CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS
DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
Departamento de investigaciones Educativas

# EL PROFESOR, EL SABER A ENSEÑAR Y EL SABER ENSEÑADO: UN ESTUDIO DE CASO SOBRE LA ENSEÑANZA DE LA MULTIPLICACIÓN EN SEGUNDO GRADO DE PRIMARIA

Tesis que para obtener el grado de Maestro en Ciencias en la Especialidad de Investigaciones Educativas



Presenta

***Zorobabel Martiradoni Galindo***
Licenciado en Psicología



Directora de tesis

***Irma Rosa Fuenlabrada Velázquez***
Maestra en Ciencias

Febrero, 2004

Calzada Tenorios No. 235 México, D.F. C.P. 14330 Apartado Postal 86-355 Tel. 5061 2800 Fax DIE 5603 3957

PARA LA ELABORACIÓN DE ESTA TESIS, SE CONTÓ CON EL APOYO DE UNA BECA DE CONACYT

AGRADECIMIENTOS A:

Mis grandes tesoros: Nancy y Giovanni por su amor, comprensión y paciencia.

Mis amados padres (Miguel y Eulalia) y mis hermanos porque sé lo que esta tesis representa para ellos.

Irma Fuelabrada por su enorme paciencia y decisión para graduar a un alumno escurridizo, que siempre adquiría muchos compromisos de trabajo, y dedicaba poco tiempo para sistematizar y redactar este trabajo. Muchas gracias Yimi.

La Dra. Alicia Avila, M. en C: Mónica Shulmaister y Dr. David Block por el tiempo y la amabilidad que tuvieron en la revisión cuidadosa de este trabajo y los comentarios que lo enriquecieron.

Mis compañeros y amigos de trabajo que han pertenecido o pertenecen al equipo de trabajo de matemáticas de Educación Especial, que ha representado un espacio de crecimiento académico durante mi carrera profesional.

Los profesores del Departamento de Investigaciones Educativas por los conocimientos que generosamente nos fueron ofrecidos a quienes fuimos parte de la generación 94 –96.

"El investigador se queja del hecho de que el profesor que experimenta una situación concebida por el primero "interpreta" la situación. Dicha interpretación del profesor, que se traduce de manera concreta en las iniciativas imprevistas durante el desarrollo de la secuencia de clase, nos parece que debe tomarse como objeto de estudio en sí misma y no como un tipo de "ruido" inevitable en la experimentación".

*G. Arsac.*

"De antemano sabemos que los profesores transforman toda propuesta didáctica que se les ofrece. Lo que queremos es precisamente conocer las transformaciones que realizan y el tipo de éstas".

*I. Fuenlabrada.*

## RESUMEN

El presente trabajo muestra cómo una profesora de primaria interpreta e implementa en el aula (sin capacitación previa al respecto) la propuesta didáctica oficial para la enseñanza de la multiplicación de segundo grado. Durante dicha implementación que duró varios meses, se observó la interacción entre la concepción sobre la matemática y su forma de enseñarla por parte de la profesora, con la concepción matemática y metodológica que subyace en la propuesta oficial. También se estudiaron las decisiones didácticas de la docente y sus efectos sobre en aprendizaje de la multiplicación en sus alumnos. Los referentes teóricos utilizados para estudiar este proceso didáctico, han sido tomados de la Didáctica de las Matemáticas de la Escuela Francesa.

## ABSTRACT

This work shows the ways that a primary school teacher (with out previous training) implemented the official proposal for teaching multiplication in second grade. During several months it was observed the interaction between professor's way to teach multiplication (with a implicit conception of maths) and the methodology of the official proposal (with its conception of mathematics). Teacher´s didactic decisions and its effects in student's learning of multiplication were observed. The theorical frame used has been drawn from French school of Mathematics Didactics.

# ÍNDICE

# INTRODUCCIÓN.

El estudio de los ajustes que una profesora realiza a una propuesta didáctica nacional para la enseñanza de la matemática no es una labor fácil sobre todo cuando el observador de este proceso es coautor de dicha propuesta. El problema evidentemente es un asunto de tomar una distancia sana con respecto al objeto de estudio, el epígrafe de Arsac en este sentido es revelador de este sentimiento del investigador que bajo una mirada evaluativa culpa al profesor de "leer" y aplicar de forma distorsionada las intenciones de una situación didáctica concebida por el primero. El propósito de este trabajo es alejarse en lo posible del análisis didáctico crítico que intente convertir en víctima al profesor; y tomar como objeto de estudio las iniciativas generalmente imprevistas que toma el docente en el transcurso de su clase y que les llevan a transformar las situaciones didácticas. En el caso particular de esta tesis, se pretende comprender las motivaciones que tiene para realizarlas en la enseñanza de los problemas multiplicativos plasmada en el libro de texto gratuito *Matemáticas Segundo Grado*, el fichero de actividades didácticas y el libro del maestro correspondientes.

Interesa afirmar que no se pretende hacer juicios de valor al trabajo didáctico de la profesora que participó en la experiencia didáctica, por el contrario, se tiene una actitud de agradecimiento hacia ella por su generosidad al permitirnos entrar a la intimidad de su aula, y más aún a un observador que de antemano sabía que era coautor del libro de texto. También agradecemos su comprensión por las condiciones metodológicas del estudio, que impidieron devolverle ampliamente elementos didácticos que pudieran haber enriquecido su trabajo educativo.

Es esencial aclarar y precisar de entrada algunas ideas que guiaron la presente investigación:

- Partimos del hecho de que todos los profesores realizan ajustes a toda propuesta didáctica de la que hacen uso, en función de la epistemología que adopta para la enseñanza de la materia, esto es de su idea acerca de lo que es la matemática, cómo se enseña y cómo es aprendida por los alumnos, y de algunos factores institucionales que inciden en el aula como lo son el tiempo y las condiciones laborales de la escuela. Sin embargo, aún y cuando esto es del dominio de los investigadores educativos y de los propios profesores, nos proponemos documentar el fenómeno de la transposición didáctica de una profesora e intentar sistematizar y dar cuerpo de este fenómeno tan central en la enseñanza de cualquier área del conocimiento escolar, y particularmente de un segmento del campo conceptual de los problemas multiplicativos. La transposición didáctica es una realidad que tiene que ser estudiada.

- Los datos, si bien se producen en un espacio didáctico provocado experimentalmente, no por ello dejan de tener validez y pueden aportar información valiosa para los diseñadores de libros de texto o ficheros, al construir propuestas didácticas para este medio didáctico tan particular. También aportan elementos que podrían considerarse para la elaboración de talleres de capacitación para profesores de primaria en servicio por parte de las autoridades educativas. Y si este documento es leído por los profesores, creemos que podrían encontrar elementos de reflexión sobre su desempeño didáctico al "mirar" las estrategias de enseñanza instrumentadas por la maestra y los efectos que tiene sobre el aprendizaje de sus alumnos.
- Dada la gran cantidad de información con la que se cuenta (31 registros de clase y 7 entrevistas con la maestra), no fue posible agotar todas las transposiciones didácticas, así pues sólo se analizan las más representativas e importantes.

La estructura de este trabajo está compuesta por tres capítulos y las conclusiones. A grosso modo su contenido es el siguiente.

En el Capítulo I, se describen los antecedentes y el contexto nacional sobre el cambio curricular de la escuela primaria ocurrido en 1993, particularmente en el área de matemáticas. Dado que el cambio curricular presentó características significativas en la metodología de enseñanza, se propone como problema a estudiar: la interacción entre dos modelos de enseñanza: el de la propuesta oficial y el personal de un profesora de segundo grado que aplica las situaciones referidas a los problemas multiplicativos siguiendo las indicaciones didácticas propuestas en el libro del maestro a la vez que los alumnos utilizan el Libro de Texto Gratuito (LTG). También se describe la metodología de trabajo y una parte del marco referencial que remite a la exposición de la teoría de las situaciones didácticas y la transposición didáctica.





El capítulo II, es una continuación del marco teórico, aquí: a) se caracteriza al actual enfoque de enseñanza de la escuela oficial; b) se expone la complejidad del campo conceptual de los problemas multiplicativos; c) se argumentan desde los niveles matemático, psicológico y didáctico la elección del camino de acceso a la enseñanza de los problemas multiplicativos, y finalmente, d) se describe la secuencia didáctica por la que se hace transitar a los alumnos de segundo grado para que construyan el conocimiento matemático del campo conceptual de los problemas relacionados con la multiplicación o la división.

En el Capítulo III, se muestran y analizan los datos obtenidos durante la experiencia en el aula. Las categorías de análisis versan sobre tres grandes vertientes, recortadas artificialmente para fines de análisis: a) transposición a la metodología de enseñanza, entre los que destacan: el uso e importancia de materiales didácticos en el proceso de enseñanza y las formas de organización del grupo; b) transposición sobre el conocimiento matemático a enseñar, que aluden a las concepciones que la profesora tiene acerca de lo que es un problema matemático, la multiplicación, las tablas de multiplicar, o lo que en palabras de Chevallard constituye la topogénesis y cronogénesis del saber matemático del docente en torno a los problemas multiplicativos. Esto es, qué conocimientos matemáticos piensa el profesor que deben ser enseñados para la multiplicación y la división, su razón de ser o sentido, y la organización y tiempos didácticos que dará a cada uno de ellos durante el ciclo escolar; y c) se analiza los efectos de la transposición didáctica sobre el aprendizaje de los alumnos, esto es, qué aprendizajes sobre la multiplicación y la división logran los alumnos a partir de la transposición didáctica que la docente realiza de la propuesta oficial. Se describen grosso modo las nociones conceptuales que gradualmente aparecieron en los alumnos en el proceso de apropiación de la multiplicación y la división.

# CAPÍTULO I

# MARCO TEÓRICO - METODOLÓGICO

En el presente Capítulo se exponen los antecedentes del cambio curricular en la escuela primaria ocurrido a finales de la década de los ochenta. En particular en el área de matemáticas los cambios más significativos fueron en la metodología de enseñanza. De ahí el planteamiento del problema de este estudio: cómo un profesor de primaria entiende y aplica la actual propuesta de enseñanza de matemáticas de segundo grado. Se abordan asimismo las características metodológicas de la investigación; los fundamentos teóricos del enfoque de enseñanza de la matemática, que remiten a una joven ciencia denominada por la escuela francesa como "Didáctica de las matemáticas" y cuyos conceptos fundamentales giran en torno a: la teoría de las situaciones didácticas; los campos conceptuales y la transposición didáctica.

## 1.1 Antecedentes

Muchos cambios importantes se generaron en la educación básica en México desde la puesta en marcha del Programa para la Modernización Educativa en el año de 1989. A grandes rasgos las acciones de este programa se centraron en: la renovación de los contenidos y métodos de enseñanza; el mejoramiento de la formación de los profesores; la articulación de los niveles educativos; la ampliación del apoyo compensatorio a la regiones con escuelas con mayor rezago educativo y; la federalización educativa que traslada la responsabilidad de dirección de las escuelas de educación básica a las autoridades estatales.

Acorde con las acciones anteriores, se renovaron los Libros de Texto Gratuito (LTG) de la primaria a través de una convocatoria nacional a la sociedad civil para que quienes se consideraran con conocimientos sobre la enseñanza de las matemáticas pudieran participar en ella; se establece el programa de Carrera Magisterial con el propósito de promover y estimular económicamente la actualización de los docentes.

Los nuevos planes y programas de estudio encomiendan a la escuela, como objetivos centrales, asegurar en los alumnos el dominio de la lectura y la escritura; la formación matemática elemental y la destreza en la selección y uso de la información.

El actual curriculum de la escuela primaria (1993), en el área de matemáticas, plantea propósitos y un enfoque de enseñanza que responde a la intención de impartir una educación con sentido para los alumnos, en tanto considera fundamental "(...) que los alumnos se interesen y encuentren significado y funcionalidad en el conocimiento matemático, que lo valoren y hagan de él un instrumento que les ayude a reconocer, plantear y resolver problemas presentados en diversos contextos de su interés" (SEPe 1993, p. 52).

Queda claro que esta postura amplia y flexible permite relacionar el área de matemáticas a las necesidades particulares de quien la usa (en un contexto social particular), y además favorece el acceso al conocimiento universal, en este sentido Douady (1995, p. 63) señala: "Saber matemáticas implica dos aspectos. Por un lado, se refiere a la disponibilidad funcional de algunas nociones y teoremas matemáticos para resolver problemas e interpretar nuevas situaciones...las nociones y teoremas tienen un status de **herramienta**. Las herramientas están inscritas en un contexto, que a su vez está influido por *alguien* (o por un grupo) en un momento determinado. Saber matemáticas también significa identificar las nociones y los teoremas como elementos de un corpus reconocido social y científicamente. Al mismo tiempo es formular definiciones, enunciar los teoremas de ese corpus y demostrarlos. Las nociones y teoremas matemáticos tienen un status de **objetos**".

El cambio central que se plantea en el actual curriculum de matemáticas de la escuela primaria es fundamentalmente didáctico: los alumnos construirán y aprenderán el conocimiento matemático al resolver problemas. Es decir, situaciones problemáticas que funcionalizan el conocimiento escolar que se intenta que los alumnos se apropien y que retan su capacidad cognitiva.

Las actividades de aprendizaje planteadas tanto en los documentos de apoyo para el maestro como en el libro para los niños propician la construcción de los conceptos matemáticos a través de la resolución de problemas, en una dinámica de interacción, diálogo y confrontación de los diferentes puntos de vista de los alumnos respecto a las estrategias de solución que encontraron.

En conclusión, la actual propuesta se basa en el planteamiento y resolución de problemas, y pretende generar un aprendizaje significativo apoyándose en la reflexión y el sentido que el niño otorgue a las matemáticas a través de situaciones didácticas diseñadas, en las que los conceptos matemáticos se funcionalizan y que los profesores implementan en el aula.





Se coincide con el punto de vista de Chevallard (1997) quien considera que la implementación de una propuesta didáctica por los profesores no es un acto mecánico, la lectura y aplicación que hacen de cualquier propuesta de enseñanza de la matemática es desde el modelo de enseñanza personal[1], donde el criterio pragmático tiene un peso determinante en sus decisiones pedagógicas (se usa sólo lo que funciona).

Es por esta razón que interesa investigar la interpretación, aplicación y motivaciones que guían a una profesora de primaria (un estudio en caso) al ajustar o transponer la propuesta didáctica de las matemáticas para segundo grado.

## 1.2 Planteamiento del problema

*"...el objetivo principal de la investigación no es encontrar la interpretación correcta, bien puede convertirse en una búsqueda imposible. El propósito de la investigación es ampliar las interpretaciones disponibles al consumidor de la investigación"*
*Robert Donmoyer*

Diversos autores señalan al profesor como una variable fundamental para que cualquier propuesta de enseñanza pueda funcionar. "(...) ya que en definitiva va a ser éste quien la interprete y la ponga en práctica. Las propuestas serán valoradas por los profesores desde el punto de vista de su modelo didáctico personal que tiene su origen en la síntesis de sus concepciones epistemológicas particulares, su experiencia práctica anterior; y la adecuación de su comportamiento al contexto complejo en el que desarrolla su actividad profesional" (Ballenilla 1992, p. 43).

Desde el punto de vista didáctico, el cambio en la forma de cómo organizar la enseñanza, en particular a un enfoque en el que subyacen lineamientos constructivistas de aprendizaje de las matemáticas, trajo consigo varias problemáticas para el docente mexicano, quizás la más relevante sea: el diseño didáctico de las actividades del fichero y lecciones del LTG ubican al alumno y al conocimiento matemático cómo los principales actores didácticos, que son puestos en interacción gracias a la intervención del profesor, quien elige y gradúa

[1] El modelo de enseñanza según Charnay (1994) se caracteriza según el tipo de contrato didáctico establecido por el profesor. Así este autor reconoce tres grandes modelos de enseñanza: el normativo o tradicional, el

las situaciones de aprendizaje (situaciones problemáticas) que funcionalizan el conocimiento matemático escolar que se pretende que los niños aprendan. Es decir, el diálogo entre el conocimiento y el sujeto que aprende se realiza teniendo al profesor en un papel si bien, -por momentos- como observador, la situación no deposita en éste (el profesor) el papel protagónico "de depositario del conocimiento" que la enseñanza tradicional le ha conferido. Lo anterior implica como señala Brousseau (1979, p. 59) agregar una nueva función al profesor, ser neutral – pero no indiferente- mientras que el alumno con sus conocimientos y experiencias previas intenta resolver el problema. En otras palabras, el enfoque reclama del maestro ser transmisor del conocimiento –no renuncia al papel que venía realizando, y a la vez, ser facilitador o proveedor de situaciones de aprendizaje acordes a la capacidad cognitiva y de conocimiento matemático de sus alumnos. En esta última función el maestro (entre otras cosas) propicia el trabajo en equipo; la confrontación de los resultados encontrados por los alumnos; la indagación de los diferentes procedimientos de solución, etcétera. En palabras de Edwards (1990; p. 36). "Pero quedémonos, dentro de la educación, con los conceptos de transmisión y de facilitación. Por supuesto que podemos decir que las dos cosas son necesarias. Los niños tienen que aprender cosas del profesor, pero no pueden aprender cosas que estén demasiado alejadas de lo que ellos ya conocen, ó más allá de sus propias experiencias. En la práctica, los dos procesos, transmisión y facilitación, han de ir juntos".

La problemática para el docente implica por principio de cuentas reducir el tiempo que dedica a la enseñanza en el sentido de transmisión de la información del conocimiento constituido. En este sentido Brousseau (1986; p. 33) indica que entre más un maestro enseña sus alumnos menos aprenden, en tanto "(...) si él mismo (el profesor) produce sus preguntas y respuestas de matemáticas, priva al alumno de la posibilidad de actuar". El hecho de dejar actuar al alumno en clase, implica un acto de renuncia de poder del maestro en el aula (que por cierto no es fácil), ese poder debe ser dado voluntariamente por éste a los niños para que lo asuman, es decir, sientan la situación problemática que se les plantea como "su problema" y así puedan asumir la responsabilidad de resolverlo. La otra fuente problemática que plantea el enfoque, no es que el maestro deje de hacer, sino por el contrario, que haga muchas más cosas que las que venía realizando.

incitativo (utilizado por las denominadas escuelas activas) y el modelo aproximativo (que actualmente está incorporado en la propuesta oficial de enseñanza de la matemática de la escuela primaria).





El presente trabajo remite al seguimiento de un estudio en caso en el que se indaga ***cómo una profesora de segundo grado de primaria entiende y aplica desde la perspectiva de su práctica pedagógica, la secuencia de los problemas multiplicativos del actual LTG (SEP, 1994a) y el fichero de actividades de segundo grado de primaria (SEP, 1994b). En otras palabras, lo que interesa es el estudio del fenómeno de la transposición didáctica que realiza una profesora hacia una nueva propuesta de enseñanza, no sólo desde el discurso de lo que ella entiende, sino desde el nivel de la práctica, de los ajustes que realiza al aplicarla en su grupo.*** Otra pregunta involucrada en esta perspectiva de análisis del mismo fenómeno, la cual también interesa indagar es: ***¿Qué logra transmitir por sí misma la nueva Propuesta respecto de su intención didáctica a la profesora, sin que ésta haya recibido cursos de capacitación sobre ella?***

La relevancia de estudiar el fenómeno de la transposición didáctica en la aplicación de una propuesta nacional de matemáticas, es doble:

- En primer lugar, porque se quiere documentar la forma cómo una profesora mexicana "dialoga" con una metodología de enseñanza diferente a la suya, ¿hay puntos de contacto y de divergencia entre los dos modelos de enseñanza (personal y oficial)? ¿al interactuar, dichos modelos de enseñanza se enriquecen simultáneamente o se oponen entre sí?

- En segundo lugar, porque desde el nivel teórico de la investigación en didáctica de la matemática se ha reconocido que de la tríada didáctica (maestro, alumno, saber escolar), el maestro ha sido el menos estudiado. Por dar algunos ejemplos: a) La didáctica de la matemática en Francia se construyó sobre la base de la teoría psicogenética de Piaget, desde este perspectiva se restituyó por principio de cuentas el lugar al alumno, pero "(...) en el desarrollo naciente de la didáctica, que imponía de antemano una limitación relativamente estricta a la complejidad susceptible de ser abordada científicamente, el profesor tuvo que pagar de alguna manera el precio de que el estudiante se haya tenido en cuenta en el nivel del modelaje y de la teoría" Artigue (1995, p. 46). b) En el diseño de las situaciones didácticas, el análisis a priori de la ingeniería didáctica no ha dado juego al lugar del profesor. Y si bien el estudiante es considerado en dos niveles descriptivo y predictivo (en tanto se pueden prever los campos de comportamiento posibles durante el desarrollo de una situación de aprendizaje) "El profesor no interviene sino en un nivel descriptivo, como si la situación lo determinara por completo como actor del sistema" Artigue (1995, p. 47). En otras palabras, la didáctica no hace mucho inició el camino de estudiar más profundamente el rol del profesor, ya que únicamente ha sido estudiado en esencia por sus relaciones con la devolución y la institucionalización, y aunque "De alguna manera, la noción de contrato didáctico permite recuperar en parte al profesor como actor de tiempo completo en el sistema. Sin embargo, no se puede negar que hasta el momento el profesor ocupa siempre un papel marginal en la teorización didáctica" Artigue (1995, p. 47).

### 1.3 Metodología de la investigación

La observación en el aula es el medio por el cual se realiza el seguimiento a la profesora Estela[2] durante la implementación en aula de la innovación educativa. Sin embargo, conviene aclarar las características particulares de esta forma de obtener los datos para la investigación. Se quería obtener información por dos vías. Por una parte, a través de la observación en el aula de la implementación de las situaciones de aprendizaje; sin la posibilidad de intervención por parte del observador durante el desarrollo de éstas. Interesaba documentar lo que comunica la propuesta didáctica a la docente y, por otra, la de preguntar y comentar con ella después de la clase, acerca de los aspectos más significativos de su intervención didáctica. Se intentó en la medida de lo posible no promover cambios en la forma de enseñanza de la profesora ni en su entorno, y centrase en comprender las razones que ella externa sobre aspectos relevantes de su actuación como enseñante.

Las características del contrato realizado entre quien realiza el estudio y Estela, para hacer posible el trabajo fueron:

a) El investigador - con el permiso del director y del inspector- solicitó a las tres docentes de segundo grado de una escuela primaria - del turno matutino del D.F.- su participación voluntaria al proyecto de investigación.

b) El profesor o profesora que aceptara participar[3], tendría que leer y/o preparar el material necesario para dar la clase, a partir de la selección de las actividades y lecciones para la

[2] El nombre de la maestra ha sido modificado para preservar su identidad.
[3] En el momento que se realiza la experiencia, aún no circulaba en el sistema educativo el material del Programa Nacional de Actualización Permanente (PRONAP), por lo tanto, la maestra no estaba capacitada para el manejo del nuevo enfoque metodológico de enseñanza de las matemáticas.





enseñanza de los problemas multiplicativos plasmada en el libro de texto de segundo grado y el fichero, así como de las sugerencias didácticas en el libro del profesor. La selección de las actividades fue realizada por la directora de tesis y el tesista.

c) El tesante haría la observación de la clase de matemáticas, la audiograbaría y tomaría notas de campo. No intervendría en absoluto durante el desarrollo de la clase. Además se ubicaría en cada sesión en un lugar diferente para audiograbar con el propósito de observar la mayor cantidad de alumnos posible, su forma de resolver el libro, sus procedimientos, etcétera, dado que éstos son un referente importante para analizar la actuación didáctica de la maestra.

d) La docente, antes de dar su clase podría consultar con el observador cualquier duda que tuviera respecto a la intención didáctica de la actividad o lección, de tal forma que en su opinión tuviera claro qué tenía que enseñar y cómo hacerlo.

e) El observador, al término de cada sesión de clase, se reuniría con el docente a fin de comentar los cambios realizados a la situación de aprendizaje trabajada, no para que actuará de una manera diferente las siguientes ocasiones, sino con el fin de indagar sobre la razón de sus decisiones didácticas.

En este trabajo, el tesante comparte simultáneamente características de observador (que registra todo lo que acontece en el aula), y a la vez participa al aclarar dudas a la profesora, aunque sólo en el caso que ella lo solicitara, y también en el espacio de interacción entre el tesante y la profesora en la indagación sobre la transposición didáctica observada. Las interacciones así realizadas se registran para su posterior análisis.

#### 1.3.1 Tiempos y condiciones de la experiencia didáctica

Se planeó abordar el estudio del fenómeno de transposición didáctica en un campo conceptual, en principio, conocido, manejado y valorado por el profesor: la enseñanza de la multiplicación y la división.

La secuencia de los problemas multiplicativos se encuentra distribuida en dos documentos: Numero
el libro del alumno y el fichero de actividades didácticas. En el primer documento la cantidad de situaciones de aprendizaje son: 27 lecciones, y 8 actividades para el segundo.

Para el trabajo de campo, dadas las limitaciones de tiempo para realizarlo, fue necesario hacer una selección[4] de las actividades y lecciones más importantes de la secuencia. El siguiente cuadro muestra la distribución de cada una de ellas, así como de un par de actividades que no forman parte de la secuencia y fueron incorporadas por la maestra y el observador en el transcurso de la experiencia.

**TABLA DE TOTALES DE ACTIVIDADES Y LECCIONES DE LA SECUENCIA DE LOS PROBLEMAS MULTIPLICATIVOS DE SEGUNDO GRADO DE PRIMARIA APLICADOS EN EL TRABAJO DE CAMPO[5]**

| ACTIVIDADES | | LECCIONES | ACTIVIDADES EXTRA (no forman parte de secuencia). | |
|---|---|---|---|---|
| Fichero | Libro de texto | Libro de texto | Sugerida por el observador | Decisión de la profesora |
| 5 | 10 | | 1 | 1 |
| 15 | | 14 | 2 | |
| 29 | | | 2 | |
| Total de situaciones de aprendizaje trabajadas en el aula: 31 | | | | |

Estas 31 situaciones de aprendizaje fueron aplicadas en 21 sesiones de trabajo durante el primer semestre del ciclo escolar 1995 – 1996. Si bien, originalmente se había planeado observar dos veces por semana, con una duración aproximada de una hora, esto por muchas razones no siempre fue posible[6]. Las sesiones programadas para una hora, en su mayoría llevaron más tiempo, en algunos casos alrededor de 2 horas, hay muchas causas que explican esta situación: pérdida de tiempo por el recorte de material durante el desarrollo de la actividad, esto a falta del Rincón de las Matemáticas[7]; la inclusión de situaciones

[4] Los criterios utilizados en la selección fueron básicamente dos: 1) Tomar una actividad (del fichero de del LTG) y una lección (del LTG), ambas complementarias del trabajo didáctico de una misma noción matemática; y 2) Elegir (entre varias opciones) una actividad y lección consideradas claves en la construcción de un conocimiento matemático específico. Es importante señalar que en la construcción de la secuencia didáctica se diseñaron varias situaciones de aprendizaje para uno o varios conocimientos matemáticos interrelacionados, siempre en la idea que señala Brousseau 1999 "el aprendizaje es un acto probable en una situación didáctica" de ahí que no se puede esperar que el aprendizaje se produzca en una sola sesión de trabajo.

[5] En el anexo No. 1 se encuentra un inventario detallado de la secuencia de los problemas multiplicativos, de las fechas en que fueron aplicadas las actividades y lecciones, así como de las entrevistas sostenidas con Estela y el total de registros del trabajo de campo.

[6] Ensayos para eventos de la escuela, fiestas navideñas, permisos de días económicos de la docente, la responsabilidad de la maestra en la cooperativa, reuniones con el director, etcétera.

[7] El Rincón de las matemáticas (SEPa, p. 8), es una actividad sugerida al profesor que debe realizarse al inicio del ciclo escolar para organizar los materiales que se requerirán en el desarrollo de las actividades del fichero. Estas actividades son fundamentales para que los alumnos adquieran el conocimiento matemático curricular Los padres de familia son involucrados en la organización del Rincón de las matemáticas, ya que ayudan a recortar el material del alumno y a traer diversos objetos como: semillas, fichas, envases vacíos, etc. La maestra decide no hacer el Rincón de las matemáticas, la razón: el salón es utilizado en doble turno y no hay lugar para tenerlo seguro. También es probable que en principio la docente no lo haya considerado importante y no buscó alguna manera de solucionar el problema con la maestra del turno vespertino.





didácticas (no previstas) que Estela decidió poner a prueba cuando entendía la intención didáctica de la lección o actividad para que los alumnos reafirmaran algún conocimiento; la dificultad que los niños tuvieron para resolver algunos problemas y por tanto hubo necesidad de tomar más tiempo del previsto.

En relación con las entrevistas con Estela, sólo pudieron realizarse siete, de ellas cinco corresponden a lecciones o actividades realizadas en el salón y dos a entrevista inicial y a la final. Si consideramos que son 29 situaciones de aprendizajes aplicadas de la secuencia planeada, las cinco entrevistas corresponden a un bajo porcentaje de 14.5 % del total de entrevistas que debieron realizarse. Las razones por las que no pudo cumplirse la meta de entrevistas planeadas con Estela, se encuentran en que el espacio acordado para charlar fue el recreo (no fue posible acordarlo al final del día de clase pues ella trabaja doble turno). El director durante un buen tiempo de la experiencia utilizó el recreo para realizar reuniones con todos los profesores. Esta situación impidió a la maestra platicar con el observador sobre su actuación en el aula. Aunque también es probable que ella rehuyera en parte un dialogo su desempeño en el aula, en la entrevista final se observa que la presencia del observador, hace que Estela muestre desconfianza al diálogo y al análisis de su enseñanza. Sin embargo, es importante señalar que la docente siempre mostró - a pesar de esta situación - un trabajo comprometido para implementar en su grupo la secuencia de los problemas multiplicativos que le fue dada desde el inicio de la experiencia.

### 1.4 Fundamentos teóricos

1.4.1 Las corrientes de investigación en didáctica de las matemáticas y la ubicación de este trabajo en ellas.

Los Institutos de Investigación para la Enseñanza de las Matemáticas (IREM por sus siglas en francés) son un proyecto del Ministerio de Educación de Francia iniciado en los años sesentas a partir de las crisis internacionales de la enseñanza de las matemáticas. Los propósitos que se propusieron inicialmente a los IREM fueron "(...) participar en la formación inicial y permanente de los profesores; desarrollar investigaciones sobre la enseñanza de las matemáticas, y producir y difundir documentos para los profesores" (Artigue 1995, p. 3).

La investigación en didáctica de matemáticas que los IREM han desarrollado desde entonces, ha sido con vías a constituir una disciplina científica autónoma de la pedagogía y otras ciencias abocadas al estudio de la educación, aunque evidentemente manteniendo lazos estrechos con ellas.

La didáctica de la matemática se ha propuesto "(...) considerar a la clase en su globalidad como un objeto de estudio en el que se tuviera en cuenta la interacción y la dependencia entre los tres polos: profesor, estudiante y saber" (Artigue 1995, p. 2). Así, se han desarrollado varias líneas de investigación complementarias, en tanto enfatizan, en cada caso, alguno de los actores de la tríada didáctica, y actualmente se encuentran parcialmente articuladas. A grandes rasgos las características de estas principales aproximaciones didácticas son:

- La teoría de los campos conceptuales desarrollada por Vergnaud (1977) refiere a una explicación cognitiva sobre el proceso de adquisición de los conceptos matemáticos por los alumnos, considerando los distintos significados que adquieren dichos conceptos y la dificultad relacional que cada uno de ellos representa. El saber matemático y el alumno son los actores principales de esta teoría.
- La teoría de la transposición didáctica de Chevallard (1977) evidencia el proceso de transformación del conocimiento erudito o sabio desde que es generado por el o un grupo de científicos hasta su enseñanza en el aula de una escuela por el profesor. Este proceso de transformación genera una distancia entre el saber sabio y el saber enseñado, la distancia puede ser pequeña o grande entre ambos, sin embargo lo importante es vigilar que la versión didáctica del conocimiento matemático que el profesor o el diseñador de programas diseñe sea "fiel" al conocimiento sabio. Actualmente la teoría de la transposición didáctica se ha extendido a una aproximación antropológica del campo didáctico. Para este autor el saber es el principal actor del sistema didáctico.
- La teoría de las situaciones didácticas de Brousseau (2000), sitúa en el corazón del estudio didáctico a la situación de enseñanza para comprender el funcionamiento del alumno. Brousseau (2000) retoma la tesis piagetiana del aprendizaje como adaptación al medio, pero en este caso a un medio didácticamente problematizado que es la situación didáctica. El proceso de adaptación del alumno sólo puede ser entendido a través de las variables didácticas manipuladas dentro de la situación didáctica y el contrato didáctico que establece el profesor. La metodología que permite el control experimental de las situaciones didácticas es la ingeniería didáctica. La situación didáctica y el alumno son los protagonistas de esta teoría.

interesante





Estos tres teóricos de la didáctica han prevenido de no aplicar directamente al aula los resultados de sus investigaciones, dado que desde inicios de la década de los ochenta se separaron la lógica de la formación de maestros y la de la investigación para construir una teoría sobre la didáctica.

En nuestro país, el Laboratorio de Psicomatemáticas del Departamento de investigaciones Educativas (DIE)[8] ha generado una línea de investigación en la didáctica de las matemáticas, centrada en construir, experimentar y analizar situaciones para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en el aula, implementadas directamente por el profesor.

De las anteriores líneas de investigación, el presente trabajo se ubica primordialmente en tres de ellas: en la teoría de la transposición didáctica de Chevallard, la teoría de las situaciones didácticas de Brousseau y la línea del Laboratorio de Psicomatemáticas del DIE. Esto debido a que aborda el estudio del fenómeno de la transposición didáctica por una maestra a la propuesta didáctica oficial para la enseñanza de la matemática plasmada en el libro de texto del alumno y del fichero de actividades de segundo grado de primaria, y de la cual el Laboratorio de Psicomatemáticas coordinó su diseño didáctico. Así, el objeto de estudio de esta tesis tiene una doble virtud: a) se ubica en un lugar muy particular donde actualmente la didáctica intenta avanzar: el estudio del profesor, que representa el subsistema didáctico menos investigado, y b) indagar dicha transposición didáctica en el espacio cotidiano: el aula.

### 1.4.2 La teoría de la transposición didáctica

> "Cuando el enseñante interviene para escribir esta variante local del texto del saber que él llama su curso, o para preparar su curso (es decir, para realizar el texto del

[8] El Laboratorio de psicomatemáticas del DIE del CINVESTAV fue fundado en 1978 por las investigadoras Grecia Gálvez, Irma Fuenlabrada e Irma Saiz. Cabe resaltar que las teorías generadas en el seno de la Didáctica de las Matemáticas por Brousseau, Vergnaud y Chevallard han sido un referente importante para el desarrollo de la didáctica en México.

saber en el desfiladero de su propia palabra), ya hace tiempo que la transposición didáctica ha comenzado"

Ives Chevallard (1997, p.20).

La didáctica de las matemáticas es una ciencia muy joven que se ha propuesto como objeto de estudio: el funcionamiento del sistema de enseñanza, y particularmente del sistema didáctico. En palabras de Chevallard (1997, p. 15): "¿Cuál es en realidad ese objeto? El didácta de las matemáticas se interesa en el juego que se realiza – tal como lo puede observar, y luego reconstruir en nuestras clases concretas _ entre un *docente*, los *alumnos* y un *saber matemático*. Tres lugares, pues: es el *sistema didáctico*. Una relación ternaria: es la relación didáctica. Esta es la base del esquema por el cual la didáctica de las matemáticas puede emprender, por lo tanto, la tarea de pensar su objeto"

El acercamiento teórico propuesto por la didáctica de las matemáticas: de considerar al sistema de enseñanza conformado por una tríada, es opuesto a los enfoques que durante décadas se centraron en el estudio de la diáda enseñante – enseñado, "olvidando" el saber científico. Para la teoría de Chevallard, el conocimiento es el principal actor del sistema didáctico e intenta responder a preguntas como: "¿qué es entonces aquello que, en el sistema didáctico, se coloca bajo el estandarte del saber? El "saber enseñado" que concretamente encuentra el observador, ¿qué relación establece con lo que se proclama de él fuera de ese ámbito? ¿y qué relación entabla entonces con el "saber sabio", el de los matemáticos? ¿qué distancias existen entre unos y otros? Como Chevallard señala, éstas serían las preguntas mínimas que tocan puntos muy importantes sobre la génesis, filiaciones, legitimidades del saber, todo mezclado en un debate.

El concepto de transposición didáctica aparece en la obra de Chevallard hacia el año de 1980 en ocasión de la Primera Escuela de Verano de didáctica de las matemáticas realizado en Francia. Dicho concepto es definido como:"(...) el pasaje de un contenido de conocimiento preciso a una versión didáctica de ese objeto de conocimiento puede llamarse en realidad "transposición didáctica *stricto sensu*". Pero el estudio científico del proceso de transposición didáctica (que es una dimensión fundamental de la didáctica de la matemática) supone la consideración de la transposición didáctica *sensu lato*, representada por el esquema:

objeto de conocimiento ⇒ objeto a enseñar ⇒ objeto de enseñanza.

El primer eslabón marca el pasaje de lo implícito a lo explícito, de la práctica a la teoría, de lo reconstruido a lo construido" (Chevallard 1997, p. 46).





La transposición didáctica pone en evidencia dos aspectos fundamentales: a) "El problema de la legitimación de un contenido de enseñanza; b) La aparición sistemática de una distancia, de una separación entre el saber enseñado y las referencias que lo legitiman, separación que se debe a las restricciones que pesan sobre el funcionamiento del sistema de enseñanza". (Arsac, 1989).

Según Arsac (1989), la problemática de la legitimación no es nueva y cita a San Agustín: "¿Los maestros hacen profesión de hacer percibir y retener sus propios pensamientos y no las disciplinas que piensan transmitir al hablar? ¿y quién es entonces tan tontamente curioso que envía a su hijo a la escuela para aprender lo que el maestro piensa?

Estas mismas preguntas siguen vigentes. Así por ejemplo, piénsese de un docente que al enseñar el calculo del área de un triángulo, a través de la fórmula "base por altura entre dos", indique a sus alumnos que dicha fórmula únicamente funciona con una altura de la figura, y desconozca que el triángulo tiene más de una altura, y más aún que la fórmula funciona al considerar cualquier altura.

Estos ejemplos de transposición didáctica, si bien señalan directamente a los profesores como responsables, no son los únicos actores que se encuentran en la cadena de la transposición didáctica: "El enseñante en su clase, el redactor de programas, el hacedor de manuales, cada uno en su registro, son los instructores de una norma didáctica que tiende a constituir un objeto de enseñanza como algo distinto del objeto a enseñar que lo motiva. En consecuencia ejercen una normatividad, sin necesidad de asumir la responsabilidad -epistemológica- de esa potencia creadora de normas (...)" (Chevallard 1997, p. 51). Es importante aclarar que necesariamente el objeto a enseñar es distinto del objeto de enseñanza plasmado en los programas de estudio, debido a una necesaria deformación del saber sabio para ser enseñado (afirma Chevallard 1977, p. 16), pero ese ser distinto no es sinónimo de infidelidad del conocimiento a enseñar y del conocimiento enseñado, la transposición didáctica incluye saberes fieles e infieles según el grado distorsión en relación al conocimiento matemático sabio, es en función de está distorsión que existen (valga la expresión) "buenas" y "malas" transposiciones didácticas.

**¿Por qué existe la transposición didáctica? ¿Puede existir la enseñanza sin transposición didáctica?**

Al respecto Chevallard dice: "(...) porque el funcionamiento didáctico del saber es distinto del funcionamiento académico, porque hay dos regímenes del saber, interrelacionados pero no superponibles" (Chevallard 1997, p. 25). En otras palabras el saber científico o académico no puede ser llevado al aula directamente para ser enseñado, "Para que la enseñanza de un determinado elemento sea meramente posible, ese elemento deberá haber sufrido ciertas deformaciones, que lo harán apto para ser enseñado (Chevallard 1997; p. 19). Así por ejemplo los diagramas de Venn que en las décadas de los setenta y ochenta fueron utilizados para la enseñanza de la teoría de los conjuntos en la escuela primaria y secundaria, constituyeron una sustitución didáctica de la teoría de los conjuntos de los matemáticos "(...) algunas veces sin embargo (y más frecuentemente de lo que podría creerse), son verdaderas **creaciones didácticas**, suscitadas por las "necesidades de la enseñanza" (Brousseau 1993).

En nuestro país las creaciones didácticas que circulan en el medio desde el año 1993 han sido realizadas por diferentes actores entre los que cabe destacar: los especialistas en didáctica quienes participaron en elaboración los libros de texto gratuito y ficheros de actividades, y por la otra, los profesores; de estos últimos Candela A. (1989; p. 34) señala: "Cada maestro hace una selección de los contenidos que va a transmitir, los presenta de una forma particular, hace una "traducción" con el propósito de que los niños "le entiendan", los relaciona con otros saberes, les imprime un énfasis y una emotividad específica donde se resaltan unos dándoles una carácter "científico", mientras se minimizan o bien incluso se ignoran otros. En ocasiones, los conceptos se refuerzan con actividades o con ejemplos mientras que en otras sólo se mencionan".

Según Chevallard la transposición didáctica es un asunto inconsciente que pasa desapercibido para el profesor y los demás actores involucrados, del cual no son responsables. La cuestión de la adecuación de la enseñanza del profesor con respecto al saber enseñado ni siquiera es planteada, "(...) él (enseñante) vive sobre esta ficción, el debe vivir esta ficción" (Chevallard 1997, p. 16). Sin embargo el reconocimiento de la transposición didáctica "viene a conmocionar su participación feliz en el funcionamiento didáctico". En el caso muy particular del maestro, cuando la transposición didáctica le es señalada, se genera en el enseñante la resistencia al análisis didáctico "(...) el concepto de transposición didáctica se afirma en principio como violencia hecha a la integridad del acto de enseñanza, del cual confunde la identidad en una interrogación a la cual el enseñante no puede a **priori** responder más que resistiéndose a entenderlo" (Chevallard 1997, pág. 52). Al reconocer que el saber enseñado en el aula es necesariamente diferente del saber designado para ser enseñado (plasmado en los planes y programas de estudio), genera en el profesor el problema de legitimar su enseñanza (conocimiento enseñado) conforme al conocimiento a enseñar y al conocimiento científico.





Para concluir, el concepto de transposición didáctica de Chevallard refiere a la serie de mediaciones de que es objeto el conocimiento desde su producción por el científico (saber sabio o erudito) hasta la asimilación personal de este conocimiento (deformante o no) por parte del alumno.

Dada la problemática abordada en esta tesis, es necesario considerar otros factores que pueden tener efectos sobre la transposición didáctica, dichos factores al parece no han sido considerados por Chevallard. A continuación se explica la razón de esta situación.

En el proceso de diseño del proyecto de investigación, se sabía de antemano que muchos de los "ajustes" que los profesores realizan son motivados no sólo por su epistemología personal, entendida ésta como: "La epistemología de los profesores es a la vez: su medio de lectura de las matemáticas; su medio de concebirlas como conocimientos proyectados para los alumnos; su medio para interpretar los conocimientos de los alumnos como distanciados con respecto a esta norma; y su medio para concebir una intervención. (Brousseau 2000, p. 28), sino por factores no didácticos "(...) por una lado, los problemas que ellos (los profesores) tienen que afrontar no pertenecen, en su gran mayoría, al campo de la didáctica. Por otra parte, aún si ese fuera el caso, los saberes didácticos no ofrecen un aporte inmediato" (Artigue, 1995; p. 18). Hay que reconocer que efectivamente estos factores no didácticos pesan en las decisiones de los profesores en tanto las aulas tienen como entorno inmediato la escuela y las aulas concebidas como sistemas didácticos son "(...) sistemas abiertos al exterior en los que tienen lugar las relaciones entre los profesores, los estudiantes y el conocimiento. (Artigue 1995; p. 11). El aula es así un espacio que es permeado por decisiones exteriores que se dan en diferentes niveles desde el local hasta el nivel nacional.

En el terreno propiamente de la transposición didáctica uno de los niveles en donde es definido el curriculum escolar es realizado en el nivel de "la noosfera" denominada así por Chevallard (1997), como el lugar donde los representantes de la sociedad en función del proyecto de sociedad que persigan, seleccionan (recortan) el conocimiento, los valores y las habilidades que los alumnos habrán de adquirir en el transcurso de su vida escolar; las decisiones que se toman en la noosfera impactan en la vida de la escuela y el aula. En el caso particular de México, en la noosfera se decidió que el enfoque de enseñanza de la matemática se orientaría hacia la visión constructivista del aprendizaje, y en ese mismo nivel de decisiones se trasladan algunos contenidos de la primaria hacia la secundaria y otros desaparecen como la lógica de conjuntos. Evidentemente estos cambios curriculares tendrán algún efecto en el aula.

Existen otras investigaciones que intentan estudiar lo cotidiano del aula, los trabajos de Rockwell y Mercado (1986) por ejemplo, conciben a la educación como un proceso conformado social e históricamente, como un fenómeno que sólo puede ser explicado dentro del contexto particular en que se da. Desde esta perspectiva el proceso del cambio educativo es "(...) el resultado de la interacción, a muchos niveles, entre tradiciones específicas y acciones colectivas, que traducen las políticas o concepciones educativas vigentes en prácticas educativas concretas. Los cambios posibles se encuentran condicionados siempre por el contexto social y político general. Si bien la estructura social y las coyunturas políticas definen características generales y reglas del juego del sistema escolar en función de una tendencia a reproducir las relaciones sociales dominantes, la práctica educativa es contradictoria; intervienen en ella también elementos y respuestas que pueden señalar la dirección de cambios, tanto progresivos como regresivos. Este forma de concebir al aula contextuada en un espacio y tiempo histórico nos permite percibir el problema de la transposición didáctica ya no sólo desde la perspectiva del conocimiento donde la epistemología del profesor es determinante, sino entender las prácticas educativas de los profesores desde un contexto enmarcado en las condiciones institucionales en un momento histórico social determinado. Estas autoras se preguntan "no es tanto **¿qué enseña el maestro a los alumnos?, sino ¿qué es posible aprender en este contexto escolar?**" (Rockwell y Mercado 1986, p. 43). Para dar respuesta a esta interrogante "Es necesario distinguir todavía entre los aspectos ocultos y manifiestos del código de conocimiento. Cada programa y plan de estudios tienen, además de sus especificaciones oficiales, públicas (el plan de estudios manifiesto), sus "reglas" no especificadas que se dan por supuesto, las cuales tienen también que ser dominadas: el plan de estudios oculto (Delamont, 1993; p. 53). Para Rockwell y Mercado "...el llamado **"currículum oculto"**, contribuye a la socialización para el trabajo y para la vida social; pero en estos casos, si bien aparece como una constante la paulatina formación de hábitos de trabajo y de respeto a la autoridad institucional, también hemos observado la respuesta, la desobediencia, el reto, la generación de alternativas frente a ese modelo de comportamiento escolar, tanto de alumnos como de maestros" (1986; p. 43).

Los estudios realizados por Becker y colaboradores. (1961 y 1968), Delamont (1993), Jackson (1968), Snyder (1971), evidenciaron aspectos importantes en relación al profesor, éstos son: el aislamiento, la urgencia y la autonomía de su trabajo. El peso de estos aspectos es muy importante en la toma de decisiones que los profesores tienen que realizar constantemente en el aula. La gran diferencia que existe entre el trabajo del profesor y otros profesionales, es precisamente la urgencia con el que el primero tiene que tomar decisiones sin la posibilidad de pedir una segunda opinión como lo hacen por ejemplo los médicos o lo





abogados, en este sentido Delamont 1993 (p. 59) cita a Jackson (1960) "(...) hay un aquí y un ahora urgente y una cualidad espontánea que proporciona emoción y variedad al trabajo del maestro". Por otra parte, para que un maestro pueda tener la posibilidad de aislarse y tener la autonomía necesaria para dar su clase, debe entre otras cosas, controlar y corregir la conducta de sus alumnos, de esta forma puede garantizar que el director no se inmiscuya en los asuntos de la clase, curiosamente como señalan Rockwell y Mercado (1986; p. 39):"A pesar del poder de esta jerarquía institucional de la cadena de mando SEP - Delegación o Dirección Estatal - Supervisor - Director, el maestro dentro de su aula, tiene bastante autonomía. Mientras mantenga en orden a su grupo, entregue documentación y participe en las actividades cívicas y escolares, aparentemente se respetan sus decisiones sobre la conducción de la enseñanza".

Por su parte Stenhouse en 1987 (citado por Delamont 1993; p. 66) encuentra que el control del contenido por parte del profesor, así como el control ejercido sobre el comportamiento de sus alumnos, estaban inseparablemente unidos. Esto lo pudo constatar cuando a los profesores participantes en un proyecto de estudios de humanidades, se les pidió un cambio drástico en su rol, es decir, que dejaran de ser la fuente del conocimiento y pasaran a ocupar el lugar de un juez imparcial. La gran mayoría de estos profesores encontraron desagradable e incluso imposible realizar el nuevo rol.

A manera de conclusión se dejan en claro dos factores que impactan la transposición didáctica analizada en este trabajo: a) los factores epistemológicos del profesor y; b) los factores derivados del "currículum oculto" que manifiestan las decisiones de los profesores en tanto adaptación a las condiciones institucionales en las cuales realizan su trabajo docente.

De esta manera, en el estudio del fenómeno de la transposición didáctica se considera tanto los aspectos didácticos y no didácticos que impactan el método de trabajo (método de enseñanza) de los profesores, de no hacerlo así la explicación se verá limitada exclusivamente a fenómenos didácticos como si el aula se pudiera aislar del exterior, por ejemplo ¿cómo se explicaría el hecho de que los profesores se resistan a abandonar el aula y dar la clase de matemáticas en el patio exhibiéndose a la mirada de las autoridades escolares (director y supervisor) y de sus compañeros maestros?

### 1.4.3 El contrato didáctico y la transposición didáctica

Los conceptos situación didáctica, contrato didáctico y transposición didáctica están íntimamente relacionados, y son los referentes teóricos que soportan el análisis del presente trabajo. A continuación se explícita la relación que existe entre ellos. Para iniciar, conviene resaltar el hecho que la transposición didáctica involucra simultáneamente la vigilancia epistémica del conocimiento matemático y el método de enseñanza de cómo es presentado a los alumnos, tal como se observa en la siguiente cita "Se produce una transformación de las matemáticas "oficiales" para convertirlas en matemáticas "escolares", es decir de los contenidos y métodos reconocidos actualmente por la comunidad científica en los apropiados para determinado nivel educativo. Esta transformación se conoce con el nombre de "transposición didáctica" y se refiere tanto a los contenidos matemáticos como a los métodos de trabajo para que puedan ser comprendidos y utilizados por los alumnos". (Gutiérrez, A. y Jaime A. 1995; p. 2).

Así entonces la versión didáctica del conocimiento matemático, involucra necesariamente la situación didáctica y el contrato didáctico. La situación didáctica tal como es entendida por Brousseau (Artigue, 1995, p. 11) refiere en primer lugar a una situación específica de un conocimiento: un espacio problematizado "artificialmente" donde el alumno aprenderá por adaptación a ese medio, a través del conocimiento matemático que aparece como un instrumento funcional para resolver el problema. Se trata de enfrentar a los alumnos a una situación que evolucione de tal manera que el conocimiento que se quiere que aprendan sea el único medio eficaz para controlar dicha situación. La situación proporciona la significación del conocimiento para el alumno, en la medida en que lo convierte en un instrumento de control de los resultados de su actividad.

Este tipo de situaciones no se encuentra frecuentemente al observar clases organizadas de una manera tradicional, en las que el maestro provoca, recibe, corrige e interpreta todas las respuestas de cada uno de sus alumnos.

Sin embargo, en general una situación didáctica: "Es una situación de enseñanza, preparada y realizada por el maestro, la tarea del alumno consiste, en resolver el problema (matemático) que le presentan, pero el acceso a esta tarea se realiza a través de una interpretación de los problemas planteados, de las informaciones proporcionadas, de las limitaciones impuestas, las cuales son constantes de la forma de enseñar del maestro. Estos hábitos (específicos) del maestro esperados por el alumno y los comportamientos del alumno esperados por el maestro conforman el contrato didáctico. (Brousseau, 1990). Según





Brousseau (1990) son precisamente los **contratos didácticos** los que "(...) dificultan o favorecen el acceso del niño al conocimiento, lo que bloquea de entrada a algunos niños al proceso de aprendizaje. Porque los contratos, su realización y su fracaso, revelan la idea que se hacen profesores y alumnos de las matemáticas y de su funcionamiento, de las condiciones de su creación, de su sentido y de su interés"

La relación de interdependencia entre los tres conceptos: situación didáctica, contrato didáctico y transposición didáctica. Se da precisamente cuando "(...) para la elección y la elaboración de una situación didáctica (situación, problema, objetivos para el alumno, informaciones, condiciones de validación, etcétera) el maestro manifiesta y fabrica una idea con frecuencia deformada de las situaciones reales (culturales, históricas,...) en las que funciona este conocimiento. Son las circunstancias en las que se emplean los conocimientos las que les dan su significación. Pasar de un conocimiento matemático (para los matemáticos) a un conocimiento matemático (para el alumno) es una operación específica, la transposición didáctica, cuyas características también habrá que evaluar -pero la razón fundamental e ineludible- es que la transposición didáctica es una de las componentes fundamentales de la propia actividad de los matemáticos. (Brousseau 1980, pp. 4 - 5). Este autor ha observado que los profesores al diseñar sus propias situaciones de aprendizaje, distorsionan el sentido cultural y científico del conocimiento que pretenden enseñar, por ejemplo, al enseñar los algoritmos o las fórmulas matemáticas con frecuencia desconocen su significado o sentido, y sólo transmiten la sintaxis del lenguaje matemático.

Ahora bien, a la par de la transposición didáctica, está presente un contrato didáctico, y desde ambos se piensan, diseñan y aplican las situaciones de aprendizaje. Puesto que el estudio de las situaciones didácticas tiene por finalidad conocer y controlar los fenómenos relativos a la enseñanza de las matemáticas, es la comunicación de sus resultados lo que permitirá al maestro una gradual comprensión de su práctica pedagógica y un incremento del control sobre ella.

# CAPÍTULO II.

# LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS EN LA ESCUELA PRIMARIA MEXICANA

El presente capítulo se encuentra dividido en cuatro partes. En la primera se caracteriza el actual curriculum y el enfoque de la enseñanza de las matemáticas de la escuela primaria pública, a la vez que se narran sus antecedentes. La segunda analiza las familias de problemas multiplicativos desde la teoría de los campos conceptuales de G. Vergnaud. La tercer parte, se dedica a exponer los argumentos (matemáticos, psicológicos y didácticos) para la elección de los significados multiplicativos (en especial sobre los operadores: función y escalar) para el segundo grado de primaria. La cuarta parte describe y analiza la secuencia de las situaciones de aprendizaje de los problemas multiplicativos del libro de texto del alumno de segundo grado de primaria así como del fichero correspondiente.

## 2.1 Antecedentes

Durante los años sesenta y setenta se presentó a nivel internacional una crisis social en torno al fracaso de la enseñanza de las matemáticas. Ante tal situación, bajo el nombre de matemáticas modernas se inició en los años setenta, una reforma de los programas de matemáticas. Su intención era superar la enseñanza basada principalmente en la operatoria y su aplicación a problemas tipo. Para ello matemáticos de renombre quienes tuvieron la responsabilidad de los currícula, propusieron que la enseñanza de esta área de conocimiento se basara en la transmisión de su esencia, esto es, sus estructuras. Douady (1995, p. 1) describe este nuevo enfoque de la siguiente manera: "El objetivo pedagógico era el de poner a disposición de los alumnos un número reducido de herramientas matemáticas potentes respetando en todo momento el rigor matemático. Esta aproximación se basaba en una hipótesis: si los alumnos tenían este número reducido de herramientas potentes y generales, entonces ellos podrían aplicarlas en muchas situaciones diferentes. Por su parte, se pensaba que si había menos axiomas que enunciar, entonces era más fácil comprender".

Esta reforma no cubrió las expectativas depositadas en ella sobre la adquisición de conocimiento matemático significativo para los alumnos, una de las razones: "el concepto de estructura respondía a un problema de coherencia matemática con sentido sólo para los matemáticos" (Block y Fuenlabrada 1996).

De los modelos descritos por Charnay (1994) apoyándose en la idea de contrato didáctico de Brousseau, se puede reconocer que este tipo de enseñanza de las matemáticas corresponde al llamado modelo "normativo", donde el mayor peso (considerando la triada didáctica: maestro - alumno - saber escolar) está dado principalmente en el contenido escolar y el profesor. Sus principales características son: a) la solución de problemas matemáticos es considerada como criterio del aprendizaje previa adquisición y ejercitación del lenguaje matemático; b) el maestro muestra las nociones y provee los ejemplos, la pedagogía es entonces el arte de comunicar, de hacer pasar un saber; c) el alumno debe estar atento para escuchar, aprender y aplicar; d) el saber está acabado, ya construido.

Este curriculum de matemáticas está fundamentado en la teoría conductista del aprendizaje: el objetivo del aprendizaje se evalúa en función del éxito o fracaso que muestren los alumnos en la solución de problemas matemáticos. Según Popham y Baker (1977), los planes y programas de estudio que se inscriben en la línea conductista: "(...) especifican sus objetivos en términos de conducta del alumno, y a la vez se sabe seleccionar los métodos de evaluación apropiados".

Como una reacción ante el fracaso de las reformas basadas en la enseñanza de las matemáticas llamadas "modernas", surgen propuestas alternativas centradas en el alumno. Es en este momento cuando las teorías constructivistas del aprendizaje comienzan a tener una gran influencia; en particular los principios derivados de la teoría psicogenéticas desarrollados por la escuela de Piaget. Dichas propuestas podrían agruparse en el modelo denominado incitativo (Charnay, 1994), de hecho aquí se reconocen las diferentes corrientes de los métodos activos. Sus características más importantes son: a) los problemas matemáticos son un móvil o disparador del aprendizaje. Surgen de situaciones basadas en la vivencia de los alumnos, no es tenida en cuenta la preocupación por la coherencia de los conocimientos, importa más los intereses y las necesidades del alumno; b) el maestro entre otras cosas escucha al alumno, suscita su curiosidad, le ayuda a utilizar fuentes de información, responde a sus demandas, etcétera; c) el alumno es un demandante activo, ávido de conocimientos funcionalmente útiles; d) el saber esta ligado a las necesidades de la vida, del entorno. La estructura propia de este saber pasa a un segundo plano.

Al ser propuestas con un gran peso en el niño (actor recuperado en el proceso de enseñanza y aprendizaje) se descuidó la lógica de la disciplina.





Según Vergnaud, Halbwachs y Rouchier (1981) ambos modelos (normativo e incitativo) han cometido graves errores didácticos: "(...) numerosos especialistas de la didáctica se limitan a considerar lo que, en su opinión o en la opinión de la ciencia contemporánea, es más lógico, más natural, más fundamental o más elegante, sin preocuparse demasiado por el proceso lento y laborioso a través del cual el alumno se apropia de los conocimientos. A la inversa, numerosos psicólogos y educadores creen poseer un conocimiento suficiente del desarrollo cognitivo si disponen de una caracterización general de los principales estadios del pensamiento o de los procesos de aprendizaje".

Los errores didácticos de los modelos normativo e incitativo se producen porque tanto los matemáticos, como los psicólogos, consideraron suficiente, cada uno por su parte el conocimiento de su área y no reconocieron que ambos conocimientos son igualmente importantes (pero componentes al fin) de una nueva disciplina, la didáctica.

## 2.2 Enfoque metodológico de la enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria mexicana (1993)

Existe un tercer modelo de enseñanza de las matemáticas, denominado aproximativo[1] (Charnay, 1994). Dicho modelo o enfoque de enseñanza está plasmado en los actuales planes y programas de estudio de la escuela primaria de México.

Según Block (1993): "Las características generales más importantes del enfoque de estos programas son:1) El peso acordado al aspecto de los **significados** de los conceptos en distintos contextos. Así, por ejemplo, antes de los setenta la suma prácticamente se reducía a su algoritmo. En los setenta, se presentaba como cardinal de la unión de conjuntos o se enfatizaban las explicaciones subyacentes a su algoritmo. En los ochenta, se proponía nuevamente la manipulación de colecciones de objetos. En los noventa el acento se pone en la familia de problemas diversos que se resuelven con una suma, que dan sentido a esta operación y que permiten al alumno construir sus distintos significados y las técnicas para resolverla; 2) El peso acordado a la **resolución de problemas** como la actividad fundamental, no sólo del matemático, sino del aprendiz, como actividad a través de la cual los estudiantes pueden construir nociones matemáticas"

[1] El DIE durante casi dos décadas a petición expresa de las autoridades educativas ha elaborado importantes proyectos de desarrollo curricular, que han sido incorporados al sistema educativo sobre todo en primaria, algunos de ellos son: El Manual del Instructor Comunitario en sus diferentes versiones, publicadas durante los años 1976, 1978, 1989, 1992 y 1993. Los 4 libros de matemáticas de la serie "Propuestas para divertirse y trabajar en el aula" de los libros del Rincón, publicados en 1991 y 1994.
El conocimiento didáctico acumulado tanto en el desarrollo de la investigación como en la elaboración de estos proyectos de desarrollo curricular instrumentados por el DIE, han servido de sustento al actual curriculum y a su enfoque de la enseñanza de las matemáticas desde el año 1993.

A grandes rasgos y sin pretender agotarlas, las características más sobresalientes del actual enfoque de la enseñanza de las matemáticas en México, son:

- El conocimiento matemático se construye enfrentando situaciones en contextos que le dan sentido y significado.

- El conocimiento matemático se construye dentro y fuera de la escuela en situaciones problemáticas que retan el intelecto del niño. Sin embargo, los conocimientos construidos fuera de la escuela si bien permiten enfrentar problemas cotidianos, dicho conocimiento no es del todo práctico y eficaz, por lo que se hace necesaria la intervención de la escuela para propiciar el recurso a los procedimientos convencionales que permiten a los alumnos resolver con mayor eficiencia y eficacia las mismas situaciones.

- Las situaciones didácticas propuestas a los alumnos, son similares a las planteadas por Brousseau en el sentido de generar aprendizaje a través de la adaptación del alumno a un medio didáctico que aparece problematizado y que gracias a la metodología de la ingeniería didáctica, ha sido posible controlar algunas de las diversas variables didácticas presentes en dicho medio.

- Las situaciones didácticas propuestas para ser aplicadas al aula consideran la interacción y dependencia de los tres polos del sistema didáctico: el profesor, el estudiante y el saber (curriculum escolar). Respecto a este último polo las aportaciones de Vergnaud son importantes pues dan cuenta del proceso de apropiación de los niños respecto de contenidos escolares específicos.

- El papel del profesor es doble y no debe llevar al falso dilema de ubicarlo en el rol de transmisor (como en el modelo normativo) o facilitador (en el modelo incitativo). Según Edwards (1990) los dos conceptos son necesarios y en la práctica deben ir juntos, aunque reconoce que el manejo de ambos por parte del docente, puede generarle ciertos conflictos como: el reprimirse de explicar o enseñar a los niños, pero a la vez, si los deja solo, pude que ellos (los niños) no inventen o construyan conocimientos adecuados o lleguen a conclusiones falsas.

- El alumno ensaya, busca, propone soluciones a los problemas, las confronta con sus compañeros, las defiende o las discute.





- El saber es considerado con su propia lógica. "Se pretende que los alumnos entiendan que la matemática es un objeto de conocimiento sujeto a cuestionamiento, análisis y experimentación" (Fuenlabrada, 1995), el conocimiento no está acabado; y a la vez consideren a la matemática como una herramienta útil para resolver problemas.

Faltarían por agregarse otros componentes didácticos para entender las nuevas funciones del profesor bajo este enfoque de enseñanza, en este sentido para dar un idea aunque muy general, se ilustra lo que hace actualmente un maestro y lo que se esperaría que hiciera: a) planteamiento y resolución de problemas tipo una vez enseñadas las herramientas necesarias para resolverlos vs. planteamiento de problemas para que los alumnos los resuelvan aún sin contar con herramientas convencionales para hacerlo; b) calificación del resultado vs. discusión sobre las diversas estrategias de solución encontradas por los alumnos; c) trabajo individualizado vs. trabajo en equipo propiciando la socialización de opiniones y conocimientos, etcétera.

Por lo anterior es posible que la actual propuesta didáctica para la enseñanza de las matemáticas se convierta en una situación problemática para aquellos docentes que quieran aplicarla en el aula; ellos la "interpretaran" desde su conocimiento matemático, el conocimiento didáctico construido en su práctica y su concepción de aprendizaje, entre otras variables.

### 2.3. Los significados de los problemas multiplicativos desde la teoría de los campos conceptuales

Uno de los objetivos, quizás el esencial de la enseñanza de las matemáticas, es que la enseñanza posibilite a los alumnos el trabajar con el sentido de los conocimientos matemáticos. Según Brousseau citado por Charnay (1994, pp. 52-53) "(...) el sentido de un conocimiento matemático se define: no sólo por la colección de situaciones donde este conocimiento es realizado como teoría matemática; no sólo por la colección de situaciones donde el sujeto lo ha encontrado como un medio de solución; sino también por el conjunto de concepciones que rechaza, de errores que evita, de economías que procura, de formulaciones que retoma, etcétera".

Ahora bien ¿qué es un campo conceptual? y, ¿por qué resulta útil la teoría de los campos conceptuales en la construcción en los alumnos del sentido de la matemática? "Nos proponemos designar como "campo conceptual", un campo de conocimientos suficientemente homogéneo para que pueda ser analizado por una red conexa de conceptos y relaciones, suficientemente extenso para no dejar de lado cierto aspectos que puedan desempeñar un papel importante en los procesos de adquisición. Como la adquisición de conceptos se realiza principalmente a través de la solución de problemas, un "campo conceptual" es ante todo un espacio de problemas" (Vergnaud y Ricco 1984, p. 4).

La teoría de los campos conceptuales es útil a los investigadores de la matemática educativa y profesores en tanto les permite:

a) Conocer las familias de problemas y situaciones de donde toman su significado los conceptos matemáticos; b) Analizar y clasificar estas situaciones, como base para el diseño de situaciones de aprendizaje, así como para prever los procedimientos de solución susceptibles de ser utilizados por los estudiantes; c) Estudiar las competencias y procedimientos de solución utilizados por los estudiantes para el dominio de cada uno de los significados (según la familia de problemas). Este proceso de construcción de competencias matemáticas generalmente ocupa largos periodos de tiempo. Por ejemplo, la construcción de las relaciones aditivas va desde el nivel preescolar hasta la secundaria; d) Saber que los significantes no refieren directamente a la realidad sino a los significados (denominados invariantes operatorios a la idea de Piaget), mismos que son responsables de generar los procedimientos de los estudiantes. Así pues, habrá que considerarse siempre que cualquier concepto matemático remite a un conjunto de situaciones, que involucran determinados invariantes operatorios para su tratamiento y que pueden representarse a través de sistemas simbólicos.

Estos cuatro aspectos estudiados por el campo conceptual son estratégicos en la construcción del sentido del conocimiento matemático por el alumno, en tanto orientan al diseñador de situaciones de aprendizaje (sea el profesor o el investigador en didáctica), sobre las familias de problemas que existen, así como de los significados que se juegan en cada una de ellas; las estrategias de solución empleadas por los alumnos y de los sistemas simbólicos que utilizan.

En relación a las situaciones multiplicativas como campo conceptual, según Vergnaud (1991) "Por "estructura multiplicativa" entendemos el "espacio de problemas" cuya solución exige la utilización de operaciones aritméticas de multiplicación o división. (...) este tipo de problemas lo engendran dos relaciones fundamentales: la relación del isomorfismo de medidas y relación de producto de medidas.





Ambas categorías ponen en juego varias categorías de conceptos en forma indisociable (...) Los distintos campos conceptuales que hemos definido (estructuras aditivas, lógica de clases, etc.) están relacionado entre sí, especialmente debido al hecho de que las mismas estructuras lógico - matemáticas van a incidir transversalmente sobre los distintos contenidos físicos, y que la apropiación cognitiva de estos distintos contenidos puedan plantear problemas que en parte son comparables. Pero también es cierto que estos contenidos tienen su propia especificidad y por lo tanto son en ciertos aspectos incomparables".

Vergnaud al analizar los problemas de estructura multiplicativa, distingue dos grandes categorías de relaciones multiplicativas mismas que requieren de la utilización de las relaciones de multiplicación y división. La primer categoría multiplicativa es el isomorfismo de medidas "(...) es una relación cuaternaria entre cuatro cantidades; dos cantidades son medidas de un cierto tipo, y el resto son medidas de otro tipo" (Vergnaud 1991, p. 197); existe además una relación proporcional entre los dos espacios de medidas. La segunda categoría de problemas es el producto de medida "(...) esta forma de relación consiste en un relación ternaria entre tres cantidades, de las cuales, una es el producto de las otras dos, tanto en plano numérico como en el plano dimensional" (Vergnaud 1991, p. 211). Las relaciones ternarias[2] no serán desarrolladas en el marco teórico, ya que la mayoría de las situaciones didácticas de la propuesta oficial que es estudiada en este trabajo, gira en torno a problemas de isomorfismo de medidas.

### 2.3.1. Problemas de isomorfismo de medidas

Según Vergnaud (1991, p. 197) es sobre este tipo de relaciones multiplicativas que se introduce la enseñanza de la multiplicación y la división en la escuela primaria y representan la mayoría de los problemas de tipo multiplicativo.

El isomorfismo de medidas considera todas las situaciones problemáticas en las que dos espacios de medias: dos cantidades pertenecen a una misma clase y las otras dos pertenecen a otra clase distinta, esto es, se ponen en relación cuatro cantidades (relación cuaternaria) y la relación entre estas cuatro cantidades es proporcional. Por ejemplo: Nancy compra 5 paquetes de refrescos, cada paquete tiene 6 refrescos ¿cuántos refrescos tiene?

Para representar este tipo de problemas se propone la siguiente representación.

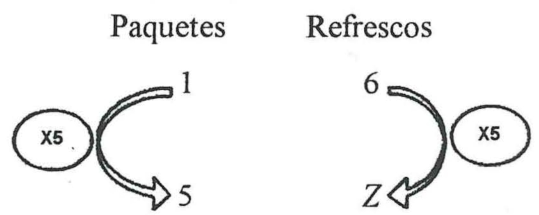
---

[2] Es el final de la secuencia de los problemas multiplicativos que se introduce el trabajo con arreglos rectangulares, con miras al trabajo algorítmico de la multiplicación en el tercer grado de primaria.

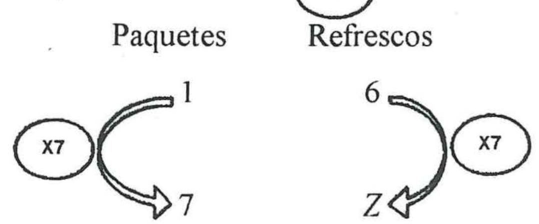
| Paquetes | Refrescos |
|---|---|
| 1 | 6 |
| 5 | Z |

En este caso los números 1 y 5 representan una clase de medida (paquetes), en tanto el 6 y la incógnita representan la otra clase de medida (refrescos). Ahora bien para encontrar el valor de *Z*, se puede proceder de dos maneras: estableciendo una relación proporcional vertical, o bien una relación horizontal. La primera implica el uso del denominado operador escalar, y el segundo el operador función. Ambos operadores serán explicados a continuación.

*Operador escalar*. Si se establece que la relación vertical entre el 1 y el 5 en el espacio de medida de los paquetes, es que este último es *5 veces mayor que 1*, hay 5 veces más paquetes, esta proporción vertical es por lo tanto la misma que existe entre 6 refrescos y *Z*. *Z* es 5 veces mayor que 6, entonces hay que multiplicar al 6 por 5 (6 x 5).




Es importante señalar que desde el análisis dimensional el operador escalar X5 no representa ni paquetes ni refrescos, es decir, es un número sin dimensión y permite pasar de una línea a otra en la misma categoría de medidas. Así por ejemplo, si ahora Nancy compra 7 paquetes de refrescos y en cada paquete hay 6 refrescos ¿cuántos refrescos compró? Entonces tenemos que el operador escalar es X7



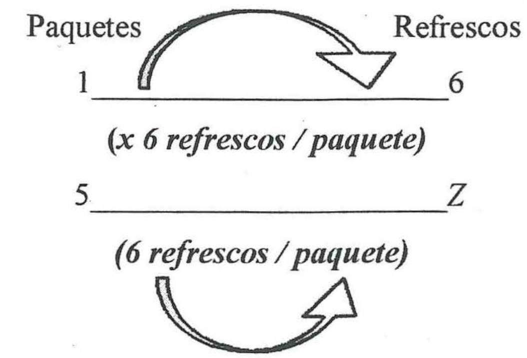

Puede observarse que existe un crecimiento proporcional entre la cantidad de veces que crece el número de paquetes con la cantidad de refrescos. Si se quisiera conocer la cantidad





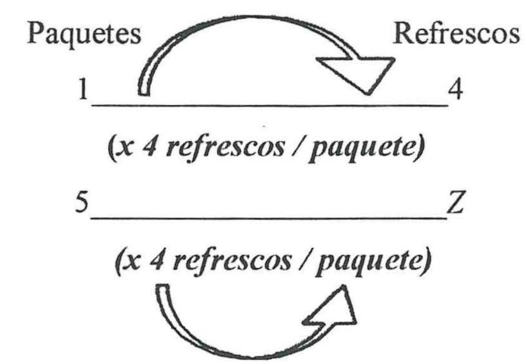
de refrescos que Nancy tiene, según la cantidad de paquetes que compra será necesario aplicar el mismo operador escalar en ambos espacios de medida.

*Operador función*. La relación de proporcionalidad horizontal esta dada por un operador que representa una función (f) y expresa el paso de una categoría de medida a otra. Su expresión verbal expresa una razón, en nuestro el ejemplo sería: refrescos / paquete.




En este caso el operador función es *x 6*, entendiéndose que *hay 6 refrescos por paquete*. La multiplicación que modela esta relación multiplicativa es: 5 paquetes x 6 refrescos/paquete = 30 refresco (5 x 6).

Si la cantidad de refrescos contenidos en el paquete varía, entonces el operador función cambia, supóngase que ahora cada paquete tiene 4 refrescos, la representación de esta relación multiplicativa sería:




La multiplicación que expresaría la solución a este problema es: 5 refrescos x 4 refrescos/paquete = 20 refrescos (5 x 4). En esta relación multiplicativa cambia el número de paquetes pero siempre aparece constante la razón (4 refrescos por paquete).

Este análisis dimensional de los operadores escalar y función involucrados en los problemas multiplicativos cuaternarios puede resultar muy útil al profesor para reflexionar sobre el tipo de multiplicación que propone a sus alumnos y el sentido que adquiere cada uno de los factores de la multiplicación y el producto de ellos según el contexto del problema planteado.

Por lo que toca a la solución de problemas cuaternarios como los anteriores por parte de los alumnos, ellos transitan entre las relaciones que establecen con ambos operadores (escalar y función). Supóngase que tienen que el problema a resolver es: Un refresco cuesta 8 pesos ¿Cuántos dinero se pagó por 4 refrescos?

Debido a la presencia de la unidad, los niños tienen que considerar y controlar que por cada refresco se pagan 8 pesos (el operador función).

Refrescos Precio

1 ——— 8

*(x 8 pesos/refresco)*

4 Z

Pero como el problema plantea cuánto se paga por 4 refrescos, los niños pueden pensar ahora en la relación 4 veces el valor de un refresco (operador escalar), entonces para el valor de Z (costo total) habrá que multiplicar 8 **x** **4**.

Refrescos Precio

(x 4) 1 ——— 8 (x 4)

4 Z

Así entonces en el problema que al principio se podía encontrar el valor de *Z* multiplicando **4 x 8** (operador función), los niños resuelven generalmente con la multiplicación **8 x 4**, pues en este momento ya están pensado en las cantidad de refrescos (veces) y no en la relación (x 8 pesos/refrescos).

En el campo conceptual de las estructuras multiplicativas se pueden distinguir subclases de problemas sin más que considerar el tipo de magnitud elemental implicado: discreta, continua; el tipo de números: entero, decimales, números grandes, números inferiores a 1, y también teniendo en cuenta los conceptos implicados.

En principio, los siguientes problemas de isomorfismo de medidas que se analizan, están referidos a los números naturales, y considerando la unidad como el primer término que





aparece a = 1. Es con este tipo de problemas sencillos que los alumnos de primaria inician el camino de la construcción de la multiplicación y la división.

| Medida 1 | Medida 2 |
|---|---|
| 1 | b |
| c | d |

Según la ubicación de la incógnita, se generan tres clases.

Primera clase: Un refresco cuesta 8 pesos ¿cuánto costarán 4 refrescos?

| Refrescos | Precios |
|---|---|
| 1 | 8 |
| 4 | Z |

El planteamiento de este problema es de multiplicación. Y por lo que toca a su solución, este problema puede ser resuelto según la competencia matemática de cada alumno, suele ocurrir que algunos alumnos, tal vez consideren más fuertemente las relaciones del operador escalar que las del operador función. Debido a la presencia de la unidad y el trabajo con números naturales pequeños, la solución a este problema pasa por la suma iterada, precisamente a este tipo de problemas se asocia que la multiplicación consiste en una suma iterada.

Segunda clase: cuatro refrescos nos cuestan 24 pesos ¿cuánto costará un refresco?

| Refrescos | Precios |
|---|---|
| 1 | Z |
| 4 | 24 |

El planteamiento de este problema es de división, y en particular para encontrar el costo de un refresco es necesario repartir 24 pesos entre cada refresco. Este tipo de división es la más básica de todas, pues puede ser resulta utilizando como procedimiento el uso de las relaciones de correspondencia.

Tercera clase: Un refresco cuesta 8 pesos ¿cuántos refrescos podemos comprar con 24 pesos?

| Refrescos | Precios |
|---|---|
| 1 | 8 |
| Z | 24 |

El planteamiento del problema al igual que el anterior es de división, sin embargo su solución reviste una mayor complejidad relacional y numérica. Ya no se trata de repartir unidades, por ello la correspondencia no es un procedimiento viable, sino formar grupos de

8. En otras palabras, se tiene que calcular "cuántas veces cabe el 8 en 24". Esta división se conoce como de agrupamiento o tasativa.

De cada una de estas tres clases se pueden generar varias subclases, dependiendo del tipo de cantidades que se manejen (números naturales, enteros, o racionales) por ejemplo para:

| Refrescos | Precios |
|---|---|
| a=1 | b |
| c | Z |

Algunas de las subclases que se pueden derivar son las siguientes:

| Pequeños números enteros | | Grandes números enteros | |
|---|---|---|---|
| 1 | 3 | 1 | 42 |
| 2 | Z | 183 | Z |
| **Valor unitario decimal** | | **Números decimales** | |
| 1 | 2.75 | 1 | 6.8 |
| 7 | Z | 5.74 | Z |
| **Valor unitario inferior a 1** | | **Número de unidades inferior a 1** | |
| 1 | 0.25 | 1 | 0.08 |
| 7 | Z | 0.42 | Z |

No vamos a analizar a profundidad complejidad relacional y conceptual de cada uno de estos seis problemas derivados, sin embargo si comparamos el más sencillo de ellos (problema con pequeños números enteros) con el más complejo (problema con número de unidades inferiores a 1), se observa que para el primero basta la suma iterada, por el contrario, el otro problema requiere que el alumno haya construido una estructura mental (únicamente posible a partir de la adolescencia) que permita entender las relaciones proporcionales implicadas (verticales y horizontales) en el campo de los números racionales donde el concepto de la multiplicación y la división se consolidarán.

Existe un segundo grupo de problemas cuaternarios cuando a ≠ 1, problemas (de isomorfismo de medidas), e implican una complejidad relacional y de cálculo diferente a los casos anteriores. De estos problemas se derivan cuatro clases con respecto a la ubicación de la incógnita.

Primera clase: Si 3 sillas costaron 1050 pesos ¿cuánto dinero necesito si voy a comprar 5?





| Sillas | Precios |
|---|---|
| 3 | 1050 |
| 5 | Z |

Segunda clase: Si 3 sillas constaron 1050 pesos ¿cuántas sillas se pueden comprar con 2450 pesos?

| Sillas | Precios |
|---|---|
| 3 | 1050 |
| Z | 2450 |

Tercera clase: Por 5 sillas se pagó 3450 pesos ¿cuánto dinero debo pagar por 2 sillas?

| Sillas | Precios |
|---|---|
| 2 | Z |
| 5 | 3450 |

Cuarta clase: Por 7 sillas se pagó 4697 pesos ¿cuántas sillas se pueden comprar si se tienen 2684 pesos?

| Refrescos | Precios |
|---|---|
| Z | 2684 |
| 7 | 4697 |

Estas cuatro clases de problemas, son conocidos como "los problemas de regla de tres". Ahora bien, el cálculo relacional involucrado en cada uno de los problemas, se encuentra que: los problemas 1 y 3 están involucradas dos operaciones: una división y una multiplicación, así para encontrar el valor de Z en el primer problema la operación sería (1050 ÷ 3) x 5 y para el tercer problema (3450 ÷ 5) x 2. Por lo que toca problema 2 y 4, el valor de Z se calcula con una doble división, así en el problema 2 sería: 2450÷ (1050 ÷ 3); y en tanto en el problema 4 es: 4697 ÷ (2684 ÷ 5). En resumen son cuatro clases de problemas, pero son dos los cálculos relacionales involucrados en ellos.

De manera semejante a lo que sucede en las clases donde a = 1, las cuatro grandes clases cuando a ≠1, también pueden dividirse en subclases según la cualidad de los datos numéricos involucrados. Haciendo un conteo de todas las subclases derivadas de cada una de las ocho clases presentadas dan 48 problemas diferentes en donde está implicado un grado de dificultad distinto.

Los problemas relacionados a la proporción múltiple y la proporción inversa, se incluyen en el campo conceptual sobre el isomorfismo de medidas, pero como no se relacionan con los problemas multiplicativos que se analizan en este trabajo, no serán abordados.

En resumen se puede señalar que en los problemas de estructura cuaternaria el signo **x** (por) que representa la multiplicación tiene varios significados[3]:

1) *El signo x* hace referencia al operador escalar que va variando. Que realiza, un incremento proporcional vertical.

2) *El signo x* hace referencia a un operador razón (operador constante) donde se establecen relaciones de proporcional horizontal entre dos espacio de medida vinculados por una función.

Como se puede apreciar la construcción del concepto de multiplicar que incluye el proceso inverso de la división no remite a un tipo específico de situaciones, sino a varias que le confieren diferente significado, la labor y responsabilidad de la escuela será la de proveer a los alumnos de las situaciones didácticas que los enfrenten a problemas multiplicativos (con distinto significado) que sean de su competencia, a fin de que construyan a lo largo de su tránsito por la escuela primaria un subcampo del campo multiplicativo.

## 2.4 El operador función y el operador escalar: dos caminos para la enseñanza de la multiplicación

Anteriormente se expusieron algunas familias y subfamilias de problemas que conforman el campo de los problemas multiplicativos, particularmente los de estructura cuaternaria. Sin embargo, es necesario hacer algunas consideraciones respecto al trabajo didáctico sobre dichos problemas, en el curriculum de matemáticas de segundo grado.

- Se proponen problemas multiplicativos de estructura cuaternaria con las siguientes variables:

| Problema 1 | Problema 2 | Problema 3 |
|---|---|---|
| a=1 b<br>c Z | a=1 b<br>Z d | a=1 Z<br>c d |

Un ejemplo del problema uno es: Juan vende bolsas con naranjas. Cada bolsa tiene 6 naranjas ¿Cuántas naranjas vende con 5 bolsas? Este es un problema de la multiplicación,

[3] Un tercer significado de la multiplicación es el producto de medidas, remite a una relación ternaria y a esta





pero dadas las características del planteamiento del problema se puede afirmar que refiere al significado del operador función. Sin embargo, el planteamiento del problema no determina que el procedimiento de solución se sesgue hacia el operador función, pues los alumnos pueden optar por el operador escalar. Por el contrario, se puede hacer un planteamiento de problema sesgado hacia el operador escalar, por ejemplo: En la feria Leticia le atinó 5 veces a una botella que vale 6 puntos ¿cuántos puntos ganó? Al igual que el problema anterior, el planteamiento no determina necesariamente el uso del operador escalar, los alumnos pueden optar también por el operador función.

El problema dos, implica la división tasativa o de agrupamiento. Por ejemplo: Juan vende bolsas con naranjas. Si tiene 30 naranjas y quiere poner 6 naranjas en cada bolsa. ¿Cuántas bolsas necesita?

El problema tres, implica la división de reparto. Por ejemplo, Juan vende bolsas con naranjas. Si tiene 30 naranjas y las reparte en partes iguales en 6 bolsas ¿cuántas naranjas tendrán cada bolsa?

Resumiendo, en segundo grado la mayor parte del trabajo didáctico se realiza con problemas de estructura cuaternaria con número naturales y con el valor de a = 1, aquí los alumnos tienen oportunidad de reflexionar con los dos significados de multiplicación (escalar y función) y los dos significados de la división (de reparto y tastiva), formalizando convencionalmente el significado de reparto en tercer grado y hasta cuarto grado la división tasativa.

Es importante resaltar que en el diseño de las situaciones didácticas para la enseñanza de la multiplicación de la propuesta oficial, se eligieron situaciones problemáticas explícitamente sesgadas hacia el operador función y otras hacia el operador escalar. De hecho se trata de que ambos operadores sean utilizados por los alumnos, y se es consciente del hecho de que no es este grado en que los ellos, por ejemplo construyan en su totalidad el concepto de función, el propósito es más modesto: que los alumnos considerando el contexto del problema puedan observar y reflexionar lo que representa cada factor de la multiplicación cuando escribe convencionalmente a x b = c.

categoría pertenecen los problemas de combinatoria, área y volumen.

- El rango numérico que se trabaja en los problemas permite a los alumnos construir el Cuadro de Multiplicación, mismo que organiza los resultados (productos) que resuelven los problemas.

- Las situaciones multiplicativas que involucran la estructura ternaria, está circunscrito para el trabajo con arreglos rectangulares hacia el final de la secuencia didáctica.

A continuación se hace un análisis matemático, didáctico y psicológico que alude a la complejidad relacional que representa cada operador multiplicativo (función y escalar) para ser construido por los alumnos.

*Nivel matemático y didáctico.* En este nivel se analizan básicamente la definición formal de la multiplicación, el significado de los operadores función y escalar, y la organización de las multiplicaciones que cada de una de ellas genera cuando son utilizadas.

¿Cuál es la definición matemática de la multiplicación? Esto es, su definición formal

¿Cuál es el sentido o significado que adquieren los factores de la multiplicación en las diferentes familias de problemas multiplicativos?[4]

La definición matemática hace alusión a una relación cuaternaria, donde la relación del multiplicando con la unidad, es la misma que guarda el multiplicador con el resultado o producto. Es decir se enmarca a la multiplicación en una estructura proporcional.

Esta definición matemática, en principio parecerá extraña a los profesores de primaria que piensen que la multiplicación remite a una relación de tres elementos: el multiplicando, el multiplicador y el producto, es decir, una relación ternaria. Y que además crean que la multiplicación remite a una suma iterada. Ideas validas para los números naturales, pero que no se sostienen en otros sistemas numéricos.

A continuación se presenta un problema multiplicativo para observar el sentido de los factores de la multiplicación, según la relación de los datos sea establecida para hacer intervenir al operador escalar o al operador función, y a la vez para entender la modelación

[4] Estas preguntas aluden a un nivel de la transposición didáctica donde el matemático validaría el conocimiento matemático que se enseña en la escuela.



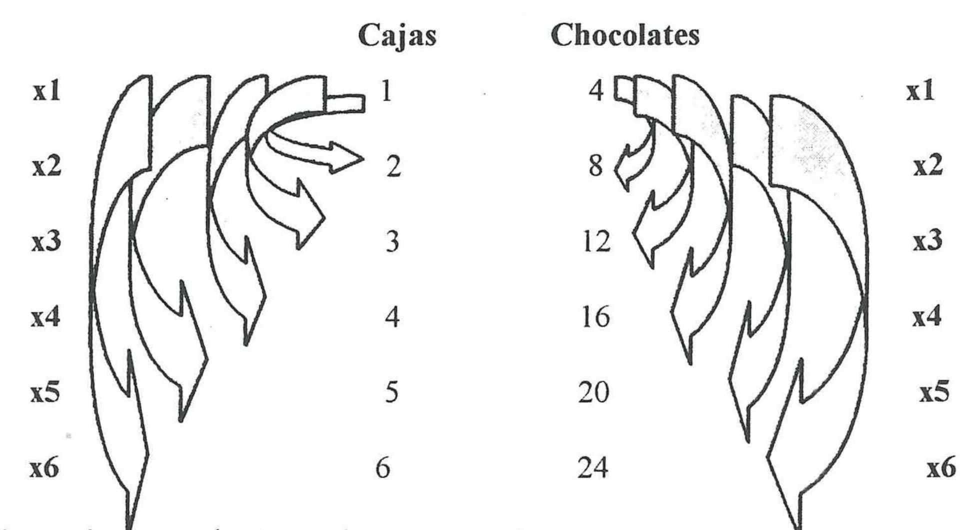


y organización de las multiplicaciones que se generan al usar cada uno de los operadores (las Tablas de Multiplicar o el Cuadro de Multiplicaciones).

Problema: Nancy atiende una dulcería, durante el día vendió varias cajas de chocolates, cada caja contiene 4 chocolates. Averiguar la cantidad de chocolates que vendió en cada ocasión.

Se analiza la solución del problema según se use *el operador escalar o el operador función.*

*El operador escalar* trabaja sólo en un espacio de medida, en este caso cajas. Si Nancy vende dos cajas, vende el doble (dos veces) con relación a una caja. Si vende tres cajas, vende el triple con relación a una caja, y así sucesivamente, el operador escalar cambia según la cantidad de cajas que se venden, en otras palabras el operador escalar pasar de un renglón a otro dentro de un espacio de medida. Esta misma relación multiplicativa escalar que es construida en el espacio de las cajas, se da en el espacio de los chocolates, es decir cundo se vende el doble de cajas, se vende el doble de chocolates; cuando se vende el triple de cajas, se vende el triple de chocolates, y así sucesivamente. Los dos espacios de medida (cajas y chocolates) se comportan de igual manera (en este sentido se usa el término isomorfismo de medidas), pues en ambos se da el mismo crecimiento proporcional vertical, como se observa en la siguiente ilustración.




(Y así sucesivamente hasta vender n veces cajas).

Si se quiere organizar las multiplicaciones que se generarían para saber cuántos chocolates se tendrían de 1 a 10 cajas, mediante el uso del operador escalar, se tendría "la tabla del 4" organizada de la siguiente manera.

| | |
|---|---|
| 4 x 1 = 4 | 4 chocolates una vez |
| 4 x 2 = 8 | 4 chocolates dos veces |
| 4 x 3 = 12 | 4 chocolates tres veces |
| ⋮ | ⋮ |
| 4 x 8 = 32 | 4 chocolates ocho veces |
| 4 x 9 = 36 | 4 chocolates nueve veces |
| 4 x 10 = 40 | 4 chocolates diez veces |

En esta organización de las multiplicaciones, el segundo factor de la multiplicación alude al operador escalar, que indica la cantidad de veces que se repite el primer factor (cardinal del conjunto que se iterará).

*El operador función* permite el paso de un espacio de medida (representado por las cajas) a otro espacio (representado por los chocolates), para esto se tiene que multiplicar: cajas x chocolates/caja = chocolates. Para el caso del problema de Nancy, cada una de sus cajas tiene 4 chocolates, entonces el operador función es x 4 chocolates/caja. El operador función, puede también ser denominado operador razón, precisamente porque expresa la razón 1 (caja) a 4 (chocolates). Observe en la siguiente ilustración, el uso del operador función para calcular el total de chocolates que vende Nancy.

*(x 4 refrescos / paquete)*

| Cajas | Chocolates |
|---|---|
| 1 | 4 |
| 2 | 6 |
| 3 | 9 |
| 4 | 16 |
| 5 | 20 |
| 6 | 24 |

En cada ocasión y sin importar el número de cajas que se venda, el operador se mantiene constante pues todas las cajas tienen 4 chocolates. La organización de las multiplicaciones que se obtiene es la siguiente:





| | |
|---|---|
| 1 x 4 = 4 | 1 caja por 4 chocolates/caja |
| 2 x 4 = 8 | 2 cajas por 4 chocolates/ caja |
| 3 x 4 = 12 | 3 cajas por 4 chocolates/caja |
| 4 x 4 = 16 | 4 cajas por 4 chocolates/caja |
| 5 x 4 = 20 | 5 cajas por 4 chocolates/caja |
| 6 x 4 = 24 | 6 cajas por 4 chocolates/ caja |
| 7 x 4 = 28 | 7 cajas por 4 chocolates/caja |
| 8 x 4 0 32 | 8 cajas por 4 chocolates/caja |
| 9 x 4 = 36 | 9 cajas por 4 chocolates/caja |
| 10 x 4 = 40 | 10 cajas por 4 chocolates/caja |

En esta forma de organizar la tabla del cuatro desde el operador función, el primer factor corresponde a las cajas, y el número de éstas cambia según la cantidad de cajas que se desea vender, por el contrario dado que la función es constante (4 chocolates por caja) entonces el segundo factor es constante.

Un hecho importante a resaltar es que la organización de la tabla del cuatro desde el operador función (1 x 4, 2 x 4, 3 x 4, etc.) es inversa a la tabla del cuatro del operador escalar 4 x 1, 4 x 2, 4 x 3,etc.), esto es el segundo factor de la multiplicación es constante en el operador función, por el contrario el primer factor es constante .De esta manera en ambas organizaciones multiplicativas esta presente la redefinición de la unidad (conjuntos equipotentes) base de trabajo multiplicativo para los alumnos. Es únicamente por el contexto del problema y de la relación establecida entre los datos que se entenderá el significado de cada factor en la escritura multiplicativa.

También es posible organizar desde el operador función otra tabla del cuatro, donde se mantenga constante el primer término y cambie el segundo término, pero para ello se requera cambiar cada vez la función, como se muestra a continuación:

| | |
|---|---|
| 4 x 1 = 4 | 4 caja por 1 chocolates/ en cada caja |
| 4 x 2 = 8 | 4 cajas por 2 chocolates/ en cada caja |
| 4 x 3= 12 | 4 cajas por 3 chocolates/en cada caja |
| 4 x 4 = 16 | 4 cajas por 4 chocolates/en cada caja |
| 4 x 5 = 20 | 4 cajas por 5 chocolates/en cada caja |
| 4 x 6 = 24 | 4 cajas por 6 chocolates/ en cada caja |
| 4 x 7 = 28 | 4 cajas por 7 chocolates/en cada caja |
| 4 x 8 = 32 | 4 cajas por 8 chocolates/en cada caja |
| 4 x 9 = 36 | 4 cajas por 9 chocolates/en cada caja |
| 4 x 10 = 40 | 4 cajas por 10 chocolates/en cada caja |

De esta manera se tienen dos formas de organización de la tabla desde el operador función, nuevamente el contexto del problema es clave para entender el significado la escritura multiplicativa.

En conclusión, se ha mostrado dos organizaciones de la "tabla del 4" según se piense en una relación escalar o una relación función, son matemáticamente válidas. La decisión didáctica de cuál modelación de las tablas trabajaran los profesores y alumnos, en nuestra opinión parece depender de la noosfera de cada sistema escolar. En este sentido, hay que resaltar el hecho de que la tabla de multiplicar originada con el uso del operador escalar ha sido la más difundida en el ámbito escolar de la primaria mexicana. La enseñanza de este significado fue propuesto en los libros de texto de los años setenta y aún hoy parece tener vigencia en los profesores de educación básica. Así pues, no es de extrañar los comentarios de los profesores de primaria expresados en los espacios del PRONAP en el sentido de que "ahora la multiplicación se está enseñando al revés" y que es "matemáticamente incorrecta". Esta situación muestra que algunos profesores ya han observado que las multiplicaciones plasmadas en la propuesta de segundo grado no coinciden con su conocimiento matemático de la multiplicación. Sin embargo, tal conocimiento fundamentado en el escalar, es una visión limitada (aunque no incorrecta) para juzgar la validez matemática de representaciones multiplicativas desde el operador función. En el Capítulo III, se mostrarán algunas implicaciones didácticas de la manera como Estela comprende las tablas de multiplicar desde el operador escalar, y la forma como la enseña a sus alumnos, además una reflexión a si esta forma didáctica de proceder pueda no ser sólo exclusiva de ella, sino de muchos profesores.

Por lo que atañe a la organización de las multiplicaciones en los que está en juego el operador función, esta se realiza a través del Cuadro de Multiplicaciones. Este cuadro conocido también como pitagórico, se construye y estudia en la propuesta oficial de segundo grado; posteriormente a la enseñanza convencional de la escritura multiplicativa. Se adjudica el significado al color de cada una de la franjas, por ejemplo: la franja vertical (de color café) indica el número de cajas y la franja horizontal (de color rosa) indica el número de chocolates por caja. Para el llenado de la columna del 4, se aplica el operador función (4 chocolates/caja) y se va cambiando el número de cajas (1, 2, 3, 4,...hasta 10), se tiene entonces el siguiente llenado en el Cuadro de Multiplicaciones. Se propone llenar





primero considerando las columnas por la necesidad de que los alumnos observen la constancia de la medida de los conjuntos, esto es la redefinición de la unidad.

| X | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | | | | | 0 | | | | | | |
| 1 | | | | | 4 | | | | | | |
| 2 | | | | | 8 | | | | | | |
| 3 | | | | | 12 | | | | | | |
| 4 | | | | | 16 | | | | | | |
| 5 | | | | | 20 | | | | | | |
| 6 | | | | | 24 | | | | | | |
| 7 | | | | | 28 | | | | | | |
| 8 | | | | | 32 | | | | | | |
| 9 | | | | | 36 | | | | | | |
| 10 | | | | | 40 | | | | | | |

Una vez que los alumnos tiene claro la iteración de conjuntos equipotentes, posteriormente estudiaran el llenado del Cuadro de Multiplicaciones por renglones, por ejemplo en del cuatro: entonces se mantiene constante el número de cajas y se cambia la función desde 1 chocolate/caja hasta 10 chocolates/caja, obteniéndose el siguiente llenado del Cuadro.

| X | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| [illegible] | | | | | | | | | | | |
| [illegible] | | | | | | | | | | | |
| 2 | | | | | | | | | | | |
| 3 | | | | | | | | | | | |
| [illegible] | 0 | 4 | 8 | 12 | 16 | 20 | 24 | 28 | 32 | 36 | 40 |
| 5 | | | | | | | | | | | |
| [illegible] | | | | | | | | | | | |
| [illegible] | | | | | | | | | | | |
| [illegible] | | | | | | | | | | | |
| [illegible] | | | | | | | | | | | |
| [illegible] | | | | | | | | | | | |

En el mismo orden de ideas, el Cuadro de Multiplicaciones también sirve para modelar problemas multiplicativos que impliquen el operador escalar, estableciendo una convención sobre el significado que adquirirá cada franja de color. Puede ser considerando el problema anterior donde el número de cajas puede ser traducido a veces, o bien, otro problema como el siguiente:

| | |
|---|---|
| 4 x 0 = 0 | Enrique le atinó a la botella que vale 4 puntos, cero veces |
| 4 x 1 = 4 | Enrique le atinó a la botella que vale 4 puntos, una vez |
| 4 x 2 = 8 | Enrique le atinó a la botella que vale 4 puntos, dos veces |
| 4 x 3 = 12 | Enrique le atinó a la botella que vale 4 puntos, tres veces |
| | Y así hasta llegar a: |
| 4 x 10 = 40 | Enrique le atinó a la botella del 4, diez veces |

Aquí la franja vertical (color café) indica el valor de puntos de la botella, y la franja horizontal (color rosa) indica las veces que se le atinó, y los resultados se encuentran en el renglón del 4 del Cuadro de Multiplicaciones.

| X | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | | | | | | | | | | | |
| 1 | | | | | | | | | | | |
| 2 | | | | | | | | | | | |
| 3 | | | | | | | | | | | |
| 4 | 0 | 4 | 8 | 12 | 16 | 20 | 24 | 28 | 32 | 36 | 40 |
| 5 | | | | | | | | | | | |
| 6 | | | | | | | | | | | |
| 7 | | | | | | | | | | | |
| 8 | | | | | | | | | | | |
| 9 | | | | | | | | | | | |
| 10 | | | | | | | | | | | |

Para la familia de problemas multiplicativos ternarios o de combinatoria, su resolución hace pensar todavía más sobre la relatividad y sentido de los factores de la multiplicación. Por ejemplo en el siguiente problema: Cinco muchachos y seis muchachas van a una fiesta. Decidieron que entre ellos todos van a bailar con todos. ¿Cuántas parejas pueden formarse?

La operación que resuelve el problema es la multiplicación 5 x 6 = 30. Pero ¿tiene sentido en este tipo de problemas intentar reconocer el significado que tienen los números 5 y 6,





como operador escalar o función enunciado anteriormente? Parece que no, dado que se trata de otra categoría multiplicativa. Sin embargo también el Cuadro de Multiplicación puede modelar dicha escritura multiplicativa.

¿Cuáles son las conclusiones que se pueden sacar después de los argumentos matemáticos y didácticos hasta ahora expuestos?

- Que los factores de la multiplicación son móviles y adquieren su significado según la familia del problema multiplicativo planteado. Al respecto ya anteriormente se dieron ejemplos de distintas formas de organizar las multiplicaciones desde el operador escalar y el operador función. Además en los problemas ternarios los factores multiplicativos implicados de ninguna manera se ajustan a la idea común de multiplicando y multiplicador (términos comunes usados por los profesores para designar a los factores de la multiplicación). En el capitulo III de este trabajo mostraremos la manera particular como Estela interpreta y modela las tablas de multiplicar de una manera distinta hasta las ahora expuesta.

- Que las tablas de multiplicar y el Cuadro de Multiplicaciones son instrumentos de cálculo, que refieren a distintas formas de organizar las multiplicaciones de los dígitos y ambas son matemáticamente correctas. Surgen problemas de interpretación de estas formas de organizar las tablas cuando se les desvincula de los problemas que resuelven. Los profesores generalmente no dan mucha importancia a este hecho relevante, en tanto se concentran en que los niños den el resultado correcto de multiplicaciones que memorizan, incluso aluden a la propiedad conmutativa de la multiplicación, o a la igualdad de los resultados para indicar a sus alumnos que da lo mismo 6 x 5 que 5 x 6. Pero no advierten la "no obviedad" de la conmutatividad de los factores cuando existe el contexto de un problema, por ejemplo: no es lo mismo 6 paquetes con 5 chocolates cada uno, que 5 paquetes con 6 chocolates cada uno, aun y cuando se este hablando de la misma cantidad de chocolates en cada caso (30). La propiedad conmutativa es una propiedad matemática de una operación.

- Que los operadores función y escalar son dos formas equivalentes y matemáticamente válidas para resolver problemas multiplicativos. Esto implica que desde el punto de vista matemático tenemos dos caminos de acceso para la enseñanza inicial de la multiplicación en la escuela primaria. Entonces la decisión didáctica más pertinente se definirá por el nivel de complejidad cognitiva que cada operador representa para los alumnos en un momento determinado.

Nivel psicológico. En este nivel, existen investigaciones cuyos resultados apuntan a mostrar la posibilidad de los alumnos de primaria para trabajar tanto el operador función, como el escalar. Dichas investigaciones enfatizan básicamente dos posturas: primera: afirman que el operador función y el operador escalar son igualmente accesible a los niños; y la segunda sostiene que operador escalar es más accesible a los niños que el operador función. En la primera postura se encuentran los resultados del estudio pionero sobre la proporcionalidad realizados por Noelting (1980), colaborador de Piaget; y en la segunda postura los trabajos de Vergnaud y Ricco (1982 y 1991).

Los trabajos de Noelting (1980) de corte psicogenético realizados con niños con edades de 6 a 16 años, muestran como van construyendo gradualmente las relaciones proporcionales desde el nivel preoperatorio hasta el operatorio formal. Sus resultados a grandes rasgos indican que los niños de nivel preoperatorio (nivel I) no resuelven situaciones proporcionales por dos razones: sólo observan relaciones de tipo aditivo, y el centramiento en relaciones parciales que les impiden relacionar los cuatro términos involucrados en las relaciones proporcionales. En el periodo de las operaciones concretas (Nivel II de 7 a 10 años) los niños acceden a resolver por primera vez problemas proporcionales por procedimientos multiplicativos, se distinguen dos niveles: II A resuelven equivalencias[5] como (2,2) vs. (3,3). Los niños justifican la igualdad argumentando que hay la misma cantidad de vasos de agua y jugo de naranja en cada par; y en el nivel II B resuelven para cualquier tipo de equivalencias como por ejemplo (1,2) vs. (2, 4), en casos como estos los niños observan que la cantidad de vasos de agua es el doble que la cantidad de vasos de jugo, en ambas parejas de números (relación inter). En el nivel formal (Nivel III de 11 a 16

[5] En el diseño experimental construido por Noelting, se contextuaba el problema en los siguientes términos: Hay dos personas que hacen naranjada, cada par de números indica la cantidad de vasos de jugo de naranja y vasos de agua respectivamente. El problema consiste en comparar la cantidad de vasos de jugo de naranja y agua y determinar quien hace la naranjada más concentrada, es decir, que persona prepara la naranjada con más sabor a naranja.





años) encuentra tres subniveles: III A1 los niños resuelven situaciones cuando los pares ordenados tienen dos términos múltiplos y con la presencia del valor unitario (2,1) vs. (4,3) este tipo de números permiten hacer la relación inter[6] entre pares por ejemplo de 2 a 4 vasos de jugo y de 1 a 3 vasos de naranja, siendo que entonces en el segundo par la naranjada está menos concentrada que en el primer caso; III A2 los pares ordenados tienen dos términos múltiplos entre sí sin la presencia del valor unitario (6, 3) vs. (5, 2), estos valores dados llevan a los niños a establecer relaciones al interior de los pares ordenados (6 vasos de jugo en relación a 3 vasos de agua) y luego compararlo con la relación inter (5 vasos de jugo con 2 vasos de agua) y concluir que la relación entre 6 y 3, la cantidad de agua es la mitad que la de jugo en tanto que en el segundo par (5 y 2) la cantidad de agua es menos de la mitad que el jugo de naranja, y por esta razón en el segundo caso la naranjada tiene mayor sabor de naranja; en el nivel III B los pares no tienen términos que sean múltiplos uno de otro, por ejemplo: (5,3) y (7, 4). Para resolver estos problemas que son los más complejos, los niños tienen que recurrir a procedimientos matemáticamente más potentes, como sería: ver a cada par de cantidades de vasos como un número racional (5/3) y (7/4) sacar el común denominador de 3 y 4 que es 12, y convertir cada fracción obteniendo entonces su fracción equivalente en doceavos (20/12) y (21/12), de esta manera se sabe entonces que hay un doceavo más de jugo en el segundo par y por lo tanto tiene más concentrado el sabor a naranja.

Si bien el estudio de Noelting no fue realizado propiamente con contenidos matemáticos escolares, tienen la virtud de mostrar que los niños que han logrado construir estructuras operatorias concretas (edad aproximada de acceso a la escuela primaria) pueden establecer relaciones multiplicativas y resuelven con éxito ciertos problemas proporcionales que implican la equivalencia entre dos pares ordenados. Y hasta el periodo formal logran construir lo que Inhelder y Piaget (1960) llama el esquema o estructura de las proporciones. No es posible observar con claridad en el periodo de las operaciones concretas el uso o no de los operadores función o escalar. Pero esto sí se observa en las operaciones formales con

[6] La relación inter refiere a la relación de cantidades que pertenecen a un mismo espacio de medidas, por ejemplo establecer la relación de vasos de agua de cada par ordenado. En otras palabras desde Vergnaud, podría decirse que está involucrado el operador escalar. Las relaciones inter remiten a las relaciones que

el manejo de la variable numérica de los dos pares de datos, así entonces la relación externa de los datos implica el operador escalar (nivel III A1), y la relación interna del par de datos implica la función (nivel III A2). Quizás un dato muy relevante sea que Noelting sostiene que ambas relaciones intra e inter se desarrollan simultáneamente, en otras palabras, que el operador escalar y el función llevan un desarrollo paralelo.

Los estudios de Vergnaud (1991) y Vergnaud y Ricco[7] (1982) aluden a resultados de investigación de gran relevancia. El primero con alumnos de escuela primaria y el segundo con alumnos de escuelas secundarias de (3° a 6° grado) cuyas edades oscilan de 11 a 15 años. Sus estudios son de corte psicogenético pero con contenidos matemáticos escolares. En estas investigaciones se presentan situaciones específicamente que implican el uso del operador escalar y el operador función.

Los resultados obtenidos con los alumnos de primaria muestran que para estos "La noción de razón, la de razón-operador y la de proporción son difíciles, la mayoría de los niños de 9 y 10 años no las comprenden. No hay que concluir sin embargo, que el maestro no deba introducir situaciones y explicaciones que impliquen estas nociones, pero debe hacerlo prudentemente (Vergnaud, 1991, p. 207). Por lo que refiere a los resultados con los alumnos de secundaria, la investigación muestra que "...los aspectos de proporción de un escalar es mejor usado que los aspectos de una función" (Vergnaud, 1982).

A continuación se analiza un problema multiplicativo para explicar la dificultad para comprender el operador función: Tres madejas pesan 200 gramos. ¿Cuál es el peso de 8 madejas?

| Madejas | | Gramos |
|---|---|---|
| 3 | x 200/3 | 200 |

$$3 \text{ madejas} \times \frac{200 \text{ gramos}}{3 \text{ madejas}} = 200 \text{ gramos}$$

(operador función)

Para encontrar la cantidad de gramos en 8 madejas:

$$Z \text{ gramos} = 8 \text{ madejas} \times \frac{200 \text{ gramos}}{3 \text{ madejas}}$$

consideran simultáneamente la relación proporcional de vasos de jugo y agua en cada par de cantidades y luego se compara con la del otro par.

[7] Si bien la investigación es realizada con alumnos de secundaria, y adelantando la conclusión de los datos obtenidos, hay un mayor uso del operador escalar que el operador función.





"Este análisis horizontal se sitúa a un nivel conceptual muy elaborado y es, por otra parte, la razón de las dificultades encontradas para hacer comprender al niño la noción de función. Si la noción de correspondencia no presenta ninguna dificultad, ni su representación en forma de tabla, el análisis de esta correspondencia en términos de función es por su parte mucho más delicado, pues ésta implica no sólo la noción de relación numérica sino igualmente la de cociente de dimensiones (en este caso gramos/madeja).

La búsqueda de la función; operador que hace pasar de madejas a 200 gramos, es facilitada por el hecho de descubrir que es también el operador que hace pasar de 1 madeja al peso de una madeja, y que f tiene entonces el mismo valor numérico que el peso unitario que se obtiene aplicando a 200 gramos el operador ÷ 3 (Vergnaud 1991. p. 210).

Cuáles son las conclusiones que del nivel psicológico acerca de la elección que se hará sea desde el operador función o del operador escalar, o de ambos para organizar la enseñanza de la multiplicación en el segundo grado. Al respecto hay varias:

- Que desde los estudios de Noelting los niños que cursan de los primeros grados de primaria pueden resolver situaciones multiplicativas con la presencia del valor unitario y números naturales pequeños que favorecen la reflexión y el uso del operador escalar y del operador función, inmersos en lo que el denomina relaciones intra e inter.
- Que las situaciones multiplicativas si bien son diseñadas con ciertas variables para favorecer la relación escalar o función, está es una situación probable, ya que no determinan los procedimientos de los alumnos.
- Que posiblemente faltan indagaciones más precisas a nivel primaria que permitan identificar los procedimientos empleados por los alumnos, y un seguimiento a la construcción de los operadores función y escalar. Habrá que revisar de manera más exhaustiva los estudios realizados al respecto.

El análisis matemático y psicogenético que se ha expuesto en este apartado constituye un análisis de uno de los eslabones de la transposición didáctica. En este nivel es precisamente donde se decide qué contenidos matemáticos se enseñaran en la escuela primaria y la metodología de enseñanza. El eslabón siguiente en sentido descendente es la transposición del profesor cuando implementa en su aula la propuesta didáctica oficial.

## 2.5 Descripción de la secuencia didáctica de los problemas multiplicativos del Libro de Texto Gratuito y el Fichero de actividades de segundo grado.

El desarrollo teórico del campo conceptual de las estructuras multiplicativas de este apartado, nos muestra lo vasto y complicado que es este campo del conocimiento matemático. Sin embargo, sólo parte de éste se incluye en el curriculum de la escuela primaria, particularmente el que se desarrolla en segundo grado. En este apartado se identifican cuáles son las categorías multiplicativas y, por lo tanto los significados de la multiplicación y de la división que favorecen la situaciones de aprendizaje de la propuesta didáctica de segundo grado, la secuencia en que son presentados, así como el peso curricular que adquieren.

La secuencia de los problemas multiplicativos se encuentra distribuida fundamentalmente en dos documentos: el libro de texto de alumno y el fichero del maestro[8]. En el primero la cantidad de situaciones de aprendizaje son: 35, y 8 para el segundo. Si se considera el criterio de que dichas situaciones de aprendizaje de los problemas multiplicativos, pueden ser clasificados en lecciones y actividades[9], tenemos que el libro de texto tiene: 28 lecciones y 7 actividades; y el fichero 8 actividades.

**TABLA DE TOTALES DE ACTIVIDADES Y LECCIONES DE LA SECUENCIA DE LOS PROBLEMAS MULTIPLICATIVOS DE SEGUNDO GRADO DE PRIMARIA**

| FICHERO | LIBRO DE TEXTO | |
|---|---|---|
| Actividades | Actividades | Lecciones |
| 8 | 7 | 28 |
| Total de situaciones de aprendizaje: 42 | | |

El actual enfoque metodológico para la enseñanza de la matemática en la escuela primaria como se anticipara, ha puesto el énfasis fundamentalmente en dos aspectos: a) en el aprendizaje a través de la solución de problemas y; b) en la recuperación del sentido de la

[8] Libro del Maestro y Avance Programático, uno hace referencia a planteamientos didácticos generales y el otro regula la alternancia de las situaciones de aprendizaje del libro de texto de los niños y el fichero de actividades.
[9] Las actividades involucran generalmente el uso de materiales, se realizan en equipos y con ellas se introducen nuevos conocimientos matemáticos. Las lecciones por su parte involucran un trabajo con imágenes y texto, se realizan por lo general en forma individual o parejas, y tienden a reafirmar los conocimientos abordados en las actividades.





problemas multiplicativos dado que los conceptos matemáticos están enraizados en situaciones y problemas Vergnaud (1991, p. 203). Una idea fundamental en el diseño didáctico es que los alumnos puedan enfrentar una gran variedad de situaciones a fin de que puedan construir un concepto enriquecido y mejor estructurado, en otras palabras "un pequeño subcampo conceptual de la multiplicación y la división".

La estructura de la secuencia didáctica esta organizada en tres frentes o direcciones conceptuales, que son:

a) Problemas de estructura isomórfica, esto es problemas donde están en juego una relación cuaternaria. Los significados que están puestos en juego hacen ver a la multiplicación como operador escalar y operador función, y sus respectivos procesos inversos que son la división tasativa y de reparto. La construcción del Cuadro de Multiplicaciones aparece primero como un espacio de organización de resultados obtenidos y posteriormente se utiliza como herramienta de cálculo para resolver los problemas multiplicativos.

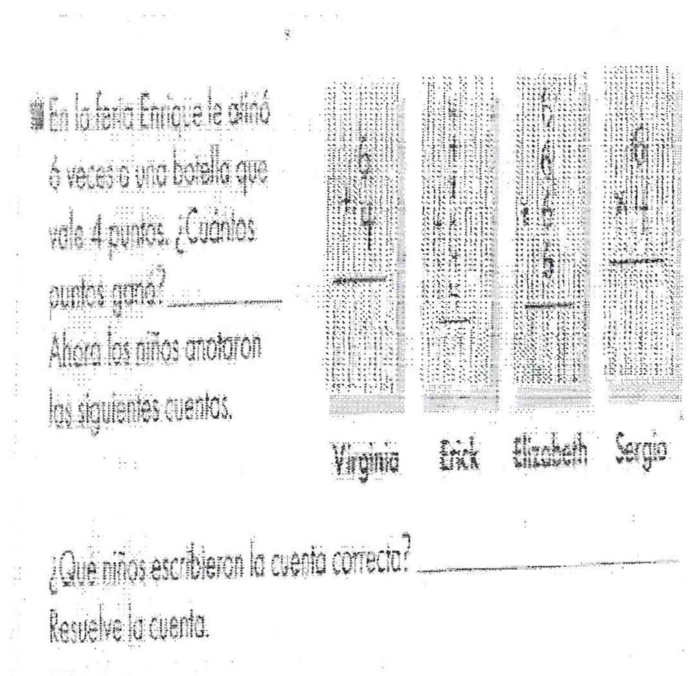
b) La construcción de secuencias numéricas verbales y escritas que implican la iteración de un conjunto equipotente, en las que subyace la multiplicación como operador escalar.

c) Problemas de relaciones ternarias encaminados a la introducción de la operatoria de la multiplicación (arreglos rectangulares) de polidígitos, contenido central del tercer grado.

A continuación se explícita y ejemplifica cada uno de estas direcciones que conforman la secuencia:

El trabajo sobre los problemas multiplicativos desde la estructura del isomorfismo de medidas es el eje central de la secuencia de la situaciones didácticas, la reflexión de los niños sobre situaciones que involucren el operador escalar y función, así como los dos sentidos de la división son centrales en este tipo de problemas.

y texto, se realizan por lo general en forma individual o parejas, y tienden a reafirmar los conocimientos




En la siguiente ilustración de una lección del libro de texto se plantea un problema que hace explicito el uso del operador escalar, aquí la reflexión de los niños se centra en la iteración de un cierto número de veces de un conjunto (en este caso 4). Esta es precisamente la ventaja de este tipo de situaciones: el x4 indica un operador sin dimensión (no están involucradas las denominadas cantidades cociente como paquetes/chiclosos, kilómetros/hora) lo cual propicia la reflexión a nivel simbólico de la multiplicación.

Hay que señalar que este tipo de situaciones didácticas que refieren a la multiplicación como operador escalar, tienen menor peso didáctico que las relacionadas con la multiplicación como operador función.

La actual propuesta para la enseñanza de las matemáticas (en general), y el caso de la multiplicación no es la excepción, enfrenta a los profesores de primaria a interactuar con componentes conceptuales matemáticos, que no han considerado en su enseñanza y que tampoco conceptualmente han formado este aprendizaje de los niños. De alguna manera subyace el supuesto de que los maestros de todas maneras atenderán a la multiplicación como operador escalar, que es lo que siempre han hecho y si a ello se adiciona el trabajo sobre el operador función (promovido por la propuesta) el aprendizaje de los niños, así realizado será más significativo y matemáticamente más enriquecedor que lo que pudo haber sido en el pasado.

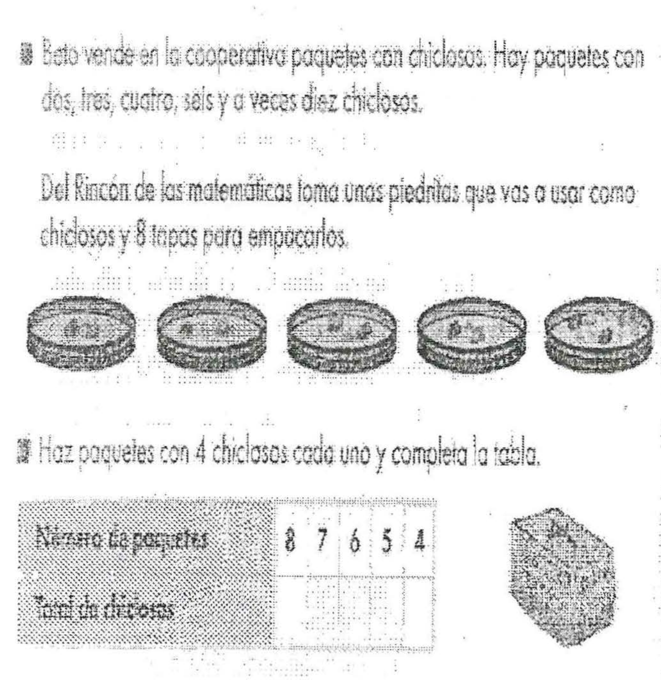
En la siguiente ilustración, se presenta un ejemplo de problema cuyo planteamiento se sesga explícitamente hacia el operador función, que permite pasar de un espacio de medida a otro. Ya se ha comentado con anterioridad que el planteamiento del problema de ninguna

abordados en las actividades.



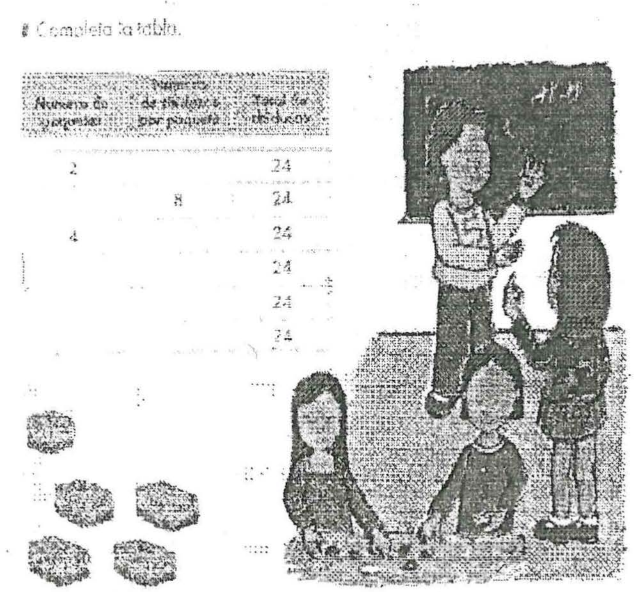


manera determina el procedimiento, en este caso particular determine el uso del cantidades cociente (operador función).




Para llenar la tabla los niños tienen que considerar los dos espacios de medida, por ejemplo, en la primer columna para encontrar el total de chiclosos, tendrían que pensar en 6 paquetes de chiclosos (primer espacio de medida) de 4 chiclosos por paquete (operador función) para obtener 32 chiclosos (segundo espacio de medida). Es importante aclarar que en ningún momento de la secuencia se pretende que los alumnos conozcan el nombre de los operadores, implícitamente los trabajan como teoremas en acto (Vergnaud 1991, p. 202) en las situaciones que se les proponen, incluso estas denominaciones matemáticas tampoco son explicitadas al profesor en el Libro del maestro.

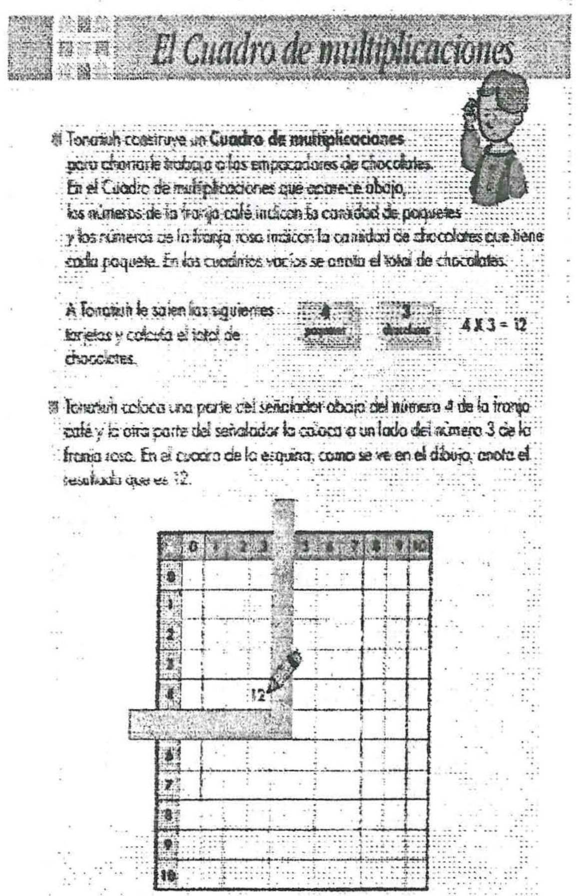
Los dos significados de la división en la estructura del isomorfismo son: el reparto y la tasativa (o de agrupamiento). He aquí una lección con trabajo simultáneo con ambas:



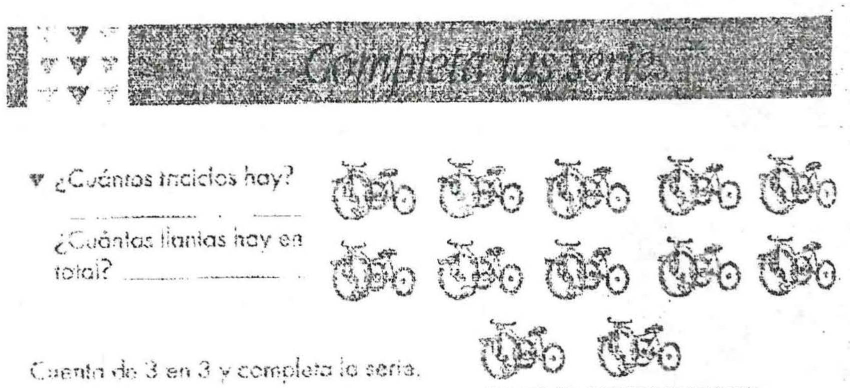

En la primera columna de la tabla los datos conocidos son: el número de paquetes (2) y el total de chiclosos (24); y la incógnita es la cantidad de chiclosos por paquete. El problema evidentemente es de división por reparto. Como puede observarse, dicha división es la inversa de la multiplicación con el significado de operador función, en tanto se involucran los dos espacios de medidas.

El resultado o cociente es: 12 chiclosos por paquete.

El problema de la segunda columna, la incógnita es el número de paquetes, y los datos que se conocen son: la cantidad de chiclosos por paquete (8) y el total de chiclosos (24). Así el planteamiento del problema es de una división tasativa, ya que implica la relación "cuántas veces cabe el 8 en el 24". Visto de esta forma, esta división es la inversa del operador escalar.




El Cuadro de Multiplicación que se propone en el Libro Matemáticas Segundo grado, propicia de manera accesible la organización de las multiplicaciones donde están implicados el operador función y el operador escalar. Se tomó la precaución didáctica de no trabajar la organización de las tablas de multiplicar como usualmente los profesores las conocen (generalmente ancladas en el operador escalar) para evitar confusiones con la tablas que se organizarían desde el operador función. Así entonces tal situación puede ser evitada a través del Cuadro de Multiplicaciones pues indistintamente organiza las multiplicaciones de los dos operadores multiplicativos.

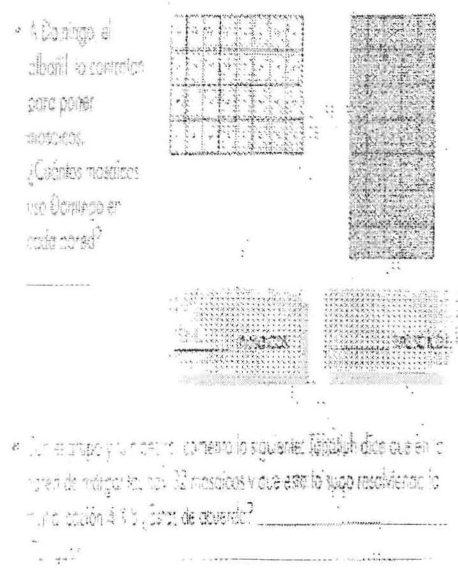



La construcción de series numéricas, de 2 en 2, de 3 en 3, 4 en 4, etc., fuera del contexto de problemas recién descritos en el punto anterior, se orienta a que los alumnos puedan iterar conjuntos equipotentes y así puedan desarrollar habilidades en el cálculo mental, correlacionado con los problemas multiplicativos que involucran a





los números naturales. En otras palabras interesa que los alumnos encuentren las relaciones numéricas en la construcción de dichas series.



Las situaciones que involucran los arreglos rectangulares pretenden favorecer reflexiones iniciales sobre el algoritmo de la multiplicación entre números polidígitos que se realizara en el tercer grado de primaria. En segundo grado los niños sólo representan convencionalmente la multiplicación con dígitos en los factores, sin embargo la secuencia da las bases para el desarrollo de contenidos del siguiente grado escolar. Otra función importante de los arreglos rectangulares, es que favorece el trabajo implícito de la propiedad conmutativa de la multiplicación.

Hasta aquí se ha expuesto en términos generales las líneas conceptuales que se plasman en el trabajo didáctico de los problemas multiplicativos en el desarrollo curricular del segundo grado, sin embargo falta aún explicitar el orden en que son presentadas a los alumnos:

La secuencia inicia con el planteamiento de problemas multiplicativos con el significado de operador función y división de reparto donde los niños recurren a su conocimiento previo para resolverlos, es decir procedimientos espontáneos como el dibujo de bolitas, palitos, o con material concreto, con los dedos, también hacen en principio sumas iteradas por escrito o con cálculo mental. El maestro debe permitir y favorecer el intercambio entre los niños de sus procedimientos espontáneos, para que reconociendo lo que sus compañeros hacen, puedan comprender y utilizar un repertorio más amplio.

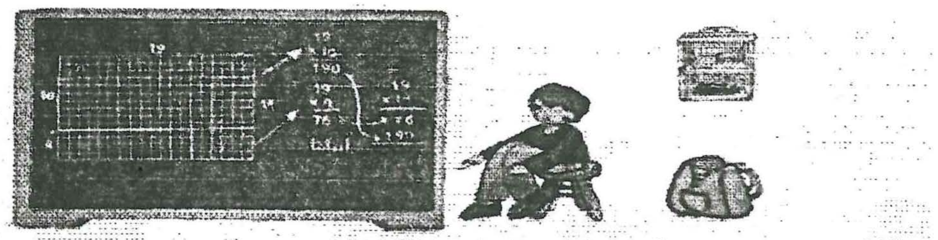
También desde el inicio los niños verbalizan y registran series numéricas, sumando siempre la misma cantidad. Este trabajo es importante porque posibilita que vayan reconociendo la regularidad de los resultados que implica el uso de un sumando fijo (factor común). Estas situaciones en general se alternan o acompañan a los problemas citados en el párrafo anterior.

La división tasativa se trabaja a mediados de la secuencia por la razón de que este significado requiere de un cierto dominio de los procesos multiplicativos en tanto involucra "la cantidad de veces que cabe una cantidad en otra".

Un poco después se introduce la representación convencional de la multiplicación a través de dos recursos didácticos: por medio de la evolución de las representaciones no convencionales que resuelven problemas multiplicativos hasta el momento en que el docente institucionaliza la representación convencional del signo x, y su uso en los problemas que los niños han venido resolviendo.

El operador escalar aparece explícitamente hacia el final de la secuencia en el planteamiento de problemas con este significado y en la actividad "A jugar boliche" del fichero. Sin embargo hay que aclarar que los niños implícitamente lo usan en la construcción de las series numéricas o como procedimiento espontáneo en la solución de los problemas multiplicativos con el significado de operador función.

Hacia el final del año escolar se plantean situaciones didácticas con los arreglos rectangulares, la razón ya se ha expuesto anteriormente: favorecen el trabajo sobre la propiedad conmutativa de la multiplicación y prepara el camino para la enseñanza del algoritmo convencional del producto de los números naturales que se formaliza en tercer grado. Así por ejemplo, si los alumnos van a calcular el resultado de la multiplicación 19 x 14. Dicha multiplicación se modeliza geométricamente con el arreglo rectangular y luego se muestra al alumno, la equivalencia entre las acciones hechas con el arreglo rectangular y el algoritmo convencional de la multiplicación. Como se observa en la siguiente lección del libro de tercer grado.


78. Cuadrículas engañosas / Paco y sus amigos dibujan rectángulos de cuadrícula. Con los rectángulos descubren cosas interesantes.

Observa el procedimiento que utiliza Paco para saber cuántos cuadritos tiene un rectángulo y ayúdale a terminar:

Utiliza el procedimiento que quieras para comprobar si a Paco le sirvió el procedimiento que usó.

Completa la multiplicación que representa el rectángulo completo: 19 x ______ = ______





# CAPÍTULO III

# LA APLICACIÓN DE LA PROPUESTA DIDÁCTICA Y LA TRANSPOSICIÓN DIDÁCTICA DE LA PROFESORA.

> "No se trataba de juzgarlos ni a ellos (los profesores) ni a los métodos, sino de comprender lo que legítimamente tenían necesidad de hacer y por qué necesitaban hacerlo con un cierto ocultamiento frente a los investigadores"
>
> Guy Brousseau.

| |
|---|
| Este capítulo esta dedicado al análisis del trabajo didáctico de Estela. Se espera cumplir el propósito de usar en forma *positiva* el análisis didáctico, intentando dar cuenta tanto de las características y el sentido de la transposición didáctica realizada por la profesora a la propuesta actual para la enseñanza de la multiplicación en segundo grado matemáticas, de lo contrario como señala Chevallard (1997, p. 53) "Este uso negativo del análisis didáctico se legitimaría llamándose crítico. El usuario se instalaría en una posición de fácil discusión, pero sus "luces" no servirían para nada, sino cegarían a su víctima -el enseñante-. |

Se sabe que los docentes al implementar cualquier propuesta didáctica, ponen en juego tanto sus características individuales, así como las del marco institucional escolar. En este sentido acordamos con Artigue (1995, p. 65) "(...) Sin importar cuáles sean las intenciones al llegar al colegio, cada alumno va más o menos a tener éxito o va fracasar en su proyecto. Del otro lado, según la historia personal del profesor, su propia representación y su propio conocimiento de las matemáticas, su concepción de aprendizaje de las matemáticas, su voluntad de convencer y la fuerza de las restricciones a las cuales está sometido, él intentará defender y hacer valer sus convicciones o, por el contrario, tratará tan sólo de sobrevivir. ¡Y en algunos casos no lo hará del todo mal!" El estudio de la transposición didáctica que se expone a continuación tiene el propósito de incorporar en su análisis tanto los elementos epistemológicos que guían las decisiones de Estela, así como las condiciones escolares en las que tiene lugar la implementación didáctica.

### 3.1 Semblanza de la docente.

### 3.1.1 Algunos datos personales de la profesora Estela

Estela es originaria del Estado de Hidalgo, sin embargo estudió la Normal de maestros en el Distrito Federal, lugar al que ella se muda con su familia. En momento que se realiza la experiencia didáctica ella es soltera, tiene 32 años y trabaja doble turno: por las mañanas atiende los grupos de primer o segundo grado, y por las tardes los de quinto o sexto grado. Su imagen como profesora ante las autoridades de su escuela, compañeros y padres de familia, es de una persona competente y comprometida con el aprendizaje de sus alumnos. Muestra de esta situación: a) son las peticiones que los padres de familia hacen a Estela para retomar el grupo de sus hijos en quinto y sexto grado; b) Estela fue nombrada por una compañera de trabajo como un candidato idóneo para participar de esta experiencia didáctica, al reconocer en ella capacidad, compromiso y seriedad en su trabajo.

### 3.1.2 El modelo didáctico de Estela

Por la naturaleza del objeto de esta tesis, que es: el estudio de la transposición didáctica realizadas por una docente a la propuesta oficial (en México) para la enseñanza y el aprendizaje de los problemas multiplicativos de segundo grado, la descripción de su modelo didáctico es importante, en virtud de que éste será el referente desde el cual la profesora interprete y aplique dicha propuesta. En términos piagetianos, dicho modelo didáctico constituye el esquema de conocimiento (previo) el cual interaccionará con la nueva propuesta didáctica.

La descripción que se hace del modelo didáctico de la docente corresponde a un momento inicial de la experiencia de enseñanza, más adelante se analizará la interacción entre el modelo didáctico de la profesora y el de la propuesta didáctica oficial que ella aplica, y particularmente se señalarán los cambios a que hubiera lugar en el modelo didáctico de Estela.

En la tarea de describir y caracterizar el desempeño didáctico de la maestra, se encuentra que en ella se expresan tanto su epistemología sobre las áreas de conocimiento que enseña (su





conocimiento disciplinario, y sus ideas de cómo se enseña y cómo se aprende), así como su adaptación a las condiciones laborales de su centro de trabajo.

Al intentar ubicar el modelo didáctico de Estela, en alguno de los tres modelos de enseñanza descritos por Charnay (Capítulo II) encontramos en principio que una buen parte de su quehacer didáctico se ubica en el modelo normativo, sin embargo también existen elementos importantes que se acercan al modelo aproximativo sin ubicarse claramente en éste.

Las consideraciones que a continuación se exponen para caracterizar el desempeño didáctico de la maestra, se hace con base en las evidencias de su desempeño didáctico observado en el transcurso de la experiencia didáctica; a lo largo del capítulo se retomaran con mayor amplitud:

- El conocimiento matemático se acepta como ya dado, construido y sin posibilidad de ser discutido y cuestionado. Es un conocimiento que debe ser transmitido, y por lo tanto la explicación por parte del profesor adquiere un gran peso.

- De sus alumnos, ella espera que estén callados y pongan atención a sus explicaciones para que puedan encontrar la respuesta correcta. "La clase de matemáticas al inicio del día es ideal para obtener buenos resultados expresa Estela. Bajo esta idea es que ella disculpa a sus alumnos cuando en el transcurso de la experiencia didáctica no lograron resolver un problema, argumentó que "el cansancio y distracción fueron las causas, porque la sesión fue después del recreo".

- En su papel de profesora, es ella quien elige y adecua las lecciones y actividades de matemáticas al nivel del conocimiento que cree reconocer en sus alumnos. Así por ejemplo: pide de entrada la lectura en silencio de las lecciones a manera de ejercicio de lectura (para español), luego procede a realizar la lectura en voz alta para todo el grupo con adecuaciones como son: incluir todos los datos que requiere el problema, no obstante que en el libro los problemas están "incompletos" en el sentido que parte de los datos del problema deber ser buscados por los alumnos en las imágenes didácticas que aparecen en las lecciones. Agrega además una breve explicación. Así pues, quita la responsabilidad al alumno de analizar y buscar los datos del problema, para asumirla ella. Pide después la solución "casi inmediata" del problema, si el grupo no encuentra la respuesta ella da "pistas" como: ¿seguro qué es ese el resultado? a fin de señalar lo incorrecto de la respuesta. Si algún alumno encuentra la respuesta correcta, Estela la avala sin preguntar por el procedimiento de solución. En caso contrario, si ningún alumno puede resolver el problema, asume su papel de transmisor. No intenta de entrada enseñar el algoritmo convencional que resuelve el problema, sino más bien parece concebirlo como el punto de llegada partiendo de una serie de graduaciones aproximativas –reguladas por ella- al procedimiento convencional: recurre a representaciones gráficas que ella propone y supone entendibles, como es el dibujo, luego agrega la representación numérica a esos dibujos para finalmente arribar a la operación convencional que desea enseñar.

Para la docente existe un estilo particular de transmisión del conocimiento. El estilo de enseñanza de Estela está guiado por lo que Brousseau (1994) denomina "la recuperación del sentido del objeto de conocimiento para ser aprendido por los alumnos". Reacuérdese que la labor del maestro en el acto de enseñanza se orienta en sentido inverso a la labor del científico, ya que este último descontextualiza el conocimiento para transmitirlo. La búsqueda del sentido o significado del conocimiento convencional para los alumnos es central en tanto la responsabilidad que siente la docente porque sus alumnos se apropien del conocimiento matemático, en este caso particular, se expresaría precisamente en la graduación de diferentes niveles de representación del procedimiento. Es importante aclarar sin embargo que si bien hay una preocupación y un compromiso por el aprendizaje de los alumnos, también es cierto que ella enseña un procedimiento ajeno a los niños, así la búsqueda de sentido queda truncada cuando "aprenden" algo que no entienden.

Parte de su quehacer didáctico contiene elementos que se asemejan al del modelo aproximativo dado que:

- Permite un espacio a los niños para que intenten solucionar un problema a pesar de que les quita parte de su responsabilidad de analizar y buscar los datos necesarios para resolverlo. Y si la respuesta es correcta la acepta sin importarle necesariamente si el procedimiento para encontrarlo es convencional o no.

Un fenómeno importante, y en este caso no favorecido por Estela, sino a pesar de ella, son ciertas conductas del grupo que en muchas ocasiones se impusieron al control que la docente quería ejercer, particularmente en la comunicación que se da entre los niños respecto a las respuestas correctas que tienen que escribirse en el libro de texto o en el cuaderno. En este





espacio definido por los alumnos, si bien en la mayoría de las ocasiones sólo les basta copiar el resultado de un compañero bastante confiable, también este intercambio de información permitió diálogos, confrontaciones y argumentaciones para verificar el resultado. Esta dinámica del aula puede ser descrita como lo hacen Rockwell y Mercado (1986, p. 42) "La relación entre los niños es la más vital y a la vez la más difícil de captar. Impresiona la medida en que está orientada hacia el aprendizaje del contenido curricular. Juntos, los niños miran los libros, examinan fotos y leen para saber de qué tratan; se revisan mutuamente sus trabajos, se critican, a veces en tono de maestro; cuando uno trabaja en el pizarrón, otros están pendientes, le señalan errores espontáneamente, o van y lo ayudan".

Lo interesante de este hecho, es que Estela ha terminado por aceptar que no puede tener en silencio a todo el grupo, pero sí mantener el ruido en cierto nivel de permisibilidad para no llamar la atención del director y de sus compañeros de trabajo.

- La búsqueda del sentido del conocimiento, es una constante que forma parte del rol del docente según Brousseau (1994). Esto se señala debido a que la búsqueda de sentido instrumentada por Estela no parte desde la comprensión del problema por los niños ni de la construcción de procedimientos espontáneos, pareciera que la maestra intenta que sus niños encuentren el sentido del procedimiento convencional a través de las representaciones sucesivas a las que recurre. El trabajo didáctico de Estela se aproxima en cierto sentido al modelo didáctico que le es propuesto. Es decir no es el caso de un profesor que enseña directamente el procedimiento canónico y convencional sin ningún tipo de graduación, y deja fuera totalmente la búsqueda de sentido del conocimiento matemático.

- La graduación de niveles de representación en la enseñanza del procedimiento convencional, (desde representaciones pictográficas hasta la escritura convencional canónica) refleja un conocimiento psicológico por parte de la docente, sin embargo no se tienen suficientes elementos para afirmar si la concepción psicológica que guía este proceder de ella, sea la de llevar al niño de lo simple a lo complejo, o implique otra ligada a la teoría de la Gestalt, en el sentido que ella afirmaba que "(...) lo hacía con la intención de que los niños percibieran cómo se relacionaban los datos y se resolvía el problema". O incluso, que ambas concepciones psicológicas estuvieran presentes ya que la docente sentía *la necesidad de enseñar* el procedimiento que resuelve el problema en sus diferentes niveles de representación hasta la convencional. Lo que sí se puede reconocer, es que esta modalidad de trabajo didáctico se orienta en la misma dirección del actual enfoque de enseñanza de la matemática, en el sentido que se consideran distintos los procedimientos de solución de los alumnos, sin que por ello se afirme que la docente comparta necesariamente los mismos principios teóricos constructivistas acerca del aprendizaje y la enseñanza de la matemática de la propuesta oficial, puesto que es ella quien ofrece a sus alumnos las representaciones que considera ilustrativas, aunque acepta sin conflicto pero sin capitalizar las producciones espontáneas de sus alumnos.

Los contratos didácticos son muy particulares, cada profesor tiene uno propio, parece entonces muy arriesgado intentar encuadrar a los profesores en alguno de los tres grandes modelos de enseñanza descritos por Charnay (1994). Este autor además sostiene que los profesores pueden utilizar en algún momento de su clase elementos didácticos de los modelos de enseñanza normativo, incitativo y aproximativo, pero que uno de ellos finalmente predomina. Parece que en términos generales esta apreciación de Charnay es cierta, y que en términos globales se puede decir que la maestra se ubica en el modelo normativo, sin embargo habría que calibrar la importancia de los matices de su estilo de enseñanza, dado que en él posiblemente estén amalgamados elementos didácticos del modelo incitativo (por ejemplo, aparecen claramente ideas sensualistas), o incluso del modelo aproximativo cuando hace uso de distintos niveles de representación en la intención de graduar el acceso a las operaciones convencionales (evidentemente sin conciencia por parte de la docente), y probablemente en la conjugación de todos estos elementos didácticos en un modelo de enseñanza personal, se encuentre la clave que permita comprender lo que para ella es importante, válido e imprescindible que sus alumnos aprendan.

## 3.2 Descripción, identificación y análisis de la transposición didáctica realizada por la docente a la secuencia de los problemas multiplicativos

La transposición didáctica que en este capítulo se describe y analiza está organizada en tres apartados, que si bien su recorte obedece a razones de exposición, en la realidad no son separables entre sí.





Apartado I: la transposición observadas sobre la metodología de enseñanza.

Apartado II: la transposición sobre el contenido matemático a enseñar.

Apartado III: El aprendizaje de los alumnos como referente de la transposición didáctica de la profesora.

## APARTADO 1: LA TRANSPOSICIÓN DIDÁCTICA SOBRE LA METODOLOGÍA DE ENSEÑANZA

### 3.2.1. ¿Cómo interpreta Estela el rol del profesor en el actual enfoque de enseñanza de las matemáticas?

Cuando ocurre un cambio metodológico importante en la enseñanza de alguna área de conocimiento será igualmente importante que dichos cambios se transmitan con claridad a los profesores para que entiendan la intención y el por qué de dichas innovaciones, así como el nuevo rol que es asignado al alumno, al docente y al saber escolar.

Un lugar que se ha destinado para comunicar a los docentes de primaria los cambios de la actual propuesta didáctica es el Libro del Maestro (SEP (c), 1995). En un apartado (pp. 15 a 26) de dicho libro se describen las recomendaciones didácticas generales, a grandes rasgos aborda temas como: el papel del maestro, la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, el papel de los problemas, el manejo de los errores en la resolución de los problemas, los tipos de problemas que conviene plantear a los alumnos, la importancia del material, etcétera. A Estela se le solicitó que leyera la parte sobre el papel del maestro en la enseñanza de las matemáticas y luego comentara con el observador lo que entendía en relación a los cinco diferentes aspectos (p. 15) en los que se sugiere al profesor lo que tiene que cuidar en el proceso de enseñanza y de aprendizaje.

A continuación se transcribe parte de la entrevista realizada a Estela respecto a las recomendaciones didácticas del libro del maestro:

**Observador:** ¿Tú ya has leído las recomendaciones didácticas que vienen aquí en el libro del maestro?
**Maestra:** (Afirma moviendo con la cabeza).
**Observador:** ¿En general tú forma de dar las clases de matemáticas, son acordes a estás recomendaciones didácticas?
**Maestra:** Pues no, porque digamos, dando las clase...como que al momento me doy cuenta que no responden igual los niños... y no sé si sea así como por arte de magia que surgen nuevas ideas.....o sea que aprovecha uno la

lectura...este...pues más que nada que ellos aprovechen la lectura que hacen en el libro (...). También (pensativa) por ejemplo en las fichas que traes (refiriéndose al fichero, y concretamente a la ficha 22, que se aplicó en la primera sesión) ahí les dí números ordinales...voy sacando varias cositas de ahí.
**Observador:** Entonces, ahorita me planteas que hay ideas que se te ocurren sobre la marcha, sobre las modificaciones a las actividades.
**Maestra:** ¡Ajá¡
**Observador**: Bien. ¿Tú crees que lo que haces pueda ser esto? (El observador señala la primera función del maestro). (...) *busca y diseña situaciones problemáticas para propiciar el aprendizaje de los distintos contenidos (...).*
**Maestra:** Podría ser esta (la señalada por el Obs.) y esta (señala segunda función: *(...) elige actividades y las gradúa de acuerdo con el nivel del grupo, propiciando que los alumnos pongan en juego los conocimientos matemáticos que poseen (...).*
**Observador:** Lo que tú haces sería tanto: buscar y diseñar situaciones problemáticas; como, elegir actividades y graduarlas de acuerdo al nivel del grupo.
**Maestra:** ¡Ajá¡
**Observador:** Perfecto. En relación a este punto (lee la tercera recomendación didáctica): *(...) Propone situaciones que contradigan las ideas erróneas de los alumnos, favoreciendo la reflexión y la búsqueda de nuevas explicaciones (...).*
**Maestra:** (Pensativa) Pues sí, ¿no? (no muy segura).¿Aquí sería cuando los niños no me entienden?
**Observador:** ¿Te parece que el punto hace alusión a las ideas erróneas de los niños, cuando ellos no te entienden?
**Maestra:** ¡Ajá¡
**Observador:** En este sentido, cuando tú das clase de matemáticas y detectas algún error ¿qué es lo que tu haces con esas respuestas erróneas de los niños?
M: Pues cambio la forma de explicar, o dárselos de otra manera...o explícalo más despacio (...) más sencillo (...).explicando haciéndoselos más sencillos a ellos.
**Observador:** ¿Favoreces la búsqueda de nuevas explicaciones en función de darte a entender?
**Maestra:** Sí.
**Observador:** Para terminar, me gustaría regresar a las recomendaciones didácticas en el último punto que dice: *(...) promover el dialogo y la interacción de los alumnos y coordina la discusión sobre las ideas que tienen acerca de las situaciones planteadas, mediante preguntas que les permitan conocer el porqué de sus respuestas (...).* La pregunta es, si tú promueves este punto en tu clase.
Maestra: No, esto no, casi nunca lo llevo a cabo. Tendría que estudiarlo para hacerlo.

Estela señala claramente las responsabilidades didácticas que asume cuando da su clase de matemáticas, básicamente refieren a: a) buscar o diseñar situaciones problemáticas para propiciar el aprendizaje; b) elegir y graduar las actividades de acuerdo al nivel del grupo; c) proponer situaciones que contradigan las ideas "erróneas" de los alumnos. En el entendido que ella se refiere a cambios en la explicación o, consignas dichas más despacio; y finalmente, d) favorece la reflexión y la búsqueda de nuevas explicaciones, introduciendo cambios básicamente a su manera de explicar a sus alumnos

Sin embargo, estas responsabilidades didácticas que la docente dice asumir, expresan claramente una interpretación distante del enfoque de enseñanza de la propuesta, así por ejemplo, cuando el Libro del Maestro recomienda "(...) proponer situaciones que contradigan las ideas "erróneas" de los alumnos" (SEPc, 1995, pp. 15). Ella piensa en diferentes maneras de desaparecerlas, y no en aprovechar el "error" constructivamente, en el sentido de entender la





lógica que expresa el alumno, y entonces proponer una intervención pertinente para que el niño lo modifique y aprenda de él.

Por otra parte, ella acepta explícitamente que no asume el principio didáctico de promover el diálogo y la interacción entre los alumnos, ni coordina la discusión en torno a las ideas que tienen acerca de la situación planteada, pero acepta el reto de intentar hacerlo a petición del observador. Así entonces, Estela desde su punto de vista, pareciera estar de acuerdo con cuatro de los cinco principios didácticos que fundamentan el actual enfoque de enseñanza de las matemáticas, y por esta razón ella bien pudiera pensar que su modelo didáctico es muy próximo o está emparentado con el modelo de enseñanza que se le ha pedido que aplique durante la experiencia didáctica. Evidentemente esto no es así, esto ya ha sido analizado cuando se describió el modelo didáctico de la profesora.

Sin embargo más que reconocer como propios a la mayoría de los principios didácticos propuestos en el nuevo enfoque, parece que el punto central es la indagación de cuáles son los puntos de referencia que ella utiliza para instrumentarlos con sus alumnos: así a título de ejemplo, cuando Estela comenta que diseña y gradúa las actividades al nivel del grupo, el punto de referencia no es el nivel cognitivo o la competencia matemática de sus alumnos, sino lo que ella piensa desde su punto de vista que es o no posible que ellos puedan lograr. Ella se rige por juicios, si no a priori, sí basados en una observación superficial del desempeño de sus pupilos; así pues, frecuentemente en la lectura de las lecciones la maestra, arreglaba la redacción y hacía agregados para que el grupo tuviera todos los datos necesarios para resolver el problema, pero nunca en el transcurso de esta experiencia didáctica se observó que preguntara a los niños sobre lo que habían entendido de la lectura realizada (en voz baja, al inicio de cada lección) y el análisis de las ilustraciones. Al respecto hubo oportunidad de platicar por qué no lo hacía:

**Observador:** A ver, por ejemplo ¿está lección, tú primero se la das a leer a los niños?
**Maestro:** ¡Ajá¡ ¡Sí¡
**Observador:** ¿Tú recuperas lo que los niños entienden de su lectura?
**Maestro:** A veces sí.
**Observador:** ¿A veces?
**Maestra:** Ya que están leyendo les pregunto ¿qué están entendiendo de la lectura? porque lo tomo como lectura de comprensión. ¿Ajá?
**Observador:** Por qué es que a veces sí y a veces no les pides a los niños que te digan lo que entienden?
**Maestra:** Dependiendo del tiempo (sonríe apenada). Si yo tengo tiempo me voy más calmada, no voy tan rápido. Si yo tengo tiempo, entonces yo les doy también tiempo a ellos. Pero a la vez si yo voy muy rápido, yo sé que ellos no me entienden.

Estela señala la falta de tiempo, como la causa por la cual a veces no pregunta ni indaga sobre la lectura que hacen sus alumnos sobre las lecciones. Y si bien esta situación ya ha sido documentada por una investigación realizada por el DIE (Gálvez, Rockwell, Paradise y Sobrecasas, 1981) donde los maestros de educación primaria dedican la mayor parte del tiempo a resolver situaciones administrativas, o compromisos con ensayos de celebraciones como el día de la madre, día del niño, o los preparativos de los honores a la bandera, la responsabilidad de la cooperativa. Todo esto no basta para justificar tal proceder didáctico, más bien se señalaría que forma parte de su práctica pedagógica, y que en el caso particular de Estela, le basta su creencia de lo que piensa que saben sus alumnos y no de lo que realmente saben o ignoran, en resumen hay un esfuerzo de ella por considerar al niño sin incluirlo, vaya paradoja.

A manera de reflexión final sobre el análisis de la entrevista con Estela acerca de su percepción de las recomendaciones didácticas generales para la enseñanza de las matemáticas, hay dos puntos que vale la pena destacar:

- Tal parece que dichas recomendaciones generales son tan "generales" que describen el trabajo didáctico de cualquier profesor de primaria sin importar las particularidades de su modelo didáctico. "Todo cambia y nada cambia", este podría ser un mejor título para identificar el sentido que comunican al profesor.

- El segundo punto va precisamente en la misma dirección. Los profesores al percatarse de que lo que hacen va de acuerdo al nuevo enfoque de enseñanza porque así lo señala el libro del maestro, ellos justificarían (para bien o para mal) que su quehacer didáctico está bien, que es correcto. En otras palabras que reforzaría una autopercepción de virtudes hacia su manera de enseñar y difícilmente la cambiaría por otra.

### 3.2.2 ¿Cómo organiza la clase de matemáticas?

Una de las modificaciones más fuertes realizadas por la profesora, es sin duda la manera como organiza su clase. Para dar cuenta de las características de ésta, en principio se describen los tipos de organización propuestos en la secuencia de los problemas multiplicativos, para luego compararlos con la organización instrumentada por la profesora en el aula.





El diseño de las situaciones de aprendizaje de los problemas multiplicativos contempla 3 tipos de organización de la clase, éstos son: individual, parejas y equipo.

Ahora bien, la organización de la clase sugerida en las situaciones seleccionadas y aplicadas durante la experiencia, contemplan: 21 de trabajo individual, cuatro de trabajo en pareja y seis de trabajo en equipo como se muestra en el siguiente cuadro[1]). Además hay que considerar que hay tres que son "mixtas" en el sentido de que hacia su interior existen dos tipos de organización, de ahí que el conteo total de 31 tipos de organización es relativa, es decir, si bien corresponden al mismo número se situaciones de aprendizaje, no así al total de actividades y lecciones de la secuencia, en este caso 28[2].

## ORGANIZACIÓN DE LA CLASE QUE SE SUGIERE EN LA PROPUESTA.

| | ORGANIZACIÓN SUGERIDA DE LA CLASE | | |
|---|---|---|---|
| | Trabajo individual | Trabajo en pareja | Trabajo en equipo |
| LECCIONES DEL LIBRO 14 | 16, 35[3], 57, 61, 68, 77, 86, 90, 91, 93, 99, 103, 104 y 107 | 35 | 0 |
| ACTIVIDADES DEL LIBRO 9 | 51, 58, 74, 81, 85, 94, 95 | 85, 117 | 24, 94 |
| ACTIVIDADES DEL FICHERO 5 | 0 | Ficha 22 versión 2. | Ficha 28 problema # 2, Ficha 28 problema # 4 , Ficha 47 versión 1. Ficha 39 |
| **TOTAL DE LECCIONES Y ACTIVIDADES.: 28** | **21** | **4** | **6** |
| | **TOTAL DE ORGANIZACIONES DE CLASE: 31** | | |

Resulta importante en este momento describir las características que distinguen las situaciones de aprendizaje en las lecciones y en las actividades. Las lecciones: a) se ubican en el libro de texto del alumno; b) las situaciones problemáticas planteadas favorecen la interacción de los

[1] Es importante recordar que el cuadro no remite a todas las lecciones y actividades de los problemas multiplicativos de la Propuesta. Se realizó un selección previa a su aplicación en el aula, en consideración al tiempo limitado que teníamos para aplicarla (4 meses aproximadamente). Posteriormente durante el trabajo de campo, se realizó otro recorte debido al ritmo de grupo y por la cancelación de sesiones de trabajo por la maestra.
[2] La diferencia de estas dos cantidades 31 y 28, se debe a que las lecciones 35, 85 y 94 con organización mixta son contadas dos veces para obtener el total de tipo de organizaciones, pero se cuentan una sola vez cuando se totalizan la lecciones y actividades.

alumnos con representaciones gráficas (dibujos o ilustraciones) y lenguaje matemático convencional; c) la organización propuesta para su resolución es individual, con excepción de la lección 35, donde en una de sus partes se propone trabajo en pareja y; d) las situaciones planteadas están necesariamente limitadas al espacio disponible de una o dos cuartillas. Por su parte las actividades: a) se ubican en fichero y libro de texto; b) en todas se explícita el uso de materiales (ya sean del Libro Recortable o del Rincón de las Matemáticas) como apoyo para la solución de las situaciones problemáticas planteadas; c) su organización ocupa las tres modalidades ya descritas, sin embargo podemos hacer un señalamiento más fino: son las actividades del libro de texto las que abarcan las tres modalidades, en tanto las actividades del fichero todas son de equipo y d) ésta es quizás la más importante: su diseño didáctico requiere o demanda del profesor una mayor exigencia para cumplir con su intención didáctica, que la de una lección.

Como se puede observar en el cuadro, el trabajo individual es el más prominente, le siguen el trabajo en equipo y en pareja. De este hecho, no debe interpretarse que en la propuesta didáctica el trabajo individual sea más importante, todo lo contrario, desde una perspectiva constructivista de aprendizaje la interacción y confrontación de las ideas de los niños posibilita la aparición del conflicto sociocognitivo y de esta forma, se favorece la construcción del conocimiento matemático. Así entonces en las lecciones del libro como estrategia didáctica, después de que cada alumno resuelve individualmente, se le pide que con un compañero revisen lo que ambos hicieron, o bien, en otras ocasiones se sugiere que expongan al grupo sus respuestas y sean discutidas colectivamente. Los autores del libro tuvieron que considerar y respetar las características del medio al cual iba dirigida la propuesta, para en este sentido como dice Chevallard (1997, p. 44) "una situación didáctica antes de ser buena, debe ser factible". En el medio educativo mexicano la tradición "libresca" del magisterio, conlleva a un arraigo al trabajo individual; cada niño resuelve en su libro. Proponer que las lecciones se resolvieran en parejas o en equipo era violentar las prácticas de enseñanza dominantes, por ello en un intento de salvaguardar el requerimiento del nuevo enfoque sobre la socialización del conocimiento, es que se sugiere que esto se lleve a cabo un vez que cada niño a resuelto la lección. Más aún, este mensaje que se asienta en e Libro del Maestro, se recuerda sistemáticamente en el Libro

[3] Las lecciones 35, 85 y 94 fueron diseñadas con una doble organización, esto en función de la naturaleza de las





del niño (más presente en el aula) con la pretensión quizás ingenua, que los niños se sientan en libertad de comentar con sus compañeros sus resoluciones en el entendido que es eso lo que se "señala" en su libro.

Es importante aclarar que independientemente del papel social y magisterial que represente el libro de texto, la teoría de las situaciones didácticas de Brousseau muestra que es en la esfera de lo individual, en las denominadas situaciones didácticas de acción, desde donde la intervención de la escuela inicia el aprendizaje sistemático del conocimiento matemático. Este planteamiento didáctico, es muy importante, al respecto Fuenlabrada (1991, p. 228) señala: "En lo que se refiere a la enseñanza tradicional de la matemática, ha sido un grave error haberse limitado al plano del lenguaje y haber dejado de lado el papel de las acciones. En los alumnos de preescolar y primaria la acción sobre los objetos (materiales o intelectuales) resulta totalmente indispensable para la comprensión de las relaciones aritméticas y geométricas"

En resumen, por lo expuesto anteriormente la intención didáctica del nuevo enfoque sobre el trabajo individual en matemáticas, coincide con el contexto escolar y social en tanto adecuación del diseño didáctico a éstos últimos, pero también porque su fundamento teórico rescata la importancia de la acción individual de los niños. Evidentemente dicho enfoque aspira a propiciar un nuevo contrato didáctico en el aula, donde la dinámica de la clase se soporte en el trabajo individual, de pareja y equipo.

Se analiza ahora la transposición realizada por la maestra a la organización de la clase. El siguiente cuadro resume todas las modalidades de organización generadas por ella al impartir la clase de matemáticas.

tareas planteadas al interior de cada una de ellas. De ahí que aparecen dos veces.

**TABLA SOBRE CÓMO LA PROFESORA ORGANIZÓ LA CLASE DE MATEMÁTICAS**

| Organización de la clase | Trabajo individual (respeta la dinámica sugerida) | Trabajo en pareja (respeta la dinámica sugerida[4]) | Trabajo en equipo (respeta la dinámica sugerida) | Trabajo sugerido individualmente transpuesto a trabajo grupal. | Trabajo sugerido en equipo ,transpuesto a trabajo individual. | Trabajo sugerido en equipo transpuesto a trabajo grupal. | Trabajo sugerido en equipo transpuesto a trabajo de pareja y finalmente a trabajo grupal. | Trabajo sugerido individualmente transpuesto a trabajo de parejas | Trabajo sugerido en pareja transpuesto a trabajo individual |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| LECCIÓN | 61 y 91. | | | 16, 35[5],57, 68, 77, 86, 90, 99, 103, 104 y 107. | | | | 93 | |
| ACTIVIDAD DEL LIBRO | | 117 | 24 | 58, 74, 81, 85[6], 94 y 95. | | | 94[7]. | 51 | 85 |
| ACTIVIDAD DEL FICHERO | | Ficha 22 versión 2 | Ficha 47 versión 1 | | Ficha 28 segundo y cuarto problema. | Ficha 39 | | | |
| **TOTALES** | **2** | **2** | **2** | **17** | **2** | **1** | **1** | **2** | **1** |

Al comparar los cuadros 1 y 2, entre la organización sugerida y la efectivamente instrumentada por Estela, llama la atención dos situaciones:

- La primera la gran variedad de modalidades de organización empleadas en clase, un total de 9 (incluidas las 3 modalidades originales).

- En segundo lugar (consecuencia del primero) es el bajo porcentaje de situaciones de aprendizaje que son respetadas en su organización sugerida: de toda la secuencia de los problemas multiplicativos sólo se respetaron 6 organizaciones de clase sugeridas, que representa el 19.35%, y transforma 25 organizaciones, que en porcentaje equivaldría al 80.65% del total de 31 organizaciones aplicadas durante la experiencia didáctica. Ahora bien, si consideramos el criterio del respeto a la organización en términos de lecciones, actividades en libro y actividades en fichero, se tiene que los porcentajes son: 9.52% (2/21), 50% (2/4) y 33% (2/6) respectivamente. Si bien, éstos últimos porcentajes provienen de cantidades diferentes de situaciones de aprendizaje de cada modalidad, parece que los dos primeros sí

[4] El respeto a la organización sugerida para el trabajo de pareja y de equipo, no necesariamente indica que la profesora estableció realmente una verdadera dinámica en pareja o equipo, por ejemplo, imaginar una dinámica con equipos conformados por 11 o 12 niños, cuando se sugería en equipos con 4 niños. Este hecho es también una transposición a la organización de la clase, sin embargo se deja en la columna de respeto, en tanto hay la intención de la profesora por organizar la dinámica de la clase sobre la sugerencia que al respeto se le hace.

[5] Lección 35 con doble organización: individual y pareja. La dinámica individual es transformada a grupal; en tanto la de pareja es omitida.

[6] Lección 85 con doble organización: individual (3 problemas) y pareja (1 problema). La individual es transformada en grupal, en tanto la de pareja en individual.





reflejan una tendencia que más adelante se verifica: la caída del trabajo individual de las lecciones que se sustituye por una notable preferencia por el trabajo grupal. En el cuadro anterior aparecen además una lección y una actividad del libro sugeridas en trabajo individual, transformadas a parejas, pero también lo contrario, una actividad del libro sugerida en pareja transformada a dinámica individual, y una organización en pareja de una lección que es omitida. El tercer porcentaje de las actividades del fichero (33.3%), si bien da una buena idea de que Estela respeta la organización de una de cada tres actividades del fichero, cualitativamente lo que sucede en esta dinámica es más importante, en tanto el trabajo en equipo es central en el desarrollo de dichas actividades y por lo tanto del mismo enfoque de enseñanza de las matemáticas que se pretende que el profesor se apropie. Más adelante se muestra cómo para la maestra ciertos tipos de eventos novedosos, que aparecen durante el desarrollo de las dos sesiones cuando se trabaja en equipos, tienen una repercusión fuerte para el abandono definitivo de esta forma de trabajo, y en un efecto de rebote se fortifica la forma usual de organizar la clase de matemáticas que tiene la maestra.

Hay un par de preguntas importantes estrechamente enlazadas y que están en el centro de todo este análisis, estas son: ¿qué sucede en la dinámica de la clase que favorece la proliferación de modalidades en la organización de la clase, y por lo tanto de la fuerte transposición a la organización originalmente sugerida? ¿por qué específicamente el trabajo individual (que tiene la mayor cantidad de situaciones de aprendizaje de la secuencia aplicada) es prácticamente anulado por la maestra, al transformarlo a dinámica grupal?

La respuesta a estas preguntas hay que buscarlas en el análisis de cada una de las modalidades de organización recién descritas, y rastrear los posibles factores que intervienen durante el desarrollo de la clase y, que conducen a la profesora a transformar o no la organización originalmente propuesta.

De una manera breve se contextualiza cada situación de aprendizaje, pues esto ayuda a entrever los posibles factores que influyen en la toma de decisión de la maestra al decidir la dinámica de su clase.

[7] Lección 94 con organización doble: equipo e individual. El trabajo de equipo es trasformada en pareja, luego en grupal. La organización individual es transformada en dinámica grupal.

<u>*El trabajo individual (TI)*</u>[8]. Únicamente la docente respeta la organización de dos lecciones, la pregunta es, ¿qué razones tuvo para respetarlas?

En la Lección 61 es el diseño didáctico que no le da margen a Estela para intentar una dinámica distinta, en este caso, se plantea una situación de geometría: pintar un tapete de cuadrados. Si cada alumno tiene que pintar su tapete, es difícil pensar una dinámica distinta a la individual.

En la Lección 91, se plantea la solución de problemas con un sentido didáctico particular, primero eligiendo la operación pertinente entre varias propuestas, y después se pasa al desarrollo de su operatoria. Por su parte Estela altera este sentido didáctico, omite el análisis de la información y de las ilustraciones, lo transforma a la forma tradicional de plantear problemas tipo, esto es, problemas escritos con todos los datos necesarios y pide a los niños que los resuelvan usando la operación convencional. El factor que gravita en esta decisión, es su concepción de que la resolución de problemas es una tarea individual.

<u>*El trabajo sugerido en equipo es modificado a trabajo individual (TE→TI).*</u> Este cambio es realizado a la Ficha 28 que fue aplicada en dos ocasiones[9] durante dos sesiones consecutivas, pero resolviendo un problema diferente en cada ocasión. Se sugiere al profesor formar equipos, luego que escriba el problema en el pizarrón, que pida a los niños lo escriban en su cuaderno y lo lean. La docente debe asegurarse que lo han entendido y finalmente solicitan la búsqueda de la respuesta y su validación al interior de cada equipo. Estela por su parte, escribe en el pizarrón el problema, pide que lo copien y resuelvan. En ambas ocasiones en que se aplica la actividad la profesora no forma equipos, la solución se plantea en forma individual, la

[8] Por razones de economía en la redacción en adelante utilizaremos abreviaturas para referirnos a cada una de las modalidades de la organización de la clase.

[9] La razón por la cual se aplica dos veces y además de forma consecutiva, tiene que ver con el desempeño de los niños y con la enseñanza de la maestra, mismos que le fueron señalados por el observador. Los niños fracasan espontáneamente en la solución del problema multiplicativo, lo asimilan como una suma de datos. Estela decide enseñar el procedimiento graduándolo los niveles de representación del procedimiento desde el dibujo hasta la escritura convencional de una suma iterada. Ella esta convencida que de esta forma los alumnos han aprendido este procedimiento y que podrían usarlo para resolver otro problema similar. El observador sabe que esto no es cierto, en tanto la dificultad inicial está en la no construcción de los niños de la relación multiplicativa que subyace al problema, y que Estela al parecer da por hecha, o todo lo contrario, no sabe que hay que partir de ella para luego pasar a los diferentes niveles de representación. Por este motivo, se pide repetir la actividad en la siguiente sesión pero cambiando el problema. Los niños en esta segunda ocasión, vuelven a fracasar en la solución del problema al intentar sumar los datos del problema. La docente a pesar de insinuar que usen el





revisión sin embargo es grupal. Tal parece, que nuevamente parece que es la concepción que la profesora tiene acerca de la solución de problemas matemáticos lo que hace que esta tarea se realice individualmente. También es probable que la maestra no este todavía en la posibilidad de reconocer el valor del trabajo en equipo para fortalecer el proceso de aprendizaje de sus alumnos. Resulta razonable que no cambie hacia algo que no conoce.

<u>*El trabajo sugerido en pareja es modificado a trabajo individual (TP→TI).*</u> Una transposición un tanto rara dado la causa que lo origina. El cambio de dinámica fue realizado a una parte de la organización doble de la Lección 85. En esta se trabaja con el Cuadro de Multiplicaciones (con los números impresos), la parte que corresponde a la dinámica en pareja pide tomar del Rincón de las Matemáticas el Cuadro de las Multiplicaciones y los cuadritos de colores. Los niños por turnos dicen un número entre cero y diez. Cada uno rápidamente tiene que buscar en su Cuadro de Multiplicaciones las dos series de ese número y taparlas con los cuadritos, el primero que termina dice alto y luego se revisa. Estela lee toda la consigna, pero hace otra cosa totalmente distinta: pide a los niños que le indiquen un número cualquiera entre cero y 10, y luego lo multipliquen por sí mismo o por otro que ellos deseen y lo escriban en el cuadro de multiplicaciones vacío, hace algunos ejemplos de forma grupal apoyándose en un Cuadro de Multiplicaciones que ha pegado en el pizarrón y, luego pide a los niños que hagan en forma individual cinco ejemplos más y los escriban en su Cuadro. ¿Qué pasó en realidad con está transposición? Parece muy probable, una interpretación incorrecta[10] de la consigna, como si la docente no hubiese tenido tiempo para revisarla previamente (recuérdese que la profesora trabaja doble turno). Sin embargo, lo raro es que el cambio retoma las características de una tarea planteada en la siguiente lección (86). De hecho los primeros ejemplos elegidos por los niños a petición de Estela son retomados de la lección 86. ¿La maestra estaría distraída y confundió dos lecciones muy similares, además de estar espacialmente una al lado de otra? ¿Los niños simplemente obedecieron a su maestra y resolvieron otra cosa totalmente diferente a la que leyeron?

procedimiento del primer problema, no les es significativo. Estela se muestra consternada por tal situación. (ver registro No. 11, en el anexo).

[10] Otras interpretaciones incorrectas de Estela de la consigna o instrucción ocurren también con las lecciones 61 (El tapete de cuadrados) y 93 (Los hexágonos de 6 triángulos).

En resumen, los factores que inclinan a la maestra hacia el trabajo individual son debidos a: la imposibilidad de mover el diseño didáctico original, la idea que los problemas deben ser resueltos individualmente y, la falta de preparación de las lecciones, misma que origina confusiones en la organización de la clase.

*Trabajo en pareja (TP):* Dinámica que se favorece por la disposición espacial cotidiana de los niños, ya que se sientan en mesabancos. De entrada es justo señalar que son los niños quienes espontáneamente hacen la dinámica de pareja, y no por sugerencia de su profesora. Sin embargo, se contabiliza la dinámica de pareja en la columna de respeto a la organización propuesta, en tanto que sí hay cierta intención de la maestra por organizar su clase según esta modalidad, aunque se vio forzada a ello por problema de espacio.

La Ficha 22 versión 2 (aplicada en la primera sesión) es una actividad que de entrada la maestra la plantea de forma individual (y por tanto no respeta la organización sugerida). Es la dificultad del manejo del material, aunado al diseño didáctico el que lleva a la profesora a dar marcha atrás y respetar la dinámica original. No fue posible por el estrecho espacio del mesabanco que los niños ordenaran 40 tarjetas (20 por cada uno). Al percatarse de esta situación, Estela pide entonces que uno de los niños de cada mesabanco guarde su juego de tarjetas, algunas parejas no tienen mayor dificultad para acatar la instrucción, pero otras parejas sí, en tanto cada alumno cumplió con llevar su juego de tarjetas y quieren usarlo. La docente delega en sus alumnos la responsabilidad de elegir quien guarda su material y con cuál trabajarán, o bien si ninguno de los dos lo guarda.

La actividad correspondiente a la Lección 117 (la última que se aplica de la secuencia); en la que el diseño didáctico deja muy claro que la dinámica de pareja es prácticamente irremplazable, en tanto un niño pone los submarinos en su Cuadro de Multiplicaciones y el otro diciendo diferentes productos (5 x 4, 3 x 2, ...) intenta adivinar el número en que se encuentra escondido el submarino. Esto es claro para Estela y por lo tanto respeta la organización.

*El trabajo sugerido individualmente modificado a trabajo de parejas (TI→TP).* Esta transposición refleja cierta preferencia de la profesora por el trabajo en pareja. Las





transposiciones realizadas corresponden a una actividad (Lección 51) y a la Lección 93 del libro de texto.

En la Lección 51, es una actividad en la que los niños llevaron el material que les fue solicitado por su maestra. Ella propone la actividad con la organización sugerida (trabajo individual), se observa que Estela interpretó adecuadamente el planteamiento didáctico expresado en la lección. Esto se verifica porque propone unos ejercicios introductorios para después pasar al llenado de las tablas que se indican en el libro. Es en el transcurso de estos ejercicios previos cuando ella toma la decisión de pasar a una dinámica de pareja y mantenerse en ella durante toda la actividad. ¿Qué motivó este cambio cuando la actividad marchaba bien con la dinámica individual? Pareciera que ella percibe que es factible que la actividad se realice en pareja, lo cual es cierto. La maestra realiza el trabajo individual porque le permite en los ejercicios introductorios un espacio para garantizar que todos están entendiendo de que se trata la actividad, una vez que constata que han comprendido, la lección se realiza conforme lo que Estela ya había decidido: organizar a la clase en parejas.

La Lección 93 corresponde a una lección de geometría con preguntas que involucran la multiplicación. Se plantea pintar hexágonos y triángulos en un tapete de triángulos, hacerlo requiere del análisis del dibujo de la lección a fin de respetar la relación de orden en que aparecen pintadas algunas figuras. La lección es planteada en forma individual, sin embargo el cambio a dinámica de pareja no fue decisión de la docente, sino producto de la interacción espontánea que se dio en el grupo, y dado que siempre se sientan en pareja, esta interacción predomino durante el desarrollo de la lección. Estela permite el intercambio de información sobre la elaboración del tapete, tal vez en la idea que esto le facilitaría la revisión que siempre realiza al término de la lección.

En resumen el trabajo de pareja es posible debido a tres motivos diferentes: la imposibilidad del cambio del diseño didáctico; la pertinencia del cambio de organización una vez que ella ha estudiado que esa posibilidad es positiva y factible y; gracias a la disponibilidad del mesabanco de dos lugares que permite un intercambio natural entre los niños, situación que ha terminado por aceptar la maestra, siempre y cuando existe un límite en el orden de la clase.

*Trabajo en equipo (TE).* Dinámica que requiere la formación de grupos de niños. El tamaño del equipo es variable en función de los propósitos de la actividad.

La actividad de la Lección 24 plantea el juego de la papa caliente, la dinámica requiere de equipos grandes (alrededor de 10 por cada uno) y en el patio, pues los niños usan una pelota que irán lanzando al compañero que deseen según vayan construyendo la serie numérica que la docente haya planteado. El diseño didáctico obliga a Estela a salir del aula y a trabajar en equipo. Los niños se mostraron muy entusiasmados con la actividad, en contraste, el comportamiento de la maestra fue de una evidente ansiedad, este comportamiento se verifica al sólo permitir a los niños que jueguen una a dos veces con la serie del 2 (que por cierto es muy fácil para ellos) y, decide dar por concluida la actividad. Al parecer más que el trabajo en equipo, lo que la pone nerviosa, son las características del diseño didáctico que rompe con su tarea solitaria de enseñanza, rompe con su aislamiento al sacarla del aula y la expone ante sus compañeros maestros y autoridades. Es claro, que Estela más que por una convicción didáctica, responde a un compromiso contraído con el observador.

Otra situación que desconcertó mucho a la maestra, en esta actividad, propiciada también por el diseño didáctico, consistió en que una vez que ella plantea a los niños la actividad, Estela deja de ser el centro sobre quien gira la situación de enseñanza[11]. Es decir, los equipos funcionan bastante bien, sin la intervención de la profesora, y ella pasa a ser observadora, y su papel principal de enseñante que ella tiene asimilado, parece no tener sentido en este momento. Brousseau (1994) ya había señalado esta situación muy particular que enfrentan los profesores que aplican situaciones de aprendizaje (adidácticas[12]) diseñadas bajo la metodología de la ingeniería didáctica. Es importante señalar que el diseño de estas situaciones para propiciar aprendizaje en los alumnos, conlleva bloquear ciertas prácticas de enseñanza del docente, particularmente deje de ser el actor principal de la enseñanza ubicando

[11] En tanto la enseñanza tradicional se ha dedicado a la transmisión de conocimientos, los alumnos no han aprendido lo que debieran, en palabras de Brousseau entre más lo profesores han enseñado los alumnos menos han aprendido. El profesor ocupa el lugar del alumno, y de esta manera contraría su propio proyecto educativo. La sugerencia de Brousseau es que exista un acto de devolución de la responsabilidad hacia el alumno para que pueda tomar como suyos las situaciones problemáticas que le planteé su profesor y de esta manera pueda aprender matemáticas al resolver problemas.

[12] Una situación adidáctica es aquella situación de aprendizaje donde el alumno intenta adaptarse a ella para resolverla, y no al deseo del maestro, es decir, que intente contestarla porque su maestro le dice cómo tiene que hacerlo.





en su lugar al alumno (y su acción) y al saber escolar plasmado en la situación didáctica, según Brousseau (1994, p. 71) "La idea de que existirían situaciones de aprendizaje que deberían funcionar por las virtudes propias del alumno y de la situación, sin que la intervención del maestro se dirija al contenido de la adquisición, es una idea extraña para los maestros, pero también para los alumnos, y necesita de una construcción".

En la teoría didáctica de Brousseau (1994, p. 66): "El trabajo docente consiste, pues, en proponer al alumno una situación de aprendizaje para que produzca sus conocimientos como una respuesta personal a una pregunta, y los haga funcionar o los modifique como respuestas a las exigencias del medio y no a un deseo del maestro".

Por otra parte, en la Ficha 47 versión 1, se producen varios eventos, que muestran la complejidad del TE. Una primera decisión no muy afortunada tomada por Estela es la de mantener constante el número de 11 a 12 alumnos por equipo (como en la actividad descrita anteriormente de la papa caliente), cuando la sugerencia es formar grupos con 4 alumnos como máximo, esto en función del material con el cual se va a trabajar. Con este antecedente el trabajo en equipo causa las siguientes reacciones en alumnos y maestra.

En los alumnos: a) hay muestras de agrado por la nueva disposición, la cercanía con los compañeros permite un mayor diálogo entre ellos, incluso en un equipo rápidamente se organizan para jugar a "pásalas"[13]; b) Durante el desarrollo de la actividad se observa: acaparamiento del material por los alumnos a los que la profesora hace entrega del mismo, generando la discusión entre los niños por el material pues todos desean tenerlo; c) Un equipo decide distribuir el material (los frijoles) para que todos tengan, dicha acción impide el desarrollo de la actividad, incluso modifican (aumentan) el número de frijoles dados por Estela para que todos tengan más frijoles, dicho equipo al parecer espera tener material suficiente como si se tratara de trabajar en forma individual.

En la maestra hay muestras de desesperación ante la inusual comunicación que se da entre los niños por la nueva disposición espacial. Estela decide poner control a los equipos Éste consiste en pedir a una pareja de cada equipo, que realice la tarea de manejar el material, el resto solo tendrá que observar lo que hacen.

[13] Un juego infantil que consiste en pegar a un niño y este pasa el golpe a otro, y así sucesivamente. Este juego se favoreció en la actividad porque estaban sentados en forma circular alrededor de la mesa de trabajo.

Es importante también señalar que la docente ocupó una buena cantidad de tiempo en la conformación de los equipos, parece que quería considerar el nivel de conocimientos matemáticos de los niños.

En resumen, es significativo que Estela en dos actividades de equipo haya experimentado con situaciones muy distintas e incluso polarizadas, es decir, en la papa caliente los niños se incorporaron perfectamente a la actividad, por el contrario ella se siente descontextualizada al quedar fuera de ella. Por el contrario en la Ficha 47, la dinámica de la clase propiciada por la gran cantidad de integrantes en cada equipo demandó fuertemente su participación para controlar el desorden y centrarlos en la tarea, objetivo que por cierto no logro.

El impacto en Estela de estas experiencias cuando organizó a los niños para trabajar en equipo tuvieron un efecto tal, que decide abandonarlo, y por lo tanto transforma en lo sucesivo cualquier otra actividad organizada en equipo. Es razonable tal decisión, Estela no tuvo tiempo para reflexionar sobre lo que pasó y por tanto no intenta probar en otras sesiones. Muy probablemente sean las condiciones de trabajo la que le impidan hacerlo. Sin embargo desde el punto de vista didáctico, tales situaciones enfrentadas por la maestra propiciadas por el trabajo en equipo, tienen que ser construidas por ella y por sus alumnos. En otras palabras, de la maestra en tanto que voluntariamente devuelva el espacio a sus alumnos para que puedan interactuar con la situación de aprendizaje que se les propone; en tanto que los alumnos asuman la responsabilidad del "acto de devolución" por parte del maestro, en palabras de Brousseau (1994, p. 67). "No basta "comunicar" un problema a un alumno para que ese problema se convierta en su problema y se sienta el único responsable de resolverlo. Tampoco basta que el alumno acepte esa responsabilidad para que el problema que resuelva sea un problema "universal", libre de presupuestos subjetivos. Denominamos "devolución" a la actividad mediante la cual el docente intenta alcanzar ambos resultados"

El acto de devolución es una construcción intencional que el profesor tiene que iniciar y cuya construcción es un proceso que necesita tiempo.

En conclusión, esta situación que vivió Estela da una idea de lo difícil que puede resultar para una maestra organizar el trabajo en equipo, y a la vez hace reflexionar sobre cómo se debe capacitar al docente para que pueda implementar esta dinámica de trabajo la que se recurre





prácticamente en la mayoría de las actividades del fichero y que representan una situación con un importante potencial para el aprendizaje matemático en la escuela.

*El trabajo sugerido individualmente modificado a trabajo grupal (TI→TG).* La característica dominante de este dinámica reside en que la profesora lee en el libro al grupo la situación a resolver, a la vez ésta se va solucionando con las respuestas de los niños, sin que Estela considere un margen de tiempo razonable para que al menos una buena parte del grupo solucione el problema de manera individual. En este tipo de organización son pocos y generalmente los mismos niños quienes proveen las respuestas que espera escuchar la maestra.

Al principio de este apartado se planteó la pregunta ¿por qué el trabajo individual era prácticamente anulado y concentrado en otra dinámica: la grupal? como lo muestran los siguientes datos: de un total de 31 situaciones didácticas experimentadas, 21 corresponden al trabajo individual (representadas en su mayoría por lecciones), de estas: 2 son respetadas, 17 transformadas a trabajo grupal y 2 transformadas a trabajo de parejas.

Para dar respuesta a esta pregunta, hemos planteado la hipótesis de **"la huella".** Esta consiste en el hecho de que los maestros y los padres parecen estar suscritos a un contrato, en el que el primero tiene la obligación de mostrar a los segundos, de manera objetiva a través de los cuadernos y los libros de texto los aprendizajes de sus alumnos. En este sentido la escritura de ejercicios, planas, tareas **son la huella** del trabajo didáctico del profesor.

a) El libro de texto como todo documento sobre el que se puede escribir, deja una huella, puede ser visto por otros como una muestra del aprendizaje del niño, o bien, de la labor de enseñanza de la maestra. Al ser un documento público, la maestra centra su esfuerzo en controlar lo más posible lo que ahí se asienta, Estela además y en concordancia con lo anterior es sistemática para revisar el libro: niño por niño y fila por fila, a fin de asegurarse de que sus alumnos tengan escrita la respuesta correcta, ya sea que ésta la hallan recibido de los niños más listos del salón, o bien, de la misma docente; cuando esos alumnos no pudieron encontrarla.

b) Las forma de organización, garantiza que prácticamente todo el grupo anote las respuestas correctas, este hecho es "favorable" para los alumnos y para la maestra. Los primeros evidenciarán buenas calificaciones en su libro y con un pequeño ajuste en las notas en los exámenes serán promovidos al grado siguiente. Estela en función del porcentaje de aprobación de sus alumnos, con un respaldo "evidente" de su aprendizaje, no solamente sobrevive en la escuela, sino que obtiene un alto prestigio entre los padres de familia, compañeros y directivos de la escuela. Estela es una profesora que en opinión del director del plantel, es muy capaz y comprometida con su trabajo. Pareciera que estos son los resultados y la razón de utilizar la dinámica grupal. El prestigio ganado por Estela a través de esta dinámica de trabajo se pone en riesgo por la instrumentación de la nueva propuesta de enseñanza plasmada en el libro de texto de matemáticas. Por ello, la maestra opta por la dinámica grupal, en tanto los resultados obtenidos han sido de sobra probados, ¿por qué habría que cambiar? ¿por qué tendría que arriesgarse a experimentar con dinámicas de clase diferentes y enfrentarse a los efectos imprevistos que tendría hacerlo? Se tienen la impresión (sólo eso) de que los efectos que produjo la nada agradable experiencia de pérdida de control sobre el grupo cuando organizó el trabajo en equipo, lejos de posibilitar que la profesora cambiara su dinámica, la confirmó (valga la expresión) en su trabajo grupal. Esto podría explicar porque en el conteo sobre el total de organizaciones de clase, aumenta a 21 las que terminan siendo transformadas en trabajo grupal.

En resumen estos dos factores apoyan la hipótesis de la huella: lo hacen en tanto las respuestas correctas de los niños (encontradas espontáneamente por ellos o corregidas por la profesora) son escritas en un documento socialmente valioso que es el libro de texto del alumno, (18 de 21) y en ese sentido es que existe la "evidencia" escrita del trabajo de enseñanza de la profesora, misma que todos los interesados (padres de familia y directivos de la escuela) pueden ver. En contraparte, el trabajo didáctico sobre todo con las actividades del fichero (3 de 21) es menos cuidadoso que el llevado a cabo con las lecciones porque no dejan evidencia, sólo la maestra y los niños saben lo que hicieron y sucedió durante ella.

c) El factor tiempo que se entrelaza con los anteriores. Esta forma de dinámica (grupal), le permite a Estela un trabajo menos desgastante y efectivo en tanto le garantiza que casi todo el grupo tiene escrito, simultáneamente en su libro el resultado correcto, y le consume menos tiempo que organizar a los niños para un trabajo individual, en pareja y en equipo con las consecuencias ineludibles del manejo de la diversidad de soluciones. En el transcurso de esta experiencia, se considera sin embargo que el tiempo tuvo un peso menor que los dos factores





señalados anteriormente. Hubo dos eventos que empezaron evidentemente a impactar la dinámica de la clase, en el sentido que Estela se sentía presionada por la falta de tiempo.

El primer evento tuvo que ver con una semana de responsabilidad de la cooperativa, una vez que se vieron los efectos sobre la lección 94 donde hubo frecuentes interrupciones de las personas que llevaron la mercancía a vender, así como de alumnos de otros grupos que querían que se les vendiera en horas fuera del recreo, y por dos abandonos de la clase por la maestra, una al ser requerida por el director, y la otra por llamada telefónica. Se decidió no aplicar ninguna situación de aprendizaje hasta que pasara dicha responsabilidad.

El segundo evento fue la llegada de los exámenes, Estela plantea al observador la suspensión temporal de la aplicación de las situaciones de aprendizaje hasta que concluya la aplicación, revisión y entrega de calificaciones. Esta propuesta fue aceptada y se reanudó semana y media después. No obstante, al hacer un análisis del tiempo empleado para realizar las actividades, estas tenían una duración promedio de 60 a 70 minutos, se disponía de tiempo suficiente. Este dato es opuesto a las declaraciones de Estela en el sentido de que siempre hace falta tiempo , que siempre anda "corriendo" tras él. Pareciera en el caso muy particular de Estela que la dinámica grupal le permite no sólo ahorrar tiempo, sino incluso en algunas ocasiones derrocharlo sobre todo en los casos en los que implementa actividades ya que el material que es requerido es elaborado y recortado en ese momento.

Otro dato interesante respecto al tiempo, es la apreciación de Estela respecto al ritmo de aplicación de las situaciones de aprendizaje programadas, ya que en algunos casos se trabajaban hasta dos lecciones o bien una actividad y una lección (según la extensión). Estela con toda la razón argumentó que sentía que llevaba a los niños demasiado rápido, que se requería de mayor tiempo para asimilar y comprender los conocimientos matemáticos. Hubo pues un acuerdo entre Estela y el observador en dosificar las lecciones y actividades en función del ritmo del grupo. En este sentido, dicho acuerdo permitió, una manejo adecuado del tiempo que permitía a la docente dar la clase sin sentirse presionada, en términos generales, el ambiente en el grupo era agradable, la docente estaba de buen humor e incluso bromeaba con sus alumnos. Esta situación parece ratificar el por qué de su preferencia por una dinámica grupal, dadas las ventajas que en el punto anterior fueron señaladas.

Una pregunta final que no puede obviarse y que pareciera contradecir los argumentos expuestos a la preferencia de la maestra por el trabajo grupal, y sobre todo al supuesto ahorro de tiempo ¿por qué Estela ratifica la dinámica grupal si ya contaba con más tiempo a partir del acuerdo con el observador? Si bien es cierto que hubo espacios de tiempo saturados por otras responsabilidades escolares compartidas con sus compañeros, también es cierto que hubo numerosas actividades con tiempo suficiente para realizarlas. Tal parece que la elección del trabajo grupal obedece más a la seguridad de un modelo didáctico ya muy definido en la maestra y que hasta hoy le ha dado resultados que ella valora.

*El trabajo sugerido en equipo modificado a trabajo grupal (TE→TG).* Dinámica de equipo transformada a las características del trabajo grupal ya descritas anteriormente. Esta transformación es realizada a la Ficha 39. En esta actividad, es difícil inferir una sola causa de por qué Estela decide esta forma de organización. Es difícil porque esta actividad en particular, fue la que tuvo el mayor alejamiento de la propuesta didáctica. Según Chevallard (1997) a mayor distancia con respecto a saber matemático, mayor distorsión de este.

Son dos los factores que podrían estar detrás de la decisión de Estela: el primero tiene que ver con su renuncia al trabajo en equipo, no sabe cómo instrumentarla; un segundo factor, es que Estela pide a cada niño llevar sus bolos de boliche (mientras que la ficha sugiere 10 envases de plástico desechables para refresco por equipo), algunos niños incluso compraron su juego de boliche de plástico. Este hecho hizo aparecer en el salón un exceso (innecesario) de material lo que lleva a Estela a trabajar en una dinámica individual/grupal para que todos sus alumnos pudieran usar el material que les había hecho llevar.

*El trabajo sugerido en equipo es modificado a trabajo de pareja y luego a grupal (TE→TP→TG).* En este caso hay una doble transposición de la organización original. Esta fue realizada a una actividad del libro Lección 94. Es la única situación de aprendizaje de toda la secuencia en la que la profesora realiza dos veces cambio a la organización de la clase.

Esta lección tiene una organización doble, en este caso se analiza la primera parte. La actividad plantea formar equipos de 4 niños, en él un niño sin que sus compañeros lo vean, pone una piedrita sobre un número en el Cuadro de Multiplicaciones (mismo que será el submarino), una vez que éste dice el número en que escondió el submarino por ejemplo 20, el





resto del equipo busca todas las multiplicaciones que den como resultado ese número y las escriben en la tabla de su libro, en el caso del ejemplo: 2 x 10, 10 x 2; 5 x 4 y 4 x 5.

En el caso de la primera transposición, el paso de la organización de equipo a dinámica de pareja, parece provenir de la falta de tiempo, Estela es responsable de la cooperativa esa semana, aprovecha la disposición espacial de los mesabancos, y decide que los niños trabajen en parejas. La falta de tiempo no es lo único que interviene en la decisión de la maestra, de ser así hubiera sido más conveniente transformar el trabajo en equipo sugerido, por trabajo grupal; pero esto último es poco factible dadas las características didácticas de la actividad.

En lo que respecta a la segunda transposición: el paso de la dinámica de pareja a dinámica grupal. La maestra observa que la mayor parte del grupo fracasa en el llenado de la tabla. La explicación que Estela dio a los alumnos fue clara, más bien se registra una dificultad en la interpretación de la tabla por parte de los niños. Parece en esta caso razonable que la profesora haya pasado a una dinámica grupal, en primer lugar como un intento de ordenar a la clase. La sesión de trabajo ha sido accidentada debido a varias interrupciones por parte de las personas que llevan los productos de la cooperativa, otra por el maestro de educación física y un par de abandonos de la clase por Estela. Y en segundo lugar, la maestra intenta conducir a los niños sobre cómo deben llenar la tabla.

*Comentarios generales a la organización de la clase.* La transposición en la organización de la clase, refleja dos fenómenos opuestos: por una parte se observa un fenómeno de centración (la preferencia de la profesora por la organización grupal); y por la otra, un fenómeno de diversidad de modalidades (hay 9 modalidades en total). Se explicaran ambos fenómenos.

Respecto al fenómeno de la centración, la gran mayoría de los cambios realizados por Estela a la organización de la clase de matemáticas son inferibles a partir del contexto en el que se desarrollan. Como lo señalan las investigaciones de A. Robert y J. Robinet realizadas en 1989, citadas por Artigue (1995, p. 55) "(...) esas conductas (las observadas en el aula) no son improvisadas, sino que revelan rasgos de algunas decisiones instantáneas, guiadas por lo que sucede en el momento, pero que dependen también de decisiones más globales relativamente estables, determinadas por la personalidad del profesor y sus concepciones sobre las matemáticas y su enseñanza".

Sin embargo, tal parece que el análisis realizado a propósito de la transposición en la organización de la clase realizadas por Estela, muestra datos que permiten sacar conclusiones similares (no iguales) que las investigaciones de Robert y Robinet en el sentido de que si bien es cierto que los profesores toman decisiones instantáneas como ajustes a situaciones que se presentan en el momento, también parece que se verifica que hay cierta estabilidad (o regularidad) en los criterios utilizados por Estela al momento de tomar sus decisiones sobre cómo organizar la dinámica de la clase para cada lección o actividad. Si bien hay un acuerdo con Robert y Robinet, que detrás de tales decisiones se encuentran la personalidad del profesor y su concepción sobre las matemáticas y su enseñanza, en el caso particular que nos ocupa, también están presentes las denominadas representaciones sociales de Jodelet, citadas por Artigue(1995, p. 55) "(...) las representaciones sociales, vistas como un sistema de interpretación que rige nuestra relación con el mundo y con los otros, orientan y organizan las conductas y las comunicaciones sociales", que son consideradas por todo profesor en sus intercambios con todos los actores involucrados en el acto educativo. Así en la hipótesis de "la huella" que sostenemos se amalgaman estas representaciones sociales con la epistemología que el profesor tiene sobre las matemáticas (concepción sobre la matemática, su enseñanza y aprendizaje) y que reunidos influyen en las decisiones de la docente.

La consistencia de esta forma de organización de la clase en dinámica grupal, es el fruto de una adaptación inteligente de la maestra a las expectativas sociales inmersas en el sistema escolar, que le ha permitido ganar un buen prestigio ante los padres de familia, compañeros de trabajo y autoridades educativas (director y supervisor).

Por otra parte, el fenómeno de la diversidad, se debe más bien a decisiones situacionales, pero esto da origen a dos tipos de ajuste: en un caso es repentino e impredecible como en la lección 51, va tomando decisiones según el desarrollo de la actividad y en su mayoría no las más pertinentes; por ejemplo cada alumno que pasa, toma su tiempo para acomodar su boliche, en una disposición que no hace posible tirar muchos, algunos no tiran ninguno y no hay trabajo matemático que realizar, entonces decide que sean tres niños los que simultáneamente acomoden y tiren sus boliches y acerca la distancia de tiro. El otro tipo de ajuste, esta disponible en el repertorio de esquemas de la profesora, por ejemplo cuando Estela considera que la resolución de problemas es una tarea individual y no de equipo, y realiza una transposición en este sentido.





### 3.2.3 ¿Cómo usa el material en la clase de matemáticas?

Antes de iniciar el análisis de este rubro, se hace un breve planteamiento de la idea que se tiene del papel que juega el uso del material por parte de los alumnos en el aprendizaje de las matemáticas, desde el actual enfoque de enseñanza.

No es nueva la propuesta del uso de material para la enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria, sino más bien es la interpretación que de él se hace según el marco teórico que se asume. Así por ejemplo, encontramos que en el enfoque de enseñanza de las matemáticas de los LTG anteriores que surgen a principios de la década de los ochenta se hacían afirmaciones como las siguientes: "Como maestros, sabemos que los alumnos comprenden mejor y logran aprendizajes más firmes cuando no solamente utilizan la vista y el oído, sino que emplean también sus otros sentidos. Por ello es recomendable que el aprendizaje de la matemática sea multisensorial. Es indispensable que el niño manipule los objetos antes de ver una representación pictórica y simbólica. Para adquirir la noción de número, por ejemplo, no basta con que el niño vea dibujos de colecciones o escriba símbolos. Este proceso parte del manejo de objetos concretos, sigue con la representación gráfica de ellos, continúa con la simbolización y culmina con la aplicación de lo aprendido". (SEPd, 1980, p. 23).

Evidentemente detrás de este enfoque se encuentran las teorías sensualistas, que sostienen que el conocimiento se adquiere por la vía sensorial, dónde "la mano modela al cerebro" (Brousseau, 1994). Esta interpretación es importante tenerla presente durante el análisis, ya que es un punto de referencia para interpretar la idea que Estela llega a tener sobre el uso del material al intentar impartir la clase de matemáticas con el actual enfoque de enseñanza.

Por su parte, dicho enfoque señala "En la construcción de los conocimientos matemáticos, los niños también parten de experiencias concretas. Paulatinamente, y a medida que van haciendo abstracciones, pueden prescindir de los objetos físicos" (SEPe, 1993. p. 51).

La interpretación que se da al uso del material es retomada de la teoría psicogenética de Piaget, su postura al respecto es la siguiente: el conocimiento matemático, no es el conocimiento físico, por ejemplo, el concepto de número no es una propiedad física que se pueda abstraer de los conjuntos. Cuando un niño dice que tiene dos paletas, el "dos" no es una propiedad física de las paletas, sino una relación mental que elabora el sujeto. El conocimiento matemático es la transformación del "objeto" por parte del sujeto al agregarle, gracias a su acción, caracteres nuevos que no tenia en este caso la característica numérica "dos". Piaget

(1978) señala que existe una situación confusa respecto a ambos tipos de conocimiento (físico y matemático) cuando el niño utiliza objetos: no es lo mismo sostener que el conocimiento matemático sea abstraído del objeto (sensualismo), a sostener que éste sea sólo un apoyo para la acción del sujeto, o en otras palabras, que el objeto sea una ayuda para que el sujeto cognoscente pueda reflexionar sobre sus acciones. ¿Cómo podría el sensualismo (por ejemplo) explicar la existencia del cero y de los números negativos, cuando éstos no son registrados por los sentidos? Por el contrario, cuando un niño cuenta 10 piedritas (ejemplo citado por Piaget, 1978) y luego se pregunta si contando al revés o iniciando con cualquier piedrita seguirá teniendo 10 y lo comprueba empíricamente. Así pues, el niño ha descubierto propiedades respecto al orden gracias al apoyo de las piedritas. Piaget considera que gracias a la abstracción reflexionante es que el sujeto construye conocimiento matemático desde el bebé hasta el científico.

La didáctica de la matemática ha retomado este principio teórico como una piedra angular, sin embargo esto no es suficiente, y habría que considerar además dos factores más: a) el lenguaje matemático que permite descubrir propiedades matemáticas que serían imposibles que la acción del sujeto pueda descubrir al interaccionar con objetos físicos. Por ejemplo, las propiedades del cero, sólo son posibles estudiarlas gracias a una reflexión sobre el lenguaje matemático y; b) los contextos o situaciones en donde se realizan o adquieren su sentido los conceptos.

Es en este sentido que se retoma la postura de Vergnaud sobre la constitución de los conceptos matemáticos: "(...) un concepto es una terna de tres conjuntos C= (S, I, δ). S: el conjunto de situaciones que dan sentido al concepto (la referencia); I: el conjunto de invariantes sobre los que reposa la operacionalidad de los esquemas (el significado); δ: por el conjunto de formas de lenguaje y no lenguaje que permiten representar simbólicamente el concepto, sus propiedades, las situaciones y los procedimientos de tratamiento (el significante)" (Vergnaud,1990, p. 96).

Para analizar la concepción y uso del material por parte de Estela en el transcurso de la experiencia didáctica, es oportuno iniciar con una clasificación de las lecciones y actividades de la propuesta aplicadas en el aula, considerando el uso de material y/o imágenes que se plasman en el diseño didáctico.





**CLASIFICACIÓN DE LECCIONES Y ACTIVIDADES APLICADAS EN LA EXPERIENCIA DIDÁCTICA, SEGÚN LAS CARACTERÍSTICAS DE SU DISEÑO DIDÁCTICO CONSIDERANDO EL CRITERIO DEL USO DE MATERIAL Y/O IMÁGENES.**

| | USO PREDOMINANTE DE MATERIAL | USO EXCLUSIVO DE IMAGENES | USO COMBINADO DE MATERIAL E IMAGENES |
|---|---|---|---|
| *LECCIONES DEL LIBRO DE TEXTO* | | 16, 35, 57, 61, 77, 86, 90, 91, 93, 99, 103, y 107. | |
| *ACTIVIDADES DEL LIBRO DE TEXTO* | 24 y 117. | | No. de lección: 15, 58, 74, 81, 85, 94, 95 y 104. |
| *ACTIVIDADES DEL FICHERO* | 22, 28 (2do. problema), 28 (4to. problema), 39 y 47. | | |
| *TOTAL 28* | 7 | 13 | 8 |

Así se tiene que:

a) Las actividades del fichero usan predominantemente material[14]. Sin embargo, en general están acompañadas con representaciones (de diferente nivel: pictográficas, numéricas no canónicas, numéricas canónicas, etcétera.) de los procedimientos que los niños escriben en sus cuadernos para resolver las situaciones problemáticas que se les plantean, o bien en algunas ocasiones, hacen algunas tablas donde van anotando el puntaje parcial de un juego, para posteriormente hacer el cálculo final.

b) En contraparte, las lecciones del libro de texto, el análisis de la imagen tiene un papel fundamental, en tanto en ella se encuentran los datos que completan la información necesaria para resolver el problema planteado. Sin la consideración de la imagen por el alumno, el problema es prácticamente imposible de resolver correctamente. En las lecciones, el material no es considerado propiamente en el diseño didáctico, pero no por esto, los niños no pueden usarlo como apoyo (del Rincón de las Matemáticas) para resolver situaciones problemáticas planteadas en las lecciones.

c) Las actividades del libro de texto (excepto dos de ellas, Lecciones 24 y 117) son una combinación de uso de material y análisis de información plasmada en una imagen. En este

[14] Existe una diferenciación más fina en el uso del material en las actividades: hay ocasiones donde el material es el apoyo para resolver las situaciones planteadas; en otras, el material no es el apoyo sino el centro mismo de la actividad, como el caso muy particular de geometría donde los alumnos por ejemplo, razonan sobre las transformaciones geométricas de un cuadrado al mover sus vértices. Respecto a la secuencia de los problemas multiplicativos, el material juega la primera función.

caso, no se puede considerar que cada uno de estos dos factores sea más importante, ambos lo son y juegan un papel fundamental en el funcionamiento de dichas actividades.

Las dos actividades que corresponden a las Lecciones 24 y 117 fueron ubicadas en la misma columna que las actividades del fichero, dado que presentan las mismas características en su diseño: el desarrollo de la actividad gravita en torno al manejo del material. Cabe señalar que si bien, en estas actividades aparecen fotografías, su intención obedece más a enviar un mensaje al profesor sobre la manera de organizar al grupo, y no tanto porque dicha fotografía contenga datos a ser considerados en la solución de las situaciones problemáticas planteadas.

Ahora bien, si se considera que se aplicaron en total (entre lecciones y actividades) 28 situaciones de aprendizaje de la propuesta[15], y de ellas 13 corresponden a lecciones que sólo se trabajan con imágenes (44.4 %) y 15 que involucran el uso de material (53.6 %), se tiene así una secuencia prácticamente balanceada. Sin embargo, de este hecho no debe concluirse que la importancia de lecciones y actividades desde el punto de vista didáctico sea la misma, o que se da igual importancia a las imágenes que al material. Más bien, que la selección y aplicación en el aula de la secuencia con estas características ofrecen una oportunidad interesante para "ver" el manejo que hace la profesora de ellas y hacia dónde inclina la balanza en el transcurso de la experiencia didáctica.

En el libro del maestro (SEPc, 1994, pp. 23 - 25 se exponen las características, manejo e importancia del material concreto en el aprendizaje de las matemáticas. Esta información constituye el punto de referencia que se le ofrece al profesor de lo que se esperaría del uso que hiciera del material desde el actual enfoque de enseñanza.

El cuadro que se muestra más adelante señala las transposiciones realizadas por Estela a las lecciones y actividades según la clasificación propuesta en el cuadro anterior para su aplicación en el grupo.

En el cuadro se consideran al menos tres criterios, y tiene como propósito identificar y contrastar más claramente las transposiciones realizadas en los siguientes rubros sugeridos en

[15] Se aplicaron dos situaciones más de aprendizaje que no fueron originalmente planeadas, dando un total del 30 situaciones. Una de estas situaciones fue ideada por la profesora y fue trabajada completamente con el apoyo del pizarrón en el aprendizaje de las tablas de multiplicar. La otra situación, fue a sugerencia del observador y requirió del apoyo de material. Ambas situaciones no están incluidas en el análisis.





la propuesta didáctica: uso de materiales en actividades que lo requerían obligadamente; trabajo con imágenes de las lecciones y trabajo simultáneo con material e imágenes (primer renglón del cuadro).

En el segundo renglón (sombreado) identifica las decisiones tomadas por Estela acerca de los tres rubros inicialmente sugeridos en la propuesta. En este renglón también se incluye valoraciones acerca del tipo de uso que se la dio a los materiales y las ilustraciones. Esto es, no sólo bastaba decir usaba materiales o no, porque esto en sí mismo sólo es un indicador pero no hay garantía de que lo esté usando adecuadamente.

El tercero, cuarto y quinto renglón desglosan e identifican de manera más fina en cuál lección, actividad del libro de texto o del fichero la maestra respeto o no el sentido didáctico del trabajo con el material, las imágenes o ambos.

## APLICACIÓN DE LAS LECCIONES Y ACTIVIDADES POR PARTE DE LA MAESTRA, CONSIDERANDO COMO GUÍA EL USO DE MATERIAL Y/O IMÁGENES.

| | Trabajo propuesto predominantemente con material | | | Trabajo propuesto únicamente con imágenes. | | | Trabajo propuesto para realizarse simultáneamente con material e imágenes. | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ***Transposición de la profesora a las lecciones y actividades*** | Usa material | | No usa material | Analiza la ilustración. | | Analiza incorrectamente la imagen. | Analiza bien imagen y usan el material sugerido | Analiza incorrectamente la imagen y usa material sin respetar las condiciones didácticas sugeridas. | Analiza bien la imagen pero se olvida pedir el material |
| | el sugerido en la propuesta | no respeta las condiciones didácticas sugeridas | | | Utiliza material | | | | |
| ***Lecciones del libro de texto.*** | | | | 16, 57, 77, 90, 91, 99, 103 y 107 | 68 y 86 | 35, 61 y 93 | | | |
| ***Actividades del libro de texto.*** | 24 y 117 | | | | | | 51, 58, 81, 94, 95 y104 | 85 | 74 |
| ***Actividades del fichero.*** | 22 (versión 2) y 47 (versión 1) | 39 | 28 (2do. problema), y (4to. problema) | | | | | | |
| | 4 | 1 | 2 | 8 | 2 | 3 | 6 | 1 | 1 |
| ***Total: 28*** | 7 | | | 13 | | | 8 | | |





*La primera columna* refiere precisamente al trabajo con actividades en donde es prácticamente obligado el uso de material, encontramos que de 7 actividades, Estela en cinco de ellas usa material y en dos no. Sin embargo al analizar el tipo de materiales que se le solicitan en cada caso encontramos que en las cinco que sí lo usa, todo el material fue pedido a los niños, es decir fue elaborado por los padres de familia. Se tiene entonces que Estela no parece haber calculado la cantidad de material que se requeriría resultó exagerada la cantidad del mismo porque cada niño llevaba el suyo. Esta situación si bien es aceptable porque las actividades se proponen en torno al uso de un material como ayuda a la reflexión matemática de los alumnos, también generó situaciones no previstas porque el material que tenía que ser trabajado en equipo se utilizó individualmente. Por ejemplo, en el caso particular de la Ficha 39 que refiere al juego de el boliche, el uso del material de manera individual y la disposición que ordeno Estela, llevó a pérdidas de tiempo innecesarias, a una dinámica de clase desorganizada y a no lograr el propósito de la actividad como ya se mencionará en su oportunidad, de ahí que se haya abierto una subdivisión en la columna de "usa el material", donde se indica que hizo un uso notablemente inadecuado de este.

Llama la atención que Estela no pida los materiales pensando en la idea de que va a trabajar en equipo, porque esa es precisamente la sugerencia que se hace en las actividades. Es cierto que en algunas actividades se presentaron dificultades para que los niños compartieran el material, el cambio de contrato didáctico no es inmediato, ya se ha señalado que Brousseau (1995) comenta que tiene que construirse este nuevo contrato. Es posible que Estela piense que estas disputas por el material cuando se trabaja en equipo se resuelven pidiendo individualmente el material, pero luego enfrenta el problema de organización para llevar por buen camino la actividad. Otro ejemplo en este sentido fue la Ficha 22: los niños trabajan con series de tarjetas que tienen escrito números del 1 al 20. Los alumnos se sientan en mesabancos de dos lugares, resultó que el espacio del mesabanco era insuficiente para que cada niño pusiera sus tarjetas, en total 40 tarjetas por los dos niños.

Respecto a las dos actividades donde no se utilizó material. Estela argumenta que no tiene lugar en su salón para hacer el Rincón de las Matemática (primera actividad sugerida del libro de texto) porque el mismo salón se usa por la tarde y el material se perdería.

**Obs:** ¿Crees que está secuencia te hizo pensar en ciertas cosas que tenías que cambiar?
**M:** Ah si..
**Obs:** ¿Cómo qué?
M: Más organización...más organización...porque el problema que hubo fue también en el libro recortable. Y es que el problema es que uno no se puede organizar bien por el problema del espacio, porque en el libro recortable hay que guardarles el material, y la verdad, yo no cuento con eso (con un espacio). Pero voy a hacer lo posible porque se guarde aquí el material...que algunos se les olvida, que otros lo pierden.

Situaciones como esta surgieron por ejemplo en la Ficha 28 que fue trabajada en dos momentos diferentes (son dos problemas distintos y por esta razón se cuenta dos veces). Los niños resuelven problemas multiplicativos planteados de manera oral, utilizan el procedimiento que creen necesario y con la ayuda o no de material, representaciones pictográficas o numéricas, etcétera. Estela no pone a disposición de sus alumnos material alguno por si lo requieren.

Si bien es real la falta de espacio, también lo es el hecho de que ella tiene como método de enseñanza explicar los procedimientos sin apoyo de material, y prefiere hacer dibujos en el pizarrón para modelar el procedimiento de solución del problema y luego pasar al nivel numérico. Esta manera de enseñar esta documentada en el apartado sobre el modelo didáctico de la profesora a inicios de este Capítulo.

*De la segunda columna*, cualquier actividad de aprendizaje sin importar si su diseño incluye o no material, queda al criterio del profesor hacer flexiblemente uso de éste como ayuda a sus alumnos; para hacer comprender por ejemplo cierto tipo de relaciones de una situación problemática, o para facilitar la comprensión de los algoritmos de suma, resta, etcétera. De 13 lecciones, en dos de ellas, Estela toma la decisión de agregar el uso de material. Sin embargo cuando se revisa el tipo de material y la importancia que tuvo para el desarrollo de la lección se encuentra que en la Lección 86 hace uso del material recortable del Cuadro de Multiplicaciones por comodidad para al niño, simplemente sustituye el uso del cuadro de la lección que es más pequeño por uno más grande. El cambio del material en esta lección no es realmente significativo. Todo lo contrario ocurre en la lección 68, ahí se proponen situaciones de división de agrupamiento, a partir de 30 estampas dibujadas en la lección, Estela entrega por iniciativa personal 30 estampas a cada dos niños para que puedan enfrentar la tarea de resolver varios problemas, con un diferente grado de complejidad. Dado que ya se entiende que cada sobre tiene 3 estampas se hacen preguntas como: Armando compró 8 sobres y se le perdieron 2 sobres ¿Cuántas estampas le





quedaron?; Ramón compro 6 sobres y se le perdieron 9 estampas ¿Cuántos sobres le quedaron?; ¿Cuántos sobres compró Mari, si tiene 24 estampas? Estela leyó con tiempo la lección y se percató de la exigencia matemática y cognitiva de los problemas y atinadamente consideró que era importante la presencia de las estampas, como material para manipular y contar, para hacer grupos de 3 (los sobres), etcétera. Una decisión importante para que los alumnos accedieran al propósito de la lección.

Quizás extrañe que se haya incluido el trabajo sobre imágenes que se da en las lecciones, cuando lo que se está analizando en este apartado es el uso de material en la enseñanza de la matemática, pero es necesario señalar que de 13 lecciones, en tres de ellas hubo problemas tanto en la comprensión lectora como en el análisis de las imágenes. La dificultad con la comprensión lectora se da básicamente en las Lecciones 61 y 93. En ambas se trabajan ideas de multiplicación vinculadas con el eje de geometría. La profesora sólo hace caso de la consigna, por ejemplo en la Lección 61 se indica "Cada cuadrado grande se forma con 4 cuadrados pequeños. Pinta los 8 cuadrados rojos grandes y los 7 cuadrados grandes que faltan" Así entonces los niños efectivamente pintan la cantidad indicada de cuadrados de cada color, pero se deja de lado el orden y lugar en que serán pintados en el tapete, esto solo es posible, si se analiza el tapete. Se tiene la impresión que la docente aún no ha descubierto que las imágenes no son decorativas, sino que cumplen un importante papel didáctico, en este caso de desarrollo de percepción geométrica a la que se agrega una actividad multiplicativa cuando se solicita averiguar cuántos cuadrados pequeños de cada color quedarían pintados.

En la lección 35, Estela también enfrenta un problema con un conocimiento incorrecto del nombre de las extremidades de un oso. El contexto es un taller donde se hacen osos de peluche. Una de las preguntas es ¿Cuántas patas necesita cortar Carlos para hacer 5 osos? (problema de división tasativa) Veamos que dicen los niños y la maestra.

**M:** Vean muy bien cuál resultado van a anotar ahí, cuales son. ¿Cuántas patas necesita Carlos para hacer 5 osos?
**Marlem:** ¡10¡
**As:** (Un par de alumnos más encuentran el mismo resultado que Marlem).
**M:** Me anotan ahí el resultado. (Nota: M y los niños consideran que los oso solo tienen 2 patas y no 4, no analizan los datos de la ilustración del cuaderno, estos claramente indican: 3 osos-12 patas; 5 osos-20 patas, es decir, 4 patas por oso).

La maestra cree que los osos tienen dos patas y dos manos, y no cuatro patas, como al parecer lo consideran también tres de los niños, y no hace que sus alumnos analicen la información que les es ofrecida en la lección.

*En la tercer columna* donde las situaciones de aprendizaje demandan por igual el trabajo con material y el análisis de información proporcionada en la imagen. En seis de ocho de ellas se maneja adecuadamente el análisis de la información y usa el material indicado. Por otra parte, en la Lección 85 ocurren dos situaciones muy extrañas, en primer lugar se presenta una confusión con el material recortable, se recorta equivocadamente "los cartoncitos" por los "cuadritos de colores". En segundo lugar en la lección se trabaja el Cuadro de Multiplicaciones lleno y la maestra elabora en una cartulina uno vacío. Ella intenta que sus alumnos construyan las series planteadas en la lección y llenen el cuadro vacío que ha pegado en el pizarrón. Sin embargo, este no es el sentido de la lección, se da el Cuadro de Multiplicaciones lleno para que los alumnos identifiquen y pinten las series de tres en tres, cuatro en cuatro, y perciban la distribución especial de estos resultados en el Cuadro. Se trata de un ejercicio de identificación de las regularidades de la tabla y no de cálculo mental de las series, que sin dejar de ser importante, no centran la atención de los niños, en las regularidades.

Por último, en una actividad del libro Lección 74 la profesora entiende la intención didáctica de la misma, pero hay un detalle: olvida pedir el material a los padres. A continuación se muestra un fragmento de la clase, que muestra cómo ella sortea este apuro.

**M:** (Cuando considera que la mayoría ha terminado de leer dice): A ver calladitos, voy a leer la lección: La cooperativa escolar. Beto vende en la cooperativa paquetes con chiclosos. Hay paquetes con dos, tres...seis y a veces diez chiclosos. Del Rincón de las Matemáticas toma unas piedritas que vas a usar como chiclosos y 8 tapas para empacarlos. Ahí vemos unos dibujos con las piedras representando a los chiclosos. Luego ahí abajo, dice: Haz paquetes con 4 chiclosos y completa la tabla. Vamos a hacer la tabla de aquí abajo que dice: número de paquetes, tiene el 8, 7, 6, 5 y 4. Vamos a hacer primero 8 paquetes, lo vamos a hacer mentalmente, vamos a hacer 8 paquetes con 4 chiclosos...¿cuántos chiclosos tendremos en total? Acuérdense que son de 4.
**As:** (Guardan silencio y empiezan a calcular mentalmente).
**M:** De 4 (a un alumno). Si compramos 8 paquetitos con 4 chiclosos cada uno ¿cuántos chiclosos tendremos?
**As:** (murmullo del cálculo que hace en voz alta algunos niños).
**Ax:** ¡54¡
**M:** (Ignora la respuesta) A ver, ¿les pongo el primero en el pizarrón? ¿si? (dibuja los 8 paquetes y escribe el número 4 dentro de cada uno). Estos serían los 8 paquetes. ¿si?
**As:** si
**M:** En cada paquete ¿cuántos chiclosos tenemos?
**As:** Cuatro.
**M:** ¡Cuatro¡ Entonces, si tenemos estos 8 paquetes con 4 chiclosos cada uno ¿cuántos chiclosos tendremos?
**As:** (Grupo en silencio, hacen cálculos) ¡31 maestra¡ ¡No, son 32¡ (el grupo se divide con estas dos respuestas).
**M:** A ver. En cada uno hay 4. A ver, vamos a sumar para ver si es 31 ó 32. Cuéntenlos bien A ver, sumamos, serían (M comienza a señalar cada paquete de chiclosos).
**As:** 4, 8, 12, 16... 18, 20 (corrigen), 24, 28, 32, (algunos niños repiten después de sus compañeros sólo por repetir la cantidad).





**M:** ¡32¡ Abajo del 8 hay un cuadrito, ahí lo ponen.
**As:** (Escriben número)

Estela recurre al dibujo de los paquetes pero en vez de dejar que los niños hagan los paquetes con material, lo que conlleva se centren en el número de paquetes y la cantidad de chiclosos en cada momento, Estela decide dibujar los paquetes, escribir directamente el número 4 dentro de cada uno de ellos y solicitar el conteo de 4 en 4, estrategia que se espera los niños utilicen una vez que quizás hallan empezado para contar de uno en uno. Es decir, la situación entre otras cosas pretende funcionalizar la redefinición de la unidad componente característico de los procesos multiplicativos.

A manera de resumen acerca del uso del material se tienen las siguientes consideraciones:

Por la entrevista inicial, sabemos que Estela es la primera vez que trabaja con la propuesta nacional de 1993, y en la entrevista final ella comenta que el trabajo con material le había resultado provechoso para el aprendizaje de sus alumnos. Sin embargo, durante el transcurso de la experiencia el material del libro fue recortado en el salón antes del desarrollo de la actividad, y no al inicio del curso como es sugerido, para conformar el Rincón de las Matemáticas. Esto ocasionó pérdida de tiempo, además el material al ser recortado por los niños y no por los padres como se propone, no siempre se recortó bien.

Los padres cumplieron con la responsabilidad de enviar otros materiales cuando Estela se los solicitó. La profesora por su parte cumplió con llevar en dos ocasiones material elaborado por ella misma (trabaja doble turno y tuvo que hacerlo durante la noche).

Así, entonces se tiene que sólo en una actividad entre 15 (sumando las actividades del fichero y libro de texto) no se uso el material. Esto es, la profesora y los padres mostraron una gran sensibilidad y compromiso hacia este requerimiento el problema estuvo en el uso didáctico del mismo.

¿Cómo organizar tanto material cuando éste fue pedido innecesariamente de manera individual? ¿Qué significó en términos de pérdida de tiempo y precisión en el corte que los niños lo recortaran en la clase?

Estos fueron problemas no resueltos durante la experiencia didáctica, Estela nunca previó la cantidad de material necesario para realizar una actividad, de hecho, no obstante su primer experiencia desastrosa por exceso de material fue vivida por ella como un problema con la organización de equipos y, aunado a lo anterior, sistemáticamente solicitó que los niños recortaran el material del libro en el tiempo de la clase, sin que diera muestras de preocupación por la pérdida de tiempo, como tampoco por el hecho de echar a perder el material.

## APARTADO 2: LA TRANSPOSICIÓN DIDÁCTICA SOBRE EL CONTENIDO MATEMÁTICO A ENSEÑAR.

### 3.2.4. ¿Qué es un problema de matemáticas?

Para poder analizar la concepción de problema matemático que maneja Estela y contrastarla con la concepción en la propuesta oficial, es necesario retomar brevemente la idea de problema matemático en los modelos de enseñanza: normativo, incitativo y aproximativo (Charnay 1994).

- El modelo normativo procura en primer lugar, el manejo de las técnicas de los algoritmos y luego se espera su aplicación automática a los problemas tipo que el profesor planteé. Bajo estas características, la ejercitación de la resolución de problemas tipo es el criterio que muestra el aprendizaje de los alumnos.

- El modelo incitativo se caracteriza porque el conocimiento escolar expresado a través de problemas está vinculado a las necesidades de la vida y el interés del alumno. Sin embargo el planteamiento de dichos problemas no toma en cuenta la lógica de la disciplina. Por dar un ejemplo, además de plantearse problemas vinculados a la vida cotidiana (uso de la matemática como herramienta), también es importante que los alumnos enfrenten problemas matemáticos sin contexto que permitan a los alumnos construir relaciones numéricas y reflexionar sobre el lenguaje matemático (uso de la matemática como objeto). Algunas situaciones de este tipo son: llenar cuadros mágicos, jugar basta numérico, construir series numéricas, etcétera. De lo contrario el conocimiento matemático estaría incompleto al faltar una de sus partes esenciales: trascender el contexto y reflexionar en modelos abstractos, generales y poderosos.

- El modelo aproximativo asume como idea central: *la resolución de problemas como fuerza, lugar y criterio de la elaboración del saber*. En esta postura teórica se sustenta el enfoque de enseñanza de la matemática y el diseño de los materiales didácticos de la escuela primaria en el sistema nacional mexicano (desde 1993).





A continuación se esbozan algunos argumentos para ampliar esta última postura. Para Brousseau (2000, p.10) "El problema (situación problemática en matemáticas) no es un ejercicio o una simple reformulación del saber, sino un dispositivo, un medio al que responde el alumno"(....) hemos llamado "situación" (problemática) a un modelo de interacción de un sujeto con cierto medio que determina un conocimiento dado como el recurso del que dispone al sujeto para alcanzar o conservar en este medio un estado favorable". La preocupación central de la teoría de las situaciones didácticas *es modelar el medio didáctico del alumno* para generar el aprendizaje de contenidos matemáticos escolares. Enfrentando al alumno a una situación problema de tal manera que el conocimiento que se desea que el sujeto adquiera aparezca como necesario para resolver el problema que es planteado por el maestro, de ahí que las preguntas centrales de la teoría de Brousseau son: ¿en que condiciones puede propiciarse que un sujeto – cualquiera – tenga necesidad de un conocimiento determinado para tomar ciertas decisiones? y, ¿cómo explicar de antemano la razón por la cual lo haría? (Brousseau 2000, p. 10).

A continuación se analiza cuál es la concepción de "problema matemático" en Estela, durante el desarrollo de las actividades de aprendizaje.

En la Lección 16, A comprar paletas; se observa claramente que la idea de problema de la maestra es distinta a la de la propuesta.

**M:** Y vamos a comprar 6 paletas de agua (...) pero los precios no van a ser los que nos dan allá afuera (intenta relacionar con la "vida real") (...) son los precios que aquí tenemos en nuestro libro ¿si? Esos van a ser nuestros precios. ¿Las paletas de agua cuestan?
**As:** Tres pesos (dato incorrecto, se confunden con el precio de las paletas de leche, el dato correcto es 2 pesos).
**M:** ¿Las nieves?
**As:** Tres pesos.
**M:** ¿Los helados?
**As:** Cinco pesos.
**M:** ¿Las aguas frescas?
**As:** Un peso.
**M:** Allá en las paletas también venden aguas frescas (intenta relacionar con "la vida real"). ¿Ajá? Entonces si compramos 6 paletas de agua (...). Yo voy a preguntar ¿Cuánto vamos a pagar por esas 6 paletas de agua?
**Ax:** ¡18 pesos¡ (correcto respecto a los 3 pesos que se habían considerado de las paletas de leche, sobre lo que Estela no se pronunció en su momento).
**Ay:** ¡6 pesos¡ (respuesta correcta, desde el último dato mencionado "las aguas frescas").
**M:** A ver Fernanda, si tú compras 6 paletas de agua y son a dos pesos ¿cuánto vas a pagar?
**Ax:** Ya sé maestra.
**Ay:** ¡7 pesos¡
**As:** (Los niños empiezan a opinar, sin embargo predominan dos tipos de respuesta: 8 y 12 pesos. El 8 parece ser la suma de datos 6+2=8; el 12 implicaría al menos la iteración de 2+2+2+2+2+2).
**M:** A ver, dijimos que yo voy a preguntar.
**As:** (Algunos alumnos alzan más la voz) ¡Son 12 pesos¡ ¡Son 12 pesos¡
**As:** ¡No maestra son 8 pesos¡
**M:** A ver Cristian.
**Cristian:** ¡8 pesos¡

**M:** ¿8 pesos?
**Cristian:** ¡Sí¡
**M:** A ver, vuelve a rectificar tú suma. A ver Carlos ¿cuánto vas a pagar?
**Carlos:** 12 pesos.
**M:** ¡Julio¡
**Julio:** 10 pesos.
**M:** Mariana.
**Mariana:** 10 pesos.
**M:** Ariadna. ¿Cuánto vas a pagar?
**Ariadna:** 12 pesos.
**M:** Amalinali.
**Amalinali:** 10 pesos.
**M:** Pero vas a comprar 6 paletas.
**Gerardo:** 12 pesos.
**M:** Josué.
**Josué:** 12 pesos.
**M:** 12 pesos. A Gerardo no le estamos preguntando.
**M:** Citlali. ¿Cuánto vas a pagar?
**Citlali:** (No contesta).
**M:** Jorge ¿cuánto vas a pagar por 6 paletas?
**Jorge:** Este...este...9 pesos.
**Iván:** Maestra, yo (levantando la mano).
**M:** A ver Iván.
**Iván:** 12 pesos.
**M:** 12 pesos.
**M:** David.
**David:** 8 pesos.
**M:** Son 6 paletas a 2 pesos ¿son?
**As:** ¡12 pesos¡ (Contestan sólo los que desde un inicio calcularon este precio)
**M:** ¡Son 12 pesos.
**As:** ¿Lo anotamos?
**M:** Sí, anótenlo en su libro.

Aquí se destacan los siguientes hechos:

- El problema no está planteado en el libro de la manera tradicional donde aparecen en un solo texto todos los datos, como lo hace Estela "A ver Fernanda, si tú compras 6 paletas de agua y son a dos pesos ¿cuánto vas a pagar?". Por el contrario, parte de los datos del problema están escritos, y otros se deben obtener analizando la imagen de la lección. Estela desde el principio no respeta la idea original, a saber: los alumnos leen los problemas y ellos son quienes deben decidir qué hacer para conseguir la información que les falta (precios de las paletas, helados, nieve, etcétera).

- Los niños dan respuestas incorrectas: 8 por una idea aditiva de los datos 6 paletas más 2 pesos. Las respuestas 10 pesos y 18 pesos, iteran el 2 equivocadamente, cinco veces, en lugar de 6 en el primer resultado, mientras que en el segundo se itera el 3, seis veces, pero no es el precio correcto de las paletas de agua (aunque sí el que se acepto inicialmente). La maestra no sabe cómo manejar didácticamente los errores desde el enfoque metodológico





que plantea la propuesta (por ejemplo, pudo haber preguntado a sus alumnos el por qué de sus respuestas, los que dijeron 18 podrían haber corregido el dato equivocado, asimismo quienes dijeron 10 y dar la respuesta correcta), en tanto no lo hace, cambia entonces el sentido del problema y el contrato didáctico subyacente en el diseño de la lección. Ella entonces decide plantear nuevamente el problema de manera verbal pero con la presencia de todos los datos una sola vez, posteriormente solo retoma parte del problema, ya sea que pregunte ¿cuánto vas a pagar?, o diga. "pero vas a pagar 6 paletas" (frente a un resultado equivocado). Cuando Estela decide que ya ha preguntado suficiente y algunos alumnos han dado la respuesta correcta (12 pesos) hace una síntesis, retoma el planteamiento del problema: "son 6 paletas a dos pesos ¿son?", los alumnos que habían contestado correctamente repiten 12 pesos, ella ratifica "son 12 pesos", por el tono que utiliza los alumnos preguntan "¿lo anotamos?", "Sí anótenlo en su libro" contesta Estela. La maestra no permite que los niños asuman la responsabilidad de buscar los datos, como lo sugiere la lección; no indaga las razones por las cuales sus alumnos le están dando respuestas erróneas (18, 6, 7 y 10 pesos) pero no azarosas, anula así el acto de devolución. De alguna manera el replanteamiento del problema le funciona, porque empieza a aparecer en voz de algunos niños la respuesta correcta (12 pesos) que ella reconoce como válida, sin ser evidente para la mayoría del grupo. Los alumnos con base en el contrato didáctico asumido saben en qué momento deben preguntar "¿lo anotamos?".

En resumen, Estela se maneja claramente en el modelo normativo cuando trabaja con problemas matemáticos, su manejo didáctico de los errores es que ante cada respuesta indica abiertamente que es errónea hasta encontrar la correcta (que es la que quiere escuchar).

Otro aspecto aunado al anterior, vinculado al diseño didáctico de los problemas en las lecciones, es una nueva modalidad de problema que se le ha denominado *problema abierto*. Es nueva para los profesores de primaria porque no están familiarizados con el planteamiento de problemas que admitan varias respuestas correctas simultáneamente y que puedan implicar el uso de varias operaciones sucesivas por ejemplo multiplicación y resta.

En el siguiente fragmento de clase de la Lección 90, *Vamos al fútbol*; muestra cómo enfrenta Estela la resolución de un problema abierto.

**M:** A ver, lo voy a leer en voz alta (la lección), dice: Vamos al Fútbol. ¿Ya vieron ahí los cuadritos? (de los precios ubicados en distintos lugares de la imagen que muestran un estadio de fútbol y lo que se vende frente de éste).
**As:** ¡Sí¡
**M:** ¿Qué tienen los precios de cada producto?
**As:** ¡Sí¡ (los niños no contestan la pregunta de M, pero ella no le da importancia).
**M:** ¿También el cuadro grande? (de los precios de entrada al estadio, éste es el importante, por el problema que a continuación va a plantearles Estela).
**As:** ¡Sí¡ (contestan pocos).
**M:** ¿Sí? Bueno, dice abajo. Al salir de casa, Fernando llevaba la cantidad exacta para comprar tres boletos y entrar al estadio. Al sacar el dinero de su bolsa sólo traía 18 nuevos pesos[16]. ¿Cuánto dinero se le perdió? (Se da un momento para pensar) ¿Cuánto creen ustedes que iba a gastar para su entrada?
**Ax:** ¡50¡ (con tono de duda, el niño está dando el dato de uno de los precios de entrada al estadio, hay tres precios según el lugar: 50, 22 y 8).
**M:** ¡50 pesos¡ Entonces, si él sólo encontró 18 pesos ¿cuánto dinero perdió?
(Nota: ¿Estela se olvida que Fernando llevaba la cantidad exacta para 3 entradas?, o ¿intencionalmente en la marcha sin avisarles a los niños ha cambiado el problema?).
**As:** 32 pesos.
**M:** ¿32 pesos?
**As:** Sí.
**M:** ¿Si van leyendo conmigo? (¿que cree M que van leyendo? ¿lo que dice el libro?)
**As:** Sí (la mayoría del grupo).
**M:** Porque si no, no van a saber donde vamos.
**As:** (Escriben el 32 como respuesta al problema, pero ésta es incorrecta).

Los comentarios que se tienen versan fundamentalmente sobre:

- Ella lee en voz alta para los niños, aunque ya antes ha pedido una lectura individual. Es importante señalar que la mayoría de las veces aparece como constante lo siguiente: no pregunta a sus alumnos qué han entendido de la lectura de la lección, ¿qué se está planteado? ¿qué piensan hacer para solucionar lo que están preguntando? Ciertamente que Estela, le ha manifestado al observador que solicita la lectura individual al inicio de las lecciones para que los niños practiquen la lectura (relacionada con la materia de español), pero parece que esa "práctica" está entendida por Estela como decodificación y no como comprensión sobre lo leído.

- En relación a la manera como ella maneja la solución del problema hay dos hipótesis: O no entendió de que se trataba el problema y como se verá más adelante tampoco entendió de que se trataba la lección o, lo entendió perfectamente bien y lo simplifica intencionalmente para salir más o menos bien librada de un problema que sentía que era difícil para ser resuelto por los niños ¿cómo iba ella a controlar o manejar la muy probable aparición de tres diferentes respuestas correctas? En el caso de que algunos niños





decidieron que Fernando iba a comprar los tres boletos de zona general la resolución sería 24 – 18; para la zona preferente 66 – 18, y para la zona de palcos 150 – 18. Es difícil hacer una conjetura sobre cual de las dos hipótesis es la causa de la transposición. Sin embargo es más posible, que ella no haya entendido el problema porque no reconoce la posibilidad de plantear problemas abiertos. En su topogénesis no existen problemas con estas características, y por esta razón no sabe cómo manejarlos con sus alumnos (pues toma el valor de un boleto de 50 pesos), propone una operación directa (la resta 50 – 18) para dar la impresión a su grupo de que el problema ya ha sido resuelto, pero no advierte que 32 pesos no es la respuesta correcta. Recordemos que para Estela, es muy importante que lo que los niños escriban en su libro sea correcto. Aunado a ello de haber comprendido el problema y asumiendo que ella considera, que el problema era demasiado difícil para sus alumnos en cuanto al manejo de tres respuestas correctas, podría haber decidido (esto lo hizo en otras ocasiones) que por ejemplo, "Fernando iba a comprar boletos en la zona de palcos" y desde esta asunción conducir a sus alumnos a una de las respuestas posibles del problema.

- Otro hecho interesante, es que la lección contiene otrosproblemas abiertos a partir de los datos ofrecidos en la ilustración. Ella no propone ningún un problema abierto. Tampoco propone ningún problema que implique el uso de la multiplicación o división (que sí debió plantear en tanto se suponía que se trabajaba con la secuencia de los problemas multiplicativos y los niños ya habían avanzado en este proceso). Ella plantea problemas sencillos de suma y resta directos (con resultados no mayores a 45) con los productos que se venden fuera del estadio.

En la Lección 95, *La mamá de Tonatiuh*; se encuentra otro aspecto importante considerado en el trabajo de problemas: *la invención de problemas*. El fragmento que se analiza corresponde a la parte final de la lección. La consigna escrita en el libro es la siguiente: *"Inventa otros problemas con los datos del dibujo y resuélvelos en tu cuaderno. Usa tu Cuadro de multiplicaciones para hacer las cuentas"*, y está dirigida a los alumnos.

- Estela entiende a su manera esta consigna, ella inventa los problemas por sus alumnos, tal y como lo hizo en la lección anterior (*Vamos al fútbol*). Analicemos el siguiente diálogo con la maestra.

[16] En esos años, al sistema monetario mexicano se le habían quitado tres ceros, por ellos se hablaba de nuevos

**Obs:** La otra cosa que yo te quería preguntar es ¿por qué no dejaste que ellos inventaran el problema?
**M:** No se me ocurrió.
**Obs:** En la redacción del libro, está en términos de que ellos inventen otros problemas.
**M:** Si pero eso no.
**Obs:** Eso estaría interesante, que los niños inventen problemas.
**M:** ¿Qué ellos los inventen?
**Obs:** ¡Sí¡ ¿Qué te parece que para otra ocasión ellos inventen el problema? y ves que hacen. Te veo preocupada, que eso no te haga ruido, vamos a ver que hacen los niños.
**M:** (Ríe nerviosa aceptando).
**Obs:** O si quieres ahorita regresando del recreo.
**M:** Es que tengo pendiente un examen.
**Obs:** Bueno mañana.
**M:** El problema es que tengo una semana de exámenes, y nos piden calificaciones, y si no lo hago me atraso y entonces estoy más presionada.
**Obs:** Bueno, mañana aviéntate a hacer sólo uno, aunque mañana no toque matemáticas, les das sólo los datos y que ellos lo inventen.
**M:** Bueno si lo voy a hacer, me gustaría saber qué es lo que hacen.
**Obs:** Incluso, más que el procedimiento, es mejor que observes el planteamiento del problema, no les pidas que lo resuelvan para que no te hagas lío, o a lo más que te verbalicen el resultado nada más, ¿sí? Pero para otros problemas si sería interesante ir viendo la confrontación de los niños sobre sus procedimientos.
**M:** Está bien.

- La invención de problemas por parte de los alumnos "¿qué ellos inventen problemas?" seguido de una serie de excusas: "después del recreo, es que tengo pendiente un examen"; bueno mañana: tengo una semana de cooperativa (...) estoy más presionada". No es una práctica de enseñanza que ella considera importante que sus alumnos realicen, le basta que sus alumnos puedan resolver los problemas de multiplicación con la operación convencional a x b = c.

- Si bien Estela es quien toma la iniciativa de proponer los problemas para los alumnos, no se puede dejar pasar el hecho de que propuso problemas que alteraron el sentido didáctico de los problemas planteados en las lecciones, antes citadas: búsqueda de información por parte de los alumnos, enfrentamiento a la resolución de problemas abiertos y a la invención de problemas con los datos que proporciona una imagen, Estela siempre anuló el análisis de la información del problema e indicó directamente que tenían que hacer los alumnos, así como también no perdía el control de lo que los niños podían o no escribir en su libro.

Se han presentado evidencias de que existen dos concepciones diferentes acerca del planteamiento de problemas: la de la propuesta y la de Estela. Ha sido interesante analizar el modo de cómo ambas concepciones se juegan en el desarrollo de las situaciones de aprendizaje; a manera de conclusión de este apartado tenemos que:

---

pesos (valor real de los billetes anteriores que todavía estaban en circulación).





- La maestra siempre desplaza al alumno de la tarea central del análisis de la información (escrita y gráfica) contenida en el planteamiento del problema. No es pues extraño, que tal forma de proceder tenga consecuencias profundas y duraderas en los alumnos, tal como se reporta en (Fuenlabrada y Block, 1995): desde el tercer grado de primaria, se acentúa la problemática, respecto a que los alumnos no saben elegir la operación pertinente. Frecuentemente preguntan ¿es de suma o resta? ¿es de multiplicación o división?

- Cuando el problema presenta "dificultades", en tanto existe la búsqueda de la respuesta pero no aparece de inmediato o es equivocada, Estela opta por precisar los datos necesarios, de esta manera los alumnos sólo se centran en realizar la operatoria. Luego se valida la respuesta correcta tan pronto aparezca sin importar si la mayoría del grupo aún no la ha encontrado.

- Los problemas abiertos no forman parte del repertorio de los problemas que plantea Estela. Los problemas que ella plantea deben contener todos los datos y ser cerrados (sólo una respuesta posible).

- La invención de los problemas por parte de los alumnos, es una actividad de aprendizaje, que le resulta a Estela no solo extraña, sino inverosímil en la entrevista señala: "¿qué ellos inventen problemas?"

### 3.3.2 Las tablas de multiplicar

Una situación didáctica no considerada en la secuencia de los problemas multiplicativos, pero realizada en clase por iniciativa de la profesora fue **la enseñanza de las tablas de multiplicar**. El motivo que impulsa a Estela a tomar esta decisión es porque detecta su "ausencia" de este tipo de organización de las tablas en la secuencia didáctica. No puede concebir que algo tan fundamental no se contemple en la enseñanza de la multiplicación, pero a la vez no se percata de que el Cuadro de Multiplicaciones contiene las tablas de multiplicar. En otras palabras, lo que parece ocurrir es un entrecruzamiento entre la enseñanza de la multiplicación de la profesora que está sostenida exclusivamente por el operador escalar y la de propuesta de segundo grado, anclada fundamentalmente (aunque no exclusivamente) en el operador función. Este entrecruzamiento va a causar un choque en la parte consciente (de la que puede percatarse la maestra) que tiene que ver con el significado de los factores en la escritura convencional de la multiplicación; y en la parte inconsciente (la que no entiende), como lo es el sentido didáctico y matemático del Cuadro de Multiplicaciones. Durante el desarrollo de este apartado se mostrará que particularmente la enseñanza de las tablas de multiplicar es un espacio álgido de la secuencia de los problemas multiplicativos, cuya ausencia "explícita" –desde la perspectiva de Estela- es una deficiencia de la propuesta.

¿Cuál es el significado matemático que Estela trasmite a sus alumnos acerca de las tablas de multiplicar?

Para abordar esta pregunta es necesario analizar el siguiente registro de clase donde aborda su enseñanza.

**M:** A ver vamos a escribir la tabla del 2, del 3, del 4 y del 5 ¿sí? Pero primero vamos a anotar aquí (escribe en el pizarrón: 2 veces 1=) Dos veces uno ¿Cuánto es?
**As:** 2.
**M:** ¡Dos¡ Anotamos aquí (escribe resultado en pizarrón 2 veces 1 = 2) Váyanlo copiando.
**Ricardo:** ¿Con números grandes?
**M:** ¿Mande?
**Ricardo:** ¿Si hacemos números grandes?
**M:** No háganlos chiquitos ¿sí? En un cuadrito un número y una letra en cada cuadro.
**As:** Ya maestra.
**M:** ¿Dos veces dos?
**As:** ¡4¡
**M:** ¡4¡ (Escribe en pizarrón 2 veces 2 = 4).
**M:** ¿Dos veces 3?
**As:** ¡6¡
**M:** Dos veces tres es igual a 6 (escribe 2 veces 3 = 6).
(Se prosigue de esta misma forma hasta completar la tabla del 2).
**M:** ¿Dos veces 10?
**As:** ¡20¡
**M:** (Escribe en pizarrón: 2 veces 10 = 20). (Pasa por las filas a revisar el trabajo de sus alumnos). Para la siguiente tabla que hagamos dejan un espacio entre el número y la palabra veces porque los están juntando). Ahora vamos escribir en la otra mitad del cuaderno, ahí en la misma hoja.

Al analizar el registro se observan varios aspectos importantes para analizar:

- En primer lugar la profesora introduce la multiplicación en "seco", esto es directamente desde la representación misma, sin soporte de un contexto problemático y de objetos.

- Es evidente que Estela transmite a sus alumnos el significado del *operador escalar* al indicar explícitamente la palabra "veces". Su intención es sustituir la palabra veces por el **signo x**.. Estela tiene una forma muy particular de modelar y entender la tabla del dos desde el escalar, ya que dicho operador lo ubica en el primer factor de la multiplicación, si bien matemáticamente es correcta, didácticamente se presentan alguna limitaciones para





promover el aprendizaje de sus alumnos, esto por la siguiente razón: su "tabla de multiplicar del dos" está conformado por conjuntos con diferente cardinal que se iteran dos veces, los siguientes dibujos muestran gráficamente esta afirmación.

Estela enseña que:

2 x 1 es dos veces uno

2 x 2 es dos veces dos

2 x 3 es dos veces tres

2 x 4 es dos veces cuatro

Mi hijo Giovanni cuando cursó el segundo grado, trajo a casa la tarea de memorizar la tabla del 9 que le fue enseñada de la siguiente manera: 9 x 1 es 9 veces 1 y se escribe 1 + 1 + 1 + 1 + 1 +1 +1 +1 +1 = 9; 9 x 2 es 9 veces 2 y se escribe 2 + 2 + 2 + 2 + 2 +2 +2 +2 + 2 = 18; y así sucesivamente. Su profesora interpreta la tabla de la misma forma que Estela., incluso lo hace más explícito que ella.

El trabajo didáctico de la tabla así considerada constituye un obstáculo para que los niños controlen y anticipen la regularidad numérica de la serie numérica del 2, cuya relación numérica es n + 2, esto es que a un número se le adiciona dos y se obtiene el siguiente. Entre otras cosas, es por esto que la construcción de series de 2 en 2, de 3 en 3, etc. coadyuva al cálculo mental que los niños tendrán que hacer para resolver problemas multiplicativos –referidos a los naturales-. Dicho de otro modo en la "tabla del dos" tal como la construye Estela si bien en los resultados aparece la serie: 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, esta no proviene de la iteración de un conjunto equipotente (de cardinal dos) más bien el 2 esta actuando como operador escalar (dos veces) y es por esta razón que ella misma sin darse cuenta erige un obstáculo para su memorización que es algo que luego pedirá a sus alumnos. La siguiente tabla nos ayudara a entender esta problemática. La primer columna muestra lo que Estela enseña la multiplicación. La segunda columna es la implicación de la primer columna, por ejemplo que dos veces uno es en realidad 1 + 1. La tercer columna muestra los resultados. La memorización de la serie del dos (columna tres) no puede ser deducida desde la particular interpretación de escalar que Estela propone (columna dos). Creemos que los alumnos al memorizar la tabla del dos lo harán considerando solo los resultados y su regularidad numérica (incremento de 2 en2) e ignoraran la parte correspondiente a las dos primeras columnas.

| | | |
|---|---|---|
| 2 x 1 (dos veces uno) | 1 + 1 | 2 |
| 2 x 2 (dos veces dos) | 2 + 2 | 4 |
| 2 x 3 (dos veces tres) | 3 + 3 | 6 |
| 2 x 4 (dos veces cuatro) | 4 + 4 | 8 |
| 2 x 5 (dos veces cinco) | 5 + 5 | 10 |
| 2 x 6 (dos veces seis) | 6 +6 | 12 |
| 2 x 7 (dos veces siete) | 7 + 7 | 14 |
| 2 x 8 (dos veces ocho) | 8 + 8 | 16 |
| 2 x 9 (dos veces nueve) | 9 + 9 | 18 |
| 2 x 10 (dos veces 10) | 10 +10 | 20 |

En una clase de posgrado cuando se estudiaba con algunos profesores la forma Estela enseña la multiplicación, la maestra Concepción (Coco como es conocida) del estado de Querétaro, comentó que ella entiende de otra forma la tabla del 2, y que cuando enseña las tablas de multiplicar: usa la palabra veces, después escribe el signo x y al final pide memorizarlas. Sin embargo da un sentido diferente a la tabla del 2, 2 x 1 es una vez el dos





(2); 2 x 2 es dos veces el dos (2 + 2); 2 x 3 es tres veces el dos (2 + 2 + 2); 2 x 4 es cuatro veces el dos (2 + 2 + 2 + 2) , …, 2 x 10 es diez veces el dos (2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2). Sin duda la enseñanza de las tablas de las maestras Estela y Coco se parecen mucho, sin embargo la interpretación que hace ésta última tiene la ventaja que ayudará a sus alumnos a encontrar la regularidad de la serie del 2.

- En el capítulo 1 ya se había expuesto que la escritura multiplicativa que corresponde a la tabla del 2 desde el escalar es 1 x 2. 2 x 2 , 3 x 2, 4 x 2, etc., lo interesante de esta situación que ambas profesoras están enclavadas en una escritura inversa 2 x 1, 2 x 2, 3 x 2, etc., con dos lecturas distintas de la misma tabla del 2. ¿estás formas particulares de enseñar de Estela y Coco serán frecuentes de encontrar en otros profesores de primaria?

Ahora bien ¿cómo es que Estela ubica el operador escalar en el primer término? El problema surge en la institucionalización del signo de la multiplicación. Veamos como lo hace Estela.

**M:** Sí. Ahora fíjense bien, vamos a cambiar esta palabra que escribimos, la palabra veces, la vamos a cambiar por este signo (escribe el signo X).
**Ax:** Es el por.
**M:** Que es por, que nos está indicando la multiplicación ¿sí? Entonces vamos a hacer esto. 2 por 1 nos da..?
**As:** ¡2¡
**M:** ¡2¡ Ya no vamos a anotar veces. (Escribe en pizarrón al lado de 2 veces 1 = 2 2 x 1= 2) ¿La siguiente cómo sería?
**As:** 2 por 2, 4.
**M:** (Escribe 2 x 2 = 4). Gerardo no me estás poniendo atención, mira cómo lo estás haciendo.
**Gerardo:** (Hizo la letra muy grande y no dejó espacio al lado de su hoja para escribir nuevamente la tabla con el signo por).

El cambio o sustitución de la palabra veces por el signo **x** trae como consecuencia que el signo afecte al primer término de la multiplicación convirtiéndolo en operador escalar y al segundo término a la medida del conjunto que se repite. Se tiene la impresión que esta transposición tan medular no pasa por la conciencia de la profesora, y tal vez menos aun en las consecuencias que tiene en las ideas matemáticas que aprenderan sus alumnos de ella. Sin embargo, Estela si alcanza a percibir el hecho de que las tablas de multiplicar, así como ella las concibe, ya no se enseñan en segundo grado. Situación con la que no está de acuerdo, y decide enseñarlas ya que considera que sus alumnos si no se las aprenden, no podrán resolver problemas de multiplicación.

En la forma de enseñar la multiplicación de Estela recupera parcialmente la idea de escalar como se propone en el libro de texto del alumno de segundo grado del anterior currículo

(SEPf, 1976, Matemáticas segundo grado), en dicho libro se propone a los niños trabajar con conjuntos conformados por un mismo cardinal (por ejemplo en la tabla del 4) cuidan que dicho conjunto sea iterado n veces y proponen la escritura multiplicativa de la tabla del 4 como: 1 x 4 (1 vez 4), 2 x 4 (2 veces 4), etc. Se señala que Estela recupera parcialmente el significado de la idea de este escalar, porque también ubica al primer factor como el operador escalar, pero esto no es suficiente para que ella logre mantener la iteración de conjuntos equipotentes (de cardinal 4).

Un comentario adicional que se agrega a propósito de las interpretaciones que los profesores de primaria dan a los factores de la multiplicación, que si bien no es un dato recuperado de los registros de clase de esta experiencia didáctica, pero sí de la opinión de muchos maestros y maestras de primaria que asisten a las asesorías del Programa Nacional de Actualización Permanente (Pronap)[17] es la pregunta que hacen: ¿por qué el libro de segundo grado enseña la multiplicación al revés de como ellos la han venido enseñando? Esto es, un buen indicador de que al menos se han percatado de ello, habría que resolverles sus dudas. En algunos casos, afirman abiertamente que la interpretación de los factores que se enseña en el libro de segundo grado es incorrecta o equivocada. En estos casos también habría que explicarles. Es evidente que de todas maneras la interpretación de los profesores está ubicada en el operador escalar y no en el operador función, de ahí que manifiesten dificultades para comprender la secuencia de la propuesta. Estos profesores al igual que Estela cuestionan la validez de la propuesta oficial de segundo grado, ya que ellos siguen ubicados en la idea multiplicativa del curriculum anterior de matemáticas.

La enseñanza de las "tablas de multiplicar" para Estela se convierten en un momento álgido de la enseñanza de la multiplicación. Cabe preguntarse: ¿su concepción sobre la enseñanza de las tablas de multiplicar (que se encuentra en el nivel de lo sintáctico o del significante) afecta de alguna manera el sentido de la multiplicación plasmado en la propuesta, cuando aparece el contexto que le da significado a la escritura multiplicativa?

A continuación se muestra y analiza parte del registro de la Lección 77, *Tonatiuh multiplica*. Esta lección fue trabajada por Estela en la sesión de trabajo inmediatamente después de la enseñanza de las tablas de multiplicar. Dicha lección constituye lo que





Brousseau llama la situación de institucionalización, en este caso el acceso de los alumnos a la representación convencional de la escritura de la multiplicación.

**M:** Saquen su libro de matemáticas y van a leer en silencio la página 118 y 119.
**As:** (Sacan su libro y leen la lección 77. Muchos leen en voz alta).
**M:** ¿Ya terminaron?
**As:** ¡Ya¡
**M:** Ahora yo voy a leer la lección, dice: Tonatiuh multiplica. En el salón de Tonatiuh hacen la actividad de la empacadora. Para saber cómo formar los paquetes de chocolates...usan tarjetas. Unas tarjetas dicen cuántos paquetes hay que formar y otras dicen cuántos chocolates deben de ir en cada paquete. A Tonatiuh le sale el 5 en la tarjeta de paquetes y el 2 en la tarjeta de chocolates. Ahora ahí tenemos la tarjeta de Tonatiuh ¿sí? que es la de 5 paquetes y la de 2 chocolates, y luego adelante tenemos cómo tiene él sus tapitas, como lo hacen ustedes con sus frijolitos o piedritas y dice Tonatiuh: si son 5 paquetes son 5 tapas. ¿con cuántas *tapas* cada una? (debió haber dicho chocolates).
**As:** Con una.
**M:** ¿Con cuántos chocolates cada uno? (corrige).
**As:** ¡Con 2¡
**M:** ¡2¡ Entonces dice: Tonatiuh anota lo que hizo de la siguiente manera: 5 x 2..?
**As:** ¡10¡ (todo el grupo).
**M:** ¡10¡ ¿Cuántas tapas son?
**As:** ¡5¡
**M:** (Dibuja 5 tapas en el pizarrón) Con sus frijolitos. ¿Cada una tiene?
**As:** ¡2 frijolitos¡
**M:** 2 frijolitos. (dibuja 2 frijoles en cada tapa). Después tiene sus tarjetas (dibuja 2 tarjetas: una dice 5 paquetes y la otra 2 chocolates). ¿Sí? Son 5 paquetes y son 2 chocolates en cada paquete ¡sí? Y él hizo la multiplicación 5 x 2 (escribe en pizarrón 5 x 2 = 10)
**As:** ¡10¡
**M:** Lo que hizo él fue multiplicar los paquetes con los...?
**As:** Chocolates.
**M:** Con los chocolates. Y ya obtuvo el...?
**As:** Resultado.
**M:** ¿Sí? Luego dice ahí abajo (en el libro). El 5 es el número de paquetes y el 2 el número de chocolates que hay en cada paquete; el 10 es el total de chocolates que utilizaron. La operación que anotó Tonatiuh se llama...?
**As:** ¡Multiplicación¡
**M:** Multiplicación ¿sí? ¿Se fijaron que lo hizo en forma de multiplicación?
**As:** ¡Sí¡
**M:** Porque multiplico ¿qué multiplico?
**As:** El 5 por el 2.
**M:** 5 por 2. Ahora dice ahí abajo: Fíjate en los dibujos y calcula el total de chocolates. Completa la multiplicación para que quede como lo hace Tonatiuh. A ver entonces, vamos a hacerlo como lo hace Tonatiuh. Él nos pone ahí sus tarjetas: 3 paquetes con dos chocolates ¿Cuánto ser ?
**As:** (Cuentan con los dedos. Un niño se adelanta al resto del grupo y grita) ¡6¡
**M:** ¡6¡ Ustedes tienen en sus libro el 3, un cuadrito, luego el 2, y luego otro cuadrito. (escribe en pizarrón 3 □ 2 = □). Tiene 3 tapas (las dibuja en pizarrón) que son los 3 paquetes. ¿Cuánto tiene cada paquete?
**As:** ¡2¡
**M:** ¡2¡ (dibuja lo dos chocolates en cada paquete).
**As:** (Cuentan de 2 en 2, M va dibujando los chocolates). ¡2¡ ¡4¡ ¡6¡
**M:** Ahora, aquí en este cuadrito ¿qué es lo que nos va a faltar para hacerlo como lo hizo Tonatiuh? (señala en pizarrón el cuadrito que se encuentra entre el 3 y el 2).
**As:** El por.
**M:** (Pone signo x. Queda 3 $\boxed{X}$ 2 = □ ). Vamos ahora a multiplicar 3 por 2?

---

[17] El observador de esta experiencia didáctica es asesor en el área de matemáticas de este programa de actualización.

**As:** ¡6¡
**M:** ¡6¡ (Completa multiplicación en pizarrón: 3 $\boxed{X}$ 2 = $\boxed{6}$ ). Ahora la que sigue, son 4 paquetes con 4 chocolates, pero ahí...ya está el signo, ¿entonces qué es lo que nos hace falta aquí? (escribe en pizarrón 4 X $\boxed{\phantom{0}}$ = $\boxed{\phantom{0}}$).
**As:** ¡El 4¡
**M:** ¿Y ese 4 de dónde lo sacaron?
**As:** De los chocolates.
**M:** Ah, de los chocolates. (Escribe el 4, queda: 4 X $\boxed{4}$ = $\boxed{\phantom{0}}$ ). Aquí ya está el 4 ¿qué nos falta?
**As:** El resultado.
**M:** ¿Cuánto será?
**As:** ¡8¡ (varios).
**M:** Cuatro por cuatro, no nos va a dar 8, porque no estamos sumando. ¿4 x 4 cuánto será entonces?
Ax: ¡16¡
M: ¡16¡ (escribe resultado: 4 X $\boxed{4}$ = $\boxed{16}$ ).

Esta lección retoma el contexto de las Lecciones 51, *La empacador;* y 74, *La cooperativa escolar*. Ambas lecciones son actividades incluidas en el libro de texto, los alumnos trabajan en el contexto de formación de paquetes de dulces (chocolates, chiclosos), con una cantidad constante de dulces por paquete y el total de dulces que se tienen. El manejo de las variables didácticas a estos problemas (en particular el de lugar de la incógnita) permite plantear situaciones no sólo de multiplicación en el sentido de suma iterada, sino problemas de división por reparto y de agrupamiento o tasativo.

Ahora bien, el significado de los términos de la multiplicación en el contexto de los dulces es el siguiente: 4 x 3 = 12 representa 4 paquetes de 3 chocolates cada uno y tenemos 12 chocolates en total. Se mantiene el número de chocolates en cada paquete (3) y va cambiando el número de paquetes Por otra parte, esta misma escritura en el sentido exclusivamente numérico que trabaja Estela tendríamos que significaría: 4 veces 3 igual a 12. Es por esta razón que Estela en ningún momento en el transcurso de la actividad entra en conflicto, el significado personal que asigna a los factores de la multiplicación y el que le es dado en la lección en cuestión, de hecho no se percata que la "tabla del tres" con la que los niños están trabajando es la que se muestra a la izquierda y no la que reconoce como la "tabla del tres" (la de la derecha).

| | |
|---|---|
| 1 x 3 = 3 | 3 x 1 = 3 |
| 2 x 3 = 6 | 3 x 2 = 6 |
| 3 x 3 = 9 | 3 x 3 = 9 |
| (...) | (...) |
| 10 x 3 = 30 | 3 x 10 = 30 |





Pareciera que esta yuxtaposición entre ambos tipos de significados, en tanto no se enfrenta uno a otro, tiene su origen en el hecho de que los ejemplos que se abordan en la lección permiten escribir multiplicaciones salteadas, esto es, remiten a distintas escrituras como 4 x 3; 5 x 3; 6 x 3 ; 7 x 3; en otro momento refieren a 3 x 5; 2 x 5; 8 x 5; 1 x 5, y no a una sistematización que mostrara por ejemplo 1 x 3= ; 2 x 3 = ; 3 x 3 = ; 4 x 3 = ) de tal manera que la profesora se percatara que el primer factor cambia y el segundo factor es constante y que hay algo que no coincide entre su concepción y la que maneja el libro. Aun así esta situación fortuita, ayuda a que la maestra "respete" el sentido matemático original del operador función al implementar la actividad.

| Paquetes | Chocolates |
|---|---|
| 1 | 3 |
| 2 | 6 |
| 3 | 9 |

3 chocolates/ paquetes

Los niños tienen ante sí una actividad de aprendizaje que les ayuda a construir el significado del operador función a nivel de teorema en acto, y de esta manera se enriquece su concepto acerca de la multiplicación, no obstante las ideas que sobre la multiplicación tiene la maestra.

En la siguiente transcripción de la Lección 81, *El Cuadro de Multiplicaciones* se muestra que aun y cuando se trabajan escrituras de multiplicaciones similares a las tablas de multiplicar pero con la gran diferencia que siguen en el contexto de paquetes de dulces. Se presentan las siguientes multiplicaciones para ser resueltas por los niños, los resultados van apareciendo en el renglón del 3 del Cuadro de Multiplicaciones, porque la constante en este caso es el número de paquetes (y no el número de chocolates en cada paquete[18]).

| | | |
|---|---|---|
| 3 paquetes | 6 chocolates | 3 X 6 = □ |
| 3 paquetes | 7 chocolates | 3 X 7 = □ |
| 3 paquetes | 2 chocolates | 3 X 2 = □ |
| 3 paquetes | 4 chocolates | 3 X 4 = □ |

Estela se mantiene sin conflicto y nuevamente respeta el sentido didáctico y matemático de la lección.

**M:** ¿Cuánto van a poner? 3 paquetes con 6 chocolates. Esa es la primera que tienen ahí. Que sería 3 x 6 es igual a y en el cuadrito ponen el resultado.
**As:** (Empiezan a acomodar su señalador). Nota: el señalador es una es una "L" de papel que permite encontrar en el Cuadro de Multiplicar, por ejemplo: si un niño busca el resultado de 3 paquetes con 4 chocolates cada uno (3 X 4) ubica una de las líneas de la "L" en el lugar donde están los 3 paquetes (un renglón de la retícula cuadrada –del Cuadro de Multiplicaciones-) y desliza su "L" sin perder el renglón hasta encontrar el número de chocolates que tiene el paquete (columnas de la retícula cuadrada) en el cuadrito donde se forma el ángulo recto de la "L" se debe anota el resultado (12).
**M:** 3 veces 6, 3 por 6.
**As:** ¡18¡
**M:** Ahí en su tabla van a anotar el resultado. Ahí anótenlo en la tabla.
**Ax:** Maestra ¿es 3 x 6?
**M:** ¿Sí es 3 x 6?
**Ax:** ¡Hay está¡ (dirigiéndose a un compañero para indicarle que él tenía la razón).
**M:** (Empieza a revisar y ayudar a los niños). Son 3 x 6, son 3 paquetes con 6 chocolates.
**As:** (Los niños anotan el resultado 18 en libro de texto y en el cuadro de multiplicaciones).
**M:** A ver el siguiente es 3 x 7. Acuérdense que los paquetes son estos de color café y los chocolates de color rosa. De un lado nos están indicando los paquetes y del otro los chocolates. Y me anotan ahí el resultado ¿eh? (en el libro) y también en el cuadro.
**Gustavo:** ¡21¡ ¡21 maestra¡
Ax: Maestra ¿en qué número?
**M:** En 3 y en 7. A ver de este lado son 3, son 3 paquetes (señala en cuadro) y de este lado son ¿6?, no 7. Fíjense bien para colocar la figura (señalador) Son 3 paquetes y de este lado so...?
**As:** ¡7¡
**M:** ¡7¡ (coloca señalador en cuadro pegado en pizarrón en 3 x 7). Y es cuando multiplicamos 3 x7...? (señala en cuadro los números y el signo).
**As:** ¡21¡
**M:** Aquí en el cuadrito donde se juntan las dos partes del señalador, es donde van a poner el resultado (escribe 21 en cuadro). ¿Ya?
**As:** ¡Ya¡
**M:** Fíjense bien al poner su figura (señalador) ¿eh? fíjense bien. ¿Pasamos al que sigue?
**As:** ¡Sí¡ (Dos niños contestan, el resto escribe número en cuadro y en libro).
**M:** A ver, el que sigue dice: 3 paquetes y 2 chocolates.

[18] Trabajar en el Cuadro de Multiplicaciones manteniendo constante una columna, propicia manejarse con la iteración de conjuntos equipotentes.







**Ax:** ¡6 maestra¡ (grita resultado).
**M:** Son 6 paquetes y 2 chocolates.
**Maribel:** ¡Son 6¡
**M:** 3 x 2 ¿Cuánto es?
**As:** ¡6¡ ¡6¡ (gritan varios el resultado).
**M:** ¡6¡ Mira Julio cómo se coloca el señalador (coloca el señalador en 3 x 2 en cuadro pegado en pizarrón, pero no escribe el número 12).
**As:** (Escriben el número 12 en su cuadro y libro).
**M:** A ver el que sigue, 3 x 4 (3 paquetes con 4 chocolates).
**As:** ¡12¡ (a coro).
**M:** Lo pones en el 3 y lo recorres hasta el 4 (enseña a un niño a colocar el señalador. Luego recorre algunas bancas revisando a sus alumnos).
**As:** (Al parecer hay muchos niños para entender el uso del señalador, de ahí que M explique individualmente. Algunos niños se acercan a Obs. a enseñar sus multiplicaciones y pedir que se les indique si están bien. M sale por un momento del salón).
**M:** A ver, vamos con la que sigue, sigue 3 paquetes más 1 chocolate.
**Ax:** 3 x 1 ¡3¡ (grita el resultado):

Recién se señalaba que el diseño de esta lección en la que se trabaja una representación simbólica de una tabla equivalente a la que Estela reconoce por ejemplo como "la tabla del 3" ofrece una oportunidad para evidenciar y confirmar que Estela en ningún momento observa que 3 x 6, 3 x 7, 3 x 2, 3 x 4 y otras multiplicaciones más que tienen como primer factor el 3, representan algo totalmente distinto al sentido que ella daría a la "tabla del 3" en la que el significante prevalece sobre el significado. Para fortuna de la propuesta didáctica en este momento en particular, la maestra es atrapada (en el sentido positivo del término) por el diseño didáctico. Este respeto al diseño didáctico, por las razones antes aludidas, y algunas situaciones estratégicas generadas por los alumnos, serán las responsables que ellos avancen en su conocimiento matemático. Y la docente, en lo que resta de la experiencia trabaje prioritariamente el significado del operador función de la propuesta. La maestra se "subordina inconscientemente" a la propuesta, pero esto ¿en que medida se replicará en otros maestros? En todo caso, se debe aspirar a que los maestros concientemente se adhieran a la propuesta oficial en la medida que reconocieran la importancia de trabajar con el operador escalar y con el operador función.

**Otros espacios de la secuencia didáctica permeados por las tablas de multiplicar.** Sin pretender agotar, sino más bien ejemplificar, existen otras situaciones de aprendizaje donde la presencia de las tablas (de manera oculta) parecen llevar a la profesora a tomar ciertas decisiones importantes en el desarrollo de las mismas. Tomemos como ejemplo la Lección 24, *La papa caliente*.

A grandes rasgos se sugiere que la actividad se realice de la siguiente manera:

- El grupo sale al patio. Se organizan equipo de 10 integrantes. El maestro rellena una bolsita de plástico de arena o semillas. Esta bolsa es la papa caliente.
- Cada equipo forma un círculo.
- Un alumno inicia el juego diciendo el número que le diga su maestro, por ejemplo 2, a la vez que avienta la papa caliente a otro compañero.
- El niño que recibe la papa aumenta 2 al número que dijo su compañero y dice 4; avienta la papa a otro niño y el que recibe dice 6. Así hasta llegar al 50.
- Después pueden iniciar la serie otra vez, con una cantidad diferente por ejemplo de 5 en 5, 4 en 4, 3 en 3, etc.
- Si algún niño se equivoca o deja caer la papa caliente deja una prenda y sigue jugando.
- Al finalizar el juego, los niños que hayan dejado alguna prenda bailan o cantan.

Lo que sigue es parte de la transcripción del desarrollo de la actividad: Los niños han salido al patio, ya han formado equipos y se encuentran sentado formando un círculo entre todos.

**M:** Ahora pónganme atención (dirigiéndose al equipo 1), les voy a explicar cómo es la actividad ¿sí? Vamos a jugar a la papa caliente, está pelota es la papa caliente. Se la voy a dar a Leslie, ella la va a aventar al compañero que quiera, pero al hacerlo dice el número 2 y el niño que atrape la pelota dice el número 4, y así se siguen hasta llegar al 20. Después vuelven a empezar con el 2. A ver vamos a hacer una prueba a ver si ya me entendieron. ¿Sí?
**As:** ¡Sí¡
**Leslie:** (Lanza la pelota) ¡2¡
**A1:** (Atrapa la pelota y se queda pensativo).
**M:** Tienes que decir 4.
**A1:** ¡4¡
**M:** Ahora avienta la pelota.
**A1:** (lanza la pelota a A2).
**A2:** ¡6¡
**A2:** (Lanza pelota).
**A3:** ¡8¡
**M:** No se tarden en tirar la pelota.
**A3:** (Lanza la pelota)
**A4:** ¡10¡
**A4:** (Lanza la pelota).
**A5:** ¡11¡
**M:** El que no sepa el número correcto pierde y se sale del juego. También pierde el que no atrape la pelota así que abusados.
**As:** (Corrigen a su compañero) ¡Es 12¡
**A5:** (Lanza la pelota).
**A6:** ¡14¡
**A6:** (Lanza la pelota).
**A7:** ¡16¡





**A7:** (Lanza la pelota).
**A8:** ¡18¡ (lleva conteo con sus dedos).
**A8:** (Lanza la pelota).
**A9:** ¡20¡

Existen dos aspectos que es importante resaltar: en primer lugar, la maestra altera la sugerencia original de iterar más allá de 10 veces. Suponemos que Estela lo hace, porque tiene en mente las tablas de multiplicar cuando realiza la actividad de la papa caliente, ya que habitualmente pide que las series se construyan 10 veces el primer número dado, por eso reajusta la consigna original que sugiere que las series por ejemplo, la del 2, terminen en 50 (la serie del 2 la detiene en el 20, la del 3 en 30, etcétera). Es cierto que también es difícil que ella se dé cuenta por qué las series deben ir más allá de 10 veces el número inicial. La intención didáctica es precisamente mostrar que en la vida cotidiana y en la matemática las series se pueden construir más de 10 veces el primer número; o bien, que al hacer divisiones el divisor puede caber más de 10 veces en el dividendo, aunado a que la actividad también se correlaciona con el desarrollo del cálculo mental. Pareciera que Estela adjudica importancia a la construcción de series en la medida de correlacionarlos con los cálculos que subyacen en el producto de dígitos y con ello, bloquea el potencial didáctico de la construcción de series. O bien, el asunto de las tablas de multiplicar, está pensado exclusivamente en su aplicación posterior al algoritmo de multiplicación de polidígitos y a una parte del algoritmo de la división.

En segundo lugar, Estela al modificar las reglas del juego respecto a que el niño que no conteste correctamente o deje caer la papa, debe continuar el juego. Ella dice: "el que no sepa el número correcto pierde y se sale del juego, también pierde el que no atrape la pelota, así que abusados". Con esta actitud esta limitando las posibilidades de aprendizaje justamente de los niños que más lo requieren.

*La iteración de conjuntos equipotentes: ancla del aprendizaje inicial de la multiplicación.* La construcción del concepto de la multiplicación inicia con la posibilidad por parte de los niños de iterar una unidad de medida, así por ejemplo cuando ellos comienzan a contar de dos en dos, tres en tres, cuatro en cuatro, etc., una cierta cantidad de veces inician el proceso de redefinición de la unidad, representada por un conjunto equipotente, por ejemplo sumar 4 veces 3. En este sentido la construcción de series numéricas es un eje de la propuesta. El operador escalar se funcionaliza en las situaciones de aprendizaje de este tipo.

A diferencia de las situaciones donde se trabaja con el operador función donde siempre está presente el contexto, el diseño didáctico con el operador escalar trabaja exclusivamente a nivel numérico, reflexionando sobre las relaciones entre los números al construirse las series. Algunos ejemplos de estas situaciones didácticas aparecen en el libro de texto: Lección 24, *La papa caliente*; Lección 57, *Completa las series*; Lección 72 *Cuenta y cuenta*; Lección 85, *Brinca la tablita*; Lección 86, *¿Quién encuentra el resultado?*.

¿Cómo Estela trabajó didácticamente estas situaciones de aprendizaje? Recordemos que en la enseñanza de las tablas de multiplicar, Estela no logró que sus alumnos reflexionaran sobre la iteración de un conjunto equipotente. Dado que el desempeño didáctico de la maestra fue más o menos constante con la construcción de la series, sólo se analiza a manera de ejemplo una lección.

(Fragmento de la transcripción de la lección 57 Completa la serie)

**M:** Saquen su libro de matemáticas, en la página número 88.
**As:** (Sacan libro y buscan la página indicada).
**M:** La lección dice así: Completa las series. Observen el dibujo de los triciclos y vamos a resolver las siguientes preguntas. Dice ¿Cuántos triciclos hay?
**As:** (Cuentan en silencio) ¡12¡ ¡12¡ (gritan el resultado casi al mismo tiempo).
**M:** Anotamos el resultado
**As:** ¿Arriba? (en la parte superior de la hoja).
**M:** Ahí en la rayita. Vayan leyendo las preguntas ¿sí, Iván?
**Iván:** ¡Sí¡
**M:** A ver Marlem la pregunta que sigue.
**Marlem:** (Lee en voz baja, el grupo apenas alcanza a oírla).
**Ax:** ¿Cuántas llantas hay en total? (lee la pregunta ayudando a Marlem).
**M:** ¿Cuántas llantas hay en total?
**As:** ¡36¡ (respuesta inmediata, varios niños a la vez).
**M:** ¡36¡ Lo anotan. (Da un momento para que los niños escriban).
**M:** En el siguiente, tenemos una filita con unos cuadritos, hay algunos números que faltan y dice ahí: Cuenta de 3 en 3 y completa la serie. Anoten los números que faltan.
**As:** (Empiezan a llenar la serie).
**M:** (Recuerda a sus alumnos) Contando de 3 en 3 ¿eh? No hagan grandotes los números...¡Gustavo, no hagas grandotes los números¡
**Ax:** ¡Ya maestra¡
**Gustavo:** ¿Hasta el 30 maestra? (Lo pregunta ya que la serie tiene 12 cuadritos).
**As:** (El grupo se encuentra casi en silencio, la gran mayoría cuenta de 3 en 3 con sus dedos).
**Ax:** ¡Ya maestra¡
**M:** (Recorre las filas revisando) Si llegan al 30 y todavía tienen cuadritos, siguen contando de 3 en 3.
**Ay:** ¡Ya llegué al 30?
**M:** Sigue contando de 3 en 3 hasta llenar los cuadritos. (Da un momento más a los alumnos). ¿El siguiente?.
**As:** ¡Sí¡ (pocos responden).

Aquí hay dos hechos que resaltar, uno de ellos va dirigido a la profesora y otro al diseño didáctico de la lección:





- En cuanto a la profesora: primero pide a sus alumnos que le indiquen la cantidad de triciclos y la escriban (12). Luego para contestar la cantidad total de llantas que tienen los triciclos, prácticamente todo el grupo cuenta de una en una las llantas hasta el 36, respuesta correcta que satisface a la maestra, como si se tratara de un ejercicio de conteo simple. Sin embargo para los propósitos del aprendizaje de la multiplicación esto no sirve, ella tendría que haber parado el conteo de sus alumnos y plantearles si podrían hacerlo de 3 en tres en tanto cada triciclo tiene tres ruedas. Se sabe que las decisiones que los maestros toman, tienen que ser rápidas y son situacionales (fenómeno denominado en la didáctica de la matemática como escogencia[19]). Sin embargo el caso es que la docente no propició la reflexión sobre la iteración de conjuntos equipotentes, tampoco lo hace para los otros dos ejercicios que completan la lección y lo hace con las lecciones siguientes (Lección 61, *El tapete de cuadros*; Lección 93, *Los hexágonos de triángulos*, etc.). Pareciera que la reedefinición de la unidad de la que ya se comentó, no es suficientemente explícita en el diseño didáctico, es decir, las tres ruedas del triciclo, las cuatro de los coches. La profesora no le da la importancia debida ha este hecho.

- Respecto al diseño didáctico de la lección, este pareciera remediar esta carencia de la profesora. Esto es, inmediatamente después que los alumnos contestan la pregunta del total de llantas, explícitamente el libro indica: "Cuenta de 3 en 3 y completa la serie" aparecen 12 cuadros dispuestos de manera horizontal, en los que ha manera de pista están escritos los números 9, 15 y 24 cada uno en su casilla correspondiente. Es entonces que la maestra retoma la intención didáctica de la lección, y pide expresamente conteos de 3 en 3; por su parte los alumnos dejan de contar de uno en uno y con ayuda de sus dedos cuentan de 3 en 3 y completan correctamente la serie hasta el 36. Es sin duda interesante el cambio en ambos actores propiciado sin duda por que el diseño didáctico transmite con claridad la tarea o problema a resolver. El comportamiento de maestra y alumnos se repite exactamente igual en los dos ejercicios restantes (la serie del 4 y del 5). En otras lecciones ocurre algo similar, cuando es explícito (porque está escrito en el libro) la docente pide y exige la iteración a sus alumnos, como con la Lección 68, *Las estampas*, donde los niños llenan una tabla donde se itera de 3 en 3. En este caso el diseño también transparenta la

[19] "Una escogencia didáctica es un decisión situacional que toma el profesor que motiva un cambio cognitivo en el estudiante, y que cambia "el sentido y función" del conocimiento" (Artigue, 1995, p. 54)

tarea a abordar para los alumnos y la enseñante, en tanto la información es organizada en tablas ayuda a que el propósito de la actividad se logre.

*¿Qué muestran los hechos recién analizados acerca del trabajo didáctico con la iteración de conjuntos equipotentes?*

- La profesora muestra carencias en su conocimiento matemático de la multiplicación, dado que espontáneamente nunca exige de sus alumnos la iteración de los conjuntos equipotentes; ellos más bien se mantienen en conteos de uno en uno. Esta situación quizás no sea nada nueva. Sin embargo, ¿dónde va a obtener la maestra la formación matemática necesaria que demanda el actual enfoque de enseñanza? Ya se ha comentado que por sí solos los materiales didácticos de los que se le dota, principalmente el libro del maestro no son suficientes para lograr este propósito. Habrá entonces que poner atención a la problemática de la capacitación y actualización de los profesores de primaria.

- El diseño didáctico de las situaciones de aprendizaje aludidas parecieran salvar en buena parte esta problemática, la tarea se vuelve clara para los alumnos y la profesora. Se cumple con el propósito de que los alumnos iteren n-veces un conjunto y encuentren regularidades en las series numéricas que construyen. La situación didáctica cumple así con el propósito de organizar la relación de la triada profesor alumno y saber matemático. Ocurre lo que señala Brousseau (2000, p. 21) "Una situación didáctica describe el entorno didáctico del alumnos, comprende todo aquello que concurre para enseñarle algo. En este sentido, comprende al profesor, tanto si éste se manifiesta durante el desarrollo de la situación, como si no".

La conclusión respecto al trabajo didáctico de la profesora sobre la enseñanza de las tablas de multiplicar, es que aun y cuando la enseñanza del operador escalar es el eje sobre el que está soportada su topogénesis del conocimiento multiplicativo, tampoco entra en conflicto con la enseñanza del operador función, eje de la topogénesis de la propuesta didáctica. Así entonces, actividades fundamentales sobre este último significado fueron respetadas en su intención didáctica, aunque quizás no suficientemente capitalizadas, en la medida en que Estela no fue consciente de lo que estaba sucediendo.





### 3.3.3. El desempeño didáctico de la profesora y el diseño didáctico de las situaciones de aprendizaje

> "...el maestro es una especie de actor. Actúa según un texto que ha sido escrito en otra parte y según una tradición. Podemos imaginarlo como un actor de la *Comedia del Arte*. Inventa su juego en el momento en función de una trama. ...el actor se convertiría en un actor cuyo "texto" sería la situación didáctica por conducir (evidentemente, no el texto en sentido estricto)"
>
> Guy Brousseau

Lo que ahora se analiza son algunos indicios de una correlación (que habría que confirmar con un estudio más a profundidad) entre las transposiciones de la profesora y las características de diseño didáctico de las situaciones de aprendizaje. En otras palabras, se tiene la hipótesis que el desempeño de la profesora cambia sustancialmente o muestra contrastes significativos cuando enfrenta dos diseños didácticos diferentes y, por lo tanto las transposiciones didácticas en un caso se alejan y en otro caso son más cercanas (concepto de distancia de Chevallard) al sentido didáctico plasmado en las situaciones de aprendizaje de la propuesta nacional.

- El primero de ellos, es el diseño que se hace pensando en el alumno y refiere a las situaciones de aprendizaje del libro de texto gratuito. En ellas el alumno es quien asume la responsabilidad de resolver las situaciones problemáticas más en el nivel individual, sin mucho apoyo por parte de su profesor. La comprensión lectora, y el análisis de ilustraciones son básicas para resolver las situaciones planteadas en las lecciones. La riqueza de las lecciones es que en ellas generalmente (aunque no únicamente) se institucionalizan conocimientos y por esta razón los alumnos tienen la oportunidad de reflexionar sobre el lenguaje matemático, en ocasiones, encuentran relaciones numéricas sin la mediación de un contexto, trabajan así la matemática como objeto.

- El segundo tipo de diseño corresponde a las actividades del fichero y del libro de texto[20]. Dichas actividades involucran el de uso materiales concretos; la organización presenta varias opciones: trabajo en pareja, equipo o grupal; y requiere de la interacción entre los niños para resolver, dialogar, confrontar y validar los resultados obtenidos (uso de

[20] En el capítulo 1 se explicó porque el libro de texto del alumno contiene simultáneamente tanto lecciones como actividades.

la matemática como herramienta). El control y desarrollo de estas situaciones de aprendizaje queda en la responsabilidad y sabiduría del profesor. La riqueza de las actividades radica en el hecho de introducir nuevos aprendizajes hasta su institucionalización, en tanto las lecciones (una parte de ellas) van a la zaga y complementan el trabajo didáctico de las actividades, porque ayudan a reafirmar o consolidar el aprendizaje iniciado en las primeras. En el siguiente punto se analiza el desempeño didáctico de Estela en las actividades y lecciones.

### 3.3.3.1 Desempeño didáctico de la profesora al trabajar actividades[21] del fichero y del libro de texto.

Para proceder al análisis conviene retomar la tabla (expuesta en el Capítulo I), ya que es de utilidad al permitir recordar la cantidad de actividades y lecciones aplicadas en el transcurso de la experiencia didáctica, y de esta manera tener una idea de cómo se planeó, distribuyó e implementó el trabajo didáctico.

La distribución de actividades y lecciones obedeció más a la lógica de provocar aprendizajes en los alumnos en tiempos didácticos un tanto apresurados porque esta experiencia no se realizó durante todo el ciclo escolar, ni agotó la secuencia de los problemas multiplicativos. Había un doble interés: que los alumnos aprendieran y a la vez se pudiera estudiar el desempeño didáctico de la profesora.

**TABLA DE TOTALES DE ACTIVIDADES Y LECCIONES DE LA SECUENCIA DE LOS PROBLEMAS MULTIPLICATIVOS DE SEGUNDO GRADO DE PRIMARIA APLICADOS EN EL TRABAJO DE CAMPO[22].**

| ACTIVIDADES | | LECCIONES | ACTIVIDADES EXTRA (no forman parte de secuencia). | |
|---|---|---|---|---|
| Fichero | Libro de texto | Libro de texto | Sugerida por el observador | Decisión de la profesora |
| 5 | 10 | | 1 | 1 |
| 15 | | 14 | 2 | |
| 29 | | | 2 | |
| Total de situaciones de aprendizaje trabajadas en el aula: 31 | | | | |

[21] De las actividades del libro de texto algunas su diseño es prácticamente igual a las del fichero. mientras que (otras que son la mayoría) su diseño es una combinación de una actividad del fichero y de lección. De la primera porque se usan materiales y de la segunda porque las consignas vienen escritas. y la información viene ya organizada pensando en los alumnos. porque ellos lo van a resolver con una cierta ayuda de su profesor. Se ha decidido incorporar estas actividades con el análisis de las lecciones. porque comparten la característica de ser un diseño más pensado para los alumnos. Por el contrario en las actividades del fichero el maestro tiene que organizar todo el desarrollo de la actividad: materiales. organización de la clase. consignas. etc.

[22] En el anexo No. 1 se encuentra un inventario detallado de la secuencia de los problemas multiplicativos. de las fechas en que fueron aplicadas las actividades y lecciones. así como de las entrevistas sostenidas con Estela y el total de registros del trabajo de campo.





Las dos primeras columnas de la izquierda, está prácticamente balanceado el trabajo con actividades (15) y lecciones (14), lo cual resulta conveniente para el análisis.

Para evidenciar la actuación de la profesora, es necesario tener como referente el guión que va a actuar, es decir la situación didáctica que se le ha pedido leer y preparar. Dado que sería muy complicado y largo escribir cada una de las situaciones didácticas del fichero así como la respectiva transcripción de su desarrollo en el aula, el análisis se limita a destacar algunas de las transposiciones que se han considerado más relevantes de la secuencia de las actividades del fichero.

Se ha seleccionado la Ficha 39, "El boliche" por ser la actividad que mayor número de transposiciones presentó. A continuación se describe a grandes rasgos la actividad como es sugerida desde el fichero, para luego analizar partes de la transcripción.

Propósito de la actividad: que los alumnos desarrollen la habilidad para calcular mentalmente resultados de sumas y restas con números hasta 100 y resultados de problemas que implican a la multiplicación, mediante la suma de sumandos iguales.

Materiales para cada equipo: una calculadora, 10 envases desechables pequeños, papel periódico, cinta adhesiva y una pelota mediana.

Desarrollo de la actividad: se sugiere organizar el grupo en equipos. El maestro debe asignar valores a los bolos según el propósito que persiga: si trabaja la multiplicación mediante la suma iterada entonces escribirá el mismo valor a los bolos; y si trabaja la suma pondrá valores diferentes. El grupo sale al patio a realizar la actividad. Se pide que el acomodo de los bolos sea a manera de triángulo como se indica en el dibujo para que puedan tirarse la mayor cantidad con cada tirada. Pintan una raya de tiro a 3 metros, hacen rodar la pelota para hacer tirar los bolos. Cada alumno después de tirar los bolos dice en voz alta las cantidades que tiene que sumar y calcula mentalmente el total de puntos. Un compañero del equipo verifica su resultado con la calculadora. Si el resultado es correcto se anota en una tabla donde tiene que escribir su nombre y el registro para tres tiradas y una cuarta columna para escribir el total de puntos. Este último también verificado con calculadora. En la parte final de la actividad el maestro utiliza la información de la tabla para plantear problemas que impliquen la resta, como por ejemplo: ¿Cuántos puntos le faltaron a Diana para tener los mismos que Javier?

Las decisiones tomadas por la docente al implementar la actividad fueron:

- En relación al material hubo un exceso de material, cada alumno llevó un juego de boliche. Por otra parte no se pidió calculadora, en su lugar los niños sacan su cuaderno de matemáticas para hacer en él las anotaciones y cálculos.

- La organización no es en equipos sino grupal, además decide realizar la actividad dentro del salón y no en el patio.

- Desarrollo de la actividad. La maestra decide asignar valores a los bolos para trabajar la suma y no la multiplicación, decisión exclusivamente tomada por ella. El observador suponía que realizaría la versión sobre la multiplicación, se sobreentendía que la experiencia didáctica era precisamente sobre la enseñanza de los problemas multiplicativos.

- Como los bolos no tienen valores escritos, pasa alumno por alumno y fila por fila escribiendo los números de cada bolo, piénsese la cantidad de bolos que marca si cada alumno tiene 10 bolos y son 35 alumnos en total. También hay una salida que dura algunos minutos para ir a contestar el teléfono. Los preparativos de la actividad agotan la mayor parte del tiempo de esta sesión de trabajo.

- La consigna que dio la maestra fue: "Fíjense lo que van a hacer. El número que tienen ahí, el número que les escribí ahí (en los bolos), son los puntos que van a ir ganando, los resultados los van a ir anotando en su cuaderno de matemáticas. Va a pasar aquí al frente un niño para que vean cómo lo va a hacer". La organización propuesta es grupal pero los alumnos pasan uno por uno, lo que ocasiona que se consuma mucho tiempo. Al principio pasa uno a uno a los alumnos: cada quien usa sus propios bolos, toma su tiempo para acomodarlos, avienta la pelota, anota en su cuaderno las cantidad que va a sumar, recoja sus bolos, va a su lugar escribe la cuenta como le indicó su maestra para calcular el total de puntos. Al sentir la presión de sus alumnos por participar decide abrir dos espacios más para que los niños tiren sus bolos y que los bolos con los que se juegue siempre sean los mimos.

Hay que señalar que el acomodo de los bolos que hacen los niños durante toda la actividad no es en forma triangular, sino en línea horizontal y espaciados, lo cual ocasiona que se tiren uno o dos bolos, o incluso ninguno. La maestra no rectifica este acomodo. Llama la atención que estas cuestiones de sentido común pasen por alto y a la vez afecten tanto los propósitos de la actividad. El trabajo matemático queda prácticamente nulificado: al no tirar





bolos no hay puntos que sumar, parafraseando a Brousseau cuando señalaba los aspectos débiles del modelo de enseñanza de la escuela activa, decía los alumnos eran activos, pero matemáticamente poco activos. En este caso ocurre una cuestión similar.

- Los alumnos estuvieron siempre con mucho interés, levantaban la mano desde sus lugares, algunos levantaban la voz para llamar la atención de su maestra para que les diera turno para pasar. Los niños querían levantarse de sus lugares y estar cerca de los compañeros que tiraban la pelota, situación que no permitió la profesora, incluso pareciera que el "desorden" la rebasaba. El tiempo de clase se agotó y no todos pudieron pasar, la actividad tampoco volvió a repetirse.

Se observa que el desarrollo de la actividad fue muy accidentado, y su transposición didáctica se aleja del guión didáctico original. La organización no fue adecuada, no dosificó el exceso de material, no eligió valores para trabajar la multiplicación, los alumnos no tiran los bolos por su inadecuado acomodo, no hay reto intelectual de la situación, no hay trabajo matemático, no todos los alumnos pasan, etcétera. Cuando se piensa sobre las razones por las cuales Estela realiza tal cantidad de transposiciones que la alejan del guión original se pudiera aventurar dos; aunque es más sostenible la segunda, con base en que el análisis de la actividad de los bolos, no revela complicaciones conceptuales, susceptibles de considerarse alejadas de las posibilidades de los maestros.

- Inexperiencia para controlar un tipo de trabajo didáctico totalmente distinto al estilo de la docente. Siendo la primera vez que trabajaba con los nuevos materiales de segundo grado, es también la primera vez que trabajaba las actividades del fichero.

- Falta de tiempo para estudiar la actividad, pensar cómo la realizaría en su conjunto, y anticipar algunas situaciones como el manejo del material, la organización más pertinente, de tal manera que ya haya tomado algunas decisiones didácticas previas al trabajo pedagógico del aula.

No todas las actividades muestran tal cantidad de transposiciones, pero si comparten dos que trastocan su sentido y propósitos. Las siguientes actividades son una muestra de ello: Ficha 22, versión 2, *De 2 en 2*; Lección 24, *La papa caliente*; Ficha 28 (4° problema) *Patas y gallinas*; Lección 58 *Los puestos de fruta*; Ficha 47, versión 1, *Cinco en cada caja* y Lección 117, *Submarinos*.

- La simplificación de la actividad lleva a la pérdida del reto intelectual para los alumnos, por ejemplo, en la Lección 117 *Los submarinos*, la profesora no entiende la intención didáctica y da una consigna donde permite que sus alumnos vean los tableros, cuando la intención es contraria, es decir, ellos con el tablero oculto tendrían que encontrar las posibles expresiones multiplicativas que dieran el mismo resultado, cuando un jugador contrario les indicaba que su submarino se encontraba por ejemplo, en el número 32. Si los jugadores ven entre sí los tableros el propósito no se cumple.

- Otra situación que frecuentemente se encontró y que minimiza el reto que la actividad debería propiciar en los alumnos, tiene que ver con la elección de la variante que se va a trabajar. Así entonces era importante tener una memoria didáctica de aquellos conocimientos de los niños ya superados y los que les faltan por adquirir. Desde el trabajo con la Lección 24, *La papa caliente* los alumnos dieron muestras que en su mayoría podían acceder con facilidad a la serie de 2 en 2, y 5 en 5, pero si con cierta dificultad con la serie del 3. Más adelante con la Ficha 22, versión 2, *De 2 en 2*; se vuelve a proponer el trabajo con las series de 2 en 2, 3 en 3, 4 en 4, y 5 en 5, la profesora a pesar de tener el material necesario parece conformarse y darse por satisfecha con el trabajo con la serie del 2, misma que los alumnos ya dominaban.

- La falta de recursos didácticos para organizar la confrontación de procedimientos entre los alumnos, limitaciones para interpretar sus respuestas y para reencausar los procedimientos incorrectos para devolverlos nuevamente a los alumnos, o bien hacer evolucionar los procedimientos correctos pero no convencionales. Un ejemplo muy claro de esta situación es lo que le ocurre a Estela cuando trabaja la Ficha 28 (4° problema), *Patas y gallinas*. Ante el problema: *"Oscar colocará los cristales de 8 ventanas. Cada ventana lleva 4 cristales. ¿Cuántos cristales necesita comprar?* Los alumnos antes de resolverlo comentan entre ellos que tienen que sumar. La profesora los escucha y les hace un par de preguntas: ¿Qué van a sumar? ¿Cómo lo van a sumar? Los niños no pueden contestar y se apenan ante su maestra. Ella muestra cierta molestia ante esta situación. Luego les pide que hagan la cuenta y la gran mayoría escribe $8 + 4 = 12$. Sólo un alumno dice a los demás que son más cristales sin precisar la cantidad, pero no se le da la oportunidad de comentar a sus compañeros por qué piensa eso. Ante la respuesta mayoritaria de $8 + 4 = 12$ la profesora no pregunta por qué sumaron $8 + 4$, quizás dudó que alguien contestara porque sabe que sus





alumnos no están acostumbrados a una dinámica de diálogo respecto a las respuestas correctas o incorrectas cuando resuelven problemas. La profesora ante el error lee en voz alta y de manera pausada el problema, seguramente pensando que esto ayude a los niños a percibir la relación entre los datos. Al terminar pregunta nuevamente y los niños insisten en su respuesta inicial 12 cristales. Ante la persistencia del error, ella decide entonces enseñar el procedimiento. En resumen, da una oportunidad a sus alumnos de corregir, pero el recurso se limita a una lectura pausada y en voz alta, y ante el nuevo fracaso, pasa a su papel de enseñante.

El manejo didáctico del error; es decir, armar un nuevo escenario didáctico que permita a los niños dialogar con su profesor sin sentir pena o temor, y a la vez tener una idea de la lógica o sentido del error y cómo sacarle provecho para que los niños aprendan, es sin duda alguna esencial para que la transposición didáctica de la propuesta sea cercana a su intención y diseño original.

#### 3.3.3.2. Desempeño didáctico de la profesora al trabajar las lecciones y actividades del libro de texto.

Por lo que toca al trabajo didáctico de la docente con lecciones y actividades del libro de texto. Se dará preferencia al análisis de éstas últimas, ya que anteriormente cuando se aludía el trabajo didáctico de la profesora con los conjuntos equipotentes, se hizo referencia al hecho de que el diseño didáctico de las lecciones destinado a los alumnos, ayudaba a la profesora a dirigir su actuación didáctica apegado al guión didáctico, esto es respetaba al planteamiento didáctico de la lección como aparece en el libro, lo cual favorecía que los alumnos accedieran a la reflexión del contenido matemático que la situación funcionalizaba. Si bien estas lecciones aludían básicamente al trabajo con la construcción de series, este mismo desempeño didáctico se presentaba para las lecciones donde se trabajaba el operador función.

Un ejemplo de actividad la Lección 51 *La empacadora* cuyos propósitos son:

- Introducción a la multiplicación mediante la construcción de un número determinado de agrupamientos de dos en dos, de tres en tres, etcétera, utilizando material concreto.

- Registro en tablas del resultado de diversos problemas de multiplicación y de reparto, utilizando material concreto para realizar los cálculos.

Los materiales que se utilizan son tapas de frascos y piedritas, que en el contexto de la empacadora representan los paquetes y los chocolates. Los niños resuelven con este material situaciones de multiplicación y de división con sus dos significados (reparto y tasativo) y registran en las tablas el resultado obtenido. A título de ejemplo tenemos:

- Toma unas piedritas que vas a usar como chocolates y 8 tapas de frascos para empacarlos.

- Haz paquetes con 3 chocolates cada uno y completa la tabla:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Número de paquetes | | | | |
| Número de chocolates | | | | |

- Completa la tabla[23]

| Número de paquetes | Número de chocolates por paquete | Total de chocolates |
|---|---|---|
| 2 | | 36 |
| | 12 | 36 |
| 4 | | 36 |

A continuación se analiza parte de la transcripción del trabajo didáctico de la docente con el llenado de las tablas de la Lección 51.

**M:** Ahora vamos a responder este cuadrito de su libro (página 79) El primer cuadrito de su libro ¿sí? Fíjense muy bien cómo lo van a hacer. Aquí arribita, en el primer cuadrito, dice: Número de paquetes: en el primer cuadrito tenemos...?
**As:** ¡4¡
**M:** ¡4 paquetes¡ 5, 6 y 7. Los de arriba son los paquetes o las cajitas. Y abajo, vamos a poner los chocolates que nos dice aquí, dice: Haz paquetes con 3 chocolates cada uno y completa la tabla ¿sí?
**As:** ¡Sí¡
(Nota: los ejercicios anteriores de las cajas y chocolates son un agregado de la maestra para hacer comprender la actividad)
(La tabla a la que hace referencia M. es: )

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Número de paquetes | 4 | 5 | 6 | 7 |
| Número de chocolates | | | | |

**M:** Me van a poner 4 paquetes o cajitas ahí en su mesa. Esos que tenían los vacían en la bolsita. Y me ponen en su mesa 4 cajitas.

[23] La tabla original es de 9 renglones solo ponemos las variantes que llevan a los alumnos a trabajar la multiplicación y los dos significados de la división: reparto y escalar.





**As:** (Obedecen la instrucción de M).
**M:** ¿Ya están las 4 cajitas?
**M:** Pónganme entonces ahí 4 cajitas.
**As:** (Ponen las 4 cajitas),
**M:** Ahora, dice ahí: Haz paquetes con 3. A estas 4 (cajas) ¿cuántos le van a poner?
**As:** ¡3¡
**M:** Pónganle a cada una tres.
**As:** ¡Ya¡
**M:** Ahora ¿Cuántos chocolates tienen?...¿Cuántos chocolates tienen?
**As:** (Se tardan en responder, pues tienen que contar). ¡12¡ ¡15¡ (después incrementan las respuestas con el 12).
**M:** ¡12¡ Anoten ahí (en tabla) su resultado...Aquí es donde les dije que se fijaran, Leslie.(señala la tabla en libro) Aquí dice: Número de paquetes. Ahorita estamos, en los 4 paquetes. Ahora nos dice ahí: ¿Cuántos chocolates son?
**As:** ¡12¡
**M:** ¡12¡ Anotan su resultado.
**Ax:** ¿Aquí abajo? (en segundo renglón).
**M:** ¡Sí¡ Ahora, no van a ser 4 sino 5 paquetes o 5 cajas.
**As:** (Ponen una tapa más con 3 chocolates).
**M:** Ahora ¿Cuántos chocolates tienen?
**Gerardo:** ¡15¡
**Maribel:** ¡16¡
**M:** ¡15¡ Anoten su resultado en el cuadrito que sigue.
**As:** (Anotan resultado en su tabla del libro).
**Ax:** ¿Aumentamos otra tapa maestra?
**M:** Lo vas a ir haciendo con el material de ella (organiza a Sandra y Gustavo). Tú también lo haces con las tapitas de ella (organiza otra pareja, donde Jorge no trajo material). Ustedes como no traen tapas, nada más van a hacer los montoncitos ¿sí?
**M:** Aquí sería un paquete (forma montoncito de 3). Aquí sería otro (formo otro montón), aquí sería otro y aquí otro (forma 4 montones en total). ¿Sí? Aquí tienes los 4 paquetes (para llenar el primer casillero en tabla). Aquí (señala en tabla 5 paquetes) vas a aumentar otro paquete ¿cuántos son aquí?
**Jorge:** ¡3¡
**M:** No, por todos ¿cuántos chocolates son?
**Jorge:** ¡5¡
**M:** No, los chocolates. Si son 5 paquetes, pero de chocolates ¿cuántos tienes?
**Jorge:** (Observa un momento las tapas) ¡15¡
**M:** ¡15¡ Entonces acuérdate, estos son los paquetitos (Deja a Jorge y atiende al grupo). Ahora aumenten un paquete...Aumenten un paquete más (hay necesidad de repetir la consigna porque algunos niños se han distraído mientras M trabajaba con Jorge y su pareja).
**M:** Ahora ya terminamos ese cuadrito (el de paquetes con 3 chocolates). Vamos con el de abajo (paquetes de 5 chocolates). Regresen sus frijolitos a la bolsa.
**Ax:** ¿todos?
**M:** Sí, todos.
**As:** (Devuelven frijoles a la bolsa).

Como se aprecia en el registro de la clase, la profesora inicia explicando para qué son los materiales que les pidió (tapas y frijoles). "Van a poner 4 paquetes o cajitas ahí en su mesa" (...) "Ahora dice ahí (en la tabla de doble entrada, que aparece en la lección, para hacer el registro de los resultados) haz paquetes con tres. A estas 4 (cajas) ¿cuántos (chocolates) le van a poner? Aos: ¡3!". Indica que van a imaginarse que van a empacar los chocolates, y en lo que parece ser un trabajo previo al llenado de las tablas, pide a sus alumnos poner cierta cantidad de cajas con 2 chocolates cada uno, y le indiquen el total de chocolates. Cambia sucesivamente la cantidad de cajas manteniendo constante la cantidad de 2 chocolates. Procede de igual manera para con cajas de 5 chocolates y 3 chocolates cada uno. Estela al observar que en ciertos momentos los alumnos entran en confusión entre el número de cajas y la cantidad de chocolates por caja, ella insiste en clarificarles que no confundan el número de cajas y la cantidad de chocolates que tiene cada caja.

Este trabajo previo aclara mucho a los niños el sentido del uso de las tapas y los frijoles en el contexto de la empacadora, no se presenta ningún problema de comprensión a la tarea. Hay mucho interés por la actividad, hay respeto hacia los materiales entre los niños, incluso lo comparten con su compañero de banca.

La profesora decide alargar este trabajo introductorio a la lección y organiza el trabajo en parejas (por banca). Pide a sus niños que cada uno de ellos ponga 5 paquetes con 3 chocolates cada uno, y calculen el total de chocolates. Una vez que lo saben, entonces un niño pasa a su pareja una tapa o paquete, quien tiene que calcular la nueva cantidad de chocolates. Finalmente el trabajo en pareja termina cuando reúnen sus paquetes y tiene que calcular el total de chocolates, cantidad que tiene que ser igual para todo el grupo. Este trabajo en pareja funcionó, y dio lugar diálogos entre los niños, la situación (más que la maestra) les devolvía el error, es decir, en el entendido de que tenían la misma cantidad de paquetes y de chocolates por paquete deberían tener la misma cantidad de chocolates, por lo que ante cualquier diferencia de cantidad, la pareja revisaba todo el proceso de conteo. La profesora prácticamente no intervenía en estas discusiones de pareja, aunque sí las escuchaba. Sí intervenía cuando consideraba que los niños tenían una confusión en la construcción de los paquetes (la cantidad de chocolates por paquete) y consideraba que era importante en ese momento aclarar la situación. En resumen, este agregado de la profesora a la actividad fue enriquecedor, porque sus decisiones se orientan en la misma dirección de la actividad y da oportunidad a los niños de construir y reflexionar sobre la multiplicación y el sentido de cada una de las cantidades implicadas (paquetes, cantidad de chocolates por paquete y cantidad total de chocolates). Es importante señalar que esta es la séptima sesión, y los niños parecen entender que hay una dinámica diferente, donde se le permite hablar y utilizar material. La percepción que se tiene de esta situación es que la clase fue agradable y productiva para la profesora y los alumnos. Estela no se mostró apresurada o ansiosa, por el contrario, se le veía serena, clara en sus consignas, recorría el salón preguntando y





ayudando a sus alumnos. Estos por su parte, durante todo el tiempo que duró la actividad permanecieron en sus lugares, y mantuvieron el interés en ella, el diálogo que se generó siempre versó sobre lo que se trabajaba. En otras palabras, Estela implícitamente está funcionando con un nuevo contrato didáctico, pues las reglas de interacción entre los actores de la tríada didáctica (maestro – alumnos – saber) han cambiado sustancialmente, si se le compara contra su modelo personal sostenido en una enseñanza normativa de la matemática y de su desempeño didáctico con las actividades del Fichero que le alejan mucho del guión original de la situación didáctica y por lo tanto distorsiona su sentido didáctico.

Otras actividades en las lecciones que presentan un trabajo didáctico parecido son: Lección 74, *La cooperativa escolar*; Lección 77, *Tonatiuh multiplica*; Lección 81, *El cuadro de Multiplicaciones*; Lección 85, *Brinca la tablita*; Lección 94, *Hunde el submarino*; Lección 95, *La mamá de Tonatiuh*; Lección 103, *Las tunas*; Lección 107, *Domingo, el albañil*.

¿A qué se debe este cambio significativo en el desempeño didáctico de la profesora?

Se tiene la hipótesis que este contraste en el desempeño didáctico anteriormente señalado entre las actividades del Fichero versus las actividades en las lecciones del libro de texto, se debe en buena parte a una variable fundamental: *el diseño de la situación didáctica*. Si en la implementación de las actividades del fichero la maestra se aleja y distorsiona el sentido didáctico de las mismas, es porque tiene ante sí un diseño abierto donde ella tiene que organizar prácticamente todo y donde su conocimiento y experiencia del actual enfoque de enseñanza es insuficiente, recuérdese que ella funciona con otro modelo de enseñanza. Por lo que toca al diseño didáctico de las lecciones y actividades inmersas en ellas, la transposición didáctica es cercana al guión didáctico e incluso lo enriquece, esto es posible gracias a que el guión es más cerrado, es decir: la información está organizada y escrita en un lenguaje accesible a los alumnos; puede dosificar la presentación de cada una de la situaciones que se presentan; se pide respuestas escritas, etcétera. En este sentido también hay que señalar el hecho de que las situaciones de aprendizaje del libro de texto recién referidas (Lecciones 51, 74, 77, 81, 85, 94, 95, 103, y 107) inician el camino hacia la institucionalización de la multiplicación. Esto es, el diseño más cerrado de las situaciones problemáticas, convergen con el momento en que los procedimientos informales de los alumnos son sujetados por el llenado de las tablas (principio de la institucionalización), entonces las características de las situaciones de enseñanza son más reconocidas desde el modelo didáctico personal de Estela, puede negociar con el e incluso algunas ideas para enriquecerlo, ya que precisamente lo que mejor sabe hacer Estela es institucionalizar el conocimiento. De tal suerte que es en las actividades y lecciones del libro de texto y no en las actividades del fichero, es donde los alumnos aprenderán el sentido y la institucionalización de la multiplicación. Parte de las prácticas docentes dominantes señalan que los maestros organizan su clase alrededor del libro de texto, la incorporación del Fichero pretende modificar ésta práctica, en todo caso hay que hacer un señalamiento respecto a lo que debe atender la capacitación del magisterio.

## APARTADO 3: EL APRENDIZAJE DE LOS ALUMNOS COMO REFERENTE DE LA TRANSPOSICIÓN DIDÁCTICA DE LA PROFESORA.

### 3.2.7. Conceptualizaciones y procedimientos de solución de los alumnos ante los problemas multiplicativos.

**Observador:** ¿Sí sientes que hubo avance en el grupo ?
**Maestra:** ¡Sí¡ Bastante...sí. Es más, yo pienso seguir así trabajando, pero con más repasos. Las numeraciones (series de números que se iteran), también ya me las manejan muy bien.
(fragmento de la entrevista final)

El presente trabajo si bien está centrado en el estudio de las transposiciones didácticas realizadas por una profesora, las respuestas y el aprendizaje de los niños son el referente[24] del impacto de éstas, esto es, las transposiciones realizadas por Estela inhiben o favorecen el cumplimiento de los propósitos de aprendizaje matemático comprometidos en el diseño didáctico. Recuérdese que el diseño de la secuencia de los problemas multiplicativos compromete que la situación de aprendizaje sea interesante y rete el intelecto del alumno, le permita utilizar los conocimientos disponibles en sus esquemas de conocimiento, y además

[24] Debe entonces quedar claro que no se pretende ser muy sistemáticos respecto al análisis de los procedimientos y conceptualizaciones de los alumnos, pero sí marcar los momentos más representativos que muestran un cambio conceptual importante en el proceso de adquisición de la multiplicación y la división.





permita una evolución de dichos conocimientos matemáticos espontáneos hasta acceder al conocimiento convencional.

A continuación expondremos a *grosso* modo las conceptualizaciones más significativas de los alumnos en función de los componentes conceptuales plasmados en la secuencia de los problemas multiplicativos.

3.4.1. Problemas de isomorfismo de medidas con el significado de la multiplicación como operador función, la representación convencional de la multiplicación y el uso del Cuadro de Multiplicaciones; así como la solución de situaciones que implican la división por reparto y tasativa.

3.4.2. La construcción de series numéricas (situaciones que implican el uso del operador escalar).

3.4.3 Los arreglos rectangulares (preparación del trabajo algorítmico de la multiplicación de bidígitos para el tercer grado).

### 3.4.1 Problemas de estructura isomórfica que implican el operador función

Los datos analizados muestran cuatro procedimientos que es posible ordenar como acercamientos progresivos, cada uno de ellos de mayor complejidad relacional en la solución de los problemas que implican el uso de la operación de la multiplicación.

*a) Suma de datos*

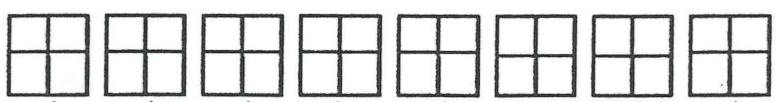
En los inicios del año escolar y ante los primeros problemas de la secuencia, la mayoría de los alumnos del grupo resuelve incorrectamente: el procedimiento utilizado es la suma de los datos del problema. Así por ejemplo, de la Ficha 28 *Patas y Gallinas* la maestra escribe en el pizarrón el siguiente problema: Oscar colocará los cristales de 8 ventanas. Cada ventana lleva 4 cristales ¿Cuántos cristales necesita comprar? Después de terminar de escribir el problema en sus cuadernos, los niños empiezan a hablar entre sí que van a sumar.

**Maribel:** Maestra ¿Lo sumamos?
**M:** ¿Qué van a sumar?...¿Cómo lo van a sumar? A ver. ¿Que vas a sumar? (a Jorge).
**Jorge:** Los cristales.
**M:** ¿Cuántos cristales?

**Jorge:** (Guarda silencio).
**M:** A ver pasa y ponme la suma en el pizarrón.
**Jorge:** (Se niega a pasar al pizarrón. Baja la cabeza, se muestra apenado).
**M:** ¿Quién lo quiere sumar? (al grupo)...¿Quién lo quiere sumar, pero en el pizarrón? ¿Tú Gustavo?
**Gustavo:** Me da pena.
**M:** ¿Pero por qué pena?
**Gustavo:** (Se decide a pasar al pizarrón. Lee el problema nuevamente antes de hacer la operación). Escribe 8
+ 4
**M:** A ver calladitos Amalinali, vamos a ver lo que hace Gustavo.
**Gustavo:** (Después de escribir la rayita, empieza a contar con sus dedos y escribe el número 12).
M: ¿Creen que esté bien?
**As:** ¡No¡ (contestan sólo 2 o 3 niños, M. no les pregunta porque piensan que no es correcto el resultado, ella se muestra preocupada porque casi todo el grupo está de acuerdo con Gustavo y decide entonces enseñar el procedimiento que resuelve el problema graduando diferentes niveles de representación desde el pictográfico hasta la escritura de una suma iterada de 8 veces el 4).

Existen diversos supuestos respecto al proceder de los alumnos. Estela piensa que esto sucede porque los niños al venir del primer grado traen muy presentes los problemas de suma y resta. Por nuestra parte, sin negar la afirmación de la docente, también pudiera estar influyendo la ausencia de análisis del texto por parte de los alumnos, y que sólo se estén guiando por palabras clave que les dan una pista sobre la operación que hay que utilizar, en este caso la pregunta ¿cuántos cristales necesita comprar? podría sugerirles sumar. Lo que sí se podría afirmar con más seguridad, es que en este momento la mayoría de los niños no han reedefinido la unidad y por ello no pueden pensar multiplicativamente. El dato en que se apoya esta aseveración proviene del mismo registro de clase cuando se observa la forma cómo los niños proceden para encontrar el resultado.

Estela quien no está consciente del hecho de que los procesos multiplicativos implican una redefinición de la unidad, ante las respuestas de sus alumnos les explica el siguiente procedimiento:



4 4 4 4 4 4 4 4

4
4
4
+4
4
4
4
4
-------





Dibuja 8 ventanas con 4 cristales cada uno, luego escribe el número 4 debajo de cada una de ellas que indica la cantidad de cristales de cada ventana, y por último escribe la suma iterada de 8 veces el 4 y pide a los niños encontrar el resultado de la suma.

Únicamente dos alumnos (Jorge y Maribel) cuentan de 4 en cuatro con ayuda de sus dedos pero al llegar al 24 renuncian a seguir contando, al parecer por la imposibilidad de controlar el número de veces que hay que repetir el 4 y a la vez estar contando de cuatro en cuatro. Un par de niños se paran, van al pizarrón y cuentan uno por uno los cristales dibujados hasta obtener el 32, luego Maribel al observar a sus compañeros procede a hacer lo mismo. Se observa que la mayoría del grupo utiliza este procedimiento. Obtienen el resultado correcto pero a través del conteo de uno en uno. Estela se encuentra contenta, ya que lo importante para ella es el resultado y no el procedimiento.

En síntesis los alumnos al intentar resolver el problema espontáneamente utilizan la suma de datos lo cual los lleva a un resultado incorrecto. En un segundo momento cuando la maestra les muestra un procedimiento de solución, ellos, salvo dos niños, no intentan contar de cuatro en cuatro (redefinición de la unidad), sino de uno en uno.

Dos alumnos durante el transcurso de la experiencia se quedaran en este primer momento. En la medida en que para Estela los importante es el resultado, aunado a que no reconoce suficientemente la diferencia entre problemas aditivos y problemas multiplicativos, no genera ninguna estrategia que les permita a estos alumnos ir abandonando el conteo uno a uno frente a los problemas multiplicativos, más allá de manifestar su preocupación por el rezago de dichos alumnos.

*b) Suma iterada.*

El segundo momento de conceptualización identificado, es precisamente cuando los niños comienzan a tener éxito en la solución de problemas multiplicativos con base en su posibilidad de reflexionar sobre la redefinción de una unidad diferente a uno y empiezan a resolver exitosamente los problemas con la suma iterada en dos modalidades: cálculo mental y conteos apoyados con los dedos. Una lección que muestra estos comportamientos es la Lección 74 *La cooperativa escolar*, a continuación se muestra un fragmento de ella.

M: (Cuando considera que la mayoría ha terminado de leer dice): A ver calladitos, voy a leer la lección: La cooperativa escolar. Beto vende en la cooperativa paquetes con chiclosos

Hay paquetes con dos, tres,..seis y a veces diez chiclosos. Del Rincón de las Matemáticas toma unas piedritas que vas a usar como chiclosos y 8 tapas para empacarlos. Ahí vemos unos dibujos con las piedras representando a los chiclosos. Luego ahí abajo, dice: Haz paquetes con 4 chiclosos y completa la tabla. Vamos a hacer la tabla de aquí abajo que dice: número de paquetes, tiene el 8, 7, 6, 5 y 4. Vamos a hacer primero 8 paquetes, lo vamos a hacer mentalmente, vamos a hacer 8 paquetes con 4 chiclosos...¿cuántos chiclosos tendremos en total? Acuérdense que son de 4.
As: (Guardan silencio y empiezan a calcular mentalmente).
M: De 4 (a un alumno). Si compramos 8 paquetitos con 4 chiclosos cada uno ¿cuántos chiclosos tendremos?
As: (murmullo del cálculo que hace en voz alta algunos niños).
Ax: ¡54¡
M: (Ignora la respuesta) A ver, ¿les pongo el primero en el pizarrón? ¿si? (dibuja los 8 paquetes y escribe el número 4 dentro de cada uno). Estos serían los 8 paquetes. ¿si?
As: si
M: En cada paquete ¿cuántos chiclosos tenemos?
As: Cuatro.
M: ¡Cuatro¡ Entonces, si tenemos estos 8 paquetes con 4 chiclosos cada uno ¿cuántos chiclosos tendremos?
As: (Grupo en silencio, hacen cálculos) ¡31 maestra¡ ¡No, son 32¡ (el grupo se divide con estas dos respuestas).
M: A ver. En cada uno hay 4. A ver, vamos a sumar para ver si es 31 ó 32. Cuéntenlos bien A ver, sumamos, serían (M comienza a señalar cada paquete de chiclosos).
As: 4, 8, 12, 16,.. 18,20 (corrigen), 24, 28, 32. (algunos niños usan su dedos para realizar el conteo de 4 en 4 ya que no pueden realizarlo mentalmente).
M: ¡32¡ Abajo del 8 hay un cuadrito, ahí lo ponen.
As: (Escriben número)
M: No hagan tan grande el número, tiene que caberles bien en el cuadrito. Ahora, en el que sigue, tenemos 7 paquetes, ahí son nada más 7 paquetes, tienen igual 4 chiclosos cada uno ¿cuántos chiclosos tenemos?
Faustino y Josué: ¡28¡ (respuesta correcta e inmediata).
As: (Luego 2 ó 3 niños más acuerdan con el mismo resultado)
M: ¡28¡

En este fragmento de entrevista se muestra que la mayoría de los alumnos tienen ya la posibilidad de resolver con éxito situaciones multiplicativas, los más adelantados (6 niños aproximadamente) dan respuestas inmediatas y lo hacen por cálculo mental, el resto del grupo se apoya en uso de sus dedos para encontrar los resultados, evidentemente van a la zaga de sus compañeros más capaces, pero no interrumpen su proceso de cálculo a pesar de que la respuesta ha sido encontrada desde antes por otros compañeros. Incluso hay desacuerdos por ejemplo en el cálculo del total de chiclosos cuando hay 8 paquetes con 4 chiclosos cada uno: unos dicen 31 y otros 32. La profesora interviene pidiendo un conteo grupal de cuatro en cuatro para confirmar cual es el resultado correcto.

*c) La multiplicación con el signo de suma.*

Un tercer momento encontrado es una interesante transición de lo aditivo a lo multiplicativo a nivel de la representación gráfica. Si bien la profesora ha enseñado la representación convencional de la multiplicación y el manejo del cuadro de las multiplicaciones para resolver los problemas, aparece en los niños más adelantados el uso





de la representación "aditiva" (sin ser la suma de datos como en el primer momento) y en sustitución del signo X. Así entonces, para resolver el problema de Oscar el vidriero planteado anteriormente en la Ficha 28 *Patas y gallinas*, ellos escriben: 8 + 4 = 32. Su maestra les indica que están mal, porque es una suma mal hecha, 8 + 4 no son 32. A su vez los alumnos argumentan que les tienen que poner palomita porque hicieron lo mismo que sus compañeros que hicieron la suma larga, verbalizan que son 8 de 4 o sumaron 8 veces el 4. Es probable que ellos se pregunten ¿porqué dejar de usar el signo de suma si en realidad están sumando? Además tienen claro que este tipo de suma 8 + 4 = 32, es diferente a la suma 8 + 4 = 12.

Cabe señalar que este tipo de hipótesis apareció muy temprano en los niños más adelantados (6 aproximadamente), pero no así en la mayoría del grupo. Estos últimos iniciaron su proceso con la idea aditiva de suma de datos, es posible suponer que al pasar a la idea de la iteración de conjuntos equipotentes y posteriormente ante el trabajo didáctico con el llenado de las tablas[25], esta idea híbrida (aditiva - multiplicativa) no se manifestó ya explícita y espontáneamente. Aún así, es un excelente ejemplo de un momento muy interesante en la construcción del conocimiento multiplicativo, el cual habría que verificar en un estudio centrado en la adquisición de este campo conceptual.

*d) La multiplicación convencional.*

Aquí se señalan dos momentos de acceso a la representación convencional de la multiplicación. El primero refiere a la escritura convencional a x b = c que aparece por primera vez en la Lección 77 *Tonatiuh multiplica*, y el segundo momento hace alusión al uso de dicha escritura convencional en el Cuadro de Multiplicaciones (Lecciones 81, 85, 86 y 95) que no es más que la profundización de la reflexión sobre la regularidad de las series numéricas organizadas en el Cuadro, y que los niños ya han venido trabajando en una secuencia paralela de construcción de series numéricas que se iteran con el mismo valor y donde está inmerso el significado del operador escalar.

[25] Cabe aclarar que la intención didáctica del llenado de la tablas aludido en las lecciones: 51. *La empacadora*; 58. *Los puestos de fruta*; 74. *La cooperativa escolar*, es el primer paso para conducir los procedimientos espontáneos de los alumnos hacia el procedimiento convencional de la multiplicación. Los niños reflexionan directamente sobre el significado de cada factor implicado en la multiplicación, de ahí, que si surgió la hipótesis híbrida, entonces no fue vista por este inicio del camino hacia el algoritmo convencional.

La representación convencional de la multiplicación: Los alumnos al acceder a este momento, ya han trabajado previamente el llenado de tablas, la mayoría muestra tener claro el significado de cada uno de los factores de la multiplicación. Dos no pudieron modificar la idea inicial de la suma de datos y se quedaron rezagados del resto de sus compañeros, y algunos más están en un proceso oscilante entre lo aditivo uno a uno y lo multiplicativo. A continuación se analizan algunos fragmentos del registro de la Lección 77 *Tonatiuh multiplica*. La lección esta organizada en cinco partes y ocupa dos cuartillas del libro de texto. El análisis de esta lección es particularmente importante por ser el parte aguas de la secuencia, marca el primer momento de formalización convencional de la multiplicación y es interesante observar el encuentro de las ideas espontáneas con conocimientos científicos.

Parte 1: presentación de la escritura convencional.

**M:** Saquen su libro de matemáticas y van a leer en silencio la página 118 y 119.
**As:** (Sacan su libro y leen la lección 77. Muchos leen en voz alta).
**M:** ¿Ya terminaron?
**As:** ¡Ya¡
**M:** Ahora yo voy a leer la lección, dice: Tonatiuh multiplica. En el salón de Tonatiuh hacen la actividad de la empacadora. Para saber cómo formar los paquetes de chocolates...usan tarjetas. Unas tarjetas dicen cuántos paquetes hay que formar y otras dicen cuántos chocolates deben de ir en cada paquete. A Tonatiuh le sale el 5 en la tarjeta de paquetes y el 2 en la tarjeta de chocolates. Ahora ahí tenemos la tarjeta de Tonatiuh ¿sí? que es la de 5 paquetes y la de 2 chocolates, y luego adelante tenemos como tiene el sus tapitas, como lo hacen ustedes con sus frijolitos o piedritas y dice Tonatiuh: si son 5 paquetes son 5 tapas. ¿con cuántas tapas cada una?
**As:** Con una.
**M:** ¿Con cuántos chocolates cada uno? (corrige).
**As:** ¡Con 2¡
**M:** ¡2¡ Entonces dice: Tonatiuh anota lo que hizo de la siguiente manera: 5 x 2..?
**As:** ¡10¡ (todo el grupo).
**M:** ¡10¡ ¿Cuántas tapas son?
**As:** ¡5¡
**M:** (Dibuja 5 tapas en el pizarrón) Con sus frijolitos. ¿Cada una tiene?
**As:** ¡2 frijolitos¡
**M:** 2 frijolitos. (dibuja 2 frijoles en cada tapa). Después tiene sus tarjetas (dibuja 2 tarjetas: una dice 5 paquetes y la otra 2 chocolates). ¿Sí? Son 5 paquetes y son 2 chocolates en cada paquete ¡sí? Y él hizo la multiplicación 5 x 2 (escribe en pizarrón 5 x 2 = 10)
**As:** ¡10¡
**M:** Lo que hizo él fue multiplicar los paquetes con los...?
**As:** Chocolates.
**M:** Con los chocolates. Y ya obtuvo el...?
**As:** Resultado.
**M:** ¿Sí? Luego dice ahí abajo (en el libro). El 5 es el número de paquetes y el 2 el número de chocolates que hay en cada paquete; el 10 es el total de chocolates que utilizaron. La operación que anotó Tonatiuh se llama...?
**As:** ¡Multiplicación¡
**M:** Multiplicación ¿sí? ¿Se fijaron que lo hizo en forma de multiplicación?
**As:** ¡Si¡





La profesora hace una presentación de la escritura convencional de la multiplicación y del significado de cada factor muy apegado al sentido didáctico de la lección. Los alumnos por su parte, dan muestras de entender la explicación de Estela, identifican el signo de la multiplicación, el sentido de cada factor y su resultado.

Parte 2: Se completan las multiplicaciones, falta algún factor o el resultado.

**M:** 5 por 2. Ahora dice ahí abajo: Fíjate en los dibujos y calcula el total de chocolates. Completa la multiplicación para que quede como lo hace Tonatiuh. A ver entonces, vamos a hacerlo como lo hace Tonatiuh. Él nos pone ahí sus tarjetas: 3 paquetes con dos chocolates ¿Cuánto será?
**As:** (Cuentan con los dedos. Un niño se adelanta al resto del grupo y grita) ¡6¡
**M:** ¡6¡ Ustedes tienen en sus libro el 3, un cuadrito, luego el 2, y luego otro cuadrito (escribe en pizarrón 3 □ 2 = □). Tiene 3 tapas (las dibuja en pizarrón) que son los 3 paquetes. ¿Cuánto tiene cada paquete?
**As:** ¡2¡
**M:** ¡2¡ (dibuja lo dos chocolates en cada paquete).
**As:** (Cuentan de 2 en 2 según M va dibujando los chocolates). ¡2¡ ¡4¡ ¡6¡
**M:** Ahora, aquí en este cuadrito ¿qué es lo que nos va a faltar para hacerlo como lo hizo Tonatiuh? (señala en pizarrón el cuadrito que se encuentra entre el 3 y el 2).
**As:** El por.
**M:** (Pone signo x. Queda 3 $\boxed{X}$ 2 = $\boxed{\phantom{0}}$ ). Vamos ahora a multiplicar 3 por 2...?
**As:** ¡6¡
**M:** ¡6¡ (Completa multiplicación en pizarrón $\boxed{3}$ X $\boxed{2}$ = 6 ). Ahora la que sigue, son 4 paquetes con 4 chocolates, pero ahí...ya está el signo, ¿entonces qué es lo que nos hace falta aquí? (escribe en pizarrón 4 X $\boxed{\phantom{0}}$ = $\boxed{\phantom{0}}$ ).
**As:** ¡El 4¡
**M:** ¿Y ese 4 de dónde lo sacaron?
**As:** De los chocolates.
**M:** Ah, de los chocolates. (Escribe el 4, queda: 4 X $\boxed{4}$ = $\boxed{\phantom{0}}$ ). Aquí ya está el 4 ¿qué nos falta?
**As:** El resultado.
**M:** ¿Cuánto será?
**As:** ¡8¡ (varios).
**M:** Cuatro por cuatro, no nos va a dar 8, porque no estamos sumando. ¿4 x 4 cuánto será entonces?
**Ax:** ¡16¡
**M:** ¡16¡ (escribe resultado: 4 X $\boxed{4}$ = $\boxed{16}$ ). El que sigue, tiene el número de...?
**As:** ¡Paquetes¡
**M:** ¡ De paquetes¡ ¿Entonces que número vamos a notar ahí?
**As:** ¡El 5¡
**M:** (escribe en el pizarrón el 5 en el cuadrito: $\boxed{5}$ X 3 = $\boxed{\phantom{0}}$ ). Entonces vamos a multiplicar...?
**As:** 5 por 3, 15.
**M:** (Completa multiplicación: 5 X $\boxed{3}$ = $\boxed{15}$ ).

En este fragmento llaman la atención dos hechos que ocurren. El primero, los alumnos no tienen ninguna dificultad para identificar qué indica cada factor de la multiplicación faltante, incluido el resultado y la ubicación del signo de la multiplicación. El segundo hecho, es que en este completamiento de multiplicaciones, persista la aparición de ideas aditivas, pareciera que se presencia un proceso lento hacia la consolidación de lo multiplicativo y su convivencia y oscilación con la suma. Se muestra también la importancia de la intervención del docente para propiciar el abandono de lo aditivo, así entonces señala directamente el error en el cálculo: M: 4 x 4 no da 8, que no se está sumando, y pide nuevamente el cálculo correcto, el cual sólo da un alumno. Tal señalamiento del error, parece tener efecto en los niños y cuidan el resultado de la siguiente multiplicación (5 x 3).

Parte 3: Sólo se dan dibujo de tapas con la misma cantidad de piedritas, se pide escribir el número de paquetes y chocolate, así como la escritura completa de la multiplicación correspondiente.

**M:** A ver, en la siguiente página (lee el libro) Fíjate en los dibujos y anota en las tarjetas los números que correspondan. Luego, completa cada multiplicación. Ahora ahí, no tenemos ni paquetes ni chocolates ¿sí?...A ver miren aquí no tenemos ni número de paquetes, ni número de chocolates, ni en la multiplicación (del libro).
(....)
**M:** Ahora en el siguiente no tenemos paquetes ni chocolates. Anótenlo aquí (en cuadro azul) ¿Cuántos paquetes tenemos?
**As:** ¡3¡ (responden con la ilustración de abajo, que es este momento no se resuelve).
**M:** No estoy con esa, sino con la de la derecha.
**As:** ¡4¡ (corrigen).
**M:** ¡4 paquetes¡ (escribe en pizarrón: 4 paquetes). ¿Con cuántos chocolates?
**As:** No cabe la letra maestra (resulta pequeño el espacio para escribir la palabra paquetes en el libro).
M: Hagan la letra chiquita. ¿Cuántos chocolates?
**As:** ¡De 3¡
**M:** ¡De 3¡ (escribe en pizarrón: 3 chocolates) ¿Cómo quedaría la multiplicación?
**As:** 4 x 3 (algunos lo dicen con duda).
**M:** ¿Y cuánto es 4 x 3? (escribe en pizarrón $\boxed{4}$ X $\boxed{3}$ = $\boxed{\phantom{0}}$).
**As:** ¡7¡
**M:** ¿Por qué 7? No estamos sumando, no tiene signo más.
**As:** ¡7¡ (insisten).
**M:** ¿Tiene signo más para sumar 4 + 3 (escribe en pizarrón: 4 + 3 = 7)?
**As:** (Se quedan callados).
**M:** Aquí si son 7 (señala suma).
**Ax:** ¡12¡
**M:** Aquí estamos multiplicando, porque son 4 veces 3.
**Gerado:** ¡17¡
**Ax:** ¡12¡
**Ay:** ¡18¡
M: A ver fíjense bien, 4 veces 3. Si estamos multiplicando.
**As:** ¡15¡
**M:** 4 x 3.
**As:** ¡18¡
**M:** 4 x 3 (insiste y sube tono de voz)
**Ax:** ¡12¡
**M:** ¡12¡ (Completa la multiplicación en el pizarrón: $\boxed{4}$ X $\boxed{3}$ = $\boxed{12}$ ).¿Ya Faustino?
**Faustino:** ¡Sí¡
**M:** La que sigue. ¿Cuántos paquetes tenemos?
**As:** ¡3¡ (correcto) .
**M:** ¡3 Paquetes¡ ¿Cuántos chocolates?
**As:** ¡5¡ ¡4¡
**M:** ¡4¡ Lo anotan ahí en las tarjetas.
**As:** (Escriben en su libro).





**M:** ¿Entonces cómo quedaría aquí la multiplicación?
**Ax:** 3 X 4.
**As:** (Luego el resto del grupo repite 3 X 4).
**M:** (Escribe en el pizarrón la multiplicación completa $\boxed{4}$ X $\boxed{3}$ = $\boxed{12}$ ). ¿Ya se fijaron aquí, que hay que fijarse mucho en el signo? ¿sí?
**Ax:** ¡Sí¡ (sólo un niño responde los demás están copiando).
**M:** Porque no es lo mismo sumar que multiplicar .¿sí? No nos sale el mismo resultado cuando sumamos a cuando multiplicamos. Hay que fijarse mucho en el signo. Ahora el que sigue. A ver, en las tarjetas que siguen no tienen nada, hay que anotar chocolates y paquetes. A ver ahí (en el libro) escriban chocolates y paquetes.

En esta parte ocurren varias cosas a la vez: a pesar de la identificación correcta del significado de cada factor, los niños retoman la idea aditiva, que lleva a la profesora a expresar cierta desesperación, son varios los intentos por señalar el error, indicar directamente que no es suma, e incluso a un deslizamiento del significado del operador función como está indicado en el contexto del problema, hacia el operador escalar, al decir M: A ver fíjense bien, 4 veces 3. Si estamos multiplicando. Y nuevamente regresar al contexto original reasignando el significado de cada factor. Estela complejiza con su actividad la problemática del cálculo del resultado, los niños tienen que darle a la maestra rápidamente un resultado, pareciera que el que tienen a la mano es el de la suma de los datos, en vez de remitirse a la ilustración del libro y contar las piedritas de las cuatro tapas. Por otra parte, quizás la preocupación de la profesora respecto a que los niños den el resultado de una multiplicación, que para ella significa conocer los productos rápidamente no le permite sugerir al grupo que analicen el dibujo de la lección como apoyo para el cálculo. En su lugar recurre a una explicación sobre el significado de los signos de suma y multiplicación "no estamos sumando, no tiene signo más" Un sólo alumno de los más adelantados encuentra el resultado, pero Estela no le da la posibilidad de explicar a sus compañeros su procedimiento y así confrontarlo con los utilizados por los otros.

Parte 4: Se parte de la escritura convencional 5 x 3 = 15 y los niños tienen que contestar tres preguntas, que refieren a: cuántos paquetes, cuántos chocolates por paquete y cuántos chocolates en total.

**M:** En la de aquí abajo. (Lee el libro) Fíjate en la multiplicación que hizo Tonatiuh y contesta. La multiplicación que hizo él es 5 x3...
**As:** ¡15¡
**M:** Es igual a 15. Y tenemos ahí 3 preguntas: La primera es: ¿Cuántos paquetes formó Tonatiuh?
**Ax:** ¡3¡ (incorrecto).
**As:** ¡3¡ (repiten la respuesta del primer alumno)
**M:** El hizo la multiplicación 5 x 3 = 15. Fíjense bien cuáles son los paquetes y cuales son los chocolates.
**Ax:** 5 paquetes, maestra.
**M:** ¿De qué lado están los paquetes, y de que lado los chocolates?

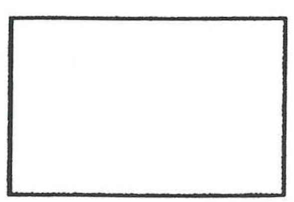
**As:** De ese. (señalan lado izquierdo).
**M:** ¿Entonces cuántos paquetes formó Tonatiuh?
**As:** ¡5¡ (correcto)
**M:** ¡5¡ (confirma la respuesta)
**As:** (Escriben en libro).
**M:** ¿Cuántos chocolates puso en cada paquete?
**As:** ¡3¡ (escriben en libro).
**M:** ¿Cuántos chocolates usó en total?
**Ax:** ¡4¡ (incorrecto)
**M:** ¿Cuántos chocolates? Fíjense bien (tono de advertencia) ¿Cuántos chocolates usó en total?
**As:** (Se escuchan varios resultados incorrectos: 5, 8, 6, 15, 10. Parecen adivinar y no analizan el texto de la lección).
**M:** A ver, fíjense bien: si me están diciendo que son 5 paquetes con 3 chocolates cada uno.
**Ax:** ¡15¡¡15¡ (levantado el tono de voz)
**M:** Pues 15 chocolates.
**As:** (Escriben el número en su libro).

Los alumnos a pesar del titubeo inicial por identificar el referente de cada factor logran hacerlo, y más tarde también muestran dudas respecto al resultado de una multiplicación ya resuelta. Esto parece ser el síntoma del tipo de contrato didáctico que la profesora establece con su grupo, ella siempre lee en voz alta las lecciones, resuelve el análisis del texto y las ilustraciones que son responsabilidad de los alumnos, así entonces a la manera de un efecto topaz no sorprende que los niños traten adivinar la respuesta que quiere Estela en vez de analizar el texto o explorar otros recursos que les lleven a encontrar el resultado solicitado.

Parte 5: hay tres multiplicaciones 3 x 7 = ; 4 x 2 = y 3 x 3 =. Los niños tienen que dibujar los paquetes con chocolates qué indica cada operación y de esta manera encontrar el resultado.

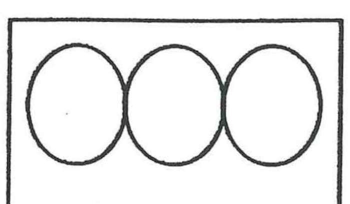
**M:** Ahora, dice abajo: Resuelve las siguientes multiplicaciones. Dibuja las tapas y piedritas para comprobar tus respuestas. A ver, el primer cuadrito y arriba tiene la multiplicación.
**As:** 3 x 7 (varios leen la operación).
**M:** Y dice ahí, que dibujen sus tapas los frijolitos. ¿Cuántas tapas van a dibujar aquí, para hacer la primera?
**As:** ¡3¡
**M:** (Escribe en el pizarrón:

3 X 7 =



**M:** ¡3¡ (Dibuja los tres paquetes en el pizarrón)

3 X 7 =

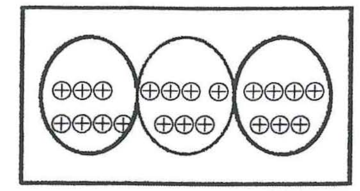






**M:** ¿Con cuántos en cada tapa?
**Ax:** ¡Con 7¡
**M:** (Dibuja las 7 piedritas en cada paquete)

3 X 7 =



**M:** ¿y cuánto es 3 x 7?
**As:** ¡21 ¡21¡ (Se tardan un poco en calcular).
**M:** A ver hagan ustedes los otros dos ( 4 x 2 = y 3 x 3 = ). (Inicia revisión por fila).
**M:** (A Iván) ¿Cuántos paquetes tienes aquí?
**Iván:** ¡4¡ (correcto).
**M:** ¿Con cuántos chocolates?
**Iván:** Con 2.
**M:** ¿Cuántos chocolates en total?
**Iván:** (Cuenta con los dedos, en tanto M corrige a otro alumno) ¡Son 8, maestra¡
**M:** No las hagan tan juntitas (los niños hacen tapas muy pequeñas y juntas).
**M:** Haz la que sigue (A Iván). Yo los voy a llamar, no se paren.
**As:** (Muchos niños terminan rápidamente y pasan a revisión con M al escritorio, parece que no tuvieron mayor problema para dibujar las tapas y las piedritas según lo indicado por la multiplicación). Los que voy revisando se van sentando y les voy a poner un ejercicio. Fíjense bien porque no voy a repetir, van a sacar su cuaderno de español (…).

La mayor parte del grupo no tiene mayor problema para decodificar el lenguaje matemático expresado en la representación convencional de la multiplicación y trasladarlo al plano de la representación pictográfica.

*Uso del Cuadro de Multiplicaciones*

Son varias las lecciones donde los niños tienen oportunidad de trabajar con el Cuadro de Multiplicaciones[26]. En tanto son muchas lecciones dedicadas al trabajo didáctico con dicho Cuadro, se intenta a continuación enumerar de manera general los aspectos más sobresalientes.

- En la Lección 81 se muestra a los alumnos un Cuadro de Multiplicaciones vacío el cual irán llenando gradualmente, la profesora atinadamente pone varios ejemplos no incluidos en la lección. Los niños ante la carencia de material calculan el resultado de cada multiplicación contando con sus dedos, con una mano cuentan la medida del conjunto y

[26] entre ellas tenemos: lección 81 El cuadro de multiplicaciones, lección 85 Brinca la tablita; lección 86 ¿Quién encuentra el resultado?; lección 94 Hunde el submarino; lección 95 La mamá de Tonatiuh; lección 104 El día del niño y lección 117 Submarinos

con la otra las veces, algunos lo hacen bien y otros manifiestan dificultad para llevar este doble conteo. Otros niños se observa que hacen estimaciones pero la profesora las rechaza. Estela incluso llega a pensar que no saben multiplicar, sin embargo esto no es así, los niños están instalados en la idea multiplicativa, la dificultad estriba en la ausencia de material para apoyar el cálculo de las multiplicaciones.

- El grupo gradualmente abandona la idea aditiva de suma de datos, y se consolida la multiplicación, excepto dos alumnos que como se dijera desde un inicio se quedaron estancados en el primer momento.

- Al llenar el Cuadro de Multiplicaciones en una sesión se llenan las columnas que corresponden a las series del 2, 4, 7 y 9. Se observa que las series del 7 y 9 son difíciles para los niños, así por ejemplo, ellos solos son capaces de construir la serie de 7 en 7 hasta el 35, de ahí en adelante unos tres niños y la maestra pueden llevar a buen termino el llenado de la serie. Las series más sencillas fueron la del 2, 3, 5 y 10.

- Un interesante problema no resuelto con suficiencia didáctica en la secuencia es la multiplicación por cero, esta situación se presentó en el llenado del Cuadro de multiplicaciones, la profesora percibe que de alguna manera tiene que enseñarlo, de hecho plantea la pregunta ¿por qué siete veces cero da cero? Cuando ella se da cuenta que no tiene argumentos matemáticos y didácticos para explicarlo al grupo, decide retirar la pregunta y dejar vacíos todos los espacios donde aparecía la multiplicación por cero. El recurso implícito de la secuencia, evidentemente no suficiente para Estela es que una vez establecida la relación entre paquetes y números de chocolates en cada paquete, averiguar cuántos chocolates se empacaron pasa por el cálculo de: uno en uno, dos en dos, tres en tres, etc. Si no hay chocolates en los paquetes, el resultado es cero chocolates empacados.

- En la Lección 86 *¿Quién encuentra el resultado?* Se pide a los alumnos que encuentren los factores de la multiplicación a partir del resultado. Esto lo realizan apoyándose en el Cuadro de Multiplicaciones, así por ejemplo para el 16, encuentran tres multiplicaciones distintas: 4 x 4; 8 x 2 y 2 x 8. Situación que les permitió reflexionar sobre la propiedad conmutativa de la multiplicación. De hecho los niños, ante este descubrimiento por iniciativa propia, se proponen encontrar en el Cuadro de





Multiplicaciones, cuántos números iguales hay y cuáles son las multiplicaciones que los generan.

*La solución de problemas de división de reparto y tasativa.*

En principio hay que encuadrar que desde los Planes y Programas de estudio de la escuela primaria (1993), la resolución de los problemas de división con sus dos significados para el segundo grado, sólo está previsto el uso de procedimientos espontáneos, dejando pendiente su formalización convencional para el tercer grado.

Las situaciones de aprendizaje que funcionalizan la división están presentes desde el inicio y acompañan a las situaciones de la multiplicación, es decir están tejidas juntas, pero tienen un peso curricular distinto, en el sentido de que dichos problemas tienen una cantidad menor que los problemas de multiplicación. También se tejen juntos los problemas multiplicativos con los problemas aditivos, para favorecer que los alumnos se percaten que en una misma lección o actividad hay problemas de suma, resta, multiplicación y división, y que su tarea es identificar cada uno de ellos y la pertinencia del procedimiento (convencional o no) que los resuelven, evitando así la conocida dificultad de la enseñanza tradicional, donde los niños pasan por alto el análisis de los problemas y se centran en buscar pistas o palabras claves para identificar el uso de una operación particular.

*La división como reparto:* Los problemas de reparto se presentaron bajo dos modalidades mismas que representaron dos niveles diferentes de dificultad: en el plano de los objetos y en el plano de las representaciones pictográficas (dibujos). En el plano de los objetos se espera que los niños se enfrenten al control de un reparto equitativo por aproximaciones sucesivas. Así las primeras situaciones fueron resueltas sin mayor dificultad utilizando la correspondencia uno a uno o dos a dos para garantizar el reparto equitativo, como en los problemas planteados en la Lección 51 *La empacadora*. Mientras que cuando los niños resuelven el problema de reparto equitativo en representaciones pictográficas, se les enfrenta a un trabajo de anticipación, esto es lo que lecciones de este tipo pretenden funcionalizar. Se observó que las situaciones de reparto planteadas con texto y acompañadas de dibujos y de un rango numérico más o menos elevado 42, 48 y 72 tunas en los tres problemas de reparto propuestos que aparecen en la Lección 103 *Las tunas*, resultaron muy difíciles de resolver. Veamos un ejemplo del libro: **Lusito vende tunas en**

**el mercado. Después de quitarles la cáscara las mete en bolsitas de plástico. El lunes trajo 42 tunas y, en partes iguales, las repartió en 6 bolsitas ¿Cuántas puso en cada bolsa?______ ¿Alguna bolsa quedó incompleta? _______.**

Ante este problema, los niños sabían perfectamente de qué se trataba y qué tenía que hacer. Así entonces empezaron por hacer intentos sucesivos de reparto: encerraban las tunas de 3 en 3, al verificar que sobraban, aumentaban a repartos de 5 en 5, 6 en 6. Sin embargo ante cada intento tenía que borrar el anterior, una tarea ardua y larga produjo desaliento. Muchas veces el borrado no era muy cuidadoso y confundía a los grupos de tunas que se construían cada vez. Seguramente los niños necesitaban haber resuelto más situaciones de reparto con material para estar en mejores condiciones de anticipar un resultado probable. Como Estela parece no tener claro que no es lo mismo realizar repartos con material que en el nivel de lo pictográfico, aunado a que para ella el recurso al uso de material manipulable no es necesario, no propició que los niños experimentaran con la anticipación de agrupamiento posibles, en lo casos en los que se sabe cuántos grupos deben salir, tarea más factible de realizar en el plano de la manipulación de material que en el plano pictográfico.

<u>*La división tasativa:*</u> Aquí los alumnos mostraron una mayor dificultad para resolver los problemas con este significado. A inicios de la secuencia sólo los alumnos de nivel conceptual alto las resolvían. Pero estas dificultades las propicio Estela porque ella demandó una solución anclada en un razonamiento desde lo simbólico. Los problemas de división tasativa para ser resueltos con recursos no aditivos requieren de un proceso de consolidación de la multiplicación (expectativa de Estela). En la división tasativa se requiere repartir en colecciones equipotentes, por ejemplo: un grupo de 30 niños se van formar en filas de 6 integrantes cada una ¿cuántas filas pueden formar? Una solución aditiva es la resta secuenciada de 6 en 6 al 30 (30 – 6 = 24; 24 – 6= 18, etc.). La solución canónica es dividir 30 en conjuntos de 6, en otras palabras, cuántas veces cabe 6 en 30 (o que número multiplicado por 6 se aproxima al 30 o da 30). Como se observa se requiere finalmente del dominio de la multiplicación.

Sin embargo en la propuesta se enfrenta a los niños a problemas tasativos con apoyo pictográfico que aun siendo aditivo es más accesible que el recurso a la resta secuenciada, para que empiecen a vislumbrar cuántas veces cabe un número en otro, Estela no reconoce





los diferentes niveles de dificultad involucradas en la división tasativa y consecuentemente no se percató de la tarea propuesta en la lección ni de los recurso que ofrece a los niños (de segundo grado) para resolverla. A continuación se analiza un fragmento de la clase donde los niños intentan resolver una situación de división tasativa, en la Lección 103 *Las tunas*

**M:** Ahora ya en el día jueves. El día jueves. El jueves, Luisito trajo 69 tunas y puso 8 tunas en cada bolsa. ¿Cuántas bolsas llenó Luisito con las 69 tunas? (en el libro hay una imagen de 69 tunas).
**Ax:** ¡10¡
**As:** ¡10¡ ¡10¡ (siguen a Ax., parece que es necesario contestar).
**M:** Pero son 69 tunas ¿seguro que son 10?
**As:** ¡9¡ ¡9¡
**M:** (No contesta).
**As:** ¡8¡ ¡8¡ ¡9¡
**M:** ¿8 bolsas?
**Ax:** ¡No, 9¡
**Ay:** ¡11¡
**Az:** ¡12¡ (lo dice jugando).
**M:** A ver fíjense bien (tono con cierta molestia). Si son 69 tunas y puso 8 en cada bolsa. ¿Cuántas bolsas llenó?
**As:** ¡9¡ ¡9¡ ¡9 maestra¡ (varios niños).
**M:** ¿Y cuántas sobraron?
**As:** ¡1¡ (2 o 3 niños contestan).
**Ax:** ¡2¡
**M:** A ver ¿1 o 2?
**As:** ( se forman 2 grupitos unos defienden que sobraron 1 y otros 2).
**M:** Son 69 tunas...A ver son 69 tunas...Y puso 8 tunas en cada bolsa.
**Ax:** ¡50¡
**M**: A ver fíjense bien, si no , no salimos al recreo. Son 69 tunas y puso 8 en cada bolsa ¿Cuántas bolsas llenó?
**As:** (No contestan)
**M:** ¿Cuántas? (Con tono de desesperación).
**Ax:** ¡Sobraron 1¡
**Ay:** ¡No 2¡
**As:** (Luego el resto del grupo toma partido con Ax o Ay).
**M:** A ver ¿1 o 2?
**As:** ¡2¡ ¡2¡ (grita la mayoría del grupo).
**M:** (En tanto los niños defienden si sobran 1 o 2 tunas. M toma gis y dibuja en el pizarrón 8 bolsas). Vamos a imaginarnos que éstas son las bolsas...A ver miren, aquí (pizarrón) les dibuje las 8 bolsas...Ahora van a repartir las 69 tunas. (Nota.- la maestra se confundió son 8 tunas en cada bolsa. Aunque la respuesta es 8 bolsas).
**Ax**: Son 9 (bolsas) y sobra 1 tuna.
**M:** A ver háganlo ahí en su cuaderno, a ver cuántas quedan. (M hace cara de asombro cuando se da cuenta que son demasiadas tunas para dibujar en el pizarrón, cambia de opinión y opta porque sus alumnos lo hagan en su libro. Son 8 tunas en cada bolsa, a ver entonces enciérrenlas: son 8 tunas en cada bolsa, a ver cuántas bolsas forman.
**Ax:** ¿En cuál?
**M:** En el del jueves. ¿Ya Gustavo? Para ver cuántas bolsas se llenan...¿Iván? ¿Ya Cristian? ¿Cuántas? ¿Ya Ana Lilia? ¡Cristian¡ ¿Ya Gustavo? ¿Cuántas bolsas llenaste?
**Gustavo:** (Todavía no termina).
**Ax:** Maestra llene 8 bolsas y me sobraron 5 (respuesta correcta).
**M:** ¿8?
**Ax:** ¡Sí¡ (Con tono de mucha seguridad). ¿Los demás ya terminaron?
**As:** ¡Ya¡ ¡Nooo¡
**M:** ¿Entonces cuántas 5 o 4?
Ax: ¡5¡

**Ay:** ¡4¡
**M:** A ver ¿5 o 4?
**As:** ¡5¡ (la mayoría del grupo).
**M:** ¿Cuántas bolsas llenaron?
As: ¡8¡ (contestan 4 niños en diferentes momentos).
**M:** A ver, anoten ahí entonces, cuántas bolsas llenaron con las 69 tunas.
**As:** ¡8¡
**M:** ¿8 bolsas anoten ahí¡ (en su libro).
**As:** (Escriben en libro).
**M:** ¿Alguna bolsa quedó incompleta?
**As:** ¡No¡
**M:** ¿todas quedaron completas?
**Ax:** Sí, quedaron 5 (tunas).
**M:** Por eso, ¿ se acompleta la otra bolsa o no?
**As:** ¡No¡
**M:** Entonces anoten ahí. ¿Quedó alguna bolsa incompleta?.
**As:** ¡Sí (Los niños escriben la palabra: sí, en su libro).

Los niños entienden perfectamente el problema, y sus anticipaciones son bastante buenas: 8, 9 o 10 bolsas. Si se les hubiera dejado intentar con el libro, una vez marcadas las bolsas podrían haber revisado qué tanto se habían aproximado a la respuesta. Estela prefiere seguir su propio discurso y quiere escuchar la respuesta correcta. Es evidente que la profesora se muestra un tanto varada para devolver una reflexión a sus alumnos para que opten por una de las tres respuestas, más bien indica con cierto argumento matemático que la respuesta no es correcta M: Pero son 69 tunas ¿seguro que son 10 (bolsas)? Esta intervención sólo produce el efecto de señalar el error, pero no el efecto que quizás la profesora tenía en mente, es decir que los niños calcularan a través de una multiplicación que si son 10 bolsas por 8 tunas en cada bolsa son 80 tunas y se rebasan las 69. Por un momento Estela propone hacer de lado la situación como viene propuesta en el libro: cada 8 tuna se encierran y forman una bolsa y en cambio dibuja en el pizarrón 8 bolsas para llenarlas equitativamente de tunas. Confusión y cambio del problema original, que no pasó a mayores, pero ella ya estaba indicando la respuesta al problema a resolver. Pareciera que para ella, las ilustraciones del libro son meros adornos y no un medio o apoyo para el niño para encontrar la solución. La profesora al observar la gran cantidad de tunas que tendrían que dibujar los niños, da marcha atrás y no le quedó más opción que remitir a los niños al libro y pedirles que hicieran bolsas de 8 tunas cada una, poco a poco el grupo llega al consenso que son 8 bolsas y una bolsa incompleta con 5 tunas. En resumen, la división tasativa si bien por sí misma a nivel matemático ofrece mayor dificultad que la división de reparto, está al alcance de las posibilidades cognitivas de los niños de segundo grado a nivel pictográfico, su complejidad la propició el manejo didáctico de Estela, pues enfrentó a los alumnos a una situación fuera





de sus posibilidades, les retira el apoyo del libro y no pueden comprobar sus estimaciones iniciales, y empiezan a adivinar el resultado, porque su búsqueda fue bloqueda por la misma maestra. Esta situación ejemplifica una de las transposiciones de Estela que más efectos negativos produjo en sus alumnos.

### 3.4.2 La construcción de series numéricas, situaciones que implican el uso del operador escalar.

En este apartado se tienen tres observaciones generales:

✎ El diseño didáctico de estas situaciones de aprendizaje si bien se ubican en la cercanía de la concepción de la multiplicación que Estela maneja. La mayoría de las veces los niños construían las serie por conteos de uno en uno, y no por conteos de grupos. Sin embargo cuando las series fueron organizadas en el llenado de tablas y acompañadas de dibujos, llevaron a los niños a contar por grupos (2 en 2, 3 en 3, etcétera.). El diseño cumplió su cometido a pesar de no estar sostenida por una intervención pedagógica conciente de la profesora dirigida en el mismo sentido del diseño didáctico.

✎ Durante la implementación de la secuencia, se observó que el trabajo de la construcción de series mejoraba la habilidad de cálculo de los alumnos en la resolución de problemas multiplicativos (con el significado de operador función) que a la par estaban tejidos en la secuencia. Habría que hacer explícito que esa fue precisamente la intención del diseño de la secuencia: que a la vez que los niños resuelven problemas con contexto, ellos trabajen también la construcción de las series para entender las relaciones de los números involucrados en ellas y su regularidad. Este es un ejemplo muy claro de cómo se buscó que los alumnos utilizarán la matemática en su doble vertiente: la matemática como herramienta y como objeto (Artigue 1995, p. 63). Quizás habría que dedicar un espacio mayor a situaciones de construcción de series que las que actualmente aparecen en la secuencia.

✎ Un error que los niños cometían al inicio del manejo del Cuadro de Mutiplicaciones, fue el siguiente: al buscar el resultado de una multiplicación usaban un "L"" de papel, si intentaban ubicar por ejemplo el 6 x 3 entonces ponían precisamente la "L" encima de dichos números y entonces encontraban el valor de la multiplicación 5 x 2. El problema fue resuelto gracias a la intervención de la profesora quien constantemente explicaba a todo el grupo cómo debía ser el manejo correcto de la "L".

### 3.4.3 Los arreglos rectangulares, preparación del trabajo algorítmico de la multiplicación de bidígitos para el tercer grado.

La secuencia didáctica de la propuesta nacional bien habría quedado concluida con los contenidos analizados en los dos puntos anteriores, sin embargo se decidió iniciar (con tres lecciones) un trabajo didáctico de preparación orientado a la enseñanza del algoritmo de la multiplicación que se formalizan en el siguiente grado escolar. Este trabajo didáctico se realiza sobre los llamados arreglos rectangulares, una modelización que posibilita la comprensión del funcionamiento del algoritmo de la multiplicación[27]. Son tres las lecciones dedicadas al trabajo sobre arreglos rectangulares[28]. De ellas sólo se cuentan con los registros de las dos primeras, y sobre ellos haremos comentarios generales del desempeño de los alumnos:

- Analizan una ilustración de una nopalera organizada en 5 filas con 8 nopales cada una. Logran identificar fácilmente que la multiplicación que le corresponde es 5 x 8 y calculan correctamente el total de nopales. Esta identificación de los factores es posible gracias a que la lección expresamente plantea preguntas sobre el significado de cada factor.

- En otros arreglos rectangulares presentados de manera simultánea, logran identificar la multiplicación correspondiente, comparar las cantidades correspondientes a cada uno de ellos, así como encontrar el total de nopales (Lección 99). Sin embargo, a pesar de que resuelven con éxito situaciones similares en la Lección 107, se observa que una buena parte del grupo cuenta de uno en uno los mosaicos de los arreglos rectangulares, perdiéndose el conteo por colecciones equipotentes. Consecuencia de la poca importancia que Estela le dio a este proceso. Los niños solo tuvieron oportunidad de hacerlo cuando la lección planteada no le dio mucha oportunidad a la profesora de meterle mano y alterla.

[27] El lector puede remitirse al libro *Matemáticas Tercer grado SEP* y leer las Lecciones de las páginas: 74, 75, 76, 77, 78, 79, 112, 113, 160, 161, 166 y 167.
[28] Lección 99 *Nopaltepec*; Lección 107 *Domingo el albañil* y Lección 113 *La cuadrícula de margaritas*.





- En la Lección 99 no comprenden el problema de encontrar la cantidad total de un arreglo rectangular cuando se muestra únicamente su contorno y se cubre el resto con una hoja de papel. Así en un arreglo rectangular de 6 x 7, los alumnos indican como resultado 12 nopales, que son precisamente los que se ven. Ante el señalamiento de error por parte de Estela "tienen que dibujar los que faltan" Parecen retomar el 18 del problema anterior (que por cierto la maestra decidió no hacer en el salón) y dibujan seis nopales más a los 12 para completar los 18. En otros dos problemas similares planteados en la Lección 107, sólo un niño es capaz de proponer las respuestas correctas, y el resto del grupo así como la maestra las aceptan.

- En la Lección 107, al tener que escribir la multiplicación correspondiente a cada arreglo rectangular, los niños escriben al "revés", esto es para 3 x 9 escriben 9 x 3, y para 6 x 4 escriben 4 x 6. Sin duda mucho tuvo que ver la profesora quién las acepta como válidas y no devuelve a la reflexión de lo que significa cada factor en función del contexto: cantidad de filas y mosaicos que contiene cada fila. Es posible que la idea de las tablas y su significado dado por la maestra esté detrás de tal decisión.

## 4. Opinión de la profesora al final de la experiencia didáctica.

Sin duda alguna la opinión de la profesora, al término de la implementación de un trabajo didáctico basado en un metodología de trabajo distinta a la suya es muy importante, ya que valorará su utilidad o no, en función de los aprendizajes obtenidos en sus alumnos y dará un punto de referencia sobre el valor que llega a otorgarle a la actual propuesta nacional para el segundo grado de matemáticas.

Al final de la experiencia didáctica se realizó una entrevista de cierre con Estela, en ella se tocaron básicamente tres puntos: el aprendizaje de los alumnos; aspectos organizativos de los materiales didácticos y el impacto de la propuesta hacia su estilo de enseñanza.

Respecto al aprendizaje de los alumnos y los aspectos organizativos sus comentarios fueron:

**Maestra:** Es la primera vez (que trabaja la propuesta).
**Observador:** ¿Y sientes que hubo avance en el aprendizaje de tus alumnos?
**Maestra:** ¡Sí! Bastante. Es más , yo pienso seguir así trabajando, pero con más repasos. Las numeraciones (construcción de series), también ya las manejan muy bien.

**Observador:** ¿Cómo se te hizo la secuencia de actividades?
**Maestra:** Pues me pareció bien como va relaciona la multiplicación. Nada más yo siento que me fui muy rápido. Creo que llevándolo más despacio todavía se obtienen mejores resultados.
**Observador:** ¿Crees que la secuencia te hizo pensar en ciertas cosas que tenías que cambiar?
**Maestra:** Ah sí.
**Observador:** ¿Cómo cuáles?
**Maestra:** Más organización, porque el problema que hubo fue también con el libro recortable. Y el problema es que uno no puede organizar bien el problema del espacio, porque en el libro recortable hay que guardarles el material, y la verdad, yo no cuento con más espacio (comparte el aula con el turno vespertino).

Este fragmento de entrevista muestra un dato muy valioso de experiencia didáctica: Estela se encuentra satisfecha por los aprendizajes de sus alumnos, y de alguna manera con la propuesta didáctica que ha implementado, pero a la vez evidencia su incomodidad ante el ritmo a que fue sometida ella y su grupo. Ella tiene toda la razón, compromisos escolares ineludibles (cooperativa, ensayos de diversa índole, reuniones con padres, etc.) quitaron tiempo y comprometieron la aplicación de la secuencia programada, de ahí que se apresuró el trabajó didáctico y se ajustó y seleccionaron las actividades más importantes para ser aplicadas.

Respecto a la organización de los materiales didácticos, parece que las cosas cayeron por su propio peso, es decir el diseño didáctico de las situaciones de aprendizaje en su mayoría incluye el uso de materiales. Así entonces se sugiere a los profesores organizar en un espacio del aula: el Rincón de las Matemáticas. Estela al inicio del curso no le dio la importancia debida, quizás ni siquiera pensaba utilizarlo, ya se ha visto que el uso de material como apoyo al razonamiento de los niños no es un recurso valorado por Estela, en su lugar ella utiliza la representación pictográfica en el pizarrón. Así dejó en la responsabilidad de cada niño recortar y cuidar de sus materiales del libro de texto, en los momentos en los que la propuesta sugiere su utilización, y Estela mal que bien había asumido el compromiso de implementar la propuesta. Sin embargo, es interesante observar, que ella fue valorando la importancia del uso de los materiales, de hecho ya se ha comentado a inicios de este capítulo que no sólo era que los niños llevaran el material, sino el problema de cómo organizarlo porque muchas veces había en exceso y perturbaba el desarrollo de la actividad. Es alentador el hecho de que piense en organizar los materiales, y que siempre estén a disposición de los niños.

En el siguiente fragmento la profesora opina sobre su enseñanza de la matemática.

**Observador:** Y la otra era, el libro había influido sobre tu práctica de enseñanza.
**Maestra:** (Duda mucho al contestar).





**Observador:** ¿Cómo tu creas? Es tu opinión personal.
**Maestra:** Ajá.
**Observador:** Uno a lo mejor puede decir: sí me dio otra idea de enseñanza, o no a lo mejor piensas que seguiste enseñando de la misma forma como lo has hecho siempre.
**Maestra:** Si algunas veces, si se toman algunas partes de partida, para empezar, se toman como puntos de partida.
**Observador:** Algo que me llamó mucho la atención al revisar los registros de clase, es que cada vez le dabas más oportunidad a los niños. Hay una lección, los puestos de frutas, me llama la atención que aunque fueron dos problemas, les diste mucha oportunidad para que encontraran el resultado, y yo sentía que a lo mejor eso era parte de algo nuevo que estabas intentando hacer ¿no sé si así era?
**Maestra:** (Pensativa, pareciera que la pregunta la toma por sorpresa).
**Observador:** ¿O a lo mejor te olvidabas de mí en esos momentos?
**M:** Yo creo que sí, que eso era. Sí a lo mejor pasa, que ya había más confianza o ya me estaba acostumbrando a que usted no estaba o por un momento me olvidaba y luego decía, ah si ahí está. Sí así me pasó (ríe).

Es difícil sacar algo concluyente de lo que la maestra logra decir. Pero a pesar de esto pareciera (y esto es algo muy normal), que ella durante el transcurso de la experiencia didáctica no cambió su modelo de enseñanza personal, sin embargo reconoce que retomó ideas didácticas (aunque sin precisarlas) de la propuesta. Se señalaba que esto es algo normal, en tanto el propósito de la experiencia y su metodología de trabajo nunca fueron orientados a modificar el modelo didáctico personal de la profesora, sino a estudiar el dialogo entre su modelo de enseñanza y el modelo de enseñanza nacional plasmado en los materiales publicados por la SEP. Resulta alentador que la profesora al final de la experiencia valore favorablemente el impacto de la propuesta en el aprendizaje de sus alumnos y el hecho de considerar algunas ideas que ella piensa que enriquecen su labor pedagógica.

# CONCLUSIONES GENERALES.

> Reorganizar su pensamiento para comunicarlo, o para enseñarlo, elegir lo que va a convencer, lo que va a ser útil, etc., constituye una parte importante de la actividad de los productores de matemáticas; pero reorganizar las matemáticas para enseñarlas y para favorecer nuevas investigaciones es una componente esencial de la propia investigación. Es un acto matemático que es un efecto, controlado o no, también del trabajo del enseñante..." (Brousseau 1991, 18 - 19).

En este estudio se ha señalado que la didáctica de las matemáticas ha profundizado su trabajo de investigación sobre todo con las conceptualizaciones de los alumnos en relación con los contenidos matemáticos escolares y la lógica de la disciplina a enseñar, con cierto descuido hacia el trabajo didáctico del profesor: el actor olvidado de la tríada didáctica. Así la dirección de la presente tesis apunta hacia un espacio de investigación poco explorado, en particular, cómo interaccionan entre sí dos modelos didácticos distintos (el plasmado en la propuesta oficial y el de la profesora) que con fines de investigación se han puesto en contacto en el aula.

Las conclusiones que a continuación se exponen van organizadas de la siguiente manera: I) consideraciones a algunos aspectos teóricos vinculados al análisis del campo conceptual de los problemas multiplicativos.; y II) los tres apartados que presentan los datos recogidos durante la experiencia didáctica.

**I) Consideraciones a algunos aspectos teóricos vinculados al análisis del campo conceptual de los problemas multiplicativos.**

El análisis del campo conceptual de los problemas multiplicativos realizado por Vergnaud (1991) y expuesto en el Capítulo 1, deja en claro que la mayoría de los problemas multiplicativos provienen de la estructura del isomorfismo de medidas: una estructura cuaternaria donde están relacionados dos espacios de medida, y donde es posible encontrar la incógnita a partir de observar el crecimiento proporcional vertical (operador escalar), o bien, un crecimiento proporcional horizontal (operador función). El operador escalar se muestra bajo la idea multiplicativa "número de veces" y el segundo operador bajo la idea de una razón constante "n número de chocolates/paquete".

Hay que resaltar el hecho, que el anterior programa de estudios de la escuela primaria presentaba exclusivamente la multiplicación bajo lo idea del operador escalar mismo que se modela con las tablas de multiplicar. En contraparte, la propuesta oficial de enseñanza (SEPe, 1993), sin dejar de plantear situaciones donde se utiliza el operador escalar, propone con mayor fuerza problemas multiplicativos que movilizan al operador función. Evidentemente ambos operadores pueden ser trabajados por los alumnos de segundo grado, gracias a la "facilidad" que les ofrece la presencia del valor unitario en la estructura cuaternaria. Por ejemplo: Un refresco vale 6 pesos ¿cuál es el costo de 5 refrescos? Un alumno para resolver podría optar por dos procedimientos:

| pesos | refrescos | |
|---|---|---|
| 1 | 6 | |
| | | x 5 |
| 5 | Z | |

| pesos | refrescos |
|---|---|
| 1 | 6 |
| 5 | Z |

x 6 pesos/refresco

Si se quisiera que ambas modelizaciones se hicieran de manera convencional obtendríamos las multiplicaciones a x b y b x a, que sin mayor problema pueden ser ubicadas en el Cuadro de Multiplicaciones. Así la actual propuesta didáctica pretende enriquecer el campo conceptual de la multiplicación del alumno en la idea que en segundo grado enfrente los dos significados de la multiplicación, así como sus respectivas inversas: la división por reparto y la división tasativa.

Se señaló el hecho de que se tenía testimonio de algunos profesores que habían observado dos situaciones referentes a la secuencia didáctica que les ha provocado extrañeza. Por una parte "un hueco" en la secuencia: ya no se enseñan las tablas de multiplicar. Y la otra situación refiere, a que la escritura convencional de la multiplicación se encuentra al revés de cómo ellos la han venido trabajando, esto es, si se organizan las multiplicaciones derivadas de modelación de un operador función como una tabla de multiplicar, se organizarían en sentido inverso, a las organizadas por el operador escalar. En tanto el operador función es constante, el segundo término de la multiplicación sería constante: 1 x 3; 2 x 3; 3 x 3; 4 x 3; 5 x 3;...; 10 x 3. Por otra parte la tabla del 3 desde el operador escalar





es 3 x 1; 3 x 2; 3 x 3; 3 x 4; 3 x 5; ...; 3 x 10. Este es sin duda el punto álgido de la secuencia por el conocimiento que los profesores han tenido de la multiplicación no sólo como suma iterada, sino además como escalar "número de veces" que se incrementa una cantidad equipotente. La problemática de esta situación estriba en la posible descalificación de los profesores hacia la propuesta, suponiendo que la multiplicación que atiende al operador función es matemáticamente incorrecta "la multiplicación está mal enseñada", sin entender de fondo que su concepción sobre la multiplicación se encuentra enclavada en el operador escalar y la de la propuesta en el operador función y que ambas son igualmente válidas en matemáticas y, representan dos caminos didácticos complementarios de acceso a la enseñanza de la multiplicación.

Es evidente que la experiencia docente de la maestra sobre la enseñanza de la multiplicación, así como lo que ella piensa que significa multiplicar en matemáticas se manifiesta de manera importante en este tipo de tópicos.

**II) Conclusiones sobre las transposiciones realizadas por la profesora a la propuesta didáctica.**

**<u>Apartado 1: transposiciones didácticas sobre la metodología de enseñanza.</u>**

Este apartado expone básicamente algunos aspectos relacionados con la metodología de enseñanza referidos a: ¿Cómo interpreta Estela el rol del profesor en el actual enfoque de enseñanza?, ¿Cómo se organiza la clase de matemáticas? y ¿Cómo se usa el material didáctico en la clase de matemáticas?

*a) ¿Cómo interpreta la profesora su rol desde el actual enfoque de enseñanza?*

Después de una lectura y análisis de los principio didácticos del actual enfoque de enseñanza, expuestos en el libro del maestro (SEPc, 1994). Estela concluye que reconoce su forma de enseñanza en la mayoría de los principios didácticos. A grandes rasgos su opinión indica que:

- Se reconoce como docente que busca y/o diseña situaciones de enseñanza para propiciar el aprendizaje de sus alumnos. Y que elige y gradúa las actividades de acuerdo al nivel de su grupo.

- Respecto al manejo del error, no reconoce su valor para el aprendizaje, se adhiere a la recomendación interpretando que hay que erradicarlo por ello comenta alternativas tales como explicar más despacio y varias veces, así como replantear la explicación de varias maneras, para lograr que el alumno entienda.
- Asume que "promover el dialogo y la interacción de los alumnos y coordinar la discusión sobre las ideas que tienen acerca de la situaciones planteadas, mediante preguntas que les permitan conocer el porqué de sus respuestas" no forma parte de su modelo didáctico personal. Pero acepta el reto de practicar esta componente didáctica.

Los principios declarados en el libro del maestro son genéricos, y plantean las responsabilidades didácticas de todo profesor. Sin embargo hay que señalar que el punto de referencia desde donde son interpretados dichos principios (es decir el modelo personal de enseñanza) es completamente distinto al de la propuesta oficial. El modelo didáctico de Estela, si bien se ubica predominantemente en una enseñanza donde el maestro tiene el control y el alumno es un expectador, se amalgan en él, prácticas de enseñanza diferentes a dicho modelo de enseñanza. Por dar un ejemplo, Estela parece tener la idea que los niños aprenden mirando. Esta idea personal sobre el aprendizaje de los niños le lleva a organizar su enseñanza de tal manera que el procedimiento convencional que resuelve un problema lo enseña en diferentes niveles de representación, desde el dibujo, dibujo con números, y operación convencional. Así entonces la maestra espera que el alumno literalmente "vea" las relaciones entre los datos del problema a través del dibujo y sus diferentes graduaciones en su representación hasta llegar a la convencional. Paradójicamente ella expresa su preocupación de recuperar al niño, y su manera de recuperarlo, es imponerle un procedimiento que ella considera comprensible para el alumno: pasar por diferentes representaciones propuestas por ella. Considerar al alumno desde esta óptica, es un elemento ajeno a la práctica tradicional ortodoxa que no considera al alumno de esta manera. Sin embargo desde la teoría constructivista, se señalaría que la postura de la profesora es sensualista: el conocimiento entra por los sentidos y no por las estructuras mentales.

Sólo una pregunta final de reflexión: ¿ésta idea que tiene Estela de graduar la representación del procedimiento, puede ayudarle a entender la graduación y evolución de los procedimientos según el planteamiento de una didáctica elaborada desde una perspectiva constructivista del aprendizaje de las matemáticas? Como un primer acercamiento sería posible, pero ella tendría que renunciar a dar la graduación del conocimiento para dar espacio a que sean alumnos quienes decidan qué acciones y cuáles representaciones les resultan útiles para ir controlando su aprendizaje. Pero, dar este espacio conlleva a poner a sus alumnos en situación de búsqueda de soluciones, ello se antoja complejo, dada la necesidad mostrada por Estela respecto a que sus alumnos lleguen rápido y correctamente a un resultado que se reconocido como tal por agentes externos a su clase.





*b) ¿Cómo organiza la clase de matemáticas?*

La dinámica de la organización de la clase desde el actual enfoque de enseñanza, está pensada en una constante interacción del alumno con la situación problemática, con sus compañeros (sea en pareja, equipo, o grupal) y con su profesor. En particular la interacción con los compañeros de clase, potencializa el aprendizaje porque posibilita el intercambio de ideas, opiniones y debates a las maneras de resolver las situaciones planteadas por el docente. Se genera un conflicto sociocognitivo y se desencadena una búsqueda colectiva hacia la situación problemática, y los niños pueden ofrecer incluso la información convencional que tarde o temprano el profesor transmitirá.

La característica predominante respecto a la transposición de las organización de la clase sugerida en las lecciones y actividades es precisamente no respetar su intención original y su marcada preferencia a transformarlas a una organización grupal. Las posibles razones que se han analizado de tal situación tienen causas diversas:

- Su renuncia al trabajo en equipo por dos motivos: 1) el diseño didáctico funciona según el propósito para el que fue concebido: que el maestro introduce al grupo a la actividad y después se queda como observador analítico y actuante en la actividad de los niños, situación que no concibe desde su rol de profesora. 2) Los alumnos se "desordenan" platican mucho al estar por primera vez en equipos y se pelean por el material. Situación que desalienta el uso posterior de dicha organización, alguien (si duda) le tiene que indicar que es "problema" una situación muy normal cuando se intenta operar un contrato didáctico diferente, y que los niños pueden asumir conductas de autocontrol hacia la tarea que le es encomendada, y que esto en sí mismo es un proceso de aprendizaje.

El trabajo de grupo sin duda ha sido una constante en la práctica educativa de Estela, le da mucha confianza en tanto la conoce perfectamente, y le ofrece muchas ventajas, como son: el control del grupo tanto en el aspecto disciplinario como en el pedagógico al homogeneizar al grupo (sin distinción de niveles cognitivos en sus alumnos) y conducirlos a la resolución de problemas, guiándose por las respuestas de los que más saben.

Aunado a lo anterior, sostenemos la hipótesis de la "huella", esto es, la organización grupal facilita a la profesora controlar lo que se escribe en el cuaderno y libro de texto del alumno ya que son los documentos donde se asienta lo aprendido, son como una memoria didáctica que puede ser consultado por otros agentes involucrados en el acto educativo y que tienen su mirada puesta en el trabajo del profesor. Este último se valora precisamente por la cantidad de lecciones o cuartillas llenadas de un cuaderno. Esta situación es muy conocida en el sistema educativo de nuestro país y resulta comprensible la renuncia al trabajo de las actividades del fichero, que si bien son didácticamente más ricas para propiciar el aprendizaje en los alumnos, muchas veces la huella que dejan son para el alumno y el profesor.

En resumen, parece que la posibilidad de un profesor para experimentar otras opciones didácticas y de incorporar a su modelo didáctico modificaciones sustantivas, no será posible a menos que las autoridades educativas y los padres de familia tengan claros que los profesores necesitan un cambio de condiciones institucionales y sociales para intentar enriquecer su modelo de enseñanza y producir mejores aprendizajes en sus alumnos.

*c) ¿Cómo se usa el material en la clase de matemáticas?*

Antes de contestar la pregunta hay otra anterior que contestar ¿existió material para ser utilizado por los alumnos? La respuesta es sí y en abundancia. Los padres de familia cumplieron siempre las peticiones de la maestra para que sus hijos llevaran materiales especiales. Pero, debido a que la situación de trabajar con materiales fue nueva para Estela, a la vez que desconoce su valor didáctico, recurre a él por el compromiso adquirido con el observador en esta experiencia. Por esto la incorporación del material, a su práctica docente le trajo un sinnúmero de dificultades como son: 1) Maltrato y/o pérdida del material porque





no organizó el Rincón de las matemáticas para tener a disposición el material cuando se requiera, sino que se delega la responsabilidad en los alumnos para traerlo y llevarlo casa. 2) Solicitó a sus alumnos el recorte del material del libro durante el desarrollo de la clase ocasionando pérdida de tiempo, en muchos casos un recorte defectuoso, pero sobre todo un cansancio innecesario en la clase de matemáticas que se prolongó artificialmente, porque para los niños, la clase había iniciado desde que empezaron a recortar el material.

Respecto al uso de los materiales el principal problema observado tiene que ver con la intención de Estela de que cada alumno individualmente use su material, pero en muchos casos no es esa la intención original ya que su utilización está estrechamente vinculada a la organización de la clase. Una pareja tiene que compartir material común, lo mismo ocurre con un equipo. Sin embargo esta situación no fue prevista por Estela, sino corregida en el transcurso de la actividad cuando verifica que no es viable sostenerla.

A pesar de las dificultades antes aludidas, el balance es positivo, la maestra se convence gradualmente de la importancia del uso de los materiales en las actividades, así lo manifiesta hacia el término de la experiencia, además en dos o tres ocasiones agrega por iniciativa propia y de manera pertinente materiales para el desarrollo de la situación de aprendizaje. No se sabe si a su idea sensualista le viene muy bien el uso variado y continuo de materiales didácticos, muy distinto a la concepción constructivista de que el material sólo es un apoyo para la reflexión de las acciones que los alumnos hacen con ellos. Sin embargo, parece que tal situación no fue tan relevante a efectos de aprendizaje, lo verdaderamente importante fue que en varias ocasiones fueron utilizados conforme al sentido indicado en la propuesta.

**Apartado 2: transposiciones sobre el contenido matemático.**

*a) ¿Qué es un problema matemático?*

Aquí se mostró claramente que la profesora tiene una concepción muy distinta de lo que es un problema respecto al planteamiento de la propuesta didáctica oficial. Para ella el problema tiene que cumplir con las condiciones de un problema tipo: deben estar presentes todos los datos del problema; no deben existir datos que no vayan a ser operados y los datos tienen que ser presentados en el orden que van a ser operados. Y en otro orden de ideas, los problemas de multiplicación "no deben" de aparecer antes de que los niños hayan aprendido a multiplicar, por ello Estela tendrá que modificar algunos problemas "dificiles" de multiplicación en problemas de suma.

Sin embargo, se tiene que resaltar el hecho, de que la profesora en varios momentos, sobre todo de las lecciones, se esfuerza por respetar el planteamiento didáctico original, donde el problema es presentado en parte de manera escrita y el alumno tiene que buscar los datos que le faltan en la ilustración para completar el problema. Pero cuando los alumnos (incluidos los más listos) no encuentran la solución del problema que ella espera, en el tiempo que estima conveniente, se pliega inmediatamente a armar el problema; esto es, lo lee nuevamente incluyendo los datos que se supone tienen que buscar los alumnos y a partir de este momento genera el efecto topaze, haciendo cambios a las preguntas que plantea. Esto es, ofrece pistas hasta que se encuentra la respuesta, no responde ante el resultado erróneo obtenido por algún alumno; después de escuchar varias respuestas (como quien da oportunidad a sus alumnos) repite el problema resaltando los números que forman parte del problema. Y al final de cuentas es ella quien valida la respuesta correcta de los alumnos que la encontraron.

Es comprensible que la profesora recurra a este repertorio didáctico para que sus alumnos superen el error y encuentren la respuesta correcta. La profesora tiene que ser informada que existen otras maneras de trabajar el "error", por ejemplo, la validación de los resultados puede ser devuelta por el profesor hacia la situación misma, y recurrir a una verificación empírica con los objetos para mostrar quien tiene la razón. Por otra parte, también se le puede informar que los mismos alumnos pueden tener la posibilidad de saber si el resultado que obtienen es el que buscan, siempre y cuando se trabaje con ellos la estimación y el cálculo mental.

Otro elemento vinculado a la concepción de problema, son los problemas que se han denominado abiertos son aquellos que su solución admite varias respuestas correctas, un ejemplo sencillo de este tipo de problema sería: Juan tiene 20 pesos ¿qué productos podría comprar en la tienda con este dinero? Ante este problema existen varias opciones posibles y matemáticamente correctas. La tendencia de la profesora a trabajar con este nuevo tipo de problemas, fue cerrarlos sistemáticamente o bien, si la lección pedía que inventara problemas abiertos, ella los evadía y en su lugar planteaba problemas tipo de suma y resta,





evitando incluso problemas multiplicativos, o problemas que implicaran el uso de dos operaciones para ser resuelto. En síntesis este tipo de problemas abiertos no aparece en su topogénesis personal y la mejor manera de enfrentarlos es evadiéndolos.

La invención de problemas tampoco es una actividad que sus alumnos tengan que realizar en la clase de matemáticas, durante un entrevista manifestó su extrañeza hacia esta modalidad de trabajo con los problemas. Acepta la posibilidad de inventar ella los problemas pero no que los alumnos lo hagan. Muy probablemente se pregunte ¿Qué sentido tiene que los alumnos inventen problemas? ¿Podrán hacerlo? ¿No ha sido ésta una actividad privativa de ser maestro?

*b) Las tablas de multiplicar.*

Este contenido matemático es el punto álgido del cruce entre las topogénesis de la profesora y la propuesta. La primera porque la considera un puntal de la enseñanza de la multiplicación y al no identificar las tablas en la propuesta decide enseñarlas. Es cierto que la propuesta no plantea la organización de las multiplicaciones entre dígitos como las tablas de multiplicar. Pero en la propuesta está expresado el propósito que los niños "aprendan las tablas" pero organizadas en el Cuadro de Multiplicaciones y producidas tanto en el contexto del operador función, como en el escalar, pero con la salvedad que sólo el primer significado se representa convencionalmente.

Se ha comentado que ambas organizaciones de las multiplicaciones son válidas, y de haberse presentado la organización de "las tablas" atendiendo al operador función (1 x 3, 2 x 3, 3 x 3, 4 x 3,...,10 x 3) tal vez hubieran causado mucha confusión tanto en los profesores como en los padres de familia. Así la decisión didáctica de incorporar el Cuadro de Multiplicaciones es porque puede modelar a ambos operadores sin mayor dificultad matemática.

El problema central era el antagonismo entre el operador escalar ineludible en la enseñanza de la multiplicación desde la perspectiva de la profesora y el operador función desde la propuesta oficial. Afortunadamente para este caso, pero que habría que ver para otros, el escalar tal como es manejado por Estela (ver Capítulo III) no distorsiona en absoluto el sentido didáctico y matemático de los problemas correlacionados con este operador. De esta manera ella no entra en conflicto con los problemas y representación convencional del operador función.

En el caso de otros profesores, que sí están instalados en una interpretación conciente del operador escalar, y cuya opinión se ha escuchado en diversos espacios de actualización, argumentan y descalifican matemática y didácticamente la enseñanza de la multiplicación desde la propuesta, pues según ellos, se enseña al revés. ¿Cómo conciliar la validez matemática y didáctica de la propuesta y la de estos profesores, ya que en este caso si existe conflicto? Una respuesta tentativa a esta pregunta se encuentra en la necesaria capacitación y actualización de profesor. La actual propuesta oficial propone cambios importantes respecto a cómo organizar la enseñanza de las matemáticas para que los alumnos la aprendan usándola, esto es, la matemática como herramienta para resolver problemas de la vida cotidiana.

Los profesores tienen ante sí una metodología de enseñanza novedosa que les demanda una revisión y probablemente la reconsideración de sus conocimientos matemáticos, didácticos y psicológicos. Es cierto que no es válido pensar, que se deban descalificar y sustituir sin más las formas de enseñanza que los profesores hasta ahora han venido implementando por el actual enfoque metodológico plasmado en los planes y programas de estudio. Las estrategias de actualización deben favorecer que los profesores entiendan que es lo que ellos hacen en el salón de clase y sus efectos en el aprendizaje de sus alumnos, a la vez que entiendan el planteamiento didáctico de la propuesta y sus efectos. En el caso álgido de la multiplicación que nos ocupa, el problema se resolvería en buena parte si se les muestra y explica cuál es su concepción de la multiplicación (enclavada en el escalar), cómo entienden las escrituras multiplicativas y cómo organizan su acto de enseñanza desde únicamente el nivel de la representación sin el apoyo de contexto alguno; a la vez que se contrasta con la propuesta oficial: la funcionalización de los significados de la multiplicación (función y escalar) inmersos en las situaciones problemáticas, y a partir del contexto de estas se da sentido a la escritura multiplicativa convencional.

El seguimiento y análisis del desempeño didáctico de Estela realizado durante varios meses, con una propuesta de enseñanza nueva y extraña, mostró que muchas de las actividades no fueron comprendidas en cuanto a su intención didáctica y fueron trabajadas





hacia un camino distinto, a pesar de que desde nuestro punto de vista el diseño didáctico de las actividades reunían las características para favorecer el aprendizaje, pero esto no fue suficiente, evidentemente la actualización del profesor es inevitable. También es cierto que muchas de las actividades cumplieron el cometido de generar aprendizaje. Tal situación es importante destacar, porque Estela sí observa que sus alumnos estaban aprendiendo, y esto la anima a seguir trabajando la propuesta. Quizás no la entienda del todo, pero a nivel pragmático llegó a apreciar su valor didáctico, es decir, sí funciona en el aula. Si ella hubiera observado lo contrario, seguramente hubiera pedido abandonar la experiencia didáctica, por el bien de ella y de sus alumnos. Quizás el desempeño didáctico de Estala hubiera empatado mejor con la propuesta, si ella hubiera sido retroalimentada durante el curso de este trabajo, en todo caso habría que probarlo.

*<u>c) Las transposición de la profesora y el diseño didáctico de situaciones de aprendizaje:</u> El desempeño didáctico de la profesora al trabajar las lecciones y actividades del libro de texto gratuito.*

Las situaciones de aprendizaje trabajadas durante la experiencia didáctica fueron de dos tipos: lecciones y actividades. Cada una de ellas tiene características muy propias que ya fueron descritas (ver Capítulo III). Durante el desarrollo del trabajo, se observó que las lecciones muy probablemente por su diseño, le ayudaban a la maestra a organizar mejor el acto de enseñanza, en el sentido de que las ilustraciones y las preguntas a resolver ya estaban hechas, y desde su modelo didáctico eran conducidas en organización grupal. Este diseño didáctico fue adaptado a su modelo de enseñanza. Así los propósitos de la lección eran reconocidos por la profesora y su esfuerzo de enseñanza iba dirigidos hacia ellos. Por el contrario, el trabajo con las actividades, sobre todo las del fichero, mostraron tal cantidad de transposiciones que trastocaron su sentido didáctico y sus propósitos para el acceso al contenido matemático inmerso en ellas. La razón parece estribar en su inexperiencia y falta de conocimiento hacia la metodología de enseñanza para controlar un trabajo didáctico totalmente distinto al suyo: en parejas, en equipo, los niños haciendo cosas -sin un contenedor (cuaderno o libro) que les mantenga sentados en su lugar-, conversando, etcétera. Para trabajar las actividades, se requiere entre otras cosas, leerlas previamente al día de la clase; para solicitar el material, sabiendo cuánto se necesita pedir o preparar el material recortable; pensar en que lugar se realizara -si es necesario hacer un espacio en el salón o salir al patio-, cómo se van a dar las consignas, que van a hacer los niños después de realizarla, etcétera. En resumen, tal parece que el trabajo didáctico de Estela se apega más al propósito de la situación didáctica cuando se le es planteada en las lecciones. Y también, que los logros en los aprendizajes de los alumnos se sostuvieron más por el trabajo didáctico sobre el libro de texto del alumno.

**Apartado 3: el aprendizaje de los alumnos como referente de las transposiciones didácticas de la profesora.**

Conceptualizaciones y procedimientos de solución de los alumnos ante los problemas multiplicativos de la secuencia didáctica.

*1.-Problemas de estructura isomórfica que implican el operador función.*

Durante el tiempo que se aplicó la secuencia didáctica se puedo observar que los procedimientos y conceptualizaciones de los alumnos fueron evolucionando, fue posible identificar cuatro grandes procedimientos, éstos fueron:

- La suma de datos: los alumnos no entienden las relaciones multiplicativas del problema, se limitan a sumar los datos- Además da la impresión de muy poco análisis hacia el problema, y muy probablemente se guían por palabras clave para intentar identificar la operación que corresponde al problema. Al principio de la experiencia la mayoría del grupo sumaban datos, que no tenían que sumarse.

- La suma iterada: los alumnos perciben las relaciones multiplicativas, tal parece que han logrado redefinir la unidad. Esto es, una unidad formada por conjuntos equipotentes que pueden ser iterados varias veces. Aparecen dobles conteos: con los dedos de una mano hacen conteos de 4 en 4, y con los dedos de la otra mano contabilizan la cantidad de veces que van repitiendo el conteo. En tanto en el plano de la representación escrita, aparecen sumas iterando varias veces la cantidad considerada.

- La multiplicación con el signo de suma: es este momento los alumnos expresan un nivel más elaborado pues logran escrituras tales como 8 + 4= 32, teniendo muy claro y así lo verbalizan a su profesora que son **8 de 4**, y que no suman como sus compañeros 4 + 4 + 4+...+ 4= 32. Incluso son capaces de identificar que su cuenta indica de manera mas corta la suma iterada que hacen sus compañeros de 8 veces el 4, como tampoco están haciendo la





suma 8 + 4 = 12 en la que está pensando la maestra. Cuando el observador tuvo oportunidad de platicar con estos niños respecto a por qué usan el signo de más, argumentan que suman 8 veces el 4.

- La multiplicación convencional: durante el proceso de acceso a la representación convencional de la multiplicación es propuesto en tres grandes momentos: en el primero los niños resuelven según su repertorio de conocimientos matemáticos, muestra de ello son los procedimientos antes descritos. El segundo momento los alumnos llenan tablas con tres columnas: la primera indica la cantidad de paquetes, la segunda la cantidad de chocolates por paquete, y la tercera el total de chocolates. De esta manera los alumnos identifican el significado que adquiere cada una de las cantidades involucradas. Así el tercer momento, se incorpora el signo de multiplicación (x) que da cuenta de la relación de cálculo establecida entre los datos, y se formaliza la operación, por ejemplo, 5 x 2 = 10 y se indica que esa operación es llamada multiplicación.

Por lo que toca, al acceso a la representación convencional, la mayoría del grupo arriba a ella, sin duda el llenado de las tablas como antecedente tiene un gran valor didáctico ya que ayuda a los alumnos a organizar y dar sentido a los factores o cantidades involucradas en la multiplicación, así el paso a la formalización convencional se facilita. Cabe recordar además que varios alumnos ya estaban en posesión de un argumento multiplicativo, cuando multiplicaban usando el signo de suma.

Por el contrario, sólo tres alumnos no consiguieron acceder a la representación convencional de la multiplicación, una de las causas fue su bajo nivel conceptual (sumaban datos) y la otra, la dificultad de la profesora por recuperarlos durante el trabajo de aula. Es decir, ella se manejaba al ritmo de la mayoría del grupo, desafortunadamente no generó una estrategia didáctica enfocada a ellos para poder ayudarlos a su ritmo de aprendizaje.

El llenado del Cuadro de Multiplicaciones o bien la identificación de las multiplicaciones en dicho Cuadro, no tuvo complicaciones significativas, pues era identificable para ellos qué factor se ubicaba en la columna horizontal o vertical. Quizás la única que llamó la atención era que al colocar la "L" en el cuadro para ubicar el producto de 3 x 4, muchos niños al principio colocan la "L" sobre estos números y no debajo de ellos. Fue necesaria la intervención de la profesora para aclarar este mal manejo.

*La solución de problemas de división de reparto y tasativa.*

Las situaciones de reparto con apoyo de material fueron abordadas con éxito desde el inicio del ciclo escolar, asimismo a nivel gráfico cuando la cantidad por repartir no era mayor a 30, el uso de correspondencias fue el recurso predominante para la solución de estos problemas en el plano de la manipulación y la anticipación en el de la representación pictográfica. En un trabajo posterior (hacia el final de la experiencia didáctica) con la misma situación problema, pero a partir de ilustraciones, los niños no tienen éxito, el problema fue la inmovilidad del dibujo para organizar las colecciones y la cantidad de elementos. Así los alumnos, ante varios intentos por encontrar la colección, marcan una y otra vez las colecciones, y aunado a un mal borrado, la situación termina por confundirse, no tanto porque no sepan que hacer, sino por los límites y tamaño de cada colección contada.

En contraparte, los niños mostraron dificultades en las situaciones de división tasativa o de agrupamiento, debido a la complejidad incorporada por Estela, quien esperaba erróneamente, por estar fuera de la capacidad cognitiva de la mayoría del grupo, que los niños lo resolvieran en el plano de lo simbólico. Sólo los niños que tenían un conocimiento firme de la multiplicación lograron resolverlas.

Respecto al diseño didáctico de problemas tazativos tenemos dos situaciones a considerar: a) En el llenado de tablas (trabajo previo a la formalización de la multiplicación) se trabaja con estos problemas, y los niños que resuelven lo logran gracias a la presencia de los objetos. b) En un trabajo posterior con la misma situación problema, pero a partir de ilustraciones los niños no tuvieron éxito, al principio, porque su maestra no los dejó utilizar la ilustración.

*2.- La construcción de series numéricas (situaciones que implican el uso del operador escalar).*

Estas situaciones que simultáneamente se proponen con los problemas que implican el operador función, fueron de gran valor didáctico, en tanto su propósito era generar gradualmente la herramienta numérica para facilitar la solución de los problemas con el significado de operador función. Esto es, si el alumno podía dominar los conteos de 2 en 2, 3 en 3, 4 en 4, etc. tenía en sus manos la herramienta numérica par calcular los resultados





de los problemas. Tal situación tal como fue planeada en la secuencia, se verificó en la práctica. Los alumnos accedieron gradualmente a la construcción de las series numéricas, sin embargo hay que resaltar dos situaciones significativas al respecto: 1) En el diseño didáctico, la ayuda de la ilustración para realizar los conteos antes aludidos, no funcionó adecuadamente, por ejemplo para el caso del conteo de llantas de varios triciclos los niños las contaban de uno en uno y no de tres en tres. Sin embargo la situación se remediaba en parte cuando el llenado de tablas no les daba otra opción más que contar de tres en tres. 2) La maestra en el caso de las ilustraciones no presionaba a los niños a realizar los conteos de tres en tres, se conforma con un resultado correcto, no con el proceso del cálculo. En este caso, que fuera multiplicativo, no aditivo. Nuevamente la preparación matemática de la profesora resulta importante, ya que no se puede esperar que del diseño didáctico se resuelvan este tipo de situaciones.

*3.- Los arreglos rectangulares: preparación del trabajo algorítmico de la multiplicación de bidígitos para el tercer grado.*

Los arreglos rectangulares cierran la secuencia didáctica, como una manera introductoria para la posterior formalización del algoritmo de la multiplicación en tercer grado. Se observó que los alumnos con facilidad identifican el nuevo significado de los factores de la multiplicación: filas y columnas. También las resuelven correctamente en su mayor parte. Sólo tienen problemas al intentar calcular el área oculta de un arreglo rectangular a partir de contar su orilla, esto es de mostrarse una fila y una columna. Tampoco supo la profesora como apoyarles para resolver este problema.

*Opinión de la profesora al final de la experiencia didáctica.*

Sin duda el punto de vista de la profesora sobre la valoración que hace de la experiencia didáctica una vez que esta ha concluido, es alentadora. El principal argumento que emite tiene que ver con el hecho de que sus alumnos sí aprendieron matemáticas. Se siente complacida de que la mayoría del grupo accedió al conocimiento de los problemas multiplicativos. Ya antes se señaló que sólo tres alumnos quedaron rezagados del resto de sus compañeros. A la vez también señaló que de haberse tenido mejores condiciones, específicamente mayor tiempo, los alumnos habrían aprendido más y consolidado su aprendizaje. La profesora ahora parece valorar algunas ideas didácticas inmersas en la propuesta, por ejemplo, después de venir utilizando los materiales sugeridos en las actividades, observó su valor pedagógico, ahora ella tiene la necesidad y propósito de tener en el salón el Rincón de las Matemáticas para organizar el material didáctico de las actividades. Su argumento inicial de que no existía dicho Rincón era que no tenía espacio disponible ya es cosa del pasado, sólo después de experimentar su utilidad se convenció así misma. Ella comentó aunque sin hacer mayores precisiones, de ideas valiosas derivadas de la aplicación de las situaciones de aprendizaje, que piensa experimentar en el siguiente ciclo escolar.

Tal valoración positiva que hace Estela hacia la propuesta oficial a pesar de no tener la asesoría ni la información necesaria para operarla, es significativa. La interacción con otra metodología de enseñanza y de la que constató resultados favorables, si bien no la llevarán a cambiar sustancialmente su modelo de enseñanza personal, si lo enriqueció. Habrá que estudiar con posterioridad su desempeño pedagógico a partir de esta breve pero significativa experiencia didáctica.

"Serán los profesores quienes, en definitiva, cambiarán el mundo de la escuela, entendiéndola"

Lawrence Stenhouse





# BIBLIOGRAFÍA


Arsac (1989). Le role du professeur – aspects pratiques et théoriques, reproductibilité. Cahietrs du Séminaire de Didactique des mathématiques et de l'informatique. Grenoble : IMAG – LSD.

Artigue, M. (1995). "Ingeniería didáctica". En *Ingeniería didáctica en educación matemática.* México: Grupo Editorial Iberoamericano. p.p. 33-59.

Ballenilla. F. (1992). "El cambio de modelo didáctico, un proceso complejo". En *Investigación en la Escuela (18)*. España: Díada. p.p. 43 - 68.

Block, D. (1993). Cambios curriculares en matemáticas en el nivel básico. Enfoques e influencias. Ponencia presentada en el Encuentro Matema – 93 de la Unidad Académica del Bachillerato CCH, México DF.

Block, D. y Fuenlabrada I. (1996). Materiales curriculares de matemáticas para el nivel básico. Encuentros de Investigación Educativa DIE - CINVESTAV. México.

Brousseau, G. (1979). Análisis de la tarea del maestro. IREM de Bourdeaux, Francia.

Brousseau, G. (1986). Fundamentos y métodos de la didáctica de las matemáticas. Investigación en Didáctica de las Matemáticas Vol. 17, No. 2, pp. 33 – 115.

Brousseau, G. (1990). ¿Qué pueden aportar a los enseñantes los diferentes enfoques de la didáctica de las matemáticas? (primera parte). En *Enseñanza de las Ciencias*. Revista de investigación y experiencias didácticas. Vol. 8, No. 3. Universidad de Valencia España.

Brousseau, G. (1991). ¿Qué pueden aportar a los enseñantes los diferentes enfoques de la didáctica de las matemáticas? (Segunda parte) En *La enseñanza de las ciencias*. Revista de investigación y experiencias didácticas. Vol 9, No. 1 Universidad de Valencia, España. p.p. 10 –21.

Brousseau, G. (1993) Fundamentos y métodos de la didáctica de las matemáticas. En *Didáctica de las matemáticas. Escuela francesa.* México CINVESTAV – Matemática Educativa. IPN,. p.p. 1 – 67.

Brousseau, G. (1994). "Los diferentes roles del maestro". En *Didáctica de matemáticas*. Parra, C. y Saiz, I. (Comps.). Argentina: Paidós. p.p. 65 - 94.

Brousseau, G. (2000). Educación y didáctica de las matemáticas. En *Educación matemática* Vol. 12 No. 1 Bogotá, Grupo Editorial Iberoamérica pp. 5 -38.

Candela, A. (1989). La necesidad de entender, explicar y argumentar: los alumnos de primaria en la actividad experimental. Tesis de maestría, Departamento de Investigaciones Educativas, CINVESTAV – IPN. México.

Charnay, R. (1994). "Aprender (por medio) de la resolución de problemas". En: *Didáctica de matemáticas.* Parra, C. y Saiz, I. (Comps.). Argentina: Paidós. p.p. 51-63.

Chevallard, I. (1997). La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado. Buenos Aires. Aique.

Delamont, S. (1993) Diálogos en educación. Oikos Tau. pp. 15 – 167.

Douady, R. (1995). "Nacimiento y desarrollo de la didáctica de las matemáticas en Francia: rol de los IREM". En *Ingeniería didáctica en eduación matemática.* Artigue, M., Douady, R., Moreno, L. y Gómez, P. (editor). Bogotá: Iberoámerica. p.p. 1 - 5.

Edwards, D. (1990). "El papel del profesor en la construcción social del conocimiento". En *Investigación en la Escuela (10).* pp. 33 - 48.

Fuenlabrada, I. (1991). "La investigación en didáctica de la matemática. Un problema actual". En *Avance y perspectiva* (10), julio-septiembre. México.

Fuenlabrada, I. y Block, D. (1995). Innovaciones curriculares en matemáticas. Primer ciclo de la educación primaria. Ponencia presentada en el 8° Encuentro de Educación Especial, Cancún, Quintana Roo, México.

Inhelder, B. y Piaget, J. (1960). De la lógica del niño a la lógica del adolescente. Buenos Aires, Paídos.

Jackson, P. (1968) La vida en la aulas

Jodelet , D. (1989). Les représentations sociales. Pares: P.U.F.

Gálvez, G., Rockwell, E., Paradise, R. y Sobrecasas, S. (1981). El uso del tiempo y de los libros de texto en primaria. En Cuadernos de investigación Educativa No. 1, Departamento de Investigaciones Educativas. CINVESTAV – IPN, México.

Gutiérrez, A. y Jaime, A. (1995) La didáctica de las matemáticas: fuente de reflexiones sobre la enseñanza de las matemáticas. En *Geometría y algunos aspectos generales de la educación matemática.* Bogotá. Iberoamérica. pp. 1 – 22.

Noelting, G. (1980). The development of proportional reasoning and ratio concept, parti I. Educ. Stud. Math. 11 pp. 217 – 253.







Piaget, J. (1978). Introducción a la epistemología genética. 1.- Pensamiento matemático. Buenos Aires. Paidos.

Popham, J. y Baker, E. (1977). Los objetivos de la enseñanza. Buenos Aires: Troquel.

Ricco, G. y Vergnaud, G. (1982). Didáctica y adquisición de conceptos matemáticos. Problemas y métodos. Centre d´etude des Processus Cognitifs et dul Langage. Centre National de la Recherche scientifique Ecule des Hautes Estudes en Sciences Sociales. París-france. p.p. 27.

Robert, A. y Robinet, J. (1989). Représentations des enseignasts de mathématiques sur les mathématiques et leur enseigmenet. Cahier de DIDIREM N°. 1 Paris: IREM Paris VII.

Rockwell, E. y Mercado, R. (1986). Acercamiento a la realidad escolar. En *La escuela, lugar del trabajo docente. Descripciones y debate.* Documento interno de Departamento de Investigaciones Educativas del CINVESTAV. IPN. pp. 35 – 45.

SEPa (1994). Matemáticas Segundo Grado Libro de texto Gratuito. Fuenlabrada, I, et. al. México

SEPb (1994). Fichero Actividades didácticas. Matemáticas. Segundo Grado. México

SEPc (1994). Libro para el maestro. Matemáticas, segundo grado. México.

SEPd (1980). Libro para el maestro. Matemáticas, segundo grado. México.

SEPe (1993). Educación Básica. Primaria. Planes y programas de estudio. México. p.p. 164.

SEPf (1976). Matemáticas. Segundo grado. Libro de Texto Gratuito. México.

Stenhouse, L. (1987). La investigación como base de la enseñanza. Madrid. Morata.

Vergnaud, G. (1977). La teoría de los campos conceptuales. En *Investigación en Didáctica de las matemáticas,* Vol. 8, 2 – 3.

Vergnaud, G., Halbwachs, F. y Rouchier, A. (1981). "Estructura de la materia enseñada, historia de las ciencias y desarrollo conceptual del alumno". En: Coll, C. (Comp.). Psicología genética y educación. España: Oikos-tau. p.p. 115-128.

Vergnaud, G. (1983). "Las estructuras multiplicativas". En: Lesh, R. y Landau, M. (eds.), Acquisitions of mathematics concepts and processes. London: Academy Press. p.p. 127-174.

Vergnaud, G. y Ricco, G. (1984). Didáctica y adquisición de conceptos matemáticos. Problemas y métodos. Centre d'Etude des Processos Cognitifs et du Langage Centre National de la Recherche Scientifique. Ecole des Hautes en Sciences Sociales, París.

Vergnaud, G. (1991). El niño, las matemáticas y la realidad. México. Trillas.





# ANEXO

***INVENTARIO DE ACTIVIDADES Y DE LECCIONES DE LA SECUENCIA DE LOS PROBLEMAS MULTIPLICATIVOS DE SEGUNDO GRADO DE PRIMARIA APLICADOS DURANTE LA EXPERIENCIA DIDÁCTICA.***

| No. Registro de y Clasificación | Lección o actividad | Título | Número de página | Fecha |
|---|---|---|---|---|
| 1) Actividad | Ficha 22 versión 2 | De 2 en 2. | - | 19 - 09 - 95 |
| 2) Lección | Lección 16 | A comprar paletas | 28 | 19 - 09 - 95 |
| 3) Actividad | Lección 24 | La papa caliente | 37 | 26 - 09 - 95 |
| 4) Actividad | Ficha 28 2do.probl. | Patas y gallinas | - | 26 - 09 - 95 |
| 5) Entrevista a M. | - | - | - | 26 - 09 - 95 |
| 6) Actividad | Lección 35 | Los osos de peluche. | 56 | 28 - 09 - 95 |
| 7) Actividad | Ficha 28 4to.probl. | Patas y gallinas | - | 28 - 09 - 95 |
| 8) Actividad | Lección 51 | La empacadora | 78 - 79 | 05 - 10 - 95 |
| 9) Actividad | Ficha 39 | El boliche | -- | 10 - 10 - 95 |
| 10) Lección | Lección 57 | Completa la serie | 88 | 10 - 10 - 95 |
| 11) Entrevista a M. | Lección 51 | La empacadora | - | 10 - 10 - 95 |
| 12) Actividad | Lección 58 | Los puestos de fruta | 89 | 12 - 10 - 95 |
| 13) Lección | Lección 61 | El tapete de cuadrados | 93 | 12 - 10 - 95 |
| 14) Lección | Lección 68 | Las estampas | 102 - 103 | 17 - 10 - 95 |
| 15) Actividad | Lección 74 | La cooperativa escolar | 112 - 113 | 19 - 10 - 95 |
| 16) Lección | Lección 77 | Tonatiuh Multiplica (incluye actividad extra: Las tablas de multiplicar). | 118 - 119 | 24 - 10 - 95 |
| 17) Actividad | Lección 81 | El cuadro de Multiplicaciones | 126 - 127 | 26 - 10 - 95 |
| 18) Actividad | Lección 85 | Brinca la tablita | 132 - 133 | 31 - 10 - 95 |
| 19) Lección | Lección 86 | ¿Quién encuentra el resultado? | 133 | 07 - 11 - 95 |
| 20) Lección | Lección 90 | Vamos al Fútbol | 138 | 07 - 11 - 95 |
| 21) Lección | Lección 91 | ¿Cuál es la cuenta? (incluye breve charla con M sobre la actividad). | 139 | 09 - 11 - 95 |
| 22) Lección | Lección 93 | Los hexágonos de 6 triángulos | 141 | 09 - 11 - 95 |
| 23)Actividad | Lección 94 | Hunde el submarino | 143 - 144 | 28 - 11 - 95 |
| 24) Lección | Lección 95 | La mamá de Tonatiuh (Incluye entrevista a M sobre la actividad). | 114 - 115 | 11 - 01 - 96 |
| 25) Actividad | Ficha 47 versión 1 | ¿Cinco en cada caja? | - | 12 - 01 - 96 |
| 26) Lección | Lección 99 | Nopaltepec. (Incluye breve charla con M. sobre la actividad). | 150 | 16 - 10 - 96 |
| 27) Lección | Lección 103 | Las tunas (incluye actividad extra: Los cartones de huevo). | 156 - 157 | 23 - 01 - 96 |
| 28) Entrevista con M. | Lecciones 99 y 103. | Las tunas y Nopaltepec. | - | 24 - 01 - 96 |
| 29) Lección | Lección 107 | Domingo, el albañil | 162 - 163 | 30 - 01 - 96 |
| 30) Lección | Lección 104 | El día del niño | 158 - 159 | 01 - 02 - 96 |
| 31) Actividad | Lección 117 | Submarinos | 175 | 01 - 01 - 96 |
| 32) Entrevista final a M. | - | - | - | 11 - 06 - 96 |

El jurado designado por el Departamento de Investigaciones Educativas del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, aprobó esta tesis el día 3 de febrero de 2004.

M. en C. Irma Rosa Fuenlabrada Velázquez.
Investigadora del Departamento de
Investigaciones Educativas.

Dr. David Francisco Block Sevilla,
Investigador del Departamento de
Investigaciones Educativas.

Dra. Alicia Ávila Storer,
Investigadora Titular de la
Dirección de Investigación de la
Universidad Pedagógica Nacional.

M. en C. Mónica Inés Schulmaister Lagos
Subdirectora del Área de
Matemáticas de la
Dirección General de Materiales y
Métodos Educativos,
SEP.