CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS DEL I.P.N.

DEPARTAMENTO DE INVESTIGACIONES EDUCATIVAS

El saber enseñado: protagonista en la trama de acontecimientos en el aula

La proporcionalidad en sexto grado de educación primaria

TESIS

Que presenta para obtener el grado de Maestra en Ciencias en la

Especialidad de Investigaciones Educativas

Margarita Ramírez Badillo

Profra. de Educación Media en la especialidad de Pedagogía

Director de Tesis

Dr. David Francisco Block Sevilla

México, D.F. enero, 2004.

Para la elaboración de esta tesis, se contó con el apoyo de una beca de CONACYT.

A los maestros, con respeto y reconocimiento.

AGRADECIMIENTOS

A David Block, por su generosidad para compartir su tiempo y experiencia, por las jornadas extras, por su paciencia, por su confianza, por acompañar la rigurosidad académica de una enorme calidad humana, por el apoyo sin límites para explorar caminos y escribir esta historia; decir gracias nunca será suficiente...

A Eduardo Weiss, Alicia Ávila y Patricia Martínez por la cuidadosa lectura del trabajo y las observaciones y precisiones que hicieron al mismo.

A la Maestra Sylvia Schmelkes, por la revisión y observaciones a la formulación inicial del proyecto y por el estímulo para continuar.

A mis maestros del DIE, por permitirme mirar para y desde otro sitio.

A la Dra. Josefina Granja por "la caja de herramientas", que incluye, además de las académicas, la confianza y aliento para desarrollar el trabajo.

Al personal administrativo del DIE, Lilia Alvarado, Marcia Barrientos, Bulmaro Flores, Gloria Guzmán, Rosa María Martínez Frías, Rodolfo Sánchez, Rafael Tapia, Cornelio Tapia, por su apoyo y colaboración incondicionales.

A Laura Reséndiz por ser parte de la expedición y apoyar durante todo el trayecto.

A Juan Carlos García Palmeros, por las clases de inglés, por enseñar que el aprender no termina nunca.

A Carmen De los Reyes Mejía, por su apoyo, por brindar la mano amiga y por las lecciones de video y fotografía.

A los compañeros del seminario de Didáctica de las Matemáticas: Diana Solares, Armando Solares, Laura Reséndiz, Ligia Ramírez, Moisés García, Tatiana, José Antonio Moscoso, Ana Laura Barrientos, por las conversaciones con cada uno, y los señalamientos puntuales. Creo que no es coincidencia coincidir.

Al maestro Juan M. y a sus alumnos por compartir un fragmento de su historia.

Al "Muégano", por los sueños compartidos: a Tere por escuchar y por compartir su experiencia; a Juan Manuel, por las notas para poder cantar en sol mayor y por el apoyo para el trabajo de campo; a Socorro, por su solidaridad y por poner a disposición, no sólo las llaves de su casa; a Verónica, por la confianza y solidaridad, a José Solano por la amistad a la distancia.

A Víctor Parra, por insistir en dar vuelta a la página y hacer otra lectura.

A mi familia, especialmente a mi hermano Arturo, por su confianza y apoyo.

RESUMEN

El presente estudio consiste en el análisis didáctico de una secuencia de clases comunes acerca de la enseñanza de la proporcionalidad, en un grupo de sexto grado de educación primaria, de una escuela pública urbana en el D.F., y está orientado hacia la recuperación de formas de trabajo específicas de un maestro en la enseñanza de las matemáticas.

Se incluye un esbozo histórico que da cuenta de la transposición didáctica de esta noción y el análisis de las 12 clases que se observaron, en cinco apartados: la comparación aditiva y multiplicativa, la coexistencia de la razón y la fracción, el porcentaje, la regla de tres y las tablas de variación. Así mismo se hace la revisión de algunos elementos que inciden en la gestión de la clase de matemáticas y que fueron recurrentes a lo largo de la secuencia.

Constituye un intento por conjugar una mirada desde la didáctica y desde la etnografía. Se hace evidente el papel protagónico del saber a enseñar, por lo que, sin menoscabo de los conocimientos que los maestros construyen a través de la práctica, se destaca la necesidad de profundizar en los procesos de reconstrucción de los conocimientos específicos que se enseñan en la escuela, en este caso en la proporcionalidad, incluyendo su articulación con las fracciones y la función lineal.

ABSTRACT

The present study consists on the didactic analysis of a sequence of common classes about the teaching of the proportionality, in a group of sixth grade of primary education, of an urban public school in the D.F., and it is guided toward the recovery in a teacher's specific ways work in the teaching of the mathematics.

An historical sketch is included giving account of the didactic transposition of this notion and the analysis of the 12 observed classes, in five sections: the additive and multiplicative comparison, the coexistence of rates and fractions, the percentage, the Rule of Tree and the variation charts. Likewise the revision of some elements impacting the management of the class of mathematics and that they were recurrent along the sequence.

It constitutes an intent to conjugate a perspective from didactics and that from ethnography. It becomes evident for teaching the protagonist role of the knowledge, for which, in spite of the knowledge that the teachers build through the practice, the need to deepen in the processes of reconstruction of the specific knowledge taught in the school, in this case in the proportionality, including their linkage to fractions and lineal functions.

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

Aula, *ca.* 1905. Casasola

Para entender los hechos didácticos que
pueden observarse en una clase de
matemáticas, es preciso interrogarse sobre
la estudiabilidad de la cuestión matemática
planteada y sobre las restricciones
que emanan del contrato didáctico.

Y. Chevallard, M. Bosch y J. Gascón

INTRODUCCIÓN

La parte central del presente estudio consiste en un análisis didáctico de una secuencia de clases comunes[1] sobre la enseñanza de la proporcionalidad, en un grupo de sexto grado de educación primaria, en una escuela pública urbana.

Detrás de esta elección están tanto el interés por recuperar formas de trabajo de un maestro al enfrentar la tarea de enseñar una noción que ha tenido distintos grados de explicitación en las diversas propuestas curriculares, como la intención de identificar y contribuir a explicar algunos rasgos específicos de las prácticas de enseñanza de las matemáticas a partir del análisis de la problemática del contenido a enseñar.

Los propósitos más específicos que orientaron este trabajo, son:

- Identificar en los materiales curriculares cómo se presenta, desde dónde se formula, y de qué manera se organiza y se institucionaliza un conocimiento específico;
- Caracterizar las situaciones didácticas[2] que se ponen en juego, los recortes que se hacen sobre el contenido, los conceptos que se privilegian y las interrelaciones que se establecen entre ellos, así como los caminos que se eligen en un contexto de aprendizaje escolar;
- Identificar algunos fenómenos didácticos asociados a la enseñanza y aprendizaje de la proporcionalidad

Las preguntas iniciales se multiplicaron en el trayecto; para orientar el análisis decidimos conservar algunas, entre ellas: ¿qué tipo de prácticas cotidianas se asocian con la enseñanza de la proporcionalidad en un grupo de la escuela primaria?,¿qué aspectos de las situaciones didácticas planteadas por un profesor pueden explicarse desde la

---

[1] A las clases que no son producto de una ingeniería didáctica se les denomina “ordinarias” o “comunes”, para diferenciarlas de aquéllas que son de tipo experimental. En el documento nos referiremos a las clases “comunes” como *prácticas de enseñanza.* Utilizaremos el término *enseñanza,* en el sentido que le asignan Chevallard,Y. M. Bosch y J. Gascón (1998: 58, 196), como un medio para el estudio de las matemáticas.

[2] Utilizamos la expresión *situación didáctica* para referirnos a un conjunto de relaciones que se establecen explícita o implícitamente entre los alumnos, un determinado medio (que incluye instrumentos u objetos) y el profesor, con el propósito de que los alumnos aprendan un conocimiento matemático. Chevallard, Y. M. Bosch y J. Gascón (1998: 217)

selección y organización de las nociones que componen el universo de la proporcionalidad?, ¿cómo han resuelto los maestros los cambios en el currículum, muchas veces imprecisos, de las propuestas pedagógicas para la enseñanza de la proporcionalidad?.

Como podrá anticipar el lector, más que respuestas categóricas, en el proceso hallamos indicios que nos permiten tener un acercamiento a las prácticas de enseñanza en las que se pone en juego un contenido específico; de ello nos proponemos dar cuenta en el presente trabajo, no sin antes argumentar la decisión de analizar prácticas de enseñanza y, específicamente, de la enseñanza de la proporcionalidad.

Por qué decidimos centrar la atención en las prácticas de enseñanza:

Los fenómenos asociados a la enseñanza de las matemáticas suelen abordarse desde dos grandes perspectivas[3]: desde la ingeniería didáctica y desde la observación de las prácticas de enseñanza; la primera permite estudiar, a partir de una situación previamente diseñada, el efecto de variables, previamente identificadas, en los procesos de aprendizaje de los alumnos, y la segunda, que es la que hemos elegido, busca comprender las adaptaciones que hace el maestro, así como las decisiones que toma para enseñar un conocimiento matemático.

En México, el interés por acercarse a las actividades cotidianas que tienen lugar en la escuela y en el aula se ha expresado de manera sistemática desde finales de la década de los setenta, (Bertely, M..2000:17). En este proceso, diversos trabajos producto de la investigación etnográfica desarrollada en el Departamento de Investigaciones Educativas (DIE-CINVESTAV)[4], han destacado la importancia de comprender la práctica docente y escolar en condiciones materiales e institucionales determinadas. (Weiss, Block, Fuenlabrada, et al. 1996).

Desde esta perspectiva, al centrar este estudio en las prácticas de enseñanza, tuvimos la expectativa de que el acercamiento a algunos rasgos específicos del trabajo docente que ocurren en una clase de matemáticas nos permitiría identificar y explicar las condiciones en que se manejan algunos saberes con intención didáctica, es decir, las formas en que se reconstruye un saber a enseñar, las sujeciones a las que está sometido un profesor, las posibilidades y dimensiones que él aporta a una propuesta curricular, cómo resuelve

[3] Existen además otros acercamientos: estudios de corte histórico-epistemológico y debates teóricos en torno a la didáctica misma.

[4] La investigación etnográfica impulsada en sus inicios por Elsie Rockwell, Ruth Paradise y Justa Ezpeleta es reconocida a nivel nacional e internacional; por su relevancia y amplitud, no podemos dar cuenta detallada en este espacio.

las rupturas o lagunas que hay en el currículum, en fin, las condiciones concretas de cómo un profesor, con un grupo de alumnos trabaja en torno a un contenido escolar mediante diversas situaciones que él mismo elige o diseña y cómo coexisten formas de enseñar de hace algunos años con las orientaciones más recientes sobre metodologías y contenido de la proporcionalidad.

Con este acercamiento, pretendemos también incursionar en la riqueza de interacciones entre alumnos y maestro: el esfuerzo de éste último por llevar a puerto su proyecto, los momentos en que las cosas fluyen y los tropiezos, las innumerables decisiones que se toman “en vivo”, sobre la marcha, relativas a la forma de reconstruir el saber en juego (qué aspectos, en qué orden, con qué articulaciones).
Por otra parte, si bien coincidimos en que existe una construcción colectiva de las condiciones muy específicas en las que ocurren los aprendizajes y en que los significados se negocian en el sentido de que terminan por incorporar, de distintas maneras para cada individuo, elementos aportados por todos, (Coll, C.,1999: 17-52) , consideramos también que detrás de ello hay una forma de construir el objeto matemático en el salón, que no es inocua. Es este tejido el que intentamos poner en la mira, caracterizarlo y mostrar su influencia en las dificultades y en los logros del proceso didáctico conducido por el maestro.

Un referente más para optar por el análisis de algunas prácticas de enseñanza en condiciones aproximadas a las que pueden darse en el trabajo diario, es que, para gran parte de la sociedad, la escuela constituye una opción para el aprendizaje, y la enseñanza, una función que por excelencia se le atribuye.

Pretendemos explorar qué hay detrás de las múltiples decisiones de los maestros en relación con la enseñanza de una noción, cómo logran hacer sus propias interpretaciones y organizar de una manera particular una propuesta curricular para trabajar en el aula, así como comprender la forma en que se juega con los significados que la noción va teniendo para cada uno de los participantes en el desarrollo de una clase. Desde la perspectiva que adoptaremos en el presente trabajo, no pretendemos contrastar dichas prácticas con la norma, pues cómo señala Brousseau, G. (1994, 74), “no se trata de juzgarlos ni a ellos ni a los métodos, sino de comprender lo que legítimamente tienen necesidad de hacer” y por qué necesitan hacerlo, incluso, en ocasiones, con un cierto ocultamiento de algunas prácticas.

Por qué decidimos analizar la enseñanza de la proporcionalidad:

Coincidimos con Edwards (1995:145-172) en que los contenidos que se trabajan en la escuela constituyen una forma particular de existencia social de un conocimiento y en que la escuela es el espacio específico donde este conocimiento se reconstruye y adquiere una existencia concreta, no sólo por formar parte de la vida cotidiana escolar sino por constituir una parte importante en la compleja red de relaciones entre el maestro y los alumnos, pero ¿qué tiene de particular la proporcionalidad?, ¿por qué decidimos analizar y problematizar este tema?. Revisaremos a continuación los motivos: primero, la forma en que se hace presente o ausente en distintas reformas al plan y programas de estudio de educación primaria, segundo, la divergencia más acentuada (que en el caso de otros contenidos) entre el saber matemático y el saber matemático escolar, tercero, la identificación de determinados problemas en la reconstrucción escolar de este contenido que desde distintas perspectivas se ha hecho evidente a través de la investigación y, finalmente, mi experiencia como docente de educación primaria.

De los temas de matemáticas que se enseñan en la escuela básica, la proporcionalidad es, probablemente, uno de los que más se han transformado, de manera silenciosa, en el currículum a lo largo de los últimos 50 años. Hasta poco después de mediados del siglo XX, se enseñaba la teoría de las razones y proporciones con la que culminaban los textos de aritmética de la enseñanza media superior. En la escuela primaria mexicana, en los primeros libros de texto gratuitos, se presentaba en sexto grado, una versión elemental, muy simplificada de dicha teoría.

Durante los años sesenta, en varios países de Europa, con el arribo de las matemáticas modernas al ámbito escolar, la teoría de las razones y proporciones dejó de formar parte del currículum y en su lugar se intentó introducir una versión elemental de la teoría de las funciones, y un trabajo más intenso con números racionales, propuesta que, según menciona Comin, E. (2001), en Francia fracasó[5].

En México se dejó sentir la influencia modernizadora nacida en aquellos países, aunque, tal vez, de manera menos drástica. En el capítulo 1 aportaremos detalles de cómo la teoría de las razones y las proporciones, como tal, desapareció del currículum y, en su lugar, se empezó a hablar de “dependencias funcionales”, factor de escala, factor de

[5] Comin, E. (2001: 29), destaca que los disfuncionamientos que, a partir del análisis de los diversos programas en Francia, ha observado, tienen su origen en: la desaparición del estudio de las magnitudes, de las razones y las proporciones en la enseñanza secundaria; la dificultad de formular problemas anteriores en términos nuevos del álgebra; la imposibilidad de rechazar la linealidad, omnipresente en la enseñanza, y la inadaptación del vocabulario de la proporcionalidad para describir relaciones numéricas.

proporcionalidad y “tablas de variación”.El manejo de un nuevo lenguaje no impidió continuar hablando de razones, aunque este concepto quedó aislado y con una articulación incierta con otros, por ejemplo, con las fracciones.

En 1992 se retomó el tema de *razón y proporción,* y con la reforma de 1993, se incluyó en los programas de educación primaria un eje denominado *procesos de cambio*. Con esta reforma, que intentó no precipitar las formalizaciones matemáticas que podrían no ser comprendidas por los alumnos, se promovió un mayor espacio para el desarrollo de procedimientos menos formales y se enfatizó el uso de tablas de variación, aunque poco se especifica en los materiales de apoyo, el tipo de procedimientos que se espera propiciar con su uso. No obstante las posibilidades de esta propuesta, también se tradujo en una opacidad del tema, que se hace evidente en varias cuestiones relacionadas con la secuencia y articulación entre contenidos.

Estos cambios curriculares no han sido ampliamente anunciados o explícitos, más bien llama la atención la forma un tanto velada con que se expresan en documentos y materiales de apoyo que constituyen un referente importante para el trabajo de los docentes. Las nuevas propuestas pretenden mejorar las anteriores, sin borrarlas, en espera de que los maestros hagamos una lectura en la que la experiencia aporte elementos para comprender la propuesta curricular vigente.

Pretendemos analizar la enseñanza de un tema muy antiguo, incluso anacrónico para los matemáticos de hoy, revalorado en la enseñanza escolar, que ha perdido paulatinamente su nítido perfil y ha acuñado una terminología híbrida en la que los nuevos conceptos se funden con los antiguos[6].

Algunos investigadores, Block, David (2001), Bosch, Mariana(1994b), Comin, Eugène (2000, 2001) señalan que para los matemáticos, la proporcionalidad no es un “saber vigente”, ni como objeto de estudio ni como herramienta de trabajo específica, y coinciden en identificar al menos dos implicaciones de esta postura: por una parte la propuesta curricular para la escuela básica tiende a ignorar algunas nociones que tuvieron un lugar importante en las matemáticas, pero que ya no lo tienen a pesar de que su uso social es vigente, y, por otra, el abandono de la enseñanza de estas nociones sin introducir elementos que las suplieran.

[6] Un análisis detallado de cómo un saber se hace presente en distintas instancias vinculadas con la enseñanza, es el que hace Bosch, Mariana (1994a). En su trabajo identifica la presencia de las nociones asociadas a la proporcionalidad, y que ella denomina *universo clásico de la proporcionalidad,* como un componente muy estable y central en las propuestas para lo que ahora corresponde a la educación primaria y secundaria, desde la segunda mitad del siglo XVII.

En el contexto de las investigaciones sobre las prácticas de enseñanza, un estudio que nos pareció interesante es el realizado por Maurice, Jean-Jacques (1996: 323-347) en el que planteó a los maestros dos problemas de proporcionalidad que pueden ser resueltos por dos grandes categorías de procedimientos: uso de un escalar o uso de un operador tipo función[7]. Maurice menciona que a los maestros les resultó difícil identificar alguna diferencia entre los problemas, por lo que predijeron igual posibilidad de ser resueltos con éxito por parte de los alumnos, y todos, sin excepción, mencionaron que el procedimiento más probable de ser utilizado sería el uso del operador tipo función. Los resultados de los alumnos mostraron lo contrario. Esta divergencia entre las perspectivas del docente y los recursos movilizados por los alumnos, incide en que los procedimientos que éstos utilizan no sean observados ni enseñados por los maestros.

En este mismo contexto, Block, D. (2001:13) señala que los maestros de educación primaria a quienes aplicó un cuestionario, reconocen la pertinencia de enseñar la proporcionalidad y consideran que una forma importante de resolución de problemas de este tipo es el uso de la regla de los productos cruzados. Así mismo, identificó algunas dificultades de los docentes para caracterizar situaciones de proporcionalidad, principalmente para diferenciar entre la constante aditiva y la multiplicativa.

Por su parte, Comin, E. (2000:26-92) reporta una experiencia con candidatos a profesores, a quienes se les pidió hacer una crítica a una ficha de trabajo incluida en un material de uso escolar en el que el autor pretendía poner en juego la proporcionalidad. Entre otras situaciones, a Comin le llamó la atención el hecho de que más del 90% de los candidatos aceptara que, en una división, “Cuando el residuo es igual a cero, los dos números son proporcionales. El coeficiente de proporcionalidad está indicado por el cociente”, con lo que se expresaba la confusión de la noción de “múltiplo” con la de “proporcionalidad”. Con base en la misma ficha elaboraron y aplicaron cuestionarios a maestros y la mayoría aceptó las formulaciones erróneas incluidas en el material. Entre las conclusiones, Comin destaca que “los usos inapropiados de los conocimientos matemáticos que hemos observado son indicadores de un fenómeno didáctico general”, asociado a las condiciones de enseñanza.

---

[7] Maurice usó los siguientes problemas: “27kg de papas cuestan 81 francos. ¿Cuánto cuestan 180 kg?” y “36kg de zanahorias cuestan 240 francos. ¿Cuánto cuestan 108 kg de zanahorias?”. El uso de los operadores tipo escalar y función se revisarán con mayor detalle en el capítulo 1. Están asociados al tipo de relaciones que se establecen: los primeros, tipo escalar, se refieren a las relaciones internas a los elementos de un conjunto, mismas que, gracias a los isomorfismos aditivo y multiplicativo se conservan entre los elementos del segundo conjunto; los segundos, tipo función, son aquéllos que expresan una relación constante entre dos conjuntos. (Ver *procedimientos internos* y *procedimientos del operador constante,* en Block, D. 2001:84 -88)

Mi experiencia como docente es un ejemplo de un intento por poner en práctica una propuesta que en la década de los setentas se presentó como innovadora. Trabajé con los programas de 1974, 1977 y 1982 (sexto grado), en los que indistintamente se hacía referencia a la relación funcional entre conjuntos, a la variación funcional, a las funciones y a las proporciones, sin establecer con claridad los vínculos o las diferencias entre estas nociones, hecho que hacía suponer una coexistencia natural y transparente entre ellas.

En diferentes ciclos escolares, con mis alumnos, resolvimos algunas lecciones del libro de texto, como la de Los engranes (SEP,1974: 74), Poleas y bandas (SEP,1974: 11), Cilindro y cono (SEP,1974:122), atendiendo más a la búsqueda de las respuestas que me parecía eran las correctas, que a las nociones que se ponían en juego. Ante esta incertidumbre opté por incorporar las nociones de proporcionalidad adquiridas durante mis años de escolaridad anteriores a la normal (en la normal estudié básicamente la teoría de conjuntos) y recuperar lo que me parecía emblemático de la nueva propuesta: las tablas y las gráficas.

Resulta interesante cómo, ante la ausencia de una propuesta didáctica consolidada, los maestros hacemos una selección, organización e interpretación de un contenido integrando a estros procesos huellas, indicios, de las distintas formas en que un saber específico ha vivido en el currículum. Esta serie de elecciones se torna más compleja si consideramos la presencia de referentes que trascienden el espacio del aula, condiciones externas que inciden en la selección e interpretación de una propuesta curricular; en palabras de Chevallard (1994:315), “la clase es un sistema abierto” en donde no sólo se hace presente un saber, sino también las relaciones institucionales,[8] de las cuales forman parte los programas y materiales de apoyo que se hacen llegar los docentes.

La responsabilidad de esta serie de cambios que se generan fuera del aula, como menciona Comin, E. (2000: 180), no puede adjudicarse sólo al maestro, sino a otras instituciones del sistema educativo encargadas de regular la génesis de los saberes escolares y de ejercer cierta vigilancia epistemológica.

Ante la falta de legitimidad de este contenido en la esfera “del saber sabio” y su organización un tanto incierta en el currículum a partir de los años setentas, cabe preguntarnos por los motivos de su permanencia en las aulas, si su presencia se debe en

[8] Para Chevallard Y. (1994,313-320) el ámbito de la didáctica abarca el conjunto de instituciones donde aparece una intención didáctica a propósito de un reto vinculado con las matemáticas. Considera que “la clase” es un caso particular del sistema didáctico, y por lo tanto, la punta del iceberg. Para Brousseau (1977:3) “el fenómeno (para la apropiación de un saber) no podrá ser comprendido sin que se haga intervenir la especificidad del saber y no podrá ser tratado sin salir del dominio del saber”.

parte a la sensibilidad de los maestros ante las prácticas que por muchos años han permanecido en nuestra sociedad, a la formación que recibieron o a la dificultad para incorporar en esta trama, otros objetos matemáticos de las propuestas más recientes.

Los párrafos anteriores dejan ver que estamos ante un tema que tiene varias aristas, lagunas y asuntos no resueltos, un tema difícil de gestionar en el aula y que empieza a manifestarse poco sólido en los profesores, y si bien existen diversos estudios sobre la adquisición de nociones de proporcionalidad, poco sabemos de cómo los docentes enfrentan su enseñanza y qué adaptaciones hacen de los programas vigentes en donde este contenido no sólo se desdibujó, sino que también se borraron las relaciones con otros contenidos, como cociente, razón y fracción.

Nuestro acercamiento a la problemática de la enseñanza de la proporcionalidad

El apartado anterior permite entrever por qué, en nuestro acercamiento a esta problemática, pondremos en primer plano la cuestión del saber específico que es objeto de enseñanza. Esto no significa que consideremos que otras problemáticas, menos específicas del saber que se enseña, sean menos importantes, se trata únicamente de un énfasis, complementario a otros, que esperamos aporte a la comprensión del fenómeno complejo que es la tarea de enseñar en la escuela.

Las categorías de"específico" y "general" son finalmente relativas, como bien lo ilustra Chevallard (1999:107) cuando afirma que la enseñanza de un aspecto muy particular de matemáticas, por ejemplo, la noción de ángulo, comparte aspectos con la enseñanza de otras nociones del mismo ámbito (la geometría), con la enseñanza de las matemáticas en general y, finalmente, con la enseñanza de cualquier contenido en la escuela. Lo específico ocurre siempre en el seno de lo menos específico, y la comprensión de lo uno requiere, muchas veces, de la comprensión de lo otro.

Lo arduo en la tarea de análisis de las clases es adentrarse en el estudio de un aspecto, considerando aquello que responde a su especificidad, pero sin perder de vista los vínculos que este aspecto guarda con aspectos más generales, y sin embargo sustantivos, determinantes de la forma que asume lo específico.

En nuestro acercamiento, el referente más importante es la didáctica de las matemáticas, por constituir una disciplina que ha problematizado la cuestión de los saberes específicos que son objeto de enseñanza y que aporta herramientas conceptuales para analizarla. No obstante, la didáctica ha avanzado todavía poco en el desarrollo de categorías teóricas y de recursos metodológicos que ayuden a comprender aspectos menos específicos de la enseñanza las matemáticas, en particular, los relativos a las prácticas de los maestros.

Frente a esto, hemos optado por no hacer un trabajo “ortodoxo” de didáctica. Recuperamos sus aportes en lo que refiere a la comprensión del objeto de enseñanza, pero, para estudiar las prácticas, recurrimos también a aportes de otras líneas de investigación, en particular de la etnografía. A continuación precisamos un poco más nuestros puntos de partida.

Aportes y límites de la didáctica de las matemáticas

La didáctica de las matemáticas, en el proceso de configurar su campo de estudio, se enfrenta a retos relacionados tanto con la delimitación de su ámbito como con la manera de abordar los fenómenos asociados a la enseñanza de saberes matemáticos. En este sentido, los aportes de la investigación han sido decisivos para ampliar la perspectiva de esta disciplina -que durante muchos años se caracterizó por poseer un fuerte componente normativo - y para hacer evidente la diversidad de fenómenos y problemas didácticos que se presentan en el aula y fuera de ella.[9]

Chevallard , Bosch y Gascón (1998:71-76) y Gascón (1998:7-34), destacan dos tendencias en la didáctica: la *didáctica clásica* y la *didáctica fundamental.* La primera pone énfasis en el estudio de la actividad cognitiva del sujeto y en la actividad del docente en relación con lo que debe saber y saber hacer para propiciar el aprendizaje de los alumnos, sin problematizar los saberes que utiliza; desde esta perspectiva, el conocimiento matemático o algunas nociones como “enseñar o aprender matemáticas”, no se cuestionan o se formulan al margen de la didáctica.

> El enfoque clásico, en efecto, estudiaba los problemas de transmisión y de adquisición de *nociones matemáticas ya dadas,* es decir, transparentes, no tematizadas por el investigador. Todo ocurría como si la problemática se situara esencialmente del lado de los sujetos, los que aprenden o los que enseñan, en sus capacidades cognitivas, sus concepciones y sus preocupaciones. Lo matemático y lo cognitivo eran claramente distinguidos, (…) el primero se daba por hecho, era el segundo el que se tenía que explicar. (Bosch, Chevallard, 1999: 80)

[9] Rouchier (1994:151) ubica la emergencia de la autonomía de la didáctica de las matemáticas hacia finales de los años setenta; tal autonomía se constituye alrededor del sistema didáctico como objeto de estudio, el cual implica una intención de enseñar un contenido. Desde esta perspectiva el aula se identifica como un lugar por excelencia para la enseñanza.
Para Chevallard, Bosch y Gascón (1998: 60) “La *didáctica de las matemáticas* es la ciencia del estudio y de la ayuda al estudio de las matemáticas. Su objetivo es llegar a describir y caracterizar los procesos de estudio - o *procesos didácticos*- de cara a proponer explicaciones y respuestas sólidas a las dificultades con que se encuentran todos aquellos (alumnos, profesores, padres, profesionales, etc.) que se ven llevados a estudiar matemáticas o a ayudar a otros a estudiar matemáticas” Para Brousseau (1977: 3) la didáctica es un proyecto “las más de las veces social, para hacer que un sujeto se apropie de un saber constituido o en vías de constituirse” ; también la define como ”Ciencia de las condiciones específicas de la difusión (impuesta) de los saberes matemáticos útiles a las personas y a las instituciones humanas” (citado por Gascón,1998:28)

La *didáctica fundamental*[10] se caracteriza principalmente por incluir en su problemática el conocimiento matemático vinculado a las prácticas de enseñanza y de aprendizaje que tienen lugar en contextos específicos, así como otras nociones que suelen considerarse como "herramientas transparentes, no cuestionadas"[11]. Este acercamiento se caracteriza también por ampliar el plano de lo didáctico más allá de lo que ocurre en el aula y por incluir *el proceso de estudio* como objeto primario de la investigación en didáctica, entendido el *proceso de estudio* como la actividad característica tanto del trabajo del alumno como de quienes intervienen en la producción y enseñanza de las matemáticas.

> Su singularidad originaria consiste *en tomar como objeto primario de estudio* (…) no al sujeto que aprende o al sujeto que enseña, sino *el saber matemático que ellos han considerado estudiar juntos,* así como la actividad matemática que su proyecto común de estudio les orienta a realizar. Para explicar las actividades de enseñanza, (…) la didáctica postula que el "misterio" está *en las matemáticas,* y no *en los sujetos* que tienen que aprender y enseñar las matemáticas. De ahí que el objeto de estudio de la didáctica no pueda encontrarse encerrado en las instituciones de enseñanza y que sea necesario situarlo en el marco más amplio de las prácticas matemáticas, en el conjunto de las instituciones de la sociedad. (Bosch y Chevallard, 1999: 80)

En el campo de la didáctica fundamental se han desarrollado dos teorías, la teoría de las situaciones didácticas (TSD), y la "antropología didáctica".

Varios de los conceptos centrales de la TSD se construyeron en el marco de un proyecto que consistió en estudiar procesos de enseñanza (y sus efectos en el aprendizaje), mediante la *producción* de dichos procesos y no solamente mediante la observación de los existentes. Dicha producción, al mismo tiempo que permitió retroalimentar la construcción teórica, se hizo tomándola como su principal referente; es decir, se crearon, se aplicaron, se observaron y se analizaron secuencias de situaciones didácticas diseñadas con el propósito de estudiar condiciones para el aprendizaje, a partir de

[10] El término *fundamental,* asociado a la investigación básica que permite explorar aspectos de un campo determinado surge a principios de los setenta cuando Brousseau planteó la necesidad de configurar un modelo propio para explicar, desde la didáctica, los problemas de la actividad matemática.

[11] Chevallard, Bosch y Gascón (1998: 74) y Gascón (1998:15) Mencionan como ejemplo de herramientas que fueron transparentes antes de convertirse en nociones matemáticas, las nociones de "número real", "función" y "conjunto" .Hacen referencia a las nociones paramatemáticas y nociones matemáticas; las primeras son nociones-herramienta para describir y estudiar otros objetos matemáticos, y las segundas, son objetos de estudio en sí mismos, además de herramientas útiles para estudiar otros objetos matemáticos. El término de *noción paramatemática* es introducido por Chevallard en 1985 y el sentido es relativo a la institución en la que nos situemos, por ejemplo, la *demostración* puede ser un objeto paramatemático en un nivel educativo, pero en otro puede considerarse objeto de estudio. En tanto no son objetos de estudio en sí mismos, se manejan como herramientas transparentes, no cuestionables. De manera análoga, hacen referencia a ciertos objetos paradidácticos que no se han considerado como objetos de estudio en sí mismos, es decir, no se han considerado dentro de la problemática didáctica, por ejemplo, "¿qué significa adquirir el concepto de proporcionalidad?", o "¿qué relación hay entre la actividad de resolución de problemas y la enseñanza de las matemáticas?"

concepciones definidas, o en construcción, del conocimiento matemático, de su aprendizaje y de la intervención didáctica.

Debido a esto, aunque la TSD no pretende ser una "guía para la acción", es susceptible de ser mirada de esta manera y de hecho, ha sido fecunda desde ese punto de vista: conceptos como situación adidáctica, devolución, institucionalización, pueden ser comprendidos como características deseables en una situación didáctica; pero más allá de este uso, varios de los conceptos de la TSD proporcionan herramientas teóricas para analizar las tareas que se proponen a los alumnos desde el punto de vista de las formas en que ponen en funcionamiento los conocimientos matemáticos, así mismo aportan herramientas para analizar la relación del alumno con el conocimiento, o, de manera más amplia, para analizar la "situación didáctica", entendida como las interacciones entre alumnos, maestro, saber y medio.

En tiempos más recientes, se observa, desde la TSD, un creciente interés por comprender el funcionamiento de las clases comunes, interés posiblemente acrecentado por la constatación reiterada de las diversas y profundas dificultades de los maestros para llevar a cabo cierto tipo de procesos didácticos en el aula. Conceptos como "contrato didáctico", "equilibrio del sistema didáctico", "medio", entre otros, han empezado a ser utilizados en esta perspectiva, por ejemplo, Margolinas, C.(1998) y Ávila A. (2001).

Por otra parte, del interior mismo de la escuela francesa, se ha desarrollado una corriente que tiende a abrir significativamente la problemática estudiada, asumiendo, diría su principal impulsor, Chevallard, el estudio de las condiciones existentes de la enseñanza de las matemáticas, esto es, el estudio de aquello que la hace posible, y que la hace ser como es, antes que el estudio de las formas óptimas de la enseñanza. A partir de la obra "La transposición didáctica", Chevallard inaugura lo que él llama la "Teoría antropológica de la didáctica"[12] aportando conceptos que prometen ser fecundos en el análisis de las prácticas, como el concepto mismo de transposición que nos ayuda a explicar cómo un conocimiento está sometido a sujeciones de distinto tipo que afectan en mayor o menor

[12] Chevallard (1991: 139-182) A partir de la antropología cognitiva desarrolla una *antropología didáctica de los saberes,* la cual tiene como propósito el manejo de éstos con intención didáctica y en particular, con la enseñanza.. Lo *didáctico* es una dimensión de la realidad antropológica cuyo campo de acción es más amplio que la enseñanza. "La *didáctica de las matemáticas* se presenta como un saber pertinente para el conjunto de las prácticas sociales con matemáticas. La utilización de la didáctica de las matemáticas no es patrimonio exclusivo de los enseñantes". La teoría antropológica de la didáctica sitúa a la actividad matemática, y por lo tanto a la actividad de estudio de las matemáticas en el conjunto de actividades humanas y de instituciones sociales.

grado su sentido (necesidad de secuenciar, de establecer cortes y de evaluar), o como las nociones de praxeología[13] matemática y praxeología didáctica, entre otras.

Con elementos de ambas aproximaciones (la TSD y la antropología didáctica), estudios, como los presentados por Brun,Jean, Conne, et al. (1998), centran su análisis en el trabajo del profesor. Estos acercamientos, aunque distintos entre sí[14], tienen en común hacer evidente la necesidad de abordar el sistema didáctico en su conjunto y, concretamente el funcionamiento de los saberes en ese sistema didáctico. Destacan la necesidad de estudiar el trabajo del maestro considerando el de los alumnos y el saber matemático en juego.

Otra expresión de la búsqueda de herramientas para analizar la complejidad de la enseñanza en el aula, es el trabajo realizado en Francia por un equipo de investigadores en torno a una lección sobre los números enteros, (Blanchard-Laville, Claudine,1997). En este estudio el propósito inicial era analizar los componentes implícitos presentes en las acciones y los discursos de los maestros en las clases de matemáticas y sus efectos sobre los aprendizajes de los alumnos. Esta tarea resultó muy amplia, por lo que decidieron estudiar sólo una clase con una duración de 63 minutos. Como resultado se tiene una gama de acercamientos, tanto de tipo epistemológico, como didáctico, sociológico y psicológico[15].

En México se cuenta aún con muy pocos trabajos desarrollados con base en la observación de la actividad del maestro y de los alumnos en clases no experimentales y

[13] La praxeología, se forma de *praxis*, práctica, y en el caso de las matemáticas se refiere a la actividad matemática, es decir, a la realización de tareas y al uso de técnicas, y *logos*, que se refiere a un discurso razonado que permiten justificar y entender lo que se hace, es decir, a las tecnologías y las teorías. El término *tarea* se utiliza para hacer referencia una acción específica; una *técnica* se identifica de manera genérica como un “saber hacer” un tipo de tareas; la *tecnología* constituye el discurso racional sobre el saber hacer (técnicas), y las teorías constituyen un nivel superior de justificación, explicación y producción de una praxeología. La frontera entre lo matemático y lo didáctico no es clara; para elaborar una praxeología matemática, el matemático necesita una praxeología didáctica. (Chevallard, Bosch y Gascón,1998: 251-254)

[14] Otros estudios son: Alain Mercier aborda un enfoque *biográfico* que consiste en analizar el desempeño de un alumno durante una clase en la que se enfrenta a tareas relacionadas con el aprendizaje de los números enteros; a través del análisis revela también algunos comportamientos implícitos del profesor. Francia Leutenegger analiza los fenómenos didácticos asociados a las micro decisiones que toma el maestro durante una secuencia de clases para la enseñanza de la numeración. Alain Bernard, con referentes teóricos de Vygotski y Vergnaud, aborda la acción de tutoría por parte del maestro a partir de las interrogantes que plantean los alumnos y Denise Grenier, analiza clases no experimentales, con apoyo de las nociones de *medio* y *contrato didáctico* . (Brun,Jean et al.1998),

[15] A partir de una sola lección se analiza el saber matemático en el desarrollo de la lección; las interacciones maestro – alumno y algunas variables de género y socioeconómicas; las condiciones que permiten al alumno avanzar conceptualmente en el campo de las matemáticas, desde una perspectiva psicoanalítica; la construcción del espacio psíquico por parte del docente; la transposición del saber y episodios de la biografía didáctica de algunos alumnos de la clase.

en relación con un saber específico de matemáticas: en el trabajo de Alicia Ávila (2001), ocupan un lugar central las interacciones del profesor y alumnos en torno a algunos contenidos. El análisis se orienta hacia las formas de enseñanza en el contexto de propuestas curriculares oficiales; logra mostrar la diversidad de interpretaciones a que han estado sujetas las propuestas y destaca habilidades docentes que están más allá de las mismas. Este trabajo no asume como objeto de estudio el saber que es objeto de enseñanza.

Por su parte, Ana María Álvarez (2002) analiza la enseñanza de los primeros números y, particularmente, la forma en que se utiliza el libro de texto en dicha tarea. Demuestra, a través del estudio de dos casos, formas contrastantes de organizar la enseñanza de este contenido específico, y, en consecuencia de interpretar y utilizar los libros de texto oficiales. No obstante, en este trabajo la "voz de los niños" está prácticamente ausente, lo que reduce las posibilidades de una comprensión más profunda de las decisiones tomadas por los docentes.

El presente trabajo pretende continuar la búsqueda emprendida en los anteriores, a saber, la construcción de formas de acercamiento al acto de enseñanza de las matemáticas en el aula. A continuación se precisa el acercamiento por el que se optó.

Un acercamiento no ortodoxo, centrado en el saber que es objeto de enseñanza.
Como ya hemos mencionado, en la presente investigación, optamos por analizar una problemática que, aunque se expresa en el acontecer de las clases, es anterior a éste: la estructura misma del edificio conceptual, la forma en que ésta condiciona la función y la modalidad de los problemas que se plantean, y, por supuesto, la forma en que, junto con otros factores, posibilita y limita a la vez, cierto tipo de interacciones en las clases y, a final de cuentas, cierto tipo de aprendizajes.

En este proceso de pretender conjugar la forma en que se hace presente un saber en un grupo escolar con el proceso que siguió este saber para ocupar un lugar en el currículo, desde el punto de vista metodológico, nos enfrentamos a varios retos, no del todo resueltos.

Las formas de organización del contenido están íntimamente vinculadas con concepciones más generales sobre el contenido, sobre las matemáticas, y sobre los procesos de aprendizaje de los alumnos, pero también están vinculadas a referentes más inmediatos y tangibles, como la sucesión de programas y textos para la enseñanza a lo largo de los años. La consideración de estos cambios que han sufrido los materiales curriculares relativos a la enseñanza del saber en juego (la proporcionalidad) nos permitirá atender también, en cierta medida, a la dimensión histórica que cruza las prácticas escolares[16].

Por otra parte, para el análisis de las estrategias didácticas utilizadas por un profesor, pretendemos considerar otro referente fundamental de la acción conjunta del maestro y del alumno: el desempeño de los alumnos, sus respuestas, sus resoluciones, sus interacciones.

La unidad de análisis[17] que utilizaremos será el *sistema didáctico* que opera en el conjunto de las doce clases observadas. Esta elección se basa en la propuesta de Chevallard, Bosch y Gascón(1998:196-206), quienes consideran que el sistema didáctico está formado por las cuestiones matemáticas, los estudiantes y el profesor. Así mismo destacan que es de carácter colectivo en tanto que se realiza en un grupo en donde el aprendizaje tiene un componente individual y uno social. Esta propuesta no se contrapone con la de Brousseau, quien considera que el sistema didáctico está integrado por el alumno, el maestro, el saber y el medio. Lo que destaca Chevallard, y que en el presente trabajo compartimos, es el carácter colectivo del estudio de las matemáticas en un grupo escolar.

Una noción en la que hallamos un fuerte apoyo para hacer el análisis es la de *situación didáctica,* pues en la TSD comprende "las relaciones establecidas explícita o implícitamente entre los alumnos, un cierto medio (que incluye instrumentos y objetos) y el profesor, con el objetivo de que los alumnos aprendan el conocimiento matemático" (Chevallard, Bosch y Gascón,1998: 217). Así mismo, la noción de *situación fundamental* en tanto conjunto mínimo de situaciones que permiten engendrar, por manipulaciones de los valores de sus variables didácticas, un campo de problemas suficientemente extenso como para proporcionar una representación del conocimiento, según como se haya reconstruido éste en la institución didáctica, nos ayudó a caracterizar las situaciones que usó el maestro, y a conocer los diversos sentidos y recortes que hace el maestro sobre el contenido.

---

[16] "Rockwell sostiene que la etnografía educativa tradicional dedicada a interpretar pequeños fragmentos de interacción, olvida el modo en que estos episodios se insertan en un marco histórico y social determinado " (…) La etnografía educativa, como sostiene desde hace años Elsie Rockwell [1980], además de documentar la vida cotidiana en las escuelas y salones de clases, debe abarcar el análisis de los procesos históricos, sociales y estructurales que intervienen en su generación".(Bertely, 2000: 24, 32)

[17] Para Coll, (1999: 44-46) la *unidad de análisis* está situada en el centro de las opciones teóricas y metodológicas de todo sistema explicativo. Plantea la necesidad de diseñar un *sistema de unidades de análisis* que tenga la posibilidad de hacer evidentes los múltiples planos y dimensiones sin fraccionar u ocultar la "interconexión e imbricación total entre la actividad individual del alumno y la actividad conjunta del profesor y los alumnos". Hace referencia a una unidad de análisis triádica que integre la interacción sujeto/objeto/otros sujetos.

La didáctica de las matemáticas tiene el potencial que nos permitirá caracterizar las situaciones que organiza el maestro, el medio de interacción que en ellas se ofrece al alumno, las tareas concretas que conforman estas situaciones y las interacciones mismas que nos permitan conocer ciertas características del conocimiento que se pone en juego en el aula con el propósito de que los alumnos aprendan un saber específico; no obstante, esta complejidad que hemos enunciado nos hizo suponer que una teoría difícilmente sería suficiente para interpretar y explicar lo que ocurre en el aula, motivo por el que, de manera paralela a las aportaciones de la didáctica, recurrimos al apoyo de algunas herramientas del trabajo etnográfico.
Rockwell, E. (1994: 64) señala que "en años recientes, varios investigadores del DIE han encontrado formas distintas de utilizar la mirada etnográfica, siempre sujeta a problemas específicos. Varios proyectos han integrado herramientas etnográficas en estudios comparativos en mayor escala (Ezpeleta, 1989; Weiss, 1992), o en el análisis de estructuras curriculares e institucionales (Quiroz, 1991; Remedi, E., en proceso) (…)" o combinado el análisis etnográfico con el análisis del discurso (Candela,1999)) y con la investigación historiográfica (Rockwell, 1996).

Entre las múltiples aportaciones de la perspectiva etnográfica en el campo de la investigación educativa, está el hecho de llamar la atención hacia el estudio de la expresión concreta y cotidiana de lo que se enseña en la escuela y hacia las múltiples dimensiones y sentidos que puede adquirir la experiencia escolar, Rockwell (1995:15-18). Así mismo, se ha hecho evidente el carácter local de las prácticas de enseñanza en las que convergen tanto una interpretación de las propuestas curriculares bajo determinadas condiciones institucionales que las posibilitan como un conjunto de tradiciones pedagógicas que cada maestro construye o incorpora.

> "No se trata simplemente de que existan algunas prácticas que corresponden a las normas y otras que se desvían de ellas. Toda la experiencia escolar participa de esta dinámica entre las normas oficiales y la realidad cotidiana" Rockwell (1995:14)."

Son diversos los estudios que, bajo esta perspectiva y con énfasis en algún aspecto del trabajo docente, han contribuido a la reconstrucción y comprensión de la actividad escolar. Rockwell (1994:66) señala que varios estudios realizados en el DIE han contribuido a reconstruir:

El contenido variable del trabajo docente
Las relaciones entre maestros en las escuelas
Los usos de los recursos: el tiempo, el espacio, los libros, el pizarrón
La formación de los maestros en la práctica
Las valoraciones y las tradiciones docentes
Las estrategias de supervivencia de los maestros

La incidencia real del currículum y de las reformas educativas en la práctica
Las relaciones entre instancias administrativas y sindicales y el trabajo de los Maestros

Revisamos con particular interés aquellos trabajos que bajo esta mirada abordaron la enseñanza de un contenido específico, entre ellos, Candela (1997,1999), Ciencias Naturales; Mercado (2002), matemáticas; Rockwell y Gálvez (1982), ciencias naturales y sociales, y Taboada (1999), historia. Estos estudios constituyeron un apoyo para consolidar nuestro interés por integrar la dimensión del análisis del contenido con las formas en que se interpreta y se hace vivir en la clase, así como para dar prioridad a la reconstrucción de la práctica en sí misma destacando las propias interpretaciones y decisiones que el maestro toma antes, durante y después de la clase.

Además de los planteamientos más generales de la investigación etnográfica que citamos antes, recurrimos a una forma de análisis de los datos empíricos tributaria, en cierta medida, del acercamiento etnográfico: la observación de la clase, la creación de algunas categorías a partir del análisis de lo observado y la descripción acompañada de un trabajo teórico para explicitar las categorías elaboradas,(Geertz, 1989; Hammersley y Atkinson, 1994; Rockwell, 1994).

Respecto a esta posibilidad de conjugar planteamientos de la investigación etnográfica con la didáctica, nos parece importante destacar la propuesta de Weiss (1999:27), quien menciona que en la investigación etnográfica, “la etnografía no vive sola”, sino “en diálogo continuo con otras teorías y formas de investigación”. Entre estos campos con los que convive, cita la vinculación con la didáctica:

> (…)Didáctica y práctica docente no son más que dos nombres académicos para un mismo objeto: la enseñanza. Pero los nombres diferentes no son arbitrarios, uno proviene de la tradición pedagógica, otro de la tradición antropológica (1999:29)

Así mismo reconoce que ante la complejidad de la práctica docente, la didáctica propone un objeto de estudio central: *la enseñanza*. Desde esta perspectiva, “la etnografía de la práctica docente puede concebirse como auxiliar en la reconstrucción didáctica” (2000: 30).

Consideramos que el desarrollo de un paradigma que incluya estas miradas complementarias es un campo sobre el que es necesario incursionar y que seguramente abrirá otras perspectivas a la investigación.

Estrategia general de trabajo

Exploración del ámbito de estudio

Como punto de partida, realizamos una revisión del tema desde dos perspectivas: una de tipo documental y una exploración de campo. La primera constituyó un soporte para el análisis de la proporcionalidad como objeto de enseñanza, en el que consideramos una perspectiva histórica, la presencia de este contenido en los materiales curriculares y algunas investigaciones en torno a su enseñanza. En el Capítulo 1 desarrollaremos estos puntos.

Un primer acercamiento a las prácticas de enseñanza de la proporcionalidad estuvo constituido por algunos elementos que identificamos a través de entrevistas a maestros de educación primaria y la observación de una clase en un grupo de 6º grado.
Con el propósito de identificar algunas percepciones que tenían los maestros en relación con la enseñanza del eje *Procesos de cambio,* así como algunas condiciones que nos permitieran realizar el trabajo de campo, entrevistamos a 5 maestros de 6º grado de distintas escuelas. Las preguntas estuvieron orientadas hacia la pertinencia de la enseñanza de este contenido y las dificultades para abordarlo. Este primer acercamiento nos permitió identificar, por una parte, la coincidencia de los entrevistados en considerar que es un contenido importante para resolver tareas de la vida diaria, y, por otra, distintas percepciones acerca de lo que en este rubro se enseña en la escuela.

Posteriormente observamos el desarrollo de una clase en un grupo de 6º grado de una escuela primaria oficial ubicada en la Delegación G. A. Madero del D.F. Ante nuestro interés por presenciar algunas sesiones, el maestro propuso organizar una clase en la que haría una recapitulación de los temas que se abordaron en el eje Procesos de Cambio, de tal forma que sirviera a los alumnos como un repaso. La observación se realizó al final del ciclo escolar 1996-1997, y él decidió qué actividades y qué nociones abordar[18].

Esta experiencia nos permitió tener un primer acercamiento a la forma particular de concebir la enseñanza de este contenido, así como las nociones que el maestro considera fundamentales, entre ellas, se hicieron presentes las de razón, proporción directa e inversa, regla de tres y el uso de la tabla de variación para representar algunas relaciones.

Selección de los maestros para observar

Tomamos la decisión de observar las clases de dos docentes: una maestra de la escuela CEPP- STUNAM y el maestro que nos permitió realizar la primera observación que citamos anteriormente. Los criterios que respaldan la elección son básicamente dos:

[18] El maestro comentó que, no obstante que en el programa del grado se propone trabajar el eje Procesos de Cambio desde el principio del ciclo escolar, por la complejidad del tema, él y otros maestros de la zona escolar decidieron dejar el tema de las *proporciones* para el final del ciclo escolar. Tanto en la entrevista inicial como en comentarios informales, el maestro se refirió indistintamente al eje procesos de cambio, las proporciones y la proporcionalidad.

disposición para ser observados y la diferencia entre las instituciones en que se desempeñan. Cabe aclarar que el propósito de esta elección fue dar cuenta de fenómenos didácticos en contextos distintos, con las particularidades que cada uno pudiera aportar, por lo que de entrada, descartamos la posibilidad de un estudio comparativo.

Primera fase: observación de clases

Unidad de observación

Con los antecedentes que hemos citado realizamos la observación de clases sobre la enseñanza de la proporcionalidad en dos grupos de sexto grado. Todos los registros aportan una riqueza indiscutible; sin embargo, para el análisis que aquí presentamos decidimos considerar la secuencia trabajada en uno de los grupos debido a que la propuesta del profesor permitía realizar un análisis diacrónico (longitudinal) y, a la vez, un análisis al interior de cada sesión (sincrónico)[19]. En trabajos posteriores esperamos capitalizar el material recabado en la otra escuela.

La unidad de observación fue, en el caso del maestro, una secuencia didáctica de 12 clases completas, con una duración de 90 a 120 minutos cada una[20]. La duración y periodicidad de las sesiones fueron establecidas por el propio profesor, así, de diciembre de 1997 a marzo de 1998, un día de cada semana, a primera hora [21], tuvimos la oportunidad de tener este acercamiento al trabajo en el aula desde la perspectiva de la investigación.

El maestro a quien haremos referencia de aquí en adelante admite que es reconocido en la comunidad escolar como “buen maestro” y expresa explícitamente estar comprometido con su trabajo. Es probable que esta percepción haya influido en la disposición que tuvo para compartir su experiencia. Ha trabajado en la escuela primaria

[19] En el caso de la maestra, en más de una ocasión, al llegar a observar nos informó que no iba a trabajar ese tema porque la dinámica de la escuela o del propio grupo demandaba otro tipo de actividades.

[20] Nos referimos a *secuencia didáctica* en el sentido que le asigna Coll (op.cit. 41-42) “es un proceso de enseñanza y aprendizaje organizado en torno a un conjunto de contenidos tratados por el profesor como una unidad. Para el profesor, la secuencia didáctica es una unidad de planificación y de trabajo de los contenidos escolares: responde a unos objetivos definidos (...), cubre una parte del programa, está formada por una serie de actividades (...) su inicio está claramente marcado y finaliza casi siempre con una o varias actividades formales de evaluación. Una secuencia didáctica puede desarrollarse durante una o varias sesiones”.

[21] Con excepción de las dos últimas clases que, a petición del maestro, se realizaron cada tercer día. El horario fue señalado por el profesor con base en las características e importancia que, desde su punto de vista, tiene la asignatura. El periodo también fue marcado por el mismo maestro y, a diferencia del ciclo escolar anterior en que consideró pertinente abordar el tema al final del ciclo escolar, en esta ocasión utilizó un periodo intermedio.

durante 18 años, de los cuales 10 han sido en sexto grado. Su formación es la normal básica (del plan de 4 años) y la licenciatura de la UPN.

Elaboración de registros

Una vez decidido que queríamos analizar el sistema didáctico en su conjunto, llegamos al aula con la intención de observar y registrar "todo", tal como se desarrollaba la clase. En todas las sesiones tratamos de registrar la mayor parte de los acontecimientos con el apoyo de grabadora, lápiz y papel. También tomamos algunas fotografías, sobre todo en los momentos de puesta en común de resultados y de institucionalización, en donde el pizarrón constituía el espacio idóneo.

Con el propósito de contar con más elementos para el análisis de clases, y con la anuencia y disposición del maestro, hicimos algunas grabaciones con cámara de video[22]. Para el presente trabajo, este material no será motivo de revisión.

A través de los registros tratamos de recuperar la clase como un todo, es decir, la participación del profesor, de los alumnos en el grupo y en los equipos, así como algunos acercamientos individuales, y los recursos utilizados en cada sesión[23].

Presencia de observadores

Tal vez resulte pertinente mencionar que estamos conscientes de que la presencia de observadores en el aula incide para que las clases no se desarrollen como en un día cualquiera de trabajo; por la duración de la secuencia, consideramos que con el tiempo, este efecto disminuyó.

En algunas sesiones el maestro recurrió a nuestra presencia como una motivación para los alumnos hicieran su mejor esfuerzo, haciendo referencia a la importancia que tenía su participación, como experiencia personal y como parte de mostrar a otros lo que ellos sabían hacer[24].

Como observadores, en todo momento respetamos el trabajo dentro del aula; con esto queremos decir que durante el desarrollo de las clases no hubo intervenciones de nuestra parte y que los acercamientos particulares a algún alumno o a algún equipo se suspendían en cuanto el maestro continuaba con el trabajo grupal.

---

[22] Establecimos el compromiso con el maestro de que tanto los registros como los videos se utilizarían únicamente con fines de investigación.

[23] Brousseau (1977) distingue tres tipos de observación: a)para constatar la presencia o ausencia de un acontecimiento; b) la que se realiza con base en hipótesis y cuyo propósito es dar cuenta del sentido de los acontecimientos observados; c)la que pone atención en todo lo que ocurre en la clase. Esta clasificación se desarrolla en el contexto del análisis de clases experimentales. En el presente trabajo, tratamos de considerar esta última.

[24] El maestro utilizó expresiones como éstas: "contesten lo que les preguntan, que no les dé pena", "siéntanse entrevistados", "siéntanse importantes" "demuéstrenle a la maestra".

Después de la clase
Al final de cada sesión se abría un espacio, bastante breve, en el que el maestro solicitaba alguna opinión acerca de su trabajo o hacía referencia a algunas dificultades de los alumnos; como observadores, procuramos abordar el tema de la participación de los alumnos para evitar interferir en las decisiones que el maestro pudiera tomar en cuanto al posterior desarrollo de la secuencia.
Materiales de apoyo utilizados por el maestro
En páginas anteriores hicimos referencia a la distancia entre el *saber a enseñar* y el *saber enseñado*, entre lo prescrito en un programa, lo que el maestro decide enseñar y lo que ocurre en el momento de enseñar, esto como parte de un proceso de transposición didáctica; así mismo expresamos nuestro acuerdo con Chevallard en que lo didáctico está asociado a procesos y fenómenos que trascienden los momentos de encuentro entre maestro y alumnos.

Hacemos referencia a estos planteamientos para entender por qué, si existía un programa y materiales específicos para el grado, el maestro organizó una secuencia didáctica con base en la *Guía para el maestro, sexto grado* (Figueras Olimpia, G.López y S.Mochón,1992: 14-41), material de apoyo elaborado en el contexto de los Programas Emergentes de Reformulación de Contenidos y Materiales Educativos para el ciclo escolar 1992-1993.

El maestro justifica su decisión con argumentos relacionados con la claridad de esta propuesta y la pertinencia para trabajarla en el grado. Es probable que estos argumentos tengan su origen en la cercanía del material con el universo conceptual sobre la proporcionalidad que él maneja, y la distancia que aún guarda, a cuatro años de la reforma, con el eje Procesos de Cambio que se propone en el programa de 1993.

Respecto al libro de texto de 1995 (SEP, 1995d), el maestro anticipó que definitivamente no lo usaría; desde su perspectiva ese libro carecía de una mínima sistematización y las lecciones le parecían extensas y saturadas de información.
Previo al análisis de las clases, a partir de diversos estudios sobre el tema, realizamos un análisis del contenido en el currículum, principalmente de las transformaciones de la proporcionalidad a lo largo de los años, y un análisis de los programas y libros de texto elaborados en México y que constituyen uno de los principales referentes para el trabajo del maestro.

Segunda fase: análisis de los registros

Para el análisis de los registros de las clases, consideramos dos grandes perspectivas: una en la que analizamos cada una de las sesiones, en el orden en que se realizaron, y otra en la que, a partir de la elaboración de algunas categorías, profundizamos en las nociones centrales que el maestro abordó durante la secuencia.

En ambas perspectivas, general y específica, tratamos de no perder de vista la presencia de un sistema didáctico operando en un contexto institucional: la participación del maestro, la de los alumnos, el saber escolar en juego y la situación diseñada o seleccionada para propiciar el aprendizaje [25].

El primer acercamiento a los registros consistió en elaborar fichas analíticas de cada uno para identificar las distintas tareas propuestas por el maestro en cada sesión. Una vez identificadas las tareas, continuamos el análisis en dos momentos: primero procedimos a revisar de manera particular cada tarea, considerando la *consigna*, por medio de la que el maestro hace explícito lo que espera que hagan los alumnos, la o las *nociones* que se ponen en juego, las *intervenciones del maestro*, algunos *procedimientos* utilizados por los alumnos y algunos *fenómenos didácticos*, así como la *vinculación* de las tareas entre sí, al interior de la clase.

Una vez analizado cada registro, en un segundo momento, a través de un análisis longitudinal, decidimos integrar cinco apartados, con base en las distintas nociones que se abordaron durante las 12 clases:

1. La comparación aditiva y la multiplicativa
2. La fracción y la razón
3. El porcentaje
4. La regla de tres
5. Las tablas de variación proporcional

A partir de "lo observado"[26], la recuperación textual de las grabaciones y los breves intercambios de opiniones después de la clase, tratamos de caracterizar, describir y explicar la compleja red conceptual que entra en juego, así como las distintas formas en que ésta se hace presente en el aula. No está de más decir que, como parte del proceso

[25] Brousseau, G. (1977:7) señala que al elegir un subsistema del sistema didáctico resulta difícil no perder de vista lo esencial: el proceso. Si se hace una fragmentación y se aborda de manera independiente, se puede caer en un análisis superficial; si se aborda de manera interrelacionada con los otros subsistemas, resulta difícil de caracterizar.

[26] Comitti C., D. Grenier y C. Margolinas (1995: 98) hacen una distinción: observado, lo que efectivamente se observó; observable, para designar un acontecimiento cuyo análisis a priori permite prever la observación posible.

de análisis, fue necesario leer y re- escribir varias veces estos apartados, regresar a los registros iniciales y a las notas complementarias.

Esta segunda mirada permitió, con mayor profundidad, caracterizar, a través de las tareas que el maestro propuso, la forma en que hizo presentes las situaciones que diseñó e eligió, las estrategias para implicar un conocimiento específico, las tareas concretas que conforman estas situaciones, considerando tanto las respuestas de los alumnos frente a ellas como la conducción misma de la tarea por parte del maestro, así como las interacciones que se ponen en juego en el aula en un contexto de enseñanza y de aprendizaje. Este segundo momento es el que detallaremos en el capítulo 2.

En el proceso de análisis también identificamos un cierto tipo de respuestas del maestro ante circunstancias que se repitieron durante el desarrollo de la secuencia y que están íntimamente ligadas al saber en juego. Por la presencia reiterada de estos fenómenos, realizamos un análisis general, pero siempre asociados a la enseñanza de un contenido específico, que nos permite dar cuenta de aspectos más finos de la práctica de la enseñanza de las matemáticas. De este análisis, incluimos algunos indicios en el Capítulo 3.

En síntesis, en los distintos capítulos desarrollaremos, un acercamiento didáctico a la proporcionalidad, Capítulo1. A partir del análisis de los registros, en el Capítulo 2 haremos referencia a las distintas nociones que configuran el campo de la enseñanza de la proporcionalidad en un grupo de sexto grado, y en el 3, destacaremos algunos fenómenos didácticos asociados a prácticas específicas para la enseñanza de estas nociones.

Entre los límites del trabajo están la imposibilidad de analizar diversas prácticas relacionadas con la enseñanza de la proporcionalidad, y las limitaciones para profundizar en los procedimientos utilizados por los alumnos. No obstante, deseamos expresar la dimensión formativa de la tarea que emprendimos: incursionar en el campo de la investigación implica enfrentar un desafío permanente; podría decirse que la diversidad y el movimiento son su forma. El hecho de acercarse a un objeto de estudio, en ocasiones con sigilo y en otras de manera intempestiva, la experiencia de relacionar información, interpretar, imaginar, constatar, se convierten en parte de un ritual, que a diferencia de otros, no tiene dogmas. No hay ruta con trayectoria fija: infinidad de caminos se entrelazan para configurar redes en las que no es difícil quedar atrapado al pretender destejer hilos cada vez más tenues que no por más finos llegan a ser transparentes.

Al tratar de asir cierto ámbito de lo cotidiano, las acciones, las palabras, las imágenes, los datos toman múltiples sentidos que rebasan la perspectiva de cualquier planteamiento inicial. Las formulaciones que en un principio parecían claras, homogéneas, precisas, en el camino se transforman en situaciones en las que con frecuencia lo impredecible ocupa el primer plano. También ocurre que aquello que en un principio no tiene una forma definida, en el trayecto adquiere un papel relevante.

Con estas características resulta una red irregular en tonos, textura, forma y tamaño. Hay puntos de amarre, puntos débiles y, por supuesto, espacios vacíos que constituyen indicios para continuar investigando.

Reconocemos que es un reto dar cuenta de los procesos de enseñanza y de aprendizaje desde una postura que pretenda interpretar y explicar lo que ocurre en un aula; que el trabajo en el aula en torno a un contenido tiene su especificidad; que existe la necesidad de problematizar la forma en que se hace vivir un contenido en distintas instancias, ya sea el programa, el libro de texto, los materiales de apoyo para el maestro o la clase misma, y que en el proceso de construcción del campo de la didáctica de las matemáticas hay mucho por recorrer.

De más está decir que la tarea que emprendimos resultó apasionante. En las siguientes páginas trataremos de dar cuenta tanto del proceso como de los aspectos que, desde la línea de investigación elegida, consideramos pertinente destacar.

Rechenbüchlein 19

Regula de Tri
oder gulden Regul.

Regula de Tri MERCATORum/
Genannt aurea proportionum
Darumb das sie gar bequemlich
Im Kauff/begert drey ding/nämlich
Den Kauff/das Werth/die Frag zum dritten/
Das Werth soll stet stehen in der mitten/
Der Kauff vornen/die Frag dahinden/
Wilt du die Frag vnd Facit finden/
Hinden/vornen gleich Namen richt/
Die klein die groß allzeit zerbricht/
Multiplicier die hinder Zahl
Mit der mitteleren allemahl/
Theil s Producte mit dem vordern ab/
So kombt dir dein Frag vnd Auffgab.
Verkehrd Regul wilt dein Prob finden/
Was erstlich gstanden ist dahinden
Muß vornen/ſforder hinden stehen/
S Facit muß in die mitten gehen/
Die mitler Zahl rauß kommen soll/
Kombt sie/so hasts getroffen wol.
ıc.

B 2 Item

RULE OF THREE, OR THE GOLDEN RULE, IN VERSE

From Lautenschlager's arithmetic (1598)

Smith, David Eugene. (1958) *History of mathematics.* P 487

CAPÍTULO 1

LA PROPORCIONALIDAD COMO OBJETO DE ENSEÑANZA

En este capítulo presentaremos un panorama de estudios de corte didáctico acerca de la proporcionalidad. Esta revisión aportará elementos para el análisis de de las clases observadas y, al mismo tiempo, permitirá apreciar la amplitud de la problemática de la enseñanza de esta noción, así como cierta diversidad de acercamientos a la misma.

1.1. Esbozo histórico

Orígenes y desarrollo de la teoría de las razones y las proporciones

El propósito de hacer un breve recorrido histórico es destacar los principales momentos en los que la proporcionalidad tuvo una fuerte presencia, y aquéllos en los que convivió con otras obras matemáticas, como las fracciones, funciones y el álgebra, que incidieron en su transformación.

Los historiadores atribuyen a los griegos, particularmente a los Pitagóricos, el desarrollo de la teoría de las proporciones, aunque reconocen que los orígenes pueden estar entre los babilonios, según lo hace evidente una tabla que se encuentra en el Museo Británico y que contiene varios problemas que remiten a situaciones de proporcionalidad, (Comin, E. 2000:42).

Bajo la concepción pitagórica de que "todo es número", las proporciones bastaban para comparar dos magnitudes, puesto que la razón entre ellas, es la razón de dos enteros. En este contexto, la razón en sí misma no fue objeto de una definición precisa o de teorización, sino la equivalencia y el orden de las razones[1], (Block, D. 2001:41) .
La sólida teoría de las razones y proporciones jugó un papel importante en la construcción de las matemáticas hasta el siglo XVIII, cuando fue sustituida por los conceptos de número racional y función, y empezó su declive como saber vivo en esta disciplina. (Block, D. 2001: 10; Comin, E. 2000: 5).

Esta teoría, en un principio, era sólo aplicable a magnitudes conmensurables. El descubrimiento de la inconmensurabilidad de la diagonal de un cuadrado con uno de sus lados, hecha por los mismos pitagóricos, puso fin a la adecuación del mundo con los

---

[1] *Razón* (ratio) es una palabra latina del verbo *reri,* pensar o estimar; pasado participio *ratus*. Así, *razón* (ratio) podría significar cálculo, relación. En la edad Media, para representar la idea a:b se usaba la palabra *proportio,* y una igualdad de razones se expresaba como *proporcionalitas a:b=c:d.* (Smith, David E. 1958: 478)

números enteros y contribuyó a separar el estudio de los números del de las magnitudes, pues los números son discretos y las magnitudes, continuas: en el libro de Los Elementos de Euclides (300 a.C.) la aritmética y las magnitudes se trabajan por separado: el libro VII se refiere a los números proporcionales y el libro V a las magnitudes proporcionales.

Las limitaciones por el uso exclusivo de los números enteros, el reconocimiento de las razones sólo entre magnitudes homogéneas y la inconmensurabilidad, constituyeron una plataforma que permitió replantear la teoría de las proporciones. Las aportaciones de Eudoxo de Cnide (libro V, definición 6 de los Elementos de Euclides) abrieron la posibilidad de comparar razones entre magnitudes inconmensurables, dichas razones están en el origen de lo que ahora conocemos como números irracionales.

Hasta el siglo XVI Los Elementos de Euclides constituyeron un referente importante, y la proporcionalidad una herramienta fundamental[2]; no obstante, es hasta este siglo que las razones entre magnitudes inconmensurables fueron reconocidas como números[3].

Cabe señalar que el desarrollo de la teoría de las proporciones permitió proteger los conocimientos matemáticos adquiridos con las proporciones durante diez siglos que duró la edad media (s V a s XV).

Esta teoría de las razones convivió con la teoría de las fracciones que no sólo se abrió paso, sino que terminó por imponerse y convertirse en un medio para operar con razones. (Chevallard y Jullien, 1989, citados por Block, D. 2001: 41).

La presencia de las fracciones en el ámbito de las razones

Hacia finales del siglo XV, se publica una obra de Francés Pellos que incluye un capítulo dedicado a las fracciones[4], entendidas como quebrados (el número que no es entero, está roto/quebrado). A partir de esta propuesta se dispone de una teoría abstracta del cálculo sobre las fracciones, que más tarde, a fines del siglo XVIII, Euler, simplificará en su obra “Elementos de Álgebra”.

---

[2] Comin E. (2000: 59-66) menciona algunos ejemplos de esta presencia de la proporcionalidad: a Nicole d´Oresme (1323-1382) se le asocia la explicitación gráfica de la noción de función: el moviliza la idea de proporcionalidad; Galileo (1564-1642), después de enunciar una ley a priori sobre la caída de los cuerpos, con el lenguaje de las proporciones, la ilustra con la representación gráfica de Nicole d´Oresme. En Galileo la relación entre espacio y tiempo se expresa con el lenguaje de las proporciones. Define el movimiento uniformemente acelerado. Galileo ya dispuso de los reales (gracias Viète y Stevin).

[3] Se atribuye a Simon Stevin (1585) el reconocimiento de las magnitudes inconmensurables como números, aduciendo que “ningún número es absurdo, irracional, inexplicable”.

[4] No desarrollaremos el uso de las fracciones por los egipcios, babilonios y civilización árabe musulmana, así como las vicisitudes de su desarrollo al enfrentarse al desarrollo del sistema decimal y sexagesimal.

A finales del siglo XVI la teoría de las fracciones toma una fuerte presencia. La terminología de las razones va a perder su hegemonía en tanto que emerge la teoría de las fracciones. Así, llega el momento en que las nociones de razón y fracción se manejan indistintamente. Hacia l673, (siglo XVII), Leibniz, G. W. Freiherr von(c. 1682) se refiere a “razones o fracciones”. (Smith, David E., 1958: 481).

El arribo del álgebra a las matemáticas occidentales

La llegada del álgebra a las matemáticas occidentales a partir del siglo XVI[5] y el reconocimiento de las razones inconmensurables como números por Simon Stevin, transformaron el campo de las posibilidades matemáticas. Según Comin, E. (2000:48), el álgebra incidió en que el uso y el vocabulario asociados a la proporcionalidad se volvieran caducos; un ejemplo al respecto sería la expresión $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, en donde el significado algebraico del signo “**=**”, al indicar la equivalencia entre las expresiones, impide identificar los extremos y los medios.

Consideramos importante destacar que hasta la aparición del álgebra, sólo se disponía de la teoría de las proporciones desarrollada por los griegos para tratar muchos de los problemas que después entrarían en el ámbito de aquélla.

No obstante que el álgebra hace su aparición en occidente desde el siglo XVI, en siglos posteriores la teoría de las proporciones continúa teniendo una fuerte presencia; en el ámbito de las matemáticas se libró un esfuerzo importante por mantenerla al abrigo del álgebra, lo que generó la necesidad de construir notaciones que le permitieran diferenciarse de ésta. Comin, E. (2000: 49), señala como ejemplos del desarrollo de esta teoría , la utilización de los números inconmensurables en la geometría, por Descartes en el siglo XVII y la teoría de las razones y las proporciones escrita por Alembert en el siglo XVIII, quien utilizó para las proporciones aritméticas (constante aditiva) la expresión **a.b . c.d**, y para las proporciones geométricas (constante multiplicativa) **a:b::c:d**, (a es a b, como c es a d).

[5] No obstante que en diversos pueblos de la antigüedad, como Babilonia, Egipto y Grecia, se desarrollaron los principios del álgebra, se reconocen en la obra de Francois Viète (1540-1603), las bases para el desarrollo del álgebra simbólica. La obra que se consideró más representativa de Viète, es el tratado de álgebra *In artem analyticam isagoge*, publicado por primera vez en 1591. Sus predecesores habían desarrollado el uso de ciertos simbolismos: Widmann, J. en 1489 publicó un libro de aritmética comercial en el que aparecen los símbolos **+** y **-**; Recorde, en una obra de álgebra publicada en 1557, incluye el signo **=**, que se usará corrientemente hasta finales del siglo XVII, y Nemorarius, las letras para indicar magnitudes conocidas o no. Descartes (1596-1650) propone posteriormente convenciones distintas a Viète. (Collette, Jean- Paul, 1998: 291-294)

Comin (2000:50) hace referencia a algunos elementos de la enciclopedia de Diderot (1751) que dan cuenta de la intención de contar con una teoría general que englobara las prácticas sobre las proporciones; para lograrlo, Diderot señala que se empleará "la proporción algebraica **a.b:c.d**, así como el signo "**=**".

La noción de función como una construcción independiente de las magnitudes y de la proporcionalidad

A finales del siglo XVII, se hizo presente en el ámbito de las matemáticas, la noción de ***función***[6]. Comin, E. (2000: 63) señala que el término función aparece por primera vez en un libro de Leibniz, fechado en 1694; por otra parte, Grize (1968: 172) menciona que, en un momento de su historia, la función es estudiada tanto por los físicos como por los matemáticos, lo que constituye una nueva manera de concebir las cosas, completamente dominada por la idea de variable.

A partir del siglo XVII, en el ámbito de las "matemáticas sabias", la función , de manera paulatina sustituye a las proporciones[7]; citaremos algunos ejemplos que dan cuenta de este proceso: Newton (1642-1727) en 1687 recurre a las proporciones, y en una obra póstuma, publicada en 1736, las proporciones aparecen como un apoyo para la escritura algebraica en las demostraciones y resoluciones de problemas; la notación propuesta por Alambert que mencionamos anteriormente (**a:b::c:d**) coexiste con las con las formas algebraicas de cocientes con la expresión **a/b**; Leónhard Euler , en *Introduction à l´analyse des infinis* (1748), presenta un concepto de función construido independientemente de las magnitudes y de las proporciones.

La tendencia a eliminar las magnitudes del ámbito de las matemáticas continúa en aras de destacar el papel de las matemáticas "puras". Para Bernhard Bolzano (1781-1848) las

[6] Grize, Jean Blaize (1968:170) señala que el objeto matemático que siglos más tarde se conocería con el nombre de *función*, tiene su origen en los babilonios y otros pueblos de la antigüedad quienes representaron en tablas numéricas los conjuntos de pares (*x,y*) , en las cuales, la mayor parte de los casos un valor de *x* sólo corresponde a uno de *y*. Así mismo señala que la correspondencia entre términos no es suficiente para comprender cómo pasaban de la serie de las *x* a la de las *y*, por lo que cabe la posibilidad de que la idea de proporcionalidad esté vinculada primitivamente a la dependencia funcional.

[7] Cotret S, René de (1985), citado por Comin (2000: 56) al hacer un estudio histórico de la noción de función, señala que "Si los números no responden a un compromiso con las magnitudes, falta encontrar otra manera de expresar las relaciones entre ellas. Las proporciones parecen ser la solución más eficaz. Estas proporciones están compuestas estrictamente de razones de magnitudes. Tomando simplemente las razones de magnitudes, ya sea que las magnitudes sean conmensurables o no, hay siempre una razón que existe aunque no se le pueda hacer corresponder con los números. Las proporciones devienen el medio por excelencia para comparar magnitudes, sin embargo ellas disimulan las relaciones entre los objetos dependientes , por lo que son obstáculo para las relaciones funcionales."

matemáticas puras son la aritmética, el álgebra y el análisis; la geometría es una aplicación. Como señala Comin (2000: 66), “La ruptura de las matemáticas puras con las magnitudes, se ha consumado”

El opacamiento de las nociones de razón y proporción

A partir del siglo XVIII, en el ámbito de las matemáticas, la noción de razón entre números tiende a desaparecer[8], no así la razón entre magnitudes que permitió dar cuenta de los irracionales hasta el siglo XIX. Este proceso de opacamiento de la noción de razón está relacionado con el trabajo acerca del cálculo desarrollado en Italia en los siglos XV y XVI, el cual dio la pauta para la incorporación del álgebra de los árabes en las prácticas matemáticas europeas. (Block, D. ,2001:42).

No obstante, al mismo tiempo que el álgebra desplazaba a las nociones de razón y proporción, en la segunda mitad del siglo XVIII se creaba la Teoría de las Razones y las Proporciones que se convertiría en un componente fundamental de los manuales de aritmética elaborados para la enseñanza.

Con estos antecedentes, se estructuró lo que Bosch, M. (1994: 166) denomina *organización clásica* de la proporcionalidad [9] que se mantuvo estable durante un largo periodo, desde los primeros años del siglo XIX hasta mediados del siglo XX cuando las matemáticas *modernas* ponen énfasis en la noción de variación funcional, y en los programas escolares de varios países se intentó sustituir la Teoría de las Razones y las Proporciones por los conceptos de número racional y de función lineal. Los programas escolares mexicanos, como veremos más adelante, participaron en alguna medida de esta tendencia.

Así, de manera silenciosa, la teoría de las razones y proporciones tendió a ser desplazada, también en la enseñanza, por las fracciones, el álgebra y las funciones, a fines de los sesentas. En el caso de México, se mantuvo por otra década en los programas de educación primaria, y por varias más en las prácticas de enseñanza.

Años más tarde, la investigación didáctica empezó de mostrar que tal movimiento fue desafortunado:

---

[8] Ya en 1673 Leibniz se refería a “razones o fracciones” (Smith, David E. (1958: 481)

[9] Para Bosch, Mariana (1994: 166-167) la organización clásica relativa a los problemas de proporcionalidad es un universo de objetos y prácticas que tiene por emblemas principales las “razones y proporciones”, las “magnitudes proporcionales”, las técnicas llamadas “regla de tres” (directa, inversa, simple y compuesta), y el inmenso campo de problemas que estas técnicas permitían estudiar, desde los problemas llamados de “proporcionalidad” hasta su aplicación a cuestiones comerciales como “intereses” y “repartos proporcionales”

> "…Las nociones de razón y de proporción... desparecieron totalmente del vocabulario "oficial" de los matemáticos. Los conceptos, en cambio, siguen siendo muy importantes: La construcción moderna (de las matemáticas) no los necesita en lo absoluto, los ha sustituido por la noción de número. Pero la transposición didáctica de esta presentación "moderna" no tuvo éxito. En la génesis escolar de los conocimientos, los profesores necesitan distinciones de conceptos y de términos que estén al alcance de los alumnos. No es fácil saltar y borrar una actividad matemática y didáctica tri milenaria, para sustituirla de un golpe por términos y usos de expertos" (Brousseau, s/f: Cours pour les professeurs des écoles Michelet. Documento fotocopiado)

De una veintena de años a la fecha, se puede observar una revaloración de la noción de proporcionalidad en el nivel básico, apuntalada por los estudios en educación matemática. Además de su valor en tanto conocimiento útil para la resolución de una gran diversidad de problemas extra matemáticos para los cuales el concepto de función lineal se revela poco adaptado, se tiende a considerar que la proporcionalidad constituye, en un proceso de aprendizaje, un andamiaje privilegiado para la construcción de otras nociones tales como la de número racional y la de función lineal.

La transposición didáctica para explicar la coexistencia de nociones en la enseñanza

En el ámbito de la enseñanza, la transposición didáctica se enfrenta a la necesidad de reorganizar y vincular estas nociones que forman parte del currículo escolar y que son objeto de distintas interpretaciones. En este ámbito, las nociones de razón y fracción pierden sus diferencias históricas para identificarse una con la otra. Por ejemplo, Leyssene, (1913:169) citado por Chevallard Y. y M. Jullien (1989:124), señala que

> (…) una fracción puede ser considerada como una razón. Pero una razón no es siempre una fracción; pues los dos términos de una fracción son siempre dos números enteros, en tanto que los dos términos de una razón son dos números cualesquiera.

Se entiende que los números pueden ser enteros, reales o irracionales. Desde esta perspectiva, Chevallard (1989) señala que la noción de razón permite la entrada en el cálculo a todo tipo de números.

Leyssene establece además cierta identidad entre razón y fracción cuando menciona que "las razones desempeñan todas las propiedades de las fracciones, y todas las operaciones de cálculo se ejecutan tanto en unas como en otras", lo que es válido para unas, es válido para otras.

Por otra parte, Quillet (1958: 212), citado por Chevallard y M. Jullien(1989: 124) señala que

> "las propiedades de las razones se enuncian como las propiedades fundamentales de las fracciones. Las reglas de simplificación, de reducción al mismo denominador establecidas para las fracciones ordinarias se aplican también a las razones. Y las mismas operaciones, adición, sustracción, multiplicación, división, etc…, se efectúan tanto sobre las razones como sobre las fracciones"

Al respecto, Chevallard Y. y M. Jullien (1989: 119) mencionan que existen elementos para afirmar que en el orden de la génesis de las nociones, la idea de razón (de dos magnitudes) es previa a la de fracción (considerada como extensión de número entero) y que en las matemáticas de los griegos la fracción no pudo emerger por una concepción de número, según la cual únicamente los naturales eran concebidos como números.

En la enseñanza, sin embargo, prevalece la idea de que razón, cociente y fracción son sinónimos (Chevallard, 1989: 127)[10], y en las propuestas que se elaboran son las fracciones, y no las razones, quienes permiten ampliar el campo de lo numérico, de los naturales a los racionales, (Block, D. 2001: 42)

Veamos en dos textos distintos, el orden de presentación de los contenidos:

Anízar (1911). Nociones Elementales de Aritmética para uso de las Escuelas de Instrucción Primaria Elemental. México.	Leysenne (1913). La deuxième année d´Arithmétique, (cours supérieur). Francia.
Sistema de numeración decimal, regla para leer una cantidad	*Los números enteros y las 4 operaciones fundamentales*
Suma, resta, multiplicación y división de enteros y decimales	*Divisibilidad (MCM, MCD, números primos)*
Divisibilidad de los números	***Las fracciones simples***
Factores y divisores	***Fracciones y decimales.***
Quebrados comunes; Suma, resta, multiplicación y división con quebrados;	*Magnitudes y medición (en México y en otros países, los sistemas decimales de medición)*
Conversión de los quebrados comunes en decimales y viceversa	*Números complejos (denominados), potencias, raíces*
Denominados; suma, resta, multiplicación y división con denominados	***Razones y proporciones***
Sistema métrico decimal	*Problemas*
Cuadrado y raíz cuadrada; cubo y raíz cúbica;	
Razones y proporciones; Regla de tres; regla de compañía; regla de interés; regla de descuento; regla de aligación; regla de falsa posición*.*	

[10] En la actualidad, algunos autores de textos como A. Baldor afirman la identidad en las relaciones entre razones y fracciones. En la Aritmética de A.Baldor (1995: 238, 496) se dice: “como la razón geométrica o por cociente de dos cantidades no es más que una división indicada o un quebrado, las propiedades de las razones geométricas serán las propiedades de los quebrados”, y remite a los siguientes teoremas: “Si el numerador de un quebrado se multiplica por un número, sin variar el denominador, el quebrado queda multiplicado por dicho número, y si se divide, el quebrado queda dividido por dicho número”; Si el denominador de un quebrado se multiplica o se divide por un número, el quebrado queda dividido en el primer caso y multiplicado en el segundo por el mismo número”; Si los dos términos de un quebrado se multiplican o se dividen por un mismo número, el quebrado no varía”

En esta historia, el orden genético en el que las razones preceden a las fracciones resultará invertido: en la enseñanza, las razones se estudian una vez que ya se cuenta con las fracciones. (Chevallard y Jullien, 1989; Block, D. 2001)

Como hemos observado en este breve recorrido, la transposición didáctica no siempre se corresponde con el desarrollo histórico de las nociones, a veces elimina aquello que pueda contravenir la lógica del desarrollo acumulativo; así, por ejemplo, en la actualidad, el estudio de las magnitudes, que constituyó una base fuerte de las matemáticas hasta el siglo XVI, parece ser dominio exclusivo de la física y las proporciones están ya fuera del dominio de las matemáticas.

Comentario

La proporcionalidad constituye una antigua noción que jugó un papel central en las matemáticas pero que, en ese ámbito, ha caducado, a la par que se ha dado la desvinculación de las magnitudes del trabajo matemático. Constituye uno de los conocimientos que, pese a perder vigencia en el saber de los matemáticos, afirmó su espacio en el ámbito de la enseñanza durante varios siglos, y, exceptuando los intentos por eliminarla en las reformas de mediados del siglo XX, vuelve a ocupar un lugar, si bien relativamente incierto, como podremos ver en los apartados siguientes. La proporcionalidad se inserta en una teoría que fue permeable, quizá a pesar de sus defensores, a elementos procedentes de teorías más modernas, la de las fracciones y la de las funciones, de manera que actualmente las nociones de razón y fracción se confunden y la noción de relación proporcional y la de función se intentan articular, no siempre con suficiente claridad. El mismo lenguaje de las proporciones refleja esto mestizajes, frecuentemente opacando o confundiendo los sentidos: se habla de razón o de fracción, la razón se anota usando los dos puntos o la notación de fracción, y se sigue hablando de “medios y extremos” aunque se use la notación fraccionaria en la que ya no hay ni medios ni extremos; se habla incluso de operador o de coeficiente de proporcionalidad y de razones escalares, creando así términos compuestos con elementos de teorías distintas.

Lo anterior deja ver lo suficiente que, el “saber sabio”, o “científico” de referencia para la enseñanza, cuando se habla de proporcionalidad, no está establecido de manera unívoca. Quizá en este caso más que en otros, puede apreciarse un proceso de acomodo, de búsqueda de equilibrio entre demandas a veces opuestas: hasta qué punto seguir en la enseñanza la evolución del conocimiento matemático, hasta qué punto defender la presencia de conocimientos que en la enseñanza tienen una razón de ser aunque no la tengan en las matemáticas de los matemáticos, y en ese caso, para qué y cómo. Estas preguntas atañen al estudio de los procesos de transposición didáctica.

A continuación miraremos estas cuestiones desde dos puntos de vista más: el del desarrollo curricular en México y el de la investigación didáctica sobre la proporcionalidad.

1.2. Los contenidos de proporcionalidad en los materiales curriculares para la educación primaria en México (1932-1993)

A través de la revisión de documentos, y sin dejar de reconocer la distancia que hay entre la norma y el hacer cotidiano, pretendemos identificar indicios que nos ayuden a explicar la presencia de algunas prácticas y nociones asociadas a la enseñanza de la proporcionalidad en la escuela primaria y que, desde la transposición didáctica, identificaremos como una necesidad de reorganizar las nociones para que formen parte del currículo escolar.

Hay evidencias de que, por lo menos desde el siglo XIX, la proporcionalidad fue objeto de enseñanza en las escuelas mexicanas[11]. En el análisis que aquí presentamos nos limitaremos a mencionar los programas diseñados entre 1932 y 1944, y comentaremos más detenidamente los materiales que se elaboraron a partir de 1960, cuando se distribuyen los primeros libros de texto gratuitos en el país.

En 1932, en el Programa de Aritmética y de Cálculo Geométrico para las Escuelas Federales de la República, se incluye para 5° año, el tema ***proporcionalidad de números*** y se pide "desterrar en absoluto la llamada regla de tres", sin que se diera alguna explicación para ello[12]. (SEP, 1932: 37-45)

A partir de 1934, en los Programas para las Escuelas Primarias Urbanas, la ***proporcionalidad*** se consideró en el rubro de Actividades para Adquirir Medios de Expresión, Relación y Cálculo, como un contenido explícito de la " Aritmética y la Geometría o del Cálculo Aritmético y Geométrico", específicamente para el segundo grado del tercer ciclo[13]. (SEP,1934-1940: 63,123).

---

[11] En México se utilizaron libros editados en Francia en el siglo XIX en los que se incluye la proporcionalidad, como los de Tarnier, E.A. (1877) y Amadieu, P.F. (1839). También está el libro de Anízar, S. (1911), para uso de las Escuelas de Instrucción Primaria Elemental, obra aprobada "por el Supremo Gobierno".

[12] Cabe suponer que el desprestigio de la regla de tres, en la enseñanza, se debe a su carácter mecánico y a su aislamiento de la teoría de las Razones y las Proporciones. Más adelante comentaremos esta regla.

[13] Quinto y sexto grados de primaria.

Los Programas para las Escuelas Primarias del Distrito Federal (1940: 27-36), con una estructura similar a los de 1934, incluyen ***la proporcionalidad*** como uno de los "temas generales de conocimiento".

En los programas para las Escuelas Primarias de la República (SEP,1941:51-74), entre los temas generales de conocimiento del programa de *cálculo* , se incluye ***proporcionalidad*** en el rubro denominado *materia de enseñanza* para 6º grado.

En 1944, con "los primeros programas dirigidos a todas las escuelas primarias de la República Mexicana", la Aritmética y la Geometría se incluyeron como materias instrumentales básicas, junto con el lenguaje, el dibujo y los trabajos manuales. Los temas generales de conocimiento son prácticamente los mismos que en los programas que anteceden, los de 1941, sólo que no se considera manera explícita el estudio de la proporcionalidad. (SEP, 1956:73-95). Veamos ahora con más detenimiento las propuestas posteriores.

La propuesta de los años sesenta: versión simplificada de la teoría clásica de las razones y proporciones

En 1959, el Secretario de Educación Pública, Don Jaime Torres Bodet inauguró los trabajos para la revisión de los programas vigentes; la nueva propuesta se dio a conocer en diciembre de 1960 para empezar a operar en febrero del año siguiente. El plan de estudios para la escuela primaria se organizó por áreas; en la denominada *Adquisición de los Elementos de la Cultura* se ubicaron *la Aritmética y la Geometría.* En 5° grado se consideran como contenidos específicos "*conceptos de razón y proporción; proporcionalidad en casos muy sencillos*" y en 6° grado, entre los temas "cuyo conocimiento y aplicación se consideran forzosos de dominar en el grado", se encuentra "la formación de *conceptos de razón y proporción*, *proporcionalidad y aplicaciones sencillas"* (SEP,1961:156-159 y 193-196)

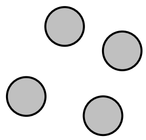
Esta reforma estuvo acompañada de la elaboración de los primeros libros de texto y cuadernos de trabajo gratuitos para la escuela primaria. Haremos un breve análisis de los libros de texto de 5º y 6º grados, que tienen en común la inclusión de un apartado denominado *razones y proporciones.*

Dentro de la estructura general de los contenidos, el tema de razones y proporciones se incluye después de abordar el sistema decimal de numeración, y las fracciones, estructura similar a la de los libros de principio de siglo que comentamos anteriormente. (Ver anexo I).

En 5º grado, el tema de Razones y Proporciones se inicia con la comparación de dos cantidades a través de las expresiones "tercera parte", "triple", "3 veces", "1/3" Veamos un ejemplo:

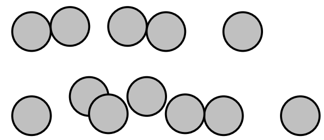
> *"Si en un montón tengo 4 canicas y en otro 12, lo que hay en el primero, es la* ***tercera parte*** *de lo que hay en el segundo; o bien, lo que hay en el segundo es* ***triple*** *de lo que hay en el primero. Esto es:"*

4 canicas



Aquí hay 1/3 del montón grande

12 canicas



Aquí hay 3 veces lo que hay en el montón pequeño

Después de otros ejemplos se introduce la definición de razón**:** *"*Razón es el resultado de comparar por cociente dos cantidades de una misma especie. Así, la razón del número de canicas del primer montón respecto del segundo es 1/3" (Novaro, Rosa María, 1961: 85- 92). Cabe destacar que la noción de razón que se identifica con la idea de "comparar", se limita, como en la teoría clásica de las razones y las proporciones, a las cantidades de misma especie (esta limitación desaparecerá más adelante) y, sobre todo, el hecho de que, aunque la identidad con la fracción ocurre desde el principio, hay una mención de los números naturales del tipo "n veces" como razones. En la continuación del capítulo, sin embargo, son las fracciones las que acaban por prevalecer.

Un poco más adelante, todavía en 5º grado, se explica cómo se puede dar cuenta de una razón mediante una fracción:

> "Al comparar 3 con 5, puedo pensar así: 1 es la quinta parte de 5, entonces 3 serán los $\frac{3}{5}$ de 5; esto puede abreviarse diciendo: la razón de 3 a 5 es $\frac{3}{5}$". Y así, la razón de 8 a 21 será $\frac{8}{21}$; la razón de 5 a 12 es $\frac{5}{12}$"

En este punto, cabe destacar una virtud de la definición de razón que se perderá en textos posteriores: la fracción, en el ejemplo, $\frac{3}{5}$ no se introduce como una simple notación alternativa (en vez de 3 a 5 se pone 3-línea-5), sino recuperando el sentido conocido de las fracciones, expresiones de una relación parte todo: se *explica* cómo averiguar que 3 es $\frac{3}{5}$

de 5. No obstante, este cuidado en no fundir de entrada ambas nociones, razón y fracción, cede muy pronto a una identidad casi total, como se verá en seguida.

Poco después de introducir la noción de razón, se echará mano de las técnicas propias de las fracciones para operar con razones. Así, en lo que sigue, la simplificación de razones pasa por la de fracciones:

> "Si se pregunta ¿cuánto de 8 es 4?, contestaremos que es la mitad. Esta misma pregunta podía haberse hecho de otra forma: ¿cuál es la razón de 4 a 8? $\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$; o en esta otra: ¿qué parte es 4 de 8? $\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$ ".

La identidad entre fracción y razón termina reduciéndose a una cuestión de notaciones: en el texto se aclara que "no siempre las fracciones se escriben en forma de quebrado , también pueden escribirse con el signo **:** colocado entre los dos términos". Por ejemplo: 3 **:** 5 se lee "tres es a cinco" y " $\frac{4}{3}$ será igual a escribir 4**:** 3 ".

Después de presentar las definiciones de variable, variación directamente proporcional y variación inversamente proporcional, se introduce la definición de proporción y los términos que la componen:

> Cuando hay **dos razones iguales** se forma una **proporción**. Esto es,
>
> (razón) $\frac{3}{5} = \frac{21}{35}$ (razón) es una **proporción.**
>
> **También puede escribirse: 3:5 = 21:35 (se lee 3 es a 5 como 21 es a 35)**

Los **extremos** se identifican como "el numerador de la primera y el denominador de la segunda. En el ejemplo 3 y 35 son **extremos**".

Los **medios** son "el denominador de la primera y el numerador de la segunda. En el ejemplo, 5 y 21 son los medios"

Nuevamente se hace presente la identidad de razón y fracción, al identificar los elementos de la primera el nombre de los términos de la segunda.

Lo anterior da paso a un elemento fundamental, el primero que será realmente operativo. Después de ejemplificar que el producto de los extremos es igual al resultado de multiplicar los medios, se agrega que "*resulta sencillo concluir que* ***el producto de los medios es igual al producto de los extremos.***" Y nuevamente se pone énfasis en el dominio de la técnica:

> Si se desconoce algún término de una proporción no resulta difícil encontrarlo. Ejemplo: $\frac{18}{23} = \frac{?}{161}$, se desconoce un **medio.** Como el producto de los medios es igual al producto de los extremos, resulta 23 x ? = 18 x 161…”

Se aclara además que “en lugar del signo **?** para indicar una cantidad o un número desconocido se pone **una letra**, así en el caso anterior, quedaría $\frac{18}{23} = \frac{x}{161}$, y hechas las operaciones, **x=126.”**

De una manera resumida se presenta la solución **x =** $\frac{18x161}{23}$ **,** lo que indica que “*un medio es igual al producto de los extremos dividido entre el otro medio,* y que *“un extremo es igual al producto de los medios dividido entre el otro extremo”.* En el libro se afirma que el conocimiento de estas dos reglas permite encontrar “rápidamente el valor de cualquier término de una proporción”.

Cabe observar aquí que no se explica cómo se pasa de la expresión 23 *x* = 18 x 61 a la expresión $x = \frac{18x61}{23}$. En el fondo, se ha filtrado una manipulación algebraica, el paso de una expresión a otra consiste en resolver una ecuación de primer grado, aunque los alumnos no necesitarán resolverla, ellos se quedarán con la regla: el valor desconocido, si es un medio, es igual al producto de los extremos entre el otro medio, etc.

En sexto grado (Hernández, J. y A. López, 1962: 79-85) la identificación de razón y fracción ocurre desde el primer momento. Para abordar el tema de las razones y proporciones, se toma como punto de partida un recordatorio de los significados de la fracción común: como partes iguales de un entero o de un grupo de elementos y como una división; se agrega entonces un nuevo significado: “ la fracción común también expresa **una relación o razón** entre dos números.”

En seguida se fortalece la presencia de la fracción en el ámbito de la razón y la proporción:

> En general, para obtener la razón de dos números se expresan éstos en forma de fracción común y se simplifica la fracción.

En este grado se presenta también una definición de *proporción*:

> La **proporción** es la **igualdad** de dos razones.
>
> Se expresa así:

$$\frac{2}{3} = \frac{6}{9}$$

Y también en esta forma: **2 : 3 = 6 : 9**[14]

En la primera forma, el numerador de la primera fracción (2) y el denominador de la segunda (9) se llaman **extremos**. El denominador de la primera fracción (3) y el numerador de la segunda (6) se llaman **medios.**

En la segunda forma, por su colocación, **2** y **9** son **extremos**; **3** y **6** son **medios.**

Igual que en 5º grado, el hecho de utilizar los términos “medios y extremos” en una igualdad de fracciones, en donde no hay tales, constituye un fenómeno de notación híbrida que tiene un efecto de opacamiento del sentido de las notaciones.

Aunque las proporciones se trabajan a nivel numérico, sin magnitudes, estas últimas están siempre presentes en los problemas. A través de ejemplos se presenta la técnica para resolver un problema de cuarta proporcional, la cual, a grandes rasgos, consta de tres pasos: 1, identificar las magnitudes en relación y acomodar los datos desprendiendo de manera inmediata la proporción; 2, resolver la ecuación así obtenida y 3, expresar el resultado:

Un ciento de hojas de papel vale $ 5.00. ¿cuánto valen 35 hojas?

	Hojas	Precio
Proporción	$\frac{100}{35}$	$\frac{5.00}{X}$

La primera razón se forma con las hojas de papel y la segunda razón con el precio

Resolución: 100 x = 5 X 35;

$$\mathbf{x} = \frac{\overset{1}{\mathbf{5}} \ \mathbf{X} \ \overset{7}{\mathbf{35}}}{\underset{\underset{4}{20}}{\mathbf{100}}} \qquad \mathbf{x} = \frac{7}{4} = 1\frac{3}{4}$$

Resultado: $1\frac{3}{4}$ **= $ 1.75**

Cabe destacar que, como en la teoría clásica de las razones y proporciones, las razones que se expresan con fracciones son entre cantidades de la misma especie (actualmente llamadas internas).

Las razones parecen desvanecerse al identificarse con las fracciones y al ser tratadas con herramientas del álgebra; veamos un ejemplo en el que se muestra cómo encontrar un

[14] Ya en 5º grado se había indicado cómo leer esta expresión: ***2 es a 3, como 6 es a 9.*** También se habían introducido los signos “:” e “=”, este último como elemento de comparación que se lee “como”

término desconocido “aplicando la propiedad de que el producto de los medios es igual al producto de los extremos”:

$\frac{2}{3} = \frac{a}{6}$ 3a =2 x 6 a= $\frac{2x6}{3}$ a = 4

Por otra parte, si bien la mayoría de los problemas que se proponen se resuelven aplicando estas reglas, se dan casos, en el mismo libro, (Hernández, J. y A. López,1962: 20-21, 61) en los que se apela a procedimientos más simples e intuitivos (aunque no se incluyen en el apartado de razones y proporciones), procedimientos que años después serán muy valorados, por ejemplo, el recurso a dobles, triples, mitades, etc:

> Una docena de lápices (12 lápices) vale $3.60.
>
> 6 lápices son la mitad de 12 lápices; luego 6 lápices valen la mitad de $3.60.
>
> 3 lápices son la cuarta parte de 12 lápices; luego 3 lápices valen la cuarta parte de $3.60
>
> 4 lápices son la tercera parte de 12 lápices; luego 4 lápices valen la tercera parte de $3.60
>
> 24 lápices son el doble de 12 lápices; luego 24 lápices valen el doble de $3.60

Por otra parte, en los libros de esta época pueden apreciarse ya elementos relativos al concepto de función, que conviven con los elementos de las proporciones. Como parte de los contenidos de proporcionalidad, tanto en 5º como en 6º grado se introduce la noción de *variable,* definida como “todo aquello que puede cambiar de valor” y se introducen las nociones de *variación* o *relación directa* y *variación* o *relación inversa*, para dar paso a la *variación directamente proporcional* y la *variación inversamente proporcional*.

Las matemáticas “modernas” de los años setenta: inicio de una reorganización profunda, pero inconclusa, del tema de proporcionalidad

En México, la reforma de los setentas tuvo cierta influencia de la reforma iniciada una década antes en Europa, cuyo propósito fue presentar una matemática que intentó ser más auténtica, más razonada[15], en contraposición a la propuesta de los sesentas, considerada como excesivamente centrada en reglas y fórmulas (Block, D. y Ana María Álvarez.,1999: 57-59).

Así, en el Plan de Estudios de 1972, se expresa que uno de los objetivos generales de la educación primaria es *“iniciar al niño en las conceptualizaciones formales de la matemática y de la manipulación de situaciones, expresiones y objetos”* (SEP, 1972: ix). En 1977, se matiza el carácter formalista del objetivo anterior, enfatizando un poco más el desarrollo de la

[15] Entre los contenidos de esta reforma señalados por Ruiz Zúñiga (1992), están la introducción a la teoría de conjuntos, la erradicación de la geometría euclidiana y la introducción de las estructuras algebraicas.

comprensión por parte del alumno: se trata de *"propiciar en el alumno el desarrollo del pensamiento cuantitativo y relacional, como un instrumento de comprensión, interpretación y expresión, de los fenómenos sociales, científicos y artísticos"* (SEP-CNTE, 1977: 70).

Como parte de esta reforma se cambió el plan de estudios, los programas y el libro de texto para el alumno. También se editó un libro para el maestro. Durante los veinte años siguientes, hasta 1992, aunque los programas sufrieron algunas modificaciones menores, los libros de texto para el alumno de quinto y de sexto grados y las guías didácticas para el profesor se mantuvieron prácticamente sin cambios.

Los cambios más visibles en el tema de proporcionalidad, con respecto a la década anterior, fueron los siguientes: 1-. Desparece prácticamente la terminología de las razones y proporciones; 2-. Se enfatiza la idea de "dependencia funcional", invitando a los alumnos a estudiar diversos tipos de relaciones entre magnitudes, en ciertos casos obteniendo ellos mismos los datos, entre los cuales las relaciones de proporcionalidad, en aras, seguramente, de favorecer una idea más amplia de dependencia, y, finalmente, 3-. Se introducen las "tablas de variación", destinadas a convertirse en un recurso privilegiado tanto para la resolución de problemas, como para la vinculación con la noción de función.

Con respecto al tratamiento específico de los problemas de proporcionalidad en los que se trata de determinar un valor desconocido, se destaca una técnica que no difiere mucho de la que se enseñaba antes, con la salvedad, como veremos, de que ahora se consideran las razones externas en lugar de las internas. A continuación nos detendremos en algunos aspectos de estos materiales.

En la primera edición del plan de estudios de 1972, únicamente se desarrollaron los programas de 1º y 2º grado; de 3º a 6º se incluyen *programas sintéticos* con la aclaración de que "no se aplicarán en el año escolar 1972-1973"[16]. En 1974 se presenta un Programa abreviado, en el que el tema de la proporcionalidad se sustituye por la ***variación funcional,*** a trabajarse sólo en sexto grado. Se hace presente en las unidades 5, 6 y 7, sin que se le

[16] En este programa sintético de matemáticas para 6° grado se señala que este año "consistirá, esencialmente, de un repaso general sobre las ideas básicas y los algoritmos que fueron estudiados en los años anteriores. Este repaso se hará por medio de diversos problemas que se desarrollarán durante el curso. Estos problemas versarán sobre cuestiones relacionadas con: alimentación, construcción, demografía, física, biología, agricultura, pesca, compra-venta, producción, etc." (SEP. (1972, 386) .No se incluye ningún contenido. No se explica la razón de que se incluyan estos programas sintéticos, si al mismo tiempo se da la indicación de que no se apliquen en el ciclo escolar 1972 - 1973.

considere explícitamente como un aspecto del programa[17]. No hay una explicación de la sustitución de las viejas nociones de razón y proporción por las nuevas ideas de dependencia funcional.

El libro para el maestro (SEP,1974) incluye una sección denominada *guía didáctica* en donde la variación funcional se aborda como ***relación funcional*** y se menciona que "una idea central en las Matemáticas es la relación funcional entre dos conjuntos de números". Se sugiere hacer reflexionar a los alumnos acerca de las cantidades que dependen de otras, por ejemplo, el número de panes y el precio a pagar. Con base en ese ejemplo se explica que la relación funcional[18] entre dos cantidades

> *no siempre es directa…no siempre al aumentar una cantidad la otra* aumenta. En ocasiones, al aumentar una cantidad, la otra disminuye. Y aún más, pueden aumentar o disminuir ambas pero en diferente proporción (SEP,1974: 25).

En el desglose del programa se abordan rubros como *reparto proporcional* y *variación proporcional directa e inversa;* los objetivos particulares con sus respectivos objetivos específicos para el alumno de sexto grado, son los siguientes:

Objetivos particulares (SEP.1974, III -XV).	Objetivos específicos (SEP.1974, III –XV).
Unidad 5 Establecerá *funciones* entre magnitudes ligadas por una relación de dependencia	Establecerá la dependencia de unas magnitudes con otras, dada una relación. Formará *tablas de variaciones proporcionales directas*.
Unidad 6 Resolverá problemas de *reparto proporcional*	Obtendrá *cantidades proporcionales* a otras dadas. Resolverá problemas de *reparto proporcional*, mediante *reducciones por unidad.*
Unidad 7 Establecerá *funciones* entre magnitudes ligadas por una relación de dependencia	Establecerá la *proporción directa* entre cantidades dadas. Completará *tablas de proporción directa* con datos dados. Establecerá la *proporción inversa* entre cantidades dadas Completará tablas de *proporción inversa* con datos dados Resolverá problemas mediante la aplicación del *concepto de proporción*. Construirá gráficas de *proporciones directas e inversas.*
Unidad 8 Establecerá *funciones* entre magnitudes ligadas por una relación de dependencia	Establecerá *relaciones funcionales* entre magnitudes, mediante observaciones experimentales. Representará gráficamente relaciones funcionales.

[17] SEP.(1974). Los *aspectos* del programa son: el sistema decimal y sus algoritmos, números enteros: operaciones y propiedades; las fracciones y sus operaciones; lógica; geometría; probabilidad.
[18] En la década de los sesentas se manejó la variación o relación proporcional directa o inversa

Puede observarse que la noción de *razón* no se menciona más y, por otra parte, la noción de *función* no se presenta como un cambio radical, sino en coexistencia con la proporcionalidad; esta situación se hace particularmente evidente en la unidad 7, en donde el objetivo particular se refiere a funciones y los específicos a proporciones. Veamos algunos ejemplos de cómo se aborda el tema en el libro para el alumno[19]:

Hay varias lecciones relacionadas directamente con la *variación funcional*[20]. Estas lecciones tienen en común el manejo de la noción de dependencia y el uso de tablas para expresar esta dependencia. Un ejemplo es la lección *Unas cosas dependen de otras*, en la que a partir del precio de un kilo de tortillas, se solicita calcular el precio de otros (3 kg, 6 kg, etc.), y con base en la cantidad pagada se pide al alumno identificar la cantidad de kilos que se compraron.

Estos datos pueden resumirse así:

Kilos de tortilla	*Precio en $*
3	*6.60*
4	
6	
	4.40
	22.00
7	
⋮	⋮

Ponlos en una tabla ordenada así, y completa:

Kilos de tortilla	*Precio en $*
1	*2.20*
2	
3	
4	
5	
6	
7	

A una variación de 1 kilo de tortilla le corresponde una variación de $2.20 en el precio. El precio de las tortillas está en función del peso de las tortillas.

[19] El libro de matemáticas para el alumno, sexto grado (1974), tiene dos partes: la primera denominada *Libro de trabajo* y la Parte II, *Compendio*, en el que se incluye lo que los autores han considerado "ideas fundamentales de la matemática de primaria" . La información adicional que se proporciona es para algunos temas específicos: aritmética, geometría y probabilidad y estadística. No se incluye el tema de variación funcional

[20] Las lecciones son: SEP (1974b) Escalas (23-24); Monedas extranjeras (37-39), Porcentaje (46-47); Uso del porcentaje (54) Unas cosas dependen de otras (68-69); Reparto proporcional (70); Engranes (74-75) ; Contaminación del aire (104); Unas cantidades están en función de otras; (105-106); Experimento (108-110); Poleas y bandas (111-112) Silos: cilindro y cono (122-123) Los albañiles y las bardas (130); El analfabetismo en el mundo (131-132) Países ricos y países pobres (133-135)

En el mismo libro se proponen otras lecciones que ponen en juego la variación proporcional inversa y la proporcionalidad múltiple, en la que una de las tres variables permanece constante[21].

En otra lección, *Experimento*, (SEP,1974b: 108-110) se agrega la elaboración de una gráfica para representar la variación directa. En la guía didáctica se sugiere realizar otros experimentos para analizar la relación funcional entre dos cantidades, tales como temperatura del agua y tiempo de calentamiento, el peso de un recipiente en función de la cantidad de líquido que contiene, altura de una planta en función de los días transcurridos desde la germinación o la longitud de una vela en comparación con el tiempo que lleva prendida, situaciones de variación que no son necesariamente proporcionales.

Si bien la noción de razón fue excluida en el tratamiento de la “dependencia funcional”, ésta reaparece en otro lugar, bajo el nombre de “proporción”, lugar en el que, por lo que puede inferirse, la noción de razón siguió conservando un papel, a un lado de la noción de fracción: en una lección denominada *Estadística, probabilidad y zapatos tenis* (SEP.1974b, 102-103), el término ***proporción*** se utiliza para representar una razón, escrita en forma de fracción. Esta es una parte de la actividad propuesta:

> (…) Calcula las **proporciones** de cada talla, por ejemplo, si en tu salón hay en total de 30 alumnos y de ellos hay 7 que tienen talla 24, entonces la proporción de talla 24 es 7/30….

TALLA							
PROPORCIÓN							

> La suma de todas las proporciones debe darte 1. Compruébalo

En el apartado *La regularidad estadística* (SEP,1974b: 180-181), se maneja esta misma idea de proporción como razón, sólo que además de representarla como fracción común, se presenta el equivalente en fracción decimal y en porcentaje. Por ejemplo, la proporción de pedidos de nieve de limón durante tres días fue “18/33 = 0.55; 29/61= 0.48 y 45/89= 0.51”. Se explica que “en este caso, la palabra *proporción* significa lo mismo que fracción”,, y se incluye otro ejemplo:

---

[21] Vergnaud (1995) se refiere a las situaciones de proporcionalidad múltiple como aquéllas en las que al poner en juego tres medidas, una de ellas permanece constante, por ejemplo, si una persona consume en dos días tres litros de agua, en la misma cantidad de días, 3 personas consumirán 9 litros.

"Si en un salón hay 17 niños y 23 niñas, la proporción de niños en el salón es

$$\frac{17}{17+23}=\frac{17}{40}$$

Esta proporción también se puede expresar en por ciento: ya que 17/40 = 0.425, la proporción de niños en el salón es 42.5 %.".

En el mismo compendio, la proporción se asocia a la ley denominada *regularidad estadística*, la cual se introduce mediante la idea de un experimento de azar que se repite un gran número de veces y en las mismas condiciones,

> (…) *las proporciones de veces que ocurre un resultado del experimento tienden a estabilizarse en un cierto valor; es decir, a medida que se aumenta el número de repeticiones del experimento, las proporciones tienden a permanecer más cerca de una recta horizontal* (…).A la proporción que corresponde a esa recta horizontal, en el eje vertical la llamamos la *probabilidad* de dicho resultado(…).Fíjate que las proporciones siempre están entre 0 y 1 porque son fracciones cuyo numerador no es mayor que el denominador, y en consecuencia, por la regularidad estadística, la probabilidad también estará entre 0 y 1.(SEP,1974: 182).

Así, parecen abrirse dos campos temáticos en el currículum, uno, la dependencia funcional, en el que la noción de razón no tiene ya un lugar, y el otro, la estadística y la probabilidad, en el que dicha noción conserva un papel, a un lado de la fracción, para expresar una relación entre un todo y una parte.

En 1977, se realiza una reestructuración del programa abreviado de 1974 y, al igual que en éste, en sexto grado se incluye la ***variación funcional*** con el argumento de que *"una idea central de la matemática es la relación funcional entre dos conjuntos de números"* (SEP-CNTE, 1977: 72). Los contenidos que se proponen para sexto grado dejan ver, de manera más clara, la intención de estudiar la proporcionalidad y, como continuación de ello, aspectos de la noción de función: (SEP-CNTE, 1977: 107-114)

Objetivos particulares	**Objetivo específico**
Unidad 5 Resolverá problemas de reparto proporcional.	Formará tablas de variaciones proporcionales directas Resolverá problemas de proporción directa, mediante la aplicación de la propiedad fundamental de las fracciones equivalentes Resolverá problemas de reparto proporcional, aplicando sus conocimientos anteriores
Unidad 7 Establecerá las funciones entre las magnitudes que se liguen por una relación de dependencia	Organizará tablas de variación directa, a partir de problemas dados Representará gráficamente una variación proporcional directa Resolverá problemas de variación inversa, a partir de su representación gráfica

Veamos ahora una de las actividades que se proponen para “resolver problemas de proporción directa mediante la aplicación de la propiedad fundamental de las fracciones equivalentes” (SEP-CNTE, 1977: 112)

Observe una **tabla de variación directa**:

libros	dinero
1	15
2	30
3	45
4	60

Represente **esas cantidades como fracciones** y observe que son **equivalentes:**

$$\frac{1}{15}=\frac{2}{30};\frac{2}{30}=\frac{3}{45}$$

Llame **proporción a un par de fracciones equivalentes derivadas de la tabla**

$$\frac{2}{30}=\frac{3}{45}$$

*Aplique **el principio de los productos cruzados**, para encontrar el término desconocido en una proporción; por ejemplo, los libros que se compran con 135 pesos*

$$\frac{2}{30}=\frac{\boxed{}}{135} \qquad 2 \times 135 = 30 \times \boxed{}$$

$$270 = 30 \times \boxed{}$$

$$270 : 30 = \boxed{}$$

$$\frac{2}{30}=\frac{9}{135}$$

Resuelva problemas en que pueda aplicar el conocimiento anterior

En esta sección se observan algunas dificultades didácticas: como en la época de los sesentas, se establece una relación entre proporciones y fracciones equivalentes, así, a partir de una tabla de variación directa , libros y dinero, sean éstos ***a*** y ***b***, se hace evidente que a/b es constante por la “propiedad fundamental de las fracciones equivalentes” (SEP,1977:112). Con este procedimiento se centran en la razón *externa* (y no en la interna, como en la década anterior) debido tal vez a la influencia de la noción de *función.* El cociente que proponen # *libros / #dinero* remite al “número de libros por peso”, dato con poco sentido en el contexto.

Después de manejar la noción de *proporción como un par de fracciones equivalentes*, se retoma una vieja práctica, la del “principio de los productos cruzados” abandonado la vieja terminología, de “extremos” y “medios”.Resulta extraño que en una propuesta que busca explícitamente permitir una mayor comprensión por el alumno de las técnicas que se le proponen, se haya optado por la regla de los productos cruzados y no, por ejemplo, por la regla de las fracciones equivalentes, u otra.

En este punto lo viejo y lo nuevo se mezclan sin lograr, aparentemente, un mejor resultado desde el punto de vista de la claridad y la accesiblidad de la técnica propuesta.

En 1982 se edita el *Libro para el maestro, sexto grado*[22] ***;*** tanto el propósito como la estructura y los contenidos son similares a la propuesta de 1977. A diferencia del programa anterior, en éste se incluye una explicación más amplia acerca de la relación funcional:

> La relación funcional entre dos conjuntos de números es una idea central en las matemáticas. Aprovechando la experiencia del alumno, se empieza a abordar este tema, haciéndolo reflexionar sobre cantidades que dependen unas de otras. Esa relación funcional entre dos cantidades no siempre es directa, es decir, no siempre al aumentar una cantidad la otra aumenta. En ocasiones, al aumentar una cantidad la otra disminuye, o pueden aumentar o disminuir ambas pero en diferente proporción . En el programa se hace uso de relaciones funcionales sencillas que el alumno puede calcular. Se sugiere para el estudio del tema , las siguientes actividades: observación de diferentes formas de dependencia, construcción de tablas donde se registren los valores que va tomando una cantidad al variar otra, resolución de problemas y construcción de gráficas donde se registren los valores que va tomando una cantidad al variar otra. (SEP,1982: 61)

En lo que refiere al tratamiento de problemas de proporcionalidad, se hacen algunas modificaciones cuya razón de ser no queda clara, por ejemplo: en 1977, un objetivo específico era “5.4.2. resolverá problemas de proporción directa, mediante la aplicación de la *propiedad fundamental de las fracciones equivalentes*”, y en 1982: “5.4.2. Resolver problemas de variación proporcional directa mediante la aplicación de la *propiedad de los productos cruzados*”

Así, la reforma que inició en 1972 y perduró hasta 1992, trajo, por una parte, una renovación interesante en el tratamiento de la proporcionalidad, al subsumirla en el estudio más amplio de la dependencia funcional y al aportar nuevos recursos como las tablas de variación. Pero, en lo que respecta a las herramientas para resolver problemas de proporcionalidad, no parece haber logrado una integración de lo viejo con lo nuevo que superara las propuestas de la década anterior.

[22] En esta versión la estructura es similar a la de 1972: organización por áreas, sólo que ahora en lugar de 7 son 8, al incluirse la de Educación para la salud; cada unidad se organiza en ocho unidades y cada unidad está formada por objetivos particulares , objetivos específicos y actividades de aprendizaje

Diez años después: primeros aportes de la investigación cognitiva

En 1992, como parte del Programa Emergente de Reformulación de Contenidos y Materiales Educativos y de Actualización del Maestro, se diseñó un Programa Emergente para Primaria, y Guías para el Maestro. Estos materiales constituyen una fase de transición hacia el nuevo plan y nuevos programas de estudio que entrarían en vigor en el ciclo escolar 1993-1994. Se aclara que estos programas emergentes no reemplazan a los programas vigentes (de 1977).

Se convoca a los educadores a concentrar sus esfuerzos en 5 puntos críticos, entre los que se encuentra:

> Desarrollar la capacidad de plantear y resolver problemas y la habilidad para hacer mediciones y cálculos precisos para propiciar con ello la comprensión y el disfrute del conocimiento matemático. (SEP,1992:6)

En el programa se propone un trabajo considerablemente más rico para trabajar la razón y la proporción en 5º y 6º grados; se incluyen temas como procesos de comparación, nociones de variación, variación proporcional, concepto de razón, identificación de situaciones en las que subyace la proporcionalidad; identificación de situaciones en las que no está presente la proporcionalidad; aplicación de las ideas de proporcionalidad a problemas reales (SEP,1992: 77, 91).

En la guía únicamente se desarrollan dos ejes temáticos para 5º y 6º grados, el de Geometría y el de **razón y proporción**[23]. Los autores justifican la inclusión de este último tema por ser un elemento angular de la matemática y de la física, así como por su vinculación con la vida cotidiana. (Figueras M. Olimpia et al., 1992: 5-41).

En esta propuesta puede observarse una incipiente incorporación de los resultados de la investigación, sobre todo de naturaleza psicológica, que se realizó durante las dos décadas anteriores en torno a lo que se llamó “el razonamiento proporcional”. Esta incorporación convive con elementos muy tradicionales de la teoría de las razones.

Algunos aspectos que hacen distinta a esta propuesta de las anteriores son, por ejemplo: iniciar con actividades orientadas a distinguir la *comparación* aditiva de la multiplicativa para

[23] Esta es la guía que utilizó como referente importante el maestro que observamos. En la introducción hicimos una breve descripción de su contenido.
En el desarrollo de los contenidos, los autores aclaran que la variación inversa no se considera como proporcional: “en la proporcionalidad inversa las dos cantidades no varían proporcionalmente; se usa el término *proporcionalidad inversa* porque una cantidad varía proporcionalmente con el inverso multiplicativo. En la proporcionalidad inversa es el producto de las cantidades y no la razón lo que se mantiene constante.” Se sugiere tratarla someramente en la primaria.(Figueras, Olimpia, et al., 1992: 18)

construir la noción de razón, la inclusión de varios acercamientos para resolver problemas de proporcionalidad y la mención de etapas en el desarrollo del razonamiento proporcional en los niños [24].

Se mencionan cuatro "enfoques" para resolver problemas de proporcionalidad:

> 1.- Uso de tablas y razonamiento pre-proporcional. Toma como punto de partida el uso de una tabla que se amplía a partir de dobles, triples, mitades, cuartos, etc. Esta estrategia "se apoya en las propiedades más intuitivas de la proporcionalidad"
>
> 2. Razonamiento proporcional. Aquí se hace uso de la constancia de la razón en forma de cociente que se tiene para cada pareja de datos. Dado un problema como el siguiente, "Una docena de lápices cuesta $ 3000, ¿cuánto costarán 30 lápices?"…"la igualdad de las razones de costo a lápices es 3000/12 = ????/30. Esta ecuación puede resolverse por equivalencia de fracciones
>
> $$\frac{3000}{12} \xrightarrow{\text{mitad}} \frac{1500}{30(sic)} \xrightarrow{\text{mitad}} \frac{750}{3} \xrightarrow{\times 10} \frac{7500}{30}$$
>
> $$\frac{3000}{12}=\frac{1500}{30(sic)}=\frac{750}{3}=\frac{7500}{30}$$
>
> o a través del factor de proporcionalidad de dos de los datos por medio del cociente entre ellos… y aplicándolo al otro dato, (multiplicando):
>
> factor de proporcionalidad = $\frac{3000}{12}=250$
>
> por lo tanto, ???? = 30 x 250 ó 7500"
>
> 3.- Unitario. Se refiere a la búsqueda de la razón unitaria, o el valor unitario
>
> 4.- Algorítmico o regla de tres. Se menciona que no es un enfoque apropiado para la primaria porque presupone el manejo de algunas nociones de álgebra, además de que se trabaja de manera muy mecánica. (*op.cit.* : 19-20).

Cabe destacar la mayor consideración de procedimientos alternativos, aunque podría discutirse la calificación de "preproporcional" relativa a los primeros[25]. Llama la atención, nuevamente, que en los procedimientos más formales, se privilegia la razón externa (entre magnitudes) con respecto a la interna, si bien esta vez se escoge un cociente con más sentido que el que se vio en la propuesta anterior (ahora se trata de pesos por lápiz).

---

[24] Un niño pasa por etapas de desarrollo en relación con el razonamiento de tipo proporcional. Las etapas pueden caracterizarse de la siguiente manera: 1. Incompleta, ignora parte de los datos o da una respuesta ilógica; 2.Cualitativa, ya toma en cuenta todos los datos, pero sólo puede hacer consideraciones cualitativas, por ejemplo, necesita más o necesita menos; 3. Aditiva, usa diferencias en vez de proporcionalidad; 4. Pre- proporcionalidad, razonamiento correcto que no se basa en la razón de dos de las cantidades sino en una combinación de duplicar, triplicar, tomar medios, o procesos de ese tipo y sumar estas contribuciones; 5. Razonamiento proporcional, uso directo de la razón entre dos cantidades para llegar al resultado. (Figueras, O. et al., 1992: 20)

[25] Consideran incluso que la búsqueda de una razón unitaria tampoco es un procedimiento que ponga en juego la proporcionalidad, pues sugieren al maestro que observe si al resolver un problema, "los alumnos usan ideas de proporcionalidad o se van a la razón unitaria"

En la propuesta ocurre, como en la de los sesenta, una identificación rápida de las nociones de razón y fracción (no se habla, por ejemplo, de razones enteras). La razón se define como “una comparación multiplicativa entre dos cantidades”, y la fracción como “comparación entre dos cantidades” Se hace referencia a la “forma fraccionaria de la razón”, por ejemplo “cuando decimos que las 3/8 partes de la clase son niñas” y se recurre a las nociones de equivalencia y simplificación aplicadas a las razones. (*op. cit.*: 15).

Sin embargo, se pretende no reducir tal identificación a una cuestión de notación, como se aprecia en el siguiente ejemplo:

> En un examen de 10 preguntas Carlitos contestó bien sólo 5. La razón de respuestas correctas es de 1 respuesta correcta por cada _____ preguntas. ¿Qué fracción de las respuestas contestó correctamente?. Como ves, hay dos maneras de representar una razón: relacionando dos números, o con una fracción. Podemos decir que 1 de cada 2 respuestas de Carlitos fue correcta o que la ½ de las respuestas fue correcta.” (no se indica cómo leer ½, puede ser “la mitad” o “un medio”) (*op. cit.*: 27).

Al presentar la simbología para representar una razón, señalan como equivalentes las siguientes: 9 de 15; 9 a 15; 9:15, y agregan que “también se puede representar una razón como una fracción. Como 9/15” pero aclaran que esto “va más allá de ser una simple escritura”

Otra noción que se destaca es la de *variación*, ya sea proporcional o no. Para esta noción se recurre al uso de tablas de variación. Los autores señalan que a través del estudio de la proporcionalidad se debe concluir que ésta

> es una variación en la que se mantiene constante el cociente entre las dos cantidades. O lo que es lo mismo, que las razones entre cada pareja de valores de las dos cantidades son equivalentes.

Y añaden que la proporcionalidad también es una relación que

> transfiere de una cantidad a la otra cambios multiplicativos como el doble, el triple, la mitad, la cuarta parte, o bien cualquier otro múltiplo o submúltiplo. (*op. cit.* :18).

Al referirse a las técnicas proporcionales se refieren tanto a la presencia de una razón constante que se identifica como el factor de multiplicación, como a la presencia de razones internas, aunque éstas no se reconocen como tales (según las etapas del pensamiento proporcional que mencionan los autores, el uso de estas relaciones así como el de las tablas de variación, corresponde a un razonamiento pre- proporcional).

Hay pues una consideración más amplia de las propiedades de la proporcionalidad que en las propuestas anteriores, y una integración menos problemática de lo viejo con lo nuevo que en la propuesta de la década de 1972.

La reforma de 1993*:* indicios todavía poco nítidos de una nueva posición para las razones y las proporciones en la escuela primaria

En el marco del Acuerdo Nacional para la Modernización de la Educación Básica, se procedió a la elaboración de los planes y programas de estudio para la educación básica que entrarían en vigor a partir de septiembre de 1993.

Se propone poner "mayor énfasis en la formación de habilidades para la resolución de problemas y el desarrollo del razonamiento matemático a partir de situaciones prácticas". (SEP,1993a: 15)[26]

Los contenidos se organizaron en torno a seis ejes temáticos, entre los que se encuentra el de *procesos de cambio* con énfasis en las nociones de razón y proporción[27]. El tratamiento de este eje se inicia en cuarto grado y se profundiza en 5º y 6º.

> El eje conductor está conformado por la lectura, la elaboración y análisis de tablas y gráficas en las que se registran y analizan procesos de variación. Se culmina con las nociones de razón y proporción (SEP, 1993a: 51).

Veamos la propuesta para cada grado:

Eje: Procesos de cambio. (SEP,1993a, 62,65 ,67)

4º. Grado	**5º. Grado**	**6º. Grado**
Introducción a la elaboración de tablas de variación proporcional. Problemas sencillos	Elaboración de tablas de variación proporcional y no proporcional para resolver problemas. Relaciones entre los datos de una tabla de proporcionalidad directa Elaboración de gráficas de variación proporcional y no proporcional Planteamiento y resolución de	Planteamiento y resolución de problemas que impliquen elaboración de tablas y gráficas de variación proporcional y no proporcional. Análisis de tendencias en tablas de variación proporcional y no proporcional Relación entre situaciones de variación y las tablas y gráficas correspondientes

[26] De manera específica, en los programas SEP (1993a: 15-16) se pretende el desarrollo de:

- la capacidad de utilizar las matemáticas como un instrumento para reconocer, resolver y plantear problemas
- la capacidad de anticipar y verificar resultados
- la capacidad de comunicar e interpretar resultados
- la capacidad de comunicar e interpretar información matemática
- la imaginación espacial
- la habilidad para estimar resultados de cálculos y mediciones
- la destreza en el uso de ciertos instrumentos de medición, dibujo y cálculo
- el pensamiento abstracto a través de distintas formas de razonamiento, entre otras, la sistematización y generalización de reglas y estrategias

[27] Los otros ejes son: Los números, sus relaciones y las operaciones que se realizan con ellos, Medición, Geometría, Tratamiento de la información y Predicción y azar.

	problemas de porcentaje	El valor unitario como procedimiento para resolver ciertos problemas de proporcionalidad Los productos cruzados como método para comprobar si hay o no proporcionalidad Planteamiento y resolución de problemas de porcentaje

Como materiales de apoyo están el Libro para el alumno, el Avance Programático el Libro para el Maestro, los Ficheros con propuestas de actividades didácticas, y el taller para maestros *La enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria.*

En este programa, como en el de 1992, se da importancia a la noción de *variación,* sea ésta proporcional o no. Se conserva la propuesta de los programas de 1974 de representar gráficamente las situaciones de variación proporcional y no proporcional con cantidades discretas y continuas e, igual que en la propuesta de 1992, la proporcionalidad inversa se presenta sólo como un recurso más para que el maestro diferencie la variación directa de otras que no lo son.

Se da importancia, más que en los programas anteriores, al reconocimiento de procedimientos intuitivos y el manejo de la noción de proporcionalidad en términos cualitativos a través de identificar razones internas, que son nombradas como “relaciones en tablas de proporcionalidad”, o más concretamente, como “dobles”, “triples”, “mitades” entre los datos de un problema (SEP, 1994a, 1994b, 1994c)[28].

Además de los procedimientos intuitivos anteriores, el procedimiento para resolver problemas de proporcionalidad que se destaca explícitamente en el programa (“como alternativa cuando las relaciones de dobles o triples “no son tan evidentes”) es el que consiste en calcular el valor unitario, no ya el de fracciones equivalentes, ni el de los productos cruzados (este último se sugiere únicamente para verificar) (SEP, 1994a, 46-47; 1994c,60;1995b,28)

En lo anterior puede percibirse una intención de ofrecer técnicas más accesibles, a la par con una forma de suavizar la identidad entre razón y fracción. Esta tendencia se observa con

[28] En los materiales de apoyo, el uso de expresiones como “doble”, “triple”, “mitad” se reconoce como una estrategia “más natural” ya que se apoya en las propiedades intuitivas de la proporcionalidad”6º,60. SEP (1994a, 46-47; 1994b, 39-40; 1994c,60). No se alude a la presencia de un escalar.

más claridad en los libros de texto, principalmente en el de sexto grado, como se verá más adelante. No obstante, hay momentos en los que se plantea el vínculo razón-fracción, momentos que no logran, todavía, constituir una secuencia clara, posiblemente en parte debido a que éstos proceden de ejes distintos: el de procesos de cambio y el de los números, sus relaciones y sus operaciones. En este último aparece el contenido de “la fracción como razón” y, por ejemplo, en el avance programático de 5º grado (SEP,1993c, 23,25) se propone revisar “la fracción asociada a una razón”; para lo cual se sugiere resolver problemas de comparación multiplicativa como introducción al concepto de razón y utilizar la noción de fracción como razón que se encuentran en el fichero. En SEP(1994d, 34), se menciona que

> hay muchas situaciones en las que lo que interesa de una cantidad es *qué parte* representa de otra cantidad, y no tanto conocer el número de elementos. Las fracciones permiten expresar esta relación entre una parte y un todo

Con base en la propuesta del plan y programas de 1993, se elaboraron nuevos libros de texto. Como mencionamos en la introducción, el maestro decidió no utilizar el libro vigente (SEP, 1995d) porque a su juicio resultaba complejo y carente de secuencia. En este texto se pone énfasis en el uso de tablas de variación, sin que se hagan explícitos términos o propiedades de la proporcionalidad, excepto la regla de tres que se propone como una forma de comprobar si un resultado, que se obtuvo por otros procedimientos, es correcto.

Como parte del proceso de revisión permanente de los materiales que edita la SEP, se elaboraron nuevos libros de texto para 5º y 6º grados (2000 y 2001 respectivamente)[29]. Esta propuesta no será motivo de análisis en el presente trabajo, por lo que únicamente señalaremos algunas características generales. En ambos grados se incluyen diversas lecciones, casi la quinta parte del total, orientadas hacia las situaciones de proporcionalidad. En estos libros se observa un uso explícito, aunque no frecuente, de expresiones como variación proporcional y no proporcional, proporcionalidad, relaciones aditivas y multiplicativas, fracciones como relaciones o razones, operadores fraccionarios, la noción de razón en problemas de proporcionalidad y productos cruzados.

Persiste un uso intensivo de tablas, la apertura a distintos procedimientos, como valor unitario, razones internas (éstas no se nombran), operador multiplicativo constante y productos cruzados, este último para comprobar el resultado.

[29] En ambos textos (SEP,2000:3 y 2001: 3) se señala que con esta renovación se pretende que haya mayor coherencia, tanto en la secuencia de contenidos entre un grado y otro como en el tratamiento didáctico de los mismos. Estos libros sustituyen a los aprobados en 1994.

Probablemente lo más novedoso en el tratamiento del tema en estos libros, principalmente en el de sexto grado, es, en primer lugar, la existencia de situaciones de comparación y de valor faltante en las que se manejan razones sin reducirlas inmediatamente a un solo número; además, la existencia de razones que corresponden a números enteros y la existencia de un esbozo de secuencia para introducir la expresión de las razones como una fracción, por ejemplo, SEP 2001: 96-97; 106-10;136-137.

En la lección 61 de 6º grado (SEP,2001:136-137), después de que los alumnos hacen algunas comparaciones se propone la siguiente actividad:

> La naranjada A se preparó con 5 vasos de agua y 3 vasos de jugo. La naranjada B se preparó con 20 vasos de agua y 8 de jugo.
>
> ¿En cuál de las dos naranjadas se usaron más vasos de jugo? _________
>
> ¿Cuál de las dos naranjadas sabe más a naranja?____________________
>
> ¿Por qué? ____
>
> Compara tus respuestas con las de tus compañeros.
>
> El sabor a naranja no depende solamente de la cantidad de vasos de jugo, sino de la **relación** entre la cantidad de vasos de jugo y la de vasos de agua. Esta **relación** se llama **razón**. En la vida cotidiana a veces se le llama “proporción”. Se puede expresar así: “5 vasos de agua por tres de jugo”

Al final de esta lección se presentan diversas maneras de expresar una razón: mediante dos cantidades, mediante un número que puede ser o no un entero y mediante un porcentaje:

Expresa las razones como se indica:

Mediante dos cantidades	**Mediante un número**	**Mediante un porcentaje**
De cada 1000 pesos de ganancia, me cobran 250 de impuesto	El impuesto es____ de la ganancia	El impuesto es el ___ % de la ganancia
De cada ____ toneladas de aguacate se exportaron ___ toneladas	Se exportó _____ de la producción de aguacate	Se exportó el 40% de la producción de aguacate
Por cada peso que yo gano, tú ganas _____	Tú ganas **tres veces** lo que yo gano	Tú ganas el ___% de lo que yo gano

Comentario

El recorrido anterior por las principales propuestas curriculares realizadas en México, en los últimos 50 años, para la enseñanza de la proporcionalidad, permite apreciar los numerosos cambios que ha sufrido el acercamiento a este tema de estudio en la escuela, a veces sutiles, a veces mayores, casi nunca explícitamente anunciados ni, por lo tanto, explicados.

Puede entreverse, al igual que cuando se revisan los cambios relativos a otros temas[30], la evolución de los referentes que influyeron en las propuestas: las matemáticas modernas, la psicología cognitiva y más recientemente, de manera incipiente, la didáctica de las matemáticas. Sin embargo, en el caso de la proporcionalidad, más que en el de otros contenidos, los cambios son un tanto imprecisos, aparentemente un poco azarosos, probablemente debido al estatuto relativamente ambiguo de un tema que ha dejado de formar parte de las matemáticas vivas de los matemáticos.

Lo que interesa subrayar aquí, es el hecho de que las propuestas curriculares que hemos revisado, constituyen referentes para los maestros que enseñan este tema en la escuela primaria. Es muy probable, por ello, que en las secuencias didácticas que los maestros crean para enseñar el tema, se encuentren elementos de dos o más de las propuestas que hemos revisado, junto con otros que ellos han ido desarrollando. De qué manera han integrado estos elementos, qué tipo de dificultades han logrado superar y cuáles constituyen todavía problemas por resolver, son algunas de las preguntas que motivaron el trabajo empírico que se presenta más adelante.

Nos detendremos todavía un momento más en el análisis del conocimiento en juego, la proporcionalidad, esta vez para revisar, así sea someramente, los análisis que ofrece la investigación sobre procesos de enseñanza y de aprendizaje centrados en dicho tema.

1.3 Investigación en didáctica sobre la proporcionalidad

Estudios sobre cognición

En la década de los años ochenta, la investigación sobre el desarrollo del razonamiento proporcional, empezó a tomar distancia con respecto a la tesis piagetiana según la cual dicho desarrollo estaría subordinado de manera estricta al de las operaciones lógicas del pensamiento[31].

---

[30] Ver, por ejemplo, el caso de la enseñanza de los primeros números en Block y Álvarez,(1999).

[31] Piaget se interesó por la proporcionalidad en tanto una relación de dependencia lineal entre dos variables. Con ello, puso de manifiesto, como lo hizo con tantas otras nociones de matemáticas, que la adquisición de la proporcionalidad implica un proceso de desarrollo subordinado a la construcción de determinadas estructuras del pensamiento lógico. A través de distintas tareas que ponen en juego relaciones funcionales lineales entre dos variables (peso y distancia en la experiencia de la balanza, relación entre longitudes en la proyección de una sombra, relación entre total de fichas y fichas marcadas en una experiencia de extracción al azar, entre otras), Piaget identificó tres etapas del proceso de desarrollo del razonamiento proporcional:

a) estadios tempranos, entre los 5 y los 8 años, en los cuales los sujetos apelan a correspondencias cualitativas y a seriaciones (más uno)

La constatación de que determinadas *características de las tareas* de proporcionalidad podían influir de manera determinante en los niveles de logro de los sujetos, llevó a un viraje importante en el foco de atención de las investigaciones: se realizaron varios estudios, tanto desde el marco teórico de la psicogénesis (Noelthing,1980ab; Ricco, 1982), como desde otros enfoques, (Karplus,1983; Tournaire, 1986), para conocer los procesos específicos de desarrollo del pensamiento proporcional, considerando determinadas variables de las tareas propuestas.

Así, por ejemplo, Karplus, Pulos y Stage (1982) eligieron alumnos de 6º y 8º grados, mitad hombres y mitad mujeres con un desempeño medio en matemáticas. Tomaron como referente más cercano el trabajo de Noelting (1980ab). La situación experimental consistió en presentar a los alumnos dos mezclas de limón y azúcar en diferentes proporciones; se manejaron 32 pares ordenados con diferente grado de dificultad, la mitad en relaciones de igualdad y la mitad mediada por una razón desigual y en los que podía estar en juego una razón entera, o una no entera. En la entrevista se plantearon ocho situaciones y dos tipos de pregunta a cada niño: una para identificar cuál era el concentrado más dulce o si eran iguales, y otra para indicar qué cantidad de jugo necesitaría X para igualar a Y. El entrevistado explicaba su respuesta. De las respuestas derivaron 4 categorías:

1. Incompleta, ilógica, en la que el estudiante supone y hace operaciones inadecuadas;
2. Cualitativa, usa términos como “más” o “menos” para comparar las cuatro cantidades;
3. Aditiva, compara los datos a partir de diferencias o restas;
4. Proporcional, compara y ordena relaciones de proporcionalidad.

Observaron que hay mayor éxito en las tareas de razonamiento proporcional cuando en las relaciones que se propician está en juego una razón entera y disminuye cuando la razón es no entera. Las diferencias por sexo se señalaron como poco significativas.

En los estudios sobre el desarrollo del razonamiento proporcional, el análisis del desempeño en función de las características de la tarea fue ocupando un lugar cada vez más importante. Los aportes de otros investigadores, procedentes de la corriente de la didáctica de las

---

b) estadios intermedios entre los 7 y los 12 años, con compensaciones aditivas o uso de razones elementales del tipo 2:1.

c) estadios avanzados, entre los 12 y los 14 años, que se caracterizan primero por una comprensión lógica de la proporcionalidad y después por la adquisición de una métrica que permite tratar todos los casos posibles, independientemente de los valores numéricos de los datos y de las razones. (Block, D.,2001:220).

matemáticas de tradición francesa, fueron importantes en este proceso. A continuación, presentamos brevemente algunas de las categorías importantes relativas a las características de la tarea.

Las estructuras aditivas y multiplicativas: el papel de las magnitudes

Con base en el interés por trabajar de manera conjunta la interconexión de conceptos matemáticos y la psicogénesis de éstos en los alumnos, Vergnaud (1981) desarrolló la noción de campo conceptual, entendido como “un espacio de problemas o de situaciones-problema cuyo tratamiento implica conceptos y procedimientos de diversos tipos en estrecha conexión”. (Vergnaud, G.,1981: 217)

La noción de *campo conceptual* destaca el hecho de que un concepto matemático adquiere su significación en un conjunto de situaciones diversas, las cuales, a su vez, ponen en juego simultáneamente varias nociones que se interrelacionan. Con ello, se demuestra la necesidad de estudiar a las nociones no de manera aislada, sino en su interconexión con otras, en el seno de cada campo, y en períodos de tiempo largos.

Los campos conceptuales que Vergnaud (1979, 1981,1987, 1995) ha estudiado ampliamente son dos: el de las estructuras aditivas y el de las estructuras multiplicativas.

> El campo de las estructuras multiplicativas consiste en el conjunto de situaciones que pueden ser analizadas como problemas de proporción simple y múltiple y para las cuales se necesita multiplicar o dividir. Varios conceptos están vinculados a esas situaciones, entre ellos, función lineal y no lineal, espacio vectorial, fracciones, razones, número racional y multiplicación y división (Vergnaud, 1987:141)

Vergnaud destaca que, en las estructuras multiplicativas, a diferencia de las aditivas, todas las relaciones son cuaternarias (y no ternarias) pues desde los problemas más simples de multiplicación y de división implican ya una proporción simple de dos variables, por ejemplo:

Estructuras Aditivas		Estructuras Multiplicativas	
3 Carros	→ 7 carros	1 carro →	$ 5
4 carros		4 carros →	$ 20

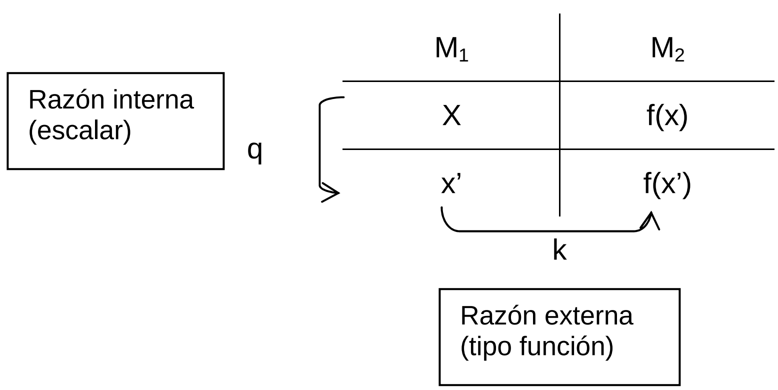
No obstante, la diferencia más profunda entre estos dos tipos de relación parece ocurrir en el plano de las *magnitudes*: “Con frecuencia las relaciones cuaternarias son relaciones entre objetos de naturaleza diferente”, por ejemplo entre precios y mercancía; estas relaciones constituyen el prototipo de los problemas de tipo multiplicación. (Vergnaud, G., 1995: 15-16, 56-62). Comin, E. (2001,4) lleva aún más lejos esta diferencia, al afirmar que

> No son las estructuras algebraicas modernas las que diferencian los campos conceptuales de la adición y de la multiplicación (estas operaciones consideradas, como “leyes de composición”, establecen, las dos, relaciones ternarias) sino las relaciones entre magnitudes que describen. Se pueden sumar o restar magnitudes[32] de misma naturaleza; la adición es una operación interna a una magnitud; pero, el producto de dos magnitudes es otra magnitud. La razón de dos magnitudes de naturaleza diferente (razón externa) determina a otra magnitud y la razón de dos magnitudes de misma naturaleza (razón interna) es un escalar. En todos los casos, las multiplicación aparece como una operación “externa”.

Estas consideraciones revelan dos rasgos distintivos de la proporcionalidad, importantes desde el punto de vista del aprendizaje y de la enseñanza: al ubicarla en el centro de las estructuras multiplicativas, se prepara el análisis de los vínculos conceptuales que esta noción guarda con otras: la multiplicación, la división, las fracciones. Por otra parte, empieza a destacarse, si no todavía en los trabajos de Vergnaud, sí en otros posteriores como el que citamos de Comin (2000 y 2001), la importancia de las magnitudes en el estudio de la aritmética, y en particular, en la comprensión de la proporcionalidad.

Las razones internas y externas en una relación proporcional entre magnitudes y los dos grandes tipos de procedimiento para resolver problemas.

En una situación típica de proporcionalidad, y más específicamente, en una *proporción*, se ponen en relación cuatro cantidades las cuales pertenecen a dos conjuntos de medidas diferentes[33]: Se pueden identificar dos tipos de relaciones entre las cantidades, las internas y las externas:



En una situación de proporcionalidad, las razones internas se conservan, y la razón externa es constante. Vista desde la estructuración con la función lineal, la

[32] Comin, E. Se refiere a cantidades de magnitud. Conviene aclarar que el término *magnitud* suele utilizarse al menos en tres sentidos: a). Magnitud, en términos genéricos, como volumen, peso; b). Como una cantidad delimitada, en sentido cualitativo, como sinónimo de tamaño, como la expresión“gran magnitud”; c). Para referirse a cantidades específicas de magnitud. Por otra parte, está la noción de *medida* que remite a una cuantificación numérica de una cantidad de magnitud, por ejemplo, “3 m ”; en ocasiones, también a esto se le llama erróneamente magnitud.

[33] La estructura algebraica de estos conjuntos, dotados de las operaciones adición (interna) y multiplicación (externa) es la de un espacio de medidas.

propiedad de la conservación de las razones internas se conoce como isomorfismo multiplicativo:[34] $f(n\ x) = n\ f(x)$, mientras que la propiedad de la constancia de la razón externa corresponde a la definición explícita de la función lineal: $f(x) = kx$.

En los estudios en educación matemática sobre el objeto *proporcionalidad* se hace referencia a estos dos tipos de relación; la nomenclatura varía en función del ámbito del que se toma, la teoría clásica de las proporciones, o el álgebra[35].

Entre estos dos tipos de relación (razón interna, razón externa) se identifican dos diferencias importantes, desde el punto de vista didáctico:

1. Cuando los conjuntos entre los que se establece la relación tienen más de dos elementos, hay, en cada uno, más de dos razones internas distintas entre sí; cada una de ellas equivalente a la razón que guardan los elementos homólogos del otro conjunto[36]. En cambio, todas las razones externas son equivalentes, por lo que suele decirse que hay *una* razón externa constante:

	M_1	M_2
q	X	f(x)
	X’	f(x’)
q’	X’’	f(x’’)
’’	x’’’	f(x’’’)

k

[34] Vergnaud (1979: 3-4) identifica dos grandes estructuras multiplicativas: el isomorfismo de medidas y el producto de medidas. “La estructura del isomorfismo de medidas es aquélla de la relación de proporcionalidad entre dos tipos de magnitudes: cantidades de mercancía y su precio (…). Estas magnitudes pueden ser continuas, (longitud, volumen, peso, temperatura) o discretas (número de objetos, de paquetes). Se pueden representar estas estructuras por medio de tablas de correspondencia, en las que la función *f* hace pasar de la medida de una magnitud del primer tipo a la medida de la magnitud correspondiente del segundo tipo”

x	y = f(x)
x´	y´= f(x´)

La estructura del producto de medidas es aquélla del producto de dos dimensiones. El caso más simple en las magnitudes físicas es el caso del área.

[35] Se hace referencia, por ejemplo, a la razón interna y externa, (Freudenthal,1980: 293-295); de “within ratios” y “between ratios” , (Noelthing,1980; Karplus,1983), entre otros; de operador escalar y operador función, (Vergnaud, 1995)

[36] Si hay *n* elementos en un conjunto, habrá *n(n-1)/2* razones internas, ó *n (n-1)*, si se consideran las recíprocas.

2. La razones internas son siempre entre cantidades de una misma magnitud, por lo tanto son escalares (números sin dimensión). Las razones externas, en cambio, pueden corresponder a relaciones entre magnitudes distintas (por ejemplo, distancia y tiempo). Estas últimas dan cuenta de una nueva magnitud, una magnitud cociente, la cual puede tener un nombre propio (por ejemplo, *la velocidad*) o no tenerlo.

Noelting (1980b: 344) distingue la diferencia de naturaleza entre estas dos razones destacando que la razón externa da cuenta de un nuevo concepto, de un “estado”, mientras que las razones internas expresan una variación entre estados[37]. El investigador sostiene que el concepto de proporción integra los dos tipos de razón, de lo cual puede suponerse que la comprensión de ambos tipos ocurre de manera simultánea e integrada.

No obstante, las técnicas para resolver problemas de proporcionalidad simple implican operar sobre alguna de las dos razones. Se suele llamar “analógicos” a los procedimientos que recurren a las razones internas, y “analíticos” a los que recurren a la razón externa constante. Por ejemplo, en un problema típico, en el que se trata de determinar un valor faltante, los dos procedimientos son los siguientes:

Vueltas del engrane A	Vueltas del engrane B
2	3
6	x

3/2)

- Procedimiento *analógico*: Cuando el engrane A da 6 vueltas el B da tres veces 3 vueltas, pues 6 es el triple de 2 (razón interna);
- Procedimiento *analítico*: Cuando el engrane A da 6 vueltas el B da 3/2 de 6 vueltas, ó 1.5 X6 vueltas (1.5, factor de proporcionalidad, razón externa constante)

[37] Noelting (1980ab) utiliza los términos “entre” (between) e “intra” (within) para referirse a las razones interna y externa respectivamente. Esto se debe a que la situación que él utiliza en su estudio pone en juego la comparación de dos razones externas, por ejemplo (2 vasos de agua, 3 de naranja) vs (4 vasos de agua, 5 de naranja). Entonces, la razón entre dos cantidades de vasos de agua, que nosotros llamamos interna, es, a la vez *entre* dos estados, mientras que la razón entre vasos de agua y de jugo, que nosotros llamamos externa, es *interior* a un estado.

Un aspecto muy estudiado ha sido el de las condiciones que inciden en la opción por alguno de los dos tipos de razones, interna o externa, al momento de resolver problemas de proporcionalidad.

A decir de Comin (2001:7), las contradicciones en los resultados de los distintos estudios que se han realizado sobre esta cuestión, sugieren que no existe un desarrollo genético universal, sino más bien que dicha elección depende tanto de los sujetos como de las características de la situación.

No obstante, varios de los estudios que han sondeado los procedimientos de resolución de los alumnos frente a tareas de proporcionalidad (Block ,2001; Carretero L.,1985[citado por Vergnaud,1987]; Hart, Brown, Küchemann, et al.,1981; Vergnaud,1979[38]; o con adultos no escolarizados (Soto C. I y N. Rouche,1995), han encontrado mayor incidencia de procedimientos analógicos (también llamados internos o escalares) que de procedimientos analíticos (externos), lo que deja suponer que los primeros pueden ser más intuitivos.

Con respecto a las características de las situaciones que influyen en la elección de uno de los dos tipos de procedimiento, se han estudiado principalmente dos:

- el carácter numérico de las razones interna y externa: si una de los dos es claramente más sencilla que la otra, en ciertas condiciones, los alumnos se inclinarían por ésta, (Ver Küchemann, 1989).
-la naturaleza de las magnitudes: por lo menos en las resoluciones con alumnos de primaria, la razón externa, en general poco utilizada, tendría más posibilidades de serlo en los casos en los que las magnitudes son de la misma naturaleza , y en los que por lo tanto el operador no tiene dimensión, sino el sentido de un número de veces (Ver Block, D. 2001).

Cabe citar también el estudio de Hart (1981: 93-107), en el que explora el desempeño de estudiantes de secundaria en el Reino Unido[39]. Entre los alumnos que participaron en 1976, hubo poca evidencia de que el procedimiento que consiste en plantear la proporción con fracciones y en resolverla (a/b = c/d) , que había sido enseñado en la escuela, fuera utilizado

[38] Vergnaud G. (1979, 18-19) identifican algunos procedimientos utilizados para actuar de manera exitosa: el escalar, el tipo función, el valor unitario, el uso de la “regla de tres”, la descomposición tipo escalar, la descomposición tipo función. En el mismo trabajo señala que hay una ventaja evidente a favor de los procedimientos tipo escalar, no obstante que son “raramente enseñados”.
[39] Como parte del programa de investigación “Concepts in Secondary Mathematics and Science” realizaron un estudio con 2257 estudiantes entre 11 y 15 años de edad. Para este estudio se adaptaron algunas situaciones utilizadas por Piaget(1968) y por Karplus (1975), a las que se les varió el tipo de magnitudes, el tipo de números y el tipo de razón. Se incluyeron otras situaciones de recetas, aleación de metales y porcentajes.

correctamente por los niños (sólo 20 de 2257); también se observó que el recurso de multiplicar por una fracción, fue evitado por los alumnos. En este estudio se da cuenta de una heterogeneidad de procedimientos dependiendo del problema, entre los que destacan los procedimientos más intuitivos, internos o escalares, como duplicar y partir por la mitad, y utilizar la propiedad aditiva (a la suma de dos valores de un conjunto, le corresponde la suma de dos valores del otro) [40]. Cuando la pregunta requiere de la realización de operaciones más complicadas que calcular dobles o triplicar, la cantidad de procedimientos por parte de los niños tiende a aumentar, y en particular, los errores que consisten en usar constantes aditivas en lugar de multiplicativas.

Por otra parte, Carretero,(en Vergnaud 1987:156) al investigar la forma en que los niños de 8 a 11 años abordan las situaciones de proporcionalidad, identificó también la preferencia de los estudiantes por el uso de procedimientos escalares y por aquéllos que siguen el orden en que se presentan los datos; también señala que las expresiones asociadas con procedimientos escalares como "tres veces más" o "tres veces menos", no se comprenden bien por parte de los estudiantes al final de la educación básica.

Variables que inciden en la dificultad de un problema de proporcionalidad

Los estudios que se mencionaron anteriormente sobre las condiciones que favorecen un tipo de procedimiento determinado, se han realizado, por lo general, en el marco de investigaciones más amplias sobre las formas en que determinadas variables afectan los procesos de resolución, dificultan los problemas, y también sobre los tipos de errores frecuentes de los alumnos. Tres grandes familias de variables han sido estudiadas, por Vergnaud (1979, 1987, 143)[41], y después por varios investigadores más.

- las numéricas: números pequeños o grandes, enteros o no enteros; razones (internas y externas) enteras o no enteras, etc., Los valores numéricos fueron distintos: enteros, decimales, pequeños y grandes.
- las relativas a las magnitudes: familiares o desconocidas; de distinta naturaleza o de misma naturaleza, discretas o continuas.

[40] Hart, y después varios autores más, llaman a estos procedimientos "*building up strategies*"

[41] A manera de ejemplo, haremos referencia a algunos resultados de Vergnaud (1979): Un grupo de estudiantes del 10º grado resolvió exitosamente, en un 95% los problemas de proporcionalidad simple cuando la situación estaba relacionada con el consumo; el mayor porcentaje de error se presentó en los problemas de cálculo de la temperatura; los números considerados "malos" no influyeron demasiado en el grado de dificultad debido a que usaron calculadora y los problemas con mayor grado de dificultad fueron los que en la relación se planteaba que ***f(x)*** era menor que ***x*** .

- estructura del problema: de comparación, de valor faltante, de proporción múltiple, entre otros.

Küchemann (1989) tomando como referencia los trabajos de Hart (1981), Karplus (1983) y Vergnaud (1983) también estudió la forma en que las variables numéricas y de contexto inciden tanto en la complejidad de un problema como en la elección de un procedimiento. Veamos un ejemplo: para explicar la influencia del contexto o del tipo elementos que se ponen en juego en una situación de proporcionalidad, Küchemann eligió situaciones que implican la misma variable numérica, mientras que el contexto cambia, como la siguiente:

X 1 ½

	Personas	huevos	
X 1 ½	4	6	X 1 ½
	6	?	

X 1 ½

		Cerillos	clips	
X 1 ½	Mr Short	4	6	X 1 ½
	Mr Tall	6	?	

Realizó su trabajo con 150 estudiantes de secundaria entre 13 y 15 años de edad. En el primer caso, 64% logró resolver la situación y en el segundo, el 43% tuvo éxito. El autor explica esta diferencia diciendo que, el contexto de la receta favorece más el recurso al procedimiento de considerar dobles, mitades y sumas (6 huevos es igual a 4 huevos más la mitad de 4 huevos), que el otro contexto.

Desde una tradición de investigación diferente, Dupuis y Pluvinage (1981) realizaron una investigación que se orientó hacia los alumnos 5º grado (13 años) que se habían formado bajo la influencia de las matemáticas concretas[42]. En el cuestionario se incluyeron situaciones de geografía y física debido a que en esas materias manejaba la proporcionalidad como porcentaje; también se elaboró un cuestionario que contenía sólo enunciados numéricos. Se manejaron tres tipos de variables: *numérica*, (enteros naturales o decimales); *didáctica*, que tiene que ver con el grado de explicitación de la operación demandada, y la *presentación de la incógnita* (el lugar y la forma de presentarla, con un signo de interrogación o con un cuadro vacío, o con una X).

Entre los resultados generales destacaron que el número de éxitos decrece según se trate de datos y operaciones con enteros o con decimales; al respecto señalan que “los decimales y los racionales son vistos por el matemático como extensiones de los enteros (pero) desde

[42] Depuis y Pluvinage denominan *matemáticas concretas* a las que promueven el uso sistemático y frecuente de una noción.

el punto de vista didáctico no es lo mismo", pues para los alumnos existen en ámbitos separados a veces con barreras infranqueables.(Depuis C. y F. Pluvinage,1981: 201).

Señalaron que existe un alto coeficiente de correlación entre el éxito y la forma de presentar los enunciados, por ejemplo, ***12 x X = 36 x 13*** resultó significativamente con mayor éxito, 78%, que la presentación $\frac{12xX}{36} = 13$, con el 18 %.

En relación con los enunciados escritos se observó que los alumnos tienden a seguir un orden en las operaciones de acuerdo a los planteamientos del texto y se atoran con dificultades numéricas que una simplificación previa habría hecho desaparecer.

El uso de la tabla en la que no está ninguna operación explícita, contribuyó a una mayor cantidad de respuestas correctas en los diferentes grupos.

Entre las materias, hay una gran diferencia entre la física y la geografía, en favor de esta última.

Otras variables estudiadas han sido: las condiciones en las que se plantea un problema, tales como la presencia o ausencia de material concreto de apoyo (Tourniaire, 1986: 408), o la manera de formular la constancia de la razón en el problema (explícita evocando un valor unitario constante; explícita evocando una regla de correspondencia, sobre entendida, o implícita) (Block, 2001).

Estudios sobre la proporcionalidad en tanto objeto de enseñanza

En los trabajos que revisamos anteriormente la atención se centra en los procesos cognitivos de los sujetos, ya sea desde el punto de vista del desarrollo de su razonamiento proporcional, o bien, de su capacidad, en un momento dado, para resolver determinado tipo de tareas, siempre en relación con determinadas variables de éstas.

Son menos los trabajos que han incorporado también la dimensión de la enseñanza. Entre éstos, se encuentran algunos que tocan tangencialmente un aspecto, otros que profundizan de manera importante en uno de ellos, y otros, finalmente, que abordan varios aspectos. Los aspectos que identificamos son: análisis de las transformaciones del saber en el currículum (incluyendo análisis epistemológicos), estudios experimentales de secuencias didácticas y análisis de conocimientos de maestros.

Análisis del saber en el currículum

Dupuis y Pluvinage (1981) basados en una revisión del currículo francés, tomaron como referencia tres vertientes en la enseñanza de la proporcionalidad: las *matemáticas tradicionales* asociadas con la enseñanza de la "regla de tres", las *matemáticas modernas*, que promueven la enseñanza con base en la noción de función lineal, y las *matemáticas concretas* en las que "la proporcionalidad requiere ser sistemáticamente presentada y utilizada" con un fuerte apoyo de las tablas de correspondencia.

Chevallard y Jullien (1989) , al estudiar la historia de la enseñanza de las fracciones en el marco de la teoría de la transposición didáctica, dan cuenta de la forma en que las razones, históricamente precursoras de las fracciones, a partir del renacimiento se funden con éstas. Exploran las posibles causas de la permanencia de la teoría de las razones en la enseñanza, enfatizando el hecho de que, finalmente, las razones fueron el vehículo para introducir los números irracionales por lo menos hasta fines del siglo XIX.

Bosch (1994a) realiza un extenso análisis del capítulo de Razones y Proporciones en los textos clásicos del siglo XIX y principios del XX, así como de las formas en que éstos se fueron transformando. Identifica un momento en el que la teoría de las fracciones, y más ampliamente el álgebra penetran la aritmética tradicional para dar lugar a una sintaxis híbrida cuyo sentido es cada vez menos claro, fenómeno que ella llama de "opacificación" de las técnicas de la proporcionalidad.

La autora muestra que el concepto de función lineal podría resolver fácilmente las dificultades, sin embargo muestra también que las técnicas basadas en modelación algebraica no permiten justificar la adecuación del modelo al sistema de magnitudes. Enfatiza la necesidad de un álgebra de las magnitudes.

Así mismo analiza las condiciones de existencia de la enseñanza de la proporcionalidad asociadas a un sistema de instrumentos semióticos con los que el alumno y el maestro trabajan las matemáticas: el discurso, los gestos, la escritura de frases, las gráficas, entre otros. Por la función que tienen estos objetos matemáticos, distingue los objetos ostensivos[43] y los no ostensivos.

---

[43] Bosch M. y Y. Chevallard (1999: 90) definen ***ostensif*** del latín ***ostendere***, mostrar, presentar con insistencia, para referirse a todo objeto que tienen una naturaleza sensible, una cierta materialidad, y que, de hecho, adquiere para el sujeto humano una realidad perceptible. Por citar un ejemplo, la notación ***a:b*** y la palabra ***razón***, son objetos ostensivos; la ***noción de razón***, es un objeto no ostensivo.

Comin (2000: 37-70 y 2002:15) hace una revisión de la evolución de lo que él llama “las condiciones de enseñanza de la proporcionalidad”. Previamente, propone una definición didáctica de la noción de proporcionalidad, la cual, al mismo tiempo que recupera el lenguaje matemático moderno, procura no perder aquello que la distingue del concepto de función lineal, esto es, el trabajo con magnitudes. Identifica entonces tres marcos en los que puede llevarse a cabo un trabajo sobre la proporcionalidad: el de las magnitudes, el de las medidas y el de los números abstractos, o algebraico.

Debido a la relevancia de esta clasificación para analizar al problemática didáctica de la proporcionalidad, presentamos a continuación una breve síntesis, empezando con las definiciones de proporcionalidad:

Definición 1: Dos magnitudes G y G’ (entendidas como conjuntos de cantidades[44]) son proporcionales si toda razón entre dos elementos de una misma magnitud es igual a la razón entre los dos elementos correspondientes de la otra magnitud[45].

Definición 2: Si las magnitudes son susceptibles de ser medidas, lo cual es el caso en general, entonces la relación de proporcionalidad puede modelarse de la siguiente manera:

a) Se necesita una situación con

- Dos magnitudes G y G’
- Una correspondencia C entre los elementos de G y de G’
- Una magnitud u elemento de G y una magnitud u’ elemento de G’
- Dos variables numéricas X y Y, definidas respectivamente sobre G y G’, con valores en los reales, tales que X(u) = 1 y Y(u’) = 1

b) A cada pareja (g, g’) de magnitudes homólogas, les corresponden dos valores numéricos: x = X(g), y = Y(g’) (en donde g’ = C(g)).

c) Existe un número k el cual, para toda pareja (x, y) asociada a una pareja de magnitudes homólogas, verifica la igualdad y = kx

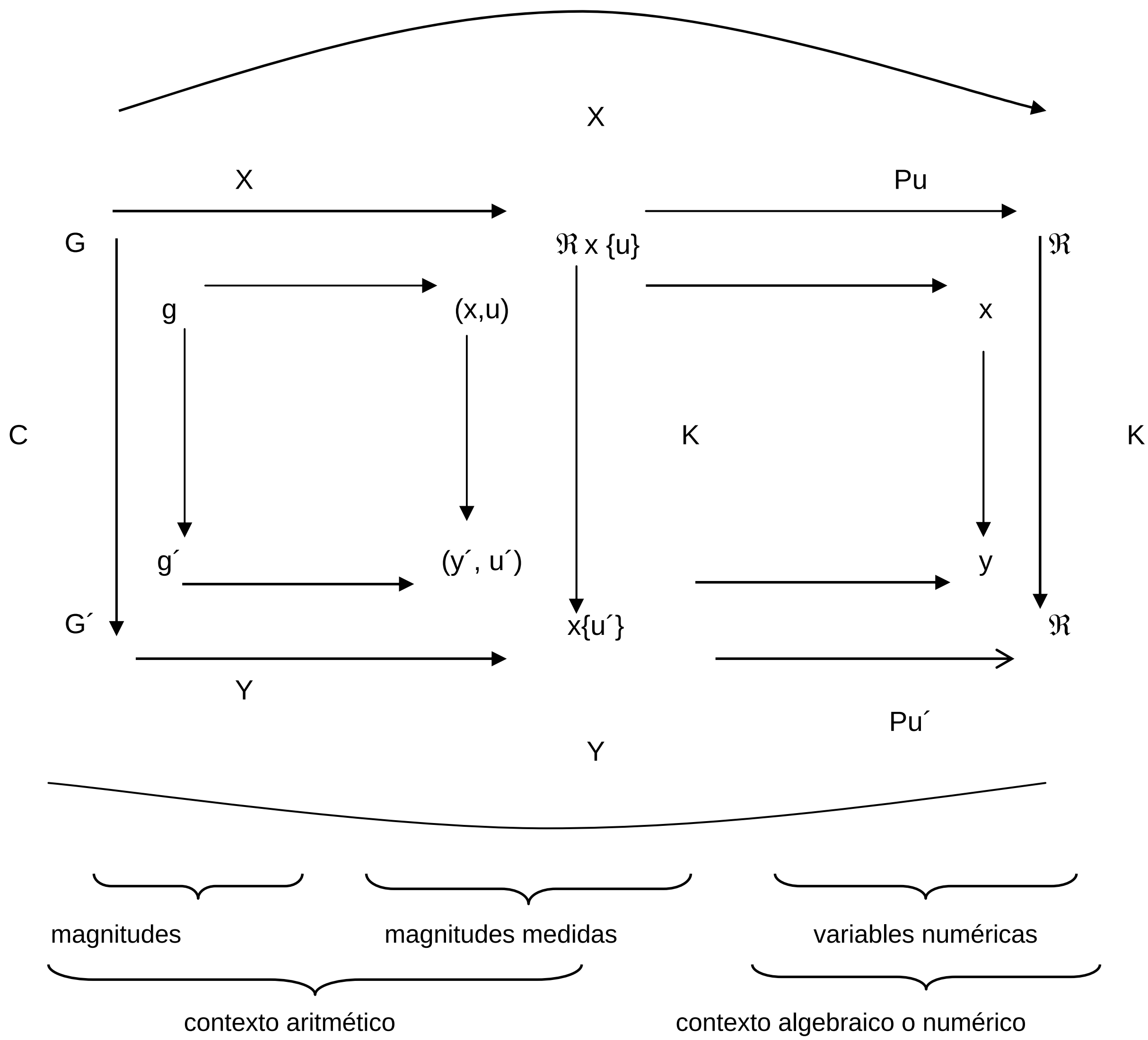
Bajo estas tres condiciones se puede decir que:

- Las dos magnitudes G y G’ son proporcionales
- Las variables X y Y son proporcionales
- La situación es de proporcionalidad.

[44] Comin utiliza el término “magnitud” tanto para referirse a ésta en términos genéricos (peso, volumen, superficie), como a una cantidad específica. (Ver nota 32, p 56)

[45] Para definir la proporcionalidad entre dos magnitudes G y G’, agrega el autor, es necesario contar con una forma de definir las relaciones multiplicativas en cada uno de los campos (razones internas).

El autor propone entonces el siguiente esquema para una situación de proporcionalidad, en el cual pueden identificarse los tres marcos posibles:



En seguida, el autor analiza las formas en que se puede decidir si una relación es de proporcionalidad o no en función del marco, magnitudes, medidas, números.

En el marco de las magnitudes, para mostrar que dos magnitudes G y G' son proporcionales, es necesario mostrar que toda razón de dos elementos de una de las magnitudes es igual a la razón que guardan los elementos correspondientes en la otra. Probar que no hay proporcionalidad es entonces sencillo: basta con un contra ejemplo, pero, probar que sí la hay, enfrenta el problema de justificar la igualdad para *todas* las razones. Esto requiere de un razonamiento general sobre las magnitudes, es decir, es necesario encontrar una justificación para decidir la igualdad de las razones. El autor destaca tres motivos posibles, ya clásicos: ley física, razón matemática o lógica y convención social[46].

En el marco de las medidas, lo nuevo es la posibilidad de expresar las razones que guardan las magnitudes mediante sus medidas. La verificación de la proporcionalidad pasa entonces por verificar que las razones numéricas se conservan de un conjunto al otro, o bien, recurriendo a la segunda definición, puede también verificarse si existe una constante de proporcionalidad.

Finalmente, en el marco algebraico o numérico, no hay ningún motivo a priori, dice el autor, para que dos variables reales *x, y* sean proporcionales, pero puede construirse de manera formal una relación del tipo y = kx. Se define así una función lineal cuyas propiedades se derivan de las propiedades de la estructura algebraica de los reales.

La función lineal puede verse como un modelo de las relaciones de proporcionalidad: si un "sistema organizador", agrega Comin, establece una correspondencia uno a uno entre los elementos de dos conjuntos finitos tal que la razón de números que se corresponden sea constante, entonces puede considerarse que el conjunto de parejas así obtenido es una parte del conjunto de parejas que determinan a una función lineal. Si además esos números son positivos, entonces se les puede considerar como medidas de dos magnitudes proporcionales.

Una vez establecidos estos tres marcos, Comin ubica en ellos las técnicas enseñadas para resolver problemas típicos de proporcionalidad:

	Marco aritmético		Marco algebraico
	Magnitudes	Magnitudes medidas	Números y variables
Razones internas	MP	MP; MRU; TV	TV, PC
Razones externas		TV, SP	TV, SP, FL

MP: método de las proporciones — TV: Tabla de variación — FL: Función lineal

MRU: Método de reducción a la unidad — SP: Series proporcionales — PC: productos cruzados

[46] Chevallard y Jullien (1989) llaman la atención sobre las ventajas didácticas de este último motivo: generalmente, es mucho más transparente y accesible que los otros.

El método de las proporciones (MP) y el de la reducción al valor unitario (MRU), afirma Comin, tienen su origen en el ámbito de las magnitudes, o de las medidas, los cuales son fundamento de la aritmética elemental.

El método de las proporciones (MP) se basa en las razones internas. Consiste en plantear y resolver una "ecuación proporcional" del tipo x/a = b/c. La presencia de letras y del signo "="evoca, comenta el autor, la resolución algebraica, pero la resolución del MP se distingue de ésta, en primer lugar porque aquí los datos son magnitudes, o medidas y, además, porque la resolución apela a técnicas propias de la teoría de las razones y proporciones tales como: el producto o la permutación de los extremos y los medios, y la adición o la sustracción de los antecedentes y de los consecuentes.

Cabe agregar que este método pertenece a la teoría clásica de las razones y las proporciones y ha tendido a dejarse de enseñar como tal desde que dicha teoría despareció de los programas.

Por otra parte, una de las propiedades enunciadas en la teoría de las proporciones, "el producto de los medios es igual al de los extremos", convertida después, por el uso de la notación con fracciones, en la igualdad de los productos cruzados (PC), da lugar a un algoritmo para calcular un término desconocido en una proporción: se multiplican los dos extremos (o los dos medios) conocidos y se divide entre el medio (o el extremo) conocido, por ejemplo: a:b::c:x, entonces x = $\frac{bc}{a}$. Esta regla, muy popular, permanece todavía, aislada, en los textos escolares y en las prácticas de la enseñanza.

El método de la reducción al valor unitario, consiste en un rutina en la que se escribe primero el valor que corresponde a determinada cantidad, después se calcula el valor que corresponde a la unidad, mediante una división, y finalmente se calcula el valor que corresponde a otra cantidad, mediante una multiplicación. El método descansa también en las razones internas. Es muy valorado en la enseñanza debido a la simplicidad tecnológica que pone en juego: las justificaciones apelan al conocimiento espontáneo que se tiene sobre ciertas magnitudes familiares.

En el marco algebraico, en lugar de magnitudes y medidas, los elementos que intervienen son números abstractos, estructurados en conjuntos, los naturales, los enteros, los decimales, los racionales, los reales. El conjunto de referencia depende del conocimiento de los alumnos. El modelo es la función lineal, como descripción de una relación entre variables que se explicita mediante escrituras con literales y propiedades operatorias que se toman del álgebra elemental. Se privilegia la razón externa, llamada coeficiente de proporcionalidad u operador, entre otros nombres.

Las series proporcionales (SP) y la tabla de variación (TV), continúa el autor, nacieron en las reformas de los años 70. La tabla de variación no es en sí una técnica de resolución, sino una forma de organización de los datos que facilitaría la ubicación de los mismos y la organización de los cálculos. Las series proporcionales son una variante de la tabla, que privilegia el recurso a operadores externos enteros. Con estos dos recursos, señala nuevamente Comin, se intentan aminorar las dificultades didácticas que se presentan por una introducción algebraica de la función lineal, sin magnitudes.

Finalmente, las conclusiones del análisis realizado por Comin (2001:26-28) de los programas de enseñanza, de 1947 a 1985 son:

- Los cambios en los programas vienen acompañados de un deslizamiento del marco de las magnitudes hacia el de los números;
- La idea de utilizar estructuras algebraicas para describir relaciones entre magnitudes tiende a hacer figurar a la proporcionalidad como una simple ilustración de la función lineal;
- Las palabras y otros ostensivos que permitían describir relaciones entre magnitudes se han diluido en los repertorios actuales

Dos de las causas a las que Comin atribuye las dificultades observadas son: la desaparición del estudio de las magnitudes, las razones y las proporciones de la enseñanza secundaria, por lo que los futuros docentes ya no reciben una formación sólida en este tema, y la dificultad para formular los viejos problemas, problemas típicos, con los nuevos términos del álgebra.

Estudios didácticos experimentales sobre enseñanza de la proporcionalidad

En el nivel de secundaria, los estudios didácticos sobre la proporcionalidad se han centrado en la articulación entre las nociones de proporcionalidad y de función lineal (Ver Rouchier, 1980)

En el nivel de primaria, la investigación sobre didáctica de la proporcionalidad ha tendido ha destacar de manera cada vez más clara que esta noción, además de constituir un tipo de relación frecuente e importante en contextos extra matemáticos (de vida cotidiana, del comercio, de las ciencias), es, al mismo tiempo, una especie de andamiaje para la construcción de otras nociones matemáticas básicas.

Si bien esta perspectiva puede encontrarse enunciada en el concepto mismo de “campo conceptual de las estructuras multiplicativas” de Vergnaud, así como en el análisis que otros autores han realizado sobre la nociones que se integran en este campo (por ejemplo, sobre los números racionales, en Kieren, 1988), su concreción se halla en algunos estudios de ingeniería didáctica que se han realizado en los últimos 20 años.

Uno de los primeros estudios, y probablemente el más importante, es el que N. y G. Brousseau llevaron a cabo a lo largo de 10 años, sobre la construcción de los decimales en tanto aplicaciones lineales, en la escuela primaria (Brousseau, G. 1980; Brousseau, G. y N, 1987). No obstante que en estos trabajos no estudiaron la proporcionalidad en sí misma, ésta proporciona las técnicas específicas que se utilizan de manera implícita en la construcción de racionales y de aplicaciones lineales[47] Posteriormente se llevaron a cabo otros estudios en la línea abierta por dicho trabajo (Balbuena 1988; Block, 1987, 2001; Comin, 2000)

Una característica esencial de las secuencias didácticas creadas en estas investigaciones es el hecho de que se propicia una construcción de los números racionales, en la que las *razones* de números enteros funcionan durante un tiempo como precursoras de los números racionales. El racional emerge como una clase de razones equivalentes. La proporcionalidad no es un objeto de estudio explícito, funciona como marco implícito para dicha construcción.

Así, por ejemplo, en la secuencia trabajada por Brousseau, los alumnos utilizan parejas de cantidades como “100 hojas, 2 mm” para dar cuenta del espesor de una hoja (comparan, encuentran equivalencias, etc), antes de utilizar el número 2/100 mm; en el primer trabajo de Block (1987), los alumnos utilizan parejas del tipo (3 tiras igual 2 unidades) (6 tiras, 4 unidades), etc. para dar cuenta del tamaño de unas tiras de cartoncillo, antes de utilizar el número 2/3 de unidad. En el trabajo de Comin (2000), generan parejas del tipo (3 ratones, 10 semillas) (6 ratones, 20 semillas) para dar cuenta del tamaño de una ración, en el contexto de la equitatividad. En Block (2001) se destaca que, en los procedimientos que los alumnos ponen en juego en diversas situaciones de proporcionalidad, las razones de dos medidas enteras preceden a la expresión de la razón con un solo número, entero o fraccionario.

[47] Para Vergnaud, G. (1980, citado por Comin, 2001, 2), las relaciones de base, las más simples no son ternarias, sino cuaternarias porque los problemas más sencillos de multiplicación y de división implican la proporción simple de dos variables, una en relación a la otra.

Finalmente, en el trabajo de los Brousseau, las razones funcionan también como precursoras de aplicaciones lineales cuyo coeficiente es un número racional: por ejemplo, los alumnos utilizan parejas como “por cada 4cm, 7cm”, o bien “por cada 1cm, 1.75cm” para dar cuenta de un agrandamiento a escala, antes de trabajar con el operador x 1.75.

De esta manera, estos estudios didácticos apuntan a restituir a la noción de razón su sentido histórico de precursora de los números racionales, en la enseñanza. Con ello, aportan elementos que podrían contribuir a conformar alternativas para la enseñanza de la proporcionalidad, a mediano plazo.

Los conocimientos de los maestros

Encontramos pocos estudios centrados en los conocimientos del maestro acerca de la proporcionalidad, y de su enseñanza. En el estudio ya citado de Dupuis y Pluvinage (1981) los autores, asocian la diversidad de resultados que encontraron en un diagnóstico aplicado a alumnos, con las formas de enseñanza: “la heterogeneidad de los resultados entre los grupos podría explicarse por una variación en la enseñanza, más que por el medio de origen de los alumnos” . Esta diversidad, agregan, en lo que a formas de concebir y enseñar la proporcionalidad refiere, podría atribuirse al hecho de que los profesores optan por alguno de estos tres acercamientos (matemáticas tradicionales, modernas, y concretas), y, podría agregarse, a sus antecedentes de formación.

El estudio realizado por Jean - Jacques (1996, 339-247), al cual hicimos referencia en la introducción, es de los pocos que indagan los conocimientos de los maestros acerca de las formas en que los alumnos resuelven problemas de proporcionalidad. Se muestra, primero, que los alumnos que utilizaron el operador tipo escalar tuvieron mayor éxito al resolver las tareas propuestas que los que utilizaron el operador tipo función (en esto coincide con Vergnaud 1979). En segundo lugar, se pone en evidencia una ruptura entre lo que el autor llama “tarea prescrita”, la que el profesor supone que los alumnos van a realizar, y la “tarea efectiva”, la que realmente realizan, en tanto que los procedimientos esperados por los maestros, no son los que pusieron en práctica los alumnos, pues los primeros anticiparon un índice de éxito equivalente en dos problemas de estructura distinta y anticiparon que los alumnos utilizarían en ambos problemas un operador tipo función. La dificultad de los maestros para anticipar el tipo de procedimiento que utilizan los alumnos en problemas de proporcionalidad, ha sido documentada también en maestros mexicanos (Block, 2001).

Finalmente, los trabajos ya citados de Block (2001) y de Comin (2000), incluyen resultados de exploraciones sobre conocimientos de los maestros acerca de la proporcionalidad. En ambos casos se identifican errores conceptuales o lagunas importantes, las cuales se atribuyen a los fenómenos de transposición didáctica que se han comentado, así como al hecho de que, la proporcionalidad se ha dejado de enseñar en el nivel de secundaria.

Cabe señalar, por último, que hay pocos estudios sobre las prácticas reales de la enseñanza de la proporcionalidad; entre ellos, está el realizado por Alicia Ávila (2001:155-175) quien, con énfasis en el análisis de la relación didáctica, dedica un capítulo a la revisión de una secuencia respecto a la enseñanza de la proporcionalidad.

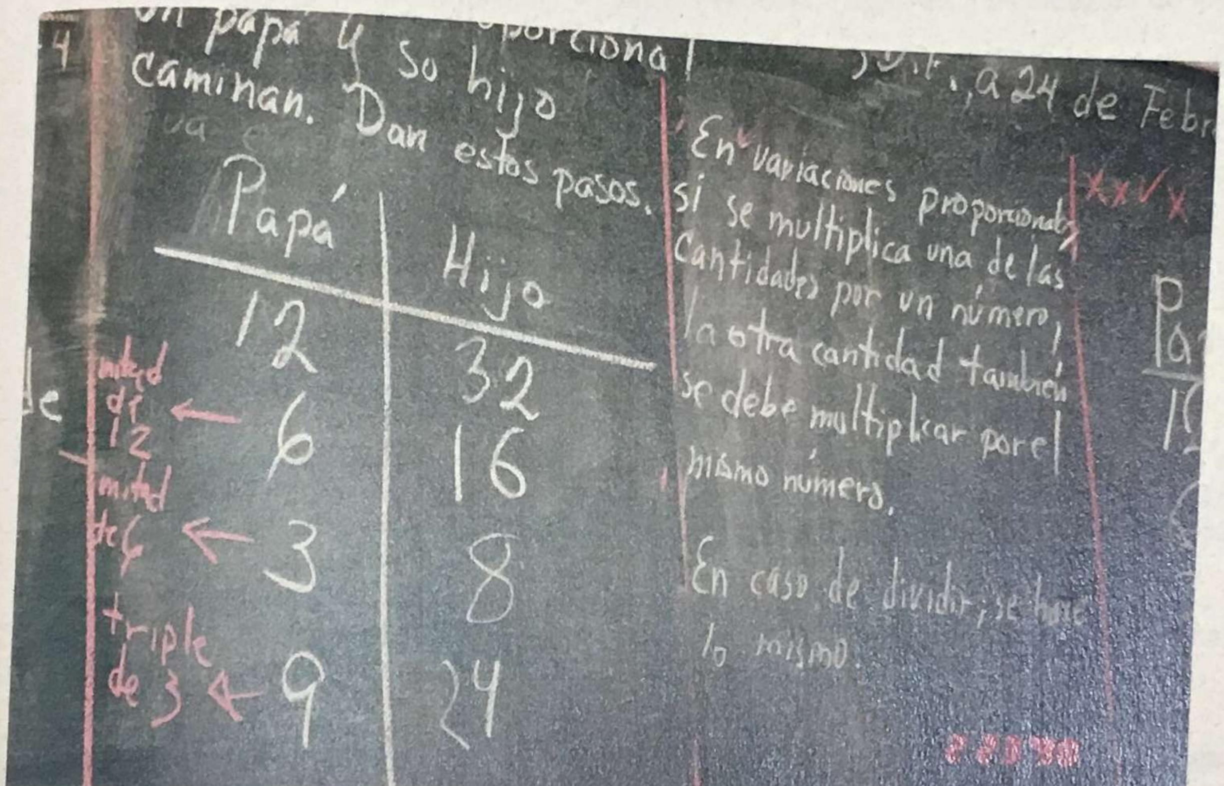
Comentario

Esta mirada a la proporcionalidad desde diferentes perspectivas es apenas un esbozo de la diversidad y de la complejidad del campo. Los diferentes estudios, exploratorios, experimentales o de intervención, en distintos países, con diferentes metodologías y con estudiantes de diversas edades son una muestra de ello. Los resultados de cada investigación, no siempre coincidentes, darían elementos para considerar la complejidad de las condiciones que propician el aprendizaje de determinados procedimientos y no de otros; los hallazgos comunes tales como la tendencia a usar estrategias aditivas y la dificultad para usar fracciones al trabajar con relaciones de proporcionalidad, plantean retos para el diseño de situaciones didácticas. Finalmente, los distintos niveles de complejidad según el contexto y los números que se empleen rompen con la noción monolítica de procedimientos únicos para resolver todo tipo de situaciones de proporcionalidad.

Por otra parte, no solamente las formas de enseñar la proporcionalidad y de articularla con otras nociones son diversas y han ido cambiando a lo largo de lo años, también las formas de definir el concepto mismo de proporcionalidad han cambiado y, de hecho, hoy en día no están dadas en la cultura de manera unívoca y clara. La larga historia de la noción de proporcionalidad, su paso por varias épocas e instituciones, aunado al hecho de no pertenecer ya al corpus de saberes matemáticos actuales, origina, por una parte, que hoy en día sea difícil contar con un marco claro que sirva de referencia para los maestros y los diseñadores de materiales curriculares y, por otra parte, permite esperar, como lo sugiere el estudio de Pluvinage en Francia, cierta heterogeneidad en las prácticas concretas de la enseñanza.

Sobre este último punto, cabe añadir que el análisis de la complejidad que subyace al tratamiento de la proporcionalidad debe contribuir también a explicar las dificultades que se observan en las clases, más allá de las decisiones que los maestros toman en su trabajo individual. A final de cuentas, los maestros tejen sus clases con el hilo de las ideas disponibles, heredadas, compartidas, acerca de los objetos de enseñanza.

CAPÍTULO 2
ACERCAMIENTO A DISTINTAS NOCIONES QUE CONFIGURAN EL CAMPO DE LA PROPORCIONALIDAD EN LAS CLASES OBSERVADAS



Variación proporcional. 6º grado. 1998.
Foto: M. Ramirez

CAPÍTULO 2

ACERCAMIENTO A DISTINTAS NOCIONES QUE CONFIGURAN EL CAMPO DE LA PROPORCIONALIDAD EN LAS CLASES OBSERVADAS

Un primer análisis de los registros nos permitió identificar la secuencia misma elaborada por el maestro, la reconstrucción que hizo del contenido, la manera en que se articularon las tareas y los conceptos asociados, así como las grandes dificultades de los alumnos y las formas en que éstos pusieron en juego recursos, nociones y estrategias de interacción.

La secuencia desarrollada por el maestro a través de las 12 clases que observamos, fue la siguiente: 1, Comparación; 2, Razón; 3, Problemas (razón y fracción); 4, Dibujos a escala; 5, Porcentaje; 6, Porcentaje; 7, Porcentaje y ejercicios con razones; 8, Tablas de variación; 9, Tablas de variación y razón; 10, Variación proporcional y productos cruzados; 11, Regla de tres; 12, Regla de tres y variación directa e inversa.

Después de analizar cada registro decidimos integrar los cinco apartados que en este capítulo detallaremos[1]; éstos son:

1. La comparación aditiva y la multiplicativa: cuando lo explícito precede a lo implícito
2. La introducción perturbadora de la fracción como definición de la noción de razón
3. El porcentaje: lugar de encuentro y desencuentro de nociones, significados y ostensivos
4. La puesta en marcha de una técnica, la regla de tres
5. Las tablas de variación proporcional: un espacio aislado de convergencia entre lo que espera el maestro y lo que hacen los alumnos

Para el desarrollo de las clases, el maestro utilizó como su principal referencia, una propuesta didáctica elaborada como parte del Programa Emergente de Reformulación de Contenidos y Materiales Educativos y de Actualización del Maestro: Figueras O. et al. (1992) *Guía para el maestro de sexto grado*. Una descripción de este material nos permitirá entender algunas decisiones del profesor en cuanto a la organización de la secuencia y la selección, diseño o adaptación de algunas situaciones.

---

[1] Los registros están numerados del 1 al 12. En el texto utilizamos **R-1, R-2… R-12**, según corresponda el extracto del registro a que se hace referencia. La notación utilizada en los registros es la siguiente: Aa., alumna; Ao., alumno; Aa.= o Ao.=, (misma alumna o mismo alumno); Mo., maestro; Obs., observador; MAYÚSCULAS, mayor intensidad en el habla; <u>subrayado</u>, énfasis especial dentro de la clase; diagonales, /mensajes no verbales/; paréntesis, apreciaciones o aclaraciones del observador; asteriscos (***) , ruido de fondo, comentarios indiferenciados en voz alta por parte de los alumnos; puntos suspensivos (…) silencio.

En esta guía se desarrolla un apartado llamado *Razón y proporción*[2], en el que se destaca la importancia de enseñar algunas nociones, como la comparación, la razón, razón como fracción y la variación.

Los autores aclaran que no se trata de resolver problemas con datos muy complicados"ni mucho menos que se aplique a ciegas el algoritmo de la regla de tres".

Dentro de los procedimientos para resolver situaciones de proporcionalidad, que los autores denominan *enfoques de la proporcionalidad*, se describen los siguientes: uso de tablas y razonamiento pre- proporcional, razonamiento proporcional, razón unitaria y enfoque algorítmico. También se citan algunos resultados de la investigación relacionados con las etapas del razonamiento proporcional.

Para el logro de los propósitos que se enunciaron (ver nota 2), se incluye una propuesta de actividades, cada una con ejemplos y casos específicos:

Actividades:

1. Comparar cantidades de diferentes maneras
2. Noción de razón y equivalencia
3. La razón como un número
4. Nociones de escala y su razón
5. Noción de porcentaje
6. Conexión entre fracción, razón y porcentaje
7. Ejercicios para profundizar en el concepto de razón
8. Diferentes tipos de variación
9. Variación proporcional y sus propiedades multiplicativas
10. El problema aditivo
11. Técnicas pre-proporcionales
12. Problemas razonables
13. Técnicas proporcionales
14. Problemas razonables (en el mismo sentido de 12)
15. Proporcionalidad inversa

Si bien esta secuencia constituyó un marco de referencia importante para el maestro, en la clase coexistieron sus interpretaciones personales con la recuperación textual de algunas sugerencias y las intervenciones de los alumnos; esta convergencia en la que se hacen explícitos vacíos, superposiciones y paralelismos en el proceso de enseñar y aprender,

[2] En esta propuesta nuevamente se hacen explícitas las nociones de *razón* y *proporción,* después del énfasis que se puso en la *variación funcional* con la reforma de los setentas.
Se plantean los siguientes objetivos:

- Que el niño vaya construyendo las nociones más importantes relacionadas con el concepto de proporcionalidad, tales como las nociones de razón y de variación y de algunas otras que se indican en las secciones siguientes.
- Que el niño aplique las ideas de proporcionalidad a problemas reales, dándole los suficientes elementos para decidir cuándo esta aplicación es la indicada y cuando no lo es.
- Que el niño desarrolle una base conceptual sobre este tema para que pueda aplicarlo a su vida cotidiana y pueda entender los planteamientos más formales que se le presentarán en la secundaria. (Figueras O. op. cit. :14)

incide en la complejidad para identificar, caracterizar y explicar la multiplicidad de sentidos que en este espacio llamado clase, se construyen.

2.1. La comparación aditiva y la multiplicativa: cuando lo explícito precede a lo implícito

Después de la primera sesión en donde la comparación (aditiva y multiplicativa) se presenta como tema de estudio, la idea de comparar seguirá presente a lo largo de casi todas las demás clases, pero esta vez de manera implícita, en tanto medio de resolución. En las clases siguientes, los objetos explícitos de estudio serán otros.

Esta sucesión expresa una característica que puede considerarse típica en la enseñanza de las matemáticas: la enseñanza de ciertos aspectos de una noción, previa a su aplicación. En los siguientes apartados vamos a analizar las formas específicas que asume esta organización; para ello haremos dos cortes en la secuencia del maestro: analizaremos las situaciones de la primera clase, en donde la noción de *comparación* es el tema explícito de la enseñanza, y después revisaremos algunas situaciones de dos clases posteriores (clases 2 y 8), en las que esta noción es ya un medio de resolución.

2.1.1. La idea de comparar como objeto explícito de enseñanza (primera clase)

Desarrollo de las situaciones

A lo largo de la clase, se suceden los siguientes momentos:

a) Trazo y recorte de tres cuadrados de 16, 4 y 8cm por lado, y una tira de 48 cm, misma que recortan en 3 partes: 30, 15 y 3 cm.
b) Escritura, en el pizarrón y en el cuaderno, del título de la clase: “Comparación”.
c) El maestro pregunta qué entienden por comparar
d) Resolución de una situación en la que se usa la diferencia como “veces más”
e) Comparación de los cuadrados y las tiras con la expresión “veces mayor”
f) Manejo de la fracción en un contexto de comparación
g) Situación de comparación en donde se pide una operación que exprese dicha comparación

- **El título y la pregunta ¿qué es comparar?**

Después de que los alumnos recortan unos cuadrados y una tira de cartoncillo, el maestro anota como título *Comparación* e invita a los niños a que expresen lo que piensan que eso significa: “Me quieren explicar por equipo ¿qué entienden por comparar?… y darme un ejemplo…”

Para los alumnos esta noción no es ajena; a la pregunta del maestro surgen varias aproximaciones que en un sentido amplio se orientan hacia la identificación de semejanzas y diferencias en los contextos de sexo, color, usos y forma de algunos objetos y en un sentido restringido se refieren a números y magnitudes en cuyo caso las relaciones que establecen son para señalar si es más chico, más grande o igual. La cuantificación de las relaciones es una tarea que está por empezar.

Una vez terminado este primer acercamiento el maestro plantea sucesivamente cuatro situaciones en las que los alumnos tendrán que realizar una comparación, aditiva y / o una comparación multiplicativa:

- **El problema de los hermanos: comparación a través de la "diferencia" y de "veces más"**

R- 1, 62-93

"Vamos a poner un ejercicio muy sencillo…"
"1. Ariana tiene 5 hermanos. Iván tiene un hermano.
La diferencia es de _____ hermanos
Ariana tiene _____ veces más hermanos que Iván"

Con esta situación el maestro presenta la noción de comparación desde una doble perspectiva: qué tanto más grande es una cantidad que otra, comparación aditiva manejada en este caso a través de la diferencia, y cuántas "veces más", comparación multiplicativa .

Con respecto a la forma de obtener la diferencia, se manifiestan algunas dudas:

R-1

84. Ao. a). Lo que estamos diciendo es para, que cuál…cuál este, cuál persona tiene más hermanos…
85. Mo. ¿Ya estamos?
86. Ao. c) Como que no le entiendo…
87. Ao. a). O sea, o sea, hay de diferencia 4. Ariana le gana de hermanos a Iván por 4, por 4 hermanos a Iván…

Una vez resueltas las dudas, los alumnos resuelven, efectivamente, sin dificultad:

R-1

/Un alumno de cada equipo pasa a escribir la respuesta al pizarrón/

Equipo	Respuesta	
1	5 - 1= 4	
2	5 - 1= 4	La diferencia es de 4 hermanos
3	5 - 1	La diferencia es que le faltan 4 hermanos a Iván
4	5 - 1	La diferencia es que uno es más grande
5	5 - 1	La diferencia es porque así se ve por cuánto le gana

EL maestro considera que la segunda pregunta ("Adriana tiene ___ veces más hermanos que Adrián") es más sencilla que la primera:

103. Mo. Esta respuesta era mucho más rápido. Me lo ponen acá por favor. Muchísimo más rápido. ¿Cuántas veces tiene más hermanos Ariana que Iván?

Probablemente atiende a las operaciones implicadas (5:1 = 5 más sencillo que 5 –1 = 4)[3]. No obstante, se crea una confusión: en varios equipos dan como respuesta "4", en vez de "5". Veamos un fragmento de la discusión:

R-1

99. Obs. (en otro equipo) Ustedes, ¿qué van a contestar?
100. Aa. Que Ariana tiene 4 veces más hermanos que Iván
101. Obs. ¿Tiene 4 veces más?
102. Ao. No, cinco
103. Mo. Esta respuesta era mucho más rápida. Me lo ponen acá por favor. Muchísimo más rápido. ¿Cuántas veces tiene más hermanos Ariana que Iván?
104. Aos. cuatro
105. Mo. Si alguien tiene una idea diferente la puede poner…Bueno, todos están coincidiendo que Ariana tiene cuatro veces más hermanos que Iván, ¿por qué?
106. Ao. Porque yo tengo uno y Ariana tiene cinco…
107. Mo. A, ver, Juan
108. Ao. Porque Ariana tiene cinco , Iván tiene uno y como ya hicimos la resta que de esta Ariana tiene 4 hermanos más que Iván…
109. Mo. Bueno,¿ no serían tres?
110. Aos. (en coro) Nooo!
111. Mo. ¿Por qué?
112. Ao. Porque Iván no tiene dos, tiene uno
113. Mo. Bueno, muy bien, vamos a poner entonces *Ariana tiene cuatro veces más hermanos que Iván"* /El maestro anota la palabra cuatro en el pizarrón/

La expresión "veces más" los hace no considerar la cantidad inicial. Sin embargo, para otros niños, es posible suponer otro origen del error: el término *más* en la expresión "cuántas veces más" parece llevarlos a integrar una comparación aditiva en su razonamiento, al identificar la pregunta "cuántas veces más" con "cuánto más". (Ver líneas 106 y 108 del registro).

Podemos suponer que para algunos niños la comparación funciona así:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{1 vez} & \text{1 hermano} \\ \text{2 veces} & \text{2 hermanos} \\ \text{3 veces} & \text{3 hermanos} \\ \text{4 veces} & \text{4 hermanos} \\ \text{5 veces} & \text{5 hermanos} \end{array}\right\} \quad \text{veces más} = 4$$

Para algunos alumnos (línea 102 del registro) no son 4 veces más, sino 5, pero esta respuesta se da al interior de un equipo y no se rescata como una propuesta distinta.

[3] En varios de los casos en los que el maestro subraya que determinada tarea es "muy sencilla", en base a la operación aritmética que está implicada, los alumnos enfrentan una dificultad importante que va más allá de dicha operación. Sobre esto ver el Capítulo 3.

El maestro avala el resultado de que Ariana tiene 4 veces más hermanos que Iván y se pasa a la siguiente situación.[4]

Además de la ambigüedad de la expresión “veces más”, otra dificultad local de esta situación (local en el sentido de que refiere a un detalle en el diseño de la misma), es el hecho de que la comparación multiplicativa se realiza contra la unidad: 5 hermanos vs un hermano. El resultado de la comparación (5), coincide con una de las cantidades, lo cual, considerando que es la primera comparación de este tipo que se establece en esta clase, puede ser desconcertante.

Notemos por otro lado que, cuando la comparación fue aditiva, el maestro insistió en la realización de una operación, pero no lo hace ahora, cuando es multiplicativa: ¿se debe esto al hecho de que la operación “cinco entre uno igual a 5” no es vista como tal?. Una de las comparaciones, la aditiva, queda asociada con la idea de hacer una operación, mientras la otra no. No obstante, cuando comparen superficies multiplicativamente, pedirá hacer una operación.

- **El problema del café: comparación a través de “veces más” y “cuánto más”**

El maestro escribe en el pizarrón:

R- 1

> 337. Mo (…)Para preparar mi café pongo 2 cucharaditas de café y 3 de azúcar.

Y complementa la consigna en forma oral:

> 341. Mo. (…)comparen las cantidades, aquí quiero una operación para compararlas… para que me digan ustedes cuánta más azúcar hay, cuánto más café hay o que, cuál es la operación que se puede hacer entre esas dos cantidades, la operación es sumamente sencilla

El maestro pretende que hagan una comparación aditiva a través de la expresión cuánto más que se introduce en este momento, sustituyendo al término diferencia que se utilizó anteriormente.

[4] Cuando el maestro invita a los alumnos a dar una respuesta diferente (R-1,línea 105), posiblemente espera la respuesta “5 veces” y al no recibirla, duda. El motivo para no corregir una respuesta errónea podría ser otro, por ejemplo la decisión deliberada de esperar otro momento, u otra situación en la que pueda ponerse en evidencia, más fácilmente, el error. No obstante, el análisis global de las clases deja ver que ésta no es una medida que el maestro suela tomar, en cambio, veremos otras ocasiones en las que el maestro manifiesta una duda, o incluso una idea errónea. En algunas de estas ocasiones como en la que ahora revisamos, el maestro se mostrará receptivo a lo que opinan los niños, o incluso, pediría explícitamente la opinión de uno en particular. Volveremos sobre esta característica de la interacción en la segunda parte del análisis de estas clases.

El maestro, a través de consignas adicionales, orienta hacia el uso de un procedimiento: “Quiero una operación para compararlas (…) ¿cuál es la operación que se puede hacer entre esas dos cantidades?”.

Las cantidades son 2 y 3; estrictamente hablando se pueden hacer cualesquiera de las cuatro operaciones básicas. La forma en que el maestro pregunta probablemente remita a la resta que han usado y supone que, al menos en este momento, las divisiones 2:3 ó 3:2 no se pueden hacer. Esta idea se refuerza con una segunda intervención que guía el trabajo: “La operación es sumamente sencilla”.

Con la idea de usar una operación sencilla, más que comparar, dos equipos hacen la suma de 3 + 2, lo cual tiene sentido en el contexto: se ponen 5 cucharadas en total; dos equipos hacen divisiones 3: 2, uno de ellos después cambia a una resta. Sólo un equipo resta 3 - 2 y aclara que la diferencia es uno:

R-1

> 363. Ao. es la cantidad (el uno) que es más que la otra (…) esta tiene una cucharada más que la de café (…) las 5 cucharadas sirven para preparar el café, por las de azúcar y por las de café…las cucharadas de azúcar es mayor que las de café…

Cuando los alumnos empiezan a dividir el maestro les dice que quiere “otra forma de comparar”, con esto descarta la división y una posible comparación multiplicativa (una y media veces más azúcar que café) sin embargo los alumnos la mantienen como operación válida tal vez tratando de encontrar la diferencia a través del residuo de la división: en un equipo al dividir 3 de azúcar entre dos de café señalan que les sobra una de azúcar. El uso de la división no es motivo de análisis con los alumnos. La única respuesta que se invalida explícitamente es la adición a través del argumento de que “no estamos en clase de adición” y remitiendo al problema de los hermanos, para hacer evidente lo absurdo de la respuesta 3 + 2, pues en aquél no se sumaron los hermanos de Iván con los de Ariana:

R-1

> 373. Mo. (…) No estamos en clase de adición ahorita (…) Esto no, no tenía razón de ser para qué sumo las dos, el azúcar y el café. Lo que estamos haciendo, desde el principio dijimos, es estar comparando.

Esta comparación deja fuera a la adición pero conserva la resta.

Con estas consideraciones por parte del maestro se pasa a la siguiente consigna en la que interviene una comparación multiplicativa:

R-1

> 373. Mo. Si compro una taza 3 veces más grande, uso _____ cucharaditas de café y _____ de azúcar

Aquí se retorna a la expresión veces más. En este caso el factor de comparación (3 veces) ya está dado y lo que los niños deben encontrar es el valor de las cantidades de azúcar y café así transformadas, en otras palabras lo que se busca ahora es una cantidad equivalente a tres veces otra cantidad.

En 4 de los 5 equipos triplicaron las cantidades; en uno cuadruplicaron; otra vez se presentó la dificultad para interpretar la expresión "veces más". La explicación que dan los alumnos es clara en este sentido:

R-1

> 388. Ao. porque 3, más una que ya teníamos … son 4… o sea, la taza chica más tres veces más grande son 4, y da en total 4

El maestro esta vez trata de demostrar que "3 veces más" significa multiplicar por 3 y no por 4, veamos la forma en que lo hace:

- Con una tabla de variación

Con la colaboración del grupo construye una tabla tomando como punto de partida que a 1 taza le corresponden 2 de café y 3 de azúcar, a 2 tazas, 4 de azúcar y 6 de café y a 3 tazas les correspondería 6 de café y 9 de azúcar.

R-1389

> 389.Mo. Para preparar mi café pongo 2 cucharadas de café y 3 de azúcar. Esto sería una taza (…) (completa la tabla con las respuestas que le dan los alumnos)

tazas	azúcar	café
1	2	3
2	4	6
3	6	9

Sobre la marcha el maestro asocia dos tazas con el doble y 3 con el triple. Estas expresiones no presentan ambigüedad, pero aún no se hace explícita su relación con la expresión que causa conflicto, "tres veces más".

R- 1

> 394 Mo. si yo esta taza la hago lo doble, sería como dos tazas
> 398 Mo. si le agrego otra parte ya sería lo triple

Para algunos alumnos no queda claro y continúan con la tendencia a excluir la cantidad inicial:

R-1

> 403 Aa. (son 4) porque ya teníamos la primera parte
> 404 Mo. Pues por eso, pero aquí está… 1,2,3 veces…
> 405 Aa. No, serían 4 porque todavía falta una para la tercera (…)

407. Aa. porque ya teníamos una y las otras 3, son 4
408. Mo. Bueno, es algo para así, para ponernos a (pensar?)… pero no, o sea, aquí está. Es una taza dos veces más grande, tres veces más grande
409. Ao. ¿Y la que teníamos?...

- Usa la expresión veces más grande

El maestro trata de que los alumnos aún no convencidos cambien su forma de percibir estas relaciones e introduce la expresión “veces más grande”, excluida de la primera explicación; trata de explicar:

	azúcar	café
1 ésta es una taza	2	3
2 tazas, 2 veces más grande	4	6
3 tazas, 3 veces más grande	6	9

pero un alumno insiste “¿y la que teníamos?” (línea 409); ante esta situación, el maestro recurre a un alumno que al parecer ha entendido; éste explica:

R-1

415. Ao. porque no es la cuarta parte, sino la tercera, por eso tiene que multiplicar por 3

Esta relación inversa a la que estaban manejando (del triple o cuádruple pasa a la tercera o la cuarta parte) tampoco convence a los alumnos que insisten en multiplicar por 4. El maestro concluye que es la tercera parte y plantea al grupo el reto de demostrar si para calcular 3 veces más grande se multiplica por 3 ó por 4.

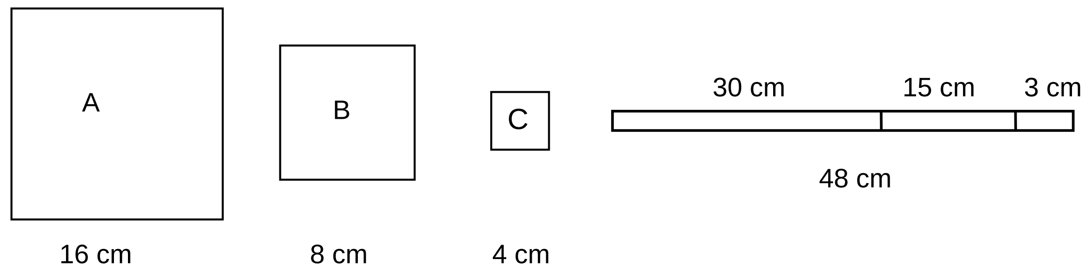
- **El problema de los cuadrados y las tiras: comparación en un contexto de geometría. Introducción de las expresiones “veces mayor” y “ veces menor”**

El maestro regresa a la situación con que inició la clase (y cuya resolución dejó pendiente), la cual consta de dos partes, la comparación de las superficies de los cuadrados y la comparación de las longitudes de las tiras.

A) La comparación de superficies

R-1

5. Mo. (…) Como primera actividad quiero que me recorten 3 cuadrados y una tira; por favor, distribúyanse el trabajo, uno traza el cuadrado, otro el otro (…). Necesito primero un cuadrado de 16 cm de lado, pero ya están trazándolo. Un cuadrado de 16 cm una persona, otra persona un cuadrado de 8 cm, otra persona un cuadrado de 4 cm. /El maestro trazó las figuras en el pizarrón y anotó las medidas de cada una/. En cada equipo trazaron y recortaron las mismas figuras/



R-1

132. Mo. /escribe en el pizarrón/ El cuadrado A es _____ veces mayor que el B.
165. Mo. /escribe en el pizarrón/ El cuadrado A es _____ veces mayor que el C.

En este caso el maestro solicita una comparación de tipo multiplicativo a través de la expresión “veces mayor”.

El maestro prevé un posible error: comparar las longitudes de los lados, así que trata de prevenirlo antes de escribir la consigna:

R-1

126. Mo. (…)tengan mucho cuidado, que no quiero que algún equipo se deje llevar por LA MEDIDA de uno de los lados

Mediante indicaciones adicionales, el maestro trata de precisar cuál es el objeto de la comparación:

126. Mo. (…) No vamos a comparar formas, compararemos otra cosa que es obvio, que es lógico porque está el A,B,C (…) Vamos a comparar tamaños

- *La comparación de A con B*

Los alumnos encuentran al menos tres formas distintas de comparar el cuadrado A con el B y lo expresan en los resultados: 3 equipos anotan como respuesta 4, uno anota 8 y otro 32. Estas respuestas no en todos los casos significan un número de veces como veremos a continuación:

Primera interpretación: comparación de las longitudes de dos lados:

El equipo cuya respuesta es 8 justifica de la siguiente manera:
R-1

152 Aa. Maestro, es que nosotros pensábamos que era la diferencia de que cuatro veces medía 8cm y que cada lado mide 8cm y que acá medía la mitad /señala uno de los lados/ del cuadrado de 16 cm…
153 Mo. Bueno, pero… a ver, va de nuevo tu explicación Montserrat, porque no entendí, no entendí por qué. Allá dice /lee en el pizarrón/ “EL cuadrado A es tantas veces MAYOR que el B”. a ver, vamos a responder…Sh! Por favor, algunos equipos, Enrique, en los otros equipos espérenme tantito porque si no, no escuchan a su compañera…
154 Aa=. Algunos habíamos dicho que el cuadro A medía 16 cm y que el cuadro B medía 8 cm, entonces nosotros dijimos que el cuadro B era la mitad del cuadro que medía 16…
155 Mo. ¿Qué serían? ¿centímetros? Si ustedes me están dando 8, 8 centímetros, tú crees que yo … a ver , a ver, esto sonará lógico, a ver ahora escuchen, léanlo….

156 Ao. ¿Leer?
157 Mo./El maestro completa el enunciado que estaba en el pizarrón agregando la respuesta Dice " El cuadrado A es *8 cm* veces mayor que el B" ¿8 centímetros veces?…Yo no pregunté cuántos centímetros es mayor uno que otro de lado, nosotros preguntamos cuántas veces es más grande el A que el B…

Los alumnos comparan lados en vez de superficie, a pesar de que el maestro trató de evitarlo (línea 126). En la primera intervención de los alumnos para explicar su resultado (línea 152) pareciera ser que recurren primero a comparar el perímetro y después a comparar los lados; en la segunda intervención (línea 154) plantean una comparación multiplicativa entre las longitudes de los lados.

Segunda interpretación: comparación aditiva del perímetro de los cuadrados

Los alumnos que encontraron como resultado "32", explican el procedimiento que utilizaron:

R-1

160. Ao. Es que algunos pensábamos que ..que multiplicando el cuatro nos da…si multiplicábamos ya sacábamos cuántas veces era mayor… (Observé que en el equipo multiplicaron la medida de un lado de la figura A por 4 , 4 x 16= 64, y la medida de un lado de la figura B por 4, 4 x 8= 32; después sacaron la diferencia de 64 - 32 = 32)

Es probable que estos alumnos pretendieran calcular las áreas, en cuyo caso significaría además una confusión entre perímetro y área.

Tercera interpretación: comparación multiplicativa por superposición de superficies

Los alumnos averiguan cuántas veces la superficie del cuadro pequeño cabe en el grande y concluyen que el cuadrado A es 4 veces mayor que el cuadrado B. El maestro refuerza este resultado y da paso a la siguiente comparación. Los otros intentos por parte de los alumnos se califican de complicados.

R-1

164. Ao. Marcábamos un puntito, y después le dábamos la vuelta /muestra cómo superpuso el cuadro pequeño sobre el grande/
165. Mo. (Simultáneamente a la explicación del niño)Uno, dos, tres…y cuatro. En este caso, o sea, por observación se podía sacar que el cuadro B era 4 veces, o sea, cabía 4 veces en el área del A, y acá lo que hicieron fue al contrario, o sea, por ahí me estuvieron haciendo operaciones completamente así complicadas…Bien, los demás equipos estamos bien, "El cuadrado A es 4 veces mayor que el B". Con esta experiencia, de que no se van a medir ahorita centímetros, no estoy midiendo centímetros, sino estoy comparando el tamaño, ahora sí ya me van a poder contestar esto: El cuadrado A es …cuántas veces mayor que el C. /Escribe en el pizarrón/ *El cuadrado A es ___ veces mayor que el C.*

En la explicación del maestro, motivada por la respuesta incorrecta "8 cm", aparece una característica del tipo de comparación que ahora se espera (multiplicativa): el resultado no consiste en "medir centímetros". Efectivamente, esto marca una diferencia entre las comparaciones aditiva y multiplicativa, pero aquí se resalta únicamente la forma que debe tener la respuesta esperada.

- *La comparación de A con C.*

El cuadrado A es ________ veces mayor que el C.

A través de consignas adicionales la tarea se hace más compleja al solicitar:

- la comparación de A con C a través de B;
- expresar con una operación el procedimiento para obtener el resultado(16 veces);
- comparar C con A usando la expresión veces menos.

- Sub tarea 1: la comparación de A con C a través de B

Sobre la marcha el maestro solicita a los alumnos, de una manera indirecta al principio, hagan la comparación de A con C usando las relaciones A,B y B, C.

R-1

187. Mo. El cuadrado A es 16 veces mayor que el C, pero vamos a ver cuál será lo más práctico para encontrar ese, esa cantidad, porque por ejemplo, Nayelli empezó a hacer puntitos (hizo marcas sobre el papel)
188. Aa. Que aquí nos salían 4 veces
189. Mo. No, eso es lo mismo que hacer puntitos. Cuando tenemos a veces alguna respuesta, <u>nos ayuda</u> para dar otra que tal vez no salga. Bien, atentos… Dímelo por letras

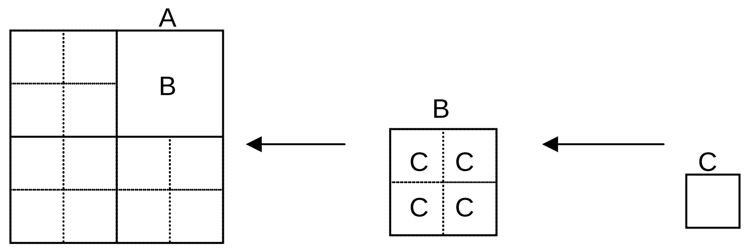
La comparación de A con C a través de B implica recurrir a una doble comparación, la de A con B que realizaron previamente y la de C con B que al momento se desconoce.

Algunos alumnos empiezan a hacer marcas en las figuras; el maestro interviene para evitar la manipulación del material concreto, situación que en la primera comparación fue aceptada. Al parecer esta decisión de solicitar un acercamiento distinto al que usaron para comparar A con B, se debe a que en un equipo encuentran la relación entre C y B y entre B y A.

R-1

166. Ao. Uh!. Ya lo tenemos /comparan C con B/
169. Mo. Y ahora, ¿cuántas veces es mayor el A que el C?
170. Aos. (varios) Ya,ya, ya maestro, ya…
173.Mo. Espérame tantito… / a otro equipo/ No vamos a hacer puntitos… no, no, no…
174. Aa. /explica a los de su equipo/ Iba así, mira, acá son 4, caben 4 veces, 4 veces acá, cuatro por cuatro, nada más y ya nos sale todo lo demás, ya para no poner todos éstos…
178. Mo. (…) no quiero puntitos (…) es que usted tiene que usar su cerebro, o sea, van a pensar (…)

En otro equipo superponen 4 cuadros C sobre uno B y éste sobre A.



R-1

185. Ao. Ponlo 4 veces, 4, 4, 4 y 4 son 16… /Superponen 4 cuadros B sobre el A /
186. Ao. dieciséis, sí son dieciséis… Mira: cuatro, ocho, doce, dieciséis….

El maestro señala que superponer las figuras es “lo mismo que hacer puntitos” y pide usar otros recursos:

R-1

187. Mo. El cuadrado A es 16 veces mayor que el C, pero vamos a ver cuál será lo más práctico para encontrar esa cantidad (…)Nayelly empezó a hacer puntitos (…) en este equipo también
189. Mo. Cuando nosotros tenemos a veces alguna respuesta, nos ayuda para dar otra (…) Dímelo con letras
190. Ao. El C cabía en el B cuatro veces…
191. Mo. Pues sí…
192. Ao. =. Y cuatro por cuatro…
193. Mo. Y el B cabía…
194. Aos. (varios) en el A cuatro veces
195. Mo. (…) quiero que me pasen a escribir, aparte, ya que me sacaron el 16, cuál sería la forma, cuál sería la operación que ustedes hicieron para sacar ese 16.
196. Ao. ¿Qué maestro’
197. Mo. Cuál sería la forma, la operación…
198. Aos. **
199. Mo. Bien, 4 por 4, 16. El cuadrado A es 16 veces mayor que el C ¿lo puedo decir al revés? (…) ¿puedo decirlo de otra manera sin que cambie la realidad?

- Sub tarea 2: Expresar con una operación el procedimiento para obtener como respuesta “16”

No obstante que algunos alumnos ya han señalado la posibilidad de multiplicar “4 x 4” , cuando el maestro pregunta directamente por la operación los alumnos no contestan; es el profesor quien establece que “cuatro por cuatro, dieciséis. El cuadrado A es 16 veces mayor que el C”.

A través de las consignas adicionales se propicia, en este caso, un procedimiento conceptualmente más complejo que la superposición directa: Si B = 4C y A= 4B entonces A= 16C; esto implica manejar dos relaciones, una de las cuales no se había establecido previamente (B con C). Se espera que los niños obtengan la relación resultante de la composición, es decir, de aplicarlas sucesivamente, (x4) (x4) = 16.

En esta ocasión no participan todos los equipos en la confrontación y se asume que la operación que expresa el procedimiento para obtener el 16 es la que el maestro retoma: 4 x 4 = 16 (línea 199), dando por hecho que todos entendían la inclusión de C en B y de B en A.

- Sub tarea 3: comparación de C con A usando la expresión "veces menos"

La comparación de C con A usando la expresión veces menos se efectúa directamente, sin pasar por B. Maestro y alumnos concluyen que el cuadrado C es 16 veces menor que el A sin manipulación de material ni operaciones, simplemente por ser la relación recíproca de la anterior.

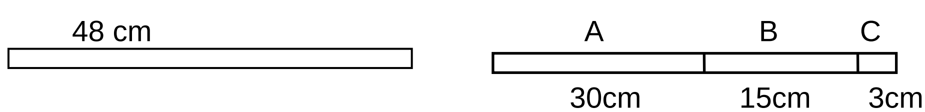
B) La comparación de longitudes

La actividad de comparar las tiras se utiliza como una aplicación del tipo de comparación que aprendieron a hacer con los cuadrados

R-1

215. Mo. Como con los cuadrados ya entendieron más o menos cómo compararlos, con las tiras ya no va a haber problemas
219. Me comparan las tiras, la tira A y la tira B
235. Me comparan la tira A con la C por favor
239. ¿cuántas veces es mayor la A que la C?

Las tiras de cartón son como las siguientes:



Debido a que los alumnos conocen las medidas (las utilizaron para hacer las tiras) las comparan directamente, sin usar las tiras, recurriendo a lo que ellos denominan "lógica":

R-1

224, Ao. (…)no había necesidad de escribirlo porque se puede hacer mentalmente (…)
233. Ao. porque si este mide 30 y este mide 15, pues la mitad, 15 y 15 son 30
234. Ao. Qué lógica…

El maestro acepta que comparen las medidas, probablemente porque aquí no hay riesgo de error como en el caso de los cuadrados, incluso él mismo las utiliza para confirmar lo que expresan los alumnos:

R-1

235. Mo. (…) la tira A es dos veces mayor que la B porque una mide 30. La otra mide 15, obviamente que la tira de 15 cabe 2 veces

En este caso las relaciones entre los números y las magnitudes parecen facilitar la comparación multiplicativa y la utilización de la expresión “dos veces” .

Para comparar la tira A con la tira C siguieron dos procedimientos:

- Procedimiento 1: Retomando el esquema de comparación que usaron en los cuadrados A y C (pasando por B), multiplicaron 5 x 2 = 10.

R-1

> 244. Ao. porque la C cabe 5 veces (en la B) y luego multiplicamos porque cabe 2 veces en la A …

Podríamos inferir que en este equipo establecen dos relaciones de manera sucesiva, tal como se realizó en los cuadrados

$$\begin{array}{ccccc} & \text{X5} & & \text{X2} & \\ C & & B & & A \\ 3 & \longrightarrow & 15 & \longrightarrow & 30 \end{array}$$

pero ahora el maestro no esperaba que hicieran esa operación que anteriormente validó:

> 245. Mo. (…) es una forma diferente de sacarla (…) lo que pasa que ellos usaron las tres tiras, la A, la B y la C. (…) ustedes hicieron más corto el razonamiento (se refiere a los que encontraron el factor que por 3 da 30)
> 251. Mo. ellas hicieron un camino un poquito más largo, (…) pero de todos modos la cantidad es la misma

- Procedimiento 2: encontraron el factor que multiplicando a 3 da 30 : el 10

$$\begin{tikzcd} 3 \arrow[rr, bend left, "\text{X 10}"] & 15 & 30 \\ C & B & A \end{tikzcd}$$

Ésta es la forma esperada por el maestro y la que realizó la mayor parte de los alumnos

> 250. Ao. Porque la tira C mide 3 cm entonces cabe 10 veces, por eso 10 x 3 son 30 y la tira A mayor mide 30 cm

Esta actividad culmina con el reconocimiento de que A es 10 veces mayor que C mediante una comparación multiplicativa de las cantidades.

Primer comentario

En el siguiente cuadro resumimos algunas características de los tres problemas planteados. Cabe destacar la presencia de cierta variedad de situaciones y de procedimientos propiciados por el maestro.

Situación	Características del problema	Tarea a realizar	Procedimientos que el maestro propicia	Dificultades de los niños
Los hermanos de Iván y de Ariana	Texto escrito; dos cantidades discretas	Comparación aditiva y multiplicativa de dos cantidades	Resta para la comparación aditiva; no se especifica ninguno para la multiplicativa	Distinguir “cuánto más” de “cuántas veces más” Interpretar “cuántas veces más” como “cuántas veces
Las cucharas de café y azúcar	Texto escrito; 6 cantidades discretas y un factor explícito: “3 veces”	- Comparación aditiva de dos cantidades - Aplicación de un factor a dos cantidades	Resta para la comparación aditiva de las cantidades de azúcar y café que corresponden a una taza; Aplicar el factor “X3” a dichas cantidades	Mismas que arriba
Los cuadrados	Uso de material concreto; tres cantidades continuas	Comparación multiplicativa de superficies	- Superposición - Aplicación de una composición de razones - Aplicación de una razón inversa	Distinguir superficie de perímetro Saber cuál de las dos comparaciones es la que se pide (interpretar “veces mayor” Saber qué procedimiento específico espera el maestro
Las tiras	Igual que la anterior	Comparación multiplicativa de longitudes	-La división de las medidas	No se registra ninguna

La tarea a realizar, la comparación aditiva y multiplicativa, consistió en contestar las preguntas “¿cuánto más’, “¿cuántas veces más?” o “¿cuántas veces mayor?”. Es importante notar que la tarea no consistió, por lo tanto, en determinar qué tipo de comparación es pertinente, la cual es de un orden de complejidad mayor. Como ejemplo, retomemos el problema de las cucharadas de azúcar y de café: dadas las cantidades de azúcar y de café que se utilizan para preparar una taza, se puede establecer una comparación aditiva o una multiplicativa; la situación no exige en principio a ninguna de las dos, a menos que se especificara que la preparación del café fuera con el mismo sabor, en cuyo caso se requeriría una comparación multiplicativa. La comparación que se realiza es la que se solicita directamente a través de la pregunta.

Identificamos las siguientes dificultades en la realización de las tareas por los niños: la dificultad recurrente fue interpretar correctamente la pregunta relativa a la comparación multiplicativa: “¿cuántas veces más?” y, para otros niños, la dificultad para distinguir “¿cuántas veces más?” de la pregunta “¿cuánto más?”. Además del hecho ya documentado de que los alumnos en la primaria tienen mayor dificultad con el manejo de las relaciones multiplicativas que con las aditivas, cabe señalar que en este caso particular gran parte de la dificultad se relaciona con la interpretación de la pregunta “cuántas veces más”, que a diferencia de la pregunta “cuántas veces”, sugiere a los alumnos una relación aditiva. Esta confusión pudo agravarse por el hecho ya señalado de que las situaciones planteadas admiten cualesquiera de las dos comparaciones.

Otra dificultad consistió, al resolver los problemas sobre los cuadrados, en comprender el procedimiento específico que el maestro esperaba, el cual fue cambiando de un caso a otro, sin que estos cambios, aparentemente, se justificaran por características del problema mismo. Vimos ya la larga sucesión de preguntas del maestro “mal” contestadas por los niños a que esto dio lugar.

Finalmente, una dificultad de otro orden se manifestó en la confusión entre perímetro y superficie por parte de algunos niños.

Podemos suponer que el propósito de la clase consistió en que los niños supieran que existen dos formas de comparar dos cantidades, la aditiva y la multiplicativa. Debido a que dicho contraste no fue enfatizado como tal (ni institucionalizado), el propósito consistió más precisamente en que los niños contestaran, dadas dos cantidades, a las preguntas ¿cuánto más? Y ¿cuántas veces más?. El propósito se amplió para consistir también en que los niños conocieran algunas formas diferentes de encontrar la respuesta a la pregunta ¿cuántas veces mayor?, por superposición, mediante una división y mediante una composición.

Cabe preguntarse ahora: ¿por qué es necesario que los niños sepan responder las preguntas “cuánto más” y “cuántas veces más”?, ¿cómo se articula este propósito con otros? y, en particular ¿se articula con el propósito, fundamental, de que los niños identifiquen el tipo de comparación que es pertinente?

En las dos clases que revisaremos a continuación, buscaremos una respuesta a estas preguntas.

2.1.2. La comparación como medio implícito de resolución

La comparación como tal, en las clases subsecuentes, ya no se nombra; no sólo constituye el hilo invisible sobre el que se van tejiendo distintas nociones: razón, escala, problemas de comparación y de cuarta proporcional y tablas de variación, sino que, sin aparecer como tema de estudio, constituye un medio implícito en la resolución de problemas. Se analizará a continuación, a título de ejemplo, el desarrollo de dos situaciones, una en la que la comparación que subyace es la multiplicativa, y otra en la que es la aditiva.

Desarrollo de las situaciones

A) La comparación multiplicativa en un problema sobre la escala (segunda clase)

La clase consta de las siguientes fases:

a) El maestro anota el título "Razón"
b) Cálculo de las medidas de una amplificación de un croquis y registro de la razón
c) Cálculo de las medidas reales de lo que está plasmado en un plano y registro de la razón
d) Problema en el que se demanda el uso explícito de la razón y la fracción

Se analizarán aquí las fases a y b .

Al iniciar la sesión el maestro pide a los alumnos ubicar en el cuaderno de notas la clase que tiene como título "Comparación" y les explica que la clase de hoy es una continuación de la anterior. Como observaremos en el desarrollo de la sesión, la comparación se manejará de manera implícita y será la noción de razón el objeto explícito de estudio:

R-2

> 4. Mo. (…) me van a seguir comparando cantidades (…) comparando cantidades de otra manera (…)

El maestro distribuye una hoja por alumno en la que hay dos planos y dos problemas. Los alumnos recortan y pegan en sus cuadernos el primer plano.

Después de medir la altura de cada figura el maestro pide a los alumnos hacer una amplificación, como en las fotos, en la que el árbol mida 30 cm. Usa el siguiente formato:

R-2

Razón

Dibujo		Amplificación	Razón
altura del árbol	6 cm	30 cm	_____
altura de la casa	4 cm	_____	_____
altura del letrero	3 cm	_____	_____

El maestro pide identificar la relación que hay entre las dos medidas, entre 6 y 30:

R-2

> 29. Mo. Si el árbol tiene 6 cm y en la amplificación tiene 30, piensen la relación que hay entre esas dos medidas; (…) lo quiero así por lo que van a observar ahorita

La idea de "veces más" utilizada explícitamente en la clase anterior, se maneja ahora de manera implícita; al parecer el maestro plantea la situación *6cm → 30cm* porque quiere que los alumnos mismos extraigan esa relación (número de veces) y la apliquen, en tanto factor constante, a las otras medidas. Veamos el desarrollo de la situación:

- **Primer momento: resoluciones de los alumnos**

Los alumnos usan distintas formas de comparar:

- Búsqueda de razones internas por un procedimiento aditivo: conservación de las diferencias (1 equipo)

R-2

> 22.Ao. Es que aquí hay 6 (altura del árbol) y aquí hay 4 (altura de la casa), entonces 4 para 6, 2 y este, este, y tenemos 30, entonces serían 28 porque se llevan por 2, el 6 y el 4"

Realizan una relación de este tipo:

+ 2	6	30	+ 2
	4	28	
	3		

- Búsqueda de una relación externa constante de tipo aditivo (1 equipo)

R-2

> 26. Ao.(…) como 6 cm sube a 30, son 24, le vamos sumando, así el de 4 a 24 cm y así se va amplificando…
> 28. Ao. El árbol que aquí mide 6 cm se ha de haber amplificado 24 cm (…)Si la casa mide 4, la amplificamos 24 cm… igual el letrero. El árbol se amplificó 24 cm, subió, y así en el letrero y en la casa lo amplificamos a 24 cm.

Aquí, amplificar se entiende como agregar.

+24	
6	30
4	28

- Uso de un operador multiplicativo en una relación externa (2 equipos)

	X 5	
6		30
4		20

R-2

31. Aa. "… en la medida que ya estaba amplificado (el árbol), midió 30 cm, nosotros pensamos que se multiplicaba 6 x 5, porque 6 x 5 da el resultado de 30 (…) y para la casa, 4 x 5…"
33. Ao. "Como aquí dijo el maestro que medía 30 cm en la amplificación, o sea, era 6 x 5, 30; entonces aquí también hicimos por 5, 4 x 5m 20; y aquí, 3 x 5, 15…"

- Búsqueda de regularidades numéricas. Buscan una regla de correspondencia entre 6 y 30; hallan una un tanto arbitraria:

Pasan de 6 a 30 a partir de la creación de un número hipotético (el número 9) (1 equipo)

6 → [9] - 6 = 3 → 30
diferencia con 9 agregan un cero

R-2

40. Aa. "(…) si es el 9 le quitamos 3 y quedan 6 ¿no?
41. Obs. ¿a qué 9 le quitaste 6?
42. Aa. (…) Es un ejemplo… y se le aumenta un cero…

Otro equipo usa una combinación de operaciones para justificar el 30; al parecer usan el 24 como una diferencia entre 6 y 30.

6 ⟶ 30
6 x 4 = 24
6 x 4 + 6 = 30

Un alumno explica el procedimiento:

38. Ao. (…) 6 X 4, 24, luego el 24 se suma por éste y ya lo que salga…

Hasta este momento hay dos equipos que han hecho explícito el uso de la constante "por 5" como "veces más grande".

- **Segundo momento: se introduce la noción de razón**

Acto seguido, el maestro concluye que el resultado se obtenía a partir de la identificación de un número que multiplicado por 6 diera 30:

R-2

56, 60. Mo. (…) observar este 6 y este 30 (…) sus compañeros multiplicaron por 5(…) y esos son los resultados correctos.

Los procedimientos erróneos, y en particular el que consiste en aplicar una diferencia constante (+24) no fueron retomados.

Una vez anotadas las tres medidas resultantes de aplicar el factor "por 5", el maestro revisa con los alumnos algunas ideas que tienen acerca del término razón en el contexto de la vida cotidiana, como "tener razón", e introduce una definición formal de la razón a partir de la relación que hay entre 6 y 30, a la que identifica como "razón de 6 a 30"[5]. Aclara que "la razón no es de 6cm". Para los alumnos que resolvieron bien el problema lo que explícitamente hay entre 6 y 30 es el factor "por 5"; pareciera que el operador "por 5" con la idea de 5 veces mayor, se transforma en el conector "a". Así la razón es por ahora los dos términos del problema con la letra ***"a"*** en medio.

Los alumnos obtienen las "razones" correspondientes a las siguientes cantidades intercalando la letra "a" : 4 *a* 20 y 3 *a* 15.

La expresión *6 a 30* resulta, después del título, otro ostensivo portador de sentidos que hasta el momento no han sido descubiertos, sólo insinuados.

Después de identificar las razones, el maestro introduce la noción de equivalencia vinculada a las razones , para ello pregunta ¿qué quiere decir equivalentes?; él mismo contesta anotando en el pizarrón *Las razones son equivalentes* y conduce a los alumnos a observar que en las expresiones *6 a 30, 4 a 20, 3 a 15*, los segundos términos son "5 veces mayores" que sus antecedentes. Lo comprueban multiplicando por 5 y también dividiendo el consecuente entre el antecedente.

La equivalencia se destaca a partir de la característica que tienen en común las razones señaladas: un término es 5 veces mayor que el otro. Se recupera entonces la noción de "veces", que fue la que realmente se utilizó en la resolución del problema, aunque la razón no se define explícitamente como un número de veces, únicamente se utiliza para destacar la idea de razones equivalentes.

R-2

96. Mo. (…) ¿Hay alguna diferente? No, todas son 5 veces mayor (…) entonces escribimos abajo Las razones son equivalentes. El segundo número es 5 veces mayor que el primero.

En seguida podrá comprenderse el motivo por el cual la razón no fue definida como "el número de veces" que una cantidad es la otra.

Después de escribir en el pizarrón las razones son equivalentes, el maestro explica:

98. Mo. Las razones también las vamos a poder escribir como si fueran fracciones comunes(…) /dicta/ Las razones también se pueden escribir como fracciones comunes (…)

---

[5] Hay aquí una ambigüedad sobre la que se hablará en otro lugar: la razón en juego en el problema, la que fue utilizada para resolver es más bien "30 a 6".

A partir de este momento, la fracción entra como el equivalente de una razón, con la prerrogativa de permitir aplicar algunas de sus técnicas, como la simplificación , a las razones.
Y ¿cuál es la fracción que es equivalente a las razones en juego, por ejemplo a la razón “6 a 30”?. El maestro la destaca en seguida: es $\frac{6}{30}$, o bien, después de simplificarla, $\frac{1}{5}$.
Así, el que las razones sean consideradas fracciones parece explicar el hecho de que el número “5 veces” no haya sido tomado como una expresión alternativa de la “razón”: porque “cinco veces” no es visto como una fracción.

En el subcapítulo siguiente, al estudiar el papel que juegan las fracciones en el proceso didáctico organizado por el maestro, se analizará esta confusión. Por ahora, únicamente se quisieron mostrar los aspectos que el maestro destacó en este segundo momento de la situación de escala, para poder analizar la forma en que entra en juego la noción de comparación en esta situación, por contraste con la forma en que fue enseñada en la primera clase. Esto es lo que haremos a continuación.

Segundo comentario

En la primera clase, las comparaciones fueron entre parejas de cantidades aisladas (5 hermanos, 1 hermano; 3 cucharas de azúcar, 2 de café, etc.); las cantidades admitían, por lo tanto, cualquier tipo de comparación (aditiva o multiplicativa); el tipo de comparación era directamente indicado mediante las preguntas ¿cuántas veces más? o ¿cuánto más?

En la situación de escala que hemos revisado aquí, también se pone en juego, de entrada, una comparación entre dos cantidades: 6cm y 30cm, pero, en este caso, las medidas no están aisladas, pertenecen a dos conjuntos con tres medidas cada uno, que se relacionan: (6cm, 4cm, 3cm) y (30cm, x, y). No se indica el tipo de comparación a través de alguna pregunta, éste debe ser inferido de la situación de escala: para que una figura conserve la forma al cambiar el tamaño, es necesario que todas sus medidas sean multiplicadas por un mismo factor, o dicho de otra forma, la relación (multiplicativa) entre cada par de medidas debe ser constante.

Puede decirse entonces que el problema de la escala pone en funcionamiento la noción de comparación multiplicativa, y más precisamente, la noción de relación multiplicativa constante. Ésta constituye la principal noción activada por el problema.

Cabe preguntar ahora: haber contestado las preguntas *cuánto más* y *cuántas veces más* en las situaciones anteriores, ¿ayudó a los alumnos a saber, en el problema de escala, que aquello que deben mantener constante es la relación multiplicativa y no, por ejemplo, la aditiva (sumar 24 a todas las medidas)? ¿Era ésta la expectativa del maestro?

Si bien no es posible contestar con certeza la segunda pregunta, es muy claro, en cambio, que la dificultad del problema de escala no radica en contestar la pregunta ¿cuántas veces más?, sino en saber que *esa es la pregunta pertinente*, y no, por ejemplo, ¿cuánto más? El hecho de que, inmediatamente después de las resoluciones, el maestro asumiera la respuesta correcta, ignorando los procedimientos erróneos, para introducir en seguida el término razón y su equivalencia con la fracción, permite suponer que esto último era el propósito de la situación, y no el de aprender a determinar cuál es la comparación pertinente, si la aditiva o la multiplicativa. Probablemente incluso el maestro no esperaba que los alumnos tuvieran dificultad en este aspecto. En el comentario final, volveremos sobre este punto.

B) La comparación aditiva en un problema sobre edades (octava clase)

Veremos ahora el caso de un problema en el que la comparación implicada es aditiva. Este problema se presenta en la octava clase, en el marco de las “tablas de variación”. La secuencia de la clase es la siguiente:

a) El maestro anota como título “ Tablas de variación”
b) Elaboración de tablas con cantidades y precios de algunos productos
c) Identificación de propiedades de las relaciones de proporcionalidad
d) Resolución de problemas
    - De comparación por diferencia (edades)
    - De cuarta proporcional (costo de naranjas)
    - De comparación por diferencia (pago de una cuenta)
    - De cuarta proporcional (receta)

En la primera parte (puntos a y b), el maestro enseña a los alumnos a usar tablas para representar los datos de un problema de proporcionalidad. Al mismo tiempo refuerza la utilización de las propiedades de la proporcionalidad que dan lugar a procedimientos “internos” (por ejemplo, a dos veces una cantidad de mercancías corresponde dos veces la cantidad de dinero; a la suma de dos cantidades de mercancías, corresponde la suma de las dos cantidades de dinero). Cabe señalar que si bien los alumnos han recurrido con frecuencia a estos procedimientos, ésta es la primera vez que el maestro los destaca, antes insistió en la determinación de la constante bajo la forma de fracción. El uso de los procedimientos internos parece estar asociado al uso de las tablas.

Revisaremos aquí únicamente una de las situaciones de comparación por diferencia (punto c). Interesa contrastar, nuevamente, el estudio descontextualizado de la comparación aditiva que se hizo en la primera clase, con el tratamiento de un problema en el que dicha comparación es funcional. Algunas de las dificultades que encontraremos ahora son de naturaleza distinta a las que destacamos en el caso de la comparación multiplicativa, tienen que ver con cierta confusión del maestro con respecto a lo que caracteriza a una relación de proporcionalidad.

- **El problema de las edades:**

R-8

> 124. Mo. Paty tiene 15 años, su mamá tiene 40. ¿cuántos tendrá cuando su mamá tenga 60?
> 132. Mo. (…) les voy a preguntar por qué
> 210, 212. Mo. ¿cuántos años tenía la mamá cuando Paty nació?

Con las dos últimas intervenciones del maestro, la consigna se amplía en dos sentidos: pide una justificación de la respuesta (línea 132), y agrega una tarea (líneas 210 y212).

El maestro también hace explícita la técnica a utilizar:

R-8

> 127. Mo. Todos los ejercicios del día de hoy se resuelven con tablas (…) las operaciones van abajo… si quieren hacer operaciones
> 208. Mo. La pueden hacer hasta mental, pero lo que quiero es que trabajen tablas

Veamos qué hacen los alumnos frente a la primera tarea, calcular la edad de Paty cuando su mamá tenga 60:

- Conservación de diferencias (razones aritméticas internas):

Suman cantidades iguales a ambas edades (4 equipos: 1,2,3 y 4). A partir de 15 y 40 suman de 5 en 5 ó de 10 en 10 hasta llegar a 60 en la edad de la mamá:

R-8

equipos 1,2 y 4

Paty	mamá
15	40
20	45
25	50
30	55
35	60

equipo 5

	Paty	mamá
	15	40
+10	25	50
	35	60

equipo 5

	Paty	mamá
	15	40
+20		
	35	60

> 161. Ao. Porque le voy aumentando aquí, le fui aumentando de 5 en 5 …) y de este lado igual (en el lado de la mamá)
> 165, Aa, Se fueron aumentando 5 a los años de Paty, 5 a los años de su mamá y así ya nos salió hasta 60
> 166. Mo. ¿Las dos cantidades van aumentando?
> 167. Aa. Sí…
> 168.Mo. ¿Van variando en la misma proporción?
> 169. Aa. Si
> 203. Aa. le aumentamos de 10 en 10

El maestro pregunta si habría alteraciones si en lugar de escribir 45 escribieran 48: una alumna contesta que de esa forma “le saldrían más años a la mamá”. El maestro quiere que observen la presencia de una diferencia constante a la que en este momento están identificando como relación de proporcionalidad y los orienta hacia ello:

R-8

180. Mo. (…)¿por qué yo no puedo poner aquí 48?
181. Aa. …
182. Aos. **
183. Mo. Por lo que me acaban de decir hace rato, de cómo está de aquí a acá /señala del 15 al 20 y del 40 al 45/
184. Aa. Porque no se aumentaría en la misma proporción
185. Mo. Porque no aumenté en la misma proporción… (…)
189. Mo. Pero aquí ya ¿qué hice?
190. Aa. Puso 48…
191- Mo. ¿Tendría la misma proporción?, aquí ya no saldría, ya no sería correcto (…)

Siguiendo la pauta que da el maestro, algunos alumnos (como Aa. línea 184) consideran que hay proporcionalidad en tanto que en ambas columnas, A y B, se incrementa la misma cantidad.

- Intentan conservar las razones internas

En un equipo, a partir de 15 y 40, sacan mitad y después, en un caso duplican y en otro suman la cantidad que obtuvieron al calcular la mitad. Tratan la situación como de proporcionalidad

R-8

196. Ao. Nosotros le fuimos agregando, el doble de 40 son 20 (sic) y así le fuimos agregando, 20 más 20, 40, más 20, 60
199. Mo. Para que saliera el 60, ¿qué hicieron con esas cantidades?
200. Ao. Sumamos
227. Ao. Le sacamos la mitad a los 15 años y así sabíamos que a los 15 años cuando tenía 40, cuando tenía 20 ya tenía 7 años y medio

	Paty	mamá		
	7.5	20		
x 2			x 2	(doble)
	1 5	40		
	-----	-------	+20	
	3 0	60		

El maestro supone que la dificultad está en los errores de cálculo.

R-8

197. Mo. (…) (…) el equipo tiene un problema, va lo mismo de siempre, saben resolver las cosas, (…) todo lo entienden bien, pero a la hora de sumar, restar, multiplicar o dividir, ese es mi problema

Cuando un alumno explica que para obtener 60 sumaron (20 +40), el maestro les dice que en el equipo no saben sumar puesto que 7.5 +15 no son 30. El maestro identifica un problema que no logra caracterizar, la confusión entre la conservación de la razón geométrica y la conservación de la razón aritmética:

R-8

201. Mo. (…)así que siete punto cinco más quince, treinta. Aquí yo ya no entiendo nada, no sé qué es eso…
204. Mo. (…) el único equipo que anda medio raro es el 3, esto está muy bien pensado que cuando ella tenía 20 años, pues Paty tenía 7 años y medio, pero ahora cómo le hago para que acá me dé el resultado correcto…

El maestro no puede rescatar el error de los alumnos como una evidencia de que no puede tratarse de una relación de proporcionalidad, porque al parecer él mismo tiene una confusión al respecto.

Un poco más adelante, el maestro plantea otro problema sobre el que haremos únicamente un breve comentario.

R-8

351. Mo. Jorge y Omar pagan la cuenta en un restaurante de $30. ¿Cuánto paga Jorge si Omar sólo tiene $5?
354. Aos. (varios) Ya… 25

A la consigna inicial se agregan las siguientes:

R-8

357. Mo. Si Omar tuviera 10 pesos, ¿cuánto pagaba Jorge? (…) Hagan que los dos paguen la misma cantidad.
359. Mo. Ahora hagan de cuenta que Omar invita

El problema no presenta ninguna dificultad para los alumnos, de hecho, el maestro califica de tarea como muy sencilla. Lo que le interesa es que los alumnos analicen la forma en que las cantidades varían. Con su ayuda, los alumnos expresan que unas cantidades aumentan mientras que las otras disminuyen. Observan también que la suma de cada pareja de cantidades es constante. Ocurre en este punto, nuevamente, una confusión: el maestro considera que las cantidades “van variando proporcionalmente”, aunque “hay una variación proporcional de otro tipo”, la cual, les dice, van a estudiar en la última clase (parece que se refiere a la proporcionalidad inversa).

Tercer comentario

Cabe hacer una primera observación semejante a la que se hizo con respecto al problema de escala: en el problema de las edades, a diferencia de los ejercicios sobre comparación aditiva de la primera clase, la comparación no es directamente solicitada, es requerida por el problema mismo. La comparación aditiva caracteriza aquí aquello que es constante cuando los datos de dos conjuntos varían. Así, en el contexto del problema de las edades, la comparación aditiva es funcional. Nuevamente, es claro que los ejercicios de la primera clase no constituyen en ésta una ayuda para establecer el tipo de comparación en juego y, nuevamente también, se manifiesta que la dificultad, menor en este caso que en el anterior, en determinar cuál es la comparación pertinente, como lo muestra el error cometido por un equipo (a la mitad de años de la mamá, la mitad de años de la hija), en el que se aplica una propiedad de la proporcionalidad.

Por otra parte, el hecho de que el maestro considere que cualquier tipo de constante (aditiva o multiplicativa) da lugar a relaciones de proporcionalidad, explica, en parte, la imposibilidad de recuperar uno de los sentidos básicos de las comparaciones aditiva y multiplicativa: el hecho de que caracterizan a dos tipos diferentes de relación.

2.1.3. Comentario final: disfuncionamientos didácticos debidos a la descontextualización de una noción.

En el proceso didáctico que el maestro organiza, pueden identificarse tres problemáticas, vinculadas entre sí, que son fuente de dificultades para los alumnos: a) la omisión, entre los aspectos que son objeto explícito de estudio, de la parte medular de la comparación: la determinación del tipo de comparación que es pertinente frente a un problema dado; b) el estudio de las nociones de comparación aditiva y multiplicativa fuera de contexto, reducido a un ejercicio que consiste en contestar las preguntas *cuánto más* y *cuántas veces más*, previo al momento en que estas nociones deberán ser aplicadas y c) cierto nivel de desconocimiento por parte del maestro de las características de una relación de proporcionalidad.

Un conocimiento que no es objeto de estudio

La cuestión de aprender a identificar el tipo de comparación aditivo, multiplicativo, no fue objeto de estudio en ninguna de las clases: en la primera se trató sólo de contestar a las preguntas *cuánto más* y *cuántas veces más* y en la segunda parece darse por hecho que los niños sabrían identificar la comparación pertinente: quienes no utilizaron una comparación multiplicativa, sino una aditiva, simplemente no hicieron lo que se tenían que hacer, el error no fue utilizado para contrastar la existencia de los tipos de comparación. El objeto explícito de esta segunda clase fue llamar "razón" a la relación que se conserva e identificarla con la fracción. En la octava clase, la cuestión de la comparación aditiva fue objeto de uso, pero, más que destacarse y contraponerse a los problemas en donde la comparación fue multiplicativa, se registró una identidad entre ambas, sin que pudiera ser claro ya que cada una corresponde a un tipo distinto de relación.

Cabe recordar que, tradicionalmente, en las propuestas clásicas para la enseñanza de la proporcionalidad (de finales del XIX a mediados del XX), el sistema conformado por las magnitudes concretas (físicas, geométricas, sociales) nunca fue considerado objeto de estudio. Establecer si las magnitudes son o no son proporcionales era considerado competencia de las disciplinas que se ocupan de esas magnitudes (la física, por ejemplo), lo que incumbía a las matemáticas era el desarrollo del modelo de la proporcionalidad. Por esta razón, se escogían problemas en los que la proporcionalidad fuera muy evidente, o, también, se consideraba irrelevante el que la proporcionalidad fuera manifiestamente falsa, por ejemplo, entre el número de velas de un barco y su velocidad, o entre el números de hombres que cavan un pozo y el tiempo que tardan en hacerlo (Bosch, 1997, citado por Block, 2001:98)

En el proceso didáctico organizado por el maestro cuyas clases analizamos aquí, reencontramos esta tradición: aprender a determinar si hay o no proporcionalidad, si la relación constante es aditiva o multiplicativa, no es objeto de estudio, es decir, no forma parte de las cosas cuya enseñanza es responsabilidad de la escuela.

Más allá de esta continuidad con una tradición, pueden entreverse ciertos motivos de índole didáctico que explican por qué este aspecto, identificar cuál es la comparación pertinente, escape del espectro de cosas de cuya enseñanza el maestro se hace cargo. Se trata de algo que difícilmente podría ser comunicado y, por lo tanto, de uno de tantos conocimientos para los cuales la didáctica clásica no tiene una respuesta. Los conocimientos directamente comunicables son las técnicas y la nomenclatura asociada, más no las condiciones de su utilización, es decir, su sentido. Hoy en día sabemos que éstas requieren una forma de enseñanza distinta, en la que los conocimientos no son directamente comunicados, sino que se adquieren en tanto medios implícitos de resolución, en la interacción con un medio específico que debe ser creado[6].

---

[6] La dificultad para determinar la pertinencia de una relación multiplicativa no es necesariamente una cuestión de desarrollo cognitivo. Desde la didáctica contemporánea se considera que es fundamentalmente por la experiencia, al *constatar* que la comparación aditiva produce resultados erróneos, que el aprendiz puede cuestionar dicho modelo, lo cual puede motivar y dar sentido a la exploración del modelo multiplicativo (Karplus, 1983; Hart, 1989, citados en Block, 2001: 223).

Lo explícito, previo a lo implícito; la desagregación didáctica.

Volvamos al propósito de la primera clase, esta vez a la luz de lo que sucedió en la segunda, y en la octava. No hay ninguna evidencia, en estas últimas, de que el ejercicio de contestar a las preguntas “cuánto más” y “cuántas veces más”, realizado en la primera clase, haya ayudado a los niños a identificar, en los problemas siguientes, cuál es el tipo de comparación que es pertinente, aunque podemos suponer que ése era su propósito.

En cambio, fue notorio que los problemas de la segunda y octava clase propiciaban ambos tipos de comparación en tanto medios implícitos de resolución. Considerando las elecciones equivocadas de los niños, estos problemas habrían podido ser adecuados incluso para hacer explícitas las dos formas de comparar.

En la primera clase las dificultades se centraron en la interpretación de las preguntas (no había un contexto que las justificara), así como en la interpretación del procedimiento muy específico, cada vez diferente, que el maestro esperaba que aplicaran.

En los problemas siguientes, la dificultad fue determinar cuál es el tipo de comparación pertinente. La cuestión de las preguntas, así como la de los procedimientos específicos no se plantearon, o quedaron subordinados.

El análisis didáctico de las situaciones que hemos realizado sugiere que algunas de las dificultades pueden atribuirse al orden seguido, de lo explícito y no funcional a lo implícito funcional: los aspectos que se enseñan explícitamente no son los fundamentales, su enseñanza se dificulta por la separación misma de los contextos que les dan sentido y no es claro que sean “aplicados”. El análisis permite ver así mismo que aquello que fue objeto explícito de enseñanza en la primera clase, tiene mejores posibilidades de ser comprendido en las clases posteriores, cuando es un medio de resolución.

Anteponer lo explícito a lo implícito puede ser, a su vez, al menos en parte, consecuencia de una secuencia didáctica que se construye mediante la *desagregación* de una noción: es posible suponer que el propósito último de la secuencia didáctica es que los alumnos sean capaces de resolver problemas de proporcionalidad. Parece que la secuencia didáctica se construye desmontando, o desagregando las nociones que están implicadas en la resolución de estos problemas: la proporcionalidad implica el manejo de razones, las razones expresan una comparación, la comparación puede ser aditiva o multiplicativa. Entonces, la secuencia se organiza de atrás para adelante, de las partes, al todo.

El conocimiento del maestro sobre el objeto “proporcionalidad”

El maestro mostró ciertas confusiones con respecto a la noción de razón (al sólo considerar a las fracciones como equivalentes a una razón, excluyendo a los números enteros) y con respecto a las propiedades que caracterizan a una relación de proporcionalidad (al considerar que una constante aditiva también la caracteriza). La primera confusión será objeto de algunos comentarios en el próximo apartado. Con respecto a la segunda, hemos visto que fue uno de los factores que posiblemente dificultó recuperar un sentido básico de las comparaciones aditiva y multiplicativa: el hecho de que determinan dos tipos distintos de relación entre conjuntos de medidas.

2.2. La introducción perturbadora de la fracción como definición de la noción de razón

Los vínculos entre la noción de razón y la de fracción son complejos. Aunque a partir de los textos clásicos sobre razones y proporciones, las razones se han definido explícitamente como fracciones, históricamente, las razones fueron previas a las fracciones. En el aprendizaje, los niños también utilizan razones de manera *implícita* en el contexto de los problemas de multiplicación y de división mucho antes de conocer las fracciones (Block, 2001).

En la enseñanza, estas dos formas de existir de la noción de razón, funcionamiento implícito en los procedimientos de resolución de los estudiantes por un lado, y definición explícita como fracción por otro, frecuentemente no se integran y dan lugar a ciertas dificultades.

En el caso que estudiamos, este problema se expresa de manera manifiesta: las *fracciones* están presentes prácticamente a lo largo de toda la secuencia; inician su incursión en situaciones de comparación de la primera clase y adquieren una fuerte presencia en el momento de trabajar explícitamente con razones, con escala y con porcentajes. También están presentes en las tablas de variación y en la regla de tres. Su introducción como definición de las razones, aporta al trabajo de la proporcionalidad una tecnología, la de las fracciones, cuya pertinencia pocas veces es clara, a la vez que tiende a despojar de sentido a los procedimientos desarrollados en la clase. El conflicto es nuevamente entre lo implícito funcional y lo explícito, cuando este último no se construye a partir del primero, más bien lo niega, y no logra mostrar su funcionalidad.

En la presentación de este análisis se destacan tres aspectos: 1) Efectos de una definición errónea de las razones como fracciones; 2) Un ámbito en el que las fracciones se integran mejor: las relaciones parte todo; 3) Dos planos paralelos: las razones externas (fraccionarias), enseñadas pero no utilizadas; las razones internas, utilizadas, pero no enseñadas.

2.2.1. Efectos de una definición errónea de las razones como fracciones

Recordemos que, en la segunda clase, el maestro plantea un problema de escala para introducir la noción de razón.

R-2

Razón

	dibujo	amplificación	razón
altura del árbol	6 cm	30 cm	___________
altura de la casa	4 cm	___________	___________
altura del letrero	3 cm	___________	___________

Algunos alumnos logran calcular correctamente las medidas identificando y aplicando el factor constante “por 5”. El maestro recupera solamente las respuestas correctas y llama “razón” a la relación entre 6 y 30, misma que lee como “6 a 30”. Los alumnos escriben las razones *6 a 30, 4 a 20 y 3 a 15,* y se les hace observar que *son equivalentes* porque en todas ellas el segundo término es 5 veces el primero. El maestro retoma una de las razones, “3 a 15”, la escribe como fracción, $\frac{3}{15}$ y pide a una alumna que le diga “qué es” esta expresión, “no que me la leas, qué es”. La alumna contesta que se trata de “una fracción… tres quintos”(sic). A partir de esta intervención, el maestro introduce el tratamiento de las razones como fracciones:

R-2

> 98. Mo. Las razones también las vamos a poder escribir como si fueran fracciones comunes (…) /dicta/ *Las razones también se pueden escribir como fracciones comunes* (…)

Veamos algunas implicaciones de este vínculo de las razones con las fracciones:

- ***Las razones se escriben como fracciones pero no se nombran como tales***

El maestro anuncia un tratamiento de las razones “como si fueran fracciones” pero sólo *a nivel de escritura*; cuando una alumna dice que la razón 6 a 30 son seis treintavos, el maestro aclara que se escribe como fracción pero no se lee como tal:

R-2

> 104. Mo. Bueno, no la vamos ahorita a leer como fracción, pero sí la vamos a escribir así… 6 a 30 la puedo escribir así 6 a 30 / escribe $\frac{6}{30}$/ ¿cuál es la razón de la altura de la casa del dibujo a la ampliación?
> 105. Ao. (…) cuatro veinteavos
> 106. No, no, no, no, que me des la razón, la razón, la razón, no la fracción, la razón

Los alumnos continúan con la lectura de la notación a/b como una fracción; el maestro insiste en que quiere la razón y para ello introduce una nueva forma para nombrar la fracción, usando el término ***sobre.*** En lugar de decir 4 veinteavos, van a decir “4 sobre 20”.

R-2

> 108. Mo. Y aquí en el dibujo eran cuatro y después veinte… escrito en fracción común, Janeth, ¿cómo va?
> 109. Aa. cuatro veinteavos

110 Mo. A ver, no le vamos a llamar ahorita, bueno, sí le podemos llamar así, pero podemos decir 6 sobre 30, sobre, a ver…

Los alumnos leen las otras expresiones, $\frac{4}{20}$ como“ 4 sobre 20” y $\frac{3}{15}$ como “tres sobre 15”.

Esta definición de razón se identifica con una noción que los alumnos ya conocen, la fracción, pero que usan en otro contexto, como partes de una unidad.

- ***Las fracciones sustraen el sentido pero proporcionan la técnica***

Las fracciones entran como un medio que posibilita el uso de algunas de sus propiedades, como son la representación a/b y la simplificación. Trasladados al dominio de las fracciones el maestro propone usar las herramientas que les están asociadas: ahora se tratará de simplificar las fracciones o las razones:

R-2

118. Mo. (…) Bueno, ayer ustedes simplificaron fracciones, entonces me van a *simplificar estas fracciones* (se refiere a 6/30, 4/20 y 3/15)… Me van a simplificar estas razones a lo más pequeño que se pueda por favor…

Las razones, ahora fracciones, desaparecen como razones y se manipulan con la técnica de las segundas. Los alumnos simplifican y observan que en todos los casos les quedó igual: $\frac{1}{5}$

- ***La razón “6 a 30” con el sentido de “5 veces”, se convierte en*** $\frac{1}{5}$

Después de simplificar las expresiones $\frac{6}{30}, \frac{4}{20}$ y $\frac{3}{15}$, el maestro retoma la razón y destaca que ésta es ***1 a 5*** , escrita como $\frac{1}{5}$ y que se lee “uno sobre cinco”:

R-2

149.Mo. (…) Vamos a usar los más pequeños (se refiere a la simplificación),en realidad, la razón de los 3 dibujos …) ***la razón es de 1 a 5*** /señala los tres resultados/(…)
151. Mo. O sea***, 1cm en este dibujo van a ser 5 en la ampliación***; (…). Todos nos salieron, los tres resultados lo mismo ***1 sobre 5 ó 1 a 5***. Lo vamos a encerrar así en rojo por favor… le escribimos: /el maestro dicta/ *Quiere decir que 1cm en el dibujo va a ser 5cm en la ampliación.*

Con estas consideraciones, 6 a 30 equivale a 6 sobre 30, equivale a $\frac{1}{5}$ y, considerando la actividad de origen (multiplicar las medidas por 5), equivale a 5 veces.

- ***Un segundo ejemplo: "dos veces más" se convierte en ½** (clase 4)*

Los alumnos dibujan un barco A con las medidas que proporciona el maestro y hacen la reproducción de esta figura a la que identifican como B. La consigna para hacer la reproducción es considerar que "un cuadro en el barco pequeño equivale a dos en B". Esta relación se manejó como "dos veces más".

Como en el ejemplo anterior, representan las razones con fracciones, por ejemplo, $\frac{6}{12}$, $\frac{24}{12}$; las simplifican, $\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$; $\frac{24}{12}=\frac{1}{2}$, y el maestro señala como conclusión, lo que es de hecho el punto de partida: "un cuadrito en el barco pequeño es dos cuadritos en el barco grande". De 6 a 12 se pasa a $\frac{6}{12}$, que simplificado equivale a $\frac{1}{2}$ y que significa *1 a 2*. Aquí las expresiones "$\frac{1}{2}$" y "1 a 2" se nombran como razones.

Con la guía del maestro observan que después de hacer la simplificación de cada fracción "sale lo mismo", es más,

R-4

> 133. Mo.(…)"**les tiene que salir lo mismo** porque **un** cuadrito en el pequeño **equivale a 2…** cualquier ejercicio que hagamos de este trabajo nos tiene que salir igual.

Una relación constante (a uno corresponden dos) dada desde el inicio, se convierte en un hallazgo porque el paso por las fracciones la oculta. Lo que parece haberse descubierto es que si se forman fracciones con las parejas de números que se obtienen al multiplicar un término por dos y se simplifican esas fracciones, se llega en todos los casos a una misma fracción: ½. Así, la fracción "½" queda asociada con el resultado de agrandar la figura *duplicando* las medidas:

R-4

> 122, 139. Mo. (…) un cuadrito en el barco pequeño equivale a 2 en el barco grande /señala 1/2/

Al igual que en la situación anterior, el maestro procura no nombrar a la fracción, en este caso, no dice "un medio", sino "1 a 2". (1 cuadrito pequeño equivale a 2 en el barco grande), es decir, las razones son fracciones pero no se nombran como tales.

R-4

> 139. Mo. (…) Entonces anotamos la conclusión /anota en el pizarrón/ *La razón del barco pequeño al barco grande*… ¿cuál es?…

140. Aos. …
141. Mo. ¿cuál es?… ya, pues qué les dio en todos los equipos…(…)
142. Aa. **Un medio**
143. Mo. La razón del barco pequeño al barco grande es de
144. Aos. (varios) **un medio**
145, Mo. No, **díganmelo separado**, o sea, es de… /señala ½ /
146. Aos. (algunos) **de 1 a 2 …** de 1 a 2 ¿de 1 a 2?
147. Mo. Eso es, de 1 a 2 (…) /termina de escribir el enunciado/ *es de 1 a 2.*

La conclusión queda así: *La razón del barco pequeño al barco grande es de 1 a 2.*

Primer comentario

Probablemente es la interpretación particular de la definición de las razones como fracciones lo que lleva al maestro a invertir las razones en juego en estos problemas: de cinco veces a $\frac{1}{5}$, de 2 veces a $\frac{1}{2}$. Su noción de fracción excluiría a los números naturales, por lo que "cinco", o "dos", no pueden ser razones.

Probablemente porque el maestro conoce el significado de las fracciones , $\frac{1}{5}, \frac{1}{2}$, como partes de unidad (un entero, partido en 5, o en 2, del que se toma una parte), no le parece correcto nombrar a una relación que quintuplica como "un quinto", o a una que duplica como "la mitad" y opta por otra forma de oralizar las fracciones-razones (1 sobre 5 ó 1 a 5[1]).

En consecuencia, las fracciones *prestan su notación* para designar un nuevo objeto: $\frac{1}{5}$, leído como "uno sobre cinco" significaría que "a uno le corresponden 5" (lo contrario de lo que significan en tanto fracciones de unidad). Las fracciones prestan también la técnica de la simplificación, mediante la cual se comprueba que todas las razones-fracciones en juego son equivalentes.

Estos acercamientos, a veces fusiones entre las nociones de razón y fracción van a derivar en el uso indistinto de ambas con un significado que no es claro. Por lo pronto las razones se simplifican y se representan como una fracción creándose, a nivel de representación simbólica, una identidad entre razón y fracción.

Debido a que los contextos son claros y sencillos, es probable que algunos alumnos guarden para sí las relaciones lógicas y transparentes para ellos, a saber, que todo se multiplica por 5, o por 2, y, con respecto a las relaciones entre razón y fracción, es probable que acepten

[1] La expresión de las razones de la forma "X a Y" resulta en general confusa para los estudiantes. "1 a 5", por ejemplo, significa "1 es con respecto a 5...", es decir, 1/5. Sin embargo, con frecuencia se le interpreta al revés, como "1 se transforma en 5", es decir, como 5 veces. Como se verá a lo largo del capítulo, el maestro maneja indistintamente este orden.

llanamente que corresponden a ese nivel de las matemáticas en el que hay que limitarse a seguir las instrucciones. Para otros alumnos, aquéllos que, por ejemplo, no lograron identificar la pertinencia de multiplicar por cinco en el primer problema de escala, el panorama puede ser más desalentador, puesto que la accidentada entrada al mundo de las fracciones pudo tener el efecto de convencerlos que las mismas relaciones de la escala son incomprensibles.

Cabe observar que las dificultades no provienen del tipo de problemas elegidos por el maestro sino del tratamiento de los mismos.

2.2.2 Un ámbito en el que las fracciones se integran un poco mejor: las relaciones parte todo

Cuando la relación que subyace a los problemas planteados es entre un todo y una de sus partes, las dificultades anteriores no se presentan debido a que, en primer lugar, las razones en juego ahora sí son fraccionarias. Además, en este tipo de relación, las fracciones tienen un significado cercano al de “partes de unidad”, más conocido por lo alumnos[2], y, finalmente, las fracciones son unitarias. A continuación se analiza el desarrollo de la resolución de dos problemas y de un conjunto de ejercicios con estas características, planteados en la tercera clase.

- Primer problema:

R-3

> 57. Mo. En un examen de 10 preguntas Jorge contestó sólo 5. La razón de respuesta correcta es 1 de cada ___ preguntas (…) ¿Qué fracción contestó correctamente?

La relación en juego es parte-todo. En el problema se pregunta directamente por una razón expresada como “1 por cada x”. La relación es muy simple, lo que permite a la mayoría de los alumnos encontrar la respuesta: “una pregunta de cada dos”. Algunos se apoyan en gráficos para dar la respuesta:

R-3

> 71 Ao. … y contestó 5. /En el cuaderno tenían lo siguiente:

[2] Una fracción, por ejemplo, ¾, definida como “partes de unidad” expresa la medida de una porción de la unidad en función de la unidad: aquélla que se obtiene partiendo la unidad en cuatro partes y tomando tres. La fracción ¾ está expresando también, entonces, la relación entre el todo y la parte, aunque este segundo sentido, el de relación, queda implícito y subordinado al uso de la fracción para expresar una medida.

Aunque no para todos es claro lo que significa "uno de cada dos", por ejemplo:

R-3

> 82 Ao. Que de dos preguntas sacó una buena, de 3 sacó dos, de 4 sacó 3 y de 5 sacó 4… /Escribió en el pizarrón lo siguiente:
>
> 2 -- 1
> 3 -- 2
> 4 -- 3
> 5 -- 4

En seguida, varios equipos contestan sin dificultad la segunda pregunta: ¿qué fracción contestó correctamente? El maestro concluye:

R-3

> 115. Mo. (…) le ponemos ***un medio***, que sería lo que tenemos acá de ***la razón, una de cada dos*** preguntas (…)

Así, se establece la equivalencia entre las relaciones *5 de 10, 1 de cada 2* y la expresión "un medio".

Cabe destacar que el maestro preguntó por la fracción después de que los alumnos ya habían identificado la razón simplificada (1 de cada 2), a través de preguntar *qué parte* de las preguntas son las que están bien contestadas, y no, como en los ejercicios de escala, a través de un proceso de simplificación de fracciones. La fracción se introduce como cuantificadora de una parte con el todo. Al realizarse esta vinculación puede decirse incluso que se podría ampliar el sentido conocido de la fracción: 1/n significa normalmente para los alumnos dividir el entero en *n* partes iguales y tomar una y, ahora, a través de este vínculo, puede significar también "tomar *1 de cada n".* La fracción se presenta como una forma alternativa de describir una relación.

- Segundo problema:

R-3

> 115. Mo. Un equipo de fútbol ha ganado seis juegos de los 30 que ha jugado. Ha ganado 1 de cada ____ juegos

El problema tiene las mismas características que el anterior, pero la relación en juego es menos simple. El maestro intenta frenar la tendencia a escribir una fracción, favorecida en clases anteriores. Demanda reiteradamente un procedimiento apoyado en dibujos, posiblemente porque considera que éste es el que les permitirá entender:

R-3

> 117. M (...) quiero dibujitos, quiero palitos, quiero rayitas … quiero que lo demuestren con algo… ¿van a usar números?, bien demostrado…

119. Mo. (...) no quiero que me pasen a hacer luego, luego la fracción ya así, no, o sea, de otra manera, de otra manera, ellos usaron rayitas hace rato, de otra manera, piénsenle…también Verónica… ¿ya mandaron a Angélica?…

Veamos las resoluciones de los alumnos que se anotan en el pizarrón:

Equipo 1.
(/) / / / / **(/)** / / / / **(/)** / / / / **(/)** / / / / **(/)** / / / / **(/)** / / / / (explica: 1 de cada 5)

Equipo 2.
30 /borra y anota/ 6
x 6 x 5
30 (explica: de cada 30 ha ganado 6)

Equipo 3.
6 5
x 5 $5\,\overline{)\,30}$ $6\,\overline{)\,30}$
30 (explica: Son 30 juegos los que ha jugado…de 30 juegos ha ganado 6)

Equipo 4

$5\,\overline{)\,30}$

(explica: de 30 juegos han ganado 6. Ha ganado 6 juegos, entonces 5 por 6… cada 5 juegos…)

6
x 5
30

Las anotaciones de todos los equipos, excepto del 3, dejan ver la comprobación del resultado ("uno de cada 5 juegos"), pero no muestran cómo lo encontraron. El equipo tres, en cambio, plantea la división 30: 6. Cabe señalar que, en este tipo de problema, la pertinencia de la división no es evidente, se necesita considerar que los seis juegos ganados, que son parte de los 30 jugados, deben "distribuirse" entre estos últimos, o bien considerar que dividiendo entre 6 ambos términos de la razón "de 30 juegos, 6 ganados" se obtiene la razón equivalente buscada. El procedimiento que probablemente usó la mayoría de los alumnos fue el de ensayo y error.

Quizá porque el maestro no previó el uso de la división, o para evitar que los alumnos se perdieran en cálculos difíciles de comprender, el maestro insiste primero en que se muestre gráficamente el resultado, y después, con una tabla.

R-3

121. Mo. /se dirige al equipo 3/ Va de nuevo porque no entendemos nada… eso nada más fue cambiar el divisor, pues no… a ver niños…Yo creo que hey!, cuando yo les pido que me lo demuestren, les dije demuéstrenmelo como si fuera para un niño de 3 años y los únicos que lo han demostrado así, que un niño más chiquito lo pudiera entender es este equipo, con palitos hizo, mira, de estos 5, éste lo ganaron, de estos otros 5, éste lo ganó… esa era la forma que yo quería más o menos, pero, bueno, ya los demás ya se están yendo con números y números y números…

122. Ao. Yo hice bolitas…
123. Mo. ¿Por qué ningún equipo me hizo una tabla?
(...)
134. /Pasa el equipo 5 y anota/
5 -----1
10 ---- 2
15 ---- 3
20 --- 4
25 --- 5
30 --- 6

Después, ven la otra forma de escribir la relación “uno de cada cinco”, mediante la fracción “quinta parte”.

El maestro aprovecha la cercanía entre el funcionamiento de las fracciones “como razones” en este tipo de contexto (relaciones parte todo) con el ya conocido de las fracciones como partes de unidad, para hacer explícito que se trata de lo mismo, procurando ayudar a los alumnos integrar conocimientos:

R-3

145. Mo. Y esto, si lo echan a la memoria un poquito más atrás, esto es lo que les dijimos cuando empezamos a ver fracciones comunes, ¿si?, tú (partes) tu pastel en 5 partes y tomas una, tomas una de las 5, esto es, ya ven que todo está relacionado, estamos regresando ahorita a lo primero que explicamos de fracciones, entonces una de cada 5, el equipo ganó la quinta parte (…)

Se tocó aquí una veta en la que hay varias interconexiones entre nociones (razón, división, fracción), una diversidad de procedimientos (aquéllos ligados a las fracciones o a la división), y problemáticas más complejas por resolver, por ejemplo, la del caso en el que la fracción no es unitaria como en “se ganaron 14 de 21 juegos”. Sin embargo, la veta no se explota más: el trabajo de resolución de problemas se termina aquí, lo que se sigue es un paso hacia cierta generalización, o más bien, cierta mecanización de las relaciones, en donde los significados nuevamente parecen desvanecerse.

- Ejercicios: pasar de una notación a otra y simplificar

Primero se trata de escribir razones como fracciones:

R-3

145. Mo. (…) Bien, me van a escribir ahora /anota en el pizarrón/ *Convierte razones a fracciones”* Es muy sencillo, lo que acabamos de hacer… /escribe/ *1 de cada 2*, ¿cómo concierto la fracción? /escribe ½ / y lee “uno de cada dos” (…). En tu equipo hay una niña de chamarra verde (…) Son seis, y entonces eso… esa es la razón y ahora convertida a fracción pues quiere decir que de todo el entero , pues sólo hay ***un sexto*** que trae chamarra verde, uno de cada cuántos de tu equipo?
146. Aa. Seis…
147. Mo. Son seis, y entonces, eso es la razón y ahora convertida a fracción pues quiere decir que de todo el entero, pues sólo hay un sexto que trae chamarra verde (…)

148. Aa. /simultánemamante a la explicación del profesor escribe en el pizarrón/
1 de cada 6___ 1/6.

158. Mo. 5 de cada 26 niños usan lentes… entonces la fracción común será?…
159. Aa. /escribe en el pizarrón/ ***5 de cada 26*** _____ ***5/26***

160. Mo. Bien, me van a contar cuántas personas traen pantalón
167. Ao. Somos 11 niños
171. Aa. /escribe en el pizarrón/ ***11 de cada 26*** ___ ***11/26*** (el maestro lee, razón 11 sobre 26)

En los dos últimos ejemplos, el uso de la expresión "*de cada* 26" no se justifica, pues solamente hay 26 niños y no hay una evocación a una población mayor en la que se mantuvieran esas razones. Este tipo de "transgresiones al contexto" pueden verse como señales de que el contexto pierde importancia, la atención se centra en la traducción de escrituras.

Después, el ejercicio inverso:

189. Mo. un quinto quiere decir uno de cada 5, ¿qué quiere decir 3 octavos?
190. Ao. 3 de cada 8
191. Mo. Eso…
192. Ao. Escribe frente a $\frac{3}{8}$8, **3 de cada 8**

Los contextos ya no están presentes, se trata de números abstractos. Los alumnos se van apropiando de una nueva manera de oralizar una fracción: $\frac{3}{8}$ se lee "tres octavos" y también "3 de cada 8". El problema "fuerte" de expresar una relación entre dos cantidades bajo la forma de razón simplificada, y bajo la forma de fracción ya no se plantea aquí (por ejemplo, encontrar que 3 de 8 ó $\frac{3}{8}$ es la razón simplificada que subyace a 15 juegos ganados de 40). Cabe la duda de si permanecerá un sentido ampliado de las fracciones, o solamente un nuevo ostensivo, una nueva manera de leer una fracción, en la que la línea horizontal se sustituye por la expresión "de cada".

Finalmente, se plantea un ejercicio de "simplificación". La consigna es : *Reduce lo más posible las siguientes razones.* El maestro aclara que reducir es lo mismo que simplificar. En sustitución del signo de igualdad (=), introduce el signo de equivalencia (≅) y aclara que *equivalente a* también quiere decir "que simplifiquen"[3].

Maestro y alumnos simplifican $\frac{10}{15}$:

[3] El uso frecuente que se da a la equivalencia en situaciones de simplificación termina determinando una definición particular para esta noción.

$$\frac{10}{15} \cong \frac{2}{3}$$

La equivalencia se establece en dos direcciones: una entre fracciones, diez quinceavos es equivalente a dos tercios, y otra entre la fracción $\frac{2}{3}$ y la razón 2 de cada 3.

> 214. Mo. Diez quinceavos es equivalente a *dos tercios*… valen lo mismo… (es lo mismo que) tomar 10 de cada 15 …
> 215. Mo. Aos. (algunos) que dos de cada tres

El paso de $\frac{10}{15}$ a $\frac{2}{3}$ significa ir de una razón a otra equivalente en cuyo tránsito intervienen, a nivel de lenguaje, las fracciones.

La consigna se complementa con la petición de simplificar bien y rápido; el equipo que así lo haga obtendrá un punto, así que la actividad se desarrolla en un ambiente de competencia. El lugar de encuentro es el pizarrón. El maestro dicta fracciones: “veinte centésimos”, “quince treintavos”, “doce cuarentaiochoavos” y los alumnos escriben y simplifican:

$$\frac{20}{100} \cong \frac{10}{50} \cong \frac{5}{25} \cong \frac{1}{5}$$

Después de algunos ejercicios de este tipo, la consigna cambia: el maestro deja de usar la expresión de la fracción para usar “de cada”, dicta “Cien de cada 500”. Un alumno comenta, a manera de pregunta, si es *cien sobre quinientos*; la respuesta del maestro contiene de manera implícita la equivalencia de las expresiones: “cien sobre quinientos… cien de cada quinientos…”.

Con estas expresiones puede referirse tanto a una fracción (están reduciendo fracciones), como a una razón (recordemos que es la razón la que se escribe pero no se lee como fracción). Los alumnos escriben

$$\frac{100}{500} \cong \frac{50}{250} \cong \frac{25}{125} \cong \frac{5}{25} \cong \frac{1}{5}$$

(4 equipos sacaron mitades y llegaron a 25/125; sólo un equipo llegó a 1/5)

En esta tarea la atención se centra en las dificultades para simplificar: el maestro pone énfasis en las técnicas de simplificación tales como quitar los ceros del numerador y del denominador, el uso de una tabla de multiplicar para obtener rápidamente el resultado o aplicar la misma operación, división o multiplicación, en el numerador y el denominador. Después de simplificar las razones, los alumnos no leen el resultado, así que no se puede saber si tienen presente la consigna de simplificar razones o si están aplicando una técnica sin tener en mente si son razones o fracciones.

Segundo comentario

En este tipo de situaciones, el de las relaciones entre un todo y una de sus partes, la formulación de razones, su simplificación y su expresión mediante fracciones constituyeron tareas significativas para los alumnos, en el sentido de que éstos pudieron comprender lo que se pregunta y poner en juego conocimientos adquiridos para tratar de contestarlas. Las situaciones, además, se prestaron para estudiar distintos acercamientos a una misma problemática, a través de razones o de fracciones. Considerando la insistencia del maestro para que los alumnos mostraran con dibujos sus resultados, y la vinculación que hace con lo aprendido antes sobre las fracciones, el mismo maestro parece haber apreciado este espacio.

Pero el episodio fue breve. Después de resolver dos problemas, se pasó a un tipo de tarea muy distinto, en el cual la vinculación entre razones y fracciones se redujo a dos formas alternativas de oralizar la escritura fraccionaria. En los ejercicios de simplificación, las razones y las fracciones se funden, nuevamente, a nivel de escritura, o, más bien, las razones desaparecen detrás de las fracciones y de sus técnicas.

2.2.3 Dos planos paralelos: las razones externas (fraccionarias), son enseñadas pero no utilizadas; las razones internas, son utilizadas, pero no enseñadas

En clases posteriores a las que hemos revisado, el maestro plantea numerosos problemas de cuarta proporcional y también de comparación de razones, con la expectativa de que los alumnos continúen aprendiendo a aplicar las nociones de razón y de fracción que se introdujeron en las primeras clases. Salvo excepciones, las relaciones en juego ya no son del tipo parte-todo, como las que se acaban de analizar. Se trata de relaciones entre magnitudes de distinta naturaleza (kilómetros-litros de gasolina; kilómetros- horas, entre otras). La familiaridad con los contextos aunada al hecho de que las relaciones y las medidas en juego no implican fracciones, permite a varios alumnos echar a andar recursos intuitivos, principalmente basados en la conservación de las razón *internas*. Pero, desde la consigna misma y, sobre todo, a lo largo de la resolución, el maestro volverá a centrar la atención en la expresión de las razones *externas* constantes con fracciones y en su simplificación. Nuevamente, el sentido de las resoluciones resultará opacado por este paso por las fracciones. A lo largo de las resoluciones, el trabajo termina por ocurrir en dos planos, el que proponen los alumnos y el que propone el maestro. Eventualmente los planos se tocan, cuando el maestro recupera lo que hacen los alumnos, o bien cuando algunos alumnos logran *traducir* sus resultados en términos de fracciones.

A continuación se analizan algunos ejemplos, casi todos tomados de la séptima clase.

- **Mezclas** (clase 7)

Después de trabajar durante dos clases y parte de ésta con el porcentaje, se retoma, como tema específico, el de las razones. El título de la actividad es *Ejercicios con razones.* En este primer problema se trata de comparar dos razones "parte –parte" (cantidad de pintura roja-cantidad de pintura blanca). A través de consignas adicionales el maestro precisa las herramientas a utilizar: razón, fracciones comunes y fracciones equivalentes:

R-7

62. Mo. Enrique mezcla 4 botes de pintura blanca con un bote de roja. Roberto mezcla 8 botes de pintura blanca con 3 de roja. ¿a quién le sale la pintura más rosa?
68. Mo. (…) ¿ya vio qué título le pusimos? Ejercicios con razones, si ustedes no me lo demuestran con una razón, yo no entiendo nada
70. Mo. La idea es usar razones (…) ¿alguien me puede pasar al pizarrón a escribir la razón de un policía para 20 presos?, por ejemplo en fracción común…
74. Mo. (…) en fracción común ahí dice un policía para 20 presos, ahora usen eso por favor[4]

Veamos las resoluciones de los alumnos:

- Dan respuesta a las peticiones de las consignas adicionales: expresar razones y fracciones

R-7

82. Ao. Vamos a poner el resultado uno a 4; de los botes de Roberto vamos a poner 8 a 3 /escriben 1 a 4, 8 a 3/
88. Ao. también con fracción
91. Aos.(escriben1/4, 8/3)
100. Mo. Yo veo que ya sacaron las razones pero quedaron igual… a ver qué es lo que han hecho aquí
101. Ao. tres octavos
102. Mo. Y eso qué…
109. Ao. /escribe en el pizarrón/
    blanca roja
    4 a 1 ¼
110. Mo. (…) ¿4 a 1 , un cuarto? ¿estás seguro? (…) ahí ya no se entendió nada…
120. Aos. (corrigen) **1 a 4** **1/4**
    3 a 8 **3/8**

---

[4] La alusión a "un policía para 20 presos" corresponde un ejercicio realizado con anterioridad. La expresión es utilizada con frecuencia por el maestro para recordar a los alumnos lo que es una razón. El problema usado en la segunda clase es: En una prisión hay 400 reos y 20 policías. La razón es de ___ a ___. Escrita como fracción queda así: ____. Esta razón simplificada se escribe ---- = -----= -----. Por cada policía hay ____ reos.

122. Aa. /escribe en el pizarrón/

	blanca		roja
Enrique	4	con	1
Roberto	8	con	3

123. Aa. Enrique por 4 botes de pintura blanca le echó una de roja…
124. Mo. ¿Y?

En uno de los equipos (línea 120) recuperan la razón como "X a Y" y como "X/Y". En otro equipo (línea 122) expresan la razón como "X con Y". Los alumnos parecen hacer una traducción, en el nivel de escritura, de la razón a la fracción: "4 a 1 es igual a $\frac{1}{4}$ " (línea 109). Es poco factible que comprendan que la fracción $\frac{3}{8}$, por ejemplo, expresa la relación parte - parte en la que la pintura roja representa $\frac{3}{8}$ de la blanca. Tal vez por eso, cuando un alumno (línea 101) dice que su respuesta es $\frac{3}{8}$, el maestro (línea 102) le pregunta "Y eso qué ?"

En otro de los equipos consideran que la forma de resolver el problema es "simplificar y luego sacar enteros a las fracciones"; otros buscan en la libreta algún referente que les permita hallar la respuesta o hacer lo que el maestro les pide.

Con la identificación de la razón y la fracción no se resolvió el problema. El maestro se da cuenta de que la expresión de las razones por sí misma no resulta suficiente para hallar la respuesta y usa este momento, en el que hay necesidad de hacer algo distinto, para plantear otra consigna*: la demostración de las razones.*

R-7

128. (…) por ahí va la idea pero no es así, los demás ya tienen sus razones pero ninguno me pasa a *demostrar,* así, mire maestro, por esto, aquí se lo ***demuestro***
132. Mo. A ver, una mini ayuda (…) ***¿ya se fijaron en qué está esta fracción?*** /señala ¼ y 3/8/ a simple vista yo no las puedo comparar ¿cómo puedo hacer para comparar las dos? Recuerdan aquella clase que dijimos, no puedes mezclar cosas, por ejemplo manzanas con peras o gatos con otros animales, *porque no son iguales, entonces (….)*
207. 209. Mo. (…) Se hubieran acordado rápido, decir ay!, *son fracciones equivalentes*

El problema generó diversidad de acercamientos en los que se entrelazan algunos intentos por satisfacer los requerimientos del maestro con la búsqueda de relaciones que permitan hacer la comparación de las mezclas.

- Resuelven sin atender a las consignas adicionales, principalmente recurriendo, implícitamente, a las razones internas[5].

Varios equipos intentan generar una pareja de cantidades equivalente a “4 de blanca, 1 de roja”, en la que haya 8 de blanca para poder comparar contra “8 de blanca, 3 de roja”.

Un equipo utiliza sin embargo una relación aditiva:

156. Ao. Estábamos comparando, o sea, nosotros pensábamos que si Enrique usara en vez de 4 botes de pintura blanca, usara 5, y de que aquí 2, tenía 1 (se refiere a la roja) y así sucesivamente, y aquí 6 (de 5 a 6) y en la roja 3
158. Ao. luego 7 y luego 4 y así va aumentando… /hicieron una tabla como ésta/

	blanca	roja	
	4	1	
	5	2	
(+ 1)	6	3	(+1)
	7	4	
	8	5	

Otros equipos logran hacerlo correctamente, conservando las razones internas:

148. Aa.1. Nosotros pensamos que es como una tabla
150. Aa. = Si Enrique mezcla 4 de pintura blanca con una de roja, entonces…
151. Aa.2. lo doble sería que Roberto mezclara 2 botes de pintura roja con 8 de pintura blanca
152. Aa. 1. Entonces, como eran 3 (…) Roberto, para que se ***hiciera más fuerte el color le puso otra (…) le agregó otra de pintura roja /***Hicieron una tabla:

rojo	blanco	
1	4	
2	***8***	
3	12	
4	16	
5	20	leen 1 a 4, 2 a 8, 3 a 12, 4 a 16, 5 a 20

En resumen, establecen que

(1r,4b) $\cong$ (2r,8b) (duplicando las cantidades), y

(2r,8b)$<$ (3r,8b) (aumentando un litro de pintura roja). No hay mención de fracciones.

Finalmente, otros alumnos intentan comparar directamente las dos razones internas en juego:

R-7

163.Aos. (en coro) Estamos haciendo una tabla.
165. Aa.1. La tabla con 4 pinturas blancas de Enrique y 8 de Roberto
166. Obs. ¿cómo la hicieron?
167. Aa. = Porque Roberto tiene lo doble de blanca que Enrique, porque tiene 8 y Enrique 4
169. Aa. =Y luego Enrique tiene 1 bote de roja y Roberto 3
171. Aa. 2. Pero ahí es donde no le entendemos…
Ao. Roberto tiene 2 botes más
175. Aa. 3. Pero la blanca va a ser más clara … y Roberto tiene más aunque tenga más rojo

---

[5] Identificamos como “razón interna” a la que establecen entre dos cantidades de la misma naturaleza (pintura roja - pintura roja, o pintura blanca - pintura blanca).

177. Aa. 2. Yo digo que Enrique (la tiene más clara)
178. Aa. 3. Yo digo que Roberto porque tiene mucha blanca (…) (más clara)
184. Aa. =. Roberto tiene lo doble de blanca que Enrique, entonces con lo blanco se va a hacer más clara la roja… y aunque Roberto tenga 3 de rojo, tiene más de blanca y se va a hacer más clara /tienen escrito/

	blanca	roja
Enrique	4	1
Roberto	8	3

Identifican la primera razón interna como el doble (8 de blanca es el doble de 4 de blanca) pero en la segunda no logran destacar la relación “el triple”. Finalmente consideran las razones de manera cualitativa y sus opiniones se dividen: algunos estiman, erróneamente, que 8 litros de blanca con respecto a 3 de rojo es mucha más pintura blanca que la que hay en 4 litros de blanco respecto a 1 de rojo, y que, por lo tanto Roberto tiene la mezcla más clara. Tampoco aquí se habla de fracciones.

A colación de esta discusión, puede observarse que las razones *externas enteras* también permiten aquí comparar: en la mezcla de Enrique hay cuatro veces más blanco que rojo, en la de Roberto hay menos de tres veces. Esta misma comparación, usando las razones recíprocas, ¼ vs 3/8, que el maestro intentó destacar, se vuelve mucho más compleja. Sin embargo, para el maestro las razones son fracciones y éstas excluyen a los naturales.

- Punto de encuentro: generan pares de cantidades mediante razones internas y expresan, además, las razones externas con fracciones.

Finalmente, algunos alumnos generan parejas de cantidades expresadas con números enteros mediante la conservación de las razones internas, como los que ya vimos, pero además expresan las razones externas con fracciones. El maestro, por su parte, a la vez que habla de fracciones, recupera las relaciones que los alumnos usan con parejas de cantidades, lo cual permite un acercamiento entre los dos planos de resolución:

R-7

210. Ao. (…) sacamos que la cantidad equivalente, salió dos octavos (2/8)
211. Mo. (…) ¿qué quiere decir este 2 y qué quiere decir este 8 en pintura?(…)
212. Ao. que éste(Enrique) tiene 2 de pintura roja y 8 de blanca.
(posiblemente piensan en esto)

	blanca	roja
	4	1
Enrique	8	2

217. Mo. Lo que él está haciendo es sacar una fracción equivalente para imaginarse… les dije imagínense, piensen… Si Enrique usara ¿qué…?
218. Aos. (algunos) 8 botes de blanca
219. Mo. Si Enrique usara 8 botes de blanca, ¿cuántos tendría que usar de roja? ¿ya?, eso es imaginarse

221.Mo. Los dos ahora sí imaginariamente (…) ya tienen los dos 8 botes de pintura blanca, y entonces qué sucede ahí…
222-224. Ao. que él (Roberto) tiene la pintura más rosa
226. Ao. Porque tiene 3 botes de pintura roja
242. Mo. (…) aquí hay una diferencia, si aquí a los dos les hubiera salido el mismo número, entonces no hay problema, pero yo veo aquí una diferencia…

Puede observarse que los alumnos realizan un razonamiento correcto, similar al que ya vimos: (4b, 1r) = (8b, 2r) < (8b, 3r). La fracción 2/8 no juega ningún papel, constituye un intento por hacer las cosas como el maestro las pide. El maestro, por su parte, al insistir en que los alumnos "imaginen", parece querer recuperar precisamente razonamientos como los que de hecho ellos hacen, excepto que parece querer también que estos razonamientos se realicen sobre las escrituras fraccionarias.

En otro equipo obtienen también un par equivalente mediante la conservación de razones internas, y, al ser interrogados por el maestro, logran concluir (4b, 1r) = (8b, 2r) < (8b, 3r). Solamente una vez, al principio, trataron de hablar en términos de fracciones:

R-7

243. Ao. /escribe/ 4 blanca
1 roja
244. Mo. Esa es la respuesta, lo que pasa es que yo quiero que me den la explicación
245. Ao. Porque aquí esto lo podemos convertir *a fracción equivalente* que sería …que sería 2, 2 por 4, 8 y aquí 2 por 1 serían 2, y sería así…

(Enrique)		(Roberto)
4 blanca	(x 2)	8
1 roja	(x 2)	2

Efectivamente, las razones equivalentes $(a, b) \cong (ka, kb)$ se generan de la misma manera que las fracciones equivalentes ($a/b \cong ka/kb$), multiplicando ambos términos por un mismo factor k. Esto permite a los alumnos expresar ciertos momentos del razonamiento que realizan con razones (expresadas como parejas de cantidades enteras), con el lenguaje de las fracciones. La pregunta es si esta traducción conlleva una construcción de sentido de las fracciones como razones. Es muy probable que no, en la medida en que los alumnos, cuando se refieren a una fracción a/b, no están considerando que ésta expresa la parte de pintura blanca que *representa* la roja[6]. De hecho, las fracciones no se integran funcionalmente a las resoluciones, aparecen aisladas y como "maneras de decir".

No puede dejar de mencionarse que, de ocurrir, esta integración permitiría aportar a la noción de equivalencia de fracciones un referente más de significación, el de la equivalencia de las razones. Esto, sin embargo, no es sencillo de propiciar.

[6] Es mucho más sencillo, en todo caso, imaginar a la cantidad de pintura roja, o blanca, como *parte de* la mezcla, que imaginar a la roja como parte de la blanca

- **Consumo de gasolina** (clase 7)

R-7

328. Mo. Un auto en 48 Km. gasta 3 litros de gasolina.
La ***razón*** es de _____ Km. por litro
330. Mo. Me escriben las ***dos razones*** por favor
331. Ao. ¿cómo?
332. Mo. (…)quiero que me lo escriban ***en fracción común*** por favor, las dos
334. Mo. equivalentes
335. Ao. ¿cómo?
336. Mo. Sí, ***fracción común equivalente***

La consigna sufre un desdoblamiento[7]: empieza con la solicitud de *la razón*, después son dos razones, en seguida es una fracción común y después una fracción común equivalente.

Mientras los alumnos trabajaban, el maestro aclaró cuáles eran las dos razones que solicitaba:

R-7

344. Mo. O sea, la razón de los 48 kilómetros y luego la otra razón, la que sacaron, la nueva (la nueva es la de Km. por litro)

Se trata de las razones “48 km. por 3 litros” y “16 km. por litro”. Pero, al mismo tiempo el maestro solicita la expresión de dichas razones con fracciones equivalentes, puede ser la “razón” 1/3, equivalente a X/48, o la “razón” 3/48 equivalente a 1/x.

Si bien en la consigna se demanda explícitamente “una razón”, la redacción del problema permite comprender de qué se trata y qué es lo que hay que buscar: el número de kilómetros por litro. El problema puede resolverse mediante una simple división, la cual juega implícitamente como razón interna:

$$\begin{array}{cccc} & 3 & \rightarrow & 48 \text{ Km.} & \\ :3 & \downarrow & & \downarrow & :3 \\ & 1 & & X \text{ Km.} & \end{array}$$

Veamos lo que hacen los alumnos.

- *Resuelven sin atender a las consignas adicionales, recurriendo implícitamente a las razones internas*

En este grupo de procedimientos hay algunas variantes:

7 Llamamos efecto “desdoblamiento” a aquél que sufre una consigna cuando, sobre la marcha, al planteamiento inicial se le incorporan otras peticiones, de tal manera que la tarea se hace más compleja. Este efecto fue frecuente en las clases observadas.

Dividen entre 3:

R-7

343. Ao.2. Son 3 litros en 48 Km. y nos dice cuántos Km. recorre por litro, dividiríamos entre 3 los 48 Km. en los que gasta los 3 litros y así ya sabríamos cuál es la tercera parte de lo que recorre y la gasolina que gasta

$3 \rightarrow 48$
$1 \rightarrow 48 : 3$ (tercera parte)

En otro equipo no son tan explícitos al explicar su procedimiento, pero éste es similar al anterior:

R-7

350. Aa. vamos a poner 48 a 3 litros y luego se gastó 16 litros
351. Obs. ¿cómo sacaron que eran 16 litros?
352. Aos. (varios) dividiendo 48 entre 3 y sale 16

Finalmente, otro equipo aplica razones internas desiguales. No es claro cuál fue su razonamiento.

	48 Km.	3 litros	
$: 2 \downarrow$			$\downarrow : 3$
	24	1	
$: 2 \downarrow$			$\downarrow x\ 2$
	12	2	

- Dan respuesta a las peticiones de las consignas adicionales: expresar razones externas como fracciones

(2 equipos) (3 equipos)

razón: $\frac{48}{3}$ 12km por litro razón $\frac{48}{3}$ 16Km. por litro

Más allá del error de cálculo (48 entre 3 = 12), estos alumnos parecen haber resuelto como los anteriores, dividiendo entre 3 (conservación de las razones internas), pero intentan satisfacer la petición de expresar algo con fracciones. Expresan, sin saberlo, la fracción que más se acerca a lo que ellos hicieron (48:3). Ésta no es, sin embargo, aquélla en la que el maestro piensa, como se verá a continuación.

- El procedimiento del maestro: las razones como fracciones equivalentes

Para finalizar la tarea, el maestro escribe un procedimiento en el que utiliza fracciones equivalentes:

R-7

372. Mo. Si tengo 48 Km. para 3 litros, pues 1 litro me sale 16… 16 Km. por litro /escribe/

$$\frac{3}{48} = \frac{1}{16}$$

aquí está la fracción equivalente, vista desde acá para que no la vean como división por si se les dificulta, 1 por 3, 3; 16 por 3, 48, ó de aquí para allá va a ser dividir 3 entre 3 a 1, 48 entre 3 a 16, pero allá andan con 12 /escribe en el pizarrón/

$$\frac{1}{16} \times \frac{3}{3} = \frac{3}{48} : \frac{3}{3} = \frac{1}{16}$$

La razón y el sentido que ésta tiene en el problema se diluyen. Resulta difícil conciliar los procedimientos que propone el maestro: el primero, 48:3 =16 y el segundo, el de las fracciones equivalentes $\frac{3}{48} = \frac{1}{16}$ en donde $\frac{1}{16}$ se interpreta como la razón “16 Km. por litro”[8]. La aplicación de la tecnología de las fracciones elimina toda relación con el contexto al dar prioridad a la relación numérica sobre la relación entre magnitudes.

Volvemos a encontrar aquí la dualidad que ya hemos visto antes: uso implícito y funcional de una noción, conservación de las razones internas, en contraposición con una expresión escrita, explícita, la razón externa como fracción (invertida), la cual no se logra articular con lo primero.

Veamos, brevemente, un último ejemplo.

- **Velocidad**

R-7

374. Mo. Un auto va a 60 Km. por hora. ¿Cuánto tarda en recorrer 120 Km.? ¿Cuánto tarda en recorrer 30 Km.?
376. Mo. (…) las preguntas están muy sencillas, pero me lo van a escribir o con una tabla o con fracciones equivalentes
378. Mo. (…) o como tres fracciones equivalentes /traza en el pizarrón ----- = ------ = ------

Es un problema de cuarta proporcional que no demanda el uso de una herramienta en particular, sin embargo, en las consignas adicionales se sugiere usar *una tabla* ó *3 fracciones equivalentes*. También sobre la marcha el maestro les señala que las “razones son siempre dos cantidades”.

Veamos qué hacen los alumnos:

- *Usan razones internas*

Cuatro de los 5 equipos plantearon una tabla en la que usaron razones internas:

[8] La fracción que representa 16km por litro es la que utilizaron los alumnos, 48/3. La que utiliza el maestro, 1/16, representa la fracción de litro por kilómetro. Nuevamente, el maestro invierte la razón en juego debido a la exclusión de las razones naturales.

399. Aos.

3 equipos		1 equipo	
km.	horas	Km.	horas
30	½	30	½
60	1	60	1
120	2	90	1 ½
		120	2

- Usan fracciones equivalentes

Un equipo usó fracciones equivalentes y halló la siguiente respuesta:

$$\frac{0}{30} = \frac{1}{60} = \frac{2}{120}$$

Tal vez los alumnos, al escribir $\frac{0}{30}$ no pensaron en que la mitad de 1 no es cero, sino que trataron de encontrar una regularidad numérica (2-1=1 y 1-1=0). Como se verá en el extracto siguiente, el maestro intenta mostrar a los alumnos la falta de sentido al escribir $\frac{0}{30}$. El maestro atribuye este error a que los alumnos no saben escribir “un medio”.

R-7

397. Mo. ¿cero? Este equipo lo vamos a mandar a la luna, o sea, que para 30 Km. no hace nada de tiempo
406. Mo. Pero se dan cuenta qué mentira tan grande (…) o sea, que la mitad de un bolillo, ¿cero? ¿se desapareció el bolillo con decir quiero la mitad? (…) lo que pasa es que ¿cómo pongo un medio? (…) hay muchas formas de poner un medio, ¿cómo pudieron haberlo puesto?
407. Ao. punto cinco

Más adelante, el maestro hace intervenir las fracciones decimales al retomar la respuesta del alumno que contestó “punto cinco”; señala además que debieron usar lo que ya sabían:

R-7

408. Mo. (…) debieron haber usado hasta lo que ya sabían de fracciones decimales (…) *aunque se va a ver muy raro* lo puedo poner así:

$$\frac{½}{30} \text{ ó } \frac{.5}{30}$$

En estos ejemplos se expresa con mayor evidencia la pérdida de sentido de las notaciones que ocurre cuando las fracciones (o los decimales) y la simplificación se aplican como una técnica no articulada al contexto. El interés del maestro por vincular razones con fracciones y por vincular al máximo los conocimientos enseñados, puede llegar a producir escrituras que se alejan dramáticamente del contexto en el que los alumnos, con dificultad, tejen los sentidos de las nociones que aprenden.

Tercer comentario

Varios de los alumnos logran resolver los problemas apelando implícitamente a la conservación de razones internas, lo cual se traduce en multiplicar o dividir ambos términos de las parejas de cantidades, por números naturales. Para los que aún no logran esto, no se da la ocasión de aprender a hacerlo debido a que estos procedimientos no son el objeto principal de la enseñanza.

El maestro, por su parte, a la vez que respeta, y ocasionalmente favorece estos procedimientos, pide una traducción a fracciones y una resolución “simplificando las fracciones”. Dichas fracciones no expresan las razones que los alumnos utilizaron, las internas; expresan las razones externas, lo cual se agrava por el hecho de que además, las fracciones se invierten. El resultado es la coexistencia de dos planos de resolución, el de los alumnos y el del maestro, los cuales apenas se tocan. Las fracciones viven en estas resoluciones como notaciones sin significado, cuya manipulación arroja, de manera misteriosa, el mismo resultado que algunos alumnos obtienen por otros medios.

2.2.4 Comentario final

Se manifiestan varias problemáticas en el uso de las fracciones para expresar razones. Por una parte, la posibilidad de propiciar un desarrollo de procedimientos para resolver la variedad de los problemas de proporcionalidad que el maestro acertadamente propone, se ve limitada por el hecho de que el maestro enfoca poco los procedimientos realmente utilizados por sus alumnos y propiciados por el tipo de problemas que él plantea, esto es, la conservación de las razones internas, o bien, en el caso del problema de la escala, la utilización de una razón externa natural, no fraccionaria.

Por otra parte, el propósito de que los alumnos aprendan a expresar razones con fracciones y a resolver los problemas simplificando fracciones, no se logra debido a que 1) existen procedimientos más simples para los problemas propuestos, es decir, no se utilizaron problemas que hicieran necesario dicho recurso y 2) el maestro destaca las razones recíprocas de las que podrían estar en juego, debido a una definición parcial de razón como fracción que excluye al número natural. Las fracciones no logran articularse con los procedimientos utilizados por los niños, en el mejor de los casos quedan como una segunda forma de “decir las cosas”, o simplemente como notaciones y reglas sin relación clara con el problema y con las resoluciones usadas por los alumnos.

Se identificó un espacio en el que las dificultades anteriores no se manifestaron: cuando las relaciones en juego en los problemas fueron entre un todo y una de sus partes. En estos problemas la razón externa en juego sí es una fracción y además es unitaria. Sumado a ello, en estos problemas resulta más natural para los alumnos apelar a fracciones debido a la cercanía con la definición que ellos conocen de fracción (partes de unidad). Pudimos ver el inicio de un trabajo que parecía llevar a un enriquecimiento del sentido de las fracciones: *a/b*, ya no solamente como una unidad que se parte en *b* partes de las que se toman *a*, sino también como expresión de la relación *"a de cada b"*. El episodio, sin embargo no fue lo suficientemente amplio, se resolvieron dos problemas simples, a los que siguió un conjunto de ejercicios de traducción mecánica entre notaciones, de "a/b" a "a de cada b ", y viceversa.

En síntesis, la introducción de las fracciones en el proceso de aprender a resolver problemas de proporcionalidad, o bien resultó altamente perturbadora, o bien fue superficial y no logró propiciar un enriquecimiento de dicha noción. Con ello, las nociones más intuitivas de los alumnos tuvieron pocas oportunidades de desarrollarse en mayor medida.

2.3. El porcentaje: lugar de encuentro y desencuentro de nociones, significados y ostensivos

Un porcentaje expresa una razón, por lo general entre una parte y un todo. Se suele utilizar para visualizar la razón que guardan dos cantidades, por ejemplo, en una relación como “de una producción de 10 983 focos, 2 113 estuvieron defectuosos”, resulta expresivo decir que aproximadamente el 20 de cada 100 están defectuosos y, sobre todo, para expresar una razón externa constante entre dos conjuntos de cantidades, por ejemplo, cuando se dice que el descuento en todas las mercancías de una tienda es del 20%. La relación entre los distintos precios de las mercancías y sus descuentos es constante, es siempre de 20 pesos por cada 100.

Como toda razón, el porcentaje se puede expresar por medio de dos cantidades, “20 de cada 100”, o puede cuantificarse con un solo número: “20/100 de”, o “X 0.20”. Cuando se trata de una relación entre dos conjuntos de cantidades, dicho número funciona como un *operador externo,* por ejemplo, todos los descuentos se calculan multiplicando los precios por 0.2). En este caso, el uso del porcentaje implica la compleja noción de multiplicación por un factor no entero.

Cuando, en un problema, el porcentaje se interpreta como relación entre dos cantidades, “a de cada 100”, es posible resolver recurriendo a las razones *internas*, dejando implícito el operador externo fraccionario, por ejemplo, para calcular un descuento de “20 pesos de cada 100” aplicado a 600 pesos, se puede considerar simplemente que 600 es 6 veces 100, por lo que le corresponde un descuento de 6 veces 20, es decir, de 120 pesos. El operador interno “6 veces “ es entero, el operador externo “ X 0.2” queda implícito, no se utiliza.

	100 → 20	
X6		X6
	600 → 6 veces 20	

Cuando el operador interno no es entero se obtienen casos menos sencillos, por ejemplo, aplicar el 20% a 235 pesos. No obstante, hay un camino que permite seguir trabajando con operadores internos enteros, la reducción al valor unitario:

	$100	→	$20	
:100				:100
	$1	→	$ 0.20	
X235				X235
	$235	→	$47	

En este acercamiento, los elementos del conjunto inicial y del conjunto final son cantidades (de dinero, en el ejemplo).

Hay otro acercamiento, en el que el porcentaje es ya interpretado como fracción, pero en el que la fracción no juega todavía como operador externo. Retomando el problema anterior (calcular el 20% de 235) el razonamiento sería el siguiente: 100% equivale a 235 pesos, por lo tanto 1% equivale a 2.35 pesos y entonces 20% equivale a 47 pesos:

	100%	→	\$235	
:100				:100
	1%	→	\$2.35	
X20				X20
	20%	→	\$47	

Aquí no se utiliza el operador externo fraccionario, es decir, no se multiplican las cantidades por 20/100 o por 0.2, se utilizan nuevamente operadores internos, enteros (entre 100, por 20).

Los porcentajes, representando fracciones (100/100 de; 1/100 de; 20/100 de) aparecen como elementos de un conjunto inicial, en una relación que a cada porcentaje asocia un valor en pesos. Este acercamiento es menos simple que el anterior pues supone la comprensión y el manejo de dicho conjunto de fracciones (o porcentajes) que no representan directamente cantidades, sino operadores que actúan sobre cantidades (escalares).

Llega a ocurrir (lo veremos en las clases que se analizan en este apartado) que el conjunto de porcentajes se asimila a un conjunto de números abstractos. En lugar de decir “235 pesos es el cien por ciento”, se dice, aparentemente por simple economía de palabras, “235 pesos es cien”. Se tiene así una especie de relación de escala no exenta de dificultad: si “235 es 100”, qué número es 20?.

Finalmente, se espera que en algún momento los estudiantes del nivel básico puedan interpretar y manejar explícitamente al porcentaje como un operador externo constante, decimal:

	X 0.2	
\$100	→	\$20
\$235	→	\$47

Considerando que el recurso a las razones internas enteras es relativamente intuitivo, el problema didáctico en este punto consiste, nuevamente, en un tránsito de lo intuitivo e informal a lo formal. El porcentaje admite los dos acercamientos, el problema de su enseñanza radica, en buena parte, en su articulación.

En el apartado anterior identificamos dificultades en el tránsito del uso intuitivo de razones internas al uso de la fracción como razón externa constante. Una problemática similar se manifiesta ahora, de manera particular, en el caso del porcentaje. Debido a que las relaciones en las que se usa el porcentaje son del tipo "parte-todo", las dificultades más importantes no provienen tanto del uso de las fracciones (sobre todo cuando son unitarias)[1], como del uso de los decimales. En las clases analizadas aparecen además otras dificultades debidas al incremento de ostensivos que circulan, nombres, símbolos, maneras de decir, asociados a razón fracción, porcentaje y decimal y a la ocasional inadecuación entre las situaciones planteadas con los procedimientos esperados.

A lo largo de las tres clases sobre porcentaje pueden distinguirse dos grandes momentos, uno en el que esta noción se introduce como fracción y como razón, apelando a lo que ya ha sido enseñado y que presumiblemente los alumnos ya saben hacer, y otro en el que se introduce como factor decimal.

2.3.1. El porcentaje como fracción y como razón (clase 5)

La secuencia de la clase 5 es la siguiente:

a) Aproximaciones de los alumnos a la noción de porcentaje a través de la morfología de la palabra
b) Representación en una tarjeta de algunos porcentajes: 50, 25, 75, 33 y 20 por ciento
c) Resolución de tres problemas en los que se demanda el uso específico de la razón y la fracción
d) Formulación de una conclusión: "tanto por ciento" significa tomar "tantos de cada 100"

- El Porcentaje como un vocablo asociado a "cien"

Al empezar la clase el maestro anuncia que hoy se empezará a trabajar el ***porcentaje*** y les hace mención de algunas situaciones en las que esta palabra es de uso común: noticias, letreros, tiendas. Con base en lo que han visto o escuchado el maestro pide que por equipo piensen "(…) qué entienden por *por ciento*, por *porcentaje*" y en seguida les muestra un periódico en el que se observa un "20 por ciento de descuento" pero les advierte que no quiere que le digan que el porcentaje es un descuento. Después de reconocer que los alumnos "difícilmente van a encontrar lo correcto", y mientras trabajan en los equipos, continúa con la precisión de la consigna:

[1] Vimos en el apartado anterior que en estos casos se registraron menos dificultades que en las relaciones parte-parte.

R-5

> 16. Mo. (…) por qué se dice así.. la pregunta es por qué se dice así, A QUÉ LES SUENA…(despacio) PORCENTAJE, POR CEN, POR CEN, a qué les suena, *eso es lo que quiero ahorita (…).*

Los alumnos escriben en el pizarrón lo que acordaron en cada equipo:

> Puede bajar y subir de precio
> Se baja el precio de dicha cantidad
> A cien lo podemos bajar
> ***Es de cien***, se parte cierta cantidad en pesos, etcétera
> ***Es la parte de una cosa***

Con base en las intervenciones de los alumnos, el maestro perfila las primeras aproximaciones de lo que se manejará como porcentaje. En aras de una definición más general, descarta un sentido de esta noción, el más conocido, el de los descuentos, señalando que "no era esa la idea que les estaba pidiendo" y da un ejemplo:

R-5

> 22. Mo. (…) tanto por ciento no es descuento nada más o no es aumento… yo les voy a decir ahorita el *cincuenta por ciento de los alumnos* de aquí trae tenis… yo *no les estoy descontando nada*, yo no les estoy aumentando precios (…)

Reconoce que en dos equipos " tienen más o menos una idea de lo que yo estaba pidiendo"; se refiere al que escribió "es de cien…" y al que dijo "es la parte …"

> 22. Mo. (…) viene de cien, efectivamente, les estoy diciendo a qué les suena tanto por CIENto, (…) a qué les suena **CIENTO,** ciento, no creo que les suene a otra cosa (…) y el equipo 3 dice es **la parte de una cosa** y efectivamente eso es lo que vamos a analizar hoy, la parte como **fracción** de algo así completo(…)

En esta intervención el maestro hace explícitos algunos elementos que él asocia con el porcentaje: *CIEN,* vinculado con la palabra por*cen*taje *y la fracción como parte de un entero.* El maestro pone mayor énfasis en la palabra CIEN que repite varias veces pero que sólo algunos alumnos la utilizan.

- 100/100 es igual a un entero, al "completo"

Después de asociar el porcentaje con la palabra "cien", el maestro da a los alumnos unas tarjetas; mientras se las distribuyen destaca que la tarjeta que se les acaba de dar "está completa" por lo que se le llama "**un entero"** .

En seguida pide a los alumnos que recuerden "en **fracciones comunes**(…)" cómo se representa un entero. Para ayudar a encontrar la respuesta pone el ejemplo de un pastel y hace una pregunta similar: "¿cuándo *una fracción* representa a un *pastel completo* ?".   En las respuestas que dan los alumnos se refieren a que un entero se representa, en el contexto de las fracciones, con "dos números que son iguales" Algunos alumnos contestan que un entero es “cuando un número es igual que el otro”. El maestro los guía para que digan los nombres de esos dos números: numerador y denominador.

Para ilustrar que un entero se puede representar en forma de fracción, el maestro escribe en el pizarrón $\frac{6}{6}$ que lee como “seis sextos es igual a un entero” ; a continuación transfiere esta expresión a “un número que van a trabajar”, este número es el cien; /escribe en el pizarrón $\frac{100}{100}$ / y explica: “*cien centésimos pues va a ser igual a un entero” .*

- ***La tarea: obtener porcentajes de la superficie de un rectángulo***

Al interior de los equipos cada alumno tiene que representar en la tarjeta un porcentaje distinto: 50, 25,75, 33 y 20 por ciento. El maestro precisa la tarea “no lo recorten, lo van a iluminar (…)aunque sea con rayas diagonales, horizontales…” . El maestro hizo referencia a que el porcentaje *es una parte de* algo, pero aún no define el porcentaje como fracción (habló de 100/100 pero no dijo que eso fuera un porcentaje); sin embargo, en la tarea, pide que establezcan una correspondencia entre la fracción y el porcentaje:

R-5

> 33. Mo. (…) Una persona del equipo me va a sacar, sin que todavía les explique qué quiere decir esto, me va a sacar el ***cincuenta por ciento*** de su tarjeta (…)

Probablemente el maestro supone que los alumnos tienen ya una idea de lo que es el porcentaje, o bien, considera que será más fácil explicárselos sobre la marcha, en la acción misma de representarlo.

Como se verá, los porcentajes específicos que se proponen (50, 25, 75, 33, 20) no son neutrales con respecto a las interpretaciones y las técnicas que permiten representarlos.

- Las resoluciones de los alumnos: se configuran dos técnicas

En las resoluciones de los alumnos y, sobre todo, en las interacciones del maestro con éstas, se perfilan, sin explicitarse completamente, dos definiciones del porcentaje, **a%** de una cantidad como la *fracción* **a/100** de esa cantidad, y **a%** como la parte que guarda con dicha cantidad la misma *razón* que **a** guarda con 100. A cada una de estas definiciones corresponde una técnica para representar **a%** de la tarjeta: representar a/100, eventualmente simplificando previamente la fracción, o bien, determinando qué parte de 100 es **a**. Algunos alumnos manifiestan no comprender ninguno de los dos acercamientos.

- Tratan de dividir la tarjeta en un número de partes igual al número en el que se expresa el porcentaje.

Algunos alumnos miden la tarjeta sin saber exactamente cómo van a utilizar esas medidas; la mayoría de ellos trata de dividir la superficie en un número de partes igual al porcentaje que tienen que representar, (50, 20,25, 33).

R-5

> 64 Mo. (…)piensen por favor, porque acá ese fue el primer problema, que Roberto quería dividir en TREINTA Y TRES PARTES… el treinta y tres por ciento… ¿*Cuánto vale toda la tarjeta*?

El maestro quiere hacer evidente que si la tarjeta vale cien por ciento, no es posible que la tarjeta se divida en el número de partes que indica el porcentaje que les tocó señalar.

- Dividen en un número de partes aparentemente aleatorio

Para representar el 20 por ciento de la tarjeta, algunos alumnos la dividieron en 6 partes y otros en 8. Tienen un rectángulo y un número; saben que tienen que dividir el rectángulo pero no logran precisar la manera de hacerlo. Algunos de los alumnos que dividieron la tarjeta en 5 partes, no logran explicar lo que cada parte representa (20 por ciento, o 1/5).

- Consideran que el entero es igual a 100/100. Cincuenta por ciento es igual a ½

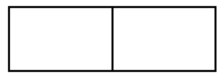
Un alumno expresa que el cincuenta por ciento "es la mitad"; el maestro pide "otra forma de comprobarlo" y los alumnos de ese equipo escriben $\frac{50}{100}$. El maestro está de acuerdo con esta representación pero insiste en que comprueben. Los alumnos simplifican $\frac{50}{100}$ y obtienen $\frac{1}{2}$. La demanda de comprobar tiene el sentido de mostrar a través de un procedimiento muy específico, la simplificación, dividiendo numerador y denominador entre números iguales, que se obtiene el resultado $\frac{1}{2}$**.** No obstante, es posible que los alumnos sepan que $\frac{50}{100}$ es un medio simplemente porque 50 es la mitad de 100.

- Consideran que la tarjeta "vale 100"; determinan **a %** de la tarjeta, averiguando qué parte de 100 representa **a**

En tanto que para algunos alumnos el todo es $\frac{100}{100}$, para otros el todo vale 100. El maestro también maneja, en distintos momentos estos dos sentidos. Cuando el maestro pregunta "¿cuánto vale toda la tira?", una alumna contesta que "cien" .

R-5

82. Mo. ¿cómo me lo comprobarías? ¿qué harías?
83. Aa. /señala 50 en una mitad y 50 en la otra/ (…)
87. Aos. /pasan a explicar al pizarrón/
88. Ao. 1. La dividimos a la mitad y 50 y 50 son cien…/muestra la tarjeta/



Para marcar en la tarjeta el 33 por ciento, una alumna buscó un número que multiplicado por 33 le diera 100. Encontró 33 x 3. Dividió la tarjeta en 4 partes: 3 partes iguales y una desigual para representar lo que le falta para 100 como un todo. Otra alumna hizo lo mismo y explica que la tarjeta medía 12.3cm y al dividir entre 3 le salió 3.1, en realidad dividió entre 4.

El maestro les recuerda que "100 entre 3 NUNCA va a dar exacto" y que estas divisiones son para que entiendan que lo que se va a manejar es el número 100 como base " el 100 va a ser el entero, el 100 va a ser el completo"

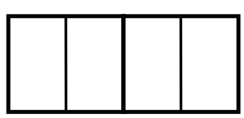
R-5

84. Mo. … pues ahora compruébame treinta y tres, que también les dé cien (…)
85. Aa. No sale exacto…
86. Mo. Ya sé que esa no sale exacta (…) atentos niños, esta del treinta y tres por ciento no sale exacta…

Para el 25 por ciento, en un equipo dividen la tarjeta en cuatro partes; explican que "25 por 4 da 100". Se aclara que 25= ¼ de 100; 25% = ¼ de la tarjeta.

R-5

94. Ao. cien lo divido entre 4…(…) sería 25



Sin embargo, el procedimiento anterior, ver cuántas veces **a** cabe en 100, no permite resolver casos como el de 75%, en los que el porcentaje no divide a 100 (75 no "cabe" un número entero de veces en 100). No obstante, algunos alumnos lograron reducir el problema al caso anterior, al identificar que 75% es el complemento de 25% (con respecto a 100%).

Una alumna muestra una tarjeta en la que iluminó la cuarta parte:

> 100. Mo. (…) Ah, usted iluminó el veinticinco y luego nos dice que lo blanco es el setenta y cinco, qué raro, pero bueno, lo que yo les pedía es que no me trajeran nada más una parte así de grande (..) ya lo sé que está correcto a lo mejor, ***pero yo quería todas las líneas…***

La expectativa por parte del maestro de que se use un conocimiento específico incide en el hecho de que este procedimiento no sea muy valorado. Parece que él espera que dividan la tarjeta entre cuatro y representen ¾ (¿o espera que dividan la tarjeta en 100 y marquen 75 partes?... es poco probable).

En el ejercicio del 20%, el maestro pregunta a quienes dividieron la tarjeta en 8 y 6 partes en vez de 5, por el valor de cada parte para hacer evidente que la suma de esos valores no es 100:

R-5

> 131. Mo. “si lo divido en ocho partes… pues ahí no me va a dar el veinte por ciento(…) sólo los que dividieron en 5 partes están bien”

En seguida pide a una alumna que sume de 20 en 20 hasta llegar a 100.

R-5

> 133. Mo. ... y cien, o sea, serían el cien por ciento todos y cada parte valdría veinte por ciento y son CINCO PARTES NADA MÁS, los que dividieron entre seis, entre ocho, no les daría nunca.

Nuevamente, el maestro usa aquí la idea de porcentaje como la razón entre 20 y100, aunque aún no hace explícito el término de razón, ni su expresión como fracción. El término “razón” se hará explícito más adelante, cuando la oralización incluya la expresión “de cada”.

- Introducción del símbolo de porcentaje (%)

Al finalizar la actividad, para precisar la idea de que el cien por ciento es el entero, los alumnos recortan y pegan un animal y un objeto “completos” y escriben, bajo la dirección del maestro, *Este chivo está completo, es un entero, es el cien por ciento. Esta mesa está completa, es un entero.* La noción de completo en este caso es de tipo cualitativo, asociada a que no le falta nada. A partir de esta idea, el maestro introduce el símbolo (%) :

R-5

> 182. Mo. (…) hay un signo que es muy sencillo, son dos circulitos con una diagonal/anota el símbolo %/, van a poner así (…) *Este chivo está completo, es un entero, es el 100**%.***

Cabe notar que la introducción del símbolo fue posterior a la de algunos sentidos de la noción.

Primer comentario

Sin contar el análisis de la morfología de la palabra "porcentaje", la actividad mediante la cual el maestro introduce la noción de porcentaje es la representación de algunos porcentajes "de tarjeta". La consigna contiene ya la expresión "por ciento", aunque ésta no ha sido definida, se esboza durante la resolución misma. La magnitud en juego es una superficie, por lo que el significado de un porcentaje n% como "tomar n de cada 100" se inhibe, mientras que se favorecen otros sentidos, sin hacerse del todo explícitos: el de fracción que será simplificada (por ejemplo, tomar "50/100 de" equivale a tomar la mitad) y otro un poco más complejo que parece haberse introducido subrepticiamente, tomar la parte que guarda con el todo la misma relación que n guarda con 100, por ejemplo, para 20%, dado que 20 cabe 5 veces en 100, se toma la quinta parte de la tarjeta[2].

En ambos casos, cada porcentaje se "concretiza", o "se ilustra", mediante una parte marcada en una tarjeta, exactamente como se concretizan las fracciones de unidad. Esta interpretación del porcentaje puede considerarse "estática", en la medida en que no pone en juego la idea de cantidades que varían guardando la misma razón. Es probablemente la noción de porcentaje que tiende a prevalecer en el currículum. No obstante, éste es solamente el inicio, en la continuación de la clase se insertan otros sentidos.

Cabe hacer un comentario sobre la previsión que hace el maestro acerca del grado de dificultad de los distintos ejercicios: él considera que "los tres primeros porcentajes (50, 25 y 75 por ciento) son súper sencillos", pero que en los otros dos (el 33 y el 20 por ciento) "hay que pensar". No obstante, desde el punto de vista de la estrategia "ver cuántas veces ***a*** cabe en 100", los más sencillos son 50%, 25% y 20%, puesto que los números dividen a 100, mientras que 75% y 33% no permiten aplicar fácilmente dicha técnica. Desde el punto de vista del porcentaje como fracción que será simplificada, el grado de dificultad es más o menos el mismo en todos los casos, excepto para la fracción $\frac{33}{100}$, la cual no puede ser

[2] Cabe observar que no es usual simplificar una fracción, por ejemplo, 20/100, determinando cuántas veces cabe el numerador en el denominador. Esta técnica, por cierto válida solamente para fracciones unitarias, proviene en realidad del ámbito de las razones.

simplificada. Es posible que el maestro haya valorado los porcentajes 50%, 25% y 75% como los más sencillos por considerar las fracciones que finalmente resultan (½ , ¼, ¾) pero no el proceso para obtenerlas.

En la siguiente parte de la clase, mediante la introducción de nuevos contextos, se propicia la vinculación esta vez explícita entre razón, fracción y porcentaje.

- El porcentaje como razón: a % significa “a de cada 100”. Abundancia de ostensivos.

Después de representar en la tarjeta los distintos porcentajes, el maestro propone tres situaciones que él mismo califica de “súper sencillas”. Con ellas introduce un sentido más del porcentaje: a% como “a de cada 100”

R-5

> 193. Mo. (…) Tienen una caja de 100 focos, 3 salen defectuosos. *Me pasan a escribir **la RAZÓN** de esas cantidades.*
> 195. Mo. (…) ***el porcentaje lo vamos a relacionar con las razones*** (…) si no se acuerda qué es una razón, busque la última clase que tuvimos de razón
> 196. Aos. /buscan en sus cuadernos/

Simultáneamente al trabajo de los alumnos, el maestro hace algunas acotaciones relacionadas con lo que espera que hagan; en una segunda indicación insiste en que saquen la razón y también la fracción:

R-5

> 203. Mo. La razón de focos defectuosos y también ***como fracción común***
> 213. (…) ***SAQUEN LA RAZÓN***, aprovechen las otras clases que hemos tenido de razones (…)El problema era, tengo una caja de 100 focos, hay 3 que salieron defectuosos, ¿cuál es la razón de los buenos y de los malos?

Casi en seguida da una tercera consigna: “*cuál es la razón de los (focos) buenos y de los malos”* (línea 213) y advierte que no se trata de una resta, puesto que no se pregunta por la cantidad de focos que están buenos.

Una alumna anota como respuesta a la primera pregunta en el pizarrón: ***3 a 100 y*** $\frac{3}{100}$. Es el maestro quien da lectura:

R-5

> 231. Mo. “Bien, la razón es *de 3 a 100* (…) o , *de cien focos que tenía la caja, 3* son los que se tomaron…

Lee “$\frac{3}{100}$” como “de cien focos , 3 son los que se tomaron”, es decir, identifica fracción y razón.

El maestro, agrega a la identidad entre "3 a 100", "de 100, 3" y "$\frac{3}{100}$", el porcentaje expresado por un número acompañado del símbolo "%" :

R-5

> 233. Mo. (…) la razón es de 3 a 100 ó 3 sobre 100. /escribe / La razón es de 3 a 100 ó $\frac{3}{100}$.
> El 3% está defectuoso

Notemos que el maestro llamó a la expresión $\frac{3}{100}$ fracción común pero no la leyó como tal; el uso del término "sobre" le permite manejarla por ahora en el terreno de la neutralidad, es decir, entre las razones y las fracciones. Más adelante recurrirá a la expresión "tres centésimos", probablemente por su cercanía onomatopéyica y semántica con "tres por ciento":

> 233. Mo. (…) ***tres de cien*** están defectuosos, o ***tres centésimos***; el TRES POR CIENTO, /pausado/ EL TRES POR CIENTO, *cambien una palabra por ahí*, EL TRES POR CIENTO está defectuoso…

Cuando el maestro pide que cambien una palabra para que lean "tres por ciento", parece que se refiere a la "de" de 3 ***de*** 100.

El porcentaje va adquiriendo nuevas formas al vincularse con otras nociones. Además de ser una parte que vale **a** cuando el entero vale 100, por ahora lo tenemos además como razón"3 a 100"; como fracción "3/100", que se lee "tres sobre cien" o "tres de cien" o "tres centésimos", "3%" que se lee "tres por ciento" y "de 100, 3".

Continúa la clase con otro problema:

R-5

> 245. Mo. el equipo 2 me va a sacar todo esto por favor: la razón cuánto es la fracción común y después el porcentaje (…).
> 60 personas de 100 votaron por el PAC.
> La razón es de____ a ____ ó ____.El ______ votó por el PAC.

Tenemos aquí una situación que reclama una especie de traducción, de sustitución de signos, aunque probablemente para el maestro sea una tarea para aplicar las nociones de razón, fracción y porcentaje. Por la forma en que se plantea la situación pareciera que hay una identidad entre razón y fracción y que el porcentaje es algo distinto. Más adelante preguntará por estas nociones como si fueran diferentes entre sí: "¿cuál es la razón? ¿cuál es la fracción? y ¿cuál es el porcentaje?".

Cuando pide a un equipo explicar la respuesta, una alumna dice “de cien han votado por el PAC sesenta”; después de esta respuesta el maestro pide que lo expliquen “como fracción”. La alumna empieza a repetir la respuesta “que de cien…”. El maestro está de acuerdo; la explicación consistía en asociar la razón con el porcentaje como parte de 100. La fracción quedó 60/100; el maestro les pide seguir cierto orden en la lectura:

R-5

> 260. Mo. cuando les pidan explicar una fracción, ***siempre empiecen por abajo***. Lo pueden empezar por arriba, ***pero como que se escucha mejor, de cien focos*** que había, tres estaban rotos…

La importancia de oralizar la respuesta de esta manera tal vez esté vinculada con la necesidad de asociarla con el porcentaje. En esta forma de leer la fracción subyace la idea que el denominador es “el completo”, por ejemplo, en ¾, 4 sería el completo, 4 sería igual a un entero.

En esta lectura que hace el maestro, aunque se refiere explícitamente a una fracción, de manera implícita alude a la razón, porque no es común que la lectura de una fracción se inicie por el denominador. Seguimos no obstante en el terreno de los nombres, de las maneras de decir; es ahí donde se dan los vínculos explícitamente.

Las nociones de fracción, razón y porcentaje se vinculan y se separan alternativamente. Probablemente el sentido de las tres nociones se enriquece, aunque también es posible que se confundan y ninguna quede suficientemente clara. No obstante, a estas alturas del desarrollo de la clase, parece ser que los alumnos han entendido lo que el maestro espera, tal como se hace evidente en la siguiente situación, del mismo tipo de la anterior, a la que los alumnos dan respuesta rápidamente:

R-5

> 262. Mo. /escribe en el pizarrón/ En un zoológico 15 animales de 100 son marinos. La razón es de ____ a ____ ó _____. El ______ son marinos.

Un alumno escribe las respuestas: La razón es de ***15 a 100***. La fracción ***15/100*** es el ***quince por ciento.***

Para finalizar la clase el maestro pide que anoten en los cuadernos lo que él escribe en el pizarrón:

R-5

268. Mo. En resumen, “tanto por ciento” significa tomar “tantos” de cada 100, por ejemplo, 20% significa $\frac{20}{100}$ o sea, tomar 20 de cada 100. 1% significa $\frac{1}{100}$, o sea, tomar 1 de cada 100.

Aunque queda la sensación de que hay comprensión y de que los alumnos entienden los significados y las relaciones entre nociones, la resolución de los ejercicios no permite asegurarlo puesto que en realidad éstos consisten en repeticiones, a nivel de escritura , de las expresiones del porcentaje, por ejemplo: 60 de 100= $\frac{60}{100}$ = 60%; 15 de 100 = $\frac{15}{100}$ = 15%. Estas respuestas se propician tanto por el contexto numérico (en todos los casos el total es 100), como por la manera de preguntar haciendo uso de ciertas expresiones con ciertos términos o escrituras que se supone los alumnos deben conocer (razón, fracción, porcentaje). No hay cálculo de porcentajes propiamente dicho.

Segundo comentario

En el cuadro se presentan los cuatro acercamientos a la noción de porcentaje que ocurrieron en esta primera clase:

En la acción de aplicar un porcentaje a una superficie:	Como forma de expresión equivalente a otras ya conocidas;
• **x** por ciento de una cantidad es la parte que es a la cantidad como **x** es a 100 • **x** por ciento de una cantidad es x/100 de esa cantidad	• **x** de cada 100 se lee **x** por ciento • **x** de cada 100 de escribe **x**/100, y se lee “de 100, **x**”, o “100 sobre **x”** o también “**x** centésimos”

Varias de las decisiones del maestro en esta primera clase pueden interpretarse como un intento por dar lugar a una introducción de la noción de porcentaje que sea accesible y significativa para los alumnos. Por ejemplo, el análisis inicial de la morfología de la palabra para sugerir la presencia del CIEN; la utilización de una concretización del porcentaje (la parte marcada de una tarjeta), el aplazamiento de la introducción del símbolo escrito del porcentaje; la vinculación (a nivel de nombres) con las nociones de razón y fracción estudiadas anteriormente.

Sin embargo, hasta ahora el porcentaje ha funcionado poco. El énfasis se ha puesto más en sus definiciones posibles, como fracción, como razón, y en las formas de correspondientes de expresarlo. La ausencia más notable ha sido la tarea de aplicar porcentajes a cantidades variables para favorecer la comprensión de dicha noción como “la misma parte de” y para dar pie al desarrollo de técnicas elementales (en particular, el uso de operadores internos).

La verdadera funcionalización del porcentaje ocurrirá en las clases siguientes, pero ya no bajo la forma intuitiva de razón “x de cada 100”, ni siquiera bajo la forma de fracción “x/100 de”, sino directamente como un factor decimal.

2.3.2 El porcentaje como fracción decimal (clase 6)

Secuencia de la clase:

a) El maestro anota el título en el pizarrón: “El porcentaje”
b) Llenado de una tabla con distintas expresiones para el porcentaje
c) Expresión decimal del porcentaje
d) Cálculo del 50% de algunas cantidades
e) Cálculo de distintos porcentajes

Durante esta segunda clase sobre el porcentaje se identifican dos momentos: en el primero el maestro añade a las anteriores una representación nueva para el tanto por ciento: *la expresión decimal*; en el segundo momento se usa esta expresión como forma de resolución.

- Un ostensivo nuevo: la expresión decimal del porcentaje

Los alumnos copian la parte sombreada de la siguiente tabla; la parte no sombreada fue completada después:

Porcentaje	Cómo se lee	Qué significa	Razón	Expresado como fracción común	Conversión a fracción decimal	Forma decimal
35 %	treinta y cinco por ciento	que se toman 35 de cada 100	35 a 100	$\frac{35}{100}$	.35 100 ⟌ 350 0500 000	. 3 5
20 %	veinte por ciento	que se toman 20 de cada 100	20 a 100	$\frac{20}{100}$	.20 100 ⟌ 200 0000	. 20
8 %	ocho por ciento	que se toman 8 de cada 100	8 a 100	$\frac{8}{100}$	.08 100 ⟌ 800 000	. 0 8
98 %	noventa y ocho por ciento	que se toman 98 de cada 100	98 a 100	$\frac{98}{100}$	.98 100 ⟌ 980 0800 000	. 9 8
3 %	tres por ciento	que se toman 3 de cada 100	3 a 100	$\frac{3}{100}$	.03 100 ⟌ 300 000	. 0 3

La consigna es llenar de la segunda columna en adelante.

Aunque hay una columna para expresar el “significado”, en realidad se maneja más de uno: en esta tarea entran en juego al menos dos de ellos con distintas notaciones: como *razón* en su acepción de “X de cada 100” o “X a 100” y como *fracción* (común y decimal). Al parecer en esta tabla se pretenden integrar algunas nociones que se vienen trabajando desde algunas clases atrás como son razón y fracción. En sus cuadernos los alumnos tienen una tabla similar, con el título “Porcentaje escrito en decimal”. El maestro decidió ejercitar esta parte sin que formara parte de las observaciones.

Veamos qué ocurre durante el llenado de esta tabla.

La tarea se realiza de manera colectiva, un alumno distinto es asignado para cada respuesta.

Cómo se lee. El primer alumno escribe “treinta y cinco por ciento”;

Qué significa. Un alumno escribe “35 a 100”; el maestro le reitera que debe escribir el significado, no la razón. En la clase anterior uno de los significados del porcentaje fue la razón, pero no se habló explícitamente de “significado”. Este término remite ahora a una expresión lingüística bien determinada, hay un énfasis en la forma de oralizar esta respuesta.

R-6

9. Mo. (…) no te estoy pidiendo la razón, (…) qué quiere decir treinta y cinco por ciento?
11. Mo. (…) no que lo escribas ya como razón ni nada, sino QUÉ QUIERES cuando se te dice treinta y cinco por ciento, qué quiere decir…

El maestro identifica el “significado” con la razón en su expresión “X de cada 100”, la cual se trabajó en la clase anterior.

Una primera respuesta que el alumno da para el significado es “que de cada 100 tomé 35”. El maestro acepta que está bien pero le pide decir la expresión “al revés”.

R-6

13. Mo. ¿lo puedes decir al revés? Sí, dijiste, de cada 100 tomé 35, está bien dicho, nada más cambia de lugar (…) cambia el orden…

La importancia del orden en el momento de la lectura tal vez se deba a la intención de vincular la expresión con la forma en que se nombra el porcentaje. Para el alumno “es lo mismo”, el maestro insiste en una determinada forma de escribir el significado:

R-6

20. Mo. Pues es lo mismo, nada más quiero cambiar el orden, así, de cómo decirlo, que se toman…

El alumno escribe en el pizarrón "*que se toman 35 de cada 100*". En la clase anterior la indicación fue que cuándo se les pidiera "explicar una fracción, siempre empezaran por abajo", es decir, por el denominador.

La razón. Otro alumno escribe la razón: ***35 a 100*** y con cierta inseguridad la lee como "treinta y cinco a cien". Esta forma de representar una razón ya se había usado en clases anteriores; lo nuevo en este momento es vincular, a nivel de representación, esta expresión con el porcentaje. En ninguna de las situaciones o problemas que se plantearon antes y que se plantearán después se usa esta forma para resolver.

Expresado como fracción común. A otro alumno le corresponde expresar "con fracción común esa razón" y escribe 35/100; cuando el maestro le pide "explicar esa fracción", el alumno dice "que de 100 tomé 35". Nuevamente el maestro señala que es "al revés", "que tomé 35 de cada 100". Hay una coincidencia entre la explicación del porcentaje como "fracción" y lo que se anotó en la columna de significado.

Conversión a fracción decimal. El maestro pide a un alumno convertir la "fracción común" a "fracción decimal". El alumno no recuerda cómo se hace. El maestro le dice que "se hace una división. Convertir de fracción común a decimal, 35 sobre 100". El alumno no logra hacer correctamente la operación y es otro compañero quien obtiene la expresión decimal **".35"**[3] .

El maestro insiste en que entienden todo y que los problemas se presentan en la realización de algo que ya deben saber, como son las divisiones:

R-6

> 35. Mo. (…) ese es mi problema, que no sabemos dividir
> 175. Mo. Ese es mi problema, que ***todo lo entienden***, pero las divisiones y multiplicaciones…

Tal vez quiera convencer a los alumnos, y a sí mismo, que lo fundamental, el sentido de las distintas expresiones del porcentaje, se entienden. No obstante, en el tipo de ejercicios que hemos visto, "entender" significaría poder reproducir los cambios de escritura y realizar el algoritmo de la división.

Para las siguientes cantidades trabajan simultáneamente seis alumnos en el pizarrón.

El maestro señala que el propósito de la tarea es llegar a la escritura decimal del porcentaje:

---

[3] En el uso de estos términos hay un pequeño desliz: a lo que se llama "fracción común" es (también) una fracción decimal, por ejemplo, 35/100; a lo que se llama "fracción decimal" refiere en realidad a la *notación decimal* de las fracciones.

R-6

38. Mo. (…) todo esto lo estamos usando para que vean cómo se escribe en *forma decimal el porcentaje*(…)

- Forma abreviada para expresar el porcentaje como decimal

Después de este despliegue de notaciones del porcentaje y vínculos con otras nociones, el maestro pide a los alumnos explicar "cómo pasar rápido un porcentaje a fracción decimal". Un alumno opina que haciendo "una división y una multiplicación"; el maestro le señala que eso no sería rápido, además si tienen problemas con la división menos óptimo sería. La expectativa del maestro es que utilicen un algoritmo de dividir entre cien recorriendo el punto decimal dos cifras a la izquierda.

El maestro trata de inducir la respuesta de los alumnos sin decírselas directamente. Les pide observar dos columnas: donde dice "porcentaje" y "forma decimal". Trata de que los alumnos encuentren alguna regularidad y tal vez un "truco" que los lleve a la expresión decimal. Un alumno identifica la colocación del punto decimal:

R-6

56. Mo. (…) por cuestión de observación, por cuestión nada más de lógica, pues en todos va pasando lo mismo (…) si no sé dividir ¿qué hago?
57. Ao. Yo convertí el número (…) a forma decimal poniéndole un punto
58. Mo. ¿en dónde?
59. Ao. *Hasta… al principio*

La idea de que el punto decimal se pone al principio puede dar lugar a ciertos errores, tales como 8% = .8, ó 120% = .120, pero por ahora no se hace alguna reflexión al respecto.

Cabe observar aquí la ocurrencia de un rodeo: las fracciones decimales pueden expresarse en notación decimal siguiendo una convención, en principio simple: la primera cifra a la derecha del punto expresa décimos, la segunda centésimos, etc. No es necesario pasar por la división del numerador entre el denominador, técnica que además de ser más compleja, descansa en la interpretación poco conocida de las fracciones como cocientes. El maestro decide usar primero la división, y después intenta recuperar un camino corto, pero no a partir de la convención antes dicha, sino observando regularidades en los resultados obtenidos al dividir. El motivo de este rodeo parece ser la atribución (errónea) de la notación decimal a la división.

A partir de este momento utilizarán el algoritmo abreviado para expresar el porcentaje en forma decimal.

- Ejercitación de la expresión decimal del porcentaje

La siguiente consigna es *Expresar en forma decimal.* El maestro anota en el pizarrón *36%, 8%, 95%, 114% y 240%.* Todos los alumnos resuelven en su cuaderno y uno de cada equipo escribe en el pizarrón una de las respuestas: **.36, .08, .95, 1.14, 2.50.** El maestro da lectura: “treinta y seis por ciento es igual a punto treinta y seis; ocho por ciento es igual a punto cero ocho; (…) ciento catorce por ciento es igual a uno punto catorce”. No hay alguna explicación del maestro o de los alumnos que nos permita ver cómo supieron que 8% = .08 y 114% = 1.14.

El maestro señala que en la mayoría de los problemas el porcentaje que van a usar es del tipo del 36 % al 95% y que las cantidades que rebasan el cien por ciento se usarán poco.

- Búsqueda de una operación única con la que se puede calcular el porcentaje: multiplicación por la expresión decimal

Una de las formas usuales para el cálculo de un porcentaje es la multiplicación por la expresión decimal de éste: el maestro trata de que los alumnos infieran esta forma a partir de los resultados ya obtenidos mediante otro procedimiento más simple (el porcentaje como fracción).

- *El paso de “1/2 de” a “.50 por”*

El maestro plantea situaciones en las que hay que calcular el 50%:

R-6

65. (…) Resuelve:	¿Cuál es el 50% de 90 balones?	***45 balones***
	¿Cuánto es el 50% de 14 niños?	***7 niños***
	¿Cuánto es el 50% de 36 pesos?	***18 pesos***
	¿Cuánto es el 50% de 40 canicas?	***20 canicas***
	¿Cuánto es el 50% de 560 gises?	***280 gises***

(Los resultados fueron anotados después)

Cada equipo resolvió un ejercicio distinto[4]. El maestro intervino en dos equipos que tenían dificultades para encontrar la respuesta: les ayudó a recordar que “el cien por ciento es el entero” y “si el entero son las 40 canicas, qué será el 50 por ciento”. Un alumno contesta que es “la mitad”. Es probable que los otros equipos retomaran la experiencia de las tarjetas en las que identificaron el 50% como ½.

[4] No pude ver cómo obtuvieron los resultados

Una vez que los alumnos obtienen el resultado de calcular el 50% de las cantidades anteriores, la siguiente consigna es hacer explícita la operación que utilizaron para hallar ese resultado:

R-6

> 85. Mo. (…) ¿cómo saco el resultado? (…) ¿con ***qué operación***?

El maestro trata de que deduzcan otra forma de obtener el 50%. El hecho de trabajar con un porcentaje muy sencillo y el hecho de tener ya los resultados, son parte de la estrategia del maestro para que los alumnos infieran otro procedimiento que para él es evidente. Veamos qué hacen los alumnos y cómo los guía el maestro:

El primer intento de los alumnos es dividir entre dos. El maestro hace en este momento algunos señalamientos: - rechaza el uso de la división; - en un segundo momento les pide intentar todas las operaciones, incluida la división, hasta que coincida con el resultado que ya tienen; - les pide observar las dos cantidades que se dan como datos en la primera situación, el 50 y el 90, para que busquen qué hacer con ellas para que les dé 45; - les pide insistentemente que utilicen lo que acaban de aprender:

R-6

> 87. Mo. (…) *esta operación entre dos no la quiero* /anota en el pizarrón 2/ /… entonces cómo saco este resultado empleando *lo que ustedes acaban de aprender* (…) el 50 por ciento de 90 balones son 45, es la mitad, ***la división normal pues es 90 entre 2, a 45***, sí, pero así no voy a sacar yo el porcentaje… (…) inténtenle… no sé qué se puede hacer, **sumar, restar, multiplicar, dividir, pero NO *quiero la operación entre dos*** (…) /encierra el 50 y el 90/. Observen las cantidades que encerré y que me dé 45. Suma, resta, multiplica, divide, *inténtalas todas*, alguna debe de salir pero ***usando lo que acaban de aprender*** (…) ***o sea*** /señala en la tabla que hicieron anteriormente/***que treinta y seis por ciento es igual a punto treinta y seis*** (…)

En esta intervención el maestro hizo explícito el uso de la expresión decimal del porcentaje pero para los alumnos no es evidente que para calcular el 50% tengan que usar la expresión decimal que ejercitaron con anterioridad.

Algunos alumnos comentan entre sí, otros intentan operaciones diversas y otros sólo escuchan. En el equipo que están trabajando con 50 % de 40 canicas tratan de sumar 50 más 40.

El equipo encargado de calcular el 50% de 90 balones hace distintos intentos:

- quita los ceros para trabajar con el 5 y el 9 solamente
- obtienen como resultado 450 balones

- convierten los 90 balones a 90 por ciento, escriben punto nueve (.9)
- deciden hacer una multiplicación; no es claro por qué deciden hacer esa operación, pero discuten si van a multiplicar “punto cincuenta por punto noventa” o si “es punto en el 50”
- multiplican 50 por 90 y obtienen 4500 (pérdida de toda referencia de factibilidad
- dividen 45 entre 100. Confunden e integran dos algoritmos: por una parte aprendieron que 50% = 50/100 y por otra que 50% de X= .50 x X.
- multiplican punto 50 por punto 90

Estos acercamientos son una muestra de que la tarea se traduce en una búsqueda, a ciegas, en nivel de lo numérico. En comparación con otras clases donde el maestro traza la ruta a seguir, ahora les permite transitar las veredas pero no les señala el rumbo. Para ellos nada tiene sentido, da igual todo; hay mucha especulación propiciada por el maestro quien trata de llevarlos a un algoritmo.

El maestro descartó primero la división entre dos, ahora descarta también la suma y los procedimientos aleatorios que los alumnos utilizan:

R-6

101. Mo. (…) /a un equipo/ 50 y 40 no me da 20 ¡¿ para qué la sumo?!, entiendan, tengo que usar lo que acabo de aprender, no nada más los números
103. Mo. (…) aquí no hay ni un 5 ni un 9, ¿cómo me vas a cambiar los números?(…) de qué me sirve a mí que hagas unos cuadrotes así y ***luego me digas mire 36 por ciento es igual a punto treinta y seis*** y ahora no lo usas, estoy diciendo USA LO QUE ACABAS DE APRENDER
104. Ao. Sí lo usé…
105. Mo. (…) ¿qué dice allá? (se refiere a la tabla que hicieron al principio) ***36 por ciento es igual a punto treinta y seis, 8 por ciento es igual a punto cero ocho,*** (…) ***entonces ya lo entendió todo mundo*** (…) (en tono irónico) si te salieron 450 balones entonces está bien (…) no es cierto que son 450, son 45…USA LO QUE ACABAS DE APRENDER
128. Mo. (al equipo que multiplica 50 por 90). Hazla, si te da 45 balones diles ahí está, ¿ no que no?(…) USA LO QUE ACABAS DE APRENDER ACÁ, mira, si 50 por ciento da 45 balones, el resultado no son 4500 balones porque ***no estás usando lo que acabas de aprender de cómo expresarlo en forma DECIMAL, pues lógico, ahí está***
139. Mo. (…) otra vez me volvieron a convertir los 90 balones a punto 90, pero ¿por qué los balones?, quiero el porcentaje
149. Mo. (…) VE ESTA CANTIDAD /señala el 50/ y ve esta cantidad /señala el 90/ (…) ahora úsalas empleando lo que acabas de aprender (…) y ustedes andan así, mira /escribe en el pizarrón 100/ 45, cuarenta y cinco entre cien ¿yo dije que usaras un 45 y un 100?(…) usa ÉSTA CON ÉSTA /señala el 50 y el 90/usando lo que acabas de aprender de fracción decimal y que te salga ESTO /señala el 45 golpeando con el borrador/

Un alumno decide multiplicar “90 por punto 50” y se lo comunica al maestro quien, en tono de aprobación, le dice que lo use. En los otros equipos continúa la búsqueda.

El maestro atribuye, una vez más, la falta de comprensión de la tarea a las dificultades para hacer operaciones.

La idea de multiplicar por punto cincuenta se socializa en el grupo poco a poco. Saben que es la respuesta correcta porque el maestro la aprobó; el sentido del porcentaje como expresión decimal parece estar un poco distante:

R-6

> 150. Ao. ¿te digo por qué le di?… en el 50 se le pone el punto y luego dices 90 por punto 50 … y ya te queda…

Parecería que para el maestro es obvio el uso de la expresión decimal. Destaca que se trataba de que ellos lo descubrieran, no de que él les dijera:

R-6

> 160. Mo. (…) ***para mí es muy fácil decirles (…) ahora van a hacer una multiplicación de 90 por punto 50 y sale 45*** (…) y ustedes lo hubieran hecho bien (…) los 4 equipos sacaron la respuesta sólo de descubrirlo, bueno, con ayuda, pero descubrieron que ese cincuenta lo tengo que trabajar así /anota **.50**/

En este momento el maestro hace algunas acotaciones acerca el uso del porcentaje: aclara que se multiplica el “punto cincuenta” por los balones y les señala en la tabla en que se registraron, al principio de la clase, distintas formas de expresar un porcentaje, la forma decimal de éste.

R-6

> 163. Mo. (…) aquí no decía balones, peces, perros, gatos (…) era porcentaje el que habían de trabajar (…) ***lo que se convierte a forma decimal es el porcentaje y el porcentaje se va a expresar siempre en forma decimal*** y lo que yo quería es que ***descubrieran qué operación se va a hacer siempre***… ***que descubrieran que es una multiplicación***

Además de que quede claro que el porcentaje “tiene que estar escrito en forma decimal siempre”, y que para sacar el porcentaje de una cantidad se hace una multiplicación, el maestro subraya que la otra cantidad “**no se toca, no se convierte a nada**”; reconoce que es ahí donde se equivocaron varios equipos, al poner en forma decimal los balones.

Esta indicación, de que una cantidad se toca y la otra no, como otras muchas, viene a suplir la falta de un apoyo semántico que justifique la técnica que se intenta introducir: la multiplicación por un decimal. Y es que comprender el sentido de esta multiplicación, comprender, por ejemplo, que multiplicar puede equivaler a dividir, a sacar “una parte de”, o simplemente, comprender que el producto de estas multiplicaciones puede ser menor que el multiplicando, va contra todo el sentido común que los niños han desarrollado en el estudio de la multiplicación por naturales. Se trata aquí de una de las nociones más complejas (y tal vez la más compleja) de la aritmética básica, noción que implica un proceso difícil de reconceptualización de la idea de multiplicar. Esta enorme dificultad probablemente no ha recibido aún la atención que requiere ni siquiera a nivel del currículum, o de los textos de apoyo.

Para el maestro, dicha dificultad no es observable porque, a final de cuentas, él centra su atención únicamente en el nivel sintáctico, el de las reglas aritméticas que se infieren al observar regularidades.

Esto explica que decida dejar en manos de los niños justamente este punto tan complejo: evidentemente no espera que comprendan el sentido de la multiplicación en juego, sino que, a partir de un juego con números y operaciones "descubran" una regularidad. En el capítulo 3 volveremos sobre el análisis de las partes de los procesos que el maestro decide dejar en manos de los niños, y aquéllos que en cambio, no deja en sus manos.

- Uso de un problema fácil para introducir una técnica difícil

El problema que el maestro utilizó para introducir la técnica de multiplicar por un decimal, es especialmente sencillo: se aplica el 50% a distintas cantidades. Esto se debe a que al maestro le interesa que obtengan el resultado a través de la técnica que ya conocen (sacar la mitad), para entonces "inferir" la segunda técnica mediante la observación de regularidades. No obstante, una vez que ya disponen de la técnica, se preocupará por mostrar que ésta se justifica por permitir resolver casos difíciles.

El maestro justifica las ventajas del uso de la expresión decimal con porcentajes distintos al 50%:

R-6

> 180. Mo. (…) éstas hasta sin operación (se refiere al cálculo del 50%), ***porque divido entre dos***, pero cuando son números así, ¿cuánto es el 19 por ciento?, ¿cuánto es el 8 por ciento? (…) ya son cantidades que cómo le hago, no puedo partir a la mitad o cuarta parte, entonces, ¿qué voy a usar? ***Lo que acaban de descubrir, una multiplicación….***

Esta estrategia, introducir una técnica difícil con un caso fácil y justificarlas después, será utilizada nuevamente para el desarrollo de otras técnicas.

Para reforzar la eficacia del procedimiento el maestro plantea la siguiente situación:

> 180. Mo. (…)/escribe en el pizarrón/¿ cuál es el 22 % de $500? (…) ¿cuánto es el 22 por ciento de 500 pesos?, o sea, un señor gana 500 pesos, el 22 por ciento lo usa para el doctor y mi problema es cuánto gasta en el doctor si es el 22 por ciento, ¿qué es lo que se hace?

Varios alumnos contestan que hay que multiplicar “punto 22 por 500”.

El maestro efectúa la multiplicación (500 x .22) y explica el resultado:

R-6

195. Mo. Quiere decir que el señor gana 500 pesos, se gasta el 22 por ciento para los doctores , (…) se gasta 110 pesos… vean que así ya es muchísimo más fácil sacar un porcentaje…

- Importancia del punto decimal

El maestro anticipa un error posible y proporciona una forma de ponerlo en evidencia; señala que si olvidan este punto (el decimal) “de nada sirvió” porque van a salir cantidades inmensas; el hecho de no usarlo conduciría a situaciones absurdas:

197. Mo. (…) ustedes quitan el punto y vean la tontería que les sale, el señor gana 500 pesos y se gastó 11 mil pesos en el doctor (…) pero si ustedes lo usan con su punto no hay ningún problema

Para finalizar esta parte dedicada formular la o las definiciones de porcentaje, el maestro recupera el tema de los descuentos y pone un ejemplo de cómo calcular el precio de un televisor:

203. Mo. (…) 20 por ciento de descuento en este televisor que costaba 2800 pesos, bueno, pues ahí ¿qué tienen que hacer?, multiplicar 2800 por punto veinte y ver cuánto es lo que le descuentan y hacer la resta

Este ejemplo cumple dos propósitos: presentar un tipo de situación que se abordará posteriormente y resumir una técnica para resolver problemas similares.

- Ejercitación

La siguiente tarea consiste en utilizar la expresión decimal del porcentaje en situaciones exclusivamente numéricas, sin unidades de medida. Este trabajo lo realizan en el pizarrón y cada vez pasan cinco alumnos, uno de cada equipo. El maestro dicta y los alumnos resuelven. Empiezan a apropiarse de la técnica de calcular el porcentaje multiplicando por la expresión decimal de éste.

El maestro escribe en el pizarrón, por ejemplo: *39% de 85* = . Los alumnos multiplican ***85 por .39.***

El maestro señala que “ya entendieron qué hacer”, el problema son las tablas, la división, la multiplicación y dicta siete situaciones más en las que varían los números, con porcentajes de una, dos y tres cifras. La mayoría de los alumnos resuelve en el pizarrón utilizando la expresión decimal; veamos algunas dificultades que se les presentan:

- Uso del punto decimal seguido de las cifras del porcentaje independientemente del valor del porcentaje, ejemplo multiplicar por**.3 en lugar de .03**
- Confusión entre la cantidad y el porcentaje. Para calcular 99% de 8, un alumno multiplica .08 x 99
- Omisión del punto decimal, multiplican 116 x 82, 82 x 82, 145 x 80
- Colocan el punto decimal en el resultado. Un alumno expresa el resultado de 45% de 200 como .90
- El cálculo de un porcentaje igual a la cantidad da como resultado la misma cantidad. 82% de 82 = 82

En el caso de un porcentaje mayor que 100%, el maestro pide al alumno recordar la tabla en la que hicieron distintas representaciones del porcentaje en forma decimal. Cuando el maestro le dice que es más del cien por ciento, el alumno hace una expresión de duda. El maestro le explica que el "100 por ciento es un entero y el 145 por ciento es más todavía".

A pesar de que el maestro pone énfasis en el dominio del algoritmo, esta última intervención muestra que concede un espacio todavía a la cuestión del sentido.

- Aplicación de lo aprendido: el porcentaje en un contexto de descuentos

Secuencia de la clase No. 7

a) Cálculo de descuentos a partir de un porcentaje determinado

b) Otros ejercicios con razones

En una tercera sesión en que se aborda el porcentaje se plantea un problema en el que los alumnos trabajan con precios a pagar que toman de hojas promocionales o de recortes de periódico; en esta ocasión se retoma una situación que antes se había descartado pero que les resulta familiar a los alumnos: los descuentos. El porcentaje de descuento lo señala el maestro. La consigna es la siguiente:

R-7

3. Mo. /asigna un producto a cada equipo/ (…) me van a sacar el precio real de este producto, van a observar el descuento que está allá enfrente, van a hacer la operación necesaria para sacar cuánto es el descuento y escribirme cuál es el precio real

Escribe en el pizarrón una tabla que posteriormente los alumnos han de completar (parte sombreada):

	videograbadora	**sonido**	**computadora**	**spray**	**pasta**
precio	$ 1790	$1199	$10 657	$ 5.90	$ 9.90
descuento	25%	39%	12%	40%	15%
precio real					

Mientras los alumnos resuelven el problema el maestro hace algunas precisiones a la consigna: “el precio es sacando los descuentos”; “poner el precio completo, los descuentos y las operaciones” “primero hay que sacar el descuento… los precios son los grandes” “no pueden estarlo haciendo sin punto” “(…)después del punto se corta hasta centavos”. A través de algunas de estas aclaraciones se filtra la petición de usar un procedimiento específico: la expresión del porcentaje como decimal y la multiplicación.

Procedimientos que usan los alumnos:

- *Siguen los pasos señalados por el maestro*:

17. Aa. Nueve noventa es el precio, y el 15 es punto 15 y se multiplica y sale uno punto cuatro mil ochocientos cincuenta, pero nada más le dejamos hasta centavos, luego se resta…

- *Multiplican sin usar el punto decimal*

En dos equipos no convierten el porcentaje a la forma decimal, sin embargo en el resultado anotan el punto en el lugar correcto.

35. Mo. (…) 1790, con el descuento del 25 por ciento, el precio real es de 1342 pesos con 50 centavos(…) descúbranme un error (…) para qué tanto estarles diciendo de cómo sacar de alguna forma (se refiere al punto decimal pero no se los dice)
38. Ao. Que el 25 por ciento no lo hicieron a forma decimal
39. Mo. (..) el equipo 4 igual, o sea que están sacando los puntos de no sé dónde

- Lo justificado y lo mecánico

A partir del error que cometieron los alumnos al omitir el punto decimal, el maestro les plantea la tarea de explicar el porqué de su uso en el porcentaje. Los alumnos se enfrentan a la dificultad de explicar una técnica que se usa pero que al parecer aún no comprenden.

R-7

47. Mo.(…) ¿***por qué pones punto veinticinco***? (…) porque son dos números y hay que ponerles punto… esa no es la razón… entonces tanto trabajarles para que después nada más digan “porque son dos números y le pongo un punto” (…) ¿por qué al nueve le pones punto cero nueve? (…) ***la razón es la que dijo Edgar***
48. Aos. (varios) ***porque son dos números***…
49. Mo. ***No, no, no, eso es lo mecánico*** (…) es que ya sabes que si son dos números le pongo punto…ahora explícame por qué ese punto
56. Aos. (varios) porque lleva punto decimal
57. Mo. (…) porque ésta es la forma decimal de ésta /señala 5%/ (…) y si no revisen por ahí sus cuadritos de hace una semana

Pese que a nosotros nos puede parecer que las últimas actividades de porcentaje, a partir del momento en que se introduce la escritura decimal, tienden a hacer prevalecer la ejecución de una técnica con poco significado para los alumnos, el maestro distingue un punto de vista “mecánico” de otro que no lo sería y trata de que los alumnos encuentren algún significado. La respuesta “porque son dos números” es considerada mecánica y lo es, aunque, por otra parte, es la que se infiere de manera más directa de las actividades realizadas. La respuesta “es la forma decimal” proporcionada por el maestro sería “no mecánica”. Lo “no mecánico” tiene entonces más que ver con una *manera de nombrar,* con una especie de alusión a la esfera de las definiciones de orden matemático. Quedan fuera nuevamente porcentajes como 200% que corresponden a la multiplicación por un entero *sin punto*.

En una clase posterior el maestro menciona que el porcentaje es un tema “que se seguirá repasando”.

2.3.3 Comentario final

Se presentaron, efectivamente, diversas formas de expresión del porcentaje, y se hicieron explícitos sus vínculos con otras nociones: el porcentaje n% puede verse como una razón (“n de cada 100”, ó “n es a 100”), como una fracción (n/100 de), como una fracción decimal expresada en notación decimal. Estas presentaciones vinieron acompañadas de numerosas precisiones acerca de las “maneras de decir” y eventualmente generaron algunas dificultades, sobre todo en la obtención de la notación decimal a través de la división del numerador entre el denominador para después inducir un atajo.

Pero, a lo largo de este despliegue de vínculos, de notaciones y de maneras decir, prácticamente no se hizo funcionar al porcentaje. El *sentido* de esta noción, si bien fue formalmente nombrado, no emergió a partir de su uso, permaneció en la superficie, insinuándose tan sólo entre las escrituras, notaciones y nombres.

Más precisamente: los alumnos no calcularon, en este primera parte, ningún porcentaje y por lo tanto no tuvieron oportunidad de utilizar procedimientos que les son familiares (por ejemplo, la aplicación de operadores internos), no pudieron tampoco constatar que la aplicación del porcentaje a distintas cantidades genera partes proporcionales de las mismas (siempre “la misma parte”).

Ciertamente en la segunda parte de la secuencia se aplican porcentajes a cantidades, pero, exceptuando el instante en el que aplican el 50% a varias cantidades “sacando la mitad”, los alumnos no utilizan las nociones enunciadas de razón o de fracción, se les lleva directamente a la técnica de multiplicar por un número decimal.

Detrás de dicha técnica está la noción de multiplicación por fracciones o decimales cuya complejidad ya ha sido comentada varias veces. Ciertamente, una “explicación” sobre dicha operación no podría insertarse como un simple paréntesis en la secuencia sobre porcentaje, pues hacer esto de manera adecuada tomaría no menos de un mes de trabajo.

Lo problemático de este punto no radica en la introducción de una técnica que no puede ser justificada (pero que puede ser eficaz) sino en el hecho de que ésa sea prácticamente la única técnica que se ofrece a los alumnos. Con ello, se socava la posibilidad de comprensión de la noción de porcentaje.

Cabe hacer un comentario sobre el episodio en el que el maestro intenta que los alumnos infieran la regla para multiplicar por un decimal, el cual es expresivo de un tipo de relación con el conocimiento matemático que el maestro propicia en ciertos momentos del proceso: se trata de observar una serie de resultados obtenidos mediante una técnica elemental, para inferir una regla, un atajo, a final de cuentas una nueva técnica, más económica. Todo ocurre en el nivel de la sintaxis. Los alumnos disponen de pocos elementos para hacer la inducción deseada, siguen a ciegas la numerosas indicaciones, cada vez más dispares, que el maestro les da (sumen resten, multipliquen...). El maestro se resiste a comunicar directamente la regla por considerar que es éste el espacio en el que a los alumnos toca “descubrir”. Pero, ¿qué es lo que lo los alumnos descubrirían? Es claro que no es el significado de multiplicar por decimales, quizá, solamente el “truco” que permite obtener el resultado. ¿Cabe concluir que, cuando se trata de descubrir, lo que puede dejarse en manos de los alumnos es la identificación de ese tipo de regularidades? Otro aspecto que valdrá la pena estudiar en otro momento es la noción de justificación que se maneja en la clase y su deslinde de lo mecánico.

La realización de un recorrido que lleve a los alumnos desde sus intuiciones primeras hasta la elaboración y dominio de las técnicas canónicas, y que a la vez ponga en primer plano los significados relevantes de la noción en juego se revela mucho más complejo de lo que cabría suponer a primera vista.

2.4. La puesta en marcha de una técnica: la regla de tres

Las clases sobre proporcionalidad del maestro culminaron con la puesta en marcha de la regla de tres, a lo largo de cuatro clases densas en las que en poco tiempo se revisaron varias nociones y ostensivos a través de una gran cantidad de problemas y ejercicios . Cabe recordar que esta regla constituye una de las técnicas para resolver problemas de “cuarta proporcional”, características de la teoría de las razones y las proporciones que se presentaba en los manuales de enseñanza, desde el siglo XIX hasta mediados del XX[1]. A partir de la reforma de las matemáticas modernas, dicha teoría ha tendido a desaparecer del currículo, más no así, por lo menos en nuestro país, la regla de tres. Esta técnica ha tenido un arraigo particular en el ámbito de la enseñanza básica, quizá lo que ha cambiado con respecto a ella es que ahora se le considera como una forma más, entre otras, de resolver un problema de proporcionalidad, mientras que antes era “la forma” por excelencia.

El maestro observado, como probablemente muchos maestros más, por lo menos de su generación y anteriores, recupera en cierta medida la “vieja escuela”: es muy claro que él valora la efectividad de la regla de tres y, si bien deja ver que conoce otras técnicas alternativas (de hecho, en clases anteriores ha dado lugar a algunas), no parece considerar en ningún momento que aquéllas puedan sustituirla.

El camino seguido por el maestro es complejo: no se limita a proporcionar la regla “ya hecha”, a enseñar a aplicarla y a pedir su ejercitación, como se podría pensar a partir de una visión simplista de lo ”tradicional”. Lejos de ello, el maestro libra un esfuerzo considerable por dar lugar a la participación de los alumnos en un proceso de reconstrucción particular, por

[1] Ver Capítulo 1. Smith, D. (1958: 481-494) menciona que esta regla parece tener su origen en la cultura hindú y que término también se encuentra entre los árabes y escritores latinos. Cita a Recorde, quien, hacia 1542, señala que la Regla de Tres “la regla de las proporciones, por su excelencia es llamada la Regla de Oro (Golden Rule)” Odre, en el siglo XVII justifica esto diciendo que “así como el oro trasciende los otros metales, esta regla trasciende a las otras en Aritmética”. Con el uso comercial, recibió también el nombre de Merchants´ Key o Merchants´Rule. En el siglo XVII se usó el término *practice*, particularmente en Italia; para referirse a la parte de la aritmética relacionada con problemas de finanzas. Se reconoció como Práctica Italiana. Esta regla se identificó como una forma abreviada de la Regla de Tres, los matemáticos norteamericanos le darían , en el siglo XIX, el nombre de método unitario. La regla de tres por lo general se usó sin justificar el procedimiento; Smith (*op. cit*.: 488) hace referencia a una explicación dada por Dignes en 1572 para operar con esta técnica: “multiplica el último número por el segundo y divide el producto entre el primer número”. Puede suponerse que se resolvía sin identificar la relación entre la regla de tres y la proporción. Los árabes usaban tablas al utilizar la regla de tres, lo que parece indicar el uso de ésta asociada a la proporcionalidad.

hacer accesible la técnica, dotarla de cierto sentido, destacar su vinculación con otras nociones ya estudiadas y también, ciertamente, por garantizar su dominio a través de la ejercitación intensiva. Los recursos didácticos de los que hecha mano, muy diversos, hablan de un maestro con años de experiencia.

El análisis didáctico de estos recursos permite conocer con mayor profundidad el punto de vista *didáctico* del maestro, sus elecciones, y, al mismo tiempo, ayuda a explicar algunas de las grandes dificultades que se observan, principalmente en el desempeño de los alumnos, en términos de las características de estas elecciones.

Algunos de los pasos que componen la regla en construcción ya han sido preparados con anterioridad: acomodar los datos de un problema en una “tabla de variación”; identificar las parejas de datos como “razones” y escribirlas como fracciones.

Las principales dificultades a que dan lugar algunos de estos pasos, particularmente la expresión de las razones como fracciones, ya fueron analizados en los apartados anteriores. Estas mismas dificultades se manifiestan reiteradamente en la secuencia de la que nos ocuparemos ahora, pero no nos detendremos nuevamente en ellas, para poder centrar la atención en otros aspectos.

Presentaremos un esbozo de la secuencia seguida por el maestro. Nos detendremos en algunos aspectos que fueron conflictivos.

2.4.1. Motivación: la necesidad de conocer una nueva técnica.

El maestro inicia la sesión presentando un problema: se trata de determinar un conjunto de medidas representadas en un plano, conociendo las medidas en el plano y una de las medidas reales:

En el plano	En la realidad
12	54 pasos
18	
20	
(...)	

Los alumnos dibujan el plano, pero no resuelven en ese momento el problema; éste será retomado una vez que la técnica haya sido establecida:

R-10

24. Mo. (…) dejan ahorita el plano pendiente para que después puedan encontrar los datos bien y van a hacerme este ejercicio sencillo, le ponen por favor variación proporcional /escribe en el pizarrón Variación proporcional/

El motivo de iniciar con la presentación del problema pudo haber sido el de *justificar* la enseñanza por venir. Sin embargo, los alumnos no intentaron resolver el problema y no pudieron saber si lo podían resolver o no con los recursos con que contaban; por lo tanto, el problema no logró cumplir el papel de *motivación* para introducir una nueva técnica, aunque probablemente sí queda como anuncio de lo que deberían lograr resolver.

2.4.2. Resolución de un problema simple, mediante una técnica conocida, para inferir la nueva técnica.

En seguida, el maestro plantea otro problema y pone los datos en una tabla:

R-10

> 24. Mo. Dos paletas cuestan $ 6. 00, ¿cuánto cuestan 4 paletas?

Paletas	$
2	6
4	

Los alumnos lo resuelven rápidamente recurriendo a las razones internas (doble). El maestro avala esta resolución y, en seguida, como ha sucedido en otras ocasiones, destaca las razones externas (2 paletas, 6 pesos y 4 paletas, 12 pesos) y las expresa con fracciones:

$$\frac{2p}{\$6} = \frac{4p}{\$12}$$

Se manifiesta aquí, nuevamente, una separación entre la resolución seguida por los alumnos (aplicar la razón “doble”) y la presentación final de las relaciones: $\frac{2}{6}$ expresaría la fracción de paleta por peso, dato que no fue utilizado. En realidad, como veremos más adelante, no se espera que estas “fracciones” sean leídas y utilizadas como tales, cumplen un propósito similar al de la tabla: acomodar lo datos para después aplicar una técnica. Así, el motivo de expresar las razones con fracciones parece estar a punto de revelarse.

El maestro borra el resultado (12) y lo sustituye por una “X”, tanto en la tabla como en la fracción. La *X*, significará, de aquí en adelante, “el dato que se busca”:

> 37. Mo. (…) *Yo desaparezco este número /borra el 12 de la tabla y de las fracciones*/ porque es el que no sabían hace rato (…) *le pondré una equis*/escribe un “X” en la tabla, abajo del 6/ ¿ya?, entonces dice: 2 paletas me cuestan 6 pesos, 4 paletas ¿cuánto me costarán?, no sé… ya sabemos que son 12 porque era un problema MUY sencillo.

Las expresiones quedan así:

paletas	$
2	6
4	**X**

$$\frac{2p}{\$6} = \frac{4p}{\$X}$$

Viene después una consigna central mediante la cual el maestro procurará que los alumnos infieran la regla de tres:

R-10

37. Mo. (…) lo que yo quiero es que ustedes me observen bien esos números, (…) los que sobraron, y qué podrían hacer, cómo los podrían usar para que les diera su respuesta correcta (…) (se refiere al 12)

La consigna se reveló ambigua para los alumnos y dio lugar a una larga interacción en la que el maestro fue descartando sus tentativas, un poco como si se tratara de una adivinanza, a la vez que trató de precisar lo que pedía. En este transcurso, un equipo encontró una forma no esperada de obtener el 12 a partir del 2, del 6 y del 4 (12 = 6+4+2). El maestro, la cuestionó mediante un contraejemplo: si por 2 paletas se cobran 6 pesos, cuánto se cobra por *5* paletas. Los alumnos encuentran el resultado, 15 pesos (ya sabían que el precio por paleta es de 3 pesos), y el maestro destaca que esta vez 6 + 2 + 5 no da 15.

Finalmente, pasado un rato, algunos alumnos encontraron las operaciones esperadas:

$$6 \times 4 = 24 \quad 24 : 2 = 12$$

R-10

100. Mo. (…) ¿qué les podía ***únicamente*** hacer (a los números)? Multiplicar estos dos y luego dividirlo entre éste: 6 por 4 son 24 y luego dividirlo entre el otro…

No obstante, como lo demostró accidentalmente uno de los equipos, no hay una *única* forma de obtener 12 a partir de 6, 2 y 4.

En seguida comprueban que la secuencia de operaciones encontrada funciona también para los casos de 5 y de 9 paletas, advirtiendo siempre que más adelante se enfrentarán a casos más difíciles en los que no conocerán el resultado de antemano.

R-10

102. Mo. (…) /escribe $\frac{2}{6} = \frac{5}{x}$ / ya sabemos que es 15 (…) estoy poniendo aquí la equis, es lo que no sabemos,(…) aunque ya lo conocemos ahorita, pero ya que pasemos de este problema, ahora sí ya no lo van a conocer, entonces le vamos a poner siempre esto (se refiere a la equis) (…) es un número que no conozco (…) Si es cierto que multiplicando

> estos dos /señala 6 y 5/ y dividiendo entre éste /señala el 2/, me tiene que dar éste /señala el 15/, entonces, lo comprueban por favor.

La participación de los alumnos en la identificación de la relación que sustentará la regla de tres consistió, por lo tanto, en probar, aleatoriamente, operaciones que, aplicadas a tres números dados, dieran un cuarto número.

Este recurso didáctico, "observar" los datos de un problema y el resultado obtenido a través de un primer procedimiento, para "inferir" una secuencia de operaciones que los vincula, ya fue identificado en otras ocasiones, por ejemplo, cuando se trató de "inferir" un camino rápido para obtener porcentaje de una cantidad. Lo veremos funcionar nuevamente más adelante. Es uno de los principales recursos didácticos que el maestro utiliza para dar lugar a la participación de los alumnos en el establecimiento de las técnicas. Cada vez que se utiliza, da lugar a la misma dificultad: lo que para el maestro es casi obvio, porque él ya conoce la relación que debe ser inferida, los alumnos simplemente no lo ven, o lo ven entre otras muchas posibles relaciones, sin que algún factor de la situación les permita discriminar las que no son pertinentes.

Es cierto que, en el caso de la regla de tres, los alumnos no pueden establecer la técnica mejorando sus propios procedimientos debido a que hay una ruptura entre éstos y la regla. La regla contiene una primera operación que no tiene sentido en el contexto (la multiplicación de, por ejemplo, 4 paletas por el precio de dos paletas). Se trata de una regla que se construye y se justifica en el nivel estrictamente numérico o algebraico. Es la elección de esta técnica específica la que imposibilita recorrer otros caminos.

No obstante, aún considerando que en este caso el trabajo de los alumnos no puede ser otro que el de inferir regularidades, este trabajo tendría mejores condiciones para llevarse a cabo si los alumnos ya hubiesen resuelto, con los procedimientos que ya conocen, varios problemas y no uno solo. Teniendo a la vista varios conjuntos de cuatro datos puede ser más sencillo orientar la búsqueda de las operaciones que vinculan, en todos los casos, a los primeros tres con el cuarto. Cualquier relación inferida en un caso se podría validar con los otros. Al tener, en cambio, un solo caso frente a sí, el trabajo se vuelve inevitablemente especulativo, al estilo de una adivinanza cuya respuesta solamente el maestro conoce. De hecho, es posible que los alumnos entendieran que se trataba de encontrar una relación válida para cualquier caso, hasta que el maestro planteó el contra ejemplo.

2.4.3. Fortalecimiento de la técnica

La relación encontrada en un primer problema y verificada en dos más, constituye el primer paso de un largo camino, antes de considerar instalada la regla de tres. Establecer dicha técnica implica aprender a seguir de manera rutinaria una serie de pasos que la amplían y refuerzan, y supone también incorporar cierta nomenclatura y ciertas representaciones. Los alumnos resolverán a lo largo de esta primera clase, y de tres más, una veintena de problemas similares, bajo la dirección del maestro, quien reencauzará una y otra vez sus resoluciones y, al mismo tiempo, irá introduciendo los elementos formales relativos a la regla de tres. A grandes rasgos, los pasos son los siguientes:

- Identificar las dos magnitudes en relación, los datos y la incógnita y ubicarlos en una tabla poniendo una “X” para indicar la incógnita;
- El planteamiento del problema: inferir las fracciones “poniendo la X” en una de ellas, $\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$ y oralizar las razones en juego mediante frases como: ¿si *a* cuesta *b*, cuánto cuesta *c*? [2].
- “Sustituir” (en realidad despejar), poniendo la “fórmula”, es decir, pasar de $\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$ a $x = \frac{bc}{a}$
- Hacer las operaciones.

Hacia el final, la secuencia incluye los otros aspectos:

- Generalizar: la incógnita puede ser cualquiera de los cuatro datos, los pasos a seguir no cambian
- Constatar, una vez que ya se tiene el resultado, que los “productos cruzados” son iguales, es decir, si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ entonces $ad = bc$ y relacionar este hallazgo con el hecho ya conocido de la equivalencia de fracciones.
- Nombrar “medios y extremos” a las parejas de datos que intervienen

Estos pasos no se presentaron estrictamente en este orden, a veces dos se introducen simultáneamente, a veces uno se hace explícito después de haberlo ya usado varias veces.

---

[2] Usamos aquí las literales a, b, c, d etc para expresar en general el tipo de situaciones planteadas. Excepto la equis, el maestro no las utiliza, las expresiones se anotan siempre con los números correspondientes a cada problema.

Además, entre un paso y otro, el maestro lleva a cabo otras acciones relevantes, por ejemplo, la relativa a la justificación de la técnica.

Casi todos los pasos de esta secuencia resultaron difíciles de aplicar para los alumnos y difíciles de transmitir para el maestro. A continuación se muestran y se analizan algunas de estas dificultades. Veamos primero la forma en que se justifica la nueva técnica.

- ***La justificación de la técnica***

El maestro pide a los alumnos que antes de apuntar el siguiente problema traten de resolverlo sin hacer operaciones, "mental, rápido", e incluso habla más rápido. El propósito parece ser en este momento destacar la utilidad de la técnica que acaban de "descubrir": Ya había anticipado que ésta se podría utilizar para cantidades "más difíciles", que no se puedan manejar mentalmente:

R-10

> 162. Mo. 5 balones cuestan $90.00 ¿Cuánto cuestan 17 balones? (…) vamos a comprobar si haciendo esto nos sale más fácil, rápidamente (…) pero hagan lo que acaban de descubrir, (…) van a ver que es más sencillo, o sea, más rápido

El maestro maneja determinadas variables numéricas para facilitar o dificultar un problema. En este caso logra efectivamente bloquear el procedimiento de la conservación de las razones internas (dobles, triples, etc), Sin embargo, el recurso al valor unitario no es susceptible de ser bloqueado, y, además, en este problema es un valor entero, por lo cual algunos alumnos lo utilizan. El maestro entonces invita explícitamente a los niños a usar lo que están aprendiendo:

R-10

> 166. Mo. /camina entre los equipos/ No, no éste, Francisco, entonces para qué estamos haciendo todo esto…ahorita te estamos enseñando esta cosa nueva que no sabías.

No obstante, el maestro aprovecha la resolución alternativa, la del valor unitario, para que los alumnos confirmen la validez de la nueva regla: ambos caminos arrojan el mismo resultado, pero, para el maestro, la nueva regla es más sencilla:

R-10

> 226. Mo. (…) lo primero que dijo Francisco (…) ¿cuánto cuesta un balón? Y lo corté ahí (…) ya lo sé que sí se puede hacer así, pero no lo quiero (…) queríamos ver si es cierto que multiplicando estos dos y dividiendo entre éste…
> 227. Ao. sale el resultado
> 228. Mo. (...) salía el resultado y *me salió así, y es más sencillo que estar* pensando en cuánto uno…

- ***La traducción a fracciones y la oralización***

Se trata de desprender de la tabla una igualdad de fracciones, por ejemplo, de la tabla que aparece más abajo, desprender la igualdad $\frac{2}{6} = \frac{4}{x}$, la cual se lee *2 paletas cuestan 6 pesos, ¿cuánto cuestan 4 paletas?*.

Como se anticipó anteriormente, es posible observar que el uso de las fracciones tiende a reducirse a una forma de acomodar los datos, muy similar a la tabla, para facilitar la identificación de lo que se multiplica y lo que se divide. Por ejemplo:

R-10

106. Mo. Bueno, me van a hacer favor de escribir lo siguiente: /dicta/ *2 paletas cuestan 6 pesos, 4 paletas cuestan 12 pesos,* con signos por favor, y lo ponemos como lo hicieron hacer rato (…) /escribe/

$$\frac{2}{6} = \frac{4}{12}$$

2 es a 6 como 4 es a 12

¿cuánto costarán 4 paletas?

106. Mo. (…) así también con su explicación de palabras abajo, claro que no lo vamos a poner así cuestan y eso, no, nada, ***2 es a 6 como 4 es a 12,*** o sea, 2 me costaron 6 pesos como 4 paletas me costaron 12 pesos.

170. Mo. Coloquen sus razones como fracción común, colóquenlas… coloca la equis

R-11

73. Mo. (…) Ya está el resultado, lo que quiero que observen es lo siguiente(…) ¿***cómo lo pasé a las razones?*** /escribe en el pizarrón al mismo tiempo que explica/

$$\frac{2}{3} = \frac{5}{x}$$

...si en 2 horas leo 3 revistas, o en otras palabras, ***2 es a 3*** (…) el problema decía, en 5 horas cuántas revistas leo? (…)

De hecho, como veremos más adelante, estas fracciones, también llamadas razones, son sustituibles por otro ostensivo más, el de los pares de puntos que se usaron durante mucho tiempo para expresar razones e igualdades de razones: **a:b :: c:d**. En otras palabras, la tabla, los pares de puntos y la barra de las fracciones son marcas equivalentes que se utilizan con la finalidad de identificar y de acomodar las parejas de datos relacionadas.

¿No sería suficiente con utilizar uno de los ostensivos? Por ejemplo, una vez acomodados los datos en la tabla, sería posible aplicar la regla inferida en el punto anterior según la cual se deben multiplicar los datos que se encuentran en diagonal y dividir entre el otro dato, sin pasar por la representación con fracciones:

paletas	$

2	6
4	**X**

X = (4X6) : 2

Al omitir la representación con fracciones se podría omitir también el paso siguiente (despejar la x) que resultó muy difícil de manejar para el maestro y muy difícil de aplicar para los alumnos.

Sin embargo, en la teoría híbrida[3] de las razones y las proporciones que hemos heredado y de la que se trata aquí, el paso por las fracciones no está en cuestión, es parte consustancial no solamente de la regla de tres, sino también de la noción de misma de razón y de proporcionalidad.

Por otra parte, las fracciones que se obtienen deben ser leídas de una manera particular: como una igualdad de razones, como se pudo observar en el ejemplo anterior (2 es a 6 como 4 es a 12), o bien, como una traducción del enunciado del problema, por ejemplo:

R-10

181. Aa. /escribe y lee/ $\frac{5}{90} = \frac{17}{x}$ 5 balones 90 pesos , 17 balones, ¿cuánto cuestan?

Es claro que no se trata ni del quebrado “cinco noventavos”, ni del cociente “cinco entre noventa”, sino de la relación “5 cuestan 90”.

- ***“Sustituir” poniendo la “fórmula”***

Se trata de pasar de una expresión como $\frac{2}{6} = \frac{9}{x}$ a una expresión como x = $\frac{6X9}{2}$

Aunque parecería que este paso consiste en despejar la *x* (el maestro equivoca el término cuando dice “sustituir”), en cuyo caso los alumnos tendrían que hacer una manipulación algebraica, en realidad se trata de otra cosa: los alumnos deben recuperar la relación observada al principio (la incógnita es igual al producto de dos datos entre el tercero) y anotarla bajo la forma de operaciones indicadas: *x* = $\frac{6X9}{2}$. La aritmética y el álgebra se rozan, se traslapan, confundiéndose.

[3] El término “híbrida” es utilizado por M Bosch (1994) para dar cuenta de las transformaciones que sufre la teoría de las razones y las proporciones, en el siglo XIX, al incorporar elementos de la teoría de las fracciones.

Dado que el término “despejar” no forma parte todavía del léxico compartido en la clase (y dado que en realidad no se trata de despejar), transmitir la consigna de pasar de una expresión a otra resultó sumamente complicado. Una vez que los alumnos ya habían escrito las fracciones, y que también ya habían calculado un resultado, el maestro les pide que escriban:

R-10

121. Mo. No la operación hecha, entonces equis cómo… ¿se acuerdan que en los problemas de perímetros y áreas hay una sustitución? O sea, se cambian las letras por números…bueno aquí quiero que alguien me pase a escribir … no la operación hecha, entonces equis cómo va…
122. Ao. ***¿El resultado?***
123. Mo. No, no, no, ni el resultado ni la operación ***¿qué operaciones hago explicadas de alguna manera, o sea, la equis entonces es igual a qué..***
124. Aos. …
125. Mo. no realizadas, o sea, ¿qué les tengo que hacer? a pensar, a pensar, a pensar… la equis, entonces, o sea, cómo encuentro la equis…
126. Aos. …
129. Mo. (…) no me hagan ya las operaciones, ya desde hace rato ya sabemos que es 27 , ***lo que quiero es que me digan ahorita, que me expliquen como si fuera una fórmula,*** no con letras, o sea, usen los números, pónganmelos ahí, digan, mire, para encontrar equis nosotros tenemos que hacer esto…
130. Aos ** Ahhh!

Los alumnos expresan con sus silencios el desconocimiento de lo que el maestro espera que hagan. Con la expresión “como si fuera una fórmula” parece que encuentran la manera de hacer lo que el maestro quiere. Veamos cómo, finalmente, los alumnos usan la equis:

R-10

139. Aos. ** /escriben en el pizarrón/

X= 9 x 6 : 2	6 x 9 = X	(X = 6 x 9 =X : 2 = X) corrige 9 x 6 : 2
X = 6 x 9 : 2	X = 6 x 9 : 2	

En tres de los cinco equipos logran interpretar la petición del profesor (en uno olvidan hacer la segunda operación). Aunque los alumnos han utilizado fórmulas en un contexto de geometría en donde hacen sustitución de las literales por las dimensiones de la figura; lo que deben hacer ahora no guarda en realidad una relación clara con aquello.

En el trayecto la tarea se hace más compleja. Esta representación que hicieron los alumnos aún no es suficiente, hace falta la precisión sintáctica:

R-10

142. Mo. Pero lo que yo no quería era que… que me usaran el … ***nosotros no pusimos ese entre… ¿no hay otra forma?***
146. Mo. Aquí, ¿pueden quitar este signo y usar otra cosa?, pero si ya lo han usado en fórmulas

147. Ao. Una rayita…
148. Mo. hasta acá…
149. Aos. ** sobre 2, órale

El maestro no está de acuerdo en que usen los dos puntos para indicar la división y hace que los alumnos usen otro ostensivo: la barra, que originalmente designa una fracción y hemos visto utilizarla también para denotar una razón. Ahora asume un tercer significado: expresa una división[4]. Un mismo ostensivo va revistiéndose de significados distintos, sin previo aviso.

Poner la "rayita" también tiene sus dificultades; hay quienes la escribieron así:

$$\frac{x = 6X9}{2}$$

Después de que los alumnos corrigen con base en los señalamientos del maestro, éste pide que todos anoten:

$$x = \frac{6X9}{2}$$

R-10

154- Mo. /lee/Equis igual a 6 por 9 entre 2; bueno, ahora sí ya sabemos cuánto es, 6 por 9…

Una vez que logran llegar a esta expresión, maestro y alumnos hacen las operaciones que están indicadas y obtienen 27 como resultado.

El maestro llevó a los alumnos a la expresión deseada. Al parecer está convencido de que ellos tienen que participar y descubrir lo que están aprendiendo, así, aunque es él quien los lleva paso a paso, les hace sentir que están descubriendo algo:

R-10

160. Mo. (…) ***esto que están descubriendo***, esta forma que están descubriendo la ***podemos usar ya para cantidades más difíciles, que no me sepa mentalmente*** luego, luego…¿será cierto?, a ver, último problema de este tipo pasar ya a su mapa…

Esta forma de representar las operaciones requerirá de numerosos ejercicios y correcciones del maestro para que empiece a ser utilizada por algunos alumnos.

- ***Generalizar: la incógnita puede ser cualquiera de los cuatro datos, los pasos a seguir no cambian***

En la tercera clase, el maestro plantea primero un problema simple:

[4] Aunque formalmente la fracción a/b y el cociente a . b son una misma cosa, esto no es así para los niños. (Block, David. 1986. Solares, Diana, 1999). No obstante, es probable que los alumnos ya hayan usado este signo con el sentido de dividir en las fórmulas del perímetro o del área de figuras.

R-11

40. Mo. /escribe en el pizarrón/ En 2 horas leo 3 revistas, en 5 horas, ¿cuántas revistas leo?

Con dificultad y bajo su dirección, los alumnos lo resuelven siguiendo los pasos de la rutina (poner los datos en tabla, inferir las "fracciones", anotando la x, "despejar la x", hacer las operaciones).

Una vez teniendo los cuatro datos, el maestro planteará, uno por uno, tres problemas más, cambiando únicamente el dato que no se conoce. Los propósitos son, al parecer, que los alumnos observen qué es lo que está cambiando, que vean que la técnica aprendida puede aplicarse de manera similar en los cuatro casos, y que sigan apropiándose de la rutina. Veamos lo que ocurre en la segunda situación:

R-11

220. Mo. En 2 horas, ***¿cuántas revistas*** leo si en 5 horas leo 7.5 revistas?

De entrada los alumnos parecen no comprender lo que deben hacer. El maestro intenta ayudar recordando la forma en que destacaron los datos y la incógnita en el problema anterior:

R-11

83. Mo. (…) cuando estaba este primer problema lo pusimos así: señala $\frac{2}{3}=\frac{5}{x}$, en 2 horas leo 3 revistas, en 5 horas cuántas leo, eso es lo que no se sabe. Ahora ya cambié un poquito, si en 2 horas leo 3 revistas, 7 y media revistas, ¿en cuántas horas las leo? Yo lo que quiero es que me acomoden bien su problema a acá; no me hagan ahorita operaciones(…)

Poco a poco, aparecen tres respuestas, dos de ellas erróneas:

$\frac{2}{3}=\frac{x}{7.5}$ (tres equipos); $\frac{2}{3}=\frac{7.5}{x}$ (un equipo); $\frac{3}{2}=\frac{x}{7.5}$ (un equipo)

El maestro recupera la respuesta correcta y solicita a los alumnos que la lean. Ahora se vuelve más claro que se trata de una lectura muy específica en la que cada dato y la incógnita deben decirse en determinado orden:

R-11

91. Mo. (…) una persona que me lo lea por favor…
92. Ao. Si en 2 horas leo 3 revistas en…
93. Aa. (interviene antes de que termine su compañero) 7 revistas y media…

94. Mo. (interrumpe a la alumna) No, no, no, o sea (un poco molesto) ¿por qué tienes a fuerza que leerlo como está acá (se refiere al problema anterior?) … los tres equipos hicieron esto, (se refiere a 2/3 = X / 7.5) no me la cambien…
95. Ao. Que se leyeron 3 revistas en…
96. Mo. O sea, ni porque ya pusimos el problema sabes qué estamos buscando
97. Ao. …
98. Mo. Pues ¿qué estamos buscando?, niños o pesos…
99. Ao. (en voz baja) cuántas revistas leo
100. Mo. ¿cuántas revistas leo? Observa tu problema, están un poquito distraídos (…) se concentran un poquito más por favor (…) ¿cómo voy a ver cuántas revistas leo? Pero si ya está aquí que 7 y media revistas; ¿quiere decir que ni siquiera se ha leído el problema?… el equipo que sigue me la lee por favor…
101. Aa. …
102. Mo. (…) les leí el problema de allá y ahorita me están revolviendo todo esto, ***no han entendido lo que yo quiero que hagan***
103. Aos. **
104. Mo. O sea, QUE ME LO LEAN COMO ESTÁ AQUÍ, no que me lo cambien

Finalmente un alumno hace la lectura esperada:

107. Ao. Si en 2 horas leo 3 revistas, ¿en cuántas horas leo 7 revistas y media?

108. Mo. (…) tengo que leer la pregunta en donde esté (…) ¿cuál es la pregunta que Juan no encontró? Pues las horas, Juan. En 2 horas leo 3 revistas, ¿en cuántas horas leo 7 y media revistas?

Viene después la solicitud, para la cual no hay todavía una consigna precisa, de escribir la expresión $x = \dfrac{2 \times 7.5}{3}$

R-11

108, 110. . Mo. (…) Hace rato multiplicaron unos números y luego los dividieron entre otro, y ahora ¿***qué van a multiplicar?*** (…) y ***¿qué van a dividir***? El resultado es 5, eso ya está ahí…
114. Mo. No, no, no, yo no dije vengan a hacer operaciones
115. Aos. **¿¡no!? ya me salió
116. Mo. Yo quiero equis igual…
117. Aos. ** ***Ah!, ya…***

Por último, se trata de que los alumnos observen que, en la igualdad de fracciones, la *x* cambió de lugar:

R-11

124. Mo. (…) multiplicaron pues los dos que se pueden multiplicar, acuérdense ***que siempre son cruzados***, eh?, cruzados, nunca se multiplica así (señala los denominadores)(…) siempre cruzados… Ahora, lo que pasa es que hace rato ***la equis estaba por acá, ahora la equis está acá***; ¿qué vamos descubriendo con la equis?

Cuando resuelven el tercer problema ("¿en cuántas horas leo 3 revistas y si en 5 horas leo 7 revistas y media?"), el maestro hace una pregunta que llama la atención:

R-11

178. Mo. (…) ¿por qué se multiplica el 3 y el 5?
179. Ao. Para…
180. Mo. ***No, no , no para qué***. ¿***Por qué el 3 y el 5 y no el 7 punto cinco con el tres? ¿por qué el 3 y el 5?***
181. Ao. Para encontrar…
182. ***No para qué***, ***¿por qué?*** ¿por qué agarraron todos los equipos el 5 y el 3?
183. Aos. …

La pregunta es desconcertante porque, como ya se ha comentado, justamente esa multiplicación (3 revistas por 5 horas) no tiene referente en el marco de las magnitudes del problema. Lo que se descubre al ver la respuesta esperada, “porque están cruzados”, es la connotación particular de la pregunta “por qué” en este contexto: no apela a explicaciones semánticas, remite a los pasos mismos de la regla.

- ***Constatar que los “productos cruzados” son iguales y relacionar este hallazgo con el hecho ya conocido de la equivalencia de fracciones.***

Después de haber estudiado los cambios de lugar de la incógnita, el maestro retoma una de las igualdades de fracciones que obtuvieron y pone nuevamente a los alumnos en la búsqueda de una regularidad numérica. Con la petición de hacer “un máximo esfuerzo”, el maestro trata de que, a partir de la “observación”, los alumnos encuentren que al multiplicar los números “cruzados” obtienen el mismo resultado:

$$\frac{2}{3} = \frac{5}{7.5}$$

R-11

246. Mo. (…) Un máximo esfuerzo.. (…) observen bien, ¿qué números se multiplican según ustedes?
247. Ao. 2 horas…
248. Mo. Hey, ¿qué números se multiplican? /truena los dedos un poco molesto/ ¿qué números se multiplican?
249. Aos. (varios) dos horas
250. Mo. Cuando tengo una incógnita, una equis, ¿qué números se multiplican?
251. Aos. (varios) los cruzados
252. Mo. Bueno, aquí ahorita en este caso está completo, ¿qué observan? ¿nada? ¿qué encuentran?, ¿nada?
253. Aos. …
254. Mo. Obsérvenlo, observen bien los cuatro números… obsérvenlos bien, qué se puede hacer, qué pasa, qué salió de chistoso, de curioso, qué sucedió…
255. Aos. …

Se diversifica el uso de la técnica, no sólo sirve para encontrar un resultado, sino también para comprobar que éste sea correcto. El paso de un uso a otro es muy sutil; el maestro conduce la tarea como si fuera la continuación de los problemas que estaban resolviendo, y en realidad los sigue usando, sólo que con otro propósito: identificar la propiedad de los productos cruzados.

No toma en cuenta la respuesta de varios alumnos que dicen que se multiplican “los cruzados” e insiste en que a partir de la observación busquen una regularidad numérica “obsérvenlos bien, qué se puede hacer, qué pasa, (…) qué salió de chistoso, de curioso, qué sucedió”.

El maestro insiste en que sean ellos quienes descubran. Es una forma de decirles que algo más de lo que han dicho está presente.

R-11

> 258. Mo. (…) Yo se los puedo decir ahorita rápido, o sea, mira, pues observa que esto y esto pasa y luego esto y esto otro pasa, ¿por qué no observan?

Veamos cómo enfrentan los alumnos esta búsqueda:

- Buscan regularidades numéricas a través de sumas:

R-11

> 264. Mo. (…) /a un equipo que está sumando 5 + 2/ 5 y 2 son 7, ¿y eso qué?
> 266. Mo. (…) 3 y 2 son 5, ¿y eso qué?
> 270. Ao. Para sacar el 5 sumo 3 y 2…
> 271. (…) es algo bien sencillo que se observa ahí, ¿qué pasa entre éste y éste?

- Buscan regularidades numéricas a través de una multiplicación

R-11

> 272. Ao. se multiplica…
> 273. Mo. (…) la pregunta no fue ¿cómo se sacaría el 2?, eso ya lo hicieron (…). Ya vieron que la equis puede estar en cualquier lado y que inclusive en secundaria les van a poner problemas en los que haya 2 equis

- Aplican la técnica aprendida:

R-11

> 283. Ao. ¿siete punto cinco por dos entre tres igual a cinco?
> 284. Mo. (algo molesto) (…) pues ESO YA LO HICIMOS HACE RATO… no. no, no…

Mientras los alumnos continúan la búsqueda, el maestro precisa un poco la consigna:

R-11

273. Mo. (…) lo que yo quiero que ahorita me observen es ***¿ qué pasa con esos cuatro números?,*** es algo bien sencillo que se observa por ahí (…)

Los alumnos continúan comentando en los equipos; no sabemos hasta qué punto influye la precisión de la consigna, pero en uno de ellos descubren que “si se multiplica 3 por 5 es igual a 2 por siete punto cinco”. El equipo festeja con júbilo la tan esperada respuesta.

El maestro trata de guiar a quienes aún no encuentran la respuesta, aclara lo que quiere que observen:

R-11

281. Mo. (…) Cuando yo les digo observen los números para que vean qué relaciones encuentran, ***tienen ustedes que sumar, restar, multiplicar, dividir, sacar mitad, sacar cuarta y hasta ver, ¡algo debe pasar entre ellos!,*** los números así son, pasan cosas muy chistosas, muy curiosas (…)

Observar consiste en una búsqueda aleatoria en la que es válida cualquier operación, aunque el maestro ya descartó en más de una ocasión la suma. Ahora ya no se refiere al lugar que ocupan los datos, sino a las relaciones entre las cantidades en cuestión.

Si no es una relación aditiva, ni la forma de obtener un dato a partir de los otros tres, para los alumnos la consigna sigue sin ser comprendida.

Al parecer las variaciones sobre un mismo problema no les dan elementos para sacar la conclusión que desea y decide poner otro ejemplo, ya sin contexto alguno:

R-11

284. Mo. (…) te estoy diciendo observen los cuatro números (…) bueno, te voy a poner otros, éstos no tienen nada que ver con este problema…. /escribe

$$\frac{3}{4} = \frac{15}{20}$$

Observen estos cuatro números (…) yo no estoy diciendo ¿Y qué haríamos para encontrar el 4? (…)

El maestro trata de que sean los alumnos quienes encuentren la regularidad que consiste en que el resultado de multiplicar dos pares de números cruzados es el mismo:

R-11

286. Mo. (…) ¿Y qué haríamos para encontrar el 4? Ya lo deben se saber ahorita
287. Aos. … (supongo que no contestan porque el maestro ya descartó la respuesta de que se multiplican dos datos y se divide entre el otro)
288. Mo. Si éste no lo conozco /señala el 4/ ¿qué haríamos?
289. Aos. (en coro) multiplicamos
291. Aos. (algunos) 20 por 3…
292. Mo. 20 por 3, ¿y luego?
293. Aos. (varios) se divide, se divide

294. Mo. ¡Eso ya lo saben! (…) ya entendió la mayoría…no, no, yo lo que quiero que me den ahorita, mira, van a observar esos números de ahí (se refiere a ¾ = 15/ 20)algo pasa, lo mismo que pasa aquí pasa acá…
300. Aa. 4 por 5 es igual a 20 (tal vez pensó en una fracción equivalente)
303. Mo. (…) ya sé que 4 por 5 veinte, pero ¿dónde está el 4 por 5?, está durmiendo este equipo
304. Aos. …
305. Mo. ¿ no lo pueden hacer con los números, sumar, restar o multiplicar o dividir?, o hagan algo curioso

Finalmente 4 de los 5 equipos encuentran la respuesta esperada. Es el maestro quien la hace pública:

R-11

307. Mo. (…) ya los otros 4 ya lo sacaron… que si multiplico 5 por 3, es lo mismo que si multiplico siete punto cinco por dos
308. Aos. *
309. Mo. Que si multiplico 20 por 3 son 60, es lo mismo que si multiplico 15 por 4, 60 /marca con color las líneas cruzadas/:

$$\frac{2}{x} = \frac{5}{7.5} \qquad \frac{3}{4} = \frac{15}{20}$$

Debido a que la proporción (igualdad de dos razones) se expresó con fracciones, entonces, la igualdad de "los productos cruzados", se puede identificar con la forma de verificar la equivalencia de fracciones. Esto es lo que el maestro propone a continuación:

R-11

311-313 . Mo. (…) esto lo vimos cuando sacamos las primeras fracciones equivalentes (…) /escribe y explica/

$$\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$$

dos tercios igual a cuatro sextos, esta propiedad (la de los productos cruzados), esto yo no lo mencioné (cuando se estudió la equivalencia de fracciones) porque esto pertenece ya a esta clase, en aquél tiempo era nada más apenas sacar una fracción equivalente, compruébalo, es lo mismo 2 por 6

314. Aos. (algunos) 12
315. Mo. 4 por 3
316. Aos. (algunos) 12 (algunos dicen siete)

Los productos cruzados adquieren entonces una doble función, misma que el maestro destaca:

- Como una técnica para comprobar la equivalencia de las fracciones :

R-11

317. Mo. ¿cuándo está mal una fracción? (…) si ustedes hacen esto /borra el 4 y en su lugar pone un 5 y multiplica en cruz/ (…)2 por 6, 12; 5 por 3, 15, esto está mal, pero así esto sí funciona /escribe otra vez el 4/ (…)

$$\frac{2}{3}=\frac{4-->5}{6}$$

- Como técnica para encontrar un cuarto dato:

R-11

317. Mo. si yo aquí digo, cruzados debe salir lo mismo y si tengo estos dos, digo siete punto cinco por dos, quince, entonces, ¿cuál multiplico por 5 que me dé 15?, pues 3, ***es otra forma de encontrar la respuesta***

$$\frac{5}{7.5}=\frac{2}{x}$$

Por último, el maestro recupera la forma en que antes verificaban la equivalencia de fracciones, multiplicando numerador y denominador por un mismo factor, para destacar con más fuerza el vínculo entre los dos ámbitos, el de las fracciones y el de la proporción. Los vínculos ocurren en el nivel de la sintaxis:

R-11

317. Mo. (…) En este caso /escribe/

$$\frac{3}{9}=\frac{9}{27}$$

tres por 27, tendría que multiplicar rápido, entonces qué números multiplico por 9…

318. Aos. (varios) 9

319. Mo. Para que me dé 81… aquí son 9 /escribe el 9/… de otra forma, pues son ***fracciones equivalentes***, 9 por 3, 27, 3 por 3, 9 /escribe en el pizarrón/

$$\frac{3X3}{9X3}=\frac{9}{27}$$

321. Mo. Ven como todo está relacionado, las razones, las fracciones comunes, las fracciones equivalentes, el porcentaje, ***todo esto que hemos hecho está relacionado***

Nos detendremos aquí un momento para analizar las argumentaciones anteriores, a la luz de algunas alternativas, respetando siempre el propósito final de establecer la regla de tres. Esto permitirá mostrar un cierto carácter circular en el camino seguido por el maestro.

Camino seguido por el maestro:

1. $\frac{x}{b} = \frac{c}{d}$ (igualdad construida a partir de los datos del problema de proporcionalidad)

2. $x = \frac{bc}{d}$ (“descubrimiento” por constatación de regularidades)

3. $xd = bc$ (“descubrimiento” no ligado al anterior, por constatación de regularidades)

4. si $xd = bc$ entonces $\frac{x}{b} = \frac{c}{d}$ (primera vinculación de dos propiedades)

5. si $\frac{x}{b} = \frac{c}{d}$ entonces existe *n* tal que *nx* = *c* y *nb* = *d*,

   a partir de lo cual es posible encontrar el valor de *x* (segunda vinculación de dos propiedades);

El último paso (5) podría de hecho ser un buen segundo paso, omitiendo todos los demás, pero tiene la desventaja de ser accesible solamente cuando *n* es entero

Camino alternativo 1: una vez establecida la igualdad de fracciones formadas con los cuatro datos de un problema de proporcionalidad, se podría apelar al conocimiento que los niños tienen ya sobre la equivalencia de fracciones para justificar con éste la igualdad de los productos cruzados:

1. $\frac{x}{b} = \frac{c}{d}$ (igualdad construida con los datos del problema).

2. $xd = bc$ (puesto que las fracciones anteriores son equivalentes, o bien, por constatación de regularidades).

3. Entonces, se trata de buscar el número que multiplicado por *d* es igual a *bc*, es decir,

   $x = \frac{bc}{d}$

Camino alternativo 2: en este camino las fracciones no se utilizan, lo cual viene a recordar que éstas no son realmente necesarias para establecer la regla de tres:

1. (x, b) = (c, d) (igualdad de razones, expresadas sin fracciones, que se infiere del problema, por ejemplo, a partir de la tabla)

2. xd = bc (por constatación de regularidades)

3. Entonces, se trata de buscar el número que multiplicado por *d* es igual a *bc*, es decir, $x = \frac{bc}{d}$

Una diferencia entre los caminos alternativos y el que siguió el maestro radica en que, en el del maestro, se establecen dos proposiciones ($x = \frac{bc}{d}$ y $xd = bc$) a partir de constatar "regularidades numéricas", las proposiciones por lo tanto quedan inconexas entre sí, es decir, no se desprende una de la otra, lo cual sí ocurre en los caminos alternativos en los que la proposición $x = \frac{bc}{d}$ se infiere de la proposición $xd = bc$. Por otra parte, el camino 2 es claramente más breve y sencillo.

Así, queda la impresión de que en el camino seguido por el maestro algunas de las piezas que conforman la regla de tres y su entorno (su justificación, su vinculación con las fracciones), están sueltas y "desacomodadas", lo cual constituye, posiblemente, un efecto de desdibujamiento de la antigua teoría de las razones y las proporciones.

- ***Otros pasos...***

El montaje de la regla de tres aún no ha terminado. Después de estudiar la vinculación con la equivalencia de fracciones, el maestro va abordando otros aspectos, tales como: introducción y justificación del nombre "regla de tres", introducción de los términos "medios y extremos"; formulación explícita de la regla; aplicación a más problemas; variación directa e inversa.

Al final del proceso, es posible percibir que una rutina empieza a instalarse, aunque todavía es frágil y fácilmente puede dar lugar a errores, como se puede observar en los siguientes ejemplos tomados de la parte final de la secuencia:

R-12

> 90. Mo. /lee y escribe/ Un rollo de película de 50 minutos tiene 32 metros, ¿cuánto durará uno de 56 metros?

El maestro no deja a los alumnos resolverlo completamente solos. Está el interés en llevarlos por un camino ya recorrido. Se va cerciorando que sigan las huellas ya marcadas:

R-12

> 92. Mo. Por esta vez háganlo como les indicamos… en primera, qué se localiza?
> 93. Aos. (algunos) los tres (varios) los datos)

94. Mo. Los datos que tengo, localícenlos. En seguida…
95. Aos. (algunos) la tabla
96. Mo. Si quieren hacer una tabla para que vean qué están manejando y no confundirse (…)
97. Aos. ** comentan
98. Mo. después sus razones

Veamos qué hacen los alumnos:

- En un equipo, manifiestan haberse apropiado de la rutina. Algunos alumnos no consideran necesario hacer la llamada “sustitución”:

R-12

101. Aa. 1. Primero se pone la razón
102. Aa. 2. Primero vamos a poner la razón
103. Aa. 3. … vamos a localizar los datos, después si queremos hacemos una tabla y después de eso (…) ponemos la razón y después multiplicamos 56 por 50 luego el resultado que nos dé lo vamos a dividir sobre … 32 y ya ése va a ser el resultado /tienen escrito esto:

50	32
	56

$$\frac{50}{32} = \frac{x}{56}$$

105. Obs. ¿y por qué pusiste la equis arriba del 56?
110. Aa. 3. Porque este es el número que no sabemos (…) cuántos minutos hay aquí
111. Obs. ¿Por qué la pusiste arriba y no abajo? (yo quería saber si estaban estableciendo alguna relación)
112. Aa. 3. Porque ahí los metros con los metros y los minutos con los minutos

En este equipo, como en otros, consideran opcional el uso de la tabla, que es un recurso en el que se pueden entender las relaciones entre los datos.

- En otro equipo acomodan los datos en forma de razones internas, siguiendo el orden que tenían en la tabla:

R-12

129. Ao. Hice la tabla y los minutos, por ejemplo, 50 minutos los puse aquí (…) En la tabla está así:

50	32
	56

131. Ao. =. (continúa) y aquí los metros, aquí los puse, entonces los acomodé así /señala en el cuaderno: $\frac{50}{\ } = \frac{32}{56}$

una película de 50 minutos tiene 32 metros, ¿cuántos minutos tendrá la de 56 metros? Y luego de ahí se multiplica y luego lo de aquí se divide entre 32 y lo que salga ya se pone aquí /señala el lugar abajo del 50

Este cambio de orden no afecta al resultado, de hecho, hacia el final de la secuencia, el maestro lo admite explícitamente.

- Hay quienes acomodan los datos pero les resulta difícil oralizar:

R-12

115. Aa. 1. Que ... este..., qué fracción común hace?, aquí son los minutos que dura, este, la película (50), y aquí estos son los metros que tiene (32), entonces (…) aquí voy a acomodar los metros que tiene y voy a hacer, este, las operaciones para saber cuánto va a durar… (tiene anotado: $\frac{50}{32} = \frac{}{56}$)

117. Ao. 2 Yo hice lo mismo que ella (…) para poder hacer las operaciones y sacar, este, en cuántos minutos dura la película

- Varios tienen todavía dificultades para acomodar los datos

R-12

106. Mo. (…) acabamos de resolver estas cuatro formas en las que vieron que la incógnita cambia y tengo dos equipos que <u>a fuerzas</u> la quieren poner aquí abajo, (56 abajo de 50) porque están confundiendo todos los datos, están mezclando, (…)me están diciendo que hay 56 <u>minutos</u> . Por eso tienen que leer el problema (…)

- En otro equipo identifican la forma de hacer las operaciones, pero tienen problemas para acomodar los datos:

R-12

121. Aa.1. Voy a multiplicar 50 por 56 y lo que me salga lo voy a dividir (…) en 32 y ya lo que me salga lo voy a poner aquí

125. Aa. 1. (primero) Identifiqué los datos para ponerlos en la tabla y para poder saber, este, acomodarlos

126. Obs. (tiene una tabla en la que no escriben las magnitudes; ponen en la misma columna 50 minutos y 56 metros):

50	32
56	

127. Aa. 50 metros… el rollo este, tiene 32 metros y ¿cuántos tendrá en 56… en 56… en 56 ro… en 56 metros de rollo?

- Finalmente, en un equipo no saben por dónde empezar:

R-11

133. Mo. (…) o sea, algo hagan, aunque sea algo, no se queden los tres así, quiere decir que no saben ni siquiera algo…

2.4.4. Comentarios

El maestro libró un esfuerzo considerable, a lo largo de más de cinco horas de clase en tres sesiones[5], para que sus alumnos se apropiaran de la regla de tres y la utilizaran en la resolución de cierto tipo de problemas de proporcionalidad. Como vimos anteriormente, varios alumnos empezaron a lograrlo en los últimos ejercicios, otros todavía no.

El análisis didáctico de estas clases, al mismo tiempo que permitió destacar la gran diversidad de recursos utilizados por el maestro en esta secuencia, muestra también que ciertas opciones didácticas aumentaron innecesariamente la complejidad del recorrido y, por otra parte, destaca el carácter exclusivamente sintáctico de una parte importante de las elaboraciones a las que el maestro condujo a los alumnos. Repasemos aquí algunos aspectos de dicho análisis.

La regla de tres: una elección determinante.

La primera cuestión que puede discutirse es la elección misma de la regla de tres como la culminación del proceso de enseñanza de la proporcionalidad. Como ya hemos dicho en varias ocasiones, dicha regla no puede justificarse en el marco de las magnitudes implicadas en los problemas concretos de proporcionalidad y requiere por lo tanto romper con el contexto y trabajar en el nivel del modelo puramente numérico, eventualmente con el auxilio de herramientas de álgebra.

Si se considera que es necesario, de todas maneras, que los alumnos conozcan la regla de tres (por ejemplo, por cuestiones culturales), ésta podría ocupar un lugar más modesto, como una técnica adicional a las otras técnicas a las que los alumnos pueden acceder más fácilmente (conservación de las razones internas, método del valor unitario, por ejemplo). Además, como ya vimos, podría seguirse un camino más breve, articulado y simple que el recorrido por el maestro. Notablemente, la incorporación de las fracciones en esta secuencia, es prescindible, consideración que cobra relevancia si se considera que las partes más difíciles de la secuencia tuvieron que ver con las fracciones. Esta reflexión no atañe solamente a la secuencia del maestro, sino a toda la teoría híbrida de las razones y proporciones, en la que las fracciones entran como ostensivos “más modernos”, y sin embargo poco funcionales.

[5] Sin contar las horas de clase anteriores al momento en el que explícitamente se enseña la regla de tres.

Connotaciones cambiantes de un mismo ostensivo

Uno de los aspectos más expresivos del posible origen de grandes dificultades de comprensión para los alumnos, es la forma en que se hace jugar a un mismo ostensivo, sentidos diferentes “sin previo aviso”: es el caso de la barra que se utiliza originalmente para denotar fracciones, y que, en esta secuencia, deja de expresar la idea primigenia de una unidad que se divide en partes iguales de las que se toman algunas, para expresar la relación entre dos cantidades (tantos libros, tantos pesos, por ejemplo) y de un renglón a otro de un argumento, adquieren un tercer sentido, el de dividir.

Entre las magnitudes concretas y el modelo abstracto.

La regla de tres se enseña para resolver problemas concretos de proporcionalidad. Debido a esto, las magnitudes están necesariamente presentes desde el principio. Están presentes también en varios de los pasos de la regla: en la tabla, las magnitudes se indican en los encabezados; al escribir las fracciones, las magnitudes se enuncian, sobre en todo en la forma enseñada de leer las fracciones. En algunos de los episodios siguientes, “despejar la x”, “comprobar que los productos cruzados son iguales”, las magnitudes desaparecen por completo: ahí estamos en el modelo abstracto, matemático, pero siempre reaparecen al final de cada problema, al poner unidades al resultado.

La desaparición de las magnitudes en ciertos momentos de un proceso de resolución de un problema con herramientas matemáticas, no es en sí cuestionable, puede decirse que es incluso necesaria. La cuestión que puede ponderarse es el momento y la forma de dicha desaparición. Un indicador de que ambos aspectos ocurren de manera adecuada, puede ser el hecho de que los mismos alumnos sean quienes, en aras de economizar, y/o porque ya han logrado cierto nivel de generalización, dejan de lado las referencias a magnitudes concretas para trabajar con solamente los números, o bien, son capaces, en un momento dado, de traer nuevamente el contexto para interpretar en él los datos y las relaciones que se están manejando en el modelo.

En el caso que nos ocupa, lo anterior no pudo ocurrir, debido a que las relaciones del modelo enseñado no guardan ningún vínculo (desde la perspectiva de los alumnos) con los referentes concretos: la desaparición de las magnitudes es por lo tanto abrupta, y está controlada únicamente por el maestro.

¿Qué es la proporcionalidad?

A lo largo de estas clases destinadas a montar una técnica, no se cuestiona qué es la proporcionalidad. Puede considerarse, efectivamente, que el desarrollo de la técnica requiere de concentración exclusiva en ello, durante un tiempo; por lo tanto, las situaciones con las que se trabaja se asumen implícitamente, como situaciones de proporcionalidad.

En algún momento, sin embargo, las mismas propiedades o regularidades que se van identificando, podrían servir como criterios para saber cuándo hay proporcionalidad y cuándo no la hay: por ejemplo, si los productos cruzados salen iguales, podríamos decir que la hay, si no, que no la hay. Sin embargo, la asunción de la existencia de la proporcionalidad es tal que, cuando aparece un resultado que no verifica alguna de las propiedades, la interpretación nunca es la de una posible situación de no proporcionalidad, siempre es la de un error. Esta reducción puede afectar el sentido mismo de la noción de proporcionalidad.

Acuerdos implícitos

Para terminar este apartado queremos destacar un hecho que está presente a lo largo de toda la secuencia, los acuerdos implícitos entre el maestro y sus alumnos: los alumnos siguen a su maestro, el maestro muestra gran interés por el aprendizaje de sus alumnos y logra mantener cierto nivel de motivación, pese a la aridez de muchos de los tramos del camino. A continuación un ejemplo:

R-11

210. Mo. La incógnita, la pregunta, la equis, como se lo quieran aprender, puede estar aquí, aquí o aquí /señala los cuatro distintos lugares/. (…) ahorita veo que están sufriendo algunos, espérate que lleguen a la secundaria. A lo mejor un niño me dice oiga, ¿y puede haber dos equis?... Sí
211. Aos. * (algunos) ¿¡dos equis! ?
212. Mo. Hasta secundaria…
323. Mo. (…) ponemos una equis, en secundaria les van a poner una ye, una zeta, una equis…
324. Ao. Una ye…

Una cuestión que nos planteamos es ¿cómo lograr que análisis como el que aquí hemos realizado, inevitablemente críticos, no se usen para invalidar estos comprometidos procesos de enseñanza, sino, únicamente, para contribuir a la toma de decisiones didácticas que optimicen los resultados de estos esfuerzos titánicos que libran los maestros....?

2.5 Las tablas de variación proporcional: un espacio aislado de convergencia entre lo que espera el maestro y lo que hacen los alumnos

El maestro aborda el tema de "las tablas de variación" en un momento específico de la secuencia, cercano del final, después de la comparación, la razón, la escala y el porcentaje y antes de la regla de tres. En las dos clases dedicadas al estudio de las tablas de variación, se privilegia el uso de las razones internas[1], es decir, la relación que guardan dos elementos del conjunto inicial y que debe conservarse entre los elementos que les corresponden en el conjunto final, por ejemplo:

R-8

> 419. Mo. (…) Para hacer una sopa para 16 personas se usan 4 litros de agua, ¿cuántos litros se necesitarán para hacer una sopa para 8 personas? ¿Para 4 personas? ¿Para 32 personas? ¿Para 2 personas? Y si la sopa nada más fuera para una persona, ¿cuánta agua se llevaría?

	Personas	litros	
	16	4	
mitad ↓			↓ mitad
	8	2	

Este recurso difiere del que se propició antes en donde el maestro tendió a privilegiar lo que él llamó explícitamente **la razón**: la relación entre cada elemento del primer conjunto con cada elemento del segundo, es decir, la razón externa, por ejemplo: altura del árbol 6cm, amplificación, 30cm; la razón es 6 a 30.

Como ya hicimos notar, la conservación de las razones internas es el recurso que con más frecuencia utilizan los alumnos de manera espontánea. Es de hecho un procedimiento más simple conceptualmente que el de la razón externa[2]. Por ello, la ubicación de este tema hasta este punto de la secuencia no corresponde al nivel de complejidad que representa para los niños. Falta saber cuál pudo ser el criterio del maestro para esta ubicación.

En la primera sesión el maestro hace una presentación formal de las tablas de variación en contextos de comparación aditiva y multiplicativa. En la siguiente clase pone énfasis en el uso de las razones internas. Los contenidos son los siguientes:

[1] El maestro no las nombra de esta manera. Más adelante se analiza este punto.
[2] Ver por ejemplo, Block, D. (2001: 257-349)

Clase No. 8	Clase No. 9
a) El maestro anota como título "Tablas de variación" b) Elaboración de tablas con cantidades y precios de algunos productos c) Identificación de propiedades de las relaciones de proporcionalidad d) Resolución de problemas - De comparación por diferencia (edades) - De cuarta proporcional (costo de naranjas) - De comparación por diferencia (pago de una cuenta) - De cuarta proporcional (receta)	Sin título a) Uso de distintas monedas y su relación con el dólar b) Resolución de problemas de cuarta proporcional: - Conversión de dólares a pesos y viceversa - Desperdicio de agua en x tiempo - Relación entre pasos de un adulto y un niño

Destacaremos los siguientes puntos:

- Los problemas elegidos: condiciones favorables para la técnica
- La convergencia entre lo que el maestro enseña y los procedimientos espontáneos de los alumnos
- Algunas dificultades en la utilización de la técnica
- Dificultades en la explicitación de dos propiedades de la proporcionalidad
- La falta de un nombre para las relaciones utilizadas

2.5.1. Los problemas elegidos: condiciones favorables para la técnica

El maestro planteó ocho problemas (algunos con variantes) a lo largo de las dos clases. Varias características de los problemas facilitaron el recurso a la conservación de las razones internas:

- La razones internas que era necesario considerar para resolver, fueron enteras[3] y fáciles de identificar (doble, triple, mitad, tercera parte) , salvo un par de excepciones que se analizan más adelante. Por ejemplo:

[3] Mitad, tercera parte, etc. son fracciones unitarias pero pueden considerarse "enteras" en la medida en que equivalen a "dividir entre dos, entre tres..."

R-9

425, 431. Mo. Un papá y su hijo caminan. Dan estos pasos:

Papá	Hijo
12	32
6	
3	
9	

Las razones externas frecuentemente fueron no enteras, como en el ejemplo anterior. Sin embargo, esta característica no afecta el grado de dificultad, pues los problemas favorecen el recurso a las razones internas. Hubo una excepción que se comenta más adelante.

- Los datos se presentaron siempre en tablas, aun cuando las primeras preguntas de cada uno se plantearan en un texto, por ejemplo:

R-8

251. Mo. La docena de naranjas cuesta $ 4. ¿cuánto cuestan 24,36, 6 y 60?. ¿Y cuántas compro con $20?.

Naranjas	Precio
12	4.00
24	
36	
6	
	20

El maestro sólo escribe el primer enunciado: *La docena de naranjas cuesta $4*; las demás preguntas las formula a partir de la tabla que hace en el pizarrón.

- El orden en que se presentan las incógnitas facilita la identificación de una razón cómoda para resolver: excepto en un caso, los alumnos no tenían que proponer un valor intermedio, o cambiar el orden de resolución de las incógnitas. Por ejemplo, en la tabla anterior, (R-9, 425), la razón interna que guardan 12 pasos del papá con 9 pasos del papá no es entera, pero antes de tener que calcular el valor correspondiente a 9 pasos del papá, los alumnos ya calcularon el de 3 pasos.

- Las relaciones entre las magnitudes fueron también, casi siempre, familiares para los alumnos, en el sentido de que ellos suelen saber, implícitamente, que en esos casos se conservan las razones internas, por ejemplo, entre el número de mercancías y su precio, entre número de personas para las cuales se prepara una sopa y la cantidad de litros de agua para hacer la sopa; entre dólares y pesos. Una excepción fue la relación entre número de horas en que gotea una llave y el número de litros que se desperdician. Por la frecuencia de errores de procedimiento en esa situación, es posible suponer que dicha relación resultó difícil.

Además de las características anteriores, durante las resoluciones, el maestro tendió a llamar la atención de los niños sobre ciertas relaciones, lo cual propició aún más el recurso a las razones internas.

En contraparte, se aprecia poco un proceso de complejización de los problemas que favoreciera un uso más amplio del potencial de la técnica en juego por parte de los alumnos, por ejemplo, calcular valores intermedios, o al menos, tener que escoger un orden de resolución distinto al planteado, o recurrir a sumas y restas de valores ya calculados, para encontrar nuevos valores (esto último, de hecho, fue identificado en los procedimientos de algunos alumnos, pero no fue retomado por el maestro). Esta ausencia, hay que subrayarlo, se encuentra por igual en todas las propuestas didácticas disponibles sobre el tema, incluso en las oficiales.

En los problemas planteados, se observa únicamente, muy al principio, el paso de problemas en los que se da el valor unitario (los primeros cinco) a problemas en los que no se da (todos los demás); cabe destacar también el hecho de que, en los problemas planteados, los valores buscados son a veces mayores que los valores dados, y a veces menores (lo cual implica razones del tipo “un eneavo”).

Entre los problemas, aparece uno, el contexto de equivalencias entre dólares y pesos, claramente más difícil que los demás, pues para el cálculo de uno de los valores solicitados no hay razones internas enteras disponibles, es necesario calcular un valor unitario, el cual además no es entero. Sin embargo, como se verá más adelante, la dificultad fue excesiva. Se trató, al parecer, de un caso aislado en el que posiblemente el grado de dificultad para los alumnos no fue previsto.

2.5.2. La convergencia entre lo que el maestro enseña y los procedimientos espontáneos de los alumnos

Antes de la presentación explícita de las tablas de variación por parte del maestro, este recurso fue introducido en una clase anterior, sin previo aviso, y sin que esto causara ninguna dificultad, lo que da cuenta de la familiaridad que varios alumnos tienen ya con el recurso. A lo largo de los problemas, se aprecia que una parte importante del grupo no manifiesta dificultad para incorporar las sugerencias que el maestro va haciendo para utilizar las tablas. A continuación se muestran, a título de ejemplo, algunas resoluciones correctas a uno de los problemas menos sencillos, planteados al final.

R-9

> 258. Mo. (…)Una regadera goteando desperdicia 36 litros de agua en 24 horas. /hace la siguiente tabla: /
>
> | litros | horas |
> |---|---|
> | 36 | 24 |
> | | 72 |
>
> ¿Cuánta agua se desperdicia en 720 horas, 12 horas, 8 horas y 2 horas? (…)

Antes de que los alumnos resuelvan la primera pregunta el maestro les señala que una de las características de los “problemas de hoy” es que pueden encontrar alguna relación entre los números; la referencia a esta relación remite al uso de las razones internas:

> 258. Mo. (…) *Pueden encontrar la relación entre dos números*(…) pensando un poquito (…) decir, a ver,¿ no hay ninguna relación entre éste y éste? /señala el 24 y el 72/ (…)

Para reforzar la forma en que espera que trabajen, pone un ejemplo en donde la relación no es sencilla. Los números utilizados están pensados para propiciar un procedimiento, en este caso la búsqueda de razones internas:

> 258. Mo. (…) Si yo aquí les pongo 25 (en lugar del 8) aquí hubieran tenido problemas, ***entre el 4 y el 25 no hay ninguna relación***. (se refiere a que no hay ninguna relación multiplicativa entera). ***Busquen la relación que hay entre las cantidades que se les están dando*** (…) en las últimas clases ya no va a haber relación así entre las cantidades, pero por hoy sí, así que aprovechen esas relaciones…

El maestro identifica de manera implícita dos tipos de problemas: los que propician el uso de las razones internas, a los que considera previos y quizá fáciles, y aquéllos cuyas relaciones numéricas inducen a otro tipo de acercamientos.

El procedimiento más frecuente fue, efectivamente, el recurso a la conservación razones internas: encuentran la relación al interior de las magnitudes del mismo tipo y aplican el escalar “por 3” al calcular el agua que se desperdicia en 72 horas. Cuatro equipos encuentran esta relación y están de acuerdo en que 72 es “el triple” de 24.

	36 litros	24 horas	
x 3			x 3
	108	72	

R-9

> 260. Aa. Vamos a multiplicar 24 por 3; multiplicamos 24 por 3 y nos dio 72 y ahora multiplicamos 36 por 3 y nos sale la respuesta que son 108 litros.
> 269. Mo. ¿por qué 108?

270. Aa. Multiplicamos 24 por 3 y nos salió 72 y luego multi (seguramente iba a decir que multiplicaron 36 por 3)
271. Mo. Entonces 72 ¿es el qué ?
272. Aos. (algunos) el triple
273. Mo. Hey, todos
274. Aos. (en coro) el triple (…) triple (….) de 24

El maestro escribe en el pizarrón e indica a los alumnos hacer lo mismo en su cuaderno: ***triple de 24***; "esa es la relación que ustedes debieron de haber encontrado"

Para calcular la cantidad de litros que se desperdicia en 720 horas usan el escalar " por 10":

R-9

286. Ao.Yo multipliqué 108 por 10 porque 72 por 10 salen 720
290. Ao. ≠ Punto setenta y dos por diez salen 720 y luego ciento ocho por 10 salen mil ochenta
296. Ao. Multiplicamos 72 para que saliera 720
297. Ao. ≠. Sí, por 10 multiplicamos y nos salió 720
298. Aa. Y luego los 108 por 10
299. Aos. (varios) y ya nos salió los mil ochenta

El maestro plantea otro valor: 12 horas. Para calcular los litros que se desperdician en 12 horas, en 3 equipos encontraron la relación entre 12 y 24 y la aplican para hallar un número que tenga esa misma relación con 36. Escribieron como resultado 18 litros. Al poner el resultado en el pizarrón, el maestro aprovecha para seguir explicando la técnica:

R-9

334. Mo. (…) para sacar este 12, ¿en qué se fijaron?, en éste /señala el 720/, éste /señala el 72/ o éste /señala el 24/

335. Aos. (varios) el 24, en el de arriba

337. Mo. Se usa el 24, o sea, para qué me fijo en el 720 y ¿qué relación hay entre 12 y 24?

338. Aos. (varios) el doble

342. Aa. De que es la mitad de 24

Litros	Horas
36	24
108	72
1080	720
	12
	8
	2

El maestro trata de que identifiquen las relaciones internas "sencillas": entre 720 y 12 también hay una relación entera, pero ésta no es evidente.

Para calcular cuántos litros se desperdician en 8 horas, nuevamente el maestro llama la atención hacia los números con los que la relación es entera y más evidente:

R-9

> 349. Mo. (…) ¿qué números de los de arriba puedo usar para encontrar una relación ¿el 12?, el ¿720?, ¿el 72?, ¿el 24?

Cuatro equipos encuentran la relación “por 3” entre 8 horas y 24 horas y dividen 36 entre 3 para encontrar la misma relación entre las correspondientes cantidades de litros. Veamos qué hacen en uno de ellos:

R-9

> 354. Aa. Son 8 por 3, 24 y 36, dividí este 6 entre 3 salen 2, este 3 entre 3 sale 1, salieron 12

Para calcular cuánta agua se desperdicia en 2 horas, identifican una relación multiplicativa: en 4 equipos encuentran que el 2 es la cuarta parte del 8 y aplican esta misma relación al 12 para obtener el resultado. No hacen explícita la forma en que trabajaron.

El maestro tuvo intervenciones similares a las que se pudieron ver en este ejemplo, en cada uno de los problemas que se resolvieron en las dos clases, para ayudar a instalar la técnica de la conservación de las razones internas. A grandes rasgos las intervenciones fueron las siguientes:

- Sugiere los números que se han de comparar, por ejemplo, pide que vean la relación que hay entre el 24 y el 72, o bien pregunta por el número con el que van a establecer la relación, por ejemplo, después de la consigna de hallar cuánta agua se desperdicia en 8 horas, el maestro les dice:

R-9

> 349. Mo. Qué número de los de arriba puedo usar para encontrar una relación? ¿el 12? ¿el 720?, ¿el 72? ¿el 24?

- Confirma el resultado y destaca el interés de usar relaciones sencillas:

R-9

> 278. Mo. /El maestro escribe en el pizarrón/ “triple de 24”. Esa es la relación que ustedes debieron haber encontrado”
> 305. Mo. Al darles esta cantidad /señala el 720/ ¿se fijaron en el 24? (…)
> 311. Mo. lo más rápido es decir a ver, qué relación hay entre éste y éste /señala 72 y 720/
> 334. Mo. para sacar el 12, ¿en qué se fijaron?
> 337. Mo. (para calcular los litros que corresponden a 12 horas) se usa el 24, para qué me fijo en el 720… ¿qué relación hay entre 12 y 24?
> 345. Mo. el 12 es la mitad de 24
> 418. Mo. el 2 es la cuarta parte del 8

- Asigna un nombre específico, como dobles, triples, cuádruples o tres veces más, diez veces mayor:

R-9

> 271. Mo. Entonces 72 ¿es el qué? (…) y escribe "triple de 24" esa es la relación que ustedes debieron haber encontrado
> 318. Mo. es 10 veces mayor que el 72, ó 10 veces el 72, le están poniendo esto también ahorita por favor, esto lo quiero ahorita, …720 es 10 veces el 72"

- Finalmente, en el último problema, el que se usó aquí como ejemplo, el maestro destaca por escrito las relaciones utilizadas y pide a los alumnos que lo copien en sus cuadernos:

R-9 (423)

Litros	Horas	
3	2	*cuarta parte de 8*
12	8	*tercera parte de 24*
18	12	*mitad de 24*
36	24	(relación dada de inicio)
108	72	*triple de 24*
1080	720	*10 veces el 72*

2.5.3. Dificultades en el uso de la técnica

Si bien la mayoría de los alumnos pudo resolver sin dificultad la mayoría de los problemas planteados, recurriendo a la conservación de las razones internas, otros mostraron dificultades importantes. Por otra parte, en un problema particular, todos los alumnos tuvieron dificultad.

- Dificultades de algunos alumnos

A continuación se enumeran y se ejemplifican los errores identificados. Cabe observar que en el problema de la llave de agua que gotea, parecen haberse registrado más errores que en los otros problemas. Es probable que el contexto, aunado a la cercanía de las cantidades (36 litros, 24 horas) y a cierta artificialidad de los datos (1080 litros en 720 horas) hayan contribuido a ello.

- Simplificación del problema:

R-8

> 251. Mo. La docena de naranjas cuesta $ 4. ¿cuánto cuestan 24,36, 6 y 60?. ¿Y cuántas compro con $20?.

En un equipo multiplican la cantidad de naranjas por el precio de una docena, como si cada naranja costara $4.00. Este error se identificó pocas veces.

- Confusión entre doble y mitad

Con frecuencia los alumnos leen una relación fraccionaria (por ejemplo, 2 es la mitad de cuatro) en el sentido inverso, para destacar la multiplicación (4 es lo doble de 2). Esto llega a originar errores como la del siguiente equipo:

R-9

327. Equipo 3 /escriben en el pizarrón/

Litros	Horas
36	24
72	12

332. Mo. (…) El caso más grave es el equipo 3 que sigue durmiendo, ¿por qué 72?
333. Aa. Es que duplicó el 36…

Probablemente consideran que 24 es lo doble de 12 y, en vez de buscar el número cuyo doble es 36, consideran el doble de 36.

- Dificultades con la noción misma de conservación de las razones internas

La idea de que, en ciertas relaciones, “al doble le corresponde el doble”, al “triple le corresponde el triple”, etc., constituye, para la mayoría, una idea intuitiva, obvia en ciertos contextos, pero para otros no lo es. En las soluciones de varios alumnos pueden verse indicios de dicha idea, combinados con otros criterios, arbitrarios, que llevan a un procedimiento incorrecto. Veamos algunos ejemplos.

R-9

131. Mo. (…) Vamos a suponer que llevan 34 pesos, el banco les va a dar cuatro billetes de a dólar (…)
133. Mo. Bien, 16 dólares /escribe 16 en la tabla/… por 85 pesos cuánto me dan y por 850 pesos, ¿cuántos dólares? (La tabla para ser resuelta queda así:)

Dólares	Pesos
4	34
8	----
16	----
----	85
----	850

Para calcular el equivalente a 16 dólares, un alumno propuso multiplicar 34 por 3 al parecer porque el 16 está en el tercer renglón de la tabla.

En otro equipo tratan de hacer lo mismo pero parece que se les dificulta explicarlo: Después de hallar que para 8 dólares necesitan 68 pesos, tratan de resolver cuántos pesos necesitan para 16:

R-9

167. Ao. 2. Es por 3 ¿no? (quiere multiplicar 68 x 3)
168. Ao.1. ¿Por 3?. Es lo que nos dijo Iván y el maestro dice que no…. Por 3 lo multiplicamos, pero todavía no estoy bien…(Iván quería multiplicar 34 x 3)
169. Obs. ¿Qué multiplicaste por 3?
170. Ao. 1. El número 68…
171. Obs. ¿Por qué sería por 3?
172. Ao. 1. Porque es lo triple de este número /señala el 4/
173. Obs. ¿Cuál es el triple? ¿de cuál? /solicito que señale en la tabla/
174. Ao. Porque 4 es la mitad de 8, y de ahí ya se hace por 3 porque es la mitad de 16

Un ejemplo más:

R-9

Litros	Horas
36	24
	72
	720

Para calcular el agua que se desperdicia en 720 horas, en un equipo consideran la razón "triple", probablemente porque la cantidad está en el tercer renglón:

282. Ao. Una multiplicación por 3… /señala el 720/
283. Obs. ¿Por qué por 3?
284. Ao. =. Porque es el triple ¿no?

En los ejemplos que siguen, todos relativos al problema de las horas de goteo y los litros de agua desperdiciada, varios alumnos parecen aplicar criterios o reglas arbitrarias.

Para calcular el agua que se desperdicia en 12 horas, en un equipo toman como referencia la relación interna que hay entre 12 horas y 24 horas (por 2) y aplican la misma relación, ahora como externa, a 12 horas para hallar la cantidad de litros:

Litros	Horas	
36	24	X2
24?	12	

X2

En otro equipo aplican distintos criterios.

Para calcular el agua que se desperdicia en 8 horas, restan dos cantidades ya calculadas: “1080 - 108” y como resultado 960.

Litros	Horas
¿	8
36	24
108	72
1080	720

Para calcular el agua que se desperdicia en 72 horas, igualan ambas columnas a 72:

265. Ao. Sumamos 36 más 36, da 72 y 24 más 48, entonces son también 72. (En el cuaderno tienen:

$$\begin{array}{r} 36 \\ \underline{+\ 36} \\ 72 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 24 \\ \underline{+\ 48} \\ 72 \end{array}$$

Para calcular cuántos litros se desperdician en 8 horas, buscan un número que multiplicado por 3 ó por 4 les dé 36 y 24, que son los datos iniciales.

361. Ao. Sacamos la relación de 8 por 3, 24… y 9 por 4, 36

Puede observarse que la técnica basada en la conservación de las razones internas no es, para algunos, algo intuitivo, transparente, sobre todo cuando el contexto se aleja un poco de lo más familiar, como es el caso de la relación entre horas de goteo y litros. Para algunos, los errores parecen provenir de simples distracciones, o pequeñas confusiones, mientras que las dificultades de otros parecen ser más profundas.

Cuando el maestro observó alguno de estos errores, los señaló, apelando a la lógica, al sentido común:

R-9

291. Mo. (…) ¡Cómo Iván! Con 72 horas vas a tener 108 litros, ahora con 720 horas vas a tener el triple, dónde quedó tu lógica

372. Mo. ¡El 8 lo triple del 24! Válgame (…) ¿Qué no estás diciendo algo completamente equivocado?

Probablemente en algunos de estos casos, dichos señalamientos, junto con la posibilidad de ver en seguida la resolución correcta, hayan sido suficientes para superar la dificultad, pero es probable que en otros casos no, sobre todo cuando el error no fue consecuencia de una simple distracción.

- Dificultades de todos los alumnos en un problema difícil.

Se trata de un problema que requería calcular un valor intermedio (es decir, no solicitado), el cual además era decimal. La dificultad resultó excesiva. Veamos el caso.

R-9

131. Mo.(…) vamos a suponer que llevan 34 pesos, el banco les va a dar 4 billetes de a dólar (…) La primera parte de este ejercicio es muy sencilla (…)

133. Mo. Bien, 16 dólares /escribe 16 en la tabla/ por 85 pesos cuánto me dan y por 850 pesos, ¿cuántos dólares?

Dólares	Pesos
4	34
8	
16	
	85
	850

Para calcular la cantidad de dólares que corresponde a $85 no es posible aplicar la técnica que se ha venido utilizando puesto que la razón 34 a 85 no es entera, como las otras: 4 a 8, 8 a 16. Frente a la dificultad de los alumnos, y retomando un camino que al parecer algunos habían iniciado, el maestro los lleva a determinar un valor unitario, el número de pesos por dólar:

R-9

216 Mo. (…) esta es la razón 4 dólares a 34 pesos, pues qué les hemos enseñado, pues a simplificarlo… ahora, por qué aquí algunos se atoraron y dijeron, no pues es que le saco mitad al 2, pero mitad de 17 no tiene. Es que aquí sí se puede, ¿por qué?, porque éstos son 34 pesos, éstos son 17 pesos y éstos son ocho cincuenta, aquí con pesos, pues sí se puede, éstos son ocho cincuenta… (…)

En seguida, el maestro expresa el cálculo del valor unitario en el plano de la equivalencia de razones externas, con fracciones, lo cual, por lo que como hemos visto en apartados anteriores, probablemente no resulta del todo claro para los alumnos:

216 . Mo. (…)/simplifica y queda así:

$$\frac{4}{34} = \frac{2}{17} = \frac{1}{8.50}$$

A partir de la obtención del valor en pesos de un dólar, el maestro trata de que los alumnos encuentren la cantidad de dólares que equivalen a $85. Tiene la expectativa de que los alumnos vean la relación entre 8.50 y 85, pero ésta no es obvia para ellos, como lo es para él:

R-9

> 220. Mo. (…) ¿qué observas? , o sea, en esta cantidad (85) y esta cantidad (8.50), ¿para qué te servirá
> 221. Aa. Porque un dólar vale ocho cincuenta y acá son 85; si a 85 le pongo un punto, este, entre el 8 y el 5, da ocho punto cinco…
> 222. Mo. (…) están pensando todos por favor, ¿para qué me sirve esto (8.50) teniendo esta cantidad (85)
> 224. Mo. ¿Para qué me sirvió esta simplificación de razón aquí? Un dólar, ocho cincuenta. Si a mí me dan 85 (pesos), entonces qué observo rápidamente…

Los alumnos no observan lo que el maestro espera y se ven impelidos a proponer manipulaciones sintácticas, sin sustento:

R-9

> 224. Mo. (…) Qué observo rápidamente…
> 225. Ao. ***¿que se le puede poner un cero?***
> 226. Mo. Es que no observan ninguna relación entre esto y esto?
> 227. Ao. ***Sí, ahí llevan un punto***
> 228. Mo. NO, NO, esa no es la relación, por favor (impaciente)(…) ¿cómo que llevan un punto? Esa no es la relación…
> 231. Aa. ***Le quitamos el cero a ocho cincuenta y se lo agregamos arriba***
> 221. Aa. (…)***si a 85 le pongo un punto… entre el 8 y el 5 , da ocho punto cinco***
> 232. Mo. NO ES CUESTIÓN DE PUNTOS NI DE CEROS NI DE NADA ¿QUÉ HAY ENTRE 85 Y OCHO CINCUENTA DE RELACIÓN? ¿QUÉ PUEDO HACER CON ESAS DOS CANTIDADES?…ay, ay, ay, ven como se atoran en lo más sencillito (…) ¿qué no puedo hacer con esta cantidad (8.50) y veintinueve, treinta? /anota en el pizarrón 8.50 y 29. 30/ (…) entre ésta y ésta pues está muy difícil que encuentre una relación RÁ PI DA (truena los dedos)
> 233. Ao. ¿lo puedo multiplicar?

Después de una larga interacción en la que el maestro insiste en que detecten “algo” que pasa con el 85 y 8.50 y los alumnos no logran expresar lo que el maestro quiere, finalmente un alumno pregunta “¿lo puedo multiplicar?”. El maestro está de acuerdo en principio que es una multiplicación pero espera una respuesta más precisa que los alumnos no pudieron proporcionar. Trata entonces de hacer evidente la relación entre 85 y 8.50 a través de un contraejemplo: les pide observar los números 4 y 29.30:

R-9

> 243. Mo. (…) mira cómo estas dos cantidades /señala 4 y 29.30/ pues para nada, nada, o sea, pues esto está bien difícil, pero ve esta y ve ésta /señala 8.50 y 85/ ¿sí?, híjole, de veras…

En el contra ejemplo no hay una relación “ x 10”, pero dado que los alumnos no ven esa relación en la situación que tratan de resolver, el contra ejemplo no les sirve; para ellos ambos son, a final de cuentas, ejemplos de algo que no logran descifrar. Es probable, que exista alguna debilidad en el manejo del algoritmo para multiplicar un decimal por 10.

El maestro se impacienta porque los alumnos no contestan lo que él espera: "¡¡YA TIENEN LA RESPUESTA!!, ya hicieron el problema ¡y no saben qué relación hay entre ocho cincuenta y 85 pesos!".

Los alumnos continúan tratando de adivinar lo que el maestro quiere: un alumno pregunta: "¿se puede multiplicar ocho cincuenta por 10?" y una alumna"¿se multiplica por 10 o algo parecido"?.

Cuando la alumna dice que se hace una multiplicación o "algo parecido", el maestro usa este momento para decirles lo que se tiene que hacer: "Nada que algo parecido, QUE SE MULTIPLICA POR 10…" . De esta forma los alumnos aceptan que se multiplica por 10. En seguida el maestro coloca en la tabla los valores 1 dólar y 8.50 pesos y hace notar las variaciones en ambas columnas. El escalar "por 10", se maneja como "diez veces más":

R-9

> 256. Mo. (…) el uno, 10 veces más pues es 10; ocho cincuenta, 10 veces más, pues es 85 pesos.

La siguiente pregunta es "¿qué relación hay entre ocho cincuenta y ochocientos cincuenta?". Los alumnos en coro contestan: "se multiplica por cien".

El propósito de que los alumnos aplicaran la conservación de las razones internas a partir de la relación 8.50 → 85 no se logró debido a que esta relación numérica es para los niños tan compleja como lo son para el maestro aquéllas que él usó de contraejemplo (4→29.30). El procedimiento de conservación de razones internas - sin pasar por el valor unitario - parece funcionar bien cuando el cociente en juego puede ser obtenido muy fácilmente, mediante un cálculo mental.

Cabe observar que el camino elegido por el maestro, calcular los pesos por dólar en lugar de los dólares por peso, se sostiene en el hecho de que él conoce el resultado que se obtendrá ($8.50 por dólar) y considera que la razón interna con 85 es evidente.

Para los niños este camino no se justifica puesto que ellos no saben de antemano que el número de pesos por dólar que saldrá es 8.50, y, además, tampoco pueden desprender la razón interna entre 85 y 8.50. El camino más lógico, probablemente, desde su punto de vista hubiera sido el cálculo del número de dólares por peso. Esta divergencia entre los puntos de vista de los alumnos y del maestro dio pie a otra de estas largas interacciones en las que ellos no logran descifrar lo que para él es evidente.

2.5.4. La explicitación de dos propiedades de la proporcionalidad

Desde la primera clase con las tablas de variación (clase 8), el maestro intenta aprovechar este recurso para hacer explícitas dos propiedades de una relación de proporcionalidad: la conservación del orden y de las razones internas (el maestro no las nombra de esta manera). Este propósito, sin embargo, se enfrenta con dificultades, por una parte, debido a que las preguntas que el maestro formula resultan muy vagas para los alumnos, y por otro lado, debido a que, en cierto momento, ocurre una confusión con la conservación de las diferencias, en las relaciones aditivas. Veamos brevemente estas dos dificultades.

Al principio de la primera clase sobre el tema, bajo el título "Tablas de variación proporcional", los alumnos completan cinco tablas en las que se da el valor unitario y se pregunta por otros valores, por ejemplo:

R-8 (43)

Boing	Precio
1	1.80
2	3.60
3	5.40
4	7.20
5	9.40

Quesadillas	Precio
1	3.50
2	7.00
3	10.50
4	14.00
5	17.50

Tacos	Precio
1	1.25
2	2.50
3	3.75
4	5.00
5	6.25

Después, el maestro atrae la atención de los alumnos hacia algunas relaciones que se establecen entre las cantidades.

R-8

64. Mo.(…) *qué van observando en las cantidades de este lado y de éste* (…) qué va pasando?(…) sin que yo se los explique
66. Mo. A veces ponemos un título y después ya ustedes lo entienden, yo no les expliqué qué es eso, qué querrá decir esa palabra /les señala el título *tablas de variación/*cámbienle, muévanle, *¿qué se observa en las cantidades de un lado y de otro?*
68. Mo. ¿Podrían hacer ahorita 17? (se refiere a 17 boings)
70. Mo. ¿Qué va pasando en las cantidades *de un lado y qué pasa en las del otro?*
77. Mo. (…) ¿será más dinero que 9 pesos o menos dinero que 9 pesos? Piénsenle..

Las intervenciones del maestro parecen tener el propósito de que los alumnos observen que al aumentar los valores de un conjunto, aumentan los del otro. Veamos qué identifican los alumnos:

- regularidades numéricas “unos de allá son pares y otros de acá son nones” , o alguna regularidad numérica aditiva “en este lado se le van sumando 2, 2, y en el otro lado se le quita de uno en uno”
- la presencia de un cambio pero no se explica “va cambiando”
- la operación que se usó para obtener el resultado “se va multiplicando “
- una relación con el título de la clase “varían, van variando…”
- Un incremento en una de las cantidades, no necesariamente en las dos
- un posible incremento en las cantidades de ambas columnas “se va aumentando la cantidad” (no especifican cuál)
- un incremento en las dos columnas, la de los productos y la de los precios

La identificación de que “va cambiando” o “van variando”, no es suficiente para lo que el maestro espera y plantea otra pregunta:

R-8

> 94. Mo. Va cambiando, pero *¿cómo va cambiando?* , o sea, ya sé que TODAS van cambiando (…) en qué van cambiando
> 97. Ao. Se va multiplicando
> 102. Mo. Multiplicando, y ustedes ¿qué opinan? ¿qué va pasando con las cantidades?
> 103. Aos. (algunos) varían, van variando
> 104. Mo. (…) pero ¿cómo van variando? ¿qué les va pasando?
> 105. Aos. ** (comentan)
> 107. Ao. aumenta
> 108. Mo. ***¿Cuál cantidad aumenta?*** ¿ésta? /señala la de los boings/
> 109. Ao, La de los precios
> 110. Mo. ***Ah!, ésta no aumenta*** (…) ésta queda uno, uno, uno… /señala la columna de los productos/
> 111. Aos. (algunos) ***las dos, la de los productos y la de los precios…***

Pocos alumnos identifican lo que el maestro espera que observen, a saber, que al incremento en la cantidad del producto le corresponde un incremento en la cantidad que se paga. Como los alumnos no logran hacer explícitos estos cambios, el maestro decide llamar la atención hacia el orden creciente de las cantidades de ambos conjuntos:

R-8

> 112. Mo. (…) estoy diciendo que las cantidades van aumentando y estos también van aumentando /señala los precios/, eso es lo único que quiero ahorita que me digan (…) vamos observando que estas van aumentando: 2, 4, 5,1 7, 20, 30 (…) y aquí obviamente que el precio va a ir aumente y aumente (…)

En otra intervención, el maestro establecerá que el hecho de que ambas cantidades varíen no es suficiente, los cambios deben ser *proporcionales* aunque no hace explícita la definición de “proporcional”:

R-8

> 120. Mo. (…) sí, van variando, van variando, obviamente que van variando pero de la misma forma que yo venda (…) ¿qué es 3.60 de 1.80?
> 121. Aos. (varios) lo doble, lo doble..
> 122. Mo. Lo doble, y ¿qué es 2 de 1?
> 123. Aos. (varios) lo doble…
> 124. Mo. Lo doble, o sea, ***va a ir aumentando igual, igual, en la misma proporción***…

El hecho de que las razones internas se conserven de un conjunto al otro resulta difícil de expresar. La formulación “ir aumentando igual” no resuelve esta dificultad, pues puede interpretarse como “se suma lo mismo” en vez de “se multiplica por lo mismo”, con lo cual se estaría introduciendo una definición incorrecta de “en la misma proporción”.

De hecho, esta ambigüedad refleja una duda que le maestro realmente tiene y que manifiesta con más claridad en otro momento de la clase, cuando introduce dos problemas en los que la constante es aditiva. Los problemas son los siguientes:

R-8

> 124. Mo. Paty tiene 15 años, su mamá tiene 40. ¿Cuántos tendrá cuando su mamá tenga 60?”
> 351Mo. Jorge y Omar pagan la cuenta en un restaurante de $30. ¿Cuánto paga Jorge si Omar sólo tiene $5; ¿cuánto paga Jorge si Omar paga 10? (continúa con otras cantidades)”

La resolución de estos problemas no presenta ninguna dificultad para los alumnos, pero se suscita una confusión, ya comentada en un apartado anterior, cuando el maestro sugiere que, en el problema de Omar, se trata de una “variación proporcional”. Después de dar lugar a que los alumnos expresen lo que piensan, él concluye:

R-8

> 413 Mo. Esto es ya un poquito más difícil (…) pero para el equipo uno le vamos a decir ***que sí van variando proporcionalmente*** (…) lo primero que ellos dijeron ahora sí lo quisiera usar, me dijeron, es que aquí van restando, pero de cuánto en cuánto van restando
> 414. Aos. (varios) de 5 en 5
> 415. Mo. De 5 en 5 /escribe

	Jorge	Omar
	25	5
	20	10
(El maestro aumenta esta parte)	15	15
	10	20
	5	25
	0	30

417. Mo. (…) (…) aquí va variando 5,5,5 y acá 5,5,5(…). Entonces le comunicamos al equipo uno que ***sí hay una variación proporcional, de OTRO TIPO***, aquí en las otras todas van aumentando o todas van disminuyendo de acuerdo a como la vayas haciendo, pero ésta como que va así /señala la columna de la izquierda hacia abajo y la de la derecha hacia arriba/, pero éstas serán de las últimas clases. Les comunicamos que los equipos que dijeron pues sí, sí va variando proporcionalmente, pues sí, ***sí hay una variación proporcional, pero con una diferencia que verán en la última clase.***

Los alumnos expresaron no estar seguros de que la variación fuera proporcional pero probablemente esto se haya debido a que mientras que en una columna aumenta en la otra disminuye y no a que percibieran una relación de tipo aditivo.

Con la conclusión que el maestro formula, se desdibuja aquello que caracteriza a una relación de proporcionalidad, a saber, las razones internas son iguales, al introducir la idea errónea de la conservación de las diferencias[4]. No obstante, al final de la segunda y última clase sobre este tema, el maestro retoma el punto para hacer algunas precisiones.

R-9

482. Mo. Si a esta cantidad le saco mitad, /señala del 12 al 6/ ¿qué le hago a ésta ? /señala el 32/
483. Aos. (en coro) También le saco la mitad
484. Mo. Esa es la regla, no podemos sacar mitad y acá le saco la tercera parte, o de otra forma, observen esta cantidad y ésta /señala 3 y 9/o si esta cantidad la que…
485. Aos. …
486. Mo. De aquí para acá /señala del 3 al 9/
487. Aos. (algunos) le sacamos el triple
488. Mo. La… no abusados, ¿la qué?
489. Aos. (varios) triplico
490. Mo. Si esta cantidad /señala el 3/ la multiplico o la triplico, en este caso es triplicarla, si esta cantidad la triplico, a ésta /señala el 8/ ¿qué le hago?
491. Aos. (algunos) la triplico también
492. Mo. (…) si esta cantidad la divido, ésta la tengo que dividir, si esta cantidad la multiplico, también ésta la tengo que multiplicar /escribe en el pizarrón/ En variaciones proporcionales si se multiplica una de las cantidades por un número, la otra cantidad también se debe multiplicar por el mismo número. En caso de dividir se hace lo mismo.

Así el maestro cierra con la formulación de una regla que tiene buenas posibilidades de tener sentido para los alumnos, pues finalmente hace explícito algo que ellos han venido haciendo desde el principio para resolver los problemas.

2.5.5. Una relación sin nombre propio

Ya se vio en otros apartados[5] que el maestro utiliza el término “razón” exclusivamente para referirse a las relaciones externas fraccionarias, posiblemente porque no considera que las relaciones internas (frecuentemente enteras) sean razones. Se refiere a estas últimas

[4] Esta confusión por parte del maestro tal vez procede de la interpretación que él hizo de la guía que utilizó como referencia para sus clases, interpretación en la que consideró los contra ejemplos de una relación de proporcionalidad como ejemplos de este tipo de relaciones.
[5] Ver apartados 2.1 y 2.2

mediante términos genéricos tales como “relaciones”, “multiplicaciones” o bien por sus nombres particulares: “dobles”, “triples”, “mitades”, etc.

La falta de un término específico dificultó, en ciertos momentos, la comunicación con los alumnos, como en el siguiente ejemplo. El maestro les pregunta “esto es qué…” , /señala el 72 y el 720/, los alumnos contestan:

R-9

312. Ao. Una tabla
313. Aos. (algunos) un décimo
314. Mo. Esto es qué…
315. Ao. ¿10 veces mayor?
316. Mo. No se puede decir el doble, el triple, el cuádruple (…) entonces se dice...
317. Aos, (en coro) diez veces mayor

En otra ocasión, para invitarlos a usar las razones internas, el maestro les dice :

R-9

258. Mo. Usen la multiplicación por favor, lo más que puedan multiplicar, multiplicar, multiplicar, multiplicar (…)

Para hacer referencia a la propiedad de la conservación de las razones internas, el maestro usa expresiones como “ir aumentando igual”, “ir aumentado en la misma proporción”, “no es nada más ir doblando, ¡qué padre! (...) es ir viendo qué me están pidiendo en la otra columna”; En la última clase, como vimos, logra una formulación más clara:

R-9

492. Mo. “(...) En variaciones proporcionales si se multiplica una de las cantidades por un número, la otra cantidad también se debe multiplicar por el mismo número. En caso de dividir se hace lo mismo”

2.5.6.Comentarios

Un espacio de convergencia entre lo que espera el maestro y lo que hacen los alumnos

En los apartados anteriores se destacó el hecho de que aún cuando el maestro, para resolver los problemas de proporcionalidad, puso en primer plano las razones externas y las manipuló como fracciones, los alumnos tendieron a realizar su trabajo privado en el plano de las razones internas, con números naturales. En el trabajo que se realiza en estas dos clases bajo el título de “Tablas de variación”, al favorecerse la utilización de las razones internas, ocurre una armonía que antes no se había apreciado, entre lo que el maestro intenta que los alumnos aprendan a hacer y lo que efectivamente los alumnos hacen.

Se mostró cómo la selección de problemas con características favorables para el desarrollo de la técnica, aunado a las numerosas indicaciones que el maestro dio, tendió a asegurar que la mayoría alumnos implementaran la técnica.

Cabe recordar, no obstante, que una parte del grupo no lo logró. Algunos alumnos demostraron que la propiedad de la conservación de las razones internas no constituye para ellos, como lo es para otros, un dato intuitivo. Al intentar aplicar dicha propiedad, la alteraron, integrando diversos criterios arbitrarios. Los errores que se identificaron sugieren que no es posible tomar al conocimiento de dicha propiedad como un punto de partida ya resuelto, algunos alumnos pueden requerir de situaciones ad hoc que les permitan identificar la propiedad en juego.

Un espacio aislado y acotado.

El uso de las “tablas de variación” y, más específicamente, el uso de la técnica basada en la conservación de las razones internas, permanece aislado del resto de las otras partes de la secuencia sobre proporcionalidad (razón, comparación, porcentaje, regla de tres) y, a la vez, permanece muy limitado.

Cabe preguntarse si el hecho de que el maestro propusiera este tema hacia el final de la secuencia, y no al principio como cabría esperar dada la sencillez del recurso, tiene que ver con que, en el universo de la proporcionalidad, coexisten construcciones didácticas procedentes de épocas muy distintas, sin que se haya impuesto todavía una reorganización moderna del tema, que seleccione, articule y jerarquice los distintos contenidos. Las “tablas de variación” constituyen un recurso que fue introducido en la enseñanza hace relativamente poco tiempo (procede de los años setenta), en comparación con la antigüedad de la teoría clásica de las razones y las proporciones. Puede ocurrir entonces que las “tablas de variación” sean vistas, por el maestro, como una especie de agregado que viene a *complementar* lo que antes se enseñaba, pero todavía no como algo que podría transformarlo.

Así mismo, no se observó un proceso graduado de complejización que llevara a los alumnos a enriquecer la técnica, extendiendo su alcance, por ejemplo, al utilizar la propiedad de la adición para calcular valores a partir de la suma o resta de valores ya calculados, o al considerar casos en los que hubiese que determinar valores intermedios. Ciertamente, hubo un problema que exigía calcular un valor intermedio, pero se trató de un caso aislado que resultó excesivamente difícil para los alumnos, y para el cual, además, el maestro propuso una solución poco accesible.

Este precario desarrollo de la técnica es coherente con el carácter de "agregado" que parece tener el tema de "Tablas de Variación". Dicho de otro modo, explotar dicho tema para fortalecer una técnica puede ser visto como algo innecesario, cuando, a final de cuentas, "la técnica" fuerte es la regla de tres.

Una manifestación más del estatuto un tanto indefinido de la propiedad de la conservación de las razones internas, y de la técnica basada en ésta, es la falta de un nombre propio para los objetos con los que se trabaja. A diferencia de otras situaciones, esta vez el maestro no hace explícito el conocimiento que está en juego, a saber, que en una relación proporcional entre cantidades, las razones internas se conservan.

Hay dos cosas detrás de este inusual silencio: primera, el maestro ha tendido a identificar la noción de razón con razones externas y éstas con las fracciones, y aquí no hay fracciones en juego; segunda, la conservación de las razones internas ha tendido a *no ser* nombrada en la mayor parte de materiales curriculares actuales, incluso en los oficiales. En el Plan y Programas de Estudio (SEP, 1993:67), para hacer referencia al uso de esta propiedad, se dice, por ejemplo: "Relaciones entre los datos de una tabla de proporcionalidad directa". Al parecer, el término "tabla de variación" o "tabla de proporcionalidad" tiende a asociarse a los procedimientos que se basan en la conservación de las razones internas. En el caso que nos ocupa, el objeto de enseñanza parece ser, en efecto, las tablas. Ocurre una identidad entre razones internas y "tablas".

Más allá de ciertas imprecisiones, se registra aquí una dificultad en la organización general del tema de proporcionalidad, dificultad que, una vez más, no es privativa del maestro observado, puede reconocerse en varias de las propuestas actuales disponibles sobre este tema.

CAPÍTULO 3
LA GESTIÓN DIDÁCTICA EN LA CLASE DE MATEMÁTICAS

Concurso de Aritmética. 1957.
SEP. Archivo Histórico y Reprografía.

CAPÍTULO 3
LA GESTIÓN DIDÁCTICA EN LA CLASE DE MATEMÁTICAS

En el capítulo anterior centramos la atención en las formas específicas de enseñanza de la proporcionalidad, considerando las decisiones del maestro en el nivel de la construcción de la noción, así como sus efectos en las interacciones en el aula. En el presente capítulo, comentaremos aspectos de las clases que se sitúan en un nivel un poco más general, relacionados con concepciones sobre la enseñanza de las matemáticas, y que estuvieron presentes en la mayor parte de las clases observadas. En este sentido nos referimos a la gestión didáctica como la generación de condiciones para los procesos de enseñanza y aprendizaje entre los integrantes de un grupo. Estas condiciones tienen que ver con la manera en que la clase va tomando forma al tratar de reconstruir un conocimiento específico en un grupo escolar: el lugar que ocupa la clase de matemáticas, el tiempo que se le dedica, lo que se deja en manos de los alumnos, los recursos que el profesor utiliza para la institucionalización, la regulación de las participaciones, así como la relación con el conocimiento que se propicia en la clase.

Esta revisión busca complementar el análisis que presentamos en el capítulo anterior al permitir destacar estrategias didácticas generales, algunas de las cuales pueden considerarse “saberes docentes”, en el sentido de Mercado (1994,2000), construidas por el maestro a lo largo de su experiencia y al integrar distintos tipos de propuestas. La revisión también destacará, nuevamente, dificultades o limitaciones que subyacen a determinados recursos didácticos utilizados por el maestro para la enseñanza de la proporcionalidad.

No podremos, sin embargo, dar a esta parte el tratamiento amplio y profundo que requiere. Nos limitaremos a esbozar algunos de los aspectos que nos parece que valdría la pena estudiar con profundidad.

3.1. Carácter prioritario de la clase de matemáticas

En la escuela en que situamos nuestro estudio, un día común de clases daba inicio con la formación de los alumnos en el patio antes de pasar a las aulas. Al llegar al salón, entraban las niñas, a continuación los niños. A medida que avanzaban, el maestro les daba la indicación de sentarse por equipos, éstos previamente definidos. El mobiliario individual facilitaba la pronta ubicación de los 26 alumnos que formaban el grupo[1].

[1] En el periodo de observación, en el salón había aproximadamente 35 pupitres. Era el único grupo con este tipo de mobiliario porque el aula no se ocupaba en el turno vespertino. El escritorio se

Desde el principio del ciclo escolar el maestro expresó la conveniencia de iniciar el día con la clase de matemáticas, con el argumento de que a esa hora los alumnos estaban “más frescos”. Tan pronto como los alumnos ocupaban sus lugares, la clase daba inicio, y sólo se interrumpía por algunos acontecimientos externos al aula, pero propios de la actividad escolar, como la firma de las hojas de desayunos escolares o la distribución de algún material de aseo o de la cooperativa.

3.2. El uso de los problemas en la clase y su relación con los conocimientos

En las clases observadas, los problemas ocuparon un lugar importante; se plantearon un promedio de cuatro o cinco por sesión, con diversos propósitos: introducir una noción, desarrollar una técnica, afirmarla, o utilizarlos como “modelo” en otras situaciones similares. Se observó cierta versatilidad en su uso, por ejemplo, un problema que en una sesión se utilizó para introducir o para fortalecer una noción, en otra sirvió como modelo para resolver un problema semejante.

Una constante en el trabajo con los problemas fue el intento, por parte del maestro, a veces muy marcado, de guiar la actividad de los alumnos hacia una determinada forma de resolver. Los primeros problemas que se planteaban para abordar un aspecto nuevo fueron la ocasión en la que el maestro intentó enseñar una forma de resolver, con base en sugerencias y correcciones reiteradas a los alumnos. En los problemas sucesivos, este propósito fue cediendo al de ejercitar la técnica enseñada, para dominarla. Así, la fuerte presencia de los problemas da cuenta de un intento por contextualizar las nociones que son objeto de enseñanza.

Vinculación con situaciones cotidianas

El maestro expresó el interés de que los aprendizajes escolares tuvieran un uso social, fuera de las situaciones planteadas en el aula. Efectivamente, en la mayor parte de las situaciones propuestas, el maestro retomó contextos relacionados con la vida cotidiana de sus alumnos. En algunos casos, los contextos fueron adecuados para abordar el aspecto de matemáticas de que se trataba, por ejemplo, al trabajar con tablas de variación, solicitó a los alumnos los precios de algunos productos de la cooperativa, aunque decidió cambiarlos un poco para incrementar el grado de dificultad; al trabajar con la noción de escala, orientó la reflexión de

ubicaba al frente (a un costado del pizarrón). Aunque el maestro permanecía de pie la mayor parte del tiempo, el escritorio era un espacio importante para colocar los materiales a utilizar de manera inmediata, o los cuadernos de los alumnos para revisión. También constituía un espacio de negociación en el que los alumnos de manera particular recibían alguna indicación del profesor. En el salón había además un estante, un librero, un calendario de actividades y otro pizarrón en la parte posterior para exhibir algunos trabajos realizados por los alumnos.

los alumnos hacia las características de algunos objetos, como fotografías o juguetes; al trabajar con porcentajes, les solicitó información sobre productos que tuvieran descuentos. En otros casos, el hecho de recurrir a situaciones de vida cotidiana fungió únicamente como un telón de fondo, por ejemplo, cuando, al tratar el tema de la comparación aditiva, preguntó por la diferencia entre el número de cucharadas de azúcar y de café que se ponen para preparar una taza de café (dicha diferencia no tiene un uso en el contexto). Finalmente, en varios casos más, el contexto utilizado resultó forzado, perdiendo con ello su potencial explicativo, como en el siguiente:

R- 3

> Bien, me van a contar cuántas personas traen pantalón
> 167. Ao. Somos 11 niños
> 171. Aa. /escribe en el pizarrón/ ***11 de cada 26*** ___ ***11/26*** (el maestro lee, razón 11 sobre 26)

Tratándose de un conjunto de 26 personas que no pretende ser representativo de otro conjunto mayor, tiene poco sentido decir que 11 *de cada* 26 tienen pantalón.

La utilización de situaciones de vida cotidiana puede ser, efectivamente, de gran ayuda para facilitar la comprensión de las nociones, pero requiere de una selección. Se observa en algunas propuestas didácticas una tendencia a sobrevalorar dichas situaciones y, al mismo tiempo, a dejar fuera situaciones ajenas a la vida cotidiana, por ejemplo, lúdicas o fantásticas, que sin embargo podrían proveer contextos útiles.

Hay otros aspectos de la relación con la vida cotidiana, o extraescolar, por decirlo de manera más amplia, que han despertado interés en los estudios en didáctica: se trata de la forma de relacionarse con los problemas, más autónoma y con la posibilidad de generar soluciones propias, no canónicas[2].

El papel de lo sencillo en el tejido de herramientas difíciles

En ciertos momentos del proceso de enseñanza, cuando se trató de introducir técnicas formales, el maestro optó por el siguiente camino: plantear un problema sencillo (con números y relaciones fáciles) que los alumnos pudieran resolver usando un procedimiento también sencillo, conocido por ellos. En seguida, los invitó a “observar” los datos del problema junto con el resultado obtenido, a fin de que pudieran inferir una relación aritmética nueva, aquélla que corresponde a la técnica formal que el maestro quería enseñarles.

Una vez establecida la técnica deseada, el maestro planteó problemas más difíciles (por el tamaño y tipo de números) para que los alumnos apreciaran la mayor eficiencia de la nueva

[2] Ver por ejemplo, la noción de “situación adidáctica”· en Brousseau (1998)

técnica en comparación con las que usaban anteriormente, es decir, justificó su pertinencia. Un ejemplo que ya hemos citado es el siguiente:

Esta estrategia didáctica es probablemente frecuente en la enseñanza de las matemáticas. Parte de su atractivo radica en que se toman como punto de partida los conocimientos previos de los alumnos para favorecer el descubrimiento de técnicas y fórmulas canónicas.

La estrategia, sin embargo, adolece de varios puntos débiles, uno de ellos es que la nueva técnica no se favorece directamente como respuesta a un problema difícil, se parte, justamente, del problema fácil en el que aquélla no hace falta. Otro punto débil, más conflictivo que el anterior, radica en que inferir una nueva técnica a partir de un problema resuelto con otra, muchas veces no constituye una tarea simple. En las clases que aquí analizamos, cuando esto se intentó, se presentaron dificultades didácticas importantes, como se podrá ver en el siguiente punto.

3.3. Otras características de la relación con el conocimiento que se propicia en clase

Comentaremos a continuación las características de otros momentos de la relación que se propicia con el conocimiento.

El topos[3] del alumno y la pérdida de importancia del conocimiento en juego

Como ya se dijo, el maestro tendió a utilizar la resolución de problemas para encauzar el trabajo de los alumnos hacia expresiones que permitieran destacar, en ocasiones, las definiciones, los términos, la nomenclatura, las técnicas que él deseaba transmitir.

Se identificaron además ciertos momentos en los que el maestro explícitamente mostró una convicción de que sus alumnos, además de realizar ejercicios y resolver problemas siguiendo pautas que él mismo iba proporcionando, podían, y en ocasiones debían, *descubrir por sí mismos* ciertas cosas, pero ¿cómo conciliar esta postura de construir acercamientos sucesivos a las nociones, con la necesidad de acotar el tema y trabajarlo en un tiempo determinado?. Entre los tipos de tareas que el maestro intentó dejar en manos de los alumnos en estos momentos, comentaremos aquí uno que presentó grandes dificultades: consistió en "observar" los datos y el resultado de un problema ya resuelto, para inferir una

[3] El fenómeno de la topogénesis se refiere al proceso de distribución de aspectos relativos a un conocimiento, entre el alumno y el maestro: ¿qué cae bajo la responsabilidad de cada uno ?. Chevallard (1997: 81-91;1999:108-109) identifica este fenómeno como el lugar, el ambiente , en donde el alumno tenga la sensación de desempeñar un papel apropiado. Brousseau (citado por Chevallard, 1999), identifica en este sentido dos paradojas didácticas: la primera consiste en que si el maestro dice explícitamente lo que quiere obtener, priva a los alumnos de las condiciones para aprender la noción considerada; la segunda consiste en que si el alumno acepta que el maestro le enseñe los resultados, no se apropia de las matemáticas.

manera de relacionarlos mediante operaciones, distintas a la que se usaron en la resolución, con vistas a establecer una nueva técnica. Las condiciones en que se plantearon estas tareas restaron importancia al conocimiento en juego y propiciaron una búsqueda azarosa de relaciones numéricas por parte de los alumnos, búsqueda que, en general, fue infructuosa, pese a que, para el maestro, la relación buscada era "observable" a simple vista. Revisemos un caso:

Después de que los alumnos calcularon el 50% de varias cantidades dividiéndolas entre dos, el maestro centró su atención en una de ellas (50% de \$90 = \$45) y dio la siguiente consigna:

R-6

> 85. Mo. (…) ¿cómo saco el resultado? (…) ¿con ***qué operación***?

El maestro rechazó varias veces la respuesta "dividendo entre dos". Él esperaba que los alumnos establecieran que se puede multiplicar *.50 por 90*. Debido a su convicción de que los alumnos debían encontrar la respuesta por sí mismos, se dio una muy larga interacción en la que el maestro reformuló varias veces la pregunta, sin éxito. En cierto momento, conminó a los alumnos a hacer operaciones entre los dos números (sumen, resten dividan...), evitando decir directamente la operación que quería que ellos descubrieran: multiplicar.

R- 6

> 160. Mo. Bien, última oportunidad, ¿nada?... A ver niños /suena el borrador en el pizarrón/ atentos, en especial aquel equipo... *para mí es muy fácil decirles*, muchachos, ahora van a hacer una multiplicación de 90 por punto cincuenta y sale cuarenta y cinco, está bien fácil, ya ven, ya se los dije, y ustedes lo hubieran hecho bien... (...) los cuatro equipos sacaron la respuesta sólo de descubrirlo, bueno, con ayuda, pero descubrieron que ese cincuenta lo tengo que trabajar así /anota .50/ pues lo acabábamos de hacer
> 161. Ao. Punto 50…
> 162. Aa. Nosotros lo estábamos usando…
> 163. Mo. Sí mi hijita, pero están sumando y dividiendo… por ejemplo, ahorita acabo de ir a ver y me están sumando 40 más 50, o sea, no sé qué va a salirles (…); es una multiplicación de punto 50 por los balones que tenía /anota en el pizarrón:
>
> **.50**
> **X 90**
> **--------**

El maestro considera que, para que los alumnos aprendan, deben encontrar ciertas cosas por sí mismos. Si en el ejemplo anterior los alumnos hubieran encontrado la relación deseada, para el maestro, los alumnos habrían descubierto por sí mismos una manera de calcular un porcentaje.

Pero, ¿podían los alumnos establecer por sí mismos esa relación?. Comprender que el porcentaje se puede expresar como un número decimal y sobre todo, comprender el sentido de multiplicar por un decimal no son asuntos menores, todo lo contrario. Sin embargo, al parecer ésta no era precisamente la expectativa del maestro. La insistencia en *observar* los números, en probar varias operaciones, permite suponer que se trata de algo muy distinto, posiblemente "observar" el 5 de 50%, el 9 de 90 y, al relacionarlos con el 45 del resultado, pensar en la multiplicación, o bien, sumar, restar, multiplicar 50 y 90 y escoger la operación que arroje algo parecido a 45. Es decir, el hallazgo, de haber ocurrido, habría sido producto de una búsqueda un tanto azarosa de la operación que vincula a dos números con un tercero. De esta manera, se le restó importancia al conocimiento en juego, lo que tal vez explica el hecho de que el maestro considerara que podía, y debía, quedar en manos de los alumnos.

Por otra parte, aún en esta modalidad reducida y simplificada de la tarea, los alumnos fracasaron. La dificultad radica en que el vínculo buscado (identificar la multiplicación) solamente es "observabable" para quien lo conoce de antemano.

Considerando que este tipo de interacción ocurrió varias veces[4], es posible vislumbrar dificultades más profundas relativas a la concepción misma de participación de los alumnos en la producción de conocimientos específicos, a la identificación de los aspectos del conocimiento en los que esto es posible y pertinente, así como a las condiciones que podrían propiciarlo.

---

[4] Otro ejemplo fue el siguiente. El maestro planteó el siguiente problema: (R-10)

24.Mo. /hace una tabla/	2 paletas	$6
	4 paletas	X

Los alumnos encuentran el resultado duplicando $6 pesos. Después de que los alumnos escriben el resultado, el maestro lo borra y en su lugar escribe una equis.

> *37. Mo. Ya todos tienen la respuesta, lo que yo quiero es que ustedes me observen bien estos números, obsérvenlos bien, los que sobraron (...) qué podrían hacer. Cómo los podrían usar para que les diera su respuesta correcta, ¿qué les podríamos hacer a estos números?.*

(El maestro espera que los alumnos observen que la incógnita es igual al producto 4X6 entre 2, forma de calcular el resultado que corresponde a la "regla de tres"). Algunos alumnos descubrieron que sumando (6 + 4+ 2=12) obtenían el resultado.

La observación y el uso de ostensivos y no ostensivos[5]

Un recurso frecuentemente utilizado fue la observación asociada al uso de elementos susceptibles de ser representados gráficamente y por lo tanto percibidos por la vista (ostensivos); sin embargo, también fue reiterado el hecho de que el maestro tratara de que los alumnos observaran los relaciones o conceptos que no se pueden mostrar por sí mismos (no ostensivos), como ocurrió en el ejemplo anterior del porcentaje. Revisemos otro caso:

En una clase el maestro llamó la atención hacia la expresión $\frac{2}{3}=\frac{5}{7.5}$ para que los alumnos, a partir de la observación de esta expresión establecieran que 2 x 7.5 = 3 x 5. El profesor apeló reiteradamente a la observación:

R-11

246. MO. (…) obsérvenla bien, ¿qué números se multiplican, según ustedes?
247. Ao 2 horas…
248.Mo. Hey, ¿qué números se multiplican?/truena los dedos un poco molesto/ ¿qué números se multiplican?
249.Aos. (varios) dos horas
250.Mo. Cuando tengo una incógnita, una equis, ¿qué números se multiplican?
251.Aos. (varios) los cruzados…
252.Mo. Bueno aquí ahorita en este caso está completo, ¿qué observan? ¿nada?, ¿qué encuentran?, ¿nada?…
253.Aos, …
254. Mo. Obsérvenlo, observen bien los cuatro números… obsérvenlos bien, qué se puede hacer, qué pasa, qué, qué, qué salió de chistoso, de curioso, qué sucedió…
255.Aos. …
256.Mo. Ni un niño siquiera de los veinte y tantos que diga, ah, pues pasa esto y esto… ¿nada? (…)
258.Mo.(…) ¿por qué no observan? (…)
271.Mo. No, no, ya se fueron ustedes, es algo bien sencillo que se observa ahí, ¿qué pasa entre éste y éste? /señala los números de la expresión que está en el pizarrón/ no, no…(…)
281. Mo. ¿nada? Cuando yo les digo que observen, hey, cuando yo les digo observen los números para que vean qué relaciones encuentran, tienen ustedes que sumar, restar, multiplicar, dividir, sacar mitad, cuarta y hasta ver, ¡algo debe pasar entre ellos! (…)

La acción de observar supone una intención que la orienta, portadora o tributaria de un conocimiento previo. Por ello, lo observable para unos no lo es para otros. Dificultades como la anterior sugieren la necesidad de una reflexión amplia y profunda, con los maestros, sobre las condiciones y las limitaciones de la observación en el aprendizaje de las matemáticas.

---

[5] Recordemos que Bosch y Chevallard (1999: 90-91), se refieren a los objetos ostensivos como aquéllos que tienen una naturaleza sensible, una cierta materialidad, como los sonidos, las palabras, la escritura y el lenguaje gestual. Los objetos no ostensivos son aquéllos que no pueden mostrarse por sí mismos, sino que requieren de ciertos objetos ostensivos para hacerse presentes, como los conceptos. Aclaran que la distinción entre ostensivo y no ostensivo no se refiere a una dicotomía, sino a objetos unidos por una relación dialéctica que considera a los segundos como “emergentes de la manipulación de los primeros”, y por lo tanto, difícil de abordar unos sin los otros.

La demostración

Por lo general, la solicitud de recurrir a la demostración constituyó una consigna adicional para resolver una tarea, y tenía como propósito que los alumnos argumentaran acerca de la respuesta o del procedimiento elegido; a continuación un ejemplo en donde la tarea consistía en que los alumnos expresaran una razón como “1 de cada”. A la consigna inicial de resolver el problema, el maestro agregó:

R-3

115. Mo. (…) piénsenlo, demuéstramelo… y manden a alguien con toda la seguridad y el apoyo (…
116. Aos. **
117. Mo. Lizbeth… espéreme tantito, piense cómo me lo va a demostrar; cuando les digo demuéstrenmelo se hacen, hey, tienen que hacerme un dibujo, números, etc. (…) quiero dibujitos, quiero palitos, quiero rayitas (…) quiero que lo demuestren con algo… ¿van a usar números?, bien, demostrado…
118. Aos. ** Yo voy a ir ahorita…
119. Mo. Se esperan por favor, no quiero que me pasen a hacer luego luego la fracción ya así, no, o sea, de otra manera, de otra manera. Ellos usaron rayitas hace rato, de otra manera, piénsenle…

En episodios como el anterior, *demostrar* equivale a utilizar ostensivos para expresar que se ha comprendido una noción. Así, en las clases que observamos, coexisten momentos en los que el maestro estimula una búsqueda azarosa de relaciones puramente sintácticas, como las que vimos en los ejemplos anteriores, con momentos en los que concede importancia a la acción de hacer evidente un significado mediante representaciones muy concretas. Falta hacer un análisis de la lógica que articula estos dos tipos de exigencias, a lo largo del proceso de enseñanza estudiado.

El manejo del error

En el manejo del error, al igual que en otros momentos, también se hizo presente la preocupación del profesor por no desviarse de la ruta prevista y por conducir a los alumnos al uso del elemento o del procedimiento que era motivo de estudio en la clase.

Los errores fueron, como suele ocurrir, de muchos tipos: de procedimiento, de cálculo, o simplemente, de interpretación de lo que el maestro demanda. Los sucesos desencadenados a partir de los errores también fueron diversos, desde comentarios o interpelaciones puntuales, hasta episodios relativamente largos en los que el maestro se esforzó porque los alumnos mismos identificaran y corrigieran el error.

Comentaremos aquí únicamente estos últimos, a partir de algunos ejemplos:

- Ejemplo 1:

R-7

374. Mo. (…)Un auto va a 60 Km por hora.¿Cuánto tarda en recorrer 120 Km? ¿Cuánto tarda en recorrer 30 Km?
Un equipo escribió:

$$\frac{0}{30} = \frac{1}{60} = \frac{2}{120}$$

397. Mo. ¿cero? Este equipo lo vamos a mandar a la luna, o sea, que para 30 Km. no hace nada de tiempo (...) Déjenme el cero, Valeria, déjenlo para que los demás discutan por qué…

El maestro, además de señalar la existencia de un error, intentó mostrar el carácter absurdo, o imposible del mismo en el contexto: si el tiempo fuera cero, se podría viajar tan lejos como uno quisiera, hasta la luna.

En seguida, consideró importante que los alumnos mismos descubrieran el razonamiento que lo produjo:

R-7

400. Mo. "(…)*quiero que los otros cuatro (equipos) le digan al uno, no que le digan, sino ¿por qué creen que pusieron ellos un cero?"*
401. Aos. …
402. Mo*. ¿Por qué creen que el equipo decidió poner un cero?…*resulta que para una hora 60 minutos (sic) y ellos dicen que para 30 minutos nada de tiempo, digo, para 30 Km, perdón, nada de tiempo…
403. Ao. órale…
404. Mo. Iván…
405. Ao. (Iván) *Como que quisieron hacer una tabla arriba, como la de abajo que son 30,60,120; ahí sería 0, 1…*

Para los alumnos no fue sencillo explicar el origen del error. El maestro tampoco lo explicó, pero cambió el contexto de manera que fuera más evidente:

R-7

406. Mo. Pero se dan cuenta qué mentira tan grande… en primera la mitad de uno, a ver equipo, *o sea que la mitad de un bolillo ¿cero?… ¿se desapareció el bolillo con decir quiero la mitad?* Lo que pasa es que ahí dijeron ¿y cómo le ponemos ahí? (…) hay muchas formas de poner un medio… ¿cómo pudieron haberlo puesto?
407. Ao. punto cinco
408. Ah verdad! esa es otra (…) *ahí debieron haber usado hasta lo que ya sabían también de fracciones decimales… (…) lo puedo poner así*

$$\frac{½}{30} \quad \text{ó} \quad \frac{.5}{30}$$

Así, el error se hizo patente, aunque, al no destacarse su origen, el efecto de esta última evidencia pudo ser débil: es probable que los alumnos que cometieron el error sí supieran que la mitad de un bolillo no es igual a cero bolillos, es decir, es probable que su error no haya consistido en aplicar mal la fracción “un medio de”, sino en que no la identificaron. Enfrentados a una tabla con números que van decreciendo 2→1→X, y dejando de lado el contexto, consideraron la relación aditiva “menos uno” en lugar de la relación multiplicativa “mitad”. El ejemplo del bolillo, entonces, no ataca la raíz de la dificultad, pues en éste, la fracción ½ está dada, no hay que inferirla.

- Ejemplo 2:

En el siguiente ejemplo, el maestro pretendía que los alumnos usaran las razones internas, (que como señalamos antes se usaban sin ser nombradas), e insistió en que usaran la multiplicación “lo más que puedan”. A la siguiente tabla agregó el dato de 720 horas para que calcularan la cantidad de litros de agua que se desperdicia en ese tiempo:

litros	Horas
36	24
108	72
	720

Iván calcula que en 720 horas se vierten el triple de 108 litros.

R-9

291. Mo. /a un equipo/ Ponen lo que él pone… siempre hacen lo mismo… ¡cómo, Iván!, ¡cómo, Iván!, Con 72 horas vas a tener 108 litros, ahora con 720 horas vas a tener el triple, ¡dónde quedó tu lógica!

En este caso el maestro apeló a una estimación del orden de magnitud para, además de señalar el error, evidenciarlo (720 no puede ser el triple de 72). Puede ser que los alumnos no hayan prestado atención a dicha relación, centrándose únicamente en el cálculo, lo cual es sumamente frecuente, o incluso que para ellos dicha relación no fuera evidente (también es frecuente que no sepan reconocer múltiplos de 10).

Una forma de aumentar el potencial de la estimación del orden de magnitud de un resultado, como recurso para controlar su validez, consiste en ponerlo en manos de los alumnos y en solicitarlo con regularidad, antes de empiecen a resolver con cálculos escritos.

Por otra parte, también en este caso, el origen del error quedó velado al adjudicarlo a la “falta de lógica”. Con frecuencia, al trabajar con tablas de variación, para saber por cuánto multiplicar un dato, varios alumnos crearon reglas erróneas, en un nivel puramente sintáctico. Por ejemplo, en el caso anterior, la decisión de triplicar vino de que consideraron el número de fila en que dicho dato se encontraba (tercera fila), y no su relación con la cantidad inicial. La aplicación de este tipo de reglas no fue identificada en las clases, pese a ser frecuente. Cabe agregar que, en estos casos, la identificación de las reglas erróneas, por sí misma, no es suficiente si no se acompaña de alguna forma de evidenciar que los resultados que producen son incorrectos. Una explicación del tipo “tu resultado está mal porque la regla que aplicas está mal” sería, para los alumnos de este nivel, totalmente circular y estéril.

- Ejemplo 3:

En el problema en el que se requería comparar la superficie de tres cuadrados dadas las medidas de sus lados (lado de A = 16 cm, lado de B = 8 cm y lado de C = 4 cm), el maestro previno a los alumnos sobre un posible error y trató de evitarlo: “(…) tengan mucho cuidado, que no quiero que algún equipo se deje llevar por la medida de uno de los lados (…). No previno, en cambio, otro error: en un equipo consideraron la diferencia entre las medidas de los lados A y B y dieron como resultado de la comparación de A con B, 8 cm.

En esta ocasión, la forma en que el maestro intentó hacer evidente el error fue colocando el resultado erróneo en la frase con “hueco” que los alumnos debían completar (“El cuadrado A es ____ veces mayor que el B”) para destacar la falta de concordancia:

R-1

155. Mo. ¿Qué serían? ¿centímetros? Si ustedes me están dando 8, 8cm, tú crees que yo…a ver, a ver, esto sonará lógico, a ver ahora escuchen, léanlo…
156. Ao. ¿leer?
157. Mo. /completa el enunciado que estaba en el pizarrón, y en el momento de agregar la respuesta dice/ “El cuadrado A es ***8cm veces*** mayor que el B”¿8 centímetros veces?… Yo no pregunté cuántos centímetros es mayor uno que otro de lado, nosotros preguntamos cuántas veces es más grande el A que el B…

Este tipo de recursos, frecuentes en el contexto escolar, son ciertamente útiles para descubrir que una respuesta no es la esperada, siempre y cuando, claro está, quien los use perciba la falta de concordancia. Podríamos decir que son recursos escolares, para preguntas escolares. En una situación no didáctica, difícilmente un alumno respondería como lo hicieron los alumnos del equipo interpelado. No sobra decir que dicho recurso deja fuera el origen del error: los alumnos no solamente compararon las medidas de los lados en vez de las áreas, sino que además hicieron una comparación aditiva.

Más allá de lo anterior, el ejemplo permite ver otros aspectos de la complejidad del manejo del error. Es probable que la intención del maestro por evitar un posible error dé cuenta de que no considera que el error puede ser aprovechable. Esta conclusión, posiblemente válida en general, sería injusta en este ejemplo particular pues el error que el maestro evita (comparar las longitudes en vez de las áreas) previene únicamente de una mala interpretación de la consigna. Con respecto al otro error, el error fuerte y productivo que cabría esperar en esta situación, el uso de una comparación aditiva, el maestro no dice nada.

Lo que en cambio sí escapa del espectro de recursos del maestro es la posibilidad de aprovechar elementos de la situación misma, los cuadrados recortados en papel, para invitar a los alumnos a comprobar empíricamente sus resultados.

- Ejemplo 4:

Ocurrió también que el maestro identificara el origen del error en lo que él consideraba era lo más sencillo: el uso de algunos elementos que se suponía deberían formar parte del medio matemático[6] de los alumnos, (como los algoritmos, la representación de una fracción, el uso del punto decimal, acomodar las cantidades para resolver por regla de tres). En la resolución de una tarea, los errores de este tipo eran los más visibles, aunque no siempre fuera esa la mayor dificultad.

En una clase en la que la tarea consistía hallar qué fracción es 6 de 48, los alumnos realizaron una larga y difícil búsqueda para hallar la respuesta. El maestro insistía en que se frenaban en "lo más sencillo, que es escribirlo con números", cuando la dificultad, para la mayoría, no radicaba en escribir $\frac{1}{8}$, sino en hallar esa respuesta.

R-1

> 265. Mo. La revista "Despertad" tiene 48 páginas. Jaime ha leído 6 páginas, ¿qué parte de la revista ha leído?____ ¿Qué fracción le falta por leer?______

En un equipo multiplicaron 6 x 8 = 48, por lo que dedujeron que faltaba por leer 7/8; después expresaron que 6 era la octava parte, por lo que faltaba leer "la séptima parte". En otro equipo explican que si 6 x 8 = 48 "entonces la revista está dividida en 8" y Jaime ha leído una parte (representan 1/8 como 8/8 y 8/0). En un tercer equipo restaron 48 menos 6. En otro más explicaron que "son 48 páginas, la mitad de 48 son 24, ya es una parte, la mitad de 24 son 12, ya es otra parte, luego son 6…" y discutían que, si las seis páginas leídas correspondían a la primera o la tercera parte. Este equipo incluso trató de resolverlo contando las hojas de un cuaderno.

R-1

> 325. Mo. /dirigiéndose al equipo que insistía en contar las páginas/ ¿de veras las tienen que contar, las páginas? Allá tengo un problema, acá tengo otro problema, pero, o sea, ya

[6] Usamos la expresión *medio matemático* en el sentido que la usa Chevallard (1998:193)como "el conjunto de objetos cuyas propiedades se dan más o menos por sentado y que se pueden manipular de forma bastante segura"

> razonaron todo… se quedan con lo más sencillo que es escribirlo con números, de lo más sencillo (…)
>
> 327. Mo. (…) Y eso sí me impresiona, porque están razonando bien y ya se les olvidó lo más sencillo, cómo escribirlo (…).También ustedes se atoraron ahí…aquel equipo ya desesperó porque fueron los primeros que lo sacaron, es lo más sencillo, pero si ya tienen la idea, ya tienen todo, están atorados en lo más sencillo.

Los ejemplos anteriores permiten esbozar algunos rasgos del tratamiento de algunos errores. En primer lugar, destaca el interés para mostrar evidencias de que un resultado es incorrecto, mediante recursos variados como apelar el contexto mismo, estimar un orden de magnitud, o incluso, constatar la falta de concordancia en la oración que se forma al poner el resultado, cuando la pregunta se formuló mediante una frase con hueco. Puede verse que el tipo de recurso que el maestro utiliza depende de la situación. Las situaciones propuestas por lo general no permiten una forma de verificación empírica y en el caso que se identificó en que esto era posible, el de la comparación de la superficie de varios cuadrados, el maestro mostró no estar familiarizado con este tipo de verificación.

Lo anterior está vinculado a otro hecho: el maestro no considera, en realidad, la posibilidad de que los alumnos mismos identifiquen los errores, ya sea mediante algún tipo de verificación o mediante la revisión entre ellos mismos. En general, él asume solo la tarea.

Se manifiestan, por otra parte, algunas dificultades relativas al origen de los errores. Los ejemplos anteriores presentan una constante: la tendencia de los alumnos a utilizar relaciones aditivas en lugar de relaciones multiplicativas. Tratándose de situaciones de proporcionalidad, esta tendencia constituye un error común entre los alumnos del nivel básico, de origen conceptual, muy difícil de tratar. Al no considerar este hecho[7], se vuelve más difícil para el maestro encontrar un tipo de retroalimentación adecuado para este tipo de errores.

Finalmente, en los ejemplos mostrados cabe identificar otro espacio, similar al que se mencionó en el punto sobre la demostración, en el que el maestro apela al contexto concreto y al sentido común que éste podría evocar. Son momentos que contrastan fuertemente con otros en los que se advierte una menor relación con el contexto. Puede decirse que los alumnos tendrían que ir descubriendo indicios que les permitan saber cuándo deben atender al contexto y cuándo no, indicios del contrato didáctico. No obstante, por lo que observamos en estas clases, y por lo que es ya muy sabido con respecto al comportamiento de los

[7] Recordemos que el maestro confunde ambos tipos de comparación: aditiva y multiplicativa.

alumnos en clase de matemáticas, éstos no descubren dichos indicios fácilmente y tienden muy pronto a dejar de lado el contexto. Este aspecto constituye otra posibilidad para el análisis.

Las consignas: sutilezas que dan forma

En las clases que observamos, las consignas[8] no se dieron al principio de la actividad y una sola vez. El maestro repitió las indicaciones tantas veces como consideró necesario, a todo el grupo, en cada equipo o de manera individual; la pauta de estas intervenciones estuvo dada por la revisión de cuadernos o preguntas específicas para explorar fundamentalmente qué procedimientos o nociones estaban utilizando los alumnos.

En este proceso las consignas tuvieron, en ocasiones, un efecto de *desdoblamiento* , en el sentido de que el maestro agregó peticiones, distintas o complementarias a las planteadas inicialmente, y que dieron lugar a la creación de otras situaciones. Este desdoblamiento hizo que las consignas pasaran por un proceso de explicitación orientado a que los alumnos realizaran la tarea conforme a lo que el maestro esperaba; veamos un ejemplo:

R-8

251. Mo. /Escribe en el pizarrón y lee/ *La docena de naranjas cuesta $4,00*, aunque no sea cierto así le vamos a poner; *¿cuánto cuestan 24, 36, 6 y 60?...* ¿ya?, su tabla de naranjas /escribe en el pizarrón

naranjas	precio
12	4.00
24	
36	
6	

y cuánto paga por 24 naranjas, cuánto paga por 36 naranjas, así de sencillo... cuánto paga por 6 naranjas y cuántas compro con veinte pesos
(los alumnos trabajan en equipo, en tanto el maestro revisa y trata de que se apresuren). Pasados algunos minutos interviene:

266. Mo. La pregunta que le voy a hacer a cada equipo es *¿por qué las naranjas costaron los veinte pesos?, o sea, cómo lo sacaron...*
281. Mo. (...) *¿cómo* sacar lo de seis naranjas?
285. Mo. *¿qué* usaron para sacar las seis naranjas?
295. Mo. ¿cómo me sacaron que sesenta naranjas cuestan veinte pesos?
299. Mo. (...) *¿cómo supieron o qué operación hicieron* para saber que de 20 pesos me puedo llevar 60 naranjas?
(los alumnos tienen dificultad para entender lo que el maestro espera como respuesta.El maestro muestra cierta desesperación y sube el tono de voz)
320. Mo. (...) Yo quiero que me digan QUÉ HICISTE...
(Un alumno trata de explicar que utilizó una tabla, pero no es la respuesta que el maestro espera; posteriormente una alumna explica que utilizó una multiplicación)

---

[8] Utilizaremos el término en el sentido de expresar lo que el maestro espera que los alumnos realicen para resolver una tarea específica. Por lo general la consigna se incluye en el problema o situación a resolver.

En este caso, una vez planteada la tarea, el maestro consideró necesario que los alumnos no sólo expresaran el resultado, sino que además explicaran la forma de obtenerlo. Desconocemos si el profesor tenía prevista esta tarea o las razones que tuvo para incorporarla sobre la marcha; en todo caso, en la secuencia que observamos, es constante el hecho de formular propuestas adicionales a la inicial. Este tipo de intervenciones nos permitió también ver la frecuente toma de decisiones a la que se enfrentó el maestro durante las clases.

Otras intervenciones del maestro (orales, escritas o gestuales), a la par de la consigna, estaban destinadas a dar algunas orientaciones para realizar la tarea, corregir o expresar su postura frente al error, plantear alguna expectativa, controlar el trabajo, explicar, interrogar o solicitar alguna otra intervención de los alumnos para hacer evidente lo que se esperaba de ellos[9].

La institucionalización[10], una tarea fundamental

Una de las formas en que se han contrastado los modelos de enseñanza “constructivistas” con los “tradicionales” es por el momento en que ocurre la institucionalización: punto de llegada en la primera y punto de partida en la segunda. Sin embargo, en la práctica, las situaciones no son así de extremas; en todo caso, en las clases aquí observadas, organizadas a partir de la resolución de una gran cantidad de problemas, las nociones parecían irse explicitando durante la resolución de los mismos, con la peculiaridad de que el maestro activó diversos recursos para evitar que los alumnos tomaran caminos distintos al que él tenía en mente, y para arribar, en relativamente muy poco tiempo, a los saberes que él consideraba pertinente institucionalizar[11].

---

[9] Hache, Christophe y Aline Robert (1997: 113)utilizan una categorización para describir las intervenciones orales del profesor en un contexto específico: la información (presentación de datos), la estructuración (organización de datos), la argumentación – reflexión (comentarios cobre los datos) y contextualización /descontextualización. En las clases observadas están además las intervenciones para regular el trabajo en el grupo.

[10] Para Brousseau (en Comin, 2000:316) la institucionalización consiste en asignar una posición cultural o social a las producciones de los alumnos y del maestro: actividades, lenguaje, conocimientos; es acercar las producciones locales a las producciones de los otros (culturales o del programa) y señalar que pueden usarse nuevamente.
La institucionalización no tiene un lugar definido en la clase; es el maestro quien decide en qué momento debe asumir la responsabilidad de dar un status a los conceptos que hasta el momento han intervenido y que constituyen un saber al cual cada uno podrá hacer referencia en otros momentos. Douady y Perrin (COPIRELEM, 1991: 143).

[11]Block, D. (1986: 23) destaca que además de los momentos en los que el maestro tiene el propósito explícito de propiciar la institucionalización, ésta ocurre en forma sutil en muchos otros momentos y a través de distintos recursos, así mismo señala que con frecuencia el maestro asume actitudes en las

Más allá de los momentos de resolución, se identifican algunos recursos que el profesor utilizó en el proceso de institucionalización, unos más sutiles que otros, pero que finalmente apuntaron hacia la presentación formal de convenciones en el campo de las matemáticas:

- *Uso de títulos al inicio de las sesiones*

Una forma que el maestro utilizó para hacer presente de manera explícita una noción, fue presentarla como el nombre de la sesión. En la mayor parte de las clases, en el pizarrón, y por supuesto en los cuadernos, se anunció el tema a tratar: *"Comparación", "Razón" ,"Problemas", "Dibujos a escala", "Porcentaje", "Ejercicios con Razones", "Tablas de Variación" ,"Variación Proporcional"*. Los títulos, en este caso, constituyeron, no sólo una forma indirecta de vincular las producciones de los alumnos con un saber matemático reconocido institucionalmente, sino también un referente, una especie de brújula que orientó y marcó la ruta a seguir. En ocasiones los títulos se utilizaron también como punto de partida para el estudio de una noción, o para orientar la respuesta de los alumnos, como en el siguiente ejemplo:

En una clase cuyo título era *Ejercicios con razones,* se presentó la siguiente situación al resolver un problema:

R-7

62. Mo. (…) me escriben por favor /escribe en el pizarrón *Ejercicios con razones* (…)
68. Mo. (…) ¿ya vio qué título le pusimos? (…) si ustedes no me lo demuestran con una razón, yo no entiendo nada…

En este caso, mediante el título se hizo evidente la noción que los alumnos tenían que utilizar.

En los casos en que el título sirvió como punto de partida para abordar alguna noción, no obstante que el maestro inició preguntando una definición, por ejemplo, "*¿qué entienden ustedes por escala"?*, o "*¿ qué entienden por comparar?"*, durante el desarrollo de las clases se hizo evidente que estas preguntas constituían la puerta de entrada al tema, y que el principal propósito no era aprender las definiciones, aunque se haya iniciado por éstas, pues en el primer caso se resolvieron tareas que implicaban la comparación aditiva y la multiplicativa, y en el segundo, tareas de proporcionalidad.

---

que expresa su predilección por las propuestas más cercanas a las socialmente reconocidas, o emplea un lenguaje específico para identificar, en los trabajos de los niños, la presencia de un saber.

- *El pizarrón, espacio privilegiado para la puesta en común[12] la validación[13], y la institucionalización*

Resulta difícil, y tratándose de matemáticas casi imposible, imaginar un aula sin gis y sin pizarrón. Puede parecer obvio preguntar a qué se atribuye la importancia de estos recursos, pero detrás de esa supuesta obviedad, es probable hallar múltiples argumentos que justifiquen su carácter de imprescindibles.

En las clases observadas, el pizarrón, desde el punto de vista de la gestión de la clase, tuvo una carga fuerte. Para los alumnos, constituyó un espacio para hacer público lo que antes se elaboró de manera personal o en pequeños grupos; así mismo representó un reto que requería de algunas habilidades para comunicar un resultado o un procedimiento. El maestro no sólo usó el pizarrón como un recurso privilegiado para anunciar el tema del día y para centrar la atención en algunos momentos de la clase, sino también como un espacio de negociación en el que los alumnos presentaban los resultados, explicaban los procedimientos, comparaban sus respuestas y argumentaban acerca de la validez de sus propias decisiones y de las de los demás.

El hecho de "pasar al pizarrón" representaba para los alumnos un momento especial, ya sea de distinción o de presión, pues se trataba de poner en juego algunos recursos para comunicar y argumentar.

Por decisión de los equipos, pasaba al pizarrón el alumno que consideraban era el más hábil para expresar el mensaje, (se establecía implícitamente una especie de competencia entre los equipos), pero las intervenciones del maestro en el sentido de evitar que fueran siempre los mismos, e incluso la sugerencia de que pasara el alumno que él identificó con mayores dificultades, regularon este tipo de participaciones.

El trabajo en el pizarrón, además de propiciar la participación, tenía el propósito de reconocer la importancia de la tarea realizada por los alumnos, (al grado de que merecía ser compartida), y de orientar la atención hacia los procedimientos que el maestro consideraba necesario institucionalizar, mismos que al ser copiados en los cuadernos, pasaban a formar

---

[12] La puesta en común consiste en comunicar al equipo o al grupo los procedimientos y resultados de una determinada tarea y en analizar la viabilidad de los recursos y estrategias utilizadas. Constituye un espacio privilegiado para la institucionalización.

[13] Para Chevallard, Bosch y Gascón (1998: 223), en la dialéctica de la validación, el alumno debe demostrar la validez del modelo que ha creado y tratar de convencer así a alguna otra persona. " Una situación adidáctica de validación es la ocasión para un alumno (proponente) de someter el mensaje matemático (modelo explícito de una situación) como una aseveración a un interlocutor (oponente)" Para los alumnos a los que hacemos referencia, los oponentes son tanto el maestro como los mismos compañeros.

parte del conocimiento compartido por el grupo, aunque no necesariamente dominado por todos.

El siguiente es un ejemplo de puesta en común en el pizarrón:

R-7

Los alumnos pasan al pizarrón después de resolver por equipos la siguiente situación: *Enrique mezcla 4 botes de pintura blanca con un bote de roja. Roberto mezcla 8 botes de pintura blanca con tres botes de roja. ¿A quién le sale la pintura más rosa?*

109. Equipo 3 /escribe en el pizarrón/
blanca roja
4 a 1 ¼
110.Mo.(…) ¿Ya? ¿Seguros? Francisco, ¿están seguros que así les dijeron, que así está? ¿4 a un cuarto? ¿estás seguro? o Janeth es la que va a copiar… o a lo mejor lo estamos tomando todo porque ahí ya no se divide… Ahí dice 4 a 1, un cuarto, ahí ya no se entendió nada*…*
111.Aos. **
112.Mo. Pues ayúdale Roberto, ayúdale Jaime… es que está amontonado, Roberto, nada más que lo separes bien… otro ejemplo…
113.Aos. No, (le dicen a su compañero de equipo)
114.Mo. ¿por qué no?; junto no se entiende nada, tienes que separarlo…bueno… nada más que hay un problemita ahí con el equipo 3…,o no, no, sí hay un problema… no importa que la tomen de la blanca o la roja primero, eso no importa, pero por ejemplo ahí que me dicen que hay 4 de blanca a una de roja y luego me ponen uno a 4, como que el equipo se va a confundir a los demás, o sea, ahí hay un error…
115.Aos. (del equipo 3) /pasan al pizarrón/
116.Mo. no me vayan a cambiar nada, lo demás está bien…todavía no lo descubre el equipo
117.Ao. (de otro equipo) 4 a 1!
118..Mo. Déjelo, déjelo…No, no, no… no lo ha descubierto Roberto, váyase, órale, no…
119.Aos. **
120.Aos. /terminan de escribir/ Equipo 3
1 a 4 ¼
3 a 8 3/8

121.Mo. Sí, es el único equipo que lo hizo al contrario, pero no importa que esté al contrario, es igual, lo que pasa que ahí estaba ya mal, así ya está bien, bueno, me da lo mismo…
122.Aa. (de otro equipo) /escribe/
blanca roja
Enrique 4 con 1
Roberto 8 con 3
123.Aa. .Enrique por 4 botes de pintura blanca le echó uno de roja
124.Mo. ¿y?
125.Ao. y Roberto de 4 le echó 1 y de 8 le echó 2… son 3
126.Mo. … *pero por ahí va, por ahí va lo que deben de hacer, por ahí va, está muy lejos todavía pero por ahí va;* usted me dice que Enrique mezcló 1 con 4 y aquí… ¿4 con 1?,
127.Ao. O sea
128.Mo. pues no porque la suma es 3 más 1(no sé si se refiere a los botes de pintura roja, 1 de Enrique y 3 de Roberto) … por ahí va la idea, pero no es así, los demás, o sea ya tienen sus razones pero ninguno, ninguno me pasa a demostrar, así mire maestro, por esto, aquí se lo demuestro…
129.Aos. * (comentan)
130.Mo. Bueno, más o menos está por ahí… /en otro equipo/, esta no está por ningún lado…

Las actividades de puesta en común se realizaron en toda la secuencia diseñada por el maestro; constituyen una tarea ardua que ocupó un espacio importante en la clase y en cuya gestión se invirtió un tiempo considerable, aun cuando, a criterio del maestro, sólo se analizaran los procedimientos qué él considera que podían aportar para el desarrollo de la sesión, ya fueran correctos o incorrectos. En el Anexo III incluimos otro ejemplo de esta negociación.

- *Elaboración de conclusiones*

Las clases que observamos se caracterizaron por tener una parte final de cierre que por lo general consistía en elaborar conclusiones o en destacar algunos elementos que el maestro consideró representativos de la sesión; ésta fue una forma de rescatar lo más importante del trabajo del día y de dejar, en el cuaderno, la evidencia de la actividad en el aula. Estas anotaciones de los alumnos se utilizaron, en otro momento, para consulta, por lo que constituyeron un elemento importante tanto para la institucionalización como para la memoria didáctica[14] del grupo.

La elaboración de estas conclusiones se realizó por equipo, de manera grupal, o por el propio maestro. Un ejemplo de trabajo conjunto es el siguiente:

R-9

En esta clase se trabajaron tablas de variación proporcional. La conclusión se formuló a partir del último problema resuelto en esta sesión:

Un papá y su hijo caminan: dan estos pasos:

	papá	hijo
	12	32
mitad de 12 →	6	16
mitad de 6 →	3	8
triple de 3 →	9	24

474. Mo. Bien, para terminar me atienden acá todos… la conclusión de hoy debe ser muy sencilla pero la van a sacar ustedes… por ejemplo si esta cantidad, /señala el 12/ ¿qué le hago?, la que…
475. Aos. …
476. Mo. De aquí para acá/señala del 12 al 6/… niños, rápido
477. Aos.(algunos) (en voz baja) Le saco la mitad…
478. Mo. Si a esta cantidad…
479. Aos. (varios, en coro) le saco mitad

[14] Como parte de la propia dinámica de los grupos escolares, en los procesos de enseñar y aprender, existen referencias a un saber que forma parte de la historia del grupo; este pasado común incide en la selección de lo que es necesario conservar, recordar, e incluso olvidar para llegar al uso de saberes reconocidos. Esta selección de actividades o nociones, por lo general institucionalizadas, forma parte de la *memoria didáctica* del grupo y tanto alumnos como maestro hacen distintos usos de ella. La memoria didáctica, además de ser una herramienta para la ingeniería y el análisis didáctico, constituye una posibilidad de ampliar las relaciones del alumno con el saber. (Brousseau G. y J. Centeno,1991:190-191; Perrin-Glorian,1994:137-140),

481. Aos. (en coro) Le saco la mitad…(...)
482. Mo. Si a esta cantidad le saco la mitad, ¿qué le hago a ésta?/señala el 32/
483. Aos. (en coro) También le saco la mitad…
484. Mo. Esa es la regla, no podemos sacar acá la mitad y acá le saco la tercera parte, (…))
492. Mo. A esto también, es decir, si esta cantidad la divido, también ésta la tengo que dividir, si esta cantidad la multiplico, también ésta la tengo que multiplicar. Me escriben abajo por favor…, ya es una pequeña conclusión/escribe en el pizarrón y dicta/ *En variaciones proporcionales si se multiplica una de las cantidades por un número,* ¿qué tenemos que hacer con la otra cantidad?
493. Aos. (varios) también multiplicarla…[15] *(...).*

3.4. Indicaciones para propiciar un ambiente de trabajo en el aula

Como pudo observarse en los puntos anteriores, a la par de propiciar la participación de los alumnos, atender los requerimientos individuales e institucionalizar las nociones, el maestro intentó que el trabajo en el grupo fuera lo más homogéneo posible, en el sentido de que todos realizaran, de manera simultánea, las actividades propuestas.

A través de distintas intervenciones el profesor dejó ver la intención de que los alumnos recorrieran el camino y, a la vez, cierto temor de que se perdieran en el trayecto. Podríamos identificar una libertad relativa , un “dejar hacer” pero sin salirse del contexto y de las formas de organización de la clase; para ello recurrió a diversas estrategias, tales como indicar directamente que el trabajo se realizara en el tiempo y con las características señaladas, invalidar algunos procedimientos que no eran motivo de estudio en ese momento, solicitar mayor rapidez a quienes se retrasaban, frenar a quienes terminaron antes, o solicitar que ayudaran al compañero para evitar que se rezagara.

Además de las consignas relacionadas directamente con la realización de una tarea específica, identificamos varios señalamientos que tienen que ver con la organización del trabajo y cuyo propósito era, fundamentalmente, crear un ambiente propicio para la gestión del conocimiento. El maestro trató de armonizar la participación de los alumnos con la existencia de cierto orden y condiciones de trabajo en el aula.

No descartamos la posibilidad de que esta necesidad de homogeneizar la realización de las tareas y la creación de un ambiente propicio de trabajo, estén asociadas tanto a la búsqueda de formas para economizar tiempo en la enseñanza y el aprendizaje, como a la

[15] La conclusión quedó así: *En variaciones proporcionales si se multiplica una de las cantidades por un número, la otra cantidad también se debe multiplicar por el mismo número. En caso de dividir se hace lo mismo.*

seguridad que el maestro tenga acerca de las nociones de matemáticas que se ponen en juego en la clase.

Recuperaremos algunos ejemplos de este tipo de intervenciones:

- indicaciones para escuchar a los demás, del tipo: “no oigo nada, se callan por favor” “ fuerte”, “quiero que observen los equipos el trabajo de los demás, silencio”

- las que ejercen cierta presión para participar en la resolución de alguna tarea, por ejemplo: “están algunos niños sin pensar, Alexis, hasta que empecemos a tomar otras medidas para la clase, ¿eh?”, “una persona diferente, no siempre la misma” , “yo nunca oigo a Gloria o a Tania”, “traten de participar”

- las que tratan de apresurar el trabajo, tales como: “abusado el equipo uno porque los otros equipos ya lo tienen, el cinco ya lo tiene” ,“ya están dos equipos… tres, pero ¿por qué?… se durmió el uno(…) manden a alguien por favor, ya acabaron cuatro equipos…” “Se durmieron, cuatro equipos contra uno…” ,“hey, despiértense por favor /truena los dedos/

- acotaciones para la presentación formal del trabajo, tales como: “hagan números pequeños” ,“no me encierren nada, no me copien lo de acá”, “van a separar eso por favor con una raya roja”

- expresión de expectativas y atención a la individualidad: “se concentran un poquito más por favor, porque yo sé que eres capaz, Juan”, “Ariana, si te lo sabes, por qué no lo dices?”

También identificamos las múltiples intenciones que pueden tener algunas intervenciones del maestro. El siguiente es un ejemplo de lo que ocurrió en una clase mientras los alumnos resolvían una tarea de representar un porcentaje como razón, como fracción común y como decimal; esta intervención se desarrolló en aproximadamente un minuto y medio:

R-6 38. Mo.

Montserrat, segunda cantidad…porcentaje, cómo se lee…¿qué significa?, Verónica, la razón, Miriam, expresado como fracción común, Jazmín…	Consignas y asignación individual de una tarea
A ver si Karina no nos queda mal con una división	Al mismo tiempo que asigna una tarea, plantea su expectativa hacia la alumna.
…o sea, ese cero ya está de más…200 entre 100 toca a 2 y ya, hasta ahí se queda (…)	Ante un error en una operación, corrige
…por favor revisen, no es de uno	Pide que trabajen en equipo

Revisen, ¿alguna pregunta de eso?	Intención de identificar dudas, aunque no da tiempo para que los alumnos contesten
Todo esto lo estamos usando para que vean cómo se escribe en forma decimal el porcentaje, inclusive ahorita vamos a volver a recordar cómo, sin necesidad de hacer toda esta tabla voy a poder escribir rápidamente el porcentaje en forma decimal	Justificación de la tarea Anticipación de un procedimiento más sencillo
Cuidado con la que viene por favor, no quiero problemas EN LA DIVISIÓN	Anticipa posibles errores y advierte para evitarlos en operaciones específicas
…porque mi problema son las divisiones, no entender porcentaje, sino dividir…	Alude a deficiencias de los alumnos que representan un problema para agilizar la clase

En todas las clases, las múltiples consignas e indicaciones que se generaron a partir de la actividad de los alumnos, se acompañaron de constantes desplazamientos del profesor por el aula para conocer, y en ocasiones, prevenir o corregir algún procedimiento. Este ir y venir se alternó con la ubicación al frente del grupo, junto al pizarrón. En ninguna clase dio alguna indicación desde el escritorio.

3.5. El trabajo en equipo alternado con el individual y grupal

No obstante que desde el inicio de la clase los alumnos se ubicaron en subgrupos, la forma de organizar el trabajo se caracterizó por la alternancia entre la actividad en equipo, grupal o individual. Los límites entre estas formas de trabajo son tenues, sin embargo, observamos que por lo general, las actividades relacionadas con la acción y la formulación[16] se realizaron en pequeños grupos, y en momentos de validación e institucionalización el maestro procuró que todos participaran bajo su conducción. También fue constante la atención individual y la solicitud de que cada uno de los alumnos interviniera en los distintos momentos de la clase. Estas formas alternadas de trabajo rompen con el esquema de que las matemáticas son una tarea a la que el alumno se debe enfrentar de manera individual, y por otra parte, dan cuenta de una habilidad adquirida por el maestro para trabajar con grupos escolares.

[16] En las situaciones de acción los alumnos ponen en juego tanto las nociones matemáticas que les son familiares como aquéllas que aun no reconocen pero intuyen que les sirven para resolver algunas situaciones; se produce un "diálogo" entre el alumno y la situación. En la situación de formulación los alumnos tratan de crear un modelo explícito para comunicar sus hallazgos a un interlocutor. (Chevallard, Bosch y Gascón, 1998:221- 223),

Al interior de los subgrupos, el nivel de participación era heterogéneo; algunos alumnos decidían y otros expresaban su acuerdo, desacuerdo, guardaban silencio o hacían bromas que habitualmente no hacían frente a todos; en otros casos, dejaban actuar a quien habían identificado, como “el que sabe”, o, en ocasiones, quien guiaba la actividad, era el alumno que gozaba de mayor simpatía al interior del equipo. Ocurrió también que una propuesta, desde nuestro punto de vista buena, no fuera tomada en cuenta por el resto del equipo; no obstante, hubo momentos en los que se discutió y se argumentó en torno a la tarea planteada.

El siguiente extracto del trabajo de un equipo, es un ejemplo de la colaboración entre pares:

R- 7

> Problema: Enrique mezcla 4 botes de pintura blanca con una de roja. Roberto mezcla 8 botes de pintura blanca con 3 de roja ¿a quién le sale la pintura más rosa?
>
> 165. Aa.1 . La tabla con 4 pinturas blancas de Enrique y 8 de Roberto…
> 167. Aa . 1 Porque Roberto tiene lo doble de blanca que Enrique, porque tiene 8 y Enrique 4…
> 169. Aa.1. y luego Enrique tiene 1 bote de roja y Roberto 3…
> 170. Aos. **
> 171. Aa. 2. Pero ahí es donde no le entendemos… aquí es donde no le podemos entender…
> 172. Ao. Es que Roberto tiene más que Enrique, 3 y una…
> 173. Aa. 1. …Roberto tiene 2 botes más…
> 174. Aa. 2. Esta es blanca y esta es roja
> 175. Aa 3. Pero la blanca va a ser más clara… y Roberto tiene más… aunque tenga más rojo
> 176. Ao. Ya sé quién…
> 177. Aa. 2. Yo digo que Enrique
> 178. Aa. 3. Yo digo que Roberto porque tiene mucha blanca…
> 179. Ao. ¿Y la roja?
> 180. Aa. 3. Porque Roberto tiene mucha blanca, aunque tenga 3 de roja pero tiene más blanca…
> 181. Aa. 2. ¿pero cómo la podemos comparar?
> 182. Aa. 3. Pues así con la explicación que dije yo…
> 184. Aa.3. Que Roberto tiene lo doble de blanca que Enrique , entonces con lo blanco se va a hacer más clara la roja… y aunque Roberto tenga 3 de rojo, tiene más de blanca y se va a hacer más claro…

Aquí el debate estaba en torno a la búsqueda de una relación de proporcionalidad, principalmente a través de la identificación de las razones internas; identificaron que la pintura blanca en un caso era el doble que el otro, pero no lograron comparar esta razón con la de las cantidades de pintura roja (triple). Una alumna trataba de convencerlos para que utilizaran una estrategia aditiva. (líneas 175, 178, 180 y182)

El maestro fue bastante explícito al plantear las expectativas respecto al trabajo en pequeños grupos; así, entre las consignas para resolver una tarea e indicaciones para mantener cierto orden en la clase, se tejieron otras sugerencias para propiciar que los alumnos asumieran una responsabilidad en el grupo. Las siguientes son algunas de las actitudes que el maestro propició:

La responsabilidad se comparte: "¿todo el equipo pensó así?", "resulta que lo mandan a él y luego le dicen que está mal… así no se juega" , "se le carga la opinión a una persona y que ella resuelva el trabajo de los otros cuatro, y eso no es posible", "si tienen más ideas alcancen a la persona, díganle, oye, te falta esto".

En el equipo todos participan: "… Evelyn, Alexis, están nada más viendo, pásenle a hacer algo" , "ya te dije que no quiero a nadie sin qué hacer , están trabajando por equipo".

Todas las voces cuentan: "Cuando Iván está en el equipo, Iván dice algo y los demás no lo rectifican.. Iván dice esto y esto es", "no es Francisco el único del equipo" , "¿ya lo hiciste?, o el equipo ya lo discutió", " si ella dice que sí, respétala".

Es un espacio con cierta autonomía: "… si usted ya sabe, dígale a su equipo, no a mi" , "…no basta que el maestro te diga, Roberto, sino tú debes de defender, de revisar, para eso están cinco personas", "discútelo con tu equipo", "revisen a sus compañeros que estén bien, que no vayan a tener un error y después ay!, todos mal".

La colaboración y la comunicación son parte de la tarea "si una persona se atora en lo que le tocó se le ayuda entre todos (…) ayúdense entre todos" , "¿no hay nadie más que le explique a él?","¿ya le preguntaron por qué está dividiendo?" , "este equipo no se comunica lo suficiente…".

En una conversación informal el profesor comentó que, con base en su experiencia, la organización del trabajo en pequeños grupos en los que alternen alumnos con menos elementos con otros cuyos desempeños sean mejores, sirve de apoyo a los primeros, "pues por lo menos copian lo que los otros hacen", de lo contrario, se enfrentarían solos a una tarea para la que no tienen muchas posibilidades de éxito.

3.6. El lenguaje en el aula

Sin pretender hacer un análisis de las estructuras lingüísticas del discurso escolar, destacaremos algunas expresiones que parecen manifestar y reforzar el tipo de relación didáctica que se estableció en el aula y que dan cuenta de algunos significados del lenguaje según la situación en que se emplee.

El uso del "usted"

Los alumnos, para dirigirse al maestro, utilizaban el "usted" y el profesor tuteaba a los estudiantes; sin embargo, fueron comunes algunas expresiones que en el contexto de la clase adquirían un sentido distinto al de la comunicación cotidiana, por ejemplo cuando el profesor se dirigía de "usted" a un alumno, en la mayoría de los casos investía al destinatario de cierta distinción para asumir una responsabilidad en el grupo, o era un indicador para hacerle un señalamiento implícito de que había cometido una falta grave, por ejemplo, "¿que no se acuerda *usted* qué es un entero?" , "mire, *usted* no había puesto el punto". Fuera de contexto se tendría la impresión de manejar una forma amable en el trato, pero al diferenciarse de las formas comunes de habla, el "usted" adquiría distintos sentidos.

Uso del "por favor"

Otra expresión común en la clase, y utilizada en el mismo sentido del "usted", es el uso del "por favor" , que en otro momento tendría también la connotación de un trato amable, pero que en el contexto se transformaba en una forma velada de subrayar una exigencia, por ejemplo, "le van a poner estos números *por favor*" " *por favor, por favor*, concéntrense *POR FAVOR* CONCÉNTRENSE UN POQUITO, *por favor* concéntrense", "todos, *por favor*, escriban sus dos razones", "Francisco, *por favor* participa". En otras ocasiones la expresión usaba la expresión para mostrar desacuerdo, por ejemplo "nada más equivóquense en éste *por favor*, ¿alguien gritó por ahí 4 pesos?, *por favor*…"

Uso del pronombre reflexivo "me"[17]

Una forma de comunicarse que desde nuestra perspectiva es reflejo de una relación didáctica fuerte en la que el profesor ocupa el papel central, es el uso del pronombre reflexivo "***me"***. Nos parece que el maestro utilizó este recurso para enviar a los alumnos el mensaje de que el trabajo debía realizarse con las características que él demandaba, y, al parecer, ellos así lo entendieron. Estos son ejemplos: "ahorita quiero que *me* encierren con rojo…", "el equipo uno *me* pasa a escribir…" , "no, no, a *mí pónganme* los números como deben estar" , "QUE *ME* LO LEAN COMO ESTÁ AQUÍ, no que *me* lo cambien…", "*me* resuelven esos problemas por favor" "Jazmín, *me* observa por favor ahí donde están las

[17] Tanto el uso "por favor" como del "me", parecieran ser ejemplos de una relación didáctica fuerte. Entendemos por relación didáctica fuerte aquélla en la que la actividad es totalmente dirigida y en donde la responsabilidad que asume el maestro contrasta con el poco margen de autonomía de los alumnos. Ya hemos señalados que en las clases observadas presentan matices en este sentido, es decir, se alternan momentos de dirección por parte del maestro con momentos de autonomía relativa por parte de los alumnos.

razones", "ahora quiero que con su equipo *me* usen estas palabras y *me* lo expliquen como debe de ser", "*me* entienden todo muy bien, pero la división, la multiplicación".

En otros casos el maestro usó la primera persona de manera más directa para indicar lo que quería: " está mal, hay un error ahí,(…)no, *yo quiero* con equis (…) yo *lo que quiero* es que me acomoden bien su problema", "lo único que *quiero es* que me lo leas" "pero *no lo quiero* así, o sea, queríamos ver si es cierto que multiplicando estos dos y dividiendo entre éste…" "*yo quiero* que me digan ustedes, esos tres números que me sobraron, los podría yo usar de alguna manera?"

Al parecer el uso de estas formas de expresión corresponde a momentos en los que el trabajo se vuelve muy dependiente del profesor. La responsabilidad matemática de las acciones (Chevallard, Bosch y Gascón,1998: 60, 77, 201) se desliza con claridad hacia el maestro.

Expresiones en primera persona (autoreferencia)

Otra forma que utilizó el maestro para dirigirse a los alumnos fue el uso de enunciados en primera persona; detrás de estas expresiones estaba la intención de señalar, de manera indirecta, lo que los estudiantes deben o pueden hacer, tomando como referencia las acciones del maestro.[18] Esta forma de comunicarse constituyó una manera de orientar el trabajo hacia lo que se esperaba o lo que estaba permitido hacer; estas expresiones equivalían a decir "observen cómo lo hago yo, para que lo hagan ustedes". Veamos algunas expresiones de este tipo: "¿cómo lo *compruebo*?, "lo *puedo* escribir en forma de razones" , "¿cómo *voy* a poner aquí más litros, si son menos horas?", "pero *tengo* que usar lo que *acabo* de aprender" .

Detrás de estas expresiones parece estar, por una parte, la intención de acotar la tarea, y por otra una forma más de establecer una relación fuertemente didáctica en el sentido que hemos señalado antes. (Ver nota 17 de este apartado).

[18] Brousseau (1998:53-54) describe el fenómeno de deslizamiento metacognitivo como la acción del profesor que consiste en tomar sus propias explicaciones y sus medios heurísticos como objetos de estudio, en lugar de considerar el conocimiento matemático. Esta acción, señala Brousseau se realiza cuando "la actividad de enseñanza ha fracasado" y el maestro trata de justificarse y proseguir su acción. En el caso del maestro que observamos pareciera ser una estrategia para evitar el error y para institucionalizar el contenido.

Uso del "nosotros"

También hubo expresiones, no de uso frecuente, que pretendían indicar el carácter compartido de la tarea; aunque también eran portadoras de lo que se esperaba que realizaran los alumnos, por ejemplo: "… ¿y qué *podemos* hacer con esos tres datos?... pensando todos... ¿qué les *podemos* hacer?", "¿qué *vamos* descubriendo… con la equis?", "¿todavía no *podemos* decir qué le puede pasar a la equis?", "¿por qué no *pensamos* un poquito?".

Silencios y los murmullos

Los silencios y murmullos por parte de los alumnos constituyeron otro elemento que se insertó en la ya complicada red de interacciones en el aula; en ocasiones se utilizaban para expresar acuerdos y en otras, incertidumbre. Por lo general los silencios de los alumnos se producían ante preguntas específicas planteadas por el maestro y para las cuales no tenían una respuesta inmediata; en estas situaciones el maestro replanteaba la pregunta, aclaraba, pedía apoyo del equipo, censuraba, o aceptaba que era difícil de contestar. La falta de respuesta por parte de los alumnos no siempre se manifestaba con un silencio, a veces ese silencio se convertía en murmullo al expresar simultáneamente los comentarios que no se hacían de manera abierta ante el grupo.

Lenguaje corporal

El lenguaje corporal fue utilizado tanto por los alumnos como por el maestro, aunque en éste resultó más evidente por constituir parte de sus estrategias para conducir la actividad. Varios señalamientos o consignas se acompañaron de pequeños golpes en el pizarrón, de sonidos con los dedos, de movimientos de cabeza, de miradas. La intencionalidad varía según la situación; lo que resulta una constante es la lectura que los alumnos hacen de estas expresiones para interpretar lo que el maestro espera que hagan.

3.7. El tiempo, una preocupación permanente

Las actividades que tienen que ver directamente con los contenidos curriculares se realizan en algunas escuelas en aproximadamente la mitad del tiempo efectivo de trabajo dentro del aula (Rockwell 1999:17). En las clases observadas se hizo evidente la preocupación del maestro por aprovechar al máximo el tiempo de trabajo en el aula; este interés se expresó en la cantidad de actividades relacionadas con la enseñanza de la proporcionalidad y la continuidad con que éstas se realizaron durante las clases.

En relación con el tiempo destinado a cada clase, no obstante que en el Plan y Programas de Estudio (SEP, 1993:14) se sugiere dedicar 5 horas semanales a esta asignatura, el maestro consideró que por lo menos debería ser el doble, y aún así, no le parecía suficiente.

En todo momento el profesor trató de apresurar el trabajo con argumentos asociados a la poca complejidad de la tarea, al poco tiempo destinado para la clase de matemáticas y a la necesidad de realizar un trabajo grupal simultáneo para evitar que algunos alumnos se rezagaran. Los alumnos también ejercieron presión para que sus compañeros trabajaran con mayor rapidez y satisfacer así la expectativa del profesor de emplear el menor tiempo posible. El profesor utilizó expresiones como las siguientes: "…*rapidísimo, ésta no tiene gran dificultad", "aquel equipo 3 ¿se va a tardar toda la clase?", "por favor se apresuran un poquito", "¿por qué no dan las respuestas rápido?", , "hey, despiértense por favor /truena los dedos" /, " les doy 3 minutos"*

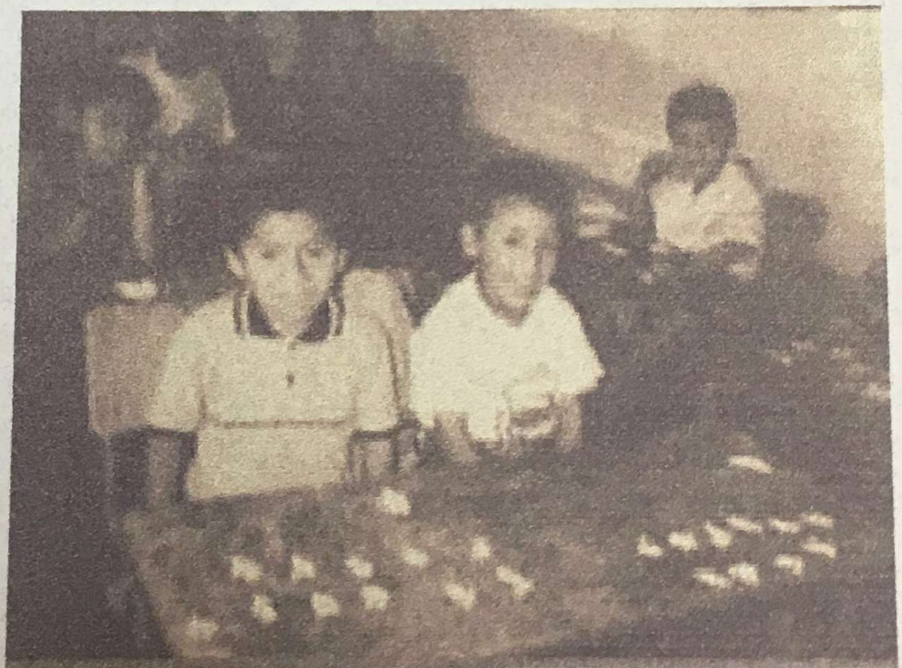
Con esta forma de trabajo en la que el maestro solicitaba la realización rápida de las tareas, hubo ocasiones en que los participantes se enfrentaron a ritmos distintos, sobre todo cuando los alumnos se detenían en asuntos que desde la perspectiva del profesor requerían la inversión de un tiempo mínimo para su realización.

3.8. Comentario

Con este recorrido por las clases observadas no se agota la descripción de los recursos que utilizó el maestro en el afán de hacer de sus prácticas de enseñanza un espacio en donde los alumnos tuvieran un alto grado de participación. Nos quedamos con la sensación de sólo haber mencionado lo que en una primera mirada nos pareció más evidente. Tratamos de recuperar lo que ocurre en una clase común, a sabiendas de que lo que en ella sucede siempre rebasará lo que aquí hemos escrito.

Esperamos recorrer más aulas y profundizar sobre múltiples aspectos que nos dejan también múltiples interrogantes, y sobre todo, transitar por el juego sutil entre lo explícito y lo implícito, lo que se explica y lo que se infiere, lograr mayores acercamientos a los recursos que se despliegan en la enseñanza de contenidos específicos para tratar de entender y explicar las decisiones que el maestro toma en una clase, en la que además de lo prescrito, lo azaroso y las interpretaciones particulares de cada maestro forman parte de esos hilos sutiles que constituyen una red inacaba, que día a día y en cada escuela, toma forma.

Grupo trabajando. 1958.
SEP. Archivo Histórico y Reprografía



Contando. 2003.
Foto. S. García Manzano.

CONCLUSIONES

En el presente apartado, retomaremos algunas de las reflexiones que se incluyeron al término de cada capítulo, intentando destacar posibles derivaciones hacia el diseño del currículum, la formación de maestros y hacia el proyecto amplio de proporcionar elementos que ayuden a comprender el funcionamiento de las clases de matemáticas en la primaria.

Optaremos por un camino inverso al que se siguió en el desarrollo de la tesis: comenzaremos con la caracterización de las clases de matemáticas del maestro observado, seguiremos con las dificultades identificadas en la enseñanza de la proporcionalidad en dichas clases, vincularemos dichas dificultades con el diseño curricular y con la formación de maestros y, finalmente, haremos una comentario sobre el acercamiento metodológico y sobre el punto de partida de esta tesis, a saber, el papel protagónico del saber que se enseña en los acontecimientos del aula.

Las clases de matemáticas del maestro observado

El maestro que condujo las clases observadas, con 18 años de experiencia (10 en sexto grado) es reconocido en su escuela como un buen maestro. Las clases observadas confirmaron lo anterior desde varios puntos de vista: la búsqueda de materiales que él consideró adecuados para apoyar su enseñanza y la preparación previa de sus clases a partir de dichos materiales (lo cual no excluyó la toma de numerosas decisiones en el momento); la cantidad de actividades propuestas y la intensidad de sus interacciones con los alumnos a lo largo de la hora y media o dos horas que duró cada clase; la vigilancia estrecha del trabajo y de la participación de sus alumnos; las formas de animarlos a continuar y la comunicación de expectativas; el interés por hacer explícitas las consignas, de que todos entendieran la tarea a realizar; la combinación del trabajo en equipos con el individual y el grupal, y el interés de asegurar que el trabajo en equipos fuera realmente tal; el trato respetuoso y cordial hacia los alumnos; el seguimiento del desempeño de los alumnos; la optimización del tiempo en el aula y la asistencia puntual a todas las clases.

En lo que refiere a los recursos generales para la enseñanza de las matemáticas, destacaron, entre otros: el uso muy frecuente y versátil de problemas concretos para introducir nociones y técnicas; el hecho de no iniciar los temas con las definiciones y la presentación de las técnicas, sino procurando insertarlas sobre la marcha; la creación de espacios para ejercitar; el recurrir a situaciones cotidianas para contextualizar ciertas nociones, así como los intentos por hacer evidentes para los alumnos algunos errores.

En suma, se trata de un maestro que mostró asumir el compromiso de enseñar matemáticas a su grupo de alumnos; no obstante, durante el desarrollo de las clases identificamos algunas dificultades que se sitúan en dos planos: en el nivel del manejo del saber que fue objeto de enseñanza y en el conjunto de decisiones y acciones para propiciar el aprendizaje de dicho saber. Aunque algunas de estas dificultades parecen concernir a la enseñanza de las matemáticas en general y por lo tanto podrían estar vinculadas a concepciones relativamente generales sobre la naturaleza de las matemáticas y sobre las formas en que se pueden aprender, en las clases observadas se manifestaron siempre en estrecha relación con el objeto específico de enseñanza que estuvo en juego, la proporcionalidad. Este señalamiento explica el hecho de que no pretendamos hacer una distinción entre las dificultades atribuibles a la “metodología de enseñanza” y otras, asociadas al conocimiento sobre el contenido. Como se verá a continuación, ambas están imbricadas.

Dificultades atribuibles a la escasa ponderación que el maestro hace de los conocimientos informales, eventualmente implícitos de los alumnos

Una dificultad recurrente en las clases que observamos, fue la articulación entre lo implícito y lo explícito. Aun cuando el maestro se esforzó por manejar un discurso explícito, en ocasiones con el apoyo exhaustivo de ostensivos y explicaciones, hubo momentos en que los acercamientos de alumnos y maestro, no se tocaron.

El origen de varias de las principales dificultades que se identificaron radicó en una consideración insuficiente por parte del maestro de la existencia y del potencial de los conocimientos no formales, muchas veces implícitos, de los alumnos. Veamos dos manifestaciones de este tipo de dificultades:

A lo largo de la secuencia, un aspecto fundamental del universo de nociones vinculadas a la proporcionalidad, la cuestión de aprender a identificar el tipo de comparación, aditivo o multiplicativo, no logró constituirse en objeto de estudio. En la primera clase se plantearon preguntas del tipo “cuánto más” y “cuántas veces más”, en ejercicios aislados. Las dificultades para responder a estas preguntas tuvieron que ver con la interpretación de las mismas, pero no con la selección de un tipo de comparación, pues éste ya venía indicado en la pregunta. No se identificaron evidencias de que este entrenamiento inicial constituyera una ayuda para los alumnos en el momento de enfrentarse a problemas en los que se requería diferenciar el tipo de comparación, e incluso, con cierta frecuencia, los alumnos equivocaron el tipo de comparación. Sin embargo, pareció que el maestro no consideró esos momentos como ocasiones para seguir aprendiendo y profundizar en esta noción; pareció más bien que ese punto se daba por visto.

Destacamos, en el apartado correspondiente, ciertos motivos de índole didáctico que podrían explicar por qué este aspecto, identificar cuál es la comparación pertinente, escapa del espectro de cosas de cuya enseñanza el maestro se hace cargo. Se trata de algo que difícilmente podría ser comunicado y, por lo tanto, de uno de tantos conocimientos para los cuales la didáctica clásica no tiene una respuesta, pues desde esta perspectiva, los conocimientos directamente comunicables son las técnicas y la nomenclatura asociada, más no las condiciones de su utilización, es decir, su sentido. Hoy en día sabemos que las nociones requieren una forma de enseñanza en la que los conocimientos no sean directamente comunicados, sino que se adquieran en tanto medios implícitos de resolución, en la interacción con un medio específico que debe ser creado. Una condición para que una práctica así tenga lugar, es reconocer y valorar la existencia de estos conocimientos no directamente enseñados; en este proceso, el reconocimiento del origen y de los tipos de error, puede jugar un papel importante.

Por otra parte, el hecho de considerar como punto de partida lo explícito para llegar a lo implícito, como en el caso de los tipos de comparación, puede ser consecuencia de una secuencia didáctica que se construye mediante la desagregación de las nociones que están implicadas en la resolución de los problemas de proporcionalidad.

Otra manifestación importante de la dificultad para identificar conocimientos implícitos en los procedimientos de los alumnos, fue la escasa articulación entre los procedimientos explícitamente enseñados por el maestro para resolver las situaciones de proporcionalidad con los procedimientos utilizados por los alumnos, esto es, la dificultad para articular lo implícito y funcional con lo explícito y formal. En los primeros problemas de proporcionalidad, el maestro puso en primer plano las razones externas y las manipuló como fracciones, en tanto que los alumnos tendieron a trabajar con razones internas, con números naturales.

En los momentos en que las razones internas estuvieron presentes, el maestro no hizo explícito el conocimiento que estaba en juego. Este silencio puede tener su origen tanto en la tendencia del profesor a identificar la noción de razón con una razón externa y ésta con una fracción, como en el hecho de que la propiedad de la conservación de las razones internas, y de la técnica basada en ésta, carezcan de un nombre propio, dando lugar a un vacío conceptual que en la práctica podría conducir no sólo a establecer una identidad entre razones internas y tablas de variación, entre una noción y una herramienta, sino a no reconocer, o incluso inhibir el desarrollo de procedimientos que resultan más accesibles para los alumnos. Las razones internas se usaron pero no fueron motivo de enseñanza, por lo tanto, tampoco representaron un saber que el maestro considerara necesario institucionalizar.

Notemos que en el caso anterior es particularmente clara la imbricación de dos tipos de dificultad: por una parte, una condición necesaria, aunque no suficiente, reconocer en los procedimientos personales de los alumnos conocimientos válidos y, por otra, disponer de los conocimientos asociados a una noción como parte de los saberes docentes.

Dificultades en el tránsito del trabajo con magnitudes concretas al trabajo con el modelo abstracto

Una dificultad que se vincula con la anterior refiere a la organización de los procesos de contextualización de las nociones con su contraparte, los de descontextualización y de generalización.

A lo largo de las clases, se observaron con frecuencia momentos en los que el maestro propició un trabajo con magnitudes concretas (algunas veces incluso manipulando materiales), o exigió *demostraciones* que apelaban a estos referentes para evidenciar cierto tipo de comprensión, y otros momentos en los que buscó que los alumnos hicieran inferencias, o ejercicios en un nivel puramente numérico, regido por reglas sintácticas. No se lograron identificar los criterios, posiblemente implícitos, que regularon la ordenación de estos momentos, y que probablemente los alumnos han aprendido a reconocer. No obstante, las transiciones de lo concreto a lo puramente numérico fueron siempre abruptas. Las magnitudes tendieron a permitir el planteamiento de problemas, pero en el procedimiento enseñado, por lo general, se hizo abstracción de aquéllas para recuperarlas únicamente en el resultado (ver más adelante el comentario sobre la regla de tres).

Dificultades en la discriminación entre aspectos de un conocimiento que quedan en manos del alumno y los que quedan en manos del maestro.

La elección de qué aspectos de un conocimiento pueden quedar en manos de los alumnos, en el sentido de que a ellos corresponde desarrollarlos, y de cuáles corresponde al maestro proporcionar, fue también problemática. Los momentos en los que el maestro expresó de manera explícita y enfática la necesidad de que los alumnos encontraran por sí mismos algún resultado, consistieron en inferir relaciones o técnicas generales a partir de *observar* un ejemplo concreto ya resuelto. Esta expectativa no sólo no se cumplió, sino que dio lugar a largas interacciones en las que el maestro se esforzó para transmitir la consigna, con cada vez más indicios de la respuesta esperada, mientras los alumnos hacían lo propio, intentando descifrar la expectativa del maestro. El trabajo propiciado en estos momentos consistió en una búsqueda azarosa de una relación, en el nivel sintáctico. El análisis de estos casos mostró que el ejemplo resuelto que se proporcionó y la consigna que se dio eran insuficientes para que los alumnos pudieran *observar* lo que para el maestro era evidente. En el otro extremo, la elección de una forma de resolver cada uno de los numerosos problemas planteados a lo largo de la secuencia, para los cuales muchas veces los alumnos mostraron tener alternativas propias y viables, tendió a quedar en manos del maestro.

Cabe añadir que, entre las acciones de los alumnos que se privilegian para propiciar aprendizajes de matemáticas, la de observar puede ser una de las más cuestionables. En cuanto a la demostración, ésta constituyó una consigna adicional para resolver una tarea, y tenía como propósito que los alumnos argumentaran acerca de la respuesta o del procedimiento elegido. La acción de demostrar también mostró matices: en algunos momentos se asoció al uso de reglas sintácticas , como la utilización de una operación para demostrar un procedimiento, y, en otros, hubo intentos del maestro por apelar al contexto a través de la recuperación de magnitudes, pero con dificultades para lograrlo.

Dificultad para identificar el origen de los errores cometidos por los alumnos, y para desarrollar estrategias eficaces frente a éstos.

En torno a los errores cometidos por los alumnos, se desencadenaron sucesos diversos, desde interpelaciones puntuales por parte del maestro, hasta largos procesos de negociación para identificar el error y hacer las correcciones pertinentes. Al igual que en otros momentos, como la observación y la demostración, también se hizo presente la preocupación del profesor por no desviarse de la ruta prevista y por conducir a los alumnos al uso del elemento o del procedimiento que era motivo de estudio en la clase.

En este proceso identificamos dos aspectos recurrentes: primero, la dificultad para identificar el origen de los errores y segundo, los intentos del maestro por hacerlos evidentes para los alumnos. Con frecuencia el origen del error se atribuyó a causas ajenas a la situación misma y se identificó con la falta de lógica o con aspectos del conocimiento considerados por el maestro como sencillos, cuando detrás de los errores frecuentemente había una complejidad mayor. Por otra parte, los intentos del maestro para hacer que los alumnos se percataran del error, tuvieron como mayor obstáculo la carencia de estrategias adecuadas para lograrlo, pues la mayoría de las situaciones que seleccionó no permitían una forma de verificación empírica y cuando esto era posible, el maestro mostró no estar familiarizado con este tipo de verificación.

Otras dificultades específicas del conocimiento en juego: la proporcionalidad

Proporcionalidad

Para el maestro el contenido central de la secuencia eran las razones y proporciones. Sin embargo, el hecho de saber si una situación era o no de proporcionalidad, no fue objeto de estudio. Fue hasta la clase No. 8 cuando, al estudiar las tablas de variación, se habló de proporción y variación proporcional, y se trataron de hacer explícitas algunas propiedades de la proporcionalidad, pero con el problema de la confusión entre relaciones aditivas y multiplicativas. Entre los factores que incidieron para que esto ocurriera, están las decisiones que el maestro tomó en relación con la organización del contenido (desagregación de las nociones para trabajarlas en sesiones distintas; la coexistencia de la razón y la fracción), así como las confusiones conceptuales que se hicieron presentes en el desarrollo de las clases (entre comparación aditiva y multiplicativa, una idea reducida de razón que excluye a los números naturales, desconocimiento de las características y propiedades de una relación de proporcionalidad), y los vacíos en el currículum (la falta de un nombre, y por lo tanto de un reconocimiento explícito, para las razones internas).

Las razones y las fracciones

La introducción de las fracciones en el proceso de aprender a resolver problemas de proporcionalidad, o bien resultó altamente perturbadora, o bien fue superficial y no logró propiciar un enriquecimiento de dicha noción. Las fracciones no lograron articularse con los procedimientos utilizados por los niños. Quedaron como una manera más de nombrar las cosas o como notaciones y reglas sin ninguna relación con el problema y con las resoluciones usadas por los alumnos.

Las razones se simplificaron y se representaron como una fracción, creándose, a nivel de representación simbólica, una identidad entre ambas, con un significado no claro. Hubo momentos en que las fracciones prestaron la técnica de la simplificación para comprobar que todas las razones en juego eran equivalentes. También prestaron su notación para designar un nuevo objeto, el de la razón.

En este espacio en que coexistieron la razón y la fracción, hubo momentos en que ambas nociones funcionaron de manera pertinente; esto ocurrió cuando se trataba de relaciones entre un todo y una de sus partes. En estos casos, la razón externa sí era una fracción y además unitaria y sin dimensión. En este tipo de problemas, resultó más natural para los alumnos apelar a fracciones debido a la cercanía con la definición que ellos manejan de fracción (como partes de unidad). Se pudo ver, además, el inicio de un trabajo que parecía llevar al enriquecimiento del sentido de las fracciones en tanto que a/b no solamente significaba una unidad que se parte en b partes de las que se toman a, sino también como expresión de la relación"a de cada b", sólo que el episodio se redujo muy pronto a la traducción entre notaciones " a/b" a "a de cada b" y viceversa.

El porcentaje

Al trabajar con el porcentaje, además de utilizar diversas formas para expresarlo, se establecieron vínculos con otras nociones: el porcentaje n% pudo verse como una razón "n de cada 100" o "n es a 100", como fracción "n/100 de" o como una fracción decimal. Con excepción de un episodio en el que aplicaron el 50% a varias cantidades "sacando la mitad", los alumnos no utilizaron las nociones enunciadas de razón o de fracción, y se les llevó directamente a la técnica de multiplicar por un decimal, convirtiéndose ésta en la única opción que se ofreció a los alumnos.

Al hacer converger diversas nociones y representaciones el maestro trató de enriquecer la noción de porcentaje y, probablemente, manejar con los alumnos diversos sentidos y vías de acceso para este conocimiento; sin embargo, durante la clase, pronto esta intención se tradujo en prácticas ostensivas, a nivel de diversas formas de representación, marcando una distancia considerable con el sentido que podría emerger a partir de su uso.

Una ausencia notable fue la resolución de problemas diversos sobre porcentajes.

La regla de tres

La regla de tres ocupó, como antaño, un espacio en el aula de la escuela primaria y, en las clases observadas, se presentó además como la culminación del proceso de enseñanza de la proporcionalidad y como la técnica específica para resolver problemas de este ámbito.

Para su enseñanza, el camino que siguió el maestro fue complejo: no se limitó a proporcionar la regla "ya hecha", sino que hizo un esfuerzo por dar lugar a la participación de los alumnos en el proceso de reconstruirla, por hacer accesible la técnica, dotarla de cierto sentido y destacar su vinculación con otras nociones ya estudiadas y también por garantizar su dominio a través de la ejercitación.

Maestro y alumnos orientaron sus esfuerzos para identificar la incógnita, acomodar los datos como fracciones y oralizar éstas como razones, despejar la fórmula, hacer las operaciones, generalizar (la incógnita puede estar en cualesquiera de los cuatro lugares), constatar, una vez que ya se tiene el resultado, que los productos cruzados son iguales y relacionar este hallazgo con la equivalencia de fracciones, y dar nombre de "extremos" y " medios"a las parejas de datos que intervienen.

En este proceso el grupo se enfrentó a las desventajas didácticas inherentes a la regla misma, como el manejo de las magnitudes que, presentes al principio de la resolución del problema, se desaparecen al incursionar en un modelo numérico y, eventualmente, algebraico, en donde se pierde toda vinculación con el contexto, y después se hacen reaparecer en el resultado (las operaciones que implica su resolución, carecen de sentido en el contexto, por ejemplo multiplicar seis paletas por el precio de cuatro paletas y dividir entre cuatro paletas para obtener el precio de seis paletas).

Además de la dificultad para justificar la regla de tres en el marco de las magnitudes implicadas, aprender la técnica implicó seguir una larga serie de pasos, varios de los cuales podían omitirse (algunos redundantes).

El currículum y la formación de maestros

La selección y organización del contenido

Tanto la selección de las nociones como el tiempo dedicado al estudio de cada una de ellas, fueron decisiones del maestro. No obstante el esfuerzo del profesor por establecer vínculos entre ellas, al revisar la secuencia, queda la impresión de un acercamiento lineal y acumulativo para acceder a la proporcionalidad: la comparación, la razón, fracción, escala, porcentaje, tablas de variación, productos cruzados y regla de tres se hicieron presentes en el aula con cierta independencia entre sí y, en varios casos, sin que se hiciera explícita su relación con la noción de proporcionalidad.

Estas decisiones podrían estar vinculadas con el hecho de que en el universo de la proporcionalidad coexisten construcciones didácticas procedentes de épocas muy distintas, sin que se cuente con una reorganización del tema que seleccione, articule y jerarquice los distintos contenidos. El paso de la proporcionalidad por varias épocas e instituciones, aunado al hecho de no pertenecer ya al corpus de saberes matemáticos actuales, ha tenido diversas repercusiones: la ausencia de una definición unívoca de esta noción, la coexistencia de nociones sin vínculos claros y con notaciones indiferenciadas, el uso de términos compuestos procedentes de teorías distintas y un cierto desdibujamiento en el campo de la enseñanza.

En las propuestas curriculares de México, se observó un fenómeno importante de transposición didáctica. A partir de la década de los setenta, en el marco de la modernización de las matemáticas, la teoría de las razones y las proporciones desapareció como tal de los programas de educación primaria, en aras de introducir elementos intuitivos ligados a la noción de función lineal pero conservando elementos de la teoría de las razones y las proporciones, como los “productos cruzados” y la terminología de “extremos” y “medios”. Se privilegió el uso de las tablas de variación, anunciando un cambio por venir pero que, al no lograr integrar una secuencia para que los alumnos pudieran transitar de los procedimientos intuitivos a la resolución de problemas más complejos, cayó en el plano de la indefinición.

En la década de los noventa se retomó el tema. En los materiales más recientes hay un intento por recuperar la proporcionalidad, en particular las razones internas, vinculadas, como ya hemos mencionado, a los procedimientos que resultan más cercanos a los alumnos. Falta profundizar en el tránsito de estos procedimientos a otros más complejos, como el uso de razones externas, sobre todo si son fraccionarias.

Estas situaciones hacen difícil contar con un marco claro que sirva de referencia para los maestros y los diseñadores de materiales curriculares. Es un asunto que, como detallamos en el capítulo 1, no está resuelto en el currículum, y en parte a esto se deben las dificultades que el maestro tuvo en el manejo del mismo.

La formación de maestros:

A través de diversos estudios se han identificado algunas dificultades de los maestros para el manejo de la noción de proporcionalidad; estos elementos nos hacen suponer que los errores conceptuales y las dificultades para resolver la puesta en práctica de una propuesta curricular, no sean privativos del profesor que observamos.

Además de los conocimientos generales que requieren los docentes para desempeñarse en una escuela y en un grupo de alumnos (nociones sobre el aprendizaje, sobre el desarrollo infantil, cuestiones sobre planeación de clases, sobre los enfoques didácticos generales, por ejemplo), es necesario considerar en los procesos de formación de docentes la importancia de incursionar en los procesos de reconstrucción de los conocimientos específicos que se enseñan en la escuela. Del caso específico que nos ocupó en este estudio, se desprende de manera contundente la necesidad de un conocimiento amplio y profundo del universo de la proporcionalidad, incluyendo su articulación con nociones clave tales como las fracciones y la función lineal

El estudio también pone de manifiesto la necesidad de analizar con los maestros las posibilidades y límites de prácticas muy concretas asociadas a la enseñanza de conocimientos de matemáticas, tales como la “observación”, recurso utilizado para el maestro para acceder a una noción, y de precisar y enriquecer el sentido que tienen otros procesos importantes como “contextualizar, descontextualizar”; “demostrar”. Un aspecto aún más complejo, pero ineludible, es la distinción, en los distintos aspectos de un conocimiento, entre aquéllos que puede esperarse que los alumnos desarrollen con cierta autonomía y aquéllos que el maestro debe proporcionar directamente.

Para terminar

En el primer plano del análisis consideramos el saber específico que es motivo de enseñanza, la estructura misma del edificio conceptual que juega un papel protagónico en la clase y que, pese a que forma parte del sistema didáctico, ha tendido a ser, en el ámbito del estudio de las prácticas de la enseñanza, objeto de un trato discreto, sutil, transparente, mirado más como parte del contexto.

Desde esta perspectiva, esperamos haber contribuido a mostrar que, sin menoscabo de los importantes conocimientos que los maestros construyen a lo largo de su práctica (los saberes docentes, en el sentido de Mercado), muchas de las dificultades se sitúan en el nivel del manejo del contenido y de su didáctica. Más precisamente, intentamos mostrar que la mayor parte de las decisiones que el maestro toma sobre la marcha, ocurren en el marco de una estructura conformada por ciertas líneas de fuerza derivadas de las grandes decisiones, no necesariamente conscientes, ni necesariamente tomadas por el maestro, relativas a la forma de reconstruir un saber en el aula.

Al incursionar en las prácticas de enseñanza de una noción específica, esperamos haber aportado un punto de referencia para la revisión de las propuestas curriculares, para identificar algunas necesidades en la formación de docente y para la comprensión de las particularidades de una clase de matemáticas, así como haber mostrado la necesidad de hacer converger distintas miradas para el análisis de clases comunes en las que se considere el sistema didáctico en su conjunto.

La didáctica de las matemáticas, como disciplina que plantea la problematización de los saberes a enseñar, aportó elementos importantes para el análisis de las prácticas de enseñanza en torno a la proporcionalidad; no obstante, reconocemos que en este campo aún no se han desarrollado recursos suficientes que ayuden a explicar las prácticas de los maestros en clases comunes, por lo que la mirada etnográfica constituyó un valioso referente para explicar, a partir de las clases mismas, las particularidades de las prácticas de estudio de un contenido específico (la importancia de institucionalizar, la puesta en común, las consignas, el lenguaje), los procesos de construcción de significados de una noción y las múltiples elecciones que el maestro hizo antes, durante y después de la clase.

Esperamos, por último, que análisis como el que aquí hemos realizado, inevitablemente crítico, se usen para contribuir a la toma de decisiones didácticas que optimicen los resultados de estos esfuerzos titánicos que libran docentes como el que participó en este estudio y no para invalidar dichos esfuerzos.

ANEXO I

CONTENIDOS DE RAZONES Y PROPORCIONES EN LOS LIBROS DE TEXTO DE QUINTO Y SEXTO GRAD (1961, 1962)

Novaro Vega, Rosa María. (1961). *Mi libro de quinto año. Aritmética y Geometría. Estudio de la Naturaleza*. México: CONALITEG	Hernández, Julio S. y Aurelio López Orche.(1962). *Mi libro de sexto año. Aritmética y Geometría.* México: CONALITEG
Los números. La numeración hablada y la numeración escrita	Sistema de numeración decimal.
Sistemas de numeración: referencia histórica, numeración romana y números ordinales; números cardinales y números ordinales.	Números mayas prehispánicos
Sistema de numeración decimal. Valor absoluto y valor relativo. Órdenes de unidades	El cero
Números enteros y números decimales. Lectura y escritura	La numeración romana
Suma y resta con números enteros y números decimales: suma o adición, resta o sustracción	Números ordinales
Líneas, superficies y volúmenes	Escritura de los números
Trazo de paralelas y perpendiculares	Operaciones aritméticas con enteros y decimales: Adición; preparación para la resolución de problemas; Sustracción; Multiplicación; Multiplicaciones resueltas mentalmente
Ángulos	Cuerpos o sólidos geométricos
Multiplicación con números enteros y con decimales. Potencias.	Perímetros y áreas de las figuras planas
Principales figuras planas: triángulos, cuadriláteros, polígonos, círculo	División. División de enteros entre decimales. Divisiones resueltas mentalmente. División de decimales.
División con números enteros y con decimales. Múltiplo y divisor. Divisibilidad.	Las cuatro operaciones en problemas de aritmética y geometría
Fracciones comunes y números mixtos. Adición y sustracción de quebrados. Multiplicación y división de fracciones	Divisibilidad: Mínimo común múltiplo; Factores primos; múltiplos y submúltiplos
Sistema Métrico Decimal: medidas de longitud, perímetros de figuras regulares e irregulares, figuras a escala, perímetro del círculo.	**Iniciación del estudio relativo a las fracciones comunes**
Medidas de superficie. Medidas agrarias. Área del círculo	Geometría: Trazo de rectas y de figuras planas
Medidas de volumen. Medidas de capacidad	**Operaciones con fracciones comunes: Adición; Sustracción; Multiplicación; División**
Medidas de peso	Resolución de problemas
Sistema monetario mexicano. Monedas extranjeras de mayor uso en el país	Geometría: Los ángulos, uso del transportador, el rombo, el romboide
Medidas extranjeras de uso industrial y comercial en México	Cuadrado y cubo de los números
Números denominados. Conversiones; Suma y resta de denominados	Sistema métrico decimal
Razones y proporciones; Variación directa e inversa; Proporciones	Unidades de medida del Sistema Métrico Decimal; Múltiplos y submúltiplos, equivalencias

Novaro Vega, Rosa María. (1961). *Mi libro de quinto año. Aritmética y Geometría. Estudio de la Naturaleza*. México: CONALITEG	Hernández, Julio S. y Aurelio López Orche.(1962). *Mi libro de sexto año. Aritmética y Geometría.* México: CONALITEG
Tanto por ciento. Interés simple	Medidas inglesas. Equivalencias aproximadas
	Monedas mexicanas; monedas mexicanas de oro: monedas mexicanas y de otros países
	Números denominados. Conversión de números denominados. Operaciones con números denominados.
	Geometría: trazo de un triángulo isósceles; trazo de un triángulo escaleno; perímetro y áreas de los triángulos
	Razones y proporciones **Encontrar en una proporción un término desconocido** **Uso de las proporciones** Ejemplos de problemas de variación inversa
	Geometría. Alturas, perpendiculares, mediatrices y bisectrices. Trazo de polígonos regulares.
	El tanto por ciento. Interés. Resolución de problemas de interés. Comisiones. Descuentos.
	Geometría. El trapecio. La circunferencia y el círculo.
	Gráficas, escalas, croquis y planos.
	Fórmulas : De perímetros. . De áreas de superficies planas. Áreas y volúmenes de sólidos geométricos. Problemas de aplicación de las fórmulas de perímetros, áreas y volúmenes.

ANEXO II
CONTENIDOS DEL EJE PROCESOS DE CAMBIO EN EL PROGRAMA DE EDUCACIÓN PRIMARIA 1993.

CUARTO GRADO	QUINTO GRADO	SEXTO GRADO
Introducción a la elaboración de tablas de variación proporcional	Elaboración de tablas de variación proporcional y no proporcional para resolver problemas. Relaciones entre los datos de una tabla de proporcionalidad directa. Elaboración de gráficas de variación proporcional y no proporcional. Planteamiento y resolución de problemas de porcentaje.	Planteamiento y resolución de problemas que impliquen elaboración de tablas y gráficas de variación proporcional y no proporcional. Análisis de tendencias en tablas de variación proporcional y no proporcional. Relación entre situaciones de variación y las tablas gráficas correspondientes. El valor unitario como procedimiento para resolver ciertos problemas de proporcionalidad. Los productos cruzados como método para comprobar si hay o no proporcionalidad. Planteamiento y resolución de problemas de porcentaje.

ANEXO III
UN EJEMPLO DE TRABAJO EN EL PIZARRÓN
R -3. Problema: *En un examen de 10 preguntas Jorge contestó sólo 5. La razón de respuesta correcta es de 1 de cada ___ preguntas.*

75. Mo. Equipo 2… pase por favor alguien a poner la respuesta… Van a poner una de cada tantas…nada más que rápido, ahorita rápido, un poquito más rápido porque el tiempo se nos va…Gloria… una de cada tantas…
76. Aos. /Anotan en el pizarrón/ *1 de cada 2*
77. Mo. Ahora van pensando cómo lo van a explicar por favor…no nada más poner allá la respuesta…. Bueno, hasta ahorita todos llevan… la misma respuesta, es una de cada dos preguntas…estuvo bien…Ahora, me la pasan por favor a explicar allá… pueden hacer números, pueden hacer… pueden hacer lo que quieran…Hey! Atentos… hey! Ya…ahorita ya no se discute, ya tuvieron una respuesta, por eso les dije que se fijaran antes…ellos lo van a demostrar así… a ver díganme…
78. Ao. Nosotros pensamos que Jaime… Jorge contestó de dos preguntas una /traza 10 rayitas en el pizarrón agrupadas de dos en dos y señala una de cada grupo
/(/) / (/) / (/) / (/) / (/) Contestó ésta, contestó ésta… /encierra una de cada dos/… y así contestó las 5 y faltaron las otras 5…
79. Mo. Las otras cinco, no es que le faltaron, sino que estuvieron mal… estuvieron incorrectas… esa es la forma del equipo 5 que lo demuestra que una de cada dos estuvieron bien… otro equipo…el 2, a ver pásale…nunca se queden al final, luego les roban las ideas y ya se siente como que ya nada más repetimos… el equipo 2 lo va a demostrar cómo …si se atora ahí le dicen … /se ponen de pie algunos compañeros de equipo/ no a hacer bola…no hacer bola, desde aquí, desde aquí…
80. Ao. Nosotros pensamos quede dos preguntas sacó… sacó…
81. Mo. ¿Estás repitiendo? Habla más fuerte…
82. Ao. Que de dos preguntas sacó una buena… de 3 sacó dos, de 4 sacó 3 y de 5 sacó 4… /Escribió en el pizarrón lo siguiente:

2 -- 1
3 -- 2
4 -- 3
5 -- 4

83. Mo. ¿Y qué obtienes de ahí?… De 5 sacó 4 buenas, él dice…equipo, por favor… ¿están de acuerdo?…
84. Aos. * No, no… porque le falta una…
85. Mo. Entonces participen, levanta la mano, discútele, díganle… Él dice que de 2 sacó una buena, de 3 sacó dos buenas, de 4 sacó 3 buenas y de 5 sacó 4 buenas…y sin embargo acá me pusieron otra cosa, me pusieron que una de cada dos, yo no entiendo… equipo, me lo explican… le ayudan por favor…
86. Aos.**
87. Mo. No, no, no que vayan a hacer bola, no, no… desde aquí, desde aquí que le expliquen al grupo por qué dice eso de que 2 a una , 3 a 2, 4 a 3… Pancho, no te vayas a ir para allá, sino que desde aquí les ayudes… Hey! ¿Quieren escuchar a Francisco y a Víctor?…
88. Ao. Que Juan está mal porque si sumamos todas ya no nos da…
89. Mo. Pero por qué me lo discuten ahorita de que Juan está mal si ya pasó él a llevar la razón de todos los otros cuatro… ven ustedes por qué les dice uno que se pongan a discutir bien por si pudiera ser otra cosa, no después resulta que lo mandan a él y luego le dicen que está mal…así no se juega… por favor, van a pasar varias veces, no hoy, sino siempre, si mando yo a una persona de mi equipo, es la persona que va a darme la razón de todos y no ahorita le vamos a decir a Juan, los del equipo, que está mal… A ver este equipo, por favor, ¿qué me dice del trabajo del 2?…
90. Aos. …
91. Mo. Yo estoy diciendo que me analicen lo que dijo Juan, todos…¿por qué está mal?… Roberto… Enrique… Daniel… ¿por qué está mal?…

92. Aos….
93. Mo. (con cierta impaciencia) Roberto…inténtalo… ¿por qué está mal su forma de decirlo?…Iván, intenta decir por qué está mal…o está bien, ¿están de acuerdo con ellos? Si está bien…
94. Ao. Porque no, este, no se supo cuántas tuvo malas …
95. Mo. Hey! ¿Quieren escuchar a una persona cuando está hablando?…
96. Ao. Si de dos sacó una, de 3 , 2; de 4, 3; de 5, 4, si es de cada dos, la fila que tiene las buenas son… son 10 acá y cómo sabemos cuántas tuvo mal…
97. Mo. Nancy…
98. Aa. Porque si está diciendo que de cada dos sacó una …
99. Mo. Fuerte, no te escucho…
100. Aa. Porque si está diciendo que de cada dos sacó una buena, entonces está mal porque está mal, porque de 3, no… porque de dos sacó una, entonces debería de ser 4,6,8 y 10…

2--- 1
4 – 2
6 --- 3
8 – 4
10 ---5

101. Mo. ¿ Van entendiendo lo que le dijeron por ahí? A ver, aquel equipo…sí, es que deben estar tratando de pensar, no, no, ya ahorita …no de decir habla tú …(en tono más bajo)Roberto y Enrique les suplico que participen un poco más, porque se quedan callados completamente y no hay seriedad, si no, lo paso para otro equipo …allá…Jazmín, igual… Gloria… (concierta molestia)Ariana! ¿por qué está mal esa tabla, o está bien, Jazmín, Gloria)?…
102. Aa. Está mal, maestro porque nosotros pensamos si es de 2, de una de cada dos,de dos se saca una, de 4,2 y de 6,3, de 8, 4 y de las 10, 5…
103. Mo. Bueno, van 2 equipos que pasan, los otros 3 por favor…Valeria va a pasar ya…Iván acá, ¿ya pasaron?… Roberto… demuéstrame de que fue una de cada dos, con números, con figuras, con lo que sea… borra, borra por favor, no dejes lo de este equipo… a ver… Alexis, Alexis.. ¿ya pasó?… ¿ya?… hubo tiempo para discutir…
104. Ao. /Escribe en el pizarrón 5/10 = ½ , y explica / Nosotros pensamos que son 10 preguntas y que contestó 5… la simplificamos y nos salió /señala/ ½…
105. Mo. Simplifican y les sale una de cada dos… bueno eso ya sería usando lo que ustedes hicieron la otra clase… Otros equipos, faltan dos equipos…equipo de Iván… que no sean las mismas, quiero oir a Sandra, quiero oir a Verónica, no pueden pasarse todas las clases siempre…Bety… ¿ya puede?…
106. Ao. Nosotros…
107. Mo. Fuerte… Iván…
108. Ao. Nosotros pensamos que si quitábamos las 5 preguntas que había contestado bien y las multiplicábamos por dos, entonces, entonces vimos que eran, que eran 10… /anota en el pizarrón 5 x 2 = 10 /
109. Mo. Bueno, es su forma de encontrarlo… y el último equipo, el último, vamos…
110. Ao. Nosotros pensamos un medio… /escribe en el pizarrón ½ / un medio, y lo simplificamos y nos dio un medio…y así ya tenemos la mitad…
111. Mo. ¿Un medio, lo simplificaste? Yo no entiendo de dónde salió un medio, dices que lo simplificaste… Roberto, Daniel, Jaime…Iván voy a tener que hacer un cambio, Iván, te vas a trabajar allá por favor… bien lo vamos a dejar ahorita… sí, aquí está sucediendo algo que no me gusta y ustedes lo saben…se le carga toda opinión a una persona y que una persona resuelva el trabajo de los otros cuatro, y eso no es posible ¿sí?, así que ahora vamos a ver trabajar a los otros… Iván pásese para allá por favor… Bien, todos más o menos sacaron una conclusión que es una respuesta de cada dos… La siguiente pregunta que sería un poco más sencilla, ¿qué fracción, qué fracción contestaron, contestó bien ese niño?, ¿qué fracción común contestó ese niño? ¿qué facción del entero, de las 10 preguntas contestó bien?… Aquí ya le vamos a poner el 2, una de cada 2 preguntas… /anota el 2 en el espacio que había quedado en blanco: *La razón de respuesta correcta es de 1 de cada* ***2*** *preguntas. /…* ¿Qué fracción contestó correctamente?… Esto inclusive ya un equipo por ahí ya lo tiene… sí, o sea esto es súper

sencillo… Iván…llévate una silla, o en otra, o como sea pero córrele… primero la silla… ¿qué fracción contestó correctamente? Eso es más sencillo, o sea esto ya inclusive por ahí ya tiene un equipo la respuesta, de todo el entero, el entero eran 10 preguntas, ahora, qué fracción contestó correctamente… Equipo 1 pasa por favor, porque ya tienen la respuesta… Iván, por favor, ahí…/Iván se rehusaba a cambiarse de equipo/ Ya?… Ya Daniel?…

112. Aos. ** /comentan en cada equipo la posible respuesta/
113. Mo. Esto es mucho más sencillo…
114. Aos. /Todos los equipos anotan en el pizarrón **1/2**/
115. Mo. Bien, si todo el entero, si todo el examen, el entero, tiene 10 preguntas, contesta 5, pues obviamente, ¿qué fracción contestó correctamente?, le ponemos un medio, que sería lo que tenemos acá de la razón, una de cada dos preguntas… entonces aquí ya vemos que hay dos formas de escribir una razón… /escribe en el pizarrón/ “ *Hay 2 maneras de escribir una razón”* La primera sería ponerlo así /continúa escribiendo/ “*1 de cada 2”* y la otra manera es ponerlo como fracción común, en este caso sería la mitad, la mitad, una de cada dos /al mismo tiempo escribe en el pizarrón/ *“La ½”…*

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Álvarez Icaza Longoria, Ana María (2002). *La enseñanza del número en primer grado: dos estudios de caso.* Tesis de maestría. México. DIE. CINVESTAV.IPN.

Amadieu, P.F. (1839). *Traité d´Arithmétique a l´usage spécial des élèves qui se préparent aux écoles du gouvernement.* París :Hachette.

Anízar, Sabino (1911). *Nociones elementales de aritmética para uso de las Escuelas de Instrucción Primaria Elemental.* México. Herrero Hermanos.

Ávila Storer, Alicia (2001). *La experiencia matemática en la educación primaria. Estudio sobre los procesos de transmisión y apropiación del saber matemático escolar.* Tesis de doctorado. México. UNAM.

Balbuena, Hugo. (1988). *Análisis de una secuencia didáctica para la enseñanza de la suma de fracciones en la escuela primaria*. Tesis de maestría. Sección de Matemática Educativa. México: CINVESTAV. IPN.

Baldor, A. (1995). *Aritmética teórico práctica*. México: Publicaciones Cultural.

Bertely, María (2000) *Conociendo nuestras escuelas. Un acercamiento etnográfico a la cultura escolar.* México: Paidós.

Blanchard-Laville C. (coord), P. Berdot, M. Cámara, F. Hatchuel, F. Leutenegger, J. Loudet-Verdier, A. Mercier, N. Mosconi, S. Nadot, M.H. Salin, M.L. Schubauer y G. Sensevy (1997) . *Variations sur une leçon de mathématiques. Analyse d¨une sequence: "L´écriture des grandes nombres".* France: Éditions L´Harmattan.

Block Sevilla, David F.(1986*). Estudio didáctico sobre la enseñanza y el aprendizaje de la noción de fracción en la escuela primaria*. Tesis de maestría. México. DIE. CINVESTAV.IPN.

Block Sevilla, David F.(2001). *La noción de razón en las matemáticas de la escuela primaria. Un estudio didáctico*. Tesis de doctorado. México. DIE. CINVESTAV.IPN.

Block Sevilla, David F. (2002) (Coord). *Apuntes del Seminario de Didáctica de las Matemáticas. Documento de trabajo*. México. DIE. CINVESTAV.IPN.

Block Sevilla, David F. y Ana María Álvarez (1999). Los números en primer grado. Cuatro generaciones de situaciones didácticas. *Educación Matemática*. Vol. 11 No. 1. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Bosch, Mariana. (1994a) *La dimensión ostensiva en la actividad matemática. El caso de la proporcionalidad.* Tesis de doctorado. España. Universidad Autónoma de Barcelona.

Bosch, Mariana. (1994b) Les instruments du travail mathématique: le cas de la proportionnalité. En *Vingt ans de didactique des mathématiques en France*, M. Artigue, R. Grass (Eds). France : La Pensée Sauvage, Éditions . 305-312.

Bosch, Mariana y Y. Chevallard. (1999) La sensibilité de l´activité mathématique aux ostensifs. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol 19, No1, 77-124. France: La Pensé Sauvage, Éditions.

Briand, Joël y Carmen Chamorro (1991). Glossaire de didactique*.* En *Documents pour la formation des professeurs d´école*. France :IREM de Paris VII.

Brousseau, Guy. (1977). *La observación de las actividades didácticas*. Mecanograma.

Brousseau, Guy (1980). Problèmes de l´enseignement des décimaux. En *Vingt ans de didactique des mathématiques en France*, M. Artigue, R. Grass (Eds). France : La Pensée Sauvage, Éditions . 165-289

Brousseau, Guy y Julia Centeno (1991). Rôle de la mémoire didactique de l´enseignant. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 11 No. 23, 167- 210. Francia: La Pensée Sauvage,Éditions.

Brousseau, Guy (1994). Los diferentes roles del maestro. En *Didáctica de matemáticas. Aportes y reflexiones,* C. Parra e I. Saiz (comps). Argentina: Paidós. 65-94.

Brousseau, Guy. (1995).*L´enseignant dans la théorie des situations didactiques.* VIII École et Université d´Eté de Didactique des Mathématiques. Actes de l´École d´Eté. Francia.

Brousseau, Guy. (1998)*Théorie des situations didactiques. (Didactique des mathématiques 1970-1990)* France : La Pensée Sauvage Éditions.

Brousseau, Guy. (2000) Educación y didáctica de las matemáticas, Block, David y Patricia Martínez (trad). *Educación Matemática*. Vol. 12, No. 1. 5-38. Grupo Editorial Iberoamérica.

Brousseau, Guy (s/f) *Cours pour les professeurs des écoles Michelet*. Francia : Documento fotocopiado*.*

Brousseau, Guy y Virginia M. Warfield. (1999).The case of Gaël*, The journal of mathematical behavior*. Vol 18. No. 1. 7-52. USA. Ables publishing corporation.

Brun, Jean. (1997) *De l´adaptacition au jeu: la théorie des situations et les rapports enseignement_apprentissage.* Actes. 1ères Journées de Didactique des Mathématiques. Canadá. Universidad de Montreal.

Brun, Jean, F.Conne, R. Floris y M.L. Schubauer-Leoni (eds)(1998) *Interactions Didactiques. Méthodes d´étude du travail de l´enseignant.* France.

Candela, Antonia(1991).*La necesidad de entender, explicar y argumentar: los alumnos de primaria en la actividad experimental*. Tesis de maestría. México: DIE. CINVESTAV. IPN.

Candela, Antonia(1999).*Ciencia en el aula. Los alumnos entre la argumentación y el consenso.* México: Paidós Educador.

Candela, Antonia, Elsie Rockwell, Rafael Quiroz, Ruth Mercado, Ruth Paradaise (1994). *La construcción social del conocimiento en el aula: un enfoque etnográfico*. Documentos DIE 33A y 33B. México. DIE. CINVESTAV. IPN.

Castorina J. A., C. Coll, A. Díaz Barriga, F. Díaz Barriga, B. García, G. Hernández, L. Moreno, I. Muirá, A.M. Pessoa y C.E. Vasco. (1999). *Piaget en la educación. Debate en torno de sus aportaciones.* México: Paidós.

Chevallard, Yves y Michel Jullien (1989). *Sur l´enseignement des fractions au college. Ingénierie, recherche, société.* France : IREM d´Aix Marseille.

Chevallard, Yves. (1992) Concepts fondamentaux de la didactique :perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 12 No. 1, 73-111. Francia: La Pensée Sauvage, Éditions.

Chevallard, Yves. (1994) Nouveaux objets, nouveaux problèmes en didactique des mathématiques*.* En *Vingt ans de didactique des mathématiques en France*, M. Artigue, R. Grass (Eds). France : La Pensée Sauvage, Éditions.313-320.

Chevallard, Yves. (1997) *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado.* Argentina: Aique.

Chevallard, Yves. (1999) Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques: l´approche anthropologique. *Recherche en Didactique des Mathématiques.* Vol. 19, No.2, 221-266.

Chevallard, Yves, Mariana Bosch y Josep Gascón (1998). *Estudiar matemáticas.* España. Fondo Mixto de Cooperación Técnica y Científica México - España. Biblioteca del Normalista.

Coll, César y Derek Edwards (Eds). (1996). *Enseñanza, aprendizaje y discurso en el aula. Aproximaciones al discurso educacional.* España: Colección Cultura y Conciencia. Fundación Infancia y Aprendizaje.

Collette, Jean-Paul. (1998). *Historia de las matemáticas*. México: Siglo XXI.

Comiti, C., D. Grenier y C. Margolinas (1995). Niveaux de connaissances en jeu lors d´interactions en situation de clase et modélisation de phénomènes didactiques. En *Différents types de savoirs et leur articulation,* Gilbert Arsac, Jean Gréa, Denise Grenier y Andrée Tiberghien (coords). France : La Pensée Sauvage, Éditions.

Comin, Eugène. (2000).*Proportionnalité et fonction linéaire. Caractères, causes et effets didactiques des évolutions et des réformes dans la scolarité obligatoire.* Thèse pour obtenir le grade de docteur. France. Université Bordeaux 1.

______ (2001).*Les dificultés d´enseignement de la proportionnalité a l´école et au college.* En prensa. France.

Depuis, Claire y François Pluvinage (1981). La proportionnalité et son utilisation. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol 2, No2, 165-212. France : La Pensée Sauvage, Éditions.

Edwards, Verónica (1995). Las formas de conocimiento en el aula. En *La escuela cotidiana*. Rockwell, Elsie (Coord), Citlali Aguilar, Antonia Candela, Verónica Edwards, Ruth Mercado y Etelvina Sandoval. México: F.C.E

Figueras M. Olimpia, G. López Rueda y S. Mochón Rueda (1992). *Guía para el maestro. Sexto grado*. Educación primaria. México.

Freundental, Hans (1980). *An example of didactical phenomenology. Ratio and proportion. Weeding and Sowing*. Netherland: Reídle Publishing.

Gascón, Joseph (1998). Evolución de la didáctica de las matemáticas como disciplina científica. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol.18 No. 1, 7-34. Francia: La Pensée Sauvage, Éditions.

Geertz, Clifford (1989). *El antropólogo como autor*. Barcelona : Paidós.

Grize, Jean Blaize (1968). Analyses pour servir a l´étude épistémologique de la notion de fonction. En Piaget, Jean, J.B. Grize, A. Szeminska y V. Bang *Épistémologie et psychologie de la fonction*. Francia : Presses Universitaires de France. Bibliothèque Scientifique Internationale.

Hache, Christophe y Aline Robert (1977). Un essai d´analyse de pratiques effectives en classe de seconde, ou comment un enseignant fait « fréquenter » les mathématiques a ses élèves pendant la classe ?. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* Vol.17 No. 3, 103-150 Francia: La Pensée Sauvage, Editions.

Hammersley, Martyn, Paul Atkinson (1994). *Etnografía. Métodos de investigación*. Barcelona: Paidós

Hart, Kathleen, M.L. Brown, D.Küchemann, D. Kerslake, G. Ruddock, M.McCartney (1981). *Children's Understanding of Mathematics: 11-16.* Great Britain: Alden Press.

Hernández, Julio S. y Aurelio López Orche.(1962). *Mi libro de sexto año. Aritmética y Geometría.* México: CONALITEG

Karplus, Robert , Steven Pulos y Elizabeth K. Stage. (1983) Proportional Reasoning of Early Adolescents. En R. Lesh &M. Landau (Eds) *Acquisition of mathematics concepts and processes*, 45-90. New York: Academic.

Küchemann, Dietmar (1989).The effect of setting and numerical content on the difficulty of ratio tasks. *Psychology of Mathematics Education*. Actes de la 13e Conférence Internationale 9-13 juillet. Vol. 2 . France :

Margolinas, Claire (1998). *Le milieu et le contrat, concepts pour la construction et l´analyse de situations d´enseignement.* Actes de l´U.E. de la Rochelle : Analyses des pratiques enseignants et didactique des mathématiques. Francia

Maurice, Jean-Jacques (1996). Problèmes multiplicatifs: L´expérience de l´enseignant, l´action effective de l´élève. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol.16 No. 3, 323-347. Francia: La Pensée Sauvage, Éditions.

Mercado, Ruth (1994). El diálogo de voces sociales en los saberes docentes. En *La etnografía en educación. Panorama, prácticas y problemas*, Rueda Beltrán Mario, G. Delgado Ballesteros y Z.Jacobo (coords).México: Publicaciones CISE.

______ (2002). *Los saberes docentes y la relación de trabajo con los niños en la enseñanza.* Tesis de doctorado. México. DIE-CINVESTAV. IPN

Noelting, Gerard (1980a). The development of proportional reasoning and the ratio concept. Part I.Differentiation of stages. *Educational Studies in Mathematics* 11, 217-253. Holland and USA: Reidel Publishing.

______ (1980b). The development of proportional reasoning and the ratio concept. Part II. Problem-structure at successive stages; problem-solving strategies and the mechanism of adaptive restructuring. *Educational Studies in Mathematics* 11, 331-363. Holland and USA: Reidel Publishing.

Novaro Vega, Rosa María. (1961). *Mi libro de quinto año. Aritmética y Geometría. Estudio de la Naturaleza*. México: CONALITEG

Perrin-Glorian, Marie-Jeanne (1994). Théorie des situations didactiques: naissance, développement, perspectives. En *Vingt ans de didactique des mathématiques en France*, M. Artigue, R. Grass (Eds). France : La Pensée Sauvage, Éditions. 97-147

______ (1998). Analyse d´un problème de fonctions en termes de milieu. Structuration du milieu pour l´élève et pour le maître. *Actes de l´U.E. de la Rochelle.* Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques. France : en prensa

Pezard, Monique (1985). *Une expérience d´enseignement de la proportionnalité aux élèves instituteurs*. Thèse 3éme cycle. France : Université Paris VII.

Ricco, Graciela (1982). Les premières acquisitions de la notion de fonction linéaire chez l´enfant de 7 a 11 ans. *Educational Studies in Mathematics* 13, 289-327. Holland and USA : Reidel Publishing

Rockwell, Elsie. (1986). La relevancia de la etnografía para la transformación de la escuela. *Memorias. Tercer Seminario Nacional de Investigación en Educación*. Colombia: UPN. ICFES. 15-29

______ (1987). *Reflexiones sobre el proceso etnográfico (1982-1985).* Documento DIE No. 13. México: DIE.CINVESTAV.IPN

______ (1994) La etnografía como conocimiento local. En *La etnografía en educación. Panorama, prácticas*, *problemas*. Rueda Beltrán Mario, Gabriela Delgado Ballesteros y Zardel Jacobo (coords). México: CISE-UNAM, The University of New México.

______ (1995) (Coord), Citlali Aguilar, Antonia Candela, Verónica Edwards, Ruth Mercado, Etelvina Sandoval. *La escuela cotidiana.* México: F.C.E.

______ (1998). Perspectiva de la investigación cualitativa sobre la práctica docente. DIDAC.*Educación y docencia*, No. 12. Órgano del Centro de Didáctica de la Universidad Iberoamericana. México: Universidad Iberoamericana, 22-25

______ y Grecia Gálvez (1982). Enseñanza de las ciencias naturales y sociales en México. *Educación* 42,97-141. México:Revista del Consejo Nacional Técnico de la Educación.

______ y Justa Ezpeleta (1995). *La escuela, relato de un proceso de construcción inconcluso.* Documento DIE No. 1. México: DIE.CINVESTAV.IPN.

______ y Ruth Mercado.(1999).*La escuela, lugar del trabajo docente. Descripciones y debates.* México :DIE.CINVESTAV.IPN.

Rouchier, André(1980) Situations et processus didactiques dans l´étude des nombres rationnels positifs. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol.1 No. 2, 225-275. Francia: La Pensée Sauvage, Éditions.

______ (1994).Naissance et développement de la didactique des mathématiques. En *Vingt ans de didactique des mathématiques en France*, M. Artigue, R. Grass (Eds).

France : La Pensée Sauvage, Éditions.
Ruiz Zúñiga, Angel (1992). Las matemáticas modernas en las Américas. Filosofía de una reforma*. Educación Matemática*. Vol.4 No.1. México : Grupo Editorial Iberoamérica.
Salín Marie-Hélène (1998). Un dispositif d´observation de l´enseignement des mathématiques : Le centre pour l´observation et la recherche sur l´enseignement des mathématiques(COREM). En Brun, Jean, F.Conne, R. Floris y M.L. Schubauer-Leoni (eds) *Interactions Didactiques. Méthodes d´étude du travail de l´ enseignant*. France.
SEP. (1932)*Memoria relativa al Estado que guarda el Ramo de Educación Pública.* México, p. 37-45
SEP. La Educación Pública en México*. Memoria 1934-1940*. Tomo II.
SEP. Departamento de Enseñanza Primaria y Normal.(1940,27-36) *Programas para las Escuelas Primarias del Distrito Federal*. Cd. de México.
SEP. (1941) Dirección General de Educación Primaria en los Estados y Territorios. *Programas para las Escuelas Primarias de la República.* México.
SEP. (1956) Dirección General de Educación Primaria y Supervisión de los Estados y Territorios de la República. *Programas para las Escuelas Primarias de la República Mexicana*. *1944.* México
SEP. (1961) *Programas de Educación Primaria aprobados por el Consejo Nacional Técnico de la Educación*. México.
SEP. (1972) *Plan de Estudios y programas de Educación primaria*. México.
SEP.(1974a) *Matemáticas. Libro para el maestro: programa abreviado por objetivos de aprendizaje, guía didáctica y fichas de evaluación*. México. CONALITEG.
SEP (1974b) *Matemáticas. Sexto grado. Libro para el alumno.* México: CONALITEG
SEP. CNTE. (1977).*Plan y Programas de Estudio para la Educación Primaria. 6° grado.* México. CONALITEG.
SEP. (1982). *Libro para el maestro. Sexto grado*. México. CONALITEG
SEP. (1989) *Matemáticas . Sexto Grado.* México.CONALITEG
SEP (1992). *Programas de Educación Primaria. Contenidos básicos. Ciclo escolar 1992-1993.* México: Fernández Editores.
SEP. (1993a). *Educación Básica. Primaria. Plan y Programas de Estudio* .México. CONALITEG
SEP. (1993b). *Avance programático. Cuarto grado*. México: CONALITEG.
SEP. (1993c). *Avance programático. Quinto grado*. México: CONALITEG.
SEP. (1993d). *Avance programático. Sexto grado*. México: CONALITEG.
SEP. (1994a). *Libro para el maestro. Matemáticas*. *Cuarto grado*. México: CONALITEG.
SEP. (1994b). *Libro para el maestro. Matemáticas. Quinto grado*. México: CONALITEG.
SEP. (1994c). *Libro para el maestro. Matemáticas. Sexto grado*. México: CONALITEG.
SEP. (1994d). Fichero*. Actividades didácticas. Matemáticas. Quinto grado.* México: CONALITEG
SEP. (1995a). Fichero. *Actividades didácticas. Matemáticas. Cuarto grado*. México: CONALITEG
SEP. (1995b). Fichero*. Actividades didácticas. Matemáticas. Sexto grado*. México: CONALITEG
SEP. (1995c). *La enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria*. *Taller para maestros.* Segunda parte. México: CONALITEG
SEP (1995d) *Matemáticas. Sexto grado. México*: CONALITEG. (1ª reimpresión revisada)
SEP (1997a) *Matemáticas. Cuarto grado.* México: CONALITEG. (2ª reimpresión)
SEP (1997b) *Matemáticas. Quinto grado.* México: CONALITEG. (3ª reimpresión)
SEP(2000) *Matemáticas. Quinto grado*. México. CONALITEG. ((1ª edición)
SEP (2001) *Matemáticas. Sexto grado*. México. CONALITEG. (1ª edición)

Smith, David Eugene. (1958). *History of mathematics*. Volume II. USA : Dover Publications.
Soto Cornejo Isabel y Nicolás Rouche. (1995) Problemas de proporcionalidad resueltos por campesinos chilenos. *Educación Matemática*. Volumen 7, No. 1. México : Edit. Iberoamericana
Taboada, Eva. (1999)*Las* ceremonias cívicas. ¿Un currículum paralelo de la enseñanza de la historia *?* En Remedi, Eduardo (coord.) *Encuentros de Investigación Educativa 95-98.* México: DIE – Plaza y Valdés Editores
Tarnier, E.A. (1877) *Nouvelle Arithmétique Théorique et Pratique .*París : Hachette
Tourniaire, Françoise (1986). Proportions in elementary schoo*. Educational Studies in Mathematics* 17, 401-412. Holland and USA: Reidel Publishing.
Vergnaud, Gérard, A. Rouchier, G. Ricco, P. Marthe, R. Metregiste, J. Giacobbe (1979) *Acquisition des structures multiplicatives dans le premier cycle du second degré*. Francia : Université d´Orléans.
_______ (1981). Quelques orientations théoriques et méthodologiques des recherches françaises en didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol.2, No.2, 215-232. Francia: La Pensée Sauvage, Éditions.
_______ (1987). Multiplicative Structures. En J. Hiebert y M. Behr (eds) *Number concepts and operations in the middle grades*. Vol. 2, 141-161. New York:: NCTM
_______ (1995). *El niño, las matemáticas y la realidad. Problemas de la enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria.* México: Trillas
Walther, G. (1998) L´explicite: un problème de didactique ?. En Laborde, Colette (comp) Actes du premier colloque franco-allemand de didactique des mathématiques et l´ informatique. *Recherches en didactique des mathématiques*. 201-211.Francia. La Pensée Sauvage Éditions.
Weiss, Eduardo (coord), David Block, Irma Fuenlabrada, Judith Kalman, Rafael Quiroz y Eva Taboada (1996). La enseñanza: diálogos entre distintos enfoques. *Simposio: Caminos de la Investigación Educativa*. México: DIE-CINVESTAV.
______ (1999). Reflexiones sobre etnografía y didáctica*. Simposio: Investigación Educativa. Logros y retos frente al año 2000*. México: UIA
Wertsch, James V. (1993). *Voces de la mente. Un enfoque sociocultural para el estudio de la Acción Mediada.* España: Visor.

El jurado designado por el Departamento de Investigaciones Educativas del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, aprobó esta tesis el día 23 de enero de 2004.

Dr. David Francisco Block Sevilla,
Investigador del Departamento de
Investigaciones Educativas.

Dr. Eduard Johann Weiss Horz,
Investigador del Departamento de
Investigaciones Educativas.

Alicia Avila S.

Dra. Alicia Avila Storer,
Investigadora Titular en la
Dirección de Investigación en la
Universidad Pedagógica Nacional

M. en C. Patricia Martínez Falcón,
Responsable del Área de
Cómputo para Niños de la
Dirección General de Servicios de
Cómputo Académico.
UNAM