CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

Sede Sur
Departamento de Investigaciones Educativas

LA ENSEÑANZA DE LA NOCIÓN DE PROPORCIONALIDAD EN LA ESCUELA SECUNDARIA: CONOCIMIENTOS DE MAESTROS

Tesis que para obtener el grado de Maestra en Ciencias en la Especialidad de Investigaciones Educativas

Presenta

Rocío Guadalupe Balderas Robledo
Licenciada en Matemáticas

Directores de tesis

David Francisco Block Sevilla
Doctor en Ciencias

María Teresa Guerra Ramos
Doctora en Filosofía

Febrero, 2010

Calzada de los Tenorios 235, Col. Granjas Coapa, C. P. 14330, Apartado Postal 86-355, México, D. F.
Tel. 54 83 28 00, Fax 56 03 39 57

Para la elaboración de esta tesis, se contó con el apoyo de una beca de Conacyt.

A mi compañero, amigo y confidente de hace años… por los que siguen.

AGRADECIMIENTOS

A David Block por su inigualable dedicación, entrega y compromiso como director de tesis. Gracias por la buena voluntad que mostró desde principio al aceptarme como estudiante a pesar de las responsabilidades extras con las que contaba. Gracias por su paciencia, orientación, pero sobre todo por la disposición para conversar y poner a discusión cada escrito. Gracias porque además de compartir sus conocimientos, experiencias y rigor académico, siempre estuvo acompañado de una calidad humana. En pocas palabras, gracias por la confianza que depositaste en mí.

A Teresa Guerra por representar, desde un inicio, el ejemplo de que iba en buen camino. Por enseñarme a ver las cosas desde otra perspectiva, a ser sistemática en ciertas ocasiones y, en otras a dejar fluir las ideas. Gracias por el enorme apoyo que tuve en todo momento en el trabajo de campo, desde la construcción del cuestionario hasta su aplicación y tratamiento. Gracias por las lecturas y observaciones al trabajo, y también por la comprensión y calidez humana que siempre me brindó.

A Adrianna Gómez y Dulce López por la disposición que tuvieron para hacer la lectura al trabajo. Gracias por las observaciones precisas y certeras, que ayudaron a enriquecer el trabajo.

A mis maestros de la maestría: Tere Guerra, Adrianna Gómez, Ruth Mercado, Elsie Rockwell, Petra González, Ariadna Acevedo, María de Ibarrola, Germán Álvarez y Eduardo Remedi. Por enseñarme la dedicación que se requiere para la investigación educativa y el compromiso que éste representa. A Susana Quintanilla por el amable recibimiento que tuvimos al llegar al DIE. A Irma Fuenlabrada por la lectura a los avances del proyecto y sus atinadas observaciones que aportaron al trabajo.

A mis compañeros y amigos de la maestría de ambas generaciones 2008 y 2010. Por compartir sus conocimientos y experiencias en, y fuera, de clases. Agradezco especialmente a Rocío Estrada, Blanca, Ariana, Ricardo, Luciano, Edgar, David Bravo, Yadira, Jocelin, Nancy, Areli Castilla, Daniela e Hilda por ser como una familia para mí en estos meses fuera de casa. Les agradezco los momentos de trabajo, charlas, risas y demás. Me llevo grandes amistades.

A mis amigos del CINVESTAV Monterrey: Liliana, Diana, Flor, Abraham, Paco, Nelly, Marcelo y Ale. Por las placenteras charlas en las comidas y en los trayectos a la institución. Gracias por el apoyo y la amistad.

A mis compañeros y amigos del seminario de didáctica de las matemáticas por integrarme al grupo. Por compartir sus puntos de vista y dejar la puerta abierta a otros diversos. Por mostrarme la voluntad desinteresada de aprender y entender cosas. Por darme el espacio y mostrar interés para tratar artículos relacionados con mi tema. Por brindarme su apoyo y amistad para terminar este ciclo. Agradezco a Margarita, Laura Reséndiz, Ana Laura, Diana, Tatiana, Lola, Mónica Mendoza, Yolanda, Leticia y Armando por ayudarme tanto en la introducción de la perspectiva como en mi tema. Gracias a Margarita y Tatiana que me dieron grandes aportes en la construcción del cuestionario.

Al personal del DIE, Rosa María Martínez, Guadalupe y Concepción Rodríguez, Sr. Jesús, Juanita, Marcia y al Lic. Fernando Lugo y; al personal de CINVESTAV Monterrey, Irene, Diana, Sra. Mary, Sra. Amalia, Sr. Nabor y Jorge, por sus atenciones siempre cordiales y respetuosas.

Al Dr. Bruno Escalante por apoyarnos a mí y mis compañeros a realizar nuestros estudios en convenio con el DIE.

A la SE-NL y maestros participantes de este estudio por su disposición, colaboración e interés que mostraron por la realización y asistencia, respectivamente, del taller donde se llevo a cabo la aplicación del cuestionario.

A Hilda, por ser como una hermana durante todo el periodo de estancia. Nancy y Areli, por brindarme su apoyo y compañía en mis últimos meses de estancia.

A mi amigo Roberto Hernández por el apoyo incondicionable en todo este trayecto. Por animarme y confiar en mí.

A la Sra. Ana López, Karina, Roberto, Phatima, Gerardo, Perla, Chuy, Oziel, Ana, Jonathan y Gabriel por sus palabras de aliento, cariño y apoyo total.

A mi familia por todo su cariño y por alentarme en este proyecto. A mis padres por todo el esfuerzo que siempre han mostrado para que salga adelante. A Gloria que siempre estuvo conmigo aunque hubiera kilómetros de por medio. A Amador y Adriana por su apoyo constante. A Lalo por ser el primero en decirme que no dejara pasar la oportunidad en irme a estudiar al D.F. A mi cuñado Mike que me apoyó y siempre estuvo al pendiente.

A mis sobrinos que fueron un aliciente para terminar y regresar.

A Pedro por su apoyo infinito, su comprensión, su paciencia para escucharme. Por estar a mi lado en la buenas y las malas. Por hacerme poner los pies en la tierra y al mismo tiempo animarme a volar.

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

Planteamiento del estudio

El presente estudio explora la enseñanza de la noción de proporcionalidad en secundaria desde la perspectiva de los conocimientos de los maestros sobre el tema y sobre su didáctica.

La proporcionalidad es una noción que se encuentra incluida en los programas de estudio de matemáticas de primaria (de cuarto a sexto grado) (SEP, 1993), de secundaria (SEP, 2006b), y también se presenta en los de los niveles medio superior. Constituye una noción de aritmética que se encuentra presente en una gran cantidad de situaciones de la vida cotidiana y en prácticamente todas las disciplinas científicas incluyendo las del área de sociales (Fiol y Fortuny, 1990), e incluso en arte (pintura, música).

En el nivel básico, la proporcionalidad, guarda relaciones con otras nociones de matemáticas tales como, conversiones de unidades, figuras a escala, semejanza, trigonometría, funciones, razón de cambio. Estas relaciones son importantes en la comprensión tanto de las relaciones de proporcionalidad como de las otras nociones.

No obstante, diversos estudios, tanto cognitivos (Inhelden y Piaget, 1955; Hart, 1988, Noelting, 1981) como didácticos (Vergnaud, 1988; Block, 2001; Ramírez, 2004; Mendoza; 2007; entre otros), han mostrado la existencia de dificultades para resolver problemas de proporcionalidad y han dejado ver que éstas dificultades, así como los errores con los que se manifiestan, en particular el error que consiste en utilizar estrategias aditivas en lugar de multiplicativas, pueden provenir tanto de una cuestión de desarrollo del razonamiento proporcional, como de una enseñanza deficiente.

Con respecto a la enseñanza de la proporcionalidad, cabe destacar que ésta ha sufrido grandes cambios a lo largo de los años, no sólo en el aspecto didáctico, sino en la manera en la que se reconstruye y define el saber matemático mismo. El tema ha pasado de ser la culminación de la aritmética escolar, a estar ausente del curriculum, para reaparecer con distintas caras. Ello, naturalmente, ha afectado al conocimiento que los maestros de todos los niveles escolares tienen sobre el tema (Block, 2006).

Es importante entonces saber cómo se sitúa hoy en día el tema de proporcionalidad en el proyecto de enseñanza de las matemáticas en la educación básica y, en particular, cuál es la perspectiva de los maestros. Los maestros son parte de un sistema, que como tal, son responsables de llevar a cabo un proceso: la enseñanza, en particular, de los contenidos. Además, son quienes tratan de alcanzar los objetivos planteados en el programa, así como en su forma de enseñar. No obstante, es importante decir también que los maestros son responsables de su conocimiento solamente en parte, pues lo que ellos saben es también consecuencia de lo que se les ha enseñado. Por ello, el estudio de sus conocimientos debe tener muy presente las condiciones institucionales en las que ha vivido, por decirlo de alguna manera, el conocimiento en cuestión.

Algunos motivos más particulares del interés por el tema, además de los mencionados, son: (1) que en México, y en particular en el DIE, se han llevado a cabo estudios relativamente recientes sobre la enseñanza de la proporcionalidad en primaria (Block, 2001, 2005; Ramírez, 2004), pero poco en secundaria (Mendoza, 2007) y nos interesa extender el conocimiento de esta problemática a toda la educación básica; (2) que actualmente estamos atravesando por una reforma curricular (2006) en secundaria, por lo que la reflexión sobre lo que los maestros saben es oportuna y, finalmente, (3) porque desde mi experiencia como maestra en el nivel secundaria me he enfrentado con dificultades e interrogantes que, desde ese lugar, ha sido difícil para mí resolver.

Por todo lo anterior, la enseñanza de la proporcionalidad me ha parecido un tema relevante a estudiar desde los conocimientos de los maestros. Para ello, con mis asesores, decidimos realizar un estudio basado en un análisis de los conocimientos, del tema, de los maestros, a través de un cuestionario el cual será una ventana que nos acercará a la problemática y nos dará una visión más amplia acerca de la enseñanza de la proporcionalidad.

Antecedentes

A continuación presentamos algunas investigaciones que han aportado al conocimiento de la noción de proporcionalidad y su enseñanza.

Investigaciones de perspectiva cognitiva

Dichas investigaciones estuvieron basadas en las relaciones que intervienen para resolver problemas de proporcionalidad. Entre las más destacadas se encuentran:

Piaget, bajo su teoría psicogenética, estudió la proporcionalidad utilizando una situación de dos variables linealmente independiente, concluyendo que su adquisición implicaba un proceso de desarrollo subordinado a la construcción de determinadas estructuras del pensamiento lógico: idéntica, inversa, recíproca y correlativa. Su coordinación diferenciaría el pensamiento de un adolescente y un niño. Es así como

Piaget y sus colaboradores ubican a la proporcionalidad en el estadio formal, alcanzándose alrededor de los 14 años (Piaget en Block, 2001).

No obstante, estudios posteriores (Karplus y Peterson, 1970) refutan el estadio formal, presentando a un gran número de alumnos del último año de secundaria y algunos de universidad que no han logrado adquirir el razonamiento proporcional.

Es así como se hizo necesario profundizar en las estrategias que realizaban los alumnos y dejar de enfocarse en la estructura cognitiva general. Algunos estudios sobresalientes al respecto fueron realizados por Karplus (1977) y por Hart (1984). Ellos hicieron una clasificación de estrategias (en Fiol y Fortuny, 1990).

Tourniare y Pulos (1985) por su parte, también enfocaron sus trabajos en los procedimientos que emplean los alumnos (en Block, 2001). Tourniare sintetizó los trabajos realizados hasta entonces clasificándolos, a los problemas y trabajos, en tres grupos: físicos (balanza y proyección de sombras), de razón y proporción (Mr. Tall and Mr. Short) y, problemas de mezclas (Lemonade Puzzle).

Hart (1988) y Karplus (1983) reconocen que existen factores dentro de las tareas que provocan el uso frecuente de las estrategias aditivas, por ejemplo. Hart también reconoce el uso de estrategias espontáneas, las llama "*building up*", las cuales conservan la suma y las razones internas (en Block, 2001).

Con el fin de corregir el uso de estrategias erróneas, como las aditivas, los investigadores consideran que es necesario estudiar situaciones de enseñanza, surgiendo entonces la perspectiva didáctica.

Investigaciones de perspectiva didáctica

Estos trabajos buscan favorecer el aprendizaje y la enseñanza de la noción de proporcionalidad.

Vergnaud (1988) propone el concepto de "campo conceptual[1] de las estructuras multiplicativas", que define como "el conjunto de todas las situaciones que pueden ser analizadas como problemas de proporción simple o múltiple y para los cuales usualmente se necesita multiplicar o dividir".

Bosch (1994) realizó un análisis a la teoría de razones y proporciones en los textos clásicos en donde mostró los cambios sufridos y las debilidades principalmente

[1] Dicha teoría afirma que un concepto no puede ser reducido a su definición, al menos si se está interesado en su aprendizaje y enseñanza. Dice que a través de las situaciones y de los problemas que se pretenden resolver es como un concepto adquiere sentido para el niño (Vergnaud, 1990).

en el nivel teórico. También reconoció que el progreso de las técnicas e hizo una diferenciación entre los objetos ostensivos[2] y los no ostensivos.

Bolea y otros (2001) proponen un modelo de algebrización basado en grados de algebrización de una organización matemática. Toman a la proporcionalidad de magnitudes como la organización matemática a estudiar. Con ello pretenden dar cuenta de los procesos transpositivos que afectan al proceso de algebrización.

Comin (2002) realizó un estudio de la evolución de las condiciones de la enseñanza de la proporcionalidad para comprender las razones de las dificultades que tienen alumnos y maestros entorno a esta noción. En él propone un modelo en el que esquematiza y organiza los conocimientos de la proporcionalidad en tres marcos: el de las magnitudes, el de las magnitudes medidas y el de la variables numéricas.

Algunos estudios experimentales de esta misma perspectiva, realizadas en diferentes países:

Investigador(es)	**País**	**Estudio consistió en:**
Block, David (2001)	México	El diseño y la aplicación de secuencias didácticas relativas a la noción de razón, dirigidas a alumnos de tercer a quinto grado de primaria. Posteriormente, se realizó el análisis de resultados de una de éstas.
Solar B., H., y Zamorano, A. (2002)	España	Un análisis cualitativo y cuantitativo con tres unidades: el estudio de tres libros, aplicación de un cuestionario a dos grupos de primero y segundo de secundaria y, una entrevista a dos expertos en matemáticas.
Monteiro, Cecilia (2003)	Portugal	Un programa de educación para maestros en formación de educación básica de matemáticas, se exploran las dificultades que tienen con los conceptos de razón y proporción, principalmente cuando ellos resuelven problemas usando algoritmos.
Ramírez, Margarita (2004)	México	Un análisis didáctico de una secuencia de clases comunes acerca de la enseñanza de la proporcionalidad, en un grupo de sexto grado de educación primaria, de una escuela pública, orientado hacia la recuperación de formas de trabajo específicas de un maestro en la enseñanza de las matemáticas.

[2] Definido como *ostensif* del latín *ostendere*, que significa mostrar, presentar con insistencia, para referirse a todo objeto que tienen una naturaleza sensible, una cierta materialidad, y que, de hecho, adquiere para el sujeto humano una realidad perceptible (Bosch y Chevallard en Ramírez, 2004).

Investigador(es)	País	Estudio consistió en:
Adjiage, R. y Pluvinage, F. (2007)	Francia	Un experimento de dos años relacionado a la enseñanza y aprendizaje de los números racionales y proporcionalidad (sexto y séptimo). Se observaron dos clases, donde una era conducida por un maestro y usaban papel y lápiz y la otra clase fue basada en un marco de trabajo, e hicieron un estudio de comparación de lo aprendido en las dos clases.
Ben-Chaim, D., Keret, Y. y Ilany, B. (2007)	Israel	Crear, implementar y evaluar un modelo de enseñanza del razonamiento proporcional como parte de un programa de educación para maestros de matemáticas en formación en Israel.

Nuestro estudio, similarmente a otros aquí mencionados, está centrado en los maestros, particularmente en sus conocimientos acerca de la noción de proporcionalidad. Sólo que éste, además de explorar sus conocimientos y dificultades al momento de resolver diferentes problemas que involucran dicha noción, explora –de sus respuestas escritas- las *características que los maestros atribuyen a las relaciones de proporcionalidad*, es decir, por qué una relación es, o no, de proporcionalidad; los *vínculos que establecen con otros temas de matemáticas*; la *comprensión de algunos conceptos relacionados con la proporcionalidad* y; algunos *conocimientos* que tienen *sobre sus alumnos y su enseñanza*. A grandes rasgos, deseamos que el estudio considere un campo más amplio de exploración de la noción de proporcionalidad. Esto con el fin de construir un panorama más claro que muestre los conocimientos con los que los maestros cuentan actualmente, y posiblemente enseñen, de esta noción.

Preguntas de investigación

El presente estudio está centrado en la enseñanza de la proporcionalidad desde los conocimientos de los maestros. Se estudia la proporcionalidad directa que se plantea en primer grado de secundaria (SEP, 2006b).

Esta investigación es de carácter exploratorio y está motivada por la siguiente pregunta:

¿Cómo se enseña hoy en día la proporcionalidad?

Desde el punto de vista de "el sujeto" que se encarga, más directamente, de llevar a cabo la enseñanza, tenemos a los maestros como respuesta. Partiendo de estos sujetos, nos centramos en estudiar sus conocimientos respecto a la proporcionalidad y responder:

¿Cuáles son los conocimientos que los maestros tienen sobre la noción de proporcionalidad y algunos aspectos de su enseñanza?

Para ello nos planteamos los siguientes propósitos:

- Explorar cómo resuelven los maestros algunos problemas de proporcionalidad, las características que les atribuyen y cómo los reconocen.
- Explorar algunos conocimientos de los maestros relacionados con la enseñanza de la proporcionalidad, en particular, el de los conocimientos de los estudiantes.
- Explorar las técnicas que los maestros dicen que usarían en su enseñanza para resolver problemas de proporcionalidad.
- Explorar relaciones con otros temas de matemáticas en donde interviene la proporcionalidad que el maestro establece.

Composición de la tesis

La tesis está compuesta por tres capítulos:

El primer capítulo reúne consideraciones matemáticas, curriculares e históricas sobre la proporcionalidad. En éste se expone las definiciones de proporcionalidad sustentadas desde diferentes teorías, así como la abordada desde una investigación educativa. También se aborda la importancia de la proporcionalidad por ser base para el estudio y la comprensión de otras nociones matemáticas. Se resumen las anteriores y actual reformas curriculares en México. Por último, plantean las herramientas teóricas de trabajo: la proporcionalidad como situaciones (TSD) y como praxeología (TAD).

El segundo capítulo es más extenso. En él se informa la construcción del cuestionario y su metodología, y se presentan los resultados obtenidos con la aplicación del cuestionario.

En la primera parte, además de describir las finalidades, desarrollo, estructura y características del cuestionario, se incluye el análisis previo de los problemas y ejercicios del instrumento. En éste se explican las razones por las que se eligieron esos problemas y ejercicios así como algunas respuestas que podían esperarse. A partir de los datos obtenidos, se crearon categorías de análisis que se encuentran también en este apartado.

En la sección de resultados, se presenta primero un panorama general tanto de los problemas y ejercicios como de los argumentos escritos y, enseguida se analizan de forma particular las técnicas y los argumentos más frecuentes así como las principales dificultades. Al final se sintetizan los principales hallazgos de la resolución de problemas.

Posteriormente, en la sección de perfiles, se presentan dos clasificaciones de los maestros: (1) según su desempeño en los apartados del cuestionario: resolución de problemas, identificación del tipo de relación y argumentación; y (2) según la tendencia de procedimientos más empleados por un mismo maestro. Con estas dos clasificaciones se pretende encontrar relaciones entre el tipo de procedimientos que usa y el desempeño en la resolución del cuestionario. También, se analizan relaciones entre el desempeño y otras variables como formación académica, experiencia, sexo y edad.

Finalmente, en el tercer capítulo se muestran algunas reflexiones finales de lo constituyó este estudio, así como las conclusiones y contribuciones del mismo.

CAPÍTULO I. CONSIDERACIONES MATEMÁTICAS, CURRICULARES E HISTÓRICAS SOBRE LA PROPORCIONALIDAD

1.1 Definiciones de la proporcionalidad

La proporcionalidad es un tipo de relación entre dos magnitudes que se puede caracterizar de muy diversas maneras, por ejemplo por el hecho de que los valores de una de las magnitudes pueden determinarse a partir de los valores de la otra, mediante la multiplicación por un factor llamado constante de proporcionalidad[3]. Se trata de una noción matemática antigua que ha sido enseñada desde tiempos remotos[4], y cuya presentación se ha visto fuertemente modificada a través del tiempo, según las teorías matemáticas en las que se ha sustentado y, también, según el enfoque didáctico que ha prevalecido en distintos momentos. Hoy en día la proporcionalidad constituye un concepto híbrido que ha incorporado aportaciones de las diferentes teorías y, aunque es importante en la educación básica, parece ser caduco desde el punto de vista de los matemáticos (Ramírez, 2003: 5).

La proporcionalidad se presenta en numerosas situaciones de vida cotidiana, del de los asuntos relacionados con el dinero (el comercio, los impuestos, etc.) y se relaciona con diversas áreas, no sólo matemáticas y ciencias, también áreas como arquitectura, ingeniería, artes, etc. podemos ver sus aplicaciones.

Desde el punto de vista de la formación matemática de los estudiantes del nivel básico, la proporcionalidad constituye posiblemente el conocimiento de aritmética más complejo, y juega un papel importante en su desarrollo matemático integral para la comprensión de otros conceptos.

Enseguida veremos elementos de la definición de la proporcionalidad, desde dos referentes, el de la teoría clásica: razones y proporciones, y el más moderno: la teoría de funciones. Podremos ver que las variantes actuales de la enseñanza de la proporcionalidad en educación básica, si bien no se ubican en ninguno de estos extremos, toman de cada uno distintos elementos.

Posteriormente, utilizaremos un esquema que presenta tres marcos de modelizaciones escolares de la proporcionalidad, aporte de una investigación que se ubica en la didáctica de las matemáticas, y que ayuda a dilucidar con más claridad las distintas "capas" conceptuales que revisten a esta noción.

---

[3] Esta es una forma de caracterizar las relaciones de proporcionalidad. También es una propiedad necesaria y suficiente para las relaciones de proporcionalidad directa. Más adelante mencionaremos el resto de éstas.

[4] Desde los textos clásicos de aritmética del siglo XIX el capítulo de "Razones y Proporciones" constituía la culminación de la enseñanza de la aritmética.

Enseguida, daremos una mirada a la enseñanza de la proporcionalidad en los textos actuales y, finalmente, haremos una breve caracterización de los tipos de tarea y técnicas presentes en la enseñanza.

1) Teoría de las razones y proporciones

Los libros abordaban este tema describiendo los conceptos, definiciones, propiedades, teoremas y corolarios de la teoría de razones y proporciones. Posteriormente, introducían algunas situaciones[5] en las que intervenía la proporcionalidad[6]. Hemos tomado como referencia los libros, un clásico de principio del siglo pasado, "Nociones Elementales de Aritmética para el uso de las Escuelas de Instrucción Primaria Elemental" (Anízar, 1911) y un texto tradicional sumamente consultado en México por profesores y formadores "Aritmética. Teórico, práctica" (Baldor, 1973).

Razón es el resultado de la comparación entre dos cantidades homogéneas[7], la cantidad que se compara se llama *antecedente*, y aquella con quien se compara, *consecuente*; las dos juntas se llaman *términos de la razón*, y el resultado de la comparación, *relación o exponente*. La razón puede ser: aritmética o geométrica (Sólo abordaremos la geométrica).

Razón geométrica o por cociente, es el cociente de dos cantidades homogéneas. Se indica poniendo dos puntos entre el antecedente y el consecuente, o bien en forma de quebrado, el antecedente como numerador, y el consecuente como denominador:

$$a:b \quad \text{ó} \quad \frac{a}{b} \qquad \text{“}a\text{ es geométricamente a }b\text{”}$$

Proporción es la igualdad de dos razones. Puede ser aritmética o geométrica, donde la primera sería la igualdad de dos razones aritméticas, y la segunda de dos razones geométricas. Esta última se forma de la siguiente manera:

Proporción geométrica: $a:b::c:d$ "*a* es geométricamente a *b*, como *c* es geométricamente a *d*"

El primero y cuarto término de la proporción se llaman *extremos*, y el segundo y tercero, *medios*.

Teorema. La **propiedad fundamental de la proporción geométrica** es *el producto de los medios es igual al producto de los extremos.*

---

[5] Las situaciones que se presentaban eran: regla de compañía (repartimientos proporcionales), regla de interés, regla de descuento (porcentajes), regla de aligación, regla falsa suposición, problemas de mezclas o aleaciones y de seguros (Anízar, 1911; Baldor, 1973).

[6] En este estudio sólo consideraremos a la proporcionalidad directa.

[7] Se refiere a cantidades de la misma magnitud.

Corolario. Uno de los extremos (o medio) es igual al producto de los medios (extremos), dividido por el otro extremo (medio).

En toda proporción geométrica se pueden efectuar las siguientes transformaciones, sin afectar la proporción ($a : b :: c : d$):

- *Alternar*, intercambiar los medios ($a : c :: b : d$) o los extremos ($d : b :: c : a$).
- *Invertir*, poner los medios en lugar de los extremos y viceversa ($b : a :: d : c$).
- *Permutar*, poner la primera razón por la segunda y viceversa ($c : d :: a : b$).
- *Componer*, comparar la suma de antecedente y consecuente con uno de los dos; esto es, con el antecedente o con el consecuente de cada razón ($a + b : b :: c + d : d$).
- *Dividir*, comparar la diferencia de antecedente y consecuente con uno de los dos en cada una de las razones; esto es, con el antecedente o con el consecuente de cada razón ($a - b : b :: c - d : d$).

Otras propiedades que se destacan en esta teoría para una proporción geométrica $\left(\frac{a}{b} = \frac{c}{d}\right)$ son:

- Multiplicar o dividir todos los términos (o los antecedentes, o los consecuentes, o dos términos de una de las razones) por un mismo número:
  - $\frac{a \times m}{b \times m} = \frac{c \times m}{d \times m}$, $\frac{a \div m}{b \div m} = \frac{c \div m}{d \div m}$,
  - $\frac{a \times m}{b} = \frac{c \times m}{d}$, $\frac{a \div m}{b} = \frac{c \div m}{d}$,
  - $\frac{a}{b \times m} = \frac{c}{d \times m}$, $\frac{a}{b \div m} = \frac{c}{d \div m}$,
  - $\frac{a \times m}{b \times m} = \frac{c}{d}$, $\frac{a}{b} = \frac{c \div m}{d \div m}$.

- Elevar todos sus términos a una misma potencia: $\frac{a^m}{b^m} = \frac{c^m}{d^m}$.
- Extraer una misma raíz a todos los términos: $\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}} = \frac{\sqrt[m]{c}}{\sqrt[m]{d}}$.

Se dice que dos *magnitudes son directamente proporcionales* cuando multiplicando o dividiendo una de ellas por un número, la otra queda multiplicada o dividida por el mismo número.

Una vez presentado el conjunto de conceptos, definiciones, teoremas y propiedades, se presentaban las técnicas –principalmente la regla de tres simple- necesarias para resolver los problemas que abordan la proporcionalidad.

La *regla de tres* es una técnica que sirve para encontrar un término desconocido, que esté en proporción geométrica con los términos dados. Se divide en simple y compuesta. Se llama *simple* cuando hay tres términos conocidos y uno por conocer, y *compuesta* cuando hay más de tres términos conocidos y uno por conocer.

La regla consiste primero en formar la proporción, haciendo la primera razón con las cantidades homogéneas conocidas, de modo que la relativa a la incógnita esté como consecuente, la segunda razón se forma con la homogénea de la incógnita como antecedente y la incógnita como consecuente. Posteriormente, se busca el cuarto término aplicando el teorema fundamental de la proporción. Ejemplo: si 4 libros cuestan \$8, ¿cuánto costarán 15?

Resolución:

Cantidades homogéneas conocidas	Cantidades homogéneas: relativa a la incógnita e incógnita
4 libros 15 libros	8 pesos x

Construcción de la proporción:

$$\underbrace{\frac{4}{15}}_{1^a \text{ razón}} = \underbrace{\frac{8}{x}}_{2^a \text{ razón}} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{15 \times 8}{4} = \frac{120}{4} = 30 \ \textit{pesos}$$

2) Teoría de funciones

Una función puede considerarse como una correspondencia de un conjunto X de números reales x a un conjunto Y de números reales y, donde el número y es único para cada valor específico de x. El conjunto de todos los valores admisibles de x se denomina dominio de la función, y el conjunto de todos los valores resultantes de y recibe el nombre de contradominio (Leithold, 1998: 2).

Una función lineal, también llamada aplicación lineal o transformación lineal, es una función T entre dos espacios vectoriales[8] V y W sobre el campo[9] K, tal que satisface lo siguiente:

---

[8] Un espacio vectorial sobre el campo K, es un conjunto X junto con dos operaciones $+: X \times X \to X$ y $\bullet: K \times X \to X$ que satisfacen las siguientes propiedades: 1) $x + y = y + x$, 2) $(x+y)+z = x+(y+z)$, 3) Existe un elemento en X ($\therefore X \neq \phi$) que denotaremos por 0, tal que $x + 0 = 0 + x = 0$, $\forall x \in X$, 4) $\forall x \in X$, existe un elemento en X que denotaremos por $-x$ tal que $x+(-x)=0$, 5) $\alpha \bullet (\beta \bullet x) = (\alpha\beta) \bullet x$, 6) Si $1 \in K$ denota el neutro multiplicativo, entonces $1 \bullet x = x$, 7) $(\alpha + \beta) \bullet x = \alpha \bullet x + \beta \bullet x$, 8) $\alpha \bullet (x + y) = \alpha \bullet x + \beta \bullet x$ (Grabinsky, 1998).

[9] Ver más en Hoffman, K. y Kunze, R (1973).

1) $T(u+v)=T(u)+T(v)$ isomorfismo aditivo

2) $T(ku)=kT(u)$ isomorfismo multiplicativo

Donde $u, v \in V$ y $k \in K$.

Las funciones lineales definidas para el campo de los números reales pueden definirse a partir de su ecuación que es del tipo $f(x)=kx$, donde k es llamada constante de proporcionalidad y, cuya representación gráfica corresponde a una línea recta que pasa por el origen[10].

Un error común es denominar función lineal a las funciones –en el campo de los reales- del tipo: $f(x)=kx+b$ por ser también su gráfica una línea recta o por tener una función lineal asociada $f(x)=kx$. Sin embargo, la linealidad está asociada al isomorfismo aditivo y multiplicativo. La denominación correcta de este tipo de funciones es función afín.

En el libro "*Álgebra lineal*" (Hoffman y Kunze, 1973), los autores intentan aclarar la confusión del término "función lineal" cuando ésta actúa en los reales, partiendo por la definición de que la imagen del elemento neutro del conjunto de partida es el elemento neutro del conjunto de llegada, pero en este caso hablamos del mismo elemento, $0_{\Re}$: $f(0_{\Re})=0_{\Re}$. Por tanto, corresponderá a una línea recta que pasa por el origen[11].

Como se ve, la teoría de las razones y la de las funciones constituyen referentes de la proporcionalidad tan distintos entre sí que pareciera que no tienen que ver uno con el otro. Entre otras diferencias, destaca el hecho de que en primera las magnitudes concretas estaban muy presentes -aunque se perdieran momentáneamente en las

---

[10] Teorema 1. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre el cuerpo F, sea $\{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$ una base ordenada de V. Sean W un espacio vectorial sobre el mismo cuerpo F y $\beta_1, ..., \beta_n$ vectores cualesquiera de W. Entonces existe una única transformación lineal de T de V en W tal que $T\alpha_j = \beta_j$, $j = 1, \dots, n$.
Este teorema destaca que las funciones lineales son muy especiales, pues la definición de función es muy general y, siendo V y W espacios vectoriales (no nulos), existen una multitud de funciones de V en W (Hoffman y Kunze, 1973: 70).

[11] De acuerdo a la definición, si T es una función (o transformación) lineal de V en W, entonces T(0) = 0

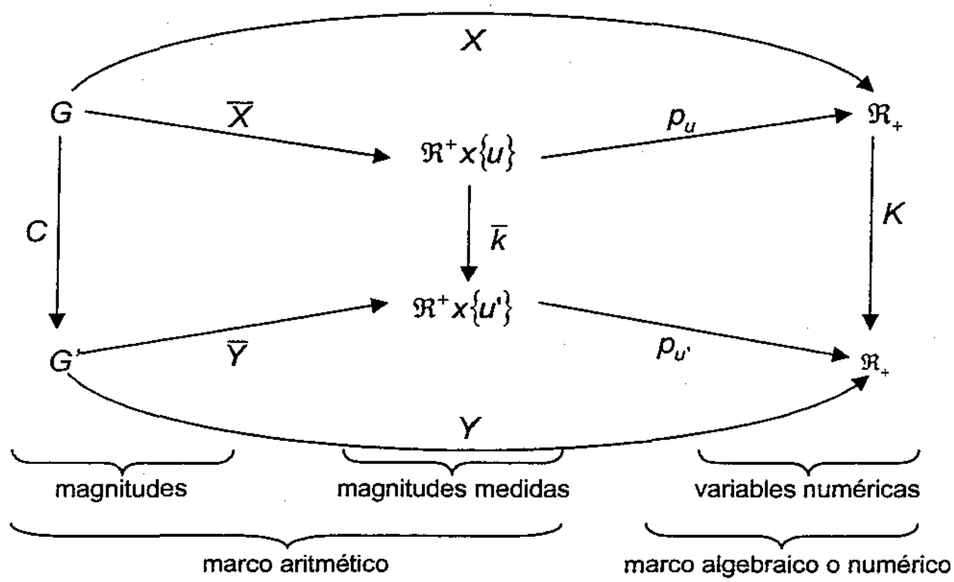
$$T(0)=T(0+0)=T(0)+T(0)$$

...Supóngase que V es el espacio vectorial R1. Una transformación lineal de V en V es entonces un tipo especial de función real en el eje real. En un curso de cálculo es probable que se diga que tal función es función lineal si su grafo es una recta. Una transformación lineal de R^1 en R^1, de acuerdo con la definición, será una función de R en R cuyo grafo es una recta que pasa por el origen...Tal transformación preserva las combinaciones lineales; esto es, si $\alpha_1, ..., \alpha_n$ son vectores de V y $c_1, ..., c_n$ son escalares, entonces $T(c_1\alpha_1 + ... + c_n\alpha_n) = T(c_1\alpha_1) + ... + T(c_n\alpha_n)$ (Hoffman y Kunze, 1973: 68).

intricadas reglas para manejar proporciones-, mientras que en la teoría de las funciones lo que hay son números abstractos, variables reales. No obstante, como veremos un poco más adelante, lo que se encuentra hoy en día en la enseñanza es una diversidad de variantes, cada una tomando de estos marcos distintos elementos. Antes de asomarnos a la propuesta actual, presentamos una caracterización del objeto "proporcionalidad", hecha desde la investigación en didáctica de las matemáticas, y que resulta útil para interpretar, y para ubicar los conceptos y términos procedentes de distintas épocas.

3) Tratamiento didáctico de las estructuras matemáticas de la proporcionalidad: el modelo general (Comin, 2002)

Eugène Comin en su artículo "La enseñanza de la proporcionalidad en la escuela y el colegio" describe a través de un esquema la organización escolar de la proporcionalidad. En él presenta tres marcos en los que se inscriben las diferentes modelizaciones escolares de la proporcionalidad:



Esquema 1-1. Modelo general de las modelizaciones escolares de la proporcionalidad

- Marco de las magnitudes. Sólo se trabaja con cantidades de magnitud[12] sin aludir a algún valor de éstas. Para mostrar que dos magnitudes G y G' son proporcionales es necesario mostrar que toda razón de dos elementos de una magnitud es igual a la razón de los elementos correspondientes de la otra magnitud:

[12] Nos referiremos a: magnitud, como el nombre genérico de un tipo de magnitud; a cantidad de magnitud, como la magnitud específica de un objeto, por ejemplo, "la longitud de una mesa"; y a medida, como el valor numérico asignado a la cantidad de magnitud proveniente de una aplicación, por ejemplo, 1 metro.

$R(g_2, g_1) = R(g'_2, g'_1)$, para cualquier g_1 y g_2 de G. Las justificaciones para esta universalidad son: expresar una ley física, una necesidad matemática o lógica o convención social. Para determinar los elementos faltantes se consideran dos hechos: uno, conocer la razón de dos elementos de una misma magnitud dada la razón de los dos elementos correspondientes de la otra y, dos, el elemento correspondiente a un elemento de una de las magnitudes se obtiene con ayuda de una proporción en la que se conocen tres elementos, siendo el cuarto el elemento buscado.

• Marco de las magnitudes medidas. Cantidades expresadas por parejas: medida y unidad. Con las medidas (m_1, m_2) se pueden formar razones entre dos magnitudes (g_1, g_2) sin que tengan que ser homogéneas. Así, las magnitudes son proporcionales si sus medidas lo son, y viceversa, $R(g_2, g_1) = R(g'_2, g'_1) \Leftrightarrow \frac{m_2}{m_1} = \frac{m'_2}{m'_1}$. Para averiguar si hay proporcionalidad se busca que, para todo par de medidas (m_i, m'_i), existe un número tal que $m'_i = k \times m_i$. El cálculo de elementos faltantes se facilita por la existencia de la relación numérica $y = kx$.

• Marco de las variables numéricas o algebraicas. La proporcionalidad entre dos conjuntos se verifica al establecer una correspondencia biunívoca entre estos conjuntos, de forma que si la razón formada entre dos números correspondientes es constante, entonces se puede considerar que los conjuntos forman una función lineal. Sólo si los números son positivos pueden considerarse medidas de dos magnitudes proporcionales. En la práctica, basta verificar si las razones internas se conservan. El cálculo de los valores faltantes también se facilita por la existencia de la relación numérica $y = kx$.

Así, este esquema permite comprender a la proporcionalidad de manera dinámica, como una relación entre magnitudes, la cual puede ser modelada como una relación entre las medidas de las magnitudes, la cual, a su vez, puede ser modelada por el concepto de función lineal.

En los años setentas, con el movimiento de las matemáticas modernas, hubo intentos por enseñar en la escuela básica directamente el modelo algebraico. Hoy en día hay consenso en la necesidad de partir de las magnitudes:

With "modern mathematics", the question arose: Is it better to learn numbers and operations before applying them to magnitudes, or to study magnitudes first in order to construct numerical concepts? Nowadays mathematics education gives magnitudes a central place in learning, particularly in the domain of ratio. But during the 70's, magnitudes were dropped from many curricula, with regrettable consequences (Rouche, 1997: 41–43; y Brousseau, 1986: 75–95, citados por Adjiage y Pluvinage, 2007).

Temarios

Los temarios, así como los tipos de tareas[13] proporcionan una forma más de contrastar los acercamientos a la proporcionalidad. En la tabla siguiente se muestran dos listas de temas, una del acercamiento clásico (Razones y Proporciones) y otra del actual.

Teoría clásica: razones y proporciones (Baldor, 1973)	Enseñanza actual (SEP, 2006b)
• Valor faltante • Regla de compañía (repartimientos proporcionales) • Regla de interés • Regla de descuento (porcentajes) • Regla de aligación • Regla falsa suposición • Problemas de mezclas o aleaciones • Problemas de seguros	• Valor faltante • Repartimientos proporcionales • Semejanza • Factor de proporcionalidad sucesivos • Porcentajes • Comparación de razones

Tabla 1-1. Tipos de tareas donde interviene la proporcionalidad

Podemos ver que, si bien algunos tipos de tareas se han conservado, en la enseñanza actual ha disminuido el número de aplicaciones prácticas (desaparecieron del curriculum de educación básica temas como la regla de interés, de aligación y de falsa suposición), y en cambio hay cierta presencia de temas que se vinculan más con otra nociones de matemáticas, tales como la semejanza, y la composición de operadores.

1.2 Proporcionalidad como andamio en la construcción de otras nociones matemáticas

El estudio de la proporcionalidad, además de servirnos para comprender y manejar diversas situaciones de la vida cotidiana y de otras disciplinas, su conocimiento también nos ayuda a estudiar y comprender otras nociones matemáticas, tanto en el nivel básico como en el superior. Algunas de estas nociones son: escala, semejanza, razón, fracción, números racionales, función lineal y no lineal, medición, probabilidad,

[13] La noción de tarea o, mejor, tipo de tarea supone un objeto relativamente preciso... son construcciones institucionales, cuya reconstrucción en tal institución, y por ejemplo en tal clase, es un problema completo, que es el objeto mismo de la didáctica (Chevallard, 1999).

espacios vectoriales, etc. Por tanto, podemos decir que la proporcionalidad guarda cierta relación con todas estas nociones.

Vergnaud (1988) menciona que *"un concepto simple regularmente no se desarrolla en forma aislada sino en relación con otros conceptos a través de varios tipos de problemas y con la ayuda de varias nomenclaturas y simbolismos"*, por lo que es conveniente estudiar tales nociones como campos conceptuales[14], y así *"entender las conexiones y saltos en la adquisición de conocimiento por parte de los estudiantes"*.

Vergnaud hace referencia al campo conceptual de las estructuras multiplicativas como a todas las situaciones que pueden ser analizadas como problemas de proporcionalidad simple o múltiple. Y en donde conceptos como razón y fracción, incluidos en este campo, posteriormente serán sintetizados en el concepto de número racional (Vergnaud en Block, 2005).

Asimismo, Brousseau al estudiar la enseñanza de los racionales, reconoce el papel que tiene estudiar situaciones de proporcionalidad (en Block, 2005).

Block (2005) muestra, a través de secuencias didácticas –constituidas por problemas de proporcionalidad-, la posibilidad de la construcción de las fracciones como medida y como operador multiplicativo, a partir de las razones. No obstante, dejando ver la complejidad que es su articulación, y la necesidad de seguir estudiando las secuencias didácticas.

Cabe destacar aquí, la perspectiva didáctica de la enseñanza de las matemáticas que hoy en día es considerada, es decir, el papel que desempeña elementos como el curriculum y los maestros dentro de la enseñanza de un concepto matemático, sin referirnos a éste mismo.

Finalmente, debemos reconocer el papel que tiene el estudio de la proporcionalidad en la educación básica, y no perder de vista sus vinculaciones al momento de enseñarla, pues éste es el puente hacia otras nociones, posiblemente más complejas.

1.3 La proporcionalidad en las diferentes reformas en México

La proporcionalidad en el pasado

En México, a lo largo de las últimas cinco décadas ha habido al menos tres reformas curriculares en secundaria, las cuales seguramente han influido en las formas de

[14] Campo conceptual, definido como un conjunto de situaciones cuyo dominio requiere del manejo de diferentes conceptos de naturaleza distinta (Vergnaud, 1988).

enseñanza de la proporcionalidad[15]. Enseguida nos detendremos en las transformaciones ocurridas en dichas reformas alrededor del planteamiento de este tema.

Ramírez (2004) menciona que alrededor de 1932, el uso de la técnica llamada "regla de tres" había desaparecido de los programas de la SEP, probablemente debido a su carácter mecánico. Sin embargo, posteriormente, en la década de los sesenta la regla de tres regresa, inscrita en la Teoría Clásica de razones y proporciones. La propuesta de esta década se caracterizaba por la aplicación de reglas, fórmulas y definiciones en un gran número de problemas estereotipados (Block y Álvarez, 1999).

En los años setentas, con la influencia europea, surgen las "matemáticas modernas". Uno de los objetivos de este enfoque era *"iniciar al niño en las conceptualizaciones formales de la matemática y de la manipulación de situaciones, expresiones y objetos"* (SEP, 1972: ix, en Ramírez, 2004). Una de las modificaciones más notables en el tema de proporcionalidad con respecto al enfoque anterior fue la desaparición casi completa de los términos razones y proporciones y un nivel incipiente de introducción de las ideas de variación o dependencia funcional (Ramírez, 2004; Block, 2005).

En la reforma de los noventas influyen los primeros aportes de la investigación en didáctica de las matemáticas de filiación constructivista. Se deja de lado la interpretación que enfatizaba las etapas de desarrollo cognitivo de los alumnos (característica de los programas del primer ciclo de primaria, de los ochenta), para atender más a los procesos de construcción del conocimientos específicos y, más específicamente, a las condiciones didácticas que pueden favorecer el aprendizaje de las matemáticas (Block y Álvarez, 1999). En esta propuesta se retoma nuevamente las nociones de razón y proporción, dentro de las matemáticas concretas, aunque éstas se abordan de manera distinta que en los años sesenta: por una parte, ahora se incluyen temas como procesos de comparación, nociones de variación (utilización de tablas), variación proporcional e identificación de situaciones en las que subyace o no la proporcionalidad (Ramírez, 2004), que antes no estaban y, por otra parte, se promueve un enfoque que busca abandonar el esquema "reglas, aplicaciones" a favor de situaciones que permitan a los alumnos ir desarrollando poco a poco por algunas reglas, a partir de la resolución de problemas. El marco de referencia de las propuestas

[15] El maestro no toma la innovación tal cual y la sigue al pie de la letra. Rockwell y Mercado mencionan al respecto: "La resolución cotidiana de qué enseñar y cómo hacerlo supone no sólo la reproducción, sino la integración y generación de conocimientos por parte de quienes ejercen ese trabajo" (1990: 68).

de esta década tiene una clara influencia de la Teoría de las Situaciones Didácticas de Brousseau (Brousseau, 1997)

Finalmente, en el 2006 surge una nueva reforma en secundaria, aún vigente, la cual, en continuidad con la de los noventas, enfatiza la importancia de que el aprendizaje sea construido a través de problemas, donde la intuición e ideas previas intervengan para buscar la solución. Se favorece además, según los programas: el uso de herramientas matemáticas para ampliar, reformular o rechazar estas ideas previas (SEP, 2006: 9), la búsqueda de diferentes formas de resolver los problemas y a formular argumentos que validen los resultados (SEP, 2006b: 11).

Otro aspecto nuevo en los programas vigentes es la explicitación de competencias matemáticas, dentro de la evaluación de la asignatura[16]. Las competencias que se plantean y definen son cuatro: *planteamiento y resolución de problemas*, consiste en identificar, plantear y resolver diferentes tipos de problemas o situaciones; *argumentación*, formular argumentos que les den sustento al procedimiento y/o solución encontrados, con base a las reglas del debate matemático; *comunicación*, expresar y representar información matemática contenida en una situación del fenómeno, así como la de interpretarla y; *manejo de técnicas*, usar eficientemente los procedimientos y formas de representación al efectuar cálculos, con o sin el apoyo de la tecnología. Además, resalta no limitarse al uso mecánico de las operaciones aritméticas y algebraicas, sino que sean los alumnos capaces de elegir la o las operaciones adecuadas (SEP, 2006b: 17-19)[17].

La proporcionalidad hoy en día: un concepto híbrido

Como anteriormente mencionamos la enseñanza de la proporcionalidad en educación básica hoy en día no está totalmente orientada a alguna de las teorías antes abordadas, sino que es tratada, retomando algunas aportaciones tanto de la teoría clásica de razones y proporciones como de la teoría de funciones. Por tanto, podemos decir que la noción de la proporcionalidad se define en la actualidad como un concepto híbrido sustentado de teorías antiguas y modernas, adaptadas a través de largos

[16] Cabe destacar que lo nuevo es únicamente la explicitación de las competencias, pues éstas estaban consideradas el enfoque anterior (SEP, 1993), pero no estaban explicitadas en tanto "competencias".
[17] Aunque las competencias se presentan como innovación de los programas del 2006, al menos en el caso de matemáticas, éstas son las mismas que se venían desarrollando en los programas anteriores, de los noventas (SEP, 1993), excepto que ahora se hacen explícitas (SEP, 2006a). Cabe señalar que para los maestros resultó confuso que esto no se dijera de esta manera, pues no pocos maestros pensaron que lo de las competencias implicaba una ruptura con el enfoque anterior.

procesos de transposición didáctica (Chevallard, 1992)[18]. Se habla de variaciones funcionales, pero se conservan técnicas como la regla de tres. Se estudian situaciones de valor faltante, reparto proporcional, aplicación sucesiva de factores constantes de proporcionalidad, porcentajes y proporcionalidad inversa (SEP, 2006b).

Por otro lado, de acuerdo al plan de estudios, la proporcionalidad se aborda como subtema del eje[19] manejo de la información, donde se resuelven problemas que requieren análisis, organización, representación e interpretación de los datos (SEP, 2006b: 11).

A continuación presentaré algunas de las características que asume la proporcionalidad en la enseñanza actual en México, a través de una mirada a libros de texto. Cuando sea pertinente destacaré los vínculos con las teorías de referencia.

Regularmente, en los libros de texto actuales de educación básica[20] la noción de proporcionalidad se introduce a través de una situación problemática, por lo que podemos decir que éstos ubican de entrada a la proporcionalidad en el marco de magnitudes medibles de acuerdo al Esquema 1-1. Después de la situación problemática, se define algún concepto.

Enseguida presentamos un ejemplo típico de introducción de la noción de proporcionalidad. Como se podrá observar, se propone la resolución de un problema en el que hay que buscar valores faltantes en el marco de una relación muy familiar, entre dos magnitudes, mercancías y su precio, lo que permite que los alumnos resuelvan poniendo en obra de manera implícita propiedades de la proporcionalidad. Después se propone una definición que apela a la constante de proporcionalidad.

> El día de su cumpleaños. Mauricio y su hermana llevaron a su prima Pamela a tomar helado con sus amigas y amigos. Mauricio pagó \$84.00 por los doce helados para los niños. Una joven, que iba detrás de Mauricio en la fila, se llevó cuatro helados por un total de \$28.00.
> Al poco rato llegaron a la heladería otros cinco amigos de Pamela.
> ¿Cuánto le costaron a Mauricio los helados de los cinco que llegaron tarde?
> ¿Cuánto le habrán cobrado por su helado y el de su hermana?
>
> ¿Cuáles son los datos que tienes? ¿Qué cantidades quieres conocer?
> ¿Cómo organizaste la información que tienes y la que te falta?

[18] Chevallard, en la obra citada, da cuenta, a través del concepto de "transposición didáctica" de las transformaciones que sufre un conocimiento al pasar de la esfera "sabia" (en este caso, la de los matemáticos), a la esfera de la enseñanza, transformaciones necesarias, pero muchas veces incontroladas, y con efectos sobre el sentido del conocimiento.

[19] Los contenidos que se estudian en esta reforma están estructurados en cinco bloques, que contienen temas y subtemas organizados dentro de tres ejes: *sentido numérico y pensamiento algebraico, forma espacio y medida* y, *manejo de la información* (SEP, 2006b: 11).

[20] Sólo nos referiremos a libros de texto de primer grado de secundaria de la reforma 2006 en México. De ser de otra manera se hará mención.

Cuando existe relación entre dos cantidades que pueden variar, es posible encontrar y describir esa relación.

En primer lugar, hay que averiguar si al aumentar una de las dos cantidades, la otra también aumenta o si, por el contrario, disminuye:

- En el caso de los helados, es claro que mientras más helados compres, más vas a gastar. Si compras menos helados, vas a gastar menos. Es decir, las dos cantidades aumentan o disminuyen juntas.
- Cuando las dos cantidades varían en la misma dirección, se dice que la relación entre ellas es **directa**. Si una cantidad aumenta, mientras la otra disminuye, la relación es **inversa**. No estudiaremos este último tipo de relaciones, sino hasta una de las lecciones finales del libro.

En segundo lugar, se calculan los cocientes entre una cantidad y otra. Cuando el cociente es constante para todos los datos de que disponemos, se dice que la relación entre las cantidades es **proporcional**. Ese cociente se llama **factor de proporcionalidad** y nos permite calcular una cantidad, si es que se conoce el valor de la otra.

En el caso de los helados, hay que calcular los cocientes

Tomado del libro de Waldegg (2007: 46 y 47).

Los conceptos que se abordan en la mayoría de los libros de texto son: *variación directamente proporcional, constante de proporcionalidad, regla de tres, la expresión algebraica de la variación proporcional*. En la siguiente tabla mostramos los conceptos, técnicas o actividades que abordan algunos libros de texto de primer grado de secundaria:

	Libros de texto de primer grado de secundaria				
Conceptos abordados	*Esfinge (Waldegg y otros)*	*Limusa (Almaguer y otros)*	*SM (Block y García)*	*Santillana (Mancera)*	*Trillas (Escareño y López)*
Proporción					X
Regla de tres	X	X	X		X
Valor unitario		X	X		X
Reparto proporcional			X		X
Propiedades de cantidades proporcionales					X
Variación lineal		X			
Funciones lineales				X	
Expresión algebraica de variación proporcional o Regla de correspondencia		X	X	X	X

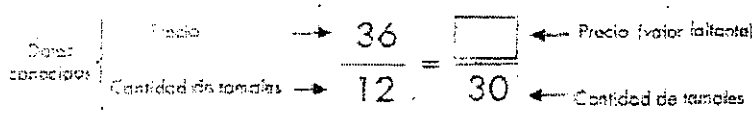
Conceptos abordados	Libros de texto de primer grado de secundaria: *Esfinge (Waldegg y otros)*	*Limusa (Almaguer y otros)*	*SM (Block y García)*	*Santillana (Mancera)*	*Trillas (Escareño y López)*
Variación (o cantidades) directamente proporcional	X	X	X	X	X
Constante o factor de proporcionalidad	X	X	X	X	X
Gráfica de relaciones de proporcionalidad			X	X	X
Escala y semejanza	X		X		
Factor de escala			X		
Producto de factores					X
Otras relaciones que no son de proporcionalidad			X		

Tabla 1-2. Conceptos abordados en algunos libros de texto

Como se puede observar, los conceptos razón y proporción ya no son tratados ahora, al menos en estos libros de primer grado[21]. La noción de relación entre las magnitudes, entendida como una variación funcional, al igual que en Francia y que en otros países del mundo (Comin, 2002), ha tomado mayor énfasis. Lo mismo parece indicar el uso más frecuente de la constante de proporcionalidad, concepto que en cambio está ausente en la modelización clásica, la de la teoría de las razones y las proporciones. Finalmente, la sustitución del término *proporcionalidad*, por el de *proporción* es el mejor ejemplo. En el libro "The Illusion of Linearity" (De Bock, 2007: 3), los autores hacen una diferencia entre los términos de *proporción* y *proporcionalidad*: proporción es la igualdad entre dos razones $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, mientras el concepto de proporcionalidad (linealidad) se refiere a la igualdad de una multitud de razones equivalentes, $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\cdots$.

A pesar de esta especie de "actualización" (no necesariamente planeada ni controlada por alguna instancia) de los términos y conceptos de universo de la proporcionalidad, técnicas como la regla de tres o el valor unitario siguen vigentes en la enseñanza de la proporcionalidad, aunque en la manera de expresarlas o de justificarlas también han ocurrido modificaciones más o menos importantes. Por ejemplo, para el caso de la regla de tres, los cocientes (antes llamados razones) que forman a la proporción, pueden ser ahora de magnitudes de distinta naturaleza:

[21] A excepción del libro de Trillas, en el que aparece una vez el término proporción (Escareño y López, 2007: 131).



Tomado del libro de Almaguer y otros (2007: 43)

Por otro lado, las propiedades que caracterizan a las relaciones de proporcionalidad y que se incluyen en los textos, varían de un texto a otro y se describen de diferentes maneras. Por ejemplo, la propiedad de multiplicar o dividir los dos términos de una de las razones por un mismo número $\frac{a \times m}{b \times m} = \frac{c}{d}$ definida en la teoría clásica, corresponde, en la teoría de las funciones, al isomorfismo multiplicativo $f(kx) = kf(x)$. En la enseñanza básica, la forma usual de hacer referencia a esta propiedad es como la siguiente: "Si una cantidad aumenta dos veces, tres veces o *n* veces, la cantidad correspondiente también aumenta ese mismo número de veces" (Block y García, 2006: 43). A esta propiedad también se le conoce también como conservación de razones internas.

La propiedad "de componer", que en la teoría de las razones y las proporciones permitía sumar los consecuentes a los antecedentes en la proporción $a:b::c:d$, $a+b:b::c+d:d$, o también permutar los medios sin afectar la proporción, teniendo entonces $a+b:c+d::b:d$, esa propiedad equivale, en la teoría de funciones al isomorfismo aditivo $f(x+y) = f(x) + f(y)$: a la suma de cualesquiera dos valores de una magnitud le corresponde la suma de los valores correspondientes de la otra magnitud. Esta propiedad pocas veces se hace explícita en la enseñanza de la proporcionalidad, pese a que es muy utilizada en los procedimientos informales.

La propiedad fundamental de la proporción geométrica: "en una proporción geométrica $a:b::c:d$, el producto de los extremos es igual al producto de los medios (Anízar, 1911: 90)" es sustituida ahora por los productos cruzados: "Los productos cruzados de una ecuación de proporcionalidad $\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$ son equivalentes: $ax = bc$ (Escareño y López, 2007: 131)". En ésta última formulación, la introducción del término "ecuación", puede verse como un indicador expresivo del cruce de la proporcionalidad con el álgebra.

El manejo del factor o constante de proporcionalidad (razón externa) es ahora, como se dijo arriba, un elemento clave en el trabajo con relaciones de proporcionalidad. Aunque formalmente puede decirse que el factor de proporcionalidad coincide con el valor unitario, el primero alude a una variación funcional, mientras que el valor unitario constituye una relación entre *dos cantidades*, utilizada con frecuentemente en una técnica de mismo nombre para resolver un problema particular.

Podemos afirmar entonces que si dos cantidades son directamente proporcionales, la razón o división entre ellas es un número fijo o constante, y es independiente del valor que tomen las cantidades. A ese valor se le denomina *constante de proporcionalidad.*

Con el valor unitario: para saber cuánto cuestan 7 caramelos, se encuentra el costo de 1 y el resultado se multiplica por 7.

Tomado de Escareño y López (2007: 47 y 131)

Como puede observarse, en el ámbito de la enseñanza, la proporcionalidad constituye una noción compleja que, en la actualidad, parece desdibujarse al distanciarse de las dos principales teorías de referencia. Si bien los programas oficiales marcan pautas generales, los libros de texto dejan ver que existe un amplio margen de libertad en cuanto a las definiciones que se escogen, las propiedades, la nomenclatura, las aplicaciones, los vínculos con otros contenidos. El origen de esta indefinición se remonta probablemente al hecho de que la proporcionalidad dejó de ser hace mucho tiempo un conocimiento vivo en la disciplina matemáticas, mientras que sigue siendo fundamental en la enseñanza (Block, 2001).

1.4 Herramientas de trabajo: la proporcionalidad como situaciones y como praxeología

A continuación mencionaremos los aportes de la Teoría de Situaciones Didácticas (TSD, Brousseau) y la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD, Chevallard) y, algunas razones que describen por qué nos sirven como referentes teóricos para problematizar la enseñanza de la proporcionalidad en secundaria.

La TSD de Guy Brousseau pretende modelizar y contrastar empíricamente los fenómenos didácticos que surgen en el ámbito de un sistema didáctico a partir de la problematización y cuestionamiento de un "conocimiento matemático enseñado". En las aportaciones de Brousseau se menciona que: saber matemáticas no significa solamente aprender definiciones y teoremas y reconocer donde utilizarlas, sino hay que hacerlas, sólo se hacen matemáticas cuando nos ocupamos de problemas (Chevallard, Bosch y Gascón, 1997).

Es así como esta teoría de corte constructivista espera que el alumno, en toda actividad científica, intervenga, formule, pruebe, construya modelos, use lenguajes, construya conceptos, aplique teorías, y que además intercambie ideas con otros compañeros. Para lograr esto, es necesario que el maestro realice ciertas tareas, entre las que destaca: proponer a los alumnos situaciones que ellos puedan vivir y en las cuales los conocimientos aparecerán como la solución óptima a los problemas propuestos, solución que el alumno puede construir (Chevallard, Bosch y Gascón, 1997).

Un aporte de la TSD al estudio de los procesos de aprendizaje de las matemáticas en el contexto escolar, es la inclusión de un cuarto elemento en el clásico triángulo didáctico "maestro, alumno y saber": el medio ("*milieu*"). En la teoría de Brousseau se refiere al medio (*milieu*) como:

> "todos aquellos objetos con los que los alumnos tienen una familiaridad matemática tal que pueden manipularlos con toda seguridad y cuyas propiedades les parecen incuestionables, como lo son las clases de matemáticas, los libros de texto, etc., y que con éstos se contextualiza la matemática enseñada" (Chevallard, Bosch y Gascón 1997: 217).

Basándonos en lo anterior, tomamos a la TSD porque caracteriza el conocimiento matemático desde el punto de vista de las situaciones en las que funciona y ofrece herramientas para analizarlas:

- Presenta y trata el conocimiento matemático expresado en situaciones.
- Diferentes situaciones que ponen en juego un mismo conocimiento matemático de maneras diferentes resaltando características particulares (situación fundamental)
- Manipulación de las variables didácticas. Son las variables que el docente puede fijar. La elección de valores diferentes en una misma situación puede provocar cambios en el conocimiento óptimo, es decir, que para algunos valores de esas variables existe al menos una estrategia óptima (desde el punto de vista de su costo en diseño, fiabilidad, costo de aprendizaje, etc.) y uno o varios conocimientos que le corresponden (Brousseau, 2007: 32).

Por su parte, la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD), acentúa la idea de que el objeto de la Didáctica de las Matemáticas es el estudio de la actividad matemática, sus distintos componentes, así como sus condiciones de producción y reproducción.

La TAD postula que toda actividad matemática institucional[22] puede modelizarse mediante la noción de praxeología (u organización) matemática (Chevallard, 1999). La estructura de organización matemática o praxeología se compone de: tareas, técnicas (bloque práctico-técnico: *praxis*), tecnologías y teorías (bloque tecnológico-teórico: *logos*) (Chevallard, Bosch y Gascón, 1997).

Las tareas se refieren al conjunto de tareas o problemas en el que interviene un conocimiento. Las técnicas son las maneras en que se realizan las tareas al resolverlas. Las tecnologías son referidas al discurso racional de la técnica utilizada, su objetivo es rusticar su uso. Finalmente, las teorías se refieren al discurso racional que justifica a las tecnologías. Las teorías representan el nivel más superior de justificación. No obstante, éstas pueden fluctuar, tal como ha ocurrido a lo largo de la historia (Chevallard, 1999).

Así pues, de la TAD retomamos:

- El concepto de praxeología u organización matemática para caracterizar la proporcionalidad en términos de su praxis y logos.
- Transposición didáctica[23]. En el sentido de cómo actúa en las organizaciones matemáticas para que el conocimiento, en este caso la proporcionalidad, pueda ser enseñado.

[22] Actividad matemática institucional es aquella que se lleva a cabo en una institución de enseñanza (Chevallard, 1999).

[23] Transposición didáctica se refiere a la transformación que se hace del saber científico o "saber sabio" de una disciplina a un saber posible de ser enseñado (Chevallard, 1992).

CAPÍTULO II. EL CUESTIONARIO, LA METODOLOGÍA Y LOS RESULTADOS

2.1 El cuestionario y la metodología

Finalidades del cuestionario

El cuestionario fue el instrumento que usamos para acercarnos a los conocimientos que tienen los maestros sobre el tema de proporcionalidad y sus puntos de vista acerca de su enseñanza. Tiene como propósito poner de manifiesto los conocimientos de los maestros tanto prácticos como teóricos en el contexto de la solución de problemas y ejercicios que involucran a la proporcionalidad, y algunas ideas relacionadas con la enseñanza del tema: los procedimientos y las dificultades de los alumnos al resolver problemas de proporcionalidad.

Rodríguez y colaboradores (1999) señalan que el cuestionario suele asociarse a la investigación cuantitativa, pero que puede ser una técnica de recogida de datos importante en la investigación cualitativa, como es el caso de nuestro proyecto, siempre que se tomen en cuenta ciertas exigencias para su elaboración y administración, entre las que destaca la de usarlo como un procedimiento de exploración de ideas y creencias generales de algún aspecto de la realidad. Con el cuestionario que utilizamos pretendemos justamente *explorar* los conocimientos de los maestros acerca de la noción de proporcionalidad, en el sentido de tener una mirada general sobre éstos, que permita identificar sus principales características, fortalezas y debilidades. Los resultados buscan complementar lo que se pueden obtener a través de otras vías de estudio, - entrevistas individuales, observación de clases, análisis de currículum- imprescindibles para tener una idea más completa de los conocimientos de los maestros.

Dos ventajas de la aplicación del cuestionario son, por una parte, que permite recoger información de un grupo relativamente numeroso en forma rápida y, además, que al ser autoadministrado y anónimo, da confianza al participante a contestar sin temor a consecuencias.

Desarrollo del cuestionario

La elaboración del cuestionario estuvo compuesta por tres etapas principales: la construcción, la retroalimentación y el piloteo.

En la etapa de **construcción** se seleccionaron los tipos de problemas y ejercicios relacionados con la proporcionalidad y, las variables que estarían involucradas en los problemas. Para la selección se consideraron los tipos de problemas planteados tanto en el programa de estudios de matemáticas 2006 de primer grado de secundaria (SEP, 2006b, ver tabla siguiente), como en otros estudios afines (Comin, 2000; Block, 2006; Monteiro, 2003). Algunos problemas y ejercicios fueron retomados (íntegramente o con algunos ajustes) de estos estudios.

	Tipo de problemas
Bloque 1	• Valor faltante (datos y factor de proporción son enteros) • Reparto proporcional
Bloque 2	• Valor faltante (operadores decimales y fraccionarios) • Aplicación sucesiva de factores constantes de proporcionalidad
Bloque 3	• Valor faltante utilizando procedimientos expertos (valor unitario, constante de proporcionalidad y regla de tres) • Porcentajes o De una cantidad o De una cantidad con respecto a otra o Cantidad original

Tabla 2-1. Tipos de problemas planteados en el programa de estudios 2006

Decidimos sólo trabajar con la proporcionalidad directa, a fin de delimitar la extensión del trabajo, pero también decidimos abarcar cierta diversidad de tipos de problemas (valor faltante, comparación de de razones, reparto proporcional, entre otros) Los valores que dimos a las variables fueron sencillos: en su mayoría números enteros o fracciones unitarias simples. Se buscó también que los valores escogidos favorecieran ciertas técnicas, para verificar si éstas eran conocidas por los maestros. También incluimos dos problemas en donde la relación no es de proporcionalidad con la finalidad de averiguar si los maestros, además de resolverlos, los reconocían explícitamente.

Con la finalidad de acercarnos al conocimiento de los maestros sobre la diversidad de procedimientos o técnicas de resolución de problemas de proporcionalidad, en todos los problemas se solicitaron varios procedimientos de resolución (en el formato que se entregó se puso espacio para tres).

Una vez teniendo el conjunto de problemas, ocho en total, elaboramos cinco preguntas comunes, las cuales se responderían después de resolver cada uno, con la finalidad de explorar dos aspectos más: uno, en qué grado los maestros podían explicitar y justificar si las magnitudes eran o no proporcionales y, el segundo, para conocer sus puntos de vista sobre la resolución posible de los alumnos de primaria.

El cuestionario que se entregó a los maestros participantes incluyó también una presentación general en la que se explicó brevemente el interés de la investigación sobre el tema, y un apartado para que los maestros pusieran algunos datos personales, en el cual se omitió el nombre. Este apartado fue para caracterizar a la población participante en términos de estudios y experiencia y para descartar o confirmar correlaciones entre los resultados y algunas características de este tipo.

Posteriormente, el cuestionario completo se **retroalimentó** con los comentarios de especialistas tanto en el ámbito didáctico-pedagógico como en el cognoscitivo[24]. De sus observaciones se procedió a corregir y ajustar el cuestionario hasta tener la versión para la prueba piloto.

Adelantamos desde aquí que el nivel de dificultad de los problemas fue en general bajo pues no era nuestro propósito inicial determinar el grado de dificultad de los problemas que los maestros lograrían resolver, sino, partiendo de que los podrían resolver, conocer la diversidad de formas de resolución que podrían prever, así como la identificación explícita del tipo de relación en juego (proporcionalidad o no) y las formas de justificación. No obstante, la premisa de la facilidad relativa de los problemas fue parcialmente desmentida, pues hubo maestros que sí tuvieron dificultad en la resolución.

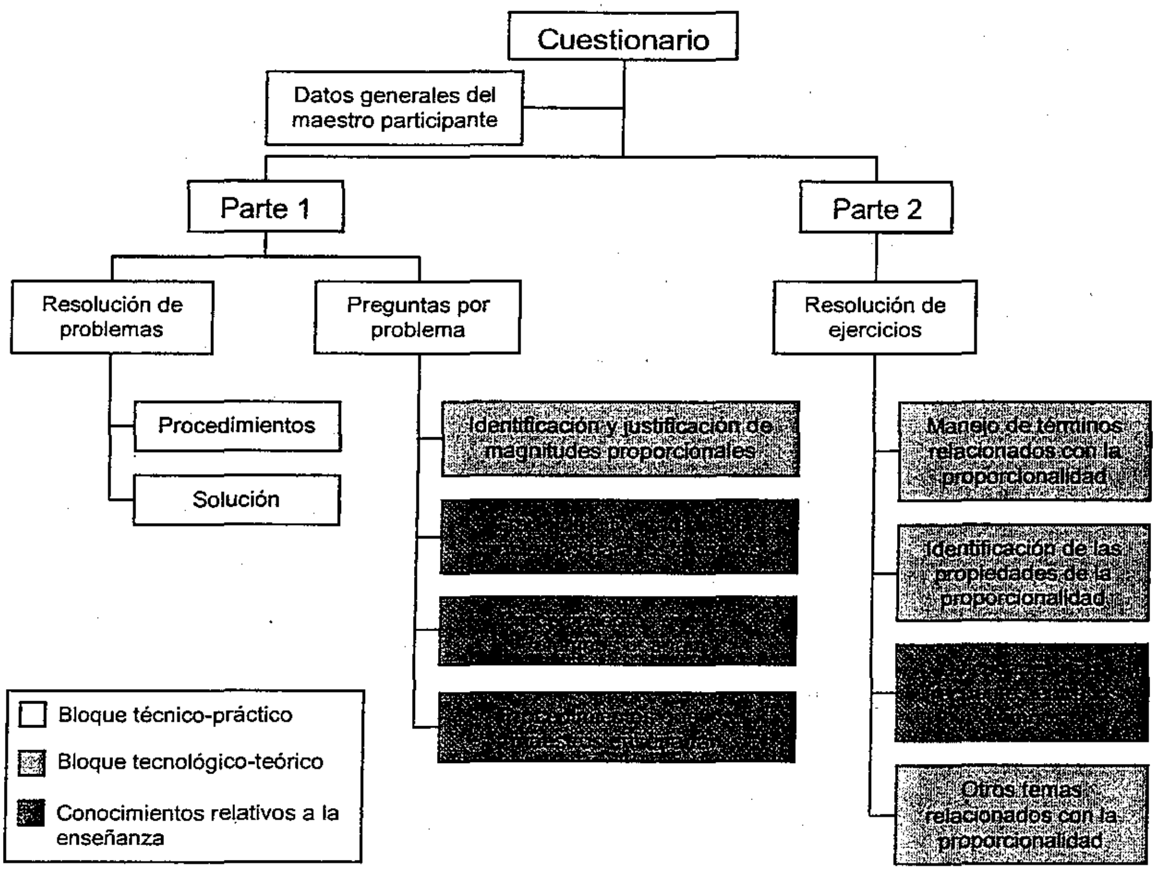
La **prueba piloto** se aplicó con dos maestros de primer grado de la secundaria "Diego Rivera" en Guadalupe, Nuevo León. De aquí, se volvieron a hacer pequeños ajustes hasta tener la versión final (ver Anexo A).

Estructura y características del cuestionario

El cuestionario que diseñamos explora tres tipos de conocimientos de los maestros sobre la proporcionalidad. Por un parte, retomando las categorías de la TAD que introdujimos antes, (sección 1.4) están los conocimientos del *bloque técnico-práctico* (tareas y técnicas), y los del *bloque tecnológico-teórico* (justificaciones). Además, están los conocimientos *relativos a la enseñanza de la proporcionalidad* (conocimientos de alumnos, de situaciones didácticas, etc.)

[24] Los dos directores de tesis; dos maestras en ciencias, participantes del seminario de didáctica de las matemáticas del DIE; tres especialistas en matemáticas y áreas afines y varios compañeros estudiantes de diferentes áreas.

La estructura del cuestionario se conformó de la siguiente manera:



Esquema 2-1. Estructura del cuestionario

A continuación presentamos las características de los ocho problemas planteados en el cuestionario:

	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	P_8
Tipo de relación	Proporcionalidad	Proporcionalidad	Dos relaciones de proporcionalidad	Afín	Proporcionalidad	Aditiva	Proporcionalidad	Proporcionalidad
Tipo de problema	Valor faltante	Valor faltante	Comparación de razones	Valor faltante	Reparto proporcional	Valor faltante	Escalas sucesivas	Reconocimiento de escala
Magnitudes relacionadas	Masa en kilogramos y piezas de dulces	Cantidad de dólares y pesos	Número y costo de salchichas	Longitud en kilómetros y costo del viaje	Cooperación en pesos y número de canicas	Edad de Luisa y de su hermana	Longitudes de los lados de la fotografía	Longitudes de los lados de los cuadrados
Tipo de datos	Valores enteros: 2, 6 y 81	Valores enteros: 6, 10 y 72	Valores enteros: 8, 10, 26 y 35	Valores enteros: 2, 5, 8, 10, 11, 15, 27, 39 y 51	Valores enteros: 20, 60, 80 y 100*	Valores enteros: 8, 10 y 16*	Escalas fraccionarias: $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{4}$	Valor entero y decimal: 3 y 4.2
Tipo de resultado	Entero: 243 dulces	Entero: 120 pesos	Nominal: Paquete 1	Entero: 47 pesos	Enteros: 12 para Ana y 48 para Jorge	Entero: 18 años	Fraccionario: $\frac{1}{8}$	Nominal: Sí (incluye justificación)
Factor interno	Entero: 3	Fraccionario: $\frac{5}{3}$ ó $1.\overline{66}$	NA[25]	NA	Fraccionario: $\frac{1}{5}$ y $\frac{4}{5}$ ó 0.2 y 0.8	NA	NA	Entero: 1
Factor externo o constante de proporcionalidad	Fraccionario: 40.5	Entero: 12	Decimales: 3.25 y 3.50	NA	Fraccionario: $\frac{3}{5}$ ó 0.6	NA	Fraccionario: $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{4}$	Fraccionario: 1.4 ó $\frac{7}{5}$
Valor unitario	Fraccionario: 40.5	Entero: 12	Decimales: 3.25 y 3.50	Entero: 4	Fraccionario: $1.\overline{66}$ ó 0.6	NA	NA	Fraccionario: 1.4 ó $\frac{7}{5}$
Otros datos	NA	NA	NA	Banderazo fijo: 7 pesos	NA	Diferencia de edades: 8 años	NA	NA

Tabla 2-2. Características de los problemas del cuestionario

* Valor implícito.

[25] No aplica

Análisis Previo

Veamos ahora el análisis previo de cada problema y ejercicio del cuestionario.

Parte 1

Los problemas

> *Problema 1. En 2 kilogramos de dulces que compró Carlos hay 81 piezas, ¿cuántas piezas habrá en 6 kilogramos de los mismos dulces?*
>
> *Problema 2. En la mañana, José fue a una casa de cambio de divisas y recibió 72 pesos a cambio de sus 6 dólares. ¿Cuántos pesos recibirá si por la tarde desea cambiar 10 dólares con la misma tasa de cambio?*

Los problemas de valor faltante como el 1 y 2 están contemplados en el primer bloque del programa de estudios de matemáticas del primer grado (SEP, 2006b); fueron planteados de forma que, en el problema 1, la razón interna fuera un número entero, pero no la externa; y en el problema 2, ocurriera lo contrario. Esto con el propósito de favorecer a los procedimientos que involucran al factor interno y externo, respectivamente, y comprobar si los maestros los toman en cuenta al momento de proponer procedimientos posibles para resolver los problemas.

> *Problema 3. María hará una fiesta para sus alumnos. Ha pensado dar de comer hot dog. Así que María va al supermercado a comprar salchichas. Al llegar se da cuenta que hay dos presentaciones de la misma marca: un paquete de 8 salchichas que cuesta 26 pesos y otro de 10 a 35 pesos, ¿Cuál paquete le es más conveniente comprar?*

El problema 3 trata de comparar dos razones y elegir la más conveniente de acuerdo al costo. Decidimos que las razones tanto interna como externa no fueran números enteros, para así darle un poco de dificultad tratándose con decimales próximos.

Los procedimientos posibles son diversos: comparar valores unitarios u otros valores comunes como por ejemplo, comparar el costo de 40 salchichas en ambas presentaciones; para hacer esas comparaciones pueden decidir usar técnicas simples como la conservación de las razones internas, o procedimientos formales como la regla de tres

Si bien este tipo de problema no aparece en el programa de primero de secundaria actual, sí aparece tanto en el nuevo programa de sexto de primaria (SEP, 2009), como en el de segundo se secundaria (SEP, 2006: 80). Más allá de ello, consideramos importante incluirlo pues constituye un problema típico de proporcionalidad.

Problema 4. En la siguiente tabla se muestra la distancia recorrida en kilómetros y el costo en pesos de cuatro viajes que realizó un taxista durante la mañana:

Distancia (km)	***Costo ($)***
2	*15*
5	*27*
8	*39*
11	*51*

Si por la tarde realiza un viaje de 10 kilómetros y el banderazo es de 7 pesos, ¿cuánto cobrará el taxista?

El problema 4 aborda una relación afín ($y = mx + b$), no proporcional. Con este problema pretendemos averiguar si los maestros distinguen este tipo de relación, muy cercana a la de la proporcionalidad (en ambos se conservan las diferencias), de la relación de proporcionalidad, independientemente de que sepan responder correctamente al problema. El valor del banderazo se hizo explícito, ya que nuestra intención no era ver si los maestros lo podían identificar ese valor desde los datos de la tabla, sino si, sabiendo eso, reconocían (en el apartado de preguntas) si las magnitudes en juego eran o no proporcionales. Ciertamente, con ese dato, el problema es considerablemente menos difícil desde el punto de vista de la resolución.

Estos problemas tampoco son considerados explícitamente en el programa de estudios de primero de secundaria. No obstante, en el apartado de "conocimientos y habilidades" se señala que un objetivo es "***identificar*** *y resolver* ***situaciones de proporcionalidad directa*** *del tipo "valor faltante" en diversos contextos...*" (SEP, 2006b: 30), de donde se infiere que, para que la acción de identificar se lleve a cabo, es necesario presentar a los estudiantes situaciones que no son de proporcionalidad. El programa debería ser más claro en este punto, pues sólo se refiere a problemas que abordan la proporcionalidad, y no a otro tipo de relaciones que puedan ser contrastadas con éstas.

Problema 5. Ana y Jorge compraron 60 canicas. Ana cooperó con 80 pesos y Jorge 20 pesos. Si desean repartírselas de acuerdo a lo que cooperaron. ¿Cuántas canicas le tocan a cada uno?

El problema 5 involucra un reparto proporcional. Éste tipo de problemas sí es considerado en el programa de estudios (SEP, 2006b). Para este caso los datos se establecieron de forma que, favorecieran a las razones internas ($\frac{4}{5}$ y $\frac{1}{5}$) a pesar de ser fraccionarias, pues una de ellas es una fracción unitaria simple y la otra un múltiplo de ella.

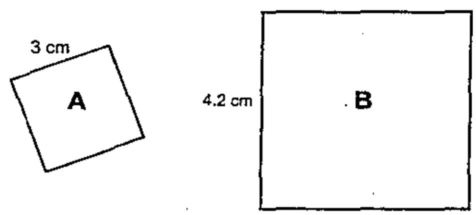
Problema 6. Luisa tiene ocho años. Su hermana tiene lo doble. ¿Cuántos años tendrá la hermana cuando Luisa cumpla 10 años?

Este problema tampoco implica una relación proporcional, ni está en el programa de estudios (SEP, 2006b). Trata una relación aditiva ($y = x + b$). Pretendemos, al igual que en el problema 4, ver si los maestros reconocen, al momento de resolver y de identificar, que se trata de un caso de relación que no es de proporcionalidad. Probablemente el uso de la palabra "lo doble" provoque cierta confusión. Sin embargo, podremos ver qué tanto es tomado en cuenta el contexto que está en juego.

Problema 7. Una fotografía se reduce con una escala de $\frac{1}{2}$ y enseguida se reduce nuevamente con una escala de $\frac{1}{4}$. ¿Cuál es la reducción total que sufre la fotografía original?

Este tipo de problema -escalas sucesivas- sí está incluido en el programa de estudios (SEP, 2006b). Las escalas son fracciones sencillas, por lo tanto, la operación en juego no es difícil, lo que puede serlo es saber cuál es la operación pertinente.

Problema 8. ¿El cuadrado B es un agrandamiento a escala del cuadrado A?



Este problema[26] implica un conocimiento sobre la escala: las medidas de los lados de cualquier par de cuadrados son proporcionales entre sí. Pretendemos averiguar si los maestros contestan utilizando la definición anterior o si necesitan comprobar la existencia de la proporcionalidad recurriendo a las medidas proporcionadas. Otros dos aspectos que también nos interesa observar son: si el factor escala (al no ser entero) y, la posición del cuadrado A (al encontrarse rotada), son elementos para descartar el agrandamiento o la escala.

[26] Adaptación del problema tomado de la tesis de Eugène Comin (2000) Proportionnalitè et fonction linéaire. Caractères, causes et effets didactiques des évolutions et des réformes dans la scolarité obligatoire.

Las preguntas

Además de los procedimientos de resolución, cada problema viene seguido de cinco preguntas (comunes en los ocho problemas), algunas abiertas, otras cerradas.

Las primeras dos preguntas están asociadas al *conocimiento del bloque tecnológico-teórico.*

x.1 ¿Cuáles son las magnitudes[27] *que se relacionan en este problema?*

x.2 ¿Considera que esas magnitudes son proporcionales? S/N Justifique su respuesta:

La intención de estas preguntas es dar cuenta si los maestros pueden reconocer cuando dos magnitudes son o no proporcionales y por qué. La primera pregunta básicamente nos sirve para saber si los maestros pueden identificar cuáles son las magnitudes en juego. De la segunda pregunta nos interesan las justificaciones que den para que dos magnitudes sean proporcionales. Nos preguntamos en qué medida logran hacer referencia no solamente a las propiedades necesarias, sino también a las que son suficientes.

Las últimas tres preguntas refieren *al conocimiento sobre los alumnos y su enseñanza:*

x.3 En su opinión, ¿cómo clasificaría este problema para los alumnos de primer grado de secundaria?
- *a) Fácil*
- *b) Regular*
- *c) Difícil*

x.4 En su opinión, ¿qué procedimiento de los que usted registró utilizaría la mayoría de los alumnos de primer grado para resolver este problema?
- *a) Procedimiento 1*
- *b) Procedimiento 2*
- *c) Procedimiento 3*
- *d) No lo contestaría*
- *e) Otro, explique________*

Cualquiera que sea su respuesta, justifique:

Si usted planteó más de un procedimiento, conteste lo siguiente:

x.5 Si estuviera en el salón de clases y tuviera que resolver este problema con los alumnos ¿qué procedimiento les enseñaría? Y ¿por qué?

[27] Sólo en el problema 3 en lugar de preguntar por las magnitudes, preguntamos por valores.

Parte 2

En esta segunda parte se abordan principalmente los aspectos del bloque tecnológico teórico de la proporcionalidad.

Ejercicio 1[28]

Este ejercicio aborda el uso de términos relacionados con la proporcionalidad, a través de un ejemplo. Los maestros deben indicar si cada una de las afirmaciones que están después de la tabla y que hacen referencia a ésta, es correcta o no.

Cantidad de plumas	*Costo*
6	*24*
9	*36*
12	*48*

*1.1) La **tabla** es de **proporcionalidad:***
*1.2) Los **conjuntos** {6, 9,12} y {24, 36, 48} son **proporcionales**[29]:*
*1.3) Los **números** 6 y 24 son **proporcionales:***
*1.4) Los **números** 6 y 9 son **proporcionales:***
*1.5) El **coeficiente de proporcionalidad** es 4:*
*1.6) El **coeficiente de proporcionalidad** es 1.5:*
*1.7) El **coeficiente de proporcionalidad** es 0.25:*
*1.8) 24 es **múltiplo** de 6:*
*1.9) 9 es **múltiplo** de 6:*
*1.10) 1.5 es el **cociente** de 9 y 6:*

Se trata de cernir en qué medida los profesores conocen términos del ámbito de la proporcionalidad, o relacionados con éstos, y que se ha visto que han tendido a perder su significado preciso, por ejemplo, que dos números no pueden ser proporcionales, independientemente de que uno sea múltiplo de otro[30]. También se explora el grado de precisión de ciertas nociones, por ejemplo, que en una relación de dos magnitudes proporcionales existen dos coeficientes de proporcionalidad (X→Y; Y→X).

Ejercicio 2

En este ejercicio los maestros deben identificar, de un conjunto de propiedades, cuáles son propiedades de las relaciones de proporcionalidad directa y, de las que sí lo son, cuáles son necesarias y cuáles suficientes. Las propiedades son las siguientes:

2.1) Cuando crecen los valores de la magnitud 1, crecen los de la magnitud 2.

2.2) Cuando un valor de la magnitud 1 crece n veces (el doble, el triple, etc.), también lo hace el valor correspondiente en la magnitud 2.

[28] Retomado de la tesis de Eugène Comin (2000).
[29] Esta proposición es usual. No obstante presenta cierta ambigüedad, pues los elementos de un conjunto no son elementos ordenados.
[30] Estudios previos, nacionales y extranjeros, han reportado esta pérdida de sentido de los términos, a la que hemos hecho referencia varias veces, por ejemplo, Block, 2006; Comin, 2002.

2.3) *A la suma de dos valores de la magnitud 1, le corresponde la suma de los valores de la magnitud 2.*

2.4) *El valor unitario es constante.*

2.5) *Todos los valores de una de las magnitudes se pueden obtener SUMANDO UNA MISMA CANTIDAD a los valores de la otra magnitud.*

2.6) *Todos los valores de una de las magnitudes se pueden obtener MULTIPLICANDO por UN MISMO FACTOR los valores de la otra magnitud.*

Con este ejercicio pretendemos reafirmar una vez más (después de las justificaciones de las preguntas x.2) que tan claro es para los maestros cuando una relación puede ser de proporcionalidad y, la diferencia entre propiedades necesarias y suficientes.

Ejercicio 3

Éste se integra en dos partes: en una, se les pregunta por las dificultades más frecuentes que tienen los alumnos para resolver problemas de proporcionalidad (*conocimiento acerca de alumnos*) y; en la otra, se trata de identificar (de una lista) otros temas de matemáticas que tengan relación con la proporcionalidad y explicar por qué (*conocimiento tecnológico teórico*).

Con la pregunta de las dificultades intentamos explorar cuál es la perspectiva de los maestros sobre los problemas de aprendizaje de la proporcionalidad. Mientras que con la otra parte pretendemos ver si la proporcionalidad es conscientemente vinculada con otros temas, además de aquéllos explícitos en el programa de estudios. Todos los temas de la lista se relacionan de cierta forma con la proporcionalidad. Al maestro se le pide que diga si el tema se relaciona o no con la proporcionalidad y que lo argumente, Veamos a continuación las relaciones:

1) **Figuras a escala.** Las dimensiones de la figura original y las de la representación son proporcionales.
2) **Volúmenes.** En los prismas rectangulares, el volumen es igual al producto de tres dimensiones, largo, ancho y altura y por lo tanto es proporcional a cualquiera de ellas, cuando las otras dos son constantes (por ejemplo, es proporcional a la altura cuando la base es constante). Esta situación es un caso de lo que se conoce como "proporcionalidad múltiple". Según Vergnaud (>>>), una buena comprensión de la noción de volumen supone una comprensión de este aspecto.
3) **Conversiones de unidades.** Cambio de unidades de una magnitud a otra unidad (del mismo o diferente sistema), para ello se utilizan los factores de conversión

que son relaciones de equivalencia entre una unidad y otra (Wilson y Buffa, 2003). Estos factores son también factores de proporcionales.

4) **Pi (π).** Una de las constantes (irracional) más importantes en matemáticas, 3.141592... formada por la relación entre la longitud de una circunferencia y su diámetro. Por tanto, cualesquiera dos circunferencias y sus respectivos diámetros son proporcionales.
5) **Funciones de la forma** $y = kx$. Representación analítica de las relaciones de proporcionalidad. k es la constante de proporcionalidad y, las magnitudes descritas por las variables x y y son proporcionales.
6) **Probabilidad.** Frecuencia con que se obtiene un resultado al realizar un experimento aleatorio del que se conoce todos los resultados posibles, bajo condiciones suficientemente estables: razón entre casos favorables y casos posibles (Jeffrey, 1992). Si los casos favorables y los casos posibles de dos eventos forman razones equivalentes, entonces la probabilidad de que ocurra esos eventos es la misma.
7) **Semejanza.** Dos objetos son semejantes si tienen la misma forma, aunque no el mismo tamaño. Dos polígonos son semejantes si sus ángulos correspondientes son iguales y las longitudes de sus lados correspondientes son proporcionales.
8) **Trigonometría.** Estudia las relaciones entre los ángulos y los lados de los triángulos. Las relaciones trigonométricas de todos triángulos rectángulos con un mismo ángulo agudo son equivalentes, ya que los triángulos son semejantes y por tanto, las longitudes de sus lados son proporcionales.
9) **Números racionales.** Los vínculos de los racionales con la proporcionalidad son diversos. Por una parte, hay vínculos formales como el hecho de que en las fracciones equivalentes, los numeradores son proporcionales a los denominadores. Un poco más interesante es el hecho de que, en una relación de proporcionalidad, las razones que se forman tomando un elemento de un conjunto y el que el corresponde en el otro conjunto, son equivalentes y constituyen un número racional, que es a la vez la constante de proporcionalidad.

Otro vínculo importante desde el punto de vista didáctico, derivado de lo anterior, es el siguiente: multiplicar una medida *m* por un número fraccionario *b/a* puede definirse como asociar a la medida *m* la medida que le corresponde en la relación de proporcionalidad que a *a le asocia b*.

$$a \to b$$

$$m \to \tfrac{b}{a} \times m$$

El potencial didáctico de esta construcción de la noción de multiplicación por racionales fue demostrado en un trabajo de Brousseau sobre los decimales (Brousseau, 1981). Por supuesto, no se espera que los maestros conozcan esta construcción en particular.

Descripción de los participantes

Los maestros que contestaron el cuestionario fueron convocados el día 6 de junio de 2008, con el apoyo de SE-NL[31], a participar voluntariamente a un taller[32] llamado "Reflexiones sobre la enseñanza de la proporcionalidad en la escuela secundaria". En la primera parte de este taller se aplicó el cuestionario a 63 maestros del estado de Nuevo León, los cuales reunían las características de ser docente de matemáticas en escuelas secundarias públicas o privadas del estado y estar impartiendo clases en el periodo 2007–2008, preferentemente en primer grado[33]. Otras características de los maestros fueron las siguientes:

Sexo		Edad		Experiencia como maestra/o			Estudio máximo	
				Años	Total	Sólo en matemáticas		
Mujeres	33	**23-31**	6*	**1-10**	14*	40*	**Lic. en Educación Normal Superior**	29*
Hombres	30	**32-40**	16	**11-20**	21	13	**Maestría en Educación Normal Superior**	21
		41-49	29	**21-30**	21	8	**Carrera Universitaria**	13
		50-59	12	**31-40**	4	0		
				NC[34]	3	2		
Total	63		63		63	63		63

Tabla 2-3. Características de los maestros participantes

Nuestro conjunto de participantes o muestra es de tipo no probabilística y está conformada mediante criterios de conveniencia metodológica. Es representativa sólo en el sentido de que los participantes son maestros que no tienen características

[31] Secretaría de Educación de Nuevo León.
[32] Dirigido por Dr. David Block y asistido por la Dra. Teresa Guerra y Rocío Balderas (tesante).
[33] 18 de los 63 maestros participantes no impartían primer grado en ese período.
* Esta columna hace referencia al número de maestros.
[34] No contestaron.

particulares que los pongan en ventaja o desventaja con respecto al resto de la población. Ahora, de acuerdo a la clasificación de muestreo no probabilístico de Patton (1990), podemos ubicar nuestra muestra en el tipo "por combinación o mezcla de propósitos", el cual establece que la estrategia de muestreo debe seleccionarse de modo que encaje o sea congruente con el propósito del estudio, los recursos disponibles, las preguntas a indagar y las dificultades a encarar. Esto aplica tanto a la estrategia de muestreo como al tamaño de la muestra.

Recolección y tratamientos de datos

El tiempo asignado para la aplicación del cuestionario fue de aproximadamente tres horas. Conforme los maestros terminaban de contestar, los cuestionarios fueron foliados del 1 al 63. Sólo a nueve[35] maestros se les recogió el cuestionario cuando se agotó el tiempo destinado, sin que hubieran terminado de contestar.

Posteriormente se comenzó el proceso de tratamiento de los datos, los cuales fueron capturados en Excel. Esto con la finalidad de generar tablas y gráficas de frecuencias de algunas respuestas. Los datos procedentes de preguntas cerradas y de las preguntas abiertas fueron codificados. A las primeras sólo se les asignó un código a cada opción; mientras que para las segundas[36], construimos categorías a partir de lo encontrado en los cuestionarios, las codificamos y las clasificamos.

Categorías de los problemas

La elaboración de las categorías de las resoluciones de los problemas consistió en clasificar los diferentes procedimientos usados en cada problema. Para ello, se revisó, por problema, los procedimientos propuestos por cada maestro y se fue construyendo el repertorio de procedimientos usados. Después, se homogenizaron las categorías de manera que sólo tuviéramos una lista para los ocho problemas, sin que fuera necesario encontrarlas todas en cada problema. Las categorías conformadas por tipos de procedimientos fueron las siguientes:

1. **Regla de Tres (RT).** Este procedimiento distingue tres variantes:
   - **Igualdad de dos razones.** Consiste en arreglar los valores dados como una igualdad de dos razones. A partir de aquí, el valor faltante es igual al producto de los valores cruzados dividido por el valor restante. Ejemplo: problema 1.

[35] Algunos de ellos no fueron tomados en cuenta en los ejercicios 2 y 3 (Folios: 55 – 63).
[36] Los ocho problemas y sus justificaciones (x.2).

$$\frac{2}{6} \nearrow \frac{81}{x} \quad \Rightarrow \quad x=\frac{(81)(6)}{2}=243$$

- **Aplicación de operaciones: multiplicar y dividir.** Los valores pueden ser arreglados en dos columnas y dos filas de acuerdo a las magnitudes que intervienen en el problema y a los valores correspondientes. Posteriormente, se multiplican los valores que están cruzados y, después se divide por el valor restante.

$$\begin{array}{cc} \text{kilogramos} & \text{piezas} \\ 2 & 81 \\ 6 & x \end{array} \quad \Rightarrow \quad x=\frac{(81)(6)}{2}=243$$

- **Notación clásica.** Se utiliza la notación clásica de las razones:

$$2:81::6:x$$

Esto se lee: "dos es a ochenta y uno, como seis es a *x*". La posición del 81 y 6 se le llama medios, y la posición del 2 y *x*, extremos. Enseguida se aplica la Propiedad Fundamental de las Proporciones: "el producto de sus extremos es igual al producto de sus medios":

$$\begin{gathered} 2:81::6:x \\ (2)(x)=(81)(6) \\ x=\frac{(81)(6)}{2}=243 \end{gathered}$$

2. **Valor Unitario (VU).** Las variantes distinguidas aquí fueron:
   - **Dividir y multiplicar (o dividir dos veces).** Consiste en realizar dos operaciones aritméticas: dividir y multiplicar o, dividir dos veces (como es el caso del problema 5). Dividir primero dos valores correspondientes[37] conocidos para calcular el valor por cada unidad. Después, multiplicar ese valor obtenido por el tercer valor dado o, dividir el tercer valor por ese valor obtenido. Veamos los dos casos:

[37] Les llamamos valores correspondientes a los valores numéricos de dos magnitudes que están relacionadas. Por ejemplo, 3 plumas cuestan 15 pesos. Los valores correspondientes serían 3 y 15.

Dividir y multiplicar

Ejemplo: problema 1

kilogramos	piezas
2	81
6	?

```
  40.5        40.5
2)81        ×  6
  010       243.0
    0
```

Dividir dos veces

Ejemplo: problema 5

	canicas	costo
Ana	?	80
Jorge	?	20
Total	60	100

```
    1.66              12
60)100       1.66)20.00
   400            0340
    400             008
```

Notas: (1) Es posible que en este procedimiento también se incluyan algunos casos de Factor Externo[38] que no sean suficientemente explícitos en la resolución.

(2) Aquí también se incluyen las sumas iteradas del valor unitario, es decir, dividen para obtener el valor unitario y posteriormente, en lugar de multiplicar, suman.

- **Dividir e iterar.** En este procedimiento a partir del valor unitario se itera de uno en uno hasta tener el valor deseado. Veamos el problema 1:

kilogramos	piezas
2	81
1	40.5
2	81
3	121.5
4	162
5	202.5
6	243

- **VU con valores intermedios múltiplos[39].** También se parte de la unidad, pero luego se itera de dos en dos o de algún otro múltiplo hasta encontrar el valor deseado:

[38] Más adelante se describe.

[39] Sólo se presentó en el problema 2 (cambio de moneda).

$$\begin{array}{r} 12 \\ 6\overline{)72} \\ 12 \\ 0 \end{array}$$

Dólares	Pesos
1	12
2	24
4	48
6	72
8	96
10	120

x 2 x 2

Dólares	1	2	3	4	5	10
$	12	24	36	48	60	120

x 2 x 2

- **VU con combinación lineal**[40]. Después de encontrar el valor unitario se utiliza la propiedad del isomorfismo aditivo:

$$\begin{array}{r} 12 \\ 6\overline{)72} \\ 12 \\ 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 12 \\ \underline{\times 4} \\ 48 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \text{pesos} \\ 72 \\ \underline{+\ 48} \\ 120 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \text{dólares} \\ 6 \\ \underline{+\ 4} \\ 10 \end{array}$$

- **Razón de cambio**[41]. Se calculan las diferencias entre los valores de cada magnitud y se dividen entre sí, obteniendo la pendiente o la razón de cambio de una magnitud con respecto a la otra, es decir, el aumento o decremento de una magnitud por cada unidad que la otra aumenta. Después, se calcula la diferencia entre el valor correspondiente del valor faltante y cualquier otro valor conocido de la misma magnitud. Esa diferencia se multiplica por la razón calculada y finalmente, esta cantidad se suma o resta de acuerdo a la diferencia, es decir, si aumentó, entonces se suma, pero si disminuyó, entonces se resta.

Ejemplo: problema 4

distancia	costo
2	15
5	27
8	39
11	51
10	?

$5 - 2 = \mathbf{3}$; $27 - 15 = \mathbf{12}$ ➔ $\frac{12}{3} = 4$ pesos/km

$11 - 5 = \mathbf{6}$; $51 - 27 = \mathbf{24}$ ➔ $\frac{24}{6} = 4$ pesos/km

Disminuye 1 km ; Disminuye 4(1) = 4

➔ $51 - 4 = \mathbf{47}$

[40] Sólo se presentó en el problema 2 (cambio de moneda).
[41] Sólo se presentó en el problema 4 (taxi).

Nota: Implícitamente se hace lo siguiente: dado que $f(x_1) = kx_1 + b$ y $f(x_2) = kx_2 + b$, entonces $f(x_1) - f(x_2) = k(x_1 - x_2)$, y por lo tanto $k = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{(x_1 - x_2)}$.

Luego, conociendo k, tienen varias maneras de calcular las imágenes, una es la que se explica arriba.

3. **Procedimientos Internos (PI)**

- **Factor interno.** Consiste en encontrar el factor implicado entre dos valores de una misma magnitud. Después, el valor aún no involucrado se multiplica por ese factor.

Ejemplo: problema 5

		canicas	**costo**	
$(\frac{1}{5})(60) = 12$	**Total**	60	100	$(\frac{1}{5})$
	Jorge	?	20	
$(4)(12) = 48$	**Ana**	?	80	(4)

- **Valores intermedios múltiplos.** Se utiliza un valor o valores intermedios entre los valores conocidos de una misma magnitud. Estos valores intermedios son múltiplos de uno de los valores conocidos.

Ejemplo problema 1:

kilogramos	**piezas**
2	81
4	162
6	243

- **Combinación lineal.** Se utiliza la propiedad $f(a+b) = f(a) + f(b)$ isomorfismo aditivo, frecuentemente combinada con el uso de valores intermedios (que por cierto, corresponde a la propiedad del isomorfismo multiplicativo: $f(kx) = kf(x)$).

Ejemplo: problema 5

	canicas	**costo**	
Total	60	100	
	30	50	
48	15	25	+
	3	5	
Ana	?	80	
Jorge	?	20	

- **Iteración de las dos magnitudes.** Éste es un caso particular del anterior. Aquí los valores correspondientes de cada magnitud se suman consigo mismo repetidamente hasta coincidir con el tercer valor. Ejemplo: Problema 1.

	kilogramos	piezas	
+	2	81	243
	2	81	
	2	81	
	6	?	

Nota: Puede ser que sólo se sumen los valores de la magnitud faltante.

4. **Procedimientos Algebraicos (PA)**

- **Variable como incógnita.** En este procedimiento se declara una variable y a partir de ella se plantea una expresión algebraica de acuerdo al problema y se iguala a otra expresión. Posteriormente, se resuelve para la variable y ésta se utiliza para encontrar la solución.

Ejemplo: problema 5

	canicas	costo
Total	60	100
Jorge	x	20
Ana	4x	80

(4)

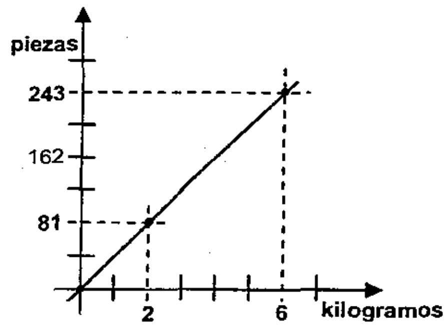
$$x + 4x = 60$$
$$5x = 60$$
$$x = \frac{60}{5}$$
$$x = 12 \Rightarrow$$

Jorge → x = 12
Ana → 4x = 4(12) = 48

En este caso, la variable sólo puede tomar un valor específico[42].

- **Gráfica.** Se ubican los valores relacionados en el plano cartesiano como un punto, colocando las magnitudes en cada eje, y se toma también el origen como otro punto de referencia para luego prolongar la recta hasta que alcanzar al tercer valor conocido. Posteriormente, para encontrar la solución se utilizan rectas paralelas a los ejes, de tal forma que crucen por la recta del tercer valor y la recta prolongada. Ejemplo: problema1.

[42] Usos de la variable: como incógnita, como número general y como relación funcional (Trigueros, Ursini y Lozano, 1999).



- **Función lineal o afín.** En este procedimiento se plantea el problema mediante una ecuación que define una función lineal o una función afín. Las magnitudes involucradas son asignadas a una variable, que pueden ser: x para la variable independiente, y y para la variable dependiente.
  - **función lineal:** $y = kx$. En este caso las magnitudes, x y y, son proporcionales y k es la constante de proporcionalidad. Ejemplo: problema 1.

$$\begin{aligned} &y = 40.5x \\ &si \quad x = 6, \quad y = 40.5(6) \\ &\qquad\qquad\qquad y = 243 \end{aligned}$$

  - **función afín:** $y = kx + b$. En este caso las magnitudes (x y y) NO son proporcionales y k es la razón de cambio de la variable dependiente (y) por unidad de incremento de la variable independiente (x). Ejemplo: problema 4.

$$\begin{aligned} &y = 4x + 7 \\ &si \quad x = 10, \quad y = 4(10) + 7 \\ &\qquad\qquad\qquad\; y = 40 + 7 \\ &\qquad\qquad\qquad\; y = 47 \end{aligned}$$

5. **Comparación de Fracciones[43] (CF).** Este procedimiento es específico de los problemas de comparación de razones. En los casos que se identificaron, la comparación se hizo utilizando los productos cruzados. Ejemplo: problema 3.

$$\begin{array}{c} 260 < 280 \\ \dfrac{26}{8} \quad \dfrac{35}{10} \end{array}$$

[43] Sólo se presentó en problema 3.

6. **Búsqueda de un Término Común[44] (BTC).** Este procedimiento también es específico de los problemas de comparación de razones y aparece en el problema 3. Se iteran los términos de uno en uno a partir del número de salchichas de cada paquete o por paquete, en ambas magnitudes. Se localiza donde el costo o el número de salchichas coincidan, y se compara el número de salchichas o el costo, respectivamente, para decidir cuál paquete conviene más. Ejemplo: problema 3.

salchichas	costo
8	26
9	29.25
10	32.50
11	35.75
12	39
13	42.25
14	45.50
15	48.75
16	52
⋮	⋮
24	78
32	104
40	130

Mismo costo, comparar el # de salchichas

Mismo # de salchichas, comparar el costo

salchichas	costo
10	35
11	38.50
12	42
13	45.50
14	49
15	52.50
16	56
17	59.50
18	63
19	66.50
20	70
⋮	⋮
30	105
40	140

7. **Factor Externo[45] (FE).** Consiste en encontrar el factor involucrado entre las dos magnitudes, es decir, el factor que nos permite encontrar los valores de una magnitud a partir de los valores de la otra cuando se multiplica por ese factor. Posteriormente, para encontrar el valor desconocido, se multiplica el valor correspondiente por el factor encontrado. Este factor también se le conoce como constante de proporcionalidad o valor unitario.

(2)

Luisa	hermana
8	16
10	x

$(\mathbf{2})(10) = 20$

Nota: Solamente se considerarán aquí procedimientos en los que es muy claro el factor externo.

[44] Sólo se presentó en problema 3.

[45] Sólo en el problema 6 se encontró el factor explícitamente, pero la solución es incorrecta.

8. **Aditivo[46] (Ad).** Consiste en reconocer la constante aditiva, o bien, en conservar las diferencias.

+8

Luisa	**Hermana**
8	16
10	x

10 + **8** = 18

	Luisa	**Hermana**	
+2	8	16	16 + **2** = 18
	10	x	

Nota: Este procedimiento aparece como procedimiento incorrecto en problemas de proporcionalidad.

9. **Producto de Escalas[47] (PE).** Se multiplican las escalas sucesivas.

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$$

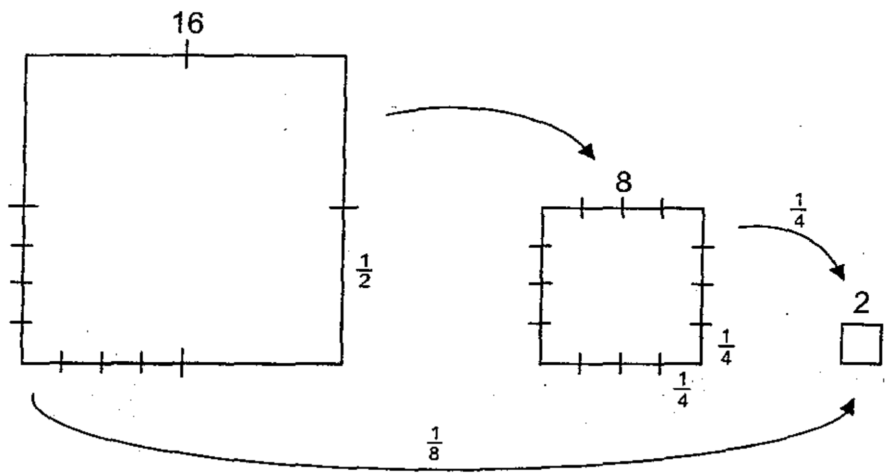
10. **Suma de Escalas[48] (SE).** Se suman las escalas sucesivas.

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{4+2}{8} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

11. **Asignación de Medidas Arbitrarias[49] (AMA).** Consiste en resolver el problema asignando medidas que cumplan con las condiciones del problema y, posteriormente lo generalizan. Ver el ejemplo de Utilización de Dibujo, pero sólo considerar la asignación de las medidas, sin las divisiones del segmento.

12. **Utilización de Dibujo[50] (UD).** Consiste en usar un dibujo el cual represente la fotografía (problema 7) y dividirla según la escala.

[46] Procedimiento sólo usado en el problema 6. Éste los llevó a la solución correcta.
[47] Sólo del problema 7.
[48] Sólo del problema 7. Procedimiento erróneo.
[49] Sólo del problema 7.
[50] Sólo del problema 7.



Nota: Algunos maestros que usaron este procedimiento dividen el área de la fotografía. Ver detalles más adelante.

13. **Definición de Cuadrado[51] (DC).** Los lados de todo cuadrado son proporcionales a los de cualquier otro cuadrado.

14. **Otros (Ot).** En esta categoría incluimos procedimientos que aparecen una sola vez o con poca frecuencia y en su mayoría son erróneos.

Categorías para las justificaciones

Para la elaboración de categorías de las preguntas abiertas –justificaciones de la presencia de la proporcionalidad-, primero fue necesario transcribir todas las respuestas de los maestros y leerlas de acuerdo a cada problema. Posteriormente, identificar las justificaciones semejantes y agruparlas en una categoría. Por último, se volvió a dar lectura de las justificaciones ya agrupadas para asegurar la consistencia en la asignación de categorías. Las categorías para las justificaciones fueron las siguientes:

1. **Argumentos congruentes o correctos**
   - **Propiedades extramatemáticas.** Hacen referencia a las características físicas de los objetos que conforman las magnitudes que están en juego, o bien, a procesos o actividades establecidos por la sociedad. Ejemplos: son del mismo tamaño, mismo peso, etc. o, en el comercio, los costos por artículos,

[51] Sólo del problema 8.

generalmente se mantienen, los salarios de los empleados tienen un monto fijo por día, etc.

- **Propiedades necesarias y suficientes.** Características que aseguran la presencia de la proporcionalidad. Por ejemplo: la constancia de la razón externa o del valor unitario entre dos magnitudes, la línea recta que pasa por el origen como representación grafica de dos magnitudes, la conservación de las razones internas, la igualdad de los productos cruzados, etc.
- **Técnica de resolver.** Hacen referencia a alguna técnica o procedimiento de resolución para las relaciones de proporcionalidad. Por ejemplo: el uso de la regla de tres.

2. **Argumentos incorrectos**
   - **Propiedades necesarias pero no suficientes.** Características verdaderas para las relaciones de proporcionalidad, pero que no determinan la proporcionalidad por sí solas. Por ejemplo: al aumentar (o disminuir) una de las magnitudes, la otra aumenta (o disminuye).
   - **Argumentos incompletos, implícitos o circulares.** Argumentos vagos y pocos precisos de las relaciones de proporcionalidad. Utilización de palabras como: proporción, proporcionales, proporcionalmente, proporcionados, etc. para justificar precisamente la proporcionalidad.
   - **Argumentos falsos.** Expresan ideas falsas del modelo matemático de la proporcionalidad o del contexto de la situación. Por ejemplo: atribuir proporcionalidad a una relación afín o a una aditiva.
   - **Enunciación de datos, no se entiende, contesta otra cosa.**
3. **Argumentos en blanco**

Estrategias para el análisis

Una vez capturada la base de datos de acuerdo a las categorías antes descritas, se procedió al análisis. Decidimos abordar el análisis en seis secciones:

- La resolución de los problemas
- Reconocimiento de la proporcionalidad y su argumentación
- El uso de los términos relacionados con la proporcionalidad
- El conocimiento de los vínculos de la proporcionalidad con otros temas de matemáticas

- Dificultades más frecuentes de los alumnos para resolver problemas de proporcionalidad
- Perfiles de los maestros

El tratamiento nos permite analizar los datos en dos niveles, de forma cuantitativa y cualitativamente. Cada sección introduce un panorama general de los resultados, en el que se plantea el aspecto cuantitativo (tablas de frecuencias absolutas y porcentuales). Posteriormente, se presentan ejemplos de cada categoría encontrada en cada problema, pregunta, justificación o ejercicio del cuestionario, con los cuales pretendemos explicar e interpretar algunos de los conocimientos –tanto prácticos como teóricos- que los maestros tienen acerca de la proporcionalidad, así como también aquellos referentes a sus alumnos y su enseñanza.

Veamos a continuación el análisis de cada sección.

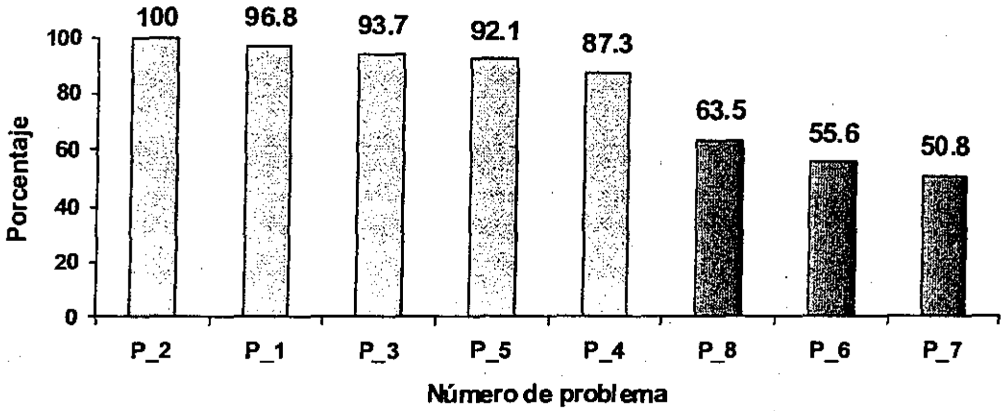
2.2 La resolución de los problemas

En esta sección presentaremos primero algunas tendencias generales de los resultados obtenidos en la resolución de los ocho problemas, posteriormente, nos centraremos en algunas problemáticas que se ponen de manifiesto en cada problema.

2.2.1 Resultados generales

¿Cómo contestaron los problemas los maestros?

El nivel de dificultad que alcanzó cada problema en el grupo de maestros participantes permite separar los ocho problemas en dos grupos: cinco problemas, del 1 al 5, fueron resueltos prácticamente sin dificultad por los maestros (entre 85 y 100 por ciento de éxito); y tres, 6, 7 y 8, resultaron difíciles (menos de 65 por ciento de éxito).



Gráfica 2-1. Porcentaje de aciertos en cada problema (n = 63)

En la siguiente tabla mostramos estos resultados por problema:

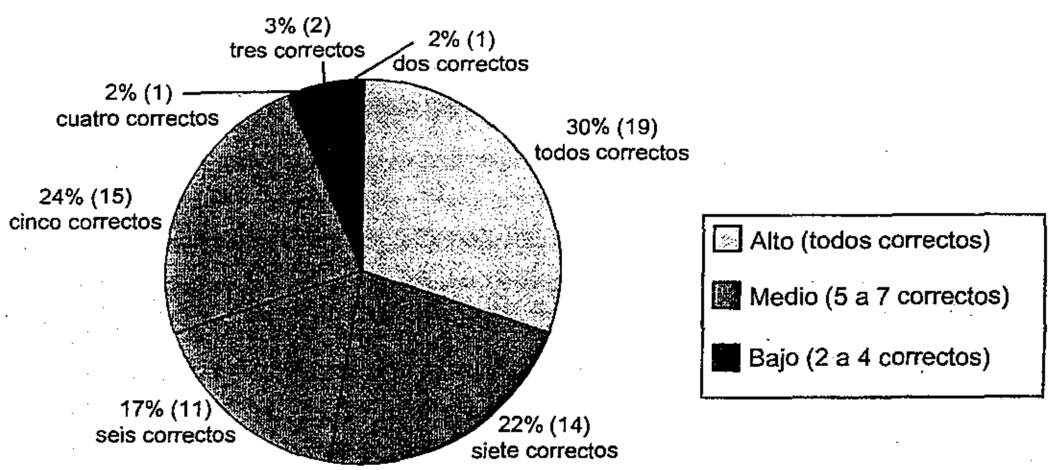
	P_2	P_1	P_3	P_5	P_4	P_8	P_6	P_7
Solución correcta	63	61	59	58	55	40	35	32
Porcentaje de correctos	100	96.8	93.7	92.1	87.3	63.5	55.6	50.8
Solución incorrecta	0	2	3	2	6	11	27	26
No Contestaron	0	0	1	3	2	12	1	5

Tabla 2-4. Soluciones para cada problema en orden descendente de aciertos(n = 63)

Cabe adelantar también que en los problemas fáciles (del 1 al 5) la mayoría de las soluciones incorrectas fueron debidas a errores aritméticos o errores por responder algo que no era requerido[52], mientras que en los últimos tres problemas, los más difíciles (del 6 al 8), las soluciones incorrectas fueron producto del uso de un procedimiento inadecuado derivado de un conocimiento erróneo, a excepción de dos casos de errores aritméticos.

Con respecto al grupo de maestros, el criterio "tuvo solución correcta al problema o no" permite identificar tres grupos:

- Alto: 30 por ciento resolvieron bien los ocho problemas.
- Medio: 63 por ciento comenten entre 1 y 3 errores u omisiones, es decir, tienden a resolver bien los problemas fáciles y a lo más dos de los difíciles[53].
- Bajo: 7 por ciento cometen más de tres errores u omisiones, los cuales suelen cometerse en los problemas difíciles, aunque también en los fáciles.



Gráfica 2-2. Soluciones del cuestionario (n = 63)

[52] Por ejemplo, uno de estos errores en el problema 3 (hot dogs) consiste en responder dando el costo de salchicha de cada paquete cuando se pide el paquete más conveniente.
[53] Salvo dos maestros que resolvieron bien los tres difíciles, pero cometieron un error en los fáciles.

Esta distribución proporciona una primera idea, desde el punto de vista de la obtención de resultados correctos o no, de los niveles de desempeño del grupo. Más adelante veremos que, frente a otros criterios, estos porcentajes cambian.

Veamos ahora la diversidad de los tipos de procedimiento que los maestros consideran, todavía en términos cuantitativos.

¿Cuántos procedimientos por problema propusieron los maestros?

Para cada problema se pidió a los maestros que imaginaran diferentes maneras en que se podía resolver cada problema (hasta tres por problema).

En la siguiente tabla presentamos la cantidad de maestros que propusieron tres, dos o un procedimiento o ninguno y la media para cada problema.

	P_1	P_2	P_4	P_5	P_3	P_6	P_7	P_8
Tres procedimientos	39	34	13	10	8	6	2	2
Dos procedimientos	20	25	24	30	26	26	23	8
Porcentaje (Subtotal de más de un procedimiento)	93.7	93.7	58.7	63.5	54.0	50.8	39.7	15.9
Un procedimiento	4	4	25	22	28	30	34	38
Porcentaje de un procedimiento	6.3	6.3	39.7	34.9	44.4	47.6	54.0	60.3
Ninguno	0	0	1	1	1	1	4	15
Media	2.6	2.5	1.8	1.8	1.7	1.6	1.4	1.0

Tabla 2-5. Número de procedimientos propuestos por problema (n = 63)

Los problemas están ordenados de mayor a menor media de procedimientos propuestos. Puede observarse que los problemas fáciles (1 y 2) son también en los que se proponen mayor número de procedimientos, y por tanto se espera mayor diversidad, mientras que los difíciles (problemas 6, 7 y 8) tienden a tener menos.

Seguramente las diferencias de un problema a otro en la cantidad de procedimientos propuestos por los maestros se deben a características de los mismos problemas. Es explicable, por ejemplo, que para resolver problemas de valor faltante, que son los problemas de proporcionalidad más frecuentes y conocidos, los maestros conozcan una mayor diversidad de procedimientos que para encontrar la resultante de la composición de dos escalas, situación que es poco frecuente.

Por otra parte, excepto para los dos problemas más fáciles (1 y 2), y sin contar el problema 8 que se presta poco para plantear varios procedimientos, los maestros que muestran conocer más de un procedimiento de resolución por problema son alrededor de la mitad del grupo, entre el 40 y 63 por ciento.

A continuación haremos un análisis cualitativo de las resoluciones de los maestros. Más allá de ciertos parámetros comunes (porcentaje de respuestas correctas y número de procedimientos), en los distintos problemas destacaremos distintos aspectos de las resoluciones. En los cinco problemas *fáciles* (el 1 y 2 de valor faltante, el 3 de comparación de razones, el 4 que no es de proporcionalidad pues pone en juego una relación afín, y el 5 de reparto proporcional), centraremos el análisis en el tipo de procedimientos de resolución desplegados por los maestros. Observaremos la presencia de tres tendencias: fuerte incidencia de dos procedimientos que podemos llamar "clásicos", la regla de tres y el valor unitario; presencia menor de los procedimientos que llamamos "internos" y que suelen ser menos formales, más intuitivos. Finalmente, presencia pequeña, pero claramente dibujada de procedimientos que integran herramientas del álgebra.

Posteriormente, al analizar los tres problemas difíciles (el 6, 7 y 8), centraremos la atención en los tipos de errores que tendieron a cometerse, para identificar algunos de los límites de los conocimientos sobre proporcionalidad en el grupo.

2.2.2 Resultados por problema

Analizaremos las resoluciones a los problemas en el orden que se presentaron en la Tabla 2-4, de mayor número de soluciones correctas a menor.

<u>Los problemas más fáciles: 1 y 2</u>

Problema 2 (100% de aciertos; media de procedimientos: 2.5)

> *En la mañana, José fue a una casa de cambio de divisas y recibió 72 pesos a cambio de sus 6 dólares. ¿Cuántos pesos recibirá si por la tarde desea cambiar 10 dólares con la misma tasa de cambio?*

Problema 1 (96.8% de aciertos; media de procedimientos: 2.6)

> *En 2 kilogramos de dulces que compró Carlos hay 81 piezas, ¿cuántas piezas habrá en 6 kilogramos de los mismos dulces?*

Los valores dados son números enteros en ambos problemas, pero la razón externa es entera en el problema 2 (12 pesos por dólar) y no entera en el 1 (40.5 piezas por kilogramo). En cambio, en el problema 1 hay una razón interna entera (entre 2 y 6 kilogramos), lo cual favorecer el uso de un factor interno entero (tres).

Estos problemas tuvieron también las medias más altas respecto al número de procedimientos propuestos por los maestros (Tabla 2-5), donde más de la mitad propusieron tres procedimientos, un poco más del 30 por ciento plantearon dos y, menos del 10 por ciento, uno. Así estos problemas fueron los más fáciles para este grupo de maestros.

La mayoría de los maestros consideró que estos problemas serían fáciles también para los alumnos de primer grado de secundaria y, que éstos usarían el Valor Unitario (VU) en el problema 2 y, Procedimientos Internos (PI) en el problema 1 (aunque pocos repararon explícitamente en la posibilidad de que los alumnos utilizaran el factor interno "por 3"). Por otra parte, la mayoría de los maestros dijo que si ellos tuvieran que enseñar a resolver estos problemas usarían la Regla de Tres (RT), pues la consideran práctica, directa, fácil de usar y entender, aplicable a muchos casos, entre otras razones.

Los procedimientos con los que los maestros resolvieron son básicamente dos: Valor Unitario y Regla de Tres. Veamos cuál fue su distribución en cada problema:

PROBLEMA 2

	Pc_1	Pc_2	Pc_3	Frecuencia*	Porcentaje**
1. Valor Unitario	23	41	19	83	53.2
2. Regla de Tres	36	15	12	63	40.4
3. Procedimientos Internos	0	2	0	2	1.3
4. Procedimientos Algebraicos	1	1	3	5	3.2
5. No se entiende/No se sabe	3	0	0	3	1.9
Procedimientos en Blanco	0	4	29	33	
Total	63	63	63	189	100.0

Tabla 2-6. Frecuencias de los procedimientos usados en el problema 2

PROBLEMA 1

	Pc_1	Pc_2	Pc_3	Frecuencia*	Porcentaje**
1. Regla de Tres	46	12	9	67	41.6
2. Valor Unitario	10	23	11	44	27.4
3. Procedimientos Internos	7	23	14	44	27.3
4. Procedimientos Algebraicos	0	1	5	6	3.6
Procedimientos en Blanco	0	4	24	28	
Total	63	63	63	189	100.0

Tabla 2-7. Frecuencias de los procedimientos usados en el problema 1

* Esta cantidad incluye las tres opciones para cada maestro. Por tanto, esta cifra puede no coincidir con el número de maestro que utilizó dicho procedimiento, ya que puede incluir repeticiones de un maestro.
** El porcentaje mostrado no toma en cuenta a los Procedimientos en Blanco.

El hecho de que en el problema 1 la razón interna es entera y pequeña, mientras que en el 2 no es entera fue percibido por un número considerable de maestros, pues mientras en el problema 2 solamente dos plantearon Procedimientos Internos, en el problema 1 lo hicieron 36[54] maestros. La mayoría de los maestros dijo que sus alumnos podrían usar ese procedimiento en el problema 1. Sin embargo, sólo un maestro hizo explícito que él lo enseñaría en clase, lo cual tal vez confirma que no lo consideran importante, como ha sido reportado en otros estudios (Block, 2006).

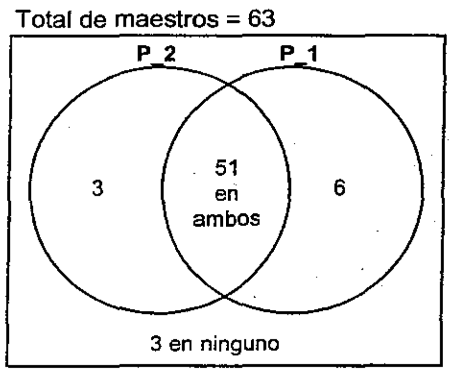
Hay otras diferencias entre las resoluciones a los dos problemas, pero éstas parecen menos significativas, por ejemplo, mientras que Valor Unitario es el procedimiento más usado en el problema 2, Regla de Tres lo es en el 1. Esta situación se invierte para el segundo procedimiento más usado.

Veamos ahora algunos ejemplos de los procedimientos y de sus variantes.

Regla de Tres (RT)

La mayoría de los maestros eligió este procedimiento como su primera opción: 36 en el problema 2 y 46 en el problema 1. Considerando las tres opciones de procedimiento solicitadas, en el problema 2 la RT fue el segundo procedimiento más frecuente, usada por 54 maestros, siete de los cuales la repitieron dos o tres veces. En el problema 1, fue el procedimiento más utilizado con 57 maestros, de los cuales seis la usaron dos veces y dos en las tres opciones. El hecho de que algunos maestros repitieran el procedimiento con pequeñas variantes en dos o tres opciones explica que la frecuencia total de usos de RT sea más alta que el número de profesores que la usaron.

La siguiente gráfica muestra la distribución del total de los maestros con respecto al uso de la RT para los dos problemas:



Gráfica 2-3. Uso de la RT en los problemas 2 y 1

[54] En la Tabla 2-7 aparece 44. Sin embargo, esta cifra incluye ocho repeticiones, las cuales pueden corresponder a variantes del procedimiento.

El procedimiento de RT se presentó en tres variantes cuya diferencia básicamente se centró en la nomenclatura utilizada. Sin embargo, para algunos maestros éstas fueron "las diferentes maneras en que se podían resolver los problemas", esto es, no las consideraron como un mismo procedimiento: la Regla de Tres.

Veamos un ejemplo en el que una maestra utilizó las tres variantes para resolver el problema 1:

igualdad de dos razones	**multiplicar y dividir**	**notación clásica**
$\frac{2\ \text{kg}}{81\ \text{p}} = \frac{6\ \text{kg}}{x}$	2 kg – 81 p 6 kg – x	6 : x 2 : 81
$x = \frac{(81\ \text{p})(6\ \cancel{\text{kg}})}{2\ \cancel{\text{kg}}} = \frac{486}{2} = 243\ \text{p}$	$x = \frac{(6\ \cancel{\text{kg}})(81\ \text{p})}{2\ \cancel{\text{kg}}}$	$x = \frac{6\cancel{\text{kg}}}{2\cancel{\text{kg}}}(81\ \text{p})$ $x = 3(81\ \text{p}) = 243\ \text{p}$
		Folio 58

Tabla 2-8. Variantes de la RT en el problema 1

En la primera, la maestra acomodó los valores dados como una **igualdad de dos razones** expresadas con fracciones[55]. Posteriormente, representó al valor faltante con la letra x, y lo expresó como la multiplicación de los valores cruzados en la igualdad, dividida por el tercer valor.

En la segunda variante, la maestra no expresó las razones con fracciones, simplemente acomodó los valores de dos en dos, como en una **relación entre las dos magnitudes**, y los separa con un guión. Luego, realiza lo mismo que en la primera variante.

En la tercera variante, la maestra expresó los datos con los **puntos** que se usaban para **expresar una razón** hace años (hasta década de los sesenta) en la teoría de razones y proporciones. Sin embargo, tampoco se apega totalmente a la formalidad de ese tiempo, nuevamente establece razones entre valores de magnitudes distintas.

[55] No lo hizo de la manera en que se acostumbraba a hacerlo en la Teoría de las razones y las proporciones, ya que en la primera razón vemos que mezcló las magnitudes y, de acuerdo a la teoría mencionada, las razones sólo podían ser entre magnitudes de la misma naturaleza (Anízar, 1911).

Las primeras dos variantes fueron las más frecuentes tanto en los problemas 1 y 2 como en el resto.

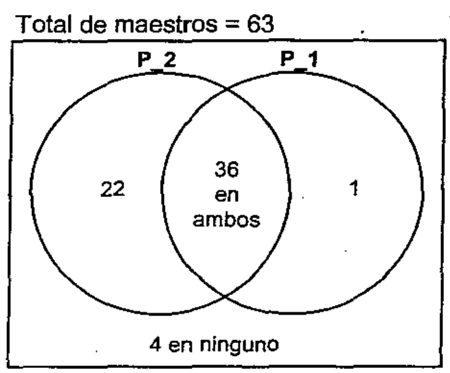
Considerando estos dos problemas muy simples de valor faltante, destaca que RT constituye un procedimiento privilegiado para el grupo de maestros, junto con el del VU.

Valor Unitario (VU)

Este procedimiento presentó dos variantes en el problema 1, y cuatro en el 2, las cuales fueron reconocidas como si se trataran de diferentes procedimientos, por lo que varios maestros propusieron más de una.

En el problema 2, el VU fue el más utilizado, se presentó en 83 ocasiones por 58 maestros: seis repitieron la misma variante en dos de las opciones, y 19 propusieron dos de las cuatro variantes.

En el problema 1 el VU fue menos frecuente, probablemente porque no es entero, en total, 37 maestros lo emplearon: uno repitió una variante, y seis usaron ambas variantes. Casi todos los maestros que usaron el VU en el problema 1, también lo hicieron en el problema 2:



Gráfica 2-4. Uso del VU en los problemas 2 y 1

El problema 2 presentó cuatro variantes. Veamos un ejemplo de cada variante:

dividir y multiplicar

$$\begin{array}{r} 12 \\ 6\overline{)72} \\ 12 \\ 0 \end{array} \qquad 12 \times 10 = 120$$

Folio 2

dividir e iterar

DOLARES	$
1	12
2	24
3	36
4	48
5	60
6	72
7	84
8	96
9	108
10	120

$$\begin{array}{r} 12 \\ 6\overline{)72} \\ 12 \\ 0 \end{array}$$

Folio 62

VU con valores intermedios múltiplos

$$\begin{array}{r} 12 \\ 6\overline{)72} \\ 12 \\ 0 \end{array}$$

Dolares	Pesos
1	12
2	24
4	48
6	72
8	96
10	120

Dólares	1	2	3	4	5	~~10~~
$	12	24	36	48	60	120

Folios 54 y 6

VU con combinación lineal

Pesos	dolares
72	6
+ 48	+ 4
120	10

1 dólar equivale a 12 pesos
por 4 dolares se reciben

$$\begin{array}{r} 12 \\ \times\, 4 \\ \hline 48 \end{array} \text{ pesos}$$

Folio 59

Tabla 2-9. Variantes del VU en el problema 2

En las cuatro variantes se encontró la cantidad de pesos por cada dólar, la cual pudo calcularse a través de una **división**. Posteriormente, en el primer ejemplo, la maestra **multiplicó** el valor encontrado por el tercer valor dado, mientras que los maestros del segundo y tercer ejemplo **organizaron** las magnitudes y los valores correspondientes **en una tabla** (recurso didáctico) e, **iteraron** hasta tener el valor requerido. La diferencia entre estos dos fue que, unos iteraron de uno en uno, mientras que los otros usaron múltiplos de dos o de cinco. En el último ejemplo, una vez teniendo la unidad, la utiliza para encontrar la cantidad de pesos equivalente a los dólares faltantes para completar los diez.

Los nueve maestros que utilizan las últimas dos variantes, además de pasar por la unidad, hacen uso de las propiedades multiplicativa y aditiva: "al doble de una magnitud le toca el doble de la otra, al triple el triple, etc." y "a la suma de cualesquiera dos valores de una magnitud le corresponde la suma de los valores correspondientes de la otra magnitud", por lo que puede decirse que los Procedimientos Internos están presentes, aunque subordinados al VU al no ser entera la razón interna.

Así, en estos dos problemas iniciales, el procedimiento de Valor Unitario, con su diversidad de variantes aparece como una opción para la resolución de problemas de valor faltante, casi tan importante como Regla de Tres, con la ventaja didáctica de ser más inteligible.

Procedimientos Internos (PI)

En Procedimientos Internos (PI) hemos ubicado cuatro variantes: factor interno, iteración de dos magnitudes, valores intermedios múltiplos y combinación lineal. Las primeras tres fueron usadas en el problema 1, y las últimas dos en el problema 2.

En general, como ya se dijo, los PI fueron más usados en el problema 1 que en el 2, seguramente porque la razón interna en el primero es entera y en el segundo no lo es. En el problema 1 (2 kg → 81 dulces, 6 kg → ?), 36 maestros usaron alguna(s) variante(s) de PI casi siempre la del factor interno "por 3", mientras que en el problema 2, en donde la razón interna ya no es entera, sólo dos maestros utilizaron una de las dos variantes correspondientes.

Las variantes usadas en el problema 1 fueron las siguientes:

<table>
<tr><th>factor interno</th><th>valores intermedios múltiplos</th><th>iteración de dos magnitudes</th></tr>
<tr>
<td>Otra sería multiplicar 81×3 = 243 piezas porque 6 es el triple de 2.</td>
<td><table><tr><th>kg</th><th>piezas</th></tr><tr><td>2</td><td>81</td></tr><tr><td>4</td><td>162</td></tr><tr><td>6</td><td>243</td></tr></table></td>
<td>2 = 81
2 = 81
2 = 81
6 kg = 243 Dulces</td>
</tr>
<tr><td>Folio 11</td><td>Folio 48</td><td>Folio 52</td></tr>
</table>

Tabla 2-10. Variantes de PI en el problema 1

En el problema 2 (6 dólares → $72, 10 dólares → ?), sólo dos maestros usaron PI de una forma particular sin recurrir al valor unitario (o no en primera instancia, ver las variantes de VU). Éstos hicieron lo siguiente:

valores intermedios múltiplos	combinación lineal
\$24 \$24 \$24 6 = 72 $3\overline{)72}$ = 24 12 0 24 × 5 = 120 cada 2 dólares recibe \$24 5 veces 2 = 120 pesos Folio 20	dólares / pesos 6 / 72 3 / 36 1 / 12 10 / 120 Folio 43

Tabla 2-11. Variantes de PI en el problema 2

En el primer caso, esta maestra usa el valor intermedio "2 dólares", el cual divide tanto a seis como a 10 dólares.

En el otro ejemplo se muestra un particular uso del procedimiento de combinación lineal: sí pasa por el valor de la unidad, pero no en primera instancia. El maestro obtuvo primero mitades (3 dólares y 36 pesos); posteriormente, terceras partes (1 dólar y 12 pesos); finalmente, sumó los valores correspondientes a 6, 3 y 1 dólar, obteniendo la cantidad de pesos. El objetivo de este maestro pareció no estar centrado en el valor unitario, su uso fue necesario posiblemente hasta el momento en que se dio cuenta que le hacía falta un dólar más para completar los 10.

Más allá de estos dos casos, la mayoría de los maestros recurrió al VU pues la razón interna –formada por 6 y 10 dólares- no es entera. El divisor común (2) diferente a la unidad, prácticamente no fue considerado.

En resumen, es claro que los datos del problema 1 determinaron un incremento en el número de PI.

Con este problema queríamos ver si los maestros consideraban al factor interno (variante 1 de PI) como una manera de resolver sencilla y rápida. Pese al incremento señalado, la respuesta no es positiva pues solamente 20 de los 63 maestros identificaron y usaron el factor 3, y casi siempre como segunda opción. Es decir, 43 de 63 maestros, casi el 70 por ciento, no reportan el uso del factor "por 3" como procedimiento posible, y 27[56] maestros –poco más del 40 por ciento- no reportan como posible ninguno de las variantes agrupadas en la categoría de "Procedimientos Internos". Se trata de maestros que probablemente tienden a considerar únicamente los procedimientos más formales, como la Regla de Tres. El porcentaje de estos

[56] Las variantes de Procedimientos Internos fueron usadas por 36 maestros. El resto, 27 son los que no usaron ninguna de las del grupo.

maestros es suficientemente elevado como para considerar que esta exclusión de procedimientos menos formales constituye una tendencia.

Procedimientos Algebraicos (PA)

Los procedimientos de esta categoría tuvieron una frecuencia baja en los dos problemas. En ambos, sólo cinco[57] maestros usaron alguna(s) variante(s) de la categoría de Procedimientos Algebraicos (PA). Las variantes que ubicamos en PA fueron: función lineal, variable como incógnita[58] y gráfica. Veamos un ejemplo de cada una aplicadas en el problema 2:

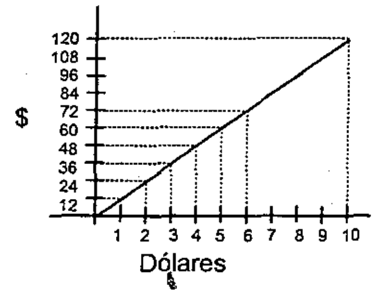
función lineal	**variable como incógnita**	**gráfica**
$y=\frac{72}{6}x$ $y=12x$ $y=12(10)$ $y=120$ Folio 9	$6k=72$ $k=\frac{72}{6}$ $k=12$ $\Rightarrow\ 10k=$ $10(12)=120$ Folio 26	 Folio 6

Tabla 2-12. Variantes de PA en el problema 2

A pesar de que en los dos primeros ejemplos se empleó variables, decidimos distinguirlos uno del otro, ya que se usan de dos maneras distintas: en la segunda variante, variable como incógnita, el maestro expresó una ecuación, donde la variable (k), es una incógnita que puede tomar un valor específico; mientras que, en función lineal, el maestro expresó una ecuación en donde se tiene dos variables en relación funcional, es decir, una de las variables puede tomar cualquier valor (independiente) y a partir de éste, encontrar el valor de la otra (dependiente) (Trigueros, Ursini y Lozano, 1999).

En la variante llamada gráfica, las variables –dólares y pesos- también fueron usadas como una relación funcional, sólo que aquí los valores que pueden tomar son representados por cada punto de la línea recta. El uso de este procedimiento implica saber que la gráfica de una relación como la de este problema, es una línea recta.

Cabe señalar que, la mayoría de los maestros que utilizó la variante gráfica, tanto en éste como en otros problemas, no necesariamente encontró la solución a partir de

[57] Tres de éstos las usaron en ambos problemas.

[58] Variable como incógnita, de acuerdo a la clasificación de los usos de la variable (Ursini, Trigueros, 2005).

la gráfica misma, como se describe en las categorías para los problemas (sección 2.1). Lo que la mayoría hizo fue resolver primero con algún método aritmético y luego, ubicar los puntos en el plano y trazar la recta. Sin embargo, consideramos que este procedimiento es distinguible de los aritméticos porque, como ya lo dijimos antes, estos maestros identifican la relación funcional que hay en el problema, y saben que se representa gráficamente a través de una línea recta (estrictamente, que pasa por el origen). También es probable que conozcan el método gráfico que describimos anteriormente pero quizá, por cuestiones de material[59] o tiempo, recurrieron a usar otros recursos.

En Resumen

En estos dos primeros problemas de valor faltante, sencillos por los datos en juego y por las magnitudes, los procedimientos privilegiados por los maestros fueron el de Regla de Tres y el de Valor Unitario, éste último, con una diversidad de variantes. En el problema 1, con una razón interna entera y sencilla, si bien hubo un incremento en la frecuencia de Procedimientos Internos (PI), éste no fue grande. Destaca que un porcentaje importante de maestros no consideran a dichos procedimientos.

Es probable que tanto el procedimiento de Regla de Tres como el de Valor Unitario, hayan tendido a ser más usados que las de Procedimientos Internos, debido a que los primeros son más aplicables a un amplio repertorio de problemas, sin importar el tipo de datos (enteros, decimales, racionales, etc.), lo que los convierte en procedimientos más generales. No obstante, los Procedimientos Internos tienen importancia desde el punto de vista de los procesos de aprendizaje de los alumnos (Vergnaud, 1988; Block, 2001; Hart, 1988).

[59] Para tener una mejor aproximación en el método gráfico, generalmente se utiliza papel cuadriculado y regla.

Problema 3

> *María hará una fiesta para sus alumnos. Ha pensado dar de comer hot dog. Así que María va al supermercado a comprar salchichas. Al llegar se da cuenta que hay dos presentaciones de la misma marca: un paquete de 8 salchichas que cuesta 26 pesos y otro de 10 a 35 pesos, ¿Cuál paquete le es más conveniente comprar?*

Este problema es de comparación de dos razones. Las magnitudes que se relacionan son el número de salchichas y el costo en pesos. Los cuatro valores dados son números enteros, pero las razones, tanto interna como externa, no lo son[60].

La mayor parte de los maestros consideró que la dificultad de este problema sería regular para los alumnos de primero de secundaria y que nuevamente aplicarían el Valor Unitario para resolverlo. También dijeron que usarían ese procedimiento si tuvieran que enseñarlo en clase, ya que éste resulta ser un procedimiento sencillo y fácil de entender.

Sólo un maestro no contestó el problema y tres no respondieron correctamente a la solución del problema. Uno de ellos no da solución al problema, es decir, no responde a la pregunta, sino da como solución el costo por salchicha de cada paquete. Los otros dos aplicaron procedimientos inadecuados dando así una solución errónea.

La diversidad de procedimientos propuestos en este problema fue mucho menor a la de los problemas 1 y 2. Sólo ocho maestros propusieron tres procedimientos, pero cinco de ellos repitieron alguno.

El único procedimiento usado por casi todos fue el Valor Unitario (VU). Le sigue muy lejos, la Búsqueda de un Término Común (BTC) y la Comparación de Fracciones (CF). La Regla de Tres (RT), si bien no fue un procedimiento principal, apareció en 18 ocasiones integrada a otros procedimientos, en particular, como una de las maneras para calcular el VU, o para calcular los precios correspondientes a un número común de salchichas. Los procedimientos quedaron distribuidos de la siguiente manera:

[60] Como se vio en el análisis previo del cuestionario, en el problema no se da a entender que el número de hot dogs que se requerirá, lo que representa una imprecisión. Para que valga la pena comparar las razones o valores unitarios (si solamente se fueran a hacer 7 hot dogs no convendría el paquete de 6, aunque el precio por salchicha fuera menor), sería necesario aclarar el que el número de hot dogs que se va a ser es relativamente grande. No obstante, los maestros asumieron el dato implícito, siguiendo en cierta forma el estereotipo de los problemas escolares.

PROBLEMA 3

	Pc_1	Pc_2	Pc_3	Frecuencia*	Porcentaje**
1. Valor Unitario	55	10	5	70	68.6
2. Búsqueda Término Común	2	13	0	15	14.7
3. Comparación de Fracciones	3	8	2	13	12.7
4. No se entiende/No se sabe	2	2	0	4	3.9
Procedimientos en Blanco	1	30	56	87	
Total	63	63	63	189	100.0

Tabla 2-13. Frecuencias de los procedimientos usados en el problema 3

Valor Unitario (VU)

En la tabla podemos ver que cerca de un 70 por ciento del total de procedimientos propuestos corresponden para el VU, el cual fue usado por 59 maestros: 11 lo usaron en dos ocasiones, la segunda con alguna variante con respecto a la primera. Casi todos los que lo usaron, lo hicieron como primera opción. A continuación presentamos las variantes:

variante 1

$$\begin{array}{r} 3.25 \\ 8\overline{)26} \\ 20 \\ 40 \\ 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 3.5 \\ 10\overline{)35} \\ 50 \\ 0 \end{array}$$

Folio 5

variante 2

$$\begin{array}{c|c} 8 & 26 \\ \hline 1 & x \end{array} \qquad x = \frac{26}{8} = 3.25$$

$$\begin{array}{c|c} 10 & 35 \\ \hline 1 & x \end{array} \qquad x = \frac{35}{10} = 3.5$$

Folio 54

variante 3

Paquete I

1	2	3	4	5	6	7	8
3.25	6.5		13				26

Paquete II

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
3.5				17.5					35

Folio 8

Tabla 2-14. Variantes del VU en el problema 3

La variante 1 fue la más utilizada, en ésta simplemente la maestra dividió el costo entre el número de salchichas de cada paquete y, comparó los valores unitarios para elegir el más barato. En la variante 2 (nueve maestros en total), aplicaron la Regla de Tres (RT) para encontrar el valor para la unidad. Y la variante 3 (usada por dos maestros), partieron del número de salchichas de cada paquete (8 y 10) y calcularon el costo de algunos divisores de 8 y 10, hasta llegar a la unidad (es un procedimiento que integra algo de valores intermedios múltiplos).

---

* Esta cantidad incluye las tres opciones para cada maestro. Por tanto, esta cifra puede no coincidir con el número de maestro que utilizó dicho procedimiento, ya que puede incluir repeticiones de un maestro.

** El porcentaje mostrado no toma en cuenta a los Procedimientos en Blanco.

Búsqueda de un Término Común (BTC)

El procedimiento de BTC tuvo una frecuencia baja: fue utilizado por 13 maestros. Este procedimiento es específico para problemas de comparación de razones, por lo que sólo se presentó en este problema. Se presentó en cuatro variantes que se ejemplifican a continuación:

variante 1

Paq. 1

piezas	$
8	26
16	52
32	104
64	208
80	260

Paq. 2

piezas	$
10	35
20	70
40	140
80	280

Podrá observar que al momento de coincidir en ambas tablas 80 piezas con costos diferentes. Le conviene más el paq. de 8 piezas.

Folio 6

variante 2

10 de 8 = 260

8 de 10 = 280

Folio 47

variante 3

$8 - 26$
$40 - x$

$\dfrac{26 \times 40}{1040}$

130
8)1040
24
00

$10 - 35$
$40 - x$

$\dfrac{25 \times 40}{1400}$

140
10)1400
40
00

Folio 40

variante 4

$10 - 35$
$8 - x$

$8 - 26$
$10 - x$

35
× 8
280

28
10)280
080

32.5
8)260
20
40
0

Folio 21

Tabla 2-15. Variantes de BTC en el problema 3

En el ejemplo de la primera variante, el maestro hizo dos tablas de valores, una para cada paquete y comparó para una misma cantidad de piezas. Algunos maestros tomaron en cuenta el número de salchichas por paquete, como el del ejemplo presentado; y otros en cambio, obtuvieron el costo por 2 salchichas, de cualquier paquete, y posteriormente, tabularon de dos en dos –sin que fuera necesario- hasta tener la cantidad de salchichas del otro paquete, y entonces compararon.

La variante 2 fue más directa, la maestra simplemente calculó el costo de 10 paquetes de 8 salchichas y el costo de 8 paquetes de 10, teniendo así la misma cantidad de salchichas, y comparó los costos.

En las variantes 3 y 4 se utilizó –por seis maestros- la RT. En la variante 3 el maestro la empleó para encontrar el costo de una misma cantidad de salchichas (término común) para ambos paquetes. En la variante 4, otro maestro la utilizó para calcular el costo del número de salchichas del paquete A, con los datos del paquete B y viceversa. Si el valor encontrado con la RT (28) es mayor al costo real del paquete A (26), significa que el paquete B, es más caro. En caso contrario, sería el más conveniente. Cabe observar que no hacía falta realizar los dos casos de esta variante como se hizo en el ejemplo, basta probarlo para uno.

Comparación de Fracciones (CF)

Otro procedimiento usado con poca frecuencia fue el de Comparación de Fracciones (CF). Este procedimiento sólo apareció en este problema, con dos variantes:

variante 1	**variante 2**
$\frac{26}{8} \boxed{<} \frac{35}{10}$ $(26)(10) \quad (35)(8)$ $260 < 280$ Folio 28	$8\text{ s} = \$26$ $10\text{ s} = \$35$ $\overset{280}{\frac{8}{26}} = \overset{260}{\frac{10}{35}}$ $35 \times 8 = 280$ La proporción es mayor con 8 salchichas Folio 20

Tabla 2-16. Variantes de CF en el problema 3

En la variante 1, el maestro comparó las razones que expresan el costo por cada salchicha. Posteriormente, para comparar las fracciones, usó los productos cruzados y determinó que convenía el paquete 1, puesto que el producto fue menor (lo que pudo haberse interpretado como que el costo por unidad de salchicha era menor). De los 12 maestros que emplearon fracciones, la mitad de ellos usó la variante 1 sin problema alguno.

Por otro lado, en la variante 2, las razones que se compararon expresaban la cantidad de salchicha por cada peso. La maestra de este ejemplo, nuevamente aplicó productos cruzados y determinó que el producto mayor era el que convenía. Es probable que lo anterior se haya interpretado correctamente, como que se recibiría mayor porción de salchicha por un peso. El ejemplo que se muestra en la tabla, fue el único caso –de seis maestros que usaron esta variante- que hizo explícito lo anterior.

Un maestro da una respuesta incorrecta debido a una incomprensión de las razones involucradas en la variante 2: al comparar los productos cruzados, eligió al menor, probablemente porque tenía presente que el paquete más conveniente era el de menor costo, sin darse cuenta de que colocar las razones como en la variante 2, tenían otro sentido.

Otros maestros que también usaron la variante 2, eligieron el producto mayor, pero no dieron explicación o se contradijeron. Por ejemplo, uno de ellos encerró al producto mayor (280) y escribió debajo de éste "más cara", haciendo evidente que la razón correspondiente (8/26) era la del paquete más caro, por lo que no podría, según sus conclusiones, ser el más conveniente. Sin embargo, da la respuesta correcta diciendo que el paquete de 26 pesos con 8 salchichas es el mejor.

En otros casos pareció que no supieron concluir, pues después de realizar los productos cruzados, simplemente no eligieron ninguno, quizá porque les fue difícil interpretar las razones expresadas con las fracciones o porque se contradecían con la solución de algún procedimiento anterior –como el VU- del cual se sentían más seguro.

En Resumen

Este problema dio lugar a dos procedimientos exclusivos de esta situación (BTC y CF). Sin embargo, no fueron éstos los más utilizados, pues el VU, tuvo la mayor frecuencia. La RT, a pesar de no haber sido un procedimiento principal, fue usada por 18 maestros, quienes la incluyeron como parte de los procedimientos VU y BTC.

También destaquemos que la razón de "salchichas sobre peso", dio lugar a dudas para determinar el paquete más conveniente.

Problema 5

Ana y Jorge compraron 60 canicas. Ana cooperó con 80 pesos y Jorge 20 pesos. Si desean repartírselas de acuerdo a lo que cooperaron. ¿Cuántas canicas le tocan a cada uno?

Este problema es de reparto proporcional, las magnitudes relacionadas son el número de canicas y el costo de ellas. Los valores dados son números enteros, pero las razones internas (entre cantidades de canicas o entre cantidades de dinero) no siempre son enteras (100 canicas es 5 veces 20, 80 canicas es 4 veces 20 canicas, pero, por ejemplo, 80 canicas es 4/5 de 100 canicas), la razón externa (entre canicas y dinero) tampoco es entera.

De acuerdo a la opinión de la mayoría de los maestros, este problema sería difícil de resolver para los alumnos de primero de secundaria, y quienes lo hicieran, usarían la Regla de Tres (RT), mismo procedimiento que dijeron que utilizarían si tuvieran que explicarlo en clase. Algunas de sus razones fueron, nuevamente, que la RT es sencilla, exacta, segura, fácil de entender o que es práctica y directa, cosa que los alumnos buscan.

Tres maestros no dieron la solución al problema, aunque dos de ellos intentaron proponer algún procedimiento. Otros dos maestros respondieron incorrectamente: uno debido a un error aritmético y otro a un mal análisis. Un poco más del 60 por ciento propuso al menos dos procedimientos. La cantidad de procedimientos propuestos en este problema fue ligeramente más alta que en el problema 3.

Los diferentes procedimientos que encontramos están distribuidos de la siguiente manera:

PROBLEMA 5

	Pc_1	Pc_2	Pc_3	Frecuencia*	Porcentaje**
1. Regla de Tres	31	13	3	47	42.0
2. Procedimientos Internos	13	14	6	33	29.5
3. Valor Unitario	14	12	2	28	25.0
4. Procedimiento Algebraico	1	1	0	2	1.8
5. No se entiende/No se sabe	2	0	0	2	1.8
Procedimiento en Blanco	2	23	52	77	
Total	63	63	63	189	100.0

Tabla 2-17. Frecuencias de los procedimientos usados en el problema 5

Podemos ver que los procedimientos RT, PI y VU tuvieron las frecuencias más altas.

Regla de Tres (RT)

La RT fue el procedimiento más usado en este problema y casi la mitad de los maestros la usó como primera opción. Tres maestros la usaron en dos opciones y uno en las tres, por lo que en total, 42 maestros emplearon este procedimiento. Veamos un ejemplo de las variantes que aparecieron:

* Esta cantidad incluye las tres opciones para cada maestro. Por tanto, esta cifra puede no coincidir con el número de maestro que utilizó dicho procedimiento, ya que puede incluir repeticiones de un maestro.

** El porcentaje mostrado no toma en cuenta a los Procedimientos en Blanco.

variante 1

canicas → J - \$20
60 A - \$80

$$\frac{60}{100}=\frac{x}{20} \qquad \frac{60}{100}=\frac{x}{80}$$

$$\frac{12\cancel{00}}{1\cancel{00}}=12 \qquad \frac{48\cancel{00}}{1\cancel{00}}=48$$

Folio 18

variante 2

Costo total = 100p
Canicas = 60c

$$\begin{array}{cc} p & c \\ 100 & -\ 60 \\ 80 & -\ x \end{array} \quad \frac{(80)(60)}{100}=48c \text{ Ana}$$

$$\begin{array}{c} 100-60 \\ 20-x \end{array} \quad \frac{(20)(60)}{100}=12c \text{ Jorge}$$

Folio 23

variante 3

\$80 : x
\$100 : 60

$$x=\frac{\$80\ (60)}{\$100}=(.8)(60)=48.0$$

Folio 58

variante 4

	aport.	% aport.	Le toca
Ana	80	80%	48
Jorge	20	20%	12
Total	100	100%	60

$$\begin{array}{c} 60-100\% \\ x-80\% \end{array} \qquad \begin{array}{c} 60-100\% \\ x-20\% \end{array}$$

$$x=\frac{4800}{100} \qquad x=\frac{1200}{100}$$

$$x=48 \qquad x=12$$

Folio 50

Tabla 2-18. Variantes de la RT en el problema 5.

Las primeras tres variantes[61] de la RT utilizaron los datos dados de las magnitudes relacionadas (canicas y costo), y sólo se diferenciaron en el acomodo de los datos[62]. Una maestra utilizó las tres variantes como tres formas de resolver el problema 5. También lo hizo en los problemas 1 y 2.

En la variante 4 se utilizó la cantidad de canicas dadas y el porcentaje correspondiente a la cooperación que cada uno hizo, procedimiento facilitado por el hecho de que los aportes que cooperaron coinciden numéricamente con el porcentaje correspondiente. Dos maestros aplicaron la RT dos veces en un mismo procedimiento: primero, para obtener el porcentaje que representa cada cooperación; y segundo, para calcular la cantidad de canicas usando el porcentaje aportado obtenido.

[61] Las primeras tres variantes de la RT en este problema fueron las mismas encontradas en los problemas 1 y 2.
[62] 1) Igualdad de dos razones expresadas con fracciones, 2) Relación de dos magnitudes expresada con guiones, y 3) El uso de los dos puntos para expresar las razones.

Procedimientos Internos (PI)

Los procedimientos de la categoría PI también fueron usados con frecuencia en este problema: 28 maestros usaron factor interno, valores intermedios múltiplos y combinación lineal.

El factor interno fue la variante más empleada de PI, 23 maestros lo usaron: tres repitieron en dos ocasiones. Esta variante se presentó de dos formas:

factor interno con fracciones	**factor interno decimal**
Si 60 canicas cuestan \$100 →Ana puso $\frac{4}{5}$ del dinero y Jorge $\frac{1}{5}$ →La quinta parte de 60 son 12 →Ana 4x12 = 48 y Jorge 1x12 = 12 $\begin{array}{r} 12 \\ 5\overline{)60} \\ 00 \end{array}$ Folio 42	Costo total: 100 pesos total de canicas: 60 porcentaje aportado por Ana: 80% porcentaje aportado por Jorge: 20% el 80% de 60 es $0.8 \cdot 60 = \underline{48\ \text{canicas}}$ el 20% de 60 es $0.2 \cdot 60 = \underline{12\ \text{canicas}}$ Folio 27

Tabla 2-19. Ejemplos del factor interno de PI en el problema 5

En el uso del factor interno fraccionario se presentó un error. Una maestra escribió que Jorge aportó una cuarta parte. Posteriormente, calculó la cuarta parte del total de las canicas (60/4 = 15), y expresó que las canicas correspondientes para Jorge eran 15. El error estuvo en que la cuarta parte es con respecto a la cantidad de canicas de Ana y no con respecto al total de canicas.

El factor interno decimal fue más usado por los maestros que el fraccionario: 10 usaron las fracciones y 15[63] usaron decimales.

[63] Dos de estos maestros también usaron el factor interno con fracciones.

Las otras variantes de PI, valores intermedios múltiplos y combinación lineal, fueron usados con menor frecuencia: cinco utilizaron el primero y sólo dos el segundo. Enseguida mostramos un ejemplo de cada una:

valores intermedios múltiplos

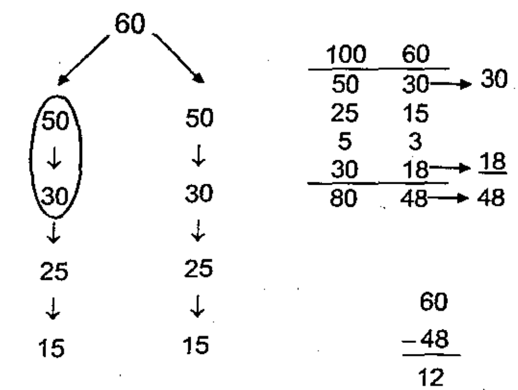
pesos	20	40	60	80	100
canicas	12	24	36	48	60

Ana 48 canicas

Jorge 12 canicas

Folio 23

combinación lineal



Folio 12

Tabla 2-20. Otras variantes de PI en el problema 5

En el primer ejemplo, el maestro organizó una tabla en la que mostró el número de canicas por cada 20 pesos (probablemente dividió el total de canicas entre 5). De ésta tomó lo correspondiente para 20 y 80 pesos, que fue el aporte de cada persona.

En el segundo ejemplo, el maestro organizó una tabla de valores en donde estableció la mitad y la cuarta parte del costo total y de canicas. También, calculó que para 5 pesos corresponden 3 canicas, (probablemente tomando la quinta parte de 25 y 15). Luego es probable que sumara 25 y 5 pesos y, 15 y 3 canicas, para obtener que a 30 pesos le correspondan 18 canicas. Después, sumó 50 y 30 pesos, y sus correspondientes, 30 y 18 canicas. Por último, restó las 48 canicas al total, 60, y obtuvo las canicas para quien cooperó 20 pesos.

Valor Unitario (VU)

Este procedimiento también fue frecuente: 28 maestros lo propusieron y no se presentaron repeticiones. Las variantes presentadas fueron las siguientes:

variante 1			**variante 2**
$60\overline{)100}$ = 1.6 40 40	$1.6\overline{)200}$ = 12.5 40 80 0	$16\overline{)800}$ = 50 00	canicas 60 costo 100 pesos costo x canicas = $\frac{60}{100}$ = .6 pesos x canica
$166\overline{)2000}$ = 12 0340 018	$166\overline{)8000}$ = 48 1360 032		Ana (80)(.6) = 48 canicas Jorge (20)(.6) = 12 canicas
$1666\overline{)20000}$ = 12 03340 0008	$1666\overline{)80000}$ = 48 14160 0832	Folio 18	Folio 23

Tabla 2-21. Variantes del VU en el problema 5

Los maestros que usaron la primera variante (21 maestros) calcularon el costo por cada canica, mientras que en la segunda (siete maestros) calcularon la cantidad de canica que se completa por cada peso.

En el ejemplo de la variante 1, la maestra dividió los 100 pesos (costo total) entre 60 canicas (total de canicas). Es probable que al encontrar un cociente periódico ($1.\overline{66}$), haya decidido tomar sólo la primera décima de la solución (1.6). Luego, para conocer la cantidad de canicas que le tocan a cada persona, dividió 20 y 80 pesos entre 1.6. Sin embargo, parece que se dio cuenta que la solución no es exacta, pues los resultados suman 62.5 en lugar de 60, el total de canicas a repartir. Por tanto, volvió a dividir ambos aportes, pero ahora entre 1.66, y aunque, sólo calculó hasta la parte entera (12 y 48 canicas), parece que esta le fue suficiente, pues ahora sí le sumaban el total. Finalmente, por alguna razón probó con 1.666.

En la variante 2 del VU (Tabla 2-21), la cantidad de canicas por peso fue más sencilla, 0.6, un decimal finito y de sólo décimas. En el ejemplo podemos ver que después, multiplicó 0.6 por la cooperación de cada persona, obteniendo la cantidad de canicas que le corresponden a cada uno.

Cabe destacar que el maestro de este ejemplo, consideró el 0.6 –cantidad de canica por cada peso- como el valor de cada canica, y escribió "0.6 pesos x canica". Parece que no se dio cuenta de que no fue ese el valor unitario que obtuvo. Al igual que él, otros también hicieron explícita esta confusión, por ejemplo:

"gastaron $100 en las 60 canicas cada canica vale .60" (Folio 4)
"costo por canica = 0.6 pesos" (Folio 27)

A pesar de que la variante 2 del VU pareció ser más sencilla –en cuanto a la manipulación de los resultados- que la variante 1, 21 de 28 maestros usaron la variante 1 y sólo 7 aplicaron la segunda. Esto se debió quizá a que atención sólo estaba centrada en el valor por canica, sin importar que éste fuera un número complicado, o tal vez por evitar el aparente sin sentido de hablar del valor de una porción de canica.

Procedimientos Algebraicos (PA)

Sólo dos maestros propusieron este procedimiento. A continuación presentamos un ejemplo que en realidad es un interesante caso de procedimiento mixto que recurre a la noción de razón clásica y se vale de herramientas algebraicas:

Procedimiento Algebraico

$$\frac{80}{20}=\frac{8}{2}=\frac{4}{1} \qquad 4{:}1$$

$$\begin{array}{r} 12 \\ 5\overline{)60} \\ 10 \\ 0 \end{array} \qquad \begin{array}{l} 5x=60 \\ x=\dfrac{60}{5} \\ x=12 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 12 \\ \underline{4} \\ 48 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 12 \\ \underline{1} \\ 12 \end{array}$$

Folio 13

Tabla 2-22. Ejemplo de PA en el problema 5

La maestra calculó la razón interna que había entre las cantidades que cooperaron Ana y Jorge (4 a 1). Posteriormente, escribió la ecuación "$5x=60$", probablemente haciendo referencia a la suma de $4x$ y x, expresiones que representan la relación que guardan la cooperación de Ana y Jorge, respectivamente, y que se conserva para la repartición de las canicas, por eso está igualada al total de canicas. Despejó y encontró el valor de la incógnita ($x=12$) y luego multiplicó el valor encontrado por cuatro, para Ana y, por uno para Jorge.

En Resumen

En este problema la RT, al igual que en los problemas 1 y 2, tuvo una frecuencia alta, mientras que los PI (factor interno, valores intermedios múltiplos y combinación lineal) sólo fueron utilizados por 28 maestros. Así, 35 maestros (56 por ciento) no consideraron las relaciones entre las cantidades que cooperaron cada uno y el costo total. De esos 35, 16 tampoco usaron PI en el problema 1 (dulces).

Cabe destacar el uso frecuente de los porcentajes dentro de los procedimientos RT y PI (factor interno). En éste último se resalta más el uso del factor en su forma decimal (0.8 y 0.2) que en la fraccionaria ($\frac{4}{5}$ y $\frac{1}{5}$).

El VU también estuvo presente, pero al igual que en el problema 3, hubo confusiones con respecto al significado de las dos razones posibles (pesos/canica o canicas/peso).

Problema 4

En la siguiente tabla se muestra la distancia recorrida en kilómetros y el costo en pesos de cuatro viajes que realizó un taxista durante la mañana:

Distancia (km)	***Costo ($)***
2	*15*
5	*27*
8	*39*
11	*51*

Si por la tarde realiza un viaje de 10 kilómetros y el banderazo es de 7 pesos, ¿cuánto cobrará el taxista?

Las magnitudes que se relacionan en este problema son la distancia recorrida y el costo por el viaje. Todos los datos proporcionados, incluyendo la razón de cambio[64] (implícita) entre ambas magnitudes, son números enteros; y los valores relacionados forman una función afín[65]. El "banderazo" podía calcularse con los datos que se dan, sin embargo, éste se proporciona, con lo cual se facilita el problema.

Los profesores consideraron que sería un problema difícil para los alumnos de primer grado de secundaria, que los alumnos resolverían el problema con alguna variante del Valor Unitario y que ese mismo procedimiento es el que ellos enseñarían.

Un total de 55 maestros de 63 respondieron correctamente el problema, seis incorrectamente y dos no contestaron. De los seis maestros que contestaron

[64] La razón de cambio se define como el aumento o decremento de una magnitud por cada unidad de aumento de la otra magnitud.

[65] La función afín es aquella que tiene la forma $y = kx + b$, con $b \neq 0$.

incorrectamente: dos cometieron errores aritméticos y solamente cuatro usaron procedimientos inadecuados para resolver el problema (lo resolvieron como si hubiera proporcionalidad). Por otra parte, los maestros que no contestaron el problema intentaron realizar algún procedimiento, pero no concluyeron una respuesta.

La cantidad de procedimientos propuestos fue relativamente baja pues de los 55 que contestaron bien, solamente 37 maestros propusieron dos o tres procedimientos[66], los demás se limitaron a un sólo[67].

En la siguiente tabla se presentan los procedimientos. Debido a que en este problema los errores empiezan a ser más frecuentes, en la tabla se destacan los números de procedimientos correctos e incorrectos en cada tipo:

PROBLEMA 4

	Pc_1	Pc_2	Pc_3	Frecuencia*		Porcentaje**	
				C	I	C	I
1. Valor Unitario	39	17	4	53	7	46.9	6.2
2. Procedimientos Algebraicos	13	10	9	32	0	28.3	0
3. Regla de Tres	6	4	1	10	1	8.8	0.9
4. Procedimiento Interno	1	1	0	1	1	0.9	0.9
5. No se entiende/No se sabe	3	5	0	7	1	6.2	0.9
Procedimientos en Blanco	1	26	49	76			
	63	63	63	189		100.0	

Tabla 2-23. Frecuencias de los procedimientos en el problema 4

Valor Unitario (VU)

En total, 48 maestros usaron el VU en este problema: 42 respondieron correctamente, cinco incorrectos y uno no concluyó.

Los maestros que respondieron correctamente procedieron de dos formas (variantes):

- Algunos **restaron el banderazo** y luego dividieron y multiplicaron (como en los problemas 1 y 2), finalmente sumaron el banderazo (39 maestros), y
- Algunos dejaron el banderazo y recurrieron a la **razón de cambio**: calcularon el costo por kilómetro (valor unitario) a través de los incrementos de los valores de cada magnitud en la tabla, y luego los dividieron (costo sobre

[66] Aunque algunos de éstos eran repetidos.
[67] La mayoría recurrió a los procedimientos de Valor Unitario.
* Esta cantidad incluye las tres opciones para cada maestro. Por tanto, esta cifra puede no coincidir con el número de maestro que utilizó dicho procedimiento, ya que puede incluir repeticiones de un maestro.
** El porcentaje mostrado no toma en cuenta a los Procedimientos en Blanco.

distancia), después se multiplicó por el valor pedido y se sumó el banderazo (8 maestros[68]).

Veamos un ejemplo de la razón de cambio (variante 2):

razón de cambio

	Distancia (km)	Costo ($)	
3	2	15	12
3	5	27	12
3	8	39	12
	11	51	

Observar que aumenta de 3 km en 3 km y el costo es de 12 en 12, por lo que 1 km cuesta $4 más 7 del banderazo.

Folio 15

Tabla 2-24. Ejemplo de razón de cambio del VU en el problema 4

De los cinco maestros que usaron VU y respondieron incorrectamente, dos de ellos cometieron errores aritméticos, los otros tres no tomaron en cuenta el valor del banderazo en un inicio, es decir, no lo restaron antes de dividir el costo y la distancia. Aquí presentamos dos de los casos:

no restaron el banderazo

$$\begin{array}{r} 5.4 \\ 5\overline{)27} \\ 20 \\ 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 5.4 \\ \underline{\times 10} \\ 54 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 54 \\ \underline{+\ 7} \\ 61 \end{array}$$

Folio 55

km	$
1	7.5
2	15
3	22.5
4	30
5	37.5

No sale

Folio 36

Tabla 2-25. Errores del VU en el problema 4

En los ejemplos anteriores se obtienen valores unitarios distintos debido a que los maestros tomaron sólo un par de valores de la tabla para calcularlos (5 kilómetros y 27 pesos en el primero, 2 y 15 en el segundo). Luego, el maestro del primer ejemplo multiplicó por 10, y sumó los siete pesos del banderazo. La maestra del otro ejemplo, realizó una tabla de valores en la que escribió los costos correspondientes a los primeros cinco kilómetros, tomando 7.5 pesos por kilómetro. Posteriormente, al lado de

[68] Cinco de ellos propusieron ambas formas.

la tabla escribió "No sale", con lo que probablemente deja ver que observó que el resultado que ella obtuvo para 5 kilómetros (37.5) fue distinto del que se proporciona en el problema (27). Finalmente, con ese procedimiento no llegó a una respuesta.

Cabe destacar que en el primer ejemplo, a pesar de que el banderazo no se tomó en cuenta antes de dividir el costo entre los kilómetros, éste sí fue considerado al final.

Hubo otro caso en que una maestra realizó todas las divisiones para cada par de valores en la tabla, dándose cuenta que los cocientes no eran iguales. Este hecho probablemente la desconcertó, por lo que dejó el espacio de la respuesta en blanco, cosa que no sucedió para quienes usaron un sólo par de valores.

Procedimientos Algebraicos (PA)

En este problema encontramos las variantes: función afín, otros procedimientos algebraicos y gráfica. Los procedimientos de esta categoría fueron usados por 25 maestros, principalmente la variante de función afín, la cual fue empleada por 18 maestros, de los cuales cuatro repitieron en dos ocasiones. Las otras dos variantes fueron menos utilizadas: cinco[69] maestros para el otros procedimientos algebraicos (uno repitió) y cuatro[70] para gráfica.

función afín

Distancia (km)	Costo ($)	Sin banderazo
2	15 − 7	8
5	27 − 7	20
8	39 − 7	32
11	51 − 7	44

$y = 4x + 7$

$y = 4(10) + 7$

$y = 40 + 7$

$y = 47$

Folio 7

otros procedimientos algebraicos

$15 = 2x + 7$

$15 - 7 = 2x$

$\frac{8}{2} = x$

$4 = x$

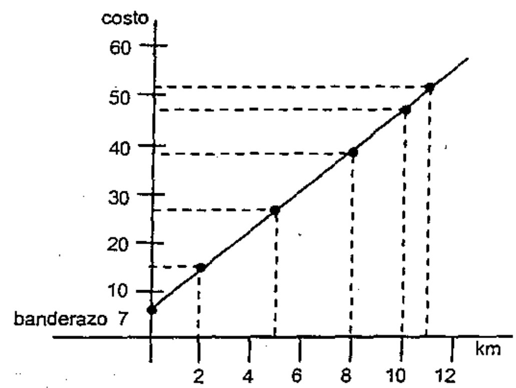
km = 4

$10 \times 4 + 7 = 47$

Folio 60

gráfica

Construir una gráfica



Haciendo la gráfica con precisión obtenemos el valor de 47 en este caso podrían marcar 46 ó 47.

Folio 59

Tabla 2-26. Variantes de PA en el problema 4

[69] Uno de éstos también propuso la función afín.

[70] Uno de éstos también propuso la función afín.

La maestra del primer ejemplo, restó el banderazo a todos los costos de la tabla y probablemente de esos valores obtuvo implícitamente el costo por kilómetro. Luego, escribió la función afín, y sustituyó en ella el valor que le pedía el problema.

Para el segundo ejemplo, la maestra estableció una ecuación usando un par de valores de la tabla dada, donde la incógnita (x) representaba el costo por kilómetro recorrido. Después, despejó la incógnita y encontró el valor desconocido. Finalmente, multiplicó el valor encontrado y el valor requerido y luego, le sumó el banderazo.

El tercer ejemplo, correspondiente a la variante de gráfica, el maestro ubicó los valores de la tabla en un plano cartesiano, tomando como variable independiente a la distancia en kilómetros y, como variable dependiente al costo en pesos. También marcó la ordenada al origen y explicitó que corresponde al "banderazo". Luego, trazó una línea recta. Finalmente, con la ayuda de rectas paralelas a los ejes, localizó la ordenada correspondiente al valor requerido, 10 kilómetros.

El maestro de este ejemplo hizo una nota al final, diciendo que, podría ser que se diera otra respuesta, diferente a la exacta. Esto debido a la precisión con que se hizo la gráfica. En otras palabras, dio a entender que este procedimiento te puede llevar a una aproximación de la solución.

Es destacable que en esta categoría de procedimientos, todos fueron correctos.

Regla de Tres (RT)

En este problema, a diferencia de otros, la RT fue poco propuesta: sólo nueve maestros la usaron y uno de ellos lo propuso en sus tres opciones[71]. Las variantes que se presentaron fueron:

restaron el banderazo

Distancia (km)	Costo ($)	
2 (4)	15 – 7	8
5 (4)	27 – 7	20
8 (4)	39 – 7	32
11 (4)	51 – 7	44

Revisamos que la relación sea proporcional

Primero eliminamos de la tabla al $ los $7 del banderazo

$$\frac{2\,km}{\$8} \qquad \frac{10\,km}{x}$$

$$x=\frac{(\$8)(10\,\cancel{km})}{2\,\cancel{km}}$$

$$x=\frac{\$80}{2}=\$40+\$7\,\text{banderazo}$$

$$=\$47$$

Folio 58

razón de cambio

Por cada aumento de 3 km de distancia el costo es de $12, aquí se presenta la siguiente constante:

$$\frac{3}{12}=\frac{10}{x}$$

$$3\overline{)120}\quad 40 \qquad 00$$

$$\begin{array}{r}\$40\\ \underline{\$\ 7}\\ \$47\end{array}$$

Folio 22

Tabla 2-27. Variantes de la RT en el problema 4

Para la primera variante, la RT se aplicó usando un par de valores de la tabla, donde previamente se le restó el banderazo al costo total. Mientras que, en la segunda variante utilizó los incrementos de ambas magnitudes para aplicar la RT.

Notemos que el maestro del primer ejemplo señaló en una nota que hay que verificar si la relación es proporcional. Es probable que se refiera a la distancia y al costo por kilómetros recorridos, y no al costo total.

Uno de los seis maestros que contestaron incorrectamente este problema usó la RT. Esto fue lo que hizo:

[71] También en los problemas 1, 2 y 5 este maestro usó la RT en sus tres opciones.

error en RT		
5 – 27 10 – x	$5\overline{)270}$ = 54 20 0	54 + 7 61
		Folio 55

Tabla 2-28. Error de la RT en el problema 4

Este maestro aplicó RT con dos valores correspondientes de la tabla, pero sin considerar que el banderazo estaba incluido. Sin embargo, no significa que el maestro no tomara en cuenta el costo fijo del banderazo, ya que al final sumó ese valor. Es destacable que solamente un maestro haya aplicado mecánicamente la Regla de Tres en este primer problema que no es de proporcionalidad.

Procedimientos Internos (PI)

Valores intermedios múltiplos fue la única variante de PI que encontramos en este problema. Su frecuencia fue muy baja, sólo se presentó dos veces y una de ellas llegó a una solución incorrecta:

valores intermedios múltiplos		error
15 – 7 8	2 – 8 4 – 16 6 – 24 8 – 32 10 – 40 + banderazo	2 = 15 4 = 30 8 = 60 10 = 75
	Folio 13	Folio 52

Tabla 2-29. Ejemplos de valores intermedios múltiplos de PI en el problema 4

La maestra del primer ejemplo restó el banderazo, y después tabuló de dos en dos la distancia en kilómetros hasta llegar a 10 kilómetros y de ocho en ocho el costo por kilómetros recorridos. Luego, expresó que se suma el banderazo.

En el segundo ejemplo, el maestro tomó el primer par de valores de la tabla, y sin restar el banderazo, lo duplicó dos veces, y luego, probablemente calculó el costo de 10 kilómetros, sumando los costos respectivos de 2 y 8 kilómetros.

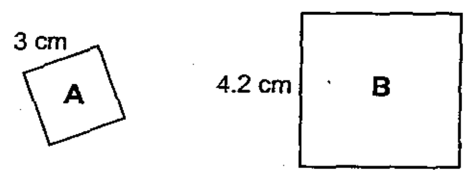
En Resumen

En este primer problema que no es de proporcionalidad, **cuatro** de los seis maestros que contestaron equivocadamente, **no restaron el banderazo** al inicio, es decir, procedieron como si las magnitudes de la tabla representaran una relación de proporcionalidad. Sin embargo, tres de estos cinco sí sumaron el banderazo al final, o sea, sí tenían presente ese valor. Esto tal vez signifique que estos maestros interpretaron que los costos de la tabla no incluían el banderazo. Podemos decir entonces que la mayoría de los maestros reconoció el papel que jugaba el costo fijo del banderazo, y lo consideró a la hora de resolver, pues 53 de los 55 maestros que contestaron correctamente realizaron la resta en el inicio.

Veamos ahora los resultados en el grupo de problemas difíciles.

Problema 8

¿El cuadrado B es un agrandamiento a escala del cuadrado A?



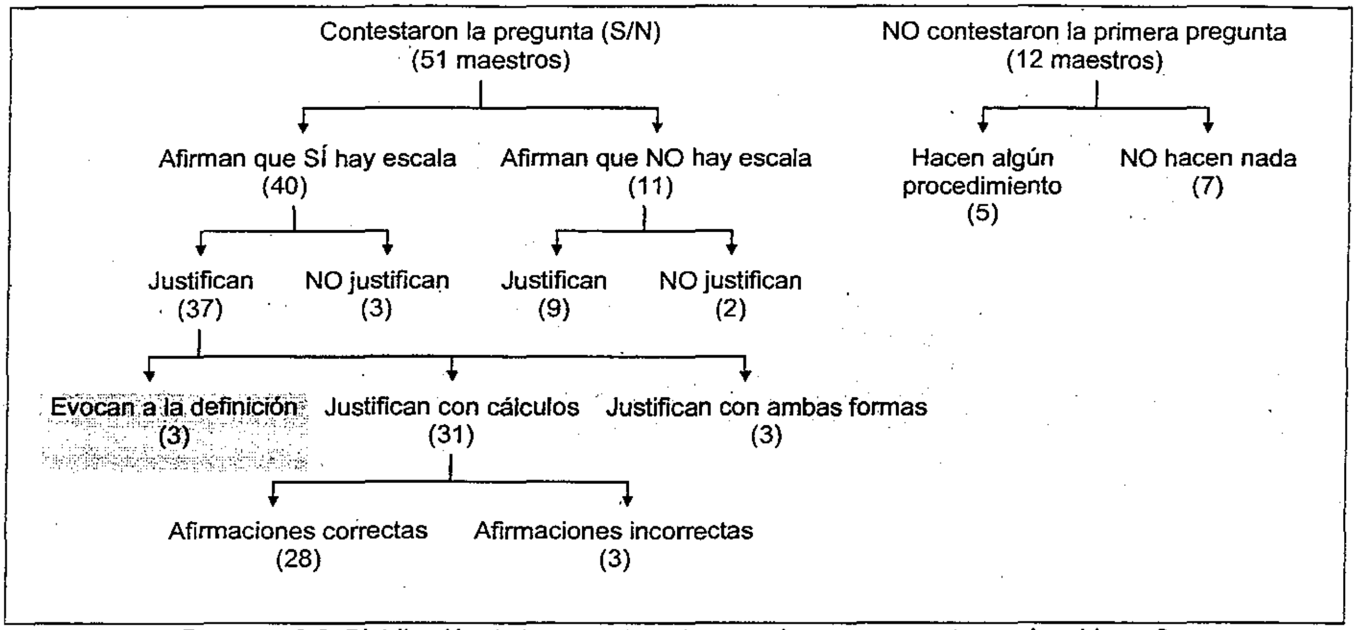
Respuesta: Sí / No
Justifique su respuesta:

Este problema puede contestarse sin necesidad de realizar cálculos numéricos, como lo hicieron algunos maestros.

Las magnitudes relacionadas son las longitudes de los lados de ambos cuadrados. Tanto las medidas en centímetros de los lados del cuadrado B como el factor de escala son números no enteros.

La mayoría de los maestros consideró que la dificultad para resolver este problema sería regular para los alumnos de primero de secundaria y que aplicarían el Valor Unitario para contestarlo. También dijeron que ellos usarían el mismo procedimiento si tuvieran que enseñarlo en clase.

Para las respuestas correctas sólo consideramos quienes contestaron "sí" a la pregunta. El siguiente esquema muestra el conjunto de tipos de respuesta que dieron los maestros:



Esquema 2-2. Distribución de los maestros de acuerdo a su respuesta en el problema 8

En total, fueron 40 maestros (63 por ciento) los que afirmaron que el cuadrado B era un agrandamiento a escala del cuadrado A, mientras que otros 11 lo negaron y 12 no respondieron. Cinco de estos últimos 12 intentaron hacer algún procedimiento, pero no lograron responder.

Los que dicen que SÍ hay escala

Evocan a la Definición de Cuadrado

De los 40 maestros que afirmaron que había escala entre los dos cuadrados, sólo tres no justificaron su respuesta y, de los 37 restantes **sólo tres** maestros aludieron a la Definición de Cuadrado, sin hacer ningún cálculo:

> *"Sí, porque son cuadrados, figuras regulares. Son proporcionales por definición" (Folio 24)*
>
> *"Sí, porque ambos son cuadrados y las medidas de todos sus lados correspondientes son proporcionales" (Folio 42)*
>
> *"Sí, porque se agranda en igual proporción todos los lados" (Folio 29)*

Ésta es la justificación más adecuada para este problema, es independiente de las medidas que tengan los lados de los cuadrados, ya que los lados de cualesquiera dos cuadrados siempre serán proporcionales por tener sus cuatro lados iguales, y por tanto no se requiere de un procedimiento numérico.

Evocan a la Definición de Cuadrado y hacen cálculos

Otros **tres** maestros justificaron su afirmación recurriendo a la definición, pero además, calcularon la razón en juego:

> *"Sí, ya que ambas son simplemente cuadrados y la medida de B tiene un incremento de 1.4 en relación de la primera"* (Folio 39)
>
> *"Sí, se puede encontrar una constante de proporcionalidad entre los lados de cualquier pareja de cuadrados"* (Folio 54)
>
> *"Sí, no necesariamente sus medidas deben estar en números enteros"* (Folio 10)

Justifican con cálculos[72]

Los 31 maestros restantes justificaron la afirmación de la escala haciendo alusión a algún cálculo obtenido de un procedimiento. Tres de ellos aplicaron procedimientos incorrectos, y por tanto dieron afirmaciones incorrectas. Veamos cada caso.

<u>*Afirmaciones correctas*</u>

La mayoría de los 28 maestros que justificaron correctamente, aludió en su argumento a la razón 1.4. Veamos algunos ejemplos:

> *"Sí, porque la razón es 1 → 1.4"* (Folio 34)
>
> *"Sí, porque cada lado se multiplicó x 1.4"* (Folio 15)
>
> *"Sí, porque todos los lados aumentaron en la misma proporción con el factor 1.4"* (Folio 12)
>
> *"Sí, la figura B es 1.4 veces más grande"* (Folio 17)
>
> *"Sí, mantiene una constante de proporcionalidad de 1.4"* (Folio 26)

Estos maestros parecen no darse cuenta de que no importa cuánto valga el factor constante, o de que en este caso no es necesario calcularlo para saber que existe. Los procedimientos que utilizaron fueron:

Valor Unitario (VU)	**Regla de Tres (RT)**	**Procedimiento Algebraico**[73] **(PA)**
$\begin{array}{r} 1.4 \\ 3\overline{)4.2} \\ 0 \end{array}$ 1 cm de A es 1.4 cm de B Folio 54	$\begin{array}{r} 3 - 100 \\ 4.2 - x \end{array}$ $4.2 : 3 \longrightarrow \begin{array}{r} 140 \\ 3\overline{)420} \\ 12 \end{array}$ Folio 17	$(3)(x) = 4.2$ $x = \frac{4.2}{3}$ $x = 1.4$ $\begin{array}{r} 1.4 \\ 3\overline{)4.2} \\ 12 \\ 0 \end{array}$ Folio 20

Tabla 2-30. Ejemplos de VU, RT y PA en el problema 8

[72] Es probable que estos maestros fueran inducidos por el formato del cuestionario, ya que al igual que los demás problemas contaba los tres espacios para los procedimientos propuestos.

[73] En este problema sólo se presentó el caso en donde la variable juega el papel de incógnita.

El VU fue el procedimiento que más se usó para justificar la escala de los cuadrados: 23 maestros lo usaron (tres lo usaron en dos ocasiones). La RT y PA fueron usados por dos maestros en cada caso.

El maestro del segundo ejemplo anterior, relacionó los 3 centímetros con 100, probablemente refiriéndose al 100 por ciento, o sea, a la figura original. Con esa relación aplicó RT para 4.2 centímetros y obtuvo 140, justificando que si era un agrandamiento a escala porque "*la figura es 1.4 veces más grande*".

Otros del mismo grupo sólo justificaron expresando la escala en forma de razón (7/5), el porcentaje de aumento (40 por ciento) o de alguna otra forma. Por ejemplo:

> *"Sí, porque el cuadrado B recibe un aumento de 40% con respecto al original"* *(Folio 28)*
>
> *"Sí, porque al dividir la medida del lado del cuadrado B por la medida del lado A y el cociente sea mayor a 1 nos indica que es un agrandamiento"* *(Folio 43)*

En la primera, el maestro señaló el porcentaje de aumento del cuadrado B. Nótese que a diferencia de quienes hablaron del aumento en centímetros (más adelante los veremos), esta forma de expresar el aumento es correcta. En la segunda se explica por qué la transformación es un agrandamiento, en lugar de decir si un cuadrado es escala del otro. Tiene en común con los anteriores el hecho de que no se da cuenta de que hay proporcionalidad independientemente de la característica que observa.

Otros (Ot)

En este apartado ubicamos tres procedimientos distintos a los de la mayoría. Veamos el de un maestro que cuantificó las razones que guardan los lados de un cuadrado con respecto a los de otro, con porcentajes.

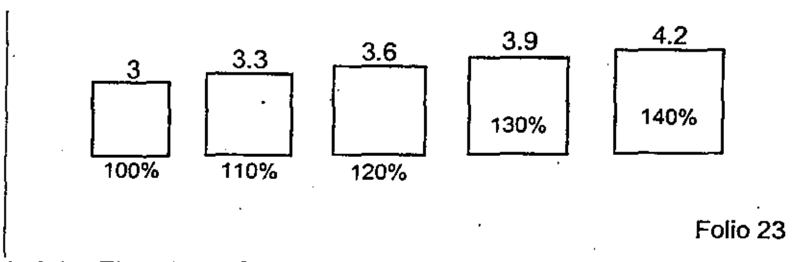


Tabla 3-31. Ejemplo de Otros (Ot) en afirmaciones correctas en el problema 8

El maestro del ejemplo tomó la longitud del cuadrado A como el 100 por ciento e infirió la relación "0.3 centímetros equivale al 10 por ciento". Después, dibujó una secuencia de cuadrados –uno cada vez mayor al otro- y escribió el aumento correspondiente: de 0.3 a 0.3 centímetros, la longitud y; de 10 en 10, el porcentaje. Finalmente, llegó a que la longitud del cuadrado B es 40 por ciento mayor que el A.

Afirmaciones incorrectas

Tres maestros contestaron correctamente que sí había escala entre los dos cuadrados del problema, sin embargo, justificaron mediante una propiedad incorrecta, la *Diferencia Constante*. Afirmaron que la escala existía, ya que los lados del cuadrado B habían aumentado lo mismo, aludiendo probablemente a la diferencia entre las longitudes de los cuadrados A y B: 1.2. Estos fueron sus argumentos:

> *"Sí, porque todos los lados aumentaran lo mismo. Sigue siendo un cuadrado" (Folio 47)*
>
> *"Sí, su tamaño aumentó 12/10 en relación al original" (Folio 50)*

Un maestro no argumentó, solamente restó las longitudes de los lados de los cuadrados.

En este caso, los maestros están atribuyendo una característica errónea al concepto de escala, es decir, consideran que si la diferencia de longitudes de los lados de un cuadrado se conserva, entonces las figuras están a escala.

Los que dicen que NO hay escala

Once maestros negaron la existencia de escala entre los cuadrados presentados en el problema, de los cuales dos no dieron justificación a su respuesta.

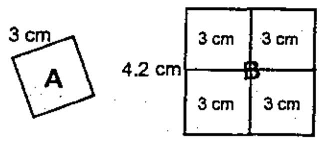
Tres maestros calcularon la diferencia de las longitudes de los lados de los cuadrados (Diferencia Constante), igual que lo hicieron los maestros anteriores, sólo que éstos concluyeron que no hay escala ¿Esperarían que la diferencia fuera un número entero? Uno de ellos realizó lo siguiente:

$\begin{array}{r} 4.2 \\ -\ 3 \\ \hline 1.2 \end{array}$ Visualmente NO **Justificó:** *"No, está desproporcionado. Se ve el dibujo como si fuera lo doble"* Folio 33

Tabla 2-32. Ejemplo de Diferencia Constante en el problema 8

Parece que esta maestra no tomó en cuenta el cálculo (resta) que hizo para contestar, o no solamente, pues luego expresó "visualmente NO" (recordemos que los cuadrados se presentaron dibujados en posiciones distintas), basando su juicio en la percepción y no en los datos que se le brindaron.

En Otros (Ot) –casos aislados-, parece que la escala fue confundida o relacionada con el área de las figuras:

<table>
<tr>
<td>


No porque si el cuadro "A" vale 3 cm. el cuadro "B" tendría un valor de 12 cm.

Justificó:
"No, porque no van los datos de acuerdo al valor de cada cuadrado"

Folio 52
</td>
<td>

$\begin{array}{r} 4.2 \\ -3 \\ \hline 1.2 \\ \times\ 4 \\ \hline 4.8 \end{array}$ Área A = 9 cm^2 Área B = 17.64 cm^2

$\begin{array}{r} 1.2 \\ \times 1.2 \\ \hline 24 \\ 12 \\ \hline 1.44 \end{array}$ $\begin{array}{r} 4.2 \\ \times 4.2 \\ \hline 84 \\ 168 \\ \hline 17.64 \end{array}$ $\begin{array}{r} 17.64 \\ -9 \\ \hline 6.64 \end{array}$

Justificó:
"No, porque no se conserva la misma diferencia"

Folio 46
</td>
</tr>
</table>

Tabla 2-33. Ejemplos de Otros (Ot) en los que dicen que NO hay escala en el problema 8

En el primer caso, el maestro escribió que el valor del segundo cuadrado tenía que ser 12, cuando según la representación que hizo al cuadrado B, la longitud del lado sería 6 centímetros. Quizá confundió la longitud del cuadrado A, 3 centímetros, con su área lo que lo lleva a decir que el cuadrado B formado por cuatro cuadrados A, mediría 12. De acuerdo a la partición gráfica que hace, parece que piensa que el factor escala sólo puede ser un número entero. Si decir 12 fue un error y lo que debió ser era 6 centímetros, de cualquier forma la idea sería la misma.

En segundo caso, la maestra calculó la diferencia de las longitudes de los cuadrados y la elevó al cuadrado: $(B-A)^2$. Luego, la comparó con la diferencia de las áreas (cuadrado de la longitud) de ambos cuadrados: B^2-A^2. Como ambas diferencias no son iguales (no consideró que nunca van a serlo[74]), concluyó que no están a escala. Por eso en la justificación escribió: *"Porque no se conserva la misma diferencia"*.

Finalmente, sólo dos mencionan que no hay proporcionalidad, posiblemente debido a que el factor de escala no es un número entero:

[74] $(B-A)^2 = B^2 - 2AB + A^2 \neq B^2 - A^2$ para $A, B \neq 0$.

"No aumenta en las mismas proporciones" (Folio 9)

"No hay proporción, la escala no es correcta" (Folio 32)

El siguiente es difícil de comprender:

"No, creo que las escalas son entre magnitudes distintas" (Folio 13)

Como en este caso se trató de dos longitudes, para la maestra que hizo la última justificación, ¿eso significó que no se trata de un agrandamiento?

En Resumen

Este problema no resultó sencillo: 29 maestros de 63 o bien no contestaron a la pregunta, o contestaron incorrectamente, o lo hicieron correctamente, pero atribuyeron una idea errónea al concepto de escala, al afirmar que dos cuadrados están a escala si la diferencia de sus lados, son una misma cantidad.

Cabe destacar también, que a excepción de **tres maestros**, los 60 restantes no consideraron el hecho de que, los lados de todos los cuadrados son proporcionales, y por tanto, siempre estarán a escala.

Problema 6

Luisa tiene ocho años. Su hermana tiene lo doble. ¿Cuántos años tendrá la hermana cuando Luisa cumpla 10 años?

Éste también es un problema de valor faltante pero, a diferencia de los problemas 1 y 2, existe una constante aditiva (entera) entre ambas magnitudes por lo que la relación no es de proporcionalidad. Las magnitudes que se relacionan son las edades de Luisa y de su hermana.

Casi la mitad de los maestros opinó que este problema resultaría fácil para los alumnos de primer grado de secundaria. Sin embargo, para los mismos maestros resultó ser un problema difícil, pues sólo 35 respondieron correctamente, 27 contestaron incorrectamente y uno no respondió. Un poco más de la mitad de los maestros propuso dos o tres procedimientos aunque la mayoría repitió alguno. Sólo un maestro no realizó ningún procedimiento.

Los maestros que se dan cuenta de que la relación es aditiva consideraron que el procedimiento que sus alumnos usarían y con el que ellos enseñarían sería el Aditivo (Ad). Por su parte, los maestros que trataron el problema como si fuera de proporcionalidad, consideraron que tanto los alumnos como ellos emplearían al Factor Externo (FE).

Los que reconocen la relación aditiva

Los 35 maestros que respondieron correctamente utilizaron los siguientes procedimientos:

PROBLEMA 6 – Procedimientos Correctos (Aditivos)

	Pc_1	Pc_2	Pc_3	Frecuencia*	Porcentaje**
1. Aditivo	27	13	2	42	73.7
2. Procedimientos Algebraicos	8	5	1	14	24.6
3. No se entiende/No se sabe	0	0	1	1	1.8
Procedimientos en Blanco	0	17	31	48	
Total	35	35	35	105	100.0

Tabla 2-34. Frecuencias de los procedimientos correctos en el problema 6

El procedimiento más frecuente fue el **Aditivo (Ad)**. Un total de 28 maestros lo emplearon, 12 de ellos en dos ocasiones y uno en tres. A continuación presentamos las variantes del procedimiento:

variante 1

Luisa	Hermana
8	16
10	18

Le lleva 8 años la hermana a Luisa
10 + 8

Folio 48

variante 2

	Hoy	Tiempo	Futuro
Luisa	8	2	10
Hermana	16	2	18
Relación	doble		no es el doble

Folio 28

variante 3

	Actual	1 Año	2 Años
Luisa	8	9	10
Hermana	16	17	18

Folio 23

Tabla 2-35. Variantes de Aditivo (Ad) en el problema 6

En el ejemplo de la variante 1, la maestra sumó los ocho años que le lleva la hermana a Luisa, ya que esta diferencia siempre será la misma (constante aditiva). En las otras variantes, se sumaron los años transcurridos, sólo que en la variante 2, el maestro sumó los dos años, y en la variante 3, sumó de uno en uno. Cabe destacar el comentario que hizo el maestro de la variante 2: él escribió que la relación que había entre las edades, después de los dos años transcurridos ya no era el doble.

* Esta cantidad incluye las tres opciones para cada maestro. Por tanto, esta cifra puede no coincidir con el número de maestro que utilizó dicho procedimiento, ya que puede incluir repeticiones de un maestro.
** El porcentaje mostrado no toma en cuenta a los Procedimientos en Blanco.

De los 14 **Procedimientos Algebraicos (PA)**: nueve son de la variante función afín; cuatro de variable como incógnita y; uno más de gráfica. Los primeros realizaron lo siguiente:

función afín
Hermana = x
Luisa = L
$x = L + 8$
$x = 10 + 8$
$x = 18$
Folio 57

Tabla 2-36. Ejemplo de función afín de PA en procedimientos correctos en el problema 6

En el ejemplo, el maestro estableció, mediante una ecuación, la relación entre las edades de las dos hermanas: la diferencia de edades siempre sería la misma.

Para otros procedimientos algebraicos ocurrió algo similar, sólo que aquí se estableció una única variable, y no una relación funcional como en la función afín. Veamos dos ejemplos:

variable como incógnita		
Luisa = 8 = x	Luisa x	hermana $2x$
Hna = 16 = x + 8	$x = 8$	$2x = 16$
		hermana $2x + 2$
Si $x = 10$		18
Hna = 10 + 8 = 18		Folio 60
Folio 24		

Tabla 3-37. Ejemplos de variable como incógnita de PA en procedimientos correctos en el problema 6

En el primer ejemplo se tuvo también la consideración de que la diferencia de edades de las hermanas siempre sería la misma.

Mientras que en el segundo, la maestra hace una anotación ambigua: anota la edad de una hermana como el doble que la edad de la otra, usando la letra x, lo cual sugiere que esa relación es constante, pero la aplica al caso específico en el que una tiene 8 y la otra 16. Para expresar lo que ocurre dos años después, mantiene esa notación ambigua: $2x + 2$. Así, si bien la maestra logra dar la respuesta correcta, hace expresiones algebraicas incorrectas.

La variante de gráfica sólo apareció en una ocasión:

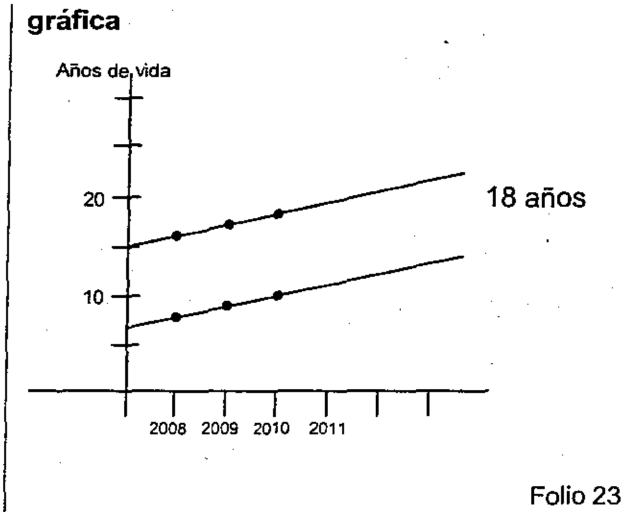


Tabla 2-38. Ejemplo de gráfica de PA en procedimientos correctos en el problema 6

El maestro graficó el tiempo transcurrido en años, contra la edad de las hermanas. La línea de abajo corresponde a la edad de Luisa y la de arriba a la edad de la hermana. La constancia de la diferencia de las edades se expresa en el hecho de que las líneas son paralelas.

Los que trataron el problema como si fuera de proporcionalidad

De los 63 maestros, sólo uno no contestó este problema y 27 contestaron incorrectamente, debido a que procedieron como si se tratara de una relación de proporcionalidad. En la siguiente tabla mostramos los procedimientos que usaron:

PROBLEMA 6 – Procedimientos Incorrectos (Multiplicativos)

	Pc_1	Pc_2	Pc_3	Frecuencia[*]	Porcentaje[**]
1. Factor Externo	14	6	1	21	48.8
2. Regla de Tres	8	4	0	12	27.9
3. Procedimientos Algebraicos	2	3	1	6	14.0
4. Procedimiento Interno	2	1	0	3	7.0
5. No se entiende/No se sabe	1	0	0	1	2.3
Procedimientos en Blanco	1	14	26	41	
Total	28	28	28	84	100.0

Tabla 2-39. Frecuencias de los procedimientos incorrectos en el problema 6

[*] Esta cantidad incluye las tres opciones para cada maestro. Por tanto, esta cifra puede no coincidir con el número de maestro que utilizó dicho procedimiento, ya que puede incluir repeticiones de un maestro.
[**] El porcentaje mostrado no toma en cuenta a los Procedimientos en Blanco.

El procedimiento de **Factor Externo (FE)** fue propuesto por 20 maestros, uno de ellos repitió en dos de sus opciones. Estos fueron algunos ejemplos del procedimiento:

variante 1	variante 2	variante 3
Razonamiento: si tiene lo doble solo multiplica la edad de Luisa por 2 y obtenga la edad de su hermana. Folio 51	Si Luisa tiene 8 años y su hermana tiene el doble; entonces su hermana tiene 16 años. Para cuando Luisa tenga 10 años su hermana seguirá teniendo el doble de edad; entonces su hermana tendrá 20 años. Folio 27	Luisa = 8 años hermana = 16 años Luisa = 10 años hermana = 20 años por cada año que tenga Luisa su hermana tendrá 2 veces más Folio 20

Tabla 2-40. Variantes de FE en el problema 6

La maestra del ejemplo 1, parece considerar que cuando se habla del doble se multiplica por dos. Por otra parte, los ejemplos 2 y 3 son más explícitos en su explicación –incorrecta. Sin embargo, éstas no les fueron suficientes para reflexionar su respuesta, y darse cuenta de su error.

La **Regla de Tres (RT)** la utilizaron 11 maestros –uno repitiendo el procedimiento.

variante 1	variante 2
$\frac{8}{16} = \frac{10}{x}$ $\begin{array}{r} 16 \\ \times 10 \\ \hline 160 \end{array}$ $8\overline{)160}$ = 20, 00, 0 x = 20 Folio 22	8 – 16 10 – $8\overline{)160}$ = 20, 00, 0 20 años * Siempre va a tener el <u>doble.</u> Folio 4

Tabla 2-41. Variantes de la RT en el problema 6

Las variantes de **Procedimientos Algebraicos (PA)**, función lineal y variable como incógnita fueron usados por cinco maestros: tres para la primera y dos para la segunda.

función lineal	variable como incógnita
Luisa x	x = edad de Luisa
Hermana y	$2x$ = edad de la hermana
$y = 2x$ $y = 2(10)$ $y = 20$	Luisa tiene 10 hermana tiene $2(10) = 20$
Folio 11	Folio 38

Tabla 2-42. Variantes de PA en procedimientos incorrectos en el problema 6

En ambos ejemplos, los maestros consideraron que en todo momento la edad de la hermana sería el doble de la edad de Luisa.

Por último, tres maestros usaron una variante de **Procedimientos Internos (PI)**: valores intermedios múltiplos:

Tabla de proporcionalidad

Hermana	Luisa
4	2
8	4
12	6
16	8
20	10

Folio 11

Tabla 2-43. Ejemplo de valores intermedios múltiplos de PI en el problema 6

La maestra señaló que la tabla es de proporcionalidad, pues en todo momento ella consideró que la hermana tendría el doble de edad de Luisa.

En Resumen

Este problema fue difícil de resolver para este grupo de maestros. El haberlo considerado un problema fácil para sus alumnos de primer grado de secundaria se debió a la misma interpretación incorrecta del problema. En total, 27 de 63 maestros respondieron incorrectamente. Esto probablemente refleja un uso no reflexivo de ciertos procedimientos: el hecho de que la mayoría de los problemas que se estaban resolviendo fueran de proporcionalidad, aunado al uso en el texto de la palabra "el doble", los llevó a inferir, que éste también es de proporcionalidad[75]. Otros parecen

[75] Puede decirse que los maestros estarían respondiendo guiándose por indicios del contrato didáctico (Brousseau, 2007)

haber considerado realmente que la edad de la hermana siempre sería el doble de la edad de Luisa, tal como algunos ejemplos mostrados arriba lo expresan.

Estas resoluciones dejan ver cierta fragilidad en el conocimiento que tienen los maestros que las hicieron, acerca de la proporcionalidad, pues ante una variante bastante simple muestran no poder discriminar cuando es pertinente emplear las técnicas, que sin embargo dominan.

Por otro lado, cabe adelantar que de los 35 maestros que contestaron correctamente no todos reconocieron que se trataba de un problema cuyas magnitudes no están relacionadas proporcionalmente, es decir, cuando se les preguntó que si las magnitudes en juego estaban relacionadas proporcionalmente, algunos dijeron que sí. Más adelante abordaremos esto.

Problema 7

Una fotografía se reduce con una escala de $\frac{1}{2}$ y enseguida se reduce nuevamente con una escala de $\frac{1}{4}$. ¿Cuál es la reducción total que sufre la fotografía original?

Este problema es de escalas sucesivas, las magnitudes que se relacionan son las longitudes de la fotografía antes y después de la reducción. No se proporcionan las medidas de las longitudes, el problema está en identificar el factor de escala resultante, después de las dos reducciones expresadas mediante dos fracciones unitarias simples.

De los 63 maestros, 58 contestaron el problema y de los cinco restantes sólo uno hizo un procedimiento, pero no respondió. De los que contestaron, sólo 32 –aproximadamente 50 por ciento del total- lo hicieron correctamente, por lo que resultó ser el problema más difícil.

La cantidad de procedimientos fue baja y la variedad de los mismos también. Sólo 25 maestros propusieron dos o tres procedimientos, mientras que los demás se limitaron a realizar uno. Cabe destacar que aunque encontramos poca variedad de procedimientos, todos fueron exclusivos de este problema.

La mayoría de los maestros consideró que el nivel de dificultad de este problema para alumnos de primer grado de secundaria sería "regular", y que éstos usarían el dibujo como procedimiento. Así mismo la mayoría de los maestros dijo que si tuviera que enseñar a resolver ese problema, usaría el dibujo como procedimiento, aunque algunos señalaron que después les enseñarían el procedimiento del producto de escalas:

"El primero (refiriéndose al dibujo) porque el apoyo del esquema ayuda a la comprensión de lo que sucede y posteriormente el número 2 (producto de escalas) para generalizar situaciones similares" (Folio 28)

"El 1 primero (dibujo) para que lo observen gráficamente y después busquen una generalización mediante el procedimiento 2 (producto de escalas)." (Folio 37)

"El procedimiento 2 (dibujo) y reafirmaría con la aplicación concreta de la primera (producto de escalas)" (Folio 39)

Estos maestros consideran que la resolución a través del dibujo es más sencilla y clara para los alumnos. Sin embargo, también dicen que es importante llegar al producto de las escalas, es decir, alcanzar cierta generalidad.

Los que respondieron correctamente

Veamos los procedimientos que usaron los 32 maestros que contestaron correctamente:

PROBLEMA 7 – Soluciones Correctas

	Pc_1	Pc_2	Pc_3	Frecuencia*	Porcentaje**
1. Producto de Escalas	17	9	1	27	51.9
2. Utilización de Dibujo (confusión longitud/superficie)	9	7	0	16	30.8
3. Asignación de Medidas Arbitrarias	6	2	1	9	17.3
Procedimientos en Blanco	0	14	30	44	
Total	32	32	32	96	100.0

Tabla 2-44. Frecuencias de los procedimientos de las soluciones correctas en el problema 7

El procedimiento más frecuente fue el **Producto de Escalas (PE)**, el cual fue propuesto por 26 maestros (uno lo usó en dos ocasiones). Una maestra, por ejemplo hizo lo siguiente:

$$\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$$

Obtener la cuarta parte de un medio

Folio 7

Tabla 2-45. Ejemplo de PE en el problema 7

* Esta cantidad incluye las tres opciones para cada maestro. Por tanto, esta cifra puede no coincidir con el número de maestro que utilizó dicho procedimiento, ya que puede incluir repeticiones de un maestro.

** El porcentaje mostrado no toma en cuenta a los Procedimientos en Blanco.

La mayoría de los maestros se limitó a realizar la operación aritmética. Sin embargo, hubo algunos que dividieron un medio por cuatro, y aplicaron productos cruzados, como es el caso de este maestro:

$$\frac{1}{2} \div \frac{4}{1} = \frac{1}{8}$$

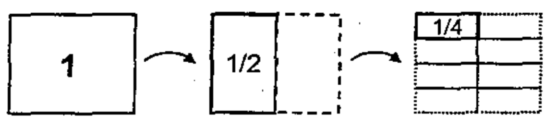
Folio 40

Tabla 2-46. Otro ejemplo de PE en el problema 7

De cualquier forma los incluimos dentro del procedimiento Producto de Escalas (PE).

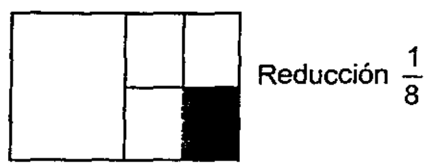
El procedimiento de **Utilización de Dibujo (UD)**, contestando correctamente, fue propuesto por 15 maestros. Ellos hicieron lo siguiente:

variante 1



Folio 12

variante 2



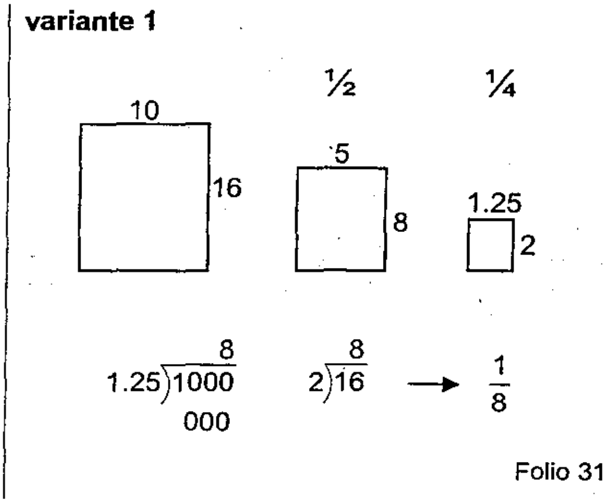
Folio 60

Tabla 2-47. Variantes de UD (confusión longitud/superficie) en el problema 7

Con ambas variantes los maestros llegaron a que la reducción a escala de la fotografía era un octavo. Sin embargo, en ambas consideraron a la reducción de escala como la división –de la superficie de la fotografía- en partes iguales, como si reducir una figura con una escala ½ fuera equivalente a dividir su superficie a la mitad.

No es claro si los profesores que hacen esto utilizan la representación como un apoyo visual para obtener una fracción de fracción, en cuyo caso no hay error, aunque, por tratarse de escalas el procedimiento resulta confuso, o si realmente los profesores consideran que reducir a escala 1/n y partir la superficie entre n es lo mismo, en cuyo caso hay un error conceptual en juego.

El procedimiento de **Asignación de Medidas Arbitrarias (AMA)**, contestado correctamente, fue propuesto por nueve maestros. Veamos dos ejemplos:



variante 2

Escala	Foto
1	8 cm
½	4 cm
¼	1 cm

Es un octavo

Folio 54

Tabla 2-48. Variantes de AMA en el problema 7

En este procedimiento los maestros le asignaron valores arbitrarios a las longitudes de la fotografía. Posteriormente, redujeron las longitudes a la mitad y luego, a la cuarta parte. Finalmente, determinaron la razón que guarda la longitud de la última con respecto a la original.

Los que respondieron incorrectamente

En total, 26 maestros contestaron incorrectamente el problema y cinco no respondieron. Los procedimientos que usaron se consignan en la tabla siguiente:

PROBLEMA 7 – Soluciones Incorrectas

	Pc_1	Pc_2	Pc_3	Frecuencia*	Porcentaje**
1. **Suma de Escalas**	14	1	0	15	44.1
2. **Otros Incorrectos**	7	1	0	8	23.5
3. **Utilización de Dibujo (confusión longitud/superficie)**	3	2	0	5	14.7
4. **Producto de Escalas**	0	1	0	1	2.9
5. **Asignación de Medidas Arbitrarias**	0	1	0	1	2.9
6. **No se entiende/No se sabe**	3	1	0	4	11.8
Procedimientos en Blanco	4	24	31	59	
Total	31	31	31	93	100.0

Tabla 2-49. Frecuencias de los procedimientos de las soluciones incorrectas en el problema 7

* Esta cantidad incluye las tres opciones para cada maestro. Por tanto, esta cifra puede no coincidir con el número de maestro que utilizó dicho procedimiento, ya que puede incluir repeticiones de un maestro.
** El porcentaje mostrado no toma en cuenta a los Procedimientos en Blanco.

Cabe destacar que algunos procedimientos de los anteriores –UD, PE y AMA-, también fueron empleados por maestros que respondieron correctamente, pero ahora se aplicó o incluyó una idea equivocada.

El procedimiento **Suma de Escalas (SE)** fue usado por 14 maestros, de los cuales uno lo empleó en dos ocasiones. Este procedimiento se aplicó de la siguiente manera:

variante 1	variante 2
$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{4+2}{8}=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$ Folio 1	$\frac{1}{2}=50\%$ $\frac{1}{4}=25\%$ 75% del tamaño original Folio 63

Tabla 2-50. Variantes de SE en el problema 7

Los maestros que usan este procedimiento NO se fijaron en que la escala que les resulta reduce menos que cualquiera de las dos escalas de la composición. Esto se debe a que ¿no comprendieron la idea de las dos aplicaciones sucesivas? O bien, ¿no están habituados a revisar la factibilidad de sus resultados?

En **Otros Incorrectos (Ot)** clasificamos los de siete maestros:

variante 1	variante 2	variante 3
$\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{4-2}{8}=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$ Folio 16	$\frac{1}{2}\div 4=\frac{1}{8}$ $\frac{1}{2}-\frac{1}{8}=\frac{8-2}{16}=\frac{6}{16}=\frac{3}{8}$ Folio 51	Primera reducción: ½ Segunda reducción: ¼ $\frac{1}{2}\div\frac{1}{4}=\frac{4}{2}=2$ veces Folio 27

Tabla 2-51. Variantes de Ot en el problema 7

De los cinco maestros que recurrieron a **Utilización de Dibujo (UD)** cometiendo algún error, dos maestros sí reconocieron a la reducción de escala como la reducción de las longitudes de la fotografía, pero al final consideraron la razón que guardan las áreas:

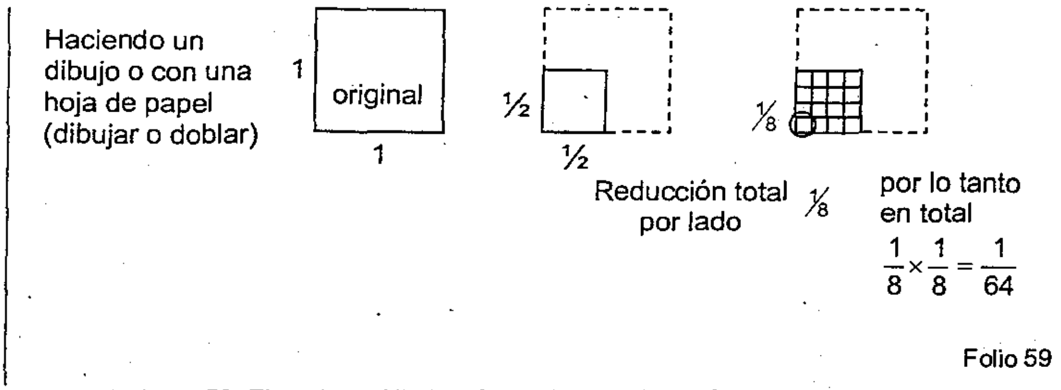


Tabla 2-52. Ejemplo de UD (confusión longitud/superficie) en el problema 7

Otra maestra, en este mismo procedimiento, UD, entendió a la reducción de escala como la sustracción de cierta parte de la fotografía:

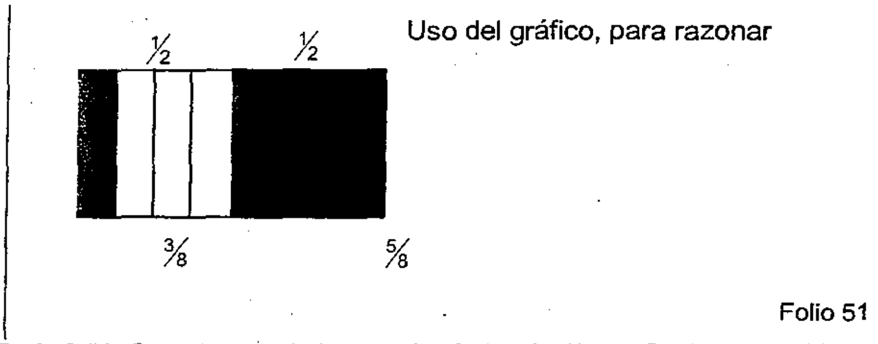


Tabla 2-53. Otro ejemplo de UD (confusión longitud/superficie) en el problema 7

Esta maestra concluyó que la fotografía se redujo a tres octavos, pues es el resultado después de restar la mitad de la superficie de la fotografía (parte sombreada) y un cuarto de la mitad. Los otros dos maestros que contestaron incorrectamente también tomaron la escala como la división del área de la fotografía.

Estos procedimientos dejan ver la existencia de confusión con respecto a qué magnitud se aplican las escalas, superficie o longitud, y, posiblemente también con respecto a la noción de semejanza, intrínseca a la escala y no respetada en los procedimientos que dividen las superficie.

Un maestro incluyó una idea incorrecta al usar el **Producto de Escalas (PE)**. Él realizó lo siguiente:

Multiplicando las proporciones $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{8}$

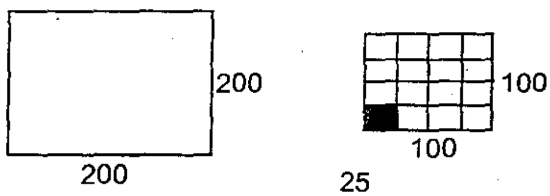
como se trata de un área $\frac{1}{8}\times\frac{1}{8}=\frac{1}{64}$

Folio 59

Tabla 2-54. Otro ejemplo de PE en el problema 7

Después de calcular la escala de reducción total correspondiente a los lados de la fotografía, calculó el factor en que se reduce el área. Al parecer, este maestro considera que un factor de escala aplica a las superficies y no a los lados.

El maestro que se equivocó en el procedimiento de **Asignación de Medidas Arbitrarias (AMA)** realizó algo similar a la variante 1 de la Tabla 2-50. Sin embargo, al igual que el maestro del ejemplo de la Tabla 2-54, también aludió a comparar las áreas de la fotografía original y de la reducción:



$$\begin{array}{r} 25 \\ \times\ 25 \\ \hline 125 \\ 50\ \ \\ \hline 625 \end{array} \qquad \frac{40000}{625}=64 \qquad \begin{array}{r} 64 \\ 625\overline{)40000} \\ 2500 \\ 000 \end{array}$$

Folio 6

Tabla 2-55. Otro ejemplo de AMA en el problema 7

En Resumen

Este fue el problema con menos respuestas correctas (32 de 63).

Las dificultades más frecuentes entre los 31 maestros que cometieron errores fueron 1) la creencia de que la compuesta de dos escalas es la suma de éstas y 2) la confusión con respecto a la magnitud, longitud o superficie, a la que se aplica la escala. Con respecto a esto último, cabe señalar que incluso entre quienes resolvieron bien se manifestó esta confusión en cierto grado: 17[76] dejaron entrever, por los dibujos que usaron, una idea errónea de lo que significa la escala de una figura. Consideraron a la escala ½ como la parte de una superficie que resulta de ser dividida a la mitad.

Cabe destacar que de los 15 maestros, que resolvieron el problema apoyándose en un dibujo (UD) con una idea errónea de escala, 12 dijeron que si tuvieran que resolver ese problema en clase, usarían ese procedimiento (UD), por ser sencillo de explicar y de entender. Es claro que ellos mismos no son conscientes de la dificultad y del error que cometen.

Finalmente, hay que destacar que, si bien fueron el 49.2 por ciento de maestros los que respondieron incorrectamente, si consideramos a los que respondieron bien, pero en el procedimiento mostraron confusión entre longitud y superficie, entonces tendríamos a casi el 70 por ciento de los maestros con dificultad en este problema.

Comentario

Desde el punto de vista de la resolución a los ocho problemas podemos decir que:

En los cinco problemas "fáciles", se manifiesta un dominio por parte del grupo de uno (o más de uno) de tres categorías de procedimientos para resolver problemas de valor faltante típicos: la mayoritaria, con los procedimientos clásicos de Regla de Tres y de Valor Unitario; menos frecuente, los procedimientos que recurren a relaciones Internas, más intuitivos pero menos formales y, finalmente, los que recurren a Procedimientos Algebraicos.

Por su parte, los tres problemas "difíciles" ponen en evidencia límites en el conocimiento de la proporcionalidad en al menos la mitad del grupo de maestros, y esto independientemente de los tipos de procedimientos usados en los anteriores (clásicos, intuitivos, algebraicos):

- *Dificultad para distinguir un problema que no es de proporcionalidad de uno que sí lo es.* De la colección de 8 problemas, en dos casos no había relaciones de proporcionalidad, en el problema 4, de la tarifa de un taxi, la relación es afín, y en el problema 6, sobre las edades de dos personas, en el que la relación es aditiva. Si bien en el primero solamente cuatro maestros dieron un tratamiento de proporcionalidad, en el segundo fueron 27, probablemente influidos por el uso del término "el doble" en la redacción del problema. Ciertamente, esta

[76] 15 maestros resolvieron con UD y dos con PE. Estos dos últimos también hicieron un dibujo.

dificultad puede estar más relacionada con la forma en que los maestros leen los problemas, que con la noción de proporcionalidad.

En la segunda parte de este cuestionario veremos que, cuando se pregunta explícitamente a los maestro si hay o no proporcionalidad, el número de errores aumenta considerablemente, es decir, varios pueden resolver bien pero sin saber si eso que hacen corresponde o no a una relación de proporcionalidad.

- *Dificultad con la noción de escala.* Llama la atención que en los dos problemas (7 y 8) en los que el contexto es la escala de figuras geométricas, varios maestros manifestaron no tener claro a qué magnitud se aplican los factores de escala, si a la longitudes o al área. Por otra parte, el hecho de que el factor entre las medidas de las longitudes no fuese entero parece haber hecho dudar a varios maestros de que hubiese escala.
- *Dificultad con la noción de composición de factores de escala.* Aunque el contexto de la escala parece ser poco comprendido por los maestros, es posible suponer que, más allá de esa dificultad, la aplicación de manera sucesiva dos factores de proporcionalidad les resulta desconocida. Esto es hasta cierto punto grave si se considera que la aplicación sucesiva de factores de proporcionalidad es una de las fuentes de significado (o uno de los campos de aplicación) de la noción de multiplicación.

Se vislumbran otras dificultades que en la segunda parte se expresarán más claramente, en particular, la de considerar que proporcionalidad se caracteriza por una constante aditiva.

2.3 Reconocimiento de la proporcionalidad y su argumentación

Panorama General

Mediante el cuestionario aplicado exploramos, además del conocimiento de procedimientos de resolución, conocimientos teóricos sobre la proporcionalidad, en particular, el de sus propiedades –necesarias y suficientes-, el de los términos y las representaciones, así como el de temas de matemáticas relacionados con la noción.

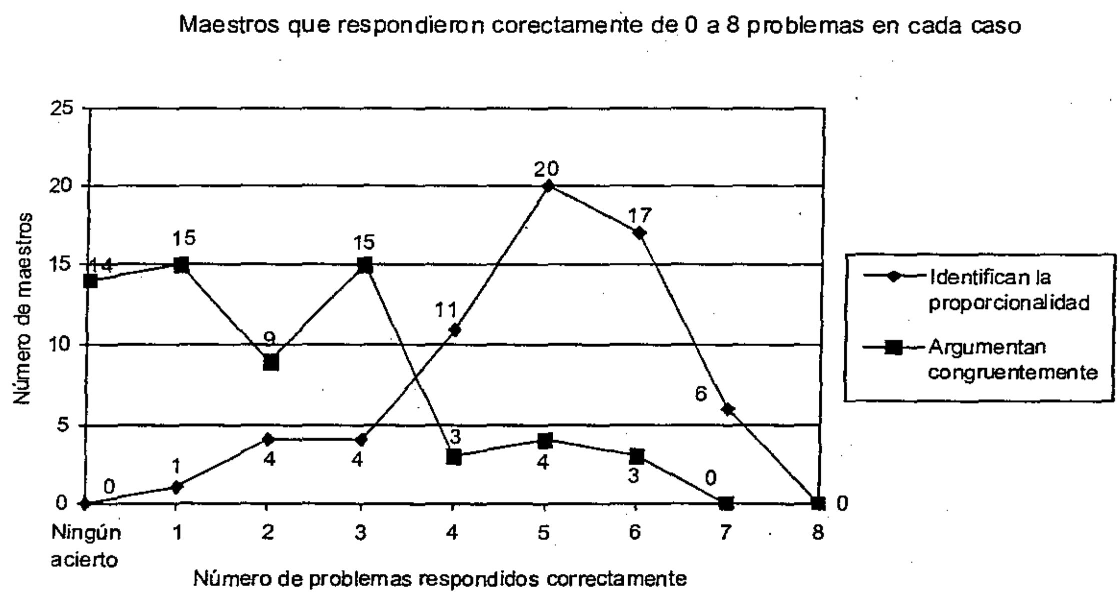
En este apartado abordaremos la identificación de la proporcionalidad en una relación de magnitudes. Para cada problema del cuestionario, una vez que los maestros proponían formas de resolverlo, se les preguntaba acerca de las magnitudes que estaban involucradas y si éstas eran proporcionales:

¿Cuáles son las magnitudes que se relacionan en este problema?

¿Considera que esas magnitudes son proporcionales? S/N Justifique su respuesta

La primera pregunta permitió tener un referente en la interpretación de las respuestas a la segunda pregunta, de la cual nos interesa resaltar las argumentaciones de existencia o inexistencia de la proporcionalidad.

La sola identificación por parte de los maestros de la presencia o ausencia de una relación de proporcionalidad no garantizó una justificación correcta: la mayoría identificó correctamente la presencia o ausencia de la proporcionalidad en 4 a 6 problemas; y en los argumentos, solamente justificó correctamente de 1 a 3 problemas, o bien, no justificó. La siguiente gráfica ilustra lo mencionado:



Gráfica 2-5. Distribución del total de maestros de acuerdo al número de problemas respondidos correctamente en la Identificación de la proporcionalidad y en los Argumentos

Podemos ver también que ningún maestro identificó correctamente si hay o no proporcionalidad en los ocho problemas, así como tampoco nadie argumentó congruentemente más de seis problemas.

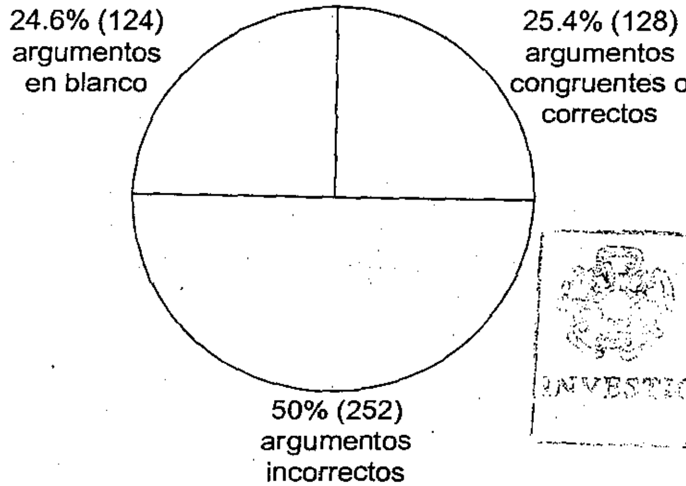
La siguiente tabla muestra dos cosas: por una parte, deja ver que los problemas en los que los maestros fallaron más al identificar si había o no proporcionalidad fueron aquéllos en los que no la había (al parecer, la mayoría tendió a contestar siempre que había proporcionalidad). Por otra parte, la tabla deja ver que los maestros tienen grandes dificultades para argumentar su respuesta: en los dos problemas fáciles, el 1 y el 2, resueltos correctamente por casi todos, menos del 45 por ciento (26 y 28 maestros de 63 respectivamente) logró argumentar correctamente. En los demás problemas, lo hizo entre el tres y el 31 por ciento de los maestros.

	Identifican correctamente la presencia o ausencia de la proporcionalidad	Argumentan congruentemente	Ambas
P_1 (sí hay)	61	26	26
P_2 (sí hay)	60	28	28
P_3 (no hay)	33	20	17
P_4 (no hay)	10	11	6
P_5 (sí hay)	54	10	10
P_6 (no hay)	18	13	13
P_7 (sí hay)	35	2	2
P_8 (sí hay)	37	18	18

Tabla 2-56. Maestros que respondieron correctamente la identificación de la proporcionalidad, los argumentos y ambas en cada problema (n = 63)

Los argumentos se clasificaron en función de la congruencia que mantuvieron con lo que se contestó a la pregunta de si hay o no proporcionalidad. Se consideraron correctos cuando lo afirmado era correcto de acuerdo al modelo de proporcionalidad y al contexto de la situación. Así por ejemplo, un maestro contestó que en las magnitudes del problema 4 (tarifa de taxi, con "banderazo") sí había proporcionalidad, lo cual es incorrecto, pero en la justificación hizo explícito que esto era así si no se toma en cuenta el banderazo, sino sólo el costo por kilómetro, dando así un argumento congruente. La situación anterior sólo se presentó en los problemas 3 y 4. Por esta razón, en estos problemas existe una diferencia entre la cantidad de argumentos congruentes y los que contestaron correctamente ambas tareas (identificar si hay o no proporcionalidad y justificar), y no misma cantidad como en los demás problemas.

Finalmente, de un total de 504 argumentos solicitados (uno por problema: ocho por cada uno de los 63 maestros) se obtuvo el siguiente resultado:



Gráfica 2-6. Distribución de los argumentos de los ocho problemas

Estas cifras quedan muy por debajo de las alcanzadas en la resolución de los problemas, en donde si bien solamente el 30 por ciento de los maestros pudo resolverlos todos (Gráfica 2-2), el 90 por ciento pudo resolver al menos cinco de los ocho problemas (Tabla 2-4). Esta situación expresa con claridad que es en el conocimiento explícito de las propiedades de la proporcionalidad en donde están las principales debilidades. Retomando el concepto de praxeología (Chevallard, 1999), el principal problema está en el bloque tecnológico teórico.

A continuación analizaremos las argumentaciones hechas por los maestros.

Análisis de argumentos congruentes o correctos

Dentro de esta categoría ubicamos a todos los argumentos que, para el caso de afirmar la existencia de proporcionalidad, enunciaran alguna propiedad extramatemática que explique la proporcionalidad, o alguna propiedad necesaria y suficiente de la proporcionalidad, o incluso explicaciones que hacen referencia a alguna forma de resolver (aunque estrictamente esto no es un argumento). Para el caso de negar que las magnitudes fueran proporcionales, se consideraron como congruentes aquéllos que expresan la falta de alguna de las propiedades antes dichas. Además, se incluyeron aquellas justificaciones en las que, a pesar de no ser correcta la identificación de la proporcionalidad, la argumentación es congruente.

Las **propiedades extramatemáticas** de la proporcionalidad son aquéllas que explican su presencia, destacando características físicas de los objetos o procesos del mundo real, aunque siempre subyace una propiedad matemática. Por ejemplo:

> *"Sí, porque se supone que es el mismo peso por pieza y aumenta en las mismas proporciones"* (*Problema 1, Folio 9*)
>
> *"Sí, porque existe una tasa de cambio determinada mediante la cual podemos establecer cuantos pesos le corresponden x cantidad de dólares"* (*Problema 2, Folio 42*)

En el primer ejemplo el maestro afirmó que "aumenta en las mismas proporciones" debido a que los dulces tienen el mismo peso (refiriéndose a masa). Esta es una característica física de la composición de los dulces, es decir, que al tratarse de un mismo tipo de dulces (como se menciona en el problema 1), uno supone que éstos tienen el mismo tamaño (volumen) y la misma masa, pues están hechos de los mismos ingredientes.

En el segundo ejemplo, el maestro hizo referencia a un proceso de la vida cotidiana. Él justificó la presencia de la proporcionalidad en el problema 2, porque la tasa de cambio simplemente estaba determinada, o sea, no variaba, por tanto podía conocer el cambio en pesos de cualquier cantidad de dólares. Probablemente este maestro asoció su respuesta con la experiencia en el mundo real.

Como se puede ver, la referencia a factores del mundo extramatemático supone también una referencia implícita a una propiedad de la proporcionalidad (valor unitario constante).

Las **propiedades necesarias y suficientes** que usaron los maestros para afirmar la presencia o ausencia de la proporcionalidad en sus argumentos fueron:

- La constancia (o no) de la razón externa:

  "Por cada dos kilos, hay 81 dulces y por cada 2 kilos que aumente, así lo harán los dulces (81 piezas)" (*Problema 1, Folio 24*)

- Mismo que el anterior, pero refiriéndose específicamente a la constancia del valor unitario:

  "Hay una relación constante entre pesos por dólar" (*Problema 2, Folio 27*)

  "Los precios por salchicha en c/paq son diferentes" (*Problema 3, Folio 34*)

- Gráfica, línea recta que pasa por el origen (aunque este argumento es incompleto):

  "Bueno aunque el aumento es lineal y en las mismas proporciones según me dijeron tiene que empezar de 0 la grafica para ser proporcionalidad" (*Problema 4, Folio 9*)

- La conservación de las razones internas:

"... si se duplica los kilos se duplican las piezas, si se triplican los kilos se triplican las piezas" (Problema 1, Folio 31)

- La igualdad de los productos cruzados:

"No hay proporción, puesto que los productos cruzados no coinciden" (Problema 3, Folio 22)

Otros argumentos clasificados como congruentes fueron los que justificaron mediante **alguna forma o técnica de resolver**:

"Para obtener la respuesta tiene que encontrar que 6 es el triple de 2 entonces tiene que buscar el triple de dulces" (Problema 1, Folio 48)

"Se puede dividir 72 pesos entre los 6 dólares y se obtiene que cada dólar es de 12 pesos, misma proporción para la segunda razón" (Problema 2, Folio 6)

"Por que se puede resolver por la regla de tres simple" (Problema 5, Folio 44)

En el último ejemplo, el maestro parece suponer que la técnica que aplicó, determinó la proporcionalidad, cuando en realidad es el hecho de que hay proporcionalidad lo que determina a la técnica. Sin embargo, también puede tratarse de una dificultad de redacción.

Análisis de argumentos incorrectos

La categoría de argumentos incorrectos se dividió en cuatro subcategorías: propiedades necesarias pero no suficientes; argumentos incompletos, implícitos o circulares; argumentos falsos y; enunciación de datos u otra cosa fuera de contexto.

En la subcategoría de **propiedades necesarias pero no suficientes** se conformó de 71 argumentos (14.1 por ciento de total de los argumentos), los cuales fueron hechos por 28 maestros.

Las propiedades necesarias pero no suficientes son aquéllas características que los maestros destacaron de una relación de dos magnitudes para justificar la existencia de la proporcionalidad que, a pesar de ser ciertas, no son suficientes para determinar la presencia de la proporcionalidad. Por ejemplo:

- El comportamiento de las magnitudes, cuando una de ellas aumenta o disminuye, la otra también:

"Sí, porque a mayor kg más unidades y viceversa" (Problema 1, Folio 34)

- La condición de unicidad en la relación:

"Sí, para cada valor existe una única respuesta" (2, Folio 17)

- La representación gráfica de una relación de proporcionalidad:

"Sí, porque si lo grafico es una línea recta" (Problema 4, Folio 7)

- La existencia de una relación entre las magnitudes que están en juego en la situación:

"Sí, porque tienen una relación entre sí" (Problema 5, Folio 4)

- Por ser una función:

"Sí, porque es una función" (6, Folio 23)

Todas estas propiedades son ciertas y ocurren para cualquier relación de proporcionalidad. Sin embargo, cualquiera de éstas puede suceder sin que exista la relación de proporcionalidad, es decir, estas propiedades no aseguran la relación de proporcionalidad. Por ejemplo:

- En una relación donde las magnitudes se comportan de forma exponencial ($y = 2^x$), se cumple la primera propiedad descrita arriba "cuando *x* aumenta, *y* aumenta y viceversa". No obstante, la relación no es de proporcionalidad.

- Así también, en una relación descrita por $y = x^2$, se cumple la condición de unicidad, así como la de ser una función, pero esto no la convierte en una relación de proporcionalidad.

- La gráfica de una línea recta cualquiera no representa a las relaciones de proporcionalidad. Las funciones afines ($y = mx + b$) no son de proporcionalidad, y sin embargo su gráfica es una línea recta. Sólo las rectas que pasan por el origen y cuya pendiente sea mayor que cero, son de proporcionalidad.

- En los tres contraejemplos, se plantean relaciones entre las magnitudes, representadas por *x* y *y*, y en ningún caso es de proporcionalidad.

En la subcategoría de **argumentos incompletos, implícitos o circulares** se tuvo un total de 73 argumentos (14.5 por ciento del total de argumentos) escritos por 39 maestros. Se trata de aquellos argumentos que se distinguieron por cierta vaguedad en su forma de justificar. Algunos se limitaron a escribir características poco precisas de la relación de proporcionalidad, considerando quizá, que lo demás fuera obvio. Otros, redundaron utilizando palabras como: proporción, proporcionales, proporcionalmente, proporcionados, etc., también como si estas palabras dieran respuesta a la cuestión de justificar por qué dos magnitudes son o no de proporcionalidad.

Estos son algunos ejemplos de argumentos incompletos o implícitos:

- Las siguientes hacen referencia a una idea de constancia, de uniformidad, pero no precisan qué tipo de constancia está en juego:

"Sí, porque existe una constante" (Problema 1, Folio 40)

"Sí, porque la relación de ambas va cambiando constantemente" (Problema 2, Folio 51)

"No, ya que no aumentan de igual manera" (Problema 3, Folio 28)

"No, porque no es crecimiento uniforme completo" (Problema 4, Folio 24)

"Sí, porque varían igual" (Problema 6, Folio 13)

- La siguiente hace referencia a los principios de la proporcionalidad, sin decir cuáles son estos.

"Sí, ya que cumple con sus principios" (Problema 8, Folio 26)

Estas justificaciones pueden ser interpretadas de varias formas, ya que no está claro, ni explícito que los cambios constantes o aumentos iguales, signifiquen que por cierta cantidad de aumento de una magnitud, la otra aumentará otra cierta cantidad, y esa razón de crecimiento siempre será la misma. Podría ser interpretado simplemente como aumento de cantidades iguales para ambas magnitudes, sin importar los valores iniciales.

Otros argumentos de esta misma subcategoría fueron aquéllos que pueden considerarse circulares:

"Sí, la cantidad de kilos es proporcional a las piezas" (Problema 1, Folio 10)

"Sí, porque va aumentando en forma proporcional" (Problema 2, Folio 37)

"No, no va en proporción el precio de la salchicha" (Problema 3, Folio 48)

"Sí, ya que va variando la tabla constantemente es decir es la misma proporción" (Problema 4, Folio 51)

"Sí, la repartición es proporcional al porcentaje de la proporción que aporto cada una" (Problema 5, Folio 50)

"Sí, porque la edad de una es proporcionalidad a la edad de la otra" (Problema 6, Folio 50)

"Sí, siempre se reducirá en proporciones" (Problema 7, Folio 20)

"Sí, la medida del dibujo va a ser proporcional a la escala" (Problema 8, Folio 15)

Estos maestros utilizan los términos subrayados probablemente sin darse cuenta que eso mismo que escriben es parte de lo que se les pide que expliquen. El término de proporcionalidad, a la vez que es utilizado de manera ambigua, parece ser considerado como algo transparente en sí mismo, como expresando algo que cuyo significado es conocido por todos, y de lo cual podemos hablar sin ambigüedad alguna. No descartamos que algunos, al referirse a "proporcional", piensen en la propiedad necesaria "a más, más".

Por otro lado, en la subcategoría de **argumentos falsos** se agruparon 61 argumentos (12.1 por ciento del total de argumentos), los cuales fueron escritos por 37 maestros.

Los argumentos falsos fueron aquéllos que expresaron ideas incorrectas acerca del modelo matemático que define la proporcionalidad o acerca del contexto de la situación.

Algunos maestros atribuyeron la existencia de proporcionalidad a rasgos particulares que caracterizan la situación, pero no al modelo matemático de la proporcionalidad, por ejemplo:

> *"Sí, visto desde mi óptica de maestra sí porque el número de salchichas en los 2 paquetes son pares" (Problema 3, Folio 63)*
>
> *"Sí, ya que va de una escala mayor a una menor" (Problema 7, Folio 1)*
>
> *"No, porque no se da una escala exacta" (Problema 8, Folio 5)*

Éstos sólo son rasgos particulares que **caracterizan la situación, pero no al modelo matemático de la proporcionalidad**.

Otros argumentos en los que el error es de naturaleza muy distinta fueron encontrados en el problema 4, sobre la tarifa del taxi, en el que está en juego una función afín:

> *"Sí, porque son producto de una función lineal y=mx+b" (Problema 4, Folio 39)*
>
> *"Sí son proporcionales, ya que en cada caso el costo por km. no varía (4 pesos), pero hay que considerar que hay un costo fijo (banderazo)" (Problema 4, Folio 6)*
>
> *"Sí, siempre cobra el mismo precio el kilómetro al total de agrega 7 de banderazo" (Problema 4, Folio 47)*

A diferencia de los ejemplos anteriores, estos argumentos caracterizan bien la situación e identifican bien el modelo matemático implícito, el de la función afín. Sin embargo se equivocan al **atribuir las características de dicho modelo matemático (función afín) al de proporcionalidad**.

En el problema 6, el de las edades de las hermanas, se encontraron dos tipos de errores: los que, como en el caso anterior, identifican bien la relación en juego, en este caso la constante aditiva, y se equivocan al asociar esa relación con el modelo de la proporcionalidad y, por otra parte, los que se equivocan al ver en la situación de las edades una constante multiplicativa, la cual relacionan con el modelo de la proporcionalidad.

Ejemplos del primer tipo de errores son los siguientes:

"Sí, la edad de la hermana siempre va 8 años arriba" *(Problema 6, Folio 34)*

"Siempre va tener 8 años mas" *(Problema 6, Folio 47)*

"Siempre le va a llevar 8 años más" *(Problema 6, Folio 48)*

Los maestros reconocen que la diferencia de edades entre las hermanas siempre será de ocho años (constante aditiva). Sin embargo, afirmaron que las magnitudes eran proporcionales, es decir, **atribuyeron que la existencia de una constante aditiva entre dos magnitudes origina a una relación proporcional.**

Ejemplos del segundo tipo de errores son los siguientes:

"Sí, porque siempre tendrá el doble" *(Problema 6, Folio 1)*

"Sí, siempre existirá una relación de 2:1" *(Problema 6, Folio 27)*

"Sí, por cada año que cumpla Luisa cumplirá 2" *(Problema 6, Folio 44)*

Estos argumentos a pesar de ser **correctos** –los dos primeros- **para el modelo matemático de la proporcionalidad**, en este caso no lo son, ya que **se contraponen al contexto de la situación**. Recordemos que el problema 6 trataba de una relación aditiva.

Estos maestros respondieron que las magnitudes sí eran de proporcionalidad, sin tener presente lo que esto representaba de acuerdo al contexto del problema, es decir, algunos (como los primeros dos ejemplos), quizá extrapolaron la situación real a un modelo matemático -erróneo-, trabajaron con él, y no regresaron a la situación para dar sentido. Otros más graves, como el tercer ejemplo, si volvieron a la situación e hicieron explícita su solución –falsa-, y aún así no se percataron de la solución ilógica que estaban dando.

Estos ejemplos probablemente ocurrieron por la falta de atención al contexto posiblemente provocada por la automatización o mecanización de las técnicas y fórmulas que se vuelven parte de los recursos para solucionar ciertos problemas. Sin embargo, esto no disminuye la gravedad del error suscitado.

En el problema 7 (escalas sucesivas), encontramos otros argumentos falsos que en este caso estuvieron ligados, nuevamente, a la **confusa idea** que hubo **entre la escala de una figura y la reducción de área que ésta provoca**:

"No, porque al reducir la escala, se reduce en mayor proporción la foto original" *(Problema 7, Folio 29)*

"No, el tamaño de la fotografía o el área cada vez es mucho menor, no es la mitad del tamaño anterior, aunque el lado cada vez se reduce a la mitad" *(Problema 7, Folio 59)*

Estos maestros muestran la ambigüedad que tienen del concepto de escala, como ya lo habíamos visto en apartados anteriores, aunque aquí está explícita la confusión. Ellos escribieron que las magnitudes relacionadas en el problema (longitudes de la fotografía) no pueden ser proporcionales, pues el comportamiento del área de la fotografía al reducirse no es igual que al de las longitudes, como si tuviera que ser éste el mismo para que se cumpla la proporcionalidad.

En Resumen

Esta parte del cuestionario pone en evidencia en donde se encuentran los principales puntos débiles del conocimiento de un número importante de maestros: en el bloque tecnológico teórico de la noción de proporcionalidad, específicamente en las propiedades que caracterizan a esta relación, lo cual se confirmará enseguida. Además, se pone de manifiesto una dificultad que va más allá de esta noción específica al tener que ver con la capacidad de identificar y de construir un argumento matemático.

Ejercicio 2[77]: Propiedades necesarias y suficientes de las relaciones de proporcionalidad

En el ejercicio 2 de la segunda parte del cuestionario se abordó, esta vez de manera explícita, el tema de las propiedades de las relaciones de proporcionalidad. El ejercicio consistió en reconocer, para cada una de las seis propiedades descritas: 1) si la propiedad es de una relación de proporcionalidad, 2) si la propiedad es necesaria para que haya proporcionalidad y 3) si es suficiente (ver Anexo B). Ejemplo:

2.1) Cuando crecen los valores de la magnitud 1, crecen los de la magnitud 2.	2.1.1 ¿Es una propiedad de las relaciones de proporcionalidad? □ SÍ □ NO □ NO SÉ 2.1.2 ¿Es una propiedad necesaria? □ SÍ □ NO □ NO SÉ 2.1.3 ¿Es una propiedad suficiente? □ SÍ □ NO □ NO SÉ

Las otras propiedades descritas en el ejercicio fueron las siguientes:

2.2) Cuando un valor de la magnitud 1 crece *n* veces (el doble, el triple, etc.), también lo hace el valor correspondiente en la magnitud 2.

2.3) A la suma de dos valores de la magnitud 1, le corresponde la suma de los valores de la magnitud 2.

[77] Para este ejercicio se tomó en cuenta a 56 maestros, ya que siete dejaron todo el ejercicio en blanco. Probablemente esto se haya debido a falta de tiempo, pues de acuerdo a la lista de orden de entrega del cuestionario, éstos se encuentran en las últimas posiciones.

2.4) El valor unitario es constante.

2.5) Todos los valores de una de las magnitudes se pueden obtener SUMANDO UNA MISMA CANTIDAD a los valores de la otra magnitud.

2.6) Todos los valores de una de las magnitudes se pueden obtener MULTIPLICANDO por UN MISMO FACTOR los valores de la otra magnitud.

En la siguiente tabla se exponen los resultados:

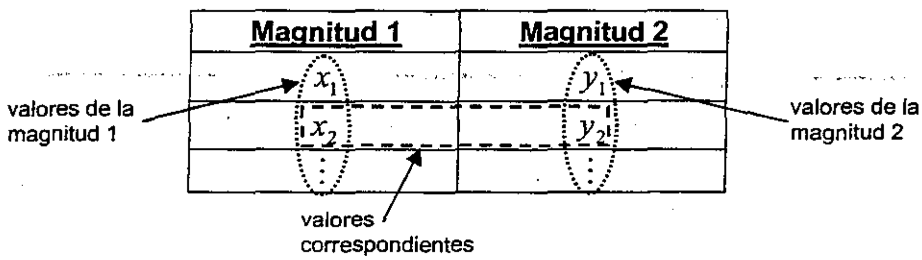
Propiedad	Prop_1	Prop_2	Prop_3	Prop_4	Prop_5	Prop_6
1) **P:** propiedad de relaciones de proporcionalidad 2) **N:** necesaria 3) **S:** suficiente	**PN**	**PNyS**	**PNyS**	**PNyS**	**No P**	**PNyS**
Por lo menos la respuesta a la pregunta 1 es correcta.	53	52	25	46	25	49
Las 3 respuestas son correctas	16	15	7	26	17	27
La primera respuesta es incorrecta	1	1	21	7	22	3
Respuestas incongruentes	2	2	4	1	2	1
Dicen que no saben (en los 3 incisos)	0	0	2	1	3	1
En blanco	0	1	4	1	4	2

Tabla 2-57. Resultados del ejercicio 2 del cuestionario (n = 56)

Respuestas a la primera pregunta: ¿Es una propiedad de las relaciones de proporcionalidad?

De las seis propiedades, la tercera y la quinta fueron las más difíciles, pues menos de la mitad lograron reconocer si esas propiedades eran o no de las relaciones de proporcionalidad. La mayoría de quienes contestaron correctamente en el caso de estas dos propiedades, también lo hicieron en el caso de la 1, 2 y 6, lo que confirma la mayor dificultad de las primeras.

Los errores en la tercera propiedad quizá se hayan debido a que no se entendió la redacción de ésta: *"A la suma de dos valores de la magnitud 1, le corresponde la suma de los valores de la magnitud 2"*, a pesar del esquema que se incluyó como apoyo para diferenciar entre valores y magnitudes:



Por otro lado, llama la atención que aproximadamente la tercera parte de los maestros consideró que la propiedad 5: *"Todos los valores de una de las magnitudes se pueden obtener SUMANDO UNA MISMA CANTIDAD a los valores de la otra magnitud"*, perteneciera a las relaciones de proporcionalidad, en otras palabras, consideraron que las funciones afines con razón de cambio igual a uno: $y = x + b$ son de proporcionalidad. De esos 22 maestros que afirmaron lo anterior, 13 también lo hicieron en el problema 6 –el de las edades de las hermanas- el cual aborda una función de este tipo $y = x + 8$, pero los otros nueve, no. Esto último no es necesariamente una incongruencia, pues los marcos en los que se formulan las preguntas son completamente distintos, en un caso se trata de resolver un problema concreto poniendo en juego implícitamente propiedades, en el otro se trata de la formulación explícita de una propiedad.

Las respuestas a las tres preguntas ¿Es una propiedad de las relaciones de proporcionalidad? ¿Es una propiedad necesaria? ¿Es suficiente?

La segunda línea de la tabla 2-57 muestra el número de maestros que respondieron correctamente <u>a las tres preguntas</u>. Puede verse que este número disminuye fuertemente en comparación con los que contestaron bien la primera pregunta.

Las nociones de "propiedad necesaria" y "propiedad suficiente", como veremos, resultaron confusas para la mayoría de los maestros.

Reconocer que la propiedad 1 ("a más, más") sólo es una propiedad necesaria, pero no suficiente en las relaciones de proporcionalidad pareció ser un problema para los maestros, esto ya lo habíamos observado en la parte anterior, en la que numerosos maestros argumentaron la proporcionalidad mediante dicha propiedad.

En la propiedad 2 ("al doble, el doble; al triple..."), la dificultad fue en reconocer que además de ser necesaria, es suficiente. Lo mismo sucedió en la propiedad 3 (isomorfismo aditivo). No obstante, esto ocurrió menos para las propiedades 4 y 6, las cuales hacen referencia al valor unitario y a la constante multiplicativa, respectivamente. Quizá esto indica que, hoy en día, estas últimas propiedades son más conocidas que las otras, las cuales aluden a las relaciones internas y están vinculadas con procedimientos de resolución menos formales, más intuitivos.

Esta minoría de maestros pone de manifiesto que hay poca comprensión de lo que significan las nociones de "propiedad necesaria" y "propiedad suficiente". Entre el 12 y 58 por ciento del total de los maestros no lograron responder correctamente a la segunda y tercera pregunta (a la vez), a pesar de haberlo hecho en la primera. Pocos de éstos contestaron que no sabían o dejaron en blanco esas dos preguntas. Los demás probablemente contestaron sin estar seguros o simplemente eligieron al azar.

Otro resultado que acusa la misma incomprensión de la que hablamos, son las contradicciones que encontramos:

- Entre las tres preguntas a una misma propiedad (Incongruentes):

  Algunos dicen que la propiedad descrita NO pertenece a las relaciones de proporcionalidad. Sin embargo, afirman que es una propiedad necesaria o suficiente.

- En una misma pregunta, para dos propiedades descritas:

  Por ejemplo, las propiedades 5 y 6, son "opuestas", es decir, hablan de un mismo patrón de comportamiento, pero la primera alude a una constante aditiva, mientras la segunda a una multiplicativa. Sin embargo, encontramos que 19 maestros reconocen a ambas como propiedades de las relaciones de proporcionalidad.

  Otro ejemplo es el de las propiedades 4 y 6. Ambas aluden a un valor coincidente: valor unitario y constante de proporcionalidad. Hubo 10 maestros que reconocieron a una como propiedad de las relaciones de proporcionalidad y a la otra no.

En Resumen

Se confirman dos errores conceptuales recurrentes:

- pensar que la constante aditiva corresponde a proporcionalidad y;
- pensar que la propiedad de "a más, más" es suficiente.

Además, se manifiestan otros problemas:

- no reconocer explícitamente la propiedad del isomorfismo aditivo, a pesar de ser tan utilizada implícitamente;
- no comprender las nociones de necesario y suficiente.

2.4 El uso de los términos relacionados con la proporcionalidad: Ejercicio 1

Ya hemos visto, al analizar los argumentos de los maestros, que existe una dificultad para expresar las propiedades de la proporcionalidad. Esta dificultad está vinculada con múltiples causas, desde un desconocimiento de las propiedades, un desconocimiento de lo que es un argumento, una dificultad de redacción y de estructura del texto, hasta un uso a veces inadecuado de los términos.

En el ejercicio 1 de la segunda parte del cuestionario se exploró el conocimiento de los maestros respecto de algunos términos en uso que se relacionan con la proporcionalidad (no necesariamente correctos[78]). Los términos tratados fueron: tabla proporcional, conjuntos proporcionales, números proporcionales, coeficiente de proporcionalidad, múltiplo y cociente. Estos términos se presentaron en proposiciones que hacían referencia a una relación proporcional de dos magnitudes. Los maestros debían decir si las proposiciones eran verdaderas, falsas o si no sabían.

Cantidad de plumas	Costo
6	24
9	36
12	48

1.1) La tabla es de proporcionalidad:
1.2) Los conjuntos {6, 9,12} y {24, 36, 48} son proporcionales[79]:
1.3) Los números 6 y 24 son proporcionales:
1.4) Los números 6 y 9 son proporcionales:
1.5) El coeficiente de proporcionalidad es 4:
1.6) El coeficiente de proporcionalidad es 1.5:
1.7) El coeficiente de proporcionalidad es 0.25:
1.8) 24 es múltiplo de 6:
1.9) 9 es múltiplo de 6:
1.10) 1.5 es el cociente de 9 y 6:

Este ejercicio, en comparación con el anterior fue más fácil de contestar para los maestros, pues más del 75 por ciento de ellos respondió con un máximo de tres errores. Los resultados de cada proposición las podemos ver en la siguiente tabla:

[78] Por ejemplo: números proporcionales.
[79] Esta proposición es usual. No obstante presenta cierta ambigüedad, pues los elementos de un conjunto no son elementos ordenados.

	1 V	2 V	3 F	4 F	5 V	6 F	7 V	8 V	9 F	10 V
Correctos	60	54	7	32	56	54	9	60	53	45
Incorrectos	1	5	54	27	5	5	48	0	7	12
No saben	0	1	0	1	0	1	0	0	0	3
En Blanco	0	1	0	1	0	1	4	1	1	1

Tabla 2-58. Resultados del ejercicio 1 del cuestionario (n = 61)

Al parecer las únicas proposiciones que no fueron más fáciles de responder fueron la 3 y la 7. En la proposición 3 se pregunta si un par de números pueden ser proporcionales, ante lo cual la mayoría contestó verdadero. Cabe observar que 29 de estos maestros, en el inciso 4, en el que se pregunta lo mismo pero con otro par de números, contestan ahora negativamente. Parece que la distinción de respuesta de los 29 maestros que respondieron verdadera a la proposición 3, pero falsa a la 4, radicó en el tipo de números: en el primer par, un número es múltiplo de otro (6 y 24); en el segundo no lo es (6 y 9). Estos maestros probablemente consideran que el significado de la palabra "proporcional" es similar al de "múltiplo", es decir, como si fueran sinónimos, sin tener en cuenta que dos números no pueden ser proporcionales, ya que para ello se necesitan al menos cuatro valores de dos magnitudes. Cabe destacar además que, en las proposiciones 8 y 9, las cuales abordan los mismos números que en las proposiciones 3 y 4, pero con el término "múltiplo" en lugar de "números proporcionales", los mismos maestros, a excepción de tres, contestan igual que en la 3 y 4.

Por otro lado, podemos ver la consistencia entre las proposiciones 3 y 8, quienes tomaron como igual "proporcional" y "múltiplo", la diferencia es poca (6). Sin embargo, para las proposiciones 4 y 9 no sucedió lo mismo, 23 maestros respondieron correctamente la proposición 9 (9 no es múltiplo de 6), pero incorrectamente la 4, es decir, afirmaron que 6 y 9 son proporcionales, por lo que estos maestros no consideran como sinónimos a los términos involucrados.

La proposición 7 también tuvo una cantidad alta de errores. Ésta, al igual que la 5 y 6, abordó el término de "coeficiente de proporcionalidad", aunque los errores sólo se encontraron en la 7. Los maestros lograron reconocer al factor que obtiene el costo a partir del número de plumas, el cual es un número entero, 4 (proposición 5); también lograron rechazar al 1.5 como coeficiente de proporcionalidad (proposición 6), pues éste es un factor interno en la tabla; sin embargo, el factor 0.25, que logra pasar del costo al número de plumas, no fue identificado como coeficiente de proporcionalidad (proposición 7).

Quizá este error se debió a que los maestros creen que sólo existe un coeficiente de proporcionalidad, y éste ya había sido identificado. Otra causa adicional podría ser la naturaleza del coeficiente, es decir, que entre un número entero y uno decimal, ellos eligen el entero. También el ordenamiento de las magnitudes en la tabla pudo influir, es decir, en una tabla casi siempre (o siempre) se coloca en la izquierda a los valores de la magnitud independiente, en este caso al número de plumas y, en la derecha a los de la dependiente, el costo. Viéndola de esta manera, los maestros tal vez sólo centraron su atención en el costo, y por tanto, sólo en el coeficiente de proporcionalidad que les hace obtener el costo.

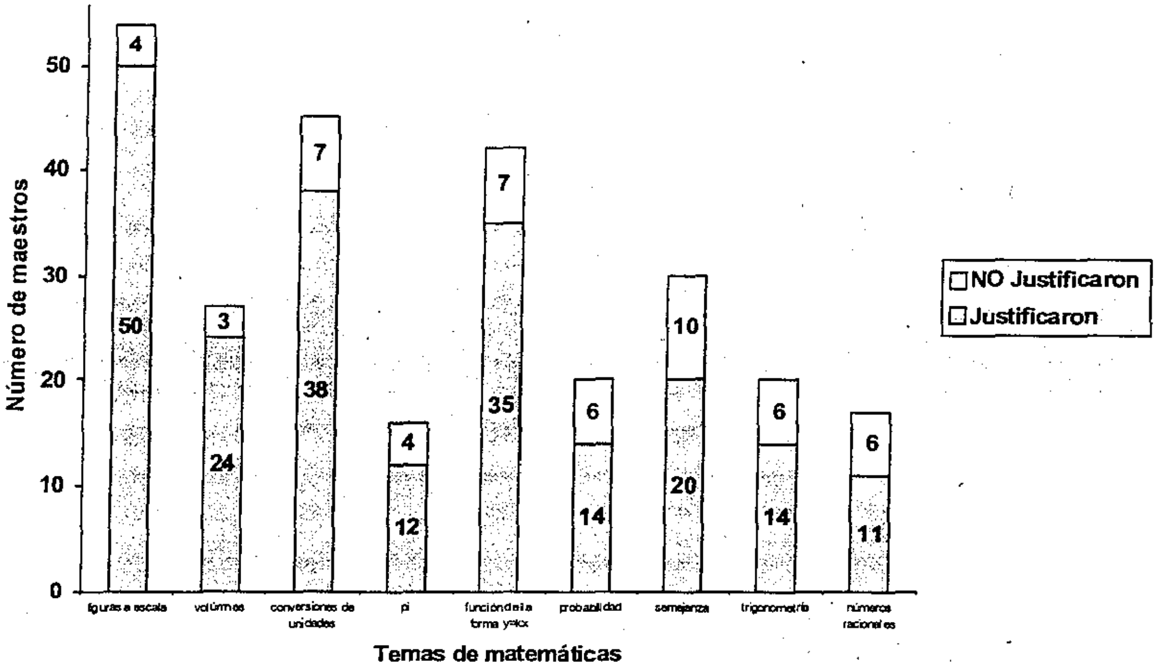
En Resumen

La noción de múltiplo se integra de maneras diversas con la de proporcionalidad, dando lugar a diferentes equívocos. El error más llano es el que atribuye la propiedad de proporcionalidad a dos números cuando uno es múltiplo del otro. Otro error surge de la consideración de que hay proporcionalidad si el factor de proporcionalidad es entero (y por lo tanto los valores de un conjunto son múltiplo de los del otro). Y finalmente, quienes no suponen esta última restricción y admiten que el factor puede ser no entero, se confunden también al aplicar el adjetivo proporcional a la relación entre sólo dos números.

2.5 El conocimiento de los vínculos de la proporcionalidad con otros temas de matemáticas: Ejercicio 3[80]

De una lista de temas de matemáticas, se les pidió a los maestros que eligieran a aquéllos que creyeran que tenía alguna relación con la proporcionalidad y que explicaran por qué. Los temas de la lista fueron: figuras a escala, volúmenes, conversiones de unidades, pi (π), funciones de la forma $y = kx$, probabilidad, semejanza, trigonometría y números racionales. Todos ellos de alguna forma están vinculados con la proporcionalidad (ver Parte 2 del Análisis Previo). Sin embargo, los maestros eligieron con más frecuencia a unos que a otros:

[80] Para este ejercicio no se tomó en cuenta a siete maestros, ya que éstos dejaron todo en blanco. Probablemente esto se haya debido a falta de tiempo, pues de acuerdo a la lista de orden de entrega del cuestionario, éstos se encuentran en las últimas posiciones.



Gráfica 2-7. Número de maestros que relacionan cada tema con la proporcionalidad (n = 56)

Los temas que más vincularon con la proporcionalidad fueron figuras a escala, conversiones de unidades y función de la forma $y = kx$. Lo hicieron al menos dos terceras partes de los maestros.

Con respecto al tema de "Escala" hay algunas cuestiones que llaman la atención. Por una parte, parece lógico que alcance una frecuencia alta de vinculación con la proporcionalidad, pues la relación con estos temas es directa y explícita en los programas de estudio (SEP, 2006b). Es común encontrar ejemplos de figuras a escala cuando se trata el tema de proporcionalidad. Sin embargo, como vimos en la sección 2.2.2, al analizar las resoluciones a los problemas sobre la escala (7 y 8) hay confusiones, una con respecto a la magnitud a la que se aplica la transformación, longitudes, o superficie, otra con respecto a si el factor de proporcionalidad debe ser entero o no. Por lo visto, estas confusiones conviven con la certeza de que la escala es un tema que se relaciona con la proporcionalidad.

Por otra parte, entre los temas aparecen en este ejercicio, varios están muy relacionados con la escala: la semejanza (dos figuras semejantes son también dos figuras a escala una de la otra), la trigonometría (las constantes trigonométricas surgen de las razones internas que se conservan, entre pares de lados de triángulos rectángulos semejantes) y la noción de pi, la cual es otra razón interna invariante en el conjunto de círculos. El hecho de que en estos otros temas la frecuencia de vinculación con la proporcionalidad baje significativamente, parece poner de manifiesto una cierta fragmentación, o **atomización, de los conocimientos** matemáticos del profesor.

Con respecto a los argumentos que usaron para justificar la relación de escala con la proporcionalidad, la mayoría siguen siendo débiles y poco precisos.

- Figuras a escala

"se multiplican o dividen un mismo número" (Folio 9)

"existe un valor constante de reducción o aumento" (Folio 27)

"si incrementa la magnitud de la figura aumenta su proporción" (Folio 35)

"todos sus lados aumentan lo mismo" (Folio 47)

"al incrementar la magnitud de una fig. hay proporción" (Folio 60)

Los pocos argumentos que justifican la vinculación con Pi son más precisos.

- Pi

"es la relación constante (razón) que existe entre la magnitud del diámetro y su perímetro" (Folio 8)

"siempre cabe el mismo número de veces el radio en el círculo" (Folio 9)

"por la relación que tiene con la circunferencia y su radio[81]" (Folio 28)

Los profesores también tienden a vincular la proporcionalidad con el tema de conversiones de unidades. Sus argumentos son ambiguos:

- Conversiones de unidades

"al saber el valor tiene que multiplicar para convertir" (Folio 3)

"porque siempre a una unidad le corresponde solo una de la otra" (Folio 7)

"establece la fórmula de conversión de un sistema a otro" (Folio 8)

"hay una constante" (Folio 26)

Consideramos que es muy positivo que los maestros sí reconozcan que existe un vínculo entre la proporcionalidad con la función lineal, pues éstos constituyen dos temas clave en secundaria cuyo vínculo concierne al tránsito de la aritmética al álgebra. El reconocimiento de este vínculo no significa que pueda instrumentarse en una secuencia didáctica, pero es un punto de partida. Los argumentos nuevamente son del mismo tenor, incompletos, implícitos o aluden a propiedades necesarias, pero no suficientes de las relaciones de proporcionalidad.

- Función de la forma $y = kx$

"para cada valor de la x incrementan de el valor de la y" (Folio 17)

"se establece una igualdad" (Folio 20)

"a mayor es el valor de la variable será mayor el resultado" (Folio 38)

[81] Los dos últimos ejemplos hacen referencia al radio en lugar del diámetro.

Finalmente, pocos maestros muestran un conocimiento de las vinculaciones entre la proporcionalidad y los números racionales o la proporcionalidad y la probabilidad. Pocos o ninguno de los argumentos dados en estos temas fueron correctos. Ejemplos:

- Números racionales

"fracciones equivalentes" (Folio 21)

"las proporciones son razones y se representan con racionales" (Folio 37)

En probabilidad no se encontraron argumentos correctos.

En Resumen

Los maestros conectan la proporcionalidad con la escala, pese a que varios manifiestan cierta incomprensión de esa relación, similarmente ocurre para la conversión de unidades y la noción de función.

Paradójicamente, tienden a no manifestar conexiones con la semejanza, con al trigonometría y con la noción de pi. Tampoco con los racionales y con la probabilidad.

Este resultado sugiere que la noción de proporcionalidad tiende a ser vista como aislada en el currículum, lo que sin duda le resta funcionalidad, y continuidad, en el estudio de los otros temas. Este fenómeno, el de la atomización del conocimiento, lamentablemente, va más allá del tema que aquí nos ocupa, constituyendo una característica del conocimiento matemático que se enseña en secundaria.

Finalmente, podemos apreciar de lo anterior, que no sólo les resultó difícil a los maestros identificar los temas que se vinculan con la proporcionalidad, sino que además, aquéllos que lograron hacerlo, les fue muy complicado expresar por escrito la relación entre éstos.

2.6 Dificultades más frecuentes de los alumnos para resolver problemas de proporcionalidad

En la primera parte del Ejercicio 3, se preguntó a los maestros acerca de las dificultades más frecuentes que tienen los alumnos cuando resuelven problemas de proporcionalidad. Ubicamos las respuestas que dieron los maestros en cinco tipos de dificultades:

Tipo de dificultades	Descripción
Destrezas y conocimientos sobre la proporcionalidad (19 maestros)	Se refieren a la dificultad de: • establecer relaciones entre magnitudes o entre números, • plantear las proporciones: acomodo de los datos, • usar la regla de tres, • encontrar el factor de proporcionalidad (sobre todo si es decimal o fracción),
Destrezas y capacidades generales (17 maestros)	Se refieren a la falta de: • razonamiento lógico, • comprensión lectora, • análisis, • reflexión, • interpretación, • comprensión de los conceptos.
Destrezas y capacidades de matemáticas (13 maestros)	Se refieren a: • realizar operaciones aritméticas: multiplicar y dividir (principalmente decimales y fracciones), • plantear la ecuación, • saber qué procedimiento aplicar, • usar diferentes formas de resolver, • resolver problemas razonados (aplicaciones).
Personales (respecto a los alumnos) **(8 maestros)**	Los alumnos: • no les gusta pensar, • no les gusta las cosas complejas, prefieren las prácticas, • muestran indiferencia, falta de interés, • son distraídos y se les olvida las cosas, • no les parece que es útil, • prefieren mecanizar, • son prácticos, metódicos.
De enseñanza (sólo fueron mencionados por tres maestros) **(3 maestros)**	Se refirió a: • la falta de explicación de los procedimientos y, • la inseguridad del maestro para abordar el tema (por falta de preparación de la clase o de conocimiento), • el cambio en la forma de trabajar de la primaria a la secundaria, • no vieron con profundidad el tema.
Sociales (poco mencionados) **(2 maestros)**	Se refieren a: • la necesidad de hacer los temas más cotidianos a la vida de los alumnos, • el medio socioeconómico de los alumnos,

Tabla 2-59. Tipos de dificultades de los alumnos (n = 55)

Algunos maestros mencionaron más de un tipo[82]. Parece que los maestros consideran que la principal causa de las dificultades de los alumnos, al resolver problemas de proporcionalidad, se deben a cuestiones específicas del tema o de la disciplina, es decir, al manejo de los procedimientos que se usan para resolver estos problemas, así como también a las operaciones básicas.

Pocos maestros atribuyen las dificultades de los alumnos en el tema de la proporcionalidad a factores totalmente externos a los procesos de aprendizaje y de enseñanza (factores sociales), lo cual es positivo, aunque no son tan pocos (17) quienes las atribuyen a deficiencias propias del alumno, con lo cual restan responsabilidad a la enseñanza.

Varios maestros atribuyen las dificultades a deficiencias en destrezas matemáticas generales, como el dominio de las operaciones. Se ha observado ya en otros estudios (Ramírez, 2004) que esta atribución puede ser errónea, y puede reflejar la dificultad de los profesores para identificar las dificultades específicas en el tema.

Algunos profesores sí hicieron referencia a dificultades en aspectos específicos de la proporcionalidad. Éstos refieren a las técnicas (regla de tres) o a pasos de éstas (acomodo de datos). Un maestro destaca la dificultad de usar el factor de proporcionalidad. Cabe observar que ninguno de los maestros identifica la dificultad fundamental, en el tema de la proporcionalidad, que consiste en aplicar una constante multiplicativa y no aditiva.

Finalmente, solamente tres maestros hace alusión a la enseñanza y al papel que juega el maestro en el aprendizaje de los alumnos.

2.7 Perfiles

Hemos presentado los resultados del cuestionario centrando la atención en el desempeño de los maestros frente a cada uno de los problemas o ejercicios que lo conformaron. Ahora presentaremos un análisis enfocado en el desempeño de los maestros considerando algunos resultados del cuestionario en conjunto.

2.7.1 Relaciones entre resolver, explicitar el tipo de relación y argumentar

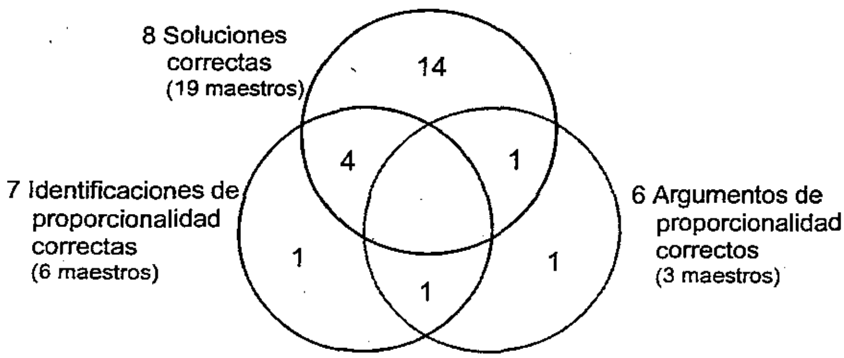
Hablaremos aquí del desempeño de los maestros basándonos en tres apartados: la resolución de los ocho problemas, la identificación del tipo de relación (proporcional o no proporcional) presentada en cada problema y, la argumentación de éstas últimas.

---

[82] Ocho maestros no respondieron a la pregunta, por lo que, en total fueron 55 maestros los que respondieron. Sin embargo, algunos hicieron mención a más de un tipo de dificultades, por eso suman 62.

Elegimos estos tres apartados por dos razones: 1) los tres apartados están dentro de la primera parte del cuestionario –los problemas-, la cual fue contestada por casi todos los maestros, a diferencia de los tres ejercicios de la parte dos, 2) los tres apartados abordaron diferentes aspectos de la proporcionalidad, la resolución de diferentes situaciones (*praxis*), el reconocimiento de estas relaciones en las situaciones y la argumentación de por qué son o no relaciones de proporcionalidad (*logos*).

La resolución de los ocho problemas pareció ser el apartado más sencillo para los maestros, pues de los 63 maestros, 19 obtuvieron todos los problemas correctos. En cambio, en los otros dos apartados ninguno alcanzó el máximo (ocho) de respuestas correctas. En la siguiente gráfica mostramos el número de maestros que obtuvieron la mayor cantidad de respuestas correctas en cada uno de los apartados:



Grafica 2-8. Maestros con la mayor cantidad de respuestas correctas en cada apartado

Podemos darnos cuenta que ningún maestro obtuvo el máximo de respuestas correctas en los tres apartados. Quienes respondieron los ocho problemas correctamente no necesariamente les fue bien al identificar las relaciones de proporcionalidad y menos al argumentar. Los maestros que identificaron correctamente las relaciones proporcionales (o no proporcionales) en siete ocasiones les fue bien en la resolución de los problemas (a lo más dos errores), pero no en la argumentación[83]. Por otro lado, los tres maestros que argumentaron correctamente en seis ocasiones, les fue bien tanto en las soluciones (a lo más dos errores) como en la identificación del tipo de relación (a lo más tres errores). Estos datos confirman la tendencia observada en el grupo en general:

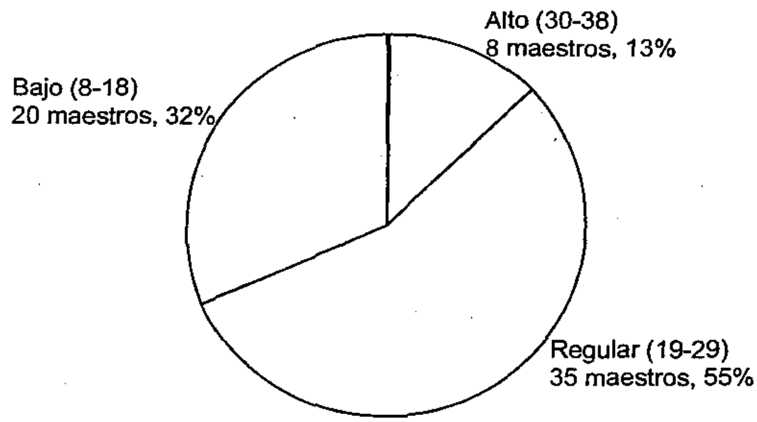
[83] Tuvieron de 1 a 4 argumentos correctos, a excepción de uno que obtuvo 6 argumentos correctos.

Los que resuelven bien los problemas	→	No garantiza identificar bien la relación, ni argumentar bien
Los que identifican el tipo de relación	→	Resuelven bien los problemas, pero no argumentan bien
Los que argumentan bien	→	Resuelven y argumentan bien

Cuadro 2-1. Tendencias del grupo en los apartados

El hecho de que resolver bien los problemas no implica poder identificar el tipo de relación en juego se confirma con el siguiente dato: de los 23 maestros que resolvieron correctamente los problemas más difíciles, el 6 y 7 (y por lo tanto también los demás), 11 afirmaron que las magnitudes del problema 6 (edades) eran proporcionales.

Para tener otro acercamiento al desempeño de todos los maestros en los tres apartados a la vez, y no en uno sólo, ordenamos a los maestros de acuerdo a un puntaje obtenido de la suma de respuestas correctas de los tres apartados, tomando en cuenta la dificultad de cada apartado, esto es, asignando el valor de uno por cada solución correcta, dos por cada identificación correcta y tres por cada argumento correcto. En la siguiente gráfica presentamos los resultados encontrados:



Gráfica 2-9. Desempeño de los maestros en los tres apartados (n = 63)

Podemos ver que sólo ocho maestros presentaron un nivel de desempeño alto, considerando los tres apartados: tres maestras y cinco maestros. No encontramos ninguna correlación significativa con su perfil académico: edades entre 25 y 50 años (tres menores de 32 y cinco mayores de 40); experiencia menor de 10 años como maestras(os) de matemáticas en secundaria (sólo uno tenía 19 años de servicio), aunque como maestras(os) en general, cuatro de ellos tenían más de 20 años de servicio; siete egresados de la Normal Superior, cuatro de ellos tenían además, la maestría en Educación Superior de la misma Normal y, uno con estudios universitarios; la mayoría ha impartido clases en niveles inferiores, sólo un maestro ha dado clases en bachillerato.

El error más frecuente entre estos maestros de desempeño alto fue al identificar el tipo de relación en el problema 4 (taxi), cinco maestros afirmaron que sí era de proporcionalidad, cuando se trataba de una función afín.

Los maestros ubicados en el grupo de Regular cometieron errores principalmente en las soluciones de los problemas 6 (edades) y 7 (escalas sucesivas) y, en identificar el tipo de relación en los problemas 4 (taxi) y 6 (edades). Mientras que sus argumentos correctos (la mayoría entre 1 y 3) los hicieron principalmente en los problemas más fáciles: 1 (dulces) y 2 (cambio de dólares).

La diferencia entre los maestros regulares y los de más bajo desempeño radicó en la cantidad de argumentos correctos, ya que en los otros apartados cometieron errores en los mismos problemas. De los 20 maestros con desempeño más bajo, 13 no argumentaron correctamente ningún problema.

2.7.2 Relaciones entre los procedimientos utilizados y el desempeño logrado

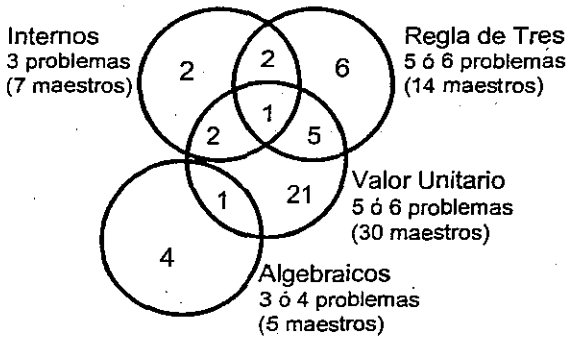
Algunos maestros mostraron cierta tendencia en la elección de sus procedimientos al resolver cada problema. Claro, estamos hablando de aquellos procedimientos que fueron aplicables en más de un problema. La siguiente tabla nos muestra el número de problemas en donde se usó cada uno de estos procedimientos y, el número de problemas en que se usó ese procedimiento por un mismo maestro:

	Cantidad de problemas donde se encontró el procedimiento	Cantidad de problemas donde se encontró el procedimiento en un mismo maestro
Regla de Tres	7[84]	5 ó 6
Valor Unitario	6	5 ó 6
Procedimientos Algebraicos	6	3 ó 4
Procedimientos Internos	5	3 (máximo por maestro)

Tabla 2-60. Procedimientos más frecuentes

[84] Estamos contando al problema 3, aunque en la tabla de procedimientos éste formó parte de otro procedimiento.

Diremos que un maestro tiene una perfil de procedimiento determinado, por ejemplo, algebraico, cuando utilizó dicho procedimiento la cantidad de veces (sin considerar las repeticiones) que indica la tabla anterior (tercera columna). De esta forma, agrupamos a los maestros de acuerdo al procedimiento de uso más frecuente. Esto con la finalidad de identificar tendencias en el tipo de procedimiento utilizado y también de encontrar correspondencias entre el desempeño y el perfil del maestro. Con este criterio, casi el 70 por ciento de los maestros tendieron por alguno(s) de estos perfiles. Veamos cuántos maestros corresponden a cada perfil:



Gráfica 2-10. Perfiles de los maestros de acuerdo a los procedimientos usados (n = 44)

El perfil de Valor Unitario (VU) fue el más popular entre los maestros. En los otros, los grupos de maestros fueron pequeños, a pesar de ser aplicables a casi el mismo número de problemas que el VU. Es interesante observar que si bien la regla de tres es frecuente, lo es menos que el valor unitario. El valor unitario constituye un procedimiento más comprensible que la regla de tres y fue promovido con más fuerza probablemente de la reforma de los años setentas.

Aproximadamente la mitad de los maestros usaron el VU en la mayoría de los problemas en los que se podía aplicar. Cinco[85] tuvieron un desempeño alto (de acuerdo al puntaje) en los tres apartados antes tratados, 17 regular y, ocho bajo.

De los maestros que usaron frecuentemente la Regla de Tres (RT), sólo uno[86] tuvo desempeño alto; ocho, regular y cinco, bajo. Los maestros con este perfil tienden a usar otros procedimientos, pues 8 de 14 también tienen otro perfil. Mientras que la mayoría de los de VU sólo tienen ese perfil.

De los 14 maestros con perfil de regla de tres, siete contestaron incorrectamente el problema 6 (edades) debido a que aplicaron dicha regla, y uno más lo hizo en el

[85] Los cinco maestros pertenecen sólo al perfil de VU.
[86] Éste pertenece sólo al perfil de RT.

problema 4 (taxi). Por otro lado, seis de los siete maestros que se respondieron incorrectamente el problema 6 (edades), también lo hicieron en el problema 7 (escalas sucesivas). Esto probablemente se haya debido a que el conocimiento que tienen acerca del factor de proporcionalidad es restringido, al igual que su conocimiento de las diferentes situaciones en las que se presenta la proporcionalidad. El conocimiento de estos seis maestros podría estar restringido a la regla de tres.

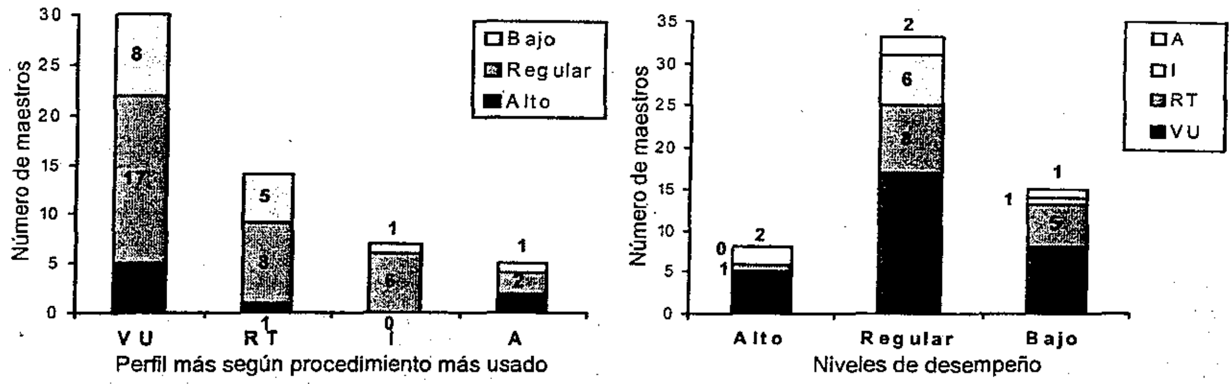
La mayoría de los maestros del perfil Procedimientos Internos (PI) tuvo un desempeño regular, sólo uno tuvo desempeño bajo y, al igual que los maestros del perfil RT, éstos también consideran otros procedimientos. Presentaron errores en las soluciones de los problemas 6 y 7 (edades y escalas sucesivas). En el problema 4 (taxi), a pesar de que todos resolvieron correctamente, sólo uno reconoció que no se trataba de una relación proporcional, los demás consideraron a la función afín como proporcional. En el problema 6 (edades), cinco maestros también dijeron que las magnitudes en juego eran proporcionales, afirmando así que las relaciones aditivas son proporcionales.

Finalmente, de los cinco maestros del perfil Procedimientos Algebraicos (PA), dos[87] tuvieron un desempeño alto; dos, regular y uno, bajo. Los maestros de este perfil no tienden a considerar otros procedimientos. Presentaron algunos errores en el problema 7 (escalas sucesivas) principalmente.

En las siguientes gráficas cruzamos el desempeño y el perfil de los maestros. Aclaramos que los datos no son lo suficientemente numerosos para poder establecer si las relaciones son significativas. Estos cruces quedan entonces como simples motivaciones para buscar posibles relaciones en otros estudios.

En la primera gráfica se resume lo descrito anteriormente (énfasis en el perfil). Mientras que en la segunda, podemos ver a qué perfil pertenecen los maestros de acuerdo a los niveles de desempeño:

[87] Los dos maestros pertenecen sólo al perfil PA.



Gráfica 2-11. Relaciones entre el desempeño y el perfil de los maestros (n = 44[88])

Podemos observar que los maestros con desempeño alto consideraron al Valor Unitario (VU) entre sus procedimientos, pues la mayoría de ellos tuvieron ese perfil. Sin embargo, el perfil Algebraico (A) tuvo la razón más alta de maestros con alto desempeño (2 de 5). Mientras que el perfil Regla de Tres (RT) tuvo la razón más grande de maestros con bajo desempeño (5 de 14), al parecer los maestros de alto desempeño no tienden a usar frecuentemente la RT.

2.7.3 Se insinúa correlación con la edad

De acuerdo a las edades de los maestros hicimos tres intervalos y observamos el desempeño de cada uno:

Intervalos de edades	Cantidad de maestros	Desempeño de los maestros		
		Alto	Regular	Bajo
23 – 34	8	3	2	3
35 – 46	30	4	20	6
47 – 59	25	1	13	11
Total	63	8	35	20

Tabla 2-61. Intervalos de edades y desempeño de maestros (n = 63)

Tres de los ocho maestros –casi el 40 por ciento- que se encuentran en el intervalo de edad más joven tuvieron un desempeño alto. En los otros dos intervalos de edad se tuvo respectivamente el 13 y 4 por ciento de los maestros con desempeño alto. Aunque el 40 por ciento también sucedió para el desempeño bajo en el intervalo más joven, parece que hubo una distribución más equilibrada que en los otros intervalos de edades. En el intervalo de 35 a 46 años, la mayoría tuvo un desempeño regular y, en el

[88] Las cantidades de las gráficas no suman los 44 debido a que hubo maestros con dos o tres perfiles (ver Gráfica 2-10).

intervalo de 47 a 59 años, la mayoría tuvo un desempeño entre regular y bajo. Por tanto, se insinúa que el bajo desempeño está ligado a mayor edad de los maestros. De confirmarse este dato, se descartaría la hipótesis de que los maestros de mayor edad, por haber tenido, con más probabilidad que los jóvenes, conocimiento de la teoría clásica de las razones y las proporciones, habrían logrado mayor capacidad de argumentar la proporcionalidad.

CAPÍTULO III. COMENTARIOS FINALES Y CONCLUSIONES

A continuación presentamos una síntesis de los resultados de la investigación, hacemos una reflexión sobre las limitaciones de la metodología y sobre las prolongaciones posibles del estudio, y terminamos con un comentario sobre las posibles derivaciones de los resultados en el ámbito de la formación de maestros.

3.1 Conclusiones

Primero sintetizaremos lo que el estudio permite saber acerca de los conocimientos de los maestros sobre la proporcionalidad y su didáctica. Posteriormente, hacemos referencia a cuestiones más generales, como la capacidad de argumentar.

Los conocimientos de los maestros acerca de la proporcionalidad

Se manifestó un claro contraste entre los conocimientos que se sitúan en *el bloque técnico práctico* (Chevallard, 1999), esto es, en el nivel de las tareas, relativamente sencillas, y de las técnicas, en el cual la mayoría de los maestros logró un desempeño bueno, y los conocimientos del *bloque tecnológico teórico*, conformado principalmente por las justificaciones de las técnicas, las propiedades explícitas que caracterizan a la proporcionalidad, conocimientos en los cuales los maestros demostraron deficiencias importantes.

Conocimientos del bloque técnico práctico

El conocimiento de diversas técnicas o procedimientos para resolver los problemas del cuestionario pareció ser dominado al menos para los problemas fáciles. El uso de ostensivos didácticos (Bosch, 1994) como las tablas (principalmente), esquemas o dibujos fue frecuente en los problemas[89], aunque fueron presentados –por algunos maestros-, en calidad de tipos de procedimiento cuando en realidad se trata de una variante[90] de un procedimiento, que muchas veces ya habían empleado.

Los problemas del 1 al 5: valor faltante, comparación de razones y reparto proporcional resultaron ser los más "fáciles". Al menos un 87 por ciento de los maestros respondió correctamente y más de la mitad propuso más de un procedimiento para resolver en cada uno de estos problemas.

Los problemas del 6–8, valor faltante que implicaba una relación aditiva, composición de escalas sucesivas y reconocimiento de escala fueron los más difíciles:

[89] En algunos problemas más que en otros.

[90] A excepción del problema 7, en donde el dibujo sí se trata de un procedimiento particular.

menos del 65 por ciento de los maestros contestó correctamente y, menos de la mitad propuso más de un procedimiento para resolver en cada uno de estos problemas.

Con respecto a las técnicas, la Regla de Tres y Valor Unitario fueron los procedimientos más utilizados y mencionados en la resolución de los problemas, aún en los casos en que las variables didácticas favorecían a otros procedimientos, como el uso de razones internas. Llama la atención la persistencia de la centenaria regla de tres, pese a que su marco natural, la teoría clásica de las razones y las proporciones se ha desvanecido del panorama curricular desde hace ya más de 50 años. Se asoman, con poca presencia, otras técnicas que incorporan elementos matemáticos más modernos, en particular, ciertos usos de la noción de función lineal.

Las principales dificultades que se presentaron en los problemas difíciles fueron:

- Dificultad para distinguir un problema que no es de proporcionalidad de uno que sí lo es. En el problema 6 (sobre las edades), casi la mitad de los maestros respondieron incorrectamente, pues lo consideraron de proporcionalidad. Algunos de quienes respondieron correctamente (13 de 35) dijeron que las magnitudes en juego sí estaban relacionadas proporcionalmente, atribuyendo la característica de constante aditiva a las relaciones de proporcionalidad.

  Al resolver el problema 4 (tarifa taxi), si bien la mayoría de los maestros resolvió bien, identificando la cantidad fija que determina que la relación sea afín, solamente diez reconocieron que no se trata de una relación de proporcionalidad.
- Dificultad con la noción de escala. En los problemas 7 y 8, varios maestros manifestaron no tener claro a qué magnitud se aplican los factores de escala, si a la longitudes o al área. Por ejemplo, en el problema 7, consideraron a la escala ½ como la parte de una superficie que resulta de ser dividida a la mitad. En el problema 8, también afirmaron que dos cuadrados están a escala si las diferencias de longitud entre los lados de uno con respecto a los del otro, son iguales y; otros pocos, parecieron tener dificultades con el hecho de que el factor entre las medidas de las longitudes no fuese entero.
- Dificultad con la noción de composición de factores de escala. Consideraron que la composición de escalas es la suma es éstas. Más allá de la dificultad con la noción de escala, parece que la aplicación de factores sucesivos es desconocida.

Conocimientos del bloque tecnológico teórico

Encontramos errores en los argumentos escritos de los maestros para justificar la presencia o ausencia de la proporcionalidad en las situaciones planteadas en el cuestionario. Los principales errores fueron la consideración de que:

- la constante aditiva caracteriza a la proporcionalidad;
- la propiedad de "a más, más" es suficiente para que haya proporcionalidad;
- las relaciones afines o la constante aditiva caracterizan a la proporcionalidad;
- puede haber proporcionalidad entre dos números y esto ocurre cuando uno es múltiplo de otro;
- sólo hay proporcionalidad entre dos conjuntos si el factor multiplicativo es entero,

Además, tienden a no reconocer explícitamente al isomorfismo aditivo como propiedad de la proporcionalidad, a pesar de ser tan utilizada implícitamente,

Otro aspecto que puede ubicarse en este bloque tecnológico teórico, es el de las conexiones entre temas: los maestros manifestaron establecer escasas conexiones de la proporcionalidad con otros temas, lo que sugiere que la noción de proporcionalidad tiende a ser vista como aislada en el currículum, restándole así funcionalidad, y continuidad, en el estudio de los otros temas. Este aislamiento se inscribe en una tendencia escolar a la atomización del contenido que ya ha sido observada por numerosos investigadores (Bosch, 1994; Bolea, 2001; Block, 2001; Comin, 2002; Ramírez, 2004; De Bock, 2007).

Finalmente, un resultado inesperado que llamó fuertemente nuestra atención fue la dificultad que manifestaron los maestros para argumentar por escrito. La mayoría no pudo justificar su respuesta a la pregunta ¿por qué dice que hay o no proporcionalidad? Respondían sin dar una causa, o de forma incompleta, dejando implícita una parte del argumento, o mediante argumentos circulares o ambiguos. Se vio también que las nociones de "necesario", "suficiente", "necesario y suficiente" no eran comprendidas. La dificultad de redacción tampoco los ayuda. Esta situación es preocupante. De hecho, un aspecto innovador de la reforma 2006 para la evaluación de la asignatura es la introducción de competencias, donde la *comunicación* (incluyendo la escrita) y la *argumentación* forman parte, junto con la *resolución de problemas* y el *manejo de técnicas* (SEP, 2006b).

Indicios de algunas correlaciones

Si bien no hicimos un análisis estadístico, pudimos observar indicios de correlaciones, o de ausencia de las mismas.

- Correlaciones entre tareas:
  - Resolver bien los problemas, no garantiza identificar bien la relación ni argumentar bien.
  - Identificar el tipo de relación, implica en cierto grado resolver bien los problemas pero no implica argumentar bien.
  - Quien argumenta bien, tiene tendencia a resolver e identificar bien.

  Es decir, la tarea más compleja, cuyo logro que parece implicar al de las demás, es la de la argumentación.
- Correlaciones entre desempeño y otras variables asociadas a los maestros:
  Los maestros con mejor desempeño[91] no mostraron correlación alguna según su perfil académico (estudios), ni con su predilección por cierto procedimiento. Sin embargo, al agrupar a los maestros en tres intervalos de edades (ver Tabla 2-61), encontramos que de los ocho maestros pertenecientes al grupo más joven, tres habían tenido un desempeño alto, mientras que más de la mitad de los maestros con desempeño bajo, pertenecieron al grupo de maestros más grandes de edad. ¿Acaso esto significa que los maestros jóvenes están mejor preparados para las tareas de la proporcionalidad que los de más edad? Habría que estudiarlo con una población mayor. Nos inclinamos por pensar que esa tendencia no se verificaría, pues la enseñanza de la proporcionalidad ha tendido a desdibujarse del currículum a lo largo de las sucesivas reformas.

Los conocimientos de los maestros acerca de sus alumnos y su enseñanza

Los maestros tendieron a considerar que sus alumnos usarían los mismos procedimientos ellos usaron para resolver los problemas, los cuales a su vez son los mismos que dijeron les enseñarían. Es decir, esperan de los alumnos un comportamiento similar al suyo. Señalemos también que con cierta frecuencia ocurrió que el grado de dificultad que los maestros dijeron que sus alumnos tendrían con los problemas, se vio contrariado por el propio desempeño de los maestros, pues éstos

[91] En la resolución de los problemas, la identificación del tipo de relación (proporcional o no proporcional) presentada en cada problema y, la argumentación.

fallaban en problemas que consideraban fáciles para los alumnos, debido a las dificultades de las que al parecer no son conscientes.

Por otra parte, atribuyen las dificultades que tienen los alumnos al resolver problemas de proporcionalidad principalmente a cuestiones de aprendizaje del alumno, no tanto de enseñanza.

Estos tres aspectos que los maestros perciben de sus alumnos nos hace pensar que la reflexión de las prácticas escolares es una actividad poco explotada entre los maestros.

3.2 Limitaciones metodológicas y prolongaciones posibles.

En esta investigación nos propusimos explorar, analizar y dar cuenta de los conocimientos que los maestros tienen respecto a la noción de proporcionalidad y a algunos aspectos de su enseñanza. Los resultados que el estudio aporta son necesariamente parciales en la medida en que proceden de la aplicación de un sólo instrumento, el cuestionario, por lo que deben ser complementados con resultados que se obtengan con otros acercamientos metodológicos, en particular, mediante entrevistas individuales a profesores, mediante la observación directa de clases y mediante el análisis curricular de las propuestas de enseñanza (que aquí únicamente esbozamos).

También podría valer la pena realizar una segunda aplicación del cuestionario (con algunas adaptaciones), con una población mayor, de manera que mediante un tratamiento estadístico adecuado, se pudieran revisar algunos de los resultados que aquí hemos encontrado.

Cabe señalar que, en esta misma investigación, pusimos en juego un dispositivo complementario al cuestionario individual que mostró funcionar bien: una vez contestado y recogido el cuestionario, se pidió a los profesores participantes que, en pequeños grupos, comentaran las respuestas que habían dado a algunas de las preguntas. Esta técnica, parecida a la de la entrevista colectiva, dio lugar a numerosas reflexiones por parte de los profesores, quienes al argumentar sus puntos de vista, o al intentar cuestionar los de sus compañeros, dejaron ver aspectos más profundos, o más sutiles de sus conocimientos. Lamentablemente, la necesidad de acotar el tiempo de realización del presente estudio, nos impidió incorporar la información recabada de esa manera.

Asimismo, queremos señalar que, aún con las revisiones y el piloteo del cuestionario, al analizar los datos recabados seguimos encontrando algunas deficiencias, sobre todo redacciones insuficientemente claras. Estos problemas fueron indicados en su momento, en el capítulo II.

Finalmente, la experiencia de la investigación nos sugirió posibles modificaciones al instrumento de investigación que aplicamos. Por ejemplo, un detalle importante a considerar es, la longitud del cuestionario en relación a la cantidad total de participantes. En nuestro caso el cuestionario fue aplicado en el contexto de un taller, en el que después de contestarlo se hicieron unas actividades que secuenciaban lo tratado en el cuestionario. El tiempo promedio esperado (obtenido del piloteo) suele extenderse más cuando el grupo es numeroso –como nos ocurrió-, y quienes contestan más rápido suelen inquietarse al esperar al resto. Quizá en un estudio posterior sea más conveniente considerar un cuestionario más corto para un grupo cuantioso o, trabajar con un grupo más pequeño si deseamos analizar casos particulares, probablemente con una entrevista.

3.3 Derivaciones para la formación de maestros

No obstante sus limitaciones metodológicas, los resultados del estudio ponen de manifiesto un problema significativo en la formación matemática y didáctica de los maestros de secundaria. Se logró mostrar, con bastante claridad, que es en el bloque tecnológico teórico en donde están las limitaciones más graves. Junto con ello, se destacó la necesidad imperiosa de una mayor práctica matemática que permita mejorar la capacidad de argumentación de los maestros, además de la necesidad de mejorar la redacción en general. En este sentido, los resultados de este estudio constituyen, pensamos, una referencia útil para la planeación de cursos o materiales didácticos, tanto en la formación de maestros como en los talleres de actualización de los mismos.

Señalemos finalmente que sí existe un pequeño grupo de maestros (13 por ciento) con un nivel alto: resolvieron bien los problemas, mostraron conocer en general más de un procedimiento, pueden identificar cuando una relación es de proporcionalidad y cuando no y, sobre todo, pueden argumentarlo bien, mostrando tener un conocimiento explícito de las propiedades de la proporcionalidad. Maestros con estas características deberían ser identificados para participar en procesos de formación de sus pares.

ANEXOS

A. Cuestionario

Centro de Investigación y de Estudios Avanzados
Unidad Monterrey

Cuestionario para maestros

Este es un cuestionario en el que se tratan algunos aspectos de la Proporcionalidad, tema que se revisa en el programa de matemáticas de primer grado para secundaria. El propósito es recolectar información sobre los conocimientos que los maestros tienen acerca del tema así como de la enseñanza del mismo.

Las respuestas de varios profesores a este cuestionario serán analizadas dentro de un proyecto de tesis. El proyecto también incluye: análisis de programas y de libros de texto. De esta manera, se espera obtener información acerca de la enseñanza de la Proporcionalidad en secundaria.

Hay temas de matemáticas que, por distintas razones, han perdido presencia en los programas escolares. Por ejemplo, la raíz cuadrada o la geometría euclidiana. También es el caso del tema de "Razones y Proporciones" el cual, si bien no desapareció de los programas, ha ido cambiando mucho a lo largo de las reformas curriculares. Para empezar, ya no se le llama "Razones y Proporciones" sino "Relaciones de Proporcionalidad". Los cambios han sido tantos que hoy en día se sabe poco acerca de cómo se enseña realmente el tema, de las dificultades de los maestros para enseñarlo y de los alumnos para aprenderlo.

La información que se obtenga podría ser útil tanto para el desarrollo de programas de estudio de matemáticas de secundaria, como para el desarrollo de cursos para maestros.

Sus respuestas serán tratadas de manera anónima y confidencial sólo con fines de investigación.

De antemano muchas gracias por su colaboración.

Por favor proporcione los siguientes datos:

Edad: ______________________ ☐ Hombre ☐ Mujer

Años de experiencia: ______________________

Instituciones de Educación Superior en que ha estudiado: Estudios concluidos:

a) ______________________ ☐ SÍ ☐ NO

b) ______________________ ☐ SÍ ☐ NO

c) ______________________ ☐ SÍ ☐ NO

Número de años como profesor de matemáticas de secundaria: ______________

Si ha impartido clases en otros niveles, indique en cuáles: ______________

____

En los últimos tres años, ¿ha tomado algún curso de actualización de matemáticas? De ser así, escriba título y fecha:

____

____

____

Funciones que realiza en la institución donde trabaja: ______________

____

Grado(s) en que imparte clase: ______________________

Número de grupos que atiende: ______________________

Si usted es profesor de primer grado de secundaria, conteste; ¿Cuál libro de texto utiliza? (editorial)

____

PARTE 1

Por favor conteste los siguientes problemas y preguntas de manera individual y con la mayor extensión posible, es decir, imagine todas las maneras en que se puede resolver cada problema y explicítelas en los espacios de procedimiento (1, 2 y 3). Es válido hacer 1, 2 ó 3 procedimientos.

Problema 1

En 2 kilogramos de dulces que compró Carlos hay 81 piezas, ¿cuántas piezas habrá en 6 kilogramos de los mismos dulces?

Procedimiento 1

Procedimiento 2

Procedimiento 3

Solución del problema:

1.1

¿Cuáles son las magnitudes que se relacionan en este problema?

____

1.2

¿Considera que esas magnitudes son proporcionales?	SI	NO

Justifique su respuesta:

____

____

1.3

En su opinión, ¿cómo clasificaría este problema para los alumnos de primer grado de secundaria?

a) Fácil

b) Regular

c) Difícil

1.4

En su opinión, ¿qué procedimiento de los que usted registró utilizaría la mayoría de los alumnos de primer grado para resolver este problema?

a) Procedimiento 1

b) Procedimiento 2

c) Procedimiento 3

d) No lo contestaría

e) Otro, explique ____

____

Cualquiera que sea su respuesta, justifique:

____

____

Si usted planteó más de un procedimiento, conteste lo siguiente:

1.5

Si estuviera en el salón de clases y tuviera que resolver este problema con los alumnos ¿qué procedimiento les enseñaría? Y ¿por qué?

____

____

____

Problema 2

En la mañana, José fue a una casa de cambio de divisas y recibió 72 pesos a cambio de sus 6 dólares. ¿Cuántos pesos recibirá si por la tarde desea cambiar 10 dólares con la misma tasa de cambio?

Procedimiento 1

Procedimiento 2

Procedimiento 3

Solución del problema:

2.1

¿Cuáles son las magnitudes que se relacionan en este problema?

____

2.2

¿Considera que esas magnitudes son proporcionales?	SI	NO

Justifique su respuesta:

____

____

2.3

En su opinión, ¿cómo clasificaría este problema para los alumnos de primer grado de secundaria?

a) Fácil

b) Regular

c) Difícil

2.4

En su opinión, ¿qué procedimiento de los que usted registró utilizaría la mayoría de los alumnos de primer grado para resolver este problema?

a) Procedimiento 1

b) Procedimiento 2

c) Procedimiento 3

d) No lo contestaría

e) Otro, explique ____

____

Cualquiera que sea su respuesta, justifique:

____

____

Si usted planteó más de un procedimiento, conteste lo siguiente:

2.5

Si estuviera en el salón de clases y tuviera que resolver este problema con los alumnos ¿qué procedimiento les enseñaría? Y ¿por qué?

____

____

____

Problema 3

María hará una fiesta para sus alumnos. Ha pensado dar de comer hot dog. Así que María va al supermercado a comprar salchichas. Al llegar se da cuenta que hay dos presentaciones de la misma marca: un paquete de 8 salchichas que cuesta 26 pesos y otro de 10 a 35 pesos, ¿Cuál paquete le es más conveniente comprar?

Procedimiento 1

Procedimiento 2

Procedimiento 3

Solución del problema:

3.1

¿Cuáles son los cuatro valores que están en juego en este problema?

____

	SI	NO
3.2 Considerando estos cuatro valores, ¿puede decirse que esas magnitudes son proporcionales?		

Justifique su respuesta:

____

____

3.3

En su opinión, ¿cómo clasificaría este problema para los alumnos de primer grado de secundaria?

a) Fácil

b) Regular

c) Difícil

3.4

En su opinión, ¿qué procedimiento de los que usted registró utilizaría la mayoría de los alumnos de primer grado para resolver este problema?

a) Procedimiento 1

b) Procedimiento 2

c) Procedimiento 3

d) No lo contestaría

e) Otro, explique ____

____

Cualquiera que sea su respuesta, justifique:

____

____

Si usted planteó más de un procedimiento, conteste lo siguiente:

3.5

Si estuviera en el salón de clases y tuviera que resolver este problema con los alumnos ¿qué procedimiento les enseñaría? Y ¿por qué?

____

____

____

Problema 4

En la siguiente tabla se muestra la distancia recorrida en kilómetros y el costo en pesos de cuatro viajes que realizó un taxista durante la mañana:

Distancia (km)	Costo ($)
2	15
5	27
8	39
11	51

Si por la tarde realiza un viaje de 10 kilómetros y el banderazo es de 7 pesos, ¿cuánto cobrará el taxista?

Procedimiento 1

Procedimiento 2

Procedimiento 3

Solución del problema:

4.1

¿Cuáles son las magnitudes que se relacionan en este problema?

____

4.2

¿Considera que esas magnitudes son proporcionales?	SI	NO

Justifique su respuesta:

____

____

4.3

En su opinión, ¿cómo clasificaría este problema para los alumnos de primer grado de secundaria?

a) Fácil
b) Regular
c) Difícil

4.4

En su opinión, ¿qué procedimiento de los que usted registró utilizaría la mayoría de los alumnos de primer grado para resolver este problema?

a) Procedimiento 1
b) Procedimiento 2
c) Procedimiento 3
d) No lo contestaría
e) Otro, explique ____

____

Cualquiera que sea su respuesta, justifique:

____

____

Si usted planteó más de un procedimiento, conteste lo siguiente:

4.5

Si estuviera en el salón de clases y tuviera que resolver este problema con los alumnos ¿qué procedimiento les enseñaría? Y ¿por qué?

____

____

____

Problema 5

Ana y Jorge compraron 60 canicas. Ana cooperó con 80 pesos y Jorge 20 pesos. Si desean repartírselas de acuerdo a lo que cooperaron. ¿Cuántas canicas le tocan a cada uno?

Procedimiento 1

Procedimiento 2

Procedimiento 3

Solución del problema:

5.1 ¿Cuáles son las magnitudes que se relacionan en este problema?

____

5.2

	SI	NO
¿Considera que esas magnitudes son proporcionales?		

Justifique su respuesta:

____

____

5.3 En su opinión, ¿cómo clasificaría este problema para los alumnos de primer grado de secundaria?

a) Fácil

b) Regular

c) Difícil

5.4 En su opinión, ¿qué procedimiento de los que usted registró utilizaría la mayoría de los alumnos de primer grado para resolver este problema?

a) Procedimiento 1

b) Procedimiento 2

c) Procedimiento 3

d) No lo contestaría

e) Otro, explique ____

____

Cualquiera que sea su respuesta, justifique:

____

____

Si usted planteó más de un procedimiento, conteste lo siguiente:

5.5 Si estuviera en el salón de clases y tuviera que resolver este problema con los alumnos ¿qué procedimiento les enseñaría? Y ¿por qué?

____

____

____

Problema 6

Luisa tiene ocho años. Su hermana tiene lo doble. ¿Cuántos años tendrá la hermana cuando Luisa cumpla 10 años?

Procedimiento 1

Procedimiento 2

Procedimiento 3

Solución del problema:

6.1

¿Cuáles son las magnitudes que se relacionan en este problema?

____

6.2

¿Considera que esas magnitudes son proporcionales?	SI	NO

Justifique su respuesta:

____

____

6.3

En su opinión, ¿cómo clasificaría este problema para los alumnos de primer grado de secundaria?

a) Fácil

b) Regular

c) Difícil

6.4

En su opinión, ¿qué procedimiento de los que usted registró utilizaría la mayoría de los alumnos de primer grado para resolver este problema?

a) Procedimiento 1

b) Procedimiento 2

c) Procedimiento 3

d) No lo contestaría

e) Otro, explique ____

____

Cualquiera que sea su respuesta, justifique:

____

____

Si usted planteó más de un procedimiento, conteste lo siguiente:

6.5

Si estuviera en el salón de clases y tuviera que resolver este problema con los alumnos ¿qué procedimiento les enseñaría? Y ¿por qué?

____

____

____

Problema 7

Una fotografía se reduce con una escala de $\frac{1}{2}$ y enseguida se reduce nuevamente con una escala de $\frac{1}{4}$. ¿Cuál es la reducción total que sufre la fotografía original?

Procedimiento 1

Procedimiento 2

Procedimiento 3

Solución del problema:

7.1

¿Cuáles son las magnitudes que se relacionan en este problema?

____

	SI	NO
7.2 ¿Considera que esas magnitudes son proporcionales?		

Justifique su respuesta:

____

____

7.3

En su opinión, ¿cómo clasificaría este problema para los alumnos de primer grado de secundaria?

a) Fácil

b) Regular

c) Difícil

7.4

En su opinión, ¿qué procedimiento de los que usted registró utilizaría la mayoría de los alumnos de primer grado para resolver este problema?

a) Procedimiento 1

b) Procedimiento 2

c) Procedimiento 3

d) No lo contestaría

e) Otro, explique ____

____

Cualquiera que sea su respuesta, justifique:

____

____

Si usted planteó más de un procedimiento, conteste lo siguiente:

7.5

Si estuviera en el salón de clases y tuviera que resolver este problema con los alumnos ¿qué procedimiento les enseñaría? Y ¿por qué?

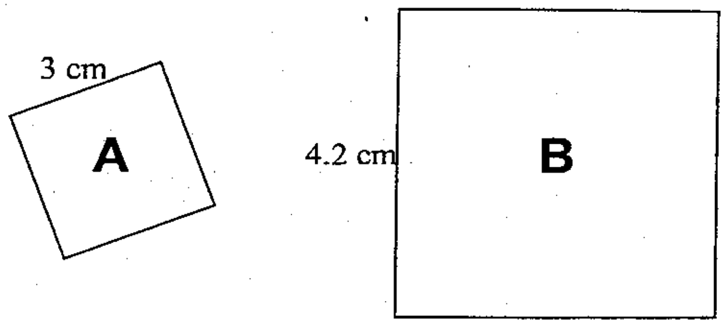
____

____

____

Problema 8

¿El cuadrado B es un agrandamiento a escala del cuadrado A?



Procedimiento 1

Procedimiento 2

Procedimiento 3

	SI	NO
Respuesta:		

Justifique su respuesta:

8.1

¿Cuáles son las magnitudes que se relacionan en este problema?

____

8.2

¿Considera que esas magnitudes son proporcionales?	SI	NO

Justifique su respuesta:

____

____

8.3

En su opinión, ¿cómo clasificaría este problema para los alumnos de primer grado de secundaria?

a) Fácil

b) Regular

c) Difícil

8.4

En su opinión, ¿qué procedimiento de los que usted registró utilizaría la mayoría de los alumnos de primer grado para resolver este problema?

a) Procedimiento 1

b) Procedimiento 2

c) Procedimiento 3

d) No lo contestaría

e) Otro, explique ____

____

Cualquiera que sea su respuesta, justifique:

____

____

Si usted planteó más de un procedimiento, conteste lo siguiente:

8.5

Si estuviera en el salón de clases y tuviera que resolver este problema con los alumnos ¿qué procedimiento les enseñaría? Y ¿por qué?

____

____

____

PARTE 2

Ejercicio 1

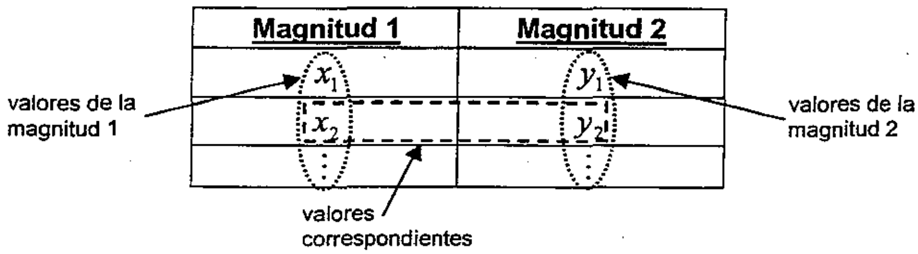
Cantidad de plumas	Costo
6	24
9	36
12	48

De acuerdo con la tabla, conteste si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas:

		V	F	No sé
1.1)	La tabla es de proporcionalidad:			
1.2)	Los conjuntos {6, 9,12} y {24, 36, 48} son proporcionales:			
1.3)	Los números 6 y 24 son proporcionales:			
1.4)	Los números 6 y 9 son proporcionales:			
1.5)	El coeficiente de proporcionalidad es 4:			
1.6)	El coeficiente de proporcionalidad es 1.5:			
1.7)	El coeficiente de proporcionalidad es 0.25			
1.8)	24 es múltiplo de 6:			
1.9)	9 es múltiplo de 6:			
1.10)	1.5 es el cociente de 9 y 6:			

Ejercicio 2

En la tabla pequeña que aparece a continuación se representa una relación entre los valores de dos magnitudes. En la tabla grande que aparece después se enuncian algunas de las propiedades que puede tener una relación. Marque con una palomita la respuesta que crea usted correcta para una relación de proporcionalidad directa.



Propiedades	
2.1) Cuando crecen los valores de la magnitud 1, crecen los de la magnitud 2.	2.1.1 ¿Es una propiedad de las relaciones de proporcionalidad? □ SÍ □ NO □ NO SÉ 2.1.2 ¿Es una propiedad necesaria? □ SÍ □ NO □ NO SÉ 2.1.3 ¿Es una propiedad suficiente? □ SÍ □ NO □ NO SÉ
2.2) Cuando un valor de la magnitud 1 crece n veces (el doble, el triple, etc.), también lo hace el valor correspondiente en la magnitud 2.	2.2.1 ¿Es una propiedad de las relaciones de proporcionalidad? □ SÍ □ NO □ NO SÉ 2.2.2 ¿Es una propiedad necesaria? □ SÍ □ NO □ NO SÉ 2.2.3 ¿Es una propiedad suficiente? □ SÍ □ NO □ NO SÉ
2.3) A la suma de dos valores de la magnitud 1, le corresponde la suma de los valores de la magnitud 2.	2.3.1 ¿Es una propiedad de las relaciones de proporcionalidad? □ SÍ □ NO □ NO SÉ 2.3.2 ¿Es una propiedad necesaria? □ SÍ □ NO □ NO SÉ 2.3.3 ¿Es una propiedad suficiente? □ SÍ □ NO □ NO SÉ
2.4) El valor unitario es constante.	2.4.1 ¿Es una propiedad de las relaciones de proporcionalidad? □ SÍ □ NO □ NO SÉ 2.4.2 ¿Es una propiedad necesaria? □ SÍ □ NO □ NO SÉ 2.4.3 ¿Es una propiedad suficiente? □ SÍ □ NO □ NO SÉ
2.5) Todos los valores de una de las magnitudes se pueden obtener SUMANDO UNA MISMA CANTIDAD a los valores de la otra magnitud.	2.5.1 ¿Es una propiedad de las relaciones de proporcionalidad? □ SÍ □ NO □ NO SÉ 2.5.2 ¿Es una propiedad necesaria? □ SÍ □ NO □ NO SÉ 2.5.3 ¿Es una propiedad suficiente? □ SÍ □ NO □ NO SÉ
2.6) Todos los valores de una de las magnitudes se pueden obtener MULTIPLICANDO por UN MISMO FACTOR los valores de la otra magnitud.	2.6.1 ¿Es una propiedad de las relaciones de proporcionalidad? □ SÍ □ NO □ NO SÉ 2.6.2 ¿Es una propiedad necesaria? □ SÍ □ NO □ NO SÉ 2.6.3 ¿Es una propiedad suficiente? □ SÍ □ NO □ NO SÉ

Ejercicio 3

3.1) En su experiencia como profesor de matemáticas, ¿cuáles son las dificultades más frecuentes que tienen los alumnos para resolver problemas de proporcionalidad? Descríbalo con precisión.

____

____

____

____

3.2) De la siguiente lista de temas de matemáticas, seleccione todos aquéllos que crea que se relacionan con el concepto de proporcionalidad. Explique con precisión en qué consiste la relación para cada uno de los temas elegidos:

3.2.1) ☐ Figuras a escala, *¿Por qué?* ____________________

____

3.2.2) ☐ Volúmenes, *¿Por qué?* ____________________

____

3.2.3) ☐ Conversiones de unidades, *¿Por qué?* ____________________

____

3.2.4) ☐ Pi, *¿Por qué?* ____________________

____

3.2.5) ☐ Funciones de la forma $y = kx$, *¿Por qué?* ____________________

____

3.2.6) ☐ Probabilidad, *¿Por qué?* ____________________

____

3.2.7) ☐ Semejanza, *¿Por qué?* ____________________

____

3.2.8) ☐ Trigonometría, *¿Por qué?* ____________________

____

3.2.9) ☐ Números racionales, *¿Por qué?* ____________________

____

MUCHAS GRACIAS POR SU COLABORACIÓN

B. Condiciones necesarias y suficientes

Si dos proposiciones A y B están relacionadas de forma que una determina a la otra, se dice que existe una condición. En lógica, existen dos tipos de condiciones:

- Condiciones necesarias. Decir que A es necesaria para B, significa que B sólo puede ser verdadera si A lo es, es decir, B no puede ocurrir a menos que A sea verdadera. Por ejemplo: dos magnitudes son proporcionales (B) si existe una relación biunívoca entre las dos magnitudes (A). Por tanto, la relación biunívoca es una condición necesaria para las magnitudes proporcionales.
- Condiciones suficientes. Decir que A es suficiente para B, significa que siempre que A ocurra, B también lo hará, o bien, A no puede ocurrir sin que B ocurra. Por ejemplo: dos magnitudes son proporcionales (B) si existe una constante tal que para cada valor de una de las magnitudes al multiplicarse con esa constante es igual a los valores correspondientes de la otra magnitud (A). Por tanto, la existencia de una constante que tenga ese comportamiento es una condición suficiente para determinar proporcionalidad entre dos magnitudes.

Notemos que el primer ejemplo no podría ser una condición suficiente ya que, existen relaciones biunívocas que no corresponden a las proporcionales, por ejemplo, las funciones afines o las exponenciales. Por otra parte, el segundo ejemplo, también resulta ser una condición necesaria, pues la proporcionalidad de dos magnitudes es verdadera si existe una constante multiplicativa. En este caso se dice que la existencia de la constante multiplicativa es una **condición necesaria y suficiente** para que dos magnitudes sean proporcionales.

Las condiciones necesarias y suficientes para que dos magnitudes sean proporcionales son:

- La existencia de una constante tal que al multiplicarse por cada valor de una de las magnitudes sea igual cada valor correspondiente de la otra magnitud (factor de proporcionalidad).
- Para los múltiplos de un valor de una magnitud corresponden los mismos múltiplos de la otra, es decir, al aumentar al doble una magnitud, la otra también lo hace al doble; al triple, el triple; a la n veces, n veces; etc. (conservación de razones internas o isomorfismo multiplicativo).
- A la suma de cualesquiera dos valores de una magnitud le corresponde la suma de los dos valores correspondientes de la otra (isomorfismo aditivo).

- Los productos cruzados de una proporción formadas por cualesquiera dos pares de valores son equivalentes (teorema fundamental de las proporciones geométricas).
- El valor unitario para cada par de valores es el mismo (valor unitario constante).
- La representación gráfica de las magnitudes es una línea recta que pasa por el origen.

La existencia de cualquiera de éstas determina la proporcionalidad entre dos magnitudes y el resto de las condiciones.

C. Gráficas, Esquemas y Cuadros

D. Tablas

BIBLIOGRAFÍA

Adjiage, Robert y François Pluvinage (2007). "An Experiment in Teaching Ratio and Proportion", *Educational Studies in Mathematics*, 65: 149-175.

Almaguer, Guadalupe, Leticia Rodríguez, Francisco Cantú y Ricardo Rodríguez (2007) *Matemáticas 1*, 2a. ed., México, Limusa.

Anízar, Sabino (1911) *Nociones elementales de aritmética para uso de las escuelas de instrucción primaria elemental*, México, Herrera Hermanos.

Baldor, Aurelio (1973) *Aritmética teórico, práctica*, Guatemala, Cultural Centroamericana, S. A.

Ben-Chaim, David, Yaffa Keret, y Bat-Sheva Ilany (2007) "Designing and Implementing Authentic Investigative Proportional Reasoning Task: the Impact on Pre-service Mathematics Teachers' Content and Pedagogical Knowledge and Attitudes", *J Math Teacher Educ*, 10: 333-340.

Block, David y Ana María Álvarez (1999) "Los números en primer grado: cuatro generaciones de situaciones didácticas", *Educación Matemática*, 11 (1): 57-76.

Block, David (2001) "La noción de razón en las matemáticas de la escuela primaria. Un estudio didáctico", Tesis de doctorado. México. DIE. CINVESTAV. IPN.

Block, David y Silvia García (2006) *Fractal 1 Matemáticas*, 1a. ed., México, SM.

Block, David (2006) "Conocimientos de maestros de primaria sobre la proporcionalidad", ponencia presentada en 19a. Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa, Montevideo, *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 19: 675-680

Bolea, Pilar, Marianna Bosch y Josep Gascón (2001) La transposición didáctica de organizaciones matemáticas en el proceso de algebrización: el caso de la proporcionalidad, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 21 (3) : 247-304

Bosch, Mariana. (1994) La dimensión ostensiva en la actividad matemática. El caso de la proporcionalidad. Tesis de doctorado. España. Universidad Autónoma de Barcelona.

Brousseau, Guy (1981) "Problèmes de didactique des décimaux", *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 2 (3): 37-127. París, La Pensée Sauvage.

Brousseau, Guy (1997) *Theory of Didactical Situations in Mathematics: Didactique des Mathématiques, 1970-1990,* Dordrecht: Kluwer Academic.

Brousseau, Guy (2007) *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas,* Argentina, Libros Zorzal.

Chevallard, Yves (1992) *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado,* Argentina, Aique (Psicología cognitiva y educación).

Chevallard, Yves, Marianna Bosch y Josep Gascón (1997) "Matemáticas, alumnos y profesores. Las matemáticas en el aula", en *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje,* ICE/Universidad Barcelona, Horsori, Barcelona.

Chevallard (1999) El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19 (2): 221-266.

Comin, Eugène (2000) Proportionnalitè et fonction linéaire. Caractères, causes et effets didactiques des évolutions et des réformes Dans la scolarité obligatoire, Tesis de doctorado, Université Bordeaux 1, Francia.

Comin, Eugène (2002) L'enseignement de la proportionnalité à l'école et au collège, *Recherches en Didactique des Mathematiques*, 22 (2, 3): 135-182.

De Bock, Dirk, Wim Van Dooren, Dirk Janssens y Lieven Verschaffel (2007) "A Widespread Phenomenon", en *The Illusion of Linearity*, Springer, pp. 1-19.

Enciclopedia (1982) *Matemáticas para todos. Enciclopedia Universal de Matemáticas*, Vol. 1 y 3, México, Editorial Alfredo Ortells, S.L.

Escareño, Fortino y Olga Leticia López (2007) *Matemáticas 1*, 2a. ed:, México, Trillas.

Fiol Mora, María Luisa y Josep María Fortuny (1990) *Proporcionalidad directa. La forma y el número*, España, Síntesis.

Grabinsky, Guillermo (1998) Introducción al análisis funcional, Instituto Tecnológico Autónomo de México, Departamento de Matemáticas.

Hart, Kathleen (1988) "Ration and proportion" en J. Herbert and M. Beher (eds), Number Concepts and operation in the middle grades, vol. 2 198-219. Lawrence Erlbaum Associates National Council of teaching of mathematics.

Hoffman, Kenneth y Ray Kunze (1973) "Transformaciones lineales", en *Álgebra lineal*, México, Prentice Hall, pp. 67-115.

Inhelder, B. y Jean Piaget (1955) *De la lógica del infante a la lógica del adolescente*, PUF, París.

Jeffrey, R.C. (1992) *Probability and the Art of Judgment*, Cambridge University Press.

Leithold, Louis (1998) *El Cálculo*, 7a. ed., México, Oxford.

Mancera Martínez, Eduardo (2006) *Matemáticas 1*, 1a. ed., México, Santillana.

Mendoza, Tatiana (2007) "Estudio didáctico de la noción de porcentaje", Tesis de maestría, DIE, CINVESTAV-IPN, México.

Monteiro, Cecilia (2003) "Prospective Elementary Teachers' Misunderstandings in Solving Ratio and Proportion Problems", ponencia presentada en 27th International Group for the Psychology of Mathematics Education Held Jointly with the 25th PME-NA, 317-323.

Patton, Michael (1990) *Qualitative evaluation and research methods*, 2a. ed, Sage, California.

Ramírez, Margarita (2004) "Análisis de situaciones de proporcionalidad en la escuela primaria", Tesis de maestría, DIE, CINVESTAV-IPN, México.

Rockwell, Elsie y R. Mercado (1990) "La práctica docente y la formación de maestros", en *La escuela, lugar del trabajo docente*, 63-75.

Secretaría de Educación Pública, SEP (1993) *Educación Básica Secundaria. Plan y programas de estudio 1993*. México, D.F.

SEP (2006a). *Acuerdo número 384 por el que se establece el nuevo Plan y Programas de Estudio para la Educación Secundaria*, SEP, México.

SEP (2006b) *Educación Básica Secundaria. Programas de estudio 2006*. México, D.F.

SEP (2009) *Programas de estudio 2009. Sexto grado. Educación Básica Primaria*, México, D.F.

Solar Bezmalinovic, Horacio y Alicia Zamorano Vargas (2002) "Algebrización en la proporcionalidad de magnitudes"

Trigueros, María, Sonia Ursini y Dolores Lozano (2000) "La conceptualización de la variable en la enseñanza media", *Educación Matemática*, México, 12 (2): 27-48.

Vergnaud, Gérard (1988) "Multiplicative Structures" en Hiebert, James y M. Behr (eds.) *Number Concepts and Operations in the Middle Grades,* Lawrence Erlbaum Associates, National Council of Teachers of Mathematics (NCTM), Hillsdale, Nueva York, 2: 141-161

Vergnaud, Gérard (1990) "La teoría de los campos conceptuales", *Recherches en Didáctique des Mathématiques*, 10 (2 y 3): 133-170. Traducción: Juan D. Godino.

Wilson, Jerry y Anthony Buffa (2003) *Física*, 5a. ed., Pearson.

Waldegg, Guillermina, Roberto Villaseñor y Víctor García (2007) *Matemáticas en contexto 1*, 2a. ed., México, Esfinge.

El jurado designado por el Departamento de Investigaciones Educativas del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, aprobó esta tesis el día 26 de febrero del 2010.

Dr. David Francisco Block Sevilla,
Investigador en el Departamento de
Investigaciones Educativas.

Dra. María Teresa Guerra Ramos,
Investigadora en la
Unidad Monterrey.

Dra. Alma Adrianna Gómez Galindo,
Investigadora en la
Unidad Monterrey.

Dra. Dulce María López Valentín,
Investigadora en la
Unidad Monterrey.