiantes deben apropiarse mediante acercamientos constantes que les permitan interiorizar dichos instrumentos, utilizarlos en la comunicación con otros y como esquemas de pensamiento. “(…) la estabilidad y obviedad de una marca en la experiencia visual es una cuestión empírica.” (Stevens y Hall, 1998, p. 109).

> “El hablante de un nuevo lenguaje no es un receptor de definiciones convencionales y formas de conocimiento, sino un ‘apropiador’ (…) un estudiante en la escuela toma las palabras de la cultura de las matemáticas para darle sentido a algo en una experiencia, pero también puede ir más allá de lo que se asume convencionalmente sobre cómo el lenguaje matemático puede ser usado.” (Lampert, 1998, p. 8)

Y según Vergnaud (1985):

> “Según se perciba o no las relaciones, las transformaciones y las nociones que intervienen con todas sus propiedades o solamente una parte de ellas, o con una visión falsa de tales propiedades, llegado el caso, el niño utiliza un procedimiento u otro, y eventualmente se desinteresa de la labor con la que está confrontado. La noción de representación está, como la de procedimiento, en el centro de la psicología científica moderna (...) no se reduce a la noción de símbolo o de signo; abarca también la noción de concepto; el estudio del número lo mostrará claramente, puesto que la escritura simbólica del número es distinta del propio número. Una idea universal, con la cual los educadores deben compenetrarse absolutamente, es que la representación no se reduce a un sistema simbólico que remite directamente a *objetos* materiales. En realidad, los *significantes*

> (símbolos o signos), representan *significados*, que son ellos mismos de orden cognoscitivo y psicológico. El conocimiento consiste al mismo tiempo de significados y significantes: no está formado solamente de símbolos sino también de conceptos y nociones que reflejan a la vez el mundo material y la actividad del sujeto en este mundo material. El símbolo no es mas que la parte directamente visible del *iceberg* conceptual; la sintaxis de un sistema simbólico no es más que la parte directamente comunicable del campo de conocimiento que él representa. Esta sintaxis no sería nada sin la semántica que la produjo; es decir, sin la actividad práctica y conceptual del sujeto en el mundo real." (pp. 12-13)

Comentado [bara8]: Fuenlabrada

Ahora bien, la necesaria variedad en las formas de representación externa y la coordinación entre ellas, las reglas sintácticas propias de cada registro, la no-obviedad y no-naturalidad de los representantes, etc., no son asuntos que el alumno intuya o que ocurran como parte de un proceso evolutivo en términos cognitivos. Es común suponer que una nueva manera de representación de una situación conocida deberá resultar clarísima para los alumnos, sin embargo, el paso de una representación a otra con un mismo referente, es decir, dos o más representantes para un solo representado, supone una dificultad importante para los estudiantes y debe ser enseñado. Enseñar sobre las representaciones supone a su vez la consideración de su evaluación como un proceso. No se trata de considerar como "buena" sólo a una representación óptima (empezando porque no existe), sino de tomar en cuenta las aproximaciones, las características del representado que se seleccionan y la manera en que se muestran sus relaciones.

2.3 Representación gráfica de problemas aritméticos

Los problemas aritméticos que se presentan en la escuela han sido un campo de nutrida investigación en las pasadas décadas. Se comentó en otro apartado que los estudiantes de primaria encuentran numerosas dificultades al tratar de resolver problemas aritméticos, y en la búsqueda de las causas de dichas dificultades el reconocimiento de la relación semántica que se establece entre los datos ha demostrado ser el elemento central, y una de las formas comúnmente usadas en pos de hacer más evidentes para los estudiantes dichas relaciones ha sido la representación gráfica de ellas. Pedir a los alumnos una representación de alguna situación matemática puede desviarse del objetivo didáctico cuando:

a) para los alumnos la representación se vuelve un paso engorroso que hay que cumplir como parte del contrato didáctico pero que carece de utilidad matemática, ya que no representa ni la relación semántica, ni es operativa (por ejemplo, si el problema señala que una persona vendió 35 borregos y ahora sólo le quedan 221, el alumno puede dibujar como "representación" un borrego, y sorprendentemente, muchos maestros de primaria lo "palomean");

b) la representación puede volverse un objeto de enseñanza (en el sentido más pobre del término) en vez de una ayuda didáctica para acceder a los saberes matemáticos que sí lo son.

Esto podría parecer que contradice las anteriores aseveraciones sobre la necesidad de instruir específicamente sobre sistemas simbólicos, pero no es así. Si bien se considera imprescindible la explicitación de dichos artefactos culturales en la escuela, el énfasis debe estar puesto en el saber matemático que pretenden representar y no en la representación en sí, es decir, si se usan modelos o diagramas en la clase debe ser con el objetivo de hacer más evidentes para los alumnos las relaciones que la situación matemática plantea, para poder operar en un modelo por la libertad que éste permite y para objetivar el objeto del saber para el propio sujeto, no para que aprendan a hacer esquemas (algunos bastante complicados como los que plantean Shalin y Bee, 1985a y 1985b)[27] o bien, decoren las lecciones.

Vergnaud (1982) señala dos criterios para poder considerar eficiente a una representación gráfica de problemas aritméticos: 1) debe ayudar a los alumnos a resolver problemas en los que de otra forma fallarían y, 2) debe ayudar a los alumnos a diferenciar entre varias estructuras y clases de problemas. El segundo es claramente una consecuencia del primero.

Representaciones externas con éstas características permiten construir esquemas mentales en los que la información se organiza de una manera eficaz, permitiendo la resolución y el reconocimiento de estructuras y clases similares, "(…) reconocer patrones que involucren las cantidades y las relaciones entre ellas es un requerimiento importante para resolver exitosamente problemas aritméticos (…)" (Greeno, 1987, p. 69). De ésta manera, una representación semiótica al destacar características importantes de la situación y la relación establecida entre las cantidades podría fungir como un organizador a manera de esquema mental. Ello refuerza la idea de que una representación externa debiera ser juzgada por la utilidad que supone para el sujeto en la consecución de la tarea planteada o para poder comunicarla, y no tanto por su fidelidad con el representado, aspecto particularmente importante cuando se ubica en el plano de la enseñanza.

[27] Citado en: Greeno, James (1987).

2.3.1 Operaciones y tipos de representación de problemas aritméticos

La relación entre la representación externa y la comprensión y resolución de un problema ha sido tratada desde diversos ángulos. Un punto necesita ser discutido antes de presentar algunos de ellos.

Parecería lógico pensar que al enfrentarse a una situación problemática el sujeto optara por la estrategia más económica, más abarcativa o una convencional (si la conoce), sin embargo, no es necesariamente así. La elección es hecha en función de diversos factores como el tipo de tarea, el contexto en el que se formula la situación, las consecuencias que podrían derivarse de su respuesta, etc., y es común que los resolutores "regresen" por caminos conocidos y utilicen procedimientos que al parecer han dejado atrás pero que siguen prestando apoyos cognitivos. Aunque puedan ser menos abarcativos, resultan más seguros (por ejemplo, la utilización de alguna forma de conteo para verificar un algoritmo). Sin embargo, este re-uso de formas o procedimientos anteriores es distinto, el nivel cognitivo que ahora habría alcanzado el sujeto le permite redimensionar esas prácticas y usarlas mediante formas más elaboradas. Por lo tanto, la representación externa que elabore un sujeto no necesariamente es un "indicador" de sus conocimientos o procedimientos más elaborados, sino de la elección que consideró más pertinente para resolver la situación propuesta.

Específicamente sobre la representación externa de problemas aritméticos, Peltier (2003) analiza su evolución y señala dos grandes modalidades que no necesariamente ocurren sin excepción o en forma lineal. La primera es la modalidad de las representaciones *icónicas, figurativas o analógicas* y entre ellas distingue a las que pueden presentar características no operativas de las operativas. Las *icónicas* son dibujos de los personajes que aparecen en el problema, pero que no permiten efectuar un procedimiento de solución (no son operativas), las *figurativas* retoman en gran medida elementos contextuales pero pueden ser operativas porque toman en cuenta las informaciones numéricas del problema al igual que las *analógicas*, que ya no intentan retratar exactamente la situación planteada en el enunciado, pero permanecen ligadas al contexto. En la segunda modalidad están las representaciones *simbólicas* que se centran en las relaciones entre objetos, por lo que son más abstractas, más operativas y suponen la asimilación de las modalidades anteriores (entre ellas se encuentran, por ejemplo, los esquemas de Venn, los que tienen flechas, la recta numérica y las ecuaciones).

Julo (1995)[28] asevera que al resolver un problema ocurren procesos de representación y de acción, que se hallan estrechamente ligados. El sujeto hace una interpretación y selección de las informaciones que, de acuerdo a sus conocimientos previos, considera pertinentes; estructura la representación conforme al contexto semántico, conocimientos previos, similitudes a otros problemas conocidos y lo resultante de las estrategias que se van poniendo en juego durante la resolución; y opera física o mentalmente. En la misma tónica, Silver (1987) señala que las representaciones de los problemas son centrales en el proceso de resolución el cual comienza por una representación inicial que gradualmente se elabora y refina. Estudiantes exitosos en la resolución de problemas comienzan elaborando alguna representación gráfica antes de realizar cálculos numéricos, mientras los novatos hacen lo contrario.[29]

En algunos problemas la escritura de los algoritmos puede considerarse como una forma de representación de la situación. Descaves (1999)[30] distingue dos tipos de relaciones entre los problemas y las representaciones: la de *concordancia* y la de *discordancia*. Una relación de concordancia sería aquella en la que la representación del problema es idéntica a su solución, mientras que una de discordancia implicaría el reacomodo de los números del problema en una operación para poder resolverlo. El segundo caso supone un reto mayor para los alumnos y la sola operación no servirá como representación de la situación que plantea el problema. Incluso en las relaciones de concordancia, pasar del plano del lenguaje (oral o escrito) a una representación externa (la operación que resuelve, un esquema, un dibujo), es un paso difícil porque plantea un problema de "conversión" entre representaciones, según Duval (1999), que exige el tratamiento de distintos sistemas semióticos cada uno con sus propias reglas de conformidad.

Duval añade que al elegir la operación que debe efectuarse entre los dos números que aparecen en el problema, hay tres factores determinantes en cuanto al nivel de dificultad de la conversión del enunciado a la escritura aritmética: el primero sería el de *identidad* o *no identidad* entre la operación sugerida semánticamente, por ejemplo, "gana 3 y gana 2" alude a "suma 3 + 2". Pero en el caso de una suma de números con signo negativo, como "pierde 3

---

[28] Citado en: Peltier (2003).

[29] Como precisión, habría que decir que estudios como el de Carraher, *et al*, (1991) demuestran que es posible que sujetos con poca o ninguna instrucción formal utilicen procedimientos efectivos en la resolución de problemas matemáticos no-escolares. Sin embargo, estos métodos resultan ineficaces cuando el cálculo se vuelve complicado o la situación no es familiar para ellos. Además, recordemos que los problemas aritméticos escolares tienen su propio lenguaje, su propio discurso, y eso debe ser enseñado de manera formal.

[30] Citado en: Peltier (2003).

y pierde 5” no alude semánticamente a “suma (-3) + (-5)”. El segundo tiene que ver con los *verbos portadores de información numérica*, que pueden o no ser antónimos. En “pierde 4 y gana 7”; o “pierde 7 y gana 4”, el resultado estará en función de los valores absolutos de los números en juego, pero no es posible determinarlos por los verbos, a diferencia de lo que ocurre en “pierde 2 y pierde 8”, en donde es posible saber que el resultado será una pérdida. El tercero se refiere a si el *orden de la presentación de los datos numéricos* necesita ser invertido para efectuar el cálculo correspondiente o no (lo que sería la concordancia o discordancia de Descaves), señalando que el reacomodo de las cantidades es más difícil para los alumnos.

2.4 Funciones de la representación gráfica en el diseño y en el análisis de la ingeniería didáctica

Anteriormente se hicieron algunos señalamientos sobre el papel que la representación (interna y externa) funge en la constitución de lo propiamente humano y sobre sus usos y funciones en la institución escolar. Aquí se abordará el carácter de las representaciones gráficas en la persecución del objetivo del trabajo de investigación y en el de la ingeniería didáctica, las razones que obedecieron a la elección del esquema de Vergnaud como el recurso para alcanzarlos y las maneras en las que se planeó introducirlo.

En la parte experimental de la ingeniería didáctica que este trabajo se planteó, las representaciones gráficas de las relaciones semánticas entre los datos de los problemas se consideraron un elemento crucial, ya que a partir de ellas se proyectó establecer la comunicación dentro y fuera de las parejas de maestros. La idea central fue que a través de las representaciones gráficas (producciones escritas que comprenden esquemas, dibujos, operaciones, etc.) se podrían inferir aspectos de la representación mental (estructura cognitiva sobre contenidos específicos) que los sujetos poseen acerca de los saberes en cuestión y que, dependiendo de la evolución de dichas manifestaciones externas, el plano de lo interno podría verse modificado. De esta forma, el trabajo con las representaciones gráficas cumpliría los siguientes propósitos:

A. En la *entrevista inicial.*

i. Aunque en la entrevista no se les solicitó a los maestros realizar ningún tipo de representación externa sino resolver el problema, la mayoría hizo uso de lápiz y papel para realizar alguna marca ya fuera una operación aritmética, la copia de la información numérica u otro elemento simbólico. El análisis de dichas producciones (complementado por lo referido verbalmente) permitió hacer algunas inferencias sobre las representaciones mentales iniciales de los maestros acerca de situaciones aditivas como las que se les presentaron (significados de las operaciones, cálculo, uso de signos, establecimiento de relaciones, etc.).

ii. Mediante su análisis fue posible realizar una valoración de si los problemas aditivos de la 4ª categoría eran adecuados en términos didácticos para plantearlos en un trabajo de ingeniería, es decir, si resultaban problemáticos para los maestros pero no demasiado alejados de sus posibilidades y si se vislumbraba la posibilidad de obtener progresos en 6 sesiones experimentales.

B. En lo *didáctico*.

i. La representación gráfica de la relación semántica entre los datos de un problema sería el reto principal a resolver para la comunicación dentro y entre las parejas de maestros. En la situación diseñada no se trataba de resolver el problema y luego, con intenciones de verificar o de profundizar en las respuestas y procedimientos de los maestros, solicitarles una representación o un dibujo de lo que habían hecho. Al contrario, resolverlo era una opción mas no el objetivo principal, lo importante era lograr comunicarle a otra pareja mediante una marca gráfica, cuál de los dos problemas que en cada ocasión tenían a vistas, era el que habían elegido (cuando ambos problemas contendrían los mismos datos numéricos planteados en el mismo contexto).

ii. En las propias representaciones gráficas elaboradas por los maestros estaría la posibilidad de hacerlas evolucionar hacia formas más funcionales. En este punto es en el que la introducción del esquema de Vergnaud cobraría sentido, ya que se presentó a los maestros como un recurso que permitió visualizar la relación semántica que se establece entre los datos de problemas pertenecientes a la 4ª categoría con la intención de que les ayudara a organizar el acomodo de la información a partir de un trabajo de representación gráfica que previamente habían realizado y sobre problemas conocidos, para luego ver hasta qué punto lo recuperaban en posteriores comunicaciones y si podían inferirse modificaciones en las representaciones mentales que los maestros se habían hecho inicialmente de las situaciones plateadas. La representación, entonces, no era un asunto ocioso en la parte didáctica de la ingeniería sino el elemento principal sobre el cual se inscribiría el trabajo.

iii. Por lo anterior, fue a través de ellas que se pudieron rastrear algunos de los cambios que la ingeniería fue propiciando en los conceptos y procedimientos de los maestros asociados al saber matemático que interesaba.

3 La teoría de las situaciones didácticas

> "Siempre nos hemos preguntado cuáles son los aportes de los conocimientos matemáticos 'necesarios' para la educación y la sociedad y cómo llevar a cabo dichos aportes (...) Nos cuestionamos hoy además, acerca de los recursos que hemos creado para responder a esta demanda inicial: en qué medida el éxito de la difusión de los conocimientos matemáticos depende de las Ciencias de la educación o de las matemáticas mismas, o qué lugar tienen en esta difusión los conocimientos de didáctica, y más precisamente de la didáctica de las matemáticas, qué instituciones pueden asegurar la coherencia y la pertinencia de este género de conocimientos." (Brousseau, 2000, p. 6).
>
> [La didáctica] "(…) es acerca del aprendizaje, y acerca de la enseñanza, y acerca de las matemáticas, y acerca de sus condiciones sociales. Sin embargo, cada vez que se añade un 'y', uno debería también añadir un 'pero no' (…)" (Herbst and Kilpatrick, 1999, p. 3, traducción nuestra).

Una mirada más abarcativa, más profunda y que permitiera cuestionar y problematizar a los actores que toman parte en el proceso educativo incluyendo al saber mismo, es lo que la didáctica se propone desde sus inicios. Se cuestiona sobre las condiciones que hacen propicia o entorpecen la enseñanza y la adquisición de sentido por parte de los alumnos acerca de los contenidos matemáticos, un enfoque que hace ver a la disciplina más allá del estudio del comportamiento docente o de la psicogénesis cognitiva de los alumnos, uno que incorpora el estudio del *milieu* o medio matemático que en el aula se construye entre el profesor, el estudiante y el saber en cuestión. La explicación del éxito o el error intenta no ser más unicausal y unidireccional, hay una responsabilidad en el sentido didáctico para cada uno de los actores. Se brindan explicaciones holísticas de los fenómenos obtenidas analizando a un tiempo a la enseñanza, al aprendizaje y al contenido matemático. La didáctica de las matemáticas intenta reportar de manera unitaria y sistémica el fenómeno asociado a la producción y circulación del conocimiento matemático[31]. La didáctica de las matemáticas construye su propio objeto de estudio, parte de postulados constructivistas que utiliza para poder explicar algunos de los fenómenos en la generación y circulación del conocimiento matemático, crea teoría que elabora a partir de datos empíricos obtenidos a través del desarrollo de una metodología propia. Según Chevallard (1998), es la ciencia del estudio y de la ayuda al estudio de las matemáticas.

[31] Brousseau, citado en: Herbst and Kilpatrick (1999).

La didáctica de las matemáticas reconoce tensiones recíprocas entre tres subsistemas: a) El conocimiento que debe ser transmitido y adquirido; b) Los conocimientos que emergen en las interacciones entre el sujeto y su medio y; c) El proyecto educativo (Herbst and Kilpatrick, 1999, p. 6). Así pues, la disciplina se ocupa no sólo de la generación y circulación del conocimiento matemático, sino también de problematizar al saber mismo en tanto contenido curricular (su relación con la disciplina matemática, las transformaciones que sufre al volverse objeto de estudio escolar, las ideas previas con las que cuentan los alumnos, sus particularidades en el trabajo áulico, etc.) y como parte de la herencia cultural de la humanidad (importancia y valor social, tiempo escolar dedicado a su estudio, objetivos escolares, etc.).

Es claro que el tipo de problemas a los que se enfrenta un matemático y los que debe resolver un alumno en clase son diferentes no sólo en el nivel de dificultad sino en los objetivos que se persiguen, el grado de didacticidad, el tiempo con el que se cuenta, etc. El tipo de adaptaciones que el saber producido por los matemáticos (saber-sabio) debe sufrir para poder ser llevado al aula (saber-enseñado) es ahora develado por la didáctica y admitida la distancia entre ellos. Este paso de un tipo de saber a otro es denominado *transposición didáctica.* Un elemento central a considerar es que, una vez hecha la transposición el saber que le llega al alumno está muy lejos de los problemas que le dieron origen, probablemente ni el maestro alcance a ver los vínculos con el saber-sabio algunas veces, y esto puede generar prácticas didácticas carentes de sentido.

El último eslabón en la transposición didáctica es el que efectúa el maestro, y Brousseau (2000) señala un elemento que resulta vital al considerarlo: el tiempo. Distingue entre el *tiempo de enseñanza* que es el establecido en los programas oficiales (calendario escolar, horas de clase) y el *tiempo de aprendizaje* que no puede ser fijado ya que depende de los procesos de cada alumno en particular.

3.1 Las situaciones

¿Qué significa “haber aprendido” matemáticas?, ¿en qué casos puede decirse que un sujeto “sabe” o que “no sabe” matemáticas? Desde la didáctica, saber matemáticas es poder ocuparse de problemas, poder utilizar cierto conocimiento matemático en las situaciones en las que sea pertinente. El tipo de problemas y de respuestas a esos problemas dependerá de la interacción entre el sujeto, el saber en juego y el medio, postura desde la que puede dársele un nuevo vistazo al error. Según la didáctica, una dificultad o error que un sujeto pueda cometer encuentra explicación porque está relacionado con el medio, con una situación característica de un conocimiento matemático concreto en un momento específico. Ese conocimiento matemático deja de ser útil para el sujeto cuando pierde efectividad ante una nueva situación y deberá ampliarse, reformularse o incluso dejarse de lado. Aprender matemáticas supone entonces, un cambio de estrategia.

Para que en el terreno escolar un alumno se vea en la necesidad de cambiar sus estrategias la didáctica de las matemáticas se propone contar con *situaciones* que pongan en juego un determinado conocimiento matemático, llevarlo al límite mediante dispositivos que lo hagan obsoleto y con ello propiciar su reformulación, pero sin que para el alumno la situación a la que se enfrenta pierda sentido. Una estrategia nueva puede entonces mostrarse como óptima para el sujeto, quien en vez de recibir un cúmulo de datos (más que nada referidos a las reglas del sistema) se encarga de usar, construir y desechar sus conocimientos matemáticos, de ponerlos en juego.

> "Hemos llamado 'situación' a un modelo de interacción de un sujeto con cierto medio que determina un conocimiento dado como el recurso del que dispone el sujeto para alcanzar o conservar en este medio un estado favorable. Algunas de estas 'situaciones' requieren de la adquisición 'anterior' de todos los conocimientos y esquemas necesarios, pero hay otras que ofrecen la posibilidad al sujeto para construir por sí mismo un conocimiento nuevo en un proceso 'genético' (…) En 1970 se plantea el proyecto científico: se trata de construir el modelo de las situaciones utilizadas para introducir o enseñar las nociones matemáticas (y de criticarlas) así como de imaginar otras más apropiadas." (Brousseau, 2000, pp. 10-11)

Brousseau distingue tres tipos de situaciones: no-didáctica, a-didáctica y didáctica. La diferencia entre ellas tiene que ver con la intencionalidad de la enseñanza y la posibilidad de que el alumno tome decisiones sin la intervención directa del profesor, principalmente. Prácticamente ninguna situación es "pura" en el sentido de poderla ubicar en sólo uno de los tres tipos.

- Una *situación didáctica* es aquella en la que la intención de enseñar es explícita y se organiza entre el maestro y el alumno acerca de un saber matemático (Chamorro, 2003).
- Una *situación no-didáctica* es aquella que no se diseña con la intención de enseñar algún conocimiento, como ocurre principalmente en situaciones no-escolares, en las que los sujetos aprenden sin que alguien lo planee.
- Una situación *a-didáctica* es parte de lo que Brousseau define como situación *didáctica*, es decir, se organiza con la intención de que los alumnos aprendan. Lo que la hace distinta es que los aprendizajes son provocados diseñando una situación en la que las estrategias de los alumnos resulten insuficientes, y la estrategia óptima (que puede resolver la situación) coincida con el conocimiento matemático que el profesor se propone que aprendan. Además, el propio medio debe informarle al alumno sobre el resultado de sus

> acciones y no el profesor, aunado a que el alumno entra en la situación porque le parece atractiva y no porque sepa que va recibir aprendizajes de ella. No sólo resulta útil en términos didácticos por la responsabilidad que debe asumir el alumno sobre su propio conocimiento, sino porque permite que las estrategias empleadas tengan sentido para ellos e impliquen consecuencias (Herbst and Kilpatrick, 1999) (como ganar o perder un juego), los alumnos tienen la necesidad, al margen de los propósitos del aprendizaje escolar, de involucrarse en la situación.

Brousseau también distingue varios tipos o momentos en las situaciones a-didácticas: el de *acción*, el de *comunicación* o *formulación*, el de *prueba* o *validación* y el de *institucionalización.* El abordaje de los contenidos y los cambios de estrategia que se proyectan son distintos en cada uno de los tipos de situaciones.

En una situación a-didáctica de *acción* el alumno actúa sobre la situación y hace elecciones durante esa acción aunque las nociones no sean reconocidas aún. El sujeto define sus acciones y las de otros a partir de los resultados que obtiene del propio medio tras los ensayos y errores que efectúan para resolver el problema. En una situación a-didáctica de *formulación* el alumno pretende modificar los conocimientos de otro haciéndole llegar un mensaje, comunicándole, y supone que éste le devuelva información. Entre el emisor y el receptor fluyen informaciones codificadas a través de algún sistema semiótico, y la no correspondencia entre uno y otro lleva al fracaso en la comunicación, a la revisión de los mensajes, a la interpretación de los mismos o a ambas. Ello permite construir significados compartidos, un lenguaje común. La situación a-didáctica de *validación* tiende a la justificación, el alumno debe demostrar y convencer a otros de la validez de lo que ha encontrado; y en las situaciones de *institucionalización* el profesor se encarga de darle un estatuto cultural a los conocimientos de los alumnos para que sepan nombrarlo de una manera "convencional" que no necesariamente es la misma que la definida por la matemática, y puedan también utilizarlo en otras circunstancias (Chamorro, 2003; Brousseau, 2000; Chevallard, *et al*, 1998).

El *sentido* de un conocimiento (que el alumno construye o no) es un elemento esencial en la TSD. "Una de las hipótesis fuertes de la teoría es que el conocimiento de una noción adquiere parte de su sentido en aquellas situaciones en las que interviene como solución." (Chamorro, 2003, p. 92). Las "situaciones" propuestas al alumno deben entonces ser cuidadosamente diseñadas para garantizar hasta donde sea posible, que contribuirán a la evolución de su conocimiento sin perder sentido incluso en demérito de la "exactitud" matemática de dichos conocimientos ya que las adquisiciones son a menudo locales. Brousseau (2000) afirma que:

> “El propósito de la teoría de las situaciones es permitir organizar localmente el aprendizaje de conocimientos elementales considerando su adecuación a las circunstancias y a las posibilidades del sujeto, y al mismo tiempo permitir su reorganización de acuerdo con necesidades lógicas y teóricas que son el fruto de una adaptación completamente diferente de la sociedad.” (p. 18)

Así que en el diseño de una situación de cierto tipo debe considerarse el margen de acción matemático con el que cuenta el sujeto, el conocimiento que se pretende que adquiera y el medio que estará dispuesto de manera que funja como un antagonista del sujeto, es decir, que cree las condiciones necesarias para que las estrategias que el sujeto ha desarrollado hasta ese momento sean insuficientes, pero no tan lejanas que no le permitan vislumbrar una posible salida. El conocimiento que se pretende que el alumno construya debe ser el resultado del cambio de estrategia y por tanto, no puede ser un requisito que deba poseer previamente. Al mismo tiempo, se pretende que el sujeto participe en el desafío no porque el maestro se lo pide sino porque se compromete con la problemática en juego, o sea, se vuelve el responsable (didácticamente hablando) de sus respuestas, de sus comunicaciones y acciones, y puede constatar en la situación misma si ha acertado o no en vez que sea el maestro quien (de manera a veces poco comprendida para el alumno) califique su actuación.

Diseñar situaciones a-didácticas para abordar los conocimientos matemáticos contemplados en las instituciones escolares es uno de los principales objetivos de la TSD. Si una determinada situación propicia la aparición, utilización, construcción y aprendizaje de un conocimiento matemático específico y supone un campo de problemas suficientemente extenso como para proporcionar una buena representación del conocimiento en cuestión, se habla entonces de una *situación fundamental*. No se concibe como “ideal” sino como un acercamiento más cimentado que para considerarse eficaz dependerá, entre otras cosas, de la posibilidad real de llevarse a cabo.

En el diseño de las situaciones deben considerarse también las relaciones de los actores implicados, lo que “(…) comprende una representación:

- De los estados del medio y de los cambios que los actores pueden imprimirle.
- De aquello que se juega en la acción, generalmente un estado final del medio y el interés que el actor le asocia.
- Y del inventario de las elecciones permitidas por las reglas” (Brousseau, 2000, p. 18).

Una *regla* en una situación supone una restricción para el alumno, una definición de lo que puede o no hacer para resolver el problema en cuestión. Dependiendo de las reglas definidas en la situación misma, una estrategia puede resultar adecuada o no en términos del resultado que puede obtenerse o de lo asequible y funcional que sea para el alumno. Las reglas planteadas en una situación están relacionadas con lo que Brousseau denomina *variables didácticas*, elementos que pueden tomar distintos valores dentro de la situación considerada y que se manipulan para provocar que los alumnos cambien de estrategia y se acerquen así al conocimiento en cuestión.

Para explicar ciertos fenómenos que ocurren en el aula de matemáticas, Brousseau se vale de algunas metáforas. Por ejemplo, describe a la situación didáctica como "entrar a un juego".

> "El alumno es un jugador motivado por el juego mismo (así entra en la situación a-didáctica y consiente en resolver el problema) por el bien del juego (el interés matemático). Al mismo tiempo, el hecho de que el juego implique reglas permite ver que cualquier acción del alumno estará constreñida a ellas, lo que determinará cuáles estrategias serán legales y pueden incluso hacerlo ganar…" (Herbst and Kilpatrick, 1999, p. 8)

Si lo que está en juego es la apropiación con sentido del conocimiento matemático ¿qué pasa cuando el alumno no gana en el juego?, ¿puede perderse el conocimiento matemático? El estudiante debe acceder a participar en el juego, pero no hay garantías de que gane siempre, sin embargo, es tarea del profesor asegurarse de que de cualquier forma adquiera el conocimiento que está en juego. El riesgo es entonces que el sentido se pierda o disminuya porque el conocimiento deberá, en algún grado, ser transmitido por el maestro.

Pensar en el maestro como un "actor" le imprime un carácter de contingencia al ejercicio docente que permite dimensionar su rol más allá del seguimiento de un guión o de instrucciones precisas que le indicarán qué es lo que tiene que hacer en cada momento. Muchas veces tiene que improvisar, cambiar sus planes, volver atrás o adelantarse dependiendo de los intercambios didácticos, si lo considera necesario dará más ejemplos, bajará el nivel de dificultad de una situación, orientará las respuestas de los alumnos hacia el conocimiento matemático que está intentando que se apropien, etc.

La metáfora del "contrato" que se establece entre los actores participantes en una situación didáctica resulta también una herramienta explicativa muy útil ya que permite comprender qué tipo de relación se establece entre los actores participantes en una relación didáctica y los matices que adquiere o "efectos", como el Jourdain y el Topaze[32], en vez de

[32] El efecto Jourdain es llamado así por Brousseau para aludir al personaje que Molière creó en su obra "El burgués gentilhombre". En ella, el profesor del personaje toma una simple observación del alumno (Jourdain) a propósito de un texto y le da un sentido "científico", es decir, hace una interpretación que va más allá de lo que el alumno ha dicho con la ilusión de ver en ello un gran aprendizaje. Por su parte, el efecto Topaze toma su nombre también a propósito de otra obra teatral llamada precisamente "Topaze" cuyo autor es Marcel Pagnol. Ahí se muestra lo tonto que resulta pretender enseñarle a alguien que no quiere aprender. El alumno no atina a responder de la manera en que el profesor (Topaze) espera, así que este cambia una y otra vez la pregunta tratando de obtener la respuesta esperada. Aunque todos los distintos planteamientos que realiza intenten obtener el mismo comportamiento por parte del alumno, este comportamiento del profesor provoca cambios en el sentido del saber en juego.

preguntarse quién es el culpable de que las cosas en el aula salgan bien o mal. El contrato no es estrictamente un contrato como un acuerdo explícito, visible y que surge de una negociación o un pacto. Consiste más bien en la transmisión que hace el maestro (y a otro nivel toda la institución escolar) que puede ser sutil o más directa acerca de lo que espera que los alumnos hagan; y el aprendizaje de los alumnos de esas reglas implícitas de lo que ellos "deben" hacer. Al mismo tiempo, los alumnos le hacen saber al maestro lo que esperan de él, y ambas partes son conscientes de que el otro piensa en los "comportamientos esperados", pero rara vez se habla directamente de ello. Por eso el contrato didáctico es sólo una manera de llamar a un tipo de relación entre los actores didácticos, pero no puede ser equiparado a otra clase de contrato porque no estipula qué ocurre en caso de no cumplimiento o cómo puede ser renegociado. El contrato sólo puede hacerse visible para los involucrados cuando se rompe, cuando alguien no se comporta de la manera esperada por el otro, pero su existencia es indispensable para que las cosas funcionen en el aula ya que fija responsabilidades y crea posibilidades de intercambio. Esto no significa que el contrato didáctico sea siempre igual, por ejemplo, entre un maestro y otro o en distintos niveles educativos. Podrá haber cosas semejantes, pero en cada relación didáctica se fija uno, que puede cambiar con el transcurso del tiempo.

La *ingeniería didáctica*, última metáfora acuñada por Chevallard (que aquí se menciona) constituye la opción metodológica de esta investigación por lo que se le dedica el siguiente apartado.

4 Referente metodológico

> "La noción de ingeniería didáctica surgió en la didáctica de las matemáticas a comienzos de los años ochenta. Se denominó con este término a una forma de trabajo didáctico equiparable con el trabajo del ingeniero quien, para realizar un proyecto determinado, se basa en los conocimientos científicos de su dominio y acepta someterse a un control de tipo científico. Sin embargo, al mismo tiempo, se encuentra obligado a trabajar con ciertos objetos mucho más complejos que los objetos depurados de la ciencia y, por lo tanto, tiene que abordar prácticamente, con todos los medios disponibles, problemas de los que la ciencia no quiere o no puede hacerse cargo." (Artigue, 1995, pp. 33-34)

Ingeniería didáctica supone una consideración de flexibilidad y capacidad de adaptación en las actividades didácticas y en el curso de la metodología de investigación que alude al tipo de quehacer de un ingeniero, quien debe poder ajustar su labor en función de las condiciones de trabajo y hacerse acompañar de herramientas profesionales epistemológicas, de la transposición didáctica, de las concepciones de los alumnos, los obstáculos y errores frecuentes, el desarrollo psicogenético de los alumnos, entre otros (Chamorro, 2003).

La ingeniería didáctica se construye a partir de la necesidad de contar con referentes empíricos más ricos que los emanados de exámenes escolares o pruebas estandarizadas y de poder tener un espacio de prueba para las situaciones didácticas, por ello es a la vez una opción metodológica de investigación y una serie de acciones diseñadas para provocar cambios en los sistemas de enseñanza. Como se mencionó, a efecto de la transposición didáctica que sufren los saberes, lo que llega a los alumnos ha perdido su referente, aquello que lo liga a la situación que originó la producción de ese conocimiento. La ingeniería didáctica pretende contar con una serie de situaciones didácticas específicas de un cierto conocimiento matemático articuladas de tal manera que permita un tránsito menos accidentado para los alumnos en su adquisición, ya que se considera un problema de ingeniería diseñar y regular situaciones didácticas que doten de sentido a esos conocimientos tras la transposición.

Como metodología de investigación contempla varias fases. La primera es la de **Análisis preliminares**. En ella se consideran elementos que contribuyan a elaborar un panorama suficientemente informado para el diseño didáctico. Artigue (1995) menciona los siguientes:

- “El análisis epistemológico de los contenidos contemplados en la enseñanza.
- El análisis de la enseñanza tradicional y sus efectos.
- El análisis de las concepciones de los estudiantes, de las dificultades y obstáculos que determinan su evolución.
- El análisis del campo de restricciones donde se va a situar la realización didáctica efectiva.” (p. 38)

En ésta fase también se estiman aquellas restricciones que el trabajo de ingeniería debe considerar en tanto una dimensión epistemológica (sobre el saber específico que se abordará), una cognitiva (sobre los sujetos a quienes se dirigirá la enseñanza) y una didáctica (sobre las características del contrato didáctico y otras particularidades que pudieran considerarse importantes acerca del saber en cuestión y de la relación entre los participantes en la puesta en práctica). Debe verificarse si efectivamente la situación o situaciones consideradas pueden fungir como a-didácticas para los alumnos, sobre el sentido que pudiera tener para ellos y si es factible que ocurran los cambios de estrategia proyectados para acceder al saber específico en cuestión.

En una segunda fase que supone el **Análisis a priori** se toman decisiones acerca de las variables macro y micro de la ingeniería, es decir, aquellas variables tocantes tanto a la planeación de la toda la ingeniería como a las locales referentes a una sesión o secuencia.

Las situaciones, las variables didácticas, las reglas, elementos del contrato didáctico y su gestión, entre otros, son considerados y organizados en ésta fase.

Una de las características más importantes de la ingeniería didáctica como metodología de investigación es su validación, básicamente interna. Al considerar elementos epistemológicos, cognitivos, didácticos, etc. en los análisis preliminares, se sienta una base con la cual es posible establecer una relación entre el significado del saber en cuestión y las situaciones diseñadas para la parte didáctica de la ingeniería, es decir,

> "(…) el objetivo del análisis a priori es determinar en qué las selecciones hechas permiten controlar los comportamientos de los estudiantes y su significado. Por lo anterior, este análisis se basa en un conjunto de hipótesis. La validación de estas hipótesis está, en principio, indirectamente en juego en la confrontación que se lleva a cabo en la cuarta fase entre el análisis a priori y el análisis a posteriori." (Artigue, 1995. pp. 44-48)

La fase 3 comprende la **Experimentación**, la puesta en práctica de las situaciones diseñadas para la parte didáctica de la ingeniería. Después, los datos obtenidos son analizados en la fase 4 de validación o **Análisis a posteriori** mediante la confrontación de lo encontrado con lo hipotetizado.

5 Referente empírico

Para poder cumplir con el objetivo de la ingeniería didáctica era necesario en primer término, que los profesores participantes tuvieran a su cargo un grupo de alumnos de primaria sin importar el grado, pues interesaba que contaran con un referente actualizado sobre el planteamiento en el aula de problemas de suma y de resta. Se determinó extender la invitación al taller (nombre con el que se conoció entre los maestros a la parte experimental de la ingeniería) a seis maestros por considerarse un número de participantes que permitiría el intercambio de ideas dentro de un margen manejable de intervenciones susceptible de recuperarse en los registros de observación. Esos seis maestros fueron seleccionados por la directora del plantel bajo el criterio de escoger a quienes ella consideraba competentes en la enseñanza de matemáticas y/o tuvieran disposición para participar. La directora se encargó de hacer los ajustes necesarios para que los grupos de los maestros estuvieran atendidos durante el tiempo que le dedicarían al taller. La duración del mismo no podía ser demasiado larga por el esfuerzo que para toda la escuela suponía, pero tampoco tan corta que no permitiera desarrollar procesos que dieran lugar a los aprendizajes buscados, así que se determinó realizarlo en seis sesiones, una por semana, de dos horas cada una y llevarlo a cabo dentro de la misma escuela en un área que facilitó el personal de apoyo de USAER.

Tras la primera charla informal con los maestros seleccionados la directora de la unidad de apoyo de USAER solicitó incluir a un psicólogo que recién se integraba al trabajo en esa escuela y aunque no era estrictamente maestro frente a grupo en esa institución, sí colaboraba atendiendo a niños que le canalizaban y otras veces trabajaba temas específicos con los grupos completos, además de que en el turno vespertino sí tenía a su cargo un grupo en otra escuela. Tras definir a los participantes y los días y horarios del taller, se llevó a cabo una entrevista[33] con cada uno de los maestros con el afán de conocerlos más en el terreno personal y profesional así como de establecer un primer diagnóstico sobre sus posibilidades y estrategias de resolución ante problemas aditivos de la 4ª categoría de Vergnaud. A cada maestro se le hicieron algunas preguntas para averiguar algunos datos generales y después se le presentaron de uno en uno y por escrito, seis problemas. En la entrevista se les proporcionó lápiz y papel por si lo requerían y la única consigna fue que resolvieran el problema como ellos lo consideraran conveniente. Durante esa entrevista, que fue grabada en audio, estuvo presente la entrevistadora y una observadora. La parte de los datos generales estaba estructurada a fin de obtener información común a todos los maestros, pero en la parte de los problemas no había guión y lo que orientaba las preguntas de la entrevistadora era la propia actuación del maestro en el afán de comprender sus producciones, sus respuestas y argumentos. Las grabaciones fueron posteriormente transcriptas y las producciones (cuando las hubo), analizadas.

En cada una de las sesiones se contó con el apoyo de tres observadoras, una de las cuales fue también conductora del taller. Cada observadora estuvo encargada de tomar notas de las conversaciones al interior de cada pareja y durante la discusión grupal, lo que permitió contar con más información para el análisis de las producciones. Para llevar a cabo la validación de las situaciones que implica la cuarta fase de la ingeniería (en la que se confrontan los análisis a priori con los datos obtenidos en la experimentación) se tomaron en cuenta las transcripciones de las entrevistas iniciales y las producciones gráficas de los maestros para resolver los problemas, los registros realizados por cada una de las tres observadoras durante las seis sesiones y las producciones en pareja e individuales de los maestros.

[33] La información que se obtuvo y los problemas presentados pueden encontrarse en el capítulo III.

Capítulo III **ANÁLISIS GLOBAL DE LA EXPERIENCIA**

1 Ingeniería Específica

La ingeniería didáctica, como se anticipara, se planteó como objetivo que los profesores participantes lograran establecer la relación semántica entre los datos de problemas pertenecientes a la 4ª categoría de Vergnaud. Para alcanzar el objetivo se planeó la elaboración de una secuencia de situaciones a-didácticas en las que se utilizara la representación gráfica de las relaciones semánticas como un recurso didáctico. La creación de situaciones de ésta naturaleza requiere analizar al conocimiento que se volverá objeto de enseñanza así como a la forma en que los sujetos (en éste caso, los maestros) se relacionan con él. Ante la escasa información hallada acerca de maestros de primaria actuando sobre problemas de la 4ª categoría se tomó la decisión de realizar una entrevista inicial.

La entrevista se realizó de manera individual presentando a cada maestro seis problemas de la 4ª categoría. La única consigna fue resolver el problema, para lo cual se les proporcionó lápiz y papel. En el diseño de los problemas de dicha entrevista se consideraron las siguientes variables didácticas:

- *Rango numérico*: se supuso que podría haber diferencias en el establecimiento de la relación semántica si las cantidades involucradas eran susceptibles de operarse mediante un cálculo mental simple, o si requerían algún cálculo más elaborado o escrito, por ello hubo problemas que se ubicaban en las decenas y otros hasta las decenas de millar.
- *Cualidad de las transformaciones*: se tenían datos (Vergnaud, 1982) de que los problemas de la 4ª categoría que involucraban transformaciones iguales (ambas positivas o negativas) eran más fáciles para los resolutotes. Para ver si tal información se verificaba

con los maestros se incluyeron tanto problemas con transformaciones iguales como con transformaciones opuestas (una positiva y otra negativa).

– *Contexto*: como se ha reportado en muchas investigaciones, se pensó que si el problema versaba sobre un contexto familiar para los maestros, habría más posibilidades de establecer la relación semántica, así que se incluyeron problemas con contextos familiares y no familiares.
– *Posición de la incógnita*: fue la única variable en la que se optó por un solo valor, el de dificultad intermedia. Se ubicó a la incógnita siempre en T_2 ya que, según reporta la investigación (Carpenter y Moser, 1982; Bermejo, 1990; Puig y Cerdán, 1988) así resulta más difícil para los resolutores que cuando se desconoce T_C pero a su vez es menos complejo que cuando se encuentra en T_1 (máxime si ésta es negativa). Se consideró que así se tendría evidencia de la posibilidad de los maestros para establecer la relación semántica sin correr el riesgo de que no vislumbraran alguna resolución.

La intención pues, fue presentar un panorama variado de los problemas de la 4ª categoría incluyendo algunas de las características que los vuelven complejos y detectar de entre éstas, aquellas que se constituían en un obstáculo en las estrategias de solución que intentaran los maestros para así proceder al diseño de la intervención didáctica de la ingeniería.

Los problemas de la entrevista inicial[34] fueron los de *ORO, GUILLERMO, PEDRO, NACIMIENTOS, LULÚ,* y *DESCUENTOS* y se presentaron de uno en uno, en ese orden[35].

1. La reserva de oro de un banco bajó 642 lingotes en el transcurso del año 1973. Durante el primer semestre del mismo año había bajado 1031 lingotes. ¿Qué pasó en el transcurso del segundo semestre? (-) + [+] = (-)

2. A Guillermo le gusta hacer apuestas. En la primera ganó $260 y luego volvió a apostar. Haciendo cuentas de las dos apuestas vio que en total había perdido $85. ¿Qué pasó en la segunda apuesta? (+) + [-] = (-)

3. Pedro jugó dos partidos de canicas. Durante el primero ganó 7. Después jugó un segundo partido. Haciendo cuentas de los dos partidos notó que en total había perdido 2 canicas. ¿Qué pasó en el segundo partido? (+) + [-] = (-)

4. En una ciudad, el excedente de los nacimientos sobre los decesos fue de 1293 personas entre 1950 y 1960, y de 14084 entre 1950 y 1970. ¿Qué sucedió entre 1960 y 1970? (+) + [+] = (+)

5. Lulú pidió 2 cajas de aguacates para vender en su tienda. Cuando las abrió y revisó el contenido notó que en la primera había sólo 23 aguacates en buen estado. Al terminar de revisar las dos cajas contó los aguacates que estaban en buen estado y sumó 81. ¿En qué condiciones estaban los aguacates de la segunda caja? (+) + [+] = (+)

---

[34] Los de NACIMIENTOS, ORO y PEDRO fueron tomados de Vergnaud (1985).
[35] Se utilizarán los signos + y – para denotar si la transformación es positiva o negativa, el paréntesis ( ) para las transformaciones conocidas y el paréntesis cuadrado [ ] para la incógnita.

6. Te están descontando $720 de tu quincena por un préstamo que solicitaste, además, tuviste dos faltas sin previo aviso en esa quincena. Al recibir tu salario notaste que te dieron $935 menos de lo que normalmente recibes. ¿Cuánto te descontaron por los días que faltaste? (-) + [-] = (-)

Los maestros tuvieron dificultades al enfrentarse a los problemas, ninguno pudo resolver correctamente los seis y una de las participantes no tuvo ningún acierto, como se muestra en la tabla.

	Oro	**Guillermo**	**Pedro**	**Nacimien-tos**	**Lulú**	**Descuen-to**	total
Aurora	N	N	N	S	N	S	**2**
Juliana	S	N	N	S	S	S	**4**
Fabiola	N	N	N	N	N	N	**0**
Nelson	N	N	N	N	S	S	**2**
Rosita	N	N	N	S	S	S	**3**
Susana	S	N	N	S	S	S	**4**
	2	**0**	**0**	**4**	**4**	**5**	

Tabla de resultados de la entrevista que muestra si los maestros resolvieron correctamente (S) o no (N) los problemas planteados.

A partir de la revisión de los resultados de la entrevista inicial, se contó con elementos más sólidos para realizar el siguiente análisis.

<u>Análisis preliminares</u>

Análisis Epistemológico

a. Según los datos hallados por Vergnaud (1982) y los resultados obtenidos en la entrevista inicial, los problemas de la 4ª categoría son más difíciles para los resolutores debido a que los datos que en esos problemas se proporcionan no incluyen ninguna medida y deben resolverse a partir de informaciones correspondientes sólo a transformaciones que deben componerse para obtener la solución del problema, lo que suele dar al resolutor la sensación de “falta de datos” que le impide resolver la situación, o bien, resolverla sin la seguridad de estar haciéndolo correctamente.
b. El empleo que es posible hacer en estos problemas de números negativos complejiza la situación en dos sentidos: dificulta el establecimiento de la relación semántica y el cálculo numérico requiere estrategias nuevas (con respecto a las adquiridas para los números

naturales). Sobre la relación semántica se encontró, en concordancia con lo reportado por Vergnaud (1982), que los alumnos no reconocían la relación entre los datos y solían convertir los problemas de la 4ª categoría en problemas de la 2ª, que les resultaba más familiar. En tanto el cálculo numérico los datos de los problemas debieron "acomodarse" en una operación (a veces dejando de lado el signo) o efectuar un cálculo mental considerando a la relación semántica y al valor absoluto de tales datos. La resta no apareció de manera reconocible para los maestros, se complejizaba sobre todo en el caso de tener que realizarla ya no como efecto de una transformación negativa sobre un estado[36] sino como efecto de una transformación negativa sobre una transformación positiva cuya composición es otra transformación. También hubiera sido posible que los maestros optaran por la suma algebraica, pero en la entrevista inicial ninguno la utilizó y por ello la ingeniería no se planteó que los maestros llegaran a reconocerla como estrategia de solución para éste tipo de problemas.

Análisis de la enseñanza tradicional y sus efectos

Éste análisis se realizó a partir de: la información de Bruno y García (2004) sobre actividades de clasificación de problemas de varias categorías (incluyendo a la 4ª) que hicieron algunos maestros; la revisión de estrategias didácticas que generalmente se emplean para enseñar y resolver problemas aditivos (Block, *et al*, 2000; Verschaffel, *et al*, 2000); las posibilidades de acercamiento que ofrece a los maestros el Taller que funge como Curso Nacional de Actualización; y algunos comentarios que hicieron los maestros en la entrevista inicial. Considerando lo anterior, se encontró que:

a. Los problemas de la 4ª categoría no forman parte de los aprendizajes de la primaria, según los materiales oficiales y la opinión de los propios maestros, debido principalmente al empleo que en ellos se hace de números negativos. Por lo tanto, su estructura semántica y estrategias de cálculo "formales" (como el álgebra) resultan en general desconocidas para los maestros de dicho nivel.
b. Las estrategias didácticas con las que suelen abordar los problemas aditivos que sí son objeto de enseñanza de la primaria, no resaltan el papel esencial del establecimiento de la relación semántica entre los datos para poder posteriormente operar sobre ellos, y es frecuente que se basen en la detección de "palabras clave" o algún otro elemento parcial que puede dar lugar a decisiones erróneas en el proceso de resolución. El énfasis en la

[36] Por ejemplo: "Tenía 12 cochecitos y perdí 5 ¿cuántos coches me quedan?"

operatoria desvía la atención que maestros y estudiantes debieran poner en el sentido del problema.

Análisis cognitivo de los sujetos a quienes se dirigirá la enseñanza

Se pudo observar que la 4ª categoría planteaba un tipo de problema aditivo distinto al que los profesores conocían como "de suma o de resta". Dichos problemas les provocaban una sensación de incertidumbre llevándolos incluso a concluir que no podían resolverse. Los maestros poseían diversos conocimientos matemáticos que les eran familiares (como el cálculo algorítmico, las relaciones semánticas entre los datos de problemas de categorías conocidas, algunas representaciones simbólicas de esas relaciones, etc.) y les sirvieron como base al enfrentarse a situaciones no familiares. Pero para poder volver familiar lo nuevo debían resignificar lo que en situaciones conocidas hasta ese momento, les resultaba incuestionable y que ahora entraba en conflicto. Los errores de los maestros en el establecimiento de la relación semántica no eran sino conocimientos que ante esa situación, habían perdido validez[37]. Así pues, en tanto al aspecto cognitivo se afirma que:

a. Los maestros en situaciones de enseñanza se comportan, por una parte, como cualquier otro sujeto enfrentado a una tarea. Si les resulta conocida la resuelven haciendo uso de herramientas que ya poseen, y si no, recurren a estrategias no necesariamente convencionales para resolverla (siempre y cuando alcancen a ver alguna solución, de lo contrario, no reconocerán el problema ni posibles soluciones). Si sus estrategias iniciales no resultan útiles, se dan a la tarea de adaptarlas para hacerle frente al problema, de manera exitosa, parcialmente exitosa o errónea. Los conocimientos recibidos en su carrera como alumnos de secundaria y preparatoria además de los que cursaron en su formación como maestros, tendrían que ser suficientes para poder resolver problemas de la 4ª categoría, pero las dificultades relacionadas con la enseñanza antes descritas probablemente interfirieron volviendo a estos problemas un reto. Así pues, se observó que los problemas de la 4ª categoría podrían resultarles difíciles, pero al alcance de sus posibilidades matemáticas[38].
b. Por otro lado, la situación social que ostenta un maestro lo coloca en una posición distinta de cualquier otro aprendiz. Es difícil para un profesor admitirse como un sujeto falible o con una formación no muy sólida, especialmente ante situaciones que él percibe como de su competencia, en este caso, ante problemas de suma y de resta. El reconocimiento de

[37] Brousseau, citado en: Chevallard, *et al*, (1998), p. 224

[38] Esta suposición se sostuvo a partir de los resultados obtenidos por cuatro de los seis maestros. Quienes evidenciaban más dificultades fueron Aurora y especialmente Fabiola, y en un primer momento se consideró que se encontrarían en desventaja respecto a sus compañeros en las posteriores sesiones.

dificultades para enfrentar situaciones que deberían poder resolver (según mencionaron algunos en la entrevista inicial) supone un posicionamiento frente al saber y un estatus social que no resultan sencillos de adoptar para muchos maestros. Por ello, en una situación didáctica con maestros es esencial el establecimiento de un medio que les resulte desafiante y que les haga ver la obsolescencia de algunas ideas o conocimientos con los que cuentan en ese momento pero sin “rebasarlos” ni hacerlos sentir ingenuos, ignorantes o malos maestros. Toda situación didáctica exige que el aprendiz se reconozca en esa calidad, que asuma que hay cosas que no sabe pero que es capaz de aprender; una fina línea debe trazarse de manera especialmente cuidadosa cuando se trabaja con maestros (Fuenlabrada, 1988).

Escenario en el que se implementaría la ingeniería

a. Los maestros participantes en las sesiones didácticas tenían en común el hecho de tener a su cargo un grupo y de laborar en la misma escuela. Algunos roles y estatus sociales estaban previamente establecidos y se consideró que eventualmente podrían incidir en el desarrollo de las sesiones tornando al espacio de trabajo en un sitio agresivo o calmo (en términos de las relaciones sociales).
b. También debe tenerse en cuenta que las sesiones se realizaron en la propia escuela de los maestros, lo cual por un lado facilitó su presencia, pero por otro hizo factible que los participantes se distrajeran en sus labores cotidianas, que fueran interrumpidos, que algo ocurriera dando lugar a retrasos, dificultades o que incluso pospusiera las sesiones.

<u>Análisis a priori y variables didácticas en juego</u>

Tras los Análisis preliminares se procedió al diseño de la fase experimental de la ingeniería considerando las siguientes características para la elaboración de las situaciones:

– La mayor parte de las actividades se desarrollarían en parejas buscando posibilidades de diálogo cercano. Luego se discutirían grupalmente los trabajos elaborados por las parejas. Se conformaron las parejas de acuerdo a los resultados que los maestros obtuvieron en la entrevista inicial buscando que los integrantes de cada una hubieran tenido un desempeño similar y tomando en cuenta algunas características de personalidad que se pudieron apreciar tales como la disposición, la actitud ante las tareas y la autoimagen. En particular, se pensó que Juliana y Rosita podrían funcionar en el trabajo en pareja debido a que ambas habían resuelto correctamente cuatro problemas y mostraron estar conscientes de que su desempeño en las matemáticas que enseñaban era bueno. Rosita tuvo una actitud segura y decidida y se consideró que podría contener algunos rasgos de Juliana, quien durante la entrevista se mostró un tanto pretenciosa sobre sus conocimientos matemáticos y adusta en torno a la idea de participar en el taller. Se unió a Aurora y Fabiola en otra pareja porque ambas tuvieron muchas dificultades en los problemas de la entrevista; Aurora explicitó desde el inicio sus deficiencias en matemáticas y resolvió sólo dos problemas de la entrevista inicial, mientras que Fabiola en la mitad de los problemas no pudo hacer ninguna marca, manifestaba constantemente que no entendía y no terminó correctamente ningún problema. Sin embargo las dos mostraron una actitud tanto de desconcierto por sus dificultades, como de disposición y cooperación en las tareas. Susana y Nelson quedaron juntos debido a que obtuvieron resultados similares en la resolución de los problemas y porque a ambos se les notó cómodos con sus conocimientos matemáticos, sin llegar a la actitud segura de Juliana, pero sin sentir que "no sabían nada", como era el caso de Aurora. También se tenían contempladas algunas actividades individuales en el transcurso de la implementación de la ingeniería para observar el posicionamiento personal de los maestros frente a las tareas planteadas.

- Se partiría de una situación de formulación que supondría el establecimiento de comunicaciones a través de la emisión y la recepción e interpretación de mensajes entre las parejas de maestros. Según Chamorro (2003), para que una situación de formulación sea efectiva se requiere: que haya necesidad de enviar un mensaje, que las posiciones de los alumnos sean asimétricas (en cuanto a medios de acción), y que el propio medio permita retroacciones para la acción. Se consideró que los tres aspectos se podrían cumplir en el desarrollo de las actividades. Una pareja debía enviar un mensaje a otra con una intención claramente comunicativa que la pareja receptora debía interpretar. La situación misma permitiría que los propios sujetos comprobaran si el mensaje había sido correctamente elaborado y correctamente interpretado. La consigna no sería resolver el problema como en la entrevista inicial (aunque no se bloquearía), sino *representarlo* para que otra pareja pudiera saber a qué problema correspondía tal representación. La decisión de plantear las reglas de la situación en esos términos radicó en el intento de ir más allá de la sola operación, es decir, escribir una "cuenta" para resolver un problema no garantiza que el resolutor haya establecido la relación semántica entre los datos.
- Se comenzaría con problemas que involucraran transformaciones iguales (ambas positivas o negativas) debido a que en la entrevista inicial los maestros manifestaron mejores actuaciones[39] en los problemas de este tipo (NACIMIENTOS, LULÚ Y DESCUENTOS) comparadas con las que mostraron frente a problemas que suponían transformaciones

[39] No obstante, parte de las resoluciones exitosas no fueron directas, hubo intentos fallidos, titubeos, falta de seguridad e incluso dudas sobre la veracidad del resultado encontrado.

opuestas (una positiva y otra negativa). Se planeó mantener un contexto familiar (juegos de canicas) y situar la incógnita en cualquiera de los tres lugares posibles[40] lo que dio lugar a 6 problemas distintos: los de SEBASTIÁN.

Sebastián es un niño que juega dos partidos de canicas, lo que pierde o gana en ellos son las dos transformaciones elementales, y el balance positivo o negativo de los dos juegos es la transformación compuesta (que es la composición de las dos transformaciones elementales involucradas). En estos problemas se relacionan las mismas cantidades, 23, 39 y 62 (dos de ellas aparecen como datos, la tercera es la incógnita) pero con diferente signo y variando la posición del dato desconocido. Las cantidades involucradas se encontrarían en el rango de las decenas porque el interés no se puso en el manejo simbólico de la operatoria sino en el establecimiento de las relaciones entre los datos. El manejo de tres cantidades en todos los problemas permitiría tener una constante que bloqueara la posibilidad de diferenciarlos a través de los datos numéricos y que a su vez dejara de lado el cálculo numérico para centrarse en la relación que se establecía, es decir, que los maestros no se preocuparan por "obtener el resultado" porque la mayoría de las veces ya lo conocían, sino por averiguar de qué manera estaban jugando los datos en cada problema y cómo podían representar tal relación. Se contempló la posibilidad de que para hacer notar la diferencia entre un problema y otro, los maestros recurrieran a algún tipo de operatoria.

– Se acomodarían los problemas de SEBASTIÁN de dos en dos (presentando juntos el 1 y 2, 3 y 4, 5 y 6) y en cada momento todos los maestros trabajarían con los mismos dos problemas. La tarea consistiría en elegir uno de ellos y representarlo (pareja emisora) de manera que otra pareja (pareja receptora) pudiera interpretarlo y saber cuál problema era el que había escogido la pareja emisora.

Se transcriben a continuación los seis problemas de SEBASTIÁN a los que se les ha añadido, por razones analíticas, la simbolización de las transformaciones y un código de identificación (Problema #) pero en el entendido de que durante la ingeniería los maestros sólo recibieron el texto. Para mayor claridad, se separan los 2 problemas que en cada momento recibieron los maestros:

1. Sebastián jugó dos partidos de canicas. En el primero ganó 23 canicas y en el segundo ganó 39. ¿Cómo quedó al finalizar los dos partidos? (+23) + (+39) = [+62] PROBLEMA #1

2. Sebastián jugó dos partidos de canicas. En el primero perdió 23 y en el segundo perdió 39. ¿Cómo quedó al finalizar los dos partidos? (-23) + (-39) = [-62] PROBLEMA #2

[40] A diferencia de mantenerla en T_2 como en los problemas de la entrevista.

1. A Sebastián le gusta jugar a las canicas. Jugó un primer partido y cuando jugó el segundo, ganó 39. Cuando terminó los dos partidos vio que había ganado 62 canicas. ¿Qué pasó en el primer partido? [+23] + (+39) = (+62) PROBLEMA #3

2. A Sebastián le gusta jugar a las canicas. Jugó un primer partido y cuando jugó el segundo perdió 39 canicas. Al finalizar los dos partidos se dio cuenta de que había perdido 62 canicas en total. ¿Qué pasó en el primer partido? [-23] + (-39) = (-62) PROBLEMA #4

1. Sebastián jugó dos partidos de canicas. En el primero ganó 23 y luego jugó el segundo. Al contar el total de las canicas de los dos partidos notó que tenía 62. ¿Qué pasó en el segundo partido? (+23) + [+39] = (+62) PROBLEMA #5

2. Sebastián jugó dos partidos de canicas. En el primero perdió 23 canicas y luego jugó un segundo partido. Al término de los dos partidos vio que en total había perdido 62 canicas. ¿Qué pasó en el segundo partido? (-23) + [-39] = (-62) PROBLEMA #6

- Se pondría como restricción en la elaboración de los mensajes la consigna de no escribir palabras ni los números que identificaban a cada problema (el 1 ó el 2 en cada hoja).
- La introducción del esquema de Vergnaud se contemplaba como un recurso para ubicar gráficamente los componentes de un problema de la 4ª categoría. Se planeó hacerla una vez que los maestros hubieran probado varias estrategias de representación propias y cuando las dificultades de simbolización de las transformaciones (a diferencia de las medidas), de su cualidad (positiva o negativa), orden y posición de la incógnita, se hicieran evidentes. Además, se pensó introducir el esquema en un ejercicio de “reconocimiento”, es decir, no se convertiría en un objeto de enseñanza sino en un medio para poder organizar la información de los problemas, y se valoraría en sus actuaciones posteriores si resultaba o no un recurso útil para los maestros.
- Si el avance de los participantes y el tiempo disponible (6 sesiones) lo permitían, se planeó el abordaje de problemas que involucraran transformaciones opuestas (una positiva y otra negativa) similares a los problemas de ORO, GUILLERMO y PEDRO de la entrevista inicial.

  Así, se anticipó la introducción de los problemas de VANESA en los que las transformaciones eran opuestas. Se pensó que permitirían, por una parte, profundizar sobre lo positivo y lo negativo al aumentar el rango numérico para que los maestros se vieran en la necesidad de hacer cálculos escritos enfatizando en el uso de la resta cuando es una operación de “quitar” y cuando es la manera de encontrar una diferencia. Se presumía que ello iba a resultar especialmente difícil cuando la primera transformación fuera negativa y con valor absoluto mayor que la segunda positiva, ya que en este caso, para encontrar el valor y la cualidad de la composición de transformaciones sería necesario hacer una resta en la que el minuendo representaría una pérdida y el sustraendo una ganancia, pero el resultado seguiría siendo una pérdida. Al igual que en los problemas de SEBASTIÁN, en los de VANESA jugaban otros tres números de manera constante (132, 368 y 500) y también se presentarían de dos en dos, esta vez diferenciándose por el orden de las transformaciones. Así como la cualidad de las transformaciones era el elemento que permitía distinguir entre los dos problemas que se presentaron en cada hoja de la serie SEBASTIÁN, en los de VANESA era el orden temporal en el que ocurrían las transformaciones. Los contextos eran todos comerciales, deudas, compras, ahorro, etc. y la incógnita se podría encontrar en cualquiera de las tres posiciones dando lugar a 12 problemas distintos:

1. Vanesa paga con un billete de $500 una cuenta de $132 en el supermercado. ¿Cuánto le regresan de cambio? (+500) + (-132) = [+368] PROBLEMA #1
2. Vanesa debe $132 y hoy va a cobrar $500 de su semana. Si Vanesa quisiera pagar su deuda ¿cuánto dinero le sobraría de lo de su semana? (-132) + (+500) = [+368] PROBLEMA #2

1. Vanesa abona $132 de una grabadora que vale $500. ¿Cuánto dinero le falta a Vanesa para que le den la grabadora? (+132) + (-500) = [-368] PROBLEMA #3
2. La cuenta del supermercado es de $500, Vanesa sólo lleva $132. ¿Cuánto dinero le faltaría para poder llevarse todo lo que puso en el carrito? (-500) + (+132) = [-368] PROBLEMA #4

1. Vanesa paga con un billete de $500 la cuenta del supermercado. Si le devuelven $368 de cambio ¿de cuánto era la cuenta? (+500) + [-132] = (+368) PROBLEMA #5
2. Vanesa tenía una deuda, hoy cobró $500 de su semana, pagó lo que debía y le sobraron $368. ¿Cuánto debía Vanesa? [-132] + (+500) = (+368) PROBLEMA #6

1. Vanesa hace un abono de una deuda de $500. Si todavía debe $368 ¿de cuánto fue el abono? [+132] + (-500) = (-368) PROBLEMA #7
2. Vanesa ayer pidió prestados $500, hoy pagó algo de ese préstamo pero todavía debe $368. ¿Cuánto dinero pagó hoy? (-500) + [+132] = (-368) PROBLEMA #8

1. Vanesa ayer recibió un pago de $132, hoy tiene que liquidar un adeudo y le faltan $368. ¿Cuánto es lo que debe Vanesa? (+132) + [-500] = (-368) PROBLEMA #9
2. Vanesa tiene una deuda, si hoy hace un abono de $132 todavía deberá $368. ¿De cuánto es la deuda de Vanesa? [-500] + (+132) = (-368) PROBMEMA #10

1. Vanesa cobró ayer lo de su semana, hoy gastó $132 y le quedan todavía $368 de lo que cobró. ¿Cuánto gana Vanesa a la semana? [+500] + (-132) = (+368) PROBLEMA #11 2. Vanesa debe $132, hoy va a cobrar su semana y si paga lo que debe le van a sobrar $368. ¿Cuánto gana Vanesa por semana? (-132) + [+500] = (+368) PROBLEMA #12

La dinámica sería la misma que la establecida para los problemas de SEBASTIÁN, elegir uno de los dos problemas que había en cada hoja y representarlo para que otra pareja lo interpretara y pudiera saber cuál había sido elegido[41].

- Tras la introducción de los problemas de VANESA se haría un trabajo más sistemático sobre el esquema de Vergnaud. En otro ejercicio de correlación esquema-problemas se planeó profundizar sobre la relación semántica a través de situaciones en las que los maestros tuvieran que identificar a qué problemas correspondían los esquemas "llenos" (con datos numéricos)[42] argumentando su elección.
- Finalmente se haría un recorrido, a manera de síntesis, de lo realizado en la ingeniería.

<u>Fase de experimentación</u>

A continuación se describe el desarrollo de las seis sesiones de manera global con la intención de ofrecer un panorama que conserve el hilo temporal del trabajo y permita ver las modificaciones y ajustes que se realizaron. Un análisis más puntual y profundo se hará en el siguiente capítulo.

Primera sesión

Cuando las parejas fueron conformadas y tanto maestros como observadoras tomaron sus lugares, se presentaron los primeros dos problemas de SEBASTIÁN. En el análisis a priori se había contemplado la posibilidad de que los maestros recurrieran a un tipo de operatoria[43] para diferenciar entre un problema y otro. Aunque no apareció, hubo marcas para hacer notar lo negativo. Para hacer la primera representación todos eligieron el problema #1 [Sebastián jugó dos partidos de canicas. En el primero ganó 23 canicas y en el segundo ganó 39. ¿Cómo quedó al finalizar los dos partidos?]. Fue notoria la heterogeneidad de recursos empelados, sin embargo las formas en las que se representó la cualidad fueron especialmente importantes.

---

[41] Sin embargo, cabe anticipar que el interés de los maestros en la operatoria (¿cómo acomodar los números en una operación que tenga sentido?) y su necesidad manifiesta por recuperar en algún momento los problemas de la entrevista inicial, reorientaron la ingeniería y no hubo tiempo de abordar los 12 problemas de VANESA.

[42] Habría algunos esquemas que no pudieran relacionarse.

[43] 23 + 39 = 62 ó algo equivalente para el problema #1, por ejemplo, y dado que el problema #2 se resuelve sumando dos negativos, se esperaba ver cómo resolvían el problema de los signos.

Dos parejas de maestros usaron recursos claramente figurativos (una representación era operativa y la otra no) (Peltier, 2003). Se denotaba que al final de los dos juegos Sebastián había ganado dibujándolo con cara de felicidad y un trofeo. Esto llamó poderosamente la atención en el diseño de la ingeniería, pues se partía del supuesto de que los maestros elaborarían representaciones simbólicas[44]. El que los maestros echaran mano de este tipo de recursos, al menos en un caso, pudo haber tenido que ver con la interpretación errónea de una parte de la consigna que consistió en "hacer la representación del problema elegido sin usar palabras ni poner *el número*[45] del problema", y una pareja de maestros entendió que "no podían poner números, ningún número". La consigna se volvió a discutir y se aclararon las confusiones.

El problema #2 de SEBASTIÁN [Sebastián jugó dos partidos de canicas. En el primero perdió 23 y en el segundo perdió 39. ¿Cómo quedó al finalizar los dos partidos?] permitió entrar en un campo que se anticipaba oscuro para los maestros, el de los significados de las operaciones de suma y resta. En contextos escolares, la gran mayoría de las veces una suma significa agregar, unir, aumentar, se le concibe como aquella operación que "agranda" una cantidad inicial. De manera similar, alumnos y maestros suelen pensar en la resta como la operación que permite quitar, desagrupar, disminuir. La sustracción "achica" una cantidad inicial. Así pues, cuando en la escuela se efectúa una suma para resolver un problema escolar, está implícito que el resultado será un número mayor[46] que cualquiera de los sumandos; y la resta será menor que el sustraendo y éste que el minuendo. Mientras se discutía una representación en la que se dibujaron dos conjuntos (las transformaciones elementales) que convergían mediante dos líneas en un tercero (la transformación compuesta), se dijo lo siguiente:

Conductora:	*Están diciendo que esto es una suma* (señalando los círculos unidos por las líneas \ /) *y aquí hay una resta* (la operación mediante la cual los autores resolvieron la pregunta del problema)
Fabiola:	*Pero ¿por qué es suma?, ¿qué me está indicando que es suma?*
Aurora:	*Para mí es la unión de dos conjuntos, la suma de dos conjuntos* (señala los círculos y las líneas)
Rosita:	*El resultado es mayor... si fuera menor no es suma, un dato más de que es una suma es que este número* (el del resultado) *es mayor...*

Visto desde el lado de los problemas, es parte de la cultura de la matemática escolar que si en el enunciado aparecen palabras como "le regalaron", "subió", "creció", "juntó", etc., la ope-

[44] En la entrevista inicial no se les solicitó elaborar ninguna representación, sólo resolver el problema, por ello, se tenían referencias acerca de sus posibilidades de representación gráfica, pero no particularmente de la representación gráfica de las relaciones semánticas entre los datos de los problemas planteados.
[45] El 1 ó el 2 que diferenciaban a los problemas presentados en cada hoja.
[46] Y de hecho lo es, en términos absolutos.

ración que resuelve será una suma, y si dice "se comió", "bajó", "perdió", etc. hay que hacer una resta. En los problemas de SEBASTIÁN era posible *sumar pérdidas* para hallar la pérdida total. Concebir a las operaciones aritméticas de esta forma resultaba desconocido para los maestros. Cuando los maestros tuvieron que representar los primeros dos problemas de SEBASTIÁN pudieron ver que se resolvían sumando 23 + 39 = 62 para el primero, y (-23) + (-39) = (-62) para el segundo. Aunque la anterior expresión es la forma matemáticamente correcta de simbolizar la operación algebraicamente, lo que los profesores hicieron fue resolverla aritméticamente con una operación idéntica a la del primer problema, pero teniendo en cuenta que esta vez Sebastián había perdido siempre, así que, aun sin hacer uso de números negativos, sabían que sumaban pérdidas.

Sobre el uso de los signos, la pareja conformada por Juliana y Rosita fue la única que representó la pérdida con números negativos. El uso de signos generó controversia en la discusión grupal, especialmente con Aurora quien no concebía *la existencia* de los mismos, es decir, si estaban hablando de cosas como canicas ¿cómo podía Sebastián tener -23 canicas?, y en términos estrictos de sentido, Aurora tenía razón, si se tienen que quitar 5 vasos de una alacena en la que sólo hay 2, lo mejor que puede hacerse es vaciarla y dejarla con 0 vasos. Los números negativos no aparecen en la vida extraescolar de manera natural, son un constructo matemático que toma algún tiempo en cobrar sentido para los alumnos (incluyendo a los maestros), ya que, según se dijo anteriormente, les es posible pensar en el signo negativo como una transformación (siempre y cuando los valores numéricos no lleven a casos como el de los vasos), pero no en el número con signo como una cualidad de éste, el -3 como un valor o una medida que si bien, no permite "ver" -3 vasos, hace posible operar y pensarlos en términos abstractos o en situaciones de medición de magnitudes. Pronto se hizo evidente que los signos, especialmente los negativos, serían un elemento importante a trabajar en la ingeniería, tanto en la parte de la representación en sí de las relaciones semánticas como en la operatoria en los cálculos escritos, por lo tanto, el diseño que se tenía contemplado de otra serie de problemas que abordara transformaciones opuestas (una positiva y otra negativa) se evidenciaba necesario[47].

[47] Cuando los maestros calculaban mentalmente no parecía haber problemas cuando el resultado era menor que cero. Podían ver claramente si en total Sebastián había perdido. Más aún, en la tercera sesión, cuando se introdujeron los problemas de VANESA eran capaces de saber que Vanesa seguía teniendo una deuda tan sólo al echarle una mirada a las cantidades. La dificultad en este sentido se dio al tener que hacer operaciones escritas (los problemas de Vanesa involucran cantidades mayores), primero para elegir si era suma o resta, y si era esta última, acomodar el minuendo y el sustraendo, y luego, discernir si el resultado era positivo o negativo.

Segunda sesión

Se tomó la decisión de bloquear el recurso pictográfico para representar a las transformaciones con la consigna de que “no se podía dibujar a Sebastián”, a fin de propiciar la aparición de números con signo en los mensajes de las parejas que no los habían incorporado o la presencia de algún otro recurso.

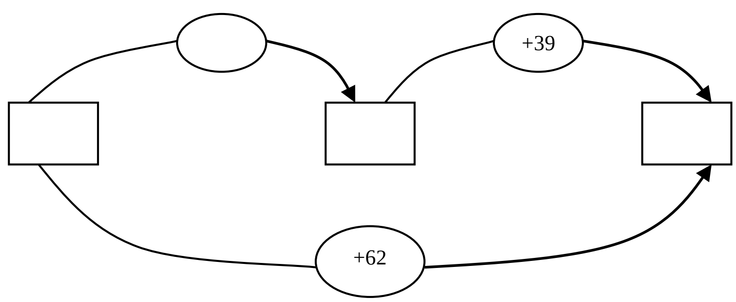
Se continuó el trabajo con los problemas #3 [A Sebastián le gusta jugar a las canicas. Jugó un primer partido y cuando jugó el segundo, ganó 39. Cuando terminó los dos partidos vio que había ganado 62 canicas. ¿Qué pasó en el primer partido?] y #4 [A Sebastián le gusta jugar a las canicas. Jugó un primer partido y cuando jugó el segundo perdió 39 canicas. Al finalizar los dos partidos se dio cuenta de que había perdido 62 canicas en total. ¿Qué pasó en el primer partido?] de SEBASTIÁN. En ellos, además de la diferenciación de la cualidad entre uno y otro, había un elemento al que los maestros tuvieron que atender: la posición de la incógnita. Mientras se situó en T_C no sintieron la necesidad de hacer notar en dónde estaba (porque además resolvieron los problemas, es decir, contestaron la pregunta), pero cuando se ubicó en T_1 las representaciones fueron distintas. Aparecieron signos de interrogación entre otras marcas, para hacerlo notar.

Sin embargo, lo que se discutía principalmente era la cualidad de las transformaciones y su representación. Cuando se comenzó a discutir sobre los signos, sus representaciones y usos, aparecieron algunos conocimientos escolares sedimentados que los maestros tenían almacenados tras su paso por la secundaria y el bachillerato. En su mayoría no sólo no eran funcionales, sino que se volvieron un obstáculo. La “ley de los signos” dificultaba la operatoria porque tenían presente, por ejemplo, que (+) + (+) = (+) y si sumaban dos pérdidas, no sabían cómo justificar la elección de la operación y la cualidad del número que resultaba. Dos de las parejas (Nelson y Susana, y Fabiola y Aurora) se enfrentaron repetidamente con este tipo de disyuntivas y claramente optaron por evitar el uso de los signos en sus representaciones.

Para cuando se abordaron los problemas #5 y #6 de SEBASTÁN los maestros sabían que los números involucrados en los problemas eran siempre los mismos y dejaron de preocuparse por obtener el resultado (porque ya lo conocían). Se creó entonces en ellos la necesidad de hacer notar en sus marcas gráficas cómo estaban jugando los datos en el problema para que los demás participantes comprendieran la comunicación. Sabían que era preciso clarificar si las transformaciones eran positivas o negativas, la temporalidad y la ubicación de la incógnita, y que las producciones que hasta ese momento habían elaborado, aunque pudieran eventualmente identificar al problema elegido, eran susceptibles de interpretarse de varias maneras.

Se introdujo el esquema de Vergnaud en el ejercicio de reconocimiento que se tenía proyectado. Con ello se pretendía que los profesores empezaran a considerar a dicho esquema como un recurso gráfico eficiente para representar la relación semántica de problemas de la 4ª categoría. De esta manera se exploró si los maestros podían o no interpretar ese esquema desde sus experiencias previas, es decir, si lo encontraban útil como recurso para organizar los componentes de los problemas (unidades significantes) que ellos habían detectado anteriormente, y en caso de ser así, "acelerar" el proceso de aprendizaje sin que los maestros perdieran el control de sus acciones. No se pretendía entonces, imponer el esquema sino sopesar su incorporación con miras a capitalizar el tiempo disponible de la intervención didáctica (6 sesiones).

A cada pareja de maestros se le dio una lista con los 6 problemas de SEBASTIÁN y otras hojas en las que aparecían de uno en uno, los esquemas llenos, es decir, con la información numérica de los problemas de la lista en los óvalos correspondientes, y la tarea consistió en que los relacionaran.



Ejemplo de esquema presentado correspondiente al problema #3.

Todos los participantes pudieron hacerlo bien y rápidamente, lo cual no debía orientar a la ingeniería a actuar como si los maestros ya se hubieran apropiado del esquema, sino a reconocer que podía estarse dando un proceso de interiorización[48].

Tercera sesión

Se inició planteando los problemas de VANESA. Cabe aclarar que algunos de los problemas de esta serie podría ser dudoso que pertenecieran a la 4ª categoría, ya que por la redacción de los enunciados las transformaciones pueden interpretarse como medidas, y la temporali-

[48] La interiorización es el mecanismo que permite pasar de la dimensión social, de aquello que funciona de manera exterior al sujeto, a una dimensión interna que se va construyendo conforme la actividad adquiere sentido. "El proceso de interiorización no es la transferencia de una actividad externa a un 'plano de conciencia' interno preexistente; es el proceso en que se forma ese plano de conciencia." Leontiev, A. (1981) citado en: Wertsch, James (1988), p. 80. Wertsch, en la publicación señalada, la define como el "proceso de control sobre las formas externas" p. 81.

dad e incluso el signo confundirse. Sin embargo, los maestros ya estaban comenzando a establecer la relación semántica (y por lo tanto, no demandaban más un estado inicial o final) e incorporando el contrato didáctico, por lo que asumían que los datos numéricos de estos nuevos problemas correspondían también a transformaciones y se acomodaban en los óvalos de los esquemas. Sólo hasta más avanzada la ingeniería se discutió este punto.

Ante los primeros problemas de VANESA aparecieron dos tipos de representaciones que evocaban parcialmente el esquema de Vergnaud. En ellas los maestros no incorporaron los cuadros para las medidas y la direccionalidad de las flechas era distinta. Por la forma en la que estaban ubicadas las transformaciones en esos esquemas una de las representaciones parecía un círculo y la otra un diamante. Fue particularmente interesante observar que, si bien evocaban el esquema de Vergnaud, también estaban influidas por el trabajo que se hace en los Libros de Texto Gratuitos de primaria[49] para representar y resolver problemas aritméticos. La tercera pareja utilizó el esquema de "número perdido" en el que se ignoraba la temporalidad del problema para que el "agujero" quedara en segundo lugar, posición en la que les resultaba cómodo realizar la operación numérica.

Después de representar también los problemas #3 y #4 los maestros reconocieron que "eran los mismos números" y dejaron de sentir la necesidad de hacer operaciones con el fin de encontrar el dato faltante para concentrarse en ver si la manera en la que acomodaban los números en una suma o en una resta les iba a dar como resultado la cantidad que faltaba con su cualidad (positiva o negativa) correspondiente, misma que para ese momento ya no era desconocida.

Cuarta sesión

A partir de este punto los maestros ya no hicieron propiamente representaciones para comunicar algún problema, las tareas giraron en torno a la correlación esquemas-problemas, a la redacción de problemas a partir de un esquema "lleno" y viceversa.

Con base en la dinámica de trabajo que se había llevado, se consideró oportuno disociar las parejas en una actividad para ver el desempeño individual, como se tenía contemplado. La tarea consistió en relacionar los problemas #1 al #4 de VANESA con 6 esquemas (dos no correspondían a ninguno de los 4 problemas entregados y no se habían trabajado anteriormente). Salvo Aurora, todos lo pudieron hacer correcta y rápidamente. Luego, los resultados de esta actividad se comentaron primero al interior de cada pareja constituida y después de manera grupal.

[49] Las "cadenas" de operaciones de los de la reforma de los noventa.

Posteriormente, se vio que era necesario recuperar la riqueza del diálogo entre pares, ya que en ese momento se habían instalado relaciones al interior de las parejas que evidenciaron que la conformación original ya no resultaba tan productiva. Se consideró que la pareja de Juliana y Rosita, por un lado, y la de Aurora y Fabiola por otro, podrían funcionar mejor en otra conformación. Rosita era avasallada por la imagen de "la que sabe" que ostentaba Juliana y ésta no se involucraba en las tareas, sólo supervisaba el trabajo de Rosita: Por su parte, se observó que Fabiola quería "despegar" y Aurora la mantenía en cierto sentido anclada no permitiéndole incluir números negativos en sus representaciones o aferrándose al esquema del número perdido, por ejemplo. Se les propuso que trabajaran Rosita y Fabiola, y Aurora con Juliana, cambio que no fue muy bien recibido especialmente por Juliana, ya que Aurora se asumía (y así era reconocida por el grupo) como la que "menos sabía" y Juliana probablemente anticipó que ese movimiento iba a implicar que tendría que involucrase de manera mucho más activa en el trabajo para sacar adelante las actividades. La pareja de Rosita y Fabiola funcionó bien desde el principio, no así la de Juliana y Aurora debido a la actitud abiertamente hostil de Juliana.

Lo primero que hicieron conforme la nueva disposición de parejas fue inventar un problema a partir de uno de los dos esquemas que no correspondieron a ninguno de los problemas de VANESA de la anterior actividad (que se denominaron esquemas "azul" y "café" por el color de la hoja en la que estaban impresos) con la idea de que lo comunicaran a otra pareja y ésta pudiera saber a partir de cuál esquema había sido redactado. El propósito de ésta actividad fue poner a los maestros en situación de redactar problemas aditivos como los que se habían venido trabajando a fin de averiguar cuáles componentes consideraban. Se hicieron evidentes los anclajes con otro tipo de esquemas en los que se representa el cálculo numérico y no las relaciones semánticas del problema.

Tras ese ejercicio la discusión se orientó hacia los rectángulos en los esquemas, entonces la conductora le pidió a la pareja conformada por Aurora y Juliana que redactara un problema en el que se conocía el estado inicial.

Quinta sesión

Algunas de las redacciones elaboradas en la sesión anterior resultaron forzadas a fin de conservar la temporalidad (dificultad que no sólo tuvieron los maestros sino que también se presentó en el diseño de los problemas, ya que típicamente, se elaboran a partir de una estructura matemática que desea trabajarse con los alumnos, es decir, se tiene la intención de abordar una cierta relación semántica entre datos numéricos y sobre ella se inventa el contexto del problema, lo que frecuentemente da lugar a enunciados forzados[50]). También se cuestionó el signo de algunas transformaciones, específicamente de las deudas y abonos comentando cosas como ¿las deudas son positivas porque te dan algún dinero o es negativa porque lo debes?, o ¿los abonos son positivos porque tienes el dinero o negativos porque lo debes o te desprendes de esa cantidad? En sus redacciones algunos enunciados no correspondían a los esquemas o manejaban los datos numéricos como estados y no como transformaciones. Se tomó ésta discusión al inicio de la sesión y se introdujo nuevamente el esquema de Vergnaud pero ésta vez en blanco, es decir, sin ninguna información numérica para que ellos volvieran a pensar en el esquema acomodando los datos de los problemas que redactaron en los espacios correspondientes.

Se continuó con la representación de los problemas #5 al #8 de VANESA en esquemas en blanco (sin información numérica) de manera individual. Fue posible observar que ya había más familiaridad con el esquema en cuanto a la temporalidad de las transformaciones y a su signo. Las discusiones grupales se orientaban hacia estas cuestiones y el asunto de la posible presencia de las medidas como datos en los estados inicial, intermedio y final.

Para entrar de lleno a la discusión sobre la diferencia entre las transformaciones y los estados, se reprodujo un problema que habían redactado Aurora y Juliana en la sesión anterior en el que se incluía un dato numérico como estado inicial para que lo representaran en un esquema en blanco. A partir de este trabajo fue evidente que se encontraban en el momento de poder discutir sobre las particularidades de la 4ª categoría, la composición de transformaciones y cómo es posible realizarlas sin contar con ninguna medida.

Sexta sesión

Para finalizar la ingeniería se volvió a los problemas planteados durante la entrevista inicial, pues varios maestros hicieron repetidas alusiones a ellos en el transcurso de las sesiones haciendo ver el fuerte impacto que les habían causado. Al replantearlos tras el trabajo en las

---

[50] Cabe aclarar que no se pretendía que los problemas diseñados tuvieran necesariamente aplicación o correlato en la vida extra escolar de los maestros, pero sí que los contextos fueran comprendidos para que, a falta (o además de) una "palabra clave", pudieran establecer la relación semántica y posteriormente, efectuar el cálculo numérico correspondiente. Ha sido ampliamente discutido este punto en la investigación sobre los así llamados "problemas verbales" y desde este trabajo existe una coincidencia con la postura que los concibe como una especie de discurso típico y situado en lo escolar, que debe procurar cierto grado de correspondencia con la vida fuera de las aulas pero no demasiada, ya que los alumnos pronto establecen un contrato didáctico en el que aprenden a pensar en los contextos de los problemas como el "adorno" en el que los números están colocados, pero al que no hay que atender mucho. Esto, desde luego, plantea tanto aspectos positivos como negativos en el plano de lo didáctico, por un lado les permite reconocer estructuras y generalizar estrategias que anteriormente han resultado funcionales, por otro, puede generar "vicios" cuando los alumnos ignoran completamente el contexto del problema y se preocupan sólo por hacer operaciones aritméticas para dar un resultado numérico, lo que en problemas poco familiares los puede llevar a emitir respuestas absurdas.

anteriores sesiones hubo incluso la posibilidad de “jugar” con varias cantidades como medidas inicial, final o intermedia, y los maestros pudieron constatar que si se mantienen las transformaciones, cualquier número (que cumpla con las condiciones del contexto) puede funcionar como medida. Después se hizo una recapitulación de las actividades que se realizaron en la ingeniería, de las ideas iniciales y de lo que ahora eran capaces de hacer. Surgieron inquietudes sobre la posibilidad de llevar los problemas a los alumnos de primaria y acerca de los problemas escolares en general. También hubo una especie de “sinceramiento colectivo” en el que Juliana y Nelson, quienes habían mantenido una actitud de poca disposición a las actividades, confesaron haberse sentido obligados a estar ahí y reconocían que aquello obstaculizó su involucramiento y consecuentemente limitó su aprovechamiento, mientras que los demás afirmaron haber estado dispuestos y haber aprendido.

2 Semblanzas

Este apartado se dedica a delinear un perfil general sobre cada uno de los participantes en la experiencia. Se considera pertinente dar a conocer algunos de los rasgos más importantes de los maestros que estuvieron durante las sesiones para ofrecer una imagen de ellos como individuos presentando algunos elementos afectivos, profesionales y cognitivos, y así sustentar de mejor manera la interpretación o reflexión que sobre sus actuaciones y representaciones gráficas pueda hacerse. Se incluyen en primer término datos personales, tanto familiares como de formación y actividad profesional, en particular sobre cursos o talleres de matemáticas. Enseguida se comentan algunos aspectos generales sobre su actuación en la entrevista inicial, tanto en lo concerniente a sus resultados en los problemas y las estrategias seguidas como acerca de sus actitudes. Después se reúnen elementos relevantes de sus participaciones durante las seis sesiones como: aspectos sobre el trabajo en pareja e individual, los tipos de representación gráfica que realizaron y su evolución, ideas previas sobre los conceptos matemáticos que se abordaron, posiciones frente al conocimiento y a las matemáticas particularmente, la discusión en equipo, posturas como enseñantes y como aprendices, entre otros. Debe aclararse que en ésta parte del documento no se profundiza en el análisis de las representaciones, sólo se delinea la participación de cada maestro durante las sesiones y los cambios que pudieron detectarse en ellos.

AURORA

Nació en el DF, 44 años de edad, casada y madre de dos hijos adolescentes. Maestra de primaria por la Normal Nacional y pasante de Psicología por la ENEP. Nunca ha tomado cursos de matemáticas y no está en Carrera Magisterial. Trabajó 9 años en escuelas privadas supliendo a otros maestros, también en cuestiones administrativas fuera del magisterio. Se reintegró al turno vespertino hace cuatro años y al matutino hace dos. Desde el año anterior menciona que usa los Libros del Maestro y el Fichero de Actividades Didácticas "obligada" por la directora.

Entrevista inicial

Desde que leyó el primer problema manifestó no entender, se puso nerviosa pero conservó todo el tiempo un toque de humor ya que no esperaba grandes cosas de su propio desempeño, como dijo al principio:

> (estaba estudiando) *psicología educativa, me reprobaron o me reprobé, ya ni supe, ya me casé y quedé debiendo materias. Por eso les digo que soy burra.*

Dijo también desde el inicio que "faltaba un dato" porque en los problemas no había información de "cuánto tenía o cuántos había" al principio. Para todos los problemas hizo marcas, operaciones en su mayoría y algunas formas de organización de los datos que le permitieron modelar y calcular a la vez, sin embargo, Aurora en la entrevista sólo pudo resolver correctamente dos problemas, el de NACIMIENTOS y el de LULÚ.

Sesiones experimentales

A Aurora y a Fabiola se les pidió que trabajaran como pareja al inicio de las sesiones. En la primera actividad eligieron el problema #1 de SEBASTIÁN (+23) + (+39) = [+62] y la primera idea fue dibujar a un niño (Sebastián), dos conjuntos (las canicas ganadas en el primer y segundo juegos, respectivamente) conectados a un tercer conjunto (la suma de las canicas ganadas). También incluyeron a otros niños (con los que Sebastián habría jugado los partidos) y al protagonista sonriente con un trofeo para indicar que ganó canicas. Sin embargo, en ambas había dudas acerca de si sería o no suficiente para poder comunicar a otra pareja el mensaje (porque las 62 canicas que dibujaron se las podrían haber dado de regalo). Cuando leyeron el problema #2 (-23) + (-39) = [-62] comentaron que esos problemas no los entendían y adoptaron la misma estrategia que en el anterior, pero para denotar la pérdida Aurora dibujó nuevamente a Sebastián pero ahora con cara triste y en los conjuntos las canicas estaban tachadas. Incluso puso un número 62 con una palomita para indicar que "se va" (se perdió).

En la actuación de Aurora pudieron verse constantemente elementos que había aprendido de los libros de texto y de su experiencia como maestra, como pensar en la adición como la unión de conjuntos que si bien, según su propia apreciación ya no va de acuerdo al nuevo enfoque que se pretende dar a las matemáticas, a ella le permitió realizar una representación con sentido:

> *Ya no se usan los conjuntos... no es correcto... puedes englobar elementos ¿no? ... un número* (sin su conjunto o el referente de la cualidad de la colección que se contó) *para mí no es correcto...*

En este tipo de afirmaciones pueden leerse algunas de las ideas del magisterio acerca de las respuestas en matemáticas. El número solo no es suficiente, debe agregarse qué es lo que se contó con ese número (de qué es la colección: paletas, perros, niños, etc.), pero al tratarse de transformaciones no basta con escribir al lado del número si se modifica una colección (de perros, paletas o niños), además debe poderse establecer si el cambio es positivo o negativo, es decir, la cualidad de la transformación.

Cuando Aurora y Fabiola recibieron la representación del problema #2 elaborada por la pareja compuesta por Juliana y Rosita, Aurora empezó a manifestar sus dudas respecto al uso del signo "menos" (-) y a los números negativos que los otros habían empleado en sus comunicaciones. Dijo:

> *No, para mí son números negativos... no son reales... a mí... menos veintitrés, así, la primera impresión es que son números negativos... como si hubiera perdido... son pedazos de canicas... pero ¿por qué están manejando números negativos?... ¡los números negativos no existen!... tienes esta taza* (toma su taza de café y la coloca frente a Fabiola) *menos está taza... no existe la taza.*

Por ello Aurora generalmente procuró elegir los problemas que no implicaran pérdida. Un concepto poco definido o erróneamente definido de los números negativos podría estar causando esa confusión entre estos y las fracciones así como las ideas de su no-existencia. Ello orilló a Aurora a buscar estrategias más "seguras" para resolver las situaciones como el esquema del "número perdido" o la representación mediante conjuntos que le permitieron no usar signos como cualidad de los números hasta ya bien avanzada la ingeniería, cuando se estaban haciendo parte del conocimiento y lenguaje común y se volvieron indispensables para representar la cualidad de las transformaciones en los esquemas de Vergnaud. Las ecuaciones también eran otro de esos conocimientos con los que se había topado en algún momento de su escolaridad pero que se encontraban poco cimentados, para ella eran una manera de "meterse en líos" que además ni venían en los libros de primaria.

En la tercera sesión, cuando se presentaron los problemas de VANESA, Aurora comenzó a darse cuenta, por un lado, de que la diferencia entre los dos problemas que aparecían en cada hoja era la temporalidad; y por el otro, de que ella y su pareja habían estado representando la operación y no la relación entre los datos (aspecto sobre el que se profundizará en el siguiente capítulo). Aunque fue un paso importante para ella, el mero reconocimiento de sus actuaciones pasadas no significó un cambio de estrategia inmediato.

El trabajo individual a Aurora le tomó más tiempo que al resto del grupo y en la identificación de esquemas con los problemas correspondientes tuvo algunas dificultades. Aurora evocaba los esquemas de los libros de los alumnos (las rayitas que indican combinaciones o transformaciones y en las que siempre se pregunta por el estado final) y afirmó entonces que la conductora del taller le había "cambiado el esquema", refiriéndose al empleo que se hizo en la ingeniería del de Vergnaud.

En esa cuarta sesión se recompusieron las parejas. Aurora y Juliana empezaron a trabajar juntas generando algún desconcierto en la primera y una franca incomodidad en la segunda. En general, Aurora realizaba los primeros intentos pero pronto le pasaba la estafeta a Juliana, quien se veía obligada a hacerse cargo de las tareas. Aurora parecía no ver a Juliana tan parsimoniosamente como el resto del grupo y la retaba en broma. En una ocasión salió del salón un momento cuando recibieron el problema que ambas habían redactado con instrucciones de llenar un esquema, y al volver le preguntó *"¿qué pasó, no pudo?"* a lo que Juliana no tuvo más remedio que contestar que no.

En las discusiones Aurora siempre dudaba de sus argumentos y anotaciones como buscando que la conductora del taller le diera pistas que le permitieran saber si estaba bien o mal, signo evidente de un contrato didáctico muy bien instalado que ahora se veía vulnerado. Cuando se encontraba trabajando con el problema ORO (que le significó algunas dificultades primero ubicando en el enunciado y en el esquema a la primera transformación elemental y luego al confundir a la compuesta con el estado final), argumentó: *"Es lo que pasó al final del año, ¿al final?... ¿en el transcurso?... ¿es lo mismo? Ahí es donde me estoy haciendo bolas."*

Nelson, quien lo tenía ya más claro le dijo con un tono de malicia que la conductora no las iba a ayudar, que ella sólo miraba y anotaba. Al final de la última sesión Aurora agradeció por el taller y dijo espontánea y alegremente: *"Esperemos haber sido de utilidad, bueno, yo no… o sí, pero en lo negativo" (risas).*

FABIOLA

Nació en el DF, 30 años, soltera. Licenciada en Educación Primaria y Preescolar, titulada en 1996 por la UPN, lleva como maestra 7 años y trabaja doble turno. No ha tomado nunca cursos de matemáticas y dice que no ha querido enseñar en 6° por evadir dicha materia.

Entrevista inicial

En la entrevista inicial no pudo resolver correctamente ninguno de los problemas y realizó apenas algunas marcas en la mitad de ellos. Hizo comentarios acerca de la "falta" del dato inicial y de no entender el planteamiento de la pregunta en el problema, los releía una y otra vez pero no pudo establecer la relación semántica. Ante el problema ORO, el primero de la entrevista:

> *¿Aquí te pongo la respuesta?* (quiere hacerlo en la hoja del problema y hace un gesto como de que ya lo resolvió, ya sólo tiene que anotarlo)… *la verdad no le entiendo*

Sobre el problema de DESCUENTOS ["Te están descontando $720 de tu quincena por un préstamo que solicitaste, además, tuviste dos faltas sin previo aviso en esa quincena. Al recibir tu salario notaste que te dieron $935 menos de lo que normalmente recibes. ¿Cuánto te descontaron por los días que faltaste?"]:

> (Lee el problema) *"Te están descontando 720 por un préstamo… además tuviste dos faltas sin previo aviso en esa quincena… te dieron 935 menos" sé que aquí apliqué...* (hace la suma 720 + 935 = 1625) *me descontaron 935 pesos, pero dice "¿cuánto te descontaron por los dos días que faltaste?" Digo, no sé cuál es mi salario, las dudas son no sé cuál es mi salario y otra es que tuve dos faltas en ese mes... sí podría contestar cuánto te descontaron por los dos días que faltaste si supiera cuál es el total de mi salario. Porque dice que me descontaron 935 menos de lo que normalmente recibes pero ¿cuánto recibo? No sé, a mí me hace falta ese dato para saber, el total de mi salario*

Al final de la entrevista se notaba contrariada pues sintió que no había obtenido buenos resultados, mas no por ello dejó de mostrarse dispuesta y con buena actitud. Fabiola se encargó de averiguar con los otros maestros que participarían en la ingeniería y a quienes se les aplicó la misma entrevista, sus impresiones y resultados, y posteriormente, durante la experiencia, hizo constantes referencias a aquellos problemas.

Sesiones experimentales

Trabajó en las primeras sesiones con Aurora y sus primeras representaciones para los problemas de SEBASTIÁN fueron figurativas (Peltier, 2003). Al inicio de la primera sesión escogieron el problema #1 (todas las transformaciones positivas) porque Fabiola dijo, refiriéndose al #2 (todas las transformaciones negativas): *"Estos son los problemas que no entiendo"*. Más adelante comentó que en ese problema faltaba un dato para poder saber el resultado, preguntándose: *"¿A cuántas le voy a restar para saber el resultado?"* añadiendo que para ella si es un problema de "perdió" inmediatamente "se va" a la resta.

Aurora y Fabiola tuvieron dificultades para interpretar la representación del problema #4 de SEBASTIÁN que hicieron Juliana y Rosita[51] porque en ella apareció una ecuación con paréntesis y dijo Fabiola: *"nos acordábamos que los paréntesis eran para la multiplicación"*. Conocimientos sobre el algebra eran traídos a la memoria de cada uno y a la discusión grupal, y se percibía que lo que la mayoría recordaba eran algunas reglas aisladas.

Otro aspecto problemático para Fabiola (en pareja con Aurora) fue la interpretación del signo (especialmente el negativo) ya bien como medida o como transformación. Cuando la consigna incluyó no dibujar a Sebastián en la representación para comunicar el problema elegido, comenzaron a hacer conjuntos (dándole el carácter de medidas a las transformaciones) con canicas tachadas (para representar pérdida), aunque Aurora insistió todavía en recursos figurativos (puso una lagrimita que seguro habría derramado Sebastián por haber perdido).

Fabiola pronto empezó a tomar las riendas en la pareja y a Aurora le permitía participar poco. Se comenzaron a observar avances notables en ella para despegarse de "la falta del dato inicial" aunque Aurora le insistía en llenar los cuadritos de los esquemas de Vergnaud (que debían dejarse en blanco porque en ellos se anotan las medidas, en este caso, desconocidas) pero Fabiola se resistió diciéndole que no conocían esos datos.

Poco tiempo después de iniciada la ingeniería recordó los problemas de la entrevista y dijo: *"Me faltaba un dato y ahí los tenía"*. Se notó un gran cambio en cuanto a sentir que faltaban datos para resolver los problemas especialmente cuando pudo trabajar con los de la entrevista inicial: *"Le dije a Rosita, los problemas que me dieron* (en la entrevista) *se me hicieron como que ahí estaba la respuesta, pero no la encuentro."*

En la cuarta sesión se realizó un cambio de parejas y Fabiola trabajó con Rosita. En la primera actividad tras el cambio, Fabiola se mostró cooperativa e incluso empezó a dirigir y a hacerse cargo del trabajo, haciendo correcciones y sugerencias a Rosita. Cuando se volvieron a revisar algunos de los problemas de la entrevista, Fabiola pudo reconocer que los datos dados en el problema de LULÚ [Lulú pidió 2 cajas de aguacates para vender en su tienda. Cuando las abrió y revisó el contenido notó que en la primera había sólo 23 aguacates en buen estado. Al terminar de revisar las dos cajas contó los aguacates que estaban en buen estado y sumó 81. ¿En qué condiciones estaban los aguacates de la segunda caja?] correspondían a transformaciones y logró colocar otros números para llenar los cuadritos (los estados). Hizo hincapié en que en la pregunta de ese problema (¿en qué estado se encontraban los aguacates de la

[51] La representación aludida será analizada a detalle en el siguiente capítulo.

segunda caja?) podía responderse como “en mal estado” y efectivamente, en ese planteamiento no se exigía una respuesta numérica.

Fabiola literalmente “despegó”. Su desempeño a partir de la segunda mitad de la ingeniería fue totalmente distinto a lo que se hubiera esperado por lo que manifestó en la entrevista inicial. Incluso señaló algunos aspectos que le parecían dudosos sobre problemas (en los que la redacción resultaba forzada en aras de conservar cierto orden temporal), por ejemplo, si en contextos de préstamos una deuda es una transformación negativa (porque se debe) o es positiva (porque se cuenta con cierto dinero para pagarle; es el caso de una cuenta de supermercado: “debe tanto y paga con…”). Para la última sesión Fabiola hablaba con soltura sobre “la temporalidad” de los problemas y podía reconocer que el orden en el que se presentaban las cantidades en la redacción no era necesariamente el mismo en el que se acomodaban en el esquema ni el mismo en el que los ponían para hacer una operación.

Después de la conmoción causada por la entrevista inicial, Fabiola se mostró desde el inicio de la intervención didáctica dispuesta a aprender, con una actitud positiva y abierta hacia el taller y hacia los contenidos del mismo. Trabajó bien con Aurora, pero su “brinco” más grande lo dio con Rosita porque para ese momento ambas tenían elementos de discusión comunes. De los seis participantes parece que Fabiola fue quien obtuvo más beneficios de la ingeniería implementada.

JULIANA

Nació en el Estado de México, 30 años, soltera, residente del DF desde hace 8 años. Titulada en el 2001 por la Normal Nacional como maestra de primaria. Tiene dos plazas, en una de ellas desempeña un cargo administrativo y en la otra es maestra de grupo. Ha tomado cursos de computación, nunca de matemáticas.

<u>Entrevista inicial</u>

Juliana mantuvo una actitud difícil desde el inicio de la entrevista y se puso ostensiblemente nerviosa a partir del segundo problema (GUILLERMO), cuando no pudo resolverlo. Aunque en una primera revisión parecía que sus dificultades estaban más relacionadas con el contexto de las apuestas en el que se situaba dicho problema, también se vio en aprietos con el de PEDRO (que tenía una estructura igual a la de GUILLERMO pero en un contexto de partidos de canicas), lo cual podría indicar que aunque el contexto causó conflictos, la dificultad de Juliana estaba más a nivel de las relaciones semánticas. Los otros cuatro problemas los resolvió exitosamente y de manera especialmente original, el de NACIMIENTOS (tras batallar para comprenderlo hizo una recta como línea del tiempo en la que pudo representar la temporalidad). Hizo marcas para todos los problemas y operaciones en cinco de ellos. Mostró dificultad para restar. Escribía el algoritmo de manera convencional pero lo resolvía por complemento y con errores frecuentes en el cálculo, cosa que ella misma reconoció.

Sesiones experimentales

Desde la primera sesión Juliana hizo lo posible por mostrarse indiferente y en ocasiones hasta hostil. Al igual que Nelson, constantemente llegaba tarde, hacía comentarios mordaces y participaba poco, tanto en las discusiones grupales como con su pareja en el trabajo. Por ejemplo, el día programado para llevar a cabo la última sesión Juliana argumentó que no podía asistir porque tenía mucho trabajo, la directora la disculpó de sus tareas y la mandó al taller, pero aún así, encontró la manera de llegar tarde.

Comenzó trabajando con Rosita porque ambas obtuvieron buenos resultados en la entrevista y se pensó que la disposición y la actitud positiva de esta última equilibrarían la indisposición de Juliana. Le molestó (y lo expresó abiertamente) que se tomaran notas de las sesiones y escribía para sí misma (operaciones parciales o alguna otra idea) tapando con su brazo el cuaderno para no permitir que viera la observadora. Parecía sentirse examinada y evidenciada, ya que en el plano de las relaciones personales con sus compañeros maestros, ella era tenida por “la que sabe”, así que cuando tenía dificultades al enfrentar las situaciones planteadas en las sesiones, su posición frente al grupo se veía comprometida. Las discusiones con su pareja generalmente se limitaron a supervisarle el trabajo.

Al igual que a Rosita, a Juliana le quedó claro desde el inicio que la parte esencial del trabajo en las sesiones era poder representar la temporalidad que señalaban los enunciados de los problemas y el signo de las transformaciones, así que se valieron de tablas y del uso de signos desde el principio. Sin embargo, Juliana también mostró algunas dudas sobre los números negativos y sus usos:

> *En el termómetro puede bajar la temperatura -2 y si luego baja -5 tengo que poner -7, no estoy registrando el calor sino el frío. Si digo de dinero pues no existe el dinero negativo, no hay billetes de -10 pero en la temperatura sí, en cosas prácticas, como si tengo una canica.*

Todos los maestros se involucraron en la discusión anterior, y a Juliana la llevó a una especie de “colapso emocional”, se resistió a aceptar a los números negativos como una medida además de cómo una transformación hasta que ya no pudo sostener sus argumentos ante la conductora del taller y ante los demás, y a partir de ahí se escudó en un “no sé” o “no importa”. Su resistencia le estaba impidiendo aprender y a la vez la estaba evidenciando ante sus compañeros. Al igual que otras parejas, Juliana y Rosita tuvieron algunas dificultades cuando usaban recursos como el álgebra (con su “ley de los signos”), las gráficas de barras y la teoría de conjuntos.

Juliana protestó por “tener” que usar el esquema de Vergnaud (que al parecer sintió como otra imposición), aunque las formas de representación gráficas que había venido produciendo con Rosita no eran funcionales para los problemas de VANESA.

A partir de la cuarta sesión se tomó la decisión de que Juliana dejara de trabajar con Rosita con la idea de encontrarle una pareja de trabajo que la comprometiera a involucrarse más en las actividades, así que Aurora (que se asumía como “la que no sabe”) fue su compañera a partir de entonces. No se mostró complacida con la decisión, cuando tuvo que empezar el trabajo con Aurora pretendió llevar la misma dinámica que con Rosita, pero Aurora se declaraba incompetente y tras cierto forcejeo entre ellas no le quedó otro remedio que tomar el lápiz y escribir.

Al finalizar la ingeniería en una especie de “confesión” manifestó que nunca estuvo dispuesta al trabajo y que eso había influido en los aprendizajes que tuvo (o no tuvo).

NELSON

Nació en el DF, 39 años, soltero. Licenciado en Psicología por la UNAM, titulado en el 2000. Cuando fue entrevistado se encontraba por primera vez trabajando en una escuela cubriendo un interinato en la USAER. También daba terapia psicológica de manera privada en su consultorio. En la escuela trabajaba de manera individual con los niños que los maestros le canalizaban y de manera grupal con alumnos de 4° a 6° para revisar contenidos específicos que le pedían los maestros de grupo. Nelson, a diferencia de los otros maestros, no solicitó estar en el taller sino que la directora de USAER pidió que se incorporara en aras de continuar su formación. Esta situación fue definitiva para él ya que siempre se mostró “obligado” a asistir, se quejó frecuentemente por cosas como que el taller interrumpía la hora del lunch establecida en la escuela.

<u>Entrevista inicial</u>

Apenas recibió el primer problema preguntó *“¿qué, tengo que hacer operación o qué?”* Cuando sintió que había terminado dijo:

Nelson:	*ya hice la operación ¿qué? Tengo que explicar o qué*
Entrevistadora:	*a ver, explícame*
Nelson:	*una resta*
Entrevistadora:	*¿qué fue lo que restaste?*
Nelson:	*esto y esto*
Entrevistadora:	*¿pero por qué hiciste una resta?*

Nelson: *nomás*

Actitudes como esa fueron constantes en él, no querer involucrarse y hacer comentarios irónicos. Para el problema NACIMIENTOS [En una ciudad, el excedente de los nacimientos sobre los decesos fue de 1293 personas entre 1950 y 1960, y de 14084 entre 1950 y 1970. ¿Qué sucedió entre 1960 y 1970?] dijo:

Nelson: *porque esto sería al 100%, sí, y nada más hago el porcentaje acá*
Entrevistadora: *a ver, sería, el 14084 el 100%*
Nelson: *sí*
Entrevistadora: *y ¿por qué ese sería el 100%?*
Nelson: *porque es el total de los muertos*
Entrevistadora: *es el total de los muertos, y el otro número ¿qué sería? El 1293*
Nelson: *¿por qué hacen bolas?* (risas) *es que yo le entiendo*
Entrevistadora: *sí, pero yo también le quiero entender*
Nelson: *bueno, al menos que estos sean el 100% y ya nada más veo cuánto va a aumentar*
Entrevistadora: *o sea, el otro número también podría ser el 100%*
Nelson: *sí, y veo cuánto me incrementó sacando el porcentaje de acá, o lo podríamos hacer al revés*
Entrevistadora: *bueno*
Nelson: *pero no lo voy a hacer*
Entrevistadora: *no lo vas a hacer, pero ¿cómo contestarías ésta pregunta?* (la del problema)
Nelson: *que se incrementaron las muertes entre 1960 y 1970*
Entrevistadora: *¿y tendrías manera de saber en cuánto se incrementaron?*
Nelson: *por el porcentaje*
Entrevistadora: *ok*
Nelson: *¿cómo me agarran así? ¡He estado malo y en lunes!*

El primer comentario que hizo cuando recibió el problema DESCUENTOS [Te están descontando $720 de tu quincena por un préstamo que solicitaste, además, tuviste dos faltas sin previo aviso en esa quincena. Al recibir tu salario notaste que te dieron $935 menos de lo que normalmente recibes. ¿Cuánto te descontaron por los días que faltaste?] fue "*¿De mi quincena? Es que no sé si vaya a variar porque no sé si ganen lo mismo las maestras que yo. Mi quincena son 2500 y me descuentan 720 (...)*" lo cual hizo evidente que necesitaba saber el dato inicial para poder resolver el problema, sin embargo al leerlo con más cuidado pudo "despegarse" de su propio salario y lo resolvió. En cinco de los seis problemas Nelson realizó operaciones (en el de PEDRO el rango de los datos no rebasaba la decena), pero sólo resolvió correctamente dos problemas.

<u>Sesiones experimentales</u>

Al inicio de la primera sesión Nelson dijo en voz alta *"yo si quieren sí coopero, pero no estoy de acuerdo en que me quiten mi recreo, necesito comer"* a lo que la conductora respondió que podía comer en la sesión pero que el horario fue acordado con la directora y que su presencia ahí tendría que discutirla con la directora de USAER. Entonces Nelson se calmó un poco pero no abandonó esa actitud, salía constantemente, llegaba tarde e incluso se ausentó en una sesión.

Con Susana discutía la tarea que tenían que hacer, pero permaneció en general ajeno a la escritura, sólo en los casos en que estaba muy seguro de lo que quería le arrebataba el lápiz a Susana o cuando ésta parecía no querer tomar en cuenta su opinión. La primera representación de ellos dos fue una carita feliz para el problema #1 de Sebastián (a sugerencia de Susana) y Nelson se empeñó en que la hiciera "bonita" (agregándole pestañas, chapas y demás). Como les sobró tiempo le propuso además que le dibujaran *"muchas canicas... las que ganó"*. Al igual que en la entrevista, en una de las discusiones grupales que tuvo lugar en la primera sesión, manifestó la necesidad de contar con un dato inicial:

Nelson:	*sí, suman las 62 canicas, pero al final las perdió ¿pero cuántas tenía antes?*
Juliana:	*pero no te está preguntando eso, no te pregunta cuántas te quedaron*
Nelson:	*sí, perdió 62 pero con cuántas empezaría*

Después de ver los trabajos mucho más elaborados de las otras dos parejas, Nelson y Susana trataron de esforzarse más al realizar la siguiente representación. Esta vez dibujaron dos conjuntos con las canicas perdidas en el primer juego y en el segundo, cada una tachada y luego tachados también los conjuntos.

Para los problemas #3 y #4 de SEBASTIÁN eligieron nuevamente el de suma. Ya antes Nelson había manifestado que eran los más fáciles y los que los niños aprenden primero, y ahora argumentó que los elegían porque "ellos son ganadores". Se involucraron más en la actividad y la actitud de Nelson mejoró un poco mientras se familiarizaban con el trabajo, ni siquiera reparó más en sus "sagrados alimentos", como los llamaba. Cuando Susana agregó un signo "más" (+) a una de sus representaciones Nelson mostró desagrado, prefería que le pusieran una palomita para denotar ganancia. Este miedo respetuoso hacia los signos lo manifestó en repetidas ocasiones incluso bromeando con comentarios como *"ya ves, te dije que no te metieras con los signos"*, especialmente cuando se trabajaron los problemas de VANESA, en los que había transformaciones opuestas. Agregaron signos de "equis" (x) para tachar las canicas pero creó confusiones en la pareja receptora porque no supieron si se trataba de multiplicación, incógnita (algebraica) o pérdida (significado con el que otras parejas habían usado antes el tache).

Nelson trató en lo subsiguiente de no usar taches por la confusión anterior mientras Susana intentaba, a escondidas de la conductora e incluso del propio Nelson, incorporar en la representación una ecuación. Sin embargo, Nelson rechazó la propuesta cuando finalmente le permitió mirarla, argumentando *"los demás no la van a entender"*. Susana no atendió dichos comentarios y siguió buscando la manera de acomodar las cantidades para obtener un resultado que ya conocía[52] pero tuvo dificultades con los signos. Nelson sólo recordaba eso de "más por menos es menos" y otras fórmulas de memoria como que "si está restando pasa sumando". A manera de colaboración y viendo que Susana no claudicaba en sus intentos, Nelson le dijo *"es una resta porque predominan los negativos"*, refiriéndose de una forma interesante aunque algo confusa, a que cuando se suman algebraicamente dos números de signo distinto, se saca la diferencia entre ellos y el resultado tiene el signo de aquel cuyo valor absoluto sea mayor. Ante la necesidad impostergable de hacer sumas algebraicas para poder comunicar los problemas de VANESA mediante las representaciones, Nelson dejó de protestar por el uso de la "equis" (x) para denotar la posición de la incógnita, que no siempre se usaba en ecuaciones sino también encima de un cuadro o una línea en blanco (donde va el dato que hay que hallar), o en un conjunto cuya numerosidad se desconoce.

Usando esquemas del "número perdido" Nelson rechazó la propuesta de Susana sobre incorporar signos a los datos numéricos para denotar su cualidad, y en su lugar sugirió anotar una "palomita" para los positivos y un tache para los negativos[53]. Cuando Nelson reparó en los signos de los números replicó *"¡a 132 no se le pueden quitar 500!"* mostrándose atado a la operatoria y no a la posibilidad de la representación de la relación semántica. Susana intentó sortear ese obstáculo conceptual de Nelson respondiendo que sí podían *"si lo acomodamos"*, es decir, si lo pensaban como 500 - 132 sin olvidar que el resultado sería negativo. Nelson en ese punto aceptaba relativamente el uso de negativos, no le ocasionaban muchos problemas cuando estaban involucrados en los esquemas (como al correlacionar esquemas-problemas) aunque seguía sin estar muy convencido de su pertinencia cuando aparecían en ecuaciones o en ciertas condiciones incluso en operaciones aritméticas, por ejemplo, cuando había una transformación negativa en el primer lugar. Poner un signo "menos" (-) al principio no le gustaba y le sugería a Susana *"mejor ponle más, de todas formas se tiene que restar"*, refiriéndose a que para resolver el problema habría que efectuar una resta[54].

En la última sesión, Nelson tuvo que empezar a resolver las actividades solo porque llegó tarde y Susana ya estaba trabajando con Juliana. Protestó con la conductora, pero no

---

[52] Por el trabajo con los problemas anteriores de SEBASTIÁN los maestros ya conocían cuál era el resultado, lo problemático seguía siendo poder distinguir a través de la representación gráfica entre uno y otro problema de los que aparecían en cada hoja, por ello, los intentos de Susana de "resolverlo" algebraicamente eran más bien un ejercicio aritmético para acomodar los números a manera de obtener un resultado conocido, situación que las llevó a cometer algunos errores (como adjudicarle un signo negativo a la incógnita).

[53] Como iban a quedar encima de un rectángulo en blanco no era muy probable que se confundiera con multiplicación.

[54] En -5 + 7 puede efectuarse una resta para encontrar la diferencia entre esos números. Pensarla como 7 - 5 a Nelson le resultaba familiar, aunque si "dominaban los negativos", como él se refería al valor absoluto mayor, debía recordar que el resultado sería negativo.

le quedó más remedio que empezar. Unos minutos después llegó Aurora y Nelson inmediatamente le pasó el problema para que se hiciera cargo de él. Aurora lo tomó con su característica actitud afable y se burló de lo que alcanzó a hacer Nelson. Con ayuda de la conductora lograron completar el esquema e hipotetizar sobre lo que hubiera pasado en el problema de LULÚ si la protagonista hubiera ya tenido 50 aguacates en la tienda cuando recibió las dos cajas, es decir, probando con números como estados para ver si las transformaciones aún se verificaban. Luego, para el problema DESCUENTOS Aurora escribió las transformaciones conocidas en su recurrente esquema de "número perdido" y Nelson le sugirió que le pusiera signos de "menos" (-) a ambas. Esto resultó particularmente interesante en Nelson, ya que se había mostrado renuente a la utilización de signos y más cuando no se encontraban en una operación vertical (aunque la representación de Aurora no era propiamente un esquema sino un modelado de la operación que resolvía, pero aún así la propuesta contemplaba poner al inicio un negativo). Con el problema ORO tuvieron algunas dificultades por lo que directamente le pidieron ayuda a la conductora. Nelson, quien ya tenía más claro el contrato didáctico le dijo a Aurora en tono de broma: "[la conductora] *No dice nada, nada más pregunta y pregunta, ni con el tono de voz te da pistas... bueno, también apunta todo lo que dices".*

Al finalizar la última sesión, cuando Juliana afirmó que nunca tuvo disposición para el trabajo se le unió Nelson reconociendo que a él "lo habían mandado", lo que había condicionado su actitud y sus posibilidades de aprendizaje. Sin embargo, respecto a Juliana, quien tampoco se encontraba muy a gusto en el taller, aprovechó más, ya que sí se involucraba con su pareja en la resolución de lo solicitado, sin dejar desde luego de protestar (sobre cuestiones no inherentes al conocimiento) cada vez que tenía oportunidad.

ROSITA

Nació en el DF, 35 años, casada, sin hijos. Maestra de Primaria por la Normal Nacional, titulada en 1987 y Psicóloga Social por la UAM titulada en 1994. Actualmente imparte psicoterapia por las tardes en un instituto dedicado a problemas de violencia intrafamiliar. Sólo recuerda haber tomado un curso de matemáticas (con el libro de *Juega y Aprende*) aproximadamente en 1990. Está en Carrera Magisterial nivel A. Ha sido maestra de todos los grados de primaria, pero más tiempo en 1° y 2°.

<u>Entrevista inicial</u>

En la entrevista Rosita se mostró tranquila y confiada. En la resolución de los problemas pudo apreciarse desde el inicio orden y cuidado, siempre escribió los datos numéricos de los problemas y algunas palabras o enunciados que describían lo que representaban esas cantidades y su cualidad, así como el resultado expresado también a través de un enunciado, muy similar al esquema de resolución que se les enseña a los niños de *Datos, Operación* y *Resultado.* La manera de acomodar los datos numéricos casi siempre le permitió operar directamente sobre ellos, es decir, realizaba modelos de las situaciones. Las restas las resolvió siempre por complemento. Pudo resolver correctamente los de ORO (aunque con duda), NACIMIENTOS, LULÚ y DESCUENTOS, le faltaron los de GUILLERMO y PEDRO (que nadie pudo resolver). Rosita hacía preguntas e intervenía cuando sentía la necesidad de hacerlo, se mantuvo interesada y manifestó abiertamente su determinación de aprender los contenidos del taller para saber más y poder enseñar mejor, según sus propias palabras.

Sesiones experimentales

Rosita se sabía mejor preparada con respecto a algunos de sus compañeros, pero también reconocía explícitamente carencias (por ejemplo, con el álgebra y la “ley de los signos”), siempre llegó temprano a las sesiones y no se distraía ni salía del salón, aunque no por ello debe entenderse que su actitud era rígida, sino más bien cooperativa. En la primera sesión llevó una grabadora que colocó en medio de la mesa, pero que nunca encendió, posteriormente no se hizo acompañar de ella pero se cuidaba de anotar todos los problemas en su cuaderno y algunas otras notas.

Comenzó trabajando con Juliana porque ambas mostraron un desempeño similar en la entrevista y además porque Rosita manifestaba un carácter afable y se consideró que podía contener la actitud más defensiva de Juliana. Desde la primera sesión Juliana y Rosita tuvieron claro que el meollo de la actividad consistía en poder representar la temporalidad y el signo de la transformación, no necesariamente el resultado o las operaciones y usaron números negativos para representar pérdida. Nunca hicieron dibujos de Sebastián o de canicas sino tablas de doble entrada para representar la temporalidad (a veces como dos eventos y otras como la composición de los mismos que da lugar a un total).

En la entrevista inicial Rosita manifestó respecto al problema de GUILLERMO *“lo que pasa es que faltaría el dato de cuánto apuesta”* aludiendo a la ausencia de cantidades correspondientes a estados que es propia de la 4ª categoría. En la primera sesión volvió a decir, respecto al problema #2 de SEBASTIÁN (todas las transformaciones negativas) algo acerca de la falta de datos: *“A mí sí me da la impresión... se puede hacer una deducción... pero algo queda como valor desconocido.”* Pero aparentemente pronto su pensamiento se acostumbró, según sus propias palabras, a problemas de este tipo.

En las argumentaciones entre ellas se discutieron asuntos relativos a los conjuntos e hicieron intentos por resolver uno de los problemas algebraicamente (aunque encontraron la solución aritméticamente y luego colocaron el número hallado en el lugar de la incógnita). También hablaron sobre el uso o la evitación de los signos y de la representación de la pérdida mediante otros recursos gráficos (además de los ya vistos durante las sesiones) como el "cuadrante" o una gráfica de barras (intentos que no llegaron a comunicar a otras parejas). Los conocimientos previos sobre algunos procedimientos aprendidos de memoria, pero no necesariamente comprendidos también pudieron salir a la luz, como cuando Rosita le preguntó a Juliana quizá evocando su experiencia en la secundaria *"¿Tú entendiste por qué pasa un positivo como negativo? Yo me lo sé por regla."*

Una vez que tuvieron contacto con el esquema de Vergnaud en el ejercicio de correlación con los problemas de SEBASTIÁN lo utilizaron (modificándolo) en sus siguientes producciones. Cuando recibieron los dos primeros problemas de VANESA Rosita notó al leerlos que la diferencia entre ellos no era la cualidad de las transformaciones como en los de SEBASTIÁN sino: *"En éste* (el número #1) *los números se acomodan de una manera, aquí* (el #2) *se ponen al revés."* Es decir, lo que variaba era el orden (la temporalidad) en el que aparecían las transformaciones conocidas. También distinguió desde las primeras actividades que lo importante para diferenciar a un problema de otro era poder "representar el problema" y no la operación con la que se resuelve.

La diferencia entre el signo como cualidad de una medida y como transformación (positiva o negativa) no resultó tan dificultosa para Rosita como para Juliana. Mencionó al respecto *"… no sabría cómo explicarlo pero es diferente decir bajó* [la temperatura] *10 grados a decir ¿a cómo estamos? A menos 10°, no hubo operación, una resta".* Sin embargo, la relación previamente establecida entre Juliana y Rosita permeó por completo el trabajo en las sesiones mostrándose la última totalmente complaciente con Juliana mientras ésta hacía todo lo posible por no involucrarse en el trabajo (no escribía casi nunca, no elegía un problema, no imaginaba un tipo de representación sino aprobaba o desaprobaba lo que Rosita hacía). Como en el siguiente fragmento a propósito de la elaboración de una representación del problema #1 de VANESA:

Rosita:	*Ayúdame a esquematizarlo*
	(Juliana lo lee otra vez)
Rosita:	*queremos esquematizar ¿no es la respuesta, verdad?* (se dirige a un observador)
Observador:	*si lo necesitan, la pueden poner*
Juliana:	*es que la respuesta es la misma en ambos* (en los problemas #1 y #2)
Rosita:	*¿cómo le podemos poner que debe? Puede usarse el esquema* (vuelve a leer el problema). *¿Podemos usar su esquema?* (se dirige al observador refiriéndose al esquema de Vergnaud)
Observador:	*sí, lo que necesiten*
	(Rosita dibuja un esquema)
Rosita:	*no, no es así*

Juliana: *es que al final ya es lo que le sobra* (T_C en la que se ubica la incógnita)
Rosita: *ah, sí* (corrige)*… no, pero ellas lo ponen así* (lo modifica) *¿O como antes?* (se refiere a emplear las formas de representación que usaron anteriormente en vez del esquema de Vergnaud)
Juliana: *es que estoy pensando en otra cosa*
Rosita: *tú nada más dime*
Juliana: *como quieras, es que estoy pensando en otra cosa*

El papel que Juliana desempeñaba ante todos era el de "la que más sabe" y así era tratada por todos, con lo cual, Rosita no discutía nada de lo que Juliana decía y en varias de las representaciones que elaboraron Rosita firmó "Rosita y Albert Einstein". No por ello Rosita se vio obstaculizada en su desempeño, sus representaciones se fueron haciendo más ricas y fueron los precursores del uso de números negativos y de ecuaciones, sin embargo, era pobre la interlocución que podía darse con Juliana. Con la intención de que Rosita tuviera una compañera más participativa y para que Juliana se viera algo forzado a involucrarse más en las actividades, a partir de la sesión 4 Rosita comenzó a trabajar con Fabiola, que había mostrado un gran avance respecto a la entrevista inicial. Dicho cambio dio lugar a discusiones interesantes y entre ambas pudieron confrontar algunos puntos que les permitieron hacer adelantos importantes, como cuando redactaron problemas para ciertos esquemas dados en los que había transformaciones opuestas y debían crear un enunciado coherente con la temporalidad y que respetara la cualidad de las transformaciones y la posición de la incógnita.

Al final de la experiencia Rosita se mostró satisfecha y mencionó que sentía que había aprendido mucho.

SUSANA

Nació en Hidalgo, vive desde hace 29 años en el DF, soltera, sin hijos. Licenciada en Educación Primaria y Preescolar por la UPN titulada en 1996, ha tomado cursos de matemáticas de los que imparte la SEP (como TGA y TGB), inscrita en Carrera Magisterial en el nivel A, ya presentó los dos cursos del CNA[55] y los aprobó. Sólo trabaja como maestra en la escuela en la que fue entrevistada y cuenta con 6 años de experiencia. Manifiesta que le gusta enseñar matemáticas y que usa diversos materiales como el Fichero de Actividades Didácticas y el Libro del Maestro; editados por la SEP.

[55] Curso Nacional de Actualización que oferta la SEP como parte del Programa Nacional de Actualización Permanente. El de matemáticas está diseñado en dos partes, como se explica en la Introducción.

Entrevista inicial

Susana mostró una actitud de confianza durante la entrevista. Resolvió rápida y correctamente cuatro problemas, pero el de GUILLERMO y el de PEDRO se le dificultaron al igual que a los demás maestros. Hizo modelos de los datos en algunos problemas y en otros sólo operaciones.

Sesiones experimentales

Susana hizo pareja con Nelson durante toda la parte didáctica de la ingeniería, aunque tal arreglo no fuera de su total agrado ya que manifestó que quería estar con Juliana, sin embargo se sometió a la organización que realizó la conductora.

Ya ubicada como pareja con Nelson, Susana se hizo cargo casi siempre del lápiz en todas las sesiones, aunque atendía las sugerencias de su compañero. La primera representación que hicieron fue del problema #1 de SEBASTIÁN y a sugerencia de Susana dibujaron un niño (Sebastián) feliz, luego Nelson propuso que lo enmarcaran con las 62 canicas que había ganado. Tal representación generó comentarios diversos, pues otros maestros consideraron que no era muy claro el mensaje, que las canicas alrededor podrían pensarse sólo como un adorno. Susana afirmó que eligieron ese problema (y no el #2 con transformaciones negativas) porque son los problemas a los que están acostumbradas, y que cuando la primera transformación es negativa se "mete en conflictos", aunque añadió que ya había visto problemas de pérdida que se resuelven sumando, pero no pudo poner ejemplos de ellos. Desde esta primera actividad Susana reconoció las constantes en los problemas #1 y #2 (los datos numéricos involucrados, el personaje, el contexto) y pudo con Nelson interpretar exitosamente el de Aurora y Fabiola gracias a los dibujitos de trofeos que leyeron como ganancia.

Representaron el problema #2 mediante dos conjuntos de canicas (lo que perdió en el primer y segundo juegos) e hicieron taches en cada canica y luego a todo el conjunto para denotar la pérdida, pero además Susana agregó números negativos a los conjuntos (-23, -39) y luego un 62 (sin signo pero tachado) en la transformación compuesta (en la que se encontraba la incógnita). Al comentar las representaciones de los demás, en las que se habían empleado números negativos, Susana afirmó que representaban una pérdida, pero que ella no los veía como números negativos, es decir, le parecían pérdida en términos de una transformación negativa que sufre una cantidad, pero no los concebía como un número negativo. Dijo en la segunda sesión con respecto a la producción de Juliana y Rosita: *"Creo que lo pusieron* (el signo) *para que supiéramos que es el problema 4, que se pierden canicas, no porque fuera un negativo."*

Cuando recibieron los siguientes dos problemas volvieron a elegir el de transformaciones positivas (el problema #3 con la incógnita en la primera transformación elemental). Susana se mostró a partir de este momento mucho más involucrada en las actividades, ya no intentó sólo "salir del paso" dibujando cualquier cosa, sino que se esforzó por hacer un mensaje claro para los demás utilizando algunas herramientas matemáticas que puso en funcionamiento, como el álgebra. Comenzó empleando dicho recurso a escondidas (de su pareja y de la conductora) probablemente estimulada por algunos intentos que hicieron Juliana y Rosita anteriormente. Los signos se le hicieron necesarios para poder operar (porque aunque sus formas de cálculo fueron aritméticas, necesitó justificar la cualidad de los datos y del resultado), y a pesar de las protestas de Nelson le puso un signo "más" (+) al 39 (canicas ganadas en el segundo partido) que en el mensaje final no transcribió. Tampoco en la transformación compuesta pudo sostener el uso del signo y aceptó las sugerencias de Nelson de dibujar una palomita (que se asoció a lo positivo) encima de cada conjunto (dos para las transformaciones elementales que incluyó un signo de interrogación (?) y otro para la transformación compuesta). Logró con su pareja interpretar el mensaje de Aurora y Fabiola (que también era una representación del problema #3) porque Susana oyó que los dibujitos que hicieron las emisoras arriba de Sebastián eran globos y serpentinas (como expresión de júbilo por la ganancia) y no maldiciones (como enojo por la pérdida), como Nelson inicialmente había pensado. Durante la discusión grupal en ese punto, Susana expresó, muy a su manera, el objeto de interés en las actividades de la ingeniería que consistió en la representación de la relación semántica que se establece entre los datos con el objetivo de comunicarla a otros:

> *En el primero no había nada* (primer juego)*, en el segundo* (segundo juego) *pusimos una palomita para decir que ganaron, igual al final. Pero ¿cómo les decimos que es el problema 3, porque es lo mismo?* (refiriéndose a que en el problema #4 había los mismos datos numéricos y la misma ubicación de la incógnita, pero con signo negativo)

En la segunda sesión comenzaron representando el problema #4 de SEBASTIÁN y Susana siguió haciendo intentos para resolverlo algebraicamente, pero tuvo dificultades con los signos:

> *Es que con el 3* (el problema #3) *estaba bien porque salían positivos, pero en el 4 me hice bolas por la ley de los signos, ahí me perdí, me debía de dar* × = *23* (en realidad, debía obtener -23)

Susana en este punto tenía claro que la actividad consistía en poder diferenciar entre los dos problemas de cada hoja, pero sus recursos matemáticos le eran insuficientes, al menos en cuanto al álgebra, que inicialmente le pareció una buena manera para hacer esa diferenciación. Finalmente, y con el aval de Nelson (que le pedía encarecidamente no “meterse con los signos” para que “los demás” entendieran), enviaron un mensaje consistente en el dibujo de dos conjuntos (las dos transformaciones elementales) unidos con líneas a un tercer círculo (la transformación compuesta), y algunos taches para denotar pérdida. Pero la pareja receptora se confundió y no supieron si era tache o multiplicación. Cualquier vestigio que Susana hubiera podido conservar sobre la sensación de falta de datos en problemas de la 4ª categoría (como en el problema de GUILLERMO de la entrevista inicial), pareció disiparse en las primeras sesiones reconociendo, en sus propias palabras, que la medida inicial no es necesaria cuando se hacen preguntas sobre las transformaciones.

Cuando se inició el trabajo con los problemas de VANESA en la sesión 3, Susana reconoció rápidamente que los problemas #1 y #2 eran “de resta”. Hizo anotaciones en su cuaderno tratando de entenderlos a través de la realización de un esquema para el problema #2 (en el que el primer dato es negativo y el segundo positivo) ante el asombro y la duda de Nelson que manifestó tajantemente que a -132 no se le podían quitar 500. Susana afirmó que sí se podía “si lo acomodaban” (aunque hicieron un esquema que evocaba al de Vergnaud, que se les había presentado anteriormente, parecería que Susana estaba pensando en un esquema del tipo “número perdido” para hacer la operación, en el que el resultado se obtendría con el signo contrario). Con los siguientes problemas Susana se esforzó en establecer la cualidad del dato diciendo cosas como “los tiene, ya los llevaba” para lo positivo o “los debe” para lo negativo. En la discusión grupal sobre la diferencia entre los negativos como medida y como transformación que tuvo lugar en la 4ª sesión, Susana se mostró bastante receptiva, participó en la discusión y parecía no tener problemas para reconocer la diferencia.

Aunque su pareja “oficial” siempre fue Nelson, Susana trabajó también con Aurora y Fabiola y al final con Juliana por las ausencias de su compañero. En la última sesión, cuando pudo al fin trabajar con Juliana, también asumió la responsabilidad de la escritura. Llenó los primeros esquemas y posteriormente “jugaron” inventando cantidades como medidas para los problemas de la entrevista inicial, sin embargo, una vez que llegaron al problema de GUILLERMO, Juliana volvió a las “explicaciones” más bien cantinflescas que parecían tener agobiada a Susana, especialmente con aquello de “si apostó todo o no”, así que se empantanaron, por lo cual una de las observadoras tuvo que intervenir para que pudieran completar el esquema.

Capítulo IV ANÁLISIS ESPECÍFICO DE LA EXPERIENCIA

Categorías analíticas

Para analizar las producciones y respuestas de los maestros frente a los problemas se consideraron las siguientes categorías: *Falta de datos* y *Procesos de representación*. En este último se incluye el análisis del *Esquema y uso de signos* y la *Operatoria*. En el ánimo de comprender ideas y procesos de aprendizaje de los participantes sobre el objeto de conocimiento de la ingeniería de una manera lo más abarcativa posible, debe aclararse que estas categorías no son excluyentes sino que al contrario, se encuentran estrechamente relacionadas.

1 El "dato faltante"

La sensación de falta de datos efectivamente se constituyó, desde la entrevista inicial, en una dificultad para los maestros. En este apartado se analizan comentarios que los maestros hicieron al respecto y se trata de identificar si se dieron ante algún tipo de problema en particular (con transformaciones opuestas o iguales, dependiendo del lugar de la incógnita, algún contexto u otro elemento que pudiera resultar relevante). Es importante señalar que estos comentarios dejaron de expresarse en algún punto durante las sesiones, así que también interesa saber cuándo ocurrió y hasta donde sea posible, debido a qué. En las respuestas de los maestros se encontraron expresiones distintas que hacían alusión a la falta de datos y se han clasificado en tres tipos:

a) Ubicación de la incógnita.

b) Necesidad de conocer alguna medida para resolver el problema.

c) Interpretaciones debidas al contexto, que ocurre cuando:

   i. cierta información ausente parece ser relevante para resolver el problema,

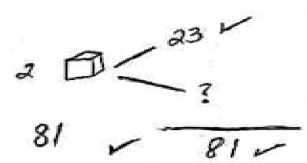
ii. el enunciado deja abierta la posibilidad de hacer varias interpretaciones o suponer situaciones que no están escritas.

a) Ubicación de la incógnita

El primer tipo de “dato faltante” se da cuando el resolutor reconoce que hay una información ausente que es justo la que se pregunta en el enunciado del problema, sabe que ése es el dato que debe buscar, como cuando Fabiola afirma ante el problema NACIMIENTOS [“En una ciudad, el excedente de los nacimientos sobre los decesos fue de 1293 personas entre 1950 y 1960, y de 14084 entre 1950 y 1970. ¿Qué sucedió entre 1960 y 1970?”]:

> *(…) así como que siento que hay un dato perdido, que bueno, es la respuesta, pero... siento aquí que me está pidiendo así como que la diferencia entre el aumento que hubo entre estos años (…)* (señala con los dedos 1960 y 1970 en el texto del problema)

Los alumnos en situaciones escolares aprenden pronto que en los problemas aritméticos hay un número que deben encontrar, generalmente haciendo algún cálculo numérico con los datos que el propio enunciado contiene. Reconocer qué es lo que se está preguntando y ubicar a dicha incógnita en términos de la relación semántica entre los datos, no es lo mismo, aunque son elementos que se encuentran estrechamente ligados. Ambos, particularmente el segundo, se vuelven indispensables al elaborar representaciones simbólicas y al decidir qué operación(es) permitirá(n) resolver la cuestión. Por ejemplo, ante el problema de LULÚ [“Lulú pidió 2 cajas de aguacates para vender en su tienda. Cuando las abrió y revisó el contenido notó que en la primera había sólo 23 aguacates en buen estado. Al terminar de revisar las dos cajas contó los aguacates que estaban en buen estado y sumó 81. ¿En qué condiciones estaban los aguacates de la segunda caja?”], que se presentó en la entrevista, Aurora hizo lo siguiente:



Como puede verse, en el esquema ella dibuja una cajita y anota el número 2 simbolizando las dos cajas de aguacates, una raya en cuyo extremo pone “23”, que son los que se encontraban en buen estado en la primera caja y otra raya con un signo de interrogación en el lugar en el que estaría el número de aguacates en buen estado de la segunda caja si se conociera, ubicando así correctamente a la incógnita. Bajo una raya horizontal coloca el número 81 que es la suma de los aguacates en buen estado de ambas cajas. Esta representación presenta elementos tanto icónicos (por la caja) como aritméticos, ya que la información numérica está acomodada como si fuera un algoritmo, aunque sin el signo de la operación, pero que podría incluso resolverse a través del cálculo mental por complemento aditivo.

Esta representación gráfica de la situación que el problema plantea, por un lado evidencia el tipo de relación semántica que había establecido Aurora, y por otro, puede dar lugar a pensar que la ayudó a decidir qué operación aritmética debía efectuar para encontrar el resultado. Optó por restar 81 - 23 y obtuvo 58, número que escribió posteriormente al lado del signo de interrogación como una manera de hacer notar en su representación que la pregunta había sido ya respondida.

La actuación de Aurora frente al problema de LULÚ corresponde a lo que Descaves (1999)[56] llama “discordancia”. En problemas como el citado, la modelización de la situación no permite operar directamente sobre ella, por ejemplo, la representación que hizo Aurora usando como recurso gráfico el esquema de “número perdido sería 23 + $\boxed{}$ = 81. Aunque se puede resolver por complemento aditivo con cálculo mental, como se mencionó, es la resta la operación que convencionalmente se aplicaría, lo cual implica reconocer a la sustracción como otra forma de relación entre los datos que evidencia la acción de “quitar” para obtener el sumando faltante y el reacomodo de los datos para que la incógnita quede sola a uno de los lados del signo igual (=) (que es generalmente el derecho), o debajo de la rayita en el caso del algoritmo convencional.

La posición de la incógnita es una de las variables de los problemas más importantes para comprender porqué hay una mayor dificultad en los de “discordancia”. Si por ejemplo, se toma un problema del tipo ? + b = c, aunque se le pudiera llamar “de suma” por el signo que establece el tipo de relación entre la información, acorde a la manera en la que están acomodados los datos la operación que convencionalmente debería elegirse para resolverlo es una resta, lo cual lo sitúa como un problema de “discordancia” al exigir el reacomodo de los datos para hacer el cálculo numérico. Por ello, los problemas “de resta” son más variados[57] y más difíciles.

Volviendo al problema de LULÚ, una vez que Aurora anotó al lado del signo de interrogación el número 58 que había obtenido al restar 81 - 23, releyó el problema y le dio una segunda interpretación que entró en conflicto con su representación original. Ahora entendió que los 81 aguacates que había contado Lulú no eran el total de la suma de los que estaban en buen estado en las dos cajas sino sólo los de la segunda. Sobrescribió el número 81 al 58

[56] Citado en : Peltier, Marie-Lise (2003).

[57] En los problemas “de resta”, entendidos como aquellos en los que convencionalmente se efectúa una sustracción para resolver la situación, hay que incluir aquellos en los que se desagrupa una colección o se separa un subconjunto, y también a aquellos en los que debe encontrarse uno de los sumandos cuando se conoce el otro y la suma, y cuando es menester encontrar la diferencia entre dos números.

que acababa de encontrar, perdiendo así la ubicación de la incógnita y con ello la posibilidad de responder la pregunta del problema de manera numérica. La operación que tenía en ese momento a vistas era:

$$\begin{array}{r} 23 \\ 81 \\ \hline 81 \end{array}$$

¿Qué operación se puede hacer entre el 23 y el 81 para que el resultado sea 81? Frente a esta problemática Aurora leyó nuevamente la pregunta del problema: ¿en qué condiciones se encontraban los aguacates de la segunda caja?[58] y respondió que "en buen estado" porque 81 eran más aguacates buenos que 23, así que la segunda caja estaba mejor. Pero no lo decía muy convencida y al final aludió a dos posibles respuestas de acuerdo a sus dos interpretaciones, cuando los 81 aguacates son el "total de todo" como dijo ella, o cuando son sólo los de la segunda caja.

Aunque en una primera lectura Aurora logró establecer correctamente la relación semántica entre los datos y resolver el problema de LULÚ, no se sintió muy segura de su proceder y optó por una segunda interpretación. En esta nueva lectura el enunciado le sugirió otra relación semántica que expresada sobre el modelo anterior resultaba inoperante porque carecía de sentido. ¿Qué llevó a Aurora a volver sobre sus pasos cuando ya había resuelto el problema? Lo que puede decirse al respecto es que no estaba familiarizada matemáticamente con la estructura de los problemas a los que estaba enfrentándose y por ello no era capaz de actuar controlando la situación.

b) Necesidad de conocer alguna medida para resolver el problema

El segundo tipo de "dato faltante" es el que se anticipaba que ocurriría debido a las características de la 4ª categoría. Sobreviene cuando el resolutor considera indispensable conocer alguna medida (inicial, intermedia o final) para poder resolver el problema, ya que sólo se le proporcionan transformaciones, y evidencia que el sujeto desconoce la estructura y por ello no puede establecer la relación semántica entre los datos. La condición se agudiza cuando es negativa la primera transformación y/o la compuesta, situación que llevó a algunos maestros a suponer que el problema era irresoluble o a perder el control de sus acciones añadiendo información o haciendo cálculos accidentados. Fabiola expresó la imposibilidad de

[58] Estrictamente, la pregunta no pedía una respuesta numérica ya que era parte de la intención en el diseño que quedaran lo menos constreñidas posibles, aceptando el riesgo de encontrar respuestas no numéricas. Sin embargo, responder con un número obtenido tras efectuar alguna operación aritmética es parte de los supuestos que alumnos y maestros han aprendido en la clase de matemáticas.

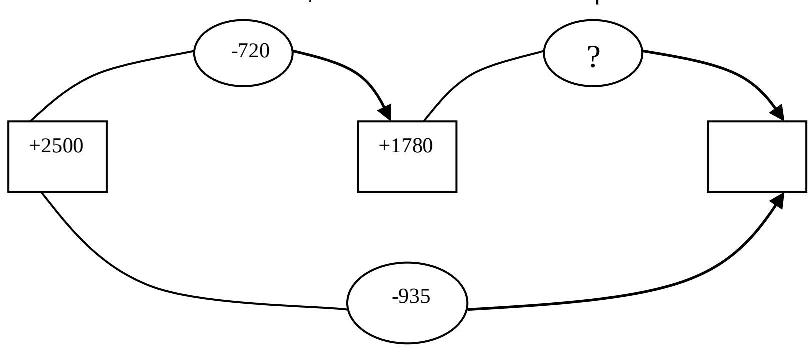
resolver el problema DESCUENTOS sin conocer su salario ["Te están descontando $720 de tu quincena por un préstamo que solicitaste, además, tuviste dos faltas sin previo aviso en esa quincena. Al recibir tu salario notaste que te dieron $935 menos de lo que normalmente recibes. ¿Cuánto te descontaron por los días que faltaste?"]:

> *…sí podría contestar cuánto te descontaron por los dos días que faltaste si supiera cuál es el total de mi salario. Porque dice que me descontaron 935 menos de lo que normalmente recibes pero ¿cuánto recibo? No sé, a mí me hace falta ese dato para saber, el total de mi salario.*

Debido a que no concebía manera alguna para averiguar lo que la pregunta planteaba y tras efectuar una operación que no le arrojó ninguna luz (sumó el descuento total (935) y el descuento del préstamo (720) obteniendo 1625), lo abandonó. Ante el mismo problema Nelson manifestó:

> *¿De mi quincena? Es que no sé si vaya a variar porque no sé si ganen lo mismo las maestras que yo. Mi quincena son 2500* (anota "2500") *y me descuentan 720 (...)*

Nelson también necesitó en un principio de un estado inicial, pero mientras Fabiola fue incapaz de avanzar sin conocer ese dato, Nelson lo creó, puso "su" salario (2500) como un punto de partida que le permitió resolver (2500 - 720 = 1780) y darse cuenta de que para averiguar cuánto le descontaron por los días que faltó (que él interpreta como "cuánto me descontaron por día") basta con encontrar la diferencia entre el descuento total (935) y el pago del préstamo (720) y dividir el resultado entre dos. Más adelante abandonó esa primera idea de escribir su salario y razonar desde éste dato, aunque no hay evidencia explícita de que se percatara de que el dato del estado inicial no era necesario. Por otro lado, si hubiera seguido su procedimiento inicial habría tenido serias dificultades al continuar su razonamiento, pues muy probablemente habría buscado la manera de relacionar los 1780 que obtuvo como resta de su salario menos el descuento del préstamo, con los 935 del descuento total, y eso no es posible hacerlo de manera directa, como se ve en el esquema.



Nelson no sintió que añadir datos al problema fuera una buena idea, se mostraba dudoso y su razonamiento iba y venía, como le pasó a las maestras cuando en otras ocasiones incluyeron números en el cálculo que no estaban en el enunciado original. Muy probablemente esta sensación de inseguridad se debió a ciertos saberes escolares bien aprendidos:

> "El problema contiene toda la información que se necesita. No debe ser alterada por información contextual relevante… Las personas, objetos, lugares, etc. son diferentes en los problemas verbales escolares a como son en una situación de la vida real, y no te preocupes (demasiado) si tus conocimientos o intuiciones son violentados" (Verschaffel, *et al*, 2000)

Además, Nelson debió haber tenido conciencia de que los problemas aritméticos escolares deben poder funcionar para cualquier resolutor, por ello, colocar su salario en un cálculo numérico significaba poner una información que sólo le concernía a él, y era por tanto, susceptible de no ser reconocido por otro resolutor.

También con respecto a la ausencia de medidas, en la primera sesión, mientras se trabajaba con el problema #2 de SEBASTIÁN ["Sebastián jugó dos partidos de canicas. En el primero perdió 23 y en el segundo perdió 39. ¿Cómo quedó al finalizar los dos partidos?"] Rosita afirmó *"Puede hacerse una deducción, pero algo queda como valor desconocido."* Da la sensación de que ella se queda con una idea de "inexactitud", como si componer transformaciones cuando no se cuenta con al menos una medida hiciera que el resultado obtenido no fuera muy confiable, que alcanzara sólo el nivel de "deducción". Esto sucedió especialmente con los problemas en los que la primera transformación elemental era negativa, porque cuando era positiva los maestros solían convertirla en estado inicial y así resolvían el conflicto, por ejemplo, en el problema #1 de SEBASTIÁN ["Sebastián jugó dos partidos de canicas. En el primero ganó 23 canicas y en el segundo 39. ¿Cómo quedó al final de los dos partidos?"] las 23 canicas que ganó en el primer juego ya *las tiene*, se vuelven estado, entonces la segunda transformación elemental (ganó 39) opera sobre ese dato y la compuesta es el estado final (se quedó con 62).

Bermejo (1990) reporta este tipo de estrategias con alumnos. Aunque surgieron a propósito de problemas que no son de la 4ª categoría, una en especial no es muy distinta de las que aparecieron al trabajar con problemas de dicha categoría y con maestros. Es la de *Repetir una de las cantidades propuestas en el problema*, por ejemplo en:

> "'María tiene algunos lápices. Isabel le da 5. Ahora María tiene 17 lápices. ¿Cuántos lápices tenía María al principio?', cuando el niño recibe la frase 'María tiene algunos lápices' se da cuenta de que no sabe con exactitud los lápices que tiene, pero no crea un conjunto de partida desconocido para María. Ante la segunda proposición 'Isabel le da 5', crea un conjunto con 5 lápices para María, pero al no haber representado el conjunto de partida inicial, no se concibe este conjunto como un cambio en el sumando inicial. A continuación, la tercera proposición 'Ahora María tiene 17 lápices', se interpreta como un incremento en el conjunto anterior. Por tanto, responden 5, esto es, el número que representa el conjunto inicial para el niño (…)" (p. 135)

Vergnaud (1982) reporta también este efecto ante problemas con transformaciones opuestas, pero algunos comentarios de los maestros dieron pistas acerca de que algo similar pudo estar ocurriendo con transformaciones iguales negativas.

Este tipo de falta de datos en el que se necesitan medidas, está íntimamente ligado a las concepciones de los sujetos sobre la adición y la sustracción así como a ciertas dificultades en la operatoria de acuerdo a la temporalidad y la cualidad (positiva o negativa) de los datos en el enunciado del problema relacionadas con el tipo de problemas que generalmente se presentan en la escuela. Típicamente si el problema es de pérdida, el referente operatorio inmediato es la resta, pero si el primer dato en la información del problema es un número negativo ¿cómo efectuar la operación?, es decir, en una resta el primer número (minuendo) es siempre mayor que lo que se le va a restar (sustraendo) y por ende, el resultado es menor que ambos (la resta). Por ejemplo, el problema #2 de SEBASTIÁN en el que T_1 (-23) y T_2 (-39). Los años en la clase de matemáticas han dejado rutinas, algoritmos entendidos como una regla de acción cuyo fin es resolver una situación (Vergnaud, 1985) que han sido probados antes y han resultado efectivos, así que si el problema es de “perder” los alumnos saben que hay que efectuar una sustracción, pero escribir en primer lugar en una resta un negativo contradice la experiencia en el plano de los procedimientos y en el de las concepciones acerca de lo que significa restar. Lo mismo sucede al escribir en primer lugar el -23 y no el -39 que es mayor (en términos absolutos), y si se han podido sumar estas pérdidas ¿cómo debe interpretarse el resultado?, es decir, ¿cómo justificar que el resultado de juntar dos pérdidas sea un número mayor (absoluto) cuando se sabe que la resta debe ser menor que el minuendo y el sustraendo?

Estos conocimientos útiles pero limitados sobre estructuras aditivas, dejan de tener efectividad cuando el sujeto se enfrenta a situaciones que los ponen en cuestión, retomando a Brousseau (2000), una estrategia resulta efectiva dentro de cierto margen, pero si el medio cambia, ésta se puede volver obsoleta. De manera clara, intentar calcular por escrito el resultado del problema que se describe arriba supone un conflicto con las ideas previas.

Una de las maneras en las que el sujeto podría lidiar con ello sería partiendo de un estado inicial positivo. Si el problema dijera cuántas canicas tenía Sebastián antes de empezar a jugar, ya no causaría dificultades que perdiera en el primer partido (siempre y cuando no pierda más canicas de las que traía) puesto que sería posible acomodar los números en una operación en la que el minuendo sería positivo y mayor que el sustraendo. Es factible pensar que por eso algunos maestros necesitaban saber ese dato en el problema #2 de SEBASTIÁN.

En el fragmento siguiente puede verse cómo la sensación de falta de datos está estrechamente relacionada con las dificultades de operatoria. Tuvo lugar en la primera sesión después de que las tres parejas habían representado el problema #1 de SEBASTIÁN [Sebastián jugó dos partidos de canicas. En el primero ganó 23 canicas y en el segundo ganó 39. ¿Cómo quedó al finalizar los dos partidos?] y estaban discutiendo sobre la operación que resuelve en el problema #2 [Sebastián jugó dos partidos de canicas. En el primero perdió 23 y en el segundo perdió 39. ¿Cómo quedó al finalizar los dos partidos?].

Nelson:	*sí, suman las 62 canicas* (23 + 39) *pero al final las perdió ¿pero cuántas tenía antes?*
Juliana:	*pero no te está preguntando eso, no te pregunta cuántas te quedaron*
Nelson:	*sí, perdió 62 pero con cuántas empezaría*
Juliana:	*o sea, falta un valor "equis"* (x) *que no sabes, pero no te lo preguntan*
Rosita:	*a mí me pasó eso, pero diría que mi pensamiento está acostumbrado al problema 1, pero el 2 puede ser el mismo proceso para resolverlo*
Conductora:	*en los dos hay que sumar 23 + 39*
Fabiola:	*pero como es pérdida, inmediatamente voy a la resta, de entrada ¿cómo sé a cuántas le voy a restar lo que perdió?*
Conductora:	*¿por qué en el primero* (el problema #1 de SEBASTIÁN) *no te entra la duda de cuánto tenía al principio?*
Susana:	*es que estamos acostumbrados al tipo de problema 1* (el #1)
Conductora:	*¿cuando dice pérdida siempre hay un dato anterior?*
Susana:	*sí, me mete en conflictos*

Juliana se encarga de aclarar cuál es la pregunta que debe poder contestarse, y aunque parece que Nelson ya aceptó que ese número sea -62 y que se obtiene sumando, sigue requiriendo un estado inicial. Fabiola lo plantea claramente ¿cómo saber a cuántas le tiene que restar lo que perdió? Por otro lado, el que Juliana haya llamado a la incógnita como "valor x" tiene que ver con otro elemento aprendido en la escuela: el álgebra. Ella y Rosita, como se verá más adelante, intentaron hacer uso de este recurso en sus representaciones simbólicas, pero el procedimiento que llevaron a cabo fue siempre aritmético.

El comentario de Rosita (que después retomó Fabiola) acerca de las "costumbres de su pensamiento", es posible suponer que hacía referencia a las dificultades de tener un negativo en el primer lugar o al hecho de concebir a la suma como una operación útil hablando de pérdidas. De Corte y Verschaffel (1985)[59] hablan de un "esquema de problema verbal" refiriéndose al sistema de creencias del que los alumnos se apropian en el curso de su experiencia escolar, ideas acerca de cómo esos problemas se estructuran, se formulan y se resuelven, y del papel que tienen en el aprendizaje de la aritmética en la escuela. Este marco les permite tener un conocimiento intuitivo de cómo reaccionar adecuadamente ante un pro-

[59] De Corte and Verschaffel (1985), citado en: Verschaffel, *et al*, (2000).

blema escolar (por ejemplo, que hay que resolverlo haciendo cuentas); reconocer la estructura típica de los problemas para poder seleccionar la información crucial para formarse una adecuada representación del problema; conocer ciertas reglas implícitas, presuposiciones y acuerdos en el juego de los problemas verbales, con lo que posteriormente podrán reconocer y sortear ambigüedades y omisiones en los textos, así como reaccionar de la manera en la que el maestro o el libro esperan ante un tipo particular de problema.

Desde la entrevista inicial al recibir el problema NACIMIENTOS ["En una ciudad, el excedente de los nacimientos sobre los decesos fue de 1293 personas entre 1950 y 1960, y de 14084 entre 1950 y 1970. ¿Qué sucedió entre 1960 y 1970?"], Fabiola dijo que no entendía la pregunta, que no le quedaba claro lo que se le estaba pidiendo y que los problemas a los que ella estaba acostumbrada tenían preguntas como de *"cuánto queda, cuánto hay o sobre totales"*. Esa estructura de problema que le permitía sentirse cómoda fue construida tras una larga experiencia como alumna y como maestra, y fungió siempre como marco de pensamiento y acción para los participantes. La experiencia hay que entenderla como la relación que un sujeto establece con su medio para lograr equilibrio, y los conocimientos obtenidos como consecuencia de esa experiencia (procedimientos, interpretaciones, cálculos, etc. que antes fueron exitosos o inadecuados) son justamente el punto de partida para ampliarla. El sujeto aprende cosas nuevas desde lo que posee y es capaz de comprender[60]. El reto para la ingeniería era situarse ahí y llevar al límite las estrategias que poseían los maestros para ampliarlas o cambiarlas cuando fuera necesario y que así, su experiencia pudiera abarcar otros problemas, distintos a los que ya conocían, dándoles un margen de maniobra mayor que les permitiría ensanchar sus ideas sobre la suma y la resta y así, profundizar sus conocimientos sobre las situaciones aditivas.

En el fragmento que se transcribe a continuación, puede notarse que Fabiola, además de seguir necesitando el estado inicial, hace un señalamiento importante con respecto a cómo se planteó la pregunta en el problema #2 de SEBASTIÁN. Una de las intenciones que se tenían desde la fase del análisis a priori al redactar los enunciados, era que no contuvieran, hasta donde fuera posible, palabras "clave" que pudieran orientar a los maestros acerca de qué operación era la que lo resolvía, ya que esas "pistas" son generalmente las que los resolutores buscan en los enunciados en vez de intentar comprender el problema de manera global. En los problemas #1 y #2 de SEBASTIÁN la incógnita se encontraba en la transformación compuesta, y la pregunta era "¿cómo quedó al finalizar los dos partidos?" Por su

[60] O en términos vigotskyanos, construye desde su Nivel de Desarrollo Real hacia su propio Nivel de Desarrollo Potencial a través de la Zona de Desarrollo Próximo que es la distancia existente entre ambos niveles. Vigotsky, Lev. S. (1979).

experiencia escolar, los alumnos (y también los maestros) generalmente asumen que la respuesta a la pregunta de un problema en la clase de matemáticas es única y numérica (si ese número es un natural, mejor), y que se obtiene realizando casi siempre una sola operación aritmética (el maestro quedará más satisfecho si se le escribe el algoritmo que si sólo ve dibujos o se realiza el cálculo mentalmente) (Verschaffel, *et* al, 2000). Fabiola, sin embargo, cuestionó el planteamiento de las preguntas y de los enunciados repetidas veces durante las sesiones (otras se comentarán más adelante). Dice:

Fabiola:	*sí, sé cuantas perdió pero ¿Cuántas tenía?, ¿cómo queda al final de los dos partidos? Perdedor*
Conductora:	*¿y puedes dar un dato numérico?*
Fabiola:	*pues perdió 62 canicas*
Conductora:	*¿ahí ya no necesitas el primer dato?*
Fabiola:	*ya no*

Efectivamente, la pregunta podría contestarse solamente diciendo "perdió", puesto que no requiere explícitamente de un dato numérico. Es hasta que la conductora se lo pregunta cuando ella incluye al número en su respuesta. Por otro lado, el comentario final de Fabiola no debe hacer suponer que había abandonado definitivamente el requerimiento de un estado, pero podía empezar a plantearse la posibilidad de resolver este tipo de problemas sin ellos, operando sólo con las transformaciones.

c) Interpretaciones debidas al contexto

El tercer y último tipo de Falta de Datos que se encontró en las respuestas de los maestros fue el relacionado con los contextos de los problemas[61]. Según Puig y Cerdán (1988, p. 55) "los contextos son los responsables de la relación semántica", a partir del marco en el que la historia del problema sucede, el resolutor puede atribuirle sentido tanto al texto como a los números. Sin negar lo anterior, también se ha afirmado que los alumnos, como parte de su experiencia escolar, aprenden a experimentarlos como un ejercicio en el que se practican los contenidos matemáticos recientemente revisados en clase y no se preocupan demasiado si algo parece no tener sentido (Verschaffel, *et al*, 2000). Los contextos de los problemas no se refieren (ni necesariamente tendrían que hacerlo) a experiencias de los niños, son "representaciones estilizadas de experiencias hipotéticas" (Lave, 1992, p. 77)[62], cosas que podrían

[61] Cuando se habla de "contexto" es para referirse al marco o la historia asociada al texto del problema, o lo que Kulm llama "significados no-matemáticos presentes en el enunciado del problema", no al contexto escolar entendido como el tipo particular de prácticas en las que los problemas matemáticos ocurren y tienen sentido. Kulm, G. (1984, p. 17) citado en: Wiest, Lynda (2002). Traducción nuestra.

[62] Citado en: Verschaffel, *et al*, (2000). Traducción nuestra.

suceder bajo determinadas circunstancias o incluso situaciones imaginadas o fantasiosas (como viajes en el tiempo, personajes mitológicos, etc.) que involucren relaciones numéricas.

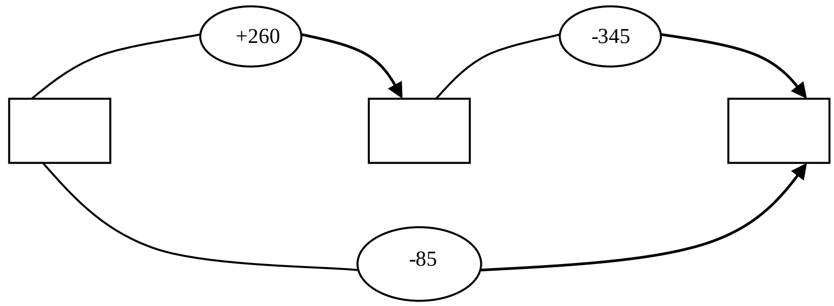
i) Cierta información ausente parece ser relevante para resolver el problema

De los seis problemas que se propusieron en la entrevista, los de GUILLERMO [“A Guillermo le gusta hacer apuestas. En la primera ganó $260 y luego volvió a apostar. Haciendo cuentas de las dos apuestas vio que en total había perdido $85. ¿Qué pasó en la segunda apuesta?”] y PEDRO [“Pedro jugó dos partidos de canicas. Durante el primero ganó 7. Después jugó un segundo partido. Haciendo cuentas de los dos partidos notó que en total había perdido 2 canicas. ¿Qué pasó en el segundo partido?”] fueron los más difíciles y ninguno de los maestros pudo resolverlos correctamente. Ambos eran del tipo (+) + [-] = (-) pero dos elementos los diferenciaban: el rango numérico (que era mayor en GUILLERMO) y el contexto (apuestas en el primer caso y juegos de canicas en el segundo), elementos que resultaron muy importantes al revisar las respuestas de los maestros y que los colocan en categorías analíticas distintas no obstante su similitud en cuanto a la relación semántica.

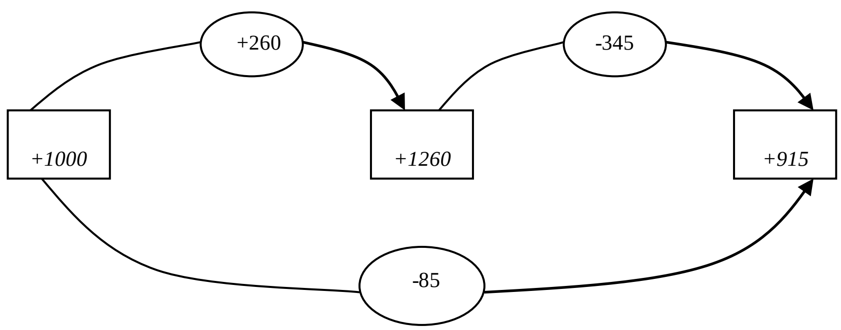
El problema de PEDRO puso en evidencia las modificaciones que los maestros hicieron a problemas complejos de la 4ª categoría, resultado consistente con lo reportado en la literatura que se citó en el apartado correspondiente. Aunque hubo un par de comentarios acerca de la ausencia estado inicial[63] la dificultad se centró en el establecimiento de la relación semántica entre los datos, no en la falta de ellos. En cambio, en el problema de GUILLERMO el contexto dio pie a que cierta información que no aparecía en el enunciado se pensara indispensable para poder resolverlo. Los maestros no demandaban conocer uno de los estados del problema, necesitaban saber *cuánto había apostado* Guillermo.

Para entender esta demanda, debe comenzarse por analizar la relación semántica y la operación que resuelve el problema en este caso. Si al término de las dos apuestas Guillermo perdió, una vez que en la primera había ganado, en la segunda apuesta tuvo que perder no sólo lo que había ganado ($260) sino $85 más, es decir, en esa segunda apuesta perdió $345 (la suma de 260 + 85). En términos algebraicos (+260) + [-345] = (-85) y recordando el esquema de Vergnaud:

[63] Uno lo hizo Nelson preguntándose cuántas canicas tendría Pedro al principio, antes de que ganara las 7; y otro Juliana, reconociendo de manera un tanto cantinflesca, que ése era un dato que no se sabía.



Ahora, se parte de la suposición de que se conoce algún estado[64], por ejemplo, el inicial. Si Guillermo hubiera llegado a jugar con $1000, se sabe que tras la primera apuesta ganó $260 lo que da lugar a que en el estado intermedio ahora tenga $1260. El problema dice que al terminar el juego en total había perdido $85, así que le sobraron $915 (que son el estado final, resultante de restarle a los $1000 que traía, los $85 que perdió en total). Por lo tanto, en el segundo juego debió haber perdido $345, como se ve en el esquema.



Ahora las apuestas. Cuando se realiza una apuesta hay una cantidad que se pone en juego, un monto con el que se especula. Si no se gana la apuesta esa cantidad se pierde, pero si se gana, el monto que se obtiene no es necesariamente el mismo que se apostó[65]. Pero aunque lo que se ganara fuera igual a lo que se apuesta, conocer el monto de la apuesta resulta innecesario para resolver el problema que se planteó. Por ejemplo, Guillermo traía $1000 y decidió hacer una apuesta por ejemplo, de $260. Ganó y le dieron otros $260, como dice el problema. Ahora, si se piensa que apuesta $65 y gana, pero las condiciones de la apuesta eran "4 a 1", recibe también $260. Es decir, no importa si se sabe o no cuánto apostó Guillermo, lo que sí se necesita para resolver el problema es el resultado (si ganó o perdió y cuánto) de cada una de las dos apuestas (las transformaciones elementales) o el resultado de una de las dos apuestas y el balance de éstas (una elemental y la compuesta), como en el

[64] Estrictamente este ya no sería un problema de la 4ª categoría, pero se añade información para poder explicar los razonamientos de los profesores.
[65] Como cuando se dice "doble o nada" o "la apuesta es 5 a 1", es decir, que de ganar, se obtendrían 5 pesos por cada uno que se haya apostado.

caso del problema que se discute. Esta característica que presenta el contexto de las apuestas propició que cuatro de los seis maestros se cuestionaran sobre cuánto había apostado Guillermo. Por ejemplo, Fabiola:

> *O sea ¿puedo poner aquí.... porque no sé cuánto apostó en la segunda, en la primera ganó 260 y luego volvió a apostar pero no sé... a mí me faltaría este dato. "Haciendo cuenta de las dos apuestas había perdido 85" pero no sé cuánto apostó en la segunda, la segunda vez que volvió a jugar... este... porque no sé cuál es el total de cuánto ganó, de cuánto ganó en las dos apuestas, sé cuánto ganó en la primera pero no sé cuánto ganó en la segunda, había perdido 85, pero (...)*

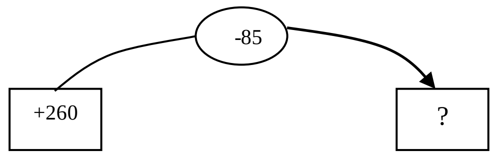
Una de las alternativas de las que los resolutores pueden echar mano cuando no han comprendido la relación semántica de un problema, es la duplicación o la invención de datos, como lo reporta Bermejo (1990). Aunque tres maestros repitieron uno de los datos que el problema contenía, es menester considerar que dicha decisión también tuvo que ver con el contexto de las apuestas y no necesariamente o no sólo debido al no establecimiento de la relación semántica.

Fabiola, al igual que Juliana y Aurora, colocó un número como estado intermedio que fungió también como "lo que Guillermo apostó la segunda vez". Cómo llegaron a ese número tiene que ver con la percepción de que faltaban datos, ése dato en particular. Como en el problema Guillermo gana $260 en la primera apuesta, los maestros supusieron que al menos él tendría esa misma cantidad para poder entrar a apostar, así, hay un 260 como estado inicial (lo que tiene, con lo que llega a apostar) y otros 260 que son T_1 (lo que gana en la primera apuesta), por eso, en el estado intermedio colocaron $520. Sin embargo, los maestros estaban conscientes de que habían agregado información al problema y manifestaban poca seguridad en sus afirmaciones. A partir de este punto se sostuvieron en los 520 como "lo que apuesta la segunda vez" e intentaron relacionar aritméticamente esta cantidad con el 85 que el problema planteaba, obteniendo otros montos.

La pregunta se vio así modificada de la misma manera que en el problema de PEDRO porque la pérdida total de $85 ($T_C$) pasó al lugar de lo que ocurrió en segunda apuesta (T_2). Ya no se trataba de contestar qué había pasado en la segunda apuesta (la respuesta que daban era "perdió los 85") sino cuánto había apostado la segunda vez. Dice de nueva cuenta Fabiola:

> *En la segunda apuesta fue donde perdió pero no tengo el dato de cuánto apostó en la segunda apuesta, o sea ¿que qué pasó en la segunda apuesta? Pues fue donde perdió estos 85, pero no sé la cantidad que iba a apostar, eso es lo que me confunde…*

El problema es así modificado a una estructura conocida de la 2ª categoría (“tengo algo, le quito una parte y debo averiguar cuánto me queda”), en coincidencia con los resultados que reporta Vergnaud (1982).



Al ir y venir sobre el problema, algunos maestros releyeron la parte del enunciado en la que se afirma “haciendo cuentas de las dos apuestas vio que en total había perdido $85”, pero la palabra “total” no tuvo cabida en el esquema mental de la relación semántica que habían construido para el problema, así que no la consideraron.

El acercamiento al problema de PEDRO no fue tan espinoso como el de GUILLERMO. A pesar de que estaban estructurados de la misma manera, el contexto y sobretodo el monto, marcaron una importante diferencia en las estrategias de resolución ya que la relación aritmética entre el 7 y el 2 (datos numéricos que el enunciado proporciona en el problema de PEDRO) era más fácil de establecer, así que los maestros no se vieron en la necesidad de efectuar ningún cálculo numérico por escrito. El problema fue modificado[66] de la misma forma que el de GUILLERMO, pero de una manera más directa.

La misma estructura (+) + [-] = (-) de los problemas GUILLERMO y PEDRO se planteó más adelante en las sesiones cuando se abordaron los problemas de VANESA. Como se mencionó, esa estructura es la más compleja para los alumnos, sin embargo, para cuando se retomó, las dificultades no tuvieron que ver con el contexto sino con el establecimiento en sí de la relación semántica, cuestiones como la temporalidad y la operatoria fueron entonces el tema de discusión. Aún así, cuando en la última sesión se retomaron los problemas de la entrevista, con el de GUILLERMO volvieron a mostrarse las mismas dudas respecto a cuánto había apostado, ya que éstas son de distinto orden que en los demás problemas. ¿Cuánto tengo? es una pregunta que busca un estado, ¿cuánto apostó? es una pregunta que deviene del contexto, y como se vio, no era necesario saber cuánto apostó para resolver el problema pero esa duda obstaculizó en los maestros la posibilidad de establecer la relación semántica entre los datos.

[66] En vez de la forma original (+7) + [-9] = (-2), fue modificado para volverlo un problema de la 2ª categoría en donde 7 – 2 = 5

ii) El enunciado deja abierta la posibilidad de hacer varias interpretaciones o suponer situaciones que no están escritas

Acerca de la duplicación o invención de datos cuando se tiene la sensación de que es necesario conocerlos debido al contexto del enunciado, también es interesante revisar el caso de Nelson ante el problema DESCUENTOS [Te están descontando $720 de tu quincena por un préstamo que solicitaste, además, tuviste dos faltas sin previo aviso en esa quincena. Al recibir tu salario notaste que te dieron $935 menos de lo que normalmente recibes. ¿Cuánto te descontaron por los días que faltaste?] que se discutió. Quizá otra de las razones que lo llevaron a colocar su salario como estado inicial tuvo que ver con que el problema estaba planteado en primera persona. Él pudo haber pensado que se trataba de una actividad como aquellas en las que se debe incluir información obtenida de otras fuentes, cosa que ocurre, aunque no con mucha frecuencia en la primaria. Wiest (2002) reporta que la personalización de los problemas tiene impacto en el interés, en la motivación y en el éxito en la resolución.

Ya no faltan datos

Las dudas acerca de los datos faltantes fueron disipándose conforme se desarrollaron las sesiones y no volvió a aparecer como un elemento que impidiera la resolución de los problemas después de la segunda sesión. Fabiola, tras una actuación más bien pobre en el abordaje de los problemas de la entrevista inicial, dijo durante la primera sesión a su compañera Aurora cuando discutían acerca de la representación del problema #2 de SEBASTIÁN (-23) + (-39) = [-62]:

> *El resultado del otro... arriba* (se refiere al problema #1 de SEBASTIÁN), *él tenía 62 y en el otro problema* (el #2)*... nos falta un dato para saber el resultado*

Más adelante comentó en la discusión grupal sobre sus dificultades con ese problema:

> *Nos está hablando de pérdida... resta... no tengo el dato de saber cuántos tenía... aquí habla de... ¿cómo sé a cuántas le voy a restar?*

Sin embargo, en la sesión 2, cuando se discutía sobre los problemas #5 y #6 de SEBASTIÁN a partir de un comentario de la conductora, Fabiola dice:

> Conductora: *El problema es la representación ¿qué significa el tache, es pérdida, incógnita,“por”? Tenemos un problema con la representación y otro con los negativos, aparecen para representar algo. Los problemas están puestos así a propósito, es el mismo niño, el mismo asunto, el mismo resultado, pero en uno ganó y en el otro perdió. Quiero que lo empiecen a diferenciar*
>
> Fabiola: *sí, de entrada recordé los problemas que me pusieron primero* (en la entrevista) *me faltaba un dato y ahí los tenía, los dos problemas se resuelven con resta*

Probablemente la introducción del esquema de Vergnaud haya tenido que ver en ello, pues en él los profesores pudieron empezar a reconocer la información que sí les proporcionaba el enunciado del problema y que era suficiente para resolverlo. A partir del ejercicio de correlación esquemas-problemas de SEBASTIÁN que se llevó a cabo al final de la segunda sesión, se comentó lo siguiente:

Conductora:	*¿cuál fue el esquema del problema 1?*
	(todos señalan el correcto)
Conductora:	*¿y el del 2?*
	(todos señalan el correcto)
Conductora:	*¿por qué?, ¿dónde está representada la pregunta?*
Fabiola:	*aquí se ve el orden que dice el problema*
Conductora:	*¿nada más el orden?*
Fabiola:	*y el planteamiento, cuánto perdió en el primero y cuánto perdió en el segundo*
Conductora:	*déjame precisar, dices "nos fijamos en el planteamiento" ¿qué quieren decir con eso?*
Fabiola:	*en esos espacios* (la información numérica en los óvalos del esquema) *¿qué datos van ahí? En eso nos fijamos, el esquema tiene los datos que me da el problema*

Posteriormente se discutió acerca de qué otros datos no se incluían en el enunciado y qué tipo de cantidades podían colocarse como estados.

En la disipación de los comentarios sobre la falta de datos debe considerarse, además del trabajo en el establecimiento de la relación semántica, el contrato didáctico que se fue construyendo, ya que los maestros pronto se percataron de que en los problemas que se les planteaban no había datos faltantes.

2 Procesos de representación

En este apartado interesa analizar la manera en la que los maestros elaboraron las representaciones gráficas y cómo resolvieron el cálculo numérico que planteaba cada problema. Aunque ambos elementos están estrechamente vinculados resultó útil analizarlos por separado para profundizar y revisar con detalle sus características.

Primeramente se analiza qué función desempeñaron las representaciones que los maestros elaboraron a propósito de los problemas presentados en la entrevista inicial. Posteriormente, el apartado se divide en el análisis del *Esquema y uso de signos* y en el de la *Operatoria.* De manera paralela se analizará si las situaciones diseñadas, las restricciones y los ajustes que se realizaron sobre la marcha provocaron los cambios de estrategia deseados en los maestros.

<u>Función de las representaciones en la entrevista inicial</u>

Una de las primeras cosas que pudieron observarse es que la posibilidad de realizar alguna marca gráfica que pretendiera fungir como un representante, estaba en función de que los maestros comprendieran la estructura del problema o al menos poseyeran indicios acerca de cómo estaban jugando los datos en él[67]. La representación externa, como mecanismo de interacción entre el mundo y la mente, supone una relación dialéctica entre ambos (Duval, 1999), sin embargo, realizar una representación externa no garantiza ni un procedimiento de resolución ordenado y controlado ni la obtención de un resultado correcto (por ejemplo, Fabiola hizo algunos cálculos desordenados para los problemas GUILLERMO, LULÚ y DESCUENTOS; anotó un número 7 para el de PEDRO y ninguna marca para los otros dos). En estructuras aditivas que no son fácilmente reconocibles para el sujeto, la construcción de una representación interna es menos intuitiva, especialmente si dichas estructuras no se encuentran cotidianamente en situaciones no-escolares. Aquellos maestros que representaron la situación se valieron de ella bien para a) *Operar*, b) *Tomar conciencia de la situación* o c) *comunicarle a la entrevistadora sus acciones*.

a) Representaciones para operar

Susana realizó la siguiente representación para el problema PEDRO [“Pedro jugó dos partidos de canicas. Durante el primero ganó 7. Después jugó un segundo partido. Haciendo cuentas de los dos partidos notó que en total había perdido 2 canicas. ¿Qué pasó en el segundo partido?”] (Fig. 1):

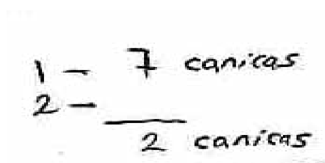


Figura 1

La operación no le permitió resolver el problema aunque puede verse que se había formado una representación en la que consideraba lo que había ocurrido en el primer partido (ganó 7 canicas, aunque no usó signos para representar la cualidad positiva de la transformación), deja un espacio en blanco dándole un lugar al dato que debe hallar, y bajo una raya horizontal, como para diferenciar a ese dato de las transformaciones elementales, coloca el balance global que Pedro obtuvo tras los dos partidos de canicas (aunque también sin el signo negativo).

[67] Hacer una representación externa no es condición indispensable para resolver un problema. Podría pensarse en resolverlo correctamente valiéndose del cálculo mental y por lo tanto, no requerir de anotación alguna, sin embargo, no se encontró ningún caso en la entrevista.

Las representaciones de Rosita son un ejemplo de la importancia que muchos maestros conceden al esquema de resolución de problemas escolares que consiste en anotar *datos, operaciones* y *resultado*. Las representaciones de Rosita casi siempre le permitieron operar y solía resolver las restas por complemento aditivo, como en el problema ORO [“La reserva de oro de un banco bajó 642 lingotes en el transcurso del año 1973. Durante el primer semestre del mismo año había bajado 1 031 lingotes. ¿Qué pasó en el transcurso del segundo semestre?”]. Anotó “menos” a la izquierda de cada cantidad para denotar que se trataba de disminuciones, sin embargo, no pudo controlar la cualidad del resultado numérico que obtuvo (Fig. 2):

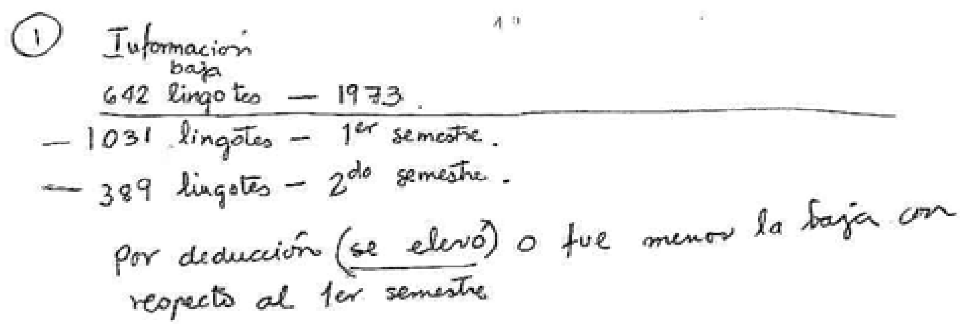


Figura 2

Aunque escribió que “se elevó”, afirmó en la entrevista no estar segura de si el 389 que obtuvo en la resta era positivo o negativo. El hecho de que siguiera habiendo un saldo negativo en la reserva aunque se hubiera “elevado” en el segundo semestre del año, le hizo dudar acerca de la cualidad de T_2:

> *Bueno, yo por deducción así nada más, sé que se elevó en comparación con el primer… más bien, se elevó con respecto a que fue menos la baja*

Representaciones exitosas para operar fueron, por ejemplo, la que Juliana realizó para el problema de LULÚ [“Lulú pidió 2 cajas de aguacates para vender en su tienda. Cuando las abrió y revisó el contenido notó que en la primera había sólo 23 aguacates en buen estado. Al terminar de revisar las dos cajas contó los aguacates que estaban en buen estado y sumó 81. ¿En qué condiciones estaban los aguacates de la segunda caja?”] (Fig. 3):

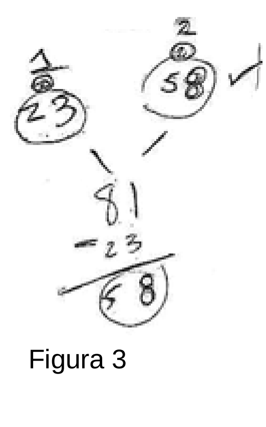


Figura 3

Inicialmente, ella escribió el número 23 (los aguacates que sabe que se encuentran en buen estado de la primera caja) con un número uno arriba (señalando que es la primera caja), puso un número dos a la misma altura (los que habría en la segunda caja). Luego marcó dos líneas que convergen en un tercer elemento, el 81 (los aguacates en buen estado de las dos cajas). Le dio a su representación un tratamiento de *parte-parte-todo* (Carpenter y Moser, 1982) en el que pudo ubicar a una colección (los 81 aguacates) que se componía de dos subcolecciones (los 23 de la primera caja y el resto que correspondían a los de la segunda), así que realizó una resta para encontrar la diferencia entre el 81 y el 23 que le permitió hallar el número 58 (los aguacates en buen estado de la segunda caja).

Rosita, para el problema DESCUENTOS [“Te están descontando $720 de tu quincena por un préstamo que solicitaste, además, tuviste dos faltas sin previo aviso en esa quincena. Al recibir tu salario notaste que te dieron $935 menos de lo que normalmente recibes. ¿Cuánto te descontaron por los días que faltaste?”] escribió (Fig. 4):

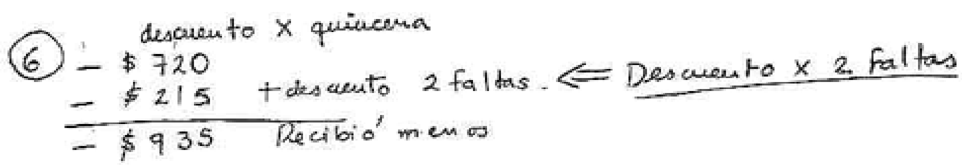


Figura 4

En este caso, al ser todas transformaciones negativas, no tuvo dificultades en afirmar que los $215 que coloca como segundo sumando eran un descuento, y por lo tanto suponen una cantidad negativa. Incluso escribe “+ descuento 2 faltas” porque sabe que para obtener T_2 debe sumar una pérdida.

b) Representaciones que posibilitan la toma de conciencia

El caso de Juliana ante el problema NACIMIENTOS [“En una ciudad, el excedente de los nacimientos sobre los decesos fue de 1293 personas entre 1950 y 1960, y de 14084 entre 1950 y 1970. ¿Qué sucedió entre 1960 y 1970?”] es un ejemplo de la toma de conciencia del propio sujeto sobre la situación (Fig. 5):

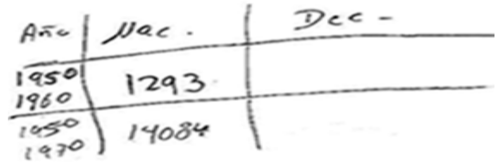


Figura 5

Esta fue su primera representación, pero pronto notó que no le permitiría encontrar la solución al problema puesto que no había contemplado un espacio para el dato que debía averiguar y además el número de nacimientos en el periodo 1950-1960 (1293) era un subconjunto de el periodo 1950-1970 (en el que hubo 14084 nacimientos). Así que elaboró una línea del tiempo (Fig. 6):

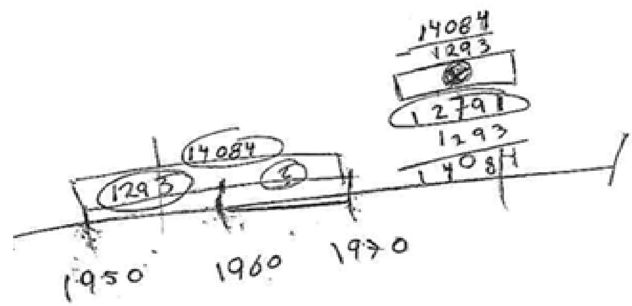


Figura 6

En la línea pudo representar los periodos de 1950-1960 y de 1960-1970 (arriba escribió un signo de interrogación para denotar que ahí se ubicaba la incógnita), y estos comprendidos en el de 1950-1970, con lo cual, la resta le resultó la operación obvia para encontrar la diferencia.

c) Representaciones como explicación para la entrevistadora

Este tipo de representaciones pudieron verse en casos como el de Susana también con el problema NACIMIENTOS (Fig. 7):

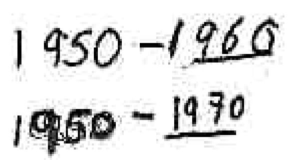


Figura 7

Al terminar de escribirlo dijo:

Susana:	*"¿qué sucedió entre 1960 y 1970?" hubo más población, hubo más nacimientos*
Entrevistadora:	*¿cómo sabes que hubo más nacimientos?*
Susana:	*porque me dicen que de 1950 a 1960 hubo un excedente de 1293* (escribe una rayita y luego el 1293 Fig. 8) *y el último dato es que 1950 a 1970 fue de 14084* (escribe 14084), *entonces ¿qué pasó entre 1960 a 1970? Pues siguió aumentando la población*

Se le solicitó que encontrara en cuánto había aumentado la población y su representación final fue:

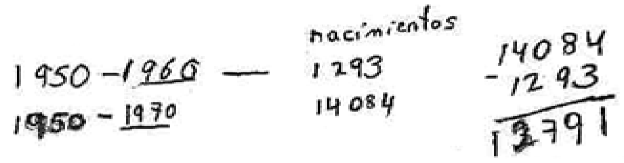


Figura 8

Tras efectuar la resta, pudo afirmar que 12791 eran los nacimientos que habían ocurrido de 1960 a 1970.

2.1 Esquema y uso de signos

Acerca del *Esquema y uso de signos* se analiza lo siguiente:

a) Cualidad de los datos numéricos (cómo hicieron notar si un dato numérico era negativo o positivo);
b) Temporalidad y posición de la incógnita (si en la representación gráfica se conserva el orden en el que los datos deben aparecer según la relación semántica establecida y si se marca el lugar en el que se ubica la incógnita y mediante qué recurso);
c) Elementos contextuales (información propia del contexto del problema que contiene la información numérica y la referente a la relación semántica, pero que no es necesaria para su resolución) y;
d) Tipo de representación (a nivel gráfico visto globalmente, como si es un esquema y de qué tipo, o una operación aritmética, un dibujo, etc.).

Excepto en el último aspecto, interesa señalar también el recurso utilizado, es decir, cómo fue que hicieron notar si un dato era positivo o negativo en el caso de la cualidad de los datos numéricos, por ejemplo. Cabe aclarar que no se parte de la idea de que las representaciones de los maestros debían contener todos estos elementos para ser consideradas "correctas". El proceso es inverso, los maestros seleccionarían información del problema para elaborar cada producción, unidades significantes (Duval, 1999) que les permitirían realizar los mensajes. ¿Qué de la información que proporcionaba el problema se convirtió en una unidad significante para los maestros? Esa es la pregunta.

En los apartados en los que resulta pertinente se distinguen las representaciones elaboradas en la A) Entrevista inicial y en las B) Sesiones experimentales. La distinción resulta importante no sólo para ordenar el análisis y la evolución de las producciones de los maestros a lo largo de la parte experimental de la ingeniería, sino además porque en la entrevista inicial la consigna fue *resolver el problema* valiéndose de cualquier método que consideraran pertinente, a diferencia de *representar el problema* que fue la consigna en las sesiones. Por ello no existen producciones de todos los maestros acerca de los problemas presentados en la entrevista y las que hay no se estudian todos los incisos señalados arriba.

a) Cualidad de los datos numéricos

B. Sesiones experimentales

Problemas de Sebastián

Por la manera en que se presentaron los problemas de SEBASTIÁN, el único recurso para que los maestros pudieran diferenciar gráficamente a uno del otro en sus comunicaciones era hacer notar la cualidad de T_1 y T_2. En T_C sólo si resolvían el problema. En el problema #1 todas las transformaciones eran positivas y en el #2 todas negativas[68]. Dos parejas encontraron un camino que no se esperaba en el análisis a priori, el recurso figurativo (Peltier, 2003).

Nelson y Susana, para representar el problema #1 dibujaron a Sebastián con cara feliz, y apenas un poco antes de enviar el mensaje Nelson sugirió añadirle *"muchas canicas… las que ganó"*, así que las trazaron a manera de marco en el dibujo (Fig. 9). Es notable señalar que ellos se esmeraron en hacer un dibujo "bonito", con chapas, pestañas, su pelito e incluso Nelson sugirió ponerle gotas de sudor *"(…) de que fue a jugar, hizo un esfuerzo".*

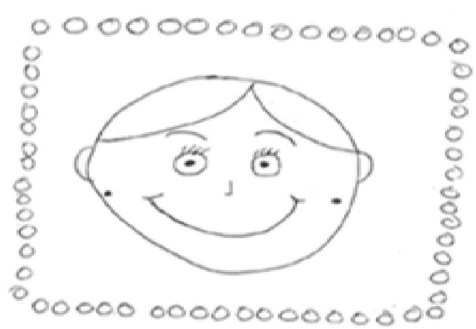


Figura 9

Aurora y Fabiola representaron la cualidad positiva mediante el dibujo del protagonista del problema con una cara feliz y un trofeo por ser el ganador, además de "palomitas" (✓) a un lado de los conjuntos de canicas que ganó en cada juego (Fig. 10).

Aurora: *un niño, dibujamos un niño ¿no?*

[68] (+23) + (+39) = [+62] y (-23) + (-39) = [-62] respectivamente.

Fabiola: *¿dibujamos las canicas?*
Aurora: *¿lo que está pensando?*
Fabiola: *así ¿no?* (dibujan una carita pensando en un trofeo)
Aurora: *pero para explicar que ganó...*
Fabiola: *¿le ponemos el resultado?*
Aurora: *números no*
Fabiola: *pero cómo sabemos qué es lo que pasa*
Fabiola: *ponemos a este niño como campeón*

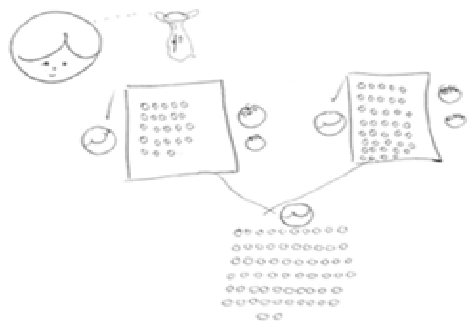


Figura 10

Un elemento que debe considerarse sobre estas representaciones es la ausencia de números debida a una consigna mal entendida, como se describió en otro apartado. “No escribir el número del problema” se refería a los números de identificación que se habían añadido para diferenciarlos al hablar de ellos en las discusiones grupales y para facilitar el análisis posterior, pero tanto la pareja de Fabiola y Aurora como la de Nelson y Susana lo interpretaron como que no se podía escribir la información numérica contenida en el enunciado. El asunto se aclaró al recibir ellos el primer mensaje.

A diferencia de la cualidad positiva, la negativa la expresaron mediante el dibujo de Sebastián llorando y “taches” (×) en cada canica de los conjuntos que representaron a T_1 y T_2 además de uno grande sobre todo el conjunto de T_C al que le agregaron otra “palomita” (✓) pero esta vez con la intención de comunicar una pérdida, como un “se fue” o “voló” (Fig. 11).

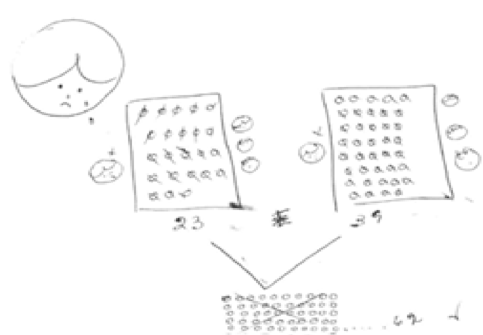


Figura 11

Para las transformaciones negativas del problema #2, Nelson y Susana decidieron emplear otro recurso porque el anterior mensaje, a pesar de que fue comprendido, quizá lo percibieron como menos elaborado (en términos de la representación de unidades significantes) que los de las otras dos parejas tras la socialización de todos los mensajes. Optaron por emplear un tipo de representación semejante a la de Aurora y Fabiola, y lo negativo lo señalaron mediante "taches" en casi todas las canicas de T_1 y luego en todos los conjuntos (T_1, T_2 y T_C). Es interesante advertir que además de los "taches" escribieron números con signo negativo bajo los conjuntos de canicas de T_1 y T_2, y dentro del de T_C (Fig. 12). Probablemente la decisión de no dibujar las canicas de T_C se debió a que hacer 62 bolitas es hacer muchas bolitas, y optaron por una estrategia más económica (al igual que Aurora y Fabiola al decidir no tachar cada canica de T_C en el problema #2).

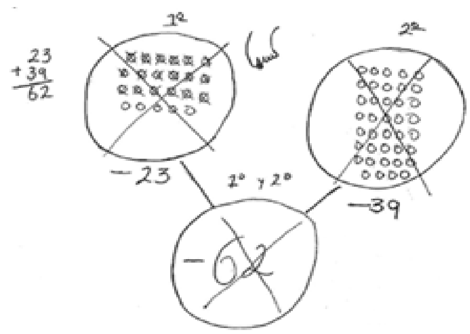


Figura 12

Juliana y Rosita emplearon otros recursos para hacer notar la cualidad de los datos numéricos. Para el problema #1 de SEBASTIÁN dibujaron un contador dividido en dos secciones, una destinada a anotar las canicas ganadas en el primer juego y la otra para las del segundo. En la parte de abajo en una fila que abarca las dos columnas pusieron un 62 (la suma de ambas) (Fig. 13). La decisión de contar poniendo cuatro rayitas a las que cruza una quinta en diagonal) generó algunas dudas en la pareja receptora, pues no sabían si eran un equivalente del "tache" y estaban queriendo representar una transformación negativa.

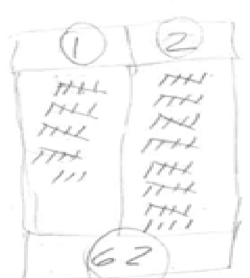


Figura 13

Cuando elaboraron el mensaje sobre el problema #2 (con todas las transformaciones negativas) dibujaron otra tabla, pero esta vez consideraron una fila para las canicas perdidas y otra para las ganadas (que siempre son cero), y por el lado de las columnas había una para cada juego y otra para el total (señalado con una letra T) (Fig. 14). Resulta interesante hacer notar que ellas emplearon el signo “menos” (-) desde esta primera ocasión en la que resultaba pertinente. El desempeño de un puesto administrativo de Juliana en una de las dos escuelas en las que labora pudo haber influido en que ellas emplearan números negativos con relativa facilidad para denotar transformaciones negativas, además de que también Rosita los usó desde la entrevista inicial en problemas en los que había pérdidas o descuentos.

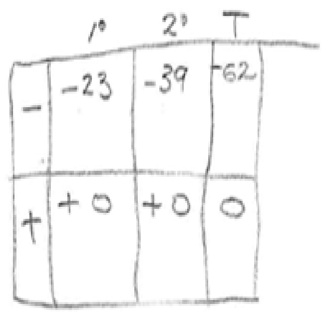


Figura 14

Cuando se discutió grupalmente sobre el empleo de números negativos para señalar en las comunicaciones las canicas que perdió Sebastián, comenzaron a surgir algunas ideas sobre ellos. Inicialmente, Susana manifestó desconcierto, pues le pareció que si se podía poner un -23 debía entonces escribirse el positivo como +23. Aurora también opinó al respecto y dijo en varios momentos de la discusión grupal que:

> *Desde que veo esto* (el mensaje elaborado por Juliana y Rosita, Fig. 14) *son números negativos. Pero un número negativo no necesariamente es pérdida. Un número negativo es algo que no existe. En el problema no te dice que sean números negativos. Para mí una realidad son positivos (…) no es lo mismo pérdida que negativos (…)*
>
> *(…) pero porqué están manejando números negativos... los números negativos no existen... tienes esta taza* (toma su taza de café y la coloca frente a Fabiola) *menos esta taza... no existe la taza.*
>
> *Son pedazos de canicas* (lo que representan los números negativos).

A ella los recursos de las caritas felices y “palomitas” para representar el problema #1 le parecían *“algo bueno, algo positivo”*. Fabiola no tuvo las dificultades que su compañera al interpretar ese mensaje, dijo que *“(…) la resta* (el signo menos) *indica que perdió y la suma* (el signo más) *ganancia (…)”* pero cabe aclarar que para Fabiola en este momento los signos (+) y (-) están relacionados con las operaciones de suma y de resta y no con números con signo.

Para comunicar la elección del problema #3 [+23] + (+39) = (+62) Aurora y Fabiola volvieron a utilizar un recurso figurativo para señalar ganancia, esta vez dibujaron a Sebastián feliz y con una nube (similar a las que se usan en los dibujos animados para cuando el personaje está pensando algo) y en ella un número 1º por ser el ganador, acompañado por serpentinas y espantasuegras denotando fiesta o alegría (Fig. 15). Cuando la pareja receptora intentó interpretar el mensaje, la primera idea fue que esos dibujos en la nube significaban maldiciones y que por tanto se trataba del problema #4 [-23] + (-39) = (-62) pero circunstancialmente Susana había oído que las supuestas maldiciones eran serpentinas para simbolizar que Sebastián estaba contento, así que su compañera corrigió y lo consideraron como un elemento que señalaba una cualidad positiva.

Figura 15

Susana intentó escribir signos de "más" (+) al lado de las cantidades positivas de la representación que elaboraron para el problema #3, pero Nelson la hizo cambiar de parecer y le sugirió emplear "palomitas". La resistencia de él a usar signos para denotar la cualidad de las cantidades persistió hasta ya bien adelantada la ingeniería, pero no así para Susana (su pareja) que pese a la opinión en contra de Nelson, insistió en incorporarlos.

Para la sesión 2, se tomó la decisión de añadir una regla para la elaboración de las comunicaciones. El empleo de recursos figurativos estaba logrando evadir el uso de signos para denotar la cualidad de los datos numéricos, así que a partir de ese momento se añadió a la consigna la restricción de que no se podía dibujar a Sebastián.

Sin poder usar las expresiones faciales del personaje para hacer saber si el problema era de ganancia o pérdida, Aurora y Fabiola se valieron del "tache" para lo negativo. Las representaciones de los problemas #5 (+23) + [+39] = (+62) y #6 (-23) + [-39] = (-62) de SEBASTIÁN son iguales salvo por el conjunto tachado de 62 canicas que añaden al último de ellos (Fig. 16 y 17).

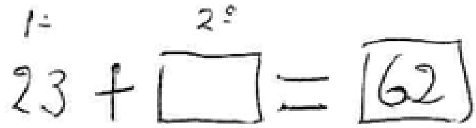


Figura 16

La representación del problema #5 pudieron elaborarla rápido y sin muchas dificultades, pero para la del #6 inicialmente Fabiola escribió las dos expresiones siguientes:

$$\overset{1^{o}}{\boxed{23}} + \overset{2^{o}}{\boxed{}} = \boxed{62}$$

$$\boxed{62} - \boxed{} = \boxed{23}$$

Aurora le señaló que la primera expresión la remitía a una suma y que la segunda le indicaba pérdida (en el sentido escolar de la resta). Por su parte, Fabiola no estaba muy convencida de la posición del 23 a la derecha del signo “igual” porque alude en expresiones aritméticas al resultado, como que esas canicas “le quedaron”, así que el mensaje que finalmente enviaron fue el de la Figura 17 y resolvieron el problema de “la pérdida” agregando el dibujo del total de canicas tachado para representar que Sebastián ya no las tenía.

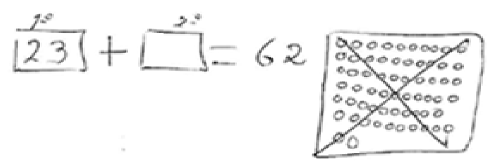


Figura 17

Nelson y Susana utilizaron “taches” a la izquierda o arriba de cada número como una alternativa al uso de números negativos para el problema #4 (Fig. 18) y una ecuación que se comentará más adelante, pero lo que interesa resaltar aquí es cómo el empleo de recursos a los que podían dárseles distintas interpretaciones, generaban confusión.

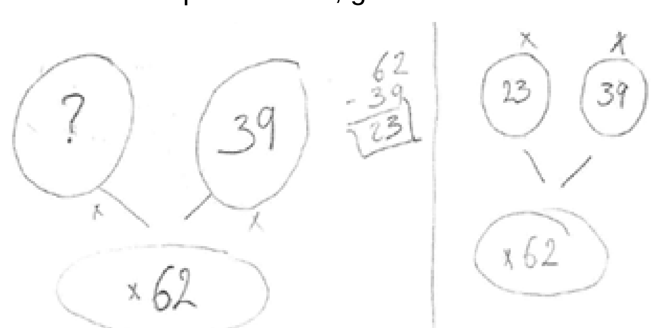


Figura 18

Susana: *le pusimos los tachecitos... son dos juegos y perdió y porque en total son juegos y perdió y para ver el total de 62 hicimos la operación 62- 39 y aquí lo vimos y nos resultó* (señalando los dos dibujos)
Juliana: *no le entiendo la "x" ¿por qué la multiplicación?*
Nelson: *los signos no cuentan como multiplicación, son taches*
Juliana: *para mí es "por" 62 "por" 39...*
Rosita: *los tachecitos los interpretamos como multiplicación*
Adriana: *multiplicando*
Rosita: *yo entiendo que por la información del problema es pérdida*
Juliana: *la misma "x" para tener un valor tendría que tener una "y"*
Conductora: *para ellos es pérdida*
Fabiola: *para mí es tache, yo no me meto con que si son números negativos, menos "x", o menos "y" "xy"... palomita bien, tache mal*
Susana: *íbamos a poner signos...*
Nelson: *no, pero no van...*

Para el problema #6 Susana se aventuró a efectuar una ecuación en la que sí empleó números con signo, a pesar de los señalamientos de Nelson. Rosita y Juliana para ese mismo problema hicieron otra tabla con las letras JP (Juegos Perdidos) escritas arriba, columnas para los jugadores (Sebastián y otros dos) y filas para el primer y segundo juego y para el total. No hay signos, pero parece que ellas buscaban otros medios para representar las situaciones planteadas en los problemas[69] y no necesariamente porque trataran de evadir su uso, como sucedía en las otras dos parejas. Cuando grupalmente volvió a discutirse sobre los problemas de pérdida de canicas se dijo:

Conductora: *Ahora vamos a ver otro ejercicio, tenemos un problema con el signo negativo ¿es resta, pérdida?*
Juliana: *sabemos que es pérdida y lo ponemos como negativo*
Aurora: *bueno, en los libros de primaria no hay negativos*
Juliana: *pero nosotros sí los tenemos que saber*
Aurora: *pero yo no he visto un libro de primaria que me indique que una pérdida al principio se ponga con un menos, como un –2. No me queda claro, para mí eso es un número negativo*
Juliana: *pero los manejamos en la recta numérica*
Aurora: *pero ya es negativo*
Juliana: *pero puedes representar una pérdida*
Aurora: *pero no puedo poner pérdida, pérdida*
Juliana: *sí, en el termómetro puede bajar la temperatura -2 y si luego baja -5 tengo que poner -7, no estoy registrando el calor sino el frío. Si digo de dinero pues no existe el dinero negativo, no hay billetes de -10 pero en la temperatura sí, en cosas prácticas, como si tengo una canica*
Aurora: *pero tienes una al menos, o sea ¿sí es válido?*

[69] En sus discusiones al elegir los problemas y elaborar las representaciones, comentaron distintas posibilidades e intentaron el "cuadrante" o plano cartesiano y tablas de frecuencias, pero estas producciones no las entregaron a la pareja receptora.

Ideas no muy claras acerca de lo que es un número con signo y lo que es una transformación, en este caso negativa, estuvieron manifestándose durante las sesiones y generaban confusión porque no siempre se interpretaba lo mismo. Retomando parte de lo que se dijo al hablar de las representaciones externas y su relación con el representado, en este punto se verifica que ninguna manifestación externa es obvia para todos los sujetos, que refleja sólo parte de lo que intenta representar y que debe ser consensuada para crear un plano de conocimientos comunes con los otros (Duval, 1999). Por otro lado, Aurora actuaba en apego a "la primaria", centrándose en esquemas tipo "número perdido" y justificando su desconocimiento de los negativos porque no competen a dicho nivel educativo, sin embargo, Juliana le hizo ver que ellos, en calidad de adultos y/o de maestros, debían saberlo.

Una vez que representaron los seis problemas de SEBASTIÁN, se introdujo el esquema de Vergnaud como un recurso que podía mostrar gráficamente las relaciones que se establecen entre los datos de los problemas. La idea era que el esquema ayudaría a los maestros a organizar la información numérica, pero esto conllevó otro elemento. En los esquemas aparecían números con signo y su presentación en un material impreso proporcionado por la conductora del taller, les otorgó un estatus de validez con el que aún no contaban. Sin embargo, se consideró que no violentaba abiertamente los saberes de los maestros porque los signos ya habían aparecido en sus producciones anteriores.

La disposición gráfica de los esquemas fue retomada en posteriores producciones por dos de las parejas, y la aparición de los "cuadritos" de los esquemas dio pie a la discusión sobre los estados (inicial, intermedio y final) planteándola como la reflexión de qué tipo de datos podrían ir ahí, aunque sin profundizar demasiado en ello en ese momento.

Los problemas de Vanesa

Aurora y Fabiola en sus producciones para los problemas de VANESA siguieron asidas a un esquema de "número perdido" que les permitía evadir el uso de signos en las transformaciones (sólo aparecía el del operador). Las otras dos parejas realizaron producciones que evocaban al esquema de Vergnaud y en los que prácticamente todas las transformaciones tenían signo. Para Aurora y en menor medida para otros de los maestros, el uso del signo seguía siendo confuso en ciertas situaciones, como Seegler (1998) afirma, todo material gráfico que se usa en el aula no debe pensarse como un artefacto que habla por sí mismo sino como un objeto cultural, y quien lo mire necesita poseer alguna idea de lo que de él puede obtener para lograr encontrarle sentido.

Los problemas de VANESA estaban enmarcados en contextos comerciales en los que la cualidad de las transformaciones se señalaba por medio de deudas, pagos, abonos, etc., y en algún momento se discutió sobre las confusiones que el propio contexto podría generar, por ejemplo, si un abono era positivo (porque se efectúa un pago para disminuir el monto de un adeudo) o negativo (porque Vanesa se desprendía del dinero y por consiguiente tenía menos). Sobre el ejercicio que consistió en llenar esquemas en blanco con los datos de los problemas #5 al #8 de VANESA, Fabiola dijo refiriéndose al último ["Vanesa ayer pidió prestados $500, hoy pagó algo de ese préstamo pero todavía debe $368. ¿Cuánto dinero pagó hoy?"]:

> *Yo puse primero -500 y abajo -368 pero tuve una duda, si pidió prestado es dinero que tiene, pero luego pensé que si lo pidió es una deuda*

Cuando la conductora la preguntó a Susana por qué había decidido ponerle signo negativo a una de las transformaciones dijo:

> *Nos equivocamos, nosotros al principio dijimos que era una deuda, pero ya lo pagó, entonces ya no tiene deudas y no puede ser negativo*

Algo similar ocurrió con la temporalidad, como se comentará posteriormente.

Al recibir el mensaje elaborado por Rosita y Juliana[70] en el que se incluía la representación de dos problemas, el #3 ["Vanesa abona $132 de una grabadora que vale $500. ¿Cuánto dinero le falta a Vanesa para que le den la grabadora?"] y el #4 ["La cuenta del supermercado es de $500, Vanesa sólo lleva $132. ¿Cuánto dinero le faltaría para poder llevarse todo lo que puso en el carrito?"], Fabiola manifestó sus dudas respecto a la cualidad que debería tener una "cuenta" o adeudo. Sobre la siguiente representación (Fig. 19) le comentó a su compañera:

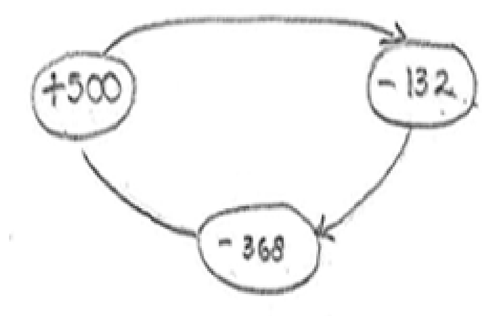


Figura 19

Fabiola: *yo dije que éste es el dos* (se refiere al problema #4), *la cuenta es de 500 y lleva 132 dado a cuenta, lo que ya abonó es +132, lo que vale -500 y lo que falta por pagar -368*

Aurora: *¿pero por qué -500?*

[70] En esa sesión Rosita sugirió que en vez de elegir un problema de cada hoja y luego representar el otro, se pusieran las representaciones de ambos y que la pareja receptora "adivinara" a cuál problema correspondía cada una. La conductora aceptó la sugerencia.

Fabiola: *no, es al revés* (ahora se refiere al #3), *la grabadora cuesta +500, lo que ya dio -132, lo que falta por pagar -368 y abona +132*
Aurora: *pero, ¿por qué números negativos?*

La siguiente tarea consistió en correlacionar los cuatro primeros problemas de VANESA con los esquemas correspondientes, pero como se recordará, en esa ocasión se incluyeron además de los esquemas correctos, dos más. Aurora fue la única que tuvo dificultades al establecer la relación y sus dudas se comentaron grupalmente. En esa discusión fue posible comenzar a señalar la diferencia entre un número con signo y una transformación (en este caso, la negativa).

Conductora: *¿les quieres contar Aurora, por qué te confundiste?*
Aurora: *por los signos, me cuesta trabajo aceptarlos*
(…)
Conductora: *¿qué te permiten hacer los negativos?*
Aurora: *pues saber lo que debo y lo que tengo, por ejemplo*
Conductora: *en los de Sebastián* (los problemas) *¿qué pasaba?*
Aurora: *lo que ganó y lo que perdió*
Conductora: *para ti* (se dirige a Juliana) *¿qué representan los negativos?*
Juliana: *lo que no tengo, las deudas, pérdidas*
Conductora: *sí, pero en otros contextos como la temperatura*
Juliana: *sí, es la disminución del calor*
Conductora: *no, también pueden ser una medida*
Juliana: *pero disminuye*
Conductora: *no, por ejemplo, el -2 es sólo -2*
Juliana: *pero bajó el calor, si tomo el negativo en una deuda es que debo, hay una disminución*
(…)
Conductora: *¿de dónde sale el -5 ó el -3 del termómetro? Porque se decide que en el punto de congelación del agua se marca como 0°, pero hay temperaturas más bajas que eso, baja a -1, -2, pero es distinto decir que tengo 20° de temperatura a decir que descendió la temperatura 5°, en lugar de estar en 20º está en 15º, pero no es -5°. Son dos -5, uno es una acción, que baja, y en el otro es la medida de la temperatura, "está a -5°"*
Susana: *si digo 10 bajo cero...*
Conductora: *es 10 en los negativos*
Juliana: *¿cuál es la diferencia?*
Conductora: *que uno es una transformación y el otro una medida. Si hay 40° y digo que subió 10° o bajó 10°, en la subida digo hay +10° en la bajada digo -10°*
(…)
Juliana: *también es una transformación, la medida, están sucediendo las dos al mismo tiempo, sentí que no explicó nada*[71]
Conductora: *¿sientes que hay una diferencia entre bajó 10° a decir "hay -10° bajo cero"?* (dirigiéndose a Rosita)
Rosita: *sí, no sabría cómo explicarlo pero es diferente decir "bajó 10 grados" a decir "¿a cómo estamos? A menos 10°", no hubo operación, una resta*

[71] A partir de ese punto la conductora optó por no seguir el diálogo con Juliana, pues esta última se esforzó por mostrarse en sistemática oposición a todo lo que discutía mientras el resto del grupo trataba de entender la diferencia entre lo dinámico y lo estático.

Poder establecer la diferencia entre un número con signo y una transformación resulta muy importante al trabajar con los problemas de la 4ª categoría. Se requiere reconocer que la información que en ellos se proporciona sólo se refiere a transformaciones (sobre medidas que se desconocen) y que la cualidad positiva o negativa de las mismas se puede definir a partir de las relaciones que en el enunciado se establecen.

Las parejas que no usaron ningún signo en las representaciones debieron hallar la manera de comunicar la cualidad, por ejemplo, mediante el empleo de los recursos figurativos antes señalados. Cuando dejaron de hacer dibujos y comenzaron a elaborar mensajes con números y las relaciones establecidas entre ellos, las dificultades estuvieron en cómo hacer notar la cualidad negativa, ya que la positiva implícitamente podía suponerse aún cuando las transformaciones no tuvieran signo. Alrededor de la sesión 5, incluso señalar la cualidad positiva con el signo "más" (+) se volvió importante para "poder decirlo bien", según palabras de Rosita.

Paulatinamente, Nelson comenzó a aceptar el uso de signos en sus producciones, pero siguió teniendo dificultades cuando T_1 era negativa, a excepción del trabajo con esquemas (los que se les proporcionaban impresos) en los que no los cuestionó.

b) Temporalidad y posición de la incógnita

Todo problema de la 4ª categoría implica una relación dinámica, existen cambios sobre estados (aunque se desconozcan) que los afectan, que los transforman. En estos problemas un elemento central para poder establecer la relación semántica y eventualmente resolverlos, es conseguir determinar la temporalidad, es decir, distinguir entre las transformaciones elementales (que pueden ser dos o más) cuál de ellas ocurrió primero, lo que no necesariamente corresponde al orden en el que aparecen en el enunciado. Por ejemplo:

> Problema 1
> *Durante el primer semestre del año, Jesús tuvo que gastar de sus ahorros $3000, pero en el segundo semestre ganó algo de dinero extra y pudo guardar $850. ¿Qué pasó con los ahorros de Jesús durante ese año?*
> (-3000) + (+850) = [-2150], es decir, Jesús tiene $2150 pesos menos que los que tenía ahorrados al inicio del año.
>
> Problema 2
> *Durante el primer semestre del año, Jesús hizo algunos movimientos en su cuenta de ahorros. En el segundo semestre ganó algo de dinero extra y pudo guardar $850. Sin embargo, al finalizar ese año notó que tenía $2150 menos en sus ahorros. ¿Qué pasó con sus ahorros durante el primer semestre de ese año?*
> [-3000] + (+850) = (-2150), es decir, Jesús gastó $3000 de sus ahorros durante el primer semestre del año.

Problema 3
Al término del año Jesús notó que tenía ahorrados $2150 menos de los que tenía al inicio de ese año. Recordó que en el primer semestre tuvo que gastar de sus ahorros $3000, ¿qué sucedió con los ahorros de Jesús durante el segundo semestre?
(-3000) + [+850] = (-2150), es decir, Jesús ahorró $850 durante el segundo semestre.

En los tres problemas aparecen los mismos tres datos numéricos y con la misma cualidad, pero varía el lugar en el que se sitúa la incógnita y el orden en el que se presentan la información numérica en el enunciado. En los dos primeros la información se presenta en el orden en el que ocurren los acontecimientos (primero se menciona lo que ocurre en T_1, luego en T_2 y por último en T_C) a pesar de que la incógnita está en diferentes lugares (T_C en el 1 y T_1 en el 2), en cambio en el problema 3, la información no aparece en el orden temporal en el que sucedieron los hechos (primero está T_C, luego T_1 y al final T_2).

Parte de lo que el resolutor necesita para poder establecer la relación semántica que se plantea entre los datos de un problema, es distinguir la secuencia temporal en la que suceden los acontecimientos independientemente del orden en el que se presenten en el enunciado[72]. En este apartado se analizan las producciones gráficas de los maestros con el objeto de conocer si en ellas realizaron alguna marca para distinguir la temporalidad y en caso afirmativo, cuál o cuáles de las tres transformaciones representaron y mediante qué recurso. Interesa también hacer notar si se señala la posición de la incógnita y en qué casos los maestros incluyeron la solución del problema[73].

A. Entrevista inicial

Una de las primeras cosas que salieron a la luz al estudiar las producciones que los maestros realizaron para los problemas de la entrevista inicial, es que la posibilidad de señalar en dónde está ubicada la pregunta supone, al igual que lo que ocurre con la cualidad, haber establecido la relación semántica, aunque ello no lleve automáticamente a la correcta resolución del problema. Los maestros utilizaron dos recursos para señalar la posición de la incógnita en los problemas de la entrevista inicial: el signo de interrogación (?) y dejar un espacio en blanco en un esquema (que a veces llenaron tras efectuar una operación y encontrar un

[72] Un error frecuente cuando no se ha podido establecer correctamente la relación semántica es el de realizar operaciones entre los números del problema en el orden en el que se presentan, lo cual puede resultar correcto en casos como *Tania está de suerte hoy, jugó dos apuestas, en la primera ganó $8 y en la segunda $3. ¿Cuánto ganó en total?*, pero incorrecto en *Tania está de suerte hoy, jugó dos apuestas, en la primera ganó $8 y en total de las dos ganó $11. ¿Qué pasó en la segunda?*

[73] Como se dijo, resolver los problemas no era parte de la consigna, pero ante un problema escolar, alumnos y maestros tienden a resolverlo debido a un contrato didáctico bien aprendido y reforzado durante años de escolaridad. Además, pensar en la resolución puede ayudar a entenderlo.

resultado numérico) o en una resta (en la que se desconoce el sustraendo y que, por ejemplo Rosita, encontraba al sumar por complemento).

Para el problema ORO ["La reserva de oro de un banco bajó 642 lingotes en el transcurso del año 1973. Durante el primer semestre del mismo año había bajado 1031 lingotes. ¿Qué pasó en el transcurso del segundo semestre?"] Rosita señaló las dos transformaciones elementales y la compuesta (Fig. 20).

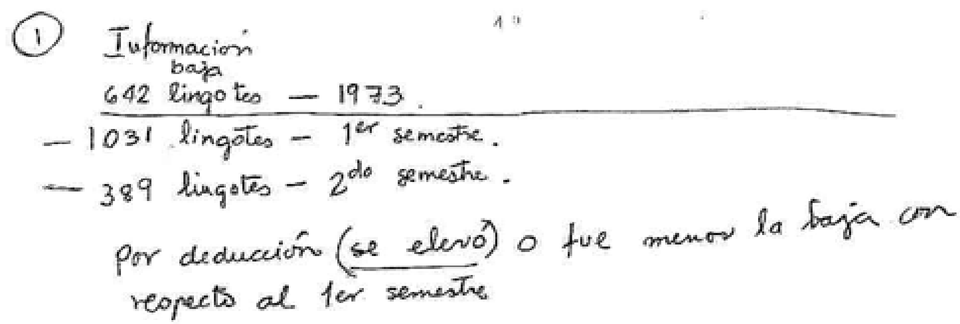


Figura 20

En el problema de GUILLERMO ["A Guillermo le gusta hacer apuestas. En la primera ganó \$260 y luego volvió a apostar. Haciendo cuentas de las dos apuestas vio que en total había perdido \$85. ¿Qué pasó en la segunda apuesta?"] Aurora (Fig. 21) y Rosita (Fig. 22) señalaron T_1 y T_2 mediante la escritura de lo que ganó en la 1ª apuesta además de anotar abajo "2ª" con un signo de interrogación para señalar que ahí se encontraba la incógnita o dejando un espacio en blanco.

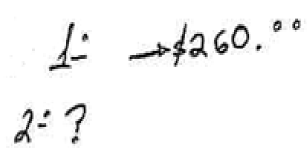


Figura 21

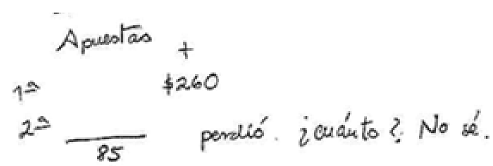


Figura 22

Para el problema de PEDRO Aurora marcó T_1 y T_2 (Fig. 23), Susana (Fig. 24) y Juliana añadieron T_C (Fig. 25).

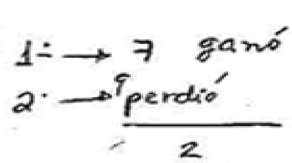


Figura 23

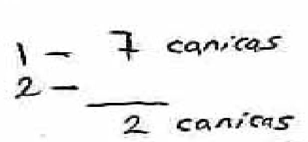


Figura 24

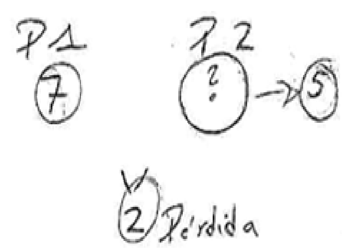


Figura 25

En el problema de NACIMIENTOS sólo Juliana realizó una representación en la que se señaló la temporalidad mediante una línea de tiempo que además le permitió ubicar la posición de la incógnita y operar para encontrar el resultado (Fig. 6 que ya se comentó). En cambio, para el problema de LULÚ [“Lulú pidió 2 cajas de aguacates para vender en su tienda. Cuando las abrió y revisó el contenido notó que en la primera había sólo 23 aguacates en buen estado. Al terminar de revisar las dos cajas contó los aguacates que estaban en buen estado y sumó 81. ¿En qué condiciones estaban los aguacates de la segunda caja?”] cuatro maestros hicieron esquemas en los que marcaron las dos transformaciones elementales y también la compuesta. Juliana la señala con un esquema que evoca la descomposición de un conjunto en dos subconjuntos (Fig. 26); Aurora escribió un número 2 a la izquierda de un cuadrito (las dos cajas de aguacates) del que se desprenden dos flechas, una que lleva a un 23 (los aguacates en buen estado de la primera caja) y una segunda hacia un signo de interrogación (la posición de la incógnita) (Fig. 27).

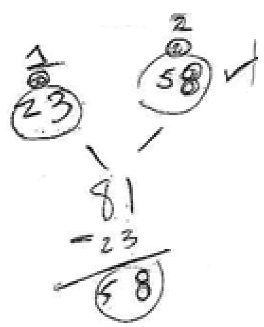


Figura 26

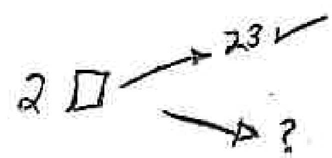


Figura 27

Rosita y Susana realizaron lo que podría describirse como una suma “con agujero” en disposición vertical. Escribieron un 1º (primer sumando) y 2º (segundo sumando) con la información de cuántos aguacates en buen estado había en cada caja y abajo (la suma) anotaron T_C. En T_2 se encontraba la incógnita y ambas dejaron un espacio en blanco en el que después escribieron la respuesta tras efectuar una operación (Fig. 28 y 29, respectivamente).

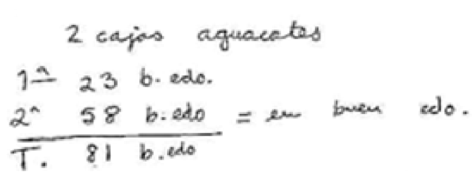


Figura 28

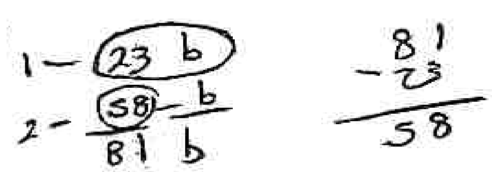


Figura 29

Una modificación a la estructura semántica del problema que algunos maestros realizaron para los problemas de PEDRO y GUILLERMO tiene que ver con un cambio que suelen realizar los resolutores en el orden temporal en el que la información aparece en el enunciado, datos que reporta también Vergnaud (1982) al trabajar con alumnos de 12 años. En los problemas mencionados, cuya estructura es $(+T_1) + [-T_2] = (-T_C)$ (en donde $|T_2| > |T_1|$), se encontró una modificación con dos variantes. La primera consiste en cambiar de sitio a T_C dejándola en el lugar de T_2 (ya que $|T_C| < |T_1|$) y la pregunta del problema (¿qué ocurrió en T_2?) fue respondida con el dato numérico correspondiente a T_C. Por ejemplo, Susana en el problema de GUILLERMO [“A Guillermo le gusta hacer apuestas. En la primera ganó $260 y luego volvió a apostar. Haciendo cuentas de las dos apuestas vio que en total había perdido $85. ¿Qué pasó en la segunda apuesta?”] dijo:

Susana:	(lee como para explicar o explicarse) *primero ganó 260, luego volvió a apostar, haciendo cuentas de las dos apuestas... es que dice que en la primera apostó y ganó 260 pesos y entre la segunda y la primera había perdido $85, entonces si en la primera ganó 260 pues en la segunda perdió 85, aunque habría que saber cuánto tenía en total*[74]
Entrevistadora:	*tú me dices que en la segunda…*
Susana:	*¿qué pasó en la segunda apuesta? Pues perdió*
Entrevistadora:	*¿podrías saber cuánto?*
Susana:	*85 pesos*

Y para el de PEDRO [“Pedro jugó dos partidos de canicas. Durante el primero ganó 7. Después jugó un segundo partido. Haciendo cuentas de los dos partidos notó que en total había perdido 2 canicas. ¿Qué pasó en el segundo partido?”] dijo *“(…) ¿qué pasó en el segundo partido? Pues perdió, perdió dos canicas”.*

La segunda variante al efectuar esta modificación ocurrió cuando además de cambiar a T_C al lugar de T_2 efectuaron una resta de $T_1 - T_C$ para encontrar un supuesto Estado final (explicado como “con cuánto (dinero o canicas) se quedó”. Por ejemplo, para el problema de PEDRO Nelson dijo:

Nelson:	*le quedan 5 canicas*
Entrevistadora:	*¿por qué le quedan 5?*
Nelson:	*porque... primero tiene 7, pero hay que ver primero cuántas tenía antes*[75]
Entrevistadora:	*¿cuántas tenía antes?*
Nelson:	*porque cuando ganó eran 7, pero ya en el segundo partido dice que había perdido dos canicas, ¿qué pasó en el segundo partido? Pues perdió las dos canicas*
Entrevistadora:	*en el segundo perdió dos canicas*
Nelson:	*le quedan cinco*

[74] Este comentario tiene que ver con la exigencia de un dato que funja como una medida, en este caso la inicial. Sobre ello, se hizo un análisis en el apartado de Dato faltante en este mismo capítulo.
[75] Ver la nota anterior.

Entrevistadora:	*cinco*
Nelson:	*pues es la resta ¿no?*
Entrevistadora:	*y qué pasa con esta parte que dice "en total había perdido dos canicas" o sea, después de jugar dos veces había perdido dos canicas*
Nelson:	*pues por eso, después de un segundo partido, haciendo cuentas de los dos partidos notó que había perdido dos canicas, o sea, ya termina el partido y perdí dos canicas nada más de las 7 que tenía ¿no? Ya nada más me quedan 5*
Entrevistadora:	*entonces tu respuesta a la pregunta ¿qué pasó en el segundo partido?*
Nelson:	*pues perdió dos*

También para el problema de PEDRO, Juliana señaló:

Entrevistadora:	*a ver, entonces en el segundo partido qué fue lo que pasó*
Juliana:	*pues que perdió dos, eso sería*
Entrevistadora:	*y al final ¿cómo quedó?* (se refiere textualmente a T_C con la intención de hacerle notar a Juliana que era el mismo dato que ella estaba señalando como T_2)
Juliana:	*se quedó con 5*

Mientras que Rosita comentó:

Rosita:	*(…) ¿qué pasó en el segundo partido? Pues perdió dos, entonces tendría 5*
Entrevistadora:	*a ver, en el primero ganó 7 ¿no?*
Rosita:	*sí, y en el segundo... perdió porque dice que de los dos partidos en total había perdido 2 canicas, entonces perdió 2*
Entrevistadora:	*¿eso fue lo que pasó en el segundo, perdió dos?*
Rosita:	*sí*
Entrevistadora:	*¿por qué hace rato dijiste que 5?*
Rosita:	*no, que posiblemente tuviera 5, le hayan quedado 5*

El mismo cambio, pero para el problema de GUILLERMO:

Nelson:	*si en la primera ganó 200 de las dos apuestas, pues lógico que en la segunda perdió nada más 85*
Entrevistadora:	*a ver ¿cómo?*
Nelson:	*sí, si en la primera gana 260 y luego en la segunda, son dos apuestas, en la segunda pierde 85, pues ¿qué pasó en la segunda? Pues que perdió 85*
Entrevistadora:	*a ver, en la primera ganó 260, luego volvió a apostar, al final de las dos apuestas había perdido 85, entonces ¿qué pasó en la segunda? Porque en la primera ya sabes que ganó 260*
Nelson:	*en la segunda, pues ya al final no más perdió 85 pues se supone que es una resta*
Entrevistadora:	*perdió 85*
Nelson:	*pues sí, aquí mismo dice, bueno... perdió 85 pesos entre las dos*
Entrevistadora:	*entre las dos perdió 85*
Nelson:	*de 260 perdió 85 pesos, pues qué pasó en la segunda, perdió 85*
Entrevistadora:	*pero a ver, tu respuesta sería en la segunda perdió 85*
Nelson:	*sí, pues si en la primera ganó 260*
Entrevistadora:	*¿y para qué harías entonces esa resta?*
Nelson:	*pues para saber cuánto tiene en total*
Entrevistadora:	*entonces lo que te saldría de esa resta ¿es lo que le quedó?*
Nelson:	*ajá*

Juliana, para ese mismo problema:

Entrevistadora:	*¿Por qué pusiste esto?* (se refiere a un signo de interrogación que escribió en “Partido 2”)
Juliana:	*porque hay que saber un dato en el cual hay que saber si ganó más canicas o podría ser que perdió 5, no, 5 no, aquí tendría que conservar 5 y perdió 2*
Entrevistadora:	*¿perdió 2 al final o en el segundo partido?*
Juliana:	*en el segundo*
Entrevistadora:	*entonces estos 5...*
Juliana:	*se conservan*

La decisión de hacer esta modificación e incluir una operación probablemente obedeció a una sólida experiencia con los problemas escolares. Alumnos y maestros saben que ante un problema hay que efectuar algún cálculo entre los datos numéricos que aparecen en él, así que probablemente no los satisfizo poner como respuesta a la pregunta planteada uno de los datos que el problema mismo proporcionaba.

Cabe notar que Fabiola no señaló la temporalidad en ningún problema de la entrevista inicial (tampoco pudo resolver ninguno correctamente) y que para el problema DESCUENTOS ningún maestro realizó alguna representación en la que pueda considerarse que se marca dicho elemento, quizá debido a que en ese problema no resulta muy importante saber cuál de los descuentos ocurrió primero para obtener T_2.

B. Sesiones experimentales

Problemas de Sebastián

Entre los problemas #1 y #2 de SEBASTIÁN la temporalidad no era un elemento esencial para distinguir a uno del otro ya que en ambos la información numérica era la misma (variando el signo) para las dos elementales y la compuesta, en la que se encontraba la incógnita. El elemento que podía distinguir entre uno y otro era la cualidad de las transformaciones. Algo similar ocurre entre el #3 y #4 y el #5 y #6, pero los maestros sintieron la necesidad de señalar que la pregunta no estaba ubicada en T_C (que es el sitio convencional según las prácticas escolares) sino en T_1 y T_2 respectivamente, aunque estrictamente con el sólo señalamiento de la cualidad hubiera sido suficiente para distinguir entre el #3 y el #4 (pero no entre el #3 y el #1, por ejemplo). Las marcas gráficas (como el signo de interrogación y la equis) o los espacios en blanco dejados a propósito para señalar dónde estaba la pregunta o el dato que había que averiguar, se hicieron necesarias para los maestros hasta que la incógnita estuvo en cualquiera de las elementales, a diferencia de lo que ocurrió con la representación de la cualidad de las transformaciones, que se hizo patente en sus producciones desde el inicio.

La temporalidad en las representaciones que elaboró cada pareja de maestros con objeto de comunicar un mensaje hacia otra pareja algunas veces se explicitó en una, dos o las tres transformaciones, mediante distintos recursos. En otras representaciones podía inferirse de acuerdo al acomodo de la información, y en otras no se señaló. Como se aclaró, el análisis se enfoca no sólo en si los maestros escribieron una, dos o las tres transformaciones (mediante un número o el dibujo de una colección), sino de manera especial en si gráficamente se explicita cuál es T_1, cuál T_2 y cuál T_C.

De las producciones que los maestros realizaron se distingue entre aquellas que:

1) Sólo señalan T_C sin temporalidad

2) Señalan las tres transformaciones pero no marcan la temporalidad en ninguna explícitamente

- *i) No distinguen la temporalidad entre T_1 y T_2 pero se infiere T_C*
- *ii) No distinguen la temporalidad en ninguna transformación*

3) Señalan las tres transformaciones pero sólo temporalidad de T_1 y de T_2

4) Señalan las tres transformaciones y la temporalidad en todas

- *i) Mediante algún símbolo (como 1º, 2º, etc.)*
- *ii) Mediante un esquema de Vergnaud o alguna modificación de este en el que T_1 se encuentra arriba a la izquierda, T_2 arriba a la derecha y T_C abajo, en medio de las dos primeras*

1) Sólo señalan T_C sin temporalidad

En este caso sólo se encontró una producción, la de Nelson y Susana para el problema #1 de SEBASTIÁN (Fig. 30) que se ya se comentó. No hay nada para T_1 ni T_2 y a manera de complemento casi ornamental, incluyeron en un marco las 62 canicas de T_C.

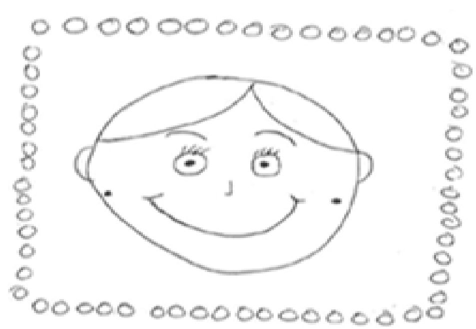


Figura 30

2) Señalan las tres transformaciones pero no marcan la temporalidad en ninguna explícitamente

- *i) No distinguen la temporalidad entre T_1 y T_2 pero se infiere T_C*

En este caso se encuentran las producciones de Aurora y Fabiola para los problemas #1 y #2 de SEBASTIÁN (Fig. 31 y 32, respectivamente), muy similares a otras pero con la diferencia de que no incluyeron ninguna marca para distinguir a una transformación de otra, sin embargo, mediante la distribución espacial puede inferirse T_C (son dos subconjuntos que convergen en un conjunto).

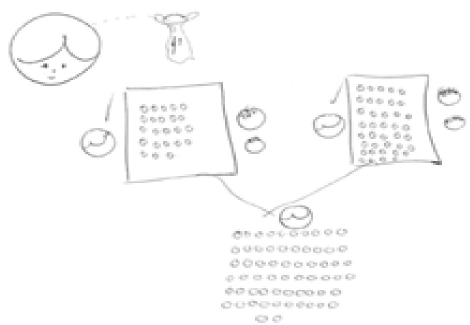


Figura 31

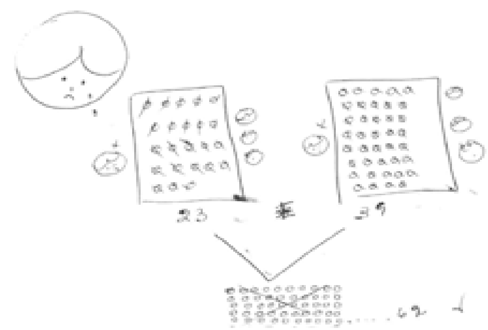


Figura 32

ii) No distinguen la temporalidad en ninguna transformación

Las producciones de Aurora y Fabiola sobre los cuatro primeros problemas de VANESA tuvieron estas características debido a que usaron como recurso de representación el esquema del "número perdido". En casos de concordancia la forma de acomodar los datos numéricos coincide con el orden que se establece en la relación semántica, pero no en los de discordancia (Descaves, 1999)[76], por ello, aunado a que no escribieron ninguna marca para señalar a una transformación de otra, todas las producciones que realizaron con estas características se clasifican en este apartado. Por ejemplo, la producción para los problemas de VANESA #1 ["Vanesa paga con un billete de $500 una cuenta de $132 en el supermercado. ¿Cuánto le regresan de cambio?"] y #2 ["Vanesa debe $132 y hoy va a cobrar $500 de su semana. Si Vanesa quisiera pagar su deuda ¿cuánto dinero le sobraría de lo de su semana?"] (Fig. 33 y 34):

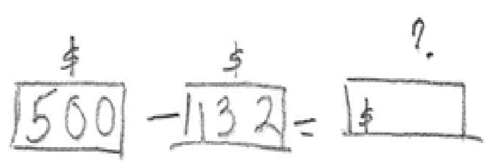


Figura 33

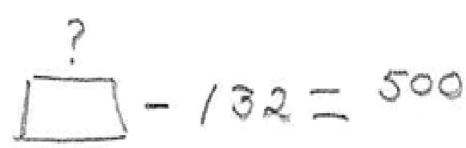


Figura 34

[76] Citado en: Peltier (2003).

La estructura del problema #1 es (+500) + (-132) = [+368], por lo tanto es un caso de concordancia y la representación podría pensarse que sigue el orden temporal, pero el problema #2 cuya estructura cambia el orden entre T_1 y T_2 dando lugar a (-132) + (+500) = [+368] y en la que se presenta una situación de discordancia, puede verse que la producción mantiene la idea de encontrar el dato que falta a través de una operación aritmética (que en este caso, además, es incorrecta) y no la de representar la relación semántica. Cuando Nelson y Susana (que eran la pareja receptora) trataron de interpretar cuál era el problema #3 ["Vanesa abona $132 de una grabadora que vale $500. ¿Cuánto dinero le falta a Vanesa para que le den la grabadora?"] (+132) + (-500) = [-368] y cuál el #4 ["La cuenta del supermercado es de $500, Vanesa sólo lleva $132. ¿Cuánto dinero le faltaría para poder llevarse todo lo que puso en el carrito?"] (-500) + (+132) = [-368] en el mensaje siguiente (Fig. 35) elaborado también por Aurora y Fabiola, comentaron:

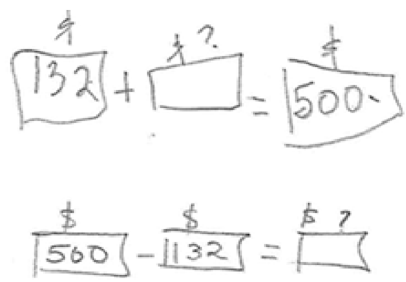


Figura 35

Susana: *en éste* (señala el primer esquema de la Fig. 35 y lee el problema #3) *abona $132, ¿cuánto le falta para terminar de pagar los 500?...éste* (señala la primera expresión) *es el problema 3*

Nelson: *¿y, el otro?* (el segundo esquema de la Fig. 35) *a ver, ¿cómo está esto?*

Susana: *la cuenta* (del supermercado) *es de 500, si le quitas los 132 que lleva* (Vanesa) *¡te da lo que le falta! ... es el problema 4*

(Susana borra y asigna a la primera expresión el problema #3 y a la segunda el problema #4, con el acuerdo de Nelson)

Susana: *se puede pensar en cualquier cosa* (se refiere a que en cada expresión es posible interpretar a los dos problemas en cuestión), *pero dejémoslo así*

3) Señalan las tres transformaciones pero sólo temporalidad de T_1 y de T_2

Aurora y Fabiola, en la misma idea de la representación de dos subconjuntos que se combinan para dar lugar a un conjunto, o de esquemas de "número perdido", elaboraron mensajes muy parecidos a los que habían hecho anteriormente pero en los que ahora incluyeron alguna marca (como un 1º y 2º) para distinguir entre T_1 y T_2. Por ejemplo, el #4 ["A Sebastián le gusta jugar a las canicas. Jugó un primer partido y cuando jugó el segundo perdió 39 canicas. Al finalizar los dos partidos se dio cuenta de que había perdido 62 canicas en total. ¿Qué pasó en el primer partido?”] y #5 [“Sebastián jugó dos partidos de canicas. En el primero ganó 23 y luego jugó el segundo. Al contar el total de las canicas de los dos partidos notó que tenía 62. ¿Qué pasó en el segundo partido?”] de SEBASTIÁN (Fig. 36 y 37):

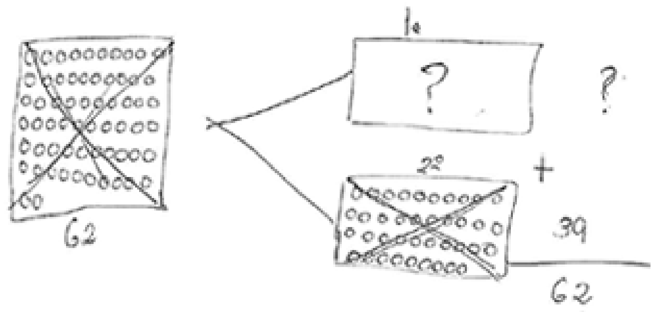


Figura 36

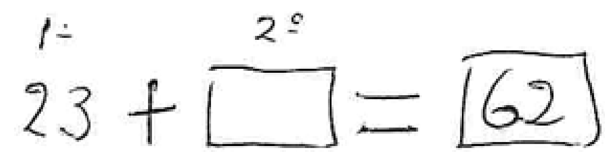


Figura 37

Resulta interesante notar cómo para el problema #4 (Fig. 36) invirtieron gráficamente el orden en el que habían venido haciendo las representaciones. Esta vez comenzaron por T_C probablemente porque el esquema del “número perdido” no les habría servido de acuerdo a los recursos de cálculo que poseían[77] aunque estaban conscientes de que empezaban por el “final”.

(Fabiola lee el problema y dibuja 39 canicas, luego las tacha)
Aurora: *mejor al revés, primero las 62 y luego las 39*
Fabiola: *es poner primero el resultado y luego el partido* (poner primero T_C y luego T_2)

Nelson y Susana realizaron una representación para el problema #3 de SEBASTIÁN (Fig. 38) en la que distinguen, en un primer momento, la posición de la incógnita marcada con un signo de interrogación en T_1, sin embargo, antes de entregar el mensaje a la pareja receptora decidieron incluir la solución al problema (las canicas que ganó en el primer partido). No borraron el signo de interrogación, sólo lo encerraron en un círculo. Este mensaje, aunque pudo ser correctamente interpretado como el de las transformaciones positivas (a diferencia del #4), generó comentarios por el tratamiento de la incógnita.

---

[77] Habrían tenido que escribir ☐ -39 = -62

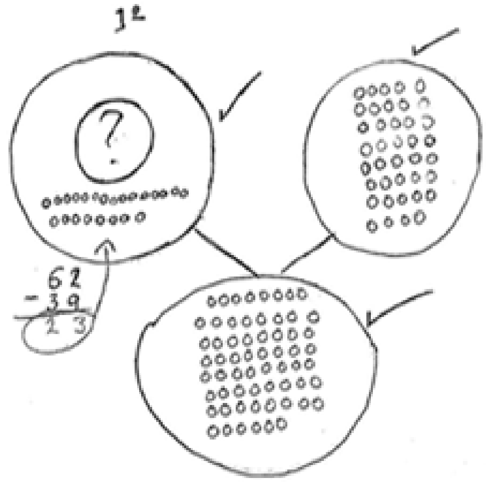


Figura 38

Fabiola: *pusieron un signo de interrogación, es como un faltante, pero ahí pusieron las canicas, entonces falta el dato o no*

Susana: *es que faltaba, pero ya lo encontramos y así quedó claro*

Conductora: *para ustedes*

(Susana explica que cuando obtuvieron el 23 mediante la operación encerraron en un círculo la interrogación y dibujaron las canicas en el resto del espacio del conjunto)

Fabiola: *aunque pongas la interrogación con un círculo pienso que es un dato que falta, pero si abajo lo pones, pues ya no hace falta*

Es en esta construcción de "conocimiento compartido" (Edwards y Mercer, 1994) en la que se ponen en juego las ideas y experiencias previas de los participantes, y por ello, escribir el resultado junto con el signo de interrogación, que para Fabiola era un error o al menos una redundancia, podía ser perfectamente justificado por Susana. En el curso de las sesiones nuevas formas de representación se fueron construyendo, por ejemplo, la incógnita se simbolizaba con un signo menos, una equis, un cuadrito vacío, entre otros, y conforme avanzó el trabajo en las sesiones comenzaron a darse acuerdos, explícitos algunos pero la mayoría implícitos como resultado de las discrepancias entre las parejas emisora y receptora al interpretar las producciones, y así se fue definiendo lo que para este grupo de maestros era "válido" al representar el dato desconocido.

4) Señalan las tres transformaciones y la temporalidad en todas

i) Mediante algún símbolo (como 1º, 2º, etc.)

Todas las producciones de Rosita y Juliana para los problemas de SEBASTIÁN se encuentran en este caso. Las efectuaron mediante una tabla que sirvió como contador o una de doble entrada y sólo en una ocasión en un esquema de “número perdido” (usando “1º” para T_1, “2º” para T_2 y “T” de Total para T_C).

Se incluyen en éste apartado producciones de Nelson y Susana en las que emplearon recursos algebraicos para representar los últimos tres problemas de SEBASTIÁN (aunque los resolvieron aritméticamente). A pesar de no señalar explícitamente cuál era T_1, T_2 o T_C, en el planteamiento algebraico conservaron el orden establecido en la relación semántica. Es interesante notar las variaciones que ellos hicieron en las representaciones de los últimos problemas de SEBASTIÁN: en la del #4 incluyeron, además de la expresión algebraica, dos esquemas; en la del #5 lo algebraico y un esquema de “número perdido”; y en la del #6 sólo el álgebra. Susana parecía sentirse cómoda elaborando el mensaje sólo con el álgebra, pero Nelson le decía *“las maestras no le van a entender”* y sugería cambiar la representación o al menos, incluir otra. Por ejemplo, cuando estaban elaborando el mensaje del problema #4 (Fig. 39):

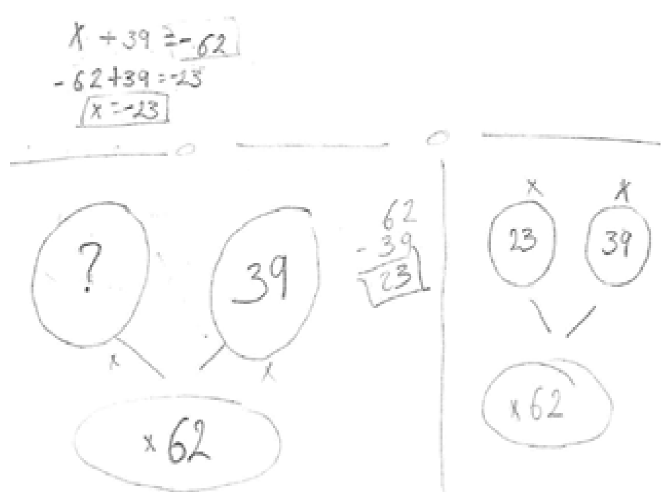


Figura 39

(Nelson va siguiendo las escrituras de Susana en el esquema del lado izquierdo)

Nelson: (en tono de protesta) *¿Por qué equis?, ¿no le puedes poner un signo de interrogación? Luego le ponemos un tachecito, ¡si quieres!, para decir que los perdió*

Como se comentó, Nelson no se sentía muy cómodo de que su pareja usara recursos algebraicos en sus comunicaciones, especialmente porque involucraban el empleo de signos negativos y de equis, que podían tener también la connotación de pérdida o multiplicación. Sin embargo, cada vez fue mostrando menos resistencia.

ii) *Mediante un esquema de Vergnaud o alguna modificación de este en el que T_1 se encuentra arriba a la izquierda, T_2 arriba a la derecha y T_C abajo, en medio de las dos primeras*

Una vez que se realizó la actividad de correlación esquema de Vergnaud con los problemas de SEBASTIÁN, las parejas de Nelson y Susana, y de Rosita y Juliana utilizaron una versión modificada de éste en todas sus siguientes producciones sobre los problemas de VANESA. En este tipo de esquemas no se señala explícitamente cuál es cada una de las transformaciones, pero su distribución gráfica mantiene algunos elementos que son comunes a otras representaciones[78]. Por su parte, Fabiola y Aurora se mantuvieron en el uso del esquema de "número perdido", recurso que no les permitió expresar la temporalidad ni la distinción entre transformaciones elementales y compuesta. Por ejemplo, para el problema #1 de VANESA ["Vanesa paga con un billete de $500 una cuenta de $132 en el supermercado. ¿Cuánto le regresan de cambio?"] Nelson y Susana hicieron (Fig. 40):

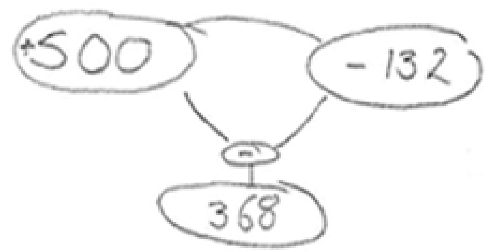


Figura 40

Cuando se discutieron grupalmente las representaciones de los primeros dos problemas de VANESA, se comentó a propósito del orden temporal (que era lo que permitía establecer una diferencia entre los dos problemas que se presentaban en cada hoja):

Juliana:	*aquí* (en el problema #2) *pone que ya se tiene la deuda, luego hay 500 y ahí es cuando se encuentra la diferencia entre los dos* (entre los problemas #1 y #2)
Conductora:	*lo que está representado es la deuda que ya estaba, va a tener $500 ¿en el primero qué pasa?*
Fabiola:	*ya tiene los 500*
Conductora:	*ya los tiene ¿y qué pasa?*
Juliana:	*compra algo*
Fabiola:	*en el 1 ya tiene los $500 y luego paga, en el segundo primero debe y luego tiene dinero*
Aurora:	*el segundo problema es muy mexicano*

[78] Por ejemplo, debido al orden en el que se escriben los alfabetos occidentales (de izquierda a derecha y de arriba abajo) lo que se coloca más arriba o más a la izquierda suele tener un orden jerárquico superior u ocurre temporalmente antes que el resto, y entre dos elementos colocados a la misma altura, el que está a la izquierda suele ser el primero. También es frecuente ver que en muchas representaciones escolares de operaciones aritméticas se utilizan líneas que convergen en un tercer elemento señalando la unión de los elementos anteriores.

Las representaciones de Nelson y Susana de los problemas #3 [“Vanesa abona $132 de una grabadora que vale $500. ¿Cuánto dinero le falta a Vanesa para que le den la grabadora?”] y #4 [“La cuenta del supermercado es de $500, Vanesa sólo lleva $132. ¿Cuánto dinero le faltaría para poder llevarse todo lo que puso en el carrito?”] señalan la diferencia en el orden temporal y utilizan signos. Los signos no molestaban tanto a Nelson cuando se usaban en los esquemas y el cálculo lo resolvía aritméticamente controlando la cualidad del resultado (Fig. 41).

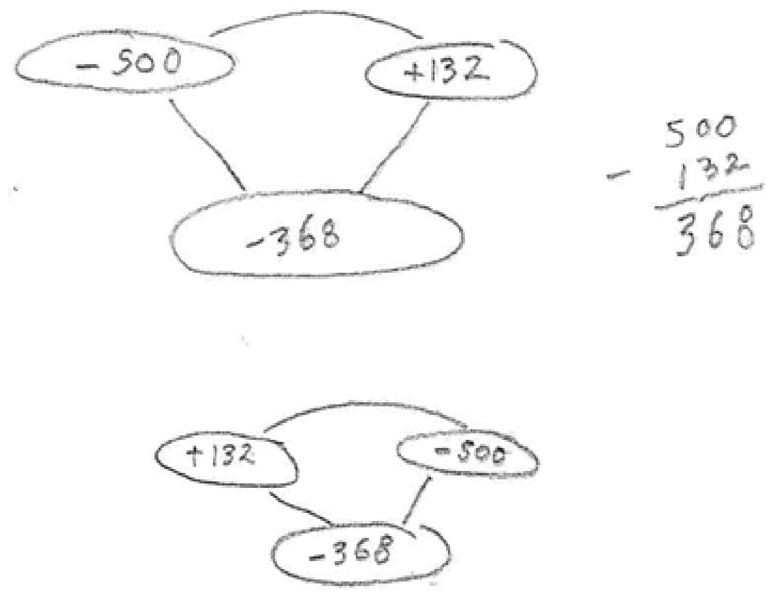


Figura 41

Al respecto comentaron:

Rosita: *ellos* (Nelson y Susana) *sí lo hicieron bien*
Conductora: *¿cuál es la diferencia entre el esquema de arriba y el de abajo?* (Fig. 41)
Aurora: *la temporalidad*
Fabiola: *el 132 representa en los dos, como la ganancia, lo que tiene*
Conductora: *¿por qué en el primer caso está el 132 en un lugar y en el de abajo en otro?*
Fabiola: *por lo que va diciendo el problema*

Redacción de problemas

La temporalidad siguió siendo el eje en las tareas y con ello, las dificultades del cálculo, que se estudiarán posteriormente. En la sesión 4 las tres parejas redactaron problemas a partir de dos esquemas que se denominaron el “azul” [“Vanesa hace un abono de una deuda de $500. Si todavía debe $368 ¿de cuánto fue el abono?”] y el “café” [“Vanesa paga con un billete de $500 la cuenta del supermercado. Si le devuelven $368 de cambio ¿de cuánto era la cuenta?”]. Tras el cambio de parejas, cuando Fabiola y Rosita redactaban un enunciado para el esquema "azul" y cuya estructura era [+132] + (-500) = (-368), comentaron:

Rosita: *aquí tiene que ser positivo* (T_1 del esquema azul que estaba en blanco porque es el lugar de la incógnita)
(Rosita anotó anota +132 en el primer óvalo)
Rosita: *tiene que ser algo de "más"... no, abonar no... no… sí, ella tiene que quedar con menos*
Fabiola: *tiene que quedar con deuda* (se refiere a -368 que está en T_C)
Rosita: *hay que dejar pendiente esto* (los +132 que escribieron en T_1)
Fabiola: *Vanesa...*
Rosita: *mejor vamos a empezar por el final* (se refiere a comenzar por T_C)
(Rosita empieza a escribir)
Fabiola: *no puedes decir "¿cuánto te falta por pagar?" porque aquí ya te lo está diciendo* (se refiere a que ya conocen T_C)
Rosita: *ah! Sí es cierto* (escribe "¿cuánto")
Fabiola: *si manejamos como 368... es lo que te falta pagar... Vanesa abonó 132 de una cuenta de 500 ¿cuánto le falta por pagar?*
Rosita: *no, porque...*
Fabiola: *si abonó 132 de una cuenta de 500... yo digo… abonó cierta cantidad de una deuda de 500* (escribe "Vanesa abonó 132" borra el 132, "cierta cantidad de una deuda de 500. Si le faltan por pagar 368 ¿cuánto abonó?") *¿está bien?*
Rosita: *sí*
Fabiola: *luego no me digas que no te explico bien, como Aurora*

Las distintas interpretaciones del orden temporal se manifestaron principalmente al llenar esquemas en blanco (sin ninguna información numérica). En la siguiente sesión se proporcionó a cada pareja un juego con las tres redacciones que ellos mismos habían elaborado para el esquema "azul" y en cada una un esquema en blanco para que lo llenaran. Cuando Nelson y Susana trabajaban en el problema redactado por Fabiola y Rosita (que se transcribió arriba y cuya versión final fue: "Vanesa abonó cierta cantidad a una deuda de $500. Si le falta por pagar $368 ¿cuánto dinero abonó?" habían escrito en el esquema [?] + (-500) = (-368), lo que era correcto en términos del esquema "azul" original, sin embargo, Susana pensaba que el -500 debía de ir en T_1 por un asunto de lógica en el contexto:

Susana: *la deuda… la deuda de 500 ya la tenía* (Vanesa), *¿cómo vas a abonar si no tienes deuda?, sería tonto*
Nelson: *a lo mejor Vanesa es tonta, tú no sabes* (se ríen)

Tras el análisis de las representaciones que los maestros hicieron en la entrevista y en las sesiones experimentales pudo verse que para resolver un problema correctamente no es necesario marcar la temporalidad explícitamente en las representaciones y que la operación misma puede fungir como una representación una vez que el sujeto ha logrado establecer correctamente la relación semántica entre los datos, pero que en los casos en los que no ha quedado claramente establecida dicha relación, una representación en la que se incluya la temporalidad (entre otros elementos) puede ser de ayuda.

Con los problemas de SEBASTIÁN las marcas para señalar la ubicación de la incógnita aparecieron hasta que ésta se encontró en alguna de las transformaciones elementales. En problemas de la entrevista tampoco fueron inusuales debido a que en todos la pregunta también se ubicaba en alguna de las elementales. Los recursos utilizados fueron varios: un signo de interrogación, una equis, un cuadrito en blanco o un espacio en blanco en la representación. Otro elemento detectado fue que en las primeras representaciones casi todos los problemas fueron resueltos[79], es decir, se efectuaba algún cálculo, la pregunta era contestada y dicho resultado se incluía en el mensaje, acorde a las prácticas escolares. Una vez que se abordaron los problemas de VANESA y con el antecedente de haber ya tenido contacto con el esquema de Vergnaud en el que aparecía en blanco (señalando la posición de la incógnita) uno de los tres óvalos destinados a escribir las transformaciones, los maestros recibieron como parte de un nuevo contrato didáctico el mensaje (en su mayoría implícito) de que puede haber problemas escolares cuya función sea otra que sólo resolverlo. A comentarios o preguntas específicas se revisó la consigna para que recordaran que no era obligatorio solucionar el problema sino representarlo, pero que si en aras de hacerlo más claro para la pareja receptora consideraban necesario incluir la respuesta, podían hacerlo. Por ello, en las producciones del tipo “número perdido” que realizaron Aurora y Fabiola a partir de la sesión 3, marcar explícitamente en dónde se ubicaba la incógnita se volvió más importante que resolverlo, aunque implicara un reacomodo de la información numérica. En los esquemas que evocaban al de Vergnaud elaborados por las otras dos parejas, la solución siempre se incluyó dentro del esquema, a veces acompañada de una operación aritmética.

c) Elementos contextuales

Hacer dibujos o escribir signos (no matemáticos) fueron elementos que se presentaron en las producciones de los maestros (principalmente en la primera sesión) y que no se tenían contemplados en el análisis a priori. Algunos de estos elementos fueron comentados anteriormente al abordar la representación de la cualidad de las transformaciones, pero hubo otros que no necesariamente intentaban expresar emociones (como una manera de evadir el uso de signos) sino que parecían destinados a embellecer la representación o a ofrecer elementos sobre el contexto del problema. Quizá la aparición de tales elementos tuvo que ver con una particular forma de entender la consigna, una “representación” pensada como un dibujo (porque no se dijo “hagan un esquema o una operación” o alguna otra cosa que sonara “más matemática”). Dibujar colecciones de canicas ganadas o perdidas en vez de una

[79] Como se recordará, la consigna en las sesiones era comunicar el problema elegido, no resolverlo.

solución simbólica y más económica como poner un número, pudo también haber tenido que ver con dicha idea.

Para comunicar la elección del problema #1 y #2 de SEBASTIÁN (Fig. 31 y 32) Aurora y Fabiola dibujaron, además de a Sebastián feliz con su trofeo, a otros niños que seguramente habrían jugado con el protagonista porque si no ¿con quién jugó Sebastián? Tuvo que haber al menos otro jugador, ya que de otra manera no podría explicarse que él ganó canicas. Elementos ornamentales pudieron encontrarse en representaciones como la de Nelson y Susana del problema #1 de SEBASTIÁN (Fig. 30), ya que no sólo dibujaron una carita feliz, sino que se esmeraron en hacerla "bonita", según sus propias palabras. En la que elaboraron para el problema #2 (Fig. 12) incluyeron una mano sosteniendo una canica, dibujo que a la pareja receptora le pareció un pie. Rosita y Juliana nunca hicieron dibujos de esta naturaleza, aunque bajo cierta mirada sus tablas podrían aludir a un elemento muy propio del contexto de los juegos en el que se lleva el conteo de lo que se gana y lo que se pierde.

A partir de la sesión 2 los elementos contextuales no volvieron a aparecer, salvo en tres de las representaciones de Aurora y Fabiola sobre problemas de VANESA, en las que, por tratarse de asuntos comerciales, añadieron un signo de pesos ($) arriba de cada cuadrito (ver, por ejemplo, la Figura 35).

d) Tipo de representación

Diversas manifestaciones externas pueden fungir como representantes de un mismo representado (Duval, 1999). La elección entre los distintos posibles representantes debe hacerse en función del propósito por el cual se elabora la representación. Cuando dicho propósito es la comunicación, como en el caso de las tareas que se llevaron a cabo durante las sesiones experimentales, la representación la elabora el emisor echando mano de sus propios recursos pero pensando en los que considera que posee el receptor, en lo que cree que le será significativo, en lo que podrá comprender. Ambos aspectos (recursos del emisor y percepción sobre lo que comprenderá el receptor) se ponen en juego al elaborar una representación y determinan el resultado final. En el caso de las tareas diseñadas para las sesiones experimentales era factible suponer que las posibilidades de comprensión del receptor serían cercanas a las de elaboración del emisor, pues se trataba de comunicaciones entre pares.

Analizando las formas gráficas que tomaron las producciones, se encontraron:

- Figurativas (la cara feliz de Nelson y Susana).
- Conjuntos que se componen de dos subconjuntos (los elaborados para la serie SEBASTIÁN por Aurora y Fabiola). Estos podían estar orientados horizontal o verticalmente, y primero encontrarse T_C o alguna de las elementales dependiendo de la posición de la in-

cógnita. En los conjuntos y subconjuntos podía dibujarse la colección de canicas, sólo poner el número o ambos.

- Tablas de datos relacionados y Tablas de doble entrada (los conteos de Rosita y Juliana).
- Esquema del “número perdido” (los elaborados por Aurora y Fabiola para la serie VANESA). Podían reflejar la temporalidad o ser reacomodados para poder operar aritméticamente.
- Combinaciones (por ejemplo de álgebra y “número perdido” o de este último y el dibujo de una colección).
- Operaciones aritméticas como representantes (como las que hizo Rosita en la entrevista inicial). No necesariamente tendrían que ser de concordancia.
- Esquemas de Vergnaud y sus modificaciones, en los que podía ubicarse a cada una de las transformaciones y era posible señalar la relación entre ellas. Las modificaciones consistieron en eliminar los rectángulos (que inicialmente no les eran útiles pues desconocían su función) y disponer los óvalos para las transformaciones ya sea en una forma “circular” o semejante a un “diamante”. Un rectángulo en la representación del problema #1 de VANESA (Fig. 42) elaborada por Juliana y Rosita apareció como alguna alusión a lo que alcanzaban a recordar de los esquemas de Vergnaud (ya no los tenían a la mano), y en él anotaron un signo de “más” (+) a manera de operador. Un óvalo extra con la misma función lo añadieron Nelson y Susana en sus representaciones de los problemas #1 y #2 de la misma serie.

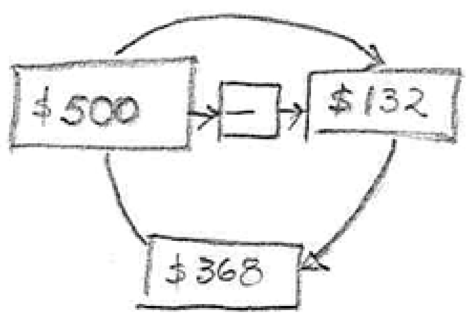


Figura 42

El orden de la lista no alude a un nivel creciente que pretenda señalar que una representación es más “correcta” que otra, pero ciertamente hubo algunas más eficaces en la comunicación de los mensajes.

Las reflexiones que se fueron haciendo en las sesiones sobre los distintos tipos de representaciones para los mismos problemas permitieron empezar a traer al discurso en el grupo algunas nociones, como los "momentos" o la temporalidad y las formas empleadas para comunicarla, como los conjuntos o los esquemas del "número perdido" y en qué situaciones unas u otras podían ser más eficaces o causar confusiones en la interpretación. Tras la tarea de la correlación de esquemas de Vergnaud con los problemas de SEBASTIÁN se comentaron no sólo las correspondencias que hizo cada pareja sino también los elementos que componían dicho esquema. Los maestros notaron que los datos numéricos de los problemas siempre estaban escritos en los tres óvalos del esquema, y que uno de ellos estaba en blanco. También vieron que había rectángulos en blanco y flechas de dirección o rayas que conectaban los elementos. Mientras trabajaban en ello, Aurora y Fabiola comentaron:

Aurora: *Estos cuadritos son el primer partido, el segundo... no entiendo...*
Fabiola: *estos 23...*
Aurora: *No... no entiendo... para mí faltan números o signos que me indiquen cosas*
(Escribieron en los espacios en blanco del esquema y quedó de la siguiente manera. La información impresa era +23 (T_1) y +39 (T_2)) (Fig. 43)

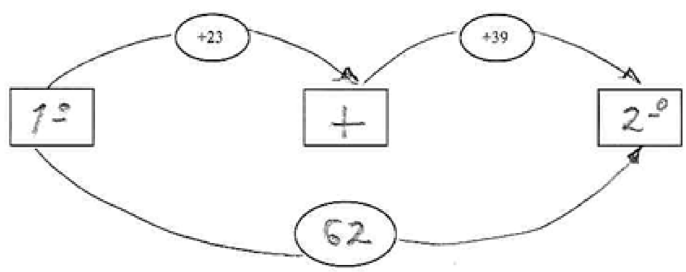


Figura 43

Después dejaron de intentar el llenado de los esquemas porque la situación se volvió complicada cuando la incógnita estaba en alguna de las elementales o cuando las transformaciones eran negativas[80]. Cuando la conductora preguntó grupalmente sobre la forma de efectuar la tarea de correlación y sus ideas acerca de los elementos que componían el esquema, hubo comentarios a manera de hipótesis como:

Rosita: *pensé que los ovalitos eran las operaciones y los cuadritos los momentos*
Juliana: *para mí el primer cuadrito era... las flechitas me indican el sentido del problema, al final la unión de esto* (T_1) *y esto* (T_2) *me lleva al final, sin embargo si hubiera una flecha de éste* (Estado intermedio) *a éste* (T_C) *me faltarían números, así que sólo tomo en cuenta los óvalos*
Conductora: *pero no hay esa flecha y hay cuadritos*

[80] A Aurora no le gustaba la idea de que T_1 fuera negativa porque necesitaba una cantidad previa para entonces sí efectuar una resta.

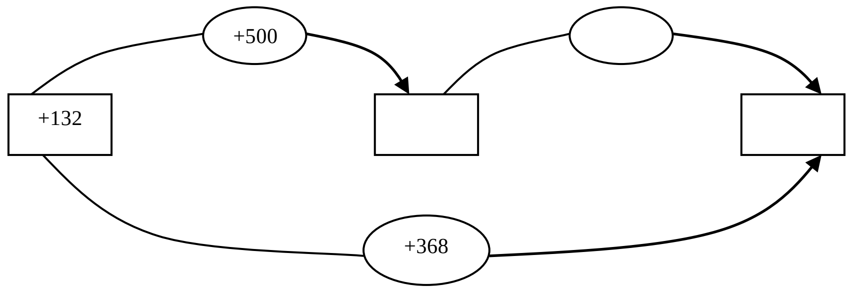
Fabiola: *podría pensar que en los cuadritos pondría los resultados, que algo va ahí que me está describiendo el problema. Nosotras* (ella y Aurora) *lo llenamos para poder decir cuál era*
Rosita: *¿puedo decir algo? Podría ser la transformación, los números que faltan ¿podrían ser la transformación?*
Conductora: *la transformación tenemos que saber si está en los óvalos o qué pasa en los cuadritos. ¿La pregunta está hecha sobre el total de canicas de Sebastián?*
Todos: *no*
Conductora: *¿sobre qué?*
Juliana: *los juegos*
Conductora: *algo que pasó en algún momento, el 1° y 2° juegos, el total de los dos. Pero no sabemos la cantidad de canicas de Sebastián, sólo que ganó o perdió tantas o cuántas en un juego o en otro*
Aurora: *por eso le quería poner números, debe haber algo que sumado* (Estado inicial) *me dé esto* (T_1)
Fabiola: *pero yo le dije que no sabemos esos números, no los podemos poner*

Era importante empezar a establecer las diferencias entre un estado y una transformación para avanzar en el reconocimiento de la relación semántica y en su representación gráfica, pero sin "enseñar" a usar el esquema de una manera que no les permitiera explorar sus posibilidades, ni tampoco presentándoselos sin orientar el trabajo con él. Con ese espíritu, la conductora profundizó en los espacios en blanco de los esquemas, particularmente sobre los rectángulos:

Conductora: *en el problema #1* (de Sebastián) *si yo quisiera rellenar los cuadritos ¿qué modificación tendría que hacerle al problema?*
Juliana: *¿para poner números en los cuadritos?*
Conductora: *sí*
Juliana: *pues agregar datos al problema*
Conductora: *¿cuáles?*
Juliana: *pues cuántas tendría al principio para saber cuántas tendría al final*
Conductora: *podría decir que Sebastián tenía 15 canicas antes de empezar a jugar, si yo pregunto por lo que pasó en los dos partidos ¿estoy utilizando el 15?*
Todos: *no*
Conductora: *¿qué tendría que preguntar?*
Susana: *por ejemplo, cuántas tendría al final de los dos juegos con las que ya tenía*

También comenzaron a hacerse diferenciaciones entre lo que es una representación de la relación semántica y la operación que permite resolverlo, especialmente en casos de discordancia. Por ejemplo, los mensajes de los problemas de VANESA elaborados por Aurora y Fabiola (mediante el esquema del "número perdido" que ya se comentaron), lograban acomodar los datos para poder operar aritméticamente sobre ellos sin que necesariamente se respetaran los signos de las transformaciones y sin representar la relación semántica.

Después de que los maestros redactaron problemas para el esquema “azul”, la conductora les solicitó a Juliana y a Aurora que escribieran otro enunciado pero añadiendo un dato numérico (+132) como Estado inicial. El esquema era:



La redacción final fue “Alberto inició una apuesta con $132 y ganó $500, si al finalizar el juego se quedó con $368 ¿qué sucedió?”. La última frase alude más a un Estado final (“se quedó”) que a T_C, sin embargo se presentó en la sesión 5 a las tres parejas junto con un esquema en blanco para que lo llenaran con los datos del problema. Susana y Nelson leyeron con atención el problema, luego ella anotó en el Estado inicial 132, 500 en T_1 y tras sumarlos coloca un 632 en el Estado intermedio. Nelson sugirió entonces que pusieran debajo de las líneas y flechas los operadores correspondientes y el signo de “igual” (=). No tenían claro en dónde colocar los 368 (en el Estado final o en T_C), pero a Nelson le pareció que “por la lógica de las flechitas” debía ser en T_C. Cuando llegaron a ese punto no pudieron avanzar y solicitaron la ayuda de la conductora.

Conductora: *¿por qué creen que el 368 va en ese lugar?* (en el del estado final)
Nelson: *es con lo que queda al final* (al finalizar el juego se quedó con 368)… *al principio inició con 132 y ahí están* (señala el lugar del estado inicial)
Conductora: *¿y estos 632?* (los colocados en el estado intermedio)
Nelson: *ya cuando ganó 500, tenía 632*
Conductora: *¿qué creen que pasó entre estos 632 pesos que tuvo Alberto en algún momento, y estos 368, con los que terminó?*
Susana: *perdió*
Conductora: *¿saben cuánto perdió?*
Nelson y Susana: *sí*
(Susana, en la suma que ya tenía de 500+132, ahora resta a 632, los 368 y obtiene 264, los anota, los mira y agrega un signo negativo. En el lugar de la segunda transformación elemental ahora tienen -264)
Nelson: *ya va saliendo, ya va saliendo*
Conductora: *les falta llenar este* (T_C)
(Susana hace la resta 500-264 de manera vertical y obtiene 236 y lo escribe en el espacio disponible, es decir, se fijó en la composición de T_1 y T_2)
Conductora: *¿por qué restaste 264 a 500?* (a Susana)
Susana: *lo que va aquí* (T_C) *es lo que resulta de esto y esto* (T_1 y T_2)
Conductora: *está bien, pero ¿por qué los restas y no los sumas?*

Nelson: *es que ganó y luego perdió, entonces lo que ganó, ganó son 236, no... 764* (calcula mentalmente 500+264)
Conductora: *muy bien y ¿qué pasa entre los 132 pesos con los que empezó y los 368 con los que terminó?* (con la pluma hace el recorrido de la línea que une al Estado inicial, T_C y llega al Estado final)
Susana: *pues eso, ciento treinta y dooos y doscientos treinta y seeeis... deben ser… trescientos sesenta y ocho* (lo va diciendo a la vez que está tratando de hacer el cálculo mental) *sí, son 368*
Nelson: *¡qué chido!*

La conductora entonces les mostró cómo podían relacionarse las cantidades anotadas en el esquema. Enfatizó que el 500 y el -264 iban diciendo lo que sucedió en la primera partida (ganó, es positivo, cuántas: 500) y en la segunda (perdió, es negativo, cuántas: 264); mientras que el 236 "dice" que (Alberto) al final de cuentas ganó (es positivo) y cuánto ganó (los 236). Comentaron que viendo el esquema "por abajo" (Estado inicial, T_C y Estado final) no se sabe cómo fue ganando y perdiendo, se desconocen las transformaciones elementales.

Así pues, las representaciones gráficas elaboradas por los maestros fueron haciéndose en general más *simbólicas* (Peltier, 2003). El acercamiento al esquema de Vergnaud posibilitó su utilización para comprender la relación semántica, tomar conciencia de dicha relación (autocomunicación), hacer transformaciones en él que difícilmente hubieran podido efectuarse directamente sobre el problema[81] y comunicarlo a otras personas. Por lo anterior, se consideró que al trabajar con el esquema de Vergnaud (1982) se cumplieron los dos criterios que el propio autor señala para poder considerar eficiente a una representación gráfica de problemas aritméticos: 1) ayudó a los maestros a resolver problemas en los que de otra forma habían fallado (por ejemplo, comparando su actuación en la entrevista inicial con la que mostraron en la última sesión de la ingeniería ante esos mismos problemas) y, 2) ayudó a los maestros a diferenciar entre varias estructuras y clases de problemas (por ejemplo, cuando se discute sobre la diferencia entre problemas sobre transformaciones y aquellos que incluyen estados).

2.2 Operatoria

La resolución de un problema en la escuela es muchas veces sinónimo de hacer una operación de cálculo numérico utilizando los datos que proporciona el enunciado, y la relación semántica o bien se pasa por alto, o no suele ser motivo de reflexión. Por otro lado, cuando se

[81] Como todo representante el esquema de Vergnaud posibilita modificaciones, caminos alternativos, situaciones de exploración (Silver, 1998).

problematiza el establecimiento de la relación semántica (como en las situaciones diseñadas en las sesiones experimentales antes descritas) el cálculo numérico puede volverse un obstáculo o un elemento que coadyuve a dicho establecimiento. En este apartado se analiza la operatoria presente en las producciones de los maestros. Interesa destacar aquellos casos en los que algunas concepciones acerca de las operaciones de suma y de resta dificultaron el establecimiento de la relación semántica y por ende, la representación gráfica. Se analizan cinco aspectos:

a) Significado de las operaciones aditivas (¿sumar es siempre añadir o restar es siempre quitar?);
b) Acomodamiento de los datos (dependiendo de si el problema es de concordancia o discordancia);
c) Resolución aritmética o una combinación entre el álgebra y la aritmética;
d) Operatoria y contexto y;
e) Funciones de la operación (para efectuar el cálculo numérico o como representación de la relación semántica).

De la misma manera en la que se organizó el análisis sobre el Esquema y uso de signos, en éste apartado dedicado a la operatoria se distinguirá entre las representaciones elaboradas en la A) Entrevista inicial y en las B) Sesiones experimentales.

a) Significado de las operaciones aditivas

> "En nuestro mundo, usamos a los objetos con varios propósitos. Cuando hay un cambio en su rol, también cambiamos la manera en la que los concebimos. Por ejemplo, una manzana es usualmente para comer; sin embargo, algunas veces las manzanas se cuentan. ¿Quiere decir esto que contar y comer son la misma operación? La existencia de objetos, en sí misma, no lleva a una única manera de mirarlos, y la idea de abstraer algunos conceptos de los objetos no es obvia. Incluso si la manera en la que vemos a los objetos deviene de la abstracción de conceptos (a través del lenguaje), no está nada claro que esos conceptos sean abstraídos de los objetos. Debiera considerarse que observamos y percibimos a los objetos a través de nuestros marcos conceptuales disponibles (…) uno no puede esperar que un niño, a través de la manipulación de objetos concretos, llegará a adquirir nociones matemáticas como la adición y la sustracción. Algunos considerarán a la actividad de poner juntos como un ejemplo de la operación de adición. Sin embargo, poner juntos no siempre lleva a la adición." (Nesher, 1982, p. 25, traducción nuestra)

En otro trabajo, Nesher[82] pone como ejemplo el problema: "¿Cuál será la temperatura del agua en un recipiente si echas un vaso de agua a 80º F y un vaso a 40º F en él?". Aquí la

[82] Nesher, 1980, citado en: Verschaffel, *et al*, (2000), p. 10, traducción nuestra.

operación de "poner juntos" no corresponde a la suma aritmética. Sin embargo, hay que considerar que las primeras situaciones que sirven como referencia a los niños para comprender las operaciones aritméticas son las acciones directas sobre los objetos en donde puede verificarse que sumar dos colecciones da lugar a una colección mayor que cualquiera de las dos primeras, o que cuando se restan elementos de una colección ésta disminuye. En cierto sentido, lo que los maestros de primaria esperan que logren hacer sus alumnos es una correspondencia entre hechos o acciones sobre los objetos y una operación aritmética.

Para la suma, por ejemplo, Puig y Cerdán (1988) distinguen dos cosas que para los niños permanecen en múltiples situaciones: los números que se tienen que sumar se pueden reconocer como cardinales de conjuntos y; la suma refleja la operación de unión, incluso aunque los conjuntos sean inaccesibles y su unión no pueda realizarse materialmente. Por ello, cuando alguno o ambos elementos no se verifican los alumnos suelen tener dificultades y necesitan hacer ajustes para encontrarle sentido a las nuevas situaciones. Así se construyen los conceptos de las operaciones aritméticas, requieren de un proceso largo que contempla una serie de modificaciones hasta que el sujeto es capaz de desarrollar un "conjunto de invariantes" que incluyen, según Vergnaud: el conjunto de situaciones que le dan sentido al concepto (que constituyen las referencias); el conjunto en el que se basa la operacionalidad de los esquemas (que constituyen los significados); y el de formas ligüísticas y no lingüísticas que permiten representar simbólicamente al concepto (los significantes).

> "… se podría decir que un sujeto construyó el sentido de una operación si reconoce en cualquier situación relevante del campo conceptual las estructuras que corresponden a esta operación, la estructura específica de esta situación y posteriormente, si la aborda de manera conveniente." (Vergnaud)[83]

El autor afirma que para que algo tenga sentido para el sujeto, debe establecer una relación entre la situación de referencia y los significantes que permiten hacer representaciones simbólicas de dichas situaciones. Esa relación se modificará ante la presencia de nuevas situaciones de referencia y nuevas posibilidades de representación, y hará posible ir construyendo el significado de una noción y un "campo conceptual" definido como un "(…) informal y heterogéneo conjunto de problemas, situaciones, conceptos, relaciones, estructuras, contenidos y operaciones de pensamiento, conectados uno con el otro y probablemente ligados durante el proceso de adquisición." (Vergnaud, 1982, p. 40).

[83] Vergnaud citado en: Peltier (2003).

A. Entrevista inicial

Ante el primer problema presentado en la entrevista inicial, el de ORO ["La reserva de oro de un banco bajó 642 lingotes en el transcurso del año 1973. Durante el primer semestre del mismo año había bajado 1 031 lingotes. ¿Qué pasó en el transcurso del segundo semestre?"] Aurora dijo:

> *Se dividen los bimestres, son dos, si en el primer bimestre bajó ésta cantidad* (1031), *como es mayor que ésta* (642), *aquí tiene que haber un número mayor* (señala un espacio en blanco entre las dos cantidades) *para que aquí me dé menor*

Efectivamente, |1031| > |642|, pero (-1031) < (-642). El "número más grande" que estaba tratando de hallar tiene sentido en un esquema de operaciones aritméticas que no contempla la suma algebraica (entre números positivos y negativos), así que la única manera de obtener un número más grande (en términos absolutos) a partir de los datos numéricos con los que contaba fue sumar 1031 + 642, y el 1673 resultante tuvo sentido para ella. En el caso del problema NACIMIENTOS ["En una ciudad, el excedente de los nacimientos sobre los decesos fue de 1293 personas entre 1950 y 1960, y de 14084 entre 1950 y 1970. ¿Qué sucedió entre 1960 y 1970?"] sus experiencias con la resta se verificaron al efectuar el cálculo:

Entrevistadora:	*entonces, ¿podrías saber qué pasó entre 1960 y 1970?*
Aurora:	*restar*
Entrevistadora:	*¿por qué restar?*
Aurora:	*porque está dentro de*
Entrevistadora:	*¿y qué restarías?*
Aurora:	*esto* (14084) *menos esto* (1293)*, o sea, a esto* (14084) *le quito esto* (1293)*, no puede ser al revés*
Entrevistadora:	*¿por qué?*
Aurora:	*porque en una resta siempre el de arriba es mayor que...*
Entrevistadora:	*y el número que te sale ¿qué va a ser?*
Aurora:	*lo que hay aquí, entre 1960 y 1970*

Las ideas en torno a la resta como la operación inversa de la suma sustentaron estrategias de cálculo que emplearon los maestros, específicamente la suma por complemento en vez de la resta, frecuentemente usada por Rosita en una actitud de "se puede usar cualquiera de las dos" como lo que dice ante el problema de LULÚ [Lulú pidió 2 cajas de aguacates para vender en su tienda. Cuando las abrió y revisó el contenido notó que en la primera había sólo 23 aguacates en buen estado. Al terminar de revisar las dos cajas contó los aguacates que estaban en buen estado y sumó 81. ¿En qué condiciones estaban los aguacates de la segunda caja?]:

Rosita:	*a ver, de las dos cajas en la primera encontró 23 en buen estado, en total había 81 en buen estado, entonces "¿en qué condiciones estaban los aguacates de la segunda caja?" Haciendo una resta o una suma salen 58 que también estarían en buen estado y que corresponden a los de la segunda caja*
Entrevistadora:	*¿por qué dijiste una resta o una suma?*
Rosita:	*sí, aquí se puede sumar o lo que puedo hacer yo es una suma, 23 + 58 me dan 81, o también 81 - 23 me da 58*

B. Sesiones experimentales

Una de las cosas que se hicieron notorias desde el principio de la experiencia, fue la preferencia que tuvieron los profesores al elegir a los problemas con transformaciones positivas sobre los que involucraban transformaciones negativas. Esto es coherente con ciertas ideas escolares como que la suma es más fácil que la resta, o que primero se aprende a sumar y luego a restar. Aunque Nelson manifestara que habían elegido el problema #1 de SEBASTIÁN porque “ellos eran ganadores”, tras dicha elección se encuentran ideas escolares y una experiencia más abundante (como alumnos y como maestros) con problemas “de suma”. La conmutatividad podría suponer un punto a favor de la preferencia por la suma, ya que no requiere discernir cuál sumando se coloca primero y cuál después para efectuar correctamente el cálculo, a diferencia de lo que ocurre en la sustracción. Sin embargo, también es rápidamente aprendido por alumnos y maestros que en la resta “el de arriba” (minuendo) es el más grande para poderle quitar “el de abajo” (sustraendo), así que si de entrada el problema no parece de “poner juntos” (es decir, de sumar) lo que debe hacerse comúnmente es restarle “el chico al grande”. Como se mencionó antes, tales concepciones no se verifican siempre al trabajar la suma algebraica que involucra cálculos entre números positivos y negativos y cuyos valores absolutos pueden hacer variar el signo del resultado.

Otro elemento que se tornó problemático fue la distinción entre un problema “de suma” y uno “de resta”. Generalmente, para maestros y alumnos un problema de suma es aquel que se resuelve realizando dicha operación, pero además supone una ganancia, aumentar una colección, crecimiento, regalos, encontrarse cosas, juntar, etc.; y los problemas de resta son aquellos en los que se efectúa esa operación y hay una pérdida, una disminución, se pierden cosas, se parte una colección, etc. Debido a esas ideas, construidas y reforzadas por años de experiencia con problemas “típicos” en los que las cosas funcionan siempre así, no resultó sencillo para los maestros poder discernir si, por ejemplo, el problema #2 de SEBASTIÁN [“Sebastián jugó dos partidos de canicas. En el primero perdió 23 y en el segundo perdió 39. ¿Cómo quedó al finalizar los dos partidos?”] era de suma o de resta. Era claro que el resultado (generalmente entendido como el valor de la incógnita cuando ésta se encuentra en T_C o en el Estado final), sería negativo, es decir, Sebastián en total *perdió* canicas, pero la manera de hallar dicho resultado era hacer una suma. Sumar pérdidas resultó desconcertante para algunos de ellos en un problema escolar (como el que se presentó) por el contrato didáctico establecido y por los limitados o carentes recursos simbólicos que poseían, sin embargo, los maestros tenían claro que para hallar la solución a la pregunta del problema había que sumar lo que Sebastián perdió en el primer partido más lo que perdió en el segundo.

Poco a poco estas nuevas situaciones acerca de la suma y de la resta fueron ampliando las concepciones de los maestros sobre los problemas aditivos.

Cuando se abordaron los problemas #5 [“Sebastián jugó dos partidos de canicas. En el primero ganó 23 y luego jugó el segundo. Al contar el total de las canicas de los dos partidos notó que tenía 62. ¿Qué pasó en el segundo partido?”] y #6 [“Sebastián jugó dos partidos de canicas. En el primero perdió 23 canicas y luego jugó un segundo partido. Al término de los dos partidos vio que en total había perdido 62 canicas. ¿Qué pasó en el segundo partido?”], Juliana leyó lo que Susana había escrito en su representación (Fig. 44):

$$-23 + (-x) = -62$$
$$-23 - x = -62$$
$$-62 + 23 = x$$
$$\boxed{x = -39}$$

Figura 44

Conductora: *¿y ustedes que interpretan?*
Rosita: *es el problema seis*
Conductora: *¿cómo está representado?*
Juliana: (leyendo) *menos 23 más menos X igual a menos 62. Menos 23 menos X igual a menos 62. Menos 62 más 23 igual a X. X igual a menos 39*
Nelson: *¿qué?*
Conductora: *¿pero qué está representado?*
Juliana: *pérdida... otra pérdida… sumas las dos pérdidas*
Aurora: *verlo más que matemático hay que verlo psicológico, sólo para mayores*

Aurora, como se dijo al analizar la representación de la cualidad negativa, tuvo mayores dificultades que los demás incluso para concebir la existencia de los números negativos (en su aspecto cardinal).

También en problemas con transformaciones positivas la resta presentó dificultades. Al interpretar la representación que Nelson y Susana hicieron del problema #3 de SEBASTIÁN [“A Sebastián le gusta jugar a las canicas. Jugó un primer partido y cuando jugó el segundo ganó 39. Cuando terminó los dos partidos vio que había ganado 62 canicas. ¿Qué pasó en el primer partido?”], Rosita y Juliana se confundieron. Por un lado, el esquema hacía referencia a transformaciones positivas (no había taches, ni niños llorando, ni signos negativos), pero el empleo de una resta como la operación que permitía encontrar T_1, hizo pensar a Rosita que "habían mezclado" por poner una resta en un problema de "ganar". Cuando se discutió grupalmente, ella afirmó que le parecía "curioso" que tanto para el problema #3 como para el #4 hubieran efectuado una resta (cuyas estructuras son [+23] + (+39) = (+62) y [-23] + (-39) = (-62), respectivamente). Dijo *"Lo curioso es que representamos una suma pero hicimos una resta".*

El "tamaño" del resultado también contradijo la experiencia previa de los maestros en algunas situaciones. Por ejemplo, se espera que al efectuar una suma el resultado sea mayor que cualquiera de los sumandos, pero en la suma algebraica puede ser menor tanto en términos absolutos como relativos[84]. Uno de los criterios que usó Susana para interpretar un mensaje como el del problema #5 (cuya estructura es (+23) + [+39] = (+62)) fue *"sé que ganaron porque aumentó el total y es positivo".*

b) Acomodamiento de los datos numéricos en una operación

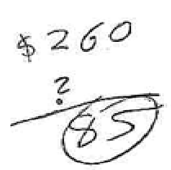
> "Riley, *et al* (1983) enfatizan que en el proceso de comprensión debe distinguirse entre la identificación de cantidades y el reconocimiento de relaciones entre cantidades. Identificar una cantidad involucra el reconocimiento de un componente de información que especifica un número de alguna clase de objeto, un monto de alguna sustancia, un precio u otro elemento cuantitativo. Las cantidades son distintas de los números; de hecho, los números son atributos de las cantidades."[85]

Una vez establecida la relación semántica, puede pensarse en la incógnita como aquel número a hallar que debe relacionarse aritméticamente con los otros dos que proporciona el enunciado. Pasar de ese punto a la realización del cálculo numérico puede no ser tan trivial.

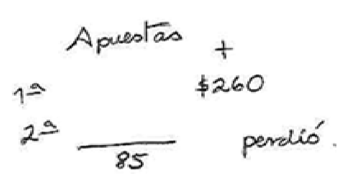
<u>A. Entrevista inicial</u>

En las representaciones que dos maestros hicieron del problema GUILLERMO ["A Guillermo le gusta hacer apuestas. En la primera ganó $260 y luego volvió a apostar. Haciendo cuentas de las dos apuestas vio que en total había perdido $85. ¿Qué pasó en la segunda apuesta?"] puede apreciarse un modelo del problema en el que ubicaron correctamente a la incógnita.

Juliana



Rosita

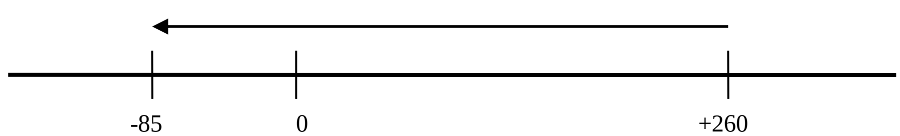


[84] Por ejemplo, en (+5) + (-3) = (+2) el resultado es menor en términos absolutos y relativos; y en (-3) + (-5) = (-8) el resultado es mayor en términos absolutos pero menor en términos relativos.

[85] Citado en: Greeno, (1987).

Pero no lograron resolverlo correctamente. Juliana prevé el espacio que corresponde a la incógnita y sabe que T_C es justamente la composición de las dos elementales, es decir, que debe relacionar aditivamente lo que ganó en la primera apuesta con lo que pasó en la segunda y el resultado será la pérdida de $85. Quizá la representación habría sido funcional si hubiera puesto la cualidad de los números (positivo para la ganancia y negativo para la pérdida) y si hubiera tenido recursos algebraicos para operar con esos números. Aunque acomoda los números como en una operación convencional, no incluye el operador, lo que podría llevar a pensar que cuando hizo esas anotaciones no sabía qué operación era la que resolvía el problema. Al no incluir los signos de los números era difícil que pudiera llevar a cabo el cálculo numérico, aunque en un principio estuviera bien ubicada la incógnita y se hubiera planteado una correcta relación semántica entre los datos. Rosita hizo un modelo más completo para este problema. Al igual que Juliana, dejó un espacio en blanco para la incógnita y en una disposición no convencional colocó bajo una raya horizontal el número 85 con la palabra "perdió". No usa el signo menos (-) para denotar esa pérdida, pero sí el signo más (+) arriba de los 260 para denotar ganancia. Tampoco pudo pasar del acomodo de la información basada en la relación semántica, al cálculo numérico.

Mediante la recta numérica se explican las dificultades de operatoria que pudieron haber tenido que ver con las dificultades de los maestros en este punto. Se trataba de encontrar el segundo sumando sabiendo que el primero era ganancia (positivo) y el resultado de esa suma era una pérdida (negativo), es decir, buscar el número que permitiera llegar de 260 ganados (+260) a 85 perdidos (-85), o pensarlo como "qué número tengo que quitarle a +260 para llegar a -85".



Como se observa en la recta, el número buscado debe ser mayor (en términos absolutos) que 260, hay que "perder" esos 260 ganados inicialmente (lo que nos colocaría en el 0) y además quitar otro segmento para llegar al -85 (un segmento de tamaño 85). Pasar de +260 a -85 supone sumar esos dos segmentos de la recta, y como el desplazamiento es hacia la izquierda, el número resultante de esa suma será negativo (-345). En el contexto del problema significa que Guillermo en la segunda apuesta perdió $345.

Los modelos de estos maestros no son operativos, aunque tengan el "hueco" ubicando bien a la pregunta del problema, la manera en la que dispusieron los números no les permitió hacer el cálculo aritméticamente, y al no contar con recursos algebraicos abandonaron el problema o dejaron de lado esa primera representación.

B. Sesiones experimentales

Un elemento central en las comunicaciones de los maestros fue el cálculo numérico, como se ha ido viendo en el análisis. En los problemas de SEBASTIÁN que involucraban composiciones entre transformaciones positivas (problemas #1, #3 y #5), las operaciones aritméticas no fueron un obstáculo para los maestros. No obstante, cuando las composiciones eran entre transformaciones negativas (problemas #2, #4 y #6) no parecían tener muy claro ni qué operación debía efectuarse ni cómo debían acomodar los datos numéricos en ellas.

Cuando los maestros se percataron de que en la serie de SEBASTIÁN iban a estar encontrando la misma información numérica "acomodada" de distinta forma y variando los signos de las transformaciones, un punto muy importante en las comunicaciones fue hacer una operación que diera como resultado el número que sabían de antemano iban a obtener y con el signo correcto según el planteamiento del problema. O sea, hacer la operación ya no era un mecanismo para hallar el resultado del problema (la composición de las transformaciones conocidas) porque dicho resultado ya lo sabían[86]; sino una manera de representar, de justificar (para hacer notar de dónde había salido el número de canicas dibujadas trazando una flecha desde la operación hasta ellas, por ejemplo) o de redundar (como en los casos en los que la operación se incluía acompañando al dibujo). Esto puede explicar la constante aparición de representaciones del tipo "número perdido" porque ellas permitían establecer una operación aritmética para hallar composición de las transformaciones (aunque sin signo, en el caso de que fueran negativas), pero con la desventaja de que comunicaban sólo en ciertos casos la relación semántica.

El que T_1 fuera negativa se constituyó en una dificultad añadida en términos del establecimiento de la relación semántica (como se comentó) y también de la operatoria. Una transformación negativa era reconocida por los maestros en casos en los que se planteaba un Estado inicial positivo y mayor que la transformación negativa, o cuando T_1 es positiva y con un valor absoluto mayor que la T_2 negativa. Pero cuando no se verificaba alguna de esas condiciones el problema se complejizaba. Esto pudo verse principalmente en los problemas de VANESA, diseñados con la intención de profundizar en el cálculo numérico ante transformaciones opuestas. Tras la primera actividad los maestros conocieron el dato numérico que respondía a la pregunta del problema y tuvieron a la mano los tres números que iban a estar apareciendo en todos los problemas de VANESA (como ocurrió en los de SEBASTIÁN). El reto consistió en ubicarlo temporalmente al establecer la relación semántica y en determinar el signo de dicho número. Al elaborar el mensaje para el problema #2 de VA-

[86] Siempre había los mismos tres datos numéricos en los problemas de SEBASTIÁN, 23, 39 y 62; así que si en el enunciado se proporcionaban el 23 y el 62, el resultado sería 39.

NESA ["Vanesa debe $132 y hoy va a cobrar $500 de su semana. Si Vanesa quisiera pagar su deuda ¿cuánto dinero le sobraría de lo de su semana?"] Nelson y Susana dijeron:

	(Susana escribe "-132")
Nelson:	*¡a 132 no se le pueden quitar 500!* (anticipando que el número que escribiría enseguida sería +500 correspondiente a T_2)
Susana:	*pero si lo acomodan sí se puede* (refiriéndose a poner 500 - 132)

Ese "acomodamiento" al que hace referencia Susana consiste en poner los datos numéricos de manera que puedan ser operados aritméticamente aunque se altere la temporalidad o su cualidad, elementos recuperables si el resolutor controla su procedimiento y tiene claro que esas alteraciones las realiza solamente con el fin de efectuar el cálculo numérico.

Otro ejemplo sobre este particular es el siguiente. Nelson nunca se sintió muy cómodo cuando T_1 era negativa y negociaba con Susana cada vez que ella incluía el signo negativo en sus representaciones. Cuando Susana colocó en un esquema los siguientes datos (-500) + [?] = (-368), Nelson le dijo *"mejor ponle más, de todas formas se tiene que restar"* refiriéndose a que para encontrar la diferencia entre esos números iban a restar 500 - 368 y así se deshacía del incómodo signo. Sin embargo, aunque en términos de la representación simbólica a Nelson no le gustaba poner signos negativos, se manejaba bien con la suma algebraica. Él sabía que al sumar números con signos opuestos el resultado lleva el signo del sumando con valor absoluto mayor, y lo expresó como *"es menos porque predominan los negativos"*.

Cuando ambos trataban de dilucidar el signo del 132 que colocaron en T_2 les preguntó la conductora:

Conductora:	*¿qué signo llevaría?*
Nelson:	*el menos* (lo escribe) *porque tienes que restar* (el problema se resuelve con una resta)
Conductora:	*éste número* (-368 que está en T_C) *¿de dónde tendría que salir?* (le pregunta a Susana)
Susana:	*de estos dos* (-500 en T_1 y -132 en T_2)
Conductora:	*¿menos 132 y menos 500 da menos 368?* (le pregunta a Nelson)
Nelson:	(piensa unos segundos) *no, serían 632 y eso... no estaría nada bien, nos saldríamos del problema* (está seguro, que los números involucrados en la situación son el 132, 500 y 368)
Susana:	*es más* (el 132 es positivo) *esto es lo que abonó* (borra el signo negativo del 132) *lo dio, era de ella, para pagar su cuenta* (su deuda)
Nelson:	*ándale, ándale, así sí sale* (se dio cuenta de que (+132) + (-500) = (-368))

Estas situaciones en las que la incógnita era parcialmente conocida (parcial por desconocer el signo y su ubicación temporal) permitieron reflexionar sobre la suma algebraica sin utilizar propiamente procedimientos del álgebra. No representaba una dificultad para los maestros saber que si se tenía una deuda de \$500 y se abonaban \$132, la deuda no estaba saldada, lo que se traduce en (-500) + (+132) = (-368), aunque planteado en estos términos difícilmente lo habrían resuelto, como se vio en los problemas de la entrevista inicial.

c) Resolución aritmética o combinación con lo algebraico

> "Otra manera de poner lo 'obvio' de 2 + 3 = 5 en perspectiva es compararlo con otros enunciados aritméticos como 3 - 5 = -2 y -3 × -2 = 6 (…) Los números negativos no emergen naturalmente en un contexto de operaciones como separar y combinar colecciones de objetos contables. Hasta donde las operaciones aditivas llegan, éstos proveen una manera de matematizar otras situaciones como el débito y el crédito (…)" (Verschaffel, *et al*, 2000, p. 129, traducción nuestra)

> "Concepto y símbolo son dos lados de la misma moneda y uno siempre debe tener el cuidado de ver el uso que hacen los estudiantes de los símbolos a la luz del uso que hacen de los conceptos." (Vergnaud, 1982, p. 57, traducción nuestra)

El cálculo que involucra operaciones entre transformaciones opuestas lleva al límite las estrategias aritméticas que se construyen como resultado de acciones directas sobre objetos. No en todos los casos es posible contar físicamente los objetos que sufren una transformación negativa, por ello los requerimientos de las nuevas tareas exigen no sólo el uso de herramientas de cálculo nuevas, sino la ampliación del concepto de operaciones aditivas.

Todos los maestros pudieron resolver los problemas de SEBASTIÁN, la solución a la pregunta del problema no supuso una dificultad importante, pues en todos los casos podía operarse aritméticamente siempre y cuando se controlara el signo. Pero la representación gráfica de ellos suponía un reto distinto porque requería contar con herramientas de representación simbólicas que sobrepasaban lo que podía explicarse a través de acciones sobre objetos. Por ello, las canicas que perdía Sebastián (aunque estrictamente las había perdido y no era susceptible contarlas físicamente) aparecen en las representaciones como canicas tachadas. Es el caso de la representación del problema #2 elaborada por Nelson y Susana (Fig. 45) en la que hicieron una suma de positivos sabiendo que eran pérdidas y señalando ese hecho mediante taches en los conjuntos.

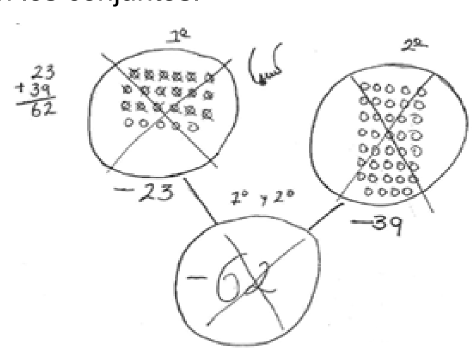


Figura 45

En las sesiones resultó pronto evidente que algunos maestros (como Susana, Juliana, Rosita y Nelson, aunque él con dificultades en torno a la representación simbólica) habían tenido experiencias que les permitieron llevar más allá de lo aritmético su razonamiento sobre los problemas con transformaciones negativas de SEBASTIÁN. Sin embargo, algunos conocimientos aprendidos como “reglas” de procedimientos sin que necesariamente fueran comprendidos, empezaron a entorpecer un tipo de cálculo tendiente al álgebra. Cuando Juliana y Rosita interpretaron (correctamente) la representación discutida (Fig. 45), comentaron en la discusión grupal “*Ellos pusieron -23, -39= -62. Nos fuimos a las leyes de los signos, así que menos y menos debería ser más, pero pusimos el 1°* (-23) *más el 2°* (-39) *es -62”.* Sabían que el resultado debía ser negativo, pero les causaba dificultad la “ley de los signos”. Aunque los procedimientos algebraicos no fueron objeto de interés en la parte didáctica de la ingeniería ni lo son en este análisis, es necesario hacer notar que algunos maestros por sí mismos los emplearon como un medio de representación al trabajar con transformaciones negativas. En la representación de Juliana y Rosita del problema #4 [“A Sebastián le gusta jugar a las canicas. Jugó un primer partido y cuando jugó el segundo perdió 39 canicas. Al finalizar los dos partidos se dio cuenta de que había perdido 62 canicas en total. ¿Qué pasó en el primer partido?”] además de la tabla tipo contador que habían venido utilizando se aventuraron a proponer una ecuación (Fig. 46).

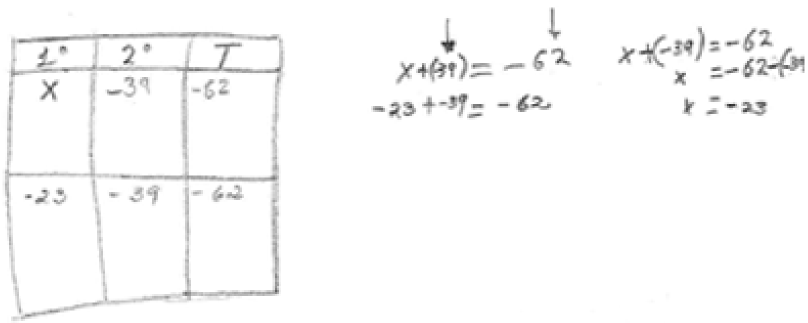


Figura 46

Como sabían que el resultado al despejar χ tenía que ser -23 procuraron acomodar los números para que los signos quedaran como debían. Incluso, en la expresión del lado derecho cuando pasan el -39 no le cambian el signo, lo cual les creó problemas, así que agregaron un “menos” para que quedara “χ = -62 - (-39” y se justificara que χ = -23 empleando un procedimiento erróneo, porque en vez de considerar que -62 - (-39) = -23, multiplicaron los tres signos negativos de esa expresión para dar lugar a (-) (-) = (+) y entonces, (+) (-) = (-).

Dificultades como estas, derivadas de conocimientos aprendidos *“por regla”*, como dijo Rosita sobre la “ley de los signos”, pudieron encontrarse varias veces. Los paréntesis usados en las expresiones algebraicas confundieron a Aurora, quien recordaba que esos se usaban para las multiplicaciones y ninguno de los problemas de SEBASTIÁN le parecían “de multiplicación”; o a Susana, que se esforzó por escribir una expresión algebraica para el problema #4 en la que el 23 del resultado fuera negativo (Fig. 47).

$$X + 39 = \boxed{-62}$$
$$-62 + 39 = -23$$
$$\boxed{x = -23}$$

Figura 47

En una representación que ya se comentó, pudo verse el empleo de un razonamiento aritmético para resolver una ecuación (Fig. 48). Corresponde al problema #6 de SEBASTIÁN [“Sebastián jugó dos partidos de canicas. En el primero perdió 23 canicas y luego jugó un segundo partido. Al término de los dos partidos vio que en total había perdido 62 canicas. ¿Qué pasó en el segundo partido?”] y en ella Susana atribuyó de entrada la cualidad negativa a la incógnita.

$$-23 + (-x) = -62$$
$$-23 - x = -62$$
$$-62 + 23 = x$$
$$\boxed{x = -39}$$

Figura 48

A partir de la sesión 3 en la que se introdujeron los problemas de VANESA una vez que se había trabajado con el esquema de Vergnaud, no hubo más representaciones mediante expresiones algebraicas y la operatoria se centró en la suma aritmética controlando los signos y el orden temporal. Por ejemplo, para el problema #1 [“Vanesa paga con un billete de $500 una cuenta de $132 en el supermercado. ¿Cuánto le regresan de cambio?”] Nelson y Susana (Fig. 49):

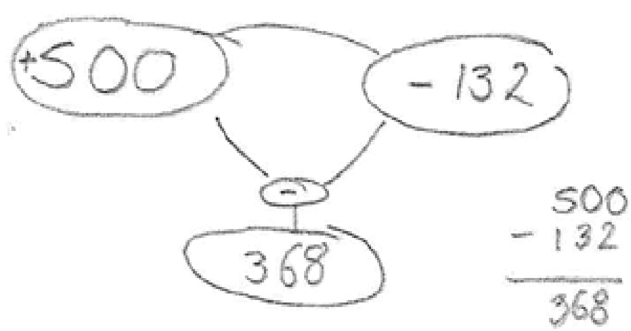


Figura 49

Al ser T_1 (+) y T_2 (-) pero $|T_1| > |T_2|$, no había dificultad alguna en operar aritméticamente. Pero en casos como el de los problemas #3 y #4 (la estructura de los problemas es, respectivamente (+132) + (-500) = [-368] y (-500) + (+132) = [-368]) Nelson y Susana ignoraron momentáneamente los signos y en un caso, alteraron el orden temporal de las transformaciones (Fig. 50).

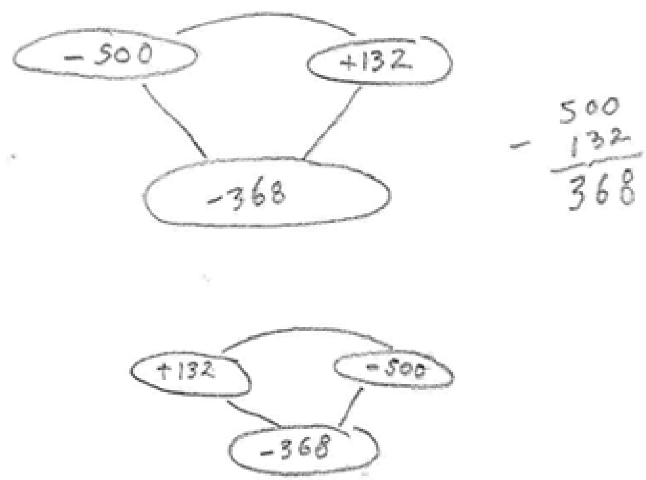


Figura 50

Las representaciones de Aurora permiten ver un fuerte apego al razonamiento con números naturales. Aunque Fabiola (su pareja) intentaba explorar otros recursos, ella seguía buscando la manera de "encajar" el cálculo en una operación aritmética con el esquema del "número perdido" dando lugar a representaciones que no comunicaban la relación semántica sino la operación que podía resolver el problema y además con dificultades en cuanto a la expresión de la cualidad del dato hallado, como en la elaborada por Aurora y Susana para el problema #2 de VANESA ["Vanesa debe $132 y hoy va a cobrar $500 de su semana. Si Vanesa quisiera pagar su deuda ¿cuánto dinero le sobraría de lo de su semana?"] (Fig. 51).

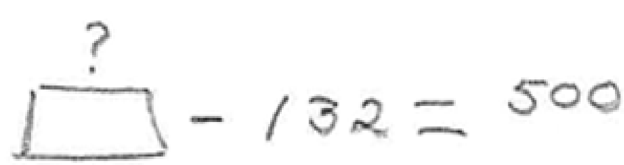


Figura 51

d) Operatoria y contexto

La elección de la(s) operación(es) de cálculo numérico que deben efectuarse para resolver un problema debería ser hecha tras haber establecido la relación semántica entre los datos.

Es sabido que la detección de “palabras clave” tiene también esa función así como la consideración de algunos elementos contextuales, lo que no siempre permite resolver el problema correctamente.

En este trabajo la redacción de los enunciados de los problemas generalmente no proporcionaba “palabras clave” que orientaran la decisión de cuál operación debía efectuarse, sin embargo, pudo verse que a veces ciertos elementos contextuales confundieron a los maestros. Aunque tales elementos contextuales no fueron decisorios sobre qué operación efectuar, en la entrevista inicial el contexto del problema NACIMIENTOS [“En una ciudad, el excedente de los nacimientos sobre los decesos fue de 1293 personas entre 1950 y 1960, y de 14084 entre 1950 y 1970. ¿Qué sucedió entre 1960 y 1970?”] sí puso en conflicto a algunos maestros pues los hizo dudar del resultado que habían obtenido.

Aurora, tras leer el problema escribió la resta 14084 - 1293 y obtuvo 12791, pero al mirar este resultado dijo *“me dieron muchos, no entiendo”* refiriéndose a que si en un periodo de 10 años (de 1950 a 1960) había habido un excedente de 1293 nacimientos, cómo podía explicarse que en los siguientes 10 años el excedente fuera de 12791. Aunque encontraba lógico su procedimiento de resolución y decía que el periodo de 1950-1960 estaba *“dentro de”* el de 1950-1970, por lo cual, se justificaba restar para encontrar una diferencia, sentía que algo no estaba bien y manifestó *“a todo le estoy atinando”.* Algo similar le ocurrió a Rosita, quien realizó la misma operación y dijo *“Resté 14084 menos 1293 para saber cuál es la diferencia y saber qué es lo que pasó entre 1960 y 1970, bueno yo… pero sí me sale una cantidad enorme.”*

e) Funciones de la operación

Como se mencionó al comienzo de este apartado, las operaciones de cálculo tuvieron varias funciones en la resolución de los problemas presentados en la entrevista y en las representaciones elaboradas para comunicar mensajes durante las sesiones experimentales. Aunque Vergnaud (1982) manifiesta que,

> *“Uno debe distinguir cuidadosamente entre el concepto de acción, el concepto de transformación y el concepto de operación. Mientras acción se refiere a lo que un actor hace, transformación se refiere a un cambio en el estado natural, y operación se refiere al procedimiento usado para resolver un problema.” (pp. 45-46)*

En las producciones de los maestros pudieron encontrarse operaciones que tuvieron distintas funciones: hallar un resultado numérico que sea la respuesta a la pregunta que el problema plantea; justificar o reiterar lo representado en un dibujo o esquema y; representar la relación semántica entre los datos.

A. Entrevista inicial

Como se recordará, en la entrevista inicial la consigna era resolver el problema (no había las consideraciones de elaboración de mensajes con intenciones comunicativas), situación que dio pie a la aparición de operaciones aisladas con el fin de obtener el dato numérico que respondiera a la pregunta del problema. Aurora, escribió parte de la información del enunciado y efectuó el cálculo en el problema DESCUENTOS ["Te están descontando $720 de tu quincena por un préstamo que solicitaste, además, tuviste dos faltas sin previo aviso en esa quincena. Al recibir tu salario notaste que te dieron $935 menos de lo que normalmente recibes. ¿Cuánto te descontaron por los días que faltaste?"] (Fig. 52).

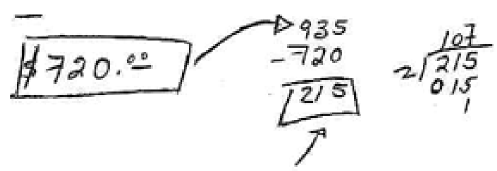


Figura 52

De manera menos ordenada, Juliana anotó lo siguiente para el mismo problema (Fig. 53).

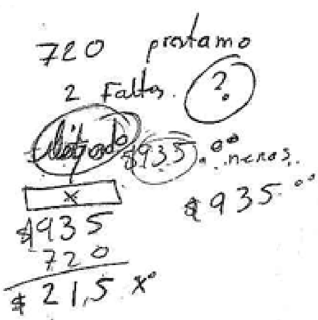


Figura 53

B. Sesiones experimentales

Durante las sesiones hay pocas evidencias de las ocasiones en las que sólo se utilizaron para encontrar la repuesta al problema ya que, a pesar de las instrucciones, solían hacer cálculos intermedios en otras hojas o en sus cuadernos o bien, usaban las hojas que les proporcionaba la conductora pero borraban los intentos iniciales para dejar sólo el mensaje final. Además, en cuanto se percataron de que en los problemas de SEBASTIÁN y de VANESA había tres números constantes (uno era la incógnita) y de su relación aritmética, ya no resultaba necesario efectuar operaciones pues ya conocían el resultado.

Casos en los que la operación se añadía a la representación, por las mismas razones, sólo se hallaron durante las sesiones experimentales. En algunas ocasiones da la idea de que la escriben para justificar lo que se representa sobre la incógnita o sobre la resolución de ésta, como en el mensaje elaborado por Susana y Nelson para el problema #3 de SEBASTIÁN (Fig. 54) o en el de Aurora y Fabiola para el #4 (Fig. 55).

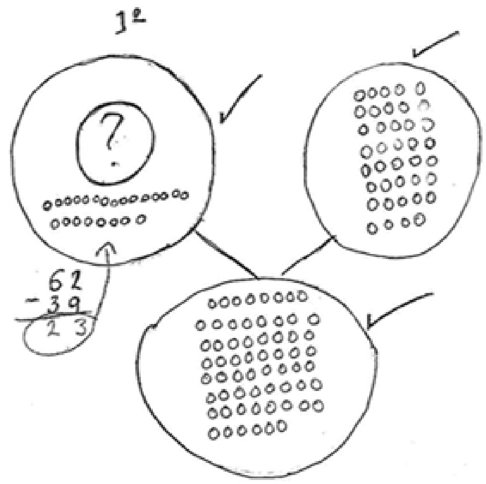


Figura 54

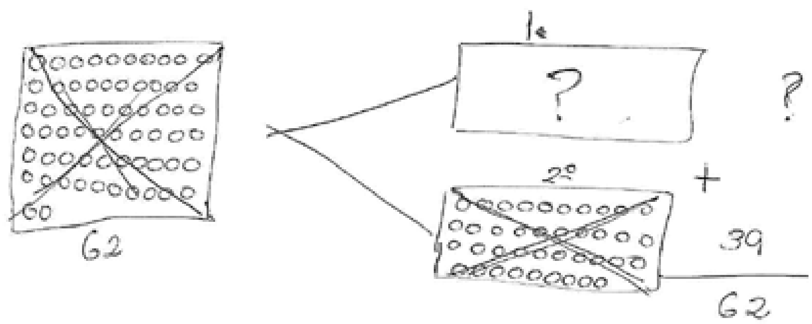


Figura 55

En otras ocasiones, las operaciones fueron utilizadas para representar la relación semántica entre los datos. El caso de Rosita resulta muy ilustrativo a este respecto, por ejemplo para el problema DESCUENTOS, fue anotando los datos de manera ordenada, primero los $750 del descuento por el préstamo, luego dejó un espacio y bajo una raya horizontal el descuento total de $935. Para encontrar el otro sumando, resolvió la resta por complemento y luego anotó las oraciones que aparecen (Fig. 56).

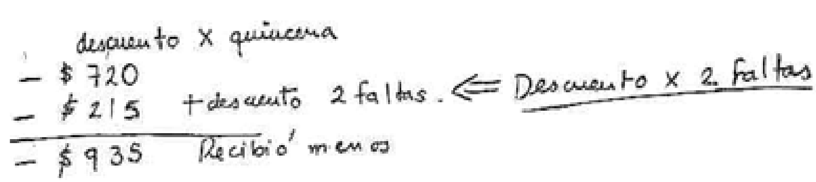


Figura 56

Los esquemas de tipo “número perdido” podrían considerarse dentro de esta categoría, pero es difícil hacerlo sin lugar a dudas, ya que resulta difícil determinar si lo que está representado es la relación semántica entre los datos o la operación que resuelve, situación que ocurre en los casos de concordancia con transformaciones positivas o cuando T_1 tiene un valor absoluto mayor que el dato a hallar. Pero ese esquema sólo sirve para representar situaciones aditivas simples en las que los signos fungen sólo como operadores, y no permite expresar conservando el orden temporal y los signos, problemas en los que por ejemplo, T_1 es negativa.

Conclusiones

Esta investigación se planteó como objetivo que los maestros de primaria participantes resignificaran los problemas que se resuelven mediante la suma o la resta para que dejaran de verlos como los más “fáciles” o solamente como un espacio de práctica del algoritmo de dichas operaciones. Ello requería la revaloración del establecimiento de la relación semántica entre los datos de los problemas como primer paso para poder resolverlos.

Para lograr tal objetivo, los problemas que debían plantearse a los maestros necesitaban tener una estructura que no fuera fácilmente reconocida por ellos. Con ese fin en mente, se diseñó y experimentó una secuencia didáctica en el marco de una ingeniería didáctica en la que pudieran estudiarse los condicionantes de una propuesta de enseñanza para maestros de la escuela primaria que posibilitara que ellos accedieran al conocimiento de algunos de los distintos significados que las operaciones de suma y resta asumen en los problemas aditivos. Puede afirmarse que efectivamente, la secuencia didáctica permitió centrar a los profesores en el establecimiento de la relación semántica entre los datos de problemas aditivos debido principalmente a:

a) *El tipo de problemas* que se eligieron para las situaciones didácticas. La 4ª categoría de Vergnaud resultó apropiada, pues no presentó una estructura familiar para los maestros pero tampoco estuvo muy alejada de su experiencia, es decir, podían resolverlos sin requerir el conocimiento instalado de ese nuevo saber que pretendía estudiarse. Dentro de ellos, la serie SEBASTIÁN fue efectiva para centrar a los maestros en el establecimiento de la relación semántica porque mantenía otros elementos constantes: los números implicados, el contexto y el que las tres transformaciones fueran del mismo signo; y se hacía variar: la posición de la incógnita en cada pareja de problemas y al interior de cada par, solamente la cualidad de las transformaciones. Los de VANESA, además de seguir enfatizando el establecimiento de la relación semántica, cumplieron el propósito de problematizar el cálculo numérico (al aumentar el rango e incluir transformaciones opuestas) y posibilitaron la reflexión sobre la temporalidad. Técnicas de cálculo como el álgebra, no eran realmente necesarias en ninguna de las dos series ya que la operatoria podía resolverse aritméticamente controlando la cualidad de las transformaciones involucradas, equivalente a controlar el signo de los números.

b) *La situación de comunicación* diseñada en las sesiones experimentales. Se logró que los maestros, en vez de centrarse solamente en resolver el problema se esforzaran en encontrar qué diferenciaba un problema del otro (la relación semántica) y en cómo expresarlo gráficamente para elaborar un mensaje efectivo.

c) *El trabajo en parejas y su conformación.* Gran parte de la estrategia didáctica recayó en el trabajo al interior de las parejas y en la posterior discusión grupal. El intercambio de saberes, creencias y procedimientos que se ponían en juego en cada pareja (desde la elección del problema y la elaboración de su representación, hasta la interpretación del mensaje recibido y los argumentos que, o defendían el mensaje propio o cuestionaban los ajenos) fue el motor que permitió movilizar los conocimientos de los maestros y la pauta para el diseño de las sesiones. Es importante enfatizar el papel que juegan dos elementos al combinarse cuando los sujetos de aprendizaje son maestros: los saberes previos con los que cuentan, y su actitud y disposición al participar en espacios de enseñanza[87]. Una buena actitud y conocimientos matemáticos sólidos son el mejor terreno para construir aprendizajes, aunque no debe pensarse que un elemento necesariamente defina al otro. Una buena actitud no garantiza grandes avances en el aprendizaje, como le ocurrió a Aurora, quien a pesar de su actitud abierta y cooperativa, tuvo constantes dificultades con los contenidos abordados. Tampoco poseer conocimientos matemáticos más sólidos garantiza esos grandes avances, como pudo verse con Juliana, quien poseyendo un mejor dominio de algunos aspectos matemáticos no logró aprendizajes más ricos por la actitud casi hostil que mantuvo. Por otro lado, la conformación inicial de las parejas y su recomposición durante las sesiones fueron también elementos decisivos. Resultó útil comenzar el trabajo con parejas más o menos "niveladas" en cuanto al dominio del contenido en cuestión y a la actitud mostrada inicialmente, pero una vez puesto en marcha el proceso fueron notorios los distintos ritmos en el aprendizaje y la necesidad de otro tipo de interlocutores para poner en juego los conocimientos, y en tanto la actitud, los ajustes "forzaron" a algunos maestros que se habían mantenido al margen de las actividades a que tuvieran un involucramiento más activo.

Así, la "falta de datos" reportada inicialmente pudo aclararse, los maestros notaron que no se trataba de enunciados incompletos sino de otro tipo de problemas, lo que pudo ampliar sus concepciones (quizá no de una manera muy consciente en uno de los casos) acerca de los problemas de suma y de resta, de cómo hay unos más fáciles que otros y qué tipo de elementos son los que los hacen variar.

También de manera implícita, se trató la no-naturalidad de los representantes y de la necesidad de consenso para que puedan convertirse en agentes comunicativos. Los distin-

[87] Por supuesto que no es exclusivo de los maestros. La actitud y los conocimientos previos resultan importantes para cualquier estudiante sea maestro o no, pero los maestros no son cualquier estudiante. A diferencia de sus alumnos ellos son adultos y además son sujetos que enseñan, lo cual imprime características didácticas particulares a los espacios de actualización o capacitación magisterial.

tos esquemas y dibujos elaborados por ellos mismos no siempre resultaban efectivos para comunicar cuál problema se había elegido porque los receptores atribuían otros significados a las marcas gráficas o bien, no poseían referentes que les permitieran interpretar el mensaje. Algo similar puede decirse de los distintos signos gráficos empleados en las comunicaciones para denotar la cualidad de las transformaciones, la posición de la incógnita y la temporalidad. Respecto específicamente al esquema de Vergnaud, puede decirse que el hecho de sólo usar los óvalos (porque era la información con la que se contaba, no por omisión) permitió, para algunos antes y para otros después, reconocer que el esquema está construido de izquierda a derecha y que T_C es atemporal. Es decir, mirando sólo los espacios para las transformaciones (los óvalos), puede reconocerse por las flechas de dirección que primero va el óvalo de la izquierda y luego el de la derecha, o sea, la diferencia temporal entre T_1 y T_2. De la misma manera, si sólo se consideran los rectángulos, puede notarse que el de la izquierda (estado inicial) va primero que el del centro (estado intermedio) y que el de la derecha (estado final). En cambio, el óvalo de abajo sustituye a los dos de arriba, permite saber qué ocurrió entre el estado inicial y el final (si se conocen) o al componer las dos transformaciones elementales. T_C, entonces fue vista como "lo que pasa entre las dos" (las dos transformaciones elementales).

Un elemento que resultó neural en la última sesión fue la recuperación de los problemas que se plantearon en la entrevista inicial. Para algunos de los maestros la experiencia de la entrevista había resultado impactante, porque no atribuían dificultades mayúsculas a los problemas de suma y de resta, y un taller al respecto se presumía fácil. Entonces, los pobres o al menos desconcertantes desempeños que tenían conciencia de haber mostrado, dejaron una huella profunda en ellos. Cuando pudieron revisar al final de la experiencia cuatro de esos problemas fueron capaces de mirarlos con otros ojos, "se metieron al problema" con otras herramientas y algo de práctica. Ello no quitó que las estructuras especialmente problemáticas (como la del de GUILLERMO) volvieran a causarles dificultades, pero el tipo de preguntas que se hicieron en ese momento y los recursos para abordarlos fueron muy distintos de aquellos que mostraron al inicio.

En particular sobre el problema de GUILLERMO es pertinente hacer algunos comentarios. El análisis a priori se realizó mediante la información obtenida en la entrevista inicial y permitió reconocer algunas de las dificultades que cada problema les planteaba a los maestros. Como se comentó, los problemas de PEDRO y GUILLERMO compartían la misma estructura y ninguno pudieron resolverlo correctamente los maestros. En la serie VANESA volvieron a abordarse problemas con esa estructura y los maestros fueron capaces de representarlos y de resolverlos tras el trabajo de algunas sesiones. Sin embargo, el de GUILLER-

MO se mostró desde el inicio poco pertinente para las sesiones didácticas pues la dificultad principal que mostraron los maestros al tratar de resolverlo estaba relacionada con el contexto en el que el problema se planteaba y no solamente sobre el establecimiento de la relación semántica, objeto de interés de este trabajo. La realización del análisis a priori permitió corroborar que el contexto resulta muy importante en la lectura que el resolutor hace del problema y en la toma de decisiones que lleva a cabo para resolverlo, también fundamentó la decisión de no incluir a este problema en las sesiones didácticas y permitió resaltar la importancia de elegir un contexto para los problemas de SEBASTIÁN y de VANESA que no desviara la atención del establecimiento de la relación semántica.

Otro aspecto que debe señalarse atañe al contrato didáctico. El tipo de contrato didáctico que se estableció durante las sesiones experimentales señaló ciertos márgenes de acción que evitaron que los participantes se desviaran del conocimiento específico que se pretendía estudiar, pero ineludiblemente tales márgenes a la vez limitaron o eliminaron la exploración de otras posibilidades. Por ejemplo, en la rápida desaparición de expresiones de "falta de datos" en los problemas pudo haber incidido el reconocimiento del contrato didáctico que la conductora del taller y que el propio diseño de la ingeniería procuraba instalar. Lo que podría estarse atribuyendo exclusivamente al reconocimiento de otro tipo de problemas aditivos en los que no se requiere ningún estado o medida (y que por lo tanto, no faltaban datos), puede haber sido en parte achacable a que los maestros se percataran de que en ningún comentario de la conductora ni en las discusiones grupales se mencionó que hubiera que estar atentos para detectar a cuáles problemas podrían estarles faltando datos. Quedó implícito que todos los problemas tenían toda la información necesaria (ni más, ni menos) para resolverse.

Algo similar puede decirse sobre el uso del esquema de Vergnaud. El primer contacto que tuvieron con él fue en una tarea de correlación esquemas-problemas con la serie SEBASTIÁN. En el material impreso que se les proporcionó aparecía el esquema con sus respectivos óvalos, rectángulos, flechas y líneas, pero sólo había información numérica en los óvalos y tales números eran los que contenían los enunciados de los problemas con su cualidad. Algunos maestros intentaron "completar" el esquema añadiendo la solución del problema en el sitio en el que creían que se situaba la incógnita, o escribiendo en los rectángulos otros elementos, como operadores de suma o de resta. Sólo funcionó con algunos esquemas (dependiendo de la temporalidad y de los signos de las transformaciones) por lo que abandonaron esa hipótesis pronto, pero debe considerarse respecto al contrato didáctico que en el material impreso sólo había información en los óvalos y que la consigna era encontrar cuál esquema le correspondía a cada problema, no llenarlos o completarlos. De tal manera que podía interpretarse que los esquemas, así como se les proporcionaron, estaban completos y que por alguna razón, desconocida para ellos (al menos en ese momento), en los rectángulos no se escribía nada.

Tras esta primera experiencia, algunas cosas que podrían modificársele a la secuencia serían:

- Las representaciones pictográficas debieron haberse bloqueado desde la consigna o en su defecto, tras su primera aparición. El haberlo hecho hasta la segunda sesión resultó un desaprovechamiento de tiempo pues logró que los maestros sortearan mediante esos dibujos la representación de la cualidad de las transformaciones involucradas en la relación semántica.
- No resultó necesario revisar los 12 problemas de la serie VANESA. Lo importante era en ese punto de la ingeniería enfrentar a los maestros a números con un mayor rango y a las transformaciones opuestas. No se pudieron abordar todos por cuestiones de tiempo, pero aunque lo hubiera habido, se considera que no habría sido necesario.
- Era dudoso que algunos problemas planteados en las sesiones pertenecieran a la 4ª categoría por la manera en la que estaban planteados los enunciados. Aunque ello no fue un obstáculo considerable (porque se hicieron sólo algunos comentarios), mientras menos ambigüedades haya en los problemas, el trabajo didáctico se encuentra mejor orientado.
- El trabajo en la serie VANESA con problemas en los que T_1 era negativa fue muy productivo y habría sido conveniente dedicarle más tiempo. Algo similar puede decirse de los casos en los que $|T_2| > |T_1|$.
- La redacción de problemas a partir de un esquema también se mostró como una actividad muy retadora que posibilitaba la discusión sobre la relación semántica entre los datos. Aunque se hicieron ejercicios, habría sido provechoso explotar más este recurso.
- Otro elemento que resultó interesante en las sesiones finales fue el trabajo con estados o medidas. Cuando se introdujeron algunas cantidades se pretendía que los maestros profundizaran en la diferenciación entre transformaciones y estados y la redacción de enunciados con estos dos elementos. La actividad también permitió "probar" el funcionamiento del esquema, es decir, verificar que si en los óvalos las transformaciones eran correctas, podía agregarse un estado en alguno de los rectángulos y los otros dos, realizando el cálculo correspondiente, se podían llenar. Este tipo de trabajo es también muy útil y se considera que hubiera sido conveniente realizarlo más.

Referencias

Artigue, Michèle (1995). "Ingeniería didáctica" en: Artigue, Michèle; Douady, Règine; Moreno, Luis y Gómez, Pedro (eds.). *Ingeniería didáctica en educación matemática*. Iberoamérica, Bogotá.

Ávila, Alicia, (1996). "La comprensión y el procedimiento", *Básica*, Mayo-Junio, pp. 6-14.

Bermejo, Vicente (1990). *El niño y la aritmética*. Paidós, Barcelona.

Block, David (coord.); Balbuena, Hugo; Block, David; Dávila, Martha; Schulmaister, Mónica; García, Víctor y Moreno, Eva (autores) (1994). *La enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria. Taller para maestros. Primera parte. Programa de actualización permanente.* Secretaría de Educación Pública, Ciudad de México.

Block, David y Fuenlabrada, Irma (1996). "Cómo elaborar materiales de matemáticas para el nivel básico", *Educación 2001*, Número 8, Enero, pp. 31-37.

Block, David; Martínez, Patricia; Dávila, Martha y Ramírez, Margarita (2000). "Uso de los problemas en la enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria" en: Carrillo, José y Contreras, Luis (eds.). *Resolución de problemas en los albores del siglo XXI: Una visión internacional desde múltiples perspectivas y niveles educativos.* Hergué Editora Andaluza, Huelva.

Brousseau, Guy (2000). "Educación y didáctica de las matemáticas", *Educación Matemática*, Volumen 12, Número 1, Abril, pp. 5-38.

Bruno, Alicia y García, Juan Antonio (2004). "Futuros profesores de primaria y secundaria clasifican problemas aditivos con números negativos", *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, Volumen 7, Número 1, Marzo, pp. 25-48.

Carpenter, Thomas and Moser, James (1982). "The Development of Addition and Subtraction Problem-Solving Skills" in: Carpenter, Thomas; Moser, James and Romberg, Thomas (eds.) *Addition and subtraction: a cognitive perspective.* Lawrence Erlbaum Associates Publishers, Hillsdale, New Jersey, pp. 9-24.

Carraher, *et al,* (1991). *En la vida diez, en la escuela cero.* Siglo Veintiuno, Ciudad de México.

Chamorro, María (2003). "Herramientas de análisis en didáctica de las matemáticas" en: Chamorro, María (2003) (coord). *Didáctica de las matemáticas para Primaria.* Pearson Prentice Hall, Madrid, pp. 69-94.

Chapman, Olive (2000). "Mathematics teachers' beliefs about problem solving and teaching problem solving" in: Carrillo, José y Contreras, Luis (eds.). *Resolución de problemas en los albores del siglo XXI: Una visión internacional desde múltiples perspectivas y niveles educativos.* Hergué Editora Andaluza, Huelva.

Chevallard, Ives; Bosch, Marianna y Gascón, Josep (1998). *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje.* SEP-Cooperación española, Fondo Mixto de Cooperación Técnica y Científica México-España, España.

Duval, Raymond (1999). *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Universidad del Valle, Cali.

Edwards, Derek y Mercer, Neil (1994). *El conocimiento compartido. El desarrollo de la comprensión en el aula.* Paidós y el Centro de Publicaciones del Ministerio de Educación y Ciencia, Barcelona.

Fuenlabrada, Irma (1988). “Reflexiones sobre las experiencias en cursos con docentes bajo una propuesta de trabajo grupal” en: Nemerovsky, M. y Fuenlabrada, I. (eds.), *Formación de maestros e innovación didáctica.* Departamento de Investigaciones Educativas del CINVESTAV, Ciudad de México.

Gerofsky, Susan (1996). “A Linguistic and Narrative View of Word Problems in Mathematics Education”. *For the Learning of Mathematics*, 16, 2, June, pp. 36-45.

Greeno, James (1987). “Instructional Representations Based on Research about Understanding” in: Schoenfeld, Alan (ed.). *Cognitive Science and Mathematics Education*. Lawrence Erlbaum Associates, Publishers, Hillsdale, New Jersey, pp. 61-88.

Herbst, Patricio and Kilpatrick, Jeremy (1999). “Pour Lire *Brousseau*”, *For the learning of mathematics*, Volume 19, Number 1, pp. 3-10.

Lampert, Magdalene (1998). “Introduction” in: Lampert, Magdalene and Blunk, Merrie (eds.). *Talking Mathematics in School. Studies of Teaching and Learning.* Cambridge University Press, United States of America, pp. 1-14.

Lave, Jean (1992). “Word problems: a microcosm of theories of learning” in: Light, Paul and Butterworth, George (eds.). *Context and Cognition. Ways of Learning and Knowing.* Lawrence Erlbaum Associates Publishers, Hillsdale, New Jersey, pp. 74-92.

Marshall, Sandra (1995). *Schemas in problem solving.* Cambridge University Press, New York.

Maza, Carlos (1995). *Aritmética y representación.* Paidós Ibérica, Barcelona.

Nesher, Pearla (1982). “Levels of Description in the Analysis of Addition and Subtraction Word Problems” in: Carpenter, Thomas; Moser, James and Romberg, Thomas (eds.) *Addition and subtraction: a cognitive perspective.* Lawrence Erlbaum Associates Publishers, Hillsdale, New Jersey, pp. 25-38.

Peltier, Marie-Lise (2003). “Problemas aritméticos. Articulación, significados y procedimientos de resolución”. *Educación Matemática*, Volumen 15, Número 3, Diciembre, pp. 29-55. Traducción de David Block y Guillermina Waldegg.

Puig, Luis y Cerdán, Fernando (1988). *Problemas aritméticos escolares.* Síntesis, Madrid.

Puig, Luis (1996). *Elementos de Resolución de Problemas*. Comare, Granada.

Romberg, Thomas (1982). “An emerging paradigm for research on addition and subtraction skills” in: Carpenter, Thomas; Moser, James and Romberg, Thomas (eds.). *Addition and subtraction: a cognitive perspective.* Lawrence Erlbaum Associates Publishers, Hillsdale, New Jersey, pp. 1-7.

Seeger, Falk (1998). “Representations in the mathematics classroom: Reflections and constructions” in: Seeger, Falk; Voigt, Jörg and Waschescio, Ute (eds.). *The culture of mathematics classroom.* Cambridge University Press, United States of America, pp. 308-343.

Silver, Edward (1987). “Foundations of cognitive theory and research for mathematics problem-solving instruction” in: Schoenfeld, Alan (ed.). *Cognitive Science and Mathematics Education*. Lawrence Erlbaum Associates, Publishers, Hillsdale, New Jersey, pp. 33-60.

Stevens, Reed and Hall, Rogers (1998). “Disciplined Perception: Learning to See in Technoscience” in: Lampert, Magdalene and Blunk, Merrie (eds.). *Talking Mathematics in School. Studies of Teaching and Learning.* Cambridge University Press, New York, pp. 107-149.

Vergnaud, Gerard (1982). “A classification of cognitive tasks and operations of thought involved in addition and subtraction problems” in: Carpenter, Thomas; Moser, James and Romberg, Thomas (eds.). *Addition and subtraction: a cognitive perspective.* Lawrence Erlbaum Associates Publishers, Hillsdale, New Jersey, pp. 39-59.

Vergnaud, Gerard (1985). *El niño, las matemáticas y la realidad*. Trillas, Ciudad de México.

Verschaffel, Lieven; Greer, Brian and De Corte, Erik (2000). *Making sense of word problems.* Swets & Zeittinger Publishers, Netherlands.

Vigotsky, Lev. S. (1979). *El desarrollo de los procesos psicológicos superiores.* Editado por M. Cole, *et al*. Crítica, Barcelona.

Wertsch, James (1988). *Vigotsky y la formación social de la mente.* Paidós, Barcelona.

Wiest, Lynda (2002). “Aspects of Word-Problem context that influence children´s problem-solving performance”. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, Spring edition, Volume 24, Number 2, pp. 38-52.

Anexos

PROBLEMAS DE LA ENTREVISTA INICIAL

ORO

La reserva de oro de un banco bajó 642 lingotes en el transcurso del año 1973. Durante el primer semestre del mismo año había bajado 1031 lingotes. ¿Qué pasó en el transcurso del segundo semestre? (-1031) + [+389] = (-642)

GUILLERMO

A Guillermo le gusta hacer apuestas. En la primera ganó $260 y luego volvió a apostar. Haciendo cuentas de las dos apuestas vio que en total había perdido $85. ¿Qué pasó en la segunda apuesta? (+260) + [-345] = (-85)

PEDRO

Pedro jugó dos partidos de canicas. Durante el primero ganó 7. Después jugó un segundo partido. Haciendo cuentas de los dos partidos notó que en total había perdido 2 canicas. ¿Qué pasó en el segundo partido? (+7) + [-9] = (-2)

NACIMIENTOS

En una ciudad, el excedente de los nacimientos sobre los decesos fue de 1293 personas entre 1950 y 1960 y de 14084 entre 1950 y 1970. ¿Qué sucedió entre 1960 y 1970? (+1293) + [+12791] = (+14084)

LULÚ

Lulú pidió 2 cajas de aguacates para vender en su tienda. Cuando las abrió y revisó el contenido notó que en la primera había sólo 23 aguacates en buen estado. Al terminar de revisar las dos cajas contó los aguacates que estaban en buen estado y sumó 81. ¿En qué condiciones estaban los aguacates de la segunda caja? (+23) + [+58] = (+81)

DESCUENTOS

Te están descontando $720 de tu quincena por un préstamo que solicitaste, además, tuviste dos faltas sin previo aviso en esa quincena. Al recibir tu salario notaste que te dieron $935 menos de lo que normalmente recibes. ¿Cuánto te descontaron por los días que faltaste? (-720) + [-215] = (-935)

PROBLEMAS DE SEBASTIÁN

1. Sebastián jugó dos partidos de canicas. En el primero ganó 23 canicas y en el segundo ganó 39. ¿Cómo quedó al finalizar los dos partidos? (+23) + (+39) = [+62]

2. Sebastián jugó dos partidos de canicas. En el primero perdió 23 y en el segundo perdió 39. ¿Cómo quedó al finalizar los dos partidos? (-23) + (-39) = [-62]

3. A Sebastián le gusta jugar a las canicas. Jugó un primer partido y cuando jugó el segundo, ganó 39. Cuando terminó los dos partidos vio que había ganado 62 canicas. ¿Qué pasó en el primer partido? [+23] + (+39) = (+62)

4. A Sebastián le gusta jugar a las canicas. Jugó un primer partido y cuando jugó el segundo perdió 39 canicas. Al finalizar los dos partidos se dio cuenta de que había perdido 62 canicas en total. ¿Qué pasó en el primer partido? [-23] + (-39) = (-62)

5. Sebastián jugó dos partidos de canicas. En el primero ganó 23 y luego jugó el segundo. Al contar el total de las canicas de los dos partidos notó que tenía 62. ¿Qué pasó en el segundo partido? (+23) + [+39] = (+62)

6. Sebastián jugó dos partidos de canicas. En el primero perdió 23 canicas y luego jugó un segundo partido. Al término de los dos partidos vio que en total había perdido 62 canicas. ¿Qué pasó en el segundo partido? (-23) + [-39] = (-62)

PROBLEMAS DE VANESA

1. Vanesa paga con un billete de $500 una cuenta de $132 en el supermercado. ¿Cuánto le regresan de cambio? (+500) + (-132) = [+368]

2. Vanesa debe $132 y hoy va a cobrar $500 de su semana. Si Vanesa quisiera pagar su deuda ¿cuánto dinero le sobraría de lo de su semana? (-132) + (+500) = [+368]

3. Vanesa abona $132 de una grabadora que vale $500. ¿Cuánto dinero le falta a Vanesa para que le den la grabadora? (+132) + (-500) = [-368]

4. La cuenta del supermercado es de $500, Vanesa sólo lleva $132. ¿Cuánto dinero le faltaría para poder llevarse todo lo que puso en el carrito? (-500) + (+132) = [-368]

5. Vanesa paga con un billete de $500 la cuenta del supermercado. Si le devuelven $368 de cambio ¿de cuánto era la cuenta? (+500) + [-132] = (+368)

6. Vanesa tenía una deuda, hoy cobró $500 de su semana, pagó lo que debía y le sobraron $368. ¿Cuánto debía Vanesa? [-132] + (+500) = (+368)

7. Vanesa hace un abono de una deuda de $500. Si todavía debe $368 ¿de cuánto fue el abono? [+132] + (-500) = (-368)

8. Vanesa ayer pidió prestados $500, hoy pagó algo de ese préstamo pero todavía debe $368. ¿Cuánto dinero pagó hoy? (-500) + [+132] = (-368)

9. Vanesa ayer recibió un pago de $132, hoy tiene que liquidar un adeudo y le faltan $368. ¿Cuánto es lo que debe Vanesa? (+132) + [-500] = (-368)

10. Vanesa tiene una deuda, si hoy hace un abono de $132 todavía deberá $368. ¿De cuánto es la deuda de Vanesa? [-500] + (+132) = (-368)

11. Vanesa cobró ayer lo de su semana, hoy gastó $132 y le quedan todavía $368 de lo que cobró. ¿Cuánto gana Vanesa a la semana? [+500] + (-132) = (+368)

12. Vanesa debe $132, hoy va a cobrar su semana y si paga lo que debe le van a sobrar $368. ¿Cuánto gana Vanesa por semana? (-132) + [+500] = (+368)