CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS
DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
DEPARTAMENTO DE INVESTIGACIONES EDUCATIVAS

ESTUDIO DIDÁCTICO DE LA NOCIÓN DE PORCENTAJE

Tesis que para obtener el grado de Maestro en Ciencias con Especialidad en Investigaciones Educativas

Presenta

Tatiana María Mendoza von der Borch
Matemática

Director de tesis

David Francisco Block Sevilla
Doctor en Ciencias

México, D.F.
Junio, 2007

CALZADA TENORIOS No. 235 México, D.F. C.P. 14330 APARTADO POSTAL 85-355
Tel. 54 83 28 00 Fax DIE 56 03 39 57

PARA LA ELABORACIÓN DE ESTE TESIS, SE CONTÓ CON EL APOYO
DE UNA BECA DE CONACYT

A mi cachorrito, por todo lo que nos espera

A G R A D E C I M I E N T O S

A David Block por el interés y el compromiso en la dirección de este trabajo. Gracias por las minuciosas lecturas de las múltiples versiones de cada capítulo, por nuestras largas discusiones, por tus agudas observaciones. Gracias por haber seguido los caminos en los que estaban mis posibilidades para aprender, y por el proceso de mirar las aguas cada vez más revueltas donde al principio parecían transparentes.

A Grecia Gálvez, Antonia Candela y Hugo Balbuena, por la cuidadosa lectura de este trabajo, y por las atinadas observaciones que ayudaron a cerrarlo y, al mismo tiempo, a abrir nuevas preguntas.

A Laura Reséndiz por la ayuda con los registros de clase, por los reiterados intentos en el análisis estadístico y por el apoyo constante.

A los alumnos de secundaria y el maestro que aceptaron llenar de voces este trabajo.

Al seminario de didáctica de las matemáticas: Laura Reséndiz, Diana Solares, Moisés García, Margarita Ramírez, Mónica Mendoza, Rocío Guzmán, Néstor González, Ana Laura Barriendos, por la oportunidad para ver un mismo problema desde muchos lugares diferentes.

A la *perrada* de mi grupo de maestría: Abelardo, Job, Tania, Leonel, Javier, Evgueni, Iván y Homero por la risa, por el cariño, por la fuerza que nos dio vivir juntos este proceso.

A los profesores de la maestría, especialmente a María de Ibarrola y Justa Ezpeleta por la posibilidad de situar mi proyecto, necesariamente acotado, en un contexto más amplio; a Elsie Rockwell, por encontrarme una y otra vez con que "*para que un alumno dé una respuesta correcta en clase, la respuesta debe ser «correcta» en su contenido académico y en su forma social*"; a Alejandra Pellicer y Josefina Granja por su dedicación, por asumir intensamente el propósito de ayudarnos a *estudiar* mejor.

A todos los "*pipiripau*", sobre todo a "la tía", porque a partir del encuentro con ustedes vine a parar por aquí.

A Marcia Barrientos, Lilia Alvarado, Rosa María Martínez y al personal administrativo del DIE, por su apoyo y su calma con mis peticiones apresuradas.

Y a los que, desde otros lugares, me siguen enseñando a estar atenta porque nada es fácil:

A mis padres, Maren y Alfonso, porque siempre nos han dado el ánimo y las posibilidades para hacer lo que nos gusta.

A mi Moi, por todas las intensas maneras que hemos encontrado para crecer juntos: “la risa es la distancia más corta entre dos personas”.

A mis hermanas, Paulina y Lucía. A la Elena, la Vale, Kathya, Edna y Vanessa. Por la cercanía durante todos estos años.

A Alma Toledo, por ayudarme a decir tranquilamente: “*esto es lo que soy, y es lo que he podido hacer*”.

RESUMEN

El presente estudio consiste en el análisis didáctico de una secuencia de clases experimentales dirigidas a la enseñanza del porcentaje. Se analizan los resultados de su aplicación en un grupo de primer grado de secundaria de una escuela pública urbana de la ciudad de México. Previamente se presentan los resultados de dos análisis preliminares: el de la problemática conceptual de la noción, incluyendo sus vínculos con las razones, las fracciones y los decimales, de los cuales hereda su complejidad, y el desempeño obtenido por dos grupos de secundaria frente a un cuestionario y entrevistas.

El análisis de la secuencia se centra en la diversidad de procedimientos a los que recurren los estudiantes, las formas en que dichas técnicas circulan en el aula, el débil sentido que los alumnos parecen depositar en las técnicas algorítmicas a pesar de utilizarlas frecuentemente, las formas de verificación de las resoluciones puestas en juego por los estudiantes, el tránsito entre el registro gráfico y numérico y los niveles de coexistencia de conocimientos correctos y erróneos acerca del porcentaje en un sujeto. Asimismo, se pone de relieve la manera en que la elaboración del conocimiento se entreteje con las formas de interacción que se configuran en la clase.

Se destaca la necesidad de profundizar en el estudio de las posibles formas en las que los estudiantes de secundaria podrían acceder a una mayor articulación del porcentaje con la proporcionalidad, las fracciones y los decimales.

INDICE

INTRODUCCIÓN **1**

El porcentaje, noción muy utilizada por unos, poco comprendida por otros 1

Nuestro recorte de la problemática del porcentaje y nuestro acercamiento 5

CAPÍTULO 1. LA PROBLEMÁTICA CONCEPTUAL DEL PORCENTAJE **9**

1.1 Conceptos matemáticos vinculados al porcentaje **9**

1.1.1 El porcentaje es una razón 9

¿Por qué consideramos importante a la razón si contamos con la noción de fracción? 10

Del estudio de las cantidades al estudio de las relaciones entre cantidades 13

Los dos tipos de razones involucrados en una relación de proporcionalidad 14

Variables didácticas que inciden en la dificultad de una tarea de proporcionalidad 19

Comentario 21

1.1.2 El porcentaje como operador fraccionario o decimal 22

De la relación entre cantidades al número que expresa la relación 22

La multiplicación por racionales: una resignificación de la noción de multiplicación 25

De la fracción como medida a la fracción como operador 26

De la razón local a la razón global 27

¿Por qué son importantes las fracciones si se tienen los decimales? 28

Comentario 29

1.1.3 Concepciones sobre el porcentaje 30

1.2 Tipos de tareas y técnicas relativas al porcentaje **32**

1.2.1 Los tres tipos básicos de tareas 34

Dos formas de establecer las relaciones de proporcionalidad en la resolución de problemas de porcentajes 34

Tres familias de técnicas 36

Efectos de algunas variables numéricas de las tareas en las técnicas asociadas 38

El tipo de registro 47

Técnicas algorítmicas 49

1.2.2 Otros tipos de tareas, que se desprenden de los tres básicos 50

Suma y resta de porcentajes y porcentajes complementarios 51

Multiplicación o composición de porcentajes 52

Interpretar información que se da en datos porcentuales, o traducir información a porcentajes 55

1.2.3 Resumen de los tipos de tareas, sus variantes y los efectos en las técnicas 58

1.3 Comentario final 59

CAPÍTULO 2. PROCEDIMIENTOS Y CONCEPCIONES SOBRE EL PORCENTAJE. EXPLORACIÓN A TRAVÉS DE UN CUESTIONARIO Y DE ENTREVISTAS 61

2.1 Breve caracterización del instrumento 61

2.2 Resultados generales 65

2.2.1 Comportamiento general de los reactivos 65

2.2.2 Desempeño de los dos grupos 66

2.3 Procedimientos, errores, concepciones 67

2.3.1 Los tres tipos básicos de tareas de porcentaje 68

Procedimientos sistemáticamente incorrectos 68

Coexistencia de conocimientos correctos y erróneos sobre el porcentaje 69

Usos limitados y mecánicos de los algoritmos 71

Usos flexibles de los algoritmos 73

Procedimientos no canónicos 75

Primer comentario parcial 81

2.3.2 La noción de razón y el porcentaje 82

La noción de razón 83

El porcentaje como cantidad relativa 85

El porcentaje como razón constante entre magnitudes variables 89

Segundo comentario parcial 92

2.3.3 Porcentajes superiores al 100% 93

2.3.4 Tercer comentario parcial 97

2.4 Comentario final 98

CAPÍTULO 3. PROCEDIMIENTOS Y CONCEPCIONES SOBRE EL PORCENTAJE. EXPLORACIÓN A TRAVÉS DE UNA SECUENCIA DIDÁCTICA 103

3.1 Presentación de la secuencia didáctica 104

3.2 Procedimientos, errores, concepciones 109

3.2.1 Distintas formas de encuentro entre procedimientos 109

Operador decimal-operador fraccionario: sólo una de las dos podría ser correcta 110

Distintas técnicas arrojan el mismo resultado: una posibilidad para admitir otros procedimientos 113

Mayor importancia a la técnica más claramente generalizable: el operador decimal se privilegia en el registro numérico 117

En el registro gráfico se asienta el operador fraccionario, cuando es fácilmente identificable 126
3.2.2 El débil sentido que se deposita en el algoritmo del operador decimal 131
Se recuerda el algoritmo como una serie de operaciones 131
La búsqueda del algoritmo más pertinente para la tarea 133
Rápida generalización de una regla 136
La manera azarosa en que se le hacen ajustes al algoritmo 138
Usos del algoritmo en tareas no pertinentes 140
3.2.3 Las formas de verificación en las tareas de aplicar porcentajes 142
3.2.4 El tránsito entre el registro gráfico y el numérico 146
El registro numérico controla el registro gráfico 147
Desconexión entre los dos registros 152
3.2.5 Manifestaciones de coexistencia del porcentaje visto como medida y como relación 155
En el uso del lenguaje 155
En las respuestas a una pregunta directa: ¿un porcentaje permite ver una medida? 156
En la comparación de porcentajes que provienen de totales distintos 158
Ante la pregunta: ¿qué porcentajes conservan una figura? 160
En el segundo tipo de tareas, con registro gráfico 168
En el tercer tipo de tareas, con registro gráfico 174
3.3 Comentario final 178
CONCLUSIONES **187**
ANEXOS **201**
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS **235**

Introducción

El porcentaje, noción muy utilizada por unos, poco comprendida por otros

El porcentaje es una de las nociones matemáticas que destacan por su frecuente uso social. Aparece en numerosos contextos no escolares tan cotidianos y diversos como la compra y venta de mercancías, los intereses bancarios, la descripción de mezclas y compuestos, la información estadística de noticieros y periódicos. Durante mi experiencia como maestra con adultos no alfabetizados, quienes hacían un especial énfasis en la necesidad de que la escuela se ocupara de enseñar conocimientos útiles para la comunidad, percibía una fuerte demanda hacia la enseñanza de esta noción: la familiarización con el porcentaje es necesaria para poder acceder a ciertas situaciones y para tener la posibilidad de tomar decisiones acertadas.

Sin embargo, esta misma experiencia —aunada a la que tuve con alumnos de bachillerato— me llevó a observar que los conocimientos que se adquieren sobre esta noción en la interacción con situaciones extraescolares son muy limitados, e incluso que esta noción es poco comprendida y poco utilizada por los estudiantes. El propio hecho de que sea un contenido del currículum escolar de primaria, de secundaria y de bachillerato lo sugiere: si la comprensión de esta noción pudiera lograrse a partir de su uso sin una enseñanza intencionada no se convertiría en una exigencia hacia la escuela.

Muy probablemente, este fenómeno de incomprensión de una noción matemática básica por parte de la sociedad es uno de muchos casos similares. Artigue, una investigadora francesa en didáctica de las matemáticas, afirma que:

> Si bien en nuestras sociedades parece ser cada vez más compartida la idea de que es necesaria una cultura matemática y científica sólidas para que todos los individuos puedan ejercer sus responsabilidades ciudadanas, esas mismas sociedades se han organizado para funcionar sobre la base de una cultura matemática y científica poco profundas. (Artigue, 2004: 6)

Podemos ver entonces que la constante presencia en ámbitos no escolares de situaciones que requieren la puesta en juego de herramientas matemáticas no implica, excepto en ciertos casos[1], el dominio de estas herramientas por parte de los ciudadanos.

[1] Por ejemplo, el de la numeración oral, y el cálculo aritmético mental

En el caso específico del porcentaje, un primer análisis de la noción permite muy pronto poner de manifiesto cierta complejidad conceptual: como veremos más adelante, se trata de una noción multifacética vinculada con algunas de las nociones más complejas de la aritmética básica, la de razón y la de operador multiplicativo, fraccionario y decimal, de las cuales hereda las problemáticas didácticas.

Así, pensamos que —a diferencia de lo que quizás sucede con contenidos como la medición, la numeración o el cálculo—, la comprensión del porcentaje sin una enseñanza intencionada es poco factible, por lo que su condición de contenido escolar de la asignatura de matemáticas es necesaria. Sin embargo, en este terreno, el de la escuela, existe otra fuente importante de dificultades relativas a la enseñanza, no solamente del porcentaje sino, sobre todo, de las nociones vinculadas.

La reconstrucción del porcentaje en los planes y programas oficiales ha sufrido transformaciones considerables en las últimas cuatro décadas[2]. En cada propuesta curricular se le ha hecho vivir en un universo distinto. En la propuesta de los años sesenta el porcentaje se enseñaba en el marco de la vieja teoría de razones y proporciones, la cual se caracterizaba, entre otros, por la importancia que otorgaba a las aplicaciones prácticas en ámbitos como el comercio y por el uso de una serie de reglas operatorias desvinculadas de las magnitudes y difíciles de justificar. (Bosch, 1994; Ramírez, 2004) En la propuesta de los setenta, el porcentaje se inscribe en la teoría de fracciones, y de alguna manera, no inmediata, se relaciona con la noción de función, lo cual es más acorde con la organización actual de los saberes en el gremio de los matemáticos, aunque no se traduzca, necesariamente, en una alternativa didáctica más accesible. Finalmente, en la propuesta vigente, la de los noventa, se recupera la noción de porcentaje como caso particular en el estudio de las razones y la proporcionalidad —aunque el tratamiento es muy distinto al que se le daba en la vieja propuesta de los años sesenta—, obedeciendo a consideraciones que provienen de los avances de la didáctica de las matemáticas. Por ejemplo, la identificación en un primer momento de la noción de porcentaje con una razón del tipo “tantos de cada 100” posibilita a los alumnos, entre otras cosas, explicarse el funcionamiento de los procedimientos de resolución, o incluso

[2] Una parte del estudio que realizamos sobre la enseñanza del porcentaje en el nivel básico consistió en una revisión del tratamiento de la noción en las tres últimas propuestas curriculares para quinto y sexto grados de primaria, en México. Debido a la necesidad de limitar la extensión de este trabajo, no fue posible incluir el análisis de esta revisión.

ponerlos en juego por sí mismos, antes de que éstos les sean enseñados. No obstante, un análisis de ésta última propuesta permite identificar lagunas[3].

La mayor o menor ambigüedad de las diferentes propuestas y los drásticos cambios que han caracterizado a cada una respecto a la que le antecedía son factores que han influido en la construcción de un lenguaje híbrido y confuso que ha afectado las prácticas de enseñanza (Comin, 2002)

Algunos rasgos de las diferentes propuestas curriculares que han tomado lugar en México y de las prácticas que se construyen en las escuelas se explican en parte por las relaciones que la escuela mantiene con otras instituciones, las cuales constituyen un escenario que impone condiciones a la enseñanza de los contenidos. Mencionaremos tres ejemplos relativos a la proporcionalidad, dentro de la que se inscribe el porcentaje.

El primero se refiere al papel que ha jugado la comunidad de matemáticos en el desarrollo de los planes y programas en el nivel básico. Durante varios siglos el desarrollo de las matemáticas estuvo estrechamente vinculado a sus aplicaciones en otras ciencias y ámbitos de la actividad humana. Sin embargo, paulatinamente, en el gremio de matemáticos, esta disciplina ha ido cobrando interés por sí misma como objeto de estudio, con lo que se ha ido desplazando la importancia de sus aplicaciones. Si bien no pretendemos explicar las múltiples y complejas causas de este fenómeno, nos parece importante destacar que influyó en la dilución de la importancia de la vieja teoría de razones y proporciones en la enseñanza, pues ésta encontraba parte de su razón de ser en su utilidad práctica en situaciones como el comercio. (Chevallard y Jullien en Block, 2001)

Por otro lado, entre la comunidad de matemáticos también se fue dando una progresiva pérdida de interés en el estudio de las razones y las proporciones, debida al surgimiento de nuevas obras matemáticas que provocaron una profunda reorganización de las razones y la proporcionalidad: las fracciones, las funciones y el álgebra. Las fracciones se convirtieron en un nuevo medio para operar con razones, el álgebra y las funciones permitieron aumentar y complejizar el campo de problemas estudiados por la

3 Si bien se incluye una interpretación accesible del porcentaje como razón y se da lugar a diversos procedimientos, estos tienden a quedar fuertemente vinculados tanto al contexto como a los datos numéricos en los que se plantean los problemas, lo que dificulta su generalización y su consolidación. Por otra parte, los diferentes significados del porcentaje que se intentan construir no se articulan claramente entre sí. Finamente, el único tipo de problemas que se plantea de manera frecuente y sobre el que hay algún manejo de variables es el de aplicar porcentajes.

proporcionalidad y las herramientas para tratarlos, modificando incluso el lenguaje que se empleaba hasta entonces. La teoría de razones y proporciones, de ser una obra matemática importante, paulatinamente se tornó en apenas un caso particular de poco interés: es sólo una función lineal de dimensión uno, dentro del espacio de funciones —no necesariamente lineales— de cualquier dimensión. La función y el álgebra se configuraron en una organización más abarcadora y por lo tanto más poderosa que la de la proporcionalidad. (Block, 2001; Ramírez, 2004)

Así, el surgimiento de nuevas teorías, el hecho de que la proporcionalidad se volviera caduca en el ámbito de los matemáticos, aunado al culto por las matemáticas "puras", se tradujo en una postura que proponía diluir su enseñanza en la primaria, pues suponían que era posible y conveniente dotar a los alumnos de las nociones más acabadas y con mayor grado de generalidad desde el comienzo de la educación (Perrin-Glorian, 1994; Ramírez, 2004)

Un segundo ejemplo —estrechamente vinculado al anterior— de cómo las relaciones institucionales influyen en la manera en que viven los conocimientos en la escuela se refiere a la articulación entre la proporcionalidad y el álgebra. La fuerte valoración del álgebra como contenido curricular en la preparatoria y universidad constituye en ocasiones un factor que constriñe la enseñanza de la proporcionalidad en los niveles anteriores en aras de promover un estudio temprano del álgebra (Comin, 2002)

Finalmente, un tercer ejemplo de que la enseñanza escolar de las matemáticas está condicionada por las relaciones institucionales, lo encontramos en las repercusiones que la investigación en didáctica ha tenido en la enseñanza de la proporcionalidad. Distintos estudios han mostrado 1) la utilidad de que los estudiantes adquieran cierta capacidad para resolver problemas extra-matemáticos, dentro de los cuales la proporcionalidad aparece frecuentemente como herramienta, 2) la dificultad para los estudiantes de utilizar los conceptos que se les enseñaron en la época de las matemáticas modernas (por ejemplo, las nociones de función y de operador) en la resolución de dichos problemas extramatemáticos; y 3) el hecho de que la construcción de nociones conceptualmente complejas como las de fracción y función lineal podría establecerse con mayor solidez si su estudio se articula con los conocimientos del universo de la proporcionalidad —se han aportado evidencias, por ejemplo, de que, en un proceso de aprendizaje, la noción de razón es anterior a la de fracción (Block, 2001; Brousseau, 1980b).

A partir de hallazgos como éstos se ha sustentado un rescate del estudio de la proporcionalidad en la enseñanza básica:

> Las nociones de razón y de proporción… desaparecieron totalmente del vocabulario "oficial" de los matemáticos. Los conceptos, en cambio, siguen siendo muy importantes: la construcción moderna (de las matemáticas) no los necesita en lo absoluto. Los ha sustituido por la noción de número. Pero la transposición didáctica de esta presentación "moderna" no tuvo éxito. En la génesis escolar de los conocimientos, los profesores necesitan distinciones de conceptos y de términos que estén al alcance de los alumnos. No es fácil saltar y borrar una actividad matemática y didáctica tri milenaria, para sustituirla de un golpe por términos y usos de expertos (Brousseau en Ramírez, 2004: 30)

Hemos visto brevemente cómo la valoración social de los conocimientos matemáticos, la complejidad conceptual de la noción de porcentaje y las dificultades que se han enfrentado en su enseñanza plantean diferentes retos para la gestión escolar de esta noción. Nos parece que la problemática que hemos esbozado muestra la pertinencia de realizar un estudio didáctico sobre la noción de porcentaje.

Nuestro recorte de la problemática del porcentaje y nuestro acercamiento

Como referentes teóricos y metodológicos recurrimos a la Teoría de las Situaciones Didácticas (Brousseau) y a la Teoría Antropológica de lo Didáctico (Chevallard). Ambas teorías muestran la estrecha vinculación entre lo didáctico y lo matemático, que sólo pueden ser disociables analíticamente —desde ciertas perspectivas— pero no empíricamente. El conocimiento matemático, que antes se consideraba como transparente y por lo tanto no susceptible de ser cuestionado, es problematizado desde estas teorías. Ambas incluyen al conocimiento matemático dentro de los objetos de estudio de la didáctica, partiendo de los supuestos —asumidos en este trabajo— de que "todo fenómeno didáctico (...) tiene un componente matemático esencial (...) y (...) todo fenómeno matemático tiene un componente didáctico esencial." (Chevallard, et. al. 1998: 76)

Además, estas teorías ponen en primer plano los problemas, y más en general, las tareas que están asociados a los conocimientos, lo cual en la perspectiva de la enseñanza es fundamental. Los problemas ya no son vistos como aplicaciones de una obra matemática previamente construida, sino como posibles puntos de partida en la génesis de tal obra.

Nuestro trabajo se ubica en la perspectiva de la ingeniería didáctica, una metodología de investigación propia de los estudios —situados en la Teoría de Situaciones Didácticas— que implican experimentación en el aula. A continuación explicamos esta metodología, a partir de la caracterización de las tres componentes de las que consta nuestro proyecto:

1. Análisis de la problemática conceptual del porcentaje

Esta componente obedece a la pretensión de desentrañar la problemática conceptual específica del porcentaje, es decir, dilucidar los diferentes significados que puede cobrar, sus vínculos con otras nociones, los tipos de tareas que involucran al porcentaje y la manera en que se relacionan con los procedimientos para resolverlos.

Para ello es necesario presentar brevemente algunos aspectos de la problemática didáctica relativa al aprendizaje de las nociones que subyacen al porcentaje, a saber, la de razón, proporcionalidad y operador fraccionario y decimal.

2. Análisis del desempeño de estudiantes de secundaria en tareas de porcentaje y de razón

La aplicación de un cuestionario en forma grupal y la realización de entrevistas individuales a estudiantes de secundaria responden a la intención de explorar los diferentes tipos de tareas que éstos pueden resolver y los procedimientos que utilizan en las resoluciones. Puesto que, según los programas, el porcentaje se enseña en primaria y hasta primero se secundaria, escogimos alumnos que cursaban su segundo año de secundaria de manera que la aplicación del cuestionario nos permitiera formarnos una idea del aprendizaje que los alumnos han alcanzado respecto a esta noción en la asignatura de matemáticas durante todo el ciclo de educación básica. El análisis de las dificultades de los alumnos permite también hacer algunas inferencias respecto a la reconstrucción escolar del porcentaje.

3. Diseño, implementación y análisis de una secuencia de situaciones didácticas

Las dos componentes anteriores constituyen el análisis preliminar para el diseño de una secuencia de cuatro clases experimentales con un grupo de alumnos de primer grado de secundaria. La exploración de la problemática conceptual intrínseca al porcentaje, así como de ciertos rasgos de su aprendizaje —y su enseñanza— proporciona un espectro de los distintos tipos de tareas, la manera en que la manipulación de sus variables puede incidir en los procedimientos para resolverlas, las dificultades que se manifiestan en estas resoluciones y la significación que los procedimientos permiten otorgarle al porcentaje. A partir de este abanico es posible hacer elecciones y recortes proyectados en el diseño de las situaciones. Los análisis preliminares, junto con el análisis a priori —que consiste en una anticipación de los procedimientos, errores, dificultades susceptibles de emerger durante el curso de las sesiones— son útiles no sólo para la construcción de la secuencia sino también para el estudio de los resultados de su implementación: ambos vuelven observables las relaciones entre las elaboraciones de los estudiantes y las características de las situaciones en las que se fabrican. El estudio de estas relaciones, central en didáctica, le imprime a la metodología que hemos adoptado uno de sus rasgos fundamentales: el propio instrumento es objeto de análisis.

Cabe destacar que, dado que el diseño consiste en una micro-ingeniería didáctica —consta únicamente de cuatro sesiones—, el análisis sólo permite considerar localmente la complejidad de los fenómenos en clase: no permite establecer los aprendizajes logrados por los alumnos a partir de la secuencia de situaciones, pues dichos aprendizajes suelen manifestarse en un largo lapso de tiempo que sobrepasa al de la enseñanza. El análisis de una micro-ingeniería posibilita entender los conocimientos de los que los alumnos ya disponen y la manera en que son confrontados por las situaciones.

Finalmente, si bien los análisis preliminares permiten el diseño y la interpretación de lo ocurrido en las sesiones, estos estudios también se ven enriquecidos a partir de la experiencia de micro-ingeniería didáctica: la relación entre las distintas componentes de la tesis no es unidireccional. Respecto a esto nos interesa señalar que, además de los vínculos que hemos señalado entre ellas, cada una tiene un espíritu propio: son tres puntos de vista diferentes desde los que se proyecta la complejidad de la noción de porcentaje. De ahí que algunas de las conclusiones de esta investigación son en realidad específicas de una de sus componentes y por lo tanto se presentan en el capítulo correspondiente. Al final del trabajo incluimos sólo las conclusiones que aglutinan aspectos estudiados a lo largo de toda la tesis.

Veamos ahora las principales nociones teóricas en las que nos apoyamos para construir e interpretar nuestros datos.

En la Teoría de las Situaciones Didácticas el conocimiento se modela mediante las situaciones en las que interviene, a partir de las cuales cobra significado. El análisis implica por lo tanto el estudio de la diversidad de dichas situaciones y de las maneras en que en ellas interviene el conocimiento. La noción de concepción es una de las herramientas de la teoría que permiten estudiar el papel del sujeto en las relaciones entre un determinado saber matemático y el conjunto de situaciones que resuelve. Esta noción permite poner de manifiesto que no hay una correspondencia directa entre los saberes culturales que son objeto de enseñanza y la interpretación que de ellos hacen los alumnos, por un lado, y la diversidad de puntos de vista posibles sobre un mismo objeto, por el otro. Un mismo saber puede asociarse a diferentes concepciones —que incluso pueden ser erróneas— que dependen de las características de las situaciones que las hacen emerger: distintas concepciones hacen visibles diferentes aspectos de un mismo objeto matemático. Una concepción es entonces aquello que emerge a partir de la acción de un sujeto sobre un conjunto de situaciones, es un agregado de conocimientos locales, los cuales son provisorios y con un rango restringido de validez. Y se manifiesta precisamente a través de las características de las situaciones que el sujeto es capaz de resolver y aquellas en las que fracasa. (Artigue, 1989)

La noción de contrato didáctico, de Brousseau, también nos resulta útil, pues da cuenta de la imbricación entre la manera en que juega un conocimiento en una situación didáctica y los códigos de participación social[4] que se establecen durante el curso de las interacciones en el aula. Por un lado, las expectativas que tanto el maestro como los alumnos generan respecto a los otros —y que no siempre son explícitas— marcan restricciones a la intervención del conocimiento, pero también constituyen una condición necesaria para su elaboración: el conocimiento a producir en la clase encuentra la medida de su posibilidad en el contrato didáctico. El conocimiento a su vez marca pautas sobre la actividad de los sujetos, influye, por ejemplo, en la determinación de lo que se considera una buena argumentación, de los alumnos que cobran mayor legitimidad frente a sus compañeros y de las condiciones que se deben satisfacer para participar «correctamente» en la actividad. (Sadovsky, 2003)

Anteriormente mencionamos que la Teoría de las Situaciones Didácticas propone la modelación del conocimiento matemático a través de situaciones. La Teoría

---

[4] Desde algunas perspectivas afiliadas a la etnografía o al análisis del discurso se habla de "la estructura de participación social de la clase", "pautas culturales compartidas en el aula", "construcción de acuerdos de trabajo", "contexto social interactivo" para referirse a la clase como un encuentro social en el que se construyen significados compartidos entre maestro y alumnos. Algunos autores destacan la mutua implicación entre el contexto cultural de la clase y el contenido académico que en ella se aborda. Mehan, por ejemplo, plantea que "para que un alumno dé una respuesta correcta en clase, la respuesta debe ser «correcta» en su contenido académico y en su forma social" (Mehan en Erickson, 1993). La didáctica de las matemáticas refuerza estos planteamientos, pero enfatiza con más fuerza el papel del contenido.

Antropológica de lo Didáctico precisa este acercamiento al definir al conocimiento como una praxeología:

> La respuesta matemática a una cuestión cristaliza en un conjunto de objetos ligados entre sí por diversas interrelaciones, esto es, en una *organización matemática.* Dicha organización es el resultado final de una actividad matemática que, como toda actividad humana, presenta dos aspectos inseparables: la práctica matemática o "praxis" que consta de *tareas* y *técnicas,* y el discurso razonado o "logos" sobre dicha práctica que está constituido por *tecnologías* y *teorías.* (...) Al unir las dos caras de la actividad matemática se obtiene la noción de *praxeología*[5]. (Chevallard, et. al. 1998: 274)

Por lo tanto, nuestra tarea descrita anteriormente consistirá, más precisamente, en caracterizar algunos elementos de una praxeología relativa al porcentaje (problemática conceptual del porcentaje), desentrañar las diferentes reconstrucciones de esta praxeología en los diferentes desarrollos curriculares (análisis de las lecciones de los libros de texto) y explorar algunos rasgos de las posibles concepciones que los estudiantes manifiestan a través de la manera en que producen y justifican técnicas para resolver tareas de porcentaje (aplicación y análisis del cuestionario, entrevistas y una secuencia didáctica).

[5] Para Chevallard, la teoría es sólo una de las cuatro componentes de una obra matemática o praxeología. El autor critica el que comúnmente se denomine teoría a toda la obra, lo cual deja ver cierto desdén por las tareas y las técnicas, es decir, por el saber-hacer, privilegiando al saber, es decir, al discurso razonado sobre la práctica. En este trabajo asumimos la acepción de Chevallard, salvo en algunas excepciones que a nuestro parecer quedan claras por el contexto. Por ejemplo, hablamos de "la vieja teoría de razones y proporciones", respetando la manera en que se le ha denominado durante varios siglos.

Capítulo 1

La problemática conceptual del porcentaje

¿Cómo se pueden reconstruir ciertos elementos de una praxeología relativa al porcentaje? Es decir, ¿Cuáles son los tipos de tareas relacionados al porcentaje? ¿Cuáles son las técnicas de resolución y cómo se ven afectadas por las variables didácticas de las tareas? ¿Cómo se relacionan entre sí las diferentes técnicas? ¿Cómo se vincula el porcentaje con las nociones de razón, proporcionalidad y fracción? ¿Con qué otros saberes se relaciona de manera estrecha? ¿Qué concepciones de porcentaje es posible anticipar?

Estas son algunas de las preguntas que tratamos de abordar en este capítulo, que está organizado en dos grandes partes. En la primera se presenta un análisis didáctico de los conceptos matemáticos con los que la noción de porcentaje está vinculada de manera importante: razón, proporción, fracción y número decimal, destacando algunas de las implicaciones didácticas más importantes de estos vínculos. Se incluye además una caracterización a priori de las posibles concepciones del porcentaje que en parte se desprenden de los vínculos que esta noción guarda con otras. La segunda parte consiste en un análisis de los tipos de tareas y de las técnicas que involucran al porcentaje.

1.1 Conceptos matemáticos vinculados al porcentaje y las concepciones que se desprenden de estos vínculos

La noción de porcentaje puede definirse de distintas maneras, cada una de las cuales implica la puesta en juego de herramientas diferentes. En este apartado haremos una caracterización de estas definiciones, después de analizar la problemática didáctica de dos de ellas: el porcentaje como razón y como operador, que puede ser fraccionario o decimal.

1.1.1 El porcentaje es una razón

Cualquier porcentaje puede ser visto como una razón y como una regla de correspondencia. En esta concepción del porcentaje, la razón aún no se cuantifica con un número, se expresa mediante dos cantidades: 25% es “25 de cada 100”.

El porcentaje, asumido como razón, presenta algunas semejanzas y diferencias en relación a las demás razones. Por un lado, se comporta como cualquier razón, sólo que la denominación “porcentaje” y el signo “%” le confieren una forma específica de ser nombrado y representado. Por otro lado, tiene características propias, algunas de las cuales posiblemente facilitan en alguna medida su comprensión en comparación con otras razones: su uso social extendido, el hecho de que solamente se relacionan cantidades de la misma especie, es decir, de que es una razón “homogénea” y el hecho de que uno de los términos de la relación siempre es 100.

Consideramos entonces necesario revisar algunos aspectos de la problemática didáctica de la noción de razón. Anteriormente mencionamos que desde la didáctica de las matemáticas se propone que, aún cuando la noción de razón ya no tiene vigencia en el gremio de los matemáticos y cuando se cuenta con nociones más abarcadoras y poderosas, como la de fracción o función, las razones pueden ser importantes en la génesis de otras nociones de mayor complejidad conceptual.

¿Por qué consideramos importante a la razón si contamos con la noción de fracción?

Freudenthal ha destacado que la noción de razón, entendida como una relación entre dos números del tipo “*a* es a *b*” que genera una serie de relaciones equivalentes, encuentra su sentido antes de ser cuantificada como un número, por lo que debe separarse de la fracción:

> El significado de la razón aparece cuando se habla de la igualdad (y la desigualdad) de razones, sin conocer su tamaño, cuando se dice, con sentido, “*a* es a *b* como *c* es a *d*”, sin anticipar que “*a* es a *b*” puede reducirse a un número o a un valor de magnitud *a/b* (Freudenthal, 1983: 180)

Así, la fracción entendida como un número no puede dar cuenta del significado de la razón, cuando ésta aparece en una comparación de relaciones. La transformación de una razón en un cociente o una fracción conlleva una reducción en la complejidad de la razón: “Los cocientes y las fracciones constituyen formas de reducir esta complejidad, de bajar su estatuto lógico, a costa de la lucidez” (ob.cit: 181)

Freudenthal sugiere la posibilidad de que la comprensión de la fracción esté subordinada a la de la razón: “Uno debe dudar de que las fracciones puedan enseñarse intuitivamente, si falta intuición de la razón” (ob. cit: 181)

Como veremos más adelante, la noción de fracción puede cobrar distintos significados. Uno de ellos es el de razón, por lo que el estudio de ésta enriquece el contenido semántico de la fracción.

Por otro lado, una de las preguntas que se plantea Bosch (1994) concierne a la posible diferenciación entre las nociones de razón y fracción en algunos textos clásicos dedicados a la enseñanza de la proporcionalidad. Argumenta que ambas están imbricadas, pero no se identifican completamente pues las razones no se manipulan como si fueran números. Por ejemplo, en uno de los libros que revisa, el autor, para simplificar una razón, la transforma en otra nueva, aunque equivalente:

Sea la razón $4:\frac{5}{6}$ Transformación (multiplicar ambos términos de la razón por 6)

$4:\frac{5}{6}=4\times 6:\frac{5\times 6}{6}=24:5$

Esto muestra que le confiere a las razones un estatuto distinto a las fracciones, pues de lo contrario, probablemente habría manipulado la razón dada como una división del entero 4 entre la fracción 5/6, de la siguiente manera:

$$4:\frac{5}{6}=\frac{4\times 6}{5}=\frac{24}{5}$$

De hecho, el término matemático moderno que más se ajusta al significado que cobraban las razones en la organización clásica y a la manera que se vinculaban con otros saberes no es el de número sino el de función lineal. Esta noción es más susceptible que la de número para dar cuenta de la manera en que se manipulaban las razones, en particular, de transformaciones como las que mostramos en el ejemplo anterior. Es decir, la noción de función lineal permite dar cuenta de la relación entre dos conjuntos de cantidades determinada por una razón[6]:

> podríamos decir que el texto de enseñanza clásico hace vivir la noción de razón *a falta* de la de función (lineal); o, a la inversa, que si podemos hoy día prescindir de la noción de razón es gracias a que disponemos de la de función (Bosch, 1994: 187)

En base a lo anterior, Block (2001) argumenta que la razón, como relación entre dos números enteros, es precursora de las fracciones en los procesos de aprendizaje, como lo fue hasta cierto punto en la historia. A partir del análisis de una serie de entrevistas con alumnos de entre tercero y sexto grados de primaria mostró que los niños recurren al uso de razones antes de disponer de las fracciones, y entonces, que “las

[6] El ejemplo anterior se puede traducir de la siguiente manera: si a 4 le corresponde 5/6, entonces cualquier otra pareja de números asociada a la función debe obtenerse multiplicando los términos 4 y 5/6 por un mismo factor. En particular, multiplicando por 6 se deduce que a 24 le corresponde 5.

razones de números enteros funcionarían como la forma implícita, germinal, de las fracciones" (p.484). Solo que precisamente este rasgo, su funcionamiento implícito y germinal hace que se vuelva poco visible desde la enseñanza, que no se le reconozca como objeto de estudio. Por el contrario, se suele asumir con más fuerza el estudio de las fracciones, pero éstas no se abordan como la culminación de un proceso de construcción que comienza con las razones.

En este terreno, el de las prácticas de enseñanza de la proporcionalidad, Ramírez (2004) mostró, a partir de un estudio de caso, la convivencia de dos procesos paralelos: el que intentaba gestionar el profesor, conformado por los procedimientos que apelan a las fracciones y que se caracterizan por ser explícitos, formales y de amplio alcance pero poco accesibles para los alumnos, y por otro lado, el proceso puesto en juego por los estudiantes, quienes elaboraban resoluciones no a partir de las fracciones sino de las razones, que no obstante, figuraban de manera implícita.

Puesto que el porcentaje, como toda razón, puede expresarse también mediante una fracción o un decimal, la discusión de los párrafos anteriores apunta a considerar la conveniencia de estudiar la noción de porcentaje como relación entre dos cantidades, antes de verla como número.

Hasta ahora hemos intentado mostrar algunos argumentos que, desde distintos ángulos, se han esgrimido para revalorar en la enseñanza básica el estudio de las razones como una noción distinta y previa a la de fracción. Por su parte, los trabajos de Vergnaud (1988) apuntan en otra dirección: si bien él distingue la razón de la fracción, se apoya en la noción de campo conceptual para poner el énfasis en la necesidad de estudiar a éstas y otras nociones de manera integrada y a lo largo de amplios periodos de tiempo. Su perspectiva es la siguiente: un concepto puede tener distintos sentidos, que se construyen a partir de la interacción del sujeto con determinadas situaciones. A su vez, esas situaciones ponen en juego distintas nociones. Así, el campo conceptual da cuenta de la coexistencia de un conjunto de nociones que son herramientas necesarias para el dominio de un conjunto de situaciones en las que un concepto cobra significación.

En particular, el campo conceptual de las estructuras multiplicativas es "el conjunto de todas las situaciones que pueden ser analizadas como problemas de proporción simple o múltiple y para los cuales usualmente se necesita multiplicar o dividir" (ob. cit: 141) Si bien Vergnaud no define la noción de razón, la considera como un elemento constitutivo de este campo conceptual. Así, el aprendizaje de la noción de porcentaje ocurre en el seno de las estructuras multiplicativas en estrecha relación con las nociones de función lineal y no lineal, espacio vectorial, multiplicación, división, fracción, razón, número racional:

> Este análisis muestra que no sería prudente estudiar el aprendizaje y la enseñanza de las fracciones, razones y tasas[7] independientemente de las estructuras multiplicativas. Sólo cuando todos estos diferentes significados son sintetizados en el concepto de número racional es finalmente posible pensar en las fracciones y las razones como números puros (Vergnaud, 1988: 158)

Veamos ahora otros aspectos que desde la didáctica se han puesto de relieve en relación al estudio de la razón en el nivel básico: el tránsito de los números a las razones, los dos tipos de razones, los dos tipos de procedimientos asociados a ellos y las variables que afectan la dificultad de los problemas.

Del estudio de las cantidades al estudio de las relaciones entre cantidades

Un paso difícil e importante en el estudio de la aritmética en el nivel básico es el que va del trabajo con medidas (la mesa mide de largo 3 metros, el sobre pesa 25 gramos) al trabajo con relaciones entre medidas (las medidas de una figura son dos veces las de otra) Frente a algunas de las primeras tareas que implican considerar relaciones entre dos medidas, lo que a su vez requiere coordinar dos variables, los niños tienden a centrarse en una sola de ellas, dejando de lado la idea de relación. Cuando empiezan a considerar la relación, no logran dar cuenta, inmediatamente, de sus características precisas, pueden limitarse, por ejemplo, a considerar que es monótona (si una cantidad aumenta, la correspondiente también, pero no en la misma razón), o pensar que es aditiva cuando es multiplicativa. Si bien la posibilidad de identificar y manejar la noción de razón supone el desarrollo de ciertas estructuras de pensamiento (Noelting, 1980a; 1980b), también requiere de procesos de enseñanza que ofrezcan experiencias a los alumnos para que éstos puedan desechar hipótesis incorrectas y adquirir nuevas herramientas aritméticas para manejar la relación.

Por ejemplo, Block (2001) diseñó una secuencia de situaciones en las que se entregaba a los niños una cantidad de fichas que ellos debían cambiar por estampas con la maestra. Para hacerlo, tenían que escoger una regla de cambio, entre varias que se proponían, como:

A. Por cada 6 fichas les doy 12 estampas
B. Por cada ficha les doy 3 estampas

[7] "rates" en el original

C. Por cada 2 fichas les doy 8 estampas
D. Por cada 3 fichas les doy 9 estampas

En un inicio, varios alumnos eligen el trato A, porque entrega más estampas, aunque en la verificación observan que muy pronto se quedan sin fichas. Entonces optan por el trato B, que es el que menos fichas exige. Finalmente consideran las relaciones entre fichas y estampas, a veces de forma cualitativa y otras haciendo cálculos. Por ejemplo, encuentran que el trato C es equivalente a (4 fichas, 16 estampas), el que es fácilmente comparable con A, pues por menos fichas, se entregan más estampas.

A lo largo de este capítulo haremos referencia a otras experiencias didácticas. Veamos ahora algunas de las dificultades que enfrentan cuando ya se consideran las razones.

Los dos tipos de razones involucrados en una relación de proporcionalidad

En una relación entre dos conjuntos de medidas se pueden identificar dos tipos de razones, que Freudenthal (1983) denomina internas y externas. Las explicaremos a partir de un ejemplo: el movimiento de un automóvil, que implica una relación entre las distancias recorridas y el tiempo que tarda en recorrerlas.

	Tiempo	Distancia
Razón Interna $\downarrow$	t_1	d_1
	t_2	d_2

$\longrightarrow$

Razón externa

Las razones internas son dentro de un mismo conjunto, en nuestro ejemplo pueden ser entre dos tiempos o entre dos distancias. Las razones externas son entre los dos conjuntos, en este caso un tiempo y la distancia correspondiente.

Si la relación es de proporcionalidad, es decir, si el movimiento es uniforme, entonces la razón externa es constante —la velocidad siempre es la misma— y cada razón interna en un conjunto de medidas es igual a su correspondiente en el otro conjunto —en tiempos iguales se recorren distancias iguales.

Así, tenemos dos condiciones que caracterizan a una situación de proporcionalidad:

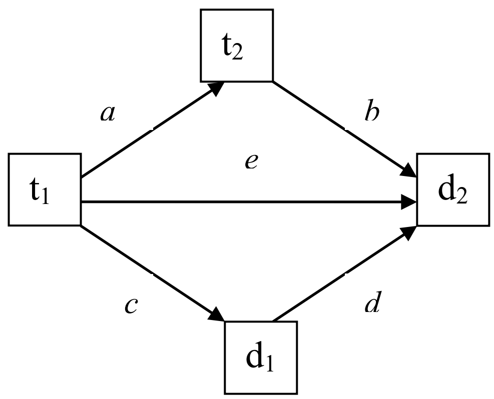
1) Constancia de la razón externa

2) Conservación de las razones internas

Las dos condiciones se implican mutuamente, cada una es necesaria y suficiente para garantizar la proporcionalidad:

$$t_1 : d_1 = t_2 : d_2 \text{ si y solo si } t_1 : t_2 = d_1 : d_2$$

Esto se puede justificar apelando a una regla de la vieja teoría de razones y proporciones que consiste en que en una proporción es posible intercambiar los términos medios. No obstante, esta regla es un poco oscura, el siguiente esquema muestra con más claridad la implicación entre las dos condiciones:



La relación entre dos números, por ejemplo entre t_1 y t_2, se indica mediante una flecha

$$t_1 \xrightarrow{a} t_2$$

donde a es el operador multiplicativo que hace pasar de t_1 a t_2. Así, tanto la composición de a con b como la composición de c con d parten de t_1 y llegan a d_2, es decir, dan como resultado el operador e.

La constancia de la razón externa implica que los operadores b y c son iguales, por lo que necesariamente a y d deben coincidir para que se mantenga el operador e, es decir, se deben conservar las razones internas. Análogamente, la conservación de las razones internas obliga a que la externa se mantenga constante.

Los dos tipos de procedimiento para resolver situaciones de proporcionalidad

La posibilidad de recurrir ya sea a las razones internas o a la externa ante un problema de proporcionalidad genera dos tipos de procedimiento. Aquellos que ponen en juego las razones internas se llaman analógicos. Comin (2003) diseñó una secuencia de clases experimentales que intentaba, entre otras cosas, favorecer la caracterización de las situaciones de proporcionalidad a partir de la formulación explícita de ciertas propiedades relativas a las razones internas. Una de las tareas que se proponían a los niños consistía en determinar si una distribución de paquetes de granos de maíz a distintas familias de ratones era o no equitativa. Los rasgos de las relaciones de proporcionalidad surgieron entonces como una convención social, es decir, como una forma de garantizar la equitatividad. Se acordaban frases como las siguientes:

"para un mismo número de granos es necesario un mismo número de ratones"

"si hay más ratones se necesitan más granos"

"si hay el doble de ratones, se necesita el doble de granos"

"si hay el triple de ratones, se necesita el triple de granos"

"a la suma de dos familias de ratones le corresponde la suma de los granos"

La explicitación de estas propiedades basadas en relaciones internas permite determinar si una relación es o no de proporcionalidad, así como construir técnicas para resolver algunos problemas.

Por otra parte, los procedimientos que ponen en juego a la razón externa, utilizándola como operador multiplicativo entre los dos conjuntos de medidas se llaman analíticos. Por ejemplo, en la situación anterior, se podría decir:

"el número de granos es cuatro veces el número de ratones"

A pesar de que las dos condiciones que caracterizan a una situación de proporcionalidad son matemáticamente equivalentes, los dos tipos de procedimientos que generan son diferentes desde el punto de vista didáctico, al menos en los siguientes aspectos:

- En las relaciones que se mantienen invariantes.

Mientras que generalmente existen muchas razones internas diferentes —en nuestro ejemplo, tantas como parejas de tiempos o de distancias— hay sólo una razón externa, pues es constante. Entonces, la percepción de la conservación de las razones internas implica la consideración de *parejas* de valores en cada uno de los dos conjuntos de medidas, mientras que la identificación de la constancia de la razón externa supone la consideración de la razón entre *todas* las parejas formadas por los valores correspondientes entre ambos conjuntos (Block, 2001)

- En las magnitudes de las razones

Las razones internas son números sin dimensión, pues son relaciones entre dos cantidades de la misma magnitud. En cambio, si la relación de proporcionalidad es entre magnitudes distintas —como tiempo y distancia— la razón externa constituye una tercera magnitud, en nuestro ejemplo, la velocidad. En este caso, el uso de la razón externa como operador implica no sólo un tránsito cuantitativo, de un número a otro, sino también uno cualitativo, de una magnitud a otra. Así, la multiplicación de una medida por un operador, que deriva en una medida de otra magnitud supone un operador con dimensión cociente (por ejemplo, metros sobre segundo) o bien implica obviar los dos tipos de unidades implicados (Block, 2001).

La elección de un tipo de procedimiento

Distintos autores se han preocupado por discernir las condiciones que inciden, ante un problema de proporcionalidad, en la elección por parte de los sujetos de estrategias analógicas o analíticas.

Uno de los resultados comunes a diversos estudios realizados a partir de diferentes perspectivas es la tendencia de los niños a privilegiar el uso de procedimientos analógicos. Noelting (1980a; 1980b) llevó a cabo un estudio cognitivo bajo el paradigma piagetiano, en el que se propuso estudiar la génesis del pensamiento proporcional. Su estudio consistió en la aplicación y análisis de un cuestionario a estudiantes de edades que variaban entre los 6 y 14 años, el cual contenía tareas de comparación de razones. Más específicamente, pedía a los niños comparar el sabor a naranja en distintas naranjadas, por ejemplo (5 vasos de agua, 2 vasos de jugo) vs. (7 vasos de agua, 3 vasos de jugo). Logró identificar una jerarquía evolutiva en los procedimientos de los alumnos, dentro de la cual figuraban dos etapas en el desarrollo: una en la que los niños emplean las razones “entre”[8] y otra, posterior, que comienza cuando aparece el uso de la razón

---

[8] Existen diferentes formas de nombrar a los dos tipos de razones. Freudenthal llama externa a la razón que se establece entre dos conjuntos de medidas de distinta magnitud (vasos de agua, vasos de jugo de naranja). Pero esta razón da cuenta de un “estado”, es decir, de un “sabor a naranja”. Así, Noelting la llama “*within-state*” (intra), pues es al interior de un mismo estado. Por otro lado, si bien la razón interna es al interior de un mismo conjunto de medidas, es a la vez entre dos estados distintos, por lo que Noelting la denomina “*between states*” (inter).

“intra”. Hart (1981) mostró, a partir de la aplicación de un cuestionario a estudiantes de secundaria, que los alumnos tendían a elaborar lo que ella denominó “building up procedures”, estrategias que ponen en juego a las razones internas, y a evadir el uso de operadores fraccionarios, a pesar de que éstos últimos ya les habían sido enseñados en la escuela. Block (2001) encontró a partir de una serie de entrevistas individuales a alumnos de primaria, que los procedimientos analógicos constituyen “estrategias de base” para la construcción de la noción de operador, tanto natural como racional. Además, estas estrategias permiten a los alumnos estudiar algunas propiedades de las relaciones racionales antes de utilizar explícitamente las fracciones. Soto (2001) realizó un estudio con adultos no alfabetizados, a quienes se pedía resolver algunas tareas de proporcionalidad. Uno de los resultados que destacan consiste en la tendencia de los campesinos a recurrir a procedimientos analógicos, pues éstos les permitían conservar el sentido original de las tareas, a pesar de que las operaciones resultaban muy complicadas y la razón externa era entera y sencilla.

No obstante, no todos los autores coinciden en que generalmente los sujetos optan por el uso de las razones internas antes de recurrir a la externa. Según Comin (2002), las contradicciones entre los resultados encontrados en distintas investigaciones muestran que la elección del tipo de procedimiento depende tanto del sujeto como de la situación, más que de un desarrollo genético universal.

Así, aunque varios autores han mostrado que el uso de las razones internas tiende a ser más intuitivo que el de la externa, ciertas situaciones pueden favorecer más que otras el despliegue de procedimientos analíticos.

Por ejemplo, cuando las magnitudes son de distinto tipo (como distancia y tiempo), la razón externa es de una tercera magnitud, la del cociente (velocidad = metros/segundo), por lo que su uso se puede inhibir. En cambio en un contexto de escalas en el que hay una fuerte carga semántica de transformación es más probable que, si se elige una razón externa muy

---

Vergnaud (1988) propone otra manera de nombrar a los dos tipos de razones. A las internas las denomina “escalar”, ya que al establecerse entre dos medidas de la misma magnitud, son “números puros”, sin dimensión. A la externa la llama “función”, pues determina una relación entre dos conjuntos de medidas. Quizás esta nomenclatura se debe a su preocupación por describir a partir de términos matemáticos modernos las relaciones que de manera implícita son establecidas por los alumnos cuando eligen una estrategia para resolver un problema, es decir, aquellas relaciones que subyacen a su comportamiento.
En este trabajo las llamaremos “externa” e “interna”, pues nos interesa distinguir los dos tipos de magnitudes implicados más que los diferentes estados o las nociones matemáticas subyacentes.

sencilla, ésta aparezca con mayor frecuencia en las resoluciones que las internas. (Block, 2001)

Finalmente, mencionaremos que Noelting (1980b) y Comin (2002) coinciden en que los dos tipos de procedimientos están correlacionados en el uso. Por ejemplo, el empleo de la conservación de las razones internas está subordinado al reconocimiento de que la razón externa es invariante. En palabras de Noelting:

> En las dos estrategias, los sujetos diferencian entre *operación* e *invariante*. En la estrategia inter[9], la razón intra (…) es primero "estabilizada" como una relación *invariante.* Esta relación invariante es repetida, generando entonces una clase de equivalencia a través de una *operación* de co-multiplicación[10] (Noelting, 1980b: 338)

Así, la razón "intra" actúa implícitamente como invariante, mientras que las razones "inter" actúan explícitamente como operadores.

Cualquiera que sea la resolución puesta en juego, uno de los dos tipos de razones aparece implícitamente como *invariante*, mientras que el otro aparece explícitamente, pues se calcula y se utiliza como *operador*.

Estas consideraciones sobre los dos tipos de razones en juego y sobre los dos tipos de procedimientos aplican a todas las situaciones en las que se usa un porcentaje. Más adelante nos detendremos específicamente en ello.

Variables didácticas que inciden en la dificultad de una tarea de proporcionalidad

La manera de abordar un problema depende no sólo de las características del sujeto, también de las propias características del problema. Diversos investigadores se han preocupado por discernir las condiciones de determinada tarea de proporcionalidad que tienen posibilidad de incidir en: 1) el grado de complejidad que implica para el sujeto, 2) el procedimiento de resolución que elige y 3) los errores que comete. Mencionaremos un ejemplo de cada caso:

1. Efectos en el grado de complejidad para el sujeto

Noelting (1980b) encontró en la situación de las naranjadas que ya hemos esbozado, que ciertos reactivos son abordables por niños de entre 6 y 7 años de edad, por ejemplo aquellos en donde las dos razones tienen un término igual, como (1 vaso de agua, 2 vasos de jugo) vs. (1 vaso de agua, 5 vasos de jugo). En cambio, reactivos como (5 vasos de agua, 2 de jugo) vs. (7 vasos de agua, 3 vasos de jugo) en donde no hay términos comunes y ninguna de las razones puede simplificarse, sólo eran correctamente resueltos mucho después, hasta los 13 o 14 años.

---

[9] Recordemos que Noelting llama "inter" a las relaciones internas, e "intra" a la externa.

[10] En las dos estrategias, los sujetos diferencian entre "*operación*" e "*invariante*". En la estrategia entre, la razón intra (…) es primero "estabilizada" como una relación *invariante.* Esta relación invariante es repetida, generando entonces una clase de equivalencia a través de una *operación* de co-multiplicación.

2. Efectos en la estrategia de resolución

Anteriormente mencionamos que en una situación de proporcionalidad, si los dos conjuntos son de la misma magnitud hay mayor probabilidad de que aparezcan procedimientos analíticos que cuando son de distinta magnitud (considerando, claro, que las otras variables tienen valores iguales).

3. En el tipo de errores que aparecen

Hart (1988) mostró que la elección de razones internas no enteras en un reactivo aumentaba la frecuencia en que los niños cometían el error de utilizar constantes aditivas en vez de multiplicativas.

Veamos ahora algunas de las principales características de una tarea que inciden en su dificultad. Vergnaud (1988) ha identificado cuatro grupos de variables, que han sido estudiadas con cierto detenimiento por otros autores:

- la estructura del problema: comparación de razones, valor faltante, proporción múltiple, entre otros. Cada estructura pone en juego distintas relaciones entre los datos, y entonces hace emerger diferentes aspectos de la proporcionalidad;
- el contexto, por ejemplo: problemas con magnitudes físicas son más difíciles que los planteados en contextos de geografía (Vergnaud, 1988), escalas más complejas que recetas (Küchemann, 1989), y más en general, las "matemáticas de la naturaleza" son menos familiares que las "matemáticas de la ciudad" (Chevallard y Jullien en Block, 2001);
- las características numéricas: afecta tanto el tipo de números (chicos o grandes, enteros o decimales), el tipo de razones, internas y externas (enteras o no enteras) (Kuchemann, 1989; Block, 2001); se han identificado también efectos de variables más específicas, por ejemplo, un problema es más difícil si la respuesta es menor que el dato dado, o en el contexto de volúmenes de figuras, si no hay congruencia entre la razón entre volúmenes y la razón entre alturas ($V_2/V_1>1$ y $H_2/H_1<1$) (Vergnaud, 1988)

Otras variables estudiadas han sido: el orden de presentación de los datos (Carretero, 1985, en Vergnaud, 1988); el tipo de magnitudes (Block 2001); la manera de formular la constancia de la razón externa (Block, 2001); el lugar que ocupa la incógnita en un enunciado o la forma de presentar la incógnita —con un signo de interrogación, con un cuadro vacío o con una X— (Dupuis y Pluvinage, 1981, en Ramírez, 2004) el grado de explicitación de la operación demandada (Dupuis y Pluvinage, 1981, en Ramírez, 2004), las condiciones en las que se plantea un problema, como el apoyo o no de material concreto (Tourniaire, 1984)

Comentario

Los estudios sobre el pensamiento proporcional, desde los pioneros de Piaget, hasta los de Noelting, Karplus y otros han puesto en evidencia que dicho pensamiento se desarrolla lentamente a lo largo de un amplio periodo de tiempo que va hasta la adolescencia. Lo anterior no quiere decir que los conocimientos sobre la proporcionalidad no puedan ser estudiados antes, como lo han demostrado ya investigaciones que se han centrado en las grandes diferencias en grados de complejidad dependiendo de ciertas variables de las tareas, pero sí deja ver que, las situaciones de proporcionalidad pueden requerir de los sujetos la puesta en juego de razonamientos relativamente complejos.

Este planteamiento podría parecer paradójico: al mismo tiempo que sorprende que ciertas situaciones pueden ser abordadas a edades muy tempranas, también se sabe que otras situaciones pueden requerir la adquisición por parte del sujeto de algunas herramientas complejas, por lo que sólo podrá abordarlas en edades más tardías. Lo anterior implica que el logro de una comprensión amplia de la proporcionalidad necesita de un prolongado período de tiempo y de un proceso de instrucción a lo largo del cual las herramientas semióticas se vayan tornando cada vez más complejas y enriquecidas.

Finalmente, nos interesa recordar que el porcentaje, en tanto razón, hereda las dificultades a las que nos hemos referido. Más adelante, al hacer un análisis específico del porcentaje, veremos que frecuentemente las variables didácticas y sus efectos en los tipos de procedimiento susceptibles de ser puestos en juego por los alumnos no son privativos del porcentaje, sino de la razón.

1.1.2 El porcentaje como operador fraccionario o decimal

Como toda razón, el porcentaje puede expresarse mediante una fracción, jugando el papel de operador multiplicativo. Es decir, 20 de cada 100 puede ser visto como "20/100 de" o como los operadores fraccionario x20/100, o decimal x0.02.

El porcentaje expresado como un operador asume el papel de "factor constante de proporcionalidad" es decir, permite hacer explícito el hecho de que cada elemento de uno de los dos conjuntos representa una misma parte del elemento que le corresponde en el otro conjunto. En general, es posible afirmar que el uso de las fracciones y los decimales como operadores favorece una comprensión más profunda de la proporcionalidad —y por consiguiente, del porcentaje— que si sólo se trabajan las relaciones internas.

Sin embargo, diversos estudios —los comentaremos enseguida— han mostrado que la multiplicación por racionales es una noción que destaca por su fuerte complejidad conceptual. Las dificultades para acceder a la fracción y el decimal en su acepción como operadores multiplicativos tienen que ver con: a) el tránsito de la razón, es decir, de una relación entre dos números, a su cuantificación con un solo número, b) la necesaria resignificación de la noción de multiplicación, c) el paso de una razón local a una global y d) la construcción de un nuevo significado de la fracción.

Aunque estas dificultades se vinculan unas con otras, las trataremos por separado.

De la relación entre cantidades al número que expresa la relación

Al abordar la problemática didáctica de la noción de razón vimos la dificultad para transitar del estudio de las medidas a las razones, es decir, a las relaciones entre medidas, donde se vuelve necesario coordinar dos variables. Una vez que los alumnos superan esta dificultad, tienen más adelante que enfrentar otra en el sentido inverso: se trata del paso de la relación entre cantidades al número que cuantifica esa relación, por ejemplo, de la expresión "2 de cada 3", a "2/3 de".

Block (s/f) ha puesto de manifiesto algunas formas en que, a partir del uso de razones, emergen las fracciones, justamente como la expresión de la constancia de dichas razones. El autor explica una de estas formas de transición entre las dos nociones a partir de una resolución de Mariana, una alumna de sexto grado, a quien le plantea un problema de comparación de razones: los agricultores de dos huertas solicitan un trabajador que recoja las naranjas que han caído del árbol, uno de ellos ofrece como pago 2 naranjas por cada 5 que se recojan y el otro 6 naranjas de cada

20. Se trata de decidir cuál trato conviene más. Mariana comienza la fabricación de su resolución comparando una de las dos razones con la fracción ½:

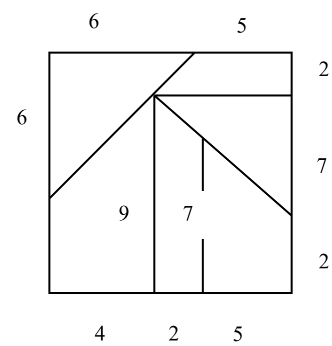
> *Mariana: Ah… creo que estoy descubriendo un tip… se trata de que aquí… si recogen 5, se quedan con 2 (…), se quedan con casi la mitad, y los otros, recogen 20 y ustedes se quedan con 6, pero están recogiendo más naranjas, por eso les dan más, pero aquí no les están dando algo que se parezca a la mitad, 7 u 8 naranjas. Por eso aquí es más justo (en 5, 2)* (ob.cit: 7)

El uso de la fracción parece materializar la intención de considerar no sólo la cantidad de naranjas que se ofrecen sino la *relación* entre éstas y las naranjas recogidas: la fracción ½ es precisamente una cuantificación aproximada de esta relación. En este momento, esta fracción parece expresar únicamente la razón (5,2), pues más adelante, en un segundo episodio, Mariana la itera y al obtener (10,4) piensa que "*ya no es la mitad*"[11]. No obstante, después generaliza: *"siempre les están dando casi la mitad de las naranjas"*. Así, esta vez el cuantificador ½ no sólo proviene de la comparación de 2 y 5, sino también de 4 y 10, y en general, de todas las razones que se generan al iterar los términos de (5,2). Así, el operador fraccionario vuelve observable la equivalencia entre las distintas razones: se erige como la expresión de un invariante en una relación entre cantidades que varían. A partir de este tipo de resoluciones, Block concluye:

> Estas relaciones entre parejas de cantidades concretas que varían, y el número que expresa lo que es invariante, así como las dudas que aparecen en el proceso, parecen constituir una parte esencial del sentido de la noción fracción como expresión de una razón constante. Estas reflexiones difícilmente ocurrirían en una situación en la que de entrada se exigiera la aplicación de fracciones. (Block, s/f, 8)

Otra de las posibles formas de tránsito entre las razones y el operador fraccionario se encuentra en una secuencia didáctica de Brousseau (1981) que se enmarca en un estudio amplio sobre los racionales. En una de las primeras situaciones se pide a los niños agrandar el siguiente rompecabezas, de tal manera que el lado que mide 4 cm en la figura original, mida 7 cm en la reproducción:

[11] Algo similar sucede en una experimentación de Balbuena y Block (1991) de una situación de proporcionalidad, en la que los alumnos deben encontrar las imágenes de varias medidas, conociendo una de estas imágenes. Una vez que los estudiantes encuentran que todas las medidas aumentan en un 75% o en ¾ partes, el profesor les dice que hay un factor que hace pasar directamente de las medidas originales a las nuevas. Esto desconcierta a varios alumnos, incluso uno de ellos pregunta "*¿los factores deben ser iguales o distintos?*"



Los niños se organizan en equipos, cada quien debe construir una de las piezas del nuevo rompecabezas. El primer intento, erróneo pero bastante generalizado, consiste en sumar 3 cm a todas las medidas. Al verificar empíricamente, descubren con sorpresa que las piezas no embonan.

Una vez que rechazan este modelo —lo que no resulta nada sencillo— se impone un primer procedimiento correcto de resolución: el recurso a las relaciones internas (por ejemplo, si a 4 le corresponde 7, entonces a 2 le corresponde 3.5). Más adelante, emerge y cobra fuerte presencia la determinación del valor unitario: se establece la razón 1→ 7/4[12]. Este segundo procedimiento permite, por un lado, comparar distintas aplicaciones para ordenarlas de la que “achica” más a la que “agranda” más, y por otro lado, calcular cualquier imagen, por ejemplo, la de 5 cm:

	Figura original	Figura ampliada	
	4	7	
:4	1	7/4	:4
X5	5	35/4	X5

Es importante destacar que los operadores fraccionarios —internos y externo— aún permanecen implícitos: la fracción 7/4 no juega el papel de multiplicador sino de la medida que corresponde a 1 cm, y tampoco aparece una multiplicación interna por 5/4, sino que se componen dos operadores internos naturales (:4 y x5).

[12] La notación 1→7/4 es equivalente a la que hemos utilizado anteriormente, con un par ordenado, que en este caso sería (1,7/4). Ambas designan la razón “por cada centímetro en la figura original, hay 7/4 de centímetro en la figura ampliada”.

Finalmente, en un tercer momento interviene explícitamente la multiplicación por racionales, al ser *definida* como una extensión de la multiplicación por naturales: si la razón 1 → 4 corresponde al operador **x**4, entonces el operador **x**0.25 se establece, por convención, como la razón 1 → 0.25. Así, multiplicar 0.25 por 3.29 significa determinar la imagen de 3.29 bajo la aplicación que a 1 asocia 0.25. De esta manera, el operador fraccionario no se constituye todavía como instrumento de cálculo: solamente es una manera de nombrar, de caracterizar una relación de proporcionalidad. Los procedimientos siguen siendo internos y con operadores naturales[13]. Sólo hasta que los alumnos acceden a un algoritmo para aplicar operadores fraccionarios, es que se calcula con ellos y que la noción de razón cede el paso a la de fracción como operador.

Los trabajos a los que hemos aludido muestran que, para los alumnos de primaria, la incorporación del operador fraccionario externo a partir de la manipulación de razones internas requiere una amplia experiencia con situaciones didácticas, que permita establecer poco a poco relaciones cada vez más complejas.

La multiplicación por racionales: una resignificación de la noción de multiplicación

Uno de los principales objetivos de la secuencia de Brousseau que describimos anteriormente —y que se conforma por aproximadamente 40 lecciones— consiste en establecer un significado para la multiplicación por decimales: el operador x0.02 *es* la relación que a 1 le asigna 0.02.

Si bien esta definición es útil desde el punto de vista matemático pues extiende a los racionales la multiplicación por naturales, implica un cambio drástico en términos de significación de esta noción. En el conjunto de los números naturales, la multiplicación está asociada a un “número de veces más grande”, es decir a una suma iterada: 3x4 es 3 veces 4. Esta acepción no se adapta al conjunto de los racionales, donde la multiplicación no sólo “agranda” sino también puede “achicar”, y además, el crecimiento no sólo es al doble, triple, cuádruple, etc. sino que se pueden producir agrandamientos y achicamientos “intermedios”: multiplicar por 9/4 genera una ampliación mayor al doble y menor al triple (Balbuena y Block, 1991).

[13] No obstante, la sola definición de la multiplicación por racionales implica algunos cambios: el 7/4, que antes era una medida, se establece ahora como operador. Y viceversa, el 5, que antes era un operador interno, ahora es una medida a la que hay que encontrar su imagen. Se hace abstracción entonces de los papeles que juegan ambos números, al intercambiarlos.

Este cambio de sentido no es menor. Si bien ha sido objeto de varias investigaciones en las últimas tres décadas (Balbuena y Block, 1991), en la enseñanza probablemente aún no recibe la atención necesaria, como lo muestran Balbuena y Block:

> Pareciera que los alumnos construyen en paralelo dos nociones: la de multiplicación, asociada a los enteros y la expresión "n veces", y otra operación sin nombre, asociada a las fracciones y a la expresión 'n/m de'. El que se diga a los alumnos que 'n/m de' es, por definición, 'n/m por', puede no ser más que una arbitrariedad que no produzca, al menos en el corto plazo, una reconceptualización de la multiplicación. Se estarían designando con el mismo símbolo dos operaciones que, por lo menos durante un tiempo, son diferentes (ob.cit: 187-188)

La adquisición de la multiplicación por racionales implica, o bien una reconfiguración del sentido que se le había asignado a partir del trabajo con naturales, o bien una síntesis en un solo concepto de dos significados que se han construido en paralelo.

De la fracción como medida a la fracción como operador

Al igual que muchas nociones matemáticas, la fracción puede cobrar varios significados distintos. Kieren (1988) es uno de los autores que han puesto de manifiesto dicha polisemia, al identificar las siguientes interpretaciones —que él llama subconstructos— posibles de la fracción: medida, cociente, razón y operador multiplicativo. Si bien estas definiciones son matemáticamente equivalentes, el tránsito en términos cognitivos de una a otra es considerablemente complejo. Desde la Teoría de las Situaciones se ha mostrado que cada una de ellas emerge y se pone en funcionamiento en la interacción del sujeto con un conjunto de situaciones que la hacen intervenir, mientras que, por el contrario, su uso se vuelve más complicado en otras situaciones, en las que puede funcionar otra concepción.

Por ejemplo, Ratsimba-Rajohn (1982, en Chamorro, 2003) demostró que dos acepciones de la fracción —como medida y como cociente— se convierten cada una en obstáculo epistemológico para la otra, en el sentido de que, cualquiera que sea la primera que construyan los niños, se vuelve una interpretación que dificulta el aprendizaje de la otra.

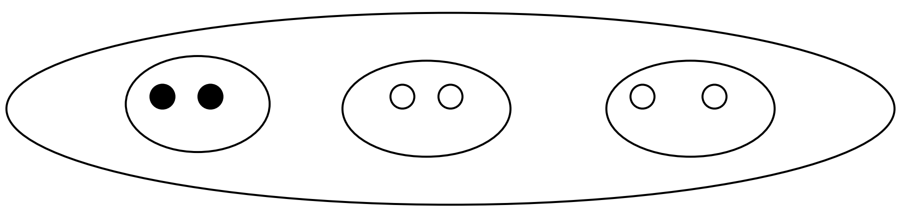
Como mencionamos antes, cuando el porcentaje se expresa con una fracción, el sentido de fracción en juego es el de operador multiplicativo. Este significado de la fracción, a diferencia del de medida, suele abordarse débilmente en la escuela primaria (Block, 2001). Así, el tratamiento del porcentaje mediante el uso de fracciones supone una construcción en la concepción de número, el cual pasa de ser expresión de medidas a ser expresión de operadores entre medidas[14]. En algunas investigaciones se ha mostrado que el cambio de un uso a otro de las fracciones puede tener lugar en situaciones de proporcionalidad, como vimos anteriormente.

De la razón local a la razón global

Una posible dificultad adicional en el tránsito de la concepción del porcentaje como una razón, "*p* de cada 100" a su concepción como el operador "*p* centésimos de", radica en que, en la primera, el total se divide en grupos de 100, y de cada grupo se toman *p*, es decir, hay una razón "local" (100 → *p*) en cada grupo. En la segunda, hay una sola razón "global" (100 → *p*), pues la cantidad inicial total se divide en 100 partes iguales, de las cuales se toman *p* Podemos ejemplificar esta diferencia a partir de la razón "1 de cada 3" y el operador "1/3 de". Para aplicar la primera, el total se divide en grupos de tres elementos, y de cada grupo se toma 1:

"Uno de cada tres"

Mientras que utilizar el operador implica dividir el total en tres grupos iguales, de los cuales se toma 1:



"1/3 de todo "

Cabe preguntarse en qué medida la construcción de cada uno de los dos tipos de razones puede implicar dificultades para el otro.

[14] La complejidad de este tránsito, de medida a operador, no es privativa de las fracciones pues también ocurre en el estudio de los números los naturales: es más difícil entender que en una escala "por cinco" es constante, que manipular una medida de 5cm (Block, 2001). No obstante, en el caso de las fracciones la complicación es mayor pues se imbrica con otras dificultades, como hemos visto.

¿Por qué son importantes las fracciones si se tienen los decimales?

Hasta ahora hemos hablado de las expresiones fraccionaria y decimal de un número prácticamente como si fueran equivalentes. Así, podría pensarse que para efectos de la enseñanza, dado que suele haber mayor familiaridad cultural con los decimales que con las fracciones, basta con abordar los primeros para dar cuenta de las segundas.

El análisis desde el punto de vista didáctico de las distinciones entre los dos conjuntos sugiere que no es así. Brousseau (1981) señala que la extensión de un conjunto de números a otro más amplio suele provocar modificaciones en las propiedades de dichos números. En el caso específico de la extensión de los decimales a las fracciones, las facilidades de cálculo que los primeros han heredado de los números naturales se pierden con las fracciones: las diferencias y las comparaciones de números, entre otros, son más difíciles de realizar. Pero la justificación de los cálculos con decimales se construye precisamente a partir del estudio de las fracciones.

Además de justificar el cálculo, las fracciones —e incluso los números reales— otorgan a los decimales parte de su sentido:

> será sin duda indispensable plantear los problemas que exigirían la construcción de una estructura que contenga a los decimales, tal como los racionales o los reales, y tal vez construirla efectivamente para dar a los decimales su significación (ob.cit: 46-47)

Brousseau menciona un ejemplo: “parece difícil concebir que la noción de razón pueda ser directamente aproximada por las razones decimales”. Es posible que se refiera a que es difícil aproximarse con los decimales a las fracciones en su significado de razones. Esto puede deberse, en parte, a lo siguiente:

Como vimos anteriormente, Block (2001) muestra varios ejemplos en los que la interpretación de los racionales como razones comienza a emerger cuando algunos estudiantes de primaria logran aproximar razones del tipo “2 de cada 5”, con fracciones unitarias, en casos muy sencillos (½, 1/3). Las fracciones cobran entonces una utilidad como expresión del invariante en una relación de proporcionalidad.

No hay un solo caso en el que los alumnos optaran por hacer estas aproximaciones con decimales, cuando hicieron estas aproximaciones, fue con fracciones probablemente porque en este proceso de identificación del invariante, la compleja noción de multiplicación por racionales queda implícita en la expresión “partes de”, por ejemplo “tres cuartos de”. En cambio, cuando se pone en juego un operador decimal —expresado no mediante una fracción sino mediante un número natural con un punto— la multiplicación aparece explícitamente.

Además, si sólo contaran con los decimales los estudiantes tendrían que identificar invariantes como 1/10, 5/10, 1/100, considerablemente más complejos que ½ ó 1/3.

Finalmente, si bien, tanto en la enseñanza de las fracciones como de los decimales, se ha privilegiado su interpretación como medidas, en las fracciones, por su misma notación, está más presente la idea de relación entre dos números, lo que puede facilitar en mayor grado el tránsito hacia la razón.

En resumen, la advertencia de Brousseau sugiere que los decimales quizás podrían ser suficientes para cubrir las fracciones cuando éstas funcionan como medidas, pero no cuando operan con otros significados, en particular como razón u operador multiplicativo. Las fracciones amplían el contenido semántico de los decimales, al aportarles una nueva acepción.

Comentario

Hemos visto hasta ahora que la construcción de los racionales, en el sentido de operadores, implica una resignificación de la noción de multiplicación, la construcción de un nuevo sentido para la fracción que generalmente es entendida como expresión de una medida y el tránsito de la razón expresada como relación entre dos números naturales a su expresión mediante un solo número racional, lo que requiere un tránsito de una razón local a una global.

Estos son algunos de los factores que inciden en la complejidad de ciertas situaciones de proporcionalidad, y, en particular, en la complejidad de la noción de porcentaje. Lo anterior sugiere que no debe presuponerse que para los alumnos la decisión de multiplicar por una fracción o un decimal al resolver tareas de porcentaje es trivial. Más aún, a partir de los argumentos de distintos autores que hemos mostrado en los apartados anteriores parecería pertinente propiciar la comprensión del porcentaje como una razón del tipo “a de cada 100” antes de abordarlo en su expresión fraccionaria o decimal.

Finalmente, si bien hemos mostrado algunos argumentos de autores que sostienen que la construcción de la noción de razón es anterior a la de fracción, esos mismos investigadores afirman que ambas nociones se enriquecen mutuamente, como se puede ver en el siguiente fragmento de las conclusiones del trabajo de Block (2001):

> Concluimos el análisis de esta última experiencia planteando, nuevamente, pero con más argumentos, dos conjeturas: 1) la construcción del operador como expresión de un conjunto de razones equivalentes puede requerir de un mayor desarrollo de la noción misma de equivalencia de razones. En cierto momento, la relación podría invertirse: la posibilidad de identificar al operador podría redundar en una mayor comprensión de la equivalencia de razones (p. 486)

1.1.3 Concepciones sobre el porcentaje

Hemos visto dos maneras en las que el porcentaje puede ser caracterizado, como razón y como operador fraccionario. Una de las consecuencias de ello es que la noción de porcentaje puede cobrar distintos significados, dependiendo del tejido de saberes en el que se le hace vivir: si se le vincula con la proporcionalidad, puede ser visto como una razón, si se le incluye en el mundo de los números racionales, puede ser visto como operador fraccionario o decimal.

Identificar las distintas definiciones matemáticas de una noción forma parte de lo que Artigue (1989) llama el establecimiento *a priori* de las concepciones posibles sobre un objeto, que funge como un lente que ayuda al didacta, por un lado a diseñar situaciones y por el otro, a interpretar el comportamiento de los alumnos en dichas situaciones. Cuanto más profundo es el análisis de las posibles definiciones de una noción, más posibilidades hay para diseñar situaciones que movilicen o hagan emerger concepciones del sujeto vinculadas a estas definiciones. Aunque no estamos suponiendo que existe una correspondencia exacta entre las concepciones identificadas a priori con las que manifiestan los alumnos, sí hay fuertes vínculos entre unas y otras, como veremos en los últimos dos capítulos.

A continuación las describimos brevemente, utilizando como ejemplo el 25%.

Algunas concepciones dependen de la obra matemática desde la que se mira el porcentaje y de las relaciones que se ponen de relieve:

I. Como una razón, es decir, una regla de correspondencia que se expresa con un par de cantidades, "25 de cada 100"

En esta interpretación, aparentemente muy accesible, es necesario ver al porcentaje como una razón (100→25), susceptible de generar razones equivalentes mediante la multiplicación y la división de sus términos por un mismo número, más que como una regla de correspondencia en la que por cada 100, efectivos, se toman 25, pues de lo contrario, no sería posible aplicar la regla a una cantidad que no sea múltiplo de 100.

II. Como un operador fraccionario constante “25/100 de”

A partir de la razón “25 de cada 100”, se puede favorecer la identificación de la fracción que expresa a esa razón, 25/100. Con ello, el hecho de que el porcentaje expresa una relación constante entre dos conjuntos de cantidades puede volverse explícito, es decir, que cada elemento de uno de estos conjuntos representa una misma “parte de” el elemento correspondiente en el otro. Para que esto suceda, su construcción tendría que emerger justamente como el invariante en una relación entre dos conjuntos de cantidades.

III. Como un operador decimal constante “por 0.25”

En este caso, como en el anterior, está implicada la compleja noción de multiplicación por racionales. En el caso anterior puede quedar implícita como “fracción de”, lo que no sucede con un operador decimal.

IV. Como relación con 100 como cantidad arbitraria

El 100 es una cantidad de referencia que expresa al todo. La razón que existe entre 100 y el porcentaje debe mantenerse entre la cantidad a la que se aplica y el resultado de la aplicación. Así, puesto que 25 es la cuarta parte de 100, el 25% de 600 es la cuarta parte de 600.

En los libros de texto se pueden encontrar otras dos maneras de definir esta noción:

V. Como un número “25/100”

El porcentaje no se aplica a una cantidad, es visto como sinónimo de fracción o decimal. Puede estar incluido en una fórmula, por ejemplo, la del cálculo del interés (**I**) simple, en la que se multiplica el capital (**C**) por el tipo o tasa (**r**) y por el tiempo (**t**)

$$I = Crt$$

Por ejemplo, si un capital de \$ 5 000 se presta al 2% mensual, el interés que se recibe al cabo de 10 meses se calcula de la siguiente manera:

$$\mathrm{I} = \$5\,000 \times 2\% \times 10 = \$5000 \times \frac{2}{100} \times 10 = \$1000$$

El capital y el tiempo son cantidades que se multiplican por la tasa, expresada mediante un porcentaje.

La diferencia con la interpretación II es importante, pues allá la fracción juega como operador constante entre dos conjuntos de cantidades. Acá no hay tales conjuntos, solamente la fracción.

VI. Como una razón aislada

El porcentaje tampoco se aplica a una tercera cantidad, es el resultado de la comparación de solamente dos cantidades. El 25% se obtiene al comparar 25 con 100, es la parte que representa 25 de 100.

Finalmente, es posible considerar al menos una concepción errónea, que, como veremos, algunos estudiantes manifiestan:

VII. Como cantidad absoluta

El porcentaje se asocia a un número, no a la relación entre dos números: 25% es lo mismo que 25, es decir, el signo % no conlleva una distinción de carácter matemático.

Estas son las interpretaciones del porcentaje que identificamos antes de estudiar el comportamiento de alumnos en ciertas situaciones. En el segundo y tercer capítulos veremos la manera en que los estudiantes parecen apelar a ciertos rasgos de dichas interpretaciones.

1.2 Tipos de tareas y técnicas relativas al porcentaje

A partir del análisis didáctico que realizamos en la primera parte de este capítulo sobre las nociones vinculadas al porcentaje haremos ahora uno más específico, trataremos de caracterizar algunos elementos de la organización matemática del porcentaje: los tipos de tareas que involucran a esta noción y los efectos de algunas de sus variables en los procedimientos de resolución.

Comenzaremos estableciendo dos grandes tipos de situación en las que se usa un porcentaje:

a) Cuando interesa fijar o describir una relación proporcional entre dos conjuntos de cantidades.

Por ejemplo, cuando en una tienda se ofrecen todos los productos al 50% de descuento, tanto los precios originales como aquellos con descuento varían, pero siempre estos últimos son la mitad de los primeros.

b) Cuando se quiere hacer accesible una relación a través de una escala.

Esto sucede cuando se manejan datos demasiado grandes o demasiado pequeños. Por ejemplo, al leer la frase “de un total de 431 749 docentes inscritos a los Cursos Nacionales de Actualización en el año pasado acreditaron 159 922”, un recurso para apreciar el tamaño de la relación consiste en establecer una relación equivalente sobre una población de 100 individuos: “37% de los maestros acreditaron el curso, es decir, 37 de cada 100”.

El porcentaje como escala también es útil para comparar distintas relaciones. Por ejemplo, la frase “56 millones de personas utilizan los 12 millones de vehículos de transporte público que existen en el país. En total hay 80 millones de habitantes y 40 millones de vehículos”, es más comprensible si se traduce a “en el 30% de los transportes viaja el 70% de la población”.

Veamos ahora los tipos de tareas más específicos, que suelen ocurrir en el seno de las dos grandes situaciones descritas. Cabe aclarar que los tipos de tareas que planteamos suponen algún conocimiento sobre dicha noción: se formulan utilizando el término *porcentaje*. De esta manera, estos tipos de tareas no pueden funcionar como situaciones de aprendizaje para quienes no tienen una mínima familiaridad con el porcentaje. De hecho, puesto que esta noción constituye un tipo particular de razón y de fracción, para dar cuenta de una forma más amplia de la problemática que la hace surgir, sería necesario considerar también las tareas de proporcionalidad y de fracción. La necesidad de limitar la extensión del presente trabajo nos impidió explorar dichas tareas[15]. No obstante los tipos de tareas específicos del porcentaje que abordamos a continuación sí permiten, mediante la manipulación de sus variables, ampliar el conocimiento sobre esta noción.

Supongamos que i es una cantidad cualquiera, a la que se le aplica el porcentaje p% y que el resultado de la aplicación es igual a f.[16] Algunos tipos de tareas relacionados con el porcentaje son los siguientes:

1. Aplicar un porcentaje a una cantidad

$$p\% \text{ de } i = ¿?$$

2. Determinar qué porcentaje representa una cantidad de otra

---

[15] Sin embargo, el tema amplio de la enseñanza de la proporcionalidad y las fracciones ha sido bastante investigado, en la primera parte de este capítulo hacemos referencia a varios trabajos.
[16] A i le llamaremos *cantidad inicial*, y a f, *cantidad final*.

¿? % de $i = f$

3. Calcular la cantidad inicial dado el resultado de la aplicación del *p %*

p% de ¿? = f

Este es un caso particular muy frecuente de un caso más general, en el que no se pide calcular la cantidad inicial, sino el resultado de aplicar otro porcentaje *w%*. Por ejemplo, se puede preguntar por el 60% conociendo el 20%

4. Sumar y restar porcentajes, determinar porcentajes complementarios (30% es complemento de 70%)
5. Multiplicar o componer porcentajes
6. Interpretar información que se da en datos porcentuales, o traducir información a porcentajes
7. Escribir un porcentaje en sus diferentes formas: con el signo %, como fracción con denominador 100, como fracción simplificada o como razón.

Los tipos de tareas básicos son los tres primeros, pues se encuentran incluidos y en ocasiones combinados en el resto de las tareas. Por ejemplo, la multiplicación de porcentajes no es más que una manera abreviada de realizar dos veces sucesivas la primera tarea. Por esta razón, centraremos el análisis en los tres primeros tipos de tareas, que abordaremos de manera conjunta. Después describiremos muy someramente algunas características de los restantes.

1.2.1 Los tres tipos básicos de tareas

Los tres tipos básicos de tareas se generan a partir de la relación *p% de a=b*, eligiendo uno de los datos como incógnita. Por este motivo es posible analizarlos conjuntamente. A continuación veremos dos relaciones de proporcionalidad que se pueden establecer a partir de la relación anterior, las técnicas que de ellas se derivan y los vínculos entre las variables numéricas de las tareas y las técnicas.

Dos formas de establecer las relaciones de proporcionalidad en la resolución de problemas de porcentajes

Para resolver gran parte de las tareas que implican porcentajes, es posible establecer dos tipos de relación proporcional, de donde se desprenden también diferentes técnicas:

a) Relación entre cantidades: se mantiene fijo un porcentaje como razón constante entre dos conjuntos de medidas de la misma magnitud. Por ejemplo, al expresar mediante porcentajes el descuento en el precio de mercancías:

Tarea 1 Se aplica un porcentaje	Tarea 2 Se pregunta por un porcentaje	Tarea 3 Se pregunta por la cantidad de la que se conoce un porcentaje
Se descuentan $25 de cada $100. Calcular el descuento que se aplica a $200	En una mercancía de $200, se descontaron $30. ¿Qué porcentaje se descontó?	Se descuentan $25 de cada $100. En una mercancía se descontaron $50. ¿Cuál era el pecio sin descuento?
Precio Descuento $100 → $25 $200 → ¿?	Precio Descuento $200 → $30 $100 → ¿?	Precio Descuento $100 → $25 ¿? → $50

b) Relación entre cantidades y porcentajes: se mantiene fija una cantidad a la que se le aplican distintos porcentajes. La relación proporcional es entre el conjunto de porcentajes que se aplican y los resultados de las aplicaciones. Por ejemplo:

Tarea 1 Se descuenta el 25%. Calcular el descuento que se aplica a $123	Tarea 2 En una mercancía de $125, se descontaron $50. ¿Qué porcentaje se descontó?	Tarea 3 Se descuenta el 25%. En una mercancía se descontaron $30. ¿Cuál era su precio sin descuento?
Porcentaje Cantidad 100% $123 1% $1.23 25% $30.75	Porcentaje Cantidad 100% $125 20% $25 40% $50	Porcentaje Cantidad 25% $30 50% $60 100% $120

La utilización de esta interpretación del porcentaje requiere de cierta familiaridad con dicha noción, lo cual no es necesario en la anterior. Para ilustrar esta afirmación, veamos un caso de tarea 1 con una razón cuyo consecuente no sea 100: aplicar la razón “2 de cada 3” a 150 utilizando los dos tipos de relación proporcional a) y b)

Relación entre cantidades (tipo a)	Relación entre porcentajes y cantidades (tipo b)
2 de 3	3 → 150
20 de 30	1 → 50
100 de 150	2 → **100**

En la relación tipo b), el "3" es visto como un número abstracto y arbitrario, de referencia, que expresa al todo. La razón "2 de cada 3" aplicada a 150 es vista como: "si 3 es 150, ¿cuánto es 2?". En cambio, en la relación tipo a) siempre se manejan razones del tipo "de cada *x* se toman *y*". No obstante, como se verá, hay casos en los que las técnicas de cálculo son más sencillas cuando se establece la relación tipo b)

Tres familias de técnicas

La posibilidad de considerar dos tipos de relaciones, a) "cantidad-cantidad" o b) "cantidad-porcentaje" y de utilizar las relaciones internas o externas, da lugar a tres familias de técnicas:

- Técnica CC i: Se utilizan las relaciones internas de la relación "cantidad-cantidad"

Tarea 1 Se aplica un porcentaje	Tarea 2 Se pregunta por un porcentaje	Tarea 3 Se pregunta por la cantidad de la que se conoce un porcentaje
Se descuentan $30 de cada $100. Calcular el descuento que se aplica a $200	En una mercancía de $200, se descontaron $70. ¿Qué porcentaje se descontó?	Se descuentan $35 de cada $100. En una mercancía se descontaron $70. ¿Cuál era su precio sin descuento?
Precio Descuento $100 $30 x2 x2 $200 ¿?	Precio Descuento $200 $70 :2 :2 $100 ¿?	Precio Descuento $100 $35 x2 x2 ¿? $70

- Técnica CC e: Se emplea la relación externa de la relación “cantidad-cantidad”

Tarea 1 Se aplica un porcentaje	Tarea 2 Se pregunta por un porcentaje	Tarea 3 Se pregunta por la cantidad de la que se conoce un porcentaje
Se descuentan $50 de cada $100. Calcular el descuento que se aplica a $180	En una mercancía de $200, se descontaron $40. ¿Qué porcentaje se descontó?	Se descuentan $25 de cada $100. En una mercancía se descontaron $70. ¿Cuál era el pecio sin descuento?
:2 Precio → Descuento $100 $50 $180 ¿?	:5 Precio → Descuento $200 $40 $100 ¿?	:4 Precio → Descuento $100 $25 ¿? $70

- Técnica CP i: Se utilizan las relaciones internas de la relación “cantidad-porcentaje”

Tarea 1 Se aplica un porcentaje	Tarea 2 Se pregunta por un porcentaje	Tarea 3 Se pregunta por la cantidad de la que se conoce un porcentaje
Se descuenta el 25%. Calcular el descuento que se aplica a $120	En una mercancía de $150, se descontaron $50. ¿Qué porcentaje se descontó?	Se descuenta el 25%. En una mercancía se descontaron $70. ¿Cuál era el pecio sin descuento?
Porcentaje Cantidad 100% $120 :4 :4 25% ¿?	Porcentaje Cantidad 100% $150 :3 :3 ¿? $50	Porcentaje Cantidad 25% 70 x4 x4 100% ¿?

También podría haber una cuarta técnica CP e, pero es poco probable que se utilice la relación externa entre cantidades y porcentajes, por su significación alejada del contexto.

Efectos de algunas variables numéricas de las tareas en las técnicas asociadas

¿Qué ventajas y qué desventajas presenta cada técnica? ¿En qué circunstancias cada una podría ser preferible? ¿Cuál es su alcance? A continuación analizaremos estas cuestiones. Se enfatizará el primer tipo de tareas cuando los efectos de las variables sean muy similares en los tres tipos.

Cabe aclarar que, en las tareas que analizaremos, hay dos tipos de variables numéricas. Por un lado están los valores, absolutos, que pueden tomar el porcentaje *p*, la cantidad inicial *i* y la cantidad final *f*: evidentemente, es más difícil calcular el 23.78% que el 23%. Por otro lado están las relaciones entre estos tres datos: pueden ser enteras o no. En el análisis que presentamos a continuación nos centraremos en el segundo tipo de variables.

Revisemos ahora cada uno de los tres tipos de técnicas que describimos anteriormente.

Técnica "Cantidad – Cantidad / Interna (CC-i)"

Esta técnica se basa en la equivalencia de las siguientes dos relaciones internas:

- La relación entre la cantidad inicial y el valor 100
- La relación entre el porcentaje y la cantidad final

100	*p*
i	*f*

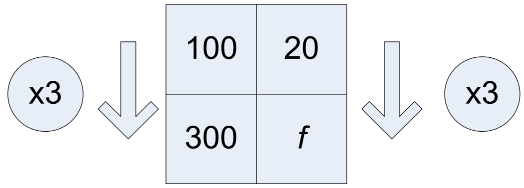
Por lo tanto, la principal variable que determina la dificultad de este procedimiento, en las tres tareas básicas, es el tipo de operador interno que resulta: a) una multiplicación por un número natural; b) una división entre un número natural y c) una multiplicación por un número no entero.

a) <u>El operador interno es una multiplicación por un número natural</u>

Es decir: la cantidad inicial *i* es múltiplo de 100 (o la cantidad final *f* es múltiplo del porcentaje *p*).

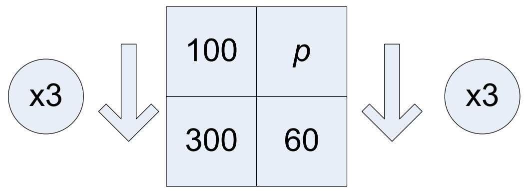
Este es el caso más simple. La idea de que "de cada 100 de la cantidad inicial, se consideran *p*" puede aplicarse al pie de la letra, con números enteros (o bien, en la tarea 3, por cada *p* en la cantidad final, se consideran 100). Veamos un ejemplo en cada tarea:

- Ejemplo en tarea 1: “Calcular 20% de 300”



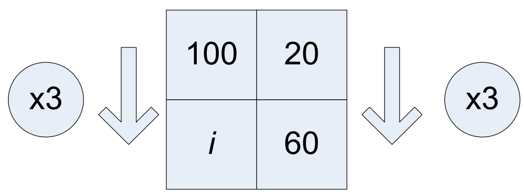
300 es 3 veces 100, por lo tanto a 300 corresponde 3 veces 20

- Ejemplo en tarea 2: “¿Qué porcentaje de 300 es igual a 60?”



300 es 3 veces 100, por lo tanto corresponde el número que tres veces es 60

- Ejemplo en tarea 3: “¿El 20% de qué cantidad es igual a 60?”



60 es tres veces 20, por lo tanto a 60 corresponde 3 veces 100.

b) <u>El operador interno es una división entre un número natural</u>

Es decir, la cantidad inicial *i* es divisor de 100 (o la cantidad final *f* es divisor del porcentaje *p*).

Tanto en este caso como en el siguiente, la definición de *p* % como “*p* de cada 100” no se debe tomar de manera literal sino como susceptible de generar razones equivalentes. De lo contrario, ningún porcentaje podría aplicarse puesto que el 100 no cabe un número exacto de veces en la cantidad inicial.

Ejemplo en tarea 1: “Calcular el 20% de 50”

	100	20	
:2	50	*f*	:2

Este caso no presenta una dificultad técnica importante, pues puede no ser difícil identificar la pertinencia de una división. La dificultad importante es conceptual, pues si **de cada** 100 se toman 20 ¿cómo tomar de una cantidad menor que 100?

Esta variable tiene los mismos efectos en las dos tareas restantes.

Tanto esta variante de la técnica como la anterior tienen un alcance muy restringido, pues en la mayoría de los casos, la razón interna no es entera.

c) <u>El operador interno corresponde a una multiplicación por un número no entero</u>

Es decir: la cantidad inicial *i* no es ni múltiplo ni divisor de 100 (o la cantidad final *f* no es ni múltiplo ni divisor del porcentaje *p*)

Debido a la conocida dificultad para determinar un operador no entero, el camino menos difícil podría consistir en pasar por algún valor intermedio, en particular por el valor unitario. Veamos dos ejemplos:

“Aplicar 18% a 170”

	100	18	
:2	50	9	:2
:5	10	1.8	:5
X2	20	3.6	X2
+	170	**30.6**	+

El paso por el valor unitario permite calcular porcentajes no enteros, y además sólo es necesario un valor intermedio. Por ejemplo, para aplicar el 17.5 % de 125:

	100	17.5	
:100	1	0.175	:100
X125	125	21.875	X125

Esta variante de CC-i tiene un mayor alcance que las anteriores. El paso por el valor unitario permite resolver los tres tipos de tareas sin importar qué valores numéricos estén en juego, aunque en algunos casos esto implica la multiplicación o división con números decimales.

Comentario

En los tres tipos de tareas, la técnica CC-i podría ser pertinente para un primer momento de trabajo con porcentajes, a partir de su concepción como "*p* de cada 100". Sin embargo, esto funciona en un rango muy acotado de valores numéricos con una pequeña familia de tareas, fuera del cual se presentan algunas dificultades: es necesario concebir la razón como susceptible de generar otras equivalentes para poder aplicar porcentajes a cantidades que no son múltiplos de 100, o bien abandonar esta técnica y emplear alguna de las otras.

Técnica "Cantidad – Cantidad Externa (CC-e)"

Esta técnica se basa en la equivalencia de las siguientes dos relaciones:

- Entre 100 y el porcentaje
- Entre la cantidad inicial y la final

100	p
i	f

Por lo tanto, la principal variable que determina la dificultad de este procedimiento, en las tres tareas básicas, es el tipo de operador *externo* que resulta: a) una división entre un número natural; b) una multiplicación por un número natural y c) una multiplicación por un número no entero.

a) El operador externo es una división entre un número natural

Es decir, el porcentaje p divide a 100 (o la cantidad final f divide a la cantidad inicial i)

Ejemplo: "calcular el 50% de varias cantidades"

$\xrightarrow{:2}$

100	50
200	100
300	150
350	175
124	62

Si bien un principiante a quien se hubiera enseñado previamente el procedimiento anterior podría resolver la tarea dividiendo la cantidad inicial en grupos de 100 para ver "cuántas veces se toma el 50", es muy posible que abandonaría esta idea al notar que "el 50% siempre es la mitad, el 25% la cuarta parte...", es decir, que cuando un mismo porcentaje se aplica a varias cantidades, hay una razón constante que se mantiene entre las cantidades iniciales y las cantidades finales. Este hallazgo podría ayudar a establecer que el porcentaje se puede aplicar a cantidades que no son múltiplos de 100 (pues el procedimiento en cuestión no consiste en formar grupos de 100)

Sin embargo, el alcance de esta técnica es reducido pues el porcentaje *p* puede tomar pocos valores: 1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50, 100

b) <u>El operador externo es una multiplicación por un número natural</u>

Es decir, el porcentaje *p* es múltiplo de 100 (o la cantidad final *f* es múltiplo de la cantidad inicial *i*)

Ejemplo: "calcular el 300% de 52"

$\xrightarrow{x3}$

100	300
52	**156**

La dificultad no reside en la técnica, ya que es fácil ver que 300 es el triple de 100, más aún si ya se ha trabajado con el caso anterior. La dificultad importante es conceptual, pues ¿cuándo tiene sentido hablar de "300 de cada 100"?

El alcance es un poco más amplio que en la tarea anterior. Sin embargo, los porcentajes que aparecen en este caso se utilizan en una variedad restringida de contextos.

c) <u>El operador externo corresponde a una multiplicación por un número no entero</u>

Es decir, el porcentaje *p* no es múltiplo ni divisor de 100 (lo mismo sucede entre la cantidad final *f* y la cantidad inicial *i*)

Ejemplo: "Aplicar 80 % a 175"

"80 centésimos de"

$\longrightarrow$

100	80
175	175:100 = 1.75 x 80 = 140

Este caso es ya muy complicado, pues la razón externa no es entera y entonces es necesaria la acepción del porcentaje como operador fraccionario o decimal. El uso de esta variante de la técnica CC-e para resolver la tarea 1 supone conocer de antemano que el *p*% es "*p* centésimos" de la cantidad inicial. La ventaja que presenta es que el operador que aplicado a 100 da como resultado 80 se identifica inmediatamente, sin necesidad de calcular.

La resolución de los tipos de tareas 2 y 3 se vuelve aún más difícil. Por ejemplo, en el tipo de tarea 3, además de conocer de antemano el operador es necesario invertirlo. Por ejemplo, si el 50% son los "50 centésimos" de la cantidad inicial, entonces ésta es "100 cincuentavos" de la cantidad final que se conoce.

"50 centésimos de"

$\longrightarrow$

100	50
i	127

$\longleftarrow$

"100 cincuentavos de"

Una posible manera de evitar esta inversión es practicar el ensayo y error, por aproximaciones sucesivas a la cantidad inicial.

También se puede emplear la técnica CC-e con un operador decimal constante, lo cual implica la compleja noción de multiplicación por decimales además de que, en el caso de los tipos de tareas 2 y 3, el uso de ese operador tampoco es directo, requiere de aproximaciones por ensayo y error o el establecimiento de relaciones muy complejas.

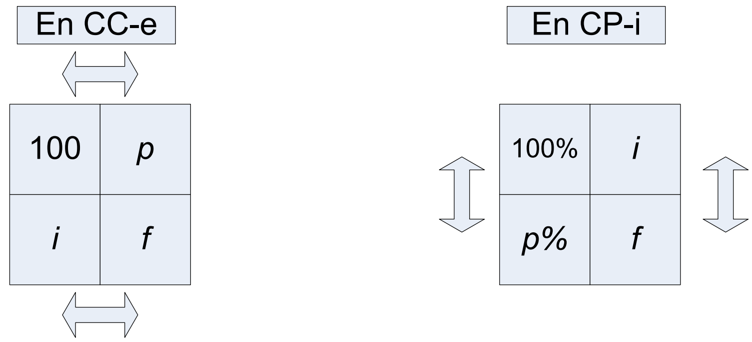
Comentario

Con la técnica CC-e el porcentaje ya no es visto como una razón que eventualmente da lugar a otras equivalentes, sino como un operador constante entre dos conjuntos de cantidades. Un conjunto representa la misma “parte de” el otro conjunto. Es decir, se pasa del empleo de la “razón local” a la “razón global”. Una ventaja importante del uso de esta técnica en comparación con CC-i, cuando la razón externa es entera, es la posibilidad de franquear las dificultades de los porcentajes aplicados a cantidades que no son múltiplos de 100, pues ya no se separa el total en varios grupos iguales, sino que se utiliza la razón constante que existe entre los dos conjuntos de cantidades. Para que esta razón emerja puede ser conveniente la tarea de aplicar un mismo porcentaje a varias cantidades distintas.

Sin embargo esta transición puede ser difícil. Además, cuando la razón externa no es entera la técnica CC-e se vuelve muy complicada.

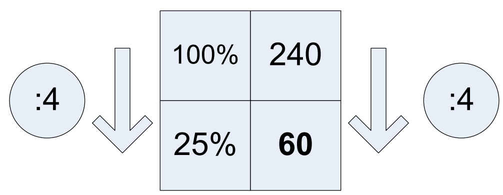
Técnica “Cantidad – Porcentaje Interna (CP-i)”

Esta técnica se basa en las mismas relaciones que la técnica anterior, CC-e, pero aparecen dos diferencias: el valor 100 y el valor del porcentaje *p* ahora representan tasas, o porcentajes (100%, 20%) y no cantidades (20 de cada 100). Además, las relaciones que allá son externas, acá aparecen como internas:

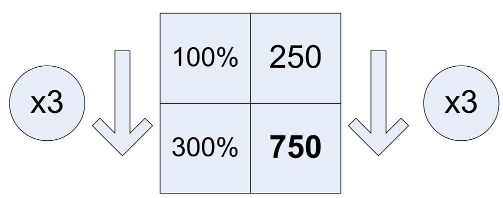


Por lo tanto, la variable principal que incide en la dificultad del procedimiento CP-i vuelve a ser la misma que en CC-e:

a) <u>Si *p* es divisor de 100, el operador interno es una división entre un natural</u>



b) <u>Si *p* es múltiplo de 100, el operador interno es una multiplicación por un natural</u>



c) <u>Si *p* no es múltiplo ni divisor de 100, el operador interno es una multiplicación por un racional</u>

	400	100%	
:2	200	50%	:2
:2	100	25%	:2
+	**300**	75%	+

Al igual que en CC-i, en esta variante también se puede transitar por un solo cálculo intermedio, el del valor unitario, el 1%. Otra posibilidad consiste en el uso de una combinación lineal del 1% y el 10% (el 53% es 5 veces el 10% más 3 veces el 1%)

Estas variantes pueden propiciar el surgimiento de otras similares para resolver los tipos de tareas 2 y 3, además de aquellas que emplean el valor unitario: para el tipo de tarea 2, partir del cálculo del 1% e iterarlo hasta encontrar la cantidad final que se conoce. Y para el tipo de tarea 3, calcular el 1% y el 10% a partir del porcentaje conocido, para después encontrar el porcentaje que se pide. Esto funciona cuando el porcentaje es entero. La técnica CP-i es la única que puede resolver las variantes del tipo de tarea 3 en las que en lugar de preguntar por la cantidad inicial, se pide calcular otro porcentaje. Por ejemplo:

Si 140 es el 20% de una cantidad ¿cuánto es el 53% de la misma cantidad?

	140	20%	
:2	70	10%	:2
:10	7	1%	:10
X3	21	3%	X3
X5	350	50%	X5
+	371	53%	+

Comentario

Como se vio anteriormente, la utilización de las relaciones "cantidad-porcentaje" requiere de cierta familiaridad con dicha noción, pues el 100 expresa un porcentaje (100%), o bien es visto como un número abstracto y arbitrario, de referencia, que expresa a la cantidad inicial.

Sin embargo, esta técnica tiene dos ventajas respecto a las dos anteriores: la primera es que, al igual que en CC-e, no representa demasiado problema cuando la cantidad inicial no es múltiplo de 100. La segunda es que, a diferencia de CC-e, la utilización de las relaciones internas y no de la externa permite el tránsito por valores intermedios, con lo cual se vuelve más sencillo el caso en el que el porcentaje *p* no es múltiplo ni divisor de 100.

En otras variantes de las tareas se da el caso inverso, es decir, la técnica CP-i es menos económica que CC-i. En resumen, la técnica más sencilla depende de ciertas relaciones entre los valores numéricos. Por ejemplo, si se quiere aplicar el 36 % a 250:

CC-i

	100	36	
x2	200	72	X2
:2	50	18	:2
+	250	90	+

CP-i

	100 %	250	
:100	1 %	2.50	:100
X36	36 %	90	X36

Las razones internas en CC-i en este caso son más sencillas que las de CP-i, puesto que la razón entre 100 y 250 es menos complicada que aquélla entre 100 y 36.

En cambio, al aplicar 60 % a 145 resulta al revés:

CC-i

	100	60	
:100	1	0.60	:100
X145	145	87	X145

CP-i

	100 %	145	
:5	20 %	29	:5
X3	60 %	87	X3

Esto sucede porque la razón entre 100 y 60 es más simple que la que hay entre 100 y 145.

Así, se vislumbran dos posibilidades para la enseñanza: se puede optar por favorecer un trabajo fuerte sobre los tres tipos de técnicas —lo que, en el caso de CC-i, requiere de un hábil manejo de razones equivalentes— para que los alumnos tengan un repertorio de técnicas que les permita elegir variantes económicas ante las distintas tareas. O bien, favorecer el uso de CC-i solamente como introducción, en un momento inicial, sin pretender ampliar su alcance con razones equivalentes y hacer el trabajo fuerte con CP-i, usando eventualmente el valor unitario, o con CC-e a partir de la concepción del porcentaje como el operador "*p* centésimos de".

Cabe mencionar finalmente que los tres tipos de técnicas pueden aparecer combinados en una resolución. También, el manejo de las técnicas se puede apoyar con estimaciones, cálculos mentales o apoyo de la calculadora —usando o no la tecla %—, tanto para producir resultados como para verificarlos.

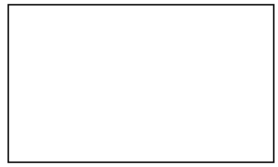
El tipo de registro

Hasta ahora hemos analizado tareas en las que los porcentajes se aplican a cantidades numéricas. No obstante, un porcentaje también se puede aplicar a superficies, como en el siguiente problema:

"El dueño de un equipo de fútbol mandó fabricar tres banderas gigantes, de distintos tamaños, para colocarlas en el estadio.

a) Para hacer la mediana, se debe pintar el 50% de rojo, el 25% de azul, el 20% de verde y el 5% de amarillo. Si toda la bandera tiene una superficie de 400 metros cuadrados, ¿Qué área tendrá cada color?

b) Representa en el siguiente rectángulo la parte que se debe pintar de cada color



c) Los resultados que obtuviste en la pregunta **a)** ¿corresponden bien con las partes que coloreaste en **b)**? Si te parece que no, corrige tus resultados."

El inciso a) se inscribe en el registro numérico mientras el b) en el gráfico[17]. Es decir, al hablar de registro gráfico no excluimos la intervención de algunos números, como son los porcentajes o medidas de superficies —largo, ancho, área—. La característica que utilizamos como criterio para situar un problema es la forma de representación de la cantidad inicial: cuando es un número, se trata del registro numérico, y cuando es una superficie, estamos en el registro gráfico[18].

Una diferencia entre ambos registros, es que mientras el numérico permite apelar a cualquier interpretación del porcentaje, el gráfico favorece especialmente su acepción como fracción, es decir, como una relación entre un total y una parte de él, y el uso de CP-i. Ambas exigen una identificación inicial entre el 100% y el total. En cambio, dicho

---

[17] Inicialmente no habíamos contemplado el tipo de registro como una variable. Fue a partir del análisis de las resoluciones de alumnos en el cuestionario y entrevistas que nos encontramos con la importancia del registro gráfico y, sobre todo, con el hecho de que, para los estudiantes, no es equivalente al registro numérico.

[18] Hemos tomado de Duval (1995) el término registro. Para este autor, un sistema semiótico puede ser considerado un registro de representación cuando permite tres actividades cognoscitivas fundamentales: la formación, el tratamiento y la conversión. La formación es la constitución de la representación de un contenido, a partir de una selección de algunos de sus datos y utilizando las reglas de composición apropiadas para el registro elegido. El tratamiento es la transformación de esta representación al interior del registro en el que ha sido formada, siguiendo también sus propias reglas. Y la conversión es la transformación de una representación hecha en un registro, a una representación hecha en otro registro. La conversión no debe ser confundida con una simple codificación: cuando el registro de partida y el de llegada tienen tratamientos que les son propios, de tal manera que no se puede establecer una correspondencia entre uno y otro, la conversión es una actividad que no es cognitivamente neutra. De hecho, la necesidad de una diversidad de registros se explica no sólo por el hecho de que cualquier representación es cognoscitivamente parcial —permite "ver" sólo algunos aspectos del objeto representado, dejando a otros de lado—, sino sobre todo porque, para Duval, la conceptualización necesariamente pasa por la coordinación de diferentes registros. Sin esta coordinación, el tratamiento en un registro dado no correspondería realmente a un funcionamiento cognoscitivo efectivo.

Si bien no podemos asegurar que la caracterización que hemos hecho del registro gráfico y el numérico para esta investigación satisface absolutamente las condiciones consideradas por Duval, decidimos emplear el término de registro porque nos es útil para distinguir entre tareas que, aunque son del mismo tipo, no son vistas como iguales por los alumnos, como veremos más adelante: el tránsito entre lo gráfico y lo numérico no les resulta trivial y los obliga a poner en juego diferentes relaciones.

registro inhibe la concepción del porcentaje como una razón del tipo "tantos de cada 100", pues una superficie no se puede desagrupar en pedazos de 100 si no se conoce su medida. Y también, dificulta el uso del operador decimal, pues es necesario aplicarlo ya sea al área de la superficie o a la medida de uno de sus lados, lo que implica preguntarse por estos datos, que no son dados explícitamente.

Técnicas algorítmicas

Algunas técnicas pueden llegar a sistematizarse a tal grado que su aplicación queda totalmente determinada, es decir, permiten establecer, ante determinado tipo de tareas, secuencias de acciones que garantizan la obtención del resultado, cualquiera que sean los datos. Llamaremos algorítmicas o canónicas a las técnicas con estas características. Cabe aclarar que el proceso de sistematización a través del cual una técnica o serie de técnicas devienen en algoritmos no necesariamente sucede en un proceso de enseñanza, ni es deseable que lo sea: algunos algoritmos pueden ser directamente proporcionados a los estudiantes, si se considera importante que las utilicen y al mismo tiempo, que no podrían crearlas por sí mismos en el nivel en el que se encuentran. A continuación mostramos algunos algoritmos que permiten resolver los tres tipos básicos de tareas relativos al porcentaje.

El valor unitario

Esta técnica puede provenir de CC-i o de CP-i, como hemos mostrado anteriormente: cuando la razón interna no es entera, permite obtener la respuesta con un solo valor intermedio. Una dificultad es que puede implicar multiplicaciones o divisiones con decimales.

El operador fraccionario o decimal

A partir de la técnica CC-e se puede establecer la definición de porcentaje como "*p* centésimos de" y utilizar esta fracción, o el decimal correspondiente, como un operador que permite pasar de las cantidades a las aplicaciones de un porcentaje. Nuevamente, esta técnica puede implicar las nociones de multiplicación o división por fracciones o decimales.

Regla de tres

Siempre hay dos maneras de plantearla: utilizando la relación "cantidad-cantidad" o la relación "cantidad-porcentaje". En el tipo de tarea 3, la relación CC sólo se puede utilizar cuando lo que se pide es el 100%. Por ejemplo: “si el 60% de una cantidad es 70 ¿cuál es esa cantidad?”

Cantidad-Cantidad:			Cantidad-Porcentaje:		
100	→	60	70	→	60%
¿?	→	70	¿?	→	100%
Respuesta: (100)(70):60			Respuesta: (70)(100):60		

En cambio la relación CP es útil también cuando se quiere determinar otro porcentaje. Esta técnica presenta dos dificultades: 1) discernir las relaciones para "acomodar" bien los datos, 2) saber las operaciones que se deben realizar. Notemos que, si se recurre a la relación CP, es necesario abstraer los papeles que juegan los distintos datos, pues ¿qué sentido tendría multiplicar un porcentaje por un una cantidad absoluta?

Establecer una proporción

En los libros de texto aparece una técnica muy similar a la regla de tres, solo que, a diferencia de ésta, exige expresar al porcentaje como una fracción. Por ejemplo, para calcular el 20% de 500, se establece la siguiente proporción:

$$\frac{20}{100}=\frac{\chi}{500}$$

El término desconocido se puede encontrar empleando manipulaciones algebraicas. La técnica presenta las mismas dos dificultades de la regla de tres, solo que, al establecer las relaciones entre los datos en términos de una igualdad de fracciones, las operaciones necesarias se pueden justificar a partir de la ley de equivalencia entre el producto de los "medios" y el de los "extremos", nuevamente abstrayendo el papel de cada uno de los datos.

1.2.2 Otros tipos de tareas, que se desprenden de los tres básicos

A continuación analizaremos algunos tipos de tareas —frecuentes en contextos no escolares— que se desprenden de los tres básicos al combinarlos o iterarlos. Nos limitaremos a enunciar someramente ciertas variantes de estos tipos de tareas, sin pretender ser exhaustivos en el análisis de las variables y sus efectos en las técnicas.

Suma y resta de porcentajes, porcentajes complementarios

Uno de los contextos típicos en este tipo de tareas es el cambio en precios de mercancías, como cuando se ofrecen con un cierto porcentaje de descuento, o cuando se aumenta el IVA. Una variable es el precio que puede aumentar o disminuir, otra es el dato que se pide, que puede ser el inicial o el final.

a) Se pide el dato final

En el contexto recién mencionado, se proporciona el porcentaje de descuento y se pregunta por el porcentaje que hay que pagar, por ejemplo:

"Se descontó 30% al precio de un suéter. ¿Qué porcentaje del precio hay que pagar?"

Si además se da el precio original, existen al menos dos caminos para resolver. El primero consiste en restar a 100% el porcentaje de descuento para obtener el porcentaje complementario ignorando el dato del precio original, y el segundo, más largo y difícil, consiste en calcular la cantidad que se descuenta y la cantidad a pagar para después ver qué porcentaje representa esta del precio inicial. Por ejemplo, si en el problema anterior el precio original era de $500, entonces se descuentan $150 y se deben pagar $ 350, es decir, el 70% de $500.

Un caso particular de esta tarea que puede resultar interesante didácticamente es el de aplicar el mismo descuento a muchos precios, sin pedir explícitamente el porcentaje del precio final, pues es posible que este porcentaje complementario aparezca como una técnica más eficiente que la de calcular el dinero que se descuenta y después hacer una resta.

Si en lugar de descontar un porcentaje, éste se aumenta, no aparecen porcentajes complementarios, sino suma de porcentajes. Las tareas y las técnicas son análogas a las descritas anteriormente. Por ejemplo, si a una serie de precios se les aumenta el 20%, la manera más sencilla de calcular los precios a pagar es aplicar a todos los originales el 120%.

b) Se pide el dato inicial

Se proporciona la cantidad final y el porcentaje que se descontó:

Precio	Descuento del 30 %	Total a pagar

¿?		$ 250

En este caso, es necesario obtener el porcentaje complementario para resolver la tarea. Cuando se aumentan porcentajes, por ejemplo el IVA, se tiene una tarea similar que no involucra porcentajes complementarios:

Precio	Aumento del 15 %	Total a pagar
¿?		$ 250

Un error típico en esta tarea consiste en descontar el 15% a la cantidad final, como si ésta fuera el 100% y no el 115%.

La siguiente propiedad puede ser fuente de errores al trabajar este tipo de tareas: El complemento del porcentaje que satisface una condición P es el porcentaje que satisface la negación de P (que el 4 % de la producción de refrigeradores haya sido devuelta por defectos de fabricación no significa necesariamente que el 96 % esté todavía en buenas condiciones)

Multiplicación y composición de porcentajes

En estas tareas una variable es el dato que se pide: puede ser el porcentaje final que resulta de la composición, y también se puede pedir encontrar dos porcentajes cuya composición resulte ser un porcentaje dado.

a) Encontrar el porcentaje final

Estas tareas se pueden resolver con dos técnicas que se describen a continuación en un ejemplo particular:

"En la escuela hay 700 alumnos, de los cuales el 40% está en primer grado. De los alumnos de primer grado, el 50% son niñas. Las mujeres que van en primero, ¿qué porcentaje representan de la población total de alumnos de la escuela?"

La primera técnica consiste en aplicar sucesivamente los dos porcentajes y después ver cuál es el porcentaje resultante: el 40% de 700 es 280, así que hay 280 alumnos en primero. De éstos, 140 son niñas. Como 140 es el 20% de 700, las mujeres de primero son el 20% del total de alumnos. Así, la tarea se convierte en una combinación de las tareas 1 y 2.

La otra técnica, mucho más económica, consiste en multiplicar los dos porcentajes, en el ejemplo anterior 0.40 x 0.50 = 0.20 = 20%, sin embargo es conceptualmente compleja. Supone comprender al porcentaje como factor decimal o como fracción y tener una noción de la multiplicación por fracciones.

Quizás una manera de propiciar lo anterior sea aplicar la misma tarea a varias cantidades (utilizando dos porcentajes cuya multiplicación pueda hacerse mentalmente), para que surja la necesidad de buscar una técnica más eficiente.

En esta tarea es importante proporcionar el precio original, pues de lo contrario la tarea se vuelve muy difícil. A continuación se mencionan algunas variantes:

Subconjuntos de subconjuntos:

El 50 % de A cumple P, y de los que cumplen P, el 25 % cumple Q ¿Qué porcentaje de A cumple Q?

El problema anterior es un ejemplo de esta variante.

Descuento sobre descuento:

"Un sartén cuesta $ 300, pero en la tienda se ofrece a un descuento del 70% sobre el 20%. ¿Cuál es el porcentaje del descuento total?"

En este contexto, y en los dos siguientes, también pueden aparecer sumas y restas de porcentajes, y porcentajes complementarios. Por ejemplo, para resolver el problema anterior, se puede hacer lo siguiente:

Precio original	Descuento del 20%	Precio con el primer descuento	Descuento del 70%	Descuento total
$300	$60	$240	$168	$228

Finalmente, 228 es el 76% de 300, por lo tanto se descontó en total el 76%. O bien, se puede resolver de una manera más sencilla:

Precio original	Precio con el primer descuento (80%)	Precio final (30%)
$300	$240	$72

El descuento total es la diferencia entre los precios: $228, cantidad que representa el 76% del precio original. La utilización de la segunda técnica, multiplicar los porcentajes, necesariamente pasa por el cálculo de los porcentajes complementarios.

Un error previsible en esta tarea consiste en sumar los dos porcentajes, y concluir, en este ejemplo, que se descontó en total el 90%.

Aumento sobre aumento:

"La producción total de maíz aumentó el año pasado en 25%, y este año en 13%. ¿Cuál fue el porcentaje de aumento en los dos años?"

En este caso aparecen porcentajes mayores al 100%, lo cual puede implicar una dificultad conceptual que no se presenta cuando hay dos descuentos sucesivos. Es necesario saber que el porcentaje no siempre cuantifica una relación parte-todo, también puede ser una forma de comparar dos cantidades disjuntas.

Combinación de un aumento con un descuento:

"En una fábrica de zapatos, cada producto cuesta $250. A un distribuidor le ofrecen el 20 % de descuento. Si éste quiere obtener una ganancia del 50 % sobre su inversión ¿cuánto debe cobrar por cada par?"

"En una tienda se ofrece un producto al 30 % de descuento. Si el IVA es del 15 %, ¿qué le conviene más a un cliente, que se aplique primero el descuento o el IVA?"

b) Encontrar la combinación dado el porcentaje final

Se puede dar uno de los porcentajes que se combinan y pedir el otro que falta:

"En la escuela hay 700 alumnos, de los cuales el 40% está en primer grado. Las mujeres que van en primero representan el 20% del total de alumnos de la escuela, ¿qué porcentaje representan estas niñas respecto al población de alumnos de primer grado?"

O puede no proporcionarse ninguno de los dos:

"La fotocopiadora no acepta reducciones menores al 50% ¿Qué se puede hacer para reducir un rectángulo al 25%?"

Interpretar información que se da en datos porcentuales, o traducir información a porcentajes

En algunas ocasiones, traducir cierta información en datos porcentuales puede ser una herramienta útil para interpretar dicha información. En otras ocasiones, es necesario lo contrario: hacer gráficas o calcular los datos absolutos para comprender las relaciones que subyacen a los porcentajes que se conocen. Así, dos tipos de actividad con porcentajes relacionadas con la interpretación de la información son: usar porcentajes cuando se tienen los datos absolutos y, al revés, analizar los datos porcentuales que se tienen[19].

a) Usar porcentajes para facilitar la interpretación de datos

Usar porcentajes en situaciones en las que éstos no se plantean explícitamente, para dimensionar una relación:

- Normalizar, es decir, cambiar los datos reales de un texto, pero conservando las relaciones entre ellos ("si la comunidad tuviera 100 habitantes...")
- Para dimensionar un incremento porcentual, tomar los dos porcentajes como cantidades absolutas y resolver la tarea de ver qué porcentaje es una cantidad de otra (el porcentaje de deserción se ha incrementado en 36% durante los últimos años, al pasar de 5.9% a 8%)

Utilizar porcentajes para comparar distintas relaciones:

- Para comparar razones con distintos consecuentes y el mismo antecedente (porcentaje de africanos con porcentaje de latinos con porcentaje de europeos en el mundo)
- Para comparar distintas distribuciones que podrían estar relacionadas (en el 30% de los transportes viaja el 70% de la población)
- Para comparar una misma situación respecto a totales diferentes (en Europa el *x*% de la población sufre desnutrición mientras que en África el *y*% la padece)
- Para comparar razones expresadas de distintas maneras: Con una razón, un porcentaje, una fracción. (¿Cuál descuento es más conveniente: el 20%, 1 peso de cada 6 o la tercera parte?)

[19] Cabe aclarar que no presentaremos tareas específicas, sino más bien algunos rasgos más generales de situaciones a partir de las cuales podrían formularse tareas.

b) <u>Interpretar datos dados en porcentajes</u>

<u>Representaciones gráficas del porcentaje.</u>

Hacer e interpretar tablas y gráficas de pastel y de barras para organizar información (Distinguir qué información se puede derivar de los datos dados y qué no, ver por qué a veces al sumar una columna el resultado no es 100%, etc.)

<u>Detectar errores</u>:

Existen algunas inferencias erróneas que se pueden hacer al trabajar con porcentajes:

- Al calcular en distintos momentos dos porcentajes que satisfacen P pero utilizando cantidades de referencia diferentes, no se puede deducir un aumento o reducción (si se aplica primero una encuesta a escala nacional y luego a escala local y el porcentaje en la segunda resulta menor, no se puede hablar de una disminución. Es decir ¿qué es mayor, 25% de 200 o 10 % de 600?))
- La pertinencia del uso de cantidades absolutas y relativas varía según la situación:
    - La comparación de dos cantidades absolutas y no de razones puede llevar a conclusiones erróneas (es falsa la conclusión de que la gente está mejor alimentada en la ciudad A que en la ciudad B porque en A hay 5 personas desnutridas y en B hay 18)
    - La comparación de cantidades relativas y no absolutas puede llevar a conclusiones erróneas (si el porcentaje de gasto en armamento respecto al presupuesto nacional es menor este año que el anterior, se puede deducir que el gasto en armamento disminuyó. Pero si además, el presupuesto de defensa permite comprar mas armamento este año que el pasado, se puede concluir que el presupuesto aumentó)
    - A veces es necesario considerar tanto las cantidades absolutas como las relativas (cuando se realiza una encuesta es importante conocer el total de la muestra, y también la distribución porcentual entre las distintas respuestas)
- El promedio de varios porcentajes de distintas bases no es igual al porcentaje global (supongamos que en la comunidad A hay 200 habitantes de los cuales 100 satisfacen P —el 50 %— mientras que en la ciudad B, de 10 000 personas sólo 1 000 cumplen la misma condición

—el 10%—. En las dos localidades, de un total de 10 200 hay 1 100 que satisfacen P, es decir, el 10.78 %, mientras que el promedio de los dos porcentajes es 30 %)

- Al multiplicar por un mismo factor tanto los casos favorables como los casos totales de un evento la probabilidad de que éste suceda no se altera (si cada vez que una persona compra un boleto para una rifa éste se imprime 40 veces no aumentan las probabilidades de ganar)
- ¿Cuándo es importante considerar la diferencia entre dos porcentajes y cuándo la razón que guardan? Por ejemplo, al comparar el porcentaje de cobertura en educación primaria en dos países con una cantidad similar de habitantes, supongamos que en uno de ellos el aumento de un año a otro fue de 2% a 4% mientras que en el otro, de 75% se incrementó a 77%. Supongamos también que en ambos países, el tamaño del grupo de edad no varió significativamente entre los dos años. La diferencia en ambas naciones es del 2%, que representa una cantidad cercana de personas. Sin embargo, en el primer país, la cobertura aumentó en un porcentaje cercano al 100%, pues casi se duplicó, en cambio en el segundo el incremento fue prácticamente del 2.7%.

1.2.3 Resumen de los tipos de tareas, sus variantes y los efectos en las técnicas

La siguiente tabla sintetiza el análisis que hemos hecho en los apartados 1.2.1 y 1.2.2.

			T É C N I C A S		
			CC-i Se emplean las razones internas de la relación de proporcionalidad que se desprende de la definición “tantos de cada 100”	CC-e Se emplean las razones externas de la relación de proporcionalidad que se desprende de la definición “tantos de cada 100”	CP-i Se emplean las razones internas de la relación de proporcionalidad que se desprende de la identidad 100%-total
TIPOS	Tres	1. Aplicar un porcentaje a una cantidad	a) Si *i* es múltiplo de 100 (*f* múltiplo de *p*), el operador interno es entero, la relación “tantos de cada 100” puede tomarse literalmente (*)	a) Si *p* (*f*) divide a 100 (*i*) el operador externo es una división entre un natural (el porcentaje se puede aplicar a cualquier cantidad).	a) Si *p* (*f*) divide a 100 (*i*), el operador interno es una división entre un natural
	tipos	2. Determinar qué porcentaje es una cantidad de otra	b) Si *i* divide a 100 (*f* divide a *p*), el operador interno es entero, la relación “tantos de cada 100” debe tomarse como susceptible de generar otras equivalentes.	b) Si *p* (*f*) es múltiplo de 100 (*i*) el operador externo es una multiplicación por un natural. Una dificultad conceptual: el porcentaje es mayor a 100%.	b) Si *p* (*f*) es múltiplo de 100 (*i*) el operador interno es una multiplicación por un natural. Una dificultad conceptual: el porcentaje es mayor a 100%.
DE	básicos	3. Determinar la cantidad inicial	c) Si *i* (*f*) no es múltiplo ni divisor de 100 (*p*) el operador interno no es entero, se pueden calcular razones intermedias, en particular el valor unitario	c) Si *p* (*f*) no es múltiplo ni divisor de 100 (*i*), el operador externo no es entero y es necesaria la acepción del porcentaje como operador fraccionario o decimal.	c) Si *p* (*f*) no es múltiplo ni divisor de 100 (*i*), el operador interno no es entero. Se pueden calcular razones intermedias, en particular el valor unitario.
TAREAS			Las tres técnicas, CC-i, CC-e y CP-i pueden derivar en algoritmos: el valor unitario, o bien los operadores fraccionario (“*p*/100 de”) o decimal. Otro algoritmo es la regla de tres.		

		OTRAS TAREAS Y SUS VARIANTES			
TIPOS DE TAREAS	Otros tipos de tareas	4. Suma, resta y complementos de porcentajes - la cantidad inicial puede aumentar o disminuir -se puede pedir el dato inicial o el final	5. Multiplicar o componer porcentajes - encontrar el porcentaje que resulta de la composición - encontrar dos porcentajes cuya composición sea un porcentaje dado	6. Interpretar información - usar porcentajes para facilitar la interpretación de datos - interpretar datos porcentuales	7. Escribir un porcentaje en distintas formas: razón, fracción con denominador 100, fracción simplificada

(*) *i* es la cantidad inicial a la que se aplica el porcentaje *p*, con lo que se obtiene una cantidad final *f*, resultado de la aplicación.

Cabe recordar que las tareas de tipos 4, 5, 6 y 7 pueden incluir combinaciones de las tareas de tipos básicos. De esta manera, el análisis de las técnicas y los efectos en ellas de las variables numéricas que realizamos en relación a los tres tipos básicos de tareas también es pertinente aquí.

1.3 Comentario final

Hemos intentado configurar una radiografía didáctica del porcentaje, mostrando la red de significados que se entretejen alrededor de esta noción. Este análisis epistemológico pone en el centro de nuestro estudio el contenido matemático que abordamos y constituye un punto de partida que permite, en los capítulos posteriores, discernir las perspectivas del porcentaje de las que se han apropiado los estudiantes y tomar decisiones para la construcción de una secuencia de situaciones.

En suma, nos queda claro que la comprensión del porcentaje, tal y como lo hemos caracterizado aquí, requiere de un amplio período de tiempo, por lo que cualquier proyecto de enseñanza, y el aprendizaje que de él resulta, necesariamente implican un recorte. Lo interesante entonces no es identificar “lo que falta” para abarcar todos los aspectos del porcentaje, sino comprender cómo se configuran estos recortes y las elecciones de carácter epistemológico que —implícita o explícitamente— conllevan.

Capítulo 2

Procedimientos y concepciones sobre el porcentaje. Exploración a través de un cuestionario y de entrevistas

Se aplicó un cuestionario a dos grupos de alumnos de segundo grado de secundaria, uno de 31 alumnos y otro de 28, en la ciudad de México (nos referiremos a ellos como "grupo 1" y "grupo 2"). Posteriormente a la aplicación del cuestionario, se consideró necesario entrevistar a siete estudiantes para conocer con más profundidad los razonamientos que los llevaron a determinadas respuestas. Ambos instrumentos nos permitieron conocer en cierto grado los tipos de tareas que los alumnos son capaces de resolver y en ocasiones también los procedimientos de resolución y los errores más frecuentes.

El análisis de resultados que presentamos a continuación consta de cuatro apartados: 1) Una breve caracterización del cuestionario, 2) Resultados generales, con información sobre dos aspectos, el comportamiento general de los reactivos (nivel de dificultad, grado de correlación) y el desempeño general de las poblaciones, 3) Procedimientos, errores y concepciones, en el que se describe y analiza la diversidad de respuestas de los alumnos para determinados grupos de reactivos y 4) Un apartado de comentarios finales en el que destacamos las conclusiones de esta parte del estudio.

2.1 Breve caracterización del instrumento

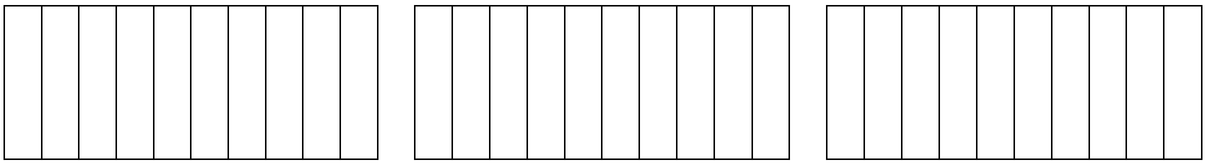
A continuación hacemos una caracterización muy general del cuestionario y su análisis previo. En el Anexo 1 se encuentra una descripción más detallada de los criterios bajo los cuales diseñamos los reactivos, y los tipos de procedimientos y errores esperados. Los problemas planteados en las entrevistas consisten en una selección de reactivos del cuestionario, con variaciones mínimas.

El cuestionario —que consta de 13 reactivos— contiene las variantes más sencillas de una gama de tareas relacionadas con la noción de porcentaje, pues consideramos que el conocimiento sobre esta noción es precario. Se plantean los tres principales tipos de tareas, pero sólo con respecto a la primera (aplicar un porcentaje a una cantidad) se exploran distintas variantes, pues probablemente es a la que más tiempo se dedica en la escuela. Además hay reactivos que intentan dar cuenta de la comprensión de la noción de porcentaje como razón.

Veamos algunas características particulares de los reactivos, que hemos dividido en cuatro grupos:

a) Reactivos que corresponden al tipo 1 de tareas (aplicar porcentajes)

Problema 3: "Juan, Pedro y Luis tienen un terreno cada uno. Juan cultiva el 50% de su terreno, Pedro el 25% y Luis el 20%. Los tres rectángulos que aparecen aquí representan los terrenos. Ilumina la parte que cultiva cada uno."



Juan Pedro Luis

A través de esta pregunta intentamos saber si los alumnos aplican el operador fraccionario en los casos más fáciles, es decir, si identifican, por ejemplo, que el 50% de una cantidad de superficie es la mitad de ésta. La subdivisión en 10 podría facilitar dar la respuesta para el 50% y el 20%, pero dificulta un poco la del 25%.

Problema 4: "En la tienda «Gigante» ofrecen una grabadora con el 30% de descuento. Si su precio original es de $200 ¿Cuánto cuesta la grabadora ya con el descuento?"

Problema 5: "En un examen de 50 preguntas, Leticia contestó correctamente el 40% de las preguntas ¿Cuántos aciertos tuvo Leticia?"

Estos dos reactivos implican relaciones internas muy sencillas para quienes entienden al porcentaje como "tantos de cada 100". En el problema 5, una dificultad es que la cantidad inicial es menor a 100, por lo que la definición de razón no puede ser vista en sentido estricto. Otra posibilidad, quizá más compleja, es utilizar la técnica CP-i, por ejemplo, calculando la mitad para obtener el 50% y estimando después.

Problema 6: "En un estudio de preferencias, de 128 personas que se entrevistaron, el 25% declaró que la leche «La Vaquita» es más rica. ¿Cuántos entrevistados prefieren «La Vaquita»?"

De nuevo, la definición "tantos de cada 100" no puede ser tomada literalmente. Las relaciones internas en este caso se vuelven muy complicadas. Sin embargo, el problema es fácil para quienes identifiquen que el 25% es la cuarta parte de la cantidad inicial. Las variaciones que se dan en los problemas 2, 3 y 4 son irrelevantes para quienes aplican el operador multiplicativo decimal.

Problema 7: "En una empresa hay 250 trabajadores. El 8% son ingenieros. ¿Cuántos ingenieros hay en la empresa?"

La manera de aplicar el algoritmo del operador decimal se analiza en esta pregunta, pues el porcentaje es menor a 10%, lo que hace posible que algunos alumnos multipliquen la cantidad inicial por .8 y no por .08, con lo cual se obtendrá el 80% en lugar del 8%. Esto puede indicar que los alumnos no ejercen control sobre sus resultados.

b) Reactivos que corresponden a los tipos de tareas 2 (determinar qué porcentaje es una cantidad de otra) y 3 (encontrar la cantidad inicial)

Problema 9: "En una farmacia decidieron aumentar los precios de los productos, todos en un mismo porcentaje. En la siguiente tabla se muestran algunos precios antes del aumento y la cantidad que se aumentó. ¿Qué porcentaje de su precio se recargó a las mercancías?"

Precio original	Cantidad que se aumentó
$200	$40
$750	$150
$1200	$240

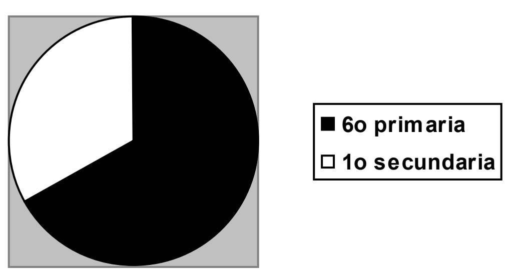
Problema 10: "En una tienda de ropa, cuando una persona compra a plazos le recargan el 5% al precio original de la prenda. Lorena compró una blusa y el aumento fue de $25 ¿Cuál es el precio original de la blusa?"

El problema 9 corresponde a la tarea de tipo 2, el 10 a la de tipo 3. En ambas tareas, si el porcentaje se entiende como una razón "tantos de cada 100", o bien si se identifica la cantidad inicial con el 100%, las relaciones internas son enteras y sencillas. El algoritmo del operador decimal sólo puede ser utilizado mediante aproximaciones sucesivas.

c) Reactivos que implican a la noción de razón, o de cantidad relativa

Problema 1: "En una escuela, se pidió a los alumnos que cooperaran para la fiesta de fin de cursos. Después se reportó la siguiente información en el periódico mural:

Cooperación



Grupo	Total de alumnos	Total de cooperación
6º primaria	150	$ 800
1º secundaria	60	$ 400

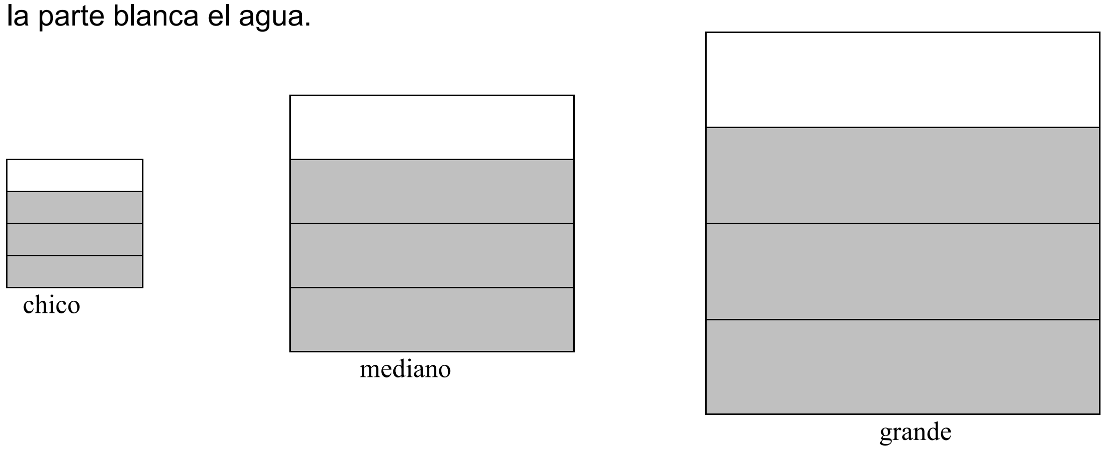
Juan dice que los de primero de secundaria son muy tacaños. Pedro no está de acuerdo con lo que dice Juan. ¿Cuál es tu opinión? ¿Por qué?”

Esperamos que la mayoría de los alumnos resuelvan correctamente este reactivo, aún los que tienen una comprensión precaria de la noción de porcentaje, pues las dos razones son fáciles de comparar, ya sea de forma cuantitativa (doblando los términos de una de las razones), o cualitativa (“los de 6º dieron más pero son más”). El fracaso en este reactivo puede indicar que las dificultades con el porcentaje se vinculan a una carencia anterior, relativa a la razón.

Problema 2: “Si vas a una tienda, ¿Qué preferirías, que te dieran el 25% de descuento o que te descontaran $100 del total de tus compras?”

Aquí pretendemos indagar si los estudiantes conciben al porcentaje no como una cantidad absoluta sino como un operador que al aplicarse a diferentes cantidades arroja resultados distintos.

Problema 8: “María prepara una bebida con concentrado de naranja “Florida 7” y un poco de agua. Vende el agua en vasos de tres tamaños: chico, mediano y grande. En el dibujo la parte oscura representa el concentrado y la parte blanca el agua.



¿En cuál vaso usa más concentrado? ¿En cuál vaso el porcentaje de concentrado es mayor? ¿En cuál vaso la bebida sabe más a naranja?”

Este reactivo se plantea con la intención de saber si los alumnos conciben al porcentaje como una razón constante que se mantiene entre cantidades que varían.

d) Reactivos que abordan otros aspectos del porcentaje

Problema 11: “Indica cuál(es) de las siguientes tres afirmaciones **NO** puede(n) ser cierta(s):

a) El pan cuesta ahora el 120% de lo que costaba el año pasado

b) En un año, ya con los intereses, hay que pagar al banco el 120% de lo que prestó originalmente
c) El 120% de los trabajadores de una fábrica son hombres”

Este reactivo concierne a porcentajes mayores a 100, la idea es formarnos una primera idea sobre si los estudiantes pueden distinguir en qué contextos estos porcentajes tienen sentido y en cuáles no.

2.2 Resultados Generales

2.2.1 Comportamiento general de los reactivos

a) Nivel de dificultad.

En los dos grupos el reactivo más sencillo es el de aplicar el 50%, 25% y 20% a una superficie, resuelto de manera correcta por más del 80% de los estudiantes y, el más difícil, el que corresponde al tipo de tarea 3 (reactivo 10, se pregunta por la cantidad inicial), en el que a lo más el 12% de los alumnos de cada grupo acertó En cuanto a los reactivos restantes, se obtuvieron porcentajes de éxito que oscilaban entre el 20 y el 60% en el grupo 1 y entre el 30 y el 80% en el grupo 2 (para calcular estos porcentajes consideramos los aciertos y aciertos parciales, es decir, todas las respuestas que, aunque presentaran errores de cálculo, no manifestaban errores conceptuales o de procedimiento).

b) Correlaciones entre los reactivos.

Se identificó una relación de implicación bastante clara entre los tres tipos básicos de tareas. La tarea de tipo 3 (encontrar la cantidad inicial conociendo la cantidad final y la tasa) es más difícil que la tarea de tipo 2 (encontrar la tasa) la cual es más difícil que la tarea de tipo 1 (encontrar la cantidad final). Los alumnos que resuelven la tarea de tipo 3, tienden a poder resolver las dos restantes; los que resuelven la de tipo 2 tienden a poder resolver la de tipo 1. Las recíprocas tienden a no verificarse, es decir, se identifican por ejemplo alumnos que resuelven la tarea de tipo 1 más no la de tipo 2.

En cambio, los tres tipos básicos de tareas antes mencionados no manifiestan correlación con los demás reactivos del cuestionario, aquellos en los que se explora la noción de razón (reactivo 1), de porcentaje y de razón (reactivos 2 y 8) y, por otra parte, aquel en la que se explora la comprensión de un porcentaje mayor que 100. Así, hay alumnos que manifiestan dificultades importantes para resolver las tareas básicas de porcentaje pero que, sin embargo, pueden resolver relativamente bien las tareas que implican la noción de razón, demostrando con ello que tienen cierta noción de razón aunque desconozcan el porcentaje. También se da el caso contrario: ciertos alumnos fallan en las tareas de razón, pero logran resolver bien, no los tres tipos de tareas pero sí al menos algunos reactivos de la tarea del tipo 1, mostrando con ello que pueden aplicar en ciertos casos un algoritmo aún cuando no manifiesten cierta comprensión de la noción de razón[20]. Por otro lado, el reactivo en el que intervienen porcentajes mayores al 100% también resultó ser independiente tanto de los tres tipos básicos de tareas como de la noción de razón.

Como se verá a lo largo del análisis de las resoluciones, esta falta de correlación era hasta cierto punto previsible pues los reactivos sobre la noción de razón, los reactivos sobre las tareas básicas del porcentaje y el que involucra porcentajes mayores al 100% pueden resolverse apelando a conocimientos distintos.

Esta falta de correlación entre los dos grandes grupos de reactivos hace que sea difícil destacar perfiles de desempeño considerando todos los reactivos. En el último apartado de este análisis volveremos sobre este punto.

2.2.2 Desempeño de los dos grupos

En el grupo 1 se obtuvo, de un total de 13 reactivos, un promedio por alumno de 4.2 aciertos (el 32% de los reactivos) y 2 aciertos parciales. En el grupo 2 los estudiantes alcanzaron un promedio de 6.8 aciertos (el 52.3% de los reactivos) y 1.4 aciertos parciales. Estos datos dejan ver que hay una diferencia considerable entre los resultados de ambos grupos, el segundo alcanzó un mejor desempeño.

Como se mencionó anteriormente, la jerarquía de dificultad de los reactivos es similar en ambos grupos, sobre todo en lo que concierne a los tres tipos básicos de tareas. Esto permite identificar en cada población tres niveles de desempeño, en función de los reactivos de los tipos básicos de tareas:

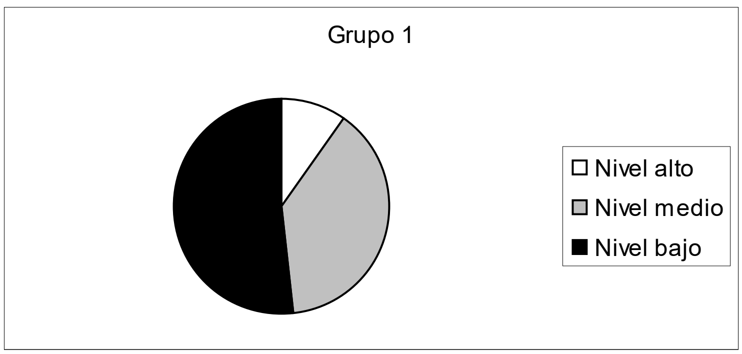
Nivel alto: Resuelven bien los reactivos de al menos dos de los tres tipos básicos de tareas, Tienden a resolver satisfactoriamente los demás reactivos.

[20] No descartamos que ampliando la cantidad y diversidad de tareas podría identificarse alguna correlación entre las preguntas sobre porcentaje y las preguntas que implican razones pero no porcentajes.

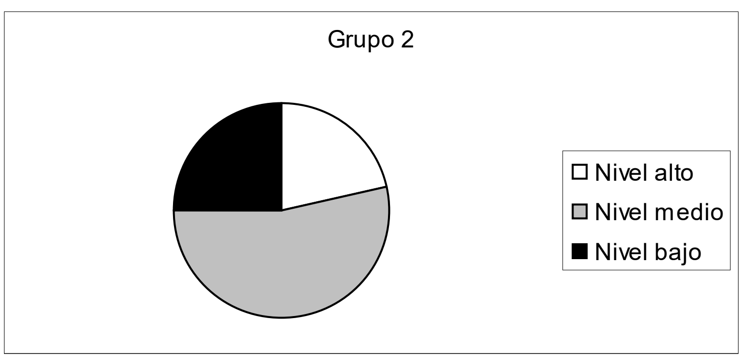
Nivel intermedio: Del grupo de tareas básicas, resuelven correctamente únicamente los reactivos del tipo 1 de tareas. Con respecto a los demás reactivos no hay un comportamiento uniforme.

Nivel bajo: Del grupo de tareas básicas, solamente resuelven bien los reactivos del tipo 1 que son fáciles, aquellos en los que se aplican porcentajes sencillos a superficies rectangulares. Algunos, no resuelven tampoco éstos. Con respecto a los demás reactivos tienden a no resolverlos bien.

Las gráficas 1 y 2 muestran los porcentajes de alumnos de cada grupo que integran cada uno de los tres niveles de desempeño. Nuevamente, destaca la diferencia entre los dos grupos.



Gráfica 1. Niveles de desempeño en el grupo 1



Gráfica 2. Niveles de desempeño en el grupo 2

En los comenta bre estas diferencias entre los dos grupos.

2.3 Procedimientos, errores, concepciones

A continuación se presenta un análisis de las resoluciones obtenidas en la aplicación del cuestionario y las entrevistas, organizado por tipos de tareas. Como se comentó anteriormente, la única correlación nítida que identificamos fue entre los tres principales tipos de tareas. Por esta razón, analizaremos conjuntamente los reactivos que corresponden a estos tipos de tareas, posteriormente los tres relacionados con la noción de razón y finalmente el reactivo que explora la comprensión de porcentajes mayores que cien. Interesa aquí identificar la diversidad de tipos de resoluciones, correctas o incorrectas. En un apartado posterior volveremos sobre las relaciones (o la ausencia de relaciones) entre las respuestas a los distintos reactivos.

2.3.1 Los tres tipos básicos de tareas de porcentaje

En general, los alumnos que obtuvieron un nivel alto de desempeño utilizaron técnicas no canónicas o bien recurrieron a algún algoritmo, usándolo de manera flexible. Los del nivel medio mostraron un manejo más limitado y mecánico de las técnicas algorítmicas o desplegaron técnicas no canónicas. Además algunos reflejaron conocimientos contradictorios sobre el porcentaje. Finalmente, los que alcanzaron un bajo desempeño utilizaron erróneamente algún algoritmo, propusieron procedimientos no pertinentes para resolver las tareas que se exigían o bien reflejaron conocimientos contradictorios sobre el porcentaje, de una manera más notoria que los que obtuvieron un nivel medio. A continuación describiremos estos comportamientos con más detalle.

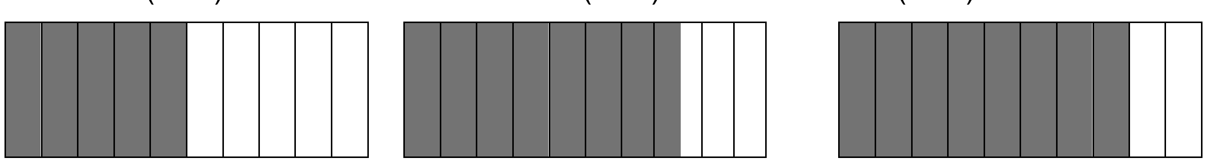
Procedimientos sistemáticamente incorrectos

Hubo estudiantes —tres de 31 del grupo 1 y uno de 28 del grupo 2— que prácticamente no acertaron en ninguno de los reactivos. Al aplicar a superficies, todos iluminaron una porción incorrecta, aunque tres de ellos conservaron el orden de los porcentajes, como Jessica:

(50%) (25%) (20%)

Loredo invirtió el orden de los porcentajes:

(50%) (25%) (20%)



Al aplicar porcentajes a cantidades respondieron ya sea como si el porcentaje fuera una cantidad absoluta —restando el porcentaje a la cantidad inicial o tomando el mismo porcentaje como respuesta—, ya sea aplicando diferentes operaciones aritméticas, como buscando un algoritmo, o bien no respondieron. Puesto que estos tipos de resoluciones también aparecen en la siguiente categoría, los ejemplificaremos allá.

Coexistencia de conocimientos correctos y erróneos sobre el porcentaje

La mayoría de los estudiantes —aunque se observa con mayor claridad en 22 de 31 del grupo 1 y en 10 de 28 del grupo 2— revelan en sus resoluciones la puesta en juego de distintos tipos de conocimiento, que se alternan con cierta facilidad y sin conflicto —salvo, en ocasiones, cuando se les hace ver—, pues los aplican diferencialmente en función de una o varias de las siguientes características de las tareas:

- El tipo de registro: gráfico o numérico

Este es el caso más frecuente. Lo ejemplificaremos a partir de las resoluciones de Liliana. En entrevista, ella resta para descontar un porcentaje a una cantidad numérica:

Entrevistadora:	*si una camiseta cuesta $500 pero me la están ofreciendo al 50% de descuento ¿Cuánto voy a pagar?*
Liliana:	*450 pesos*
Entrevistadora:	*a éste (500) le quitaste éste (50)*
Liliana:	*ajá*[21]

En cambio, sorprendentemente muestra una interpretación pertinente del porcentaje —como una fracción— cuando la cantidad inicial no es un número sino una superficie:

Entrevistadora:	*(...) si yo tengo un terreno y (...) quiero cultivar el cincuenta por ciento ¿Qué tanto cultivaré?*
Liliana:	*es la mitad*
Entrevistadora:	*¿y si te pido que marques el veinticinco por ciento?*
Liliana:	*es la mitad del cincuenta (por ciento)*

Llama la atención que aún en estos casos, al hacer intervenir la medida del terreno en el que aplicó correctamente el operador fraccionario, regresa a la idea del porcentaje como absoluto:

Entrevistadora:	*si este terreno mide 200 metros cuadrados ¿Cuánto mide el veinticinco por ciento?*
Liliana:	*veinticinco*

Pareciera que, en el registro numérico, ella no recupera del signo % un significado dentro de las matemáticas, sino más bien uno asociado a la experiencia de comprar en

---

[21] Esta manera de tratar al porcentaje como absoluto se puede ver también en el uso de ostensivos, como en el caso de Stephanie, quien escribe: 200 – 30% = 170%, y responde $170%, es decir, al parecer para ella el 30% es un número que se puede restar a 200 y 170% es lo mismo que $170. Es decir, para estos alumnos el sentido de un número no cambia cuando se acompaña del signo %

las tiendas: menciona que este signo, para ella, “es descuento”, es decir, es visto como una convención que indica una rebaja en los precios[22].

- El tipo de fracción: unitaria o no

Diana muestra bastante claridad cuando, en entrevista, se le pide marcar el 50%, 25% y 20% a un terreno, al responder que el primero “¿sería la mitad no?”, el segundo “una cuarta parte” y en el tercero, después de dudarlo, confirma que “se dividiría entre... entre cinco (…) porque serían 20, 40, 60, 80 y serían los 100 (cada que agrega 20 marca con el dedo otra quinta parte del terreno)”. No obstante, al preguntarle cuánto se debe pagar por una camiseta que costaba $200 y está al 30%, responde, en tono de pregunta: “¿doscientos entre treinta?”. Es decir, al cambiar a un porcentaje que no corresponde a un divisor de 100, para el que es más difícil determinar qué parte representa del total —y también al cambiar de registro—, Diana, al no disponer de una técnica y no optar por estimar, claudica de su saber y aplica una operación inadecuada para esta tarea[23].

Otro caso que muestra bien el papel de la fracción asociada al porcentaje implicado en la situación es el de Edgar, quien, de todos los reactivos del cuestionario, prácticamente sólo acierta en los que interviene el 20%, el 25% o el 50%, ya sea en tareas de tipo 1 o de tipo 2, ya sea que el porcentaje se aplique a un número o a una superficie. Es decir, manipula correctamente los porcentajes cuando el operador fraccionario es unitario y sencillo, pero lo utiliza como absoluto en los otros casos.

- El tipo de tarea

Algunos estudiantes emplean correctamente un algoritmo en las tareas de aplicar porcentajes a cantidades numéricas. En cambio, tratan al porcentaje como absoluto o utilizan operaciones no pertinentes en la tarea de tipo 2 (¿Qué porcentaje representan 40 de 200, 150 de 750 y 240 de 1200?). Por ejemplo, Moisés contesta las tres preguntas con 40%, 15% y 24% respectivamente, es decir, da como respuesta las tres cantidades finales, en las dos últimas, después de eliminar un cero, quizás para obtener porcentajes

[22] También Marisol, en entrevista, menciona que para ella el “por ciento” significa “pues que le rebajan, ¿no?, el precio”.

[23] No obstante, cabe aclarar que el uso de la división es, hasta cierto punto, congruente con lo que hace Diana cuando la fracción correspondiente es unitaria: al fijarse en el número de veces que cabe 20 en 100 está, implícitamente, poniendo en juego una división. Después, cuando el porcentaje no corresponde a un divisor de 100, ella utiliza explícitamente la división pero se equivoca al incorporar el nuevo dato (200) en lugar de 100, y al tomar el resultado de su división como respuesta, absoluta, y no como la parte del entero que hay que tomar.

menores al 100%. Miguel Ángel toma como respuesta una de las cantidades iniciales, eliminando un cero, propone el 75%.

En la tarea de tipo 3 (Si 25 es el 5% ¿Cuánto es el 100%?) se refleja en mayor medida la interpretación del porcentaje como cantidad absoluta, en las respuestas de alumnos que suman o restan el 5% —una cantidad relativa— a 25 —una cantidad absoluta—, respondiendo "30" o "20". Notemos que en el segundo caso proponen como 100% a un número (el 20) menor que 25, el cuál representa el 5%.

- El tipo de instrumento

En el cuestionario, Diana resuelve la mayoría de los reactivos como si el porcentaje fuera una cantidad absoluta, una medida; en particular, para aplicar un porcentaje, lo resta a la cantidad inicial. En cambio, en una entrevista posterior, al preguntarle cuánto se debe pagar por una camiseta que cuesta $200 pero está al 50%, responde, en tono de pregunta: "(200) se dividiría entre 50 ¿no?". En este caso los dos conocimientos son incorrectos, pero el que aplica en la entrevista no parece apelar a una interpretación del porcentaje como cantidad absoluta.

Así, estos alumnos ponen en juego conocimientos correctos bajo ciertas características de las tareas, y cuando estas características cambian, fracasan al utilizar algunos de los siguientes recursos: utilizan operaciones no pertinentes[24], manipulan el porcentaje como cantidad absoluta, emplean incorrectamente procedimientos generalmente algorítmicos, responden al azar, o no responden.

Usos limitados y mecánicos de algoritmos

Encontramos tres algoritmos diferentes puestos en juego por los estudiantes. Uno de ellos es la regla de tres, otro consiste en multiplicar el porcentaje por la cantidad inicial y dividir entre 100 y al tercero le llamaremos "multiplicar por el operador decimal" que consiste en multiplicar la cantidad inicial por el porcentaje y luego colocar el punto decimal en el resultado, dos lugares a la derecha.

---

[24] Es decir, realizan una de las cuatro operaciones básicas, en general la división, y toman el resultado obtenido como la respuesta al reactivo. Este error parece responder a un intento fallido de recordar un algoritmo para aplicar porcentajes del que alguna vez se dispuso, o bien a la creencia de que las tareas matemáticas frecuentemente se resuelven a partir de técnicas previamente enseñadas. Algunos incluso hacen varias operaciones con los dos datos conocidos y eligen uno de los resultados obtenidos. Mostraremos con detalle un ejemplo más adelante.

Entre los alumnos que recurrieron a estas técnicas hay diez de cada grupo que tuvieron varias de las dificultades que a continuación describimos:

- Errores al llevar a cabo las operaciones

Ciertos estudiantes cometieron errores de cálculo al seguir las reglas de los algoritmos, sobre todo al efectuar las divisiones.

- Olvido de las reglas que constituyen los algoritmos

Algunos se equivocaron al emplear el operador decimal cuando el porcentaje era menor a 10% (8% de 250), pues multiplicaron por .8 y no por .08, obteniendo el 80% en lugar del 8%. Isabel usó la regla de tres, pero en dos reactivos dividió cuando debía multiplicar y viceversa. Néstor y Miguel plantearon de manera incorrecta la regla de tres al no acomodar en cada columna o en cada renglón cantidades del mismo tipo (porcentajes con porcentajes, precios con precios).

Fernanda ensayó diferentes algoritmos, éstos eran a veces correctos y a veces no: por ejemplo, para calcular el 30% de 200 utilizó el operador decimal y por otro lado multiplicó 200 por 30 y luego dividió entre 100, obteniendo el mismo resultado. Además, dividió los dos datos, aparte multiplicó 200 por 10 y dividió el resultado entre 100. En este reactivo proporcionó la respuesta correcta, sin embargo en los siguientes tres utilizó el último algoritmo descrito, es decir, cambió el porcentaje por el número 10, obteniendo resultados erróneos.

- Falta de control de los resultados obtenidos

Los dos tipos de dificultades que hemos descrito sugieren que, con pocas excepciones, estos alumnos ejercieron poco control sobre sus resultados, pues estos errores frecuentemente produjeron respuestas que no eran factibles. Por ejemplo, la equivocación al acomodar el punto decimal ocasionó que se propusiera 200 como solución, un número demasiado grande para corresponder al 8% de 250.

- Extensión de los algoritmos a tareas en las que no son pertinentes

Algunos extendieron el uso de la técnica del operador decimal a los tipos de tareas 2 y 3, que ya no pertenecen al campo de problemas que pueden resolverse utilizándola directamente. Por ejemplo, para encontrar el precio original de una blusa sabiendo que el 5% de recargo es $25, tres estudiantes multiplicaron 25 por 0.5. Uno de ellos dio como respuesta el resultado obtenido: 12.5, es decir, dio un precio para la blusa menor que los 25 pesos del recargo. Otros, después de aplicar el algoritmo hicieron otra operación, por ejemplo, una alumna, como buscando que el resultado fuese factible, hizo una suma: 12.5 mas 25, y su respuesta fue 37.5.

Andrea incluso utilizó el algoritmo cuando tenía que decidir entre un descuento del 25% y uno de $100: multiplicó 100 por 0.25.

- Dificultad para resolver tareas en las que no se puede recurrir a un algoritmo

Varios estudiantes acertaron prácticamente sólo en algunos de los reactivos que implican aplicar porcentajes a cantidades, logrando un desempeño muy pobre en los que involucran a la noción de razón y en los tipos de tareas 2 y 3. Incluso llegaron a responder ciertos reactivos como si el porcentaje fuera una cantidad absoluta, al optar por un descuento de $100 frente a uno de 25% "porque sería pagar menos", o al restar o sumar los datos en los tres principales tipos de tareas cuando no aplicaron un algoritmo, entre otros.

Llama la atención que María José empleó el algoritmo pero no le parece un conocimiento útil, pues al elegir entre los dos descuentos prefirió los $100 porque el 25% es difícil de calcular.

Usos flexibles de los algoritmos

Algunos alumnos —dos de 31 en el grupo 1 y ocho de 28 en el grupo 2— aunque cometieron a veces errores como los recién descritos, mostraron un uso de los algoritmos adecuado y flexible. En general acertaron siempre que se pedía aplicar porcentajes y también emplearon correctamente los algoritmos en al menos uno de los tipos de tareas 2 y 3.

Cirse fue la única alumna del grupo 1 que logró extender con éxito el operador decimal al tipo de tarea 2 (¿Qué porcentaje representan 40 de 200, 150 de 750 y 240 de 1200?) Al parecer estimó que el porcentaje sería el 20%, y después comprobó aplicando dicho porcentaje a una de las cantidades iniciales (200), con el algoritmo.

Eduardo, del grupo 2, también utilizó el operador decimal en la tarea de tipo 3 (si 25 es el 5% ¿cuánto es el 100%?). En su cuestionario tenía escritas las siguientes operaciones, aunque no en el orden en que las presentamos aquí:

(1) Intento de recurrir a la regla de tres

25 ------ 5%

¿? ------ 100

$$\begin{array}{r} 9 \\ 5\overline{)2500} \\ 2050 \end{array}$$

(2) Técnica CP-i

375
250
125

(3) Uso del operador decimal

$$\begin{array}{r} 99 \\ \underline{\times\ .05\ \ .} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 375 \\ \underline{\times\ .05\ \ .} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 500 \\ \underline{\times\ .05\ \ .} \end{array}$$

4.95 18.75 25.00

Al parecer intentó primero aplicar una regla de tres, pero tuvo dificultades al hacer la división (1). Después posiblemente encontró que si 5% es 25, entonces 25% es 125 a través de CP-i y, mediante el mismo procedimiento, duplicó dos veces para tener que 50% es 250 y 75% es 375 (2). Quizás no se sentía muy seguro de su técnica, pues finalmente recurrió al operador decimal, estimando la cantidad inicial con aproximaciones sucesivas, o bien aplicándolo a las cantidades que obtuvo mediante CP-i, para confirmar su resultado (3). Si bien Eduardo muestra no disponer de una técnica para las tareas de tipo 3, también pone de manifiesto su buena comprensión de la noción y la disponibilidad de varias herramientas. Es capaz de detectar su error en el primer algoritmo y de ajustar el segundo para volverlo utilizable en una tarea en la que su aplicación no es directa.

No obstante, entre los alumnos del grupo 2 que acertaron ya sea en la tarea de tipo 2 o en la de tipo 3, encontramos principalmente el procedimiento de la regla de tres. Rafael usó esta técnica de la siguiente manera:

Reactivo 9: ¿Qué porcentaje representan 40 de 200, 150 de 750 y 240 de 1200?

(1) $200 100%
$40 $\boxed{2\%}$

100
x 40
400

2
200)400
000

(2) $750 100%
$150 $\boxed{20\%}$

20
750)15000
....000
......00

(3) $1200 100%
$240 $\boxed{20\%}$

20
1200)24000
....000

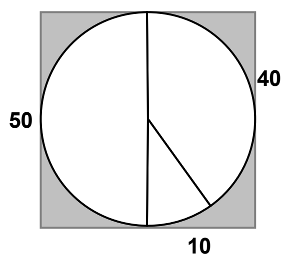
Varios de estos alumnos obtuvieron un buen desempeño en los reactivos que implican a la noción de razón. Fueron de los pocos que obtuvieron un desempeño general elevado.

Procedimientos no canónicos

Finalmente, cuatro de 31 alumnos del grupo 1 y seis de 28 del grupo 2 pusieron en juego técnicas no algorítmicas para resolver al menos el primer tipo de tareas. Como veremos, estas técnicas tienen distintas ventajas y limitaciones: casi todas tienen un alcance restringido, pero en todas se conserva el sentido.

- Uso de gráficas circulares

Dos alumnos del grupo 1 representaron con bastante precisión en una gráfica circular a los porcentajes. Veamos con cierto detenimiento el caso de Miriam, interesante por poder mostrar una relación diversa, no simple, entre los registros gráfico y numérico[25]. Para calcular el 40% de 50, hizo lo siguiente:



Sin embargo, no aprovechó esta representación para construir una técnica útil en el plano numérico: aún cuando se trataba del 25%, el único caso en que pudo representar el porcentaje de manera exacta mediante la gráfica, al pasar al plano numérico se limitó a dividir los datos tomando al cociente por resultado. Al parecer, ella tomó a la división como un algoritmo, aunque no tenía relación con la representación gráfica que propuso. Al igual que los alumnos que demostraron poder aplicar un porcentaje únicamente a superficies de rectángulos, Miriam mostró saber algo sobre el porcentaje cuando las medidas y los porcentajes eran representados gráficamente. En una entrevista posterior a la resolución del cuestionario recurrió al mismo procedimiento cuando se le pidió que calculara cuánto hay que pagar por una grabadora que cuesta $200 pero se ofrece al 30% de descuento. Al explicar parte de su procedimiento, mencionó que “el precio total de la

[25] Este tipo de resoluciones, como las que mostraremos de Miriam, en las que los alumnos muestran un buen dominio del registro gráfico y en ocasiones logran recuperarlo en el numérico para resolver algunas dificultades en este registro, nos llevaron a conferirle cierto peso al registro gráfico como un posible recurso de validación en el diseño de las situaciones didácticas que se analizan en el siguiente capítulo.

grabadora es el 100%” y que “es como si fuera el precio de la grabadora, los 200, éste (señalando la gráfica circular completa) es el precio de la grabadora”, con lo que dejó ver que identificaba al 100% con la cantidad inicial y a ésta con la superficie completa.

Su procedimiento muestra que además ella logró establecer una relación proporcional entre las partes de la figura y los números del 1 al 100, —tarea nada sencilla: varias veces borraba tanto las porciones que marcaba del círculo como los porcentajes que les asignaba— pues marcó una parte de la superficie cercana a la tercera parte, a la que le asignó el 30%, porque “éste (señalando la gráfica circular completa) es el precio de la grabadora, menos el 30% entonces ESTO es lo que cuesta la grabadora (señalando la parte de la gráfica correspondiente al 70%)”. Así, mostró saber también que el precio a pagar es representado por la parte de la gráfica complementaria a la que corresponde al 30%, por lo que su déficit reside en la técnica numérica: para representar el 30% en la superficie tomó la tercera parte de ésta, pero no pensó en dividir 200 entre 3 para calcular numéricamente el 30%. La entrevista sugiere que esta posibilidad se inhibió ante la certeza de que el problema tendría que resolverse utilizando alguna de las operaciones básicas, pues ella afirmó que “no puede ser una resta, entonces una división”. Tal vez la representación gráfica le ayudó a ver que, entre las cuatro operaciones, la división es la más pertinente.

Así, ella perdió el vínculo con el sentido logrado en lo gráfico al pasar al plano numérico, pero fue capaz de recuperarlo con otros casos más sencillos, como el siguiente:

Entrevistadora:	*si en este (...) terreno quiero cultivar el 25% (¿hasta dónde llegaría lo cultivado?)*
Miriam:	*sería la mitad de la mitad*
Entrevistadora:	*(...) si (el terreno) mide 800 metros cuadrados ¿cuánto mide la parte cultivada?*
Miriam:	*200, porque el terreno en total sería 800, entonces la mitad de 800 es 400 y la mitad de 400 sería 200*

Y en otro caso logró establecer una correspondencia parcial:

Entrevistadora:	*¿si te pido que marques el 70%?*
Miriam:	*(estimó correctamente una porción del rectángulo, haciendo una marca primero en la mitad y luego tomando un pedazo más grande)*
Entrevistadora:	*¿Por qué?*
Miriam:	*si el terreno en total mide 100, la mitad sería 50, a los 50 le tendría que aumentar otros 20*
Entrevistadora:	*si todo este terreno mide 300 metros cuadrados, ¿Cuánto sería el 70%? ¿Cuánto mediría?*

(...)

Miriam: *ciento setenta*
Entrevistadora: *¿por qué?*
Miriam: *por... el terreno mide 300, la mitad son 150 pero a esa mitad le voy a aumentar los 20 que es la diferencia*

Así, al 50% calculado correctamente, le agregó 20 metros cuadrados —cantidad absoluta—, como si correspondieran al 20%, quizás debido a que en las superficies este procedimiento es certero: el rectángulo completo se piensa como 100, de los cuales hay que tomar 20 para marcar el 20%.

En el resto de los reactivos del cuestionario sólo acertó parcialmente en el único que no involucraba cantidades discretas sino representaciones gráficas. Esto parece confirmar que sus conocimientos sobre el porcentaje están muy asidos al registro gráfico.

Cabe mencionar que también es posible que la representación gráfica responda a una exigencia de su maestro, aunque para ella no tenga un sentido lo suficientemente establecido para traducirla en estrategia para el plano numérico. De cualquier manera, los errores parecen provenir del fuerte peso que ella le otorga al contrato didáctico (es decir, a la expectativa de usar una de las cuatro operaciones básicas, y quizás también de emplear gráficas).

- Técnica CC[26]

Al parecer dos alumnos del grupo 2, Waldo y Felipe, apelaron a una definición del porcentaje como una razón «tantos de cada 100» al recurrir a la relación de proporcionalidad que se deriva de ella. Veamos el caso de Waldo, quien utilizó tanto las relaciones internas como la externa:

Reactivo 6 (25% de 128)	Reactivo 7 (8% de 250)
Combinación de CC-i y CC-e:	Técnica CC-i:
128	250
100 → 25	100 → 8%
28 → 7	100 → 8%
R = 32 personas	R = 20 personas

En el reactivo 6, quizás, identificó que 25 es la cuarta parte de 100 (razón externa), por lo que tomó la cuarta parte de 28, que es 7, para después sumar 25 y 7 (relación interna). En el reactivo 7, aunque no aparece explícitamente la relación «de 50 se toman

[26] Consiste en establecer una relación de proporcionalidad a partir de la razón determinada por el porcentaje en cuestión (por ejemplo, “20 de cada 100”), utilizando las relaciones internas o la externa.

4», pensamos que la utilizó para calcular cuánto se toma de 250. Llama la atención que haya tachado el signo %, quizás porque ya no estaba pensando en el porcentaje sino en la razón «8 de cada 100». Es interesante el hecho de que este alumno al parecer utilizó CC-i en el reactivo 7 y no en el 5 (40% de 50), a pesar de que las relaciones internas son más complicadas en aquél. En dicho reactivo, estimó "como 23 ó 24", no sabemos cómo lo hizo.

Si bien Waldo y Felipe mostraron poder usar el procedimiento CC en la tarea 1, no lo hicieron para resolver los reactivos de las tareas tipo 2 y 3, en los que sin embargo los datos facilitan dicho procedimiento. En la tarea de tipo 3 (Si 25 es el 5% ¿Cuánto es el 100%?), Waldo intentó plantear una regla de tres identificando erróneamente a $25 con el 100%, pero abandonó la estrategia, y explicó que "al precio original que sería el 100% se le agrega 5%". En la tarea de tipo 2 (¿Qué porcentaje representan 40 de 200, 150 de 750 y 240 de 1200?) acertó a partir de dos reglas de tres —con una encontró qué porcentaje es 150 de 750 y con la otra 240 de 1200—, y quizás calculó mentalmente el porcentaje que representa 40 de 200. Felipe, en ambos reactivos proporcionó respuestas incorrectas. El hecho de que estos alumnos no hayan logrado adaptar a los tipos de tareas 2 y 3 el procedimiento que utilizan exitosamente para aplicar porcentajes sugiere que en dichas tareas es más difícil establecer las relaciones entre los datos.

- Técnica CP-i[27]

De los procedimientos no canónicos a los que recurrieron los alumnos, el más utilizado fue la técnica CP-i, al que recurrieron dos alumnos del grupo 1 y cuatro del grupo 2. Esta técnica aparece en distintas variantes que presentamos a continuación. Las ejemplificaremos separadamente, aunque en ocasiones una resolución combina distintas variantes:

- Técnica CP-i calculando mitades, dobles, sumas y estimando después.

Respecto a la tarea de aplicar porcentajes a cantidades, ejemplificaremos esta variante de la técnica con el reactivo en el que las relaciones resultaron más complicadas.

Reactivo 7 (8% de 250):

Juan Carlos		Luis Alejandro	
250	100%	250	100

[27] Consiste en identificar a la cantidad inicial con el 100% y a partir de ahí establecer una relación de proporcionalidad utilizando las relaciones internas.

:2	125	50%	:2	125	50
:2	62.5	25%	:2	62.5	25
				31.25	12.5
				15.75	6.25

Juan Carlos, aunque no mostró el procedimiento, en una entrevista posterior dejó ver que utilizó las relaciones que acabamos de plantear: “250 entre 2, son 125, (...) sería el 50 (%), y (...) 125 entre 2, 62.5, ese es el 25 (%), y ya de aquí (inaudible)”. Luego estimó el 8%, proponiendo un rango —“de 10 a 20”— en el que efectivamente se encuentra la respuesta exacta. A partir de esta estimación, logró hacer otras utilizando las relaciones internas, como la que planteó para el 10% de 500: “como es de 500, no puedo decir de 10 a 20 porque es más (...) sería lo doble (…) como de 20 a 50”.

Luis Alejandro respondió de manera similar: estimó el número 17, quizás buscando un número entre el 6.25% y el 12.5%.

Respecto a los otros dos tipos de tareas, mostraremos dos ejemplos. En la tarea de tipo 2 (¿Qué porcentaje es 40 de 200...?) Luis Alejandro anotó los datos 120, 24, 48, 96,... y no encontró una solución. Tal vez tomó a 240 como el 100%, y en consecuencia, 120 y 24 como el 50% y 10%, respectivamente, es decir, intentó fallidamente utilizar de nuevo la técnica CP-i. Si hubiera identificado a 200 con el 100% las operaciones, combinadas con una estimación, habrían sido sencillas.

Por el contrario, Carolina utilizó correctamente la técnica en la tarea de tipo 3 (si 25 es el 5% ¿Cuánto es el 100%?) de la siguiente manera:

10%	50
20%	100
30%	150
40%	200
50%	250

Respuesta: $500

Estas resoluciones nos muestran un uso restringido de la técnica, pues en general sólo se calculan mitades, dobles y sumas. La técnica podría ser más eficiente si se utilizaran otros operadores enteros, además de ½ y 2.

Sin embargo, la resolución de Carolina deja ver al mismo tiempo que, cuando se logran establecer las relaciones entre los datos, la técnica puede ser poderosa: ella logró el mejor desempeño entre los alumnos del grupo 1, lo cual puede atribuirse en parte a tener acceso a la resolución de ciertos tipos de tareas que los demás —por ejemplo, la mayoría de quienes aplican un algoritmo para calcular un porcentaje— no pudieron abordar.

- Técnica CP-i, disminuyendo los porcentajes de n en n y las cantidades de m en m

Esta variante fue utilizada por Juan Carlos para aplicar el 40% a 50. En el cuestionario escribió lo siguiente:

?	%
50	100
40	80
30	60
20	40
10	20
0	0

Durante una entrevista posterior explicó que disminuía las cantidades de 10 en 10 y los porcentajes de 20% en 20%, hasta obtener 0 en ambas columnas. Aunque no es claro cómo determina los números 10 y 20, es decir, cómo encuentra el tamaño de las disminuciones constantes que permiten llegar al 0 en el mismo momento en las dos columnas, la manera de encontrar el 42%, también de 50, ayuda a entenderlo: sabiendo que 25 es el 50% y 20 el 40%, determina que el 42% "serían 21 (porque) del 1 al 5 cada (inaudible) valga 2 por 2, 4, 6, 8, 10 para que lleguen en 5 al 50 (...) del 20 al 25 le voy subiendo un 2% (...) 21 sería 42, 22 (sería) 44, ...". Es decir, encuentra que en 5 aumentos de 1 en 1 transita del 20 al 25, así que debe encontrar una cantidad que, aumentada 5 veces al 40, permita llegar a 50, esa cantidad es 2.

En el tipo de tarea 3 hizo algo similar para encontrar la cantidad inicial: sabiendo que el 5% es 25, aumentó los porcentajes de 5% en 5% y las cantidades de 25 en 25, hasta encontrar el 100%: "tiene que llegar hasta el 100% (…) porque el 100% es la (cantidad) total", "el 5 vale 25, el 10 vale 50, como es lo doble pues también lo doble, el 15 ha de ser 75, el 20 son 100, el 25 son 125...", es decir, "sumo 25, porque como estoy (sumando) 5 pues debo de sumar 25 que es de aquí". Después de calcular el 50% acorta el trayecto: "ya para el 100 pues es lo doble aquí van a ser 500 pesos".

- Técnica CP-i, a partir del cálculo del 10%

Esta variante se puede ver en resoluciones como las siguientes, que corresponden al reactivo 4 (30% de 200):

Melisa

10% = 20

30% = 60

Mariana

10%	20%	30%	40%	50%	60%	70%	80%	90%	100%
20	20	20	20	20	20	20	20	20	20

En el reactivo 7 (8% de 250), dos alumnos encontraron una buena aproximación al resultado exacto, al parecer calculando el 10% y después eligiendo un número menor a él.

En algunos casos se puede percibir un aferramiento a esta variante, quizás por no conocer otra. Por ejemplo, Jorge Liber parte del cálculo del 10% para determinar el 25% de 128, aún cuando no es entero y su resolución se vuelve muy complicada, y no piensa en tomar la cuarta parte de 128.

Ninguno de los alumnos que recurrieron a la estrategia de partir del cálculo del 10% logró extrapolarla a los reactivos que corresponden a los tipos de tareas 2 y 3. Mariana estableció correctamente las relaciones entre los datos en la tarea de tipo 3 (si 25 es el 5% ¿Cuánto es el 100%?):

$$\begin{array}{rcl} 5\% & \rightarrow & 25 \\ 95\% & \rightarrow & x \end{array}$$

Sin embargo, no efectuó las operaciones que corresponden a la aplicación de la regla de tres.

Primer comentario parcial

Algunos alumnos disponen de cierto repertorio de técnicas que utilizan en distintas situaciones. Por ejemplo pueden recurrir al operador fraccionario cuando éste es fácil de determinar y partir del cálculo del 10% en los otros casos, o bien emplear una técnica no canónica en el primer tipo de tareas y la regla de tres en los otros dos.

Por el contrario, otros alumnos disponen de una sola técnica que les funciona en cierto campo de tareas pero no logran hacer demasiado fuera de él. Esto sucede con algunos alumnos que utilizan el operador decimal —sólo aciertan en el primer tipo de tareas, y cuando el porcentaje es mayor al 10% y menor al 100%—, y también con estudiantes que recurren a alguna técnica no canónica. Por ejemplo, Felipe recurre a la técnica CC-i, únicamente cuando la razón interna es entera y fácil de encontrar, pero no resuelve cuando no es el caso. Así, varios alumnos utilizan ciertas variantes de las técnicas no canónicas de una manera restringida, ya sea al cálculo del 10%, o al uso de mitades, dobles y sumas, entre otros, pero cuando las variables numéricas exigen una modificación en la técnica no logran hacerlo. En particular, llama la atención que no haya aparecido la técnica del valor unitario, la cual frecuentemente se pone en juego en tareas de proporcionalidad. Quizás esto se debe a que esta variante de las técnicas CP-i o CC-i exige un grado de sistematización importante sobre las que utilizan los estudiantes, al punto de volverlas algoritmos que permiten resolver los tres tipos de tareas sin importar cuáles sean los datos: al menos requiere el uso de operadores internos más complejos que los que ellos emplean (½, 1/10, etc.)

Es posible que la rigidez en el uso de las técnicas no canónicas que muestran algunos estudiantes se deba en parte a que éstas no encuentran cabida en la clase de matemáticas. Por ejemplo, durante una entrevista, Juan Carlos —quien empleó la técnica CP-i— hizo explícito un aprendizaje extraescolar: "es que cuando va mi mamá (...) al súper (...) le ayudo". Por otro lado, también dejó ver su inseguridad en relación al uso de sus procedimientos: varias veces aseguró no saber casi nada del porcentaje, como disculpándose, y en el cuestionario borró sus anotaciones para dejar escritas solamente las respuestas.

Además, llama la atención el que los alumnos no hayan utilizado las técnicas no canónicas con las resolvieron las tareas de tipo 1 (aplicar porcentajes), para resolver los tipos de tareas 2 y 3, sobre todo en los casos en que las operaciones habrían resultado sencillas. Esto muestra que la adaptación que requiere una técnica que se ha usado en el tipo 1 de tareas, para poder funcionar en los tipos de tareas 2 y 3, por pequeña que sea, no es trivial. El principal reto es poder establecer con claridad las nuevas relaciones entre los datos. La dificultad para abordar los tipos de tareas 2 y 3 también puede deberse a una escasa presencia de estas tareas en la enseñanza, como pensamos que sucede con las técnicas no canónicas. Ambas cuestiones están vinculadas: la exploración de un reducido número de tipos de tareas disminuye la necesidad de robustecer las técnicas.

Nos interesa mencionar también que las cinco categorías que presentamos no separan a los alumnos en clases disjuntas pues algunos utilizaron procedimientos que presentan más de una de las características que utilizamos para determinar dichas categorías. Por ejemplo, algunos de los alumnos que emplearon erróneamente o de forma limitada y mecánica un algoritmo también manifestaron una coexistencia de conocimientos correctos y erróneos relativos al porcentaje. Otro caso que quizás parezca contradictorio, es el de aquellos alumnos que mostraron un uso flexible de un algoritmo, por ejemplo al ser capaces de emplearlo en la tarea de tipo 2, pero al mismo tiempo reflejaron dificultades con su uso al aplicar el 8%, obteniendo un resultado demasiado grande y sin cuestionarse su factibilidad. Más adelante veremos que también se observa cierta irregularidad o disparidad en los resultados cuando se comparan los que obtuvieron los alumnos en los tres tipos de básicos de tarea con los que obtuvieron en los reactivos que involucran a la noción de razón o a porcentajes mayores al 100%.

2.3.2 La noción de razón y el porcentaje

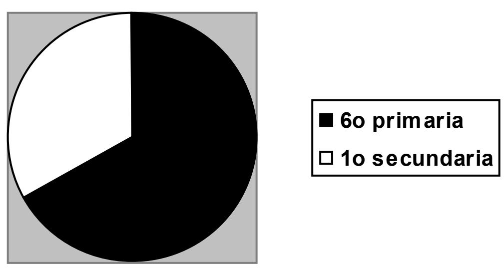
En el cuestionario se planteó un reactivo para explorar en qué medida los alumnos ponen en juego la noción de razón en una situación de comparación relativamente sencilla, y dos reactivos más para explorar la comprensión de dos aspectos distintos de la noción de porcentaje vinculados a la razón: en el reactivo 2 se enfatiza el porcentaje como una aplicación creciente, que depende de la cantidad inicial, a diferencia de una cantidad absoluta. Y el reactivo 8 pone en juego una condición más fuerte del porcentaje, es una razón que se mantiene constante entre dos conjuntos de cantidades.

A continuación analizaremos los tipos de resoluciones que proporcionaron los estudiantes en cada reactivo. Se analizan los tres reactivos por separado porque no encontramos una correlación clara entre ellos, lo cual probablemente se debe a que los tres reactivos exploran distintos rasgos de las razones y el porcentaje.

Reactivo 1: la noción de razón

"En una escuela, se pidió a los alumnos que cooperaran para la fiesta de fin de cursos. Después se reportó la siguiente información en el periódico mural:

Cooperación



Grupo	Total de alumnos	Total de cooperación
6º primaria	150	$ 800
1º secundaria	60	$ 400

Juan dice que los de primero de secundaria son muy tacaños. Pedro no está de acuerdo con lo que dice Juan. ¿Cuál es tu opinión? ¿Por qué?"

El siguiente resumen da una idea general de los resultados. Enseguida los comentamos con más detalle.

		Grupo 1	Grupo 2
Consideran la noción de razón	Comparación cuantitativa: determinando el tamaño de	3/31	12/28

	las razones		
	Estimación y comparación cualitativa de las razones	17/31	8/28
Indecisión entre considerar las razones o comparar cantidades absolutas.		1/31	1/28
Comparación de las cantidades absolutas y no de las razones		4/31	3/28
Resolución basada en el contexto, dejando de lado las relaciones en juego.		6/31	4/28

Comparación cuantitativa: determinando el tamaño de las razones

Hubo tres de 31 alumnos del grupo 1 y 12 de 28 del grupo 2 que resolvieron correctamente el reactivo. Algunos de ellos compararon los dos valores unitarios, es decir, en los dos casos dividieron para calcular la cooperación por persona.

Otros alumnos construyeron una razón equivalente a una de las razones dadas para comparar dos razones con el mismo antecedente o consecuente, por ejemplo: “no porque los (...) de 6º dieron el doble pero son más del doble” o “pienso que si hubieran sido la misma cantidad de alumnos de primaria y secundaria hubieran ganado los de secundaria”[28].

Estimación y comparación cualitativa de las razones

Algunos estudiantes —17 de 31 del grupo 1 y 8 de 28 del grupo 2— respondieron que los de sexto de primaria “dieron más porque son más”, es decir, compararon cualitativamente las dos razones, pero no verificaron numéricamente. Este argumento no da cuenta de una condición suficiente pero sí de una condición necesaria.

Las respuestas de dos alumnos sugieren que en ocasiones la falta de una comparación cuantitativa puede deberse a una dificultad con los cálculos numéricos y no a que consideran que basta con la comparación cualitativa. Por ejemplo, Santiago intentó determinar los dos valores unitarios —quizás porque sabía que su argumento era correcto pero insuficiente, o bien porque simplemente quería reforzarlo. Al parecer desistió, tal vez debido a que encontró dificultades al dividir.

También consideramos en esta categoría las respuestas de Loredo y Fabricio, quienes, si bien obviaron el número de estudiantes, tomaron en consideración dos razones: Fabricio opina que “los de la secundaria gastan más porque dan muy caro todo y en la primaria más barato por eso digo que está bien”. Es decir, compara las razones entre el dinero cooperado para la fiesta y el dinero del que cada generación dispone, considerando las diferencias en los precios de los productos. Loredo concluye que “sí (son tacaños los de secundaria) porque en la secundaria te dan más dinero”.

[28] Cabe mencionar que en ocasiones las respuestas se formularon de una manera poco clara, como: “no son tacaños porque pusieron más dinero”, o “yo digo que mejor les hubiera tocado la mitad para que no hubiera protestas”. No obstante, nos parece que sí reflejan una conclusión que pasó por una comparación numérica de las razones.

Indecisión entre comparar razones o comparar cantidades

A esta categoría pertenece un estudiante de cada grupo. Veamos la respuesta de Ana Carla, que es la más clara: no pudo tomar una decisión, pues, por un lado "sí pudieron haber dado más, es mucha diferencia de $800 a $400", y por otro "en la secundaria hay menos (alumnos) que en la primaria".

Comparación de las cantidades absolutas y no de las razones

Hubo estudiantes —cuatro de 31 del grupo 1 y tres de 28 del grupo 2— que opinaron que Juan tenía razón, argumentando por ejemplo "que sí son muy tacaños porque juntaron la mitad del dinero" o que "los de secundaria pusieron aproximadamente 40% y los de primaria el resto", lo cual sugiere que es posible saber usar un porcentaje y no por ello visualizar las razones. Estos alumnos no compararon las razones, sólo tomaron en cuenta una de las magnitudes, la del dinero.

Resolución basada en el contexto, dejando de lado las relaciones en juego.

Algunos alumnos —seis de 31 del grupo 1 y cuatro de 28 del grupo 2— respondieron apelando a elementos del contexto y no a las relaciones entre los datos que nosotros pretendíamos que consideraran. Esgrimieron argumentos como "hay familias que no tienen ese dinero o por que no quieren gastar" o bien "cada quien coopera con lo que quiere, si primero no quiso cooperar que bien y si hubieran querido también".

Reactivo 2: el porcentaje como cantidad relativa

> *"Si vas a una tienda, ¿Qué preferirías, que te dieran el 25% de descuento o que te descontaran $100 del total de tus compras? Explica por qué"*

La resolución de este reactivo implica la comparación de 25% con 100, es decir, de una cantidad relativa con una cantidad absoluta. Nos interesaba ver si los alumnos consideraban o no al porcentaje como una aplicación que varía, que depende de la cantidad inicial, aunque no logramos dilucidar esto con seguridad.

Clasificamos los procedimientos en dos grandes grupos: aquellos que parecen distinguir entre cantidades absolutas y relativas (vinculando al 25% con las segundas), y aquellos que tratan al 25% y $100 como si fueran cantidades del mismo tipo, las dos absolutas o las dos relativas. Algunos procedimientos no fueron clasificados debido a que la información sobre ellos es insuficiente.

		Grupo 1	Grupo 2
1. Establecen distinciones entre cantidades absolutas y relativas	• La mejor oferta depende de la cantidad (*)	5/31	13/28
	• Preferencia por un descuento que varía en forma creciente frente a uno constante	5/31	6/28
	• El 25% es aplicable a cualquier cantidad (*)	4/31	3/28
	• Preferencia por el trato más claro (*)	1/31	1/28
	Sub total	15/31	23/28
2. No hay distinción entre los dos tipos de cantidades	• Interpretación del porcentaje como cantidad absoluta, o de la cantidad absoluta como relativa	6/31	2/28
3. No se puede saber	• Resolución a partir de un caso particular	3/31	2/28
	• Argumentos no claros	7/31	1/28

(*) En el caso de estos dos procedimientos, hay elementos para suponer que consideran que el 25% constituye una cantidad relativa, pero esto no es seguro.

Procedimientos en los que se establecen distinciones entre cantidades absolutas y relativas

- *La mejor oferta depende de la cantidad*

En esta categoría agrupamos a los alumnos —5 de 31 del grupo 1 y 13 de 28 del grupo 2— que, aun cuando en ocasiones eligieron el 25%, o los 100 pesos, o bien mencionaron que "en general sale lo mismo[29]", aclararon que "depende de la compra que hayas hecho", "porque dependiendo de los productos que compre pero también me serviría el 25%"[30].

Algunos estudiantes justificaron el argumento de que la mejor opción depende del precio: cinco dieron un ejemplo en el que conviene más el 25% y otro en el que es mejor un descuento de $100, uno de los cuales cometió ciertos errores: "por ejemplo si una camisa cuesta 100 pesos te rebajan el 25% y si cuesta 400 pesos te pueden descontar 100 pesos a mi me da igual". Él no notó que los ejemplos que escogió no son afortunados, pues si la camisa cuesta 100 pesos conviene más $100 de descuento, y si cuesta $400 ambos coinciden. Quizás no puso mucho cuidado en asegurar que sus ejemplos fueran adecuados pues tenía seguridad de que su razonamiento lo era. Dos

[29] Estos alumnos hicieron una generalización a partir de probar las dos opciones con un precio de $400.
[30] Es posible entonces que la elección de una de las dos opciones haya sido un efecto del contrato didáctico: consideraron que no podían dar como respuesta algo que no fuera una opción planteada en el reactivo.

estudiantes más aludieron a los rangos de precios en los que cada opción es preferible, sin determinarlos con precisión: “si vas a comprar mucho que te den el 25% pero si vas a comprar poco los $100”. Además, Waldo explicó que “te quitan 25% por cada 100 de lo que debes pagar” quizás aludiendo a la definición del porcentaje como razón[31].

En otros casos las explicaciones fueron menos claras, como sucedió con Marisol quien, en entrevista, varias veces respondió como si el porcentaje fuera absoluto e incluso admitió que “casi no me acuerdo del porcentaje”. Esto sugiere que el mencionar —en el reactivo que analizamos aquí— que “mhhh... pues... bueno es que sería dependiendo la verdad” no necesariamente se debe a la consideración de que la mejor opción no siempre es la misma, ni de que el porcentaje es relativo y por lo tanto se debe conocer la cantidad a la que se aplica. También puede obedecer a la necesidad de conocer la cantidad inicial para resolver cualquier problema, como pensamos que les ocurre a algunos alumnos en el tipo de tarea 3.

- *Preferencia de una cantidad que varía en forma creciente frente una cantidad constante*

Hubo alumnos —cinco de 31 del grupo 1 y seis de 28 del grupo 2— que optaron por el 25%, lo que justificaron con argumentos como “porque el porcentaje es mayor”, “porque es la tercera parte del costo” “porque es la mitad de la mitad”. Aunque uno de ellos encontró un operador equivocado, al menos las últimas dos respuestas sugieren que estos alumnos repararon —aún cuando se les dificultara expresarlo— en que el descuento de 25% constituye una parte, siempre la misma, del precio inicial, lo que implica que aumenta conforme el precio crece, y esto no sucede con el descuento de $100, por lo que la primera opción es más conveniente en más ocasiones que la segunda. Esto último se percibe más claramente en quienes argumentaron, por ejemplo, que “si compras algo muy caro sería mejor que te dieran el 25% que te descontaran $100”.

- *El 25% es aplicable a cualquier cantidad*

Algunos estudiantes —cuatro del grupo 1 y uno del grupo 2— optaron por el 25% de descuento al notar que “el 25% me lo van a dar en todo lo que compre”, o bien, que “no te van a quitar $100 si es menos la compra”. Es decir, que en lugar de comparar el

[31] Waldo utilizó la técnica CC al aplicar porcentajes. Esto aunado a la respuesta que proporcionó en este reactivo muestran su concepción del porcentaje como razón.

tamaño de los dos descuentos, descartaron el de $100 porque no es factible en términos estrictos para cantidades menores a $100.

Por el contrario, Miguel optó por los 100 pesos: "si pagas menos de $100 yo creo que te pueden dar lo restante (...) en cambio, si te dan el 25% (...) te quitan depende cuanto cueste dicho producto".

Aunque hicieron elecciones diferentes, los seis alumnos parten del mismo lugar: el hecho de que el 25% es aplicable a cualquier cantidad, de la que siempre representa una parte pero no el total, indujo a Miguel a elegir los $100 pesos y a los demás el 25%[32].

- *Preferencia por el trato más claro*

María José —del grupo 2— explicó que prefiere el trato más claro, no el más efectivo: eligió los $100, "porque así te puedes dar mejor cuenta de lo que te están descontando porque si te dicen que tiene el 25% de descuento tienes que hacer una operación algo difícil". Diana —del grupo 1—, en entrevista, hizo la misma elección: "¡ay! es que para sacar el porcentaje te digo que no se me da, entonces es más fácil los cien pesos". Aunque la respuesta deja ver que a María José y Diana les parece complicada la noción de porcentaje, al menos en este reactivo no parece estar operando una interpretación como cantidad absoluta, pues en ese caso la operación "algo difícil" sería una resta.

Procedimientos en los que no hay distinción entre cantidades absolutas y relativas: el porcentaje se interpreta como absoluto, o la cantidad absoluta como relativa.

Algunos estudiantes —seis de 31 del grupo 1 y dos de 28 del grupo 2— prefirieron los 100 pesos "porque es más". En una entrevista, José Luis eligió, en tres preguntas similares, el número más grande: optó por un descuento de "cien pesos en mis compras" a uno del 25%, "porque ¿es más efectivo?" y, tanto al escoger entre un descuento del 30% y uno de $75, como entre uno de $30 y uno del 75% —es decir, donde son los mismos números pero se intercambian su cualidad de ser absolutos o relativos— se inclinó por el 75. Liliana, también en entrevista, opinó que "es lo mismo" uno del 30% que uno de $30. Al parecer, para estos alumnos no hay una distinción —de carácter matemático— entre los signos % y $.

Por el contrario, Juan Antonio y Rosa respondieron que preferían el 100% "porque me dan todo", "así no me cobrarían nada", es decir, al parecer tomaron la cantidad

---

[32] Aunque no puede descartarse la posibilidad de algunos hayan elegido el 25% pensando que es equivalente a $25, descuento que es factible para más cantidades que uno de $100.

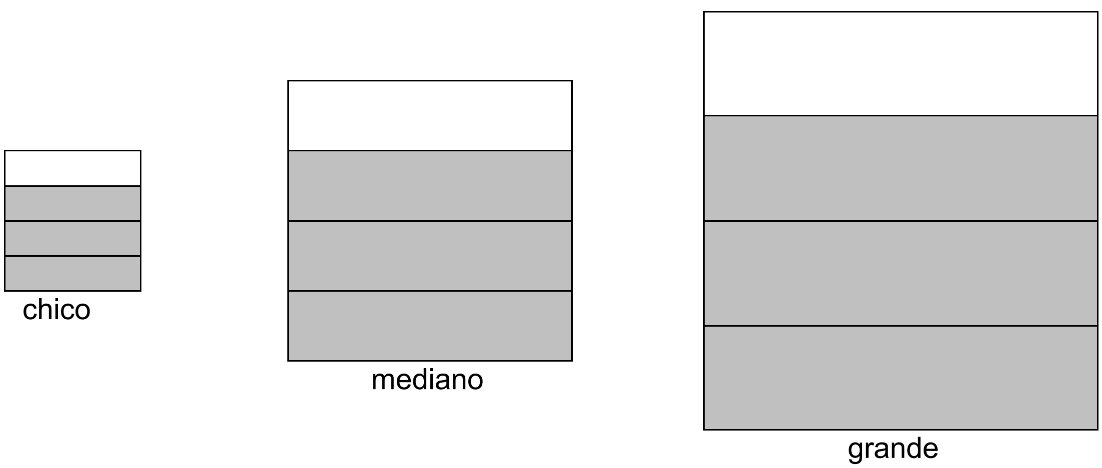
absoluta como si fuera relativa, quizás para convertir un problema en el que es necesario comparar dos cantidades de distinto tipo en uno que implica comparar dos del mismo tipo.

Procedimientos que no arrojan suficiente información: resolución a partir de un caso particular

Hubo alumnos —tres de 31 en el grupo 1 y dos de 28 en el grupo 2— que optaron ya sea por el 25% o los 100 pesos después de elegir un precio hipotético. Algunos de ellos aplicaron los dos descuentos al precio de base que propusieron y se decidieron por el que resultó más conveniente. Para un alumno bastó aplicar el descuento de $100 pesos para elegir ese descuento. Por alguna razón no consideró necesario aplicar el 25%. También llama la atención la respuesta de César, quien se decidió por el 25% a partir del caso particular en el que los dos descuentos coinciden: "si el total de las compras es de $400 el 25% sería $100". Sorprende que él no haya respondido que las dos opciones son iguales.

Reactivo 8: el porcentaje como razón constante entre cantidades variables

"María prepara una bebida con concentrado de naranja "Florida 7" y un poco de agua. Vende el agua en vasos de tres tamaños: chico, mediano y grande. En el dibujo la parte oscura representa el concentrado y la parte blanca el agua.



1. ¿En cuál vaso usa más concentrado? 2. ¿En cuál vaso el porcentaje de concentrado es mayor? 3. ¿En cuál vaso la bebida sabe más a naranja?"

Este reactivo pone en juego al porcentaje como una relación entre una parte y un todo que se mantiene constante cuando los totales varían. Clasificamos las soluciones en tres grupos: en el primero agrupamos las respuestas que parecen considerar al porcentaje como razón —a veces de manera confusa—, en el segundo grupo están las que toman en cuenta la razón pero tratan al porcentaje como absoluto y en el tercer grupo las respuestas en las que la razón no se considera, sólo una de las magnitudes.

La siguiente tabla resume los resultados:

		Grupo 1	Grupo 2
1. Consideran al porcentaje como razón	• Las cantidades relativas se distinguen de las absolutas	0/31	5/28
	• Las tres preguntas se refieren a cantidades relativas	5/31	6/28
	• Hay distinción entre cantidades absolutas y relativas pero se expresa de manera poco clara	3/31	5/28
2. Distinguen al porcentaje de la razón	• El porcentaje es visto como absoluto pero la razón es constante	2/31	3/28
3. No consideran las razones, sólo una de las magnitudes	• Las tres preguntas se refieren a cantidades absolutas	12/31	6/28
	• Respuestas azarosas	9/31	5/28

Veamos con más detalle estas categorías:

Respuestas que consideran al porcentaje como razón:

- *Las cantidades relativas se distinguen de las absolutas.*

En el grupo 2 hubo cinco alumnos que acertaron en las tres preguntas: respondieron que el vaso grande tiene más concentrado y los tres tienen el mismo porcentaje de concentrado y saben igual.

- *Las tres preguntas se refieren a cantidades relativas*

Algunos estudiantes —cinco de 31 del grupo 1 y seis de 28 del 2— respondieron «los tres vasos» en todas las preguntas, algunos de los cuales dieron explicaciones que muestran cierta claridad respecto a que tanto el porcentaje como el sabor se mantienen constantes en los tres vasos: "a los vasos les estás poniendo la cantidad de naranja que corresponde al tamaño".

Marisol, en entrevista, afirmó que "serían igual (…) porque... o sea todos este, bueno no son del mismo tamaño pero tienen, este, ¾ ¿no?". Hace explícito entonces que el tamaño cambia, pero la razón se mantiene, e incluso logra cuantificar esta última con una fracción. No obstante, después duda, afirma que el vaso grande tiene mayor porcentaje de concentrado: "Este, porque,... porque... pues... creo que es porque... está... está grande ¿no?". Pero inmediatamente después rectifica: "Me imagino. El vaso, pero no, creo que me estoy confundiendo. (Silencio) creo que aquí si ya me confundí". Así, por un momento la consideración de las cantidades la hace dudar, pero vuelve a recuperar la idea de razón. Da la impresión de que para hacerlo necesita tratar las tres preguntas de la misma manera: no está en condiciones de establecer distinciones cuando apenas está reparando en la razón. Y en esto se mantiene firme, vuelve a justificar apelando a la fracción constante y a que se trata de la misma receta, la “misma bebida”:

> *Marisol:* *No porque o sea si acá (en la primera pregunta) estoy diciendo que igual, o sea y sí es igual, y acá (en la segunda pregunta) dice que más porcentaje de concentrado tiene entonces sería también igual, porque... es como te digo son eh, ¾ (...)*
>
> *Entrevistadora:* *OK, ¿Y acá (en la tercera pregunta), del sabor?*
>
> *Marisol:* *También serían igual porque los tres este serían, son de la misma bebida ¿no?*

- *Hay distinción entre cantidades absolutas y relativas pero se expresa de manera poco clara*

Ciertos estudiantes —tres del grupo 1 y cinco del grupo 2— parecen percibir que el reactivo pone en juego distintos objetos —cantidades, porcentajes, razones— pero no logran identificar con claridad en qué residen estas distinciones.

Entre las respuestas de estos alumnos destaca la de Edgar, quien escribe “grande” en la primera y última preguntas, y “25%” en la segunda. Es decir, al parecer sabe que el porcentaje de agua se mantiene constante en los tres vasos, pero no considera las razones en la tercera pregunta, lo cual no deja de ser muy extraño, ¿qué significa para él «mismo porcentaje» si el sabor cambia?

En la explicación de Mariana también se refleja cierta confusión. En las tres preguntas escribe: “son la misma cantidad, las mismas porciones, no cambia el tamaño del vaso. Si aumenta el tamaño del vaso aumenta el porcentaje, pero siempre es igual”. Así, no argumentó que aunque las cantidades varían el porcentaje se mantiene constante, sino lo contrario, el porcentaje cambia y las cantidades no.

Estos alumnos parecen notar que hay algo que varía y algo que no, pero no logran establecer con claridad esta distinción.

Respuestas que distinguen al porcentaje de la razón: el porcentaje es visto como absoluto, pero la razón es constante

Hubo alumnos —dos de 31 en el grupo 1 y tres de 28 en el grupo 2— que respondieron “el grande” en las primeras dos preguntas, como si el porcentaje fuera una cantidad absoluta. Sin embargo, opinaron que en los tres vasos, las bebidas saben igual, es decir, notaron que la razón se mantiene.

Respuestas que no consideran a las razones, sólo una de las magnitudes:

- *Las tres preguntas se refieren a cantidades absolutas*

Varios estudiantes —12 de 31 en el grupo 1 y 6 de 28 en el grupo 2—, al igual que los que describimos en un apartado anterior, respondieron sin distinguir las tres preguntas, sólo que esta vez no se remitieron a las razones. Unos contestaron “el chico” en las tres preguntas, quizás porque el vaso chico tiene menos agua que los demás. Los demás respondieron “el grande” las tres veces. Todos respondieron como si todas las preguntas apelaran a cantidades absolutas.

- *Respuestas azarosas*

Algunos alumnos —nueve de 31 del grupo 1 y cinco de 28 del grupo 2— eligieron un tamaño distinto para cada pregunta. Quizás contestaron el reactivo al azar, cuidando de repartir las tres posibles respuestas entre las tres preguntas.

Segundo comentario parcial

Nos parece importante destacar que en las respuestas hay una diversidad mayor a la que habíamos contemplado en el análisis previo. Es claro, por ejemplo, que en el reactivo 2 no siempre la elección del 25% obedece a una concepción del porcentaje como cantidad relativa ni la de $100 como absoluta, como habíamos anticipado. Esta última puede obedecer, también, a que se intenta evitar el complicado cálculo del 25%, o que se elige a partir de la designación de un precio hipotético.

Cabe mencionar también que en el análisis previo habíamos planteado que, en el reactivo 1 (150 alumnos cooperaron con 800 vs. 60 cooperaron con 400), si algunos alumnos comparaban sólo las cantidades absolutas y no las razones, al menos cualitativamente, seguramente tendrían también un bajo desempeño en las tareas de porcentaje, explicado por su poca familiaridad con la noción de razón, que consideramos anterior a la de porcentaje. Sin embargo, el análisis de los resultados no nos permitió comprobar dicha anticipación. En realidad, hubo alumnos que resolvieron satisfactoriamente algunos reactivos que implicaban a la noción de porcentaje, a pesar de que no acertaron en el reactivo 1. Esto puede estar indicando que es posible tener cierta familiaridad con la noción de porcentaje, o al menos, la posibilidad de aplicar porcentajes dados a cantidades, mediante algún algoritmo y, al mismo tiempo, manifestar un bajo nivel de comprensión de la noción de razón en tareas muy simples[33].

En cuanto a las posibles correlaciones entre las resoluciones a los tres reactivos, anteriormente mencionamos que no encontramos nada nítido. Lejos de percibir características similares en ciertos grupos de alumnos, las resoluciones son muy irregulares. En ningún caso se puede afirmar que una parte importante de quienes resuelven un reactivo también aciertan en otro. Sin embargo, el reactivo 8 (vasos de naranjada) fue, por poca diferencia, el más difícil de los tres: en este reactivo el 45% del total de alumnos de ambos grupos acertó al menos parcialmente, mientras que en los reactivos 1 (cooperación de alumnos de primaria y de secundaria) y 2 (comparar descuentos de $100 y 25%) los porcentajes son del 64 y 66%, respectivamente. Si bien es difícil explicar esta diferencia, podemos aventurar, por un lado, que el contexto de mezclas en que se formuló el reactivo 8 es más difícil de comprender que el de dinero[34], en el que se plantearon los otros dos, y por otro lado, que en el reactivo 8 el porcentaje está implícito, pues aunque se pregunta por él, no está dado ni es necesario calcularlo, a diferencia del reactivo 2, donde el 25% aparece explícitamente.

También hay baja correlación entre estos reactivos y los que corresponden a los tres tipos básicos de tareas: en los dos casos encontramos alumnos que se desempeñaron satisfactoriamente en un grupo de reactivos pero no en el otro. El caso de Marisol es particularmente ilustrativo: en el análisis del reactivo 8 mostramos que ella deja ver una idea clara de la razón que se mantiene, incluso cuantificada con una fracción, pero en los tres tipos básicos de tareas de porcentaje, responde como si el porcentaje fuera una cantidad absoluta.

Finalmente llaman la atención, particularmente en este grupo de reactivos, las dificultades que muchos alumnos manifestaron para hacer explícitos los razonamientos o intuiciones que los llevaron a responder los reactivos. Encontramos varias explicaciones confusas, que incluso llegaban a contradecir lo que se quería justificar.

---

[33] No obstante, también puede indicar que el contexto en que se formuló el reactivo 1 cobró mayor importancia para los alumnos que el análisis de las relaciones entre los datos, lo que se ve en respuestas como: “los de sexto sí se organizaron para pasársela bien”.

[34] El hecho de que el contexto de mezclas es más difícil que otros ya ha sido observado por diferentes investigadores (ver Tourniaire, 1985). Por otro lado, Vergnaud (1988), también señala que el contexto de precios de mercancías suele ser sencillo.

2.3.3 Porcentajes superiores al 100%

El siguiente reactivo se planteó con la intención de explorar si los estudiantes pueden distinguir en qué situaciones pueden aparecer porcentajes mayores al 100% y, más precisamente, si incluyen a las relaciones "parte-parte" en el universo de situaciones en las que puede usarse un porcentaje:

> *"Por lo menos una de las siguientes afirmaciones* ***NO*** *tiene sentido. Indica cuál o cuáles son esas afirmaciones.*
>
> *a) El pan cuesta ahora el 120% de lo que costaba el año pasado*
> *b) En un año, ya con los intereses, hay que pagar al banco el 120% de lo que prestó originalmente*
> *c) El 120% de los trabajadores de una fábrica son hombres*
>
> *Explica por qué*"

En el análisis sólo consideramos a quienes dieron alguna explicación —23 de 31 del grupo 1 y 20 de 28 del grupo 2—, pues no tenemos manera de saber bajo qué supuestos respondieron los demás, incluso pudieron haber respondido al azar.

Agrupamos las resoluciones en tres categorías. En la primera incluimos las respuestas en las que se considera que el porcentaje aparece no sólo como una relación entre un total y una parte de él (parte-todo), sino también como una relación parte-parte, que puede provenir de la transformación de un conjunto o simplemente de la comparación de dos cantidades disjuntas. En la segunda categoría están las respuestas en las que sólo se considera el porcentaje en relaciones parte-todo, y por lo tanto no se admiten porcentajes mayores al 100%. En la tercera categoría incluimos respuestas que no permiten inferir el tipo de relación en el que se interpreta al porcentaje.

		Grupo 1	Grupo 2
1. Consideran las relaciones parte-parte	• Distinguen las relaciones que no admiten porcentajes mayores que 100 (parte-todo) de las que sí los admiten (parte-parte)	2/31	9/28
	• Razonamiento correcto combinado con un error proveniente del contexto	2/31	0/28
	• Una parte no puede representar al 100%	2/31	0/28
	• Representación del porcentaje solamente como una transformación, no como una comparación (*)	2/31	3/28
2. Sólo consideran las relaciones parte-todo	• Interpretación del porcentaje únicamente como una relación parte-todo	5/31	3/28
3. No se puede saber	• Respuestas elaboradas a partir del contexto	12/31	5/28

(*) Esta interpretación no siempre implica que se admitan porcentajes mayores que el 100%, pero hay mayores posibilidades que cuando el porcentaje se interpreta solo en relaciones parte-todo

A continuación se describen estas categorías:

Respuestas en las que se consideran las relaciones parte-parte:

- *Distinguen las relaciones que no admiten porcentajes mayores que 100 (parte-todo) de las que sí los admiten (relaciones parte-parte).*

Varios alumnos —dos de 23 del grupo 1 y nueve de 20 del grupo 2— respondieron correctamente que la tercera afirmación es la única que no tiene sentido. En algunos casos las explicaciones no son muy claras: “porque no hablan de lo que costaba”, “por como se está hablando de un año y no de trabajadores”. En otras respuestas podemos ver mayor claridad: “a) está bien porque al 100 se le agrega el 20%, b) está bien porque mas el impuesto da el 120%, c) está mal porque la fábrica es de el 100 por ciento” o bien “lo máximo que se puede es 100% y si fuera 120% tendrían que decir que hay más que el año pasado”. Estas respuestas probablemente indican que saben que hay contextos (el precio, el interés en un año) en los que pueden aparecer porcentajes mayores a 100 y otros en los que esto no es posible, aunque el criterio para distinguir cada caso no siempre puede explicitarse.

- *Razonamiento correcto combinado con un error proveniente del contexto*

Levis y Moisés —del grupo 1— respondieron que ni la primera ni la tercera afirmación tienen sentido, argumentando respectivamente que “no es justo subir el precio” y que “sólo hay 100% de trabajadores y (...) el pan no puede subir tanto”. Ambos reconocen que la segunda frase sí tiene sentido, lo que nos hace suponer que saben que en ciertos contextos pueden aparecer porcentajes mayores que 100. Además, coincidieron en que la tercera frase no puede ser cierta, quizás porque saben distinguir cuando está en juego una relación parte-todo. Sin embargo, la respuesta tuvo un error que tal vez provenga de haberle otorgado un fuerte peso a la experiencia, que indica que el precio del pan se ha mantenido.

- *Una parte no puede representar al 100%*

Edgar y Juan Carlos —ambos del grupo 1— respondieron correctamente que la tercera afirmación es la única que no tiene sentido y explicaron que “no en todos lados los trabajadores de fábrica son hombres porque también hay mujeres” y “por que en una fábrica no nada más contratan hombres”, respectivamente. Así, no queda muy claro si ellos consideran erróneo el que una parte se plantee como mayor que el total, o bien que pueda ser igual a éste cuando en general es estrictamente menor. De ser así, si hubiera aparecido la frase “el 100% de los trabajadores de una fábrica son hombres” también habrían contestado que no puede ser cierta.

- *Representación del porcentaje solamente como una transformación, no como una comparación*

Algunas de las respuestas dejan ver que ciertos alumnos —dos de 23 del grupo 1 y tres de 20 del grupo 2— entienden, por ejemplo, que el 120% no se refiere al costo del pan en comparación con el precio anterior, sino al aumento del precio: “no se puede aumentar el 120%”, “van a subir más del 100%”. Es decir, el incremento en el precio no es del 20% sino del 120%, lo que parece indicar que para ellos, en este ejemplo el porcentaje no es un recurso para comparar dos cantidades disjuntas, sino una manera de representar la transformación de un conjunto (al 100% se le agrega el 120%)[35].

Esta manera de concebir al porcentaje se percibe también en respuestas como la de Fernanda: “porque no tiene sentido, tendría que ser así como «el pan ahora cuesta 120% más de lo que costaba el año pasado» o algo así pero no tiene lógica”. Llama la atención que para ella tiene sentido decir que una cantidad tiene 120% «más» que otra, pero no que una cantidad representa el 120% de otra.

A diferencia de quienes sólo conciben al porcentaje en una relación parte-todo, algunos de quienes consideran que también puede representar una transformación pueden admitir porcentajes mayores al 100%. Por ejemplo, Felipe respondió correctamente el reactivo, dejando ver en la explicación lo que acabamos de mencionar: “porque el «120%» solo se puede indicar en un aumento lo más que se podría decir es que el 100% de los trabajadores son hombres”.

Interpretación del porcentaje únicamente como una relación parte-todo

En esta categoría se ubican cinco de 23 estudiantes del grupo 1 y tres de 20 del grupo 2. Veamos algunos casos. Miguel parece pensar que los porcentajes siempre aparecen en

---

[35] La tendencia de algunos alumnos que admiten que una cantidad puede ser 120% “más” que otra, pero no el 120% “de” otra, es similar a la que encuentran Balbuena y Block (1991) en una situación en la que piden a estudiantes de normal construir un rompecabezas semejante a uno dado, de manera que un lado que en el original mide 4 cm, debe medir 7 cm. en la reproducción. Varios alumnos muestran un comportamiento “aditivo”: suman 3 cm. a todas las medidas. Más adelante corrigen este error, centrándose en la parte que se debe agregar a cada medida: cada lado de la nueva figura es el lado original más el 75% de él, es decir, sigue habiendo un rastro del pensamiento aditivo.

una relación entre un total y una parte de él: “porque si es el 120% tendría que haber 200% de todo y yo creo que el pan y las personas forman el 100% y no debe de pasarse”.

Carolina considera que ninguna de las frases tiene sentido: “a) pues no puede subir tanto, b) no puede ser equitativo, c) no puede ser, sería 100%”. En las primeras dos frases Carolina alude al contexto, y en la tercera a la relación parte-todo. Quizás ella distingue cuándo se trata de este tipo de relación y puede ver una diferencia con las otras dos frases, pero intuye que en ninguna circunstancia pueden aparecer porcentajes mayores al 100%. De ser así, de manera involuntaria se valió del contexto para salvar la dificultad de explicitar y justificar una creencia relativa a una noción matemática.

Otros dos alumnos argumentaron explícitamente que no puede existir un 120%: “porque no se puede”, “no puede haber 120% porque si no en los trabajadores harían falta”.

Estas respuestas reflejan una mayor dificultad para comprender el uso del porcentaje para comparar dos cantidades disjuntas que para establecer una relación parte-todo, lo cual probablemente obedece a la mayor frecuencia de uso del segundo caso.

Respuestas elaboradas a partir del contexto

Al igual que en el reactivo 1, algunos alumnos —12 de 23 del grupo 1 y 5 de 20 del grupo 2— aparentemente recurrieron a los contextos de las afirmaciones y no a la relación entre dos datos que en cada caso se indica con el 120%. Dieron explicaciones como “porque no debemos pagarle al banco nada” o “porque lo del pan no es costeable que lo pongan a ese precio la gente no lo compraría si lo subieran tanto de precio”. Incluso, uno de ellos marcó los primeros dos incisos y en la explicación sólo cuestionó las dos primeras frases: “el pan cuesta 70 centavos no puede subir el 120% y en un año no pueden pagar el 120% al banco si no pagan $70 ó $200 mucho menos con 120%”. Así, al parecer consideró que la tercera frase sí tiene sentido, quizás porque no encontró una forma de cuestionarla a partir del contexto.

José Luis, si bien se equivocó, admitió que es posible que existan situaciones que involucren un porcentaje mayor que 100: “porque en el banco te estafan y en el trabajo también y el pan le pueden subir más”. Ya que la explicación se remite fuertemente al contexto, no podemos discernir si el razonamiento que lo llevó a decidir cuáles frases tenían sentido puso en juego las relaciones entre los datos. Quizás cuando estas relaciones no le parecieron evidentes o le parecieron más complicadas optó por decidir en referencia al contexto.

Tercer comentario parcial

Podemos observar claramente una dificultad para concebir al porcentaje como una comparación de dos cantidades disjuntas, al parecer es más sencillo interpretarlo como una transformación de un conjunto y aún más como una relación parte-todo.

Por otro lado, cabe destacar que dos alumnos que obtuvieron un desempeño pobre en los tres tipos básicos de tareas proporcionaron buenas explicaciones en este reactivo. Esto sugiere que aún cuando el porcentaje es concebido como una cantidad absoluta cuando se aplica a una cantidad, puede tener sentido cuando representa una comparación entre dos cantidades.

También hubo alumnos que encontraron estrategias pertinentes para resolver los tres principales tipos de tareas pero no acertaron en este reactivo, lo que muestra que no hay correlación clara entre este y otros reactivos.

Finalmente, las categorías a partir de las cuales acabamos de describir las resoluciones no son excluyentes, no corresponden a grupos disjuntos de alumnos sino a ciertos rasgos que nos interesa destacar. Algunas respuestas pertenecen a más de una categoría, por ejemplo, ciertos alumnos que consideraron al 120% como un aumento y no como una comparación también respondieron en función del contexto.

2.4 Comentario final

Acerca de las diferencias entre los grupos

Ya hemos mencionado que el desempeño general de los alumnos del grupo 2 fue considerablemente mejor que el que obtuvieron los del grupo 1. Desentrañar las causas que provocaron esta diferencia es una tarea que está más allá de nuestras posibilidades, pues se trata de escuelas que guardan entre sí numerosas diferencias, no todas relativas a las formas de enseñanza.

No obstante, consideramos que sí hay algunos factores de carácter didáctico que podrían estar relacionados con la diferencia en el desempeño entre ambos grupos En primer lugar, consideramos que la similitud del instrumento que empleamos con un típico examen pudo haber tenido efectos diferenciados en los grupos: en el 1 encontramos mayor tendencia que en el 2 a responder a partir del contexto, sin poner en juego conocimientos matemáticos. El hecho de que en las entrevistas hechas a estudiantes del grupo 1, después de la aplicación del cuestionario, varios alumnos hayan tenido un mejor desempeño, siendo que los reactivos eran muy similares, o en ocasiones, idénticos a los del cuestionario (al mostrarles algunas de sus respuestas en éste hacían comentarios como "sí, es que aquí no se qué me pasó" o "ahí sí me equivoqué") nos hace pensar que las respuestas de varios de estos alumnos fueron, en mayor medida que las del otro grupo, efecto del instrumento. Así, es muy probable que el cuestionario no haya permitido mostrar todo lo que saben los alumnos.

Por otra parte, consideramos que el papel que jugaron las técnicas de resolución disponibles para los alumnos influyó fuertemente en las diferencias obtenidas entre ambos grupos, como veremos enseguida.

Técnicas algorítmicas y técnicas no canónicas

Tenemos varios indicios de que los resultados encontrados son el reflejo de una enseñanza que ha privilegiado fuertemente el uso de los algoritmos: hubo poca emergencia de técnicas no canónicas y los alumnos que recurrieron a ellas generalmente lo hicieron en un rango restringido de variables numéricas, con dificultades para utilizarlas en las tareas de tipos 2 y 3, y en ocasiones fueron empleadas con timidez, proporcionando sólo las respuestas, quizás para ocultar la técnica.

De ser así, llama la atención, por un lado, que el mejor desempeño en el grupo 1 fue alcanzado por dos alumnos que no utilizan algoritmos sino técnicas alternas, y por otro lado, que en el mismo grupo hubo quince estudiantes que no encontraron una manera satisfactoria de abordar los reactivos en los que se pedía aplicar un porcentaje a una cantidad: quienes no disponen de un algoritmo parecen no encontrar otras maneras de resolver. La débil presencia de técnicas no canónicas en parte puede deberse a que los alumnos saben que son poco reconocidas en la clase de matemáticas. Estos son algunos de los riesgos de apostarle completamente a una técnica poderosa pero que es difícil dotar de sentido y utilizar de manera flexible cuando antes no se han explorado otras técnicas.

Por el contrario, aunque en ambos grupos hay alumnos que usan mecánicamente las técnicas canónicas, en el grupo 2 se percibe un uso más certero de los algoritmos. La regla de tres parece ser útil, pues a diferencia del operador decimal permite resolver los tres tipos básicos de tareas y no presenta complicaciones cuando el porcentaje es menor al 10%[36]. Además en varios casos el desempeño no se restringió al uso de algoritmos, es decir, algunos estudiantes construyeron procedimientos propios para abordar tareas en donde la regla de tres no era pertinente.

Esta diferencia en cuanto al papel que jugaron las técnicas de resolución de los tres tipos de tareas parece haber influido fuertemente en el mejor desempeño del grupo 2 frente al grupo 1: en el primero hay un buen dominio de un algoritmo potente por parte de un número considerable de estudiantes, mientras que en el segundo se observó más un uso mecánico de un algoritmo menos potente, que además gozaba del suficiente prestigio como para inhibir las técnicas alternas con más fuerza que en el grupo 2.

En síntesis, tanto las técnicas algorítmicas —en particular la regla de tres— como las no canónicas mostraron ser útiles: el uso exclusivo de técnicas algorítmicas implica un descuido de la construcción de sentido que parece dejar con pocas posibilidades a quienes no dominan dichas técnicas, mientras que recurrir únicamente a técnicas alternas no permite encontrar una técnica de amplio alcance que permita, en el momento adecuado, convertir en rutinarias estas tareas y así poder abordar otras más complejas.

La noción de razón

Cabe destacar, sobre todo en el grupo 1, la escasa comprensión que mostraron los alumnos sobre las nociones de razón, de porcentaje como cantidad relativa (reactivo 2) y de porcentaje como razón constante entre dos conjuntos de medidas (reactivo 8). Muy pocos estudiantes acertaron en los tres reactivos que intentaban dar cuenta de estas nociones[37]. Por ejemplo, en el reactivo 1 (150 alumnos cooperaron con $800 y 60 alumnos cooperaron con $400 ¿Quiénes cooperaron más?), que se consideró en el análisis previo como uno de los más sencillos, sólo dos alumnos del grupo 1 resolvieron exitosamente, y sólo la mitad consideró los cuatro datos. Esto nos sorprende pues el reactivo apela a un contexto familiar, las razones que aparecen involucran dos magnitudes discretas y es fácil compararlas, sólo es necesario doblar los dos términos de una de ellas.

---

[36] Estamos comparando las técnicas algorítmicas que fueron puestas en juego por los estudiantes: el operador decimal y la regla de tres. No obstante, en un proyecto de enseñanza que se proponga un trabajo fuerte sobre las técnicas, valdría la pena considerar la del valor unitario, pues también permite resolver los tres tipos básicos de tareas, sin importar qué variables numéricas se elijan, y además los estudiantes pueden explicarse su funcionamiento.

[37] 2 de 31 en el grupo 1 y 5 de 28 en el grupo 2.

El rol de los contextos

En los dos grupos, aunque con mayor frecuencia en el 1, identificamos cierta tendencia de algunos alumnos frente a ciertos reactivos, como el primero (150 alumnos cooperaron con $800 y 60 alumnos cooperaron con $400 ¿Quién cooperó más?) a responder en referencia al contexto ("hay familias que no tienen ese dinero o por que no quieren gastar"), pasando a segundo plano la exigencia matemática del reactivo.

Podemos intuir tres posibles causas por las que los alumnos responden de esta forma. En primer lugar, quizás la alusión al contexto muestra la presencia de un contrato didáctico débil, pues los estudiantes ignoran la consigna que marca que los problemas deben resolverse utilizando matemáticas[38]. En cambio, quizás le otorgaron mayor peso a la experiencia, por ejemplo en las compras, para emitir un juicio en los reactivos. En segundo lugar, como mencionamos anteriormente, es muy probable que el cuestionario no muestre todo lo que los estudiantes pueden resolver, pues quizás este tipo de resolución fue causado por la similitud del instrumento con los exámenes con los que se les evalúa, en los cuales generalmente no se hacen preguntas sencillas, y siempre es preferible dar una respuesta aleatoria que no responder. Y en tercer lugar, también es posible que ante la dificultad de explicar razonamientos en donde sí se pusieron en juego las relaciones entre los datos, algunos alumnos hayan recurrido al contexto. El contexto en este caso no implicó la ausencia de un razonamiento matemático, sino más bien la de su explicitación. De cualquier manera, estas respuestas nos recuerdan que los contextos, si bien son una gran ayuda en los procesos de aprendizaje, en ocasiones también pueden dificultarlos.

Consideraciones para el diseño de la micro-ingeniería didáctica

Al término del análisis de la problemática conceptual del porcentaje (capítulo uno) mencionamos que podía ser recomendable introducir esta noción como una razón, es decir, interpretar el "a%" como "a de cada 100", pues la otra alternativa, la de asociar la cantidad inicial con el 100% podía resultar compleja en un primer acercamiento. Sin embargo, esta consideración quizás no procede para los alumnos de secundaria, quienes

[38] El contexto suele tener un papel importante en la resolución de problemas aritméticos: frecuentemente permite establecer relaciones entre los datos, explicitar propiedades, ejercer cierto control sobre los resultados, entre otros. Solo que, en los ejemplos a los que nos referimos aquí, los estudiantes, al otorgarle un fuerte peso al contexto, parecen dejar de lado las exigencias matemáticas del problema. Esto nos recuerda el carácter problemático de la relación entre los contextos y la actividad matemática.

han tenido experiencias con la noción del porcentaje en contextos no escolares, en los cuales, al parecer es más frecuente el uso de CP-i[39] que el de CC-i[40].

De cualquier manera nos parece que es importante que los estudiantes conozcan ambas técnicas, no sólo porque para ciertas variables el uso de CC-i es muy sencillo mientras CP-i es bastante complicado, y viceversa, sino también porque las dos técnicas apelan a distintos aspectos del porcentaje. Mostrar su equivalencia puede propiciar una comprensión más amplia de esta noción que si solo se conoce una de ellas o si sólo se conoce un algoritmo.

Creemos que es útil fortalecer el trabajo sobre ambas técnicas para que constituyan un recurso en un amplio rango de variables numéricas y puedan emplearse no sólo en el primer tipo de tareas, sino en los tres básicos. También consideramos que no es suficiente con sólo disponer de técnicas no canónicas. Como mencionamos anteriormente, es importante conocer algún algoritmo, tener herramientas para distinguir cuándo es pertinente y poder controlar los resultados que arroja. El alcance del algoritmo del operador decimal se ve reducido si no se complementa con otras técnicas para abordar situaciones de proporcionalidad (CC-i, CP-i, la regla de tres).

Una última consideración se refiere a la necesidad de darle mayor cabida en la enseñanza a los tipos de tareas 2 y 3. Es probable que para un alumno no resulte sencillo franquear por sí solo la dificultad para establecer las relaciones entre los datos en estas tareas, que frecuentemente aparecen en contextos no escolares.

---

[39] Consiste en establecer una relación de proporcionalidad entre cantidades y porcentajes a partir de la identificación de la cantidad inicial con el 100%

[40] Consiste en utilizar las razones internas de la relación de proporcionalidad entre cantidades que se deriva de la razón “tantos de cada 100”

Capítulo 3

Procedimientos y concepciones sobre el porcentaje. Exploración a través de una secuencia didáctica

A partir del análisis de la problemática conceptual del porcentaje, de las reconstrucciones de esta noción en las propuestas curriculares y del desempeño de algunos estudiantes, hemos diseñado una secuencia de cuatro sesiones relativas al porcentaje, de 50 minutos cada una, que se implementó en un período de dos semanas con un grupo de una escuela urbana, oficial, que se encontraba finalizando el primer grado de secundaria en el turno vespertino. El número de alumnos que participaron en la experimentación osciló entre 20 y 28. De estos 28 estudiantes, 16 eran mujeres y 12 hombres. En todas las sesiones los estudiantes trabajaron en parejas. Cada quien elegía a su compañero de equipo, siempre se formaron parejas del mismo género: dos hombres o dos mujeres.

Estos alumnos no habían estudiado aún el porcentaje ni la proporcionalidad en la materia de matemáticas en el grado que estaban cursando, pues la maestra consideró necesario priorizar el estudio de las fracciones. No obstante, puesto que los tres contenidos –porcentaje, proporcionalidad, fracciones- forman parte del programa oficial de primaria, es probable que la mayoría los haya estudiado en ciclos anteriores. Dado que varias de las características de este grupo son compartidas con la población –del grupo 1- con la que aplicamos el cuestionario y las entrevistas (esta población era de la misma escuela donde se implementó la secuencia didáctica) diseñamos la ingeniería suponiendo que los estudiantes contarían con conocimientos similares, respecto al porcentaje, a los que reportamos en el capítulo anterior[41].

La conducción de las sesiones no estuvo a cargo de la maestra de matemáticas del grupo, sino de un profesor que fue elegido por su trayectoria y por su familiaridad con el enfoque didáctico asumido en la secuencia. Esta decisión facilitó comunicar al docente los propósitos del diseño y el papel que tendría que jugar pero, por otro lado, presentó la dificultad de que el docente no conocía la trayectoria del grupo específico de alumnos con los que trabajó.

Los datos se recolectaron a partir de una grabación de video y una de audio, y también de la producción escrita de los alumnos, quienes la entregaban al profesor al final

[41] Solo asumimos los conocimientos con los que disponían los alumnos del grupo 1.

de cada sesión[42]. La cámara de video fue utilizada principalmente para registrar las puestas en común, y eventualmente pedir a algún equipo que mostrara sus soluciones o explicara sus procedimientos (esto resultó difícil, pues los alumnos mostraban cierta reticencia frente a la cámara). Además, un micrófono adicional de la cámara fue colocado en la mesa de trabajo de uno de los equipos, lo que permitió grabar algunas interacciones de éste con el equipo sentado enseguida. Finalmente, intentamos seguir detalladamente el proceso de un equipo más, con el apoyo de una grabadora y una libreta de notas, y eventualmente logramos recuperar algunas elaboraciones de otros equipos.

3.1 Presentación de la secuencia didáctica

A continuación presentamos la secuencia, de manera muy general. En el Anexo 2 se muestra con mayor detalle cada una de las situaciones y su análisis previo, incluyendo la explicitación de los criterios bajo los cuales las hemos diseñado, y los tipos de procedimientos y errores esperados.

Orientamos el diseño a partir de tres propósitos:

- Vinculación del registro gráfico con el numérico

Los resultados del cuestionario y entrevistas sugieren la necesidad de vincular ambos registros que en ocasiones se manifiestan como procedentes de concepciones ajenas (por ejemplo, porcentaje como absoluto en lo numérico, y como relativo en lo gráfico). Pretendimos favorecer la comprensión del porcentaje como relativo, al constituir la aplicación de porcentajes a superficies en un medio de verificación de resultados aplicados a cantidades: aquello que es claro en lo gráfico puede poner en evidencia los errores en lo numérico.

- Manejo de la técnica CP-i[43]

Si bien es importante la disposición de diferentes técnicas, elegimos favorecer principalmente CP-i, por ser la que más se adapta al registro gráfico[44]. En la mayoría de los problemas se plantean porcentajes que implican operadores enteros: 50, 25, 20, y 5%.

[42] Cabe señalar que, si bien contamos con el material impreso en el que se les daban los problemas por escrito a los alumnos y donde ellos registraron sus respuestas y parte de sus procedimientos, en varias ocasiones escribían en el escritorio o en algún cuaderno. A estas producciones generalmente no tuvimos acceso.

[43] Consiste en establecer una relación de proporcionalidad a partir de la identificación entre el 100% y la cantidad inicial.

[44] En este registro es difícil pensar al porcentaje como una relación “tantos de cada 100”.

- Resolución de los tres tipos básicos de tareas

Además de la importancia de saber resolver los tres tipos básicos de tareas para poder abordar situaciones no escolares, los resultados del cuestionario sugieren que éstas no tienen el mismo grado de complejidad. En los tipos de tareas 2 y 3 intentamos dar lugar a que los alumnos establecieran las relaciones entre los datos y a seguir favoreciendo la concepción del porcentaje como cantidad relativa, no absoluta. Dejamos de lado el desarrollo de las técnicas que resuelven estos dos tipos de tareas.

Sesión 1: Analizando información…

En esta sesión se llevó a cabo una primera exploración de los conocimientos de los alumnos sobre el porcentaje. Se plantearon preguntas que incluían un análisis básico de información en gráficas y tareas de aplicar porcentajes a cantidades numéricas.

Sesiones 2 y 3: Banderas

Los objetivos de estas sesiones eran constituir el registro gráfico en un medio de verificación para el numérico en las tareas de tipo 1, y explicitar el operador fraccionario cuando éste es unitario y sencillo. A partir de lo anterior pretendíamos cuestionar la interpretación del porcentaje como una cantidad absoluta en el registro numérico, por un lado al hacerla entrar en conflicto con la concepción como una fracción del entero en el registro gráfico, y por otro lado al aplicar los mismos porcentajes a superficies y cantidades de distinto tamaño.

- Problema 1 (se planteó en la sesión 2)

"El dueño de un equipo de fútbol mandó fabricar tres banderas gigantes, de distintos tamaños, para colocarlas en el estadio.

a) Para hacer la mediana, se debe pintar el 50% de rojo, el 25% de azul, el 20% de verde y el 5% de amarillo. Si toda la bandera tiene una superficie de 400 metros cuadrados, ¿Qué área tendrá cada color?

   Área pintada de rojo ________________

   Área pintada de azul ________________

   Área pintada de verde _______________

   Área pintada de amarillo _____________

b) Representa en el siguiente rectángulo la parte que se debe pintar de cada color

c) Los resultados que obtuviste en la pregunta **a)** ¿corresponden bien con las partes que coloreaste en **b)**? Si te parece que no, corrige tus resultados."

- Problema 2 (se planteó en la sesión 3)

"La bandera grande y la pequeña tienen la misma forma que la mediana pero son de otro tamaño.

a) ¿Qué porcentaje de la superficie de la bandera grande se tiene que pintar de rojo?___________ ¿Y de azul? ___________ ¿De verde?_____________ ¿De amarillo?__________

b) Marca en las tres banderas la parte que se debe pintar de cada color.

Mediana

Pequeña

Grande

GRUPAL. Con la ayuda de su maestro, organícense para comparar sus respuestas con las de sus compañeros"

- Problema 3 (se planteó en la sesión 3)

"La superficie de la bandera grande es de $800m^2$ y la de la pequeña es de $300m^2$. Calcula y anota los datos que faltan en la tabla.

	Bandera Grande	Bandera mediana	Bandera pequeña
Rojo (%)			
Azul (%)			
Verde (%)			
Amarillo (%)			

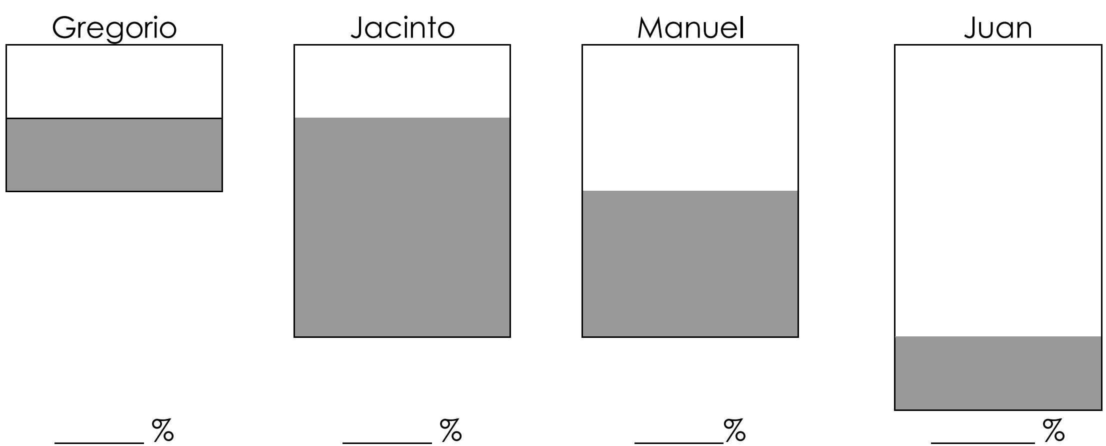
Total (%)	800m^2	400m^2	300m^2

Sesión 4: Terrenos Sembrados

En esta sesión pretendíamos que los alumnos resolvieran los tipos de tareas 2 y 3 en el registro gráfico. Nos interesaba propiciar que los alumnos comenzaran a establecer las relaciones entre los datos y, en menor medida, que trasladaran sus hallazgos en el registro gráfico hacia el numérico para explicitar la técnica del operador fraccionario en el caso del 50%, 25% y 20%. Pensamos que lo anterior podría favorecer la interpretación del porcentaje como una cantidad relativa.

- Problema 1

"Varios agricultores decidieron usar una parte de sus terrenos para sembrar una nueva variedad de maíz, la variedad A. Los siguientes rectángulos representan los terrenos de cuatro de ellos y la parte gris en cada uno representa lo sembrado con maíz A. Anota debajo de cada rectángulo el porcentaje de su terreno que sembró cada uno con el maíz A.



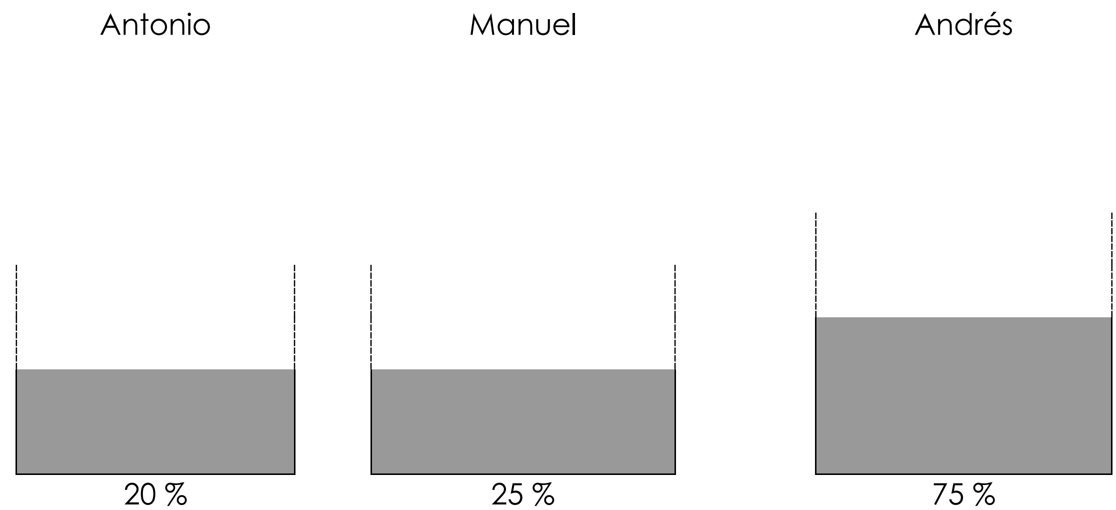
GRUPAL. Compara los resultados que obtuviste con los de tus compañeros"

Hemos variado los tamaños y los porcentajes de manera que hubiera parejas de rectángulos en las que: a) se conserve el tamaño del total pero la parte sombreada sea distinta, b) las superficies sean de diferente tamaño pero la parte sombreada represente en ambas el mismo porcentaje, c) la parte sombreada sea del mismo tamaño, pero las superficies totales no sean iguales, de tal forma que las partes sombreadas representen diferentes porcentajes.

- Problema 2

"Las superficies sombreadas que se muestran a continuación corresponden a las partes en las que se sembró maíz A en tres terrenos más. Debajo de cada una se indica el porcentaje del terreno total que fue sembrado con ese tipo de maíz.

a) ¿Qué terreno crees que es el más pequeño? _________ ¿Cual crees que es el más grande? ______________ (esta pregunta se planteará oralmente por el profesor)
b) Dibuja los terrenos completos y verifica tus anticipaciones."



Hemos cuidado que el orden de los porcentajes no sea análogo al de las superficies totales, y que, en una pareja de rectángulos, la parte sombreada sea la misma pero corresponda a distintos porcentajes.

- Problema 3

"Explica al menos una forma de calcular los siguientes porcentajes:

el 50% de una cantidad ___________________________________

el 25% de una cantidad ___________________________________

el 20% de una cantidad ___________________________________

el 10% de una cantidad ___________________________________

GRUPAL. Compara tus resultados con los de tus compañeros."

A continuación presentamos los resultados del análisis, organizados en torno a ciertas categorías y no de acuerdo al orden en el que las sesiones fueron llevadas a cabo, aunque sí presentamos las situaciones que planteamos a los estudiantes.

3.2 Procedimientos, errores, concepciones

De la diversidad de aspectos que se suelen estudiar mediante las experiencias de ingeniería didáctica, en el presente capítulo nos centraremos en discernir los conocimientos sobre el porcentaje que los alumnos ponen de manifiesto frente a las tareas planteadas —estudiando los vínculos entre las características de las tareas y los procedimientos puestos en juego. Analizaremos también algunos efectos de las interacciones sociales entre los estudiantes en las formas en que se manifiestan dichos conocimientos. En cambio, si bien analizaremos ciertos rasgos del papel que jugó el profesor durante las sesiones, solamente lo haremos cuando sea indispensable para comprender las elaboraciones de los estudiantes: el rol del profesor no será un objeto central en este trabajo.

Los motivos que nos llevaron a esta selección de aspectos fueron dos. Por una parte, porque la secuencia didáctica se reveló como un buen instrumento para favorecer la manifestación de conocimientos de los estudiantes —con mayor fineza de la que se logró a partir del cuestionario y las entrevistas—, lo cual nos permitió complementar el análisis iniciado en las partes anteriores. El segundo motivo fue la necesidad de acotar el trabajo en el tiempo.

3.2.1 Distintas formas de encuentro entre procedimientos

En las tareas correspondientes a los tres tipos básicos que se plantearon a los alumnos emergieron diferentes procedimientos, algunos correctos y otros no. Por ejemplo, para aplicar porcentajes a cantidades numéricas recurrieron al operador decimal, al operador fraccionario, a la búsqueda de combinaciones entre los algoritmos conocidos para encontrar resultados factibles, a algunas técnicas no canónicas como el cálculo del complemento aditivo (una vez calculado el 50%, 25% y 20%, suman los tres y restan a la cantidad inicial para obtener el 5%) o como el cálculo de la diferencia de porcentajes (el 5% se obtiene restando el 20% al 25%), o, finalmente, hicieron estimaciones. Algunas de éstas técnicas aparecen combinadas en una misma resolución y cada una de ellas se utiliza con ciertas restricciones, como veremos.

En este apartado, más que describir los procedimientos con detalle, nos centraremos en el papel que jugaron en el desarrollo de las sesiones y en las formas de encuentro o desencuentro que se dieron entre una técnica y otra.

Operador decimal-operador fraccionario: sólo una de las dos podría ser correcta

Un problema que resuelven por parejas consiste en que una bandera —la mediana de tres— de 400 m^2 de superficie se debe pintar, el 50% de color rojo, el 25% de azul, el 20% de verde y el 5% de amarillo. Los alumnos deben determinar el área a pintar de cada color. A continuación analizamos una discusión que se da a propósito del problema entre dos equipos que están sentados en mesas contiguas, el primero formado por Mario y Fabián, y el segundo por Alan y Jonathan. Veamos primero lo que hizo cada equipo:

Mario y Fabián resuelven el problema utilizando el operador decimal, por sugerencia de Fabián: "*no será cin…, punto cincuenta por cuatrocientos ¿si no?*". Hacen la operación y obtienen 200. Para los otros porcentajes obtienen 100, 80 y 20 al multiplicar 400 por 0.25, 0.20 y 0.5, respectivamente. Si obtienen la respuesta correcta en el último porcentaje es porque ellos acomodan el punto decimal en el resultado, dos lugares a la derecha[45]:

$$\begin{array}{r} 400 \\ \underline{\times \quad .5} \\ 20.00 \end{array}$$

Alan y Jonathan escriben la siguiente respuesta[46], que muestra el uso del operador fraccionario al menos para los dos primeros porcentajes:

Alan:	Jonathan:
Área pintada de rojo: la mitad 200	rojo: la mitad ½ 200 m^2
Área pintada de azul: cuarta parte	azul: la cuarta parte ¼ 100 m^2
Área pintada de verde: -------------	verde: ----- 80 m^2
Área pintada de amarillo: un octavo[47]	amarillo: (hay algo tachado) 20 m^2

Cuando las dos parejas han terminado, se muestran una a la otra sus respuestas:

Fabián: *Nosotros lo hicimos así güey. Nosotros estamos bien*
Alan: *No es cierto. ¿Cuánto vas a que no?*
Fabián: *¿Cuánto vas?*

---

45 Más adelante veremos que para Mario y Fabián no fue fácil recuperar este procedimiento, a partir de la memoria.

46 Probablemente las cantidades numéricas las escribieron después de la confrontación grupal, pues Alan prácticamente no tiene escrita ninguna, también por la discusión que a continuación se desata con Mario y Fabián

47 Llama la atención que Alan responda "un octavo" en el color amarillo. Al parecer hace un cálculo sucesivo de mitades (la mitad, la cuarta parte, un octavo) sin confirmar que esa relación se conserve entre los porcentajes asociados (se conserva entre el 100% y el 50%, entre éste y el 25%, pero no entre el 25% y el 5%). Aunque, como veremos más adelante, él en cierta forma sabe que "un octavo" no es una respuesta correcta.

Alan:	*Ése no está bien*
Mario:	*Si está bien*
Fabián:	*Doscientos más cien, más ochenta, tres(cientos) ochenta, más veinte, cuatrocientos. Mira, ustedes lo hicieron mal, pero éste sí está bien. Ustedes lo tienen mal*
Alan:	*¡ohhh!*
Mario:	*¡Lo tienen mal! (ríe)*

Ninguno de los cuatro intenta revisar si ambas técnicas producen o no los mismos resultados[48], la discusión está sobre el propio uso de las técnicas: sólo una de ellas puede ser correcta, no ambas. Así, la comprobación de Fabián automáticamente descarta la respuesta de los otros, desde su punto de vista: si "nosotros estamos bien" entonces "ustedes lo hicieron mal". Más adelante, cuando otra compañera, Claudia, propone en la discusión grupal que "el cincuenta por ciento es la mitad", Mario comenta en voz baja con Fabián lo absurda que le parece esta propuesta, y la rechazan antes de pensarla: "¡ay! ¿Cómo, cómo dividir?".

Cabe hacer un paréntesis para señalar que la reacción de los dos alumnos frente a la sugerencia de Claudia puede también deberse a la manera en que suelen desacreditarla. Prácticamente cada vez que ella interviene en la discusión, Mario y Fabián hacen comentarios en voz baja: "bien inteligente ¿no?", "ni siquiera sabe", "se quiere hacer la inteligente", "se pasa", "ni sabe la Claudia ¿verdá?". También ella da señales de asumir ese papel, pues frecuentemente repite las frases de otros compañeros o hace formulaciones incompletas, que parecieran carentes de contenido o que en ocasiones ella misma desdice. Así, cuando hace una participación valiosa, es poco tomada en cuenta por los demás. Nos interesa hacer ver con este ejemplo que el conocimiento que circula en el aula está en cierta medida condicionado por el juego entre los diferentes roles en los que los alumnos por un lado se posicionan unos a otros, y por otro lado también asumen.

Volviendo a la discusión entre los cuatro alumnos sobre cuál es la técnica correcta, en la puesta común, antes de proponerse el cálculo de la mitad para obtener el 50% se establece el uso del operador por 0.50. A pesar de que en la clase no se demuestra su validez y aún no se compara con otros procedimientos, Mario siente que la aceptación de su técnica por el grupo le da la razón en la discusión con Alan y Jonathan:

Mario:	*¡Jonathan! ¡Que está mal! (se refiere a la técnica de Jonathan)*
Maestro:	*¿Qué opinan los otros? Jonathan, ¿qué opinas? Que el cincuenta por ciento de la bandera se obtiene multiplicando cuatrocientos por punto cincuenta, ¿crees que está bien, o no está bien?*

[48] Lo cual podría haber contribuido a corregir ciertos errores de ambos, tanto en el registro numérico como en el gráfico, que mostraremos más adelante.

Mientras el maestro habla, Mario y Fabián incitan a Jonathan: ¡si, si si! ¡siiii! ¡siiii!
Jonathan: No, no sé

La validación social del operador decimal, no matemática, que se da en el grupo, implica, a los ojos de Mario, que el operador fraccionario es incorrecto: "¡Jonathan! ¡Que está mal!". Jonathan tampoco se despega fácilmente de su procedimiento para analizar otro: responde que no sabe si la multiplicación por 0.50 es correcta, a pesar de la presión de sus amigos, y la del maestro que le pide que opine frente al grupo sobre algo que parece estar siendo aceptado. Es posible que la propia discusión con Mario y Fabián sea para Jonathan un incentivo para disentir, para no darles tan rápidamente la razón.

En la siguiente sesión, cuando se les pide aplicar los mismos porcentajes a 800 metros cuadrados, —la superficie de la bandera grande— Alan y Jonathan vuelven a utilizar la fracción en el caso del 50% y 25%, una estimación para el 20% y el complemento para determinar el 5%. Para comprobar si sus resultados son correctos hacen una suma, como antes les habían mostrado Mario y Fabián:

Alan: Ora súmale todo. Mira ve, mira: (Va señalando las respuestas que dio para la bandera grande) Cuatrocientos, seiscientos, setecientos cincuenta, ochocientos, tá bien. A ver sácala tú

Lo que nos interesa destacar aquí es cómo Alan y Jonathan utilizan el mismo argumento que antes Mario y Fabián esgrimieron para rebatir su procedimiento, pero ahora para reforzarlo: a ellos también les sirve como forma de verificación. Así, no adoptan el procedimiento de sus compañeros, conservan el propio.

La discusión de estos cuatro alumnos en términos de oposición entre las dos técnicas da cuenta de la dificultad para despegarse de una manera propia de resolver. Esta dificultad podría admitir los siguientes elementos explicativos: es posible que cada uno de los equipos se sienta tan asido a su procedimiento, después de un largo tiempo de uso, que no piensan que puede haber otro, distinto y también correcto. Por el contrario, otra explicación es que la técnica se encuentra aún en una etapa muy incipiente, por lo que resulta difícil darle cabida a otra forma de razonamiento cuando apenas se está constituyendo el propio. En ambos casos, la dificultad puede estar reforzada por un posible efecto del contrato didáctico: a una tarea le corresponde únicamente una técnica correcta.

Las dos posibilidades tienen otro elemento en común: aun cuando los estudiantes no necesariamente comprenden el por qué de la técnica que usan —no sabemos cómo tuvieron acceso a sus procedimientos—, es probable que su puesta en funcionamiento involucre, de manera implícita, caracterizaciones distintas del porcentaje, pues cada técnica pone de relieve ciertos aspectos del porcentaje mientras deja de lado los demás. Así, cabe preguntarse si cuando Mario y Fabián por un lado, y Alan y Jonathan por otro se descalifican mutuamente, está en juego no únicamente la técnica, sino una manera de ver al porcentaje.

En este punto vemos cierta similitud con una observación de Sadovsky (2005) acerca del grado de disposición de los alumnos para comparar sus propias producciones con las de sus compañeros. Sadovsky encuentra que, al interior de un mismo equipo, a los miembros que participaron con más fuerza en la elaboración de la respuesta a un problema, la tarea de evaluar las resoluciones de los demás equipos colocándolas "en pie de igualdad" con la propia les resulta más difícil que a los que no jugaron un papel activo. Concluye entonces que la tarea de evaluar un procedimiento implica nuevas elaboraciones para quienes han sido productores:

> pronunciarse sobre la validez de otro procedimiento luego de haber producido uno, es una tarea esencialmente diferente que permite acceder a relaciones que tal vez no se habían llegado a elaborar en el momento de la propia resolución (ob.cit: 12)

Distintas técnicas arrojan el mismo resultado: una posibilidad para admitir otros procedimientos

Poco a poco los alumnos dan señales de que comienzan a admitir técnicas distintas a la propia. Una de las primeras señales aparece a partir de una puesta en común de la segunda sesión, donde se discute alrededor de la tarea planteada en el apartado anterior: calcular el 50%, 25%, 20% y 5% de 400. Para el primer porcentaje, Montserrat propone primero multiplicar "cuatrocientos por el cincuenta por ciento (…) pero poniéndole el punto (…) antes del cincuenta", con lo que se obtiene 200. Después el maestro pregunta si hay otro procedimiento. Claudia sugiere que "el cincuenta por ciento es la mitad (…) se divide por la mitad, que es, son doscientos". El maestro hace explícito que de las dos formas se obtiene el mismo resultado:

Maestro: *Entre dos, y es cierto, también sale doscientos ¿de acuerdo? Éste, si hago la multiplicación (escribe en el pizarrón la multiplicación de 400 por 0.50) ¿qué me va a salir?*

Alumno: *¡Doscientos!*

Maestro: *Doscientos también ¿no? porque son dos posiciones (señala el 0.50, que tiene dos dígitos después del punto decimal), dos posiciones (señala el 200.00 en el resultado, donde también hay dos dígitos después del punto) OK ¿alguien tiene otra manera de encontrar el cincuenta por ciento? ¿Alguien conoce una manera* *diferente de ésta?*

Fabián: *(a Mario, en voz baja:) cuatrocientos menos doscientos ¿no?*

Mario ríe

El profesor, al hacer un esfuerzo porque se hagan públicas las distintas técnicas, comunica implícitamente que, contrariamente a lo que Mario, Fabián, Alan y Jonathan parecían suponer en el apartado anterior, puede haber más de una técnica correcta para resolver una tarea. Si bien no se prueba la veracidad del operador decimal y el fraccionario por separado, de manera velada se establece que si dos caminos diferentes conducen a la misma respuesta, ambos deben ser correctos.

No obstante, no se ha reparado en que esta coincidencia se ha constatado únicamente en un caso particular, 50% de 400, lo que quizás influye para que después Fabián proponga restar 200 a 400. Es decir, Fabián invierte el mecanismo: no se trata ahora de buscar una manera de encontrar un resultado desconocido para después poder compararla con otras, sino, conociendo el resultado, hay que ver qué combinaciones de los datos permiten obtenerlo. La sugerencia de Fabián lleva a pensar, en primer lugar, que no está muy claro de dónde provienen las dos técnicas que se establecieron en la puesta en común —por ejemplo, queda implícito que 50% es la mitad del 100%— y en segundo lugar que Fabián interpreta que si puede haber varias técnicas —no una única, como antes implícitamente comunicaba a Alan y Jonathan— entonces cualquier combinación de los datos que arroje resultado 200 es pertinente. Es decir, si la manera de encontrar el resultado no está estrictamente determinada, lo único que valida un procedimiento es la coincidencia de resultados, aunque sea en un solo caso particular. No aparece en este momento una preocupación por establecer relaciones entre los datos.

En la misma puesta en común se plantea que para saber cuál es el 25% basta con calcular “la mitad del rojo”, es decir, del 50%, y después surge la duda sobre si es necesario multiplicar 0.25 por 400 o por 200. Hacen las dos operaciones y descartan la segunda porque no coincide con 100, lo que se obtuvo a partir del uso de la fracción. Así, la coincidencia en los resultados ayuda a validar las dos técnicas, pero también a resolver cierta incertidumbre en una de ellas.

Quizás esta puesta en común incide en que después, trabajando en parejas, Mario y Fabián dirijan su atención hacia la coincidencia en los resultados, lo que les permite observar una relación que no era visible con el uso del operador decimal, a saber, que el 50% es la mitad:

El problema es análogo al anterior, sólo que ahora la bandera tiene 800 m^2 de superficie

Fabián: *¿Ochocientos por punto cincuenta?*

Mario: *Y ahí ya sale (chifla)*

(Silencio)

Mario: *Vamos a hacerlo*

Fabián: *Ochocientos por (inaudible)*

Mario: *Si ¿no?*

(Silencio, hacen la multiplicación en sus hojas)

Fabián: *¿Cuatrocientos? ¡Ah, pues era la mitad!*

Mario: *Ah pus si*

Fabián: *¡Ay no mames!*

Esta es la primera vez que Mario y Fabián aceptan explícitamente la fracción. Quizás en esto tiene que ver, además de lo que ya hemos mencionado, que en una previa puesta en común, donde se discutía como aplicar el 50%, 25%, 20% y 5% a un rectángulo que representaba una bandera, se destacaron los operadores fraccionarios ½ y ¼, esta vez no como iguales al correspondiente operador decimal sino como la única posibilidad, pues en el registro gráfico difícilmente el decimal puede ser útil. La última frase de Fabián parece enfatizar que su técnica vuelve más complicada la tarea, comparada con lo sencillo que resulta dividir 400 entre 2. Su sorpresa deja ver que —además de observar una posible manera de facilitar los cálculos—, la relación entre una cantidad y el 50% de esa cantidad comienza a emerger como un invariante: tanto las cantidades iniciales como los resultados obtenidos al aplicarles el 50% varían, pero la relación entre ellas se mantiene constante. Es hasta este momento que la fracción ½ —que antes ignoraron— empieza a cobrar cierta materialidad para ellos[49]. Podría pensarse que dicha relación es puesta en juego a partir del uso que Mario y Fabián hacen del operador decimal “por 0.50”. Sin embargo, la manera de emplear esta técnica permite suponer que este operador no es visto como un invariante sino como una regla

[49] Este episodio guarda cierta similitud con el caso de Mariana, una alumna de sexto grado entrevistada por Block (s/f). Ante una tarea de comparación de razones (2 de cada 5 vs 6 de cada 20), Mariana descubre a partir del uso de la conservación de las relaciones internas, la fracción que emerge como el invariante (2 de cada 5 es igual que 4 de cada 10 y ambas son “casi un medio”; 6 de cada 20 es igual que 30 de cada 100 y ambas son “casi 1/3”). Así, la equivalencia entre distintas razones se hace visible para ella cuando las formula mediante una misma fracción. Esto parece sucederles también a Mario y Fabián: es necesaria la constatación en varias ocasiones de que la relación entre una cantidad y el 50% es de ½ antes de que se decidan a utilizarla.

operatoria: el hecho de utilizarla no vuelve observable la existencia de una razón constante.

Más adelante, a medida que van tomando en cuenta la fracción, Mario y Fabián comienzan a explorar nuevas relaciones. El problema es el siguiente:

> Se quiere pintar el 50% de rojo, 25% de azul, 20% de verde y 5% de amarillo en tres banderas, una grande de 800 m^2, una mediana de 400 m^2 y una pequeña de 300 m^2.

Fabián y Mario están calculando el 50% de las tres:

Fabián: *¿Bandera mediana? (silencio) eran doscientos ¿no? de la bandera mediana, sí, ¿no? no, mediana sí ¿no?*

Mario: *Sí, doscientos en la mediana y cien del grande. (Escribe algo en la casilla del rojo de la bandera pequeña) (Inaudible, al parecer no está muy seguro de la respuesta que está escribiendo) Ay ¡ya ya ya!*

Es posible que, cuando asegura que son “doscientos en la mediana y cien del grande”[50] Mario esté asumiendo que la razón 2:1 que hay entre el 50% de la bandera grande (400) y el 50% de la mediana (200), se mantiene entre éste último y el 50% de la pequeña:

½ (interna)

	Total	Se pinta de rojo (50%)	
Gde	800	400	
Med	400	200	½ (externa)
Ch	300	¿100?	¿½?

Después es claro que en efecto Mario ha identificado el operador externo ½ entre la bandera grande y la mediana:

Fabián: *(…) ya, ponle, ¿la verde cuánto es?*

Mario: *A ver*

Fabián: *Ochocientos…*

Mario: *Ochocientos por punto veinticinco… ah sí, ira, ah no, ah no sí, ¡ah no! (ríe) no mira, la mediana pues es la mitad de ésta (señala las*

---

[50] Si bien el dice “cien del grande” pensamos que en realidad quería decir “del chico” pues escribe 100 en el espacio que corresponde a la bandera pequeña, además después corrige el 100 a 150, que es la respuesta correcta en la bandera pequeña.

columnas de las banderas grande y mediana), pero chécate, ya nos las están poniendo (señala la columna de la bandera pequeña), a ver, mira a ver vamos a hacerle trescientos por punto cincuenta

Los fragmentos anteriores permiten suponer que también observa que dicho operador, "la mitad de", no se conserva entre la bandera mediana y la pequeña. Quizás por eso regresa al operador decimal, que ya conoce, sin recordar que lo que ya habían identificado, y debería mantenerse, es más bien el operador interno, entre el total y el 50%. Tal vez se confunde entre los dos tipos de relaciones.

Finalmente, ambos constatan que la multiplicación de 800 por 0.25 es equivalente a calcular la mitad del 50%. Y también, aunque un tanto dudosos, logran generalizar una propiedad: cuando se les pregunta cómo se calcula el 50% de una cantidad cualquiera, contestan "la mitad".

Así, poco a poco van cobrando forma los hallazgos que vinculan las dos técnicas, a partir de la comparación de los resultados, de la exploración de algunas relaciones y, como veremos más adelante, del trabajo en el registro gráfico. Es decir, es la socialización de técnicas y el uso en los distintos problemas lo que permite establecer posibilidades de tránsito entre una y otra técnica, y no el análisis *per se* de las relaciones entre 100, 50 y 25, por ejemplo.

Mayor importancia a la técnica más claramente generalizable: el operador decimal se privilegia en el registro numérico

El hecho de que, como acabamos de ver, los alumnos logran establecer ciertos vínculos entre la técnica del operador fraccionario y la del decimal, no significa que se haya logrado una integración exenta de dificultades entre éstas y otras técnicas. En este apartado intentamos mostrar cómo la clase establece cierta jerarquía del operador decimal sobre el resto de los procedimientos, en el registro numérico.

La visibilidad y la legitimación social del operador decimal

Al hacer los cálculos de la bandera pequeña (el 50% de 300), Mario y Fabián veladamente discrepan en relación a cuál de las técnicas conviene recurrir:

Mario: *(…) a ver, mira a ver vamos a hacerle trescientos por punto cincuenta*

Fabián: *Ciento cincuenta*

Mario: *Trescientos por punto cincuenta*

Fabián: *Ciento cincuenta*

Mario: *Si ya, ya lo sé, a pus sí verdá, bueno vamos a hacerle (la* *multiplicación de 300 por 0.50) para que digan, que así lo hicimos*

Por la rapidez con la que Fabián proporciona la respuesta, y por fragmentos anteriores que muestran cómo admite y se sorprende ante la fracción ½, suponemos que obtuvo el 150 a partir de dicha fracción. De ser así, su insistencia en que ésa es la respuesta correcta sugiere que Fabián está implícitamente recalcando que no es necesario hacer la multiplicación que se dispone a hacer Mario, pues la respuesta se obtiene más fácilmente calculando la mitad. Da la impresión de que cuando Mario dice "si ya, ya lo sé", no se ha percatado de que Fabián está utilizando el operador ½, más bien no le presta mucha atención. Inmediatamente después parece reparar en él: "a pus sí verdá".

Este episodio sugiere varias reflexiones. Nos interesa destacar en primer lugar que, a pesar de que Mario reconoce ante Fabián que la respuesta es 150, insiste en usar la multiplicación por 0.50, con el argumento de que conviene mostrarla a los demás: "para que digan que así lo hicimos". Esto admite dos posibles interpretaciones: o, en efecto, Mario piensa que el operador goza de un mayor reconocimiento y entonces quiere hacer ver que lo sabe utilizar, o bien aún no se siente convencido del recurso a la fracción. En el análisis del cuestionario —y como veremos más adelante, también en la implementación de la secuencia didáctica— identificamos una fuerte presencia del operador decimal, que parece restringir e incluso opacar el uso de otras técnicas. En el ejemplo anterior, Mario —al no poder rebatir la técnica que propone Fabián— apela a la superioridad que, según él, le conceden los demás al operador decimal frente a otros procedimientos, y en su actuación vuelve visible para Fabián esa condición especial de la técnica, ayudando quizás a que él también construya esa preferencia. Este hecho, aunado a otros que veremos después, permite suponer que, en las cuatro sesiones que registramos, el reconocimiento del operador decimal no es transmitido únicamente por el profesor, pues muestra lo que los alumnos valoran como conocimiento: independientemente de cómo lo hayan adquirido, se han apropiado de él y lo hacen circular de diferentes formas, tanto de carácter social como matemático.

Por otra parte, cabe hacer una distinción entre las dos técnicas —operador decimal y fraccionario— en términos de su grado de visibilidad: mientras que el multiplicador "por 0.50" de alguna manera se muestra en la propia formulación del porcentaje, es decir, en la notación "50%", la fracción "½" —expresión de la relación entre 50 y 100— y el mismo número 100, están implícitos.

Así, es posible, que la asociación tan directa entre el porcentaje y un decimal favorezca un uso mecánico de esta técnica, fácil de detectar pero difícil de explicar. Por el contrario, el uso del operador fraccionario no es tan inmediato, requiere de una elaboración: la inferencia de la relación entre el porcentaje y 100. Y ello quizás incide en el hecho de que es el operador fraccionario el que mejor expresa el significado del porcentaje como razón. Su desvanecimiento frente al operador decimal podría implicar, por lo tanto, un desvanecimiento de dicho significado.

Las dificultades que presentan las otras técnicas le abren camino al operador decimal

El operador decimal también se privilegia en la puesta en común en un par de ocasiones. Nos interesa ejemplificar a partir de una sesión en la que, ante una tarea de aplicar varios porcentajes, algunos estudiantes traen a escena las siguientes técnicas: el operador fraccionario, estimaciones y la técnica que hemos llamado CP-i[51]. No obstante, la elaboración, o bien la comunicación de estos procedimientos se vuelven tan complicadas, que éstos se desechan en la puesta en común, lo que favorece que se acepte sin reservas el operador decimal.

El problema es el que ya hemos descrito, los alumnos intentan determinar el área de cada color en la bandera grande, esto es, calcular el 50%, 25%, 20% y 5% de 800.

Mostraremos primero cómo la dificultad para llevar a cabo cierto trabajo con algunas técnicas no canónicas se percibe desde el momento de trabajo en parejas, lo que después influye para que no sean planteadas con claridad durante la confrontación grupal. Alan y Jonathan combinan tres procedimientos: recurren al operador fraccionario cuando se trata del 50% y 25%, a una estimación en el caso del 20%, y finalmente calculan el complemento aditivo para determinar el 5%:

Alan:	*Ésta. La grande, este… la mitad de ochocientos, cuatrocientos es la mitad de la bandera*
Observadora:	*Ajá, ¿el azul?*
Alan:	*El azul es… la mitad, de, la mitad de la mitad, bueno la cuarta parte doscientos*
Observadora:	*¿Y el amarillo?*
Alan:	*Y el amarillo… es… (Silencio)*
Observadora:	*¿Cuánto te salió?*
Alan:	*Ciento cincuenta*
Observadora:	*Ciento cincuenta*
Alan:	*Bueno ¡calculé!*
Observadora:	*Calculaste. ¿Y la verde?*
Alan:	*¿La verde? ¡Ah! Este… lo que sobraba*
Observadora:	*Lo que sobraba, ¿de qué?*
Alan:	*Cuatrocientos, después doscientos, son seiscientos, ciento cincuenta, setecientos cincuenta y lo que sobró*

[51] Consiste en partir identificando al 100% con la cantidad inicial y de ahí establecer una relación de proporcionalidad entre cantidades y porcentajes, utilizando las relaciones internas.

Observadora:	*Ah… pero igual en todos le hiciste. A mí me queda una duda ¿cómo calculan la amarilla?*
(…)	
Jonathan:	*(…) ve que es ochocientos acá, es la mitad, cincuenta por ciento, después este, acá, dice el veinticinco por ciento, y ya la mitad de cuatrocientos, ya después nada más, este, acá (señalando el amarillo) igual le hicimos así, ciento cincuenta, doscientos, (inaudible) doscientos, y ya de aquí, este,… (Silencio)*
Alan:	*No… es que los pusimos los números cerrados*
Observadora:	*Ya*

Jonathan no encuentra cómo —o no se atreve a hacerlo— decirle directamente a la observadora de qué medios se valieron para obtener el 20%: “ya después nada más, este, acá, igual le hicimos así”. Alan sí lo admite por un momento cuando utiliza la palabra “¡calculé!”, que evoca a una estimación. No obstante, no dice más. Da la sensación de que Alan vive ésta manera de resolver como algo útil pero íntimo, difícil de reconocer y explicar abiertamente. Después justifica: “es que los pusimos los números cerrados”, como si esa restricción minimizara la sensación de arbitrariedad.

El fragmento anterior sugiere entonces que los dos alumnos consideran a la estimación como un procedimiento sin legitimidad, al menos en esta situación, recurren a él porque no tienen otro remedio —la fracción asociada al 20% no es evidente para ellos—, pero no pueden admitirlo abiertamente.

La inseguridad que Alan y Jonathan muestran en relación a la estimación, y también la dificultad para determinar la fracción, se reflejan en la puesta en común, cuando se trata de buscar el área que se pintará de verde en la bandera grande, es decir, calcular el 20% de 800. La primera respuesta que se discute es la de estos dos alumnos:

Alumnos:	*¡Si! ¡No! ¡Ciento sesenta! ¡Ciento cincuenta!*
Maestro:	*A ver, hay dos posibilidades aquí: ciento sesenta, y otros dicen ciento cincuenta. OK, vamos a discutirlas a ver cuál de las dos va (…) (a Alan y Jonathan:) ¿por qué ciento cincuenta?*
Alan:	*¿Porque dividimos la mitad de la mitad?*
Maestro:	*La mitad de la mitad, serían cien, la mitad de la mitad son cien ¿no? este es, ¡ah no! perdón serían doscientos, porque todo es ochocientos, la mitad, cuatrocientos, y la mitad de la mitad, doscientos, ¿y aquí, entonces?*
Alan:	*Dividimos la mitad a la cuarta parte*
(…)	
Claudia:	*Pero está mal*

Nuevamente no se deciden a reconocer en público la estimación, quizás porque saben que de hecho no permite encontrar el resultado exacto, que es lo que se está pidiendo y, ante la exigencia de un argumento evocan el operador fraccionario: "¿porque dividimos la mitad de la mitad?", "dividimos la mitad a la cuarta parte". Aunque podría pensarse que estas frases se plantean de una manera bastante azarosa, o incluso que los alumnos solamente están tratando de adivinar lo que el profesor espera de ellos, creemos que no es así. Cabe recordar que Alan y Jonathan utilizan con éxito el operador fraccionario siempre que se trata del 50% y 25%, así que es probable que, más que proporcionar una explicación sobre algo que está claro, Alan esté proponiendo esos operadores como una apuesta que hay que probar, es decir, como una manera implícita de plantear su necesidad de buscar la fracción que designa al 20%. De hecho su recurso a la estimación no es inmediato, más bien parece haber sido la única alternativa al no encontrar la fracción. ¿Por qué no logran, ni alumnos ni maestro, hacer explícita la dificultad en juego, esto es, que lo que se busca determinar es la parte que representa 20 de 100?

Antes de intentar responder esta pregunta, cabe observar que en diversos estudios sobre el aprendizaje de las fracciones se ha reportado la misma dificultad: los alumnos parecen apropiarse de las fracciones cuyo denominador es una potencia de 2 (½, ¼, etc), pero muestran dificultades fuera de este dominio. Piaget (1960, en Block y González, 2005) ha mostrado que el centramiento en este tipo de fracciones constituye una etapa inicial en el proceso de aprender a hacer particiones, lo que en parte puede explicarse porque los denominadores en juego permiten la división física por mitades sucesivas. Dávila (1992) encontró que alumnos de primero y segundo grados de primaria intentaron, a partir de las fracciones que dominaban, dar cuenta de otras cantidades como 1/3: ante la tarea de repartir un pastel entre 3 niños (una hoja de papel representaba el pastel), la mayoría de los equipos realizaron varios cortes por mitad hasta que notaron que de esta manera siempre sobraría un pedazo. Incluso algunos niños, cuando el sobrante es muy pequeño lo tiran, esconden o se lo tragan para desaparecerlo, argumentando que ya no vale o que no se puede repartir. La misma autora encuentra la situación inversa: algunos alumnos que logran dividir físicamente en tres pedazos, asignan el resultado a fracciones como 1/8, es decir, del tipo $1/2^n$. En una investigación realizada con adultos no alfabetizados, Ávila (2006) también reporta esta tendencia de particiones sucesivas por mitades en sus entrevistados. Esto muestra que la ampliación del repertorio de fracciones funcionales no ocurre espontáneamente, requiere de experiencias que la provoquen. Finalmente, en el capítulo anterior de este trabajo hemos destacado esta misma tendencia de los estudiantes ante las diferentes tareas planteadas en el cuestionario y las entrevistas[52].

Nos parece que las explicaciones que proveen los autores a los que nos hemos referido son pertinentes también en este trabajo. Dávila muestra que si bien los alumnos tienen éxito en los repartos entre 2 ó 4, ellos no lo prevén, no son conscientes de que los cortes sucesivos por mitades los llevan a realizar repartos equitativos[53] y exhaustivos[54]. Para tener éxito en otros repartos, en cambio, es necesario poder hacer una anticipación y no solamente aprovechar el efecto de la acción[55]. Lo anterior nos permite suponer que, para los alumnos de nuestro estudio que recurren a la fracción, hay una diferencia sustancial entre aplicar el 25% (o 50%) y aplicar el 20%. En el primer caso, ellos implícitamente traducen la tarea como "*tengo que dividir porcentajes y cantidades hasta que llegue al 25%*". En cambio la resolución del segundo caso implica preguntarse *"¿entre cuánto tengo que dividir?"* o bien *"¿qué parte de 100 es 20?"*. Es decir, a pesar de que ambas fracciones son unitarias y sencillas, conocidas para los estudiantes, el trayecto entre una y otra se debe a que es necesario plantearse el problema de una manera distinta, redirigir la mirada hacia un lugar que no era objeto de reflexión, se daba por sentado: la fracción que sirve de instrumento para encontrar el porcentaje que se busca[56].

Además de estas dificultades que podrían considerarse de orden cognitivo, pensamos que la persistencia en secundaria de la tendencia a dividir en mitades es también efecto de la enseñanza. Es probable que los estudiantes no hayan tenido experiencias didácticas que permitan enriquecer sus conocimientos sobre fracciones, de

---

[52] Este tipo de procedimientos también puede encontrarse en la historia. Los egipcios solían multiplicar a partir de una repetida duplicación del multiplicando y mediación del multiplicador.
[53] Es decir, que todos los pedazos son iguales.
[54] Es decir, que no sobra nada del todo repartido.
[55] Piaget ha mostrado que el caso de las fracciones es un ejemplo de un proceso más general: "una vez que los encuentros "fortuitos" con la "realidad" (…) se tornan deliberados, con la construcción de esquemas, las reiteraciones conducen a anticipar el resultado de una acción. El gran proceso cognoscitivo que realiza el niño, y que la Psicología Genética ha puesto en claro, consiste en poder pasar de "lo empujé y se movió" a "si lo empujo se mueve"". (Rolando García, 2000 en Panizza, 2003: 64)
[56] Algunos alumnos entrevistados por Block (s/f) sí logran identificar fracciones cuyo denominador no es una potencia de 2, como 1/3. Por ejemplo, Mariana, ante una tarea de comparación de razones, después de establecer una relación de proporcionalidad empieza a encontrar el operador externo: primero ½, y en otra tarea, 1/3. Quizás la diferencia entre su resolución y la de los alumnos de nuestro estudio está precisamente en que Mariana, una vez que detecta la fracción, pone ahí su atención, su esfuerzo se dedica a encontrar el operador, mientras que para Alan y Jonathan la fracción es una herramienta que se utiliza pero sobre la que se reflexiona poco.

tal manera que al enfrentar nuevamente situaciones que las ponen en juego, recuperan esquemas antiguos. Por ejemplo, en los fragmentos de registro que hemos mostrado se puede percibir el carácter implícito de algunos de los elementos tecnológicos que intervienen: las relaciones que hacen que el 50% sea la mitad y el 25% la cuarta parte no son traídas a escena, son poco visibles, lo cual probablemente dificulta la posibilidad de trasladarlas a otras tareas con otras variables. Es decir, al no hacer explícita la tecnología se debilita una de sus funciones: la de producir, en este caso, técnicas más robustas. (Chevallard, 1999) Y es que el proceso de formulación no consiste únicamente en poner en palabras un modelo que implícitamente funciona en la acción, pues hay también una implicación en el sentido inverso: la explicitación del modelo amplía su campo de acción.

Volviendo al análisis de la discusión grupal sobre los procedimientos de Alan y Jonathan, las dificultades para comunicar a los demás el uso del operador fraccionario y de la estimación tienen como efecto la pérdida de presencia de ambas técnicas, así que la clase se dedica a buscar otra manera de calcular el 20% de 800. Surge entonces un nuevo procedimiento no canónico: CP-i, traído a escena por Josué. No obstante, la manera de plantearlo es bastante confusa, al menos para el profesor, por lo que se vuelve difícil de retomar y hacer circular, así que se descarta. Josué explica cómo calculó el 20% de 800:

Josué: *Yo, yo lo multipliqué por cinco y salía, (…) multipliqué cuatro por cinco y salía, este, veinte y si lo multiplicaba, este, cincuenta por cuarenta, salía, este, doscientos.*

Maestro: *A ver, pero cuatro por cinco, cuatro por cinco…*

Josué: *Sale veinte…*

Maestro: *Sale veinte. ¡Ah bueno!, dos por ocho son dieciséis, o sea, a lo que voy es, pues yo puedo poner ahí una multiplicación ¿qué es ese cuatro por cinco? Yo no sé que significa.*

Josué: *Es que, está pidiendo el veinte por ciento*

(…)

Maestro: *OK. Y tú dices que era cuatro por cinco y da veinte*

Josué: *Ajá, pero, es que, es como si estuviéramos (…) multiplicando, nada más el único número que se borra ahí en la multiplicación es el cero, y el último de resultado se le suma*

Maestro: *No entiendo nada de lo que me dices (…)*

Para poder aclarar este procedimiento, le pedimos al final de la clase que lo explicara de nuevo. Al parecer consiste en lo siguiente: Josué sabe que una vez calculado el 50% y 25%, lo que falta para el 100% es 25%, que corresponde a 200. Puesto que 25%

es 5 veces el 5%, para saber a cuántos metros cuadrados equivale el 5% es necesario buscar un número que multiplicado por 5 sea 200. Luego, como 5 por 4 es 20, se tiene que 5 por 40 es 200, a eso se refiere cuando dice: “multipliqué cuatro por cinco y salía este veinte y si lo multiplicaba este, cincuenta por cuarenta, salía, este, doscientos”, “nada más el único número que se borra ahí en la multiplicación es el cero”. De ahí que el 5% es 40 y por lo tanto el 20%, lo que falta para 200, es 160: “el último de resultado se le suma”. La estrategia se resume en el siguiente esquema:

	400	50%	
	200	25%	
+	600	75%	+
	800	100%	
-	200	25%	-
: 5	40	5%	: 5
-	160	20%	-

La explicación es tan confusa que el maestro al principio piensa que la multiplicación es azarosa: “ah bueno, dos por ocho son dieciséis”. Después, aunque el profesor hace el esfuerzo de comprender el procedimiento de Josué, no lo logra: “no entiendo nada de lo que me dices”, y entonces lo descarta y busca otras formas de resolver. Es en este momento que Guillermo toma la palabra, pero esta vez no es para proponer otra técnica alterna sino una canónica:

Guillermo: *Sería multiplicar el ochocientos por punto veinte ¿no?*

Maestro: *Hay que multiplicar el ochocientos por punto veinte, a ver, alguien que me diga cuánto es ochocientos por punto veinte ¿por qué por punto veinte?*

Guillermo: *¿Porque es el porcentaje?*

Maestro: *¿Porque es el veinte por ciento? ¿Y entonces para hacer éste cuánto sería?*

Guillermo: *Serían ochocientos por punto cincuenta*

Maestro: *Ochocientos por punto cincuenta ¿y para éste?*

Alumnos: *Ochocientos por punto veinticinco*

Maestro: *Ochocientos por punto veinticinco. Si lo hacen así, sí sale ¿no? ochocientos por punto cincuenta, sí da cuatrocientos, ochocientos por punto veinticinco, sí da doscientos*

(…)

Maestro: *(…) OK, pero entonces, ochocientos por punto veinticinco, ¡sí da doscientos?, ochocientos por punto veinte, ¿sí da ciento sesenta?*

Jonathan: *Sí*

Maestro: *¿Sí? Bueno, ya estamos conformes en que esto es…*

Claudia: *Ciento sesenta*

Maestro: *Ciento sesenta (…)*

Guillermo propone el operador decimal, el cual es aceptado rápidamente por distintos motivos que se pueden resumir de la siguiente manera: a) varios alumnos parecen conocerlo, como regla, b) se mostró que en algunos casos producía el mismo resultado que otras técnicas, c) algunos procedimientos personales son difíciles de comunicar a los demás, o bien, se consideran poco confiables, como la estimación, d) el operador fraccionario es una técnica no acabada, y el carácter implícito con el que se manejan ciertos elementos tecnológicos (por ejemplo ¿qué fracción se asocia al 20%?) dificulta la posibilidad de robustecerla, mientras que, e) la multiplicación necesaria para el uso del operador decimal aparece a los estudiantes como fácil de identificar en cualquier caso. En pocas palabras, se valora ésta última técnica por encima de las demás por su generalidad, a costa del sentido[57].

Cabe mencionar, por último, que el peso que cobra el operador decimal tampoco llega a ser absoluto. Cuando se trata de calcular el 5% de 400 o de 800, ésta técnica presenta dificultades para los alumnos pues proponen multiplicar por 0.5, con lo que se obtiene un resultado que no es factible: la suma de los cuatro porcentajes excede la superficie total de la bandera. Esta complicación propicia la búsqueda de otras formas de resolver el problema. Claudia comparte el recurso al complemento aditivo: “ya sumando todo y…”, “lo que te falta”. Al maestro no parece convencerle este procedimiento, pues si bien permite obtener la respuesta correcta, no es un método directo: “en efecto, lo que me falta son veinte, pero ¿cómo se calcula?”. Entonces Guillermo propone restar el 20% al 25% de 400, porcentajes cuyas aplicaciones ya conocen, la primera es 80 y la segunda 100: “si al punto veinticinco, le quitaste (…) el cinco por ciento para que sean veinte (por ciento), y te dio ochenta, ora si que…”. El maestro hace entonces un gesto de sorpresa, de aceptación, y llama la atención del resto de los estudiantes hacia esta explicación. No obstante, aún cuando estas resoluciones son fáciles y claras, y el operador decimal es en este caso enigmático, los estudiantes se esfuerzan por encontrarlo.

Nuevamente, es probable que el juego entre las distintas técnicas esté imbricado con el papel social que tienen en el grupo los alumnos que las proponen. No es casual

---

[57] Por supuesto, no descartamos que la técnica del operador decimal sea muy útil y deba ser enseñada. Lo que queremos destacar aquí es, nuevamente, que esta técnica suele no ser portadora del sentido del porcentaje como razón, lo cual implica, si es la única en valorarse y usarse, un sacrificio nada desdeñable: el del significado.

que sea precisamente Guillermo quien proponga el operador decimal: él y Josué son los dos alumnos que gozan de mayor legitimación en el grupo en cuanto a sus conocimientos matemáticos. También llama la atención que, a pesar de que tanto Claudia como Guillermo obtienen el 5% partiendo de otros porcentajes, es decir, de manera indirecta —Claudia resta el 95% al 100% y Guillermo el 20% al 25%—, el maestro sutilmente le otorga menor crédito a la primera que al segundo. Es decir, aunque en varias ocasiones se percibe un esfuerzo del maestro porque la voz de Claudia sea considerada en mayor medida por los demás, no siempre logra escapar a las formas sociales establecidas por la clase. No obstante, en el fragmento anterior también se muestra cómo tampoco podemos afirmar que dichas formas estén sujetas a una aplicación rígida e inamovible: no todo se les concede a Guillermo y Josué, pues la propuesta anterior de este último fue descartada.

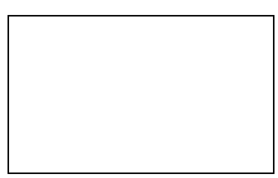
Veamos ahora lo que sucede en el registro gráfico, donde no resulta útil el operador decimal.

En el registro gráfico se asienta el operador fraccionario, cuando es fácilmente identificable

Más adelante mostraremos con mayor detalle las diferentes formas de tránsito entre el registro gráfico y el numérico que se dieron durante la implementación de la secuencia didáctica. Ahora nos interesa resaltar cómo el primero provocó en cierta medida un desplazamiento del operador decimal. Un problema que se trabajó en la segunda y tercera sesiones, y al que ya hemos hecho referencia, es el siguiente:

"El dueño de un equipo de fútbol mandó fabricar tres banderas gigantes, de distintos tamaños, para colocarlas en el estadio.

a) Para hacer la mediana, se debe pintar el 50% de rojo, el 25% de azul, el 20% de verde y el 5% de amarillo. Si toda la bandera tiene una superficie de 400 metros cuadrados, ¿Qué área tendrá cada color?
b) Representa en el siguiente rectángulo la parte que se debe pintar de cada color



c) Los resultados que obtuviste en la pregunta **a)** ¿corresponden bien con las partes que coloreaste en **b)**? Si te parece que no, corrige tus resultados."

Mario y Fabián, durante el trabajo en parejas, resuelven el inciso a) a partir del operador decimal, y al parecer en el inciso b) se preocupan por conservar el orden de los porcentajes: dibujan en el caso del 50% una franja mayor a la del 25%, y así sucesivamente. La porción del terreno que asignan al 50% es un poco menor de la mitad.

En la puesta en común se genera cierto desacuerdo: algunos alumnos afirman que “primero va la mitad… de rojo”, pero cuando el maestro le pregunta a Mario si está de acuerdo, dice “no sé”:

Maestro: *¿Cómo dividiste tú? (…)*

Mario: *Casi la mitad*

Maestro: *¿A la mitad?*

Mario: *Casi*

Maestro: *Casi a la mitad ¿por qué casi a la mitad y no exactamente a la mitad?*

Guillermo: *Es a la mitad*

Maestro: *OK a ver, su compañero dice que es exactamente a la mitad porque es el cincuenta por ciento ¿qué opinan?*

Alumnos: *¡Siiii!*

En el registro gráfico nadie puede valerse del operador decimal, entonces Mario infiere una fracción aproximada "casi la mitad" a partir de lo que ve en su dibujo, el cual proviene de una comparación cualitativa de los diferentes porcentajes. Entonces sus compañeros y el maestro les aportan algo de información: "es exactamente a la mitad porque es el cincuenta por ciento", aunque no se justifica (queda implícito que 50 es ½ de 100, de ahí que 50% es ½ del 100% y, ya que 100% es el total, 50% es ½ del total) . Más adelante Josué y Guillermo les proporcionan otra relación: para saber qué parte del terreno corresponde al 25% "tienes que dividir la mitad de la mitad (…) porque (…) una mitad es cincuenta por ciento", "y la mitad sería el veinticinco por ciento". Esta vez hacen más visibles las relaciones entre los diferentes porcentajes.

A pesar de que los aportes de sus compañeros están poco sustentados, son datos nuevos para Mario y Fabián. En la siguiente sesión se les plantea nuevamente una tarea en el registro gráfico, donde se representan varios terrenos de distintos tamaños, en cada uno de los cuales hay una parte sombreada. La tarea consiste en determinar el porcentaje de cada terreno que corresponde a la región gris. (Sesión 4, problema 1) En uno de ellos, Fabián afirma que es el 45%:

Maestro: *OK ¿quién dijo que era el cuarenta y cinco por ciento? Levanten la mano (a Fabián que levanta la mano) ¿cómo sabes que es el cuarenta y cinco por ciento?*

Fabián: *No psss…*

Mario: *Nada más le calculé*

Fabián: *Le calculé… la cantidad*

Maestro: *¿Tú que crees después de que ves éstos, será el cincuenta o el cuarenta y cinco y por qué?*

Fabián:	*¡Cuarenta y cinco! porque es menos de la mitad*
Maestro:	*¿Alguien tiene una regla para medirlo? (a Josué y Guillermo que están midiendo) ustedes traen ¿y sí es menos de la mitad?*
Josué:	*No, es la mitad exactamente*
Maestro:	*Es exactamente la mitad. Entonces ¿qué es? (a Fabián)*
Fabián:	*Cincuenta*
Maestro:	*Cincuenta por ciento, OK ¿quién dijo que era el sesenta? (…)*

Al parecer Fabián y Mario asumen, al ver el terreno, sin medirlo, que la región pintada es “es menos de la mitad”. Para hacer su estimación parecen utilizar como criterio implícito el hecho de que 50% es ½: “nada más le calculé”. Pero cuando se mide la longitud del terreno total y la de la región gris y se comprueba que “es la mitad exactamente”, rectifican, y afirman que es el “cincuenta”. En otro terreno, cuando un compañero dice que la región pintada es la cuarta parte, Mario concluye, riendo: “es el veinticinco entonces”.

Cabe observar que no podemos asumir que el cambio en la estrategia de Mario y Fabián se debe a las aportaciones verbales hechas por el resto del grupo. El sólo disponer de esta información no parece suficiente para que los dos alumnos se la apropien. Como ya hemos visto, es a partir de la constatación de la coincidencia de los resultados del operador decimal y el fraccionario que empiezan a admitir y darle uso al segundo. Pero también nos parece que, precisamente para que se percataran de esta convergencia entre las dos técnicas, fue necesario que otros llamaran su atención hacia la fracción, que estaba siendo ignorada por ellos. Además, fue útil la ubicación de la tarea en el registro gráfico, que obstaculiza la puesta en juego del operador decimal.

El ejemplo de Mario y Fabián no es único en la clase. En general, al menos en las confrontaciones grupales, parece que en el registro gráfico cobra fuerza la fracción, la que, por la manera en que es empleada, ofrece algunas posibilidades y también limitaciones, como veremos ahora.

En el problema de los terrenos, Josué y Guillermo encuentran, en un caso, que el rectángulo mide de largo 5 centímetros y la parte sombreada 1 cm. Entonces prueban varias estimaciones, sabiendo que el porcentaje correspondiente a la parte gris debe caber 5 veces en 100: “15 más 15 más 15 más 15 más 15, es muy poquito, luego 25 y luego 20, da 100”. A pesar de que los dos estudiantes muestran un uso versátil de diferentes técnicas, el procedimiento que ponen en juego sugiere que el registro gráfico posibilita el surgimiento de nuevas estrategias, distintas al operador decimal.

Veamos cómo resuelve Montserrat el problema relativo al mismo terreno. Ella contesta que la región sombreada es el 25%, "porque haz de cuenta que esto (señalando la mitad del terreno) haz de cuenta que todo esto es cincuenta por ciento y yo digo que es la mitad… cincuenta por ciento es la mitad de veinticinco, es veinticinco (señalando la parte sombreada)". Nos parece que intenta decir que la parte sombreada es la mitad del 50%, es decir, el 25%. Nuevamente llama la atención el constante recurso a la fracción ½ por parte de los estudiantes[58]. Resulta relativamente fácil para ellos la identificación del 50% y el 25%, pero no tanto la del 20%. Montserrat encuentra un porcentaje bastante cercano al 20%, pero no llega a notar que la región sombreada en realidad es la quinta parte del terreno total.

En la puesta en común tampoco emerge la fracción "1/5". Unos alumnos afirman que la parte sombreada corresponde al 25% y otros que al 20%. Una estudiante que quiere sostener la primera opción justifica: "según yo es una cuarta parte de todo". Cuando se comprueba al medir con regla que no es la cuarta parte, desechan este porcentaje: "porque el veinticinco es la cuarta parte". El profesor ratifica: "entonces el veinticinco, no puede ser, tendría que ser la cuarta parte", y a partir de lo anterior concluye: "tenemos entonces que (…) es el veinte por ciento". Es decir, no es necesario demostrar que el 20% es correcto, se admite porque es la respuesta que no ha sido descartada.

En otro de los terrenos, tanto Margarita como Montserrat estiman de manera gruesa (el largo del rectángulo mide 4 centímetros y el de la región gris 3 centímetros, es decir, el 75%):

Margarita: *¿Este será el no-ven-ta y… cinco por ciento?*
Montserrat: *Setenta ¿no? Porque aquí sobra (inaudible)*
(...)
Margarita: *¿Setenta por ciento? Yo le puse el noventa y cinco por ciento*
(...)
Margarita: *Yo dije que... son aquí todos cien... cien metros de terreno*

[58] Ya hemos mostrado –e intentamos explicar a qué se debe- que también Alan y Jonathan calculan mitades sucesivas, pero no resulta fácil la tarea cuando se trata de una fracción que no puede obtenerse de esta manera.

(...)

Montserrat: *Es que aquí porque... o sea, aquí le pusimos cincuenta... aquí tiene que ser el cincuenta, precisamente esto vale el cincuenta, entonces tiene que ser aquí menos, por eso... yo digo que todo esto (la región gris) son setenta y esto (la región blanca) vale el treinta por ciento*

(…)

Margarita, cuando estima el 95%, exagera un rasgo que sólo tiene este terreno: es mucho lo gris. Montserrat en cambio estima el complemento: compara la parte blanca con el 50% y concluye que "tiene que ser aquí menos". Si bien la estimación de Montserrat es más fina, pues pasa por el 50%, ambas establecen una relación entre el porcentaje y 100 similar a la que perciben entre la superficie sombreada y la total. No entran en juego aquí las fracciones.

Es interesante que las dos alumnas pongan en funcionamiento estas relaciones siendo que, como veremos más adelante, en las sesiones anteriores muestran conferirle un sentido bastante precario al porcentaje, utilizan el operador decimal como una regla de la que no conocen el significado. En varias ocasiones da la impresión de que la inseguridad que muestran sobre sus propias elaboraciones las vuelve receptivas a los aportes que hacen sus compañeros en las puestas en común. Por ejemplo, en este problema, utilizan la correspondencia del 100% con el total, del 50% con la mitad, y del 25% con la mitad del 50%. Por otras participaciones de estas estudiantes, es posible suponer que esta información no surge inicialmente de ellas mismas, sino que más bien la retoman sin mucha dificultad de las aportaciones de sus compañeros. No obstante, cuando alguien propone el 75% sin haber todavía explicado por qué, Margarita inmediatamente hace un gesto de preocupación: con la misma facilidad con la que las dos alumnas admiten los argumentos de los demás, ponen en duda las producciones propias, que logran elaborar a partir de ellos.

Hemos visto en este apartado cómo el tránsito entre diferentes técnicas —principalmente el operador decimal y el fraccionario— se vuelve posible cuando se muestra que todas llevan a los mismos resultados, cuando una de ellas presenta algunas trabas, o bien cuando un problema se plantea en el registro gráfico, pues ahí el operador decimal es difícil de usar.

Así, por ejemplo, quienes comenzaron con el operador decimal prácticamente se vieron en la necesidad de recurrir al fraccionario en ciertas tareas planteadas en el registro gráfico, lo que en parte propició su uso en el numérico. Mientras tanto, para los que de entrada utilizaron el operador fraccionario, en cierta medida se les impuso el operador decimal en los casos en los que el primero era difícil de encontrar, aunque no de manera obligada: les quedaba el recurso a una estimación.

No obstante, cabe destacar que el encuentro entre distintos procedimientos no implica que todos se utilicen con la misma naturalidad y por todos los miembros de la clase. Tampoco significa que los alumnos hayan aprendido a identificar las condiciones de una tarea bajo las cuales una determinada técnica es más pertinente que otra. Incluso mostramos que el establecimiento del operador decimal en el registro numérico llegó a desvanecer la necesidad de robustecer otra técnica, la del operador fraccionario. Es importante estudiar más cuidadosamente de qué manera es posible darle cabida a las diferentes maneras de resolver una tarea, favorecer que los alumnos las comparen y verifiquen su validez.

3.2.2 El débil sentido que se deposita en el algoritmo del operador decimal

En el apartado anterior tratamos de hacer ver cómo el algoritmo del operador decimal cobró una fuerte presencia en el registro numérico. No obstante, esta técnica parece estar muy poco dotada de sentido por parte de los alumnos, lo cual puede inferirse a partir de diferentes rasgos de sus resoluciones. Cabe aclarar que cuando nos referimos al frágil sentido conferido al operador decimal, no pretendemos que los estudiantes comprendan cada uno de los pasos de la ejecución del algoritmo pues justamente la utilidad de los algoritmos reside en que permiten establecer, ante determinado tipo de tareas, secuencias de acciones que garantizan la obtención del resultado, cualquiera que sean los datos, evitando así la necesidad de reflexionar cada uno de los pasos. Al hablar del débil sentido del operador decimal nos referimos a que los estudiantes no parecen establecer las relaciones entre los datos que se ponen en juego en una tarea, y de esa manera se quedan sin recursos para saber bajo qué condiciones el algoritmo se puede usar, para anticipar rangos numéricos en los que tendría que estar el resultado, para utilizar otros procedimientos cuando el algoritmo no es pertinente.

Es decir, los estudiantes apenas establecen frágiles vínculos entre el algoritmo y otros procedimientos, el algoritmo no parece estar resumiendo procesos largos de búsqueda y de construcción de otros procedimientos propios de menor alcance. El sentido de un algoritmo no es entonces una característica que le sea intrínseca, sino de la manera en que se establece en un proceso de aprendizaje y en que los estudiantes recurren a él.

Veamos ahora las maneras en qué se manifiesta cierta fragilidad en el uso del operador decimal.

Se recuerda el algoritmo como una serie de operaciones

En varias ocasiones en las que se plantea a los alumnos la tarea de aplicar porcentajes, ellos intentan recuperar una manera de resolver que ya habían utilizado antes. Da la impresión, por la manera de evocarla, de que lo que recuerdan son operaciones inconexas, fragmentos aislados de la técnica, la cual no relacionan con alguna interpretación del porcentaje, como en el caso de Claudia y Guadalupe:

> *El problema a resolver es: Un pantalón que cuesta $200 está al 30% de descuento ¿de cuánto es el descuento?*
>
> *Claudia:* *A ver, dice, si el pantalón costara doscientos pesos, doscieeentooos para… treinta por ciento… no, es que, es que ya no me acuerdo como se saca el porcentaje*
>
> *Guadalupe:* *Yo me acuerdo que había algo que aquí se dividía pero no me acuerdo qué. Lo que iban, a ver, era ésta y se dividía entre ésta y si no alcanzaba te daba un cero o algo así. Pero no estoy segura*
>
> *(…)*
>
> *Claudia:* *Esto me salía súper bien antes*

Guadalupe recuerda que se recurría a una división, y que bajo ciertas condiciones, había un cero que jugaba un papel especial, aunque no está segura. Cabe preguntarse si asocia las reglas que menciona únicamente al porcentaje o a una manera general de proceder en matemáticas. Llama la atención que Claudia recuerda lo buena que era antes resolviendo estas tareas, parece aludir a su eficacia ejecutando una técnica que le había sido proporcionada, pero al no poder recuperarla, ambas se quedan desarmadas, no evocan otros recursos.

En el mismo problema, Fabián se pregunta: "es doscientos por ¿trescientos no? ¡No manches ya no me acuerdo!". La multiplicación que propone tiene poco sentido en el contexto del problema, pues evidentemente el resultado saldrá mayor que el precio original del pantalón, pero al parecer él en este momento se despega de ese contexto para recuperar una regla más general: la que permite aplicar porcentajes a cantidades. En otro problema, en el que se debe pintar el 50% de una bandera que mide 400 m^2, Fabián insiste, aunque dudoso, en la multiplicación, esta vez con un punto decimal: "no será cin…, punto cincuenta por cuatrocientos ¿sí, no?", y pide a Mario que la realice: "a ver hazla güey". Así, no parecen estar muy seguros de esta técnica, más bien al ejecutarla también parecen estarla poniendo a prueba. No es que el problema les esté sugiriendo hacer esa multiplicación, más bien, Fabián está tratando de recordar una regla de la que alguna vez dispuso.

A diferencia de lo que hacen, por ejemplo, adultos no alfabetizados (Soto, 2001), quienes, cuando resuelven determinados problemas relacionados con su oficio, producen caminos largos —en comparación con los canónicos, de los cuales no necesariamente disponen— a cambio de mantener, en cada paso, un control del sentido otorgado por el contexto, en este caso los alumnos optan por una operación, 400 por 0.50, que posiblemente comprenden poco, o no comprenden, de la que se sienten poco seguros. Es una operación sobre la cual no podrán ejercer ningún control, probablemente ni siquiera cuando obtengan el resultado, pues para ello sería necesario que ya supieran, cuando menos, que el 100% corresponde al total y, como veremos, eso no les resulta trivial. Claro, con respecto a la comparación hecha, hay que decir que los contextos —problemas del oficio, problemas planteados en la escuela—, son muy distintos e imponen al conocimiento modos de funcionamiento también muy distintos. Y además, que la tarea planteada a Mario y Fabián supone que ellos ya tienen ciertos conocimientos sobre el porcentaje, pues ¿qué posibilidades ofrece la situación para producir un procedimiento propio, nuevo para ellos, que permita ejercer un control sobre el sentido?

Los ejemplos de Claudia, Guadalupe, Fabián y Mario muestran cómo estos alumnos, ante la dificultad para recuperar una técnica que necesariamente se ha olvidado por la falta de uso, parecen quedarse imposibilitados para resolver las tareas, como si no pudieran reconstruir otros recursos.

La búsqueda del algoritmo más pertinente para la tarea

Al igual que en la aplicación del cuestionario y las entrevistas, en la implementación de la secuencia didáctica encontramos que algunos alumnos, ante la tarea de aplicar porcentajes, se dedican a buscar, entre los cuatro algoritmos básicos, una combinación que arroje un resultado que parezca pertinente. Mostraremos el caso de Margarita y Montserrat, que es el más evidente que logramos registrar:

> *Se debe pintar una bandera de 400 m^2 de superficie de la siguiente manera: el 50% de rojo, el 25% de azul, el 20% de verde y el 5% de amarillo ¿qué área tendrá cada color?*
>
> *Montserrat:* *(lee en voz alta el problema) (…) se debe pintar el cincuenta por ciento de rojo*
>
> *Margarita:* *Lo vamos a sumar ¿no?*
>
> *Montserrat:* *(sigue leyendo:) Si toda la bandera tiene una superficie de…*

Margarita: *Vamos a multiplicar cuarenta, cuarenta por ciento, cuatrocientos por ciento*

(…)

Margarita: *(a la observadora) ¿Podemos multiplicar acá?*

Observadora: *¿Pueden qué?*

Margarita: *Multiplicar. Sería, cuatrocientos por cincuenta*

(…)

Hacen la multiplicación y les da como resultado 20, 000

Margarita: *Es que da mucho, sobre dos, da mucho, mira*

Montserrat: *(ríe) Da mucho ¿verdad?*

Margarita: *¿Sobre dos?*

Montserrat: *Mejor, lo que te dé entre dos, y ya sería…*

Margarita: *El resultado*

(…)

Margarita: *Yo le voy a hacer la cinco, por veinticinco*

(…)

Margarita: *Veinticinco por… cuatrocientos. ¡A lo mejor cuatrocientos por veint… cuatrocientos entre veinticinco! Yo le voy a hacer así. Cua-tro-cien-tos por…*

Margarita y Montserrat realizan una búsqueda de la operación que resuelve, dan por hecho que alguno de los algoritmos que conocen debe funcionar. Primero proponen sumar, luego multiplicar y finalmente dividir los dos datos conocidos, cambiando de una operación a otra con cierta facilidad, como si estuvieran buscando dar en el blanco, y al mismo tiempo como si ninguna de las operaciones les sonara muy familiar para el problema que deben resolver. No obstante, ejercen cierto control sobre el resultado que obtienen, pues se percatan de que 20, 000 es demasiado grande y entonces buscan hacerlo de otra manera ("¡a lo mejor cuatrocientos (…) entre veinticinco!"), o bien ajustar con otra operación ("sobre dos, da mucho"), que quizás es retomada del uso de fórmulas —como la del área del triángulo— y utilizada como una especie de truco que sirve para regular, para reducir el resultado. Así, si bien al realizar las operaciones se despegan en cierta medida del contexto del problema, vuelven a él para cerciorarse de que su respuesta sea factible. De esta manera, Montserrat logra descartar operaciones no pertinentes y logra recuperar el algoritmo del operador decimal:

Montserrat: *Ya sé cuanto es, Margarita*

Margarita: *¿Cómo? ¿Cómo le hiciste? ¿Cómo le hiciste?*

(…)

Montserrat: *(a la observadora) ¿Da doscientos?*

Observadora: *¿De dónde les salió el doscientos? (…)*

Margarita: *Es… si le ponemos punto acá ¿no? punto acá (señala dos lugares después del punto decimal tanto en el 50 como en el resultado), y ya da doscientos*

Mientras Margarita prueba esta vez la división, Montserrat encuentra que multiplicando después de poner un punto decimal en uno de los factores queda un resultado plausible. Es decir, ambas parten de la no factibilidad del 20,000, y para controlar este error, una ajusta el resultado dividiéndolo entre 2 y otra el procedimiento agregando un punto decimal. Parece entonces que dividir entre dos y colocar un punto son vistos como reguladores de los cuatro algoritmos básicos para adaptarlos a diferentes tareas. Incluso después, Margarita propone repetir este ajuste:

(…)

Montserrat: *¿Éste (el amarillo) da doscientos?*

Margarita: *¿O será dos?*

Montserrat: *(vuelve a hacer la operación) si, si da doscientos*

(…)

Así, cuando surge una duda sobre la cantidad de pintura amarilla (para obtener el 5% de 400, multiplican 400 por 0.5 y también les da como resultado 200), Margarita piensa si "será dos". Al parecer se le ocurre volver a quitar ceros como una forma de ajustar un resultado demasiado grande, si ya se hizo una vez ¿por qué no se podría de nuevo?

Incluso, cuando Jonathan les hace ver que no pueden ser 200 de rojo y también de amarillo pues se agotaría toda la superficie de la bandera, Margarita vuelve a intentar una pequeña modificación que quizás derive en la respuesta correcta: "lo dividimos entre dos ¿no?", lo que provoca la risa de ella misma y Montserrat. Margarita deja ver así que no ha adoptado un procedimiento, pues brinca de uno a otro, o de una modificación a otra cada vez que aparece una dificultad. Sus risas parecen delatar que para ellas se hace evidente que hay una manera en cierta medida "tramposa" de actuar, que están tratando de encontrar el paso mágico que las hará dar con la respuesta correcta, ¿para ellas esto caracteriza el trabajo en matemáticas?

Finalmente, Montserrat insiste en que el error estuvo en que "faltó poner el punto, el punto se recorre" dos lugares en el resultado, lo que muestra que ella pretende encontrar cierta lógica en la manera de obtenerlo. Por otro lado, sigue afirmando que el 5% de 400 se obtiene multiplicando 400 por 0.5, con lo que refleja un grado de incomprensión en relación a los números decimales: el punto se recorre un lugar arriba, pero dos en el resultado, además se hace la misma operación para calcular el 50% que el 5% ¿o para ella 0.50 es distinto de 0.5?

Más adelante, cuando Claudia explica cómo encontrar el 5% por complemento aditivo, con lo que también se obtiene 20, Margarita parece aceptar que el error estuvo en la colocación del punto decimal: es la primera vez que una respuesta se hace explicable para Margarita, y entonces, a partir de este resultado puede volver hacia su procedimiento y encontrar el error, sin que por ello vuelva inteligible su propia técnica.

Con el ejemplo de Margarita y Montserrat hemos intentado mostrar cómo algunos estudiantes buscan una combinación de los cuatro algoritmos básicos que permita obtener un resultado factible en el contexto del problema, sin apelar a alguna interpretación del porcentaje. Esto puede admitir tres elementos interpretativos: 1) efectivamente recuerdan que alguna vez les fue proporcionada una manera de resolver la tarea específica de calcular porcentajes e intentan recuperarla, 2) no tienen una comprensión del porcentaje que les permita, ante el olvido de la técnica, optar por otros caminos, o bien, 3) esta manera de actuar devela una manera de vivir la actividad matemática en clase, donde no se desarrolla el hábito de buscar procedimientos, más bien, se enseña a los alumnos a aplicarlos una vez que les han sido enseñados.

Rápida generalización de una regla

Algunos alumnos, al aplicar el 50% o 25% parecen apelar a la siguiente regla general: para calcular el *x*% es necesario multiplicar la cantidad inicial por 0**.***x*[59]. No obstante, en la formulación que se hace durante una confrontación grupal —y por lo tanto, en la comunicación de este procedimiento a los que no lo utilizan aún— el mecanismo se plantea en el sentido inverso: no se parte de la regla general para aplicarla a casos particulares, sino al revés, a partir de su uso en dos casos se propone extenderla:

> *Se debe pintar una bandera de 400 m^2 de superficie de la siguiente manera: el 50% de rojo, el 25% de azul, el 20% de verde y el 5% de amarillo ¿qué área tendrá cada color?*
>
> *(…)*

---

[59] Esta regla no es completamente cierta. Por ejemplo, para aplicar el 5% lleva a multiplicar por 0.5. No obstante, los alumnos no parecen reparar en ello, por eso afirmamos que apelan a esa regla.

Maestro:	*(…) Guillermo me dice, tengo que multiplicar cuatrocientos por punto veinte para obtener el área pintada de verde, a ver jóvenes, ¿qué opinan de la idea de Guillermo, saldrá si multiplico por punto veinte?*
Alumnos:	*Sii*
Maestro:	*¿Por qué sale? ¿Por qué creen que salga, o cómo saben que sí sale?*
Fabián:	*Por que ya es el último porcentaje. ¡Ah no!*
Guillermo:	*Porque cuando, para saber el, el, ¿cómo se llama?, el azul…*
Maestro:	*¿El azul?*
Guillermo:	*Multiplicaron por punto veinticinco ora para saber el veinte se multiplica por punto veinte*
(…)	
Maestro:	*Ah! Bien, a ver, Guillermo está diciendo: si tuve que multiplicar cuatrocientos por punto cincuenta para obtener la mitad, y cuatrocientos por punto veinticinco para obtener el veinticinco por ciento, él asegura que es cuatrocientos por punto veinte, por favor hagan esa multiplicación (…) ¿cuánto les sale?*
Alumnos:	*¡Sale a punto ochenta! ¡Ochenta!*
Maestro:	*Ochenta les sale, (…) OK ¿cómo le hacemos para calcular el área pintada de amarillo?*

Este procedimiento se generaliza porque resulta fácil extrapolarlo: si al 50% se le asigna el operador 0.50 y a 25% el 0.25, entonces *x*% puede asociarse a 0**.***x*. Recordemos (ver apartado 3.2.1) que los operadores "por 0.50" y "por 0.25" se establecen en parte porque el grupo constata que coinciden con la mitad y la cuarta parte, respectivamente, de 400. En el fragmento anterior se puede ver cómo el operador decimal se generaliza, a partir de dos casos particulares de porcentajes aplicados a una sola cantidad.

Esta generalización no se plantea como hipótesis, para probar, por ejemplo, si las igualdades "por 0.50" = "½ de" y "por 0.25" = "¼ de" se cumplen con otros números. Es decir, no se preguntan si hay restricciones sobre los porcentajes ó sobre las cantidades a las que se pueden aplicar utilizando la regla propuesta. Al no haber una anticipación de las relaciones entre los datos a partir de otra interpretación del porcentaje, no logran un control sobre la técnica, por lo que se produce un algoritmo que parece evidente pero es incorrecto cuando los porcentajes no son de dos cifras. Así, puesto que la regla general parece asible, se acepta muy fácilmente, a diferencia de otras técnicas, como el operador fraccionario, cuyo uso no se les presenta como transparente a los estudiantes. Esta tendencia se puede observar también en el comentario de Fabián: “porque ya es el último porcentaje”, que aunque no tiene lugar en la discusión —él mismo la desecha— deja ver que no está buscando una explicación, sino una pista en el problema que permita inferir la regla. Finalmente los alumnos llevan a cabo la multiplicación, y al parecer la obtención de un resultado es considerada suficiente, lo que desdibuja la necesidad de establecer ciertas relaciones entre los datos.

En el siguiente fragmento se deja ver nuevamente la sencillez con la que esta técnica se aparece ante los estudiantes:

Después de haber calculado el 50% y el 25% de 800, el grupo intenta encontrar el 20% de 800:

Guillermo: *Sería multiplicar el ochocientos por punto veinte ¿no?*

Maestro: *Hay que multiplicar el ochocientos por punto veinte, a ver, alguien que me diga cuánto es ochocientos por punto veinte ¿por qué por punto veinte?*

Guillermo: *¿Porque es el porcentaje?*

Maestro: *¿Porque es el veinte por ciento? ¿Y entonces para hacer éste cuánto sería?*

Guillermo: *Serían ochocientos por punto cincuenta*

Maestro: *Ochocientos por punto cincuenta ¿y para éste?*

Alumnos: *Ochocientos por punto veinticinco*

Maestro: *Ochocientos por punto veinticinco. Si lo hacen así, sí sale ¿no?*

Guillermo explica que el porcentaje que se pide deja ver exactamente cómo hay que multiplicar. Lo que nos interesa destacar en este apartado es que el algoritmo que consiste en multiplicar por el factor decimal se usa no porque tenga un sentido accesible ni por la facilidad en la ejecución de los cálculos, sino por la aparente constancia en la identificación de la operación necesaria[60].

La manera azarosa en que se le hacen ajustes al algoritmo

Al tratar de aplicar el 5% a 400 en una puesta en común, varios alumnos proponen multiplicar “cuatrocientos por punto cinco”, pero cuando efectúan esta operación se obtiene como resultado 200, que ya había sido rebatido previamente por contradecir el contexto del problema. Mario y Fabián se sorprenden:

Mario: *¡Ay no mames! pérate*

---

[60] La facilidad con la que se admite el operador decimal está relacionada con el diseño de la secuencia didáctica. Trataremos este punto más adelante, en el comentario final de este capítulo.

Fabián: *¡Ay no pérese, pérese!*

Mario: *¿No será doscientos por punto (inaudible)?*

Fabián: *No mames ¿qué pasa güey?*

Mario: *¡Que pex! ayyyy*

Fabián: *Bueno nos salió bien, nos salió*

Mario: *Ay, ¡nos salióoooo! ¡Nos salió! En lo que ustedes (se dirige a Alan y Jonathan), ustedes decían que era la primera*

En sus hojas, los dos tienen escritas las siguientes operaciones, probablemente la primera sirvió para calcular el 50% y la segunda para el 5%:

$$\begin{array}{rrrrr} & & 4 & 0 & 0 \\ & \times & . & 5 & 0 \\ \hline & & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & \\ \hline 2 & 0 & 0 & .0 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{rrrr} & 4 & 0 & 0 \\ \times & & .5 & \\ \hline 2 & 0 & .0 & 0 \end{array}$$

Si bien ellos se preguntan por qué se cometió el error e incluso intentan formular otra regla en la que no se multiplica por la cantidad inicial sino por 200 ("¿no será doscientos por punto…?"), rápidamente les da tranquilidad el que ellos obtuvieron un resultado distinto a 200, es decir, 20, solución que ya habían validado en el momento de trabajo por parejas[61]: "bueno nos salió bien, nos salió". Esto hace que no se pregunten por qué, si tanto ellos como el profesor hicieron la misma multiplicación —400 por .5— obtuvieron distintos resultados.

Es quizás esta pregunta lo que, más adelante, los lleva a dudar de la operación que utilizaron:

Fabián: *Oye güey ¿no eran cuatrocientos, entre… cinco?*

Mario: *Sí, por eso, punto cinco… es que no sé cómo sea ¿no será por cinco punto (ríe)?*

Fabián: *A ver, cuatrocientos entre cinco*

En la siguiente sesión sucede algo similar al tratar de aplicar el 5% a 800. Fabián propone multiplicar "ochocientos por punto cinco", y cuando esta operación se descarta, los alumnos proponen ajustes parecidos a los que se muestran en el fragmento anterior:

Alan: *Es ¿cero punto cinco?*

Maestro: *Por ¿cero punto cinco? cero punto cinco sale lo mismo*

---

[61] En el problema que resolvieron, además de aplicar el 5% a 400 también deben calcular el 50%, 25% y 20%. Mario y Fabián, antes de la confrontación grupal comprobaron que la suma de sus cuatro resultados es 400, la cantidad inicial, por lo que piensan que resolvieron correctamente.

Claudia: *Sí, ¡no! es, punto cero cinco*

Maestro: *¡Punto cero cinco! A ver, vamos a hacer (…) Ochocientos por punto cero cinco, vamos a ver qué sale (hace rápidamente la multiplicación frente a todos)*

(…)

Claudia: *Dos decimales (…) cuarenta*

Maestro: *Sí sale, se multiplica por…*

Alumnos: *Por punto cero cinco*

(Suena el timbre que indica el final de la clase)

Maestro: *Gracias, nos vemos luego. Por punto cero cinco*

Alan propone multiplicar "por cero punto cinco", como antes Mario pensó en "por cinco punto". A pesar de la diferencia en la seriedad con que sugieren estas operaciones —Mario la plantea en tono irónico, de quien sabe que está proponiendo algo absurdo, mientras que Alan la propone más bien con cierta inseguridad, pero como una verdadera posibilidad—, ambos dejan ver una percepción de que en matemáticas ciertos errores se arreglan con un cambio tan pequeño como inexplicable. Así, a la expresión "por punto cinco" Alan agrega un cero: "¿cero punto cinco?", pues sabe que este número —en combinación con el punto decimal— tiene ciertas propiedades particulares, aunque no puede explicar bien en qué consisten y no tiene claro cómo y cuándo se emplean. El uso del operador decimal es visto como una serie de pasos que es necesario saberse, no explicar.

Finalmente, es Claudia quien aporta la respuesta adecuada. A pesar de que sus contribuciones suelen ser poco valoradas en las discusiones, esta vez el profesor la recupera y la valida haciendo la multiplicación. No queda claro si ella obtiene el operador "**.**05" de manera similar a lo que hacen Mario y Alan —a partir de un recuerdo fragmentario del papel del cero y del punto—, o si encuentra cierta congruencia en el uso de ese operador. La manera discreta en que menciona "dos decimales" sugiere que ella intenta comunicar que si se necesita recorrer el punto dos lugares en el resultado, también se debe hacer en el operador. Esto parece cobrar poca presencia en la discusión grupal, pero sí se establece el operador correcto.

Usos del algoritmo en tareas no pertinentes

Gabriela y Guadalupe multiplicaron 200 por 0.30 para saber el descuento que se hace a un pantalón que originalmente cuesta $200 y se ofrece al 30%. Después, en otro problema se les pregunta si el hecho de saber que las familias mexicanas gastan en promedio el 15.20% de su salario en transporte permite saber cuánto dinero gastan, y ellas responden que sí, 15.20%, aunque después dudan:

Guadalupe:	*Yo digo que aquí hay que saber cuanto dinero… digo cuanto gastan*
Gabriela:	*Entonces aquí lo multiplico*
Observadora:	*A ver ¿qué es lo que estaban diciendo?*
Gabriela:	*Hay que ver cuánto, por eso vamos a multiplicar*
Observadora:	*¿Cuánto por cuánto?*
Gabriela:	*Punto 30 por… ¡ay! Quince punto veinte por punto treinta porque aquí (señalando el problema anterior) nos dio por punto treinta*

Así, ellas trasladan un dato (30), del problema anterior, que fue formulado en un contexto distinto, a este nuevo problema para poder aplicar un porcentaje a otro porcentaje. Esta decisión puede explicarse así: el 15.20% es un porcentaje, no deja ver cuánto dinero gastan las familias, pero si se le aplica una operación, un porcentaje se puede tornar en una cantidad de dinero, una medida, de la misma forma que antes se convirtió un 30% en $60 mediante una multiplicación.

Montserrat también utiliza, de manera incorrecta, una característica del uso del operador decimal: la colocación del punto. El problema que se le plantea es el siguiente: en una bandera de 400 m^2 se pinta el 50% de rojo, el 25% de azul, el 20% de verde y el 5% de amarillo. Si se quiere fabricar una bandera más grande pero con la misma forma ¿qué porcentaje se debe pintar de cada color?:

Montserrat:	*Ya le entendí, aquí es el veinte por ciento*
Observadora:	*De rojo*
Montserrat:	*De rojo*
Observadora:	*¿Y de azul?*
Montserrat:	*El diez por ciento*
Observadora:	*¿De verde?*
Montserrat:	*El ocho, y el dos (de amarillo)*
Observadora:	*¿Por qué?*
Montserrat:	*Porque aquí nada más le… (Colocó un punto decimal a un lugar a la derecha de cada los números 200, 100, 80 y 20, que corresponden a las áreas de cada color en la primera bandera)*
Observadora:	*¡Ah! Le pones un punto*

Montserrat asiente

Al parecer Montserrat siente que es necesario hacer algún tipo de transformación: el problema sería demasiado simple si los porcentajes fueran los mismos. Entonces hace algo similar a lo que mostramos anteriormente en la tarea de aplicar porcentajes: ajusta con un punto decimal. Esto deja ver la función que le adjudica a la acción de poner el decimal, como una artimaña para lograr que la respuesta sea creíble (después de todo, esas manipulaciones casi mágicas del punto se enseñan en la escuela. Por ejemplo, para multiplicar decimales se multiplican los enteros y después se corre el punto, para dividir se quita el punto y se ponen ceros, etc). Dicha propiedad parece tener más peso que la necesidad de estudiar las nuevas exigencias que le plantea el cambio en el tipo de tarea o el cambio del registro numérico al gráfico.

Así, al igual que en la aplicación del cuestionario, podemos distinguir cierta dificultad para discernir las condiciones bajo las cuales se puede utilizar el operador decimal, o más precisamente, una de las reglas que lo constituyen: la colocación del punto.

Cabe preguntarse si estos usos mecánicos del algoritmo constituyen una manera de proceder que los alumnos aprenden en la escuela para poder desempeñarse en ella, ante la falta de opciones, ante la imposibilidad de una mínima comprensión. Por otro lado, el propio diseño de las situaciones que se plantearon pudo influir en la manera de abordarlas por parte de los alumnos, puesto que, a partir de los resultados de los cuestionarios y las entrevistas, asumimos como punto de partida que habría ciertos aspectos de esta noción que ya serían conocidos para los estudiantes. Sin embargo, son varios los alumnos que le otorgan al porcentaje una significación precaria, de tal manera que las situaciones les abrían escasas posibilidades para elaborar procedimientos a partir del establecimiento de relaciones entre los datos y, ante este hecho, quizá tuvieron que acudir a recursos como evocar un conjunto de reglas inconexas o buscar una combinación de los cuatro algoritmos básicos que produzca un resultado factible.

Finalmente, queremos matizar un poco lo anterior diciendo que estos mismos alumnos mostraron, a partir de la resolución de diferentes tareas y de las confrontaciones grupales, otros tipos de procedimientos o de respuestas que parecen evidenciar un sentido más rico que el que se manifiesta en los fragmentos que analizamos en este apartado. Por ejemplo Montserrat, en un momento posterior al que acabamos de mostrar, sugiere conservar los porcentajes: “son los mismos ¿no?, pero (el tamaño es) más chico ¿no?”

3.2.3 Las formas de verificación en las tareas de aplicar porcentajes

En el curso de las sesiones, poco a poco se fue asentando una manera de comprobar si la aplicación de porcentajes se hacía correctamente o no: toda la bandera debe ir pintada. Esta constatación fue tomando diferentes matices, como veremos. Uno de los usos que le conferían los alumnos era como herramienta para rebatir una respuesta, como se ve en el siguiente fragmento:

Problema: una bandera de 400 m^2 de superficie se debe pintar de cuatro colores. El 50% debe ir de rojo, el 25% de azul, el 20% de verde y el 5% de amarillo, ¿Qué área se debe pintar de cada color?

En la confrontación grupal se discute la resolución de dos alumnas, que proponen pintar 200 m^2 de rojo, 100 m^2 de azul, 80 m^2 de verde y 200 m^2 de amarillo.

Maestro: OK, a ver, de éstos, los que dicen que éste es el correcto, ¿qué defecto le ven a éste?

(…)

Jonathan: Que aquí dice cuatrocientos metros y ya, ya, al rojo le puso doscientos y el amarillo doscientos

Maestro: Entre el rojo y el amarillo ya tienen con los cuatrocientos de toda la bandera ¿no?

Jonathan: ¡Sii!

Maestro: Faltaría espacio para éste (el verde) y para éste (el azul)

Este criterio no se usa únicamente para descartar una respuesta, también para corroborarla, como Mario y Fabián, que en el mismo problema, respondieron que se debían pintar 200 m^2 de rojo, 100 m^2 de azul, 80 m^2 de verde y 20 m^2 de amarillo:

Mario: Si estamos bien mira, (Fabián voltea para atender a Mario) porque se hace cuatrocientos, mira, doscientos, más cien trescientos, y ochenta, trescientos ochenta, y veinte, cuatrocientos (“chocan” las manos).

Así, el que la suma de las cuatro aplicaciones coincida con la cantidad inicial es tomada no sólo como una condición necesaria para que el resultado sea correcto, como en el fragmento anterior, sino que también es considerada suficiente.

Después de que se ha explicitado un par de veces en las confrontaciones grupales, esta verificación se traslada de las medidas a los porcentajes. En un problema en el que se pregunta qué porcentaje se debe pintar de cada color en una bandera más grande que la del problema anterior si se desea conservar la misma forma, se discute en la puesta en común alrededor de dos respuestas: unos alumnos consideran que deben ser los mismos porcentajes y otros que deben doblarse. Montserrat utiliza la suma para ver cuál respuesta es correcta:

> *Después de esta confrontación, Montserrat suma 50+25+20+5 (y también 100+50+40+10):*
>
> *(…)*
>
> *Montserrat:* *Ahorita estaba haciendo la suma, a ver cuánto daba*
>
> *Observadora:* *A ver ¿cuánto da?*
>
> *Montserrat:* *Sí, y sí da cien*

Así, este criterio empieza a tornarse muy determinante, cobra más peso que otros aspectos del porcentaje, como por ejemplo, que representa una "misma parte" de diferentes tamaños. Además, en algunos casos en los que un procedimiento presenta ciertas dificultades, la verificación se erige como parte del modo de resolución. Alan y Jonathan, por ejemplo, en el caso de una bandera de 800 m^2 de área, calculan la mitad para obtener el 50% (que se debe pintar de rojo), la cuarta parte para obtener el 25% (azul), y para encontrar el 20% (amarillo) y 5% (verde) desglosan el resto en dos cantidades, 150 y 50:

(…)

Observadora: *¿Y el amarillo?*

Alan: *Y el amarillo… es… (Silencio)*

Observadora: *¿Cuánto te salió?*

Alan: *Ciento cincuenta*

Observadora: *Ciento cincuenta*

Alan: *Bueno ¡calculé!*

Observadora: *Calculaste. ¿Y la verde?*

Alan: *¿La verde? ¡Ah! Este, lo que sobraba*

Observadora: *Lo que sobraba, ¿de qué?*

Alan: *Cuatrocientos, después doscientos, son seiscientos, ciento cincuenta, setecientos cincuenta y lo que sobró*

Más adelante, la observadora cuestiona la manera de asignar 150 al 20%:

Observadora: *¿Por qué no es ciento veinticinco y setenta y cinco?*

(…)

Jonathan: *Sería lo mismo ¿no?*

Observadora: *¿Por qué ciento cincuenta, y no ciento treinta y cinco?*

Jonathan: *Yo digo que sería igual porque ciento cincuenta más cincuenta, son doscientos los que nos faltan, si los sumamos todo, da ochocientos*

Ante la dificultad para determinar la fracción que debe pintarse de amarillo, se recurre a la estimación, cuidando que la suma sea la superficie total. Lo que llama la atención no es el uso de la estimación, sino la sensación de que "sería igual" porque de cualquier forma "si lo sumamos todo, da ochocientos", es decir, de que la constatación a partir de la suma borra a la estimación su carácter de imprecisión, de aproximación: se olvida que ésta técnica permite obtener un rango en el que se encuentra la respuesta, pero no determinarla con exactitud.

Finalmente, procedimiento y comprobación llegan a intercambiar papeles, como en el caso de Montserrat, quien al principio utiliza el operador decimal para calcular porcentajes, pero después, cuando necesita aplicar el 50, 25, 20 y 5% a 800, desglosa esta cantidad en cuatro partes, de mayor a menor:

Montserrat: *Aquí va cuatrocientos*

Observadora: *¿Cómo sabes que aquí van cuatrocientos?*

Montserrat: *No sé, porque aquí es el número más grande y ya los demás puede ser cien, ciento cincuenta,…*

Observadora: *A ver ¿cuánto le vas a poner aquí?*

Montserrat: *Aquí, no sé todavía*

(…)

Montserrat suma 400+200+150+100 y cuando ve el resultado tacha todo.

Observadora: *A ver ¿por qué tachaste esto? ¿Qué estabas…? ¿Aquí, por qué pusiste cuatrocientos, doscientos, ciento cincuenta y cien?*

Montserrat: *¡Ah! Para ver si daban cien*

Observadora: *Ah OK ¿sumándolos?*

Montserrat: *Sí*

Observadora: *Seiscientos, setecientos cincuenta, ochocientos cincuenta. ¡Ah! Y por eso tachaste*

Montserrat: *Ajá*

En sus hojas hay varias sumas, una de ellas es:

$$\begin{array}{r} 400 \\ 250 \\ 100 \\ \underline{50\ \ .} \\ 800 \\ \underline{x\ .5\ \ .} \\ 400.0 \end{array}$$

Finalmente, en los resultados escribe 400, 200, 150 y 50

Es posible que la última multiplicación —de 800 por 0.5— responda esta vez a la necesidad de verificar, no de resolver, pues ya obtuvo una suma de cuatro cantidades, en orden descendente, que da 800. De ser así, lo que antes utilizaba como una manera de resolver se vuelve criterio de verificación, —tal vez por esta razón cambió el 250 a 200, el resultado que arroja el operador decimal. Aunque no es claro el mecanismo, sí parece que la comprobación y el procedimiento se intercambian varias veces el lugar, se retroalimentan.

En síntesis, la forma de verificación que cobra más presencia se da en el registro numérico y consiste en asegurar que la suma de las partes coincida con el total. Este procedimiento aparece tanto en las tareas que implican medidas como en las que implican porcentajes, y se utiliza para desechar respuestas incorrectas, o por el contrario, para confirmar su veracidad. O bien, deja de ser un recurso de validación y se convierte en una técnica de resolución. En este último caso, puede ser solamente parte de esta técnica —sirve para obtener buenas estimaciones— o la técnica completa: es el caso en el que la manera de resolver y la verificación se intercambian[62]. Nos parece que, a partir de la amplitud con la que es utilizada, esta manera de validar se revela como importante: si bien es necesario un trabajo sobre ella para estudiar en qué casos es suficiente y en cuáles no, el hecho de trabajar con todas las partes en las que se divide el todo —cuatro porcentajes que agotan el 100%— es una característica de la tarea que resulta más fecunda que implicar un solo porcentaje.

Otra forma de verificación que emergió —y que logramos ver especialmente en los primeros intentos de dos alumnas por recuperar un procedimiento para aplicar porcentajes— consiste en ejercer una regulación del resultado a partir del contexto del problema: en ciertas ocasiones los alumnos rechazan una respuesta porque no es factible en dicho contexto[63].

Finalmente, cabe destacar que el registro gráfico resultó más problemático de lo que habíamos previsto en el análisis a priori: no logramos constituirlo como un recurso para ejercer cierto control sobre los resultados. En el siguiente apartado intentamos mostrar algunos elementos que pueden ayudar a explicar el papel que jugó el registro gráfico.

3.2.4 El tránsito entre el registro gráfico y el numérico

En la segunda sesión se planteó a los alumnos el siguiente problema:

“El dueño de un equipo de fútbol mandó fabricar tres banderas gigantes, de distintos tamaños, para colocarlas en el estadio.

d) Para hacer la mediana, se debe pintar el 50% de rojo, el 25% de azul, el 20% de verde y el 5% de amarillo. Si toda la bandera tiene una superficie de 400 metros cuadrados, ¿Qué área tendrá cada color?

e) Representa en el siguiente rectángulo la parte que se debe pintar de cada color

---

[62] Esta tendencia es común cuando se hacen matemáticas: una forma típica de verificar es rehacer la tarea aplicando otra técnica. En algunas ingenierías didácticas que estudian el aprendizaje de la división se encuentra un ejemplo de esto: los niños comienzan a emplear la multiplicación –es decir, el procedimiento que se quiere favorecer en el diseño- como una forma de verificar técnicas más elementales. La diferencia entre este ejemplo y el del porcentaje que estudiamos aquí radica en que el procedimiento de sumar las cuatro partes no es adecuado para resolver ni para garantizar absolutamente que una respuesta sea correcta, en términos estrictos sólo ofrece la posibilidad de descartar respuestas incorrectas.

[63] Por ejemplo, 20 000 es demasiado grande para representar una parte de una bandera cuya superficie es apenas 400 m^2

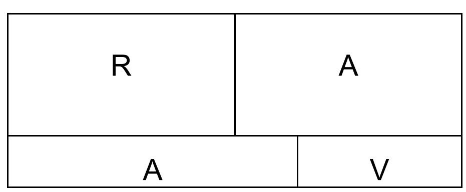
f) Los resultados que obtuviste en la pregunta **a)** ¿corresponden bien con las partes que coloreaste en **b)**? Si te parece que no, corrige tus resultados."

El inciso a) se inscribe en el registro numérico mientras el b) en el gráfico[64]. Al diseñar este problema, suponíamos que entre los alumnos que manifestaran una concepción del porcentaje como cantidad absoluta en el registro numérico, probablemente varios manifestarían, en el registro gráfico, una concepción del porcentaje como fracción, es decir, como una parte del total. El juego entre lo gráfico y lo numérico podría ayudar a hacer entrar en conflicto las dos concepciones, fortaleciendo la segunda. Esta previsión no se corroboró durante la implementación, pues en realidad a partir de los datos colectados sólo encontramos tres formas de interacción entre los dos registros: una, que ya hemos mostrado, en la que la técnica del operador fraccionario es trasladada de un registro a otro —pero no para verificar, sino para resolver tareas—, otra donde es el registro numérico quien regula el gráfico, y otra donde el trabajo en ambos parece estar desconectado. Cabe destacar que estas formas pueden ser puestas en juego por un mismo alumno, en diferentes momentos.

El registro numérico controla el registro gráfico

En el primer inciso del problema recién descrito, Margarita y Montserrat obtuvieron que las áreas pintadas son: rojo 200 m^2, azul 100 m^2, verde 80 m^2 y amarillo 200 m^2. Después, dibujaron de la siguiente manera:

Montserrat: *¿Así puede ser? (muestra el siguiente dibujo)*



Observadora: *A ver, ¿por qué?*

Margarita: *(a la observadora) El doscientos es mucho, y el cien es poquito, ochenta es poquito, y doscientos es…*

Observadora: *Ajá ¿y entonces?*

Margarita: *Le vamos a pintar, uno poquito, uno mucho…*

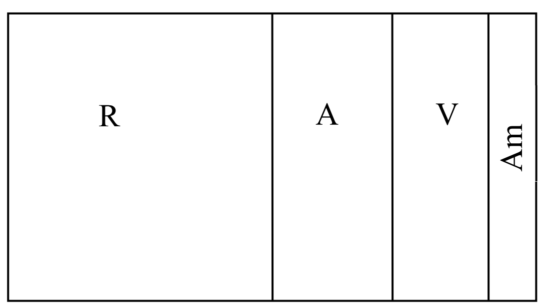
[64] Ver el Capítulo 1, *el tipo de registro.*

Ellas hacen el dibujo buscando que sea congruente con los resultados numéricos desde el punto de vista del orden: la parte de rojo, que son 200 m^2, tiene que ser mayor a la de azul, que son 100 m^2, e igual a la amarilla, que también mide 200 m^2. Las relaciones entre los números que se intentan conservar en la representación gráfica son de carácter cualitativo, permiten ordenar de mayor a menor.

En la confrontación grupal alguien observa que sus resultados numéricos son erróneos, pues entre los 200 del rojo y los 200 del amarillo ya se cubre toda la superficie de la bandera. Una vez admitido este error —señalado por alguien más—, Montserrat es capaz de identificar por cuenta propia que el dibujo también es incorrecto:

Montserrat: El (dibujo) de nosotros no está bien (…) porque, ése (el amarillo) era el veinte y nosotros pusimos doscientos, y dibujam… bueno, lo pintamos más de lo claro, que era (…) ahí pusimos, supuestamente el A es doscientos pero es veinte y tiene más y tiene que ser menos (…) porque, está, está, tiene más, más, este, coloreado, colores, y tiene que ser menos porque es veinte

Aunque todavía no logra explicarse su equivocación en el registro numérico —la admite porque lleva a un absurdo—, sí puede identificarla en el gráfico, pues mantiene el mismo razonamiento: si el amarillo "era el veinte y nosotros pusimos doscientos", entonces la región del rectángulo que se le asignó también debe ser menor. Después, puede corregir el error, una vez establecido el resultado numérico:



En la siguiente sesión se retoma este problema pero la pregunta ahora es: *si se quieren fabricar otras dos banderas, pero una más pequeña y otra más grande ¿Qué porcentaje de cada color se tiene que pintar en las otras dos banderas si se quiere conservar la forma?*

En la resolución se puede ver cierto deslizamiento de los resultados del registro numérico al gráfico:

Margarita: *Ah pues son los porcentajes cincuenta…*

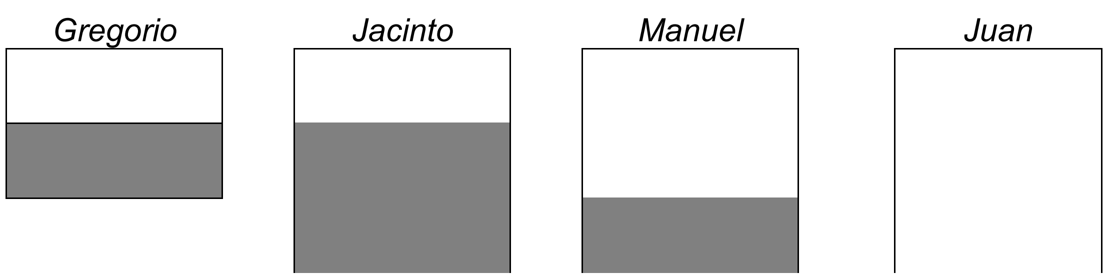
Observadora: *Hay que poner los porcentajes ¿qué porcentaje va ir aquí de rojo, de azul, de verde y de amarillo?*

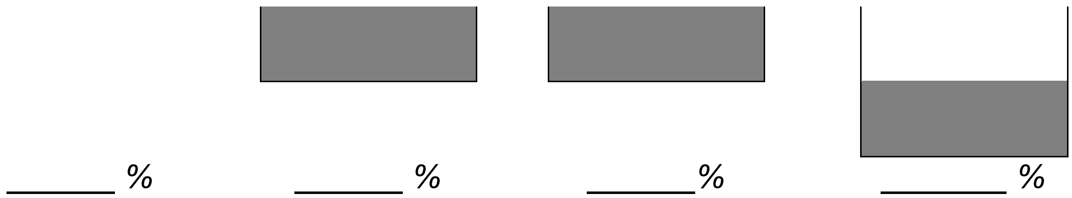
Montserrat:	*Ah ¿cómo éstos, no?*
Margarita:	*¿Cincuenta por ciento? (Risas) es el cincuenta por ciento, ¿no? yo le voy a poner igual*
(Silencio)	
(…)	
Margarita:	*Para mí es que es igual ésta*
(Silencio)	
Margarita:	*¿Cómo cuánto es la mitad de, tres punto cinco por ciento? (…) son tres punto cinco aquí (el largo de la bandera mediana), pero cuánto es la mitad*

Además de conservar los porcentajes, Margarita sabe que debe pintar la mitad de rojo. Esto se puede interpretar a partir de dos posibles mecanismos. El primero de ellos empieza por una traslación que la alumna hace de los porcentajes de un problema que acaba de resolver (se dan los cuatro porcentajes y se pide aplicarlos a 400 m^2): "lo voy a poner igual". Este transporte de los porcentajes de un problema a otro se lleva a cabo sin mayores trámites, y además, recupera algo que se estableció en la puesta en común en el primer problema: el 50% es la mitad. La segunda interpretación es que, para conservar intacta la forma de la bandera, ella colorea la mitad, que como se vio en la discusión anterior, es el 50%. Las risas después de que Margarita pregunta "¿cincuenta por ciento?" sugieren más bien la primera posibilidad, como si pensaran que esa respuesta es demasiado fácil para ser correcta. De ser así, se da el mecanismo inverso al previsto: en lugar de que para preservar la figura se llegue al mismo porcentaje, al trasladar el porcentaje se acaba conservando la forma.

Veamos un tercer ejemplo. En la última sesión se plantea a los alumnos el siguiente problema:

"Varios agricultores decidieron usar una parte de sus terrenos para sembrar una nueva variedad de maíz, la variedad A. Los siguientes rectángulos representan los terrenos de cuatro de ellos y la parte gris en cada uno representa lo sembrado con maíz A. Anota debajo de cada rectángulo el porcentaje de su terreno que sembró cada uno con el maíz A."





Este problema se presenta únicamente en el registro gráfico (no aparecen las medidas de los terrenos). El siguiente fragmento muestra cómo una dificultad para Montserrat y Margarita estriba precisamente en la ausencia de datos numéricos:

Montserrat: *¿Tenemos que calcularlo? O qué… porque… es que no nos dicen una… una… medida*[65]

Observadora: *No les dicen una medida, entonces sin tener la medida ¿qué pueden decir?*

(…)

Observadora: *(a Margarita) ¿Por qué tú dijiste que era el cincuenta aquí?*

Margarita: *Porque es la mitad*

(…)

En el terreno de Gregorio las dos contestan “50%”, porque “es la mitad”. En el de Juan, Montserrat escribe “25%”, porque considera que la región pintada es la cuarta parte. Y en el de Jacinto ambas estiman:

Margarita: *¿Éste será el no-ven-ta y… cinco por ciento?*

Montserrat: *Setenta ¿no? Porque aquí sobra (inaudible)*

Margarita: *(interrumpiendo) ¿Pero cuántos tiene cada cuadro?*

Montserrat: *No sé, es lo que yo...*

Observadora: *¿Qué pasó?*

Montserrat: *Es que aquí... ¿cuánto?*

Margarita: *¿Cuánto mide todo el terreno?*

Montserrat: *Si... todo el cuadro... todo el terreno*

Observadora: *No sabemos (risas)*

Montserrat: *Entonces ¿le podemos poner doscientos y eso, aunque no...? por ejemplo, este puede ser que mide doscientos*

(...)

Margarita: *(con tono de sorpresa) ¿Qué también será el cincuenta por ciento esto?*

(…)

[65] Si bien es posible tomar una regla y medir el largo del rectángulo, ellas saben que es una representación, es decir, nos parece que se refieren a que no conocen el área total, o el largo del terreno, como en el problema anterior, donde la superficie es de 400 metros cuadrados.

Llama la atención la reiterada petición de información numérica, cinco veces solicitan una medida. Como se ve en los fragmentos anteriores, sus resoluciones en el registro gráfico están fuertemente ligadas a las del numérico: pasan de los porcentajes a los números —resultados de las aplicaciones— y de ahí a la representación gráfica. Así, en este problema no tienen la información numérica que para ellas es intermediaria entre los porcentajes y los terrenos: la nueva tarea les exige una asociación directa. Por ello, tienen la sensación de que el problema está incompleto, o quizás de que no tienen herramientas para abordarlo. No obstante, logran un acercamiento a las soluciones poniendo en juego relaciones que no eran visibles para ellas cuando utilizaban el operador decimal en el registro numérico: el 50% es la mitad, el 25% la cuarta parte, y la relación cualitativa entre la región gris y la blanca, que una equipara con 70% y 30% y otra con 95% y 5%. A pesar de esta resolución, no dejan de sentirse inseguras, vuelven a manifestar que se requiere saber "cuánto mide todo el terreno". Incluso piensan en resolver su conflicto asignando una medida cualquiera, probablemente sin la conciencia de que la solución sería la misma para cualquier medida, sino simplemente reduciendo el problema a un caso particular: "entonces ¿le podemos poner doscientos y eso, aunque no...?". La asignación del número 200 al terreno también puede deberse a que piensan que existe una especie de trampa en el contrato didáctico, es decir, que el maestro espera que inventen la cantidad. Finalmente, también se percibe en Margarita cierta duda sobre la intencionalidad del profesor: quizás éste espera que descubran que es el mismo porcentaje en todos los rectángulos ("¿Qué también será el 50 por ciento esto?"), como había sucedido en el problema anterior (*En una bandera se pinta el 50% de rojo, el 25% de azul, el 20% de verde y el 5% de amarillo. ¿Qué porcentaje de cada color se tiene que pintar en otras dos banderas de distintos tamaños si se quiere conservar la forma?*).

Nos interesa comentar un último ejemplo más. Cuando en la confrontación grupal se discute la segunda parte del problema que se refiere en la introducción de este apartado (aplicar el 50%, 25%, 20% y 5% a un rectángulo), surge una dificultad en el tercer porcentaje, pues no encuentran la fracción correspondiente. Guillermo insiste un par de veces en volver al operador decimal: "nomás este serían cuatrocientos entre,…. por, punto veinte". Es interesante que este alumno no se percate de que en el registro gráfico, la multiplicación que plantea no tiene una utilidad inmediata. Al parecer, la sensación de estancamiento en lo gráfico lo hace retornar al numérico, sin notar que en este caso no es posible de la manera que propone.

Hemos visto cuatro ejemplos en los que las resoluciones en el registro gráfico se apoyan en el numérico: el uso de los resultados numéricos como punto de partida para resolver y regular lo gráfico, el traslado inmediato de los datos del registro numérico al gráfico, la sensación de que no es posible resolver en lo gráfico sin conocer las medidas, y la intención de aplicar una técnica útil en lo numérico —sin ajustarla— a lo gráfico.

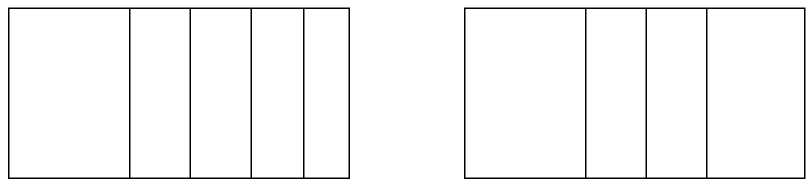
Desconexión entre los dos registros

Veamos ahora cómo resuelven Mario y Fabián el problema de la bandera referido en la introducción de este apartado (calcular el 50%, 25%; 20% y 5% de 400, y marcar los cuatro porcentajes en un rectángulo). Ellos efectúan la aplicación numérica de los porcentajes a partir del operador decimal, y al parecer estiman, de una manera rápida, la aplicación gráfica:

Con una regla miden el largo del rectángulo, son 4.5 centímetros
Fabián: *Pérate*
Mario: *¡Saca la regla! ¡Ah! ¡Yo traigo regla!*
(Los dos buscan en sus mochilas, Fabián saca dos reglas y ambos miden el largo del rectángulo)
Fabián: *Cuatro punto cinco*
Mario: *Sí, mide cuatro punto cinco*
Fabián: *A ver ¿cuántos son? ¿Cuatro (colores)?*
Mario: *Son cuatro. No, mira, (tiene la regla sobre el largo del rectángulo y va marcando diferentes puntos) éste es el doscientos por ciento ha de ser como punto, uno punto cinco, y después el otro por aquí de dos puntooo y el otro por aquí, y el otro*
Fabián: *¿Cuántos son? dos, cuatro. A ver, es uno…*
Mario: *A ver, aquí a lo mejor sería aquí (chifla), por el dos, éste aquí, éste aquí*
Fabián: *Así*
Mario: *Éste aquí, éste aquí ¿cómo?*
Fabián: *Mira, así güey, así, así y así*
Mario: *A ver a ver, ponle, pon la regla*
Fabián: *A ver*
Mario: *Uno punto cinco, dos punto cinco*
Fabián: *¡No! uno punto seis*
Mario: *¿Uno punto seis?*
Fabián: *Ajá*
Mario: *Uno puntooo seiis, ya*
Fabián: *Después, dos…*
Mario: *¿Punto cinco?*
Fabián: *Punto cuatro*
Mario: *Dos punto cuatro*
Fabián: *Luego tres punto dos*
Mario: *Tres punto dos*
Fabián: *Y… tres puntooo*
Mario: *¿Nueve?*
Fabián: *Sí, nueve*

Dibujan lo siguiente:

Mario *Fabián*



Las franjas que dibuja Mario miden de ancho 1.6, 0.8, 0.8, 0.7 y 0.6 cm. Y las de Fabián miden 1.6, 0.8, 0.8 y 1.3 cm.)

Es curiosa la importancia que le conceden al uso de la regla y que obtengan medidas tan precisas, siendo que estiman el ancho de las franjas. Fabián incluso corrige por un milímetro una respuesta de Mario: “uno punto cinco”, “¡no! uno punto seis”. Poco después de que Fabián reconoce cierta incertidumbre: “aquí a lo mejor sería por el dos”, él mismo exige cierta confirmación: “a ver ponle, pon la regla”. ¿Acaso el uso de la regla borra para ellos el carácter inexacto de la estimación? Después parecen percibir la ligereza con la que acaban de determinar sus medidas, cada uno observa un error evidente en el dibujo del otro:

Mario: *(los dos están revisando el rectángulo de Mario) Cuatrocientos ¡ups! cuatrocientos ¡ah no! cincuenta, veinticinco…*

Fabián: *Te pasaste*

Mario: *Veinte. (Silencio. Risas de Fabián) Veinte y cinco. No porque mira (voltean los dos a revisar el rectángulo de Fabián) aquí le pusiste más al de cinco por ciento.*

Fabián marca a Mario que dibujó una franja de más, pues sólo son cuatro colores: “te pasaste”. Éste a su vez, le hace ver a Fabián que la franja que asignó al color amarillo es más grande que la azul y la verde: “aquí le pusiste más al de cinco por ciento”. En la siguiente sesión, cuando se retoma este problema, dibujan más cuidadosamente: se aseguran de que sólo sean cuatro franjas y que los anchos varíen de forma decreciente. No obstante, aún en esta ocasión lo que buscan es conservar el orden de los porcentajes, pero no las razones, ni entre porcentajes ni entre medidas. La regulación es entonces cualitativa, a partir de la comparación entre los porcentajes y las franjas del terreno, las medidas obtenidas en el registro numérico no son tomadas en cuenta. Por ejemplo, la parte de la bandera asignada al 50% es menor a la mitad, y Mario lo hace explícito ante el maestro, a quien le dice que dibujaron “casi la mitad”. Cuando Alan le pregunta, en voz baja, “¿por qué no a la mitad?”, Mario responde: “no sé güey”. Es decir, se rige por el dibujo, y esto no lo obliga a notar que “casi a la mitad” contradice su resultado numérico, pues 200 es la mitad de 400. Nos parece que esto puede explicarse porque las técnicas utilizadas en cada registro son diferentes: en el gráfico estiman tomando en cuenta únicamente la relación de orden (50%>20% entonces le corresponde un área mayor), mientras que en el numérico recurren al operador decimal. En el primer registro hay una vinculación entre porcentajes y superficies rectangulares, y en el segundo entre porcentajes y medidas. En ninguno de los dos estos estudiantes destacan de manera clara la relación parte-todo, no al menos bajo la forma de fracción (la mitad, la cuarta parte). Así, las medidas y las franjas de bandera se mantienen aisladas.

Después, como se muestra en apartados anteriores, el tránsito entre los dos registros se vuelve posible a partir de la incorporación del operador fraccionario —en el caso del 50% y 25%— que funciona tanto en lo gráfico como en lo numérico. (Ver el apartado "*distintas formas de encuentro entre estrategias*"). No obstante, cabe observar que en la información recabada no encontramos ninguna evidencia de que el registro gráfico sirviera para regular los resultados del registro numérico, como predice el análisis a priori. Tres elementos pueden ayudar a explicar esto: en primer lugar, la poca importancia que los alumnos parecen otorgarle al registro gráfico. Mario y Fabián dan señales de que se toman estas tareas con menor seriedad, y en cierta medida, esto también se percibe en las primeras confrontaciones grupales. En segundo lugar, hay alumnos, como Montserrat y Margarita, cuyo conocimiento sobre el porcentaje parece estar fuertemente atado al registro numérico, y en particular al operador decimal. Y en tercer lugar, los estudiantes también dejan ver algunas contradicciones en el registro gráfico, que se analizan más adelante.

El carácter subvalorado que se le confiere al registro gráfico respecto a otros se ha encontrado en varios estudios. Bosch y Chevallard (Bosch, 1994; Chevallard, 1996; Bosch y Chevallard, 1999; citados en Sadovsky, 2003) señalan que suele establecerse una jerarquía entre los diferentes registros: a los objetos que pertenecen al registro de lo escrito se les otorga un estatuto de instrumentos, es decir, son tratados como herramientas que permiten llevar a cabo cierto trabajo, construir técnicas para resolver tareas, mientras que los objetos que pertenecen a los registros gráfico y oral, si bien son movilizados en la actividad matemática, se consideran más bien como "acompañantes", no como instrumentos.

Los fenómenos específicos que hemos identificado, la predominancia del registro numérico sobre el gráfico o su desconexión, probablemente pueden vincularse con fenómenos más amplios. Artigue (1995) explica, a partir de un estudio a propósito de las ecuaciones diferenciales en primer año de universidad, algunas de las restricciones que dificultan la extensión de la enseñanza del cuadro[66] algebraico, que suele ser privilegiado, al geométrico: una larga predominancia del cuadro algebraico en el desarrollo histórico de la teoría, ciertas dificultades ligadas al surgimiento y desarrollo de la geometría y a su transposición didáctica a la enseñanza, la complejidad de orden cognitivo que implica la movilidad entre cuadros, la fuerte tendencia a basar la enseñanza en algoritmos, y el status inframatemático que suele conferírsele al cuadro geométrico.

[66] Esta investigadora no toma la noción de registro sino de cuadro, propuesta por Douady.

3.2.5 Manifestaciones de coexistencia del porcentaje visto como medida y como relación

Al igual que en la aplicación del cuestionario y las entrevistas, en varios alumnos parecen convivir, sin que necesariamente entren en conflicto, concepciones contradictorias del porcentaje: por un lado están las acepciones correctas de esta noción como fracción, es decir, como una parte del entero, y como operador decimal, y por otro lado, la interpretación errónea del porcentaje como cantidad absoluta, es decir, como una medida. En la implementación de la secuencia didáctica esto se manifestó de diferentes maneras, que se analizan a continuación.

A) En el uso del lenguaje

Como ya se ha podido ver, en varios momentos los alumnos mezclan, al hablar, los términos que se utilizan para referirse a un porcentaje y a una medida. Mencionaremos algunos ejemplos. En una ocasión, durante la discusión grupal sobre un problema, el maestro recuerda que se han olvidado de llenar la primera columna —de una tabla— en la que se piden porcentajes: "es cierto, nos faltó aquí poner las cantidades ¿no?". Un alumno dice en voz baja: "los porcentajes". Da la impresión de que el alumno, indirectamente —más hablando para sí que para los demás—, corrige al profesor, como si estuviera pidiendo hacer una distinción para evitar confusiones: "cantidad" se asocia a un número, pero en ese momento se está trabajando con porcentajes.

En el mismo problema, donde se pide anotar porcentajes en una columna y los resultados de sus aplicaciones en otra, Fabián ya conoce las medidas: 200, 100, 80 y 20 metros cuadrados. A la hora de vaciar los resultados, le comenta a Mario: "ahí tenemos que ponerle el porcentaje güey, *doscientos, cien*…". Nos parece que dice "porcentaje" para referirse al resultado de su aplicación. Esto deja ver cierta ambigüedad en el uso cotidiano del término "por ciento": cuando decimos "cincuenta por ciento" nos referimos a una cantidad relativa, pero la frase "el cincuenta por ciento *es* doscientos" alude más bien a una absoluta, al resultado de la aplicación del porcentaje. Esta ambigüedad no es exclusiva de Fabián, más bien, ambas acepciones suelen ser aceptadas socialmente.

Margarita, constantemente dice frases como: "vamos a multiplicar cuarenta, cuarenta por ciento, *cuatrocientos por ciento*" (400 es la superficie a la que se debe aplicar el 50%), "es *doscientos por ciento* ¿no?" (200 es el resultado de la aplicación anterior), "tres punto cinco *por ciento*" (mide con la regla el largo de un rectángulo, y encuentra que son 3.5 cm.) “son aquí todos cien…*cien metros de terreno*” “según yo que aquí todo el terreno *mide* cien” “es cien *por ciento* todo” (alude a la correspondencia entre el total y el 100%). Es decir, da la impresión de que emplea los términos “por ciento” y “metros” de forma indistinta, a veces correcta y otras incorrecta.

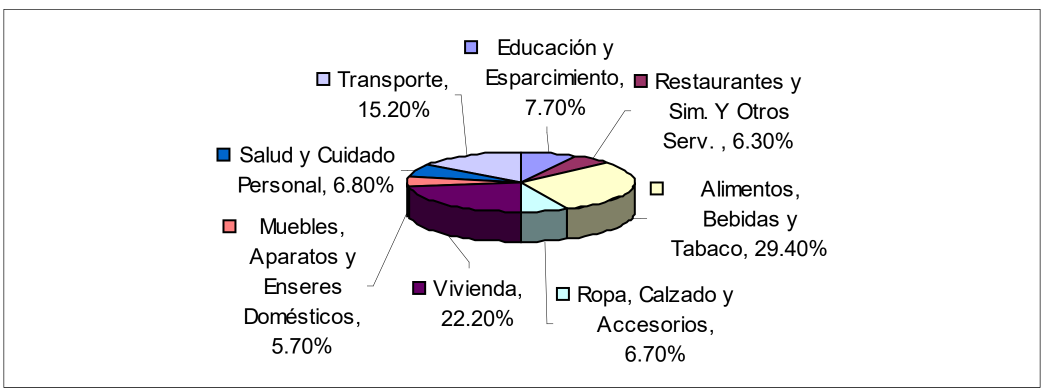
Da la impresión de que el caso de Fabián —que se muestra dos párrafos arriba— y el de Margarita son diferentes, es decir, de que en el primero el uso equívoco de las palabras es más bien por descuido, pero en cuanto a Margarita, la frecuencia y la manera con la que lo hace (también en las estrategias parece alternar continuamente las definiciones como medida y como relación), sugieren que debe haber una yuxtaposición más profunda de las dos concepciones. Cabe preguntarse incluso si el signo “%” marca para ella alguna diferencia.

B) En las respuestas a una pregunta directa: ¿un porcentaje permite ver una medida?

En la primera sesión se plantea a los alumnos el siguiente problema:

“Los datos de la siguiente gráfica se estimaron a partir de la información que numerosas familias mexicanas proporcionaron en una encuesta realizada por el INEGI en 1989. La encuesta se hizo sobre gastos al año.

“Ponderaciones en el Gasto de la familia Mexicana”



a) ¿La gráfica permite saber cuanto dinero gastan, en promedio, las familias mexicanas en transporte? ______
Si tu respuesta es afirmativa, indica cuánto gastan: ___________________

b) ¿La gráfica permite saber en cual de los rubros que aparecen gastan más las familias? _____ Si tu respuesta es afirmativa, indica en qué gastan más: ________”

El inciso a) no resulta trivial, como se ve en la discusión entre Claudia y Guadalupe:

Guadalupe: *Es sí*

Claudia: *Por eso ¡sí! (lee la segunda pregunta:) si tu respuesta es afirmativa*

	indica cuánto gasta ¿Quince punto veinte? ¿Qué es eso? ¿Qué es eso? (risas)
Guadalupe:	*Ese es el por ciento…* y no los promedios*, tan siquiera*
Claudia:	*¡Ah! Entonces no dice cuánto gasta, la gráfica, no dice. ¡Uy!*
Guadalupe:	*Tú dices que sí, te dije que era no*

Claudia borra la respuesta "quince punto veinte" que había anotado y escribe "no se puede"

Para ellas inicialmente no es claro el tipo de información que se desprende de un porcentaje, al menos al empezar a analizar esta situación. El 15.20% aporta algo sobre el gasto en transporte: es un dato que se asigna únicamente a este rubro, no a los demás. Quizás por eso la respuesta inmediata que dan es "sí". Pero una vez que la pregunta se piensa con más cuidado, no es evidente qué deja ver un porcentaje: "¿qué es eso?". Después reconocen que no corresponde a la cantidad de dinero que se gasta: "ese es el por ciento… y no los promedios, tan siquiera", de ahí que cambien de opinión.

A nivel grupal surgen dudas similares. Algunos alumnos afirman categóricamente que sí —15.20% expresa la cantidad de dinero que gastan las familias—, otros que no, y otros se muestran dudosos. Josué, para rebatir a los primeros, argumenta: "(la pregunta del problema) está pidiendo en dinero no está pidiendo porcentaje", es decir, puesto que el dato que se tiene es un porcentaje, no se puede saber la cantidad de dinero que se gasta, lo que es soportado por algunos, aunque cuando el maestro vuelve a preguntar: "¿está pidiendo dinero o es suficiente el porcentaje?" una alumna intenta conciliar: "las dos cosas".

Más adelante, en la discusión sobre el inciso b), el maestro establece implícitamente que observar las palabras con las que se formula un problema puede ser un criterio para distinguir el tipo de información que se puede inferir: "¿aquí esta pidiendo dinero o no?", después ratifica: "ahí no aparece la palabra dinero ¿de acuerdo?". En el siguiente fragmento se muestra cómo, al retomar el inciso a), recupera este criterio e insiste en él cuando una alumna se muestra dudosa:

Maestro:	*Regresemos a pelearnos con el inciso a) ¿ahí piden pesos o piden porcentaje?*
Alumnos:	*¡Pesos!*
Alumna:	*Pero también se podría…*
Maestro:	*Pero también se podría. Pero en esta pregunta en específico ¿pedirán pesos?*
Alumna:	*Pero aquí dice promedio*

Maestro:	*A ver, perdón, dime. Las gráficas permiten saber cuánto gastan, en PROMEDIO. Porque dicen en promedio su compañera dice que es suficiente dar porcentajes, porque ahí dice por promedio*
Alumno:	*Siiii*
Maestro:	*¿De acuerdo? OK bueno*

La duda de la estudiante va en otra dirección: la palabra "promedio" es problemática, pues evoca al porcentaje. Es difícil establecer la diferencia: el promedio vincula una cantidad absoluta común a las diferentes familias, mientras que el porcentaje representa una relación entre el dinero total y el que se gasta en transporte, interior a una familia hipotética.

Así, se puede decir que no es evidente la tarea de distinguir qué indica un porcentaje, qué un promedio y en qué ocasiones se puede conocer la cantidad de dinero.

C) En la comparación de porcentajes que provienen de totales distintos

En la primera sesión el maestro hace una pregunta a los alumnos, que les exige comparar dos porcentajes que provienen de totales distintos:

Maestro:	*(…) La clase alta destina veintiuno punto sesenta y cinco por ciento de sus ingresos a alimentación, y (...) las familias en extrema pobreza destinan el cuarenta y ocho punto sesenta y nueve por ciento de sus ingresos a alimentación. ¿Eso quiere decir, escuchen bien la pregunta, eso quiere decir que éstos (las familias en extrema pobreza) gastan más que éstos (familias de clase alta) en alimentos?*
Alumnos:	*¡¡¡Siiiii!!!*
Maestro:	*O sea que cuando éstos van al super si éste (extrema pobreza) gasta mil pesos ¿éste (clase alta) solo gasta quinientos?*
Alumna:	*Si*
Maestro:	*¿Si? (como sorprendido) ¿están seguros?*
Alumnos:	*¡Nooo!*
Maestro:	*¿Qué quiere decir entonces? (a una alumna) A ver ¿qué quiere decir?*
Romina:	*Porque sería cien por ciento y cuarenta y ocho es este, como se llama, es menos, y veintiuno por ciento es, no, es más, y veintiuno por ciento es menos*
Maestro:	*OK a ver, allá atrás*
Iván:	*Se supondría que casi casi gastarían lo mismo, pero por lo económico, o sea, los ricos gastarían menos y los pobres más pero sería lo mismo porque… son diferentes… este, cómo se llama…*

Maestro:	*¿Son diferentes qué?*
Alumnos:	*Propiedades, recursos*
Maestro:	*Ajá*
Iván:	*(intenta terminar de explicar) Gastarían lo mismo pero de diferentes (inaudible)*
Maestro:	*O sea los ricos gastarían mil pesos y los pobres mil pesos cada vez que van al super*
Alumnos:	*¡Nooo!*
Josué:	*Se supone que por lo que, se supone que por lo que ganan los de la clase alta y los de la clase baja, supongamos que los de clase alta, ganan mil pesos y los de la clase ba… eh los de extrema pobreza ganan doscientos, de esos doscientos ellos gastan ciento cincuenta pongamos*
Maestro:	*Ajá, vamos a ponerle. Que es mucho*
Josué:	*Ajá, y los ricos gastan este… quinientos pesos, máximo para el super y eso*
Maestro:	*¿Escucharon lo que dijo su compañero?*
Alumnos:	*Siii (como cansados)*
Maestro:	*¿O se los repito?*
Alumnos:	*Nooo*

Varios alumnos responden que sí gastan más las familias en extrema pobreza[67]. La sorpresa del maestro parece provocar una modificación de la respuesta: "¡noooo!". No obstante, Romina intenta recuperar la primera posición: 48% es mayor que 21%. Es posible que ella compare los dos porcentajes despegándose del contexto, y esté implícitamente asumiendo que los dos totales son iguales, como cuando se compara ½ con 1/3 revisando únicamente las relaciones numéricas, pues aclara que "sería cien por ciento". También es posible que ella, o alguno de los compañeros que comparten su respuesta, estén tratando a los porcentajes como absolutos, asumiendo que basta con comparar 48 y 21, sin remitir al 100%. Cualquiera que sea el caso, el titubeo de Romina ("cuarenta y ocho es este, como se llama…") parece reflejar cierta inseguridad sobre la sentencia que está formulando.

[67] Es difícil pensar que los estudiantes realmente consideran que las familias en extrema pobreza pueden comprar más alimentos que aquellas de clase alta. Su respuesta nos confirma que el reactivo era ciertamente complejo para una primera exploración, quizás por el hecho de implicar porcentajes no enteros, por exigir una comparación entre porcentajes provenientes de totales distintos y porque, detrás de estos porcentajes, implícitamente subyace un promedio. Es posible que estas dificultades hayan tenido más peso que el contexto.

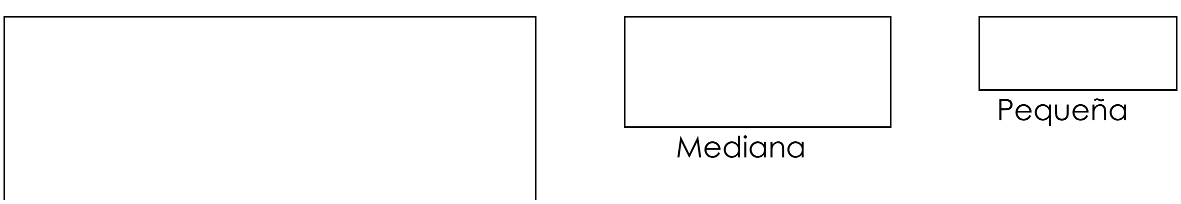
Iván intenta explicar que la comparación de porcentajes, según la cual “los ricos gastarían menos y los pobres más” puede revertirse si se toma en cuenta que, como apuntan otros compañeros, son diferentes “propiedades, recursos”, y concluye que en realidad “casi casi gastarían lo mismo”. Finalmente Josué alcanza a precisar el argumento, a partir de la comparación entre los sueldos y los gastos en alimentos de dos familias hipotéticas.

A partir de la participación de Josué, el resto de los alumnos afirma que el problema está claro, no es necesario que se los expliquen de nuevo. Esta reacción puede deberse a que saben que la clase está por terminar y ya quieren salir del salón, pero también a que dan el problema por resuelto una vez que Josué ha elaborado una explicación que parece satisfacer al maestro, aunque ellos no la entiendan. Con cierta frecuencia hay en las sesiones momentos de silencio, en los cuales solamente Josué y Guillermo dan muestras de querer participar. Es común también que en las situaciones en las que hay desacuerdo, ellos tengan la última palabra. En algunas ocasiones, es posible que, en efecto, sean los únicos que tienen algo que aportar —es decir, la situación no es fuente de interacciones—, no obstante también da la impresión de que el resto del grupo evita cierto esfuerzo sabiendo que se lo pueden delegar a Josué y Guillermo, y ellos se hacen cargo. Al igual que en el caso de Claudia —mencionado anteriormente— hay un rol asignado a estos dos compañeros, que ellos asumen fuertemente: ellos son los que saben, y los que resuelven en nombre de todos.

D) Ante la pregunta: ¿qué porcentajes conservan una figura?

Después del problema en el que se pide aplicar cuatro porcentajes (50%, 25%, 20% y 5%) a la superficie de una bandera, en la tercera sesión se pide a los alumnos que resuelvan el siguiente problema, primero por parejas y después de manera grupal:

> “La bandera grande y la pequeña tienen la misma forma que la mediana pero son de otro tamaño.
>
> c) ¿Qué porcentaje de la superficie de la bandera grande se tiene que pintar de rojo?__________ ¿Y de azul? __________ ¿De verde?____________ ¿De amarillo?__________
>
> d) Marca en las tres banderas la parte que se debe pintar de cada color.”



Grande

Durante la puesta en común Josué y Guillermo afirman que, de rojo, se debe pintar el 50%, pues es la mitad:

Guillermo: *¿Es cincuenta por ciento no?*

Josué: *Es el cincuenta por ciento esa parte*

Maestro: *¿Por qué dicen que es el cincuenta por ciento?*

Josué: *Porque es la mitad de lo, de toda la medida que es la bandera*

Maestro: *Pero ésta bandera es más grande que ésta*

Josué: *Pero sigue siendo lo mismo*

Alumnos: *Siii*

Josué: *Porque se supone que, este, las dos miden diferente*

Maestro: *Las dos miden diferente ¿están de acuerdo?*

Josué: *Porque está, está pidiendo la misma parte que pintar, el cincuenta por ciento es esta*

Maestro: *¿Pero entonces el cincuenta por ciento es esto (la parte roja de la bandera mediana) y el cincuenta por ciento es esto (la parte roja de la bandera grande)?*

Guillermo: *Si, pero nada más que ahí es más grande*

Josué: *Nada más que la otra tiene un poco más de proporción en metros y ya, y la otra es más grande*

Ismael: *Pero es, sería lo mismo*

Josué: *Pero es lo mismo*

El maestro intenta introducir una duda: una bandera tiene más superficie que otra, ¿cómo es posible que en ambas se coloree el mismo porcentaje? Ellos explican que, en efecto, las dos miden diferente, pero en ambas banderas se “está pidiendo la misma parte que pintar”. Es decir, el porcentaje pintado de rojo se mantiene, “sigue siendo lo mismo”, aunque cambie el tamaño, la cantidad de metros: “nada más que ahí es más grande”. En la construcción de su argumento dejan ver una idea clara del porcentaje (y de la fracción que le asocian) como razones invariantes, como una “misma parte” que permanece invariante en una relación entre cantidades que varían. Cabe observar que la conservación del 50% en las dos banderas aparece justificada en parte “porque es la mitad de lo, de toda la medida que es la bandera”, quizás esto se debe a que la fracción evoca —con más fuerza que el porcentaje— precisamente una relación parte-todo, relación que ellos están tratando de explicitar ante el grupo. Finalmente, llama la atención la introducción del término “proporción” —que alude a la razón constante— en la frase: “la otra tiene un poco más de proporción en metros y ya". Analizada estrictamente, es inexacta, pues se incluye en una sentencia que trata de dar cuenta de lo opuesto, es decir, aquello que crece. La formulación muestra entonces cierta dificultad para comunicar una idea que se intuye pero se inserta, en un lugar desafortunado, una palabra que se ha escuchado y se sabe que tiene que ver con la discusión.

Ahora bien, no todos comparten la explicación de Josué y Guillermo. Cuando el maestro pregunta qué porcentaje se pinta de azul, varios responden "¡el veinticinco!" "¡igual todo!", pero Romina plantea una idea distinta, que al parecer provoca la división de la clase en dos grandes grupos:

Romina: *Yo digo que es el cincuenta*

Maestro: *Tú dices que es el cincuenta, OK. ¿Por qué dices que de azul, que es esto, es el cincuenta por ciento, por qué?*

Romina: *Porque arriba dice que… que la bandera mediana, el azul por ciento es de veinticinco*

Maestro: *Éste es el veinticinco por ciento ¿no? en la bandera mediana*

Romina: *Ajá, entonces yo me basé que si es el veinticinco por ciento de la mediana, sería el cincuenta por ciento de la grande*

Romina esgrime el argumento opuesto: si crece el tamaño necesariamente debe crecer el porcentaje. Aparece aquí una manifestación de esta noción concebida como cantidad absoluta. Cabe preguntarse de qué manera ella distingue, en este problema, entre $400m^2$ y 100%, y qué utilidad le confiere a la segunda expresión si ambas evocan una medida. Es probable, aunque no haya reparado en ello, que no le provoque conflicto si las considera como tipos distintos de medidas, tal y como sucede cuando a un triángulo se le puede asignar una medida para el área, otra para la altura, otra para el perímetro. Es decir, trata al "porcentaje" y la "superficie" como si tuvieran el mismo estatuto, pero indicaran rasgos distintos de una bandera, susceptibles de ser medidos.

Es interesante también que la alumna aumente el porcentaje al doble cuando aún no se le ha dicho que la bandera grande mide 800 metros cuadrados. Así, el razonamiento no parece ser del tipo "a doble tamaño le corresponde doble porcentaje", es más probable que la idea de duplicar solamente responda a la necesidad de amplificar.

Guillermo y Josué intentan objetar el planteamiento de Romina:

Maestro: *Esto es el cincuenta por ciento de la grande, a ver ¿qué opinan los otros?*

Alumnos: *No… porque… maestro… yo…*

Guillermo: *Entonces, a ver, que ponga las otras cantidades, supuestamente del por ciento y va a ser más*

Maestro: *A ver, ¡ah bueno! OK, tu compañera dice que esto es el cincuenta por ciento, que esto (refiriéndose al área roja de la bandera) es el cien por ciento*

Guillermo: *Ya se pasó*

Maestro: *¿Qué esto que es? (el área verde en la bandera grande)*

Josué: *El cuarenta, según*

Maestro: *El cuarenta por ciento*

Guillermo: *Y ahí (el amarillo en la bandera grande) según es el diez*

Maestro: *Y esto sería el diez por ciento ¿no?*

Guillermo: *Pero ya se pasaría del cien por ciento*

Maestro: *(a Romina) ¿Qué opinas de tu compañero que esto ya se pasa del cien por ciento?*

Josué: *Se pasaría del porcentaje que debe de ser*

Guillermo: *Ya serían doscientos por ciento*

Maestro: *¿Y qué tiene que sean doscientos por ciento?*

Guillermo: *Y tendría que ser el cien por ciento como los demás, de diferente… tamaño*

Josué: *Porque estamos pidiendo nada más el cien*

Maestro: *A ver ¿qué es el cien por ciento?*

Alumnos: *¡Toda la bandera!*

Maestro: *¿O sea que no importa el tamaño?*

Alumnos: *Nooo…*

Maestro: *Cien por ciento es todo*

Alumno: *Va a ser lo mismo… siii…. ajá*

Josué: *Siempre va a ser lo mismo aunque sea más grande o más chico*

Maestro: *(a Romina) ¿Qué opinas de eso? tus compañeros dicen que el cien por ciento es todo, no importa el tamaño ¿tú que opinas? ¿Los otros que opinan? ¿Perdón?*

Romina: *Que no*

Maestro: *Que no, su compañera dice que no, a ver, ustedes tienen que decirme un argumento de manera que su compañera diga: ya me convencieron*

Josué: *¿Pero por qué no?*

Guillermo: *Porque si no, no cabría la pintura para todo lo demás*

La validación que proponen Guillermo y Josué es por absurdo: el total será más del 100%. Varias veces insisten en que esto es imposible, y en ello se mantienen firmes: 100% es el porcentaje “que debe de ser”. No obstante, el maestro intenta hacer ver que detrás de su argumento está un supuesto que no necesariamente es compartido: “¿y qué tiene que sean doscientos por ciento?” En efecto, a los ojos de Romina, la explicación de Guillermo y Josué no rebate su respuesta, pues ella —y al parecer varios compañeros más— no asume como punto de partida que el 100% designa al total. Tanto a una como a los otros les cuesta trabajo explicitar dónde estriba su diferencia: ya no se trata de discernir si a la parte de rojo se le asigna el 100% o el 50%, sino de determinar si el total corresponde o no al 100% para, a partir de ahí, poder regular. Si bien el maestro se esfuerza por hacer emerger este desacuerdo que subyace al objeto de la discusión (“a ver, ¿qué es el cien por ciento?”, “¿o sea que no importa el tamaño?”) e incluso Guillermo, por un segundo atisba sutilmente un elemento explicativo (“y tendría que ser el cien por ciento como los demás, de diferente… tamaño”), quienes no están de acuerdo con Romina son categóricos: “siempre va a ser lo mismo aunque sea más grande o más chico”. Incluso cuando ella insiste en “que no” ha sido convencida, Josué se sorprende: pregunta “¿pero por qué no?”, con un tono impaciente, incrédulo, como si no tuviera cabida poner en cuestionamiento una relación que él da por sentada. Y Guillermo intenta hacer ver, de otra manera, lo que le parece una contradicción: “si no, no cabría para todo lo demás”. Es decir, sin tener que sumar todos los porcentajes, con la sola pintura roja se agota la superficie de la bandera. No se da cuenta, sin embargo, de que nuevamente está utilizando como argumento precisamente lo que tiene que probar. De manera indirecta, la discusión es tautológica. Puesto que esta disyuntiva está detrás del desacuerdo inicial, no es vista con claridad. Es el maestro el que se encarga de ponerla de relieve:

Maestro: *Vamos a tratar, déjenme decirles cuál es el problema que hay ahorita, que tú dices que el cien por ciento es todo sin importar cuál es el tamaño, y tus compañeras dicen que si el tamaño aumenta, el total ya no es cien por ciento, va a ser más*

Romina: *El doble, sí*

Maestro: *O sea esta bandera grandotota ¿tendría el doscientos por ciento?*

Algunos asienten

Maestro: *¿Y la bandera chiquita, cuánto tendría?*

Alumnos: *¡El cincuenta!*

Maestro: *O sea, éste cincuenta por ciento*

Romina: *¡Ajá!*

Maestro: *¿Toda la bandera (chica) sería el cincuenta por ciento, toda la bandera (mediana) sería el cien por ciento, y toda la bandera (grande) sería el doscientos por ciento?*

Alumnos: *¡Noooooo! ¡siiiii!*

Los fragmentos anteriores muestran cómo una serie de argumentos no constituye por sí misma, de manera intrínseca, una demostración: la validación depende de los conocimientos que se tienen y desde los cuales se miran y se juzgan los argumentos que esgrimen los demás. En este sentido es que la validación no es totalmente empírica: si bien todos se enfrentan a las mismas tareas y escuchan las mismas participaciones, cada sujeto las mira desde su conocimiento[68].

De hecho, tanto la respuesta de Josué y Guillermo como la de Romina tienen coherencia interna: la diferencia entre una y otra está en que apelan implícitamente a distintas acepciones del porcentaje.

Vale la pena hacer ahora un paréntesis para mostrar como la confrontación grupal que recién mostramos afecta las elaboraciones de Montserrat, quien se pregunta si "así como ahorita están diciendo, así, porcentajes muy grandes ¿tiene que dar cuatrocientos?". Nos parece que intenta darle cabida a la participación de Romina, hacerse inteligible la propuesta de doblar los porcentajes. Para entender esto es necesario recordar que Montserrat es particularmente susceptible a los aportes de sus compañeros. Es frecuente que a partir de las puestas en común incorpore nuevas relaciones que durante el trabajo por parejas no da signos de utilizar y que la llevan a modificar los resultados producidos en este trabajo. Una de ellas —que no adopta en esta discusión, sino en otra que toma lugar en la sesión anterior— es que la adición de las cantidades que resultan de aplicar los cuatro porcentajes a una medida de superficie debe coincidir con dicha medida, en el caso de la bandera mediana, con 400 metros cuadrados. Esta vez retoma la proposición, con una pequeña modificación: los sumandos no son superficies sino porcentajes. Lo cual le permite mantener cierta congruencia con la idea que sostienen Guillermo y Josué: la suma tiene que coincidir con el total, pero también

[68] Desde la Teoría de las Situaciones Didácticas, la relación entre el sujeto y la problemática a la que se enfrenta se entiende como una interacción. Las decisiones del sujeto, el control y las anticipaciones que ejerce sobre la situación que se le plantea no son inherentes a las características de dicha situación: también son producidas y limitadas por los instrumentos de interpretación de los que dispone el sujeto (Perrin-Glorian, 1994). De esta manera, la realidad con la que el sujeto interactúa es construida por éste, quien la modifica en la medida en que el conocimiento que produce le permite construir nuevos observables: la situación que se desarrolla no es la misma para los distintos alumnos que participan de ella, quienes hacen distintas lecturas de la información que la situación les devuelve como resultado de sus acciones. (Sadovsky, 2003)

con la sentencia de Romina: los porcentajes pueden exceder al 100%. Es decir, al remitir al total no con el 100% sino con 400, está tratando de hacer empatar lo que en la discusión se plantea como contradictorio: o se doblan los porcentajes o la suma de los porcentajes es 100%. Y está intentando también hacer esto bajo una forma de regulación que ella tiene muy asumida: la suma debe coincidir con el dato inicial. No se percata de que esta intención de encajar las dos sentencias la lleva a mezclar medidas con porcentajes. Lleva entonces al extremo la tendencia de recibir las aportaciones de sus compañeros como punto de partida para hacer elaboraciones propias.

Volviendo a la discusión que encabezan Romina por un lado, y Josué con Guillermo por el otro, el profesor, siguiendo la recomendación que se le hizo desde la planeación de la situación —planeación que no previó el debate anterior—, aporta la siguiente información: el 100% es todo.

Maestro: *OK. (Silencio) Hagan de cuenta que yo tengo una camisa que cuesta doscientos pesos y me van a hacer el cincuenta por ciento de descuento ¿cuánto me va a costar?*

Alumnos: *¡Cien!*

Maestro: *Y luego, tengo un pantalón que me sale en quinientos pesos, y me van a hacer también el cincuenta por ciento de descuento ¿cuánto me va a costar?*

Alumnos: *¡Doscientos cincuenta!*

Maestro: *(se dirige a cuatro alumnas que intenta convencer) ¿Están de acuerdo?*

Alumnas: *Si*

A partir de este episodio, posteriormente el maestro, con la ayuda de algunos alumnos, explica que “de los dos, el cincuenta por ciento no es el mismo”, depende “del precio”, “de la cantidad inicial”, es decir, el 50% varía aplicado a diferentes cantidades. De ahí que el 100% también designa distintos números, pero siempre corresponde al total, y en el caso que los ocupa, a “¡toda la bandera!”. Por lo tanto, los porcentajes de la bandera mediana se conservan en la grande.

No obstante, al final de esta explicación, Romina comenta en voz baja: “no me convence”. Es de esperarse, principalmente porque no hubo una situación diseñada especialmente para que los alumnos establecieran la equivalencia entre el 100% y la cantidad inicial, pues se consideró que sería poco problemático. Por otro lado, cabe observar que si bien el maestro intenta plantear un contraejemplo a la idea de que distintos totales pueden ser asignados a distintos porcentajes[69], más bien desliza la discusión hacia un terreno que no es la fuente de conflicto entre los estudiantes. Es decir, las alumnas no tienen inconveniente en aceptar que el 50% de una cantidad depende de ésta, así que es variable. La dificultad aparece con el planteo recíproco, en el segundo tipo de tareas. Si se transfiere del registro gráfico al numérico el problema sobre el que se llevó a cabo la discusión grupal, se obtiene un ejemplo como el siguiente: si 100 es el 50% (de 200) ¿qué porcentaje es 200? (pero no de 200, sino de 400). Es probable entonces que la habilidad para distinguir entre un porcentaje y una cantidad absoluta también dependa del tipo de tarea[70].

Así, son pocas las posibilidades que tiene Romina para recuperar la institucionalización a la que se llega en la clase. No es así para Montserrat, quien ahora suma por un lado los porcentajes 50, 25, 20 y 5, y por otro lado 100, 50, 40 y 10, lo que lleva a desechar dos respuestas: la que ella había formulado antes de la discusión grupal[71] y la de Romina. Además, se desdice de la propuesta que se analiza en párrafos anteriores, en la que pretendía conjugar la contradicción entre dos participaciones distintas:

Observadora:	*¿Te acuerdas que hace rato me preguntaste, si sumando…? (…)*
Montserrat:	*Ay, pues yo pensé que así era, que daba cuatrocientos, pensé que así era*
Observadora:	*¿Y ahora qué piensas?*
Montserrat:	*Que está correcto ahí, porque ya son más, da cien, ya es la mitad ¿no? bueno, la cuarta parte, y así*
Observadora:	*Ajá, OK, y aquí entonces, ¿qué porcentaje tendría que ir pintado de rojo en esta chiquita?*
Montserrat:	*Los mismos ¿no? pero…*
Observadora:	*¿Pero qué?*
Montserrat:	*Más chico ¿no?*

Escribe “50%” sobre el rojo de las tres banderas y, en la bandera pequeña, los cuatro porcentajes correctos

[69] Apela a la experiencia de comprar productos en las tiendas: el porcentaje de descuento no determina la cantidad que se descuenta.

[70] Y quizás también del porcentaje mismo: es probable que sea más fácil aceptar que el 50% es la mitad que admitir que el 100% es el total, debido al carácter implícito con el que suele aparecer la segunda identidad.

[71] En un principio responde que los porcentajes son 20, 10, 8 y 2, obtenidos al quitar un cero a 200, 100, 80 y 20, los resultados de aplicar el 50%, 25%, 20% y 5% a 400.

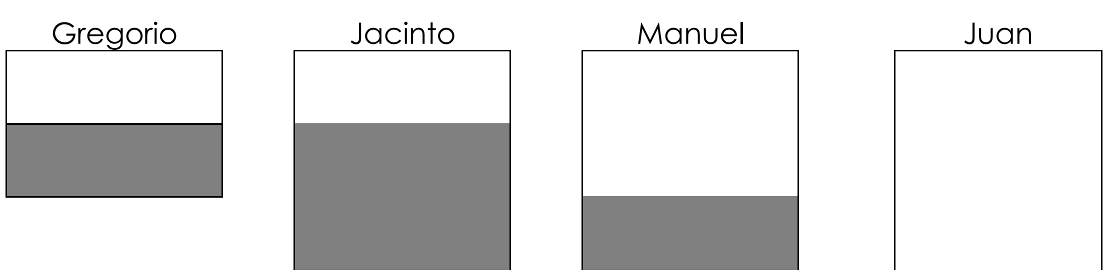
Sin haberlo escuchado de sus compañeros justifica que son “los mismos”, nomás que el tamaño es “más chico”. Así, al parecer no tiene dificultad para aceptar que el 100% corresponde al total, después de que se institucionaliza.

Este ejemplo se puede vincular con una reflexión de Sadovsky (2005) que ya comentamos antes: cuando un alumno no ha producido un procedimiento —o bien ha formulado una respuesta a la que no se siente muy adherido— tiene más capacidad para retomar las aportaciones de sus compañeros que alguien que se encuentra demasiado comprometido con su propia propuesta. No obstante, el caso de Montserrat, y también de Margarita muestra que esto no sucede sin algunas complicaciones. Es verdad que ellas retoman de sus pares la identificación entre el 100% y el total, la verificación de la aplicación de porcentajes a partir de la suma, la conservación de los porcentajes entre banderas de distintos tamaños y la asociación del 50% con la mitad y del 25% con la cuarta parte. Y esto les abre nuevas posibilidades para corregir sus errores y elaborar procedimientos a los que quizás no podrían acceder por cuenta propia. No obstante, también es frecuente que desechen sus propias respuestas con relativa facilidad, que recuperen aportaciones erróneas de sus compañeros —en ocasiones aparentemente sin intentar filtrarlas—, que ciertas formulaciones sean inaccesibles para ellas, o bien que intenten ajustar las participaciones de los otros para desdibujar las contradicciones que encierran, sin notar que ello las lleva a una nueva contradicción. Hay entonces un doble filo en lo que, para quienes realizan una producción débil durante el trabajo individual, se desata a partir de la interacción grupal.

E) En el segundo tipo de tareas, con registro gráfico

En la última sesión se pide a los estudiantes que resuelvan por parejas el siguiente problema:

> “Varios agricultores decidieron usar una parte de sus terrenos para sembrar una nueva variedad de maíz, la variedad A. Los siguientes rectángulos representan los terrenos de cuatro de ellos y la parte gris en cada uno representa lo sembrado con maíz A. Anota debajo de cada rectángulo el porcentaje de su terreno que sembró cada uno con el maíz A.”



______ % ______ % ______% _______ %

Durante la discusión grupal se genera un desacuerdo en torno al terreno de Manuel. Varios alumnos afirman que la parte sembrada corresponde al 50%. Guillermo sostiene esta sentencia: “porque lo medimos y sale casi exactamente la mitad”, y Josué precisa: “no casi, exactamente la mitad”. Gabriela en cambio considera que la región gris es designada por el 40%, y explica por qué:

Gabriela: *Porque el de veinte está más bajo (…), ajá y el de cuarenta ya sube poquito*

Maestro: *Sube poquito. Tú dijiste que el de Juan que es el veinte, tu consideras que es el veinte, entonces el de Manuel sería otro tanto ¿no? Cuarenta*

Gabriela compara entonces la región gris del terreno de Juan con la de Manuel y se rige por una regla que establece: a la mayor se le asigna un mayor porcentaje. Aunque por los porcentajes que utiliza, 20 y 40, parece utilizar un cuantificador, a saber, el doble, que es explicitado por el maestro. Es decir, no considera una relación interna (parte-todo), entre el área sembrada y el área total de un mismo terreno, sino una externa, entre las regiones grises de dos terrenos diferentes.

Los dos argumentos parecen correctos, lo que imposibilita una toma rápida de decisión. Si bien hemos visto que Gabriela tiene una explicación que ayuda a sostener su respuesta, no plantea una manera de rebatir la de Guillermo y Josué. En cambio, sí se formulan contra-argumentos a la propuesta de Gabriela:

Guillermo: *Pero… es que el de Manuel y el de Juan no son iguales*

Josué: *No miden lo mismo. Uno mide veinte por ciento y el otro mide el cincuenta y no podemos sumar eso. Si los sumáramos los dos, darían el setenta y cinco por ciento y no es… ¡el setenta!*

(…)

Josué: *No puede ser porque no es la misma medida*

Maestro: *¿No es la misma medida? ¿De qué?*

Josué: *De… es que, (…) el de Juan es más grande que el de Manuel*

Maestro: *(…) ¿y eso qué tiene que ver?*

Josué: *Porque saca un cacho, pero que no tiene el de, como se llama, el de Manuel, y eso es lo que influye para que no sea la misma cantidad*

Gabriela: *No porque el de Juan mide un centímetro y el de Manuel mide dos*

Guillermo y Josué cuestionan la comparación que hace Gabriela señalando que “no puede ser porque no es la misma medida”, el terreno “de Juan es más grande que el de Manuel”, es decir, sólo sería válida si los dos terrenos fueran del mismo tamaño. El argumento —formulado con gran dificultad— de que no se pueden hacer comparaciones entre porcentajes que corresponden a terrenos de distintos tamaños, apela implícitamente a la necesidad de considerar no sólo las partes sembradas sino su relación con los terrenos completos, es decir, al porcentaje como expresión de una relación y no de una medida. Josué intenta hacer ver además que, como no es el caso de que los terrenos coincidan, dicha comparación conduce a un absurdo: se podría agregar el 50% del terreno de Manuel al 20% del de Juan, y se tendría el 70% —no explicita de cuál de los dos terrenos—, lo que, según él, es falso, aunque no explica por qué. Es extraño que parta del 50% y no del 40%, la respuesta que intenta invalidar. Si lo hubiera hecho habría reforzado la respuesta de su oponente: al juntar las áreas sembradas en el terreno de Manuel y el de Juan se obtiene en efecto el 60% del segundo, y entonces si la primera representara al 40% y la segunda al 20%, sí podrían sumarse. Es decir, si los porcentajes pudieran ser tratados como medidas, como lo hace Gabriela, se podrían sumar aún cuando correspondieran a terrenos distintos. No obstante, esta elaboración no cobra relevancia en el otro planteamiento en el que ellos mismos insisten y que es recuperado en la discusión: para que la respuesta de Gabriela sea certera, los terrenos deben tener la misma medida.

De manera similar a lo que sucede en el problema analizado en el apartado anterior, Gabriela deja ver que no recibe las aportaciones de Josué y Guillermo como evidencia de un error suyo: vuelve a insistir, y esta vez trae a escena las medidas exactas, en que "no (está de acuerdo) porque el de Juan mide un centímetro y el de Manuel mide dos". Algo similar les ocurre a sus compañeros: no toman la pregunta del profesor, "¿y eso qué tiene que ver?" como una exigencia de justificar por qué no es posible obtener un porcentaje a partir de otro si corresponden a partes de totales distintos[72], sino como una petición de explicar por qué los dos terrenos son de diferente tamaño: "Porque saca un cacho, pero que no tiene el de, como se llama, el de Manuel, y eso es lo que influye para que no sea la misma cantidad". Es decir, ambos mantienen su posición pero ignoran la crítica que se les hace. Nuevamente es difícil notar que el conflicto no está sobre el razonamiento de cada uno, sino en una disyuntiva que está detrás: ¿se puede obtener un porcentaje a partir de otro si ambos aplican a totales diferentes? Puesto que esta pregunta no se plantea con claridad, no emerge a la discusión la siguiente consecuencia: si la respuesta es afirmativa, es decir, si a dos porciones iguales de terrenos de distintos tamaños se les asigna un mismo porcentaje, entonces éste no indica la relación entre una parte y el total, funciona más bien como una cantidad de centímetros cuadrados. Así, a la pregunta anterior subyace otra, que por consiguiente aparece en un nivel aún más implícito en la discusión: ¿el total corresponde

[72] Es decir, la relación entre los porcentajes y las medidas que resultan de aplicarlos solamente es proporcional si los totales de referencia son iguales.

o no al 100%? Quizás esto se habría observado comparando el terreno de Manuel con el de Gregorio: al inicio de la discusión grupal parecía haber consenso en que el área sembrada en el segundo corresponde al 50%, y, puesto que la de Manuel es el doble, siguiendo el razonamiento de Gabriela, sería el 100%.

Eduardo encuentra otra manera de rebatir la respuesta de Gabriela, que después hace emerger la necesidad de determinar si el 100% corresponde o no a la cantidad inicial:

Maestro:	*(A Guillermo y Josué que levantan la mano) permítanme tantito, quiero que sus compañeros opinen ¿sí? (a Eduardo) ¿qué opinas tú? ¿Quién tiene razón, ellos o ellas, y por qué?*
Eduardo:	*Ellos*
Maestro:	*¿Por qué? (silencio) ¿Porque ellos siempre tienen la razón?*
Eduardo:	*No*
Maestro:	*Entonces, ¿por qué? dime una razón, ¿por qué?*
Eduardo:	*Entonces si no es el cincuenta por… si dice ella que es el cuarenta por ciento ¿dónde queda el cincuenta por ciento, de ese terreno?*
Maestro:	*Dónde estaría el cincuenta por ciento, claro, si esto (la parte gris del terreno de Manuel) fuera el cuarenta por ciento ¿cuánto sería esto? (la parte blanca en el mismo terreno)*
Alan:	*¡El sesenta!*
Maestro:	*El sesenta por ciento*
Josué:	*Y no porque da lo mismo, la misma cantidad, es lo mismo, en la hoja*
Maestro:	*(a Gabriela) ¿Si estás de acuerdo? Si éste (señalando la parte sombreada) fuera el cuarenta por ciento, entonces éste (señalando la parte blanca) sería el sesenta por ciento, o no estás de acuerdo ¿tú qué opinas?*

(Guillermo y Josué mantienen la mano levantada)

Gabriela responde que están bien sus compañeros

Eduardo hace ver otra contradicción que se deriva de la respuesta de Gabriela. Esta observación es quizá más clara para los alumnos, pues le da mayor visibilidad a un conflicto anterior, el cual en cierta medida sigue estando implícito: si se asume que el 100% representa al total, entonces la asignación de porcentajes iguales a partes iguales pero de distintos terrenos conduce a la asignación de porcentajes diferentes a partes iguales de un mismo terreno, lo cual es más claramente cuestionable.

Cabe observar que, una vez que Gabriela establece su proposición, prácticamente se retrae durante la discusión, es el maestro quien le sigue dando voz. Cuando finalmente acepta que cometió una equivocación, él intenta nuevamente darle cabida, recuperando, a partir de Eduardo, una disyuntiva que está detrás de la discusión anterior:

Maestro: *¿No será todo esto (todo el terreno de Manuel) el ochenta por ciento?*

Guillermo: *No*

Maestro: *¿Qué opinas? A ver, allá atrás ¿qué opinas? ¿Será éste el ochenta por ciento?*

(…)

Isabel: *Es el cien*

Maestro: *¿Todo es el cien?*

Isabel: *Ajá*

Maestro: *¿Están de acuerdo todos en que todo es el cien? (a un alumno) tú dijiste que no ¿por qué no?*

Silencio

Maestro: *¿Qué opinan?*

Guillermo: *Es que, nosotros medimos todo el terreno de Manuel salen cuatro centímetros…*

Josué: *Y en el de Juan salen cinco, es lo mismo que hicimos con lo de la ropa que no podía ser el mismo porcentaje si la ropa medía, costaba más*

Maestro: *Costaba diferente. OK, sus compañeros dicen que todo esto (el terreno de Manuel) es cien por ciento y todo esto (el terreno de Juan) es cien por ciento ¿qué opinan ustedes, será cierto o no será cierto?*

Mario: *Quieeenn… sabe*

Maestro: *Todo esto es cien por ciento, todo esto es cien por ciento ¿qué opinan?*

(…)

Guillermo: *Yo creo que ningún entero puede ser más que ochenta por ciento*

Maestro: *Su compañero dice que nada entero, nada completo, ningún entero puede ser diferente del cien por ciento, ochenta por ciento o…*

Guillermo: *Aunque sea (inaudible) por ejemplo*

Josué: *Aunque sea lo doble, que le saque un cachito lo que sea, todo es el cien por ciento*

No obstante, no se vuelve a discutir sobre el tema. A pesar de las tímidas dudas de algunos (“quieeeen… sabe”), y también de las formulaciones confusas de Guillermo y Josué (dicen que “no podía ser el mismo porcentaje si la ropa medía, costaba más” y que “ningún entero puede ser más que ochenta por ciento”, cuando al parecer quieren hacer ver lo contrario, que aunque el precio varíe el porcentaje se conserva y el entero nunca equivale al 80%), cobra fuerza la insistencia de algunos alumnos sobre la institucionalización a la que se había llegado en la sesión anterior: el 100% designa al total, “aunque sea lo doble, que le saque un cachito lo que sea”, y esto ya no debe ponerse en duda. Cabe preguntarse si Gabriela y quienes apoyaban su respuesta han sido convencidos.

Nos interesa mostrar ahora cómo la concepción del porcentaje como una relación, por un lado, y como medida, por el otro, que generaron una confrontación entre distintas personas a nivel grupal, pueden también convivir en un mismo sujeto, como en el caso de Margarita, y en menor medida, de Montserrat. El primer terreno al que Margarita asigna un porcentaje es el de Gregorio, el 50%, “porque es la mitad”. Además estima el 95% en el de Jacinto, lo que justifica a partir de que “según yo que aquí (señalando todo el terreno) mide cien (…), cien metros de terreno”. Como ya hemos mencionado, la frecuencia con la que asigna al total, no el 100% sino 100 metros, lleva a pensar que en realidad asocia el porcentaje a una medida, pero entonces ¿cómo les adjudica la misma medida a terrenos que tienen distinto tamaño? Más adelante menciona, respecto al terreno de Manuel, que “es cuarenta porque mide cuatro”. Es decir, mide el largo del rectángulo y toma lo que encuentra muy directamente como un porcentaje. Además, acepta el argumento que esgrime Gabriela en la confrontación grupal: “yo digo que sí está bien lo que dice Gaby (…) porque... aquí mide dos y aquí mide uno, y por eso... aquí (la región gris) es cuarenta y aquí (la región blanca) es sesenta”. Así, se adhiere a Gabriela a pesar de que se contrapone a la equivalencia entre el 50% y ½ que ella misma había puesto en juego en el terreno de Gregorio, y a pesar también de un argumento que Montserrat había formulado anteriormente: “no estaba bien el cuarenta, porque aquí (la región blanca) está dibujado que es lo mismo, no puede ser que mida más que aquí (la región gris)”. Incluso asume explícitamente, sin reconocer la contradicción, que dos pedazos iguales de un mismo terreno son asignados a porcentajes diferentes. Aunque quizás desde su punto de vista su planteamiento es pertinente, dada la sistemática incoherencia que ella parece interpretar en las situaciones de porcentaje: si es posible asignar una misma medida —100 metros— a terrenos de distintos tamaños, también es lógico asociar distintos porcentajes —asumidos como medidas— a franjas del mismo tamaño. No hay que olvidar que esto sería correcto si dichas franjas fueran tomadas de distintos terrenos.

Con respecto a Montserrat, recordemos que ella no estuvo de acuerdo en asignar el 40% a la región sembrada en el terreno de Manuel. No obstante, al discutir posteriormente sobre el terreno de Gregorio, retoma el argumento que antes objetó:

Observadora:	*¿Y entonces éste (el de Gregorio) cuánto sería? (ellas tenían marcado el 50%)*
(...)	
Montserrat:	*Yo creo que éste mide veinticinco o algo así*
Observadora:	*¿Éste?*
Montserrat:	*Bueno es que, no sé, pero... yo pienso que aquí es la mitad (el terreno de Gregorio es la mitad del de Manuel), porque... ¿todo esto es lo que él sembró no? Todo esto, si lo coloreas, esto es lo que sembró, yo digo que es el veinticinco de lo que él sembró*

El cambio de opinión en Montserrat admite al menos dos interpretaciones: la primera es que antes no estaba cuestionando el razonamiento de Gabriela, sino una de sus consecuencias, a saber, la contradicción entre el 40% y 60% asociados ambos a la mitad de un mismo rectángulo. Puesto que en el caso de Gregorio este absurdo no sale a la luz, ella misma recurre a una proposición análoga a la de Gabriela. La segunda interpretación es que una vez más se despega de sus propias elaboraciones para aceptar el argumento de Margarita.

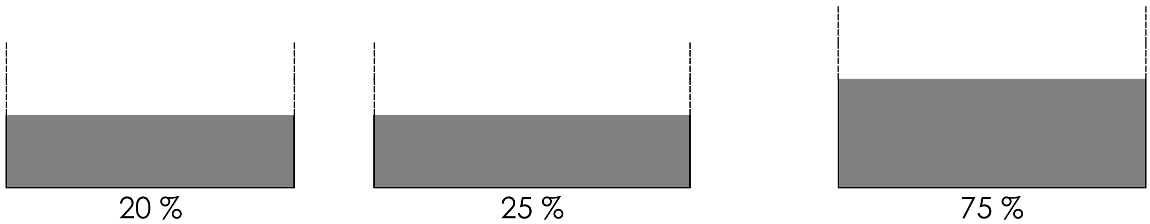
F) En el tercer tipo de tareas, con registro gráfico

En la última sesión los estudiantes resuelven el siguiente problema:

"Las superficies sombreadas que se muestran a continuación corresponden a las partes en las que se sembró maíz A en tres terrenos más. Debajo de cada una se indica el porcentaje del terreno total que fue sembrado con ese tipo de maíz.

c) ¿Qué terreno crees que es el más pequeño? _________ ¿Cual crees que es el más grande? _____________
d) Dibuja los terrenos completos y verifica tus anticipaciones."

Antonio Manuela Andrés



Durante la confrontación grupal, alrededor de diez estudiantes levantan la mano para hacer ver su anticipación: el terreno de Andrés es el más grande “porque se ve en el dibujo”. Es decir, probablemente toman los porcentajes como medidas: 75 es mayor a 25 y 20, o bien, la parte sombreada en el terreno de Andrés es mayor a la de los dos restantes.

No obstante, no todos están convencidos. Margarita, por ejemplo, al trabajar en pareja con Montserrat, muestra una tenue sorpresa, quizás al corroborar que las franjas grises en los terrenos de Manuela y Antonio son del mismo tamaño pero corresponden a distintos porcentajes: “si mide igual”. Montserrat, aunque le apuesta al terreno de Andrés, manifiesta ciertas dudas: “ay, pero las apariencias engañan (...) a lo mejor nos equivocamos yo creo que va a ser este (el de Antonio) el más grande y este (Andrés) el más chico... ¿no me crees Margarita?” Probablemente las dudas de Montserrat muestran que ella empieza a adivinar una cláusula del contrato didáctico: lo que en un principio parece fácil después resulta no serlo. No obstante, un comentario posterior sugiere una interpretación distinta: al parecer se percata de que en un problema que habían resuelto anteriormente (ver el inciso *F) En el segundo tipo de tareas, con registro gráfico*), los porcentajes mayores no necesariamente corresponden al mayor terreno: “como aquí (señalando el terreno de Juan en el problema anterior) estaba grande (el terreno) y… era, era chico (el porcentaje)”. Aunque plantea la duda, quizás el no saber cómo mostrar que el orden de los tamaños de los terrenos es inverso al de los porcentajes conocidos la hace mantenerse en la primera respuesta.

Volviendo al momento de la discusión grupal, alrededor de ocho alumnos opinan que el terreno más grande es el de Antonio. Ante la reticencia que muestran para ofrecer una explicación —una niña argumenta que es necesario “medirlo con la regla” pero después no dice más—, el profesor otorga la palabra a Guillermo y Josué:

Guillermo: *Porque… si… el de veinte por ciento lo comparamos, ora sí que lo igualáramos al setenta y cinco por ciento que es eso… lo doblaría por… ora sí que mucho*

Maestro: *¿Cómo le hago para aumentarlo al setenta y cinco?*

Probablemente la intervención de Guillermo es en este sentido: si el 20% del terreno de Antonio se itera hasta recuperar el 75% —del mismo terreno—, resultaría mucho más grande que el 75% de Andrés. Llama la atención el uso de "lo doblaría" en su formulación, para hacer ver, más bien, que lo rebasaría. Es decir, nuevamente, la idea de doblar parece muy ligada a la de aumentar. Después, él y Josué proponen otro argumento:

Josué: *Tan solo con las medidas que dan aquí. Si una mide un centímetro y medio y la otra mide un centímetro, tan sólo por eso, o si no, o más fácil…*
(…)
Guillermo: *Porque este es el setenta y cinco por ciento y es apenas el veinte, casi lo iguala de…*
Josué: *De tamaño*
Guillermo: *De tamaño*
Josué: *Nada más le tendríamos que aumentar un… pongamos un diez por ciento y lo alcanzaría y ahí quedó la cosa y tendría espacio para (inaudible)*

Es decir, la diferencia en porcentajes es grande, uno es el 75% y el otro "es apenas el veinte", mientras que, por el contrario, la parte sombreada de Antonio "casi iguala de tamaño" a la de Andrés. Así, si se aumenta alrededor del 10% a la región sombreada del terreno de Antonio, la parte pintada en los dos terrenos sería la misma, de donde la franja correspondiente a un porcentaje cercano al 30% del terreno de Antonio es igual al 75% del de Andrés.

Se han esgrimido hasta ahora dos argumentos recíprocos: 1) si se recupera el mismo porcentaje en los dos terrenos, la porción de terreno correspondiente será más grande en el caso de Antonio, y 2) si se comparan dos franjas iguales, una de cada terreno, el porcentaje correspondiente será mayor en Andrés.

Más adelante Guillermo menciona que la región sombreada en el terreno de Andrés "ya casi llega al cien por ciento y le falta un veinticinco por ciento", con lo que implícitamente alude a la condición de porcentaje como relación entre un número y cien, donde el 75, a diferencia de lo que muestra una medida, indica también la parte que falta, el complemento. Cuando, a partir de esta intervención, el profesor pregunta "por dónde estaría el cien por ciento" en cada uno de los dos terrenos, Guillermo y Josué estiman que, en el caso de Andrés, el total debe estar sólo un poco más arriba de la parte sombreada. Para el terreno de Antonio, Ana proporciona la siguiente explicación:

Ana:	*(...) el veinte por ciento en este caso mide un centímetro…se supone que es el cien por ciento, para llegar al cien faltan cuatro centímetros entonces es más largo*
Maestro:	*¡Ah! o sea cuatro centímetros, cuatro veces esto…aquí iría uno, luego iría otro, y luego, es más, pasaría del pizarrón (mientras habla va iterando cuatro veces la franja sombreada)*
Ana:	*Ajá*
Maestro:	*¿Entienden lo que dice su compañera?*
Alumnos:	*Siiii*
Maestro:	*Sus compañeras dicen: si este es el veinte por ciento entonces por acá que es el doble ¿cuánto sería?*
Alumnos:	*¡Cuarenta!*
Maestro:	*¿Y por acá cuánto sería?*
Alumnos:	*¡Sesenta!*
Maestro:	*¿Y por acá cuanto sería?*
(…)	
Alumnos:	*¡¡¡Como el ochenta!!!*
Maestro:	*El ochenta por ciento… y el cien por ciento sería hasta allá ¿no? Si éste (lo sombreado en el terreno de Andrés) es el setenta y cinco aquí (señala la estimación que hicieron del terreno total) es el cien ¿no? ¿Cuál de los dos terrenos es el más grande?*
Alumnos:	*¡¡El del veinte!! ¡El veinte por ciento!*

Ana muestra entonces que es necesario iterar el 20% que conocen del terreno de Andrés hasta recuperar el 100%. Al parecer, esta acción convence a los alumnos con más fuerza que las observaciones que hasta entonces habían formulado Guillermo y Josué. A pesar de que el argumento de Ana es similar a uno que Guillermo había propuesto —iterar el 20% de Antonio hasta obtener el 75% para compararlo con el de Andrés— la claridad en su formulación y el hecho de que el profesor la muestra físicamente, tomando medidas y superponiendo franjas, ayuda al resto de los estudiantes a pasar de la comparación de los porcentajes como si fueran números, a la comparación a partir de la recuperación de los terrenos completos.

Después de esta confrontación, Margarita y Montserrat recuperan el procedimiento cuando una observadora les pide determinar los otros dos terrenos completos. En el terreno de Manuela, “sería... así como dijo pero serían nada más tres (...) porque como aquí ya tiene el veinticinco ya... pues ya”, y en el de Andrés, “sería... aquí nada más dos centímetros”, “porque se supone que es nada más es veinticinco lo que falta”.

Hemos visto a lo largo de este apartado diferentes maneras en las que se manifiestan conflictos, ya sea entre distintos estudiantes o en uno de ellos, a los que subyace la necesidad de decidir entre el porcentaje interpretado como una medida, o como una relación.

La Teoría de las Situaciones Didácticas ofrece elementos para interpretar estos errores altamente persistentes en las resoluciones de los alumnos, no en términos de ignorancia, es decir, de ausencia de un conocimiento, sino más bien, como conocimientos que tienen un ámbito de validez, funcionan correctamente en determinadas situaciones, pero fuera de ese ámbito se revelan como falsos o poco adaptados para abordar ciertos problemas en toda su complejidad. La dificultad no está dada ni por el conocimiento anterior ni por el que se intenta construir, sino por la necesidad de transitar de uno a otro. El error es entonces constitutivo de la construcción del conocimiento, está en su naturaleza: el aprendizaje se apoya en los conocimientos anteriores, pero también se enfrenta a ellos. Así, es imposible enseñar directamente un saber definitivo (Artigue, 1989; Perrin-Glorian, 1994) En el caso que nos ocupa, podemos identificar las huellas de un conocimiento que ha funcionado durante un largo tiempo: el de las cantidades, o bien, de las medidas. Es posible entonces que el uso erróneo del porcentaje como absoluto sea ineludible en la construcción de esta noción como relación[73].

No obstante, cabe preguntarse si la manera en que perdura dicha interpretación errónea del porcentaje aún en estudiantes de secundaria no es también consecuencia de la enseñanza. Es decir, probablemente los alumnos no se han enfrentado a situaciones que permitan poner en duda la concepción errónea de dicha noción con la suficiente contundencia como para que pueda ser superada. De acuerdo con Duroux (citado en Artigue, 1989), la desaparición de un conocimiento erróneo no pasa únicamente por la construcción de uno nuevo: es indispensable incorporar su rechazo en el nuevo saber. Brousseau (1976, en Perrin-Glorian 1994) apunta al respecto:

> El sentido de un conocimiento matemático no sólo se define por la colección de situaciones en las que este conocimiento se realiza en tanto teoría

[73] Esta manera de interpretar el error forma parte del origen de la noción de obstáculo epistemológico. Cabe aclarar que en este trabajo no contamos con los elementos para determinar si las cantidades absolutas constituyen o no un obstáculo para la construcción de las relativas: no hemos mostrado con suficiente contundencia la recurrencia de los errores como para mostrar que se agrupan alrededor de concepciones, tampoco hemos rastreado el origen histórico de estos conocimientos para confrontarlos con las resoluciones de los alumnos. No podemos entonces respondernos si realmente las cantidades absolutas son constitutivas de la construcción de las relativas.

> matemática…, no sólo por la colección de situaciones en las que el sujeto lo ha encontrado como medio de resolución, sino también por el conjunto de concepciones, de elecciones anteriores que rechaza, los errores que evita, las economías que procura, las formulaciones que retoma, etc. (p.112)

Es necesario entonces seguir estudiando las características que deben satisfacer las situaciones que podrían ayudar a cuestionar la concepción del porcentaje como absoluto y transformarla en una acepción como relación.

3.3 Comentario final

Las resoluciones de los alumnos que hemos analizado en este capítulo están vinculadas con el papel que jugó el profesor en el desarrollo de las sesiones y con las características de las propias situaciones –además de los conocimientos de los que disponían. A continuación intentaremos sintetizar algunas de estas relaciones[74].

El rol del profesor

Al analizar los registros hemos priorizado las producciones de los alumnos, dejando de lado el papel que jugó el profesor. No obstante, en varias ocasiones fue necesario tener en cuenta las intervenciones de éste para explicar las elaboraciones de los estudiantes. Por ejemplo, en algunos momentos el profesor imprimió cierta movilidad a las discusiones al plantear contra-ejemplos o contra-argumentos, al mantener en la discusión las voces de alumnos que se diluían, al hacer ver los conflictos que subyacían a las discusiones, al formular de otra manera las participaciones de los alumnos, o sus propias preguntas, haciendo ver nuevas relaciones.

Estas formas de participación del maestro muestran que sus decisiones estuvieron no sólo en función de los alumnos, sino también de sus propios conocimientos matemáticos y, por otra parte, de las posibilidades y límites que ofrecía el diseño de las situaciones didácticas. Nos detendremos un momento en esta última característica: en algunos de los fragmentos que hemos analizado queda la impresión de que el maestro imprimía al curso de la sesión una orientación poco fértil para el enriquecimiento del conocimiento matemático que se estaba elaborando. No obstante, estas decisiones del maestro respondían a ciertas características del diseño, por ejemplo: ante la ausencia de una situación que permitiera establecer la identidad entre el 100% y el total fue necesario que él aportara directamente esta información, a pesar de que hubo alumnos que no

---

[74] En las conclusiones veremos una síntesis de algunos elementos de las concepciones sobre el porcentaje que manifestaron los estudiantes.

fueron convencidos; el escaso trabajo previsto sobre las técnicas dio lugar a la manera en que el profesor admitió el operador decimal a pesar de que éste era muy débilmente sustentado; la dificultad que enfrentamos en el diseño respecto a la construcción de dispositivos de validación incidió en que el profesor sostuviera esta tarea en preguntas que no necesariamente implican una verdadera devolución a los alumnos de la necesidad de justificar y que no ofrecen criterios para resolver los desacuerdos, como: *"explícame por qué", "¿qué opinan los otros?", "¿crees que está bien, o no está bien?", "¿de acuerdo?" "¿cómo saben que sí sale?"*[75].

Vemos entonces que las decisiones del profesor están imbricadas tanto con las actuaciones de los estudiantes como con las situaciones didácticas.

Algunos límites y posibilidades del diseño de la secuencia didáctica

El análisis de la secuencia fue útil en dos sentidos: por un lado, desde el punto de vista de nuestra investigación, pues pudimos estudiar los conocimientos de los que los alumnos ya disponían sobre el porcentaje, de una manera distinta a lo que hicimos a partir de los cuestionarios y entrevistas. Por otro lado, desde el punto de vista de la fertilidad de las situaciones para el aprendizaje de los estudiantes, analizamos las características de estas situaciones que efectivamente abrieron posibilidades para el aprendizaje, y también las que se mostraron insuficientes para ciertos alumnos, y para determinadas dificultades. A continuación resumimos estos dos aspectos.

Encuentros y desencuentros de interpretaciones del porcentaje

El análisis de la secuencia didáctica nos permitió estudiar de qué manera los estudiantes articulan las fracciones con los decimales y, en menor medida, con la proporcionalidad, así como las dificultades que encuentran en este proceso. Es decir, la aplicación de la

[75] Cabe aclarar que, si bien las acciones del profesor no pueden entenderse sin mirar las características de las situaciones, tampoco podemos exagerar este planteamiento al punto de pensar que cualquier decisión del maestro debería estar contemplada en el análisis a priori: no todo lo que sucede es provocado por las situaciones. Al respecto, Artigue (1995) señala una dificultad teórica y metodológica en la ingeniería didáctica, que consiste en que, al no lograr una apropiada consideración del profesor, haciéndolo intervenir en el análisis previo "como si la situación lo determinara por completo como actor del sistema", se afecta la validación de la metodología, y más aún, la propia construcción del objeto de estudio: "si el análisis a priori es principalmente a-didáctico y si una parte esencial de los procesos pertinentes se escapan a este registro, ¿qué permite entonces validar o invalidar en realidad la confrontación entre el análisis a priori y a posteriori?, o aún más: si para adaptarse a esta metodología, las situaciones de ingeniería están por necesidad fuertemente restringidas, ¿qué nos permiten tales situaciones "captar" como fenómenos didácticos?" (p.47)

secuencia didáctica sobre el porcentaje nos brindó una ocasión para estudiar ciertos aspectos de la problemática didáctica de las tres nociones de manera conjunta.

La forma de hacerlo fue analizando las relaciones entre las características de las tareas que se plantearon a los alumnos, las técnicas que éstos pusieron en juego para resolverlas y los recursos —implícitos o explícitos— de los que disponían —o que necesitaban construir— para justificar y fortalecer sus procedimientos. Intentaremos ahora resumir estas relaciones.

En un inicio, ante la tarea de aplicar el 50% o 25% a cantidades numéricas, el operador fraccionario y el decimal eran vistos por algunos alumnos como tan distintos uno del otro que no podían admitir que ambos pudieran ser correctos. Fue a partir de la constatación de que los dos procedimientos arrojan los mismos resultados que empezaron a establecerse algunas relaciones, como, por ejemplo, multiplicar por 0.50 o por 0.25 es lo mismo que obtener la mitad o la cuarta parte, respectivamente. Esto resultó útil para facilitar algunos cálculos: es más sencillo el uso de una fracción unitaria que una multiplicación por un decimal.

Todas las técnicas que circularon en las confrontaciones grupales presentaron algunos límites, que generalmente se resolvieron recurriendo a otro procedimiento:

- La dificultad para determinar la fracción asociada al 20% llevó a algunos a estimar;
- La débil legitimidad depositada en la estimación, la dificultad para comunicar una variante de CP-i[76] y para utilizar fracciones, propiciaron el uso del operador decimal, que parecía de fácil generalización, aunque estuviera dotado de poco sentido;
- La no utilidad del operador decimal en el registro gráfico provocó la recuperación de la fracción en dicho registro (lo que propició el traslado de esta técnica al numérico);
- Al no identificar el origen del error producido por el uso del operador para calcular el 5% (multiplicar por 0.5 y no por 0.05), los alumnos recurrieron al complemento aditivo, caso particular de CP-i

Estos ejemplos muestran, por un lado, que las limitaciones en unas técnicas favorecieron la emergencia de otras, pero por otro lado que con esta manera de salvar las

[76] Consiste en establecer una relación de proporcionalidad a partir de la identificación de la cantidad inicial con el 100%

dificultades de cada técnica —recurrir a un procedimiento distinto al que las originaba—, se evitaba la necesidad de fortalecer precisamente la técnica en la que se presentaba el problema.

A esto último se debe en parte la fácil aceptación del operador decimal en el registro numérico, dado su alcance, pero en detrimento del sentido. Además, en el análisis a priori no consideramos el carácter tan implícito que jugarían las relaciones que subyacen al uso de las fracciones (por ejemplo, no consideramos problemática la emergencia de la pregunta ¿qué parte de 100 es 20? para encontrar el 20%), tampoco previmos que algunos estudiantes dispondrían únicamente del operador decimal, por lo que no pudieron utilizar el operador fraccionario para regular el carácter mecánico en el uso del primero. Así, las situaciones ofrecían pocas salidas en las discusiones grupales ante tareas como determinar el 20% de una cantidad numérica, lo que facilitó la emergencia, débilmente justificada, del operador decimal y la inhibición de otras técnicas.

Características de las situaciones que hacen emerger la identidad entre el porcentaje y la medida

Hemos visto a lo largo de este trabajo que una de las principales fuentes de dificultades reside en la concepción errónea del porcentaje como medida (es decir, como cantidad absoluta), que los estudiantes manifestaron en diversas situaciones. En lo que sigue destacamos algunas características y regularidades de estas manifestaciones.

- El tipo de tareas

La interpretación del porcentaje como cantidad absoluta parece propiciarse con mayor fuerza en las tareas de tipo 2 y 3 (encontrar la tasa o la cantidad inicial) que en la tarea de tipo 1 (encontrar la cantidad que resulta de aplicar porcentajes), lo cual es coherente con el hecho de que las tareas 2 y 3 son, como vimos en el cuestionario, considerablemente más complejas que la 1. Cabe señalar, no obstante, que dicha correlación se manifestó sobre todo en la aplicación de la secuencia, no tanto en la de los cuestionarios y las entrevistas y que, por lo tanto, pudieron haber intervenido también otros factores, por ejemplo, el hecho de que las tareas 2 y 3 tuvieron más presencia en la secuencia didáctica que en el cuestionario[77], o el hecho de que, en la secuencia tuvimos poco acceso a las resoluciones de varios alumnos, quienes además prácticamente no participaban en las discusiones colectivas.

- Variación en los totales que representan al 100%

Las situaciones en las que identificamos la interpretación del porcentaje como cantidad absoluta tienen una característica común que parece ser relevante: los totales que sirven como referencia a los porcentajes varían: se compara un mismo rasgo en dos universos distintos (situaciones que se comentaron en el inciso C), se pide conservar una misma forma en figuras de diferentes tamaños (inciso *D)*, la tarea es determinar la parte iluminada en varios terrenos (inciso *E)* o recuperar tres totales conociendo una parte de cada uno (inciso *F)*. En todos los casos, la manifestación del porcentaje como absoluto aparece cuando los alumnos hacen comparaciones externas, es decir, entre dos totales distintos, sin considerar la relación interna, entre un total y una parte de él: si las familias de clase alta gastan el 21% de sus ingresos en alimentos y las de extrema pobreza el 48%, los segundos gastan *más dinero* en comida; si el 25% de una bandera está pintado de azul, en otra bandera con la misma forma pero del doble de tamaño, la parte azul

[77] Además, en el curso de las sesiones muy rápidamente se legitimó el uso del operador fraccionario y decimal, lo que pudo haber contribuido a inhibir otros procedimientos

debe ser el 50%; si en un rectángulo una parte sombreada representa el 20% y mide 1 centímetro de alto, y en otro rectángulo de distinto tamaño la parte sombreada mide 2 centímetros, entonces ésta debe ser el 40%; si la parte sombreada es mayor en un terreno que en otro, el terreno completo también debe serlo.

- La identificación entre el 100% y el total

En varias ocasiones se presentó, con mayor o menor grado de explicitación, la pregunta ¿el 100% corresponde o no al total? Incluso hubo momentos en los que algunos alumnos, si bien asumieron esta identidad explícitamente, en las maneras de resolver tareas donde juega un papel implícito dejaron ver que todavía la ponían en duda. En el análisis a priori supusimos que la asociación del total con el 100% estaría dada, o en todo caso que no sería problemática para los alumnos si el profesor se las proporcionaba directamente[78]. No obstante, el análisis de la experiencia didáctica deja ver lo contrario: responder correctamente la pregunta *¿el 100% corresponde al total?* implica saber que el porcentaje no es absoluto sino relativo. Proporcionar la respuesta a los alumnos, e incluso el que ellos la plantearan explícitamente en algunos casos, no fue de ninguna manera suficiente para que ellos establecieran el carácter relativo de la noción. Es decir, no parece posible partir de la asociación entre el todo y el 100% para después construir al porcentaje como una relación, pues dicha identificación supone precisamente la negación de la medida. El porcentaje como relativo y la identificación entre el total y el 100% no son entonces construcciones consecutivas —no se obtiene una a partir de la otra— sino paralelas.

Las dificultades en estas construcciones se hicieron especialmente visibles a partir de la segunda característica de las situaciones de porcentaje que hemos mencionado: cuando en la situación hay varios totales en juego y no uno solo, es decir, cuando este dato es variable, la relación del total con el 100% se vuelve problemática, pues hace emerger algunas propiedades que se contraponen a lo que sucede cuando se trabaja con cantidades absolutas: a mayor tamaño no necesariamente le corresponde un mayor porcentaje, distintas porciones (de diferentes totales) pueden asignarse a un mismo porcentaje, o por el contrario, tamaños iguales (de totales distintos) pueden corresponder a diferentes porcentajes, entre otras. Por lo tanto, la identificación entre la cantidad inicial y el

[78] Las técnicas no canónicas que los alumnos utilizaron con mayor frecuencia en el cuestionario y las entrevistas implicaban una identificación entre el 100% y el total. En el caso de alumnos que trataban al porcentaje como absoluto en el registro numérico, en el gráfico sí lograban considerar que la superficie total era el 100%.

100% en estas situaciones exige fuertemente considerar el carácter de razón que subyace al 100 (100 de 100, o 100/100).

La debilidad de los recursos de validación: una consecuencia de abordar directamente el porcentaje

Cuando nos enfrentamos a la tarea de diseñar e implementar la secuencia vislumbramos dos opciones: la primera consistía en comenzar por el estudio de la proporcionalidad para intentar albergar en éste al porcentaje, el cual cobraría entonces un sentido como razón, en el marco de la resolución de cierto tipo de problemas de proporcionalidad, por ejemplo, de comparación de razones. No obstante, esto hubiera implicado un proceso largo en el que nos habría quedado escaso tiempo para el trabajo específico con el porcentaje: habríamos establecido un rico escenario para hacerlo entrar en escena pero no habríamos tenido tiempo de trabajar sobre él. Así que elegimos una segunda opción, que consistía en abordar directamente el porcentaje, apostando a que sobre la marcha podríamos recuperar los conocimientos sobre esta noción que los estudiantes de secundaria ya tendrían.

Esta decisión implicó ciertas ventajas y limitaciones sobre la primera opción. Anteriormente vimos las ventajas en términos de los fenómenos que la implementación nos permitió observar. Desde el punto de vista didáctico, analizamos algunas características de las situaciones que se han mostrado relevantes. La principal limitación de la secuencia en cuanto a la fertilidad de las situaciones para el aprendizaje de los estudiantes, reside en las escasas posibilidades que se abren para validar. Veamos por qué.

Si bien se previeron diversos recursos para validar, la decisión de abordar directamente la noción de porcentaje implicó plantear a los alumnos situaciones en las que la verificación implicaba ya ciertos conocimientos sobre el porcentaje mismo[79], los cuales frecuentemente no estaban disponibles para los alumnos. Así, quienes no contaban con ellos no recibían la retroalimentación esperada.

Las formas de verificación que contemplamos en el análisis a priori fueron las siguientes: constatar que la suma de los resultados de la aplicación del 50%, 25%, 20% y 5% a una misma cantidad coincidiera con dicha cantidad; utilizar los resultados obtenidos en el registro gráfico para cuestionar la concepción del porcentaje como absoluto en el numérico; contrastar el uso del operador fraccionario en lo gráfico con el del operador decimal en lo numérico para corregir los errores producidos por el segundo; y finalmente, hacer confrontaciones grupales de las distintas resoluciones.

[79] Se formulan, por ejemplo, con la palabra “porcentaje”

Estas formas de validación se llevaron a cabo —a veces de manera espontánea por parte de los alumnos y otras veces propiciadas por el maestro— , aunque surgieron dificultades como las siguientes: 1) si bien consideramos un acierto haber planteado situaciones en las que no aparece un porcentaje aislado sino un conjunto de porcentajes que sumen el 100%, pues esto permite verificar a partir de la propiedad de la coincidencia de la cantidad inicial con la suma de las distintas aplicaciones, también observamos la necesidad de acotar el uso de dicha propiedad, ya que frecuentemente fue usada no sólo como una condición necesaria de la correcta aplicación de porcentajes, sino también como condición suficiente; 2) el registro gráfico no pudo erigirse como un medio de verificación debido a que la concepción del porcentaje como absoluto también se manifestó en dicho registro y a que algunos alumnos dejaron ver que sus conocimientos sobre el porcentaje estaban fuertemente atados al registro numérico y tenían pocos recursos en el gráfico, o bien le conferían a éste un carácter subvalorado frente al registro numérico; 3) el operador fraccionario fue utilizado por los estudiantes sin la puesta en juego de elementos tecnológicos que permitieran ampliar su alcance, por lo que se debilitó su posibilidad de cuestionar o fortalecer al operador decimal; y 4) la interacción a nivel grupal se dio a partir de ciertas formas que al parecer el grupo ya tenía establecidas, varios alumnos eran poco visibles en los momentos de discusión y otros lo eran demasiado.

En cuanto a esta última forma de verificación, la de las interacciones grupales, cabe destacar que en el diseño de la secuencia no prestamos la suficiente atención a la creación de mecanismos de comunicación que permitieran a varios estudiantes tener una participación más activa en las confrontaciones grupales y que ofrecieran al profesor mayor posibilidad de lograr verdaderos consensos. Por ejemplo, quizás hubiera sido más fructífero devolver a los equipos algunas discusiones antes de llevarlas a cabo a nivel grupal, poniendo a los estudiantes en el papel de evaluadores de los procedimientos de los otros.

Esta tarea de construir una fértil gestión de las discusiones colectivas nos parece un reto difícil: sabiendo que los alumnos cuentan con distintas maneras de mirar los argumentos, no es nada sencillo lograr que observen, por ejemplo, lo que necesitan probar a otros, lo que puede darse por sentado, los conflictos que están detrás de las discusiones.

A pesar de las dificultades para construir dispositivos de validación, cabe destacar que, como vimos en el apartado anterior, las situaciones de la secuencia propiciaron de manera especial —distinta a las situaciones que estudiamos a partir de la aplicación del cuestionario y las entrevistas— la manifestación de la interpretación del porcentaje como cantidad absoluta. Los estudiantes pudieron enfrentar el hecho de que distintas cantidades pueden ser asignadas a un mismo número: en varias ocasiones emergió la pregunta ¿el 100% corresponde o no al total? Así, el conflicto se presentó de una manera clara a los estudiantes, la dificultad estribó en que las situaciones ofrecían pocas posibilidades para resolverlo.

En síntesis, la decisión de abordar directamente el porcentaje fue útil desde el punto de vista de nuestra investigación, pues nos permitió distinguir las formas de articulación o desvinculación entre las distintas nociones asociadas al porcentaje que ponen en juego los estudiantes. Desde el punto de vista de la fertilidad de las situaciones, por un lado, éstas tienen la virtud de hacer emerger el conflicto entre las cantidades absolutas y las relativas, aunque por otro lado ofrecen escasos recursos para resolverlo, debido a la debilidad en los dispositivos de validación.

Conclusiones

Nuestro trabajo estuvo orientado por los propósitos de configurar una radiografía de la noción de porcentaje, es decir, un análisis desde el punto de vista didáctico de este concepto y sus vínculos con otros, como punto de partida para explorar algunos rasgos de los conocimientos de estudiantes relativos al porcentaje, poniendo atención en las relaciones entre estos conocimientos y las características de las situaciones en las que se ponen en juego. Puesto que cada capítulo muestra la complejidad del porcentaje a partir de un ángulo particular, algunas de las conclusiones de esta investigación son en realidad específicas de una de sus componentes y por lo tanto se presentan en los comentarios del capítulo correspondiente.

En este espacio intentamos destacar dos aportes de nuestro trabajo al campo de investigación en didáctica de las matemáticas. En primer lugar hablamos del componente social del proceso de aprendizaje en el aula, es decir, la manera en que la elaboración del conocimiento se entreteje con las formas de interacción que se configuran en la clase. La perspectiva teórica que hemos asumido en este trabajo constituye una mirada que posibilita este análisis, es decir, problematiza el conocimiento matemático, y éste es considerado como la producción de un grupo, por lo tanto se inserta en el entramado de relaciones sociales que se configuran en el aula. Cabe mencionar que esto se vuelve visible únicamente a partir del análisis de la implementación de la secuencia didáctica, lo que marca una clara diferencia entre las formas de mirar los conocimientos manifestados por estudiantes cuando el acercamiento se realiza a partir de un cuestionario y entrevistas, y cuando se lleva a cabo analizando lo que ocurre en una clase de matemáticas. En segundo lugar, resumimos algunos rasgos de las interpretaciones que los alumnos mostraron sobre el porcentaje, y las características de las situaciones que inhiben o hacen emerger tales concepciones. Consideramos que este punto aglutina algunos aspectos estudiados a lo largo de toda la tesis.

La imbricación entre las formas sociales y la fabricación del conocimiento

A lo largo del último capítulo hemos presentado algunos episodios que muestran cómo el conocimiento que se produce en la clase está condicionado por —y a su vez, condiciona a— el juego entre las maneras en que los estudiantes se presentan ante los demás y son vistos por ellos. Algunos de los ejemplos más claros fueron los siguientes: el descrédito casi instantáneo hacia algunas participaciones que provienen de alumnos poco reconocidos, generalmente mujeres; la tendencia del grupo a delegar en dos estudiantes el trabajo de resolución, comunicación y validación en las discusiones colectivas; la propensión de ciertos alumnos que, ante las escasas herramientas con las que cuentan para abordar una situación, desvalorizan sus producciones, lo que los vuelve fuertemente susceptibles a abandonarlas ante el primer cuestionamiento y a retomar las de los demás sin analizarlas previamente, pero desde ese punto se vuelven capaces de hacer elaboraciones propias; la timidez para presentar públicamente ciertas técnicas que se consideran poco legítimas; la disposición para retomar proposiciones establecidas —pero no justificadas— en las discusiones grupales, proposiciones que no obstante habían sido rechazadas cuando fueron planteadas por uno o dos compañeros en el trabajo por equipos; la legitimación ante un compañero del uso del operador decimal apelando a su prestigio cuando hay inseguridad sobre una técnica distinta[80].

Lo anterior implica que el posicionamiento social de cada alumno frente al resto del grupo, —y también la forma de participación que asume en la resolución de una tarea— inciden en la manera en que cada quien recupera las elaboraciones y las normas que implícita o explícitamente se ponen en circulación: éstas no transitan libremente pues los miembros de la clase, además de juzgar su contenido matemático desde el conocimiento del que disponen, también las someten a una valoración social. En resumen, el grado de presencia que cobran las producciones de los estudiantes, y la forma en que estas operan en el trabajo posterior varían al interior de la clase. Y esto concierne tanto a las sentencias que se van incorporando al cuerpo de conocimientos matemáticos como a la representación interna que los alumnos se van configurando en relación a la actividad matemática, esto es, al conjunto de normas que conforman el contrato didáctico. Por ello, no podemos asumir que dicho contrato constituye un todo coherente, a partir del cual todos los estudiantes interpretan y se relacionan con la actividad matemática de manera uniforme,

[80] Cabe aclarar que estas formas de producción de conocimiento no son independientes de las características de las situaciones didácticas. Al no haber dispositivos que promuevan, por ejemplo, la validación de las producciones como una tarea que involucra a todos los miembros del grupo y que es necesaria para que las situaciones lleguen a buen término, esta actividad se vuelve una demanda ajena, prescindible, y la clase echa mano de los recursos que le resultan más inmediatos para llevarla a cabo. Es decir, las formas de interacción social responden a las posibilidades abiertas por la situación didáctica: no es posible asignarles un carácter determinante a dichas formas y establecer, por ejemplo, que no hay manera de lograr que los estudiantes se hagan cargo de un trabajo de validación. No obstante, tampoco sería certero asumir que la postura de los estudiantes frente al trabajo matemático está completamente determinada por la situación. Por el contrario, cualquier diseño tendrá que insertarse en un complejo entramado de relaciones establecidas entre los miembros de la clase.

independiente de la posición social que cada quien ocupa frente a la clase: las normas socio-matemáticas contenidas en el contrato no son compartidas por todos, y cuando lo son, no se asumen con el mismo grado de adhesión. Son distribuidas diferencialmente al interior de la clase, y por lo tanto también lo son las posibilidades de acceso al conocimiento que ofrece una misma situación.

Por ejemplo, en diferentes fragmentos de este trabajo hemos mostrado que no todos los alumnos asumen con la misma contundencia el uso del operador decimal —es decir, no todos asumen el papel de aplicar técnicas canónicas provistas de antemano—, o la exigencia de argumentar a favor de lo que se propone, o por el contrario, el papel de proveedores de respuestas que no requieren justificación, o el hecho de que puede haber distintos procedimientos correctos para un mismo problema.

Lo anterior no quiere decir que los significados contenidos en el contrato didáctico sean estrictamente individuales. Por el contrario, son una construcción colectiva, pero ello no implica uniformidad ni coherencia: cada sujeto se posiciona frente a ellos y los interpreta de una manera propia.

Consideramos que el carácter diversificado con el que los estudiantes asumen las normas que rigen el contrato didáctico, y sus implicaciones en cuanto a la diferenciación en las posibilidades de acceso al conocimiento que una situación ofrece a los alumnos, si bien se percibe en algunos trabajos, no se encuentra de manera explícita en las definiciones de la noción de contrato didáctico. En ellas suele enfatizarse fuertemente su carácter temporal, cambiante, sujeto a continuas rupturas y renegociaciones. No obstante, durante el tiempo en el que funciona un contrato, pareciera ser un sistema —absoluto— que incide de la misma manera en las elaboraciones de todos los alumnos.

Lo anterior puede estar vinculado a una advertencia que hace Sadovsky (2003):

> Al plantear las interacciones básicas que se modelizan en la Teoría de Situaciones, hemos considerado las del alumno con un medio y las del docente con el alumno. Las interacciones entre los pares, aunque están presentes en casi todos los análisis de distintos trabajos experimentales realizados en el marco de la teoría, no están desde nuestro punto de vista suficientemente conceptualizadas (p.25)

Y agrega que las interpretaciones hechas a partir de las intervenciones de los pares forman un continuo que puede ir desde un argumento de autoridad, asimilable a un efecto del contrato didáctico, hasta una retroacción similar a las del medio, en el sentido de que realmente modifican el sistema de decisiones del alumno, de tal suerte que no pueden encasillarse en ninguna de las dos formas de interacción contempladas en la teoría. Nos parece que al no poder aprehender realmente las interacciones entre alumnos, tampoco se vuelven observables sus efectos en la configuración del contrato didáctico.

Concepciones de los estudiantes sobre el porcentaje

Presentamos primero una síntesis y algunas reflexiones sobre las concepciones de porcentaje que pudimos identificar en el desempeño de los estudiantes, tanto a través del cuestionario y las entrevistas, como de la experiencia de ingeniería didáctica. Enseguida, hacemos un comentario sobre posibles dificultades con nociones de matemáticas vinculadas estrechamente a la de porcentaje, pero que son anteriores a ésta.

Elementos de las concepciones sobre el porcentaje manifestadas por los estudiantes

Una noción matemática admite diversas interpretaciones, que pueden emerger de distintas formas: cuando el sujeto las moviliza y las pone en funcionamiento de manera implícita al actuar sobre una situación, cuando las formula a través de la proposición de hipótesis, cuando las valida y las vuelve explícitas a partir de los argumentos que esgrime al tratar de convencer a los demás. (Artigue, 1989; Douady, 1980; en Artigue, 1989)

El significado que adquiere una noción matemática está estrechamente ligado a las situaciones en las que funciona: cada concepción pone de relieve algunos aspectos del concepto mientras que deja otros de lado, y por lo tanto, está mas adaptada a unas situaciones que a otras. Así, un sujeto que dispone de cierta concepción es capaz de resolver determinadas situaciones pero fracasa en otras que también implican a la noción en juego. (Brousseau, 1980b)

Desde otra perspectiva, Comin (2002) plantea que para identificar empíricamente concepciones distintas de un mismo saber, es necesario que los procedimientos contrapongan a dos grupos de estudiantes:

> Empíricamente, una concepción se manifiesta por un conjunto de respuestas similares y coherentes dadas a un conjunto de preguntas, por un grupo de alumnos suficientemente numeroso y suficientemente distinto de otros grupos que proporcionan al mismo conjunto de preguntas respuestas también similares y coherentes entre ellas pero diferentes de las primeras. (p. 141)

A continuación presentamos algunos rasgos de las concepciones que los estudiantes dejaron ver a partir de las resoluciones al cuestionario, entrevistas y su participación en las sesiones de la secuencia didáctica. Cabe aclarar que: a) las concepciones suelen tener un componente implícito, que no siempre se vuelve visible en la acción del sujeto b) distintos alumnos manifiestan distintos grados de adhesión a una misma concepción y c) no contamos con suficientes datos para mostrar que un grupo numeroso de alumnos proporciona respuestas coherentes a un conjunto amplio de situaciones con ciertas características, de tal manera que estas resoluciones se aglutinen en concepciones claramente determinadas. Por lo anterior, no pretendemos caracterizarlas absolutamente, sino únicamente indicar aquellos elementos que las situaciones hicieron emerger.

Definiciones del porcentaje

En el capítulo 1 establecimos *a priori* algunas concepciones del porcentaje, a partir de las definiciones que puede admitir dependiendo —en parte— de la obra matemática desde la que se mira esta noción. Estas caracterizaciones del porcentaje nos han sido útiles para interpretar el comportamiento de los estudiantes ante algunas situaciones, lo que no significa que estemos planteando la existencia de una correspondencia exacta entre las concepciones identificadas a priori con las que manifiestan los alumnos. El que un estudiante apele a una definición del porcentaje en sus resoluciones no implica que domine con profundidad dicha definición: puede utilizarla de manera implícita, en un ámbito restringido de tareas, o sin explicarse su funcionamiento.

En el análisis de la aplicación del cuestionario, entrevistas y la secuencia didáctica encontramos las siguientes:

- El porcentaje como razón

Llama la atención que prácticamente está ausente la interpretación del porcentaje como una razón de tipo «tantos de cada 100». Únicamente dos alumnos utilizaron la técnica CC-i o CC-e, que son las que emplean esta razón, al aplicar porcentajes a cantidades numéricas. Waldo incluso la explicitó al mencionar que en un descuento del 25% “te quitan 25% por cada 100 de lo que debes pagar”.

- El porcentaje como relación que asocia un total con el número arbitrario 100

Para resolver los tres tipos de tareas básicos, algunos estudiantes utilizaron técnicas que parten de una identificación de la cantidad inicial con el 100%:

a) Todos los que emplearon reglas de tres, siempre acomodaron los datos asociando la cantidad inicial con el 100%. De hecho, una de las fuentes de errores en el uso de este procedimiento consistió precisamente en la dificultad para establecer las relaciones entre los datos.

b) Los estudiantes que emplearon gráficas circulares, partían designando a la cantidad inicial con el 100% y con una superficie. Miriam, por ejemplo, hizo explícitas estas relaciones al tratar de determinar cuánto hay que pagar por una grabadora que cuesta $200 pero se ofrece al 30% de descuento: “el precio total de la grabadora es el 100%”, “es como si fuera el precio de la grabadora, los 200, éste (señalando la gráfica circular completa) es el precio de la grabadora”. Una vez establecidas estas relaciones, se derivan dos relaciones de proporcionalidad: entre cantidades de superficie y porcentajes, y entre cantidades numéricas y porcentajes. La segunda, que se ubica en el registro numérico, fue difícil de utilizar.

c) El uso de la técnica CP-i comienza con la identificación del total con el 100%, para después emplear las razones internas de la relación de proporcionalidad que se desprende de la identidad anterior. El empleo que hacen los estudiantes de estas razones es diversificado, y generalmente se restringe a ciertas relaciones específicas: algunos calculan mitades, dobles, sumas y después estiman, otros disminuyen los porcentajes de *n* en *n* y de las cantidades de *m* en *m* y otros más parten del cálculo del 10%.

Los resultados de la secuencia didáctica han mostrado que este conocimiento (“*el 100% es la cantidad total”*) es importante y difícil de adquirir: al parecer, a la vez que es condición para poder desarrollar procedimientos diversos, correctos, es consecuencia de entender cierta idea de razón como intrínseca al porcentaje.

- El porcentaje como un operador fraccionario

Al parecer, algunos alumnos vinculan a ciertos porcentajes como el 50%, 25%, 20% y 10% con la mitad, cuarta parte, quinta parte y décima parte, respectivamente, de la cantidad inicial. Así, en estas ocasiones el porcentaje es visto como fracción, una parte del total, lo que a veces explicitan al mencionar, por ejemplo, que el 25% “es la mitad de la mitad”.

El uso de las fracciones se da en los tres tipos básicos de tareas —aunque más frecuentemente en la de aplicar porcentajes—, planteadas tanto en el registro gráfico como en el numérico, pero está restringido a fracciones unitarias y en algunos casos a fracciones del tipo $1/2^n$. Cuando aparecen porcentajes como el 30%, estos alumnos responden como si se tratara de una cantidad absoluta, dividen la cantidad inicial entre el porcentaje, o bien recurren a estimaciones. Destaca el caso de Alan y Jonathan, quienes al no identificar la fracción asociada al 20% hacen una estimación, pero proponen algunos operadores, más en tono de pregunta —de posibilidades a probar— que de certeza: "¿la mitad de la mitad?", "la mitad a la cuarta parte". Para ellos hay una diferencia drástica entre el 50% y el 25% por un lado, y el 20% por otro: las fracciones asociadas a los primeros parecen ser evidentes, mientras que la tercera es inasible. Probablemente esto se debe a que el 20% no es calculable mediante mitades sucesivas y también al carácter fuertemente implícito con el que se manejan las relaciones que hacen que el 50% y el 25% se asocien a ½ y ¼.

En algunos casos es claro que no todos apelan al porcentaje entendido como fracción. Por ejemplo, mientras que Alan y Jonathan usan las fracciones y de entrada se niegan a admitir otro procedimiento —el operador decimal—, para Mario y Fabián es exactamente al revés. Solo después de un tiempo, con sorpresa, observan una relación, al parecer nueva para ellos: "¡ah, pues era la mitad!".

Dos condiciones parecen favorecer o dificultar la puesta en juego de la interpretación del porcentaje como fracción, a saber, el tipo de fracción, como ya hemos mencionado, y también el tipo de registro: las fracciones cobraron presencia sobre todo cuando las cantidades eran superficies —y no números—, pues ahí no había una utilidad inmediata de la técnica del operador decimal.

- El porcentaje como operador decimal

Esta definición se refleja en las resoluciones de los alumnos que para calcular, por ejemplo, el 50% de 400, multiplican 400 por 0.50. Esta técnica se utiliza con cantidades numéricas, y puede estar muy desvinculada de las resoluciones en el registro gráfico, donde algunos estudiantes, ante la tarea de aplicar el 50%, 25%, 20% y 5% a una superficie rectangular, no consideran las relaciones parte-todo entre cada porcentaje y el total, más bien hacen estimaciones, cuidando únicamente de preservar el orden de los porcentajes.

Tenemos indicios de que el operador decimal es débilmente dotado de sentido por quienes lo emplean: es evocado como una serie de operaciones inexplicables ("*aquí se dividía, y si no alcanzaba te daba un cero o algo así*"), se recupera a partir de búsquedas azarosas (*"¿vamos a sumar?", "¿podemos multiplicar?", "le ponemos punto acá ¿no?")*, o bien a partir de una generalización rápida, poco comprensible (si el 50% y el 25% se asignan a 0.50 y 0.25, entonces el *x*% corresponde al operador 0.*x*), se utiliza en tareas donde no es pertinente, entre otros. Es decir, el uso del operador no implica una comprensión de la compleja noción de multiplicación por decimales, más bien parece ser visto como un algoritmo muy similar al de la multiplicación por naturales, por lo que quizás también asumen al porcentaje como un natural, una medida.

No obstante, el operador decimal cobró una fuerte presencia en el registro numérico, a costa del sentido, debido por un lado a su aparente facilidad, y por otro a las dificultades en la elaboración y circulación de otras técnicas.

Una definición errónea

- El porcentaje como cantidad absoluta

Esta concepción errónea del porcentaje —verlo como una medida, como una cantidad absoluta y no como una relación entre dos números o entre dos conjuntos de números— se manifiesta en prácticamente toda la diversidad de situaciones que planteamos a los estudiantes: afirman que 40% es igual a $40 (incluso, dos alumnas parecen conferir al signo % un significado no matemático, como una forma de indicar que hay un descuento en los precios de mercancías), restan porcentajes a cantidades como si ambos tuvieran el mismo estatuto, entre un descuento de $100 y uno de 25% eligen el de $100, al comparar dos partes de distintas superficies asignan a la más grande un porcentaje mayor sin considerar la relación entre cada parte y la superficie total correspondiente —aún cuando esto lleve a asignar, en una misma superficie, porcentajes distintos a partes iguales—, afirman que la cantidad asociada a un 48% es más que la asociada a un 21% sin considerar que los porcentajes provienen de dos totales de referencia diferentes, en el lenguaje mezclan las cantidades absolutas con las relativas: el total “son cien metros de terreno”. Algunos estudiantes manifiestan esta interpretación del porcentaje como cantidad absoluta prácticamente en cualquier situación, mientras que otros lo hacen solamente en situaciones con determinadas características.

Algunas de las características de las situaciones que influyen en la emergencia de esta interpretación son: a) el tipo de registro: aunque tanto en el gráfico como el numérico se manifiesta un uso del porcentaje como absoluto, el primero parece propiciar en mayor medida la idea de razón, b) el tipo de tareas: puesto que es más difícil establecer las relaciones entre los datos cuando se trata de determinar la tasa o la cantidad inicial que la cantidad final, varios estudiantes resuelven satisfactoriamente las tareas de este último caso, mientras que en los dos primeros emplean recursos como sumar o restar un precio a un porcentaje, c) el tipo de fracción: hemos visto que con las fracciones unitarias o del tipo $1/2^n$ los estudiantes tienden a poner en juego la idea de razón con más frecuencia que con las otras fracciones, con las cuales, en cambio, es más frecuente la idea de una medida, d) el tipo de técnica utilizada: la fracción parece favorecer la idea de porcentaje como razón constante en mayor grado que el operador decimal, el cual más bien propicia la acepción de esta noción como número absoluto, e) una característica que permite cuestionar al porcentaje como medida es la aplicación de un porcentaje a varias cantidades, pues hace emerger la pregunta ¿el 100% es el total o no?

<u>Restricciones en el uso del porcentaje a ciertos tipos de relación</u>

Encontramos en las respuestas de los alumnos algunos rasgos de sus concepciones que no se pueden vincular directamente a alguna definición del porcentaje pues no atañen al núcleo del concepto, no lo caracterizan, más bien evocan un aspecto específico del mismo, a saber, el tipo de relación que puede describir un porcentaje. Estos elementos de las concepciones se perciben en las formulaciones de los estudiantes a propósito de un reactivo del cuestionario que implica porcentajes mayores al 100% (*¿Cuál de las siguientes frases no tiene sentido?: a) El pan cuesta ahora el 120% de lo que costaba el año pasado, b) En un año, ya con los intereses, hay que pagar al banco el 120% de lo que prestó originalmente, c) El 120% de los trabajadores de una fábrica son hombres*). Son los siguientes:

- El porcentaje en una relación parte-todo

Quizás los alumnos que consideran que no puede existir un porcentaje mayor al 100% conciben a esta noción como una manera de expresar la parte que representa un subconjunto del total, como plantea Miguel: "*porque si es el 120% tendría que haber 200% de todo y yo creo que el pan y las personas forman el 100% y no debe de pasarse*". Puesto que el subconjunto es menor al total y éste constituye el 100%, el porcentaje debe ser menor.

- El porcentaje como la transformación de un conjunto

Hay estudiantes que parecen interpretar al porcentaje como un aumento o disminución en un conjunto. El *x*% es una cantidad que se agrega o se quita a una cantidad inicial, como deja ver Fernanda: "*no tiene sentido, tendría que ser así como «el pan ahora cuesta 120% más de lo que costaba el año pasado» o algo así pero no tiene lógica*". Entre los alumnos que ven de esta manera al porcentaje, algunos admiten porcentajes mayores al 100% y otros no lo hacen.

- El porcentaje como comparación de dos cantidades

También aceptan que existen porcentajes superiores al 100% quienes lo conciben como una manera de expresar una comparación entre dos conjuntos ajenos mediante una razón. En este caso ninguna de las cantidades se transforma, simplemente se cuantifica la relación que guarda una respecto de la otra: "*a) está bien porque al 100 se le agrega el 20%, b) está bien porque mas el impuesto da el 120%, c) está mal porque la fábrica es de el 100 por ciento*".

En diversos momentos hemos enfatizado que estos diferentes significados de la noción de porcentaje no separan a la población de estudiantes en grupos disjuntos: un mismo alumno puede manifestar la disposición de distintas concepciones —aún cuando sean contradictorias—, que pone en juego en diferentes situaciones. Además, las concepciones que hemos caracterizado apelan a ciertos rasgos del porcentaje que en ocasiones se imbrican: el uso de la fracción puede facilitar la identificación entre el total y el 100% y el uso de la relación de proporcionalidad que se deriva de tal identidad, o por el contrario, el uso del operador decimal, por ser un algoritmo cuyo uso parece ser poco significativo para los estudiantes y con reglas muy similares a las que rigen la operatoria con números naturales, puede favorecer la interpretación del porcentaje como cantidad absoluta.

Cabe aclarar también que, si bien hemos establecido una pluralidad de interpretaciones o puntos de vista alrededor del porcentaje, intentamos identificar algunas relaciones entre estas interpretaciones y las características de las situaciones en las que se manifiestan, como punto de partida para poder entender, con mayor profundidad, las formas de funcionamiento de las diferentes concepciones, la vinculación entre su puesta en juego y su construcción, las posibilidades de tránsito entre distintas interpretaciones del porcentaje, las circunstancias bajo las cuales es posible su transformación. Es ahí donde, según Artigue (1989), reside la fertilidad de la noción de concepción.

Las nociones de medida y de relación en las matemáticas de la educación básica

En el análisis de las resoluciones del cuestionario, entrevistas y de la secuencia didáctica aparece frecuentemente una interpretación del porcentaje como una cantidad absoluta en vez de relativa. Este error forma parte de una problemática más amplia: la comprensión de la noción de cantidad relativa, o de razón, la cual se manifiesta de múltiples maneras en el estudio de la aritmética básica. Antes o al mismo tiempo que el porcentaje, los alumnos estudian los números naturales, los decimales, y las fracciones como expresiones de *cantidades* primero y de *relaciones* entre cantidades después. Es bastante conocido el hecho de que esta segunda acepción de los números —como relaciones, y en particular como relaciones multiplicativas— es más difícil de aprender y más difícil de enseñar, al grado que se registran frecuentes lagunas al respecto en los conocimientos de los estudiantes, incluso cuando se trata de números naturales (Vergnaud, 1988; Block, 2001). Cuando los números son fracciones o decimales la dificultad se incrementa de manera significativa. Como vimos en el Capítulo 1, la noción de multiplicación por racionales (fracciones o decimales) es muy compleja para los alumnos del nivel básico y tiende a no ser comprendida.

Lo que nuestro estudio parece confirmar es que las dificultades anteriores se siguen manifestando cuando la razón en juego asume la forma de un porcentaje, sobre todo frente a las tareas que son ligeramente más difíciles que aquella que consiste en aplicar un porcentaje sencillo. Una pregunta es si el estudio del porcentaje —y de otras nociones relativas como la probabilidad o las frecuencias relativas— en sexto grado de primaria, y en primer grado de secundaria podría asumirse como una nueva oportunidad, quizá la última, para enfrentar, en la escuela, estas dificultades.

Por otra parte, cabe hacer algunas observaciones acerca del grado en que las distintas expresiones del porcentaje favorecen la concepción del mismo como cantidad absoluta. La expresión con un número decimal es posiblemente la que más favorece dicha concepción debido a su uso frecuente y casi exclusivo, como expresión de medidas[81]. La expresión con un número seguido de la palabra “por ciento”, o del símbolo correspondiente (%), pese a su uso extraescolar frecuente, parece confundirse con cierta facilidad con el número mismo. La identidad errónea entre el porcentaje y la medida quizá se favorece por el hecho de que el cambio drástico a nivel conceptual entre una noción (medida, cantidad absoluta) y otra (razón, cantidad relativa) se representa, en la escritura, por una diferencia poco tangible: el signo %. Es decir, dicho símbolo no parece estar resumiendo la razón entre un número y 100 ni la función que éste cumple de referencia al total, relaciones que más bien quedan ocultas.

---

[81] Cabe notar que incluso en las resoluciones de los cuestionarios y en la secuencia que implementamos, los decimales aparecen en un algoritmo que sirve para aplicar porcentajes. Este algoritmo es muy parecido a la multiplicación por naturales, y es utilizado por alumnos que generalmente no comprenden su funcionamiento. No es difícil pensar entonces que quienes lo emplean, no necesariamente distinguen que el decimal ha dejado de jugar el papel de una medida.

Finalmente, la expresión con una fracción, sobre todo cuando se trata de las fracciones más simples, medios y cuartos, es la que probablemente mejor pone de relieve el carácter de razón del porcentaje, debido al hecho de que la interpretación de las fracciones como partes de unidad, cuya presencia en la escuela es importante, descansa en la idea de relación parte-todo (por ejemplo, al mencionar “la mitad de un terreno”, se hace referencia a una cantidad específica de terreno, pero también a una parte que depende del todo que la incluye y que por lo tanto varía con éste).

Sin embargo las fracciones suelen ser mal comprendidas por los estudiantes incluso en su papel de expresar medidas. Sería interesante saber entonces si el trabajo con fracciones en vez de con porcentajes suscita el mismo tipo de errores que hemos visto, por ejemplo, si al plantearles situaciones en las que los totales varían, como hicimos en la secuencia, ocurriría que nuevamente se ponga en duda la idea de relación (es decir, que los alumnos propongan respuestas como “si en la bandera mediana son 3/5 de rojo, en la grande deben ser 6/5”), o bien, si la dificultad de asociar el entero al 100% se manifestaría también, como dificultad para asociar el entero a la unidad.

En resumen, cabe preguntarse si el uso de las fracciones —por estar vinculadas a la relación entre una parte y un todo— propicia en mayor grado la idea de la conservación de la razón que la expresión del porcentaje con un decimal o con el signo %, que evocan con más fuerza a una medida. Es decir, cabe preguntarse si las fracciones son expresiones más resistentes a la interpretación del porcentaje como cantidad absoluta.

El análisis que hemos realizado de la noción de porcentaje permite poner de manifiesto cierta complejidad conceptual. Se trata de un saber multifacético vinculado con algunas de las nociones más complejas de la aritmética básica, la de razón y la de operador multiplicativo, fraccionario y decimal, de las cuales hereda las problemáticas didácticas.

La complejidad didáctica intrínseca al porcentaje —y las dificultades derivadas de su enseñanza— son sin duda dos factores que han incidido en las numerosas dificultades que pudimos destacar a partir del análisis del cuestionario, entrevistas y la secuencia didáctica. Es claro que la frecuente presencia de esta noción en ámbitos extraescolares no es suficiente para el logro de una comprensión profunda, es necesaria una enseñanza intencionada.

En particular, es necesario un trabajo sobre las técnicas que hemos identificado que los estudiantes ponen en juego. La construcción de una tecnología más vasta alrededor de estas técnicas podría ayudar a ampliar su alcance, a facilitar su circulación, a disminuir la búsqueda azarosa de algoritmos, a darles nombre y visibilidad a algunos procedimientos como la estimación, que podría erigirse en un recurso esencial para validar. Por otro lado, valdría la pena recuperar algunas características de las situaciones de porcentaje que, aún cuando implican algunas dificultades, se han revelado fértiles en cierta medida: la aplicación de varios porcentajes a una cantidad, de tal forma que agoten el 100% para abrir la posibilidad de validar a partir de la coincidencia entre el total y la suma de las aplicaciones; la recuperación del registro gráfico como un lugar en el que se ponen en juego relaciones distintas al numérico; la aplicación de un porcentaje a varios totales, para favorecer la emergencia del conflicto entre cantidades absolutas y relativas; el planteamiento de los tres tipos básicos de tareas, que obligan a establecer distintas relaciones entre los datos.

En síntesis, nos parece que los resultados obtenidos en nuestra experimentación muestran la necesidad de diseñar una secuencia más amplia, en la que tenga cabida una mayor articulación entre la proporcionalidad, las fracciones y los decimales. Es decir, quizás sería pertinente sumergir el estudio del porcentaje en una problemática más amplia[82], lo que implica retomar un trabajo sobre nociones que tienden a darse por vistas en la primaria. Al mismo tiempo, para incorporar en el estudio de los números —naturales, fracciones, decimales— la expresión de una relación y diferenciarla de la medida, podría ser fructífero trabajar de manera conjunta con una familia de nociones relativas, como el porcentaje, la probabilidad, las frecuencias relativas.

El trabajo sobre los tres ejes conceptuales —proporcionalidad, fracciones, decimales— a partir de una familia de nociones relativas podría otorgar un sentido amplio a dichas nociones, en particular al porcentaje, al mismo tiempo que los alumnos afirmarían otros conocimientos básicos de aritmética, mas específicamente, podrían integrar en ellos la idea de relación con cierta profundidad.

[82] Concediéndole un lugar especial al análisis de las razones y fracciones decimales —entre las que se encuentra el porcentaje— dadas las facilidades en los cálculos y su frecuente uso en diversos contextos.

ANEXO 1

Análisis previo del cuestionario

En este documento se explican y justifican las características del cuestionario que fue aplicado a dos grupos de estudiantes de segundo de secundaria —de 31 y 28 alumnos— de la ciudad de México. El lugar que la aplicación de este instrumento ocupa en el conjunto del estudio sobre la noción de porcentaje puede consultarse en la Introducción.

Características generales de los reactivos

El cuestionario contiene variantes sencillas de una gama de tareas relacionadas con la noción de porcentaje. La opción por dichas variantes se debe a que consideramos que el conocimiento sobre esta noción es precario y que por lo tanto no tenía sentido explorar tareas demasiado complejas. Se plantearon los tres principales tipos de tareas, pero sólo con respecto al primero (aplicar un porcentaje a una cantidad) —que es al que probablemente se dedica más tiempo en la escuela— se exploraron distintas variantes. El cuestionario contiene también algunos reactivos que intentan dar cuenta de la comprensión la noción de porcentaje como razón.

Algunos de los reactivos son adaptaciones de ciertos problemas que aparecen en los libros de texto vigentes para primaria, los demás fueron diseñados a partir del análisis de la problemática conceptual del porcentaje. A continuación se describen de manera más detallada los criterios con los que se determinó la selección de cada una de las preguntas que conforman el cuestionario, los tipos de errores esperados y los posibles procedimientos de resolución que podrán identificarse a través de las entrevistas.

Características particulares de los reactivos

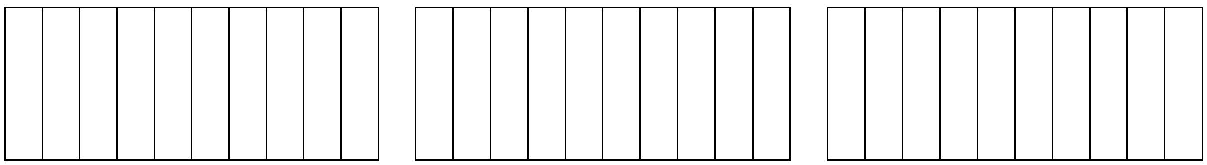
Hemos dividido las preguntas en cuatro grupos:

e) Reactivos que corresponden a la tarea 1
f) Reactivos que corresponden a las tareas 2 y 3
g) Reactivos que involucran a la noción de razón
h) Reactivos que abordan otros aspectos del porcentaje

Veamos las características de cada grupo:

a) Reactivos que corresponden a la tarea 1

Problema 3: "Juan, Pedro y Luis tienen un terreno cada uno. Juan cultiva el 50% de su terreno, Pedro el 25% y Luis el 20%. Los tres rectángulos que aparecen aquí representan los terrenos. Ilumina la parte que cultiva cada uno."



Juan Pedro Luis

A través de esta pregunta intentamos saber si los alumnos aplican el operador fraccionario en los casos más fáciles, es decir, si identifican que el 50%, 25% y 20% de una cantidad de superficie es la mitad, cuarta y quinta parte, respectivamente, de dicha cantidad. Puede haber alumnos que iluminen bien los dos primeros rectángulos, utilizando las fracciones correspondientes, pero que para iluminar el 20% se limiten a tomar una porción menor al 25%. Quizás encontremos también estudiantes que no identifiquen la fracción en ningún caso, y sólo tendrán cuidado de ordenar las porciones de terreno respetando el orden de los porcentajes. Los rectángulos aparecen divididos en 10 partes para poder distinguir entre los alumnos que utilizan la fracción correspondiente y los que hacen una estimación, sin recurrir al operador fraccionario.

Problema 4: "En la tienda «Gigante» ofrecen una grabadora con el 30% de descuento. Si su precio original es de $200 ¿Cuánto cuesta la grabadora ya con el descuento?"

La cantidad inicial es 200, por tanto quienes entienden al porcentaje como "tantos de cada 100" podrán resolverlo muy fácilmente. Por lo tanto, es probable que quienes en este reactivo opten por otro procedimiento, por ejemplo, aplicar el operador decimal, desconozcan la interpretación del porcentaje como "tantos de cada 100".

Puede aparecer un error si el alumno no se fija en que se pregunta por el precio rebajado y no por el descuento.

Problema 5: "En un examen de 50 preguntas, Leticia contestó correctamente el 40% de las preguntas ¿Cuántos aciertos tuvo Leticia?"

La cantidad inicial es menor que 100, con lo cual, quienes ven al porcentaje como la razón del tipo “tantos de cada 100” en sentido estricto y no como susceptible de generar otras equivalentes no podrán resolverla. Sin embargo, las relaciones internas de la proporcionalidad entre cantidades son enteras y sencillas:

	40 de 100	
:2	**20** de 50	:2

Otra manera de responder es utilizando la técnica CP-i, por ejemplo:

	100% es 50	
:10	10% es 5	:10
x4	40% es 20	x4

Quizás ésta técnica aparezca con menor frecuencia que la anterior, pues, como se menciona en el análisis de la problemática conceptual del porcentaje, es necesario identificar la cantidad inicial con 100, y además las relaciones internas son más complejas en esta técnica que en la anterior.

Problema 6: “En un estudio de preferencias, de 128 personas que se entrevistaron, el 25% declaró que la leche «La Vaquita» es más rica. ¿Cuántos entrevistados prefieren «La Vaquita»?”

De nuevo, la definición “tantos de cada 100” no puede ser tomada literalmente. Las relaciones internas son difíciles, por lo que la resolución se complica bastante y puede ser fuente de errores si un alumno insiste en emplear la técnica CC-i. Por ejemplo:

	100	25	
:5	20	5	:5
:10	2	0.5	:10
X4	8	2	X4
+	128	32	+

Además de que es necesario el tránsito por varios cálculos intermedios, algunos resultados parciales —en particular el valor unitario— no son enteros.

Sin embargo, el problema será fácil para quienes encuentre que el 25% es la cuarta parte de la cantidad inicial, es decir, que identifiquen la relación externa, o utilicen CP-i. Es importante aclarar que el hecho de que algunos alumnos no empleen la razón externa no implica que no la conozcan, es posible que estén muy acostumbrados a utilizar las relaciones internas y no a decidir en cada caso cuáles convienen más. Las variaciones que se dan en los problemas 2, 3 y 4 serán irrelevantes para quienes aplican el operador multiplicativo decimal.

Problema 7: "En una empresa hay 250 trabajadores. El 8% son ingenieros. ¿Cuántos ingenieros hay en la empresa?"

La correcta aplicación del algoritmo que consiste en multiplicar por el número decimal correspondiente se analiza en esta pregunta, pues el porcentaje es menor a 10%, lo que hace posible que algunos alumnos multipliquen la cantidad inicial por .8 y no por .08, con lo cual se obtendrá el 80% en lugar del 8%. Esto significará que los alumnos no ejercen control sobre sus resultados (o que la noción de porcentaje no tiene para ellos un sentido claro), al menos en este caso.

Aunque el problema se diseñó para indagar si el algoritmo se aplica o no de manera correcta, los datos se eligieron de tal manera que quienes no lo apliquen puedan emplear sin mucha dificultad la técnica CC-i:

	100	8	
x2	200	16	x2
:2	50	4	:2
+	250	20	+

La técnica CP-i resulta en este caso más complicada, pues es necesario calcular el 1%. Cabe observar que esto sucede en cualquier porcentaje menor al 10%, excepto por el 5%.

b) Reactivos que corresponden a las tareas 2 y 3

Problema 9: "En una farmacia decidieron aumentar los precios de los productos, todos en un mismo porcentaje. En la siguiente tabla se muestran algunos precios antes del aumento y la cantidad que se aumentó. ¿Qué porcentaje de su precio se recargó a las mercancías?"

Precio original	Cantidad que se aumentó
$200	$40
$750	$150
$1200	$240

Este problema corresponde a la tarea 2. Se debe determinar qué porcentaje representa 40 de 200, 150 de 750 y 240 de 1 200.

Quienes aplican el algoritmo para resolver la tarea 1, pero no conciben al porcentaje como una razón del tipo “x de cada 100” ni identifican el operador fraccionario cuando es sencillo, sólo podrán resolver este reactivo mediante estimaciones, es decir, aplicando varios porcentajes a una de las cantidades iniciales de manera que los resultados se aproximen sucesivamente a la cantidad final que aparece en el problema. Algunos de estos alumnos quizás intentarán encontrar otro algoritmo para esta tarea, por ejemplo, dividir los datos en lugar de multiplicarlos como en la tarea 1.

Las posibilidades de resolver la pregunta aumentan considerablemente para quienes conciben al porcentaje como una razón del tipo “x de cada100”, pues la cantidad inicial es múltiplo de 100 y tanto las relaciones internas como la externa son muy sencillas. Se pueden utilizar sin mucha dificultad las técnicas CC-i, CC-e ó CP-i. Por ejemplo:

CC-i

	200	40	
:2	100	20	:2

CC-e

:5	
200	40
100	20
:5	

CP-i

	200	100%	
:10	20	10%	:10
x2	40	20%	x2

Cabe observar también que basta con determinar el porcentaje una sola vez, a partir de uno de los pares (precio, aumento), pues se supone que el porcentaje de aumento es constante. Puede ocurrir que algunos alumnos no reparen en ello y se den a la tarea de determinar los tres porcentajes.

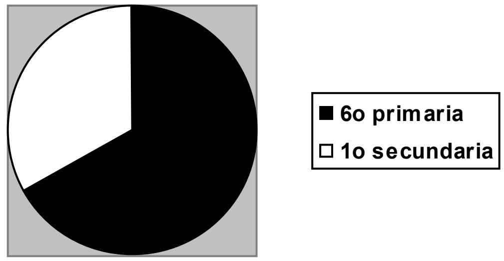
Problema 10: “En una tienda de ropa, cuando una persona compra a plazos le recargan el 5% al precio original de la prenda. Lorena compró una blusa y el aumento fue de $25 ¿Cuál es el precio original de la blusa?”

Este problema corresponde a la tarea 3. Es necesario calcular la cantidad original sabiendo que el 5% es 25. Esperamos encontrar un desempeño similar en este reactivo al del anterior, es decir, quienes utilizan el algoritmo en la tarea 1 y no le confieren un sentido claro a la noción de porcentaje, quizás tenderán a multiplicar o dividir los dos datos tratando de encontrar un algoritmo, o aplicarán el 5% a varias cantidades buscando que el resultado se aproxime a 25. Puesto que la cantidad inicial es múltiplo de 100, será fácil el empleo de la técnica CC-i para quienes el porcentaje es una razón del tipo “x de cada 100”. Es muy poco probable que aparezca la técnica CC-e, pues la razón externa es 20. La técnica CP-i también es sencilla para quien establece una identidad entre el 100% y el total, pues las relaciones internas son enteras.

c) Reactivos que involucran a la noción de razón

Problema 1: "En una escuela, se pidió a los alumnos que cooperaran para la fiesta de fin de cursos. Después se reportó la siguiente información en el periódico mural:

Cooperación



Grupo	Total de alumnos	Total de cooperación
6º primaria	150	$ 800
1º secundaria	60	$ 400

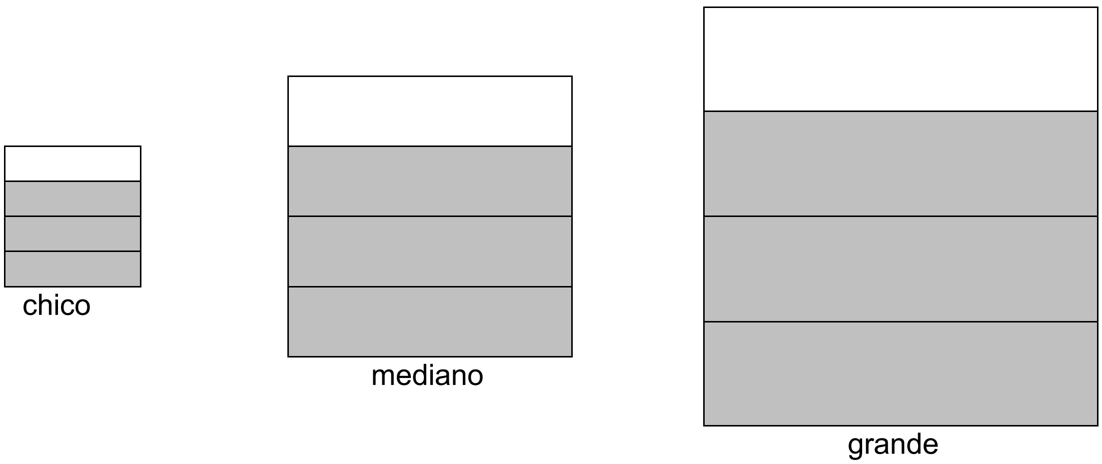
Juan dice que los de primero de secundaria son muy tacaños. Pedro no está de acuerdo con lo que dice Juan. ¿Cuál es tu opinión? ¿Porqué?"

Esta es una tarea muy simple de comparación de razones que no concierne explícitamente al porcentaje (números pequeños, contexto dinero, para comparar basta con doblar los dos términos de una de las razones). Pretendemos que esta pregunta nos ayude a tener indicios acerca de si algunas de las dificultades que se manifiesten en la resolución de problemas de porcentaje, están relacionadas con dificultades en la comprensión de la noción de razón misma.

Problema 2: "Si vas a una tienda, ¿Qué preferirías, que te dieran el 25% de descuento o que te descontaran $100 del total de tus compras?"

Aquí pretendemos evaluar si los estudiantes tienen en cuenta que el porcentaje es un operador que al aplicarse a diferentes cantidades arroja resultados distintos, o bien si lo conciben como una cantidad absoluta. Quienes respondan sin hacer cálculos que prefieren un descuento de $100, lo harán probablemente porque consideran al 25% como un número, comparable a 100, de hecho menor a 100. Es probable que algunos alumnos elijan al azar un precio hipotético, calculen los dos descuentos posibles y respondan en función de los resultados obtenidos para ese caso particular. Esta resolución será más certera que la anterior, pues si bien estos estudiantes aún no tienen claro que un porcentaje puede variar si se aplica a distintas cantidades, tampoco conciben al porcentaje como una cantidad absoluta. Quizás otros alumnos responderán que prefieren el 25%, lo cual, ya que 25 es menor a 100, significará que para ellos el porcentaje no es una cantidad absoluta. Así, ellos tal vez saben que al aplicar el 25% puede obtenerse una cantidad grande, pero no se percatan de que el resultado también puede ser tan pequeño como se quiera. Por este motivo, demostrarán una mayor comprensión del porcentaje como razón los que contesten que la mejor opción depende de la cantidad inicial. El mejor desempeño posible lo lograrán quienes determinen el rango de valores de la cantidad inicial para los que lo más conveniente es el descuento de $100, y el rango en el que lo mejor es obtener un descuento del 25%.

Problema 8: "María prepara una bebida con concentrado de naranja "Florida 7" y un poco de agua. Vende el agua en vasos de tres tamaños: chico, mediano y grande. En el dibujo la parte oscura representa el concentrado y la parte blanca el agua.



¿En cuál vaso usa más concentrado? ¿En cuál vaso el porcentaje de concentrado es mayor? ¿En cuál vaso la bebida sabe más a naranja?"

Este reactivo se plantea con la intención de saber si los alumnos conciben al porcentaje como una razón constante que se mantiene entre cantidades que varían. En principio, las tres preguntas serán contestadas correctamente sólo por ese tipo de estudiantes. Quienes no tienen esta acepción del porcentaje, probablemente no encontrarán diferencias entre las dos primeras preguntas, así que contestarán lo mismo ("el vaso grande") en las dos, pero si están familiarizados con la noción de razón, afirmarán en la tercera pregunta que los tres vasos saben igual. En caso contrario, de nuevo responderán que el vaso grande sabe más a naranja porque tiene más concentrado, o que el vaso chico porque lleva menos agua. También es posible que éstos alumnos resuelvan el reactivo de manera aleatoria, excepto por la primera pregunta.

d) Reactivos que abordan otros aspectos del porcentaje

Problema 11: "Indica cuál(es) de las siguientes tres afirmaciones NO puede(n) ser cierta(s):

a) El pan cuesta ahora el 120% de lo que costaba el año pasado

b) En un año, ya con los intereses, hay que pagar al banco el 120% de lo que prestó originalmente

c) El 120% de los trabajadores de una fábrica son hombres"

Este reactivo concierne a porcentajes mayores a 100, la idea es formarnos una primera idea sobre si los estudiantes pueden distinguir en qué contextos estos porcentajes tienen sentido y en cuáles no. Quienes saben (aunque no de forma explícita) que el porcentaje a veces se presenta en una relación parte-todo y otras como una manera de comparar dos cantidades, podrán distinguir que sólo en (c) un porcentaje mayor a 100 no tiene sentido, pues la parte no puede ser mayor que el todo. En cambio, quienes consideren que un porcentaje sólo puede aparecer en una relación parte-todo probablemente contestarán que ninguna de las tres frases puede ser cierta.

Del conjunto de reactivos se pueden destacar dos tipos: por un lado los que pueden resolverse a través de un algoritmo y por otro los que difícilmente se pueden contestar sin una comprensión del porcentaje como razón del tipo "x de cada 100". Pensamos que quienes no entienden al porcentaje en términos de una razón, tienen poca probabilidad de resolver correctamente las tareas de los tipos 2 y 3: tendrían que hacerlo por ensayo y error, aplicando varios porcentajes a una misma cantidad o un porcentaje a diferentes cantidades. Otra posibilidad, sólo para quienes el porcentaje tiene sentido como operador fraccionario o decimal, es que apelen a manipulaciones con fracciones o los decimales, lo cual supone un muy buen manejo de estas nociones. También es poco probable que estos alumnos resuelvan exitosamente los reactivos 2 y 8, que precisamente intentan dar cuenta de la acepción del porcentaje como razón.

En cambio, los estudiantes que sí manejan esta acepción del porcentaje, probablemente estén más próximos de tener acceso a una gama más amplia de técnicas para resolver las tareas 2 y 3, aquéllas que emplean procedimientos internos.

ANEXO 2
Análisis previo de la secuencia didáctica

La última componente de nuestro estudio consiste en el diseño, implementación y análisis de una secuencia didáctica que se llevó a cabo en cuatro sesiones[83] con una duración de 50 minutos cada una, con un grupo de a lo más 30 estudiantes de primer grado de una secundaria pública de la ciudad de México. Elegimos dicho grado por ser en el que el currículo prescribe el porcentaje como uno de los contenidos de la asignatura de matemáticas.

Antes de exponer los propósitos y el desarrollo de la secuencia que implementaremos, la ubicaremos en un posible proyecto más amplio de ingeniería didáctica dentro de la cual enmarcamos nuestra secuencia. Posteriormente describiremos esta última.

Propósitos para una secuencia amplia

A partir de los resultados obtenidos en la aplicación del cuestionario y las entrevistas consideramos que puede ser fructífero el diseño de una ingeniería didáctica que gire en torno a dos propósitos generales: uno, propiciar una comprensión del porcentaje como razón constante entre dos conjuntos de medidas y como fracción que se aplica a cantidades, y dos, propiciar el desarrollo de técnicas. Para lograr esto, nos planteamos tres propósitos más específicos:

1. Vincular el registro gráfico con el numérico.

El reactivo más sencillo del cuestionario resultó ser el que consiste en aplicar el 50%, 25% y 20% a superficies. A partir de las entrevistas podemos suponer que si bien algunos quizás copiaron la respuesta de algún compañero, otros relacionaron estos porcentajes con los operadores ½, ¼ y 1/5 respectivamente, aún algunos alumnos que al aplicar a cantidades respondieron como si el porcentaje fuera una cantidad absoluta.

Estos resultados sugieren la necesidad de vincular ambos registros que en ocasiones se manifiestan como procedentes de concepciones ajenas, aplicadas en distintos contextos. Con esto, además de enriquecer ambas concepciones favoreciendo la comprensión del porcentaje como razón, la aplicación de porcentajes a superficies puede

[83] Originalmente habíamos pensado en tres sesiones, pero en el curso de la implementación hemos tomado ciertas decisiones que modificaron el diseño original de la secuencia.

ser un medio de verificación de resultados aplicados a cantidades: aquello que es claro en lo gráfico puede poner en evidencia los errores en lo numérico.

2. Manejar las técnicas CP-i y CC-i: con operador entero y con operador no entero mediante valores intermedios y con valor unitario.

Las dos técnicas ponen en juego de manera distinta las relaciones entre los datos, el uso de CP-i implica la identificación de la cantidad inicial con el 100% y el uso de CC-i requiere concebir al porcentaje como una razón “tantos de cada 100”, por lo que manejar ambas técnicas implica una mayor comprensión de esta noción.

Además, si bien cada técnica permite resolver todas las tareas de los tres tipos a partir del valor unitario, existen tareas para las que la técnica CC-i es muy sencilla mientras CP-i es muy complicada, y viceversa (ver capítulo 1, “*Efectos de algunas variables numéricas de las tareas en las técnicas asociadas*”). Podría ser conveniente que los alumnos aprendan a distinguir en qué casos una es más pertinente que la otra.

3. Abordar los tres tipos básicos de tareas.

Además de la importancia de saber resolver estos tipos de tareas para poder abordar situaciones no escolares, los resultados del cuestionario sugieren que no tienen el mismo grado de complejidad: al parecer desconocer la cantidad inicial es más difícil que desconocer la tasa y esto es más complejo que desconocer la cantidad final. Así, resolver los tres tipos de tareas puede implicar un conocimiento más sólido del porcentaje que sólo el tipo de tarea 1.

Consideramos pertinente trabajar estos propósitos en dos ejes que en principio pueden funcionar de manera paralela y después integrarse:

- Razones

La noción de porcentaje puede cobrar sentido como una manera de resolver una situación de comparación de razones o una situación en la que se requiere una razón constante. También, el uso de la técnica CC-i implica concebir al porcentaje como una razón y construir razones equivalentes.

- Técnica CP-i

En el cuestionario vimos que de las técnicas no canónicas, CP-i es la que apareció con mayor frecuencia. Sin embargo, se maneja de una manera rígida, limitando su alcance. Algunos alumnos aplican dobles y mitades para después estimar, otros parten del cálculo del 10% y otros mantienen una variación constante tanto en los porcentajes como en las cantidades. Pero en la mayoría de los casos es clara la falta de flexibilidad en el uso de esta técnica: quien parte del 10% no emplea el operador ¼ para calcular el 25%, quien sólo utiliza mitades y dobles sólo puede encontrar el 10% estimando.

El trabajo con la técnica CP-i, además de permitir mejorar el dominio de la técnica misma, puede constituir un medio para vincular el registro gráfico con el numérico: el 100% se identifica en lo gráfico con una cantidad de superficie, por ejemplo, la superficie de un rectángulo, y en lo numérico con una medida, con un número. La técnica CP-i aplicada tanto a magnitudes (superficies) como a números puede ayudar a establecer las siguientes relaciones:

cantidad numérica inicial ↔ 100% ↔ cantidad de superficie inicial

partes de la cantidad numérica inicial ↔ *x*% ↔ partes de la superficie inicial

Es importante cuidar que los dos ejes no se conviertan en obstáculo uno para el otro. El eje 1 apunta a la técnica CC-i, es decir, a la "razón local: *x* de *cada* 100" y el eje 2 a la técnica CP-i, la "razón global: *x* de 100". Las dos técnicas corresponden a dos concepciones distintas del porcentaje.

Propósitos para la secuencia específica

La concreción de los propósitos que planteamos anteriormente requiere de una secuencia de situaciones considerablemente amplia. En la secuencia que estudiamos empíricamente en este trabajo, decidimos no abordar el eje de razones, pues consideramos que los alumnos de secundaria ya disponen de algunos conocimientos sobre el porcentaje, por lo que –dado que contamos con pocas sesiones- decidimos intentar recuperarlos al estudiar directamente esta noción. Así, abordamos solamente algunos aspectos de los propósitos señalados anteriormente, a saber:

1. Vinculación del registro gráfico con el numérico

La relación entre ambos registros se trabaja únicamente con el tipo 1 de tareas. En los otros dos tipos se plantean pocas tareas, situadas en uno de los dos registros pero no en el otro. Así, sólo en las tareas de tipo 1, el registro gráfico puede constituirse en un medio de verificación.

En los tres tipos de tareas conservamos el propósito de cuestionar la posible concepción del porcentaje como cantidad absoluta.

2. Manejo de la técnica CP-i

La vinculación entre los dos tipos de registro favorece más el uso de la técnica CP-i que la de CC-i, pues en el contexto de una cantidad representada gráficamente es más fácil pensar en el porcentaje como una determinada parte del total que como "tantos de *cada* 100".

Por otro lado, si bien el uso de la técnica CP-i requiere la identificación de la cantidad inicial con el 100%, los resultados obtenidos en el cuestionario nos permiten suponer que los alumnos disponen de este conocimiento, probablemente reforzado por los usos extraescolares. El empleo de la técnica CP-i puede entonces apoyarse en el aprovechamiento de este conocimiento previo de los alumnos.

Por lo anterior decidimos abordar únicamente una parte del eje "técnica CP-i" que propusimos anteriormente, sin tocar el eje de "razones".

Prácticamente trabajamos sólo con operadores enteros, y entre éstos, con los más sencillos, es decir, el 50, 25, 20, 10 y 5%, excepto en la primera sesión, como veremos más adelante. Pensamos que la manipulación de estos porcentajes puede aminorar la rigidez sobre la que hemos hablado anteriormente en relación al uso de la técnica, pues el manejo de los operadores fraccionarios anteriores puede volver más flexible el cálculo de mitades sucesivas, o del 10%, seguidos de una estimación.

3. Resolución de los tres tipos básicos de tareas

Como ya hemos mencionado, los tipos de tareas 2 y 3 se estudian muy brevemente. Nos enfocamos a dar lugar a que los alumnos establezcan por lo menos algunas veces relaciones entre los datos distintas a las que se requieren en las tareas de tipo 1 y a seguir favoreciendo la concepción del porcentaje como cantidad relativa, no absoluta. Dejamos de lado el desarrollo de las técnicas que resuelven estos dos tipos de tareas.

Además de intentar concretar estos tres propósitos, dedicamos la primera sesión al desarrollo de una actividad de análisis de la información, con la intención de hacernos una idea sobre lo que los alumnos saben sobre el porcentaje, idea que complementará la información que hemos encontrado a partir de la aplicación del cuestionario y las entrevistas. Este sondeo permite, a diferencia del cuestionario, la posibilidad para los alumnos de elaborar algunas respuestas no de manera individual sino a partir de la interacción con los demás estudiantes, así como la posibilidad de resolver algunas tareas de manera oral y no siempre escrita, y por lo tanto de generar proposiciones menos acabadas, sobre las que los autores pueden incluso estar indecisos. Pensamos que estas dos condiciones nos permitirán obtener información nueva sobre los conocimientos de los alumnos, complementaria a la que hemos logrado obtener mediante la aplicación de un cuestionario escrito.

Finalmente, esta primera sesión ofrece la posibilidad de reconfigurar las sesiones siguientes a partir de la información que dispondremos sobre los conocimientos del grupo de estudiantes específico con el que se implementará la secuencia.

A continuación hacemos un análisis más detallado de cada una de las sesiones.

Sesión 1: Analizando información…

Los propósitos generales de la sesión son los siguientes:

- Propósito didáctico:

Lograr, a partir de las interacciones entre los alumnos, cierto nivel de explicitación de sus concepciones sobre el porcentaje, y cierto grado de cuestionamiento de las posibles concepciones erróneas, principalmente la del porcentaje como cantidad absoluta.

- Propósito de investigación:

Realizar un diagnóstico que permita inferir en cierta medida los conocimientos de los alumnos sobre la noción del porcentaje.

Veamos ahora las tareas específicas de la sesión, así como los propósitos de cada una de ellas y las respuestas posibles que esperamos de los alumnos. En cada problema se dedicará un tiempo a la resolución por parejas y otro a una discusión grupal.

Problema 1. 10 minutos de resolución y 5 minutos de discusión grupal

- Propósito didáctico:

Mostrar a los estudiantes que hay entre sus compañeros diferentes puntos de vista sobre el porcentaje. La discusión en este problema podrá servir para las posteriores, pero aún no es momento de institucionalizar ni de tomar acuerdos.

- Propósito de investigación:

Formarnos una primera idea de qué tan frecuentemente aparece la concepción del porcentaje como cantidad absoluta en los alumnos. También, del número de alumnos que disponen de alguna técnica para calcular porcentajes, aunque aún no logremos identificar estas técnicas.

- Situación:

“Reúnete con un compañero o compañera. Contesten las preguntas que se plantean para cada ilustración o, si no hay información suficiente para contestar, anoten “no se puede saber”.

a) Según el anuncio ¿cuánto dinero se descuenta en la compra de una blusa? ___________ ¿y en la compra del pantalón? ___________

b) ¿La cantidad de dinero que se descuenta es la misma para todos los productos o depende de lo que cueste el producto? ______________________________

c) Si el pantalón costara 200 pesos, ¿de cuánto sería el descuento? ______

d) ¿Si la blusa costara 50 pesos, ¿de cuánto sería el descuento? ______?

GRUPAL. Con la ayuda de su maestro, organícense para comparar sus respuestas con las de sus compañeros.”

- Posibles respuestas de los alumnos:

Quienes conciban al porcentaje como cantidad absoluta contestarán que el descuento en todos los casos es de 30 pesos. Es posible que algunos alumnos, aun sabiendo que el porcentaje no es una cantidad absoluta, se sientan desconcertados en el inciso **a)** si para ellos resulta muy poco común que se planteen preguntas que no se pueden contestar, y por lo tanto se sientan impelidos a emitir alguna respuesta, aún cuando no estén totalmente convencidos de su veracidad.

Otros alumnos, quizás contestarán en el inciso **a)** que el descuento es de $30, pero al aplicar en **c)** y **d)** el mismo porcentaje a distintas cantidades proporcionarán respuestas distintas. También es posible que otros estudiantes sepan que el descuento depende de la cantidad inicial (podrían contestar en **a)** que “no se puede saber” y en **b)** que depende), pero no dispongan de medios para calcular el 30% y por lo tanto no contesten **c)** y **d)** o cometan errores.

Este problema no tiene una forma de verificación, no obstante no nos interesa aún que los alumnos accedan a la respuesta correcta, sino que vean que el grupo propone respuestas diferentes.

En resumen:

	Alumnos para quienes el porcentaje es cantidad absoluta	Alumnos que saben que el porcentaje depende de la cantidad pero no disponen de técnicas	Alumnos que saben aplicar porcentajes
Inciso a	Contestarán “30”	Contestarán correctamente, excepto si la necesidad de emitir una respuesta es muy fuerte.	Idem izquierda
Inciso b	Tenderán a decir que la cantidad que se descuenta es la misma siempre, pero también pueden decir que depende (sin sentir que se contradicen)	Contestarán “depende”	Idem
Incisos c y d	Tenderán a repetir que se descuentan 30 pesos, a no ser que los desconcierte que se esté preguntando lo mismo dos veces, en cuyo caso podrían buscar otra respuesta, más por la necesidad de proporcionar respuestas diferentes a las dos preguntas que por una creencia relativa al porcentaje.	No contestarán 30 pero usarán técnicas incorrectas.	Responderán correctamente, al menos en el inciso **c**.

Problema 2. 10 minutos de resolución y 10 minutos de confrontación

- Propósito didáctico:

El contexto dificulta la posibilidad de sostener que el porcentaje es una cantidad absoluta (ninguna familia gasta $6.80 en salud al año), por lo que nos parece un medio para cuestionar en cierta medida dicha concepción.

Además, la discusión grupal puede favorecer que algunos alumnos escuchen de sus compañeros ciertas propiedades del porcentaje, por ejemplo, que el 100% corresponde al total y el 25% a la cuarta parte.

- Propósito de investigación:

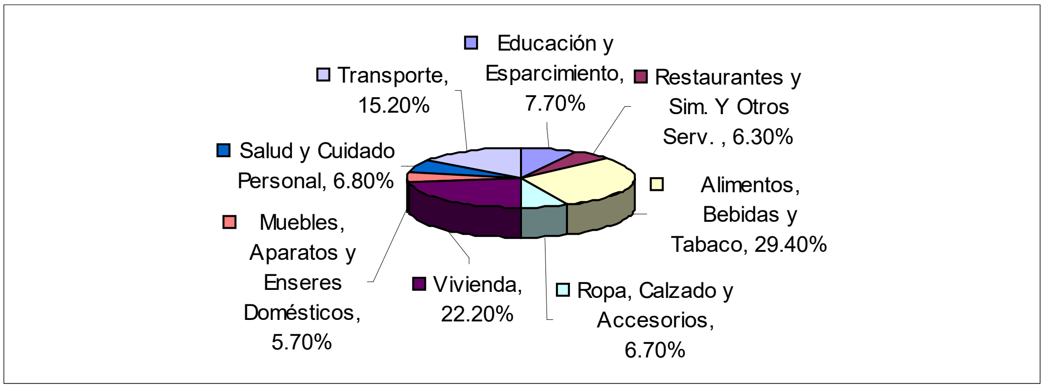
Nos interesa darnos una idea del número de alumnos que saben que el 50% es la mitad, el 25% la cuarta parte, el 100% es el total, al menos en el registro gráfico, pues en la siguiente sesión contamos con que estos conocimientos ya se tienen.

Nuevamente, podremos ver con qué frecuencia aparece la interpretación del porcentaje como absoluto, y además, si algunos estudiantes que en el problema anterior mostraron esta concepción cambian de opinión en este problema a partir del contexto.

- Situación:

"Los datos de la siguiente gráfica se estimaron a partir de la información que numerosas familias mexicanas proporcionaron en una encuesta realizada por el INEGI en 1989. La encuesta se hizo sobre gastos al año.

"Ponderaciones en el Gasto de la familia Mexicana"



c) ¿La gráfica permite saber cuanto dinero gastan, en promedio, las familias mexicanas en transporte? ______
Si tu respuesta es afirmativa, indica cuánto gasta: ___________________

d) ¿La gráfica permite saber en cual de los rubros que aparecen gastan más las familias? _____ Si tu respuesta es afirmativa, indica en qué gastan más: ________

e) ¿El gasto en transporte es mayor o menor que el gasto en ropa, calzado y accesorios? __________

f) ¿Qué rubro representa más de la cuarta parte del gasto total?__________"

- Posibles respuestas de los alumnos:

En la pregunta **a)**, quizás algunos contestarán $15.20, respuesta que, debido al contexto, esperamos sea fácilmente rebatible por los propios compañeros.

Nos parece que las preguntas **b)** y **c)** serán sencillas para cualquier alumno, sin importar si concibe al porcentaje como cantidad absoluta o no, pues sólo tomarán el número mayor.

Finalmente, en el inciso **d)** sólo acertarán quienes sepan que el 100% corresponde al total y el 25% a la cuarta parte.

La forma de verificación en esta ocasión está dada por el contexto y por la discusión grupal.

Problema 3. 5 minutos de resolución en parejas y 10 de discusión grupal.

- Propósito didáctico:

Nuevamente, el contexto posibilita cierto grado de cuestionamiento a la concepción del porcentaje como absoluto (¿las familias en extrema pobreza gastan más en comida que las de clase alta?)

Otro propósito difícil de alcanzar es el de lograr una comprensión por parte de los alumnos de la noticia que se da en el problema. Esto exige que los alumnos tengan en cuenta, al menos: 1) que se está comparando la relación de una parte con un total, no de una parte aislada, 2) que hay diferentes totales y que pueden ser de distintos tamaños (familias de clase alta, familias en extrema pobreza, etc.), y 3) que la gráfica del problema anterior resulta de un promedio de la situación de esos diferentes totales, pero no da cuenta de cada uno de ellos.

- Propósitos de investigación:

1) Saber qué parte del grupo de alumnos que mostraron cierta comprensión de la noción de porcentaje en los problemas 1 y 2, es la que logra comprender las relaciones implicadas en la información que se proporciona, considerando que, como se dijo antes, ello constituye un indicador de un buen nivel de comprensión de la idea de razón parte todo y, en particular, de que el porcentaje es una razón de ese tipo.

2) Saber si un número significativo de alumnos puede representar sin dificultades el 50% y 20% en una gráfica.

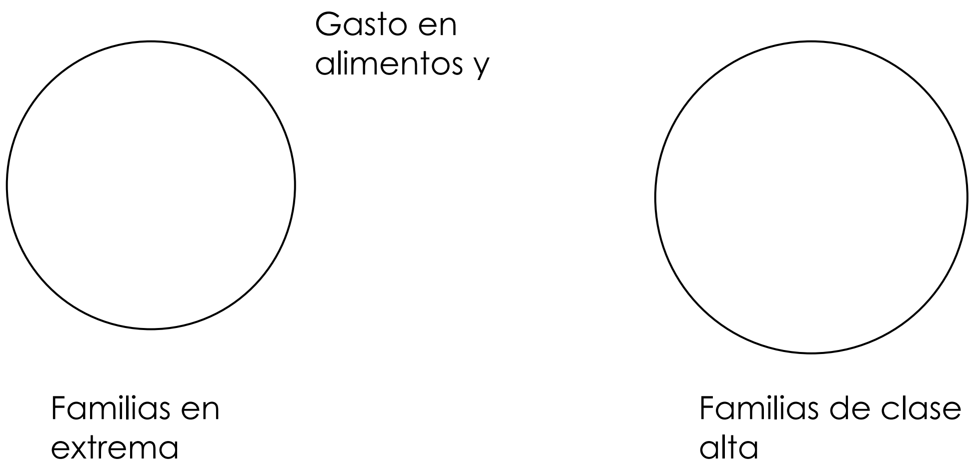
El maestro planteará oralmente la primera parte del problema, escribiendo los datos en el pizarrón. Pedirá a los alumnos discutirlo en parejas durante 5 minutos para después hacer una confrontación grupal.

- Situación:

"Los porcentajes de la gráfica anterior se obtuvieron promediando los gastos de muchas personas. Cuando se separa la información por grupos de población, pueden aparecer porcentajes distintos a los del promedio. Por ejemplo, según datos del INEGI presentados en 2002, los hogares Mexicanos en extrema pobreza invierten el 48.69% de sus ingresos en alimentos y bebidas (¡casi la mitad!) mientras que en los hogares de clase alta destinan a ese mismo rubro 21.65%.

Naturalmente, lo anterior no significa que los hogares en extrema pobreza gasten en alimentos más dinero que los hogares de clase alta. Entonces, ¿qué significa?

Se podrían hacer dos gráficas como las anteriores, una para los hogares en extrema pobreza y otro para los de clase alta. Indica la porción de la gráfica que corresponde al gasto en alimentos y bebidas en cada gráfica:



GRUPAL. Comparen sus respuestas con las de sus compañeros."

- Posibles respuestas de los alumnos:

Como hemos mencionado anteriormente, una comprensión de lo que plantea este problema parece difícil de alcanzar en este momento.

Es probable que la mayoría de los estudiantes no encuentre una manera de responder a la pregunta, si bien algunos quizá puedan hacer las gráficas que se piden a partir del conocimiento de los dos operadores implicados, pero sin que por ello alcancen a comprender la pregunta.

No obstante, esperamos que algunos estudiantes respondan correctamente y puedan, en la discusión, comunicar en parte las relaciones entre los datos implicadas a sus compañeros.

Sesiones 2 y 3: Banderas

Puesto que los propósitos generales de las dos sesiones son los mismos[84], los exponemos ahora:

- Propósito didáctico:

Constituir el registro gráfico en un medio de verificación para el numérico en las tareas de tipo 1, y explicitar la técnica del operador fraccionario cuando éste es unitario y sencillo: el 50% es la mitad, el 25% la cuarta parte, el 20% la quinta parte, el 10% la décima y el 5% la mitad del 10%.

- Propósito de investigación:

Intentaremos contrarrestar la concepción del porcentaje como cantidad absoluta en el registro numérico, por un lado al hacerla entrar en conflicto con la concepción como una fracción del entero en el registro gráfico, y por otro lado al aplicar los mismos porcentajes a varias superficies y cantidades: un mismo porcentaje aplicado a distintas cantidades arroja distintos resultados. Aplicar a varias cantidades también ofrece la posibilidad de corregir los errores que se cometen en una primera aplicación.

Nos interesa discernir si a partir de lo anterior es posible que la concepción del porcentaje como una relación entre una parte y un todo en ambos registros cuestione a la concepción errónea del porcentaje como cantidad absoluta.

Sesión 2.

Problema 1. 50 minutos

- Propósito didáctico:

Que los alumnos apliquen varios porcentajes a una misma cantidad. La solución numérica se puede verificar en las superficies, si en este registro se obtiene correctamente. Se aplican primero porcentajes a una cantidad y luego a una superficie, para evitar que el cálculo numérico se haga en función de lo que se ve en el registro gráfico, olvidando los porcentajes.

[84] Originalmente las sesiones 2 y 3 estaban pensadas como una sola. Durante el curso de la implementación fue necesario dividirla en dos, debido a que el tiempo no fue suficiente.

- Propósito de investigación:

Dilucidar si las soluciones contradictorias en los dos registros pueden entrar en conflicto para fortalecer la concepción del porcentaje como parte de un entero. Comenzar a establecer algunos operadores.

- Situación:

"El dueño de un equipo de fútbol mandó fabricar tres banderas gigantes, de distintos tamaños, para colocarlas en el estadio.

a) Para hacer la mediana, se debe pintar el 50% de rojo, el 25% de azul, el 20% de verde y el 5% de amarillo. Si toda la bandera tiene una superficie de 400 metros cuadrados, ¿Qué área tendrá cada color?

Área pintada de rojo _______________

Área pintada de azul _______________

Área pintada de verde _______________

Área pintada de amarillo _____________

b) Representa en el siguiente rectángulo la parte que se debe pintar de cada color

c) Los resultados que obtuviste en la pregunta **a)** ¿corresponden bien con las partes que coloreaste en **b)**? Si te parece que no, corrige tus resultados."

- Posibles resoluciones de los alumnos:

Es probable que algunos estudiantes tengan claros los operadores fraccionarios que corresponden al 50, 25 y 20%, y determinen el 5% por complemento.

También es posible que otros alumnos utilicen el operador decimal en el registro numérico, cometiendo un error al calcular el 5%, y el operador fraccionario en el gráfico. En este caso, la comparación entre las resoluciones en los dos tipos de registro servirá, cuando las dos coincidan, para destacar que la representación del porcentaje como una parte del total permite obtener los mismos resultados que cuando se aplica el algoritmo, y cuando no coincidan, para corregir los errores.

Otros quizás darán respuestas correctas en el registro gráfico y responderán en el numérico como si se tratara de cantidades absolutas. En este caso, no pensamos que la sola consigna del inciso c) sea suficiente para que los alumnos reparen en sus contradicciones. Será necesaria entonces la coordinación por parte del maestro de una discusión grupal, donde estas contradicciones se pongan de manifiesto, donde se confronten distintos procedimientos y se intente lograr acuerdos sobre cuáles son los correctos. Quizá también será necesario que el docente proporcione cierta información, creemos que la mínima sería el hecho de que el 100% corresponde al total, tanto gráfico como numérico. En este caso, una nueva forma de verificación en el registro numérico, además del contraste con el gráfico, está en la necesidad de asegurarse de que la suma de todas las aplicaciones coincida con la cantidad inicial, lo que no sucede si se toman los porcentajes como absolutos.

Finalmente, puede haber estudiantes que no acierten en ninguno de los registros, aunque prevemos que serán los menos. En este caso, la única posibilidad de corregir los errores radica en la interacción con los pares y el docente.

Sesión 3.

Al inicio de la sesión se planteará el problema 1 de la sesión anterior durante 5 minutos como repaso para los alumnos.

Problema 2. 20 minutos

- Propósito didáctico:

Que se haga explícito el hecho de que la cantidad o medida que resulta de aplicar un mismo porcentaje a cantidades distintas varía en tamaño pero que se conserva la relación entre una parte y el total. En este caso la constancia de los porcentajes se relaciona con la necesidad de conservar la forma (ambas proceden del mismo hecho: las banderas están a escala).

- Propósito de investigación:

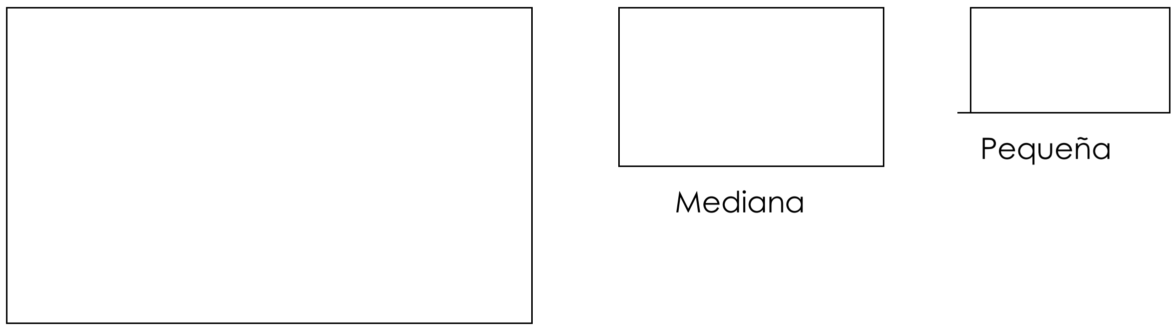
Identificar las dificultades que pueden surgir al pasar de un porcentaje a su aplicación, y de nuevo al porcentaje.

- Situación:

"La bandera grande y la pequeña tienen la misma forma que la mediana pero son de otro tamaño.

a) ¿Qué porcentaje de la superficie de la bandera grande se tiene que pintar de rojo?__________ ¿Y de azul? __________ ¿De verde?____________ ¿De amarillo?_________

b) Marca en las tres banderas la parte que se debe pintar de cada color.



Pequeña

Mediana

Grande

GRUPAL. Con la ayuda de su maestro, organícense para comparar sus respuestas con las de sus compañeros[85].“

- Posibles respuestas de los alumnos:

Nos parece que si un alumno acierta en el inciso **a)**, es porque sabe que el porcentaje siempre corresponde a una misma parte del total. Es decir, por ejemplo, que el 50% siempre es la mitad.

Quizás otros alumnos propongan porcentajes mayores, por ejemplo el 100% de rojo, el 50% de azul, el 40% de verde y el 10% de amarillo. Para no contradecirse, afirmarán también que la superficie total representa al 200%, lo cual es congruente con la creencia de que a mayor superficie corresponde un mayor porcentaje: como la bandera es más grande, el porcentaje total debe ser mayor al 100% que representa la bandera pequeña.

Si la relación entre los distintos porcentajes y el porcentaje total se mantiene, entonces su respuesta no será contradictoria con la del registro gráfico, pues se mantendrá la forma de las tres banderas. En el caso contrario las respuestas en los dos registros no serán consistentes, aunque esto no necesariamente será notado por los alumnos, para ello será necesaria la confrontación grupal. No obstante, es probable que

[85] No pensamos que la idea de “amplificar” resulte difícil de entender para los alumnos, pero en todo caso el profesor puede poner ejemplos cotidianos, como el de la relación entre una fotografía y el objeto original: “no puede quedar la cara más ancha en relación al cuerpo,…”

algunos alumnos tengan claro que el 100% representa la superficie total, y entonces la pregunta **b)** les sirva para cuestionar su respuesta en **a)**.

Esperamos que esta respuesta —asignar porcentajes mayores— sea rebatida por los propios compañeros en la confrontación grupal, pero si esto no sucede será necesario que el docente aporte algo de información: la superficie total corresponde al 100%. Entonces podrá hacer preguntas como ¿hasta dónde tiene que ir pintado de rojo para que la figura se mantenga igual? ¿Y si toda la bandera es el 100%, la parte roja a qué porcentaje representa?

También es probable que ciertos estudiantes aumenten uno de los porcentajes y después reduzcan los demás para ajustar el total al 100%, por ejemplo, dirán que el 60% debe ser rojo, el 20% azul, el 18% verde y el 2% amarillo. Esta propuesta es fácil de rebatir, pues no se conservaría la figura.

Problema 3. 15 minutos.

Los propósitos coinciden con los del problema anterior: se trata de explicitar, ahora en el registro numérico, que si bien los porcentajes se mantienen constantes, las cantidades que resultan de su aplicación varían.

- Situación:

"La superficie de la bandera grande es de 800m^2 y la de la pequeña es de 300m^2. Calcula y anota los datos que faltan en la tabla.

	Bandera Grande	Bandera mediana	Bandera pequeña
Rojo (%)			
Azul (%)			
Verde (%)			
Amarillo (%)			
Total (%)	800m^2	400m^2	300m^2

- Posibles respuestas de los alumnos:

No será difícil determinar en la primera columna los porcentajes que corresponden a cada color ni las aplicaciones en la bandera mediana, sólo deberán vaciar los datos que ya se habrán encontrado en los problemas anteriores.

En las banderas pequeña y grande, es probable que algunos alumnos utilicen los operadores fraccionarios para calcular el 50, el 25 y el 20%, y que determinen el 5% por complemento, o bien que empleen el operador fraccionario en el 50 y 25% y distribuyan el complemento entre el 20 y el 5% a partir de una estimación.

Puesto que el área de la bandera grande es el doble de la de la mediana, esperamos que algunos estudiantes simplemente doblen todos los resultados obtenidos en la mediana. En cambio, esta estrategia resultará complicada si se pretende usar para la bandera pequeña, no obstante, quizás algunos alumnos la emplearán de forma cualitativa: simplemente propondrán cantidades más pequeñas que las que se obtuvieron en la bandera mediana, cuidando que la suma sea 300.

Es posible también que algunos estudiantes recurran a la técnica del operador decimal. En este caso, la confrontación servirá para revisar si sus resultados concuerdan con los del problema anterior en el registro gráfico.

Quizás otros alumnos se olviden de los porcentajes y traten de buscar números que sean consistentes con las partes coloreadas de los rectángulos en el problema anterior.

Finalmente, puede haber estudiantes que respondan como si el porcentaje fuera absoluto, o bien intenten ajustar uno de los cuatro algoritmos básicos, de manera que los resultados parezcan factibles.

En cualquier caso, la validación puede realizarse a partir de lo siguiente:

- Utilizando el hecho de que la suma de todos los porcentajes debe dar el total.
- Contrastando el registro gráfico con el numérico para hacer explícitas las contradicciones en las resoluciones de los alumnos.

Problemas 4 y 5. 10 minutos

- Propósito didáctico:

Que los alumnos logren explicitar la técnica del operador fraccionario para aplicar porcentajes en algunos casos en que el operador es unitario

- Propósito de investigación:

Discernir si el conflicto que anteriormente se intentó provocar entre las concepciones sobre el porcentaje que funcionan en los dos registros favorece el establecimiento explicito del porcentaje como una relación entre una parte y el total.

- Situación:

4. "Para calcular el 5% de una cantidad, basta con dividirla entre 20. Si no usaste este procedimiento para calcular las áreas que deben ir pintadas de amarillo, úsalo ahora para verificar tus resultados.
5. Explica al menos una forma de calcular los siguientes porcentajes:

   el 50% de una cantidad ___________________________________

   el 25% de una cantidad ___________________________________

   el 20% de una cantidad ___________________________________

   el 10% de una cantidad ___________________________________

GRUPAL. Compara tus resultados con los de tus compañeros. Después, comenten entre todos a qué se debe que, para calcular el 5% de una cantidad, baste con dividir la cantidad entre 20"

- Posibles respuestas de los alumnos:

Esperamos que el procedimiento para obtener el 50, 25 y 20% de una cantidad no resulten problemáticos. Algunos alumnos quizás darán la respuesta automáticamente, a partir de los problemas que hasta entonces habrán resuelto. Otros quizás necesitarán verificar cuántas veces cabe el porcentaje dado en el número 100 para poder responder (como 20 cabe cinco veces en 100, el 20% es la quinta parte de la cantidad inicial). En estos tres porcentajes nos parece poco factible que surjan procedimientos correctos distintos al uso del operador fraccionario. Si se da el caso, el profesor los retomará pero destacará el del operador.

Para obtener el 10%, prevemos que algunos dirán que dicho porcentaje corresponde a la décima parte del total, y otros, que es la mitad del 20%. Esperamos que en la confrontación pueda mostrarse que la segunda implica la primera. Esperamos un momento análogo en el caso del procedimiento para calcular el 5%.

Sesión 4: Terrenos Sembrados

- Propósito didáctico:

Que los alumnos resuelvan los tipos de tareas 2 y 3 en el registro gráfico. Nos interesa propiciar que los alumnos comiencen a establecer las relaciones entre los datos y, en menor medida, que trasladen sus hallazgos en el registro gráfico hacia el numérico para explicitar la técnica del operador fraccionario en el caso del 50%, 25% y 20%

- Propósito de investigación:

Estudiar la posibilidad de que el registro gráfico disminuya la complejidad que los tipos de tareas 2 y 3 implican para los alumnos, y de que la resolución de estas tareas favorezca la interpretación del porcentaje como una cantidad relativa.

Problema 1. 20 minutos

- Propósito didáctico:

Que los alumnos resuelvan algunas tareas de tipo 2 en el registro gráfico: deberán determinar, para varios rectángulos, el porcentaje que representa una parte sombreada. Tanto los tamaños de las superficies como las partes sombreadas varían, pero elegimos casos en los que, en una pareja de rectángulos:

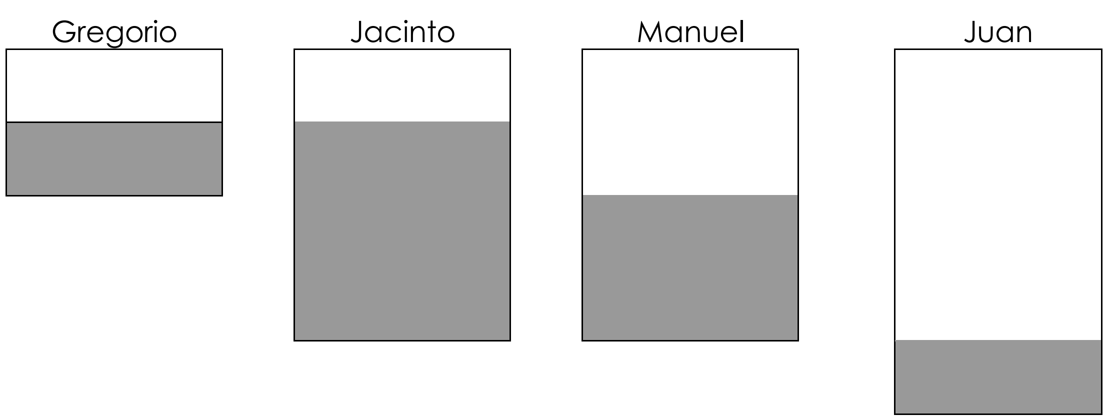
- se conserva el tamaño del total pero la parte sombreada es distinta
- las superficies son de diferente tamaño pero la parte sombreada representa en ambas el mismo porcentaje
- la parte sombreada es del mismo tamaño, pero representa diferentes porcentajes pues las superficies totales no son iguales.

- Propósito de investigación:

Estudiar la posibilidad de que las elecciones que describimos en el propósito didáctico ayuden a contradecir la idea de que, en cualquier caso, un tamaño mayor representa un porcentaje mayor, es decir, a comprender que el porcentaje cuantifica una razón, no es una cantidad absoluta.

- Situación:

"Varios agricultores decidieron usar una parte de sus terrenos para sembrar una nueva variedad de maíz, la variedad A. Los siguientes rectángulos representan los terrenos de cuatro de ellos y la parte gris en cada uno representa lo sembrado con maíz A. Anota debajo de cada rectángulo el porcentaje de su terreno que sembró cada uno con el maíz A.



____

______ %   ______ %   ______%   _______ %

GRUPAL. Compara los resultados que obtuviste con los de tus compañeros"

- Posibles respuestas de los alumnos:

Esperamos que algunos alumnos, sobre todo quienes conciban al porcentaje como cantidad absoluta, pero incluso otros que no habrán mostrado esta concepción en el primer tipo de tareas, propongan porcentajes buscando conservar el orden de los tamaños de las partes sombreadas. Por ejemplo, dirán que en el terreno de Jacinto la región gris representa el 80%, en el de Manuel el 50% y en los de Gregorio y Juan el 30%.

Una forma de cuestionar la respuesta "a mayor tamaño, mayor porcentaje" consiste en retomar el problema de las banderas resuelto en la sesión anterior: si se afirma que un mayor tamaño implica un mayor porcentaje, entonces el porcentaje que se pinta de rojo es diferente en las tres banderas.

También puede haber alumnos que asignen a los totales distintos porcentajes. Por ejemplo, dirán que en el terreno de Jacinto la región gris representa el 75%, en el de Manuel el 50% y en los de Gregorio y Juan el 25%, y que el terreno completo de Jacinto y Manuel representan el 100%, el de Gregorio el 50% y el de Juan el 125%. En este caso, estarán manejando los porcentajes como si fueran absolutos, prácticamente como si el signo % fuera equivalente a m^2 tanto en las partes sombreadas como en los terrenos totales. El profesor tendrá en este caso una dificultad para rebatir este argumento, una posibilidad es hacer que escuchen las participaciones de sus compañeros, y otra es retomar lo que ya había sido acordado en la clase pasada: el 100% es el total, el porcentaje puede ser el mismo aunque los tamaños cambien.

Puesto que los operadores fraccionarios son unitarios en los terrenos de Gregorio, Manuel y Juan, nos parece que será considerablemente más sencilla la resolución en estos casos que en el del terreno de Jacinto. Para determinar aquellos tres porcentajes, prevemos que la estrategia más frecuente será la de ver cuántas veces cabe el área gris en el área total. Por ejemplo, en el terreno de Juan, cabe cinco veces, luego cada parte vale 20 pues el total vale 100, entonces la respuesta es 20%.

El porcentaje en el terreno de Jacinto puede ser determinado al menos de dos maneras por los alumnos que hayan utilizado el procedimiento anterior para los tres primeros porcentajes: la primera consiste en estimar un porcentaje mayor al 50% (por ejemplo el 80%). En este caso, los compañeros —o el profesor— podrán hacer notar que la estimación se puede precisar verificando si el porcentaje complementario corresponde a la parte blanca. Y esta es precisamente la segunda estrategia, calcular de entrada el porcentaje que representa la parte blanca de la misma manera que en los otros casos se habrá hecho con la gris y después determinar ésta por complemento (la parte blanca cabe cuatro veces en la superficie total, así que representa el 25% y por lo tanto la gris es el 75%).

Problema 2. 20 minutos

- Propósito didáctico:

Que los alumnos resuelvan la tarea de tipo 3 en el registro gráfico. Esta vez, a partir del porcentaje que determina una parte de una superficie, tendrán que reconstruir la superficie total.

- Propósito de investigación:

Distinguir aquello que puede influir en que este tipo de tareas sea más complicado para los alumnos que el anterior, y, nuevamente, indagar si la resolución de esta tarea favorece la interpretación del porcentaje como cantidad relativa. Para esto, hemos cuidado que el orden de los porcentajes no sea análogo al de las superficies totales, y que, en una pareja de rectángulos, la parte sombreada sea la misma pero corresponda a distintos porcentajes.

- Situación:

"Las superficies sombreadas que se muestran a continuación corresponden a las partes en las que se sembró maíz A en tres terrenos más. Debajo de cada una se indica el porcentaje del terreno total que fue sembrado con ese tipo de maíz.

a) ¿Qué terreno crees que es el más pequeño? _________ ¿Cual crees que es el más grande? _____________ (esta pregunta se planteará oralmente por el profesor)
b) Dibuja los terrenos completos y verifica tus anticipaciones."

Antonio Manuel Andrés

20 % 25 % 75 %

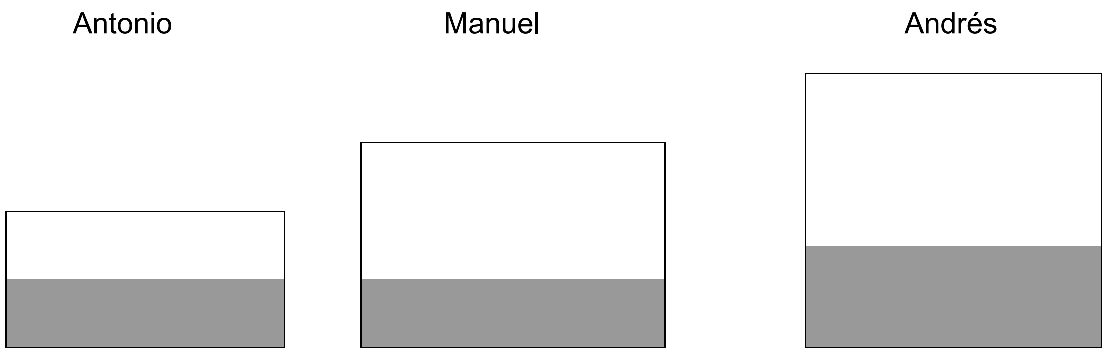
- Posibles respuestas de los alumnos:

Nos parece que puede resultar difícil de comprender la tarea que se les pide, es decir, que los alumnos den por sentado que la cantidad inicial siempre es un dato conocido en un problema.

También es probable que algunos estudiantes digan que hay un error en el planteamiento del problema, pues un mismo pedazo no puede corresponder a distintos porcentajes, como se plantea en los terrenos de Antonio y Manuel.

Si, en el momento de trabajo en parejas, el maestro identifica estas dificultades, puede intentar aclarar la consigna de manera individual, cuidando de no resolverles el problema, o bien, puede hacerlo de manera pública si considera que la explicación será útil para varios.

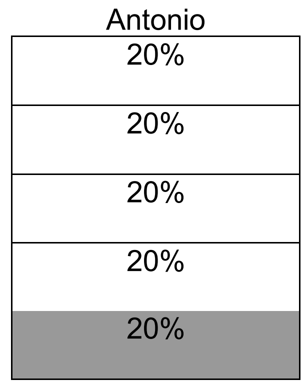
Quizás otros alumnos estimen los tres terrenos, cuidando que el orden de los tamaños sea igual al orden de los porcentajes, es decir, que el terreno de Antonio sea menor al de Manuel y éste, más pequeño que el de Andrés, por ejemplo:



Es posible que nuevamente haya alumnos que asignen al total un porcentaje distinto de 100. El profesor puede entonces llevar este argumento al extremo: si no acordamos que el total es siempre el 100%, la superficie total podría ser cualquiera, en las tiendas un descuento del 50% no diría nada sobre cuanto se va a descontar, podría ser mucho o muy poco. Si el porcentaje total puede tomar distintos valores se vuelve poco útil. Así que por convención social, el 100% siempre representa al total.

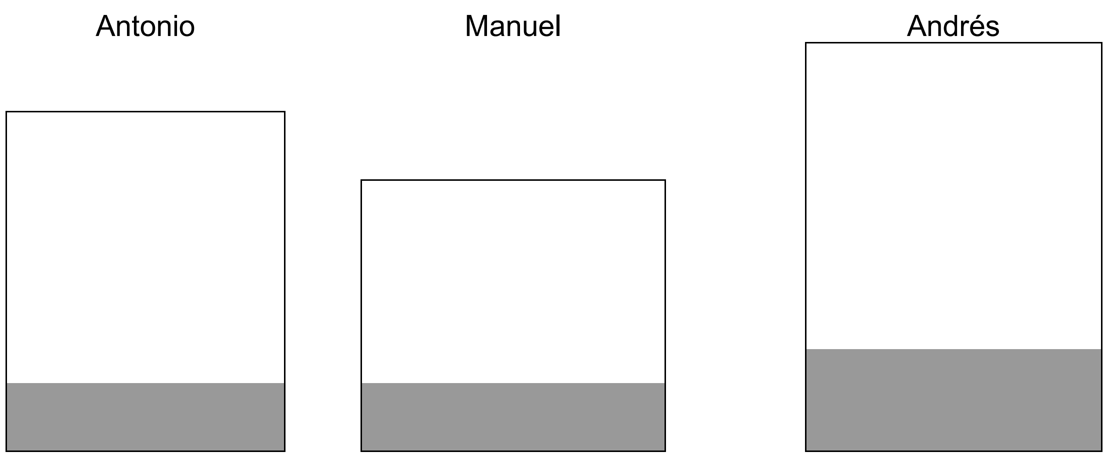
No obstante, reconocemos que una debilidad del diseño de esta situación es precisamente que estamos suponiendo que los alumnos aceptan que el 100% corresponde al total, pues las formas de verificación se apoyarán en esta propiedad. Si los alumnos no aceptan esta convención, será difícil lograr acuerdos en este problema y el anterior.

El procedimiento correcto para encontrar los terrenos de Antonio y Manuel que esperamos encontrar con mayor frecuencia consiste en iterar la parte sombreada el número necesario de veces, por ejemplo, en el terreno de Antonio, copiar cinco veces la barrita gris:



Puesto que los operadores implicados en estos dos terrenos son unitarios, quizás sean más sencillos que en el caso del último terreno, el de Andrés.

Para determinar el terreno de Andrés, es posible que los alumnos construyan un terreno mayor a los de Antonio y Manuel, (pues el 75% es mayor al 20 y 25%), por ejemplo:



Pero entonces resultará que el complemento será mayor a la parte sombreada. Así que el maestro puede preguntar "¿Pero porqué les quedó más grande el 25% que el 75% en el terreno de Andrés?".

Otros alumnos, al no encontrar un procedimiento cuantitativo, quizás propondrán una buena estimación, cuidando de que la parte blanca quede bastante más pequeña que la gris. Finalmente, tal vez alguien se percate de que lo que hay que encontrar es el complemento de la parte sombreada, es decir el 25%, de que éste cabe tres veces en el 75%, y entonces divida el área gris en tres pedazos iguales para copiar uno de esos pedazos una vez más y tener el 100%:

Andrés

25%
25%
25%
25%

Cualquiera que sea la resolución, una forma de verificar consiste en aplicar al total del terreno propuesto por el alumno el porcentaje dado para comprobar si coincide con el tamaño de la parte sombreada, es decir, verificar el tipo de tarea 3 con su inversa, la tarea de tipo 1.

Si los alumnos no externan la necesidad de verificar o la manera de hacerlo, lo puede hacer el maestro.

Problema 3. 10 minutos

- Propósito didáctico:

Que los alumnos logren explicitar la técnica del operador fraccionario para aplicar porcentajes en algunos casos en que el operador es unitario.

- Propósito de investigación:

Discernir si es posible retomar algunos acuerdos tomados en el registro gráfico para trasladarlos al numérico.

- La situación:

“Explica al menos una forma de calcular los siguientes porcentajes:

el 50% de una cantidad ___________________________________

el 25% de una cantidad ___________________________________

el 20% de una cantidad ___________________________________

el 10% de una cantidad ___________________________________

GRUPAL. Compara tus resultados con los de tus compañeros.”

- Posibles respuestas de los alumnos:

Esperamos que el procedimiento para obtener el 50, 25 y 20% de una cantidad no resulten problemáticos. Algunos alumnos quizás darán la respuesta automáticamente, a partir de los problemas que hasta entonces habrán resuelto. Otros quizás necesitarán verificar cuántas veces cabe el porcentaje dado en el número 100 para poder responder (como 20 cabe cinco veces en 100, el 20% es la quinta parte de la cantidad inicial).

Esto se puede comprobar a partir del registro gráfico: viendo que el 50% cabe dos veces en el total, el 25% cuatro y el 20% cinco.

Es posible que algunos alumnos no recurran a los problemas anteriores de esta sesión, sino a la sesión previa, y entonces recuperen la técnica del operador decimal. El profesor puede aprovechar para mostrar la equivalencia entre ambos operadores, por ejemplo, que es lo mismo multiplicar por 0.5 que tomar la mitad de una cantidad.

Para obtener el 10%, prevemos que algunos dirán que este porcentaje corresponde a la décima parte del total, y otros, que es la mitad del 20%. Esperamos que en la confrontación pueda mostrarse que la segunda implica la primera.

Problema 4.

- Propósito didáctico:

Que los alumnos resuelvan los tres tipos de tareas en el registro numérico, utilizando operadores unitarios.

- Propósito de investigación:

¿Fueron suficientes las actividades anteriores para que los alumnos puedan abordar casos simples de tareas 2 y 3 en el nivel numérico? En particular, las resoluciones que desarrollaron en la actividad anterior al resolver las tareas del tipo 2 y 3 en el registro gráfico ¿constituyen un referente útil para comprender problemas similares en el registro numérico? Esto podrá observarse en i) expresiones que los alumnos usen espontáneamente del tipo “es como en el ejercicio pasado…”, y ii) evocaciones similares que el profesor haga para ayudar a algún alumno y que resulten útiles.

¿Qué consecuencias se desprenden del tipo de dificultades que subsisten con respecto a la secuencia, tanto a la parte realizada como a la parte por realizar?

- Situación:

“En la siguiente tabla aparecen datos de los terrenos de otros cinco agricultores que decidieron sembrar la variedad C de maíz. Calcula y anota los datos que faltan.

	María	Ramón	Alejandra	Sergio	Pepe
Área total	5 400m^2			8 400 m^2	
Área sembrada		3 200 m^2	1, 200 m^2	2 100 m^2	800 m^2
Porcentaje del área total que fue	20%	50%	25%		10%

sembrada					

GRUPAL. Compara los resultados que obtuviste con los de tus compañeros. En el problema 3, ¿alguien contestó que el terreno de Pepe mide 80 metros cuadrados? Comenten por qué esa respuesta no es factible.”

- Posibles respuestas de los alumnos:

Esperamos que la tarea de tipo 1 (María) resulte bastante sencilla, y que la mayoría de los alumnos tomará la quinta parte de 5 400.

Para resolver la tarea de tipo 2 (Sergio) quizás encontrarán la respuesta mediante el procedimiento de ensayo error, aplicando a 8400 dos veces la mitad para hallar el 50% y el 25% que coincidirá con los 2 100 m^2, o dividirán 8 400 entre 2 100 para ver qué parte es el segundo del primero. Este buen comienzo puede no llegar a buen término si comenten errores como, al obtener 4, confundir su sentido de “la cuarta parte” con el 4% o contestar que el porcentaje es el 21% (que resulta simplemente de quitar dos ceros a 2100), como sucedió en la aplicación del cuestionario. No obstante, no creemos que estos errores sean frecuentes. Para encontrar la respuesta correcta por este camino, deben todavía saber que ¼ equivale a 25%.

Finalmente, en las tareas de tipo 3 (Ramón, Alejandra y Pepe) es probable que iteren la cantidad final el número de veces necesario —cuatro veces el 25% es igual al total—, o bien que apliquen el porcentaje dado a la cantidad conocida, como si se tratara del tipo 1 de tareas.

Es muy probable que el tiempo de la sesión no sea suficiente para realizar este problema, no obstante hemos decidido incluirlo para que lo resuelvan aquellos alumnos que terminen los primeros tres problemas antes que sus compañeros.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Álvarez, Ana María y D. Block (1999) "Los números en primer grado: Cuatro generaciones de situaciones didácticas", *Educación Matemática.* Vol. 11, No. 1, pp. 57-76.

Artigue, Michèle (1989) "Epistemologie et didactique", *Cahier de DIDIREM,* No. 3, pp. 14-24.

Artigue, Michèle (1995) "Ingeniería didáctica". En Gómez, Pedro (ed.) *Ingeniería didáctica en educación matemática.* Grupo Editorial Iberoamérica, México.

Artigue, Michèle (2004) "Problemas y desafío en educación matemática: ¿Qué nos ofrece hoy la didáctica de la matemática para afrontarlos?", *Educación Matemática*, Vol. 16, No. 3, pp. 5-28.

Ávila, Alicia (2006) "Prácticas cotidianas y conocimiento sobre las fracciones. Estudio con adultos de escasa o nula escolaridad", *Educación Matemática,* Vol. 18, No. 1, pp.5-35.

Balbuena, Hugo y D. Block (1991) "¿Qué significa multiplicar por 7/4? Reflexiones sobre lo que sucedió en una clase de matemáticas para maestros", *Cero en conducta,* Año 6, No. 25, mayo-junio, pp:21-32.

Block, David; P. Martínez; M. Dávila y M. Ramírez (2000) "Usos de los problemas en la enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria", En Carrillo, José y L. C. Contreras (eds.) *Resolución de problemas en los albores del siglo XXI: una visión internacional desde múltiples perspectivas y niveles educativos.* Hergué Editorial, España.

Block, David (2001) "La noción de razón en las matemáticas de la escuela primaria. Un estudio didáctico", Tesis doctoral, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados (CINVESTAV), Departamento de Investigaciones Educativas (DIE), México.

Block, David y D. Solares (2001) "Las fracciones y la división en la escuela primaria: análisis didáctico de un vínculo", *Educación Matemática*, Vol. 13, No. 2, pp. 5-30.

Block, David y N. González (2005) "La división de una fracción entre un número natural: análisis de una experiencia didáctica", *Educación Matemática,* Vol. 17, No. 2, pp. 59-89.

Block, David (2006) (Coord.) *Apuntes del Seminario de Didáctica de las Matemáticas.* Documento de trabajo. CINVESTAV, DIE, México.

Block, David (en proceso) "El papel de la noción de razón en la construcción de las fracciones en la escuela primaria". En Cantoral, Ricardo, O. Covian, R. Farfán, J. Lezama, A. Romo (eds.) *Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: un reporte iberoamericano,* Díaz de Santos de México-Clame A.C., México.

Bosch, Marianna (1994) "La dimensión ostensiva en la actividad matemática. El caso de la proporcionalidad", Tesis doctoral, Universitat Autónoma de Barcelona, España.

Brousseau, Guy (1980) "Problèmes de l'enseignement des décimaux", *Recherches en didactique des mathématiques,* Vol. 1, Núm. 1, pp. 11-59.

Brousseau, Guy (1981) “Problèmes de didactique des décimaux”, *Recherches en didactique des mathématiques*, Vol. 2, Núm. 1, pp. 37-127.

Chamorro, Ma. del Carmen (coord.) (2003) *Didáctica de las Matemáticas.* Colección Didáctica Primaria. Pearson, Prentice-Hall, España.

Chevallard, Yves, M. Bosch, J. Gascón (1998) *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje*, Fondo mixto de cooperación técnica y científica México-España, Biblioteca del normalista, España.

Chevallard, Yves (1999) “Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques: l’approche anthropologique”, *Recherches en Didactique des Mathématiques*. Vol. 19, No. 2, pp. 221-266.

Comin, Eugène (2002) “L’enseignement de la proportionnalité à l’école et au collège“, *Recherches en Didactique des Mathématiques,* Vol. 22, Núm. 2-3, pp. 135-182.

Comin, Eugène (2003) “Des graines et des souris“, *Grand N*, Núm. 72, pp. 41-73.

Dávila, Martha (1992) “El reparto y las fracciones”, *Educación Matemática,* Vol. 4, Núm. 1, pp. 32-45.

Duval, Raymond (1995), *Sémiosis et pensée humaine, Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*, Peter Lang, Suiza.

Erickson, Frederick (1993) “El discurso en el aula como improvisación : las relaciones entre la estructura de la tarea académica y la estructura de la participación social en clase“, en Velasco, Honorio, J. García, A. Díaz (eds.) *Lecturas de antropología para educadores. El ámbito de la antropología de la educación y de la etnografía escolar,* Trotta, España.

Freudenthal, Hans (1983) *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*, Reidel, Dordrecht, Holanda.

Hart, Kathleen (ed.) (1981) *Children´s understanding of mathematics: 11-16*, John Murray, Londres.

Hart, Kathleen (1988) “Ratio and proportion” en Hiebert, James y M. Behr (eds), *Number Concepts and operations in the middle grades*, Vol. 2, Lawrence Erlbaum Associates National Council of teachers of mathematics, Hillsdale, N.Y.

Kieren, Thomas (1988) “Personal knowledge of rational numbers: its intuitive and formal development” en Hiebert, James y M. Behr (eds.) *Number Concepts and operations in the middle grades*, Vol. 2, Lawrence Erlbaum Associates National Council of Teachers of Mathematics, Hillsdale, N.Y.

Küchemann, Dietmar (1989) “The effect of setting and numerical content on the difficulty of ratio tasks”, *Psychology of Mathematics Education. Actes de la 13e Conférence Internationale 9-13 julliet*, Vol. 2, pp. 180-186.

Noelting, Gerald (1980a) “The development of proportional reasoning and the ratio concept. Part I. Differentiation of stages”, *Educational Studies in Mathematics*, Vol. 11, Núm. 2, pp. 217-253.

Noelting, Gerald (1980b) “The development of proportional reasoning and the ratio concept. Part II. Problem-structure at successive stages; problem-solving strategies and the mechanism of adaptive restructuring”, *Educational Studies in Mathematics*, Vol. 11, Núm. 3, pp. 331-363.

Panizza, Mabel (comp.) (2003) *Enseñar matemática en el Nivel Inicial y el primer ciclo de EGB. Análisis y propuestas*, Paidós, Argentina.

Perrin-Glorian, Marie-Jeanne (1994) “Théorie des situations didactiques: naissance, développement, perspectives” en Artigue, Michèle y R. Grass (eds.) *Vingt ans de didactique des mathématique en France,* La Pensée Sauvage, France.

Pulos, Steven y F. Tourniaire (1985) “Proportional reasoning: a review of the literature”, *Educational Studies in Mathematics*, Vol. 16, Núm.2, pp. 181-204.

Ramírez, Margarita (2004) “El saber enseñado: protagonista en la trama de acontecimientos en el aula. La proporcionalidad en sexto grado de educación primaria”, Tesis de maestría, CINVESTAV, DIE, México.

Sadovsky, Patricia (2003) “Condiciones didácticas para un espacio de articulación entre prácticas aritméticas y prácticas algebraicas”, Tesis de doctorado, Universidad de Buenos Aires, Facultad de Filosofía y Letras, Argentina.

Sadovsky, Patricia, C. Sessa (2005) “The adidactic interaction with the procedures of peers in the transition from arithmetic to algebra: a *milieu* for the emergence of new questions”, *Educational Studies of Mathematics,* Vol. 59, No. 1-3, pp. 85-112.

Secretaría de Educación Pública, SEP (1960a) *Aritmética y Geometría. Estudio de la Naturaleza*. *Mi libro de cuarto año.* Comisión Nacional de los Libros de Texto Gratuitos, México.

SEP. (1960b) *Aritmética y Geometría. Estudio de la Naturaleza*. *Mi cuaderno de trabajo de cuarto año.* Comisión Nacional de los Libros de Texto Gratuitos, México.

SEP. (1961a) *Aritmética y Geometría. Estudio de la Naturaleza*. *Mi libro de quinto año.* Comisión Nacional de los Libros de Texto Gratuitos, México.

SEP. (1961b) *Aritmética y Geometría. Estudio de la Naturaleza*. *Mi cuaderno de trabajo de quinto año.* Comisión Nacional de los Libros de Texto Gratuitos, México.

SEP. (1962) *Aritmética y Geometría. Mi libro de sexto año.* Comisión Nacional de los Libros de Texto Gratuitos, México.

SEP. (1972) *Matemáticas. Quinto grado*. Comisión Nacional de los Libros de Texto Gratuitos, México.

SEP. (1974a) *Matemáticas. Cuarto grado*. Comisión Nacional de los Libros de Texto Gratuitos, México.

SEP. (1974b) *Matemáticas. Sexto grado*. Comisión Nacional de los Libros de Texto Gratuitos, México.

SEP (1997) *Matemáticas. Libro para el maestro*. Educación secundaria. Comisión Nacional de los Libros de Texto Gratuitos, México.

SEP. (2001a) *Matemáticas. Quinto grado*. Comisión Nacional de los Libros de Texto Gratuitos, México.

SEP (2001b) *Matemáticas. Sexto grado*. Comisión Nacional de los Libros de Texto Gratuitos, México.

Soto, Isabel (2001) "Aportaciones a la discusión sobre la enseñanza de las matemáticas a partir de la didáctica y la etnomatemática" en Lizarzaburu, Alfonso y G. Zapata (comps.) *Pluriculturalidad y aprendizaje de la matemática en América Latina. Experiencias y desafíos.* Ediciones Morata, España.

Vergnaud, Gérard (1988) "Multiplicative Structures" en Hiebert, James y M. Behr (eds.) *Number Concepts and operations in the middle grades,* Vol. 2, Lawrence Erlbaum Associates, National Council of Teachers of Mathematics, Hillsdale, N.Y.