Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional

Departamento de Investigaciones Educativas

La razón como vía de expresión de una razón y de un cociente. Análisis de una experiencia didáctica.

TESIS

Que para obtener el grado de Maestro en Ciencias con Especialidad en Investigación Educativa

Presenta

Luz Daniela Itandehui Ramos Banda

Licenciada en Psicología

Director de tesis:

Dr. David Francisco Block Sevilla

Octubre, 2014

Esta tesis fue realizada gracias al apoyo de una beca CONACYT

A mi familia, por su fe ciega a mis erráticas decisiones, por ser lo único permanente en este mundo de elementos transitorios.

A la profesora Imelda por su invaluable participación durante este proyecto y a su grupo de 6to. Grado quienes, de forma casi involuntaria pero siempre cooperativa, le dieron forma a este trabajo.

“Me desperté de pronto.

La noche era toda

de los insectos”

Matsuo Basho

Agradecimientos

A mi asesor, David Block, por su infinita paciencia para contestar mis infinitas dudas.

A mis lectores, Armando e Irma, por sus atinadas observaciones y sus enriquecedores comentarios.

A mis profesores del DIE por su guía; ser su alumna fue una aventura transformadora.

A Ernesto, por soportar la distancia y los cambios de humor; siempre serás el octavo pasajero ideal.

A mis compañeros de seminario, Ligia, Emilio, Alejandra; a Margarita por su afectuoso recibimiento y muy especialmente a Laura Reséndiz por su invaluable ayuda durante el trabajo de campo.

A la “banda maciza” Berenice, Fernando, Yazmín, Christian, Toño, por las inagotables risas y por darme cobijo en esta enorme ciudad.

A Alicia Banda, que, sin estar presente ya, nunca ha dejado de estar conmigo.

¡A mi banda leonesa! por el afecto que nunca dejó de sentirse a 395 km de distancia.

A mi familia canina, por enseñarme el verdadero significado de la palabra voluntad.

Va para todos ustedes mi cariño y mi profundo agradecimiento, muchas muchas gracias.

Taeko reprobó su examen de matemáticas. Su hermana mayor, Yaeko, una estudiante "modelo", se reúne con ella en casa e intenta ayudarla a comprender mejor la materia.

"Yaeko: Sentada. Bien, dime las tablas de multiplicar

Taeko: ¿las tablas de multiplicar? ¡Estoy en quinto grado! ¡Ya las sé!

Yaeko: Entonces, ¿cómo cometiste tantos errores?

Taeko: lo que me cuesta es dividir fracciones

Yaeko: Intercambias el numerado con el denominador, es muy fácil, ¿no te lo enseñaron así en la escuela?

Taeko: mmmhhh…

Yaeko: ¿entonces por qué tantos errores?

Taeko: ¿qué sentido tiene dividir una fracción entre otra? Mira, supón que debemos dividir dos tercios entre un cuarto, tomo dos tercios de una manzana, los divido entre cuatro personas y veo cuánto le corresponde a cada una, ¿estoy bien?

La niña dibuja una manzana, la divide entre tres y "toma" dos. Luego busca dividir esos 2/3 entre cuatro personas. Yaeko, impresionada por los trazos de su hermana, no sabe qué contestar.

Taeko: son uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis partes, ¿ves? Sería un sexto de manzana para cada uno

Yaeko: ¡está mal está mal está mal! ¡Eso sería multiplicar fracciones!

Taeko: ¿ehh? ¿Cómo un número es más pequeño cuando lo multiplicas?

Yaeko: dos tercios de manzana dividido entre un cuarto significa que…mmhh ¡eso no tiene nada que ver! Te cuesta entenderlo porque piensas en manzanas, solo debes memorizar esto: al multiplicar dejas todo igual, al dividir lo inviertes".

(Escena de la película *Omohide poro poro* (Recuerdos del ayer) del director Isao Takahata y el productor Hayao Miyazaki, 1991)

Índice

Resumen

El presente trabajo experimental aborda un contenido didácticamente complejo: la construcción de las fracciones como expresión de razones y cocientes. Esto implica ampliar la significación de las fracciones, transitando de la noción de fragmentos de unidad (a/b significa una unidad partida en b partes de las que se toman a) a la de razón (de cada b unidades tomar a) y a la de cociente (a/b significa lo que resulta de dividir a unidades entre b). En la construcción por la que optamos, las fracciones son precedidas por las razones, es decir, por relaciones entre parejas de números naturales, y emergen posteriormente como números que expresan a esas relaciones.

Palabras clave: proporcionalidad, razón, fracción, Ingeniería Didáctica

Abstract

This experimental work deals with a complex didactic content: the construction of fractions as expression of ratios and quotients. This involves expanding the meaning of fractions from the notion of fragments of *a* unit (*a* / *b* means a unit divided in *b* parts wherefrom *a* parts are taken), to that of ratio (from each *b* units take *a* units) and of quotient (*a / b* is the product of dividing *a* units by *b*). In the construction we chose, fractions are preceded by ratios, i e, relations between pairs of natural numbers, and wich subsequently emerge as numbers expressing these relations.

Key words: proportion, ratio, fraction, Didactic Engineenering.

Introducción

El presente trabajo surge de la inquietud por trabajar la matemática del aula desde una perspectiva diferente a la que ejercía durante mi práctica como psicóloga educativa. Esta inquietud encuentra cobijo en el trabajo que durante años se ha venido forjando en el DIE en la línea de investigación de didácticas especializadas.

Al entrar en contacto con ésta, para mí nueva, manera de concebir a las matemáticas escolares, me acerco a un tema amplio que ha ocupado un lugar preponderante en los estudios dentro del DIE. El tema de los números racionales, en vez de agotarse, abre nuevas vetas para la investigación y ha sido motivo de gran confusión tanto para docentes como para alumnos. Es así como este trabajo forma parte de un proyecto de investigación más grande y que comenzó hace tiempo, con el estudio sobre las nociones de fracción y razón enmarcadas dentro del campo de la proporcionalidad.

Desde 1945, Kieren llamaba la atención sobre los varios significados que puede tener una expresión fraccionaria. La pregunta era ¿qué consecuencias tiene en la enseñanza? Freudenthal, años después, toma otra perspectiva y hace énfasis en la pérdida conceptual que presenta la enseñanza de los racionales al prácticamente ignorar su riqueza fenomenológica. Finalmente, Brousseau da un paso más al concebir dispositivos didácticos que ponen en juego precisamente esta multiplicidad de significados.

Con respecto a la noción de razón, se ha demostrado que bajo ciertas condiciones didácticas ésta es más fácil de abordar desde edades más tempranas por los alumnos. Y no sólo eso, se ha visto que, en el marco de la proporcionalidad, los niños pueden abordar problemas con esta multiplicidad de significados de la fracción partiendo desde la noción de razón (Brousseau, Block).

Vergnaud (1983) por su parte, destacó la importancia de tomar en consideración en la enseñanza los estrechos vínculos que existen entre las distintas nociones del campo de las estructuras multiplicativas, tales como número racional, división y razón. Sin embargo, la transición de razón a su expresión fraccionaria no es sencilla, y las estrategias empleadas por los alumnos en su resolución denotan tanto su dificultad para manejar las expresiones fraccionarias como su facilidad al trabajar en el campo de las razones (Ramírez y Block, 2009). Esta posible articulación se revisa a detalle en el capítulo 1.

En la versión del 2011 del currículum de matemáticas en México, ambas nociones aparecen en momentos distintos de la enseñanza y con una breve interrelación que aparece en el programa. Probablemente, con esta breve interrelación, se esté perdiendo la posibilidad de lograr una mayor comprensión tanto en el estudio de las fracciones como en el de la noción de razón. La noción de fracción comienza en tercer grado con el planteamiento de situaciones que faciliten su uso para expresar, tanto de forma oral como escrita, medidas diversas. Una significación diferente aparece en quinto grado cuando aparecen, fugazmente y de manera aislada, las fracciones como cocientes. Por otro lado, el concepto de razón es tratado en sexto grado con la comparación de razones simples y hay además un intento por articular las razones con las fracciones, pretendiendo que los niños expresen una relación de razón “mediante un número de veces, una fracción o un porcentaje” (SEP 2011).

Los trabajos anteriores de varios colegas (Dávila, Ramírez, Solares y Block) realizados dentro del DIE abrieron brecha sobre el estudio del viejo divorcio entre estas dos nociones matemáticamente cercanas pero que didácticamente no han encontrado su reconciliación. Empero, aún no se cuenta con situaciones didácticas sólidas que funcionen de forma efectiva en el tránsito de una noción hacia la otra. Es en este punto donde se inserta el objetivo esta investigación.

Objetivo y particularidades de la presente investigación

El diseño didáctico que se propone en el presente trabajo busca continuar el camino hacia la construcción de dispositivos eficaces que sirvan para construir un concepto enriquecido de fracción a través de los razonamientos que los alumnos movilicen al trabajar con razones, avanzando en la concreción de las características didácticas necesarias para lograr este objetivo a través de tres sub secuencias donde se jueguen dos de sus significados.

En “Reparto de pasteles”, sub secuencia que nos tomó tres clases, se juega con la fracción como relación parte-todo y como cociente, mientras en “Los pasos del robot” comienza a significar una medida y también un cociente. Estas dos sub secuencias están mayormente relacionadas, ya que la noción de razón no es explícita y la fracción surge como expresión de un cociente en un caso para reparto, y en el otro en longitud que resulta de dividir otra. Las últimas cuatro clases las dedicamos a "Tratos buenos y no tan buenos" donde la fracción es explícitamente la expresión de una razón. Cabe mencionar que esta decisión, la de incluir estas tres secuencias y articularlas en una sola constituye otra aportación de este trabajo. El análisis de la secuencia final se aborda en el capítulo 3 al igual que la ubicación teórica de la presente investigación. Finalmente, el análisis de la experiencia al trabajar con estas diez clases se reporta en el capítulo 4. El lector encontrará cada secuencia analizada y un apartado extra que contiene la reconstrucción de la trayectoria de tres alumnas, con lo cual se intentó una mirada general de las posibilidades de la secuencia tanto de forma global como en otra centrada en el desempeño individual de los alumnos.

La experiencia didáctica contó con la activa participación de la maestra de grupo, quien formó parte importante de la realización de la investigación. Durante la implementación, tuvo ciertas dificultades para comprender el contenido a trabajar, mismas que se vieron reflejadas en algunas clases. Un pequeño análisis de esto se revisa al final del análisis de las clases, en la sección 4 del cuarto capítulo.

El último capítulo contiene los comentarios finales sobre la experiencia didáctica intentando recuperar cada elemento valioso del análisis pero enmarcándolos en términos globales.

La pregunta obligada parece ser la de ¿funcionó la secuencia? Dar una respuesta dicotómica "sí-no" es imposible, es decir, decir tajantemente sí funcionó o no. A este respecto es útil una reflexión de Brousseau, quien pone de manifiesto que a pesar de que el comercio llevaba más de tres mil años existiendo, la economía como disciplina requeriría de doscientos cincuenta años para consolidarse y aún está lejos de proponer situaciones satisfactorias. El esclarecimiento de las condiciones de enseñanza y aprendizaje de determinado contenido matemático no está lejos de esta reflexión. Sobre esta experiencia didáctica podemos decir que avanza en la comprensión de los números racionales aportando situaciones efectivas que lograron dialogar con la docente y el grupo, pero que abre nuevas interrogantes que podrán abordarse en próximos estudios.

Capítulo 1

Razones y Fracciones. Una articulación problemática

Múltiples interpretaciones para el concepto de fracción

Desde hace más de 30 años se ha prestado atención a los distintos significados[1] que puede llegar a tener el concepto de fracción, viendo que éste cobra sentido según el tipo de problema que nos esté ayudando a resolver. Thomas Kieren es uno de los primeros que atiende a esta multi conceptualización (en Mancera, 1992:33) y constituye un referente clásico en el análisis de la enseñanza de las fracciones. Afirma que las fracciones pueden ser interpretadas como:

1. Fracciones que pueden sumarse, restarse, compararse, etc.

2. Fracciones decimales como una extensión natural del sistema decimal de numeración

3. Clases de equivalencia de fracciones

4. Operadores multiplicativos

5. Elementos de un campo cociente infinito

6. Medidas o puntos en la recta numérica

Años después, Kieren propone sus famosos subconstructos. Llamarles así, en lugar de interpretaciones de la fracción, parece responder a considerar la fracción o el número racional como un constructo teórico que puede construirse a partir de ideas o nociones más simples. Estos son:

1. Relación parte-todo

2. Número racional como razón

3. Números racionales como divisiones indicadas y elementos de un campo cociente

4. Número racional como operador

[1] Subconstructos o interpretaciones según distintas versiones de los autores.

El autor deja sobre la mesa una pregunta importante; ¿es posible un diseño curricular que abarque cada uno de estos significados? Para contestar la pregunta, afirma el mismo Kieren, es necesario considerar los conocimientos previos que se ponen de manifiesto en los procedimientos empíricos utilizados por los alumnos al resolver problemas donde las fracciones estén implicadas. No es sino a través de la manera en cómo se pongan en juego estos significados que podrá constituirse un conocimiento formal. Freudenthal menciona también la riqueza conceptual a la que se relega a la fracción al abordar la enseñanza de una sola de sus significaciones, cuando habla de su fenomenología didáctica de los conceptos.

En las páginas siguientes, describiré en las últimas cuatro categorías propuestas por Kieren, deteniéndome en aspectos que resulta importante destacar. Enseguida, abordaré dos aportaciones pilares en la temática de las fracciones en matemática educativa: los trabajos de Freudenthal y Brousseau. Finalmente, plantearé la problemática que pretendo abordar en este estudio.

1.1 Los cuatro significados de las fracciones

Retomando la interpretación que hace Dávila (2002:39), las fracciones pueden jugar los siguientes papeles[2]:

1. Parte-todo

1.1 La definición a partir de la fracción unitaria (partir y tomar), que llamamos quebrado o fracturador, según Freudenthal.

1.2 La relación parte todo

1.3 La expresión de una medida

2. Cociente
3. Operador
4. Medida

1.1.1 Fracción como relación parte-todo

Bajo este significado la expresión ¾ es un entero dividido en 4 partes iguales, de las cuales se toman tres (de forma más general a/b significa una unidad partida en b partes, de las cuales se toman a[3]). La fracción se forma como una suma de fracciones unitarias: ¼+1/4+1/4. Una representación típica es:

[2] O tener diferentes significados.
[3] A este significado se le dio también el nombre de “quebrado”

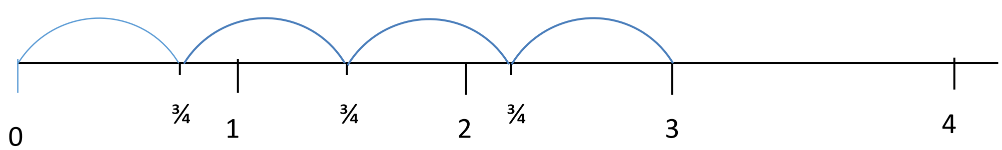
(Tomamos 3 partes de 4)

Para transmitir esta significación las situaciones de medición y reparto de pasteles son muy recurrentes durante la escuela primaria. En estas intervienen también otros significados de las fracciones, las veremos más adelante.

Con respecto a este significado, cabe decir que algunos autores como Freudenthal afirman que “la didáctica tradicional pasa por alto que la concreción de las fracciones no se agota con romper un todo en partes” (1983:20). El autor holandés sostiene que, al mostrar únicamente este significado de la fracción, el de parte todo (en el que a/b significa una unidad partida en b partes, de las cuales se toman a), se convierte en el único medio para construir su noción, perdiendo la riqueza fenomenológica que didácticamente hablando, posee la fracción. Particularmente, en el trabajo de Brousseau, se busca construir otros significados de la fracción: como cociente, como operador y como medida, En éste, se busca llegar a una comprensión cabal de los racionales a través de una experiencia didáctica que contempla los distintos papeles que puede jugar la fracción, en un largo y único diseño que no tiene precedente (2004:7). Ambas posturas se explicarán posteriormente.

1.1.2 Fracciones como cociente.

Las fracciones pueden significar también cocientes. Por ejemplo, ¾ puede ser definido como el un número que multiplicado por 4 nos da 3.



La fracción concebida como quebrado puede ser usada para expresar un cociente, sin que por ello sea concebida como tal. Las fracciones como cociente se esbozan y se presentan de forma un poco aislada en 5to de primaria con “Uso de la expresión n/m para representar el cociente de una medida entera (n) entre un número natural (m) del tipo 2 pasteles entre 3 niños" (SEP, 2011:80).

1.1.3 Fracción como operador

Este significado se basa en la comparación cuantitativa de dos conjuntos u objetos, e implica la noción de proporcionalidad. Es aquí donde se relaciona directamente con el concepto de razón (relación entre dos cantidades)[4] (Dávila, 2002:41).

La fracción expresa la relación entre dos cantidades de magnitudes. En una relación de proporcionalidad, puede aparecer en dos casos más: expresando los operadores internos o externos. Se explica cada caso a continuación.

1.1.3.1 Operadores internos y externos

Operador interno. Le llamaremos así a la razón interna entre dos datos de un mismo conjunto. En el ejemplo anterior, tenemos dos grupos de cantidades: saltos y varas: si la rana da 4 saltos, avanzará 8 varas; si da 8 saltos, avanzará 6 varas. La relación entre los pares de cantidades en la columna saltos (4 y 8) es "x2", que es la misma relación que guarda el par de datos correspondiente al número de varas avanzado (3 y 6). El factor o razón interna, será el mismo para ambos pares de cantidades generadas.

Operadores externos. Expresa la relación que debe haber entre cualquier elemento del primero conjunto con el que le corresponde en el segundo. La relación entre los datos de la columna A y B es el operador externo, en este caso, ¾ (Block, Mendoza y Ramírez, 2010:33).

Una manera de definir a la fracción como operador es la siguiente: la multiplicación "por ¾" significa la realización de dos operaciones sucesivas (:4) (X3), o bien (x1/4) (X3). Como se puede ver, la fracción como "fracturadora", que parte la unidad entre 4 y toma 3, se relaciona con esta interpretación.

Pero, ¿operadores y razones son lo mismo? Los números pueden pasar del papel de razones al de operadores multiplicativos: "3/4", el operador del ejemplo

[4] Como señala Block (2006.13), la diferencia entre las nociones de operador y de razón es sutil. Usando el contexto de la mezcla de jugo y agua para producir naranjada, explica: "los números pueden pasar con mucha facilidad y de manera casi imperceptible del papel de razones al de operadores multiplicativos: "lo doble", por ejemplo, a la vez que expresa la razón entre un vaso de agua y dos de jugo, de la naranjada A, es un operador que se puede aplicar a distintas cantidades de agua para obtener las cantidades correspondientes de jugo, dando nuevas cantidades de naranjada con el mismo sabor que la naranjada A".

anterior, a la vez que expresa la razón entre los saltos y las varas que la rana avanza, es un operador que se puede aplicar a distintas cantidades para obtener las siguientes cantidades correspondientes, dando nuevas cantidades de saltos en relación a las varas avanzadas. Las razones *externas* corresponden, en la esquematización de Vergnaud al operador función, mientras que las *internas* corresponden a los operadores escalares. El operador función, deja ver aquí otras facetas: aparece como un elemento de la noción de proporción, como expresión de aquello que es constante cuando las cantidades varían, como la expresión de una cualidad nueva —en la situación de la naranjada, la intensidad del sabor a naranja— y, finalmente, como un recurso que permite comparar razones (Block, 2006:13).

Un ejemplo de la fracción como operador lo vemos en el siguiente caso: “Por cada 4 saltos, la rana avanza 3 varas”

Relación entre ambas columnas. Una es ¾ de la otra: OPERADOR

Operador interno x2

saltos	varas
4	3
8	6
12	9
16	12
1	4/3

Operador interno x2

Valor unitario

La relación que hay entre la columna “saltos” y la columna “varas” es siempre ¾. Aquí el papel de la fracción es el de un operador. Para Verganud (en Block, 2006:12), el operador interno corresponde al operador función, mientras el externo es un operador escalar.

1.1.4 Fracción como medida

Cuando pensamos en una expresión como ¾ de kilo o tres metros y medio nos estamos refiriendo al acto de medir.

Pero, cuando expresamos una medida como tres metros y medio, ¿no estamos refiriéndonos también a una relación parte todo, donde la unidad se fracciona? En este punto, como en otros, la clasificación de los distintos significados de la fracción no es excluyente entre sí, sino que están traslapados, lo que dificulta su comprensión. Estos traslapes son inevitables, aunque algunas veces producen confusión. Por ejemplo, en una de las primeras categorizaciones de los racionales hechas por Kieren (1972), aparecía también la de “decimales”. Ésta categoría, apela a una dimensión distinta a las de las otras y se traslapa con prácticamente todas ellas: medida, cociente, relación parte todo, operador. Adijage y Pluvinage (2007) señalan también que en estas categorías se revuelven aspectos relativos al uso de las fracciones a magnitudes con otros que son sobre su estructura matemática. Block (1987) por su parte, propone una categorización más general que distingue entre:

- Dos grandes funciones de los racionales: expresar medidas y relaciones (relaciones incluye la noción de operador y de razón (relación), parte todo y parte-parte).

- Dos definiciones o formas de construirlas: “quebrados” (n/m = n veces 1/m) y cocientes (n/m= n:m)

- Un subconjunto importante con su propia forma de expresión: los decimales.

Como puede verse se ha labrado un largo camino en el trabajo de la clasificación de los significados de la fracción. Para efectos de este trabajo, tomaremos ésta última clasificación y en el diseño didáctico se pondrán en juego las nociones de medida, cociente y operador.

1.2 Dos aportes teóricos a la concepción de las fracciones. Los trabajos de Freudenthal y Brousseau

1.2.1 Las nociones de fracción y de razón en la fenomenología de Freudenthal

En su texto “Fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas” (1994), el investigador holandés retoma el tema de fracciones desde los múltiples sentidos que puede cobrar según el contexto donde se maneje. Para entender estas nociones, es necesario explicar que Freudenthal hace una crítica a la enseñanza de las matemáticas por estar demasiado centrada en el aprendizaje de conceptos, y afirma que cada individuo forma sus conocimientos matemáticos conforme comprende su significado en cada uno de los *fenómenos* donde dicho concepto se encuentre imbricado. Para él, no puede hablarse de una "adquisición de conceptos" sino más bien de una "constitución de objetos mentales" (Freudenthal, 1983:6).

Según lo que él mismo denomina un método, la *fenomenología didáctica de los conceptos* es un proceso en el que debe estudiarse la manera en la que un concepto determinado organiza a los fenómenos que él mismo protagoniza, analizarse las posibilidades de aprendizaje que ofrecen así como las características de las acciones que se realizan al tratar de resolverlos. En la planeación curricular, es un proceso que no puede dejarse de lado (Freudenthal, 1983:1)

La noción de fracción de Freudenthal

Siguiendo estas ideas, el autor busca presentar a las fracciones en su "riqueza fenomenológica". En el siguiente cuadro, se sintetiza una parte de la fenomenología propuesta por Freudenthal, donde podemos ver cómo identifica algunas de las características de su fenomenología sobre las fracciones:

Referente		**Las fracciones aparecen como:**
	Parte-todo	Operador fracturador (Obtener la tercera parte de B) **Relación entre la parte y el todo** (A es $\frac{1}{3}$ de B)

OBJETOS	Separados	Comparador **Relación de razón** (A es $\frac{1}{3}$ de B)
Caso Intermedio: OBJETOS, en situaciones de escala (agrandar, achicar)		Transformador (transforma al objeto)
VALORES DE MAGNITUD Y NÚMEROS		Operador razón (transforma un número, una longitud, un peso, en otro).

(Tomado de Dávila, 2002:50)

El operador fracturador

Lo que Freudenthal llama fracturador (1983:14) es la relación parte-todo de la que hablábamos unas páginas arriba. Implica entender que hay un entero que debe dividirse en *n* número de partes y de éstas, se toman otras tantas. Hablando en términos didácticos, Freudenthal afirma que la construcción de una sola significación de la fracción representa una limitante en el sentido de que hay múltiples maneras de dividir el entero dado su enorme variedad fenomenológica. Esta división del entero puede ser reversible, irreversible, simbólica; la igualdad de las partes puede ser a “ojo de buen cubero” o bien partir en dos, en cuatro, doblar a la mitad, etcétera. El todo, entonces, puede ser coloreado, rebanado, cortado en partes iguales ya no sólo físicamente, sino incluso pensarse o imaginarse que se está fragmentando. Freudenthal ofrece la siguiente clasificación:

El todo	
Discreto	Susceptible de contarse uno a uno como: (canicas, personas, etc.)
Continuo	Longitud, Superficie, Volúmenes. Líquidos
Definido	Un cuadrado, un cubo, 5 metros de listón Si es discreto se conoce su cardinal (30 canicas, 3 pasteles

Indefinido	Puede ser discreto o continuo pero se desconoce su cardinal o sus dimensiones. Por ejemplo: la humanidad, las mujeres de un país, el ganado de una región, un segmento de recta, una superficie.
Estructurado	Si es discreto pueden estar ordenados u organizados espacialmente de forma determinada; sus elementos pueden ser diferentes. Por ejemplo, la humanidad formada por hombres y mujeres o ancianos, adultos, jóvenes y niños, canicas rojas, verdes y azules. Si es continuo y definido, puede tener divisiones internas o dibujadas sobre una retícula.
Sin estructura	Si es discreto no hay organización particular. Si es continuo no tiene divisiones previas.

(Tomado de Dávila, 2002:51)

La tabla anterior pone al descubierto la riqueza fenomenológica de la que habla Freudenthal en contraste con la pobreza de mostrar a los estudiantes una sola manera de interpretar la expresión fraccionaria. Es esta pobreza didáctica, dice el autor, la responsable de que muchos alumnos aprendan a operar con fracciones sin comprenderlas del todo o sencillamente, a no comprenderlas en absoluto (Freudenthal, 1983:20).

La fracción como comparador

Freudenthal (1983:20) afirma que las fracciones también pueden servir para comparar objetos, por ejemplo en esta sala hay la mitad de mujeres que de varones; la calle es 2 ½ más ancha que el sendero. La comparación de las facciones puede hacerse de diferentes maneras:

a) De manera directa. Cuando los objetos se colocan uno junto a otro, siendo uno de ellos la unidad de medida. Aquí uno de ellos se considera como parte del otro.

b) De manera indirecta. Cuando se utiliza un tercer objeto como intermediario con el que se miden dos objetos que no se pueden juntar.

c) A nivel abstracto (comparación de números o valores de magnitudes).

Plantea que las situaciones de comparación que generan fracciones son aquellas en las que la magnitud que se compara (unidad de medida) no cabe un número exacto de veces en la otra magnitud, propiciando con ello la subdivisión de la unidad de medida para comparar el resto o la conmensuración (Dávila, 2002:54).

La noción de razón

Freudenthal desarrolla esta noción en el capítulo 6 de su obra “Didactical Phenomenology of Mathematical situations” (1983) y resalta que, lo verdaderamente valioso de una razón es su carácter relacional; el dar cuenta ya no de una cantidad o de otra, sino de la relación que puede establecerse entre ambas. Por eso destaca su importancia didáctica al diferenciarla de otros conceptos como cociente y fracción:

El significado de la razón aparece cuando se habla de la igualdad (y la desigualdad) de razones, sin conocer su tamaño, cuando se dice, con sentido, “a es a b como c es a d”, sin anticipar que “a es a b” puede reducirse a un número o a un valor de magnitud a/b (...) La razón es una relación de equivalencia en el conjunto de parejas ordenadas (o de valores de magnitud)... Los cocientes y las fracciones constituyen formas de reducir esta complejidad, de bajar el estatuto lógico, a costa, como ocurre, de la lucidez.

Freudenthal plantea que la “abundancia fenomenológica debería ser puesta al servicio del uso correcto” (1983:37) de los contenidos que se pretenden enseñar. La riqueza de su propuesta radica en la vasta cantidad de fenómenos que exhibió en los que están involucradas dos nociones la de razón y la de fracción es decir, en su riqueza fenomenológica[5]. Otro autor, Guy Brousseau (2004), también se interesa por los diferentes significados que puede tener la fracción pero desde otro enfoque, el de las situaciones que pueden propiciar estos otros significados. Bajo esta perspectiva se sustenta la presente tesis.

[5] Distingue tres tipos, exposiciones, composiciones, y constructos. Las exposiciones exhiben una característica de un objeto al poner en relación otras dos características del mismo; por ejemplo, la densidad de población de un país que resulta de la relación “número de habitantes/área”. Por su parte, las “composiciones” destacan el tamaño de una clase en relación a una totalidad, por ejemplo, los componentes de una mezcla, las clases por rangos de edad en que se divide una población. Los “constructos” constituyen funciones entre subconjuntos. El llamado “factor de escala” entra en este rubro.

1.2.2 El trabajo de Nadine y Guy Brousseau.

Un nuevo acercamiento a la construcción de las fracciones

El enfoque de Guy Brousseau, investigador francés, está plasmado en su Teoría de las situaciones didácticas y es el resultado de más de 50 años de trabajo al lado de su colega, Nadine Brousseau. La secuencia consta de más de 40 situaciones, que inician con una construcción de las fracciones y continúan hacia la enseñanza de los decimales. La riqueza de esta secuencia es que los diferentes papeles que pueden jugar las fracciones y que hemos discutido en este apartado, se encuentran integrados en esta propuesta de diseño didáctico (Dávila, 2002:57) y (Brousseau, Brousseau y Warfield, 2004:6).

Comparación y medida del grosor de una hoja de papel.

El objetivo de este primer módulo es que los alumnos establezcan una manera de comparar longitudes muy pequeñas tales como el grosor de una hoja de papel. Frente a los equipos, conformados por 5 alumnos, se distribuyen 5 paquetes de 200 hojas de papel blancas, del mismo tamaño pero diferente grosor. Los paquetes están señalados de la letra A a la letra E. Los alumnos disponen además de un vernier.

Medir el espesor de una hoja con el vernier o con una regla es imposible, y es aquí donde los alumnos deben encontrar una nueva manera de medir. En palabras de Brousseau (2004:7): “Sin la posibilidad de utilizar su técnica habitual, que consiste en medir algo con la ayuda de una unidad más pequeña que se repite varias veces, los alumnos "descubren" la manera, que consiste en repetir muchas veces el espesor a medir con el fin de comparar el resultado de una unidad apreciablemente mayor”. Esto constituye la primera fase de la secuencia; la segunda lleva implicada un proceso de comunicación. Los alumnos deben escribir mensajes destinados a sus compañeros para dar a conocer su código de reconocimiento. Esto es, el equipo debe decidir algún código de escritura que les permita diferenciar los diferentes paquetes de hojas con sus grosores correspondientes.

Es en los mensajes donde pueden observarse las parejas de datos que los alumnos realizaron. Ante la dificultad de medir el espesor de una hoja, surge la idea de reunir paquetes de hojas para así poder medir su espesor auxiliándose con el vernier, y con ello la idea de conmensuración. Los alumnos relacionan número de hojas con el grosor, mediante expresiones como“10 hojas=1mm” esto según el paquete con el que estén trabajando. Hay una relación entre *n*=hojas y *m*=grosor (Brousseau, et. Al. 2004:9).

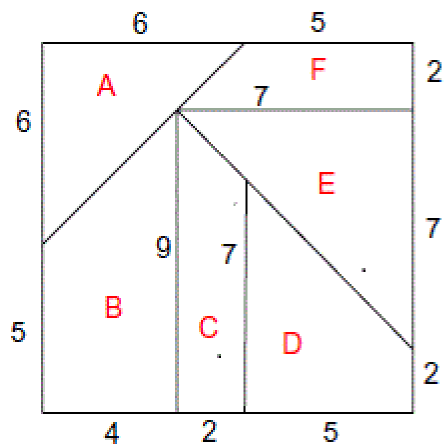
Esta expresión permite no sólo conocer el espesor de una sola hoja, sino incluso manejar relaciones equivalentes (30 hojas=2mm implica que 15 hojas=1mm). No es trivial llamarlas relaciones, el status matemático de estas parejas de datos no es aún el de una fracción, sino más bien el de una razón. El manejo no de un par de datos aislados, sino de la relación entre ambos. Este punto es importante para nuestro trabajo ya que, como destaca Block (2001:44) puede verse con claridad cómo la razón juega el papel de precursora de la fracción en la función de expresar una medida. En este primer momento de la actividad es una razón entre cantidades enteras la que nos están permitiendo dar cuenta de una medida no entera.

El paso de la noción de razón a la de número fraccionario constituye una transición nada sencilla, porque implica una significación de la fracción como cociente y como razón. La escritura de las fracciones es un proceso que se construye a partir de estas relaciones entre medidas. Cuando se establece una pareja de datos como “30 hojas, 2 mm” se introduce la escritura $\frac{2}{30}$como expresión de la medida de una hoja. Decir que el espesor de una hoja mide $\frac{2}{30}$ con la unidad milímetro, significa que 30 veces ese espesor es igual a 2 milímetros, o bien, que ese espesor mide 2 milímetros entre 30 (Dávila, 2002:59) y (Brousseau et. Al. 2004:14, 15).

En este nivel más abstracto de la expresión de la cantidad, es posible deslindarse de las magnitudes físicas. Nótese que esto no se hace instantáneamente, sino tras un largo proceso de construcción del contenido. Tampoco equivale a decir que es “transferible” a otras significaciones. Para ello Brousseau hace otros diseños (con el peso de los clavos, por ejemplo) ya que separarse de las magnitudes no es sencillo. Aquí radica otra de las características primordiales de este enfoque.

El rompecabezas

En esta actividad de la secuencia de Brousseau (Dávila, 2002) se constituye la fracción como operador. Se tiene un rompecabezas como el de la figura de abajo, con las medidas que se indican, señalando que de este rompecabezas debe hacerse una reproducción a escala. El lado que mide 4 cm deberá medir 7 cm en esta reproducción.



Ante esta consigna, se plantea una dificultad grande que los alumnos deben enfrentar: buscar un número que multiplicado por 4 de 7. Esto pone en juego una noción de multiplicación que ellos no tienen aún, por lo cual es natural que “regresen” a un modelo aditivo. La primera solución que proponen es sumar 3 cm a cada lado, para así obtener la figura final. Y los alumnos así lo hacen, pero es en el momento de la verificación, una vez acabadas de dibujar las piezas y reuniéndolas, cuando se dan cuenta de que las piezas no embonan. Suelen surgir intentos de corrección que no cuestionan la estrategia errónea, como volver a medir cada pieza para saber si no se ha medido mal. Pueden surgir también propuestas sobre multiplicar por dos con lo que hay un esbozo de la búsqueda de un operador externo. Finalmente, en algún momento los alumnos deben encontrar que el operador externo se obtendrá con la determinación del valor unitario: 1 cm = $\frac{7}{4}$. Calcular este operador es difícil si no se ha construido la noción de fracción como cociente pues proviene de dividir 7 cm entre 4.

Calculado esto, pueden entonces calcular las demás medidas sin mucha dificultad. Para la pieza que mide 5 cm por ejemplo, se debe multiplicar 5 x $\frac{7}{4}$ = $\frac{35}{4}$. El operador externo constante $\times \frac{7}{4}$, que no aparece explícitamente, subyace al conjunto de razones externas $(7 \rightarrow 4)$, $\left(1 \rightarrow \frac{7}{4}\right)$, $\left(5 \rightarrow \frac{35}{4}\right)$ que intervienen explícitamente en la construcción de las piezas nuevas. Por lo tanto, en este momento, las fracciones puestas en juego intervienen únicamente como medidas, todavía no como relaciones u operadores. Los factores que interviene son los internos y son siempre naturales (Dávila, 2002:63).

La multiplicación explícita por fracciones (o decimales) se introduce en un segundo momento de la secuencia, destacando la analogía funcional que guarda con el operador natural. Por ejemplo:

X4

1	4
5	4X5 =20

X7/4

1	7/4
5	7/4 X 5

Así como la razón 1→4 corresponde a la multiplicación X4, la razón 1→7/4 se define como una multiplicación y se expresa como X7/4.

Por lo tanto, multiplicar una cantidad A por una fracción a/b equivale a encontrar la medida que corresponde a A en una relación en la que a 1, corresponde a/b.

Xa/b

1	a/b
A	a/bX A

Block (en Dávila, 2002) compara el valor unitario $1cm \rightarrow \frac{7}{4}cm$ con otro valor unitario que se vio anteriormente en la actividad del grosor de las hojas de papel: $1\ hoja \rightarrow \frac{4}{50}mm$. Ambos proceden de razones entre medidas enteras (4cm-7cm) y (50 hojas-4mm)), ambos implican determinar una cantidad fraccionaria mediante una división $(7cm \div 4\ y\ 4\ mm \div 50)$. En el caso de las hojas, la razón $(50\ h \rightarrow 4\ mm)$

funciona como precursora de una *medida* racional: $\frac{4}{50}mm$, no interesó, en ese momento, identificar al operador $\times\frac{4}{50}$. En cambio, en la situación del rompecabezas, la razón (4cm-7cm) aunque también da lugar a una medida fraccionaria, tiene otra función: dar cuenta de una *transformación* cuantitativa de medidas y para construir el rompecabezas es necesario construir esa medida fraccionaria.

Los intentos por clasificar no se agotan con Freudenthal, Brousseau y Kieren. Streefland (1978), un alumno de Freudenthal, añade que "la enseñanza de las fracciones padece de un análisis deficiente del concepto, tanto en sentido matemático como didáctico". Destaca también que se tiende a recurrir a la "subdivisión de cantidades discretas o continuas" en partes iguales para enseñar las fracciones, y que la equivalencia se trabaja solo desde lo algorítimico. Es Streefland quien también reconoce la relación entre las razones, proporciones y fracciones. Hart (1981, en Block y Ramírez, 2009) hace énfasis en cómo los alumnos al internarse en un problema de fracciones lo hacen intentando extender las reglas de los números naturales. Además, las fracciones no son vistas como una relación sino como un par de números independientes.

1.2.3 Otros aportes

Rasimba-Rajohn (1982 en Block, 2001) estudió dos métodos de medidas racionales: conmensuración y fraccionamiento de la unidad. En sus estudios, el autor encuentra dificultades para que los alumnos construyan otras significaciones a partir del "modelo de base" de las fracciones como cocientes, es decir, el otro significado, el de unidades que se parten. Son dos concepciones de la noción de fracción que tienden a erigirse en obstáculo para la adquisición de la otra.

Behr, Lesh, Post y Silver (1983 en Mancera, 1992) toman algunos de los subconstructos de Kieren y enfatizan las dimensiones que las personas usan para conceptualizar aspectos relativos a los números racionales. Borasi y Michaelsen (1985 en Mancera, 1992) discuten algunas diferencias entre las operaciones con números racionales y las razones, las cuales implican la validación de procedimientos con los símbolos a/b que no son permitidos para las fracciones, como es el caso de sumar numeradores y denominadores, pero que adquieren sentido en el manejo de razones. Como puede verse, los acercamientos han sido variados y el tema aún no se agota. Retomar estas perspectivas es relevante para el presente trabajo ya que constituyen antecedentes directos en la noción de fracción y razón; cuya articulación no termina por cuajar (Mancera, 1992) y (Block, 2001).

1.3 Vínculos de la noción de razón con la de número racional y con la relación de proporcionalidad

¿Qué es una relación de proporcionalidad? A grandes rasgos hablamos de una relación entre dos variables, donde lo vital a entender no es el valor solitario de una y de otra, sino el papel que juegan ambos valores en la interrelación. Se trata pues de una relación entre dos conjuntos de cantidades que tiene en común un elemento que no se modifica, es decir, una razón constante, un operador externo que se mantiene fijo y que da origen a la relación de proporcionalidad. Si una cantidad de un conjunto aumenta dos veces, tres veces o *n* veces y la cantidad correspondiente en el otro conjunto también aumenta ese mismo número de veces, se dice que dichas cantidades son directamente proporcionales (Block, Mendoza y Ramírez, 2010:27).

Un problema de proporcionalidad, al poner en juego razones, requiere que el alumno coordine dos variables, pueda diferenciar las relaciones multiplicativas de las aditivas y que utilice herramientas aritméticas cada vez más complejas (por ejemplo operadores fraccionarios) para su resolución. Veamos el siguiente ejemplo: Para preparar una mezcla de pintura, las instrucciones dicen que por cada litro de pintura se necesitan dos de agua. De manera que si se preparan 2 litros de pintura, hay que usar 4 de agua; o si se preparan 4 de pintura, 8 de agua.

La razón que guarda una cantidad de pintura con la cantidad de agua que le corresponde, es la siempre misma en la preparación esta pintura como se muestra en la tabla siguiente:

Pintura	Agua
1	2
2	4

4	8

La relación entre ambas magnitudes, pintura y agua, dan lugar a **razones** que pueden ser factores y estos pueden ser factores internos: la razón entre dos cantidades de pintura debe ser la misma que la razón entre las cantidades correspondientes de agua (al doble le toca el doble); o externas: la razón que guarda una cantidad de pintura con la cantidad de agua que le corresponde, es la misma en todas las mezclas.

De estos conceptos parten las dos definiciones que daremos para proporcionalidad: 1) una relación entre dos conjuntos de cantidades es proporcional si los factores internos que se corresponden son iguales y 2) una relación entre dos conjuntos de cantidades es proporcional si existe un número, siempre el mismo, que multiplicando a cualquiera de las cantidades de un conjunto da como resultado la cantidad correspondiente del otro conjunto. Estas mismas definiciones a veces se dan con el término "razón" en vez de "factor". El término razón enfatiza la idea de relación entre cantidades, mientras que el de factor destaca la operación que hay que hacer para, dado un valor, generar otro.

En otras ocasiones, también se utiliza la palabra "operador"[6] La diferencia entre operador y factor no es muy clara, ambos términos se usan indistintamente en algunos casos, por ejemplo, Vergnaud (1983) habla de operador función para referirse al que aquí llamamos externo y operador escalar para hablar del interno. En el presente trabajo preferimos reservar el término de operador al externo, es decir, al operador que da cuenta de la relación entre dos conjuntos de cantidades, y no solamente entre dos números.

1.3.1 Definición de una razón, ¿es o no una fracción?

Entre las primeras definiciones de la noción de razón están las que se ofrecen en la obra de "Los Elementos" de Euclides[7]. Los matemáticos griegos no consideraban a las fracciones como números, para ellos los únicos números eran los naturales, sin embargo, desarrollaron una teoría de razones de números naturales, la cual para

[6] Término que se usó en el apartado de fracciones cuando se describieron como operadores, y que están estrechamente vinculado con la razón en una relación de proporcionalidad.
[7] Se sabe que él recopiló de Eudoxo , un sabio griego anterior, los aportes acerca de las razones y las proporciones

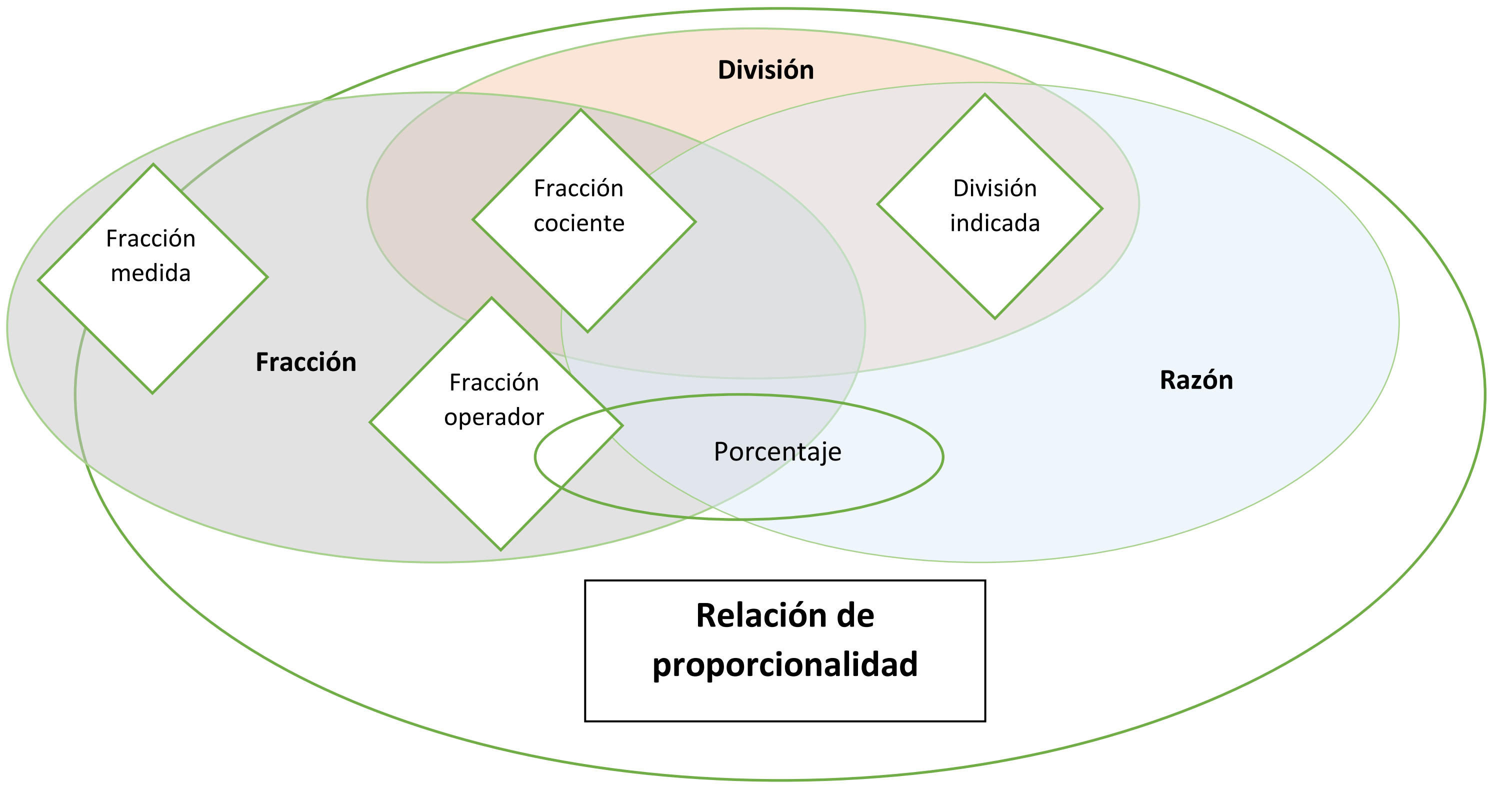
ellos hacía las veces no solamente de fracciones, sino también de ~~las~~ relaciones funcionales. La razón fue una noción fundamental en las matemáticas así como en la física y en otras disciplinas hasta finales del siglo XIX, cuando empezó a ser desplazada por otras nociones. En la enseñanza, en cambio, la noción de razón pervivió hasta bien entrado el siglo XX, en la teoría de las razones y las proporciones desarrollada desde el siglo XVIII como una relación multiplicativa entre cantidades, más precisamente, un cociente, o una fracción (Block, Mendoza y Ramírez, 2010). Block (2001:39) nos ofrece dos definiciones en su tesis:

Se llama razón o relación de dos números, el cociente del primero por el segundo (Leysenne, 1913:307).

Se llama razón geométrica de dos cantidades de la misma especie al cociente de los números que las miden (Hernández, 1954:299).

A lo largo de los años su enseñanza en la educación básica, la noción de razón ha tenido profundas modificaciones, ocupando diferentes lugares de importancia tanto en la primaria como en la secundaria: en los años 70´s, bajo el influjo de la era renovadora que se abrió con las matemáticas modernas, la teoría de las Razones y Proporciones prácticamente salió del currículum mexicano, y la noción de razón quedó en algunos lugares, aislada, "con una articulación incierta" (Block, 2011). No obstante, la investigación en el campo ha mostrado que esta noción puede jugar un papel importante en los procesos de aprendizaje de varias otras nociones matemáticas (Block, 2011; Solares, 1999)

En el siguiente esquema, se aprecia cómo dentro de una relación de proporcionalidad, se ponen en juego otras nociones, la de razón y la de fracción como operador, como cociente y como medida.



1.3.2 Los procedimientos de los alumnos en problemas de proporcionalidad: tendencia a no usar fracciones

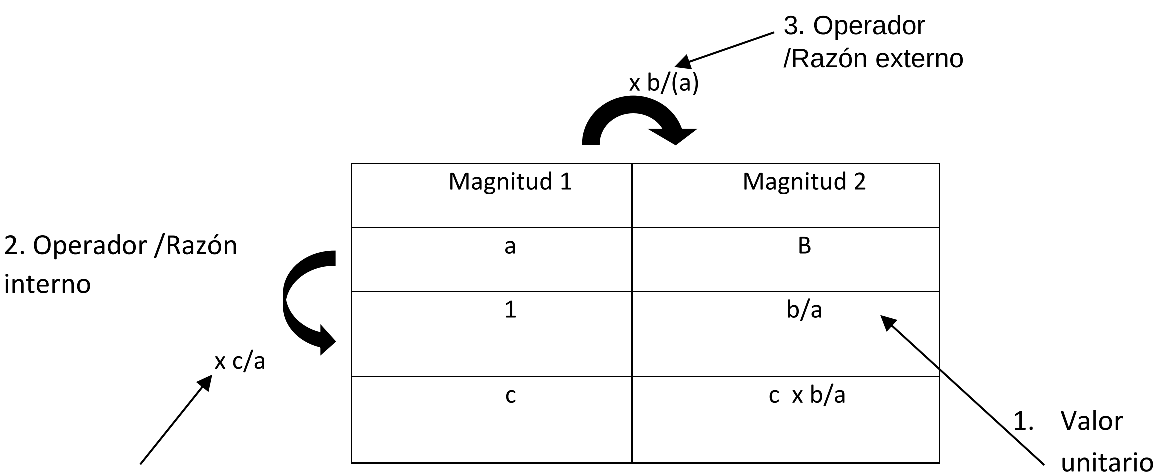
Hart (1988 en Block, 2001) mostró en uno de sus estudios que los estudiantes del nivel de secundaria tienden a utilizar, cuando es posible, lo que llamó “building up procedures”. Al resolver un problema de proporcionalidad, los alumnos, en lugar de operadores fraccionarios, mostraron procedimientos de resolución en dos planos, uno explícito y formal pero poco útil para los alumnos, en el que se apela a las fracciones y a sus técnicas, y otro implícito y utilizado con frecuencia, en el que los alumnos resuelven con razones y no con fracciones (Block y Ramírez, 2009).

En Block (2001) se reporta una correspondencia con estos resultados, donde los niños manejan a edades más tempranas y con mayor facilidad la noción de razón. ¿Es posible decir que éste uso es la antelación a la construcción de fracción? En los trabajos de Brousseau vimos cómo la razón puede ser precursora de la fracción cuando los niños construían los pares de datos del tipo “30 hojas=3mm”, o del tipo 4 cm=7cm, como en el rompecabezas que se vio anteriormente.

1.3.3 De las razones a las fracciones

En el trabajo con relaciones de proporcionalidad, las fracciones pueden aparecer de varias maneras, como se explicita en el siguiente esquema. En un primer momento, las razones se manipulan a través de procedimientos intuitivos, tales como la conservación de las razones internas y la propiedad de la aditividad, llamados también procedimientos “building up procedures” (Hart 1981, en Block, 2001:189) que puede traducirse como “procedimientos “sobre la marcha”.

Para efectos del presente proyecto nos interesa el paso de la expresión de una razón con dos números naturales a su expresión con número fraccionario, en el caso de que dicho número no sea entero. En el siguiente cuadro pueden distinguirse tres papeles que las fracciones pueden jugar en una relación de proporcionalidad: 1) como expresión de una razón interna, 2) como expresión de una razón externa o 3) como expresión de un valor unitario (ver esquema)



Primer caso: la fracción <u>expresa un valor unitario</u>, o dicho de otro modo como término de una razón unitaria.

Si a→b, entonces, **1→b/a.**

En este caso, la fracción <u>expresa una cantidad, una medida</u>.

Segundo caso: la fracción <u>expresa un factor interno</u>, un operador escalar en términos de Vergnaud (1983).

Si a→c entonces **X→c/a**

En general, cuando la razón interna no es sencilla, no se suele cuantificar, optándose por pasar por el valor unitario (lo cual es una manera de descomponer la razón interna a→1 equivale a (:a) y luego 1→b equivale a Xb, de manera que a→b equivale a (:a)(Xb)).). Pero hay situaciones en las que determinar esa razón con una fracción puede ser un camino económico.

Tercer caso: la fracción expresa un operador (función):

Si a→b entonces, **X→b/a**

En este caso, la fracción aparece como un operador externo y como expresión de una razón externa. Bajo la posible articulación antes mencionada entre las razones y las fracciones, éstas últimas pueden quedar implícitas y el trabajo realizarse a nivel de las razones. No solo pueden, sino que conviene que así sea durante un tiempo para lograr una mejor comprensión de la noción de la razón y, más ampliamente, de proporcionalidad. Además, bajo estas condiciones, puede lograrse una mejor comprensión de las fracciones mismas. Los anterior constituye el eje central de este trabajo, el de analizar la posible articulación entre estas dos nociones, en otras palabras, el tránsito de una hacia la otra.

1.3.4 Una última consideración crítica[8]

Consideremos un ejemplo clásico que ilustra esta situación: "En un partido encesté 2 de 5 tiros y en otro encesté 3 de 6. En total encesté 5 de 11". Aquí, cabe la pena preguntarse ¿Qué significa el resultado 5/11? Algunos autores han criticado la interrelación entre razones y fracciones argumentando que, en ciertas circunstancias, las cantidades que expresan una razón están siendo sumadas sin que este último resultado corresponda realmente a una suma de fracciones.

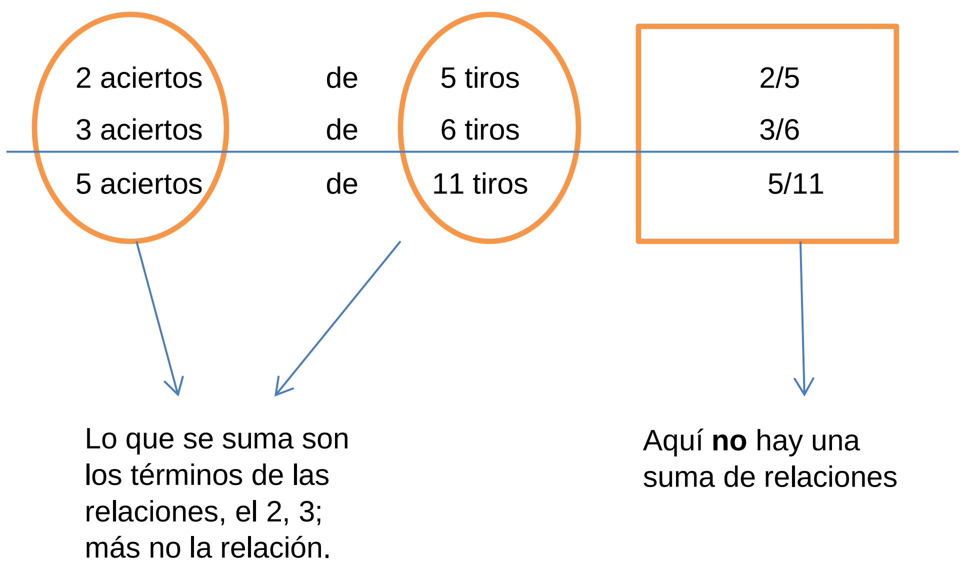
Decir "2 de 5 tiros" es una razón que puede expresarse mediante la fracción "2/5". Decir "3 de 6 tiros" también es una razón que se expresa mediante la fracción "3/6". La razón del total de tiros encestados con respecto al total de tiros es "5 de 11". El primer término (5) se obtiene sumando los primeros términos de las razones "2 de 5" y "3 de 6", y el segundo término, lo mismo. Este hecho se ha usado para expresar la relación en juego como "2/5+3/6=5/11" para enseguida argumentar que

[8] Tomado de Block, D. (2000) ¿Suma de razones? Manuscrito no publicado

así no se suman las fracciones, y concluir que por lo tanto las razones no son fracciones.

Sin embargo, hay un error sutil en el razonamiento anterior: el problema de averiguar cual es la razón resultante al considerar los dos juego, no corresponde a una suma de razones, y por lo tanto, tampoco de fracciones. Es decir, no hay sumas en juego, excepto las que se hacen para obtener los primeros y segundos términos.

Aùn más: Las dos sumas, 2+3 = 5 aciertos y 5+6 = 11 tiros, son efectivamente sumas de cantidades "extensivas" (Schwartz, 1988) pero, 2/5 de los tiros y 3/6 de los tiros no son cantidades extensivas como aquellas, son fracciones expresando razones, es decir, expresando cantidades intensivas. Ésta no es una situación que de lugar a una suma de cantidades intensivas, de hecho, las situaciones que dan lugar a sumas de cantidades intensivas no son comunes, ni simples.



Es difícil encontrar situaciones donde sea necesario realizar una suma de razones. Si sustituimos "2 de 5" y "3 de 6" por "2 de cada 5" y "3 de cada 6", para destacar el carácter de razón ¿Qué sentido tendría sumar eso? O bien “10 kg de grano A cuestan 1 peso, por lo tanto el kg cuesta $1/10” y “20 kg de grano B cuestan 1 peso, por lo tanto el kg cuesta $1/20 de peso”. Si reuniéramos las cantidades de grano se tendría que: 30kg de granos A+B cuestan 2 pesos, por lo que 1 kg cuesta \$2/30. Sería un error pensar que se sumó 1/10 y 1/20, es decir, los dos precios por kilogramo. No fue eso lo que se realizó, sino una nueva mezcla, formada con la suma de otras, de la que surge un nuevo precio unitario, que no es en lo absoluto la suma de los otros.

Entonces, el error conceptual radica en pensar que porque las cantidades que forman a una razón se formaron sumando cantidades extensivas, entonces hay una suma en juego.

Capítulo 2

Aproximaciones teóricas y metodológicas

2.1 La Teoría de las Situaciones Didácticas

Por mucho tiempo predominó la tendencia de considerar al conocimiento matemático como un objeto ya dado, que puede ser transmitido de un sujeto que lo posee a otro que carece de él, en un proceso en donde no hay modificación de dicho objeto: estamos hablando de la postura del *realismo matemático.* Esta concepción se caracteriza por la relación que se establece entre el sujeto cognoscente y el objeto de conocimiento: éste existe independientemente del ser que conoce, el sujeto debe "descubrirlo" y trasladarlo a su intelecto. Waldegg (1995) afirma que esta forma de concebir a la ciencia matemática, si bien puede ser apropiada para la generación de conocimientos matemáticos, no necesariamente es beneficiosa para la enseñanza y el aprendizaje, pues hablamos de procesos distintos.

Durante la década de los 60´s se entrecruzaron varias teorías que intentaron explicar los fenómenos del aprendizaje. La epistemología genética de Piaget y la psicología cognitiva dominantes en esos años constituyeron un aporte significativo para el desarrollo de teorías preocupadas por la enseñanza y el aprendizaje. Empero, no abordaron de manera específica el aprendizaje en contextos escolares. Piaget, señala Vergnaud, "se interesó más en las estructuras que podían caracterizar una etapa dada del desarrollo que en la evolución adaptativa de los conocimientos en una situación donde éstos son funcionales" (Vergnaud, 1981, 2). Afirma también que la elección de las situaciones a las que el sujeto debe enfrentarse, no depende sólo de la psicología, sino también de la epistemología de la disciplina, pues es esta epistemología la que establece relaciones entre los conocimientos y los problemas teóricos y prácticos a los que tal conocimiento aporta una solución. La didáctica, afirma Vergnaud, se basa en las tesis piagetianas, pero primordialmente se preocupa por el diseño y prueba de situaciones que provoquen la evolución del conocimiento. Señala que precisamente ése es el punto que Piaget no desarrolla: la posibilidad de orientar los aprendizajes mediante el diseño y la puesta de ciertas situaciones en las que puedan estimularse la construcción de conceptos.

En este marco, Guy Brousseau propone voltear la mirada hacia la interacción entre alumnos, docentes y saberes matemáticos que permean lo que un alumno aprende al interior del aula (Fregona, en Brousseau, 2007:8) y propone la Teorìa de las Situaciones Didácticas (TSD de ahora en adelante).

Brousseau concibe a la clase como un ámbito de producción de conocimientos matemáticos en donde es necesario establecer relaciones, transformarlas y reorganizarlas. La construcción de este saber matemático, se da, según el autor, a partir de reconocer, abordar y enfrentar problemas que se generan de otros problemas (Sadovsky, 2005:2).

En sus inicios como estudiante, Brousseau afirma que, siendo alumno de Pierre Greco, le sorprende la facilidad de su maestro para crear escenarios de aprendizaje que evidencien las acciones del pensamiento de los niños, pero le sorprende aún más la despreocupación que su profesor muestra ante el análisis de dichos escenarios y su relación con el contenido que pretende enseñar (Brousseau, 2007:14). Es así como comienza a interesarse en el diseño de dispositivos que permitan al alumno el contacto con determinado contenido matemático. Continúa estudiando y en 1970, en la Universidad de Bordeaux, presenta un proyecto científico para el diseño de situaciones utilizadas en la enseñanza, situaciones que deben analizarse y criticarse.

La TSD, que como se dijo anteriormente fue propuesta por Brousseau, postula a grandes rasgos que el aprendizaje de los contenidos matemáticos se da a través de la interacción del alumno con un medio antagonista, que le ofrece retroacciones. Dicho medio está constituido por una situación adidáctica que le representa un problema a resolver y donde hay un contenido matemático implícito en juego. En esta interacción con el medio, hay una continua toma de decisiones que afectan directamente el avance del alumno durante la situación misma.

Esta interacción no es aislada, ocurre dentro de un marco más amplio, donde el docente juega un papel peculiar. Brousseau describe las relaciones con el docente a través de las nociones de contrato didáctico, y el papel del docente a través de dos acciones, devolución e institucionalización. Los docentes, bajo esta perspectiva, son portadores del saber cultural.

Para fines de esta investigación, se revisarán los conceptos de situación didáctica y adidáctica, contrato didáctico y finalmente, el papel del docente a través de la devolución y la institucionalización. Estos conceptos no agotan a la TSD, pero sí ofrecen un marco para su comprensión y, sobre todo, fueron especialmente útiles en el análisis de los datos del presente trabajo.

2.1.1 Situación didáctica y adidáctica

¿A qué le llama situación? A un modelo de interacción entre un sujeto y un medio determinado. El recurso del que dispone dicho sujeto es una gama de decisiones que le permiten accionar sobre la situación, y que dependen de un conocimiento preciso. En palabras de Brousseau "los conocimientos se manifiestan esencialmente como instrumentos de control de las situaciones" (2007:18)[9]. Tenemos entonces un sujeto que actúa sobre un medio. Para un sujeto, actuar consiste en la capacidad de elegir directamente los estados del medio en función de sus propias motivaciones, y este medio debe ser fuente de contradicciones, dificultades y desequilibrios que permita que el alumno ponga en juego sus conocimientos y logre modificarlos, rechazarlos o producir nuevos a partir de las interpretaciones que hace de sus propias acciones, es decir, de las retroacciones del medio. Si el medio funciona con cierta regularidad el sujeto puede relacionar esta información con sus decisiones, evaluándolas gracias a esta retroalimentación. El medio también protagoniza una serie de relaciones de índole matemática que se van modificando a medida que el sujeto produce conocimientos a través de la interacción (Brousseau, 2007:25).

Esta postura dio lugar a la necesidad de otorgar un papel central dentro de la organización de la enseñanza a la existencia de momentos de aprendizaje en los cuales el alumno se encuentra solo frente a la resolución de un problema, sin que el maestro intervenga en cuestiones relativas al saber en juego. Estamos hablando de una situación adidáctica, cuya diferenciación de una situación didáctica es importante para comprender la propuesta de Broussseau.

La situación didáctica es aquella que posee intrínsecamente la finalidad de enseñar algo. La situación adidáctica también posee este objetivo, pero su no intencionalidad no es evidente: el alumno debe responder por sí mismo al problema,

[9] En este primer momento, Brousseau hablará de la situación como las situaciones que sirven para enseñar sin la intervención del profesor. Más adelante, ampliará su definición de situación didáctica en el sentido "entorno del alumno que incluye todo lo que coopera específicamente en la componente matemática de formación", ahora, incluyendo al docente y al sistema educativo (Brousseau, 20007:49)

basándose en sus conocimientos, motivado por el problema mismo y no por un deseo del docente, quien no interviene directamente en la búsqueda de una solución. El alumno sabe que dicho problema fue elegido para hacerle adquirir un nuevo aprendizaje, pero debe saber también que ese conocimiento se sostiene por la lógica de la situación misma, y que puede construirlo actuando directamente sobre la situación. Brousseau va más allá y afirma que dicho conocimiento no se habrá adquirido verdaderamente sino hasta que el alumno sea capaz de utilizarlo en cuestiones ajenas a contextos de enseñanza y en ausencia de cualquier instrucción intencionada (Brousseau, 2007:30).

Para que una situación sea considerada como adidáctica son necesarias una serie de condiciones (Bessot, 2003:10) y (Block, 1987:13):

- El alumno puede formular una respuesta, pero esta respuesta inicial (un procedimiento de base que es relativo a los saberes y conocimientos anteriores del alumno) no es la que se quiere enseñar, si la respuesta fuera ya conocida, no estaría en juego una situación de aprendizaje.
- Este procedimiento de base debe revelarse rápidamente insuficiente o ineficaz para que el alumno sea forzado a hacer acomodaciones, modificaciones de sus sistema de conocimiento. Hay incertidumbre del alumno en cuanto a las decisiones que debe tomar. Es esta momentánea pérdida de control lo que le da sentido al conocimiento que está por construirse, y que debe aparecer como el medio que permite suplir esta carencia.
- El conocimiento considerado a prior es requerido para pasar del procedimiento de base a la estrategia óptima.
- Hay un "milieu"[10] para la validación: el milieu permite retroacciones. A este respecto es necesario que exista un diálogo entre el niño y la situación, que, como dijimos anteriormente, ofrezca retroalimentación. La exclusión momentánea de un tercero en este diálogo, del maestro por ejemplo, es importante en cuanto a que se busca que el alumno se responsabilice de su propia relación con el conocimiento.
- El alumno puede empezar de nuevo

[10] En francés "medio", es específicamente preparado para que ofrezca retroacciones a las respuestas de los alumnos. Esta noción es esencial en la teoría de las situaciones didácticas.

Brousseau postula que para todo conocimiento (matemático) es posible construir una situación fundamental que pueda comunicarse sin apelar a dicho conocimiento, y para lo cual éste determina una estrategia óptima.

2.1.2 La noción de Contrato didáctico

Las interacciones entre docente y alumno se explican a través de la noción de contrato didáctico. El contrato didáctico describe la relación que sostienen docente y alumno a raíz de cierto objeto matemático. En la interacción en el aula se negocian significados, se transmiten expectativas y se establecen normas que van formando en los alumnos ciertas nociones sobre lo que se puede y no se puede hacer con respecto a cierta cuestión matemática. Esta serie de normas monitorean su accionar dentro de la clase (Sadovsky: 2005:15).

El contrato didáctico está regido por reglas de naturaleza muy diferente a las que se refieren a los conceptos mismos. Empero, el alumno justifica el uso de estas reglas usando conocimiento matemático. En cambio, otras reglas, no las justifica, pero las acepta y las pone en juego sin mucho cuestionamiento. Todas juntas constituyen el paisaje matemático relacionado a un campo de conceptos determinado establecido en el aula.

Si bien la construcción de las reglas del contrato didáctico se da dentro del aula, también tienen un origen social. Yacker y Cobb (1996 en Sadovsky, 2005:19) afirman que el aprendizaje de matemáticas es tanto un proceso de construcción individual como un proceso de enculturación hacia las prácticas matemáticas dentro de una sociedad más amplia. Para dar cuenta de este origen social se habla de normas sociomatemáticas que son el resultado de las interacciones en la clase entre el docente y los alumnos, donde los alumnos reelaboran las normas a partir de la interpretación de gestos sutiles del docente que legitiman o no ciertos procedimientos. Estas negociaciones son a menudo implícitas y tienen lugar sobre una serie de cambios y deslizamientos sutiles, muchas veces sin que los participantes tengan conciencia de ello. Es un proceso de adaptación mutua en el curso del cual el maestro y los alumnos establecen expectativas de la actividad del otro y obligaciones para con la propia actividad (Sadovsky, 2005:19) y Cobb (1996 en Sadovsky 2005; 19).

2.1.3 El momento de Devolución e Institucionalización. El papel del docente.

Margolinas (1993 en Sadovsky, 2005:14) define al proceso de devolución como un proceso de negociación con el alumno, que se sostiene durante todo el transcurso de la situación adidática. Glorian (1993 en Sadovsky, 2005:14) añade además que en la devolución se logra que los alumnos asuman la responsabilidad matemática de los problemas. Para lograr esto, dice la autora, no basta que el profesor comunique la tarea a realizar ni que el alumno diga que la acepta. El proceso de devolución se dará si ambas condiciones se logran y, en algún punto del proceso de trabajo, los alumnos se van apropiando de la responsabilidad de resolver dicha tarea. Para el enseñante, la devolución consiste no solamente en proponer al alumno una situación que deba suscitar en él una actitud no convenida, sino también procurar que se sienta responsable de la obtención del resultado propuesto, y que acepte la idea de que la solución sólo depende del ejercicio de los conocimientos que ya posee.

La institucionalización, por otro lado, es la consideración del objeto de enseñanza por parte del alumno y del aprendizaje del alumno por parte del maestro. Esta fase es un fenómeno social importante y una fase esencial del proceso didáctico. Brousseau afirma que éste es producto del trabajo diario que hace un docente al tomar nota de lo que han hecho sus alumnos, al describirlo y al relacionarlo con el conocimiento que se apunta, al dar un estatuto a los conocimientos en su clase y asumir un objeto de enseñanza, identificarlo y relacionarlo con las producciones de otros, ya sean culturales o del programa. En los procesos de institucionalización la participación del docente es central, como portador de un saber cultural. La institucionalización implica entonces un cambio de convención entre los actuantes, un reconocimiento (justificado o no), de la validez y de la utilidad de un conocimiento y una modificación de este conocimiento y de su funcionamiento. Hay cierta transformación del repertorio común aceptado y utilizado por sus protagonistas.

La devolución es simétrica a la institucionalización. Estas son las dos intervenciones didácticas del profesor sobre la situación “alumno-medio-conocimiento”. Glorian (1993 en Sadovsky, 2005:14) plantea que la institucionalización ocurre al momento mismo de la devolución: puede ocurrir que algunos alumnos, al enfrentarse a la situación, dispusieran ya de ciertos elementos para resolverla, pero que no los activan en el mismo momento de iniciada su interacción. El docente debe intervenir en este caso para activar dichos conocimientos. Y ésas intervenciones, en la medida en la que intentan sostener al alumno en la situación, entran en el marco de la devolución.

La institucionalización está imbricada en el proceso de devolución porque es necesario que el maestro construya, junto con su alumno un “proyecto” de adquisición de conocimientos. Dicho proyecto del alumno está intervenido por 1) la representación que tenga el alumno hasta ese momento del objeto matemático con el que se está trabajando, 2) aquello que ha ido organizando y estructurando como producto de su práctica escolar y 3) las expectativas que piensa que se tienen sobre él.

Estos elementos se retomarán en el cuarto apartado del cuarto capítulo, donde se analizan algunos aspectos de la práctica de la docente con quien tuvimos oportunidad de trabajar a la luz de estos conceptos.

2.1.4 Las 4 fases de la Ingeniería didáctica

La Ingeniería didáctica devino de los trabajos en didáctica de las matemáticas durante la década de los 80´s. Se le denominó así a un tipo de trabajo que intenta equipararse con el del ingeniero: tiene una base científica bien controlada pero se ocupa a la vez de objetos complejos no depurados por la ciencia. En palabras de Artigue (1995) "objetos de los que la ciencia no puede o no quiere hacerse cargo". Chevallard (1982, en Artigue 1996) escribió el objetivo de la Ingeniería didáctica

"*Definir el problema de la ingeniería didáctica es definir, en su relación con el desarrollo actual y el porvenir de la didáctica de las matemáticas, el problema de la acción y de los medios para la acción, sobre el sistema de enseñanza".*

En una acepción posterior de la ingeniería didáctica, esta refiere a una metodología de investigación (Artigue, 1006) que incluye la elaboración de un diseño experimental basado en la concepción, realización, observación y análisis de secuencias de enseñanza. Aquí se distinguen dos niveles, el de microingeniería, referido a secuencias usualmente más cortas y más sencillas de aplicar y el de macroingeniería, referido a diseños más amplios. La ingeniería didáctica se inserta en un tipo de estudio de caso y su validación es interna, es decir, está basada en un análisis a prior y a posteriori de los resultados de la implementación del diseño experimental.

Esta metodología comprende 4 fases: 1) Análisis preliminar, 2) Concepción y Análisis a priori de las situaciones didácticas de la ingeniería, 3) Experimentación y 4) Análisis a posteriori y evaluación.

La primera fase, el análisis preliminar, se caracteriza por un estudio exhaustivo del contenido matemático con el que se trabajará y de su análisis epistemológico, el análisis del modo de enseñanza con el que se ha presentado y sus efectos así como las concepciones de los estudiantes y los obstáculos que han impedido su evolución. Incluye también un análisis del campo donde se efectuará la implementación. No se centra solamente en los antecedentes empíricos que dan fe de trabajos anteriores con dicho contenido o en los conocimientos didácticos previamente adquiridos (Artigue, 1995:38). No es entonces un conteo de investigaciones precedentes que, si bien sí se revisan, no constituyen el cuerpo del análisis.

Esta fase toma elementos de varias fuentes:

- El análisis epistemológico de los contenidos contemplados en la enseñanza.
- El análisis de la enseñanza tradicional y sus efectos.
- El análisis de las concepciones de los estudiantes, de las dificultades y obstáculos que determinan su evolución.
- El análisis del campo de restricciones donde se va a situar la realización didáctica efectiva. Este análisis se realiza considerando tres dimensiones: la dimensión epistemológica (características del saber en juego), la dimensión cognitiva (características cognitivas de los alumnos), la dimensión didáctica (características del funcionamiento del sistema de enseñanza) (Solares, 1999:50).

Con base en estos elementos se considera un diseño didáctico que se pondrá en marcha sobre un grupo escolar experimental.

La segunda fase, concepción y análisis a priori, es una acción sobre las variables de comando y también un análisis de control de significados. Las variables de comando son aquellos elementos que el investigador perciba como pertinentes de tomarse en cuenta durante el diseño y toma la decisión de actuar sobre ellas. Se distinguen dos tipos de variables de comando:

• Las *variables macro-didácticas* o *globales*, concernientes a la organización global de la ingeniería

• Y las *variables micro-didácticas* o *locales*, concernientes a la organización local de la ingeniería, es decir, la organización de una secuencia o de una fase.

Tanto unas como otras pueden ser en sí variables generales o dependientes del contenido didáctico en el que se enfoca la enseñanza. Sin embargo, en el nivel micro-didáctico esta distinción es clásica, ya que se diferencian las variables asociadas con el problema de las variables asociadas con la organización y la gestión del "medio" (Brousseau, 1986 en Artigue 1955:43). Y entre estas, las variables didácticas son aquellas cuyo efecto didáctico se ha corroborado.

El segundo objetivo de esta segunda fase es determinar en qué medida -y cómo- las selecciones hechas en la fase anterior permiten dar cuenta del comportamiento de los estudiantes y su significado. Es por ello que el análisis a priori está basado en un conjunto de hipótesis, las cuales se verán confirmadas o refutadas en el momento en que se confronten los análisis a priori y a posteriori (Artigue, 1995:42). El análisis a priori está constituido por una parte descriptiva y otra predictiva centrándose en las características de una situación a-didáctica:

- Se describen las selecciones del nivel local (variables microdidácticas concernientes a la organización de una secuencia) y las características de la situación didáctica que de ella de desprenden.
- En función de las posibilidades de acción, selección, decisión y validación del estudiante, se analiza qué es lo que podría estar en juego una vez que la situación se pone en acto sin la intervención del profesor.
- Se prevén comportamientos posibles y se trata de demostrar cómo el análisis permitirá controlar los significados así como el hecho de que los comportamientos deseados son resultado del aprendizaje obtenido.

La tercera fase a la que Artigue llama experimentación consiste en la puesta en marcha del diseño construido. Tras recabar los datos necesarios, se confrontan con el análisis a priori. Al momento de confrontar estos análisis es cuando comienza el proceso de validación de las hipótesis, que como se dijo es una de las grandes características de este enfoque metodológico. El proceso de validación interna que se encuentra en juego se fundamenta en el principio de que las diferencias cuantificables constatadas en clase se relacionan con las variables de comando sobre las cuales se ha buscado influir. En este tipo de trabajos la confrontación de los dos análisis, a priori y a posteriori, permite la aparición de distorsiones permitiendo ampliar la información obtenida durante la experimentación; no sólo concretándose a una serie de marcos preestablecidos. Como se ve, el proceso de validación diverge de los esquemas habituales de validación estadística.

2.2 Consideraciones metodológicas pertinentes a este trabajo

Este apartado se centra en la descripción de la metodología que se utilizó en la elaboración de este proyecto, así como la manera en la que se llevó a cabo el análisis de los datos recabados.

Como se dijo anteriormente, la ingeniería didáctica considera un diseño experimental, con elaboración de hipótesis que se comprueban en el aula. Se busca entonces la comprobación de determinadas hipótesis sobre la emergencia de las fracciones a raíz de un trabajo con razones. A través del análisis de los procedimientos de los niños, se busca saber si ciertos problemas en condiciones didácticas específicas pueden suscitar que los alumnos logren transitar de una razón expresada con dos números naturales a una fracción, ampliando su noción y comenzando a concebirla como una medida, una razón y un cociente.

Para ello, se han revisado las diferentes clasificaciones que se han propuesto para la fracción, así como su posible vinculación con la noción de razón, dentro de una relación de proporcionalidad. En este tenor se eligen tres sub secuencias articuladas que ponen en juego diferentes papeles de la fracción. Reparto de pasteles y Los pasos del robot, en las que la fracción es una medida y puede comenzar a concebirse como un cociente. Tratos buenos y no tan buenos, donde la razón se encuentra más explícita y la fracción es, formalmente, la expresión de dicha razón (a la vez que juega como un operador). Estas secuencias se toman de los estudios anteriores de un equipo de trabajo (Block y Solares 2001), se hacen ciertas adaptaciones y se ponen a prueba en condiciones distintas[11].

Como parte de los análisis preliminares de la experiencia de Ingeniería Didáctica se aplicó un cuestionario exploratorio para obtener información sobre el grupo con el que haríamos la experiencia, con respecto a tareas que implican sus nociones de razón y fracción. Si bien las primeras situaciones de la experiencia permiten hacer una caracterización inicial del desempeño de los alumnos, en este nos

[11] El contexto del reparto de pasteles para introducir fracciones se ha explorado ya desde hace mucho, ver por ejemplo (Balbuena, et. al., 1984, Streefland, 1993), y su uso dirigido a obtener una generalización (a pasteles entre b = a/b de pastel) fue estudiado por Block en su tesis doctoral (2001). Con respecto a la secuencia de los Pasos de los Robots, Block y Solares prueba una versión más extendida que la que se usa en este trabajo en un grupo de 5° grado de primaria. Finalmente, la secuencia “Tratos buenos, no tan buenos”, diseñada pro Block para su trabajo doctoral, no había sido experimentada antes, lo es ahora en el presente estudio por primera vez. Más allá de ello, una característica de la experiencia que se hace el presente estudio es la aplicación simultánea de las tres secuencias, en el marco de un proyecto que buscar relacionar tres aspectos: razón, cociente y fracción.

interesaba sondear el desempeño con respecto a las tres sub secuencias, con la suficiente anticipación para tomar poder tomar decisiones. Contenía tareas que implicaban comparaciones de razones, porcentaje y trabajo con fracciones como fragmentos de unidad.

No fue la única evaluación que se hizo. Tras la secuencia de los pasos del robot y debido a la manera en la que ésta se desarrolló, se buscó verificar mediante un examen el desempeño de los alumnos frente a tareas idénticas a los que se habían presentado durante la clase.

Finalmente, un mes después de finalizada la implementación, se aplicó otra evaluación con dos objetivos: el primero, indagar sobre el efecto del paso de un lapso breve de tiempo en el desempeño logrado en las tareas con las que se había trabajado; en segundo lugar, saber si los alumnos trasladaban lo aprendido a otros contextos cercanos pero distintos a los que se habían planteado durante la sub secuencia, y donde se jugaba la razón como fracción pero en un contexto diferente[12]. Estas evaluaciones fueron auxiliares en la construcción de los tres casos individuales que se analizaron al final de cada sub secuencia, permitiendo detenernos en el análisis de detalles más específicos de la trayectoria de cada alumna y, por ende, del funcionamiento del diseño didáctico.

La experimentación se llevó a cabo con un grupo de sexto grado de primaria de una escuela pública del Distrito Federal, por espacio de cuatro meses, una vez por semana. Las clases fueron conducidas por la profesora del grupo, previa reunión para cada sesión con el equipo del diseño de la secuencia. En estas reuniones se discutían aspectos tanto de la secuencia aplicada durante la semana como de la que se aplicaría la siguiente vez (se discutían aspectos desde contenido hasta la organización de la clase). En ese sentido, la participación de la profesora fue muy importante ya que fue ella quien conduciría las clases y transmitiría las consignas. Por lo tanto, la manera en la que comprendió la ficha didáctica y el contenido a trabajar, fue decisivo al momento de la implementación[13].

[13] La decisión de que fuera la maestra del grupo quien condujera las sesiones vital .responde a dos motivos: por una parte, por su conocimiento del grupo y, sobre todo, porque nos interesaba estudiar también el grado de accesibilidad de la propuesta didáctica para un maestro. Sobre ello volveremos en las consideraciones finales.

Las modificaciones al diseño se realizaban semanalmente, considerando lo que había pasado en la clase anterior y lo que se tenía previsto para la siguiente.

Era un grupo de 32 niños, y no se pretendió rendir cuenta de lo que cada uno realizó. Sin embargo se intentó tener registro de una cantidad representativa y de dar seguimiento a quienes se observó desde el inicio. Tras este análisis global, y tomando la información del video, de las notas de observación y del material físico (fichas de trabajo y evaluaciones) se presentan los casos de tres alumnas cuya trayectoria permite observar la secuencia en un nivel más micro, además de intentar abarcar tres niveles de desempeño dentro del aula: el caso de Maribel, una alumna con una comprensión mayor; Carmen, una niña que logra mejorar sus resultados a medida que avanza la secuencia y finalmente Karla, quien mostró dificultades para apropiarse del contenido. Las clases fueron videograbadas y dos observadores tomaron notas escritas. De este material se obtiene un registro de cada clase. Los observadores intervinieron algunas veces durante su interacción directa con los niños[14].

El análisis que se presenta es una síntesis sobre lo acontecido en cada clase, destacando los posibles efectos de algunas variables sobre los procedimientos que mostraron los alumnos, indagando si éstos permitieron la comprensión del contenido en juego o no. Se centra en gran medida en el análisis previo de cada clase, considerando los procedimientos esperados pero dando un amplio espacio a los procedimientos mostrados por los niños.

2.3 Trayectoria de las tres alumnas de quienes se hizo un seguimiento:

Estos tres casos fueron seleccionados entre los alumnos de desempeño intermedio[15] una vez que se terminó con la primera versión del análisis de las clases. Se seleccionaron en base a la cantidad de información que se obtuvo sobre ellos y la particularidad de su diálogo con la secuencia. En este apartado, se explica sucintamente las razones de la elección de cada uno. Su trayectoria durante la secuencia será expuesta de forma más detallada en el capítulo de análisis de resultados.

[14] Recordemos que la metodología de la Ingeniería Didáctica, permite ciertas intervenciones de parte del observador siempre y cuando sean con la finalidad de obtener más información sobre lo observado.
[15] Se descartó a los alumnos cuyo desempeño se hallaba en los extremos, muy satisfactorio y muy poco satisfactorio.

2.3.1 Karla

El caso de Karla resulta importante por la dificultad que mostró para lograr entender las situaciones que se le presentaron. Su profesora comentó que es una alumna con dificultades para la materia de matemáticas y que, en su afán de auxiliarla en la comprensión de los contenidos, se empeñaba en que Karla participara en las clases y pasara al pizarrón. Esta práctica pudo verse durante la experimentación, y en repetidas ocasiones escuchamos sus procedimientos. Esto, aunado a la facilidad que presenta la niña para verbalizar su confusión nos llevó a recabar más información sobre sus respuestas que la que obtuvimos con otros niños.

En el primer cuestionario, Karla resolvió 4 de 27 preguntas, lo que la ubica en el lugar 21 de 23 alumnos calificados, uno de los puntajes más bajos. En el cuestionario final obtiene 6 aciertos de 9 en total, colocándose en el lugar 11 de 29 niños. Su resultado del primer cuestionario está por debajo de la media de las calificaciones del grupo, pero en el cuestionario final mejoró. Cabe decir que más allá de su ubicación dentro del grupo, su desempeño mejoró a lo largo de la experiencia.

2.3.2 Carmen

El caso de Carmen me interesó, por una parte, por su persistencia al resolver los problemas y el avance observado durante la experiencia didáctica. Fue especial además por la cercanía que tuve con la niña durante mi trabajo como observadora, y quien varias veces me comentó su dificultad para la materia de matemáticas. Al respecto, su profesora la ubica en “la media” del salón; con algunas dificultades para comprender ciertos contenidos pero dispuesta a trabajar en ello, actitud que se corroboró en las clases experimentales, siendo la integrante más participativa dentro de su propio equipo.

En el primer cuestionario, Carmen obtuvo 8 aciertos de un total de 27 preguntas, ubicándose en el lugar 18 de los 23 niños que contestaron el cuestionario, es decir, está entre los resultados más bajos, pero en el cuestionario final se ubica en el cuarto lugar, es decir, entre los más altos. Esto parece señalarnos que fue una alumna que, al igual que Karla, logró mejorar su desempeño durante la secuencia.

2.3.3 Maribel

Maribel también trabajó de cerca con uno de los observadores, por lo que la información recabada es mayor que la que se tiene sobre otros niños. En palabras de su profesora, Maribel es una alumna con un buen desempeño en la materia de matemáticas, lo que se pudo constatar durante la experimentación. En el primer cuestionario, obtuvo 17 aciertos de 27, ubicándose en el segundo lugar del grupo, detrás de Germán. En el cuestionario final, sin embargo, su desempeño se ubica entre los intermedios, con 5 aciertos de 9, con lo que se vio rebasado por el de las dos alumnas anteriores.

No obstante, durante la experiencia pudimos observar su facilidad para trabajar en el terreno de las razones y hacer algunos enlaces con su expresión decimal. Con frecuencia sin embargo le sucede que pierde de vista algún dato alguna relación, y comete errores.

Capítulo 3

La secuencia

Un abordaje desde tres frentes

La secuencia que se planteó está articulada por tres sub secuencias: Reparto de pasteles, Los pasos del robot y Tratos buenos y no tan buenos[16]. Hay que destacar que estas secuencias no poseen una secuenciación lineal, no hay una transferencia posible de los primeros contextos, es decir, no se espera una transferencia de conocimientos una a otra sino una construcción en contrapunto, esto significa que los avances de una no son antecedente de la otra, por la manera en la que está diseñada la secuencia no se espera que los alumnos apliquen lo logrado en una a la siguiente. Hay una relación más estrecha entre “Reparto de pasteles” y “Los pasos del robot”, puen en ambas está en juego la división de una cantidad, empero, su posible interrelación se logra solo en un nivel más abstracto. En la tercera y última, la fracción toma otro significado. Entonces, se intentó abordar la misma problemática desde diferentes frentes; el trabajo con la razón como antecedente para la emergencia de la fracción, a través de dos de sus significados: como medida y cociente, en un caso, y como operador en el otro.

Como se vio en el apartado anterior una razón, al igual que la fracción que la expresa, puede jugar diferentes papeles en una situación multiplicativa. En el presente estudio sobre el paso de la razón a la fracción, consideramos dos casos: 1) La fracción es un cociente calculado y expresa una medida, la razón es un “cociente indicado” (las magnitudes son de distinta naturaleza) y 2) La razón es una relación parte-parte o parte-todo, la fracción expresa la relación y no tiene dimensión (las magnitudes también son de distinta naturaleza). Ambos casos se explican a continuación.

[16] El presente capítulo contiene el análisis del diseño didáctico que se implementó al grupo, explicando detenidamente cada puesta en juego de la fracción así como los procedimientos que se buscó propiciar. En el capítulo siguiente, se retoman sólo algunos aspectos del análisis previo en determinadas clases, cuando se consideró necesario hacer una clarificación mayor. El resto contiene sólo algunas notas adicionales.

3.1 Primer caso: la razón es un "cociente indicado", la fracción es el cociente calculado y expresa una medida, tiene dimensión. Las magnitudes son de distinta naturaleza.

El cociente de la división de, por ejemplo, "3 pasteles entre 5 niños", es una fracción: 3/5 de unidad. Sin embargo, es posible saber que, por ejemplo, la porción resultante de "3 pasteles entre 5" es mayor que la que resulta de "3 pasteles entre 7 niños" o es del mismo tamaño que la resulta de "6 pasteles entre 10 niños", sin necesidad de hacer explícita a la fracción. Es decir, las fracciones pueden quedar implícitas en los cocientes indicados.

El interés didáctico de esta observación es relevante pues deja ver la posibilidad de que los alumnos trabajen con razones de números naturales antes de hacerlo con fracciones. Dicho en otros términos, las razones pueden jugar como precursoras de las fracciones, con el doble beneficio de permitir a los alumnos explorar las relaciones de proporcionalidad al mismo tiempo que se da lugar a un enriquecimiento del significado de las fracciones. (Block, 2001; 2004; 2007) Las fracciones, en este contexto son cocientes (resultan de una división) pero también son medidas (3/4 de unidad). Los cocientes indicados que las preceden son razones.

3 niños → 4 pasteles 6 niños → 8 pasteles	Cocientes indicados, razones
1 niño → ¾ pastel	La fracción es el cociente de 3 entre 4, y es una medida.

Para este primer caso, distinguimos dos sub casos: cuando la magnitud que se divide es continua y cuando es una combinación de discreta y continua. El caso del reparto de pasteles es de éste último tipo: los pasteles pueden ser considerados en un primer momento como una cantidad discreta a repartir. Es cuando el dividendo es menor que el divisor, que la magnitud que se divide, ya sea pastel, masa, o incluso superficie (en las representaciones planas) es tratada como continua. Sin embargo, como veremos enseguida, aun en ese caso, el hecho de que se trate de varios pastelitos separados unos de los otros, puede dar lugar a procedimientos que no ocurren cuando se trata de una sola cantidad continua.

Entre las muchas formas posibles de repartir, por ejemplo, 3 pastelitos entre 4, una que es ventajosa, no desde el punto de vista práctico sino del de la obtención de la fracción que resulta, consiste en repartir cada pastelito entre 4. Esto permite ver rápidamente que de cada pastel, toca a cada persona, ¼ de pastel, y como son 3 pasteles, en total tocan ¾ de pastel a cada una. El mismo razonamiento se sostiene para cualquier número de pasteles y cualquier número de partes: *n* pasteles entre *m* es *n* veces 1 pastel entre *m*, es decir, *n* veces 1/m de pastel o *n/m* de pastel.

El procedimiento anterior, sin embargo, no se favorece en situaciones como la de dividir una longitud de listón de 3 metros en 4 partes iguales. Ahí no tiene sentido pensar en dividir cada metro de listón entre cuatro para luego formar un listón con los tres pedazos. Este contexto favorece otros procedimientos para hallar la fracción, sobre todo el de ensayo y error. También puede considerarse una especie de escala, de la siguiente manera: si el listón midiera solamente un metro, cada pedazo mediría ¼ de metro, pero como mide el triple, los pedazos deben ser del triple de ¼, es decir de ¾ de metro.

Cabe observar que el parecido del procedimiento que consiste en pensar en una escala en la que se divide solamente una unidad, con el de “repartir pastel por pastel”, es meramente formal. En el segundo caso, el del reparto de pasteles, la división de una unidad aparece como una manera concreta en que se podría llevar a cabo realmente el reparto, mientras que en el primero, la división de una unidad no es más que una hipótesis (si solo hubiera una unidad….), una construcción mental que facilita un camino para resolver. Por ello, es bastante explicable la observación que se hace en el estudio citado (Solares & Block, 2001) en el sentido de que los alumnos no transfieren la estrategia puesta en juego en el reparto, al caso de la división de una sola longitud.

En el presente estudio consideraremos por lo tanto los dos casos, magnitud continua y magnitud discreta/continua, en las secuencias: “El reparto de pasteles” y “Los pasos del Robot”.

3.1.1 Reparto de pasteles

En esta secuencia se plantea a los alumnos que se divida cierto número de pasteles entre una cantidad constante de personas. La primera pregunta pide que se repartan dos pasteles entre cinco personas y que lo ilustren. Luego el reparto será de sólo un pastel entre las mismas cinco personas para después aumentar el reparto a tres pasteles. Mantener la cantidad constante de personas entre las que se debe dividir el pastel ayuda a que se genere una razón: si se reparten dos pasteles, a las 5 personas, les toca *lo doble* que si se hubiera repartido un pastel; o si se reparten 7 pasteles, a las 5 personas les tocaría 7 veces más que lo que les tocaría si se hubiera repartido un pastel. Ese "doble", ese "siete veces " son las razones (internas) que se pueden usar gracias a que el número de personas es constante.

Al incluir en los repartos el caso de un solo pastel entre 5 personas se apela a intentar provocar el procedimiento que puede servir de base para deducir el resto de los repartos: si un solo pastel entre 5 personas toca a 1/5 de pastel por persona, entonces 3 pasteles entre 5 personas tocará a 3/5 de pastel, y así sucesivamente. Se espera que en algún punto los niños establezcan la relación *m* pasteles para *n* niños es igual a *m/n* de pastel por niño. Esta misma conclusión se busca en la siguiente sub secuencia, aunque el caso que apela al valor unitario no está explicitado.

3.2.2 Los pasos del robot

Al igual que en la anterior, en esta sub secuencia la fracción nuevamente expresa una medida y un cociente, esta vez con la magnitud longitud. Se proponen una serie de casos de robots el caso que avanzan *a* unidades en *b* pasos, y se pide encontrar r la medida del paso. Esto con la finalidad de establecer que el cociente de *a* unidades entre *b* es la fracción *a/b* de unidad. Por ejemplo, el robot A avanza 3 unidades en 5 pasos, la medida del paso será de 3/5 de unidad. De nueva cuenta, el número de pasos se mantiene constante (en una clase se trabaja con un robot que avanza distinto número de unidades pero mantiene la misma cantidad de pasos) estableciendo una relación constante entre unidades/pasos para cada robot. La razón entonces se encuentra implícita. Esta relación quiso favorecerse a través del procedimiento de concebir el caso del robot que avanza una unidad: El robot E avanza sólo <u>1 unidad</u> en 3 pasos y la distancia que recorre en un paso es igual a 1 ÷ 3 = 1/3 de unidad. El robot G, en 3 pasos, avanza 4 <u>unidades</u>, es decir, avanza 4 veces más que el Robot E

Entonces la distancia que el Robot G avanza en un paso debe ser <u>cuatro veces</u> la que avanza el robot E: 4 veces 1/3, esto es, 4/3 de unidad. Por lo tanto, 4u ÷ 3 = 4 *veces* 1/3 = 4/3 de u.

Éste es un procedimiento muy económico que también conduce a una técnica general. No obstante, ponerlo en juego es difícil pues implica tomar en consideración información que no se da directamente (el tamaño del paso del robot que avanza una unidad en el mismo número de pasos) y poner en juego un razonamiento proporcional: a *n* veces más unidades avanzadas, corresponde un paso *n* veces mayor, si el número de pasos es el mismo.

La dificultad que acarrea el cambio de tipo de magnitud (cambiar de magnitud[17] "pasteles" a distancia) para los alumnos está documentado en el estudio de Solares (199?). En dicha investigación se demuestra que el procedimiento que consiste en pasar por la partición de una sola unidad como vía para acceder a una técnica general, es más accesible en el reparto de pastelitos, en basta con pensar en "repartir pastel por pastel", que en el caso de la subdivisión de una distancia, en donde hay que pensar en la situación hipotética de que la distancia es igual a una unidad. Para los alumnos, al estar trabajando con pasteles, parece resultar más fácil imaginar que un pastel se divide en 5 partes de las que se tomarán dos. Pero en la magnitud distancia, esta misma "imagen" es difícil de evocar puesto que las unidades están dispuestas de forma lineal, no es posible "sacar" una parte para encontrar la medida del paso: los pasteles pueden ser considerados en un primer momento como una cantidad discreta a repartir. Es cuando el dividendo es menor que el divisor, que la magnitud que se divide, ya sea pastel, masa, o incluso superficie (en las representaciones planas) es tratada como continua. Sin embargo, como veremos enseguida, aun en ese caso, el hecho de que se trate de varios pastelitos separados unos de los otros, puede dar lugar a procedimientos que no ocurren cuando se trata de una sola cantidad continua.

Entre las muchas formas posibles de repartir, por ejemplo, 3 pastelitos entre 4, una que es ventajosa, no desde el punto de vista práctico sino del de la obtención de la fracción que resulta, consiste en repartir cada pastelito entre 4. Esto permite ver rápidamente que de cada pastel, toca a cada persona, ¼ de pastel, y como son 3

[17] Durante la segunda clase de "Los pasos del robot" un de las alumnas, Nataly, hace muy evidente este problema de cambio de magnitud. Y durante la primera clase, la profesora busca una generalización muy temprana al intentar relacionar ambas sub secuencias. Ambos ejemplos pueden verse en el capítulo IV "Análisis de la implementación en el aula".

pasteles, en total tocan ¾ de pastel a cada una. El mismo razonamiento se sostiene para cualquier número de pasteles y cualquier número de partes: n pasteles entre m es n veces 1 pastel entre m, es decir, n veces 1/m de pastel o n/m de pastel.

El procedimiento anterior, sin embargo, no funciona en situaciones como la de dividir una longitud de listón de 3 metros en 4 partes iguales. Ahí no tiene sentido pensar en dividir cada metro de listón entre cuatro para luego formar un listón con los tres pedazos. Este contexto favorece otros procedimientos para hallar la fracción, sobre todo el de ensayo y error.

Hay procedimientos más sistemáticos, pero éstos no aparecen fácilmente sin ayuda: de entrada, se puede pensar en una aproximación por ensayo y error**.** Pensar una medida del paso (ya sea, fraccionando cada unidad en cualquier número de partes, en décimos o bien en el número de pasos que da el robot), iterarla o multiplicarla para después modificarla progresivamente hasta obtener la medida más cercana. Fraccionar cada una de las unidades del recorrido en un número partes iguales para después dividir ese total de partes de unidad entre el número de pasos y obtener el tamaño de los pasos (así, se pueden obtener fracciones no unitarias). Pueden también recurrir al algoritmo de la división con cociente decimal. Por ejemplo, 4u÷3 = 1.33, pero existe la posibilidad de que no sepan cómo interpretar ese cociente.

Finalmente, alguno puede recurrir al procedimiento que se desea propiciar**:** apoyo en el robot que avanza una unidad. Se puede encontrar el resultado mediante el siguiente razonamiento: El robot E avanza sólo 1 unidad en 3 pasos y la distancia que recorre en un paso es igual a 1 ÷ 3 = 1/3 de unidad. El robot G, en 3 pasos, avanza 4 unidades, es decir, avanza 4 veces más que el Robot E. Entonces la distancia que el Robot G avanza en un paso debe ser CUATRO VECES la que avanza el robot E: 4 veces 1/3, esto es, 4/3 de unidad. Por lo tanto, 4u ÷ 3 = 4 *veces* 1/3 = 4/3 de U.

Cabe observar que el parecido del procedimiento que consiste en pensar en una escala en la que se divide solamente una unidad con el de “repartir pastel por pastel” es solamente formal. En el segundo caso, el del reparto de pasteles, la división de una unidad aparece como una manera concreta en que se podría llevar a cabo realmente el reparto, mientras que en el primero, la división de una unidad no es más que una hipótesis (si solo hubiera una unidad….), una construcción mental que facilita un camino para resolver.

Cuando se enfrentan a este cambio, los niños no intentan hacer una traspolación de lo que ya conocen a esta nueva situación; y no lo intentan porque los cambios de contexto les impiden, muchas veces, reconocer en el nuevo problema el mismo que venían trabajando antes, en este caso, las unidades de longitud no se pueden repartir una por una como pastelitos, y al ver esto, los alumnos entran en conflicto con el nuevo problema propuesto, lo que moviliza procedimientos diferentes. Empiezan de nuevo con métodos de ensayo y error o aproximaciones. También pasa que por indicios de lo que podría llamarse contrato didáctico sospechen que debe tratarse de lo mismo que hicieron con una situación anterior. En esos casos puede ser que logren una transpolación exitosa, o que lo logren sin entender lo que están haciendo, o que no lo logren.

3.2 Segundo caso: La razón es una relación parte-parte o parte-todo; la fracción expresa la relación y no tiene dimensión. Las magnitudes son iguales.

En el segundo caso que consideraremos la razón es una relación entre valores de una misma magnitud, como la escala, el interés bancario, las tasas de diversos tipos. La fracción que emerge, expresa además de una razón, un operador, una constante de proporcionalidad, y no tiene dimensión. En estos casos frecuentemente se utiliza también un porcentaje. En el esquema se ejemplifica con el impuesto “3 pesos de cada 10”

3/10

La fracción expresa una razón. Es también un operador, una constante de proporcionalidad.

10 pesos → 3 pesos

20 pesos → 6 pesos

Razones parte todo

3.2.1 Tratos buenos y no tan buenos

En las dos sub secuencias anteriores la fracción expresa un cociente y una medida, mientras en ésta se trae a juego una relación de cantidades de la misma magnitud (tratos de naranjas). En las anteriores la razón era un cociente indicado, en ésta la idea de razón es mucho más explícita y la fracción juega también el papel de operador. Se comienza trabajando directamente con la comparación de razones del tipo “En la huerta A te dan 2 de cada 3 naranjas que recojas mientras en la huerta B te dan 3 de cada 4 ¿en cuál te conviene más trabajar?”. Estas primeras comparaciones entre tratos es posible realizarlas sin cálculos, considerando sólo ciertas relaciones o bien quedándose en el terreno de la estimación. En esta primera parte fueron frecuentes las respuestas como “me conviene porque me dan casi todo” o “la mitad”.

Las comparaciones posteriores van exigiendo cálculos a fin de conocer qué trato conviene más (por ejemplo 3 de cada 5 o 6 de cada 9) para, finalmente, sugerir la comparación con razones expresadas ya no con números enteros, sino con fracción. De entrada se propicia la comparación con la fracción “1/2” para después proponer tratos como “te doy 1/3 de las naranjas que recojas”, esto en cuanto a comparación con fracciones unitarias; en la penúltima clase se propone la comparación con fracciones no unitarias. Se busca que los niños logren expresar las razones de la forma clásica (con números naturales, 2 de cada 3), que logren expresarla con una fracción (2/3 de lo que recojas) y que logren interpretar una razón ya expresada como fracción (2/3 de lo que recojas significa que te doy 2 de cada 3).

Como se ve, la razón aquí es explícita, y se ubica dentro de una relación de proporcionalidad. Es aquí donde se relaciona directamente con el papel de fracción como operador. Al establecer dicha relación (2 de cada 3; entonces 4 de cada 6; 6 de cada 9) se trabaja implícitamente con un operador externo (2/3) que significa que cada elemento del conjunto B es 2/3 del conjunto A (4 es 2/3 de 6, y 6 es 2/3 de 9). La expresión de la fracción 2/3 es, entonces, la expresión de una razón externa.

Con estos abordajes se buscó enriquecer el significado de la fracción de medida a cociente y operador, a partir de los razonamientos que los niños hacen al trabajar con razones.

Resumimos las sub secuencias y sus variables en el siguiente cuadro:

4 pasteles entre 6 niños	4 unidades en 6 pasos	Te doy 4 naranjas de cada 6 naranjas	Observaciones
Dos magnitudes distintas	Dos magnitudes distintas	Misma magnitud	En las situaciones de reparto se trabaja con la magnitud pasteles, pero en robots se trabaja con distancias.
Es un cociente indicado, evoca una medida, un valor unitario (cantidad de pastel por niño).	Es un cociente indicado, evoca una medida (el tamaño del paso)	Es una razón, o proporción.	En el primer caso, la razón está "velada", en el segundo es una razón explícita.
(4 p, 6n) = (2p, 3n) >(1p, 2n) En este nivel, aunque evoca medida, pone en juego también, en cierta medida, su carácter de razón, o proporción.	(4 u, 6p) = (2u, 3p) > (1u, 2p) Pueden hacerse comparaciones entre razones, sin pasar por las fracciones (4 u,6 p) = (1 u 2 p) Al recurrir al valor unitario, se pone en juego una proporción.	(4 de cada 6) = (2 de cada 3) > (1 de cada 2)	Pese a las diferencias, como razones expresadas con dos números naturales los tres casos funcionan igual.
4/6 de pastel puede obtenerse desde la definición de quebrado, dividiendo cada pastel 4p : 6 = 4 X (1p: 6) = 4X1/6 = 4/6	La medida del paso 4/6 se puede obtener mediante la hipótesis de que el recorrido es de una sola unidad: 1u: 6 = 1/6 de u, y luego "amplificando" 4 veces: 4n :6 = 4 veces 1/6 de u = 4/6 de u	Te doy "4/6 de las naranjas" puede obtenerse desde la definición de quebrado, considerando que al todo son 6 naranjas (así lo dicen los niños incluso), está dividido en 6 partes iguales, de las que se toman 4.	La manera de transitar a fracción es distinta aunque en ambos casos parte de la fracción quebrado conocida.

4/6 tiene dimensión: es porción de pastel (o bien, si la vemos como operador, es dimensión cociente “pastel por niño”)	4/6 de unidad sí tiene dimensión “unidad/paso”	4/6 no tiene dimensión es un escalar.	Como fracciones, representan cosas diferentes. 4 es el número de unidades el reparto y en cambio, en Tratos, el número de unidades es 6.
Los decimales pueden funcionar bien. De hecho, la tendencia es usarlos (como medidas, son muy claros y fáciles	Los decimales no darán la medida exacta del paso, es aquí donde se ve la conveniencia de usar fracciones. Si consideramos un robot que avanza 9 u en 7p vemos que podemos dividir 9 entre 7 obteniendo la medida del paso con cociente no entero (1.2685).	Los decimales no son prácticos, o son más complejos. Es más difícil entender “te dan 0.75 de lo que recojas” a entender te dan 3 de cada 4.	

Capítulo 4

Análisis de la secuencia didáctica

4.1 Reparto de Pasteles.

4.1.1 Clase 1

Notas adicionales al análisis previo [18]

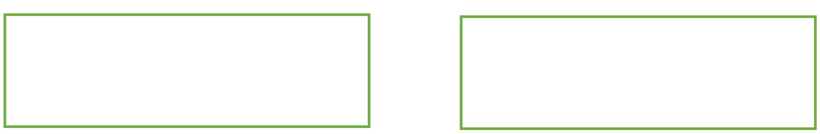
El propósito de esta primera clase fue lograr que los niños pasaran de la razón expresada con dos números naturales (***m*** pasteles para ***n*** niños) a la fracción: ***m/n*** de pastel por niño) o, dicho de otro modo "Establecer que el cociente de la división ***m*** unidades entre ***n***, es la fracción ***m/n*** de unidad".

Una manera de establecer que una división de ***m*** pasteles entre ***n*** personas es igual a la fracción ***m/n*** es considerar que se reparte pastel por pastel, pues en este nivel escolar los alumnos normalmente sí saben que un solo pastel entre ***n*** personas es **1/n** (ésta no es más que la definición de la fracción unitaria). Si de cada uno de los ***m*** pasteles se da a cada persona **1/n**, entonces a cada persona le toca, en total 1/n de pastel + 1/n de pastel (m veces), es decir, m/n de pastel.

Ficha 1

Cinco personas se quieren repartir dos pastelitos en partes iguales y sin que sobre nada.

1. Representa en los pastelitos de abajo la parte que le toca a cada persona.



2. ¿Qué fracción de pastelito le toca a cada una?
3. Si sólo se repartieran un pastelito entre las cinco personas, ¿qué fracción de pastelito le tocaría a cada una?
4. Julián dice que si las cinco personas se repartieran tres pastelitos, le tocarían a cada una 4/5 de pastelito. Busca una manera de saber si la respuesta de Julián es correcta o no.

[18] "El análisis previo de las secuencias de situaciones se encuentra en el capítulo 4. En este capítulo, únicamente se reporta cuando sea necesario recordar alguna característica del diseño, o explicar más detenidamente los procedimientos que intentaron propiciarse en cada clase.

Para las preguntas 1 y 2, si bien se espera que los alumnos repartan cada pastel entre los 5 personas basándose en la representación gráfica, lo que les facilitaría encontrar la respuesta 2/5 de pastel por niño. Puede ser que algunos, con poca o nula experiencia en repartos de este tipo, podrían hacer biparticiones dividiendo en mitades cada entero y luego en mitades de mitades, con lo que darían una respuesta del tipo "a cada persona ¼ y algo más"

El propósito de la tercera pregunta fue el de sugerir la partición en 5, pastel por pastel, a quienes no la hubiesen utilizado, pues esa partición es la que permitiría generalizar a cualquier número de pasteles.

Con la pregunta 4 se buscó que los alumnos que ya hubieran identificado la relación entre los datos del reparto y la fracción, la aplicaran en problema un poco distinto, y la hicieran más explícita. Los alumnos, basándose en dicha relación podrían contestar "es incorrecto porque al ser tres pastelitos deben ser 3/5 por niño y no 4/5"; o bien, "es incorrecta, porque si fueran 4/5 tendrían que haberse repartido 4 pasteles".

El problema se puede resolver también sin poner en juego esa relación, pero de manera más larga, sumando 5 veces la fracción que se da (4/5) y verificando que esa suma no da los 3 pasteles que supuestamente se repartieron, o bien, de manera aún más elemental y larga, haciendo el reparto con apoyo gráfico.

Los alumnos que no utilizaran la relación que interesaba, tendrían la oportunidad de ver cómo se podía usar en la puesta en común.

Análisis posterior

En esta sesión se identificaron dos aportaciones importantes. Nataly logró verbalizar la generalización esperada y Germán estuvo cerca de establecer un algoritmo. Las cuatro preguntas que componen la ficha marcaron el ritmo de la sesión, por lo que el análisis de la secuencia se dará conforme a éstas preguntas, deteniéndonos en los procedimientos que aparecieron. Al final se mostrará un análisis más detallado de tres casos particulares: Carmen, Maribel y Karla.

Logros importantes:

- Nataly logra concretizar la generalización esperada en el contexto de reparto. Es decir, establece que a ***m*** pasteles para ***n*** niños corresponde la fracción: ***m/n*** de pastel por niño.

En el momento de trabajo con su equipo, enuncia la generalización esperada: "*pueden ser ocho, nueve o siete pasteles, los que sean y siempre de un pastel se va a sacar un quinto, o sea si son siete pasteles van a ser siete quintos, si son ocho pasteles van a ser ocho quintos es lo mismo, entonces es…para que fuera éste (se refiere al resultado del problema) tendrían que ser cuatro pasteles para que fueran cuatro quintos"*

La niña parece tener claro que la relación entre número de pasteles y numerador es solamente mientras el número de niños sea constante y estuvo muy cerca de formular qué pasaría si cambiara el número de personas, cuando más adelante dice **"***ya si son más personas ya cambiaría un poco".* Esto se dio en la discusión de la pregunta cuatro, que también sirve para que Germán enuncie un algoritmo.

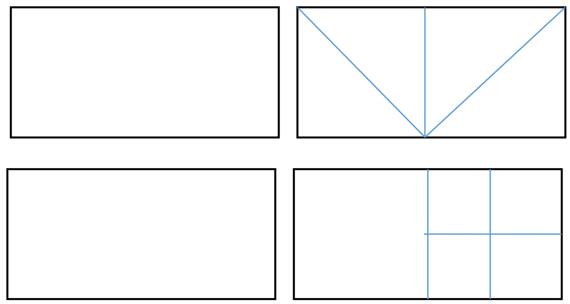
- Germán ofrece una afirmación cercana a establecer un algoritmo, pero no logra concretarse. Dice: *"si por cada pastel se le aumenta un quinto porque cada pastel representaría una persona que sería un quinto, deben ser ocho pasteles y serían ocho quintos. Depende de la cantidad de pasteles va a ser el denominador".*

El hecho de que verbalice correctamente la fracción "ocho quintos" permite asegurar que él sabe que lo que cambia con la cantidad de pasteles es el numerador, pero invierte los términos numerador y denominador.

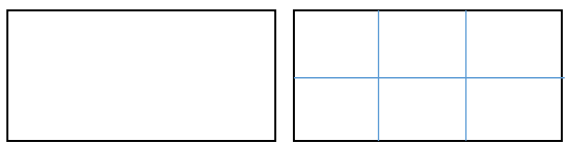
Pregunta 1 "Cinco personas se quieren repartir dos pastelitos en partes iguales y sin que sobre nada. Representa en los pastelitos de abajo la parte que le toca a cada persona"

La mayoría de los alumnos (29 de 32) partieron cada unidad en 5 partes, y de estos, la mayoría los hicieron de manera sistemática, mediante cuatro rayas más o menos equidistantes. Uno de los alumnos observados, José, logró la partición de cada unidad en cinco partes iguales solamente después de hacer varios ensayos, como se muestra a continuación:

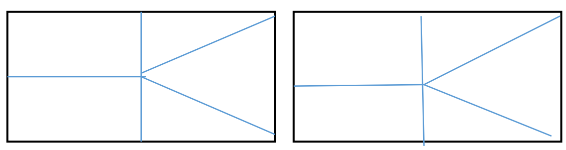
Divide en potencias de dos (dos, cuatro, ocho), quizá buscando partición en cinco. Esta es una tendencia común en experiencias de reparto (Dávila, 2002:139).



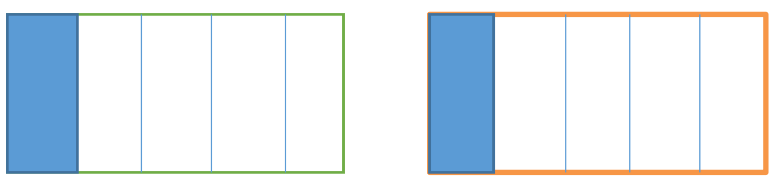
Aparece otro ensayo, le salen seis.



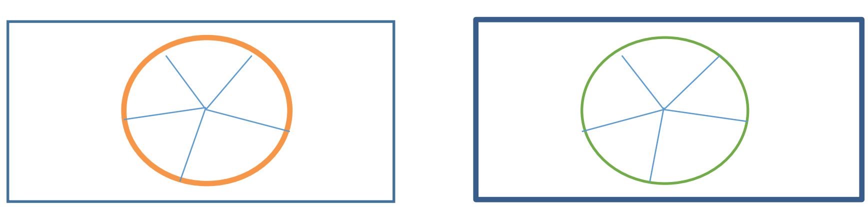
En cierto momento logra obtener 5 partes, pero no iguales.



Germán, por su parte, dividió la unidad directamente en cinco partes tomando una de cada una.



Y Adrián, aunque ofrece una representación inusual, acaba por mostrar el mismo procedimiento que Germán, tomar un quinto de cada unidad.



Puede decirse que prácticamente todos los niños del grupo de cuyo trabajo se tiene alguna evidencia, pueden llevar a cabo el reparto mediante el procedimiento que consiste en partir cada pastel entre el número de niños.

Pregunta 2 “¿Qué fracción de pastelito le toca a cada uno?”

A partir de la partición de cada unidad en quintos, por lo menos un integrante de cada equipo, determinó la fracción 2/5 de pastel (esta respuesta aparece en 29 de las 32 hojas). Solamente se identificaron dos respuestas incorrectas que proponen “1/2”.

Entre los procedimientos que arrojaron respuestas correctas, se identificaron dos: a) tomar 1/5 de cada uno de los dos pasteles para dar un resultado final de 2/5, o bien b) dividir los 10 pedazos entre 5 personas, toca a 2 pedazos por persona. Un ejemplo de la respuesta del tipo A es la que da Francisco Javier quien escribe: *“2/5 porque son dos pasteles y cada uno se divide en quintos y entre los 2 son 2/5”*. Una explicación menos clara, pero comprensible del primer tipo es la de Samantha; *“dos quintos porque si dividimos cada pastelito en cinco tenemos que repartir entre cinco si cada pastel tiene cinco partes y sólo agarras una te sobrarían cinco pastelitos, entonces tienes que darle de dos pedacitos”.*

Cuando Samantha dice que sobrarían 5 pastelitos, pensamos que se refiere a 5 quintos. Cuando explica que tomaría sólo “una”, parece querer decir que a cada quien da solamente un quinto y que por lo tanto sobran los cinco quintos del otro pastel. A pesar de esta explicación algo confusa, la niña da el resultado correcto.

Marijose nos da un ejemplo del tipo de respuesta B al decir que *“Yo dividí los pastelitos y de acuerdo a la imagen en total eran diez pedazos, así que le di dos pedazos a cada persona”* Esta niña cuenta las 10 rebanadas en total y reparte. Ella da como resultado “*2/5 para cada persona”.*

Otra de este segundo tipo pero expresada de forma más sistemática es la que da Tadeo con un juego de operaciones que resume así:

$$2/5 \text{ porque } 5\text{x}2=10\div5=2=2/5$$

Cabe observar que prever que el número de quintos que le tocarán a cada quien es igual al número de pasteles que se reparten, es más fácil con el primer procedimiento (asignar a cada persona 1/5 de cada pastel) que con el segundo (dividir entre 5 el total de quintos).

Pregunta 3 "Si sólo se repartiera un pastelito entre las cinco personas, ¿qué fracción de pastelito le tocaría a cada una?

Esta última pregunta buscaba ser una ayuda para quienes no hubieran pensado en repartir cada pastel en quintos, pero dado que la gran mayoría lo acabó haciendo, no tuvo una función importante.

Entre las respuestas más explícitas están la de Marijose *"un quinto porque como fue un solo pastel lo dividí en quintos y eran cinco personas entonces a cada una le toca una".* Revela una comprensión de la situación de reparto al igual que el caso de José, quien explica que *"un quinto a cada uno porque un entero se puede convertir en cuatro cuartos, cinco quintos, tres tercios, dos medios, un entero, seis sextos, etcétera, pero lo que tenemos que poner es cinco porque son cinco personas"* José revela una comprensión más amplia de la posibles divisiones de la unidad en un número indeterminado de partes.

Esta pregunta permitió, por otra parte, identificar a un alumno que demuestra desconocer aspectos básicos de la noción de fracción Adrián contesta nuevamente "1/2" y le agrega un círculo dividido en 5 partes, representando un único pastel, y escribe: *"Porque si es un pastelito y son 5 niños, se le tocaría de ½ a cada niño".*

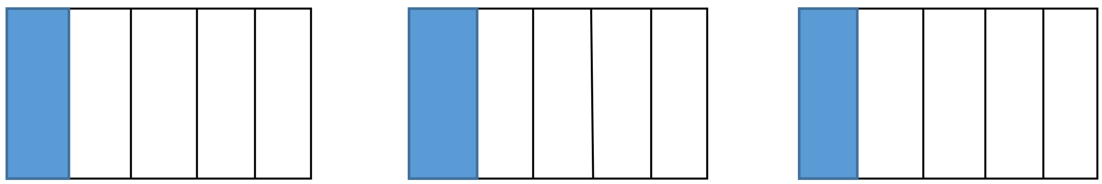
Pregunta 4 "Julián dice que si las cinco personas se repartieran tres pastelitos, le tocarían a cada una 4/5 de pastelito"

La pregunta cumplió bastante bien con el propósito de propiciar la explicitación de los procedimientos que usan para repartir, el de dividir el total de quintos entre el número de personas, y el de asignar un quinto a cada persona, por cada pastel, lo que lleva a la relación entre número de pasteles y numerador que se buscó privilegiar.

En la pregunta 4 catorce niños contestaron sin hacer ningún tipo de representación, sólo dando algunas explicaciones. El resto de los niños utilizaron algún modelo de representación para dividir los tres enteros entre las cinco personas. Catorce de ellos lo representaron de forma icónica, con tres rectángulos divididos entre 5 partes cada uno y 5 utilizaron una recta numérica.

A. Con apoyo en algún tipo de representación

Arturo, Nataly y Marijose dibujan tres rectángulos que representan sus pasteles, dividen cada uno en cinco partes porque “son cinco personas” y toman 1/5 de cada uno.



Cuando se les pregunta si la respuesta de Julián es correcta Marijose dice: “*Es que son 3 pasteles, esos pasteles se cortan en 5 porque obviamente son 5 personas, entonces de ahí le toca uno a cada quien pero aquí está mal porque dice que son 4/5, para que fueran 4/5 debe haber otro pastel, pero como son sólo 3 pasteles entonces por eso toca a 3/5”.* Al afirmar que para que fueran 4/5 haría falta otro pastel comienza a perfilarse una regla.

Maribel se apoya en una representación icónica, dibujando tres pasteles y dividiéndolos en cinco partes. Esto se analizará en el apartado final.

B. Explicitación basada en la idea de dividir el total de quintos entre el número de personas

Nashel, por otro lado, dice *“No. Porque para que sean cuatro quintos habría cuatro pastelillos. Si son tres pastelillos a cada persona le tocaría tres quintos. Con los pastelillos en total serían quince pedazos de cinco”*.

C. La relación entre el número de pasteles y numerador

Luis encuentra la relación entre el número de pasteles y el numerador, y dice *“No porque para que sean cuatro quintos habría cuatro pastelitos. Si son tres pastelillos a cada persona le tocarían tres quintos”.*

Germán se encuentra cerca de enunciar una regla. Dice que: “*si por cada pastel se le aumenta un quinto porque cada pastel representaría una persona que sería un quinto, deben ser ocho pasteles y serían ocho quintos. Depende de la cantidad de pasteles va a ser el denominador*”. El hecho de que Germán verbalice correctamente la fracción “ocho quintos”, permite asegurar que él sabe que lo que lo que cambia con la cantidad de pasteles, es el numerador, pero tiene invertidos el términos numerador y denominador

Comentarios finales

Como puede verse, la sub secuencia parece haber permitido que varios alumnos lograran establecer la relación buscada: de cada pastel es 1/5 para cada quien, entonces, de n pasteles, n/quintos. Los niños con algunas dificultades para llegar a este punto pueden interpretar de forma errónea la fracción (confundiendo numerador con denominador) o con errores de cálculo al sumar ambas fracciones de pastel.

Con respecto a las particiones, en general se estableció que si el reparto es entre n, conviene partir cada pastel en n. El que esto se haya establecido no significa que para todos es claro por qué, para varios esto parece que se convirtió en una norma a seguir. Solamente se identificaron a dos alumnos con dificultad en ese punto: José, quien después adoptó la partición en quintos, y la niña que dibujó en cada pastel 5 frutos. Con este panorama, la siguiente clase se veía propicia para lograr la institucionalización.

4.1.2 Clase 2

Análisis previo

En esta segunda clase los alumnos completaron una tabla donde se plantean varios problemas de reparto equitativo y exhaustivo. Cada renglón de la tabla da lugar a una división, todas las divisiones tienen el mismo divisor, característica que, como se verá, busca favorecer el recurso a la razón entre los distintos dividendos, para hallar los cocientes.

Se les da a los alumnos una ficha de trabajo que contiene una tabla de 4 columnas. En la columna 2 los alumnos dicen si el cociente es mayor o menor que uno. La función de la pregunta es propiciar una primera estimación del tamaño de fracción, a partir del análisis de una característica: se comparan los tamaños entre numerador y denominador. Para completar la columna tres, se debe anticipar si el cociente es mayor o menor que ½ pastel. Esto no presenta ningún problema en los primeros cuatro repartos pues el cociente es mayor que uno. En los cuatro últimos, hay que evaluar si 3 pasteles entre 7, 1 entre 7, 2 entre 7, 4 entre 7 arrojan más o menos que la mitad de un pastel.

Ficha 2

Ahora los repartos serán entre 7 personas, en partes iguales y sin que sobre nada.

1) Completa las columnas dos y tres de la tabla.

columna 1	columna 2	columna 3	columna 4
Número de pastelitos	**¿A cada uno le toca más de un pastel? (sí-no)**	**¿A cada uno le toca más de medio pastel? (sí-no)**	
56			
49			
19			
8			
3			
1			
2			
4			

2) En la columna cuatro anota la cantidad de pastelitos que tocan a cada persona.

3) Escriban un problema de reparto en el que a cada persona le toquen 2/11 de pastel.

Los alumnos pueden ya sea iterar medio pastel un número de veces igual al divisor, y verificar los el número de pastelitos indicado en la tabla; en cuyo caso a cada quien toca menos de ½ pastel. Si no llega al número indicado, a cada uno le toca más de 1/2 pastel. Pero más fácil aun sería prever directamente si los cocientes son mayores, menores o iguales que ½, por ejemplo, en 4 entre 7 es mayor que ½ puesto que 4 entre 8 es ½, o puesto que 4 es mayor que la mitad de 7.

Consideramos que las dos preguntas, además de dar lugar a una estimación inicial del tamaño de la fracción, favorecen un análisis de ciertas características de la relación entre numerador y denominador. Por ejemplo, si el numerador es mayor que el denominador, la fracción es mayor que uno; o bien si el doble del numerador es mayor que el denominador, la fracción es mayor que uno.

En la columna cuatro, para decir exactamente qué parte de pastel resulta, en los dos primeros renglones no hay dificultad, porque están en juego divisiones con cociente entero. Estos dos casos pueden servir para traer a colación el hecho de que está en juego una división. En los demás casos se espera que en algún momento, identifiquen y utilicen la relación "*n* pasteles entre 7= *n* veces 1 pastel entre 7; es decir, *n* veces 1/7 o n/7 de pastel"

Dos características del problema buscan favorecer el establecimiento de ésa relación: una, manteniendo el divisor constante (en este caso 7) para que logre establecerse una relación proporcional entre el número de pasteles y el tamaño de las porciones que tocan a cada uno (3 pasteles entre 7 es igual a tres veces un pastel entre 7). La segunda, preguntar por el reparto de un pastel entre 7 favorece el uso de ese caso para la obtención de los otros resultados. Por ejemplo, para *3 pasteles entre 7 niños serían 3 veces 1/7 de pastel.* Se espera que con estas dos características, tener un divisor constante y preguntar por el reparto de un pastel, se favorezca la relación antes enunciada.

Para aquellos que no usen esta relación puede haber otros procedimientos disponibles: hacer la repartición con apoyo gráfico y expresar el resultado con una fracción, o bien hacer una división con cociente decimal, en cuyo caso se enfrentarían a la dificultad de interpretar ese cociente. Se espera que en la puesta en común, todos puedan ver cómo algunos utilizaron el reparto de un pastel para calcular el de otras cantidades de pasteles

Finalmente en la pregunta tres (reparto que da 2/11 de pastel por niño) se requiere aplicar la relación recíproca: 2/11 es el resultado de repartir 2 pastelitos entre 11 personas, entre otros repartos posibles (4 pastelitos entre 22 personas, etc.) con lo cual se espera avanzar hacia su consolidación: n pasteles entre m es n/m de pastel y recíprocamente, n/m de pastel viene de n pasteles entre m. Encontrar otros repartos posibles constituye una tarea más difícil, pues supone una anticipación que no ha sido comentada aun: Todos los repartos que se generan multiplicando por un mismo número a los dos términos de un reparto, son equivalentes, es decir, en todos les toca la misma porción. En esta clase no se pretendió abordar esta relación, excepto si algún alumno la puso en juego, lo cual no es probable.

Durante el trabajo con el grupo se previó un momento de Institucionalización del contenido. La maestra planteó oralmente un nuevo reparto, por ejemplo, 7 entre 9 y preguntó al grupo si pueden dar el resultado sin hacer el reparto, es decir, sin dibujar. Si para entonces algún alumno ya identificó el algoritmo y propone: 7/9, la maestra preguntaría entonces ¿Cómo podemos estar seguros? Entre las formas de verificar que propongan los niños, retomar las más rápidas: sumar 7/9 nueve veces y ver si se obtienen 7 pasteles, o multiplicar por 9.

Finalmente se previó que la maestra propusiera otra forma de verificación que a la vez serviría para sustentar el algoritmo:

"Si repartimos solo un pastel entre 9, ¿cuánto toca a cada uno (1/9)?; ¿y si repartimos un segundo pastel, cuánto llevará cada uno? (2/9)

Se propuso que siguiera así hasta los siete pasteles para entonces concluir:

Cuando se reparte una cantidad de pasteles, por ejemplo, 7, entre un número de personas, por ejemplo, 13, a cada una le toca la fracción de pastel que se forma poniendo los pasteles en el numerador y las personas en el denominador.

Análisis posterior

Nuevamente, Germán y Nataly logran generalizaciones importantes. Ella logra ligar su generalización de la clase pasada con los ejercicios propuestos en ésta mientras Germán perfecciona su algoritmo.

En la primera puesta en común, y luego de que José explicara su procedimiento para resolver "8 pasteles entre 7 personas" Nataly logra relacionarlo con su propia generalización anterior *"Es que de ésa de un séptimo es lo mismo que vimos la clase pasada de esta porque les tocó un quinto y ahora es un séptimo es que yo les había dicho que podían ser ocho séptimos u once personas y siempre les iba a tocar, siempre se repartía entre las personas"*

Nataly está identificando la relación "n pasteles entre 7= n veces 1 pastel entre 7; es decir, n veces 1/7 o n/7 de pastel". Identifica, sin hacer explícito aún, que el numerador y denominador de la fracción que expresa el reparto corresponden al número de los pasteles que se van a repartir y al número de personas entre las que se hace dicho reparto.

Germán, ya un poco más avanzada la sesión, retoma también su conclusión de la clase pasada y logra explicitar los elementos correspondientes en la fracción para expresar los repartos. La profesora pregunta al grupo si quieren agregar algo a la clase y él dice en voz alta *"[…] las personas son el número de abajo y el número de pasteles es el número de arriba de la fracción"*. Germán ha establecido correctamente el algoritmo.

Preguntas 1 y 2. Ahora los repartos serán entre 7 personas, en partes iguales y sin que sobre nada. Completa las columnas dos y tres de la tabla. En la columna cuatro, anota la cantidad de pastelitos que tocan a cada persona.

Cuando a los alumnos se les solicita hacer una estimación para saber si en los repartos toca más de un pastel completo o más de medio pastel a partir de la relación ente número de pasteles y niños, sólo dos alumnos, Edy y Kevin, respondieron haciendo una estimación mientras el resto del grupo buscó el cociente exacto de diversas formas.

Edy contesta que *"en la primera son cincuenta y seis, ¿a cada uno le tocaría más de un pastel? la respuesta es que sí […] porque si son cincuenta y seis y son siete personas le tocarían como de a cinco*".

Kevin hace una división mental apoyado en la tabla del siete al contestar los dos primeros repartos: "*¿A cada uno le toca más de un pastel? Sí, porque serían siete, son siete personas y son cincuenta y seis pasteles…cuarenta y nueve…si…siete por…por siete…siete por siete son cuarenta y nueve, entonces sí".* Para los repartos con cociente no entero, logra una estimación exitosa *"diecinueve… si, ¿no? Porque son siete más siete igual a catorce, casi les toca de dos, dos y medio más o menos…".* En el caso de ocho pasteles el cálculo mental le permite obtener el resultado exacto: "*¿a ocho? Si porque le tocaría uno a cada una y sobraría un pastel que sería un entero un séptimo […]"*. Para tres pasteles dice *"De a tres personas*[19] *ya no porque ya no le tocaría el entero, ya sería menos, entonces un pastelito no, le tocaría un séptimo, de dos le tocarían dos séptimos y de cuatro, cuatro séptimos…"*.

[19] Kevin se está refiriendo a los pasteles

Como se dijo anteriormente*, e*l resto del grupo busca el cociente exacto de diversas formas. Efraín resuelve los primeros repartos enteros sin dificultad. Cuando se enfrenta al reparto de diecinueve pasteles lo divide entre siete personas, quedándoles como sobrantes cinco pasteles. Se le pregunta qué hará con eso: *“no sé, es que sacaríamos decimales, pero no sé si los decimales cuentan y los tengamos que poner aquí”.* En la respuesta de Efraín se entrevé que sabe que el sobrante, de repartirse, da lugar a decimales, pero la misma consigna no parece aclararles si esto es posible, y a ellos parece no ocurrírseles que puede expresarse también con una fracción, o más simple aún, que ni siquiera necesitan decir cuánto.

Otros alumnos parten directamente la unidad en siete partes, apoyados en diversos medios de representación. José se apoya tanto en la representación icónica de los pasteles como en la recta. Para dividir tres pasteles entre siete personas en la recta marca tres segmentos iguales y dividen cada uno de éstos, en siete partes, porque, dice, son siete personas. Nombra cada fragmento como “*1/7*”.

Luego, dibuja ocho círculos a manera de pasteles y siete círculos, a manera de personas. Le reparte a cada uno un pastel y le sobra uno. Éste sobrante, lo divide en siete partes para darle una a cada persona. Él mismo lo explica claramente “*Acá son ocho pasteles y son siete personas. Digamos que le toca un pastel a cada uno. Son ocho entre siete, da uno y sobra uno, este (*señala el pastel que sobra) *lo podemos dejar así para no llegar a los decimales. Este lo juntamos con éste, este con éste, este con éste* (une con una línea cada “persona” con un pastel*) y sobra éste, éste lo dividimos entre siete”.*

Su afirmación “*para no llegar a los decimales”* ¿podría estar significando que José sabe que manejar los decimales en este contexto es más difícil que manejar fracciones? La idea de reparto está tan ligada a la de división que logra realizar el reparto con un cociente entero, pero le resulta difícil imaginar cómo partiría “físicamente” un pastel teniendo como referente un decimal.

Pregunta 3 “Escriban un problema de reparto en el que a cada persona le toquen 2/11 de pastel”.

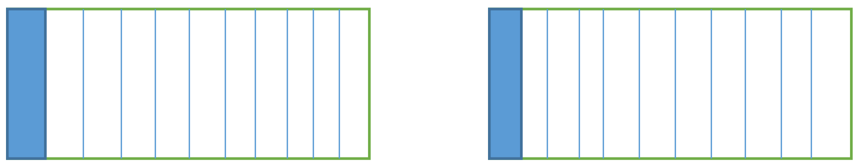
De los 34 niños asistentes de quienes tenemos sus hojas de trabajo, 20 contestan correctamente este reactivo y 14 presentan errores. Se clasificaron los procedimientos mostrados por los niños respuestas correctas e incorrectas. Éstas últimas con algunas subcategorías

Respuestas correctas:

La mayoría del grupo establece un reparto de dos pasteles para 11 personas y dibujan dos rectángulos divididos en once partes iguales. Tomemos como ejemplo a Kevin, quien dibuja los dos pasteles, los divide en 11 partes y toma 1/11 de cada uno.

"*En una fiesta, la mamá de Pedro compró 2 pasteles, y asistieron 11 niños. ¿De a cuánto le toca de pastel a cada persona?*

R= $^{2}/_{11}$



La respuesta correcta puede manifestar que los alumnos ponen en juego, de manera recíproca esta vez, la relación a: b = a veces (1/b) = a/b (por ejemplo, si le tocó a cada persona 2/11 de pastel, entonces de cada pastel les dieron 1/11, y eso quiere decir que había 11 personas y dos pasteles). Pero también es posible que los alumnos hayan identificado la regularidad "el numerador es el número de pasteles y el denominador el de niños", sin necesariamente haber comprendido su origen.

Cabe señalar, por último, que ningún alumno propone alguna respuesta correcta distinta a "2 pasteles, 11 personas", como por ejemplo, "4 pasteles, 22 personas, 6 pasteles entre 33 personas", lo cual era previsible. Proponer algo así, una pareja equivalente, requiere de otra noción, la de "divisiones (o repartos) equivalentes, que los alumnos aún no han estudiado y a la que difícilmente accederían por sí solos.

A. Respuestas erróneas

En el grupo de los procedimientos en los que hay errores se notan algunas regularidades: varios parecen recordar parcialmente una especie de algoritmo que emergió de la actividad pasada: el numerador y el denominador de la fracción resultante algo tienen que ver con los datos del reparto (número de niños y número de pasteles), pero en su intento por apelar a la memoria sin regresar a los significados en juego, terminan alterando la regla y encontrando otros elementos, las cuales que aparentemente no les hacen ruido (lo que confirma que se desprenden del contexto), como Ana Belén y José Luis.

Ana Belén plantea su problema: "*Imelda invitó a 2 amigos e iso (sic) 11 pasteles ¿se puede repartir en partes iguales?* Y divide los once pasteles entre dos personas, obteniendo como resultado "5". A la derecha de su división escribe: *"No .5"* y como resultado final escribe *"2/11".* Ana Belén parece recordar de la actividad anterior que el numerador y el denominador de la fracción resultante corresponden a alguno de los dos datos del reparto, pero los invierte en la división. Obtener como cociente 5, no le hace ruido, no al menos explícitamente por lo que es posible que Belén haya dejado de atender a las relaciones en juego en el problema. José Luis moviliza los números buscando realizar alguna operación con ellos para obtener el resultado que se le pide "*Si tenemos 1= 11/11 y me piden que lo divida entre 9 van a quedar 2/11*". Deja de lado el contexto que se ha venido trabajando y hace una resolución coherente, en un nivel totalmente numérico, y dando una interpretación a "*me queda*" como de residuo de la división, no de cociente:

José de Jesús muestra una confusión entre cifras decimales y denominador. Escribe "*Si tengo 14.77 pasteles y los voy a repartir entre 7 personas, ¿cuánto le tocará de 14.77 a cada persona? = 2.11 =* $^{2}/_{11}$. El dato inicial, 14.77, ¿de dónde salió? Una posibilidad es que toma erróneamente un dato de la actividad anterior: que el reparto es entre 7 personas. Considerando que interpreta 2/11 como 2.11, entonces necesita un número de pasteles que dividido entre 7 dé 2.11, ese número se ´puede obtener multiplicando 2.11 por 7, igual a 14.77.

Comentarios finales

La primera parte (preguntas uno y dos) les ofrecía una especie de repetición de lo de la sesión pasada, una especie de segunda oportunidad de poner en juego la relación *m* entre *n=n/m* de pastel, o de aplicarla si ya la conocían. Kevin, Germán y Edy logran establecer dicha relación.

Aún en aquellas preguntas en las que sólo se solicitaba una estimación (columnas dos y tres, ¿más de un pastel, más de medio pastel?) los alumnos buscaron el cociente exacto, a excepción de Edy y Kevin quienes hacen buenas estimaciones. El resto dividió el entero en siete partes iguales para luego tomar la parte correspondiente; esto ya sea apoyándose en una recta o en otro tipo de gráficos.

Como se esperaba, los repartos enteros no representaron ningún problema en su resolución, no así los repartos no enteros (diecinueve, ocho, tres pasteles). El haber puesto al principio dos problemas con cociente entero tuvo su efecto: de entrada buscaron resolver todos los repartos de la misma manera, dividiendo, y al no lograrlo los alumnos se desconciertan. El asomo de los decimales aparece no sólo en José, sino también en Maribel. Su caso se verá en el apartado correspondiente. Otros anticipan, como Efraín, que el cociente tendría decimales. Si bien Kevin propone una fracción como respuesta a los repartos no podemos afirmar que posea la noción de fracción cociente, con lo que se confirma la ausencia de esta noción.

La pregunta tres plantea un reto mayor: obliga a poner en juego la misma relación pero de otra manera. Al parecer la pregunta resultó difícil para un número importante del grupo, y frente a ello tendieron a abandonar la trama del problema, y a hacer especulaciones numéricas. En ésta, los alumnos deben plantear un problema de reparto. Los niños que acertaron usaron una representación muy convencional (la de los rectángulos o círculos) y aciertan. De entre los niños que presentaron errores destacan las confusiones en el reparto o bien una inversión de los términos numerador y denominador.

4.1.3 Clase 3

Se buscó cerrar en una puesta en común los ejercicios realizados en la clase anterior. Para ello, se plantearon cuatro preguntas que se resolverían en forma grupal:

1. Consigna: Para recordar lo que estuvimos haciendo la semana pasada, si se reparten 5 pasteles entre 8 personas, ¿cuánto le va a tocar a cada quién?

Escuchar propuestas y pedir que se justifiquen

2. Consigna: ¿Recuerdan que la vez pasada les puse un problema en el que a cada quien le tocaban 2/11 de pastel y había que saber cuántos pasteles se repartieron entre cuántos niños? ¿Alguien quiere pasara a explicarnos cómo lo resolvió?

3. Consigna: En otro reparto de pasteles a cada persona les tocó ¾ de pastel, ¿cuántos pasteles se repartieron? ¿Entre cuántos niños se repartieron esos pasteles?

Se deja que cada niño lo resuelva de forma individual en su cuaderno.

4. Se comparten los resultados y pueden pasar al pizarrón algunos niños a mostrar su proceso de resolución. Si hay respuestas encontradas se favorece la argumentación.

Finalmente, se pregunta nuevamente ¿Y para ½? ¿Y para 2/3?

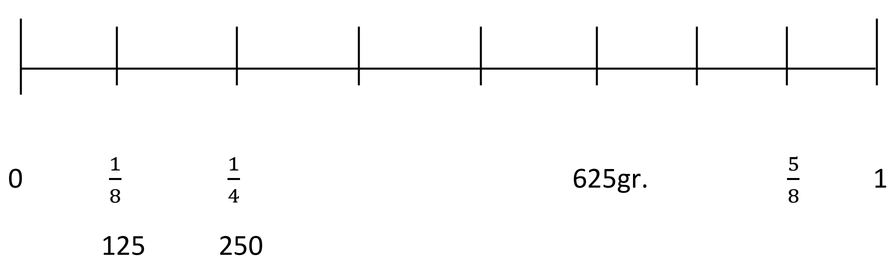
Análisis posterior

Pregunta 1 Para recordar lo que estuvimos haciendo la semana pasada, si se reparten 5 pasteles entre 8 personas, ¿cuánto le va a tocar a cada quién?

El procedimiento general sigue siendo el de partir cada pastel entre el número de niños y dar, de cada pastel, una rebanada a cada niño. En esta primera pregunta no aparece que alguien haya aplicado ya la regla “5 entre 8 es 5/8” de manera inmediata.

Las diferencias que aparecen tienen que ver con las representaciones usadas: Karla usa rectángulos y recta. Con la recta tiene confusiones importantes, que no alcanzamos a entender y que se verán en el apartado correspondiente.

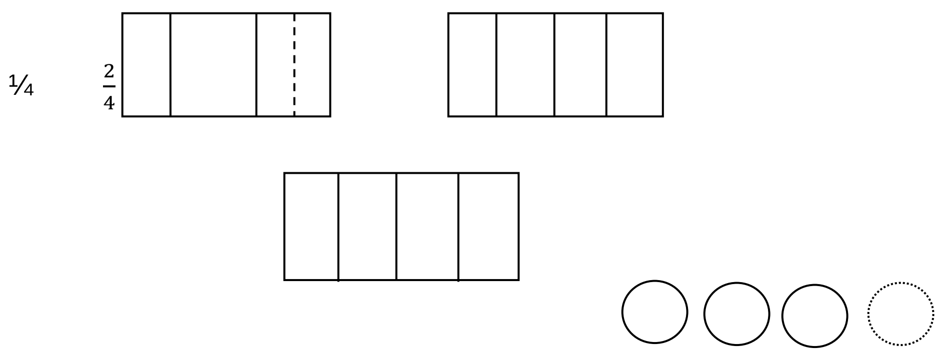
Edy traza una recta, la divide en ocho partes y toma cinco. Además, hace un cambio de unidad correcto: si cada pastel pesara 1000 gramos, cada rebanada pesaría 125 gramos y las cinco rebanadas pesarían 625 “*Un pastelito, un pastelito lo dividí entre ocho y como yo pensé que el pastel cuando lo compras se compra por kilo […] este sería un octavo (*señala su primera división en la recta) *como este es igual a un cuarto son doscientos cincuenta gramos. Y dividí éste entre dos y da ciento veinticinco gramos. Y este lo multipliqué por cinco y me da seiscientos gramos de pastel y aquí son cinco octavos. Según yo son cinco pasteles” (*borra el número uno de su recta y lo sustituye por cinco).



La resolución es correcta. Sin embargo, después intenta hacer un segundo cambio de unidad, esta vez difícil de entender, en el cual los 5 pasteles del reparto son considerados como uno. A partir de ahí las cosas se confunden y consumen varios minutos de la clase.

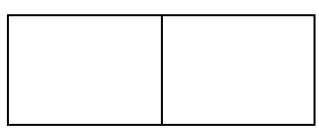
Pregunta 3[20]. En otro reparto de pasteles a cada persona les tocó ¾ de pastel, ¿cuántos pasteles se repartieron? ¿Entre cuántos niños se repartieron esos pasteles?

En esta parte se tenía contemplado un momento de trabajo individual, pero la profesora vuelve a cambiar la dinámica. Da la consigna y pide, nuevamente, un par de voluntarios para pasar al frente a resolverlo, lo que impide que una buena parte del grupo busque una solución[21]. Ésta vez es turno de Liliana. Dibuja tres rectángulos, representando a los pasteles y cuatro círculos representando a los niños. Aunque en un inicio comenzó dividiendo erróneamente su primer pastel, logra corregir y representar un reparto de 3 unidades dividido entre cuatro.



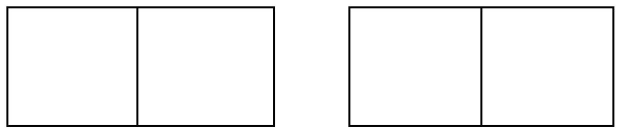
Se pregunta nuevamente ¿Y para ½? ¿Y para 2/3?

Erick, Susana y Nataly se ofrecen como voluntarios para resolver esta pregunta, con tres representaciones diferentes. Erick intenta resolver ambas cuestiones, tanto el de ½ de pastel como el de 2/3. Lo hace un poco revuelto, de modo que hace dos trazos diferentes. Dibuja un rectángulo y lo divide a la mitad.

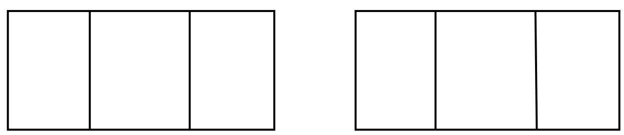


[20] Se tenía planteado un momento de trabajo colectivo donde se expusieran algunos procedimientos que los niños hubieran utilizado para resolver su problema de la sesión anterior (esto con la pregunta ¿Recuerdan que la vez pasada les puse un problema en el que a cada quien le tocaban 2/11 de pastel y había que saber cuántos pasteles se repartieron entre cuántos niños? ¿Alguien quiere pasara a explicarnos cómo lo resolvió?). Sin embargo, la profesora cambió la dinámica y rápidamente pasó a la siguiente pregunta; éste cierre parece no ser de la ficha, ni de la actividad misma, sino de la profesora: durante su gestión, al parecer, necesitó de este cambio para plantear su propio cierre.

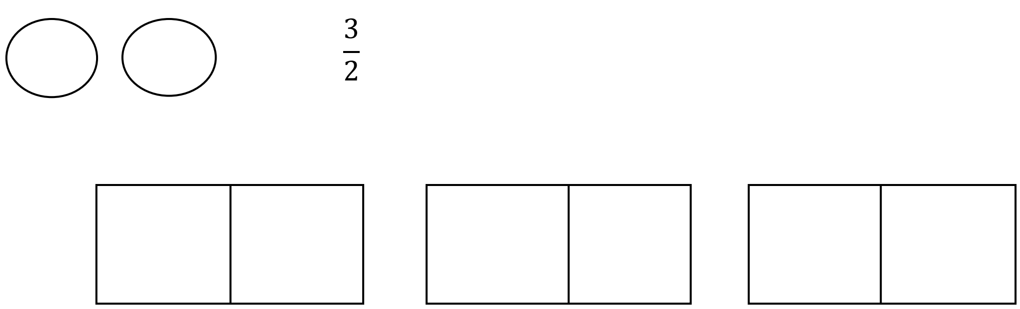
Para representar la fracción 2/3 añade un rectángulo más, nuevamente partido por la mitad.



Rectifica y divide cada rectángulo en tres partes.



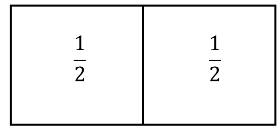
En ese momento, la profesora entonces le pide a Susana pasar al frente y ayudarlo, por lo que la resolución de Erick no concluye. Susana dibuja dos círculos que son dos personas, y tres rectángulos divididos a la mitad, y dice "*son las dos personas y los tres pasteles, y a cada uno le tocan tres medios"*



Susana propone 3 pasteles por repartir a dos personas. Su fracción resultante es congruente con esa interpretación: 3/2, confundiendo quizá momentáneamente el numerador con el denominador. Siguiendo esta dinámica la profesora le pide ahora a

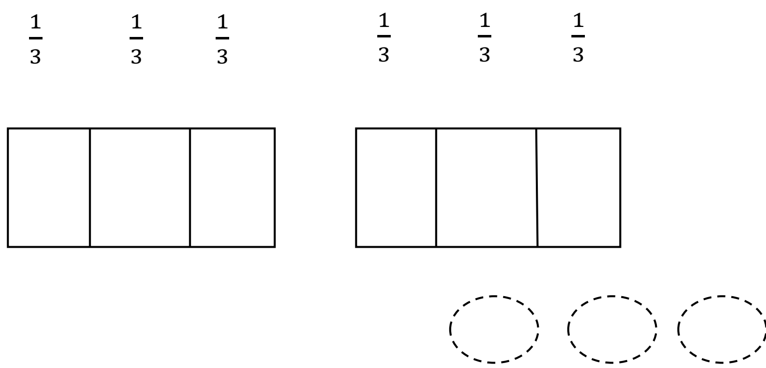
Nataly que pase al frente. Ella añade una simbolización a la expresión del resultado del primer problema.

1=P



2=N

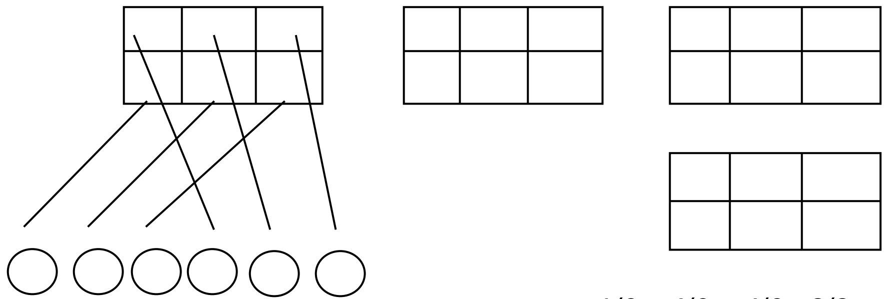
Y resuelve sin dificultad el segundo problema "*el de abajo es lo mismo, dos es igual a pasteles y tres es igual a niños, serían dos pasteles, serían tres niños".*



Ilustra correctamente y aunque deja de lado la simbolización que sí usó en el primero, sí puede apreciarse que está en el camino de proponer que el cociente se obtiene con la fracción número de pasteles sobre número de niños. El papel de Nataly en esta ocasión parece ser el de institucionalizar un procedimiento y un resultado correcto, ya que antes que ella Erick había logrado trabajar bien con ambos problemas, pero el ritmo de la clase no le permitió concretizar sus respuestas

Edy

Edy muestra su último procedimiento con un añadido de equivalencia. Propone graficar 4/6 en lugar de 2/3, porque *"es lo mismo".* Su aportación aquí es muy importante ya que está demostrando que hay dos resultados posibles, que además de "dos pasteles entre tres niños" también está "cuatro pasteles entre seis niños". No es azaroso que la profesora lo elija precisamente para "comprobar" el resultado propuesto por Nataly. Aunque la idea de comprobación queda sobrando con la que ya se hizo.



1/6 x 4/6 = 4/6= 2/3

Finaliza con "*como es un sexto lo multipliqué por cuatro. Cada persona tiene cuatro sextos.*"

Comentarios finales

Los cambios en la forma en que se había previsto que los alumnos participaran impidió que la mayoría tuviera la oportunidad de intentar resolver los problemas planteados, pudieron únicamente, en el mejor de los casos, conocer las resoluciones de los pocos que participaron al frente.

Edy logra avanzar más en su de por sí adelantada comprensión de la problemática, al proponer dos repartos, en lugar de uno, para una fracción dada (2/3 = 2 pasteles entre 3 y 4 pasteles entre 6); Nataly por su parte, muestra una vez más haber identificado la relación entre numerador y número de pasteles, denominador y número de niños, y hace esfuerzos por expresarla "(en 2/3) *dos es igual a pasteles y tres es igual a niños, serían dos pasteles, serían tres niños".* Para otros alumnos en cambio aún hay confusiones, como para Erik, para quien persisten los problemas para representar icónicamente los repartos y lograr expresarlos con su fracción correspondiente.

En la siguiente parte de la secuencia, la de los pasos del robot, se jugó con una significación ya no como fracturadora sino como cociente, derivado de una relación por conmensuración, pero ahora sobre una magnitud de longitud.

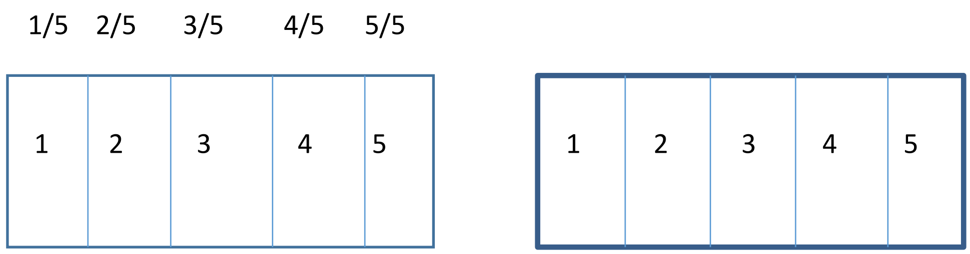
4.1.4 La secuencia en lo individual.

Karla

Logros en tareas sencillas

Karla logra resolver bien los problemas de reparto con apoyo en la representación gráfica: divide cada pastel entre el número *n* de niños, asigna a cada porción la fracción 1/n y suma correctamente el total de porciones por niño. En la primera clase no lo logró inmediatamente ya que hizo una división en cuartos en lugar de quintos “*Es que según aquí son 2/5 pero yo hice el procedimiento mal y aparte puse cuartos”.* Pero sí lo logra al segundo intento.

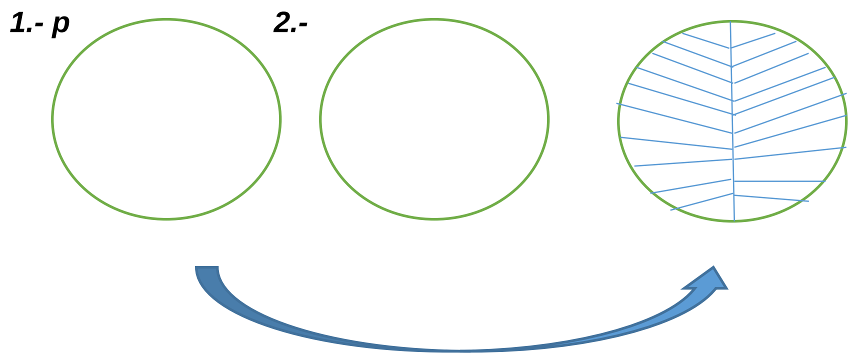
Esta es su representación para repartir dos pasteles entre cinco personas.



En esa misma primera clase, la explicación que da para invalidar la respuesta a la pregunta 4 (Julián dice que tocarían 3/5 a cada persona si se dividieran tres pastelitos entre cinco) es muy buena, y denota disponer ya de una forma de anticipar “*Es que son tres pasteles, esos pasteles se cortan en cinco porque obviamente son cinco personas, entonces de ahí le toca uno a cada quien pero aquí está mal porque dice que son cuatro quintos, para que fueran cuatro quintos debe haber otro pastel, pero como son sólo tres pasteles entonces por eso toca a tres quintos”.* En la explicación de Karla se anotan dos elementos importantes; en primer lugar dividir en 5 partes porque son 5 personas se asume como tal, como “obvio”, ¿qué pasaría si la consigna fuera dividir 5 pastelitos entre 10 personas? ¿Partirían cada pastel en 10 o tomarían un camino más corto? Tomar el primero camino parece lo más lógico, pero es poco práctico y mucho más largo. En segundo lugar, en la afirmación *“para que fueran cuatro quintos debe haber otro pastel”* una regla comienza a perfilarse, cuando Karla comprende que tanto el numerador como el denominador dependen tanto del número de personas como del de pasteles a repartir.

Sin embargo, lo que ocurre con la fracción 2/11 en la clase 2, es desconcertante. Aparecen tres pasteles dibujados, los dos primeros numerados y el tercero dividido en 24 partes desiguales, 12 de cada lado del pastel partido a la mitad (como rebanadas horizontales que atraviesan el pastel circular).

“*María y su mamá quieren repartir a dos personas unos pasteles pero en partes iguales. ¿Si son 3 pasteles y son 2 personas le debe de tocar esatcto*[22] *(sic)?*

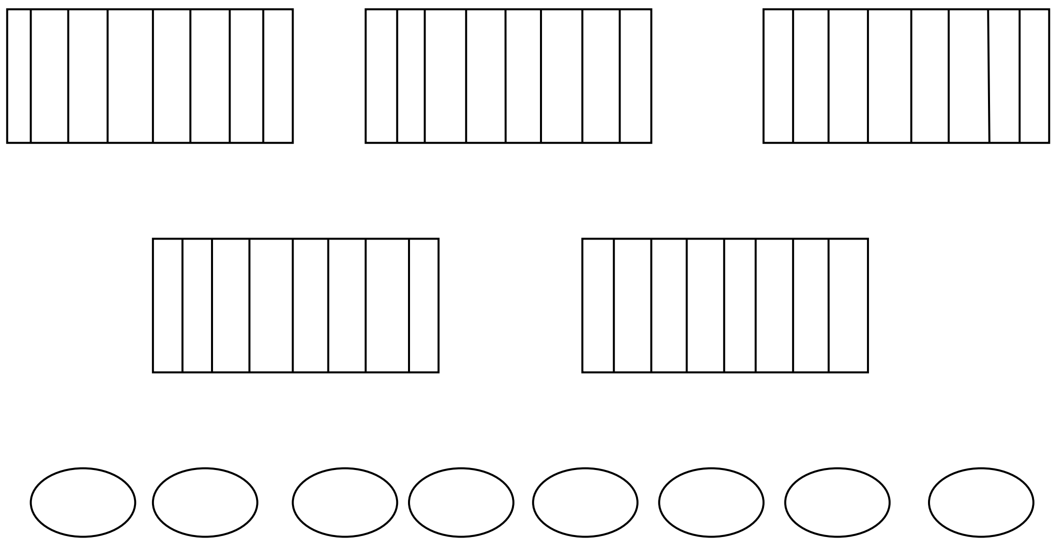


Pareciera que quiso partir cada mitad en once partes. Con frecuencia a los niños les ocurre que para tener n partes, hacen n rayas y obtienen n+1 partes. ¿Y por qué las dos mitades? Probablemente para que de cada una se tomara “Un onceavo” y así tener los dos onceavos. Pero entonces, no bastaba con 2 niños, pues cada uno tomaría la mitad de los onceavos, en todo caso más de dos.

En la tercera y última clase Karla se ofrece como voluntaria para resolver la pregunta uno (“si se reparten 5 pasteles entre 8 personas, ¿cuánto le va a tocar a cada quién?”).Toma un camino “lento” ya que le tomará tiempo realizar gráficamente los repartos: dibuja sus 5 pasteles para luego dividirlos entre 8.

[22] Se interpretó como “exacto”

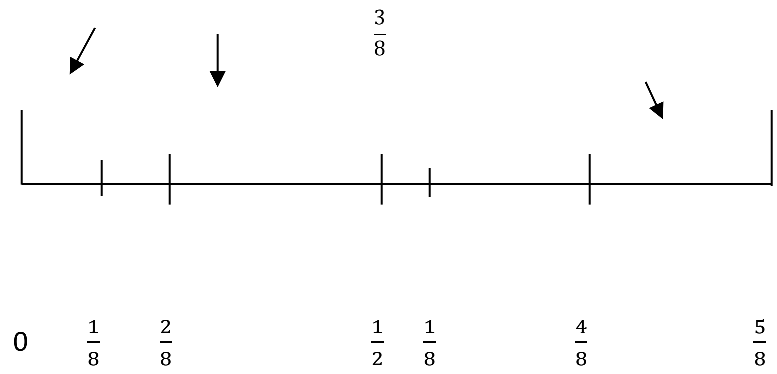
5p 8n



“Primero voy a poner los pasteles […] son cinco pasteles […] los voy a partir en ocho partes […] Porque son ocho niños…le toca un pedacito a cada una […] *Aquí voy a poner a los niños* (dibuja 8 caritas) *entonces aquí* -señala 1/8 del primer rectángulo- *sería para un niño […] Éste, le va a tocar a este, éste, le va a tocar a éste* -señala 1/8 para cada niño que dibujó y se sigue así repartiendo hasta que acaba el primer pastel.

Le queda claro que el número de divisiones de su pastel debe corresponder con el número de personas entre las cuales se repartirá. Lo que no es tan claro para ella, es su representación fraccionaria “*Ya como lo hicimos así, se puede decir que si vamos por un pastel, la fracción que fuera sería un octavo* [...] *No…un quinto”*. Karla dice que la fracción es 1/5 en lugar de 1/8, ¿está pensando que son 5 niños, o bien que un pastel es 1/5 de los 5 pasteles? Dudosa entre estas dos posibles expresiones toma otro camino.

Traza una recta en el pizarrón y explica *“es que hice una recta y se supone que es un pastel…sí, y aquí puse la mitad del pastel que es un medio pero luego Nataly me dijo que no era un medio que era un octavo entonces puse un medio (*a la mitad de la recta) *y aquí un octavo (*a la derecha de ½, señala la recta que trazó) *y ya después puse un octavo, dos octavos, tres octavos, cuatro octavos, cinco octavos”.*



¿Por qué Karla reinicia el conteo de octavos a la derecha de ½? Cuando pone la fracción 1/8 a la derecha de ½ ¿está considerando otro pastel, es decir, para ella a partir de un medio, ya hay otro pastel? ¿Tendrá claro cómo se representa un pastel, es decir, la unidad, en la recta?

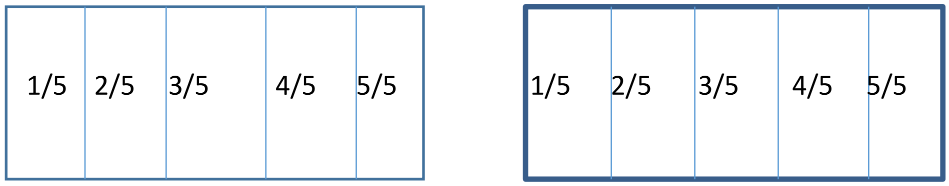
En su recta se asoman, sin ser totalmente claras, confusiones con la unidad que le sirve como referencia. Se supone que el uno en la recta representa un pastel, pero en ciertos momentos pareciera que eso no es claro: Cuando Karla dice "La recta es un pastel", cabe preguntar, ¿la recta hasta qué número? Porque si bien ella considera solamente una unidad, no lo explicita poniendo el cero y el uno en los extremos de su recta.

Karla demuestra que, con apoyo de la representación icónica, puede hacer un reparto de manera sistemática, y pude incluso destacar el procedimiento para desechar una respuesta incorrecta. Pero su conocimiento está bastante circunscrito todavía a esa representación. No logra abordar el problema recíproco (partir de 2/11 para llegar a 2 pasteles entre 11 niños), y no logra manejarse en la recta numérica.

Carmen

Logros con ayuda de la representación icónica

Logra resolver bien los problemas de reparto apoyándose en la representación icónica de las porciones para cada persona. Carmen divide directamente el entero en cinco partes iguales y numera cada una. No realiza ensayos y traza rápidamente las líneas horizontales a manera de división *"2/5 porque si partimos en cinco el otro pastel nos tocaría 1/5 y con el otro 2/5*". Tampoco tiene problemas para saber qué pasaría si sólo se repartiera un pastel entre las mismas cinco personas "*1/5 porque partimos en cinco* *y cada una le toca 1/5"* o para contestar la pregunta 4 (Julián dice que si se repartieran tres pastelitos entre las mismas cinco personas les tocarían ¾ de pastel) "*porque cada niño le toca 3/5".* El estilo de sus representaciones es como el que sigue:



Cuando se le pide que plantee un problema cuyo resultado sea un reparto de "$^{2}/_{11}$" Carmen escribe: "*Ana quiere repartir entre 11 personas y son 2 pasteles, ¿cuánto le toca a cada uno? 2/11".* Esto revela, en esta primera clase, su comprensión del contenido.

En la segunda clase, Carmen muestra su capacidad para expresar el residuo de los repartos tanto en fracciones como en decimales. Para los repartos no enteros (19, 8, 3 pasteles entre 7 personas) opta por expresarlos con decimales: para ocho pasteles entre siete personas escribe "1.1", tres pasteles entre siete "0.4", pero no supimos cómo interpreta esos decimales en el contexto de pasteles. Luego retoma las fracciones para los repartos menores: para uno, dos y cuatro pasteles, escribe "*1/7" "2/7"* y "*4/7"* respectivamente. En síntesis, si el cociente es mayor que uno, tiende a usar decimales; Cuando el cociente es menor que uno, expresa el resultado con fracciones, apoyándose en una representación icónica. Esto parece no permitirle anticipar la relación entre el número de niños y el denominador de la fracción, ni la relación entre el número de pasteles y el numerador, que permiten prever los cocientes.

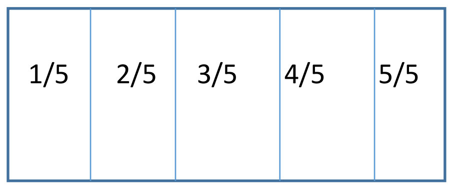
Maribel

La representación numérica y el uso de operaciones

Maribel parece identificar desde la primera sesión la relación entre número de pasteles y numerador, cuando el número de niños, expresado en el denominador, es constante. Esto le permite manejarse tanto en registro gráfico como en el numérico.

Logra representar el primer reparto (dos pasteles entre cinco personas) partiendo cada unidad en cinco partes y añade la suma *"1/5 + 1/5 = 2/5 le toca a cada* *uno".* Este registro lo retoma cuando contesta la pregunta 4 (Julián está en lo correcto al afirmar que en un reparto de tres pastelitos entre cinco personas, tocaría de 4/5 de pastel por persona). Maribel escribe una multiplicación (1/5 x 3) y una representación de un solo pastel. El que no haya dibujado tres pasteles indica, podría pensarse, que no usó la representación para hallar la respuesta, sino únicamente para ilustrar una respuesta que halló de otra manera. Concluye que la afirmación de Julián es incorrecta porque: *"No le toca tres quintos a cada uno porque cuatro quintos serían cuatro pastelitos y tres pastelitos serían tres quintos"*.

1/5 x 3= 3/5



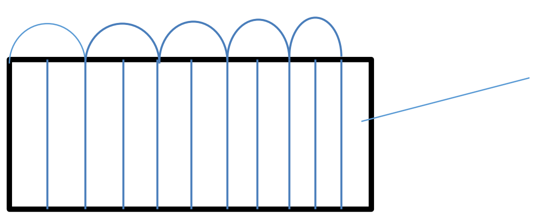
Su manejo de diferentes registros, y una cierta confusión al interpretar los decimales, se muestra en la segunda clase. Cuando resuelve el problema de 19 pasteles divididos entre siete personas, plantea la división *"19: 7 = 2.7; para 8 pasteles hace 8: 7 =.1"*.Ella no fracciona, sino que utiliza los decimales. Como se dijo antes, para los alumnos los decimales se relacionan con la división pues resultan de dividir más allá de los enteros, pues para ellos las fracciones no tienen aún esa relación con la división.

Tomemos uno de estos repartos, el de ocho pasteles entre siete personas para ilustrar el trabajo de Maribel con los decimales. Divide *8: 7 = 1.1* y dice que a cada persona le tocaría menos de ½ pastel. Utiliza el mismo cociente (1.1) para decidir si les toca más de medio pastel lo que es confuso: si ya dijo que 1.1 es menos de ½ pastel, ¿para qué va ahora a verificar si es más de ½ pastel? ¿Habrá pensado que la pregunta era "más de pastel y medio"? O ¿Está teniendo un problema para interpretar los decimales? Maribel usa entonces un procedimiento mixto para resolver esta última cuestión y decide dibujarlos. Traza 8 pasteles divididos en séptimos, con 1/7 sombreado en cada pastel. Dice que a cada quien tocan 8/7. Se le pregunta ¿eso es más o menos de medio pastel? Ella corrige, y pone que es más de medio pastel. Este recurso resultó más clarificador para ella pero su explicación al respecto es confusa.

Dice que había pensado que *“era 1 1/7* (lo cual es correcto) *y al ocho le toca un pastel a cada quien”*. No es extraño que los decimales, relativamente fáciles de operar, resulten poco claros, difíciles de interpretar, para los alumnos.

Del grupo, Maribel es la única que logra dos resultados para 8 pasteles entre 7 personas: “1.1” y “1 1/7” e infiere que estos números tiene algo en común. De hecho serían iguales, si no fuera porque en la división de cociente 1.1 quedó un residuo que ella está omitiendo. Pareciera lógico pensar que si los dos, 1 1/7 y 1.1 son cocientes de la misma división, la parte que complementa al uno debe ser igual; y en efecto pareciera que Maribel en algún momento piensa que 1/7 es igual a .1. No se da cuenta de que el .1 es una aproximación. Cuando más adelante, para el problema “3 pasteles entre 7 personas”, pasa al frente a dar su explicación dice “*tres entre siete se le agrega punto decimal y se baja un cero, y es cuatro, te da veintiocho para treinta son dos y sería punto cuatro, serían cuatro séptimos.* Está estableciendo la igualdad .4=4/7. Se corrobora que para Maribel la equivalencia fracciones a decimales no es clara pero intuye, efectivamente, que algo tienen que ver.

En su planteamiento de un problema cuyo resultado sea un reparto de “2/11” divide un pastel en once partes y asigna dos rebanadas a cada invitado. Le alcanza para darles a 5 personas y le sobra una rebanada.



Equivale a .5

2 pasteles= 1 persona

Diez pasteles = 5 personas y sobra un pastel que equivale a 0.5

as divisiones toma dos partes, no sólo una. El *“equivale a .5”* es correcto desde cierto punto de vista: asumiendo que con “2 pasteles” ella se está refiriendo a dos rebanadas, una rebanada es la mitad de lo que asignó a cada persona, esto es, .5. Probablemente entonces, ella lo ve así. Encuentra que el número de personas a quienes puede asignar 2/11, son 5 (y sobra media ración).

Al considerar un solo pastel, pero respetando la idea de las once rebanadas, (idea que probablemente proviene de lo que recuerda que de la actividad anterior), Maribel solamente puede asignar el pastel a 5 personas. Cuando dice “sobra un pastel” se refiere quizás a “sobra una rebanada”. Entonces, el error puede interpretarse como una adaptación de un recuerdo parcial de lo encontrado en las actividades anteriores. Así, recuerda que el 11 del denominador corresponde a 11 rebanadas, pero no recuerda, o no sabe, que el 2 del numerador corresponde al número de pasteles.

En síntesis, Maribel tiende a alternar el uso de la división con cociente decimal y la expresión del resultado con una fracción, con ciertas confusiones aun. Logra hacer los repartos dividiendo sistemáticamente cada unidad entre el número de niños. Comienza a utilizar procedimientos más cortos, tal como multiplicar 1/5 de pastel por tres, entendiendo que 3/5 es igual a tres veces 1/5. Sin embargo, la relación entre los datos del reparto y la fracción no llega a ser lo suficientemente clara como para que ella pueda aplicarla de manera recíproca: una vez dado el resultado “2/11” inferir que el reparto es de 2 pasteles entre 11 once personas. No obstante, deja ver un adecuado uso de los decimales; en su gráfica para representar esta última pregunta, ella toma como “una ración” completa a las dos rebanadas que repartirá por persona y con esto, asume que se trata de un entero, es decir, de “1”. Por ende, media ración será “.5” de pastel. Hay una interpretación correcta de los decimales en el contexto de pasteles. Desafortunadamente, no se pudo explorar un poco más durante la sub secuencia, especialmente en el caso de Maribel.

Comentario final acerca de la secuencia “Reparto de pasteles”

Desde el punto de vista de las situaciones**,** puede decirse que en general la secuencia funcionó bien para la mayoría del grupo. Las dos variantes utilizadas, a saber, considerar repartos con divisor constante e incluir el caso del reparto de un solo pastel, parecen haber favorecido que los varios alumnos consideraran la relación “***a*** unidades entre ***b*** = ***a*** veces una unidad entre ***b***”, la cual constituye un forma de hallar la fracción resultante ***a/b***. La situación que propone un resultado incorrecto (3: 5= 4/5) así como la que apela a una relación recíproca entre reparto y fracción (¿qué reparto arroja un pedazo de 2/11 de pastel?) propiciaron en efecto una mayor explicitación de la relación entre los términos del reparto y los términos de la fracción, aunque la última (la que pone en juego la relación recíproca) se reveló más difícil.

El haber incluido, en la segunda situación, repartos con cocientes mayores que uno, y sobre todo, cocientes enteros (56 y 49 pasteles entre siete personas) para traer a colación la idea de división, propició que algunos alumnos intentaran usar la división no solo en esos casos, sino en todos, obteniendo cocientes decimales. Esto tuvo la desventaja de evitar el uso de fracciones, el cual interesaba. No obstante, para otros alumnos, la variable “cociente mayor o menor que 1” pareció influir de la siguiente manera:

- Con cocientes mayores que uno (y más si son mayores que 2) los alumnos utilizaron la técnica de división, eventualmente con cociente con punto decimal, como en el caso de Efraín.
- Con cocientes menores que uno los alumnos no pensaron en la técnica de división, repartieron con apoyo de representaciones gráficas y expresaron el resultado con fracciones, como en el caso de Carmen.

Como si el hecho de que el cociente sea mayor que uno o menor que uno diera lugar a problemas muy distintos. En estos casos, la coexistencia de decimales y fracciones dio lugar, como se vio claramente en Karla, Maribel y José, a interesantes intentos por relacionarlos, aun cuando fallidos. Se tocó así, de manera colateral, un tema importante, el de la relación entre fracciones y decimales, en la situación especial en la que ambos números aparecen como cocientes de divisiones, incluso a veces de una misma división. A esta circunstancia se le podría haber sacado partido, posiblemente, solicitando a los alumnos que interpretaran sus cocientes decimales en el contexto de los pasteles. Se habrían podido hacer aclaraciones que contribuyeran a la comprensión tanto de las fracciones como de los decimales. Considerando esto, parece acertado haber combinado cocientes mayores y menores que la unidad, enteros y no enteros, a pesar de la desventaja de que algunos alumnos tendieron por ello a evitar las fracciones.

El desempeño del grupo fue, como suele ocurrir, diverso. Entre los extremos, las tres alumnas que de las que hacemos un seguimiento más puntual tuvieron logros también diversos pero más representativos del resto del grupo. Si bien las tres iniciaron con un procedimiento similar, el de dividir el entero en cinco partes, sin ensayos y directamente, Karla requirió siempre de la representación icónica y solamente logró resolver el problema de reparto directo, no el recíproco. Carmen también se mostró apegada a la representación icónica, pero ella sí logró abordar el problema de reparto recíproco y expresar cocientes fraccionarios. Finalmente, Maribel, si bien tuvo una confusión al trabajar con el problema de reparto reciproco, de las tres es la que mayor dominio tiene de la cuantificación con fracciones y con decimales. No llega a establecer explícitamente que la fracción resultante de un reparto es la fracción que se forma con el número de pasteles en el numerador y el de niños en el denominador, como sí lo hacen dos de sus compañeros (Nataly y Germán), pero no está lejos de ello (comienza a utilizar procedimientos más cortos, tal como multiplicar 1/5 de pastel por tres, entendiendo que 3/5 es igual a tres veces 1/5).

Considerando el desempeño de estas tres alumnas, es posible decir que hizo falta no tanto una sesión más de trabajo, como un mejor aprovechamiento de la tercera sesión, en la que todos los alumnos, sobre todo los que tienen menor avance, tuvieran una oportunidad más de resolver repartos, directos y recíprocos. Así mismo, posiblemente hizo falta institucionalizar con más claridad la relación buscada: a unidades entre b = a/b de unidad.

En la siguiente parte de la secuencia, Los pasos del robot, se seguirá trabajando con la fracción como una medida que resulta de una división, pero ahora derivada de una relación de conmensuración de longitudes.

4.2 Los pasos del Robot

El propósito de esta secuencia consiste en establecer que el cociente de la división ***a*** unidades entre ***b***, es la fracción ***a/b*** de unidad, en una situación en la que la magnitud que se divide es continua (longitud). Con esto, se amplía y afirma el alcance de la secuencia anterior, sobre reparto de pasteles.

4.2.1 Clase 1

Material

- Una tira amarilla larga dividida en unidades de 10 cm.
- Una tira verde pequeña que se utilizará como unidad (10 cm)

La finalidad del material es que a través de las tiras los niños que lo requieran puedan ayudarse a encontrar la medida del paso y expresarla con una fracción (las tiras no tienen ninguna). Se usa la tira amarilla como auxiliar para señalar, a modo de “caminito” las unidades que el robot avanza. La tira verde puede manipularse: pueden doblarla y recortarla, iterarla sobre la tira amarilla o pueden marcar subdivisiones en varias unidades de la tira larga. Es esta manipulación la que les permitirá, en la segunda fase de la clase, verificar el tamaño del paso que sus compañeros proponen.

Primera fase

Concurso “En 5 pasos”

Equipo encargado	Robot	Distancia recorrida en 5 pasos	Medida de **<u>un</u>** paso
	A	1 unidad	
	B	2 unidades	
	C	3 unidades	
	D	4 unidades	
	E	6 unidades	

Concurso “En tres pasos”

Equipo designado	Robot	Distancia recorrida en 3 pasos	Medida de **<u>un</u>** paso
	F	1 unidad	
	G	2 unidades	
	H	4 unidades	
	I	5 unidades	
	J	7 unidades	

La consigna es: *“Se trata de dos concursos entre robots. En el concurso llamado “en cinco pasos” gana el robot que en 5 pasos logre recorrer la distancia* *exacta que se indica. Por ejemplo, el robot A gana si logra recorrer 1 unidad en 5 pasos. En el concurso llamado "en tres pasos", ganan los Robots si logran recorrer la distancia que les indican en exactamente 3 pasos. Lo que tenemos que hacer es dar la medida del paso para que los robots puedan llegar a la meta que les indican y ganar el concurso*. *¿Cuánto mide un paso?"*

La mitad de los equipos dan la medida del paso del Robot A y la otra mitad de los equipos dan la medida del Robot E.

Segunda fase

La consigna es: *"Cada equipo tiene que encontrar la medida del paso del Robot que le toque, de manera que en CINCO o en TRES pasos su robot recorra la distancia que se le indicará. Cuando tengan la medida, la escribirán en un mensaje y se la mandarán a otro equipo para que se las verifique".*

Se completa la tabla escrita en el pizarrón con los siguientes datos, designando un robot a cada equipo.

Equipo	Robot	Distancia recorrida en 5 pasos	Medida de un paso
1	B	2 unidades	
2	C	3 unidades	
3	D	4 unidades	
4	E	6 unidades	

Equipo	Robot	Distancia recorrida en 3 pasos	Medida de un paso
5	G	2 unidades	
6	H	4unidades	

7	I	5 unidades	
8	J	7 unidades	

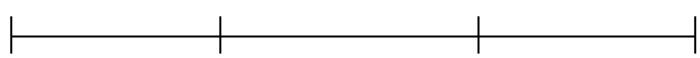
Cuando los equipos han elaborado el mensaje, la maestra organiza el envío al resto de los equipos quienes hacen la tira correspondiente.

Institucionalización

Mientras los diferentes equipos van presentando sus procedimientos, la maestra los ayuda. Si el procedimiento que se desea propiciar aparece (el que se apoya en el tamaño del paso de los robots que avanzan una sola unidad; ver el análisis previo), procurar institucionalizarlo.

Por ejemplo, para averiguar el tamaño del paso del Robot que avanza 3 unidades en 5 pasos, se puede hacer lo siguiente:

"Si el robot avanza una sola unidad en 5 pasos, cada paso mide 1/5 de unidad. Entonces, si avanza 3 unidades en lugar de solamente una, cada paso debe medir 3 veces más, es decir 3/5 de unidad".



3 x1/5= 3/5

Análisis previo

Como se dijo en la sección dedicada a la presentación de las sub secuencias, la médula de "los pasos del robot" es el cambio del tipo de magnitud con respecto a la secuencia de los pasteles. Mientras en ésta última se trata de una magnitud que se puede tratar como "discreta" y también como "continua", la de los robots trabaja con una magnitud continua, que no es posible tratar de la misma manera. Entre las diferencia dadas por el cambio del tipo de magnitudes, se tiene que en "reparto de pasteles" pueden "repartir de uno por uno"; en cambio, las longitudes no se pueden repartir así. Por ejemplo, en 3u:4 no tendría sentido sacar ¼ de cada unidad puesto las unidades no están sueltas.

Procedimientos que pueden ocurrir.

A continuación se explican algunos de los procedimientos posibles y se destaca el que se desea propiciar. Se ejemplifican con el caso de “Recorrido total 4 unidades, en 3 pasos”.

1. **Aproximaciones por ensayo y error.** Este procedimiento puede presentar dos variantes; la última con :
   1.1 Pensar una medida del paso, iterarla o multiplicarla para después modificarla progresivamente hasta obtener la medida más cercana. Es muy posible que usando esta vía recurran únicamente a fracciones unitarias.
   1.2 Fraccionar cada una de las unidades del recorrido en un número de partes iguales para después dividir ese total de partes de unidad entre el número de pasos y obtener el tamaño de los pasos (así, se pueden obtener fracciones no unitarias). Aquí hay, a su vez, dos posibilidades:
      a) Obtener físicamente el paso dividiendo una tira de 4 unidades en 3 partes iguales y después calcular, por aproximaciones, la medida (con medios, cuartos, etc.).
      b) Fraccionar cada unidad en cualquier número de partes. Es probable que se privilegie una partición en 2^n (2 ó 4 ó 8, etc.). Por ejemplo, para el ejercicio del Robot que en 3 pasos avanza 4 unidades, si cada unidad de divide en cuartos, se obtienen 16 cuartos. Por lo tanto cada paso mide aproximadamente $16/4 \div 3 \approx 5/4$ de unidad.
      c) Fraccionar cada unidad en décimos, lo que les permite aproximarse más al resultado, al mismo tiempo que posibilita un acercamiento a la división con cociente decimal. Por ejemplo, para el ejercicio del Robot que en 3 pasos avanza 4 unidades, si cada unidad se divide en décimos, se tienen 40 décimos. Por lo tanto cada paso mide aproximadamente $40\, décimos \div 3 \approx 13$ décimos de unidad, esto es 1.3 unidades, y “un poquito más” por el residuo.

         Cabe observar que este procedimiento sí puede dar lugar a una técnica sistemática: $a\, unidades \div b = \frac{ba}{b}\ de\, unidad \div b$. Pero poder identificar en estos pasos una técnica, y más aún poder justificarla requiere de una capacidad de manipular la sintaxis que los alumnos de primaria no tienen aún. Constituye una generalización algebraica del procedimiento.

2. Obtención del paso mediante la partición del recorrido total. El telegrama que los alumnos redacten podría decir *"juntar 4 unidades y partirlas entre 3"* ó "4 *u ÷ 3"* ó también "*1/3 de 4u*." Sin embargo, una respuesta así no resolvería el problema de los "fabricantes de pasos", pues plantea únicamente un "cociente indicado" por medio de la división de las unidades.

3. Partir cada unidad según el número de pasos, obteniendo así ya no un resultado aproximado, sino exacto, pues el número de partecitas será múltiplo de número de pasos. Por ejemplo, para el ejercicio del Robot que en 3 pasos avanza 4 unidades, si cada unidad de divide en tercios, se tienen 12 tercios. Por lo tanto cada paso mide 12 tercios ÷3 ≈ 4 tercios de unidad, esto es 4/3 de unidad.

4. Aplicar el algoritmo de la división con cociente decimal. Por ejemplo, 4u÷3 = 1.33, pero existe la posibilidad de que no sepan cómo interpretar ese cociente.

5. Apoyo en el robot que avanza una unidad (procedimiento que se desea propiciar)**.** Se puede encontrar el resultado mediante el siguiente razonamiento:

- El robot E avanza sólo 1 unidad en 3 pasos y la distancia que recorre en un paso es igual a 1 ÷ 3 = 1/3 de unidad.

- El robot G, en 3 pasos, avanza 4 unidades, es decir, avanza 4 veces más que el Robot E

Entonces la distancia que el Robot G avanza en un paso debe ser CUATRO VECES la que avanza el robot E: 4 veces 1/3, esto es, 4/3 de unidad.

Por lo tanto, 4u ÷ 3 = 4 *veces* 1/3 = 4/3 de u.

Robot	**En 3 pasos avanza**	**Tamaño de 1 paso**
E	1unidad	1/3 u
G	4 unidades	4/3 u

Éste es un procedimiento muy económico que también conduce a una técnica general. No obstante, ponerlo en juego es difícil pues implica tomar en consideración información que no se da directamente (el tamaño del paso del robot que avanza una unidad en el mismo número de pasos) y poner en juego un razonamiento proporcional: a *n* veces más unidades avanzadas, corresponde un paso *n* veces mayor, si el número de pasos es el mismo. Es el procedimiento que se quiso favorecer mediante dos recursos: 1) presentando grupos de robots que avanzan distinto número de unidades en el mismo número de pasos, y 2) Al incluir entre esos robots el que avanza una sola unidad.

Análisis posterior

La maestra tuvo algunas dificultades para entender ella misma los ejercicios aquí planteados y por ende, le fue difícil transmitir la consigna a los niños. Ésta, no quedó clara en ningún momento de esta primera clase, como puede verse cuando intenta dar las instrucciones de la actividad: *"Muy bien, bueno, pues vamos a jugar nosotros ahora a que hacemos robots, ¿de acuerdo? Por equipos tenemos varios equipos y les voy a dar…vamos a dividirlos ya están en cuatro cuatro cuatro cuatro, les voy a dar una letra para su equipo y voy a poner aquí las tablas, un equipo, un juego de equipos van a estar de este lado y otro de este lado, ¿de acuerdo? Y después de trabajar con su tira y su medida, vamos a hacer el intercambio, como lo hacemos con el cálculo mental, ¿para qué vamos a hacer eso?"*

Después de esta consigna confusa, se generaron otras dificultades y confusiones en gran parte a raíz de dos cuestiones: 1) un cambio de unidad que se deslizó sin que se previera lo que iba a causar y 2) una intento prematuro de identificación de la problemática en juego en esta situación, con la del reparto de pasteles. Veamos.

Un desafortunado cambio de unidad

El uso del verbo medir, y el sustantivo "medida" evocó inmediatamente la idea de medir en centímetros, y eventualmente, con una regla. Alguien propone trabajar con centímetros para "medir" los pasos del robot, propuesta que es aceptada por la maestra y el grupo. Esto elimina la problemática que se quería plantear pues al usar los centímetros, las fracciones quedan de lado. Rápidamente vieron que la unidad mide 10 cm y la tira 160.

“Profesora: muy bien, si estamos hablando de longitud y ya vimos que esto se mide en centímetros, ¿cuánto mide su recta?

Germán: un metro sesenta centímetros

Profesora: ok, estamos hablando de pasos, ¿qué van a tener qué hacer?

Niños: registrar, medir cada paso”

Esto tuvo su efecto en los procedimientos. Una de las primeras propuestas para obtener la medida del paso vino de Germán, quien dice que para obtenerlo se podría dividir *“el entero entre cinco […] representado ciento sesenta sobre cinco […] sale treinta y dos”.*

Como consecuencia de la transmisión de la consigna, la función del material resultó confusa para los niños. Ni la tira amarilla ni la verde fueron vistas como auxiliares en la resolución del problema. Hubo especial confusión entre cuáles eran las unidades: los niños no sabían si la unidad era la tira amarilla larga o la tira verde más pequeña. Cuando la profesora intenta explicar dice: *“ésta verde* (refiriéndose a la tira verde) *que tienes aquí puede ser tu unidad, que es ésta, una unidad en cinco pasos, pero lo que tiene aquí Fanny* (sostiene en las manos la tira amarilla) *también puede ser tu unidad ¿o no?* Una de las niñas le dice que, de hecho, ésa es la unidad que están usando, refiriéndose a la tira verde. Es entonces cuando la profesora hace explícita su propia confusión: *“es la unidad que están usando ustedes, por eso está ahí la confusión, si yo uso mi unidad que no lo dije, me acuso, no lo dije, esta es la unidad, y dio cinco pasos, ¿cuántas unidades tiene el primer Equipo?”* Como se ve, no se alcanza definir a la tira verde como la unidad a usar. Aún más, la profesora dice que “cualquier cosa” puede ser la unidad: la tira verde o amarilla, una regla, un lápiz; esto es cierto, pero el comentario no fue oportuno pues no ayudó a despejar confusiones en clase; en este momento es mejor mantener la unidad fija, en este caso, la tira verde.

Identificación prematura con el reparto de pasteles

Con la ayuda de varias tiras verdes, la profesora les intentó hacer ver a los niños que cada una de ésas eran unidades, y que de cada una podría sacarse una fracción determinada. En el fragmento que se presenta a continuación, se tomaron 5 unidades que un robot avanzó en dos pasos, pero las unidades se pusieron una debajo de la otra, como si fueran pastelitos y no una longitud, con lo cual el abandono del contexto se confirmó. Esto si bien en términos abstractos puede aceptarse, en términos concretos y apegados al contexto no es correcto, pues el Robot da pasos de 2/5 de unidad, y por lo tanto no puede darlos de 1/5 “por cada unidad”. La maestra trata las unidades de longitud como pasteles de la secuencia anterior, y no como pasos de los que no puede “sacarse” una fracción así como así. Entonces, la asociación de la situación de los robots con la de los pasteles fue prematura.

“Profesora: sí, cinco pasos, ¿pero cuánto vale cada paso?

Liliana: un quinto

Profesora: un quinto ¿y acá? … dos quintos, si los junto son dos quintos, exactamente como lo hicimos acá, ¿cuánto vale un paso? Un quinto, acá está dividido en cinco pasos ¿cuánto vale cada paso? Un quinto ¿y si los junto? Dos quintos. Ahí es toda la confusión”

El parecido con la estrategia que se usó en la sub secuencia de los pasteles es más abstracto, pues en los robots ya no se trata de tomar 1/5 de cada entero, sino de pensar una situación hipotética: “Si el robot hubiera avanzado una unidad en 5 pasos, sus pasos habrían sido de 1/5 de unidad, pero como avanzó dos unidades, pues sus pasos deben medir lo doble, es decir, 2/5 de unidad.

Finalmente, la profesora intenta pasar a una representación más abstracta de la fracción cuando pregunta *“bien, si yo digo que a es la unidad y b es la medida en pasos y pongo a sobre b* (y escribe en el pizarrón la expresión “a/b”) *¿qué pongo allá? ¿Uno a quién representa?”* Esta intención pudo venir directamente de la ficha didáctica que se le entregó (se muestra al inicio de este análisis) en la que se explica que el propósito de la actividad era establecer que el cociente de *a* unidades entre *b* corresponde a *a/b* de unidad. Ella lo tomó literal e intenta institucionalizarlo sin éxito, ya que Giovanni se remite nuevamente a los centímetros y contesta: “*representa a ciento sesenta”*, mientras otros niños dicen que representa “*al número del entero”.*

Comentarios finales

Las grandes dificultades en la gestión de la clase pusieron en evidencia dos carencias, de distinta índole: 1) no fue acertada la decisión de omitir las actividades introductorias, las cuales habrían permitido no solamente a los alumnos, también a la maestra, comprender mejor el funcionamiento de la situación, y 2) faltó comunicar de manera más precisa algunas características o condiciones necesarias para el buen funcionamiento de la situación, a saber:

- la importancia de que la medición se hiciese únicamente con las tiras unidad, y no con unidades convencionales de medición, las cuáles evitan la necesidad de fraccionar

- La importancia de no adelantar, no forzar, la identificación de lo común entre esta situación y la anterior, sobre reparto de pasteles.

Como lección para la Ingeniería didáctica, queda la indispensable cercanía y el cuidado en la comunicación que debe tenerse con el docente. Así tendríamos más posibilidades de que se tenga una comprensión clara del papel de las variables involucradas para que pueda ser transmitida sin percances que hagan peligrar el objetivo de la actividad. Ciertas decisiones, aparentemente pequeñas, como el de tratar las unidades de los pasos del robots y las rebanadas de pasteles como iguales, siendo que se trata de magnitudes distintas, cobran su costo didáctico en la comprensión ya no de la actividad misma, sino del contenido que pretende abarcarse.

4.2.2 Clase 2

Propósito:

Al igual que en la situación anterior, en ésta se pretende que a partir de una distancia total recorrida por un robot y el número total de pasos que da, se obtenga el tamaño del paso. Se buscará afirmar alguno de los procedimientos más sistemáticos: de preferencia aquél en el que se apoyan en el robot que solamente avanza una unidad, pero eventualmente también en el que se fracciona cada unidad en el número de pasos. Debido a que en la sesión anterior se presentaron varias confusiones (la unidad con la que se debe medir, principalmente), es posible que para varios alumnos ni el problema planteado y ni las soluciones ofrecidas hayan quedado claras, por lo que en esta sesión constará de una fase colectiva cuyo propósito es despejar esas dudas.

Propósito: Primero, la profesora pega una de las tiras amarillas en el pizarrón. Explica que la tira sobre la que avanzan los robots es como una recta numérica: señala con el dedo hasta donde llega una unidad, 2 unidades, etcétera. Explica también que en esta actividad no se va a medir con centímetros, únicamente con las unidades marcadas en el caminito (o en la recta), que son iguales a las tiras verdes. Enseguida, plantea al grupo una por una serie de preguntas. Cada vez, pasa un alumno a dar la respuesta y a explicar. Para verificar, pueden doblar y recortar la unidad verde, y después iterarla con la ayuda de un compás que simula los pasos del robot, o pueden marcar subdivisiones en varias unidades de la tira larga. Se utiliza el mismo material que en la sesión anterior.

PREGUNTAS:

Primero, determinar la distancia avanzada:

1. Si un Robot avanza 3 unidades, ¿hasta dónde llega? (que lo señalen). ¿Y si avanza 4 unidades?

2. Si el paso de un Robot mide ½ unidad, y da 6 pasos, ¿a dónde llega? (pedir que se marquen los medios con lápiz). Se verifica al pasar un niño al pizarrón y marcar, mostrándole al grupo, los pasos de ½ hasta llegar a las 6 unidades.

3. Si el paso de un Robot mide 1 ½ unidades y da dos pasos, ¿a dónde llega?

4. Si el paso del Robot mide ¾ de unidad y el Robot da 4 pasos, ¿a dónde llega? (marcar los cuartos).

Ahora se busca el número de pasos:

5. Si un Robot da pasos de 1/4 de unidad y quiere llegar a 2 unidades, ¿cuántos pasos debe dar?

6. Si un Robot da pasos de 1/5 de unidad y quiere llegar a una unidad, ¿cuántos pasos debe dar?

Por último, se busca cuánto mide un paso:

7. Si un Robot quiere llegar a UNA unidad en 8 pasos, ¿cuánto debe medir cada paso (en UNIDADES, no en centímetros)?

8. Si un Robot quiere llegar a DOS UNIDADES en 8 pasos, ¿cuánto debe medir cada paso?

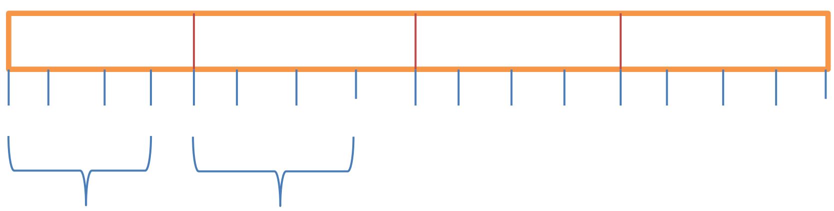
Nota: aquí es importante verificar. Preguntar a los alumnos: ¿cómo podemos saber si esa es la medida del paso o no? Pueden construir el paso e iterarlo, pero también pueden simplemente subdividir la recta e iterar la medida.

Análisis posterior

El ritmo de la clase fue pausado, muy dirigido a la clarificación de las preguntas, el uso del material y dominado por los niños que voluntariamente se ofrecían para contestar las preguntas que lanzaba la profesora. Ella lanzaba la pregunta, elegía a uno de los voluntarios y se contestaba, con algunas participaciones del resto del grupo. No hubo un amplio despliegue de procedimientos pero sí se logró clarificar mejor la actividad misma y su objetivo, lo cual era el propósito de esta segunda clase. Nos detendremos únicamente en las preguntas que presentaron alguna dificultad o en las que ocurrió algo más allá de la clarificación prevista de la situación.

Pregunta 4. Si el paso del Robot mide ¾ de unidad y el Robot da 4 pasos, ¿A dónde llega? (marcar los cuartos).

Nataly hace evidente la problemática del cambio de magnitud, de pasteles separados entre sí a longitudes; y los problemas que trae ver a las unidades como pasteles, que fue lo que se hizo la sesión pasada. Toma cuatro tiras verdes que estaban pegadas en el pizarrón y comienza a dibujar tres líneas que las dividen en los cuatro segmentos que ella misma propuso.



Hasta este momento y según lo que ha venido trabajándose, se trata de marcar ¾ de unidad en la recta, y para ello se necesita dividir la unidad en cuatro partes y tomar tres. Es siguiendo esta lógica como Nataly encuentra una dificultad:

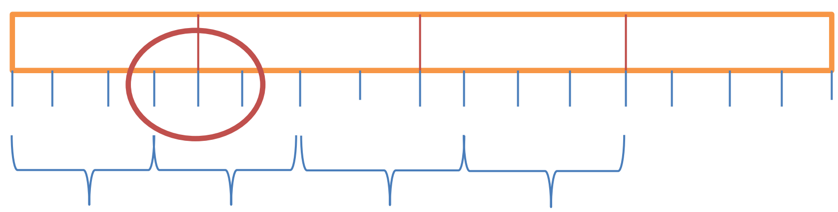
N: Serían uno, dos tres cuatro… o sea serían ¾ (cuenta las líneas con las que dividió la tira) *como está dividido entre 4 solamente voy a agarrar 3*

Profesora: Ajá, ahí…ahí da un paso, ¿luego?

N: Luego sería uno, dos tres

Profesora: 1, 2, 3 otro paso, pero a ver a ver ¿aquí qué hace? ¿Esto qué es? ¿A ver está bien que se pare ahí su paso?

Lo que Nataly hace aquí resulta de tratar a las unidades de longitud igual que a las unidades "pasteles". Marca tres partes de la primera unidad y "se brinca" inmediatamente a la siguiente unidad para tomar otras tres partes, cual si se tratara de tomar ¾ de pastel. Nataly acaba de hacer evidente el problema del cambio de magnitud, de pasteles separados a una longitud, al "brincarse" un cuarto y pasar inmediatamente a la siguiente unidad. La profesora la corrige señalando atinadamente el problema del último cuarto de esa unidad "*cuando caminamos no damos brinquitos, ¿verdad?".* Así, Nataly vuelve a contar, ésta vez incluyendo el segmento que no había tomado en cuenta.



Nataly dice entonces "*Da 3 unidades con 4 pasos"* y Lalo, otro compañero dice "*todos llegan a 3 unidades con diferentes pasos".* En este segmento, parece que a Nataly le queda más claro el ejercicio y Lalo señala atinadamente que todos los robots llegan a tres unidades, pero que la medida de su paso es diferente, refiriéndose a los robots de las preguntas anteriores.

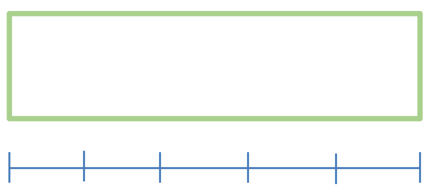
Germán entonces pide pasar al frente para ofrecer una solución numérica para llegar a las unidades avanzadas por el robot: multiplicar la cantidad de pasos por su medida. Explica que *"cuando hicimos esto lo podemos multiplicar la cantidad de pasos que da que en este caso son cuatro por tres entre cuatro, tres cuartos, cuatro por tres son doce, entre cuatro, tres".* Y escribe en el pizarrón: *"4 x3=12 /4 = 3".*

Pregunta 5. Si un Robot da pasos de 1/4 de unidad y quiere llegar a 2 unidades, ¿cuántos pasos debe dar?

Brandon expuso con su participación que no ha quedado claro para todos los niños la manera en la que se divide la tira verde según la medida del paso, pero que con ayuda logran contestar la pregunta. En un inicio, intentó señalar la tira dividida en dos partes, luego, con cierta ayuda, decide utilizar la tira que ya Nataly previamente había dividido en cuatro partes. Cuenta ocho pasos de ¼ (abarcando las dos tiras) para llegar a las dos unidades. Brandon afirma que necesita ocho pasos para llegar a dos unidades. La profesora le pide entonces contar los pasos en los que está dividido la unidad, enfatizando que son cuartos "*ok, si da pasitos de un cuarto…señala cuáles son los pasitos de un cuarto. A ver…señala donde es uno…dos…tres…cuatro, seis, siete, ocho* (se refiere a las ocho partes en las que están divididas las dos tiras en total) *¿a dónde llegó?"* Finalmente, y de forma un tanto guiada, Brandon contesta que el robot llegó a dos unidades, pero no se contestó explícitamente cuántos pasos debió dar.

Pregunta 6. Si un Robot da pasos de 1/5 de unidad, y quiere llegar a una unidad, ¿cuántos pasos debe dar?

Esta pregunta y el procedimiento que mostró José son un buen ejemplo de una práctica muy estimulada por la profesora, la de encontrar procedimientos diferentes o expresar el resultado de diferentes maneras. José toma sólo la unidad y la divide en cinco partes iguales. Señala cada una de ellas con el número 5. Sin que se lo pidan, comienza a colocar debajo de cada número la fracción que le corresponde, y debajo de ésta su equivalente en decimal y en porcentaje. José es el segundo, tras Germán, en traer a la mesa el tema del porcentaje. Y lo hace correctamente.



0	1	2	3	4	5
1/5	2/5	3/5	4/5	5/5	6/5
.20	.20	.20	.20	.20	.20
20%	20%	20%	20%	20%	20%

Pregunta 7. Si un Robot quiere llegar a UNA unidad en 8 pasos, ¿cuánto debe medir cada paso?[23]

El caso de la división de una sola unidad no suele ser problemático. La profesora dice:

> "*Si un robot quiere llegar a una unidad y da ocho pasos…Liliana sí Liliana, ¿cuánto debe medir cada pasito? A ver Liliana pero fuerte me explicas, con ocho pasitos va a llegar a la unidad, ¿qué vas a hacer, en cuanto lo vas a dividir?"*
>
> *Liliana: en ocho*

[23] La octava y última pregunta fue contestada por Karla. Su procedimiento se muestra en el apartado individual destinado a su caso, al final del análisis de esta parte de la secuencia.

Profesora: en ocho ¿verdad? ¿y qué fracción le vas a poner a cada uno de ellos? Porque lo partiste, lo dividiste…

L: un octavo

Profesora: ¿está bien que dijo un octavo? ¿Cada pasito cuánto va a medir?

L: un octavo

I: un octavo, ¿cuántos pasos va a dar entonces?

L: ocho

I: ocho dentro de una…

L: unidad"

Si bien nuevamente la profesora adopta un estilo más bien directivo con respecto a Liliana, logra que la niña de las respuestas correctas. Aquí es pertinente preguntarnos en qué medida este estilo directivo realmente auxilia a estos niños que según sus profesores, que requieren de un apoyo mayor que el resto del grupo.

Pregunta 8: "Si un Robot quiere llegar a DOS UNIDADES en 8 pasos, ¿cuánto debe medir cada paso? Primeros intentos de generalización.

Al final de la clase, luego de que Karla contestó la pregunta ocho (Si un Robot quiere llegar a DOS UNIDADES en 8 pasos, ¿cuánto debe medir cada paso?) la profesora pregunta "*¿si hubiéramos puesto otra unidad, ¿ahí cuánto habría sido?".* José responde "*tres octavos por cada paso […] por cada unidad, por ejemplo si ponemos ahí más unidades van a ser más octavos y así".* José ha comprendido la relación entre el número de pasos y el numerador de la fracción cuando el número de pasos es constante (en este caso que a 3 unidades avanzadas en 8 pasos, la medida del paso será 3/8). Si el número de unidades aumenta y se mantiene el número de pasos (8), entonces también aumentará el número de "octavos" que mide cada paso. Es decir, afecta la medida del paso. Es importante señalar que José no propone que cambie también el denominador, ya que esto dependería no de las unidades, sino del número dado de pasos.

En otro momento, Luis dice que *"cada unidad suma un paso"* y lo explica "*por ejemplo en el que estamos viendo, si le sube la unidad podría llegar con la misma…este…medida va a subir tres octavos".* Esto no es del todo correcto, ya que la unidad no suma un paso, sino que aumenta la medida del paso porque aumenta el número de unidades avanzadas. Empero, parece tener una noción de esta relación, y que esta relación modifica la medida del paso. Él la resume como “sube la unidad, sube el paso”, y esto, desde el contexto de su explicación, es cierto. Corrigiéndolo, puede decirse “cada unidad (de más) suma un octavo” al tamaño de paso cuando el número de pasos es constante. La maestra logra entenderlo “*Ah ya te entendí que si aumento una unidad ya no van a ser dos octavos sino…”* y Luis completa: *“tres octavos”.*

Consideraciones finales

Para alumnos como José o Germán esta parte de la secuencia quedó clara e incluso Germán aportó un método más sistemático para encontrar la medida del paso. En cambio otros alumnos como Nataly siguen pensando en la idea de los pasteles y fue necesario un ejercicio muy puntual para despejar esta confusión. Otros más, como Liliana y Brandon, logran una buena comprensión de la actividad auxiliados por su profesora.

Por otro lado, sigue presente la tendencia a tratar a la magnitud longitud como si estuviera hecha de tramos, de una unidad cada uno y separados entre sí (como los pasteles de la secuencia anterior) tanto por parte de la profesora como de algunos niños. Esto parece ser consecuencia de la contigüidad de las secuencias, aunado a la presión que suele haber en la enseñanza por llegar más o menos pronto a resultados generales, muchas veces descontextualizados.

José y Luis, logran hacer dos síntesis correctas de la relación entre unidades y pasos cuando el número de pasos es constante. El análisis de la tercera clase sobre robots resulta esencial para conocer el grado en que esta secuencia logró los objetivos planteados tras esta sesión de clarificación. Finalmente, cabe señalar que las peguntas introductorias se revelaron más adecuadas para introducir la situación. Cierto que también la maestra, después de la fallida primera clase, tuvo mayor claridad en la comprensión de la actividad.

4.2.3 Clase 3

Propósito: Ofrecer más ocasiones a los alumnos para establecer que el cociente de la división ***m*** unidades entre n es la fracción ***m/n*** de unidad, en el contexto de la medición de longitudes. Esta sesión tiene las mismas características que la primera sesión, sólo se modificaron 2 aspectos:

- El divisor (ahora es 7).

- No hay robot que avance sólo 1 unidad en 7 pasos. Queremos ver si los alumnos recurren por sí mismos a ese dato como un recurso para encontrar la medida de otros pasos (valor hipotético).

Los recorridos de cada robot serán los siguientes:

Robot	Distancia que recorre	Número de pasos
A	3 unidades	7 pasos
B	5 unidades	7 pasos
C	9 unidades	7 pasos

Notas adicionales al análisis previo

Entre los procedimientos que se previeron en la primera sesión, se espera que en ésta sean más frecuentes los que llevan establecer que el cociente de *m* unidades entre *n* pasos es *m/n* de unidad. Incluso es posible que alumnos puedan dar directamente la fracción resultante sin tener claro el procedimiento lleva a ella y que la justifica.

Institucionalización. Si se logró que los alumnos utilizaran alguno de los dos procedimientos que dan el resultado de la división de manera exacta, procurar generalizar planteando más divisiones, por ejemplo:

- Y si un Robot avanza 8 unidades en 15 pasos, ¿Cuánto mide su paso?
- ¿Y si avanza 4 unidades en tres pasos?
- ¿Y si avanza 5 unidades en 5 pasos?
- ¿Y si avanza 834 unidades en 2500 pasos?

> "Podemos decir entonces que 8 unidades divididas entre 15, es 8/15 de unidades, o que 834 unidades divididas entre 2500 da 834/2500 "avos" de unidades

¿En qué se parece a los que vimos en el reparto de pasteles?

En general *m* unidades entre *n* es igual a la fracción m/n DE UNIDAD.

Identificar lo común entre la situación de los pasteles y la de los robots no es sencillo, pues como se ha dicho lo que comparten se sitúa en un nivel de cierta abstracción en el que quedan fuera las magnitudes específicas y la razón de ser de la división (repartir pasteles, partir distancias). Se espera que centren la atención en la operación de división y su resultado fraccionario. Cabe preguntarse si será posible hacer ya cierta descontextualización, o esto de prematuro e inevitablemente se forzarían los contextos.

Análisis Posterior

Los procedimientos mostrados por los alumnos se agrupan en cinco categorías 1) Aproximaciones por ensayo y error, 2) División con cociente decimal, 3) Dividir directamente la unidad en siete partes (ya sea que se haga un gráfico o se use el material), 4) la resolución esperada, de considerar el caso hipotético del robot que avanza una sola unidad y 5) Verificación de la igualdad 9:7= 9 x (1/7). Se presentan a continuación algunos ejemplos de estos procdimientos.

Aproximaciones por ensayo y error

Carmen, Adrián, Fernanda, José Luis (Robot B 5u; 7p)

Este equipo da un ejemplo de una estimación inicial de medida. Proponen que el paso mida ½, luego dividen cinco entre siete y después siete entre cinco, con lo que obtiene dos “medidas” diferentes de paso que buscan comprobar (probablemente intuyen que el paso debe ser mayor que uno y desechan la medida que es menor). Luego dividen cada unidad en diez partes. Finalmente Carmen propone dividir cada unidad en siete partes y así encuentran la medida del paso. El papel de Carmen es esencial en este procedimiento, por lo que se explicará más detalladamente en el apartado correspondiente.

División con cociente decimal

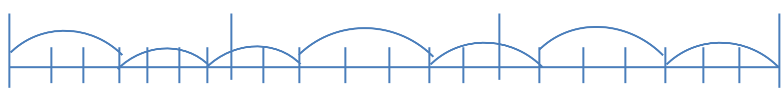
Germán, Tadeo, Fanny, Diana (Robot C 9u; 7p).

Lo primero que este equipo busca es la medida del paso dividiendo 9: 7, encontrando una larga cola decimal (1.285714…). Deciden quedarse con 1.2. Germán explica que eso es equivalente a 6/5 *“porque punto dos es un quinto, más el entero”*. Sin embargo, al multiplicar 1.2 X 7 les da 8.4, es decir, les falta para llegar a 9. Germán dice algo acerca de que los números del cociente que no consideró pueden tener que ver. Hace entonces 1.2857 X7 = 8.99. Ante esta cuestión, uno de los observadores le preguntó si con fracciones se podría resolver, y Germán dice que *“ese sería el problema”.*

Dividir directamente la unidad en 7 partes (con gráfico o construyendo físicamente el paso)

José (Robot A 3 u; 7 p)

José pasa al frente y traza una recta. Explica que es necesario multiplicar las unidades por los pasos para obtener el total de partes en las que deben estar divididas sus tres unidades. Multiplica 7x3=21, y escribe *“21/7=7 pasos”*. Luego sólo toma 3/7 y los marca hasta llegar a sus 3 unidades.



21/7= 7 pasos

7x3= 21

3/7

```
   3
7 |21
```

Esta solución se está convirtiendo en la más empleada por los alumnos, como si fuera no sólo la única, sino la “obvia”. Cuando la profesora pregunta: “*¿qué es importante saber en la unidad para poder dar el paso?-los niños murmuran-¿la división qué?”* José contesta que “*la división de las unidades”.* Efectivamente la división de las unidades entre el número de pasos es parte primordial de una de las soluciones sistemáticas al problema. José, para dividir el recorrido total entre *n* pasos, lo que hace es dividir cada unidad entre el número *n* de pasos, considerar el total *n* “avos” que forman el recorrido y dividir ese total entre el número de pasos.

Construcción física del paso

Tadeo y Samantha (Robot C 9u; 7p)

Este equipo fue el único que construyó físicamente el paso tras un trabajo largo y con un seguimiento muy de cerca por parte de la profesora. La intervención de la profesora fue confusa, pues cuando llega a auxiliarlos ellos ya tenían una dividida una unidad en 7 partes (la forma en cómo llegaron a esto desafortunadamente no se explicita) les pregunta en cuántas partes debe estar dividida la unidad[24] si la primera unidad, esa que ya habían marcado, la dividieron en siete. Logra, sin embargo, que los niños le digan la cantidad total de segmentos (63=9x7) que tendrán si dividen cada una de las 9 unidades en 7 partes, pero cuando pregunta "*ahora lo que queremos saber es en cuántos pasos"* olvida que ya están señalados, y lo que hay que conocer es su medida. La profesora dice que cada paso medirá entonces una unidad, lo iteran siete veces sobre la tira amarilla y ven que faltarían dos unidades para llegar a las 9 unidades que el robot debe avanzar. Deciden probar con otra medida del paso, esta vez con 8 séptimos, lo iteran siete veces nuevamente y ven que les falta "un cachito" para llegar. La profesora pregunta "*¿de cuánto tendría que ser (el paso)?"* "*más chico"* dice Samanta, "*no al contrario, tendría que ser un poco más grande"* contesta la profesora. Finalmente prueban con nueve séptimos, lo iteran siete veces sobre la tira amarilla y que llegan a la meta.

La maestra toma una unidad (tira verde) y le pide a Tadeo que divida la otra en siete partes. Luego, ella misma cuenta dos séptimos más y los recorta, para pegarlos. La intervención de los niños en esta construcción fue casi nula, y observaban atentamente a su maestra. Una vez que ha unido las dos partes, queda una tira verde más grande que el resto, y se la da a Tadeo para que verifique si, efectivamente, se llega a las 9 unidades.

Si bien los niños logran construir el paso, queda la impresión de que su intervención de fue muy poca y que quizá la instrucción de la profesora fue excesivamente dirigida. A pesar de esto, cuando los niños pasan al frente a dar su explicación, Tadeo logra reproducir el procedimiento de una forma bastante clara, lo

[24] Esta intervención de la profesora es confusa. Los niños ya tenían una unidad dividida en 7 partes y ella pregunta por una "segunda unidad" para dividirla. Esto parece apoyar la idea de que la profesora está tratando de comprender la actividad junto con sus alumnos. De su gestión durante la implementación se hablará al final de este capítulo.

que nos indica que, si bien no participó activamente en este procedimiento, tampoco pasó desapercibido para él.

La resolución esperada

Germán (Robot C 9u; 7p)

Sobre esta parte del procedimiento del equipo es importante señalar que hubo una intervención de uno de los observadores quien ha venido ya observándolos desde el inicio del experimento. Cuando llegan al momento en el que los decimales parecen no funcionar, el observador les sugiere que busquen otra forma y los deja solos un momento. Pasados 5 minutos, los niños siguen atorados. Entonces el observador les pregunta qué pasaría si el robot avanzara solamente una unidad en esos mismos 7 pasos. Sin dificultad dicen que 1/7. Pero entonces, continúa el observador, "como avanza 9 unidades, y no una, ¿de qué tamaño podría ser el paso?" Germán pesca al vuelo la insinuación y contesta que el paso es de 9/7; aunque puede quedar también la duda de si Germán considera realmente la relación o que hay en juego.

Verificación de la igualdad 9:7= 9x (1/7)

Germán (Robot C 9u; 7p)

Germán descubre un hecho interesante: que da lo mismo sacar primero un séptimo de una unidad y luego multiplicar por 9, que dividir las 9 unidades entre 7. El paso por los cocientes decimales está ofreciendo una manera más de comprobar esa igualdad, que finalmente es la que se juega en esta secuencia, esto es que (1:7) x 9 = 9:7. Al pasar al frente Germán explica *"Lo que es curioso es que si dividimos siete entre uno para sacar el valor de un séptimo ¿cuánto es? […] sale punto catorce, y si multiplico esa cantidad por nueve sale* (escribe):

.142857142 x 9= 1.2857142

"Y si divido nueve entre siete me sale esa misma cantidad que es lo que valdría siete entre nueve"

9:7= 1.2857142

"Y si este lo multiplico por siete me da nueve"

1.2857142 x 7= 9

Cuando la profesora les pregunta que cómo sería con una operación (se ilustra abajo), Germán no logra contestar lo que ella quería (9:7) a pesar de que él lo hizo, pero con cociente decimal. Al final lo que Germán concluye mediante su paso por los decimales es que

$$9 \div 7 = 9 \times (1 \div 7)$$

Por otra parte, cabe preguntarse si Germán considera que 9 X (1÷ 7) es igual a 9 X $\frac{1}{7}$

"Poner la rayita"

Finalmente, cuando la profesora pregunta *"¿Y cuando somos bien hábiles qué operación hacemos?"* Germán dirá *"podemos poner una rayita y ya".* Y más adelante Giovanni dirá que eso mismo hacía en el de los pasteles. Éste sí era un buen momento para vincular ambas actividades que lamentablemente no pudo realizarse.

Consideraciones finales

Durante esta sesión, en la puesta en común los equipos van desfilando y casi todos, sino todos, traen la solución esperada, dividir cada unidad entre el número de pasos que avanza el robot. ¿Qué justifica la partición en 7? La transición entre un procedimiento más rústico, como el de Carmen y Adrián de aproximarse al tamaño del paso por ensayo y error, o el que dirigió la profesora con Tadeo y Samantha, a la solución que propone Germán, no aparece de forma muy clara en los procedimientos observados. Ningún equipo expresa por qué conviene dividir entre 7. Cuando la profesora pregunta "¿Y por qué?" Maribel contesta: "porque son siete pasos", respuesta que realmente no explica la regla, sino que simplemente la describe.

Sin embargo, algo parecen sospechar en cuanto a la relación unidades/pasos, ya que todos los equipos, salvo el de Germán, optan por dividir las unidades en siete partes y contabilizan el total de séptimos, para luego dividirlos entre siete. Nataly (robot C, 9u; 7p), por ejemplo, plantea que dividió los 63 séptimos entre 7, obteniendo como resultado 9 y dice que eso es "*obvio".* ¿Será que percibe que si el 9 se multiplica por 7 y luego se divide entre 7, es indiscutiblemente obtendrá 9, así como lo expresó Germán? Lo que sí vemos claro es que no se están limitando simplemente a escribir el número de las unidades avanzadas en el numerador y el número de pasos en el denominador.

La secuencia en lo individual

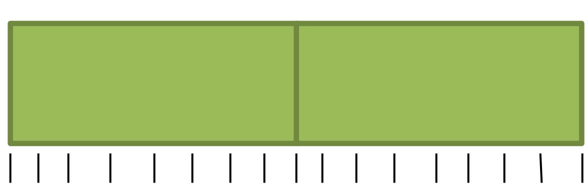
4.2.4 La secuencia en lo individual

Karla

La interpretación correcta de un problema

La trayectoria de Karla durante esta sub secuencia se caracterizó por una correcta interpretación del problema que se vio ligeramente opacada por la coordinación de la profesora.

- <u>Avanza ocho pasos en dos unidades u ocho pasos en cada unidad.</u> Karla hace explícita una cuestión medular de la secuencia y la importancia de dar la consigna como estaba planteada al inicio. Ella busca conocer la medida del paso de un robot que avanza dos unidades en 8 pasos y pregunta "*¿son 2 unidades y en ésas da ocho pasos? ¿o en cada unidad va a dar 8 pasos?"* a lo que su profesora contesta que en cada unidad debe dar ocho pasos. No es lo mismo plantear un problema en el que el robot recorra en ocho pasos dos unidades, a que en cada unidad dé ocho pasos. Tal como pasó en la clase anterior, el sentido de la situación se pierde cuando de antemano le dices al alumno un probable procedimiento como el que se propuso. A pesar de esto, Karla continúa con su procedimiento, no sólo no comienza por dividir cada unidad en ocho partes, sino que une dos tiras verdes y comienza dividiendo cada una en 4 partes, con lo que serían los ocho pasos avanzados en las dos unidades, no 8 en cada una, como se le propuso de entrada. Desafortunadamente, la profesora no alcanza a ver su error en la consigna y le pide que divida cada unidad en ocho partes. Cuando termina de dividir, Karla dice que para saber la medida del paso, debe tomar *"dos de cada unidad".*



La respuesta de Karla es correcta. Si le dijeron que dividiera cada unidad en 8 en lugar de 4 como ella había pensado cada paso tendrá que ser de dos partecitas, para que en 8 pasos recorra las dos unidades. Esas dos partecitas son 2/8, es decir, es el cuarto. Su profesora en cambio se apegó al algoritmo que funcionó para pasteles; el de dividir cada unidad en 8. En este contexto en cambio se divide cada unidad en 8 también, pero bajo un razonamiento distinto: la hipótesis de que el robot que avanza 2 unidades avanza lo doble del que avanza una sola unidad. La división en ocho puede justificarse también en este contexto, de manera puramente numérica: es la división que arroja un número de partes que es divisible entre 8, en este caso, 16.

- Aproximaciones. En la siguiente clase, debe resolver el caso del robot que avanza 9 unidades en 7 pasos. Karla propone, al igual que Carmen en el anterior equipo, iniciar con una medida del paso de 1 ½ (una buena estimación) y luego verificarla. Intenta incluso comenzar a contarlas sobre la tira amarilla. Luego propone que la medida sea de 1 ¼. Cuando los alumnos pasan de un paso y medio a 1 ¼ muestran un repertorio restringido de fracciones, las disponibles son en general unitarias y a veces sólo son medios y cuartos. Proponen entonces que cada paso mida una unidad.
- Dividir el sobrante en 7 partes. Con el paso de una unidad, les faltan dos unidades para llegar a 9. Cuando Karla ve el sobrante dice "*¿O sea dejo dos enteros? Mira ya sé, ¿aquí cuánto dijiste que era? un entero, ¿verdad? estos dos cachitos los tenemos que dividir en siete".* Este es un probable camino para llegar a la medida final del paso, que es 9/7 o 1 2/7 y quizá proviene de la idea de ver las unidades como pasteles en el sentido de que la medida buscada se forma considerando divisiones parciales, primero 7 entre 7, después 2 entre 7. Parece estar buscando la medida que repetida 7 veces dé 9 unidades. Si fuera de una unidad, recorrerían en total 7 unidades, faltan dos. En lugar de estimar directamente con otra fracción como 1¼, deciden "dividir 2 unidades entre 7, para darle a cada unidad la parte que le falta, como en los pasteles. Empero, ni Karla dice que al final se añaden esos "cachitos" al entero que ya habían apartado para cada paso, ni Nataly atiende la propuesta. Para Nataly, dividir esas dos unidades restantes sería dar más pasos, lo que no es posible dada la consigna. Momentos después, Nataly dice que si los pasos midieran una unidad, sobrarían dos unidades (para llegar al 9) y hay que dividirlas. Aquí se comienza a perfilar un procedimiento para obtener fracciones impropias. que

parece consistir en “trabajar” o repartir primero la parte entera (mediante una estimación) y, luego, buscar repartir la parte no-entera?

- <u>Las siete unidades divididas en nueve partes cada una.</u> Ante la confusión, acuden con la profesora, quien acaba diciéndoles que cada unidad debe estar dividida en siete partes. Cuando la maestra les pregunta “*¿en cuánto tendrían que estar divididas sus unidades?*”, les está dando a entender que cada unidad debe ir dividida en determinado número de partes, y no dividir en 7 partes “seguidas” las 9 unidades completas. Regresan a su lugar y se limitan a seguir este procedimiento con lo que llegan al resultado correcto.

Como puede verse, una sugerencia equívoca delimita en gran medida la comprensión de Karla sobre la secuencia, empero, logra algunos procedimientos atinados que revelan su esfuerzo por comprender el contenido y su potencial para idear nuevas soluciones. Este mismo potencial se ve en las sesiones posteriores aunque, desafortunadamente, aparece delimitado nuevamente por estas intervenciones poco claras, provocando que Karla haga explícita su incomprensión sobre lo que se está trabajando.

Carmen

Las aproximaciones por ensayo y error

Sobre Carmen, resalta su procedimiento durante la segunda clase, cuando busca, por aproximaciones, la medida del paso. Aunque lo resuelve en equipo, sus aportaciones resultan esenciales para resolver el problema.

- <u>Divide distancia total entre número de pasos</u>. En la primera situación (si 6 unidades se avanzan en 5 pasos, cuánto en un paso), debido a la confusión con la unidad de referencia[25], en lugar de enfrentar el problema de 6 unidades en 5 pasos, enfrenta el de 160cm en 5 pasos, cuánto en un paso, y plantea acertadamente la división 160cm: 5.

- <u>Recurre a la conservación de la razón “doble”:</u> Una vez que se aclara que la unidad en juego son las tiras y no los centímetros, es decir, que el problema implica dividir 6 unidades entre 5, Carmen deja de ver momentáneamente la pertinencia de la división, y trata de apoyarse en el resultado obtenido por otros

[25] Prevaleció durante la clase la confusión sobre la función de la tira verde y amarilla, ya que no se especificó que la unidad de referencia era la tira verde.

niños a quienes les tocó 3 unidades en 5 pasos: ellos encontraron que el paso debe medir 3/5 de unidad, entonces Carmen propone 6/10 unidad. Parece considerar que si un Robot da el doble de pasos, avanza el doble, pero hace un error al duplicar 3/5.

- Nuevamente ensayo y error. En la clase siguiente, para 5 unidades entre 7 pasos intenta aproximarse por ensayo y error, verificando cada vez. Con su compañero prueban con ½, observan que resulta muy chico.

- Aparece nuevamente la división con cociente decimal: Antes de seguir probando, Carmen vuelve a la idea de la división: divide 5 entre 7, obtiene 0.7, y verifica, pero usando nuevamente al centímetro como unidad, lo cual seguramente la llevó a invalidar el resultado y el procedimiento, que sin embargo eran correctos. Quizá debido a eso, acepta la idea de su compañero de invertir la división: dividen 7:5. Encuentran 1.4, y nuevamente usan el centímetro como unidad.

- Carmen regresa a la idea de estimar y probar (ensayo error). Ya había probado con 0.7 cm; ahora decide probar con 0.75cm. No es muy claro por qué.

- Dividir todas las unidades del recorrido en séptimos y luego el total de séptimos obtenidos entre 5. Finalmente Carmen exclama: *"Ni modo que cada unidad se divida en 7 pasos, porque son 7, entonces serían 5, ¿estoy bien?"* La observadora la invita a hacerlo. Obtiene 35 séptimos, que divide entre 7 pasos, lo que le da 5/7 por paso. Lo verifica, esta vez usando la tira-unidad, y lo valida.

Así, podemos ver como Carmen, tras una serie de aproximaciones de medida, ha logrado obtener el cociente fraccionario, por el camino de dividir cada unidad entre el número de pasos.

Dos días después de terminada esta sub secuencia, se aplicó la evaluación breve que se señaló en apartados anteriores, donde obtuvo 8 de 9 aciertos. Semanas después, acudí a una pequeña reunión privada con ella donde le mostré su prueba, y estaba muy sorprendida de sus buenos resultados. Para conocer un poco más sobre sus procedimientos le pedí que me explicara cómo resolvió la pregunta "Con 5 metros de listón se hacen 8 moños del mismo tamaño. ¿Qué fracción de metro mide cada listón?" ya que en la primera prueba no logró contestar un reactivo idéntico, y esta vez sí. Confusa, me dice que no recuerda muy bien pero que *“lo hice como si fueran pasos…lo dividí en ocho cada pedazo, yo pensaba que yo agarraba cinco porque son los metros… voy a hacerlo nada más de uno”* Carmen recurrió al procedimiento que se buscaba inducir, y, a diferencia de Germán, sin la intervención del observador. Continúa diciendo “*Pues si de un metro son 1/8… ¡ah pues son 5/8!”* Con lo que resuelve correctamente el problema. Salvo ella, ningún otro alumno logra caer en esta conclusión.

Maribel

Resultado correcto en decimales, con una dificultad para convertirlo a fracción

Como en otras ocasiones, Maribel muestra cierta inclinación por dividir y trabajar con el cociente decimal, pero tiene dificultad en vincular estos números con las fracciones.

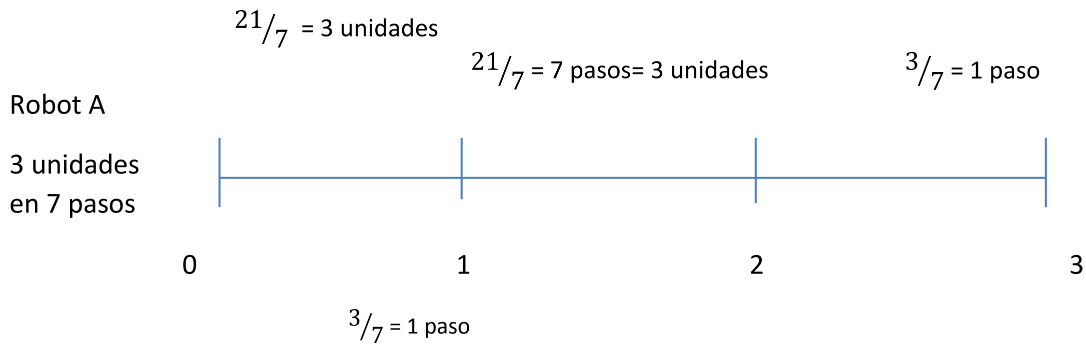
- <u>¿A dónde debe llegar el robot?</u> (robot 3 u; 5 p). Al principio Maribel parece no tener claro que las unidades son las que están marcadas en la tira larga y el observador les auxilia con eso. En algún momento Maribel dice: *“Tres entre cinco”* y con la calculadora encuentran 0.6. El observador pregunta nuevamente: *¿Y con fracción?* Y la niña dice que *“tres sextos, porque cada paso avanzamos .6, y como son 3 unidades, son 3/6”* Maribel se da cuenta de su error al verificar sobre la tira amarilla los pasos con esta medida *“¡estamos mal! Porque tiene que dar 5 pasos para llegar a 3 (3 unidades)”*
- <u>Marcando los pasos medidos con centímetros.</u> Después de unos segundos, están marcando pasos de 6cm sobre su tira. Ven que con cinco pasos llegan a 3 unidades, ¿cómo pasaron del 0.6 a 6cm? Esto es exacto, pues 0.6 de 10cm es 6cm. Maribel añade además “*Sería media unidad, seis décimos en fracción, porque son los seis centímetros de la unidad que vale diez”.* Esto es correcto. En el trabajo de Maribel se encontró otra manera de llegar al 3/5. Más tarde, durante la revisión de los resultados frente al grupo, no escribe su anterior resultado “0.6” sino que puso en el pizarrón: 6/10 = 3/5 = 6cm. Maribel pasó del decimal a la fracción. Para ella, fue útil saber que 6 de 10 representa 6/10. Quizás con este ejercicio, quede mejor explicitada la interpretación de los decimales que, como vimos en el análisis de la clase anterior, le representaba cierta dificultad.

- La diversidad de representaciones. En la siguiente clase, resuelve el caso del robot que avanza 3 unidades en 7 pasos, y surge una variedad de representaciones que muestran la facilidad del cambio de registro que tiene Maribel.

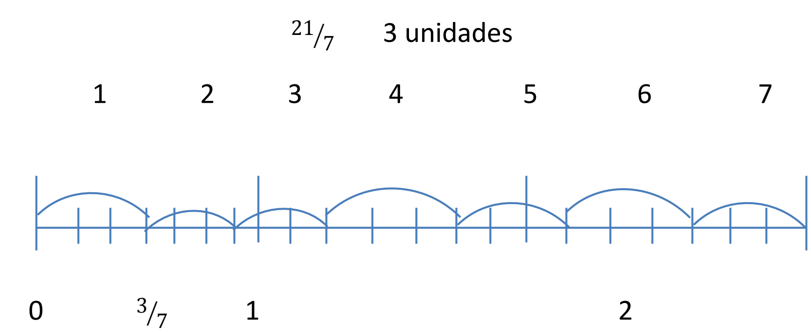
  1) División con cociente decimal 3: 7 =.4. Maribel comienza marcando nuevamente las unidades verdes sobre la tira amarilla, sobrepuestas a las que de antemano ya tenían. Cristopher le trae una regla graduada a Maribel. La niña explica que dividieron 3 entre 7 y que les salió .4. Entonces, Maribel marca divisiones cada 4 cm sobre la recta amarilla. Esto es correcto, ya que 4cm es 4/10 de 10 cm, que es la medida de la unidad verde (esto sólo es correcto para el caso de que la unidad verde mida 10 cm). Después de iterar 4cm 7 veces sobre la tira amarilla, llegan a 28 centímetros. "Le falta un cachito", dice Maribel, y borra las marcas que fue poniendo. La interrogante que surge a partir del procedimiento de Maribel ¿sabe realmente que 4 cm corresponde a 4/10 de la unidad que mide justo 10 cm o simplemente supuso que el punto 4 del cociente corresponde a 4cm? Independientemente de que la unidad midiera 10, es decir, si hubiera medido 12, ¿de todas formas Maribel habría considerado que .4 = 4cm?

  2) ¿Por qué dividir cada unidad en 7? Tras darse cuenta de que su medida inicial no le daba la medida de los pasos exacta para llegar a 3 unidades, Maribel se queda pensativa y dice *"Podría ser lo que dijo Ana: dividir la unidad entre 7*". Uno de los observadores les enseña a dividir la unidad entre 7 con una hoja rayada y los deja solos un rato. Cuando regresa, Maribel está detenida y confusa: "*ya me confundí, porque dice tres entre siete, aquí solo hice una unidad entre siete, y tienen que estar los siete* (pasos)". Esta es una pregunta importante, si bien para el resto de los equipos la idea de dividir entre 7 cada unidad es aceptable y no cuestionada, para Maribel carece de cierto sentido, no se explica por qué hay que hacerlo así. Para ayudarla un poco, el observador le dice: *"si divides cada unidad en siete, ¿cuántos séptimos tendrás? Eso lo recorre en siete pasos, ¿y en un paso?"* Y la deja sola un momento. Cuando regresa, ella misma es quien busca al observador y le cuenta: *"Llegué a una conclusión muy buena…"* Finalmente termina explicando lo que hicieron también los demás: se divide cada unidad en 7, y luego los 21/7 entre 7.

3) <u>Dividir cada unidad en siete y representarla en una recta.</u> Llegado el momento de la revisión en equipos, Maribel pasa al frente y explica “*yo lo que hice fue una recta”* Comienza a dibujar una recta en el pizarrón que va ampliando según su explicación *“la primera unidad medía 7/7, entonces multiplicamos los 7/7 x 2 sería 14/7 y los 7/7 por 3 darían 21/7”*



Es importante señalar que la niña no está dejando ver porqué esa primera unidad debe dividirse en siete partes. Para esto hay dos posibles explicaciones: 1) Si sólo hubiera avanzado una unidad, sería 1/7, pero como avanzó tres, entonces es 3/7 y 2) porque al repartir cada unidad en siete, se obtiene una cantidad de pedacitos que se puede dividir bien entre siete, sin que sobre nada. Su explicación posterior se acerca más a la primera posibilidad: al dividir cada unidad en siete partes, se obtienen 21/7, que fácilmente se divide entre siete, obteniendo 3/7 como medida del paso. Esta última conclusión no es propiamente de Maribel, sino de Nataly, quien retoma la recta de Maribel y marca la medida de cada paso y dice “*21/7 es igual a 3 unidades […] 3/7 equivale a cada paso”.*



Maribel tenía en principio algunas dificultades para interpretar los decimales y su conversión a fracciones, lo cual no es extraño, ya que esta conversión no es cosa menor. Sigue utilizando los decimales en la secuencia de los pasos del robot, aunque luego viene la posibilidad de dividir la unidad en siete partes, con una preocupación de su parte sobre porqué precisamente deben dividirse en esa cantidad. Del grupo, ella es la única que cuestiona este planteamiento y, en su explicación posterior, se desdibuja la posibilidad de que se haya hecho porque así se obtiene un número de pedacitos que se pueden dividir entre siete. Esta explicación sin embargo queda en duda, ya que quien acaba dándola es Nataly, mientras Maribel dibuja su recta. Aun así, sorprende la capacidad de Maribel de cuestionar el procedimiento establecido como canónico dentro del salón (dividir cada unidad en siete partes) y su manejo de los decimales, los centímetros y las facciones.

Comentario final de la secuencia “Pasos de los Robots”

Las dificultades para poner en práctica la situación en la primera sesión dejaron ver, por una parte, la pertinencia de las actividades introductorias que se suspendieron por considerar erróneamente que no eran necesarias, y, por otra parte, la importancia de destacar dos condiciones que se dejaron implícitas, sobre las que nos detendremos brevemente a continuación, por considerarlas de interés. Posteriormente, haremos una valoración de la secuencia en función del desempeño observado en el grupo.

- La necesidad de excluir la medición en centímetros

No es casual que los niños hayan evocado los centímetros para conocer la medida del paso. Más que por la introducción que dio la profesora a la secuencia y de que suele ser la unidad en la que se miden longitudes, resulta que hay en juego divisiones cuyo cociente no es entero. El cociente decimal que obtienen algunos (por ejemplo, en 3:7 = 0.42) les evoca también a los centímetros. Debido a lo anterior, es necesario advertir al profesor sobre la alta probabilidad de que los alumnos sugieran medir en centímetros, y sobre la necesidad de excluir ese recurso: la medición se debe hacer con la tura unidad (verde).

- Necesidad de explicitar la importancia de no precipitar, ni forzar la identificación con el reparto de pasteles.

Desde el estudio de Solares (2001) está documentado que la secuencia de los pasos del robot favorece de manera muy distinta la división “m unidades entre n” que la que favorece la secuencia de reparto. . En ésta última, las unidades se pueden “repartir” una por una, asignando a cada una de las *n* personas 1/n de cada uno de los *m* pasteles. Pero para dividir una tira de m unidades entre n, no se divide físicamente entre n cada unidad, se divide sino la totalidad. En el caso de las tiras, la división de una unidad no corresponde a la división física, solamente a la división numérica, es un programa de cálculo (dividir primero una unidad, multiplicar después por el número de unidades). No se esperaba que los alumnos usaran ese programa desde el principio, se esperaba propiciar poco a poco.

Sin embargo, probablemente debido a la contigüidad en el tiempo con la situación de los pasteles, a la presión que suele haber para llegar a la meta de manera pronta, y a la percepción de la maestra de que eso se trataba, la profesora de entrada planteó las cosas destacando la similitud entre ambas situaciones. El plantear la similitud en el nivel concreto y no en abstracto, dio lugar a una situación insólita y sin sentido: para dividir una longitud de n unidades, dividir cada unidad por separado (en algún momento la maestra acomoda las unidades una debajo de la otra). Es decir, ocurre una “transgresión del contexto”[26].

Resulta muy interesante observar que, sin embargo, algunos alumnos sí reaccionan ante esta “transgresión”. Una de las tres alumnas a quienes se hizo un seguimiento, Karla, en la segunda sesión, para dividir una longitud de 2 unidades entre 8, traza las dos unidades y pretende dividir cada una en 4 partes para tener las ocho partes en total. La maestra la lleva sin embargo a dividir cada unidad en 8. Ella, confundida, pregunta entonces: “¿son 2 unidades y en ésas da ocho pasos? ¿O en cada unidad va a dar 8 pasos”? Nataly, en la segunda clase, también hace evidente el problema con el cambio de magnitud al tratar de averiguar a donde llega un robot cuyo paso mide ¾ de unidad si el robot da 4 pasos. Divide cada unidad en cuatro partes y ella misma dice “agarro tres” de la primera unidad, “brincándose” el último cuarto y retomando el conteo en la segunda unidad. Es en este momento también que la profesora cae en la cuenta de que se está trabajando con magnitudes distintas.

Así, en el caso de los Robots puede decirse que la división de una sola unidad constituye una parte de una resolución numérica que nada tiene que ver con la que se

[26] Así denominan Block y Solares (2001) los casos en los que se forzan los contexto, o se abandonan, para poder ilustrar, concretizar alguna relación matemática. Brousseau menciona también la “evaporación de la unidad” (Brousseau, 1981, (artículo en RDM VOl 1.1)

haría físicamente. Hay un recorrido por hacer entre una y la otra, y esto es lo que la hace que este contexto sea más difícil que el del reparto.

Desempeño logrado en la secuencia

Consideraremos el desempeño del grupo a partir de la segunda sesión, cuando se pudo plantear con claridad la situación. Una vez comprendida la trama por los alumnos, dos procedimientos fueron frecuentes (fueron identificados en las alumnas del seguimiento y en varios alumnos más): ensayo y error, es decir, estimar una medida, mediante una fracción de unidad, iterarla y hacer ajustes, o bien, dividir y obtener un cociente decimal, el cual fue interpretado casi siempre como indicando un número de centímetros.

En cierto momento, el procedimiento que parte de dividir cada unidad entre el número de pasos, que la maestra promovió desde un inicio, fue apareciendo en cada más equipos. Los alumnos obtenían un número de partes múltiplo del divisor (es decir, del número de pasos) lo que les permitía hacer la división y obtener un cociente exacto. Se tendió así a uno de los procedimientos sistemático previstos:

$$a \div b = \frac{ab}{b} \div b = \frac{ab \div b}{b} = \frac{a}{b}$$

La división de cada unidad entre el número de pasos se estableció sin que su razón de ser emergiera. Algunos descubrieron que funcionaba bien, para otros fue simplemente la manera en que había que hacer las cosas.

Salvo el caso de Carmen en la entrevista posterior que se comentó en su apartado correspondiente o el de Germán auxiliado por uno de los observadores, no hay evidencias, de que algún alumno haya puesto en marcha el procedimiento que consiste en considerar el caso hipotético de un robot que avanza solo una unidad, por ejemplo, para calcular 3 unidades entre 7 pasos, pensar “es tres veces una unidad entre 7”. Dicho en general:

$$a \div b = a \times (1 \div b) = a \times \frac{1}{b} = \frac{a}{b}$$

Al parecer, establecer un supuesto de esta naturaleza (si el robot hubiera avanzado solamente una unidad en 5 pasos, daría pasos de 1/5 de unidad, entonces si avanzara 3 unidades en 5 pasos el paso mediría 3/5 de unidad) constituye un paso difícil. En el estudio del que tomamos esta secuencia (Solares 2001) se reporta que si bien el procedimiento de avance hipotético de una unidad sí apareció, fue poco frecuente. En el presente estudio confirmamos que, en efecto, constituye un procedimiento complejo para alumnos de quinto y sexto de primaria.

Se identificaron sin embargo otras generalizaciones. José, uno de los alumnos más adelantados, llegó a expresar que por cada unidad más que avanza un robot (en cierto número de pasos), el tamaño del paso aumenta 1/n. Germán, otro de los alumnos adelantados, descubre, con apoyo de la calculadora, que 9÷7=9 X (1÷7), lo cual constituye otro indicio de la relación que quiso favorecer.

En resumen, la técnica de considerar el caso hipotético de un robot que avanza una unidad apenas aparece y de manera incipiente, y la técnica de dividir cada unidad entre el número de pasos, si bien fue utilizada por varios alumnos, dos sesiones fueron insuficientes para que la mayoría del grupo se apropiase de la técnica. Naturalmente, tampoco hubo la posibilidad de analizar lo común entre la situación de los robots y la situación del reparto de pasteles. Una sesión más, al menos, habría sido necesaria.

Por último, cabe destacar dos características de la situación que se mostraron fecundas:

- Como en la secuencia anterior, la presencia de una situación de división dio lugar a la coexistencia de fracciones y decimales, con los consiguientes intentos de relacionarlos. Algunos alumnos pudieron constatar, por ejemplo, que en ciertos casos, el cociente decimal no es exacto, mientras que el fraccionario sí.
- La situación ofrece una retroalimentación que permitió a los alumnos verificar si la medida del paso que encontraban era correcta o no, o qué tanto se acercaba, simplemente verificando si al iterar dicha medida tantas veces como pasos se indican, se recorre la distancia que se indica. [27]

4.3 “Tratos buenos y no tan buenos”

Propósito general de la sub secuencia:

- Comparar y aplicar razones del tipo “por cada n, m” (por ejemplo: el banco cobra 2 pesos por cada 5 que presta; una prenda encoge 1 cm por cada 5cm)

[27] La situación “Los Saltos de las Ranas” (Block & Martínez,) similar a la de los Robots, ofrece un programa para computadora que permite llevar a cabo las verificaciones de manera un más económica

- Expresar la razón "n de cada m" como fracción "n/m de" y, recíprocamente:
- Interpretar la fracción n/m como "*n* de cada *m*". Esto puede constituir una segunda introducción a las fracciones, para quienes la primera no fue suficiente.

4.3.1 Clase1

Esta primera situación es introductoria, y tiene como principal propósito el familiarizar al grupo con la manera en cómo se trabajará durante la clase. Tiene dos consignas, una plantea una primera actividad con una variante sencilla y la otra de verificación del resultado.

Notas adicionales al análisis previo

Situación 1

Consigna 1: *Varios niños deciden trabajar durante las vacaciones en las huertas cercanas a sus casas. El trabajo que les ofrecen consiste en recoger las naranjas que ya se cayeron de los árboles y están sobre el suelo. Cada agricultor les ofrece un trato distinto. Los niños tienen que averiguar qué trato les conviene más; Por ejemplo:*

En la huerta A les ofrecen 2 naranjas por cada 5 naranjas que recojan y en la huerta B les ofrecen 2 naranjas por cada 6 naranjas que recojan (anotarlo en el pizarrón)*, ¿cuál creen que les conviene más a los niños?*

Consigna 2 (para verificar): *Si recogieran en total 60 naranjas, ¿cuántas les darían a los niños con cada trato?*

La profesora debe dar la consigna 1 y los niños hacer su elección, argumentando porqué prefieren un trato sobre el otro. Como esta primera elección no requiere operaciones, requiere de una comparación cualitativa entre ambos tratos, a fin de decidir cuál conviene más. Nuestra atención se centra en la manera en la que abordan un trabajo de comparación de razones.

Para aplicar el trato "2 por cada 5" a 60 naranjas (y lo mismo para el otro trato), a hoy dos grandes caminos: uno consiste en averiguar el número de grupos de 5 naranjas en 60 (implica una división) y después, considerar 2 naranjas por cada grupo (multiplicación implícita). El otro consiste en expresar el trato con una fracción y aplicar la fracción a la cantidad: 2/5 de 60. Dado que la expresión en fracción es difícil, se anticipó que la mayoría, si no todos, seguirían el primer camino.

Situación 2

Este segundo momento tiene dos propósitos: 1) Que los alumnos se den cuenta de que la estrategia llamada “aditiva” (comparar las razones por diferencia) no funciona y 2) Como en la situación anterior sólo vieron ejemplos donde la comparación era cualitativa, esto es, sin cálculos, ahora pueden empezar a buscar algún procedimiento para comparar las razones, en particular, el de igualar un término. Esto consiste en igualar la cantidad de naranjas recogidas o la de naranjas que les dan, por ejemplo, Trato A, de cada tres se quedan con dos, entonces de quince se quedan con diez; y trato B, de cada cinco se quedan con tres, entonces de quince se quedan con nueve.

Se trabajará también en base a dos consignas. Para el momento de la verificación se requerirá de material, que consiste en 120 “naranjas” (de fomi) para todo el grupo.

Consigna 1: *“En la huerta A por cada 3 naranjas que recojan les dan 2 y en la B por cada 5 naranjas que recojan les dan 3. ¿Qué huerta conviene más a los niños?”*

Los niños deben realizar los cálculos que crean necesarios para lograr elegir el trato que crean que les conviene más.

Consigna 2: para verificar, decirles que calculen, con el trato que escogieron, cuántas naranjas les tocarían si recogieran 60. Para ayudar a los alumnos a entrar en la situación se escenifican los tratos al frente: dar a un alumno (de preferencia alumnos que han tenido dificultad) 60 “naranjas” Pedirle que “por cada 5 separen 2”, y cuenten con cuántas se quedan. A otro dos darles también 60 naranjas y pedirles que “por cada 3, separen 2”. Cuentan las naranjas separadas y concluyen. Al terminar, se plantea una pregunta más, con el propósito de que los alumnos empiecen a darse cuenta de que cuando un trato conviene más que otro para una cantidad de naranjas, también conviene más para cualquier cantidad:

Consigna 2: *¿Y si en lugar de recoger 60 naranjas, solo hubieran recogido 45, Qué trato les hubiera convenido más?*[28]

[28] Con el tiempo del que disponía la profesora para la clase, omitió esta pregunta.

Análisis Posterior

Situación 1. En la huerta A les ofrecen 2 naranjas por cada 5 naranjas que recojan y en la huerta B les ofrecen 2 naranjas por cada 6 naranjas que recojan ¿cuál creen que les conviene más a los niños?

Ambos tratos ofrecen el mismo número de naranjas (2) pero a cambio de recoger distintas cantidades (5 y 6, tratos A y B respectivamente). Esto, en teoría, no requeriría de cálculos iniciales para saber qué trato conviene más. Al respecto, Kevin había elegido el trato A porque "*trabajo menos y me dan lo mismo. Recolecto cinco y me dan dos, recolecto seis y también me van a dar dos".* Por su parte, Christopher también eligió el trato A (2 de cada 5) porque "*la A porque es más fácil recoger 5 que recoger 6".* Quizás por una muy temprana institucionalización, pocos niños se detienen en este momento y buscan pasar rápidamente a algún procedimiento que les dé la respuesta, y no tanto que se las confirme.

Para la verificación, los procedimientos de los alumnos se diferencian por el grado en que logran utilizar las operaciones de división y multiplicación de manera explícita. Algunos de ellos no identifican ni la división ni la multiplicación pero, sumando varios "montones" de naranjas logran resolver correctamente el problema; de estos, algunos sistematizan su trabajo mediante el uso de tablas de relación proporcional, como Nataly. Ella construye una tabla para cada trato, duplicando las cantidades y dice que si en el trato A me dan 2 de cada 5, serán 4 de cada 10, así hasta llegar a sesenta naranjas y poder comprobar que el trato A es mejor. Nataly había elegido el trato "B" por razones que no tenían mucho que ver con la obtención de las naranjas[29]. Luis también elabora una tabla, para el trato A (2 de cada 5) escribe los números "5-2" en un renglón, luego "10-4" en el siguiente y así sucesivamente hasta llegar a "60-24" para concluir que, de recoger sesenta naranjas en el trato A le darían veinticuatro. Hace lo mismo con el trato B (2 de cada 6). No se tiene información sobre el trato que inicialmente había elegido Luis.

Otros logran identificar la pertinencia de la multiplicación en la relación proporcional, como Adrián. Para el trato A (2 de cada 5), toma en cuenta el número de

[29] Cabe observar que los alumnos que optan por el trato B, como Nataly, pusieron en juego criterios para escoger no previstos en el diseño, tales como el valor intrínseco de "ayudar", o el gusto por trabajar más, o simplemente la decisión de no irse a donde se va la mayoría. Nataly elige el trato por esto último. Esta "interferencia" es una consecuencia bastante común de la relación que se establece entre el aula y los contextos extraescolares, de la vida fuera de la escuela, llenos de significados. Estos significados son traídos por los alumnos al contexto escolar.

“montones” de 5 naranjas que podrá hacer con 60 naranjas. Anota un “5” en un renglón, en el siguiente escribe “10” y sigue escribiendo las cantidades de cinco en cinco hasta llegar a 60. Luego cuenta los renglones, le salen doce. Ése doce lo multiplica por dos, que es el número de naranjas que le darán, y dice que son veinticuatro.

Finalmente, unos pocos calculan sistemáticamente el número de grupos de cinco naranjas dividiendo, y después multiplicando por dos. Como vimos al inicio, Kevin había elegido el trato A porque *“trabajo menos y me dan lo mismo. Recolecto cinco y me dan dos, recolecto seis y también me van a dar dos”.* Cuando verifica su elección explica que dividió sesenta entre cinco, obteniendo doce y luego multiplicando por dos “*porque son sesenta naranjas que recolecté entre…si por cada dos me van a dar cinco yo escogí la A, ya de este salió doce, luego doce por cada dos que me van a dar de cinco”.* Otro ejemplo nos lo da José quien explica que “*son dos naranjas por cada seis, o sea sesenta lo divido entre seis y lo que me sale lo multiplico por dos por las dos naranjas que me van a dar por las seis”.*

Esto fue en cuanto a las comprobaciones correctas, pero también hubo algunas erróneas. Ana, para aplicar el trato B (2 de cada 6) a 60 naranjas escribe en su cuaderno la multiplicación “60 X 2= 120”. Una interpretación posible de esa operación es considerar que por cada naranja que obtengan les darán dos. Parece que hay algo que no comprende y trata de movilizar los datos de los tratos. Luis Martín por su parte, para el trato A (2 por cada 5) dice que dividirá sesenta entre dos porque son dos naranjas por cada cinco. Obtiene treinta y dice que ésas treinta naranjas *“son las naranjas que le darán”* y que necesita comprobarlo, entonces multiplica treinta por veinte, obteniendo 60[30].

Como vimos arriba, Christopher eligió el trato A (2 de cada 5) porque “*la A porque es más fácil recoger 5 que recoger 6” y para verificarlo* divide sesenta entre tres. Obtiene veinte *“porque si son dos por cada cinco, sale tres, sale veinte y eso es lo que les van a dar”.* Él dice que “sale tres” quizá porque ese tres es el resultado de cinco menos dos. Ese número tres podría significar las naranjas que “no me dan”, las

[30] Luis abre la pauta para preguntarnos ¿qué significa la comprobación? Logra en efecto obtener las 60 naranjas. Comprobó que si divide 60 entre 2 y luego lo multiplica por 2 obtiene de nuevo 60, para él ¿la comprobación es hacer una operación y que te salga el mismo número con el que iniciaste?

que se queda el dueño, pero no parece ser el caso en esta resolución. No logramos discernir su lógica.

Tras este primer acercamiento, sigue la verificación con el material, para lo cual la profesora dividió al grupo únicamente en dos grandes equipos: uno a cargo de Maribel y el otro a cargo de Karla. En el equipo de Maribel se logró la verificación rápida y correcta agrupando las naranjas en grupos de cinco para el trato A y de seis para el trato B. Luego, sacaron dos naranjas de cada "montón" y las cuentan, comparando finalmente lo que obtendrían en cada trato. No ocurre así en el equipo de Karla, quien tuvo gran dificultad para, de inicio, entender la consigna. Esto se verá en el apartado final.

Situación 2 "¿Qué sucedería si ahora en la huerta A por cada 3 naranjas que recoge me dan 2 y en el B por cada 5 que recoge me dan 3?"

La segunda situación consiste en la elección del mejor trato de entre dos propuestos. Recordemos que estos tratos ya no pueden ser comparados a simple vista, de forma cualitativa. Se suponía que los alumnos no sabían cuántas naranjas se habían recogido, lo que se esperaba desataría una serie de procedimientos. Empero, la profesora proporcionó el dato de sesenta naranjas y al hacerlo, la situación cambió, pues en vez de tener que decidir cómo comparar los dos tratos, lo que ocurrió es que primero aplicaron cada trato a esa cantidad dada de naranjas y luego compararon las cantidades. De esa manera, la idea de aplicar a sesenta naranjas no fue de los alumnos, ni tampoco se dio lugar a otras formas posibles de comparar. Varios alumnos ni siquiera hicieron una elección.

En esta sección los procedimientos correctos de los alumnos pueden dividirse en tres rubros: a) los que logran identificar que existe cierta relación entre los datos de cada trato pero no logran hacer una comparación, b) aquellos que logran una comparación exitosa de los tratos aplicando cada uno a las sesenta naranjas que se les indicaron; y algunos identifican la multiplicación y la división que hay implícitas y finalmente c) aquél que, yendo más allá de esta primera clase, logra expresar los tratos con una fracción.

A. Logran identificar cierta relación entre los datos de cada trato pero no logran hacer una comparación

Ana elige el trato B porque *"me gusta más la B de recolectar cinco y que me den tres, me dan más que la A porque en la A dan dos y en la B tres, pero en la B tenemos que* *recolectar más".* Parece que Ana se da cuenta de que existe cierta relación entre los términos del trato pero no sabe cómo tratar la situación, y entonces escoge en la que tiene mayor número de naranjas que se dan, a sabiendas de que su argumento es incompleto y que su decisión podría no estar bien. También parece que está viendo como estática la situación, como si solamente recolectaran una vez cinco o tres naranjas. Uno de los observadores intenta entonces que resuelva la situación con el material, recogiendo quince naranjas, y así, logra encontrar el resultado correcto. Parece que se une al grupo de niños con quienes resulta favorable trabajar con el material desde el inicio.

B. Logran una comparación exitosa

Marijose y Giovanni hacen una tabla proporcional para cada trato. En el trato A (de 3 te doy 2) ponen en la primera columna las tres naranjas que deben recoger, y van aumentando de tres en tres hasta llegar a sesenta. Luego llenan la segunda columna con el número de naranjas que les darán, dos, y cuentan de dos en dos hasta llegar también a sesenta. Así saben que en el trato A por cada 60 naranjas que recojas te darán 24. Aplican el mismo procedimiento para el trato B (de 5 te doy 3).[31]

Nataly había elegido el trato A (de 3 te doy 2) porque "*en la A trabajas más y lo más lógico es que te paguen menos, y en la otra trabajas menos y te pagan más".* Ella trabaja con Arturo, Karla y Kevin, y auxiliados por el material, agrupan las 60 naranjas en montones de tres y sacan las dos que indica el trato A. Luego pasan al trato B (de 5 te doy 3), hacen grupos de cinco naranjas y sacan tres de cada uno. Las cuentan y obtienen 40 y 36 naranjas respectivamente, con lo que saben que el trato A conviene más. Nataly había elegido bien al inicio, pero su criterio de elección era la cantidad de trabajo realizado, trayendo quizás elementos de la situación anterior a ésta, (Tratos A (2 de cada 5) y B (2 de cada 6) de la situación anterior) donde el primer término de los tratos era el mismo. Cuando se le preguntó cómo sabía, en esta nueva comparación de tratos, en qué huerta trabajaba más y no logró explicarlo, fue hasta ese momento que se dio cuenta de que los términos del trato no permitían hacer esa comparación, por lo que era necesario realizar una comprobación.

[31] Aunque en el registro en video no se alcanza a ver qué trato eligieron, como ambas tablas eran correctas, podemos inferir que fue el trato A, porque obtienen más naranjas por sesenta que recojan. Giovanni además añade al final de la clase que al principio no entendía cómo comparar los tratos, pero al hacer las tablas le quedó más claro.

En este mismo grupo encontramos a Brandon, quien explica que para los tratos A (por cada 3 te doy 2) y B (por cada 5 te doy 3) *"dividí cinco entre sesenta porque son sesenta naranjas y me salió doce, y los doce lo multipliquè por tres y me salió treinta y seis, y en la A dividí tres entre sesenta y me salió veinte, y este veinte lo multipliquè por dos, por las dos naranjas".* Aunque enuncia las divisiones de forma invertida (5 entre 60 y 3 entre 60) logra aplicar ambos tratos a 60 naranjas y además identifica la pertinencia tanto de la multiplicación como de la división en una relación de proporcionalidad.

C. Expresa el trato con una fracción

Finalmente, Josè y Germán son los primeros del grupo en escribir los tratos expresados con número entero utilizando una fracción. Es importante mencionar que José[32] usa las fracciones no sólo para representar los tratos, sino para compararlos y saber cuál le conviene más. José explica el trato A (por cada 3 te doy 2):*"Ah es que vi que eran tres, por cada tres que recogías te daban eran dos, entonces lo acomodé en modo de fracción, y como no te daban tres por cada tres o cuatro por cada tres que recogías, era menos de un entero y acomodé el mayor abajo y el menor arriba y así obtuve ésta (*dos tercios)"

José sabe que el trato se puede expresar con una fracción cuyos términos son los dos términos del trato, y para ayudarse a saber cuál término va arriba y cuál término abajo, dice que observa que se trata de una fracción propia, por la relación que hay entre las naranjas que te dan y las que recoges.

Enseguida de lo anterior, José da cuenta de un intento de vinculación con el contexto de reparto, el cual queda confuso: "(…) *y vi que tenía que ver con lo que estábamos viendo la otra vez de los chocolates, este lo que se reparte es lo que va abajo y lo que es como tipo, nuestro tipo entero […] lo que se reparte va arriba y el otro*

[32] Es importante mencionar que José, desde antes de iniciar la secuencia, poseía un manejo sólido de las fracciones, como pudimos constatarlo en el primer cuestionario aplicado. En la pregunta "Luis y Mario deciden aportar una parte de su sueldo para la construcción de una cisterna para la escuela del pueblo. Luis aporta 2 de cada 5 pesos que gana. Mario aporta 3 de cada 8 que gana. ¿Quién es más generoso?" José contestó que "*Luis porque es el que da casi la mitad".* De entrada se nota cómo está comparando con una fracción accesible (1/2). Y en su procedimiento se ven varios intentos de resolución 1) Hay escritos un par de números (4,10) y (6,8,16) que podrían ser intentos por igualar los términos de las razones propuestas (2-5; 4,10). Luego, una serie de divisiones (40/8=5) y (40/5=8). Aunque no sabemos de dónde sacó el 40, podrían acercarse a la resolución por medio de un algoritmo. Finalmente, dibuja dos rectas, ambas de 5 cm. En la primera marca tres líneas, destacando la última. La segunda la divide en quintos, remarcando la segunda recta. Esto parece ser un intento de ilustrar 3 de 8 y 2 de 5. Y no de forma azarosa: cada segmento de división de estas rectas mide .6 mm, esto es, lo que resultó de dividir 5 (cm) entre 8. División que José también deja señalada en su cuestionario. Como vemos, posee un manejo muy amplio tanto de procedimientos como de comprensión de estos contenidos matemáticos.

es como el entero que vamos a repartir y eso va abajo, y luego hice una comparación de cuál era más grande, dos tercios es mayor que tres quintos".

En efecto, en los repartos de la primera secuencia, "lo que se reparte", por ejemplo, 3 pasteles, va "arriba", en el numerador, pero ¿a qué se refiere con: *"el entero que vamos a repartir*"? Como ya se dijo en el análisis previo de las tres secuencias, no hay una línea de continuidad simple entre ellas. Sin embargo, ni la maestra ni los alumnos lo saben, por lo que ciertos parecidos, aunados a la contigüidad de las sesiones, pueden estarlos llevando a realizar estos esfuerzos de transferencia.

Durante el trabajo con el segundo par de tratos, Germán representa el trato A, dos de cada tres que recojan, con la fracción *"2/3"* y dice *"yo sólo vi dos de tres, dos tercios, entonces dividí el sesenta entre tres, son veinte, por dos son cuarenta".* Con esto realiza la operación sesenta entre tres, obteniendo veinte. Multiplica luego eso por dos para obtener las cuarenta naranjas que le darán con ese trato.

2 de 3= 2/3 $\quad$ $3\overline{)\,60}$ → 20 $\quad$ 20x2=40

Cabe observar que se hacen las mismas operaciones que cuando no se usa la fracción, lo que expresa la cercanía de los dos acercamientos, con y sin fracciones. Esto actuará a favor de hacer la vinculación más adelante.

Comentarios

En la sesión se compararon razones expresadas como pares de cantidades, se aplicaron las razones a la cantidad de sesenta naranjas mediante una diversidad de procedimientos y vio la necesidad de igualar un término para facilitar la comparación. Apareció la interpretación aditiva de las razones, pero no logró ser cuestionada explícitamente.

La heterogeneidad del grupo se sigue manifestando: mientras hay niños que requieren material concreto para trabajar, otros usan explícitamente la división y la multiplicación, y de estos, algunos como José y Germán, logran ver la equivalencia entre un trato ("por cada tres, dos") y una fracción ("2/3 de").

Durante la comprobación con el material en la primera situación, a la profesora le fue difícil transmitir la consigna, lo que dificultó la comprensión de Karla sobre la actividad. Hay varios alumnos, como Karla, Arturo y Ana a quienes hacer los intercambios físicos al parecer sí les ayudó a entender la situación, siempre y cuando la consigna fuera clara. Los tres se quedan con el material después de haberlo usado por primera vez y logran realizar exitosamente la verificación del segundo par de tratos.

4.3.2 Clase 2

Se persiguen tres propósitos principales: 1) Seguir propiciando la técnica de igualar un término, 2) Propiciar la comparación de los tratos con la fracción ½ 3) Introducir la noción de "tratos equivalentes".

Notas adicionales al análisis Previo

Se tiene una sola consigna y una ficha de trabajo, en la que se planea comparar tres parejas de tratos y elegir cuál les conviene más (ver abajo análisis previo). No se previó un momento de trabajo grupal sino comenzar con un momento de trabajo individual.

Consigna: Comparar los tratos de cada pareja

Qué trato conviene más, en cada pareja de tratos:

	Conviene más:	Porque…
C: por cada 10 naranjas , te doy 6 D: por cada 30 naranjas, te doy 15		
E: por cada 5 naranjas, te doy 4 F: por cada 20 naranjas, te doy 8		
G: por cada 6 naranjas, te doy 3 H: por cada 12 naranjas, te doy 6		

La ficha de trabajo se entregó a la maestra con las siguientes indicaciones:

- Si antes de comparar los alumnos preguntan qué cuántas naranjas se van a recoger (la vez pasada fueron 60) hay que decirles que esa información todavía no se tiene. Esta parte es importante ya que en la clase pasada se les dijo que eran 60 naranjas las que se recolectaban, perdiéndose así la oportunidad de hacer una estimación sobre el trato que más convenía. En muchos casos, los niños se limitaron a comprobar ambos tratos para esa cantidad de naranjas

- Si no aparece la comparación contra un medio, es posible sugerirla: ¿ya vieron que en el trato D les dan la mitad? ¿Se puede usar para comparar? Esto puede servir también como punto para comparar los tratos G y H. Hay que destacar que estos dos últimos tratos convienen por igual. En este momento es posible plantear: ¿Darán lo mismo con cualquier cantidad de naranjas? Se puede probar aplicando los tratos con algunas cantidades de naranjas. Al final hay que Institucionalizar: "Son tratos equivalentes"

En los tres casos se posibilita comparar contra la fracción 1/2. En el primero y en el tercero, en un trato se da la mitad de los que se recoge, mientras que en el otro se da más, o menos, de la mitad. En el segundo trato, un trato da más de la mitad y el otro menos.

Análisis posterior

Se identificaron procedimientos correctos e incorrectos. Dentro de los correctos por la forma en la que los alumnos compararon las tres parejas de tratos dichos procedimientos se dividieron en tres grupos: 1) Igualar el término mediante conservación de las razones internas (para lo cual a veces identifican explícitamente el valor de una razón interna), 2) Comparar los trato contra la mitad o el 50%[33] y 3) Explicitar las fracciones en juego.

Los procedimientos de Nataly y Alan ejemplifican el primer grupo. Para la primera pareja de tratos (C10-6; D30-15) Nataly identifica la razón interna entre los primeros términos de dos tratos (entre 30 y 10, razón 3 veces), y con eso genera el trato "por cada 30, 18" equivalente al trato "por cada 10, 6" y de esa manera puede comparar dos tratos con un término común (el 30). Lo expresa claramente[34]: "[…] *en la C te dan, dice que por diez te dan seis, si de diez te dan seis, de treinta, ¿cuántas te*

[33] La profesora trabajó con el tema de porcentaje en las mismas semanas en las que trabajamos esta sub secuencia, por lo que algunos niños relacionaron ambos temas.

[34] Nataly utiliza este procedimiento y lo explica de forma bastante clara. A pesar de ello, la profesora tarda en comprenderlo, de manera que le pide que se lo explique varias veces. Llega un momento en el que Nataly expresa "es que no sé cómo explicárselo si ya…". Esto resulta relevante ya que durante nuestra discusión sobre la ficha didáctica revisamos este procedimiento como uno de los más probables a aparecer. Sin embargo la profesora no lo comprende.

darán? […] si de diez me dan seis, multiplico seis por tres igual a dieciocho”. En su hoja concluye “*Si junto treinta me dan dieciocho y en la otra por treinta me dan quince”.*

Alan encontró la razón interna (entre 5 y 20, razón 4 veces) entre los primeros términos de los dos tratos a comparar (E5-4; F20-8): *“[…] multiplicando este número por cuatro da cuatro naranjas por cinco naranjas te dan veinte, multiplico cuatro por cuatro nos da dieciséis, sería lo doble de esto de lo que nos da aquí la regla. Entonces el E es mejor”.*

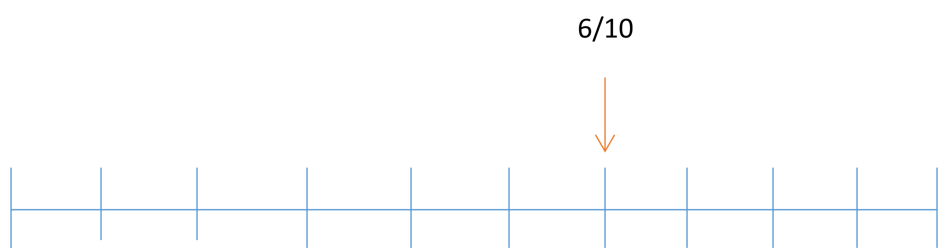
En el segundo grupo se ubican los procedimientos de Luis, Efraín, Marijose y Christopher, quienes usan la comparación con un medio ($^1/_2$) para saber qué trato les conviene más. Al comparar los tratos C (10-6) y D (30-15) Luis dice que “*de treinta te da justo la mitad pero en la otra, de diez no te da la mitad, te da un poco más”.* Este es un argumento fuerte, porque le permite hace una comparación correcta sin comprobar con material y sin importar que en un trato “parezca” que te dan más naranjas. A este respecto Efraín aporta otro buen ejemplo al comparar la misma pareja de tratos: *“en el trato C te dan más de la mitad, y en el D te dan justo la mitad, entonces te conviene más el trato C”*. Sostiene su argumento incluso cuando se le cuestiona si esto será cierto aunque en el trato D les den quince naranjas y en el C sólo seis. La fracción un medio “emerge” con el sentido claro de la expresión de una razón, expresión independiente de las cantidades concretas en juego: 15 de 30 es la mitad, pero también 5 de 10, y muchas otras; en todas esas parejas, las cantidades varían pero la relación entre los términos es constante.

Marijose, por su parte, cuando compara los tratos E (5-4) y F (20-8) intuye que el trato E es mejor, pero tarda en poner en palabras el porqué. Termina pudiendo expresar el motivo: “*por cada cinco naranjas te dan cuatro, por cada veinte naranjas te doy ocho, bueno, en ésta ¿en cuál recolectas menos? Recolectas cinco naranjas más rápido y te dan casi todas, nada más no te quedas con una, entonces es la E ¿por qué? Porque te dan casi todas”* Ese “casi todas” es una buena estimación, y también una razón cualitativa, gruesa: da cuenta de las relaciones en las que la parte es casi todo el entero.

Christopher, al comparar los tratos E (5-4) y F (20-8) dice que conviene la E “*porque de cada cinco me dan una menos y conviene más*”. Aunque su procedimiento parece aditivo, es una buena estimación. En lo que sí acierta es en la G y H donde dice que *“dan igual, porque dan la mitad”.* Se confirma que la fracción ½ *es la* primera también en ser comprendida en su papel razón.

Finalmente, en el tercer grupo ubicamos a José, Edy y Germán hacen uso de las fracciones (en el caso de Germán y de José lo habían hecho ya desde la clase anterior) aunque esta vez con un uso particular:

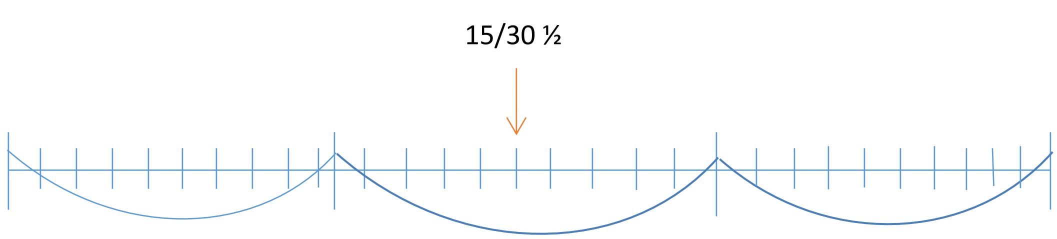
José al comparar la primera pareja de tratos (C10-6; D30-15) dibuja una recta para cada uno. La primera dividida en diez segmentos y marca “*6/10”.* Con esto, parece estar ilustrando “te doy seis por cada diez”.



6x3=18

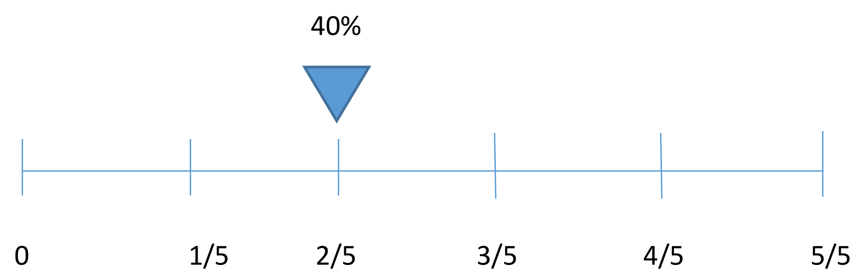
18-15=3

Luego, dibuja otra recta que divide en tres grandes segmentos. Cada uno de éstos en 10 partes. Cuenta hasta la mitad y lo marca como “15/30”, es decir y según sus palabras, está señalando “*un medio (y escribe* ½)”. Con esto representa el trato D “te doy quince por cada treinta que recojas”.

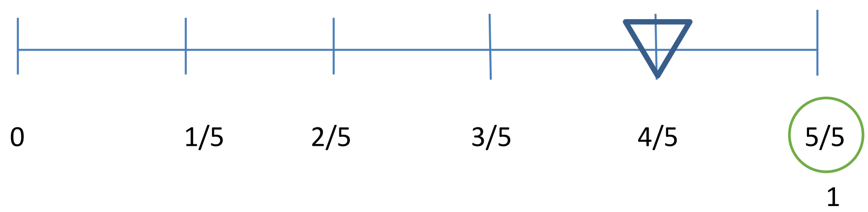


Las dos rectas de José, parecen querer ilustrar cómo un trato conviene más que el otro. Al hacer las rectas de diferente tamaño, se dificulta su comparación y obliga a destacar las razones dejando de lado las cantidades (absolutas, de naranjas) y esto podría causar dificultad. No obstante, logra explicar bien, con sus palabras, que identificó la razón interna entre 30 y 10 (3 veces) cuando dice que *"multipliqué las seis naranjas que me daban por las tres veces que cabía en la recta pequeña, me dan dieciocho. Y esos dieciocho comparado con quince".* Usó esta razón para generar otro trato, (por 30, 18) equivalente a (por 10, 6), con lo cual finalmente comparó contra (por 30, 15). Así, al parecer, si bien identificó las fracciones que expresan a los tratos, ½ y 6/10, la resolución la hace, o al menos la explica, sin utilizar las fracciones.

Edy por su parte, muestra su buen manejo del porcentaje y de la fracción como expresiones de una razón. Cuando compara la segunda pareja de tratos (E5-4; F20-8) logra ver con claridad que el trato 8 de cada 20 es equivalente a dos de cinco, haciendo explícita la razón interna que se conserva *"Yo dividí veinte entre cuatro y te da cinco y ahora divides también ocho entre cuatro te da dos".* Para obtener la expresión fraccionaria considera explícitamente que cinco es el entero. Considera también que 2/5 es igual a 40 por ciento "*Yo lo convertí Aquí serían cinco naranjas que es el entero, aquí sería un quinto, dos, tres, cuatro. Aquí ésta va a ser la F…éste yo lo hice más chico. De cada cinco que recolecté me están dando dos. Casi me están dando el…cuarenta por ciento"*



Para el trato E (5-4) también considera a 5 naranjas como unidad pero esta vez no lo hace explícito. Representa 4/5 en una recta y hace explícito que están dando el doble *"Ahí te están diciendo que por cada cinco que recolecte te van a dar cuatro […] Y aquí como sería el veinte por ciento* (señala 1/5)*, cuarenta, sesenta, ochenta, se puede decir que en la E te están dando lo doble que en la F".*



Y agrega: "*Mi procedimiento fue sacar los porcentajes de cada uno, por ejemplo si por cada seis naranjas me dan tres […] el tres en el seis cabe dos, un medio entonces sería cincuenta por ciento y también si divido doce entre seis es igual a dos, un medio, cincuenta por ciento".* Resulta sorprendente la facilidad con la Edy pasa de un registro a otro: de la razón como dos números, a una fracción (que simplifica), a un porcentaje y a la recta numérica. A la vez, destaca relaciones entre las razones: en un trato dan lo doble que en otro.

Germán demuestra un buen manejo del porcentaje, pero no explicita las razones externas como fracciones (por ejemplo, por cada 5 te doy 4, en 4/5) pero en cambio más adelante, expresa con fracciones las razones internas entre términos homólogos: los dos primeros términos (5 a 20) y las de los dos segundos términos (4 a 8): *Por ejemplo en este le ponemos la E y a este le ponemos la F y la línea* (se refiere a la línea de la fracción)*, entonces comparamos cuatro octavos es un medio y cinco veinteavos es un cuarto, es más grande la E:*

F E

E: Por cada 5 naranjas te doy 4

F: Por cada 20 naranjas te doy 8

En lugar de expresar el trato "por cada 5 te doy 4", que correspondería a 4/5, él toma por separado la parte que debes recoger y las que te darán. Así, forma las fracciones 5/20 y 4/8. Luego, lo simplifica a ¼ y ½ respectivamente para compararlas. Es difícil saber en qué está pensando Germán al realizar este procedimiento. ¿Cómo interpretar ese 4/8 (o ½) y 5/20 o ¼? Pueden interpretarse así: en trato E, recogiendo un cuarto de las naranjas que se recogen en el trato F, dan la mitad de las naranjas que dan en el F. Entonces, el trato F no conviene. En el caso de las razones equivalentes es más claro aún: en G, por la mitad de naranjas recogidas que en H, dan la mitad de naranjas. Pero ¿habrá pensado algo así Germán? No se puede saber.

Fanny[35] también utiliza el porcentaje. Ella dice que le conviene *"La E (*5-4 en contraposición al trato F20-8) *porque es 80%".* ¿Cómo lo supo? por que dividió 4 entre 5 con lo que deja ver dos cuestiones: 1) que sabe que el porcentaje se puede obtener dividiendo una cantidad entre otra (y Fanny sabe cuál entre cuál) o multiplicando el número decimal que resulta por 100 y 2) sabe que el porcentaje de las naranjas que te dan permite muy bien ver qué trato conviene más. Es decir, Fanny sí tiene una idea del porcentaje como razón.

Dentro de los procedimientos erróneos ubicamos a Noé, quien explica que le conviene *"La C porque me dan más naranjas".* Cuando se le hace la observación que la C da menos, pues dan 6 y en la D dan 15, Noé responde que ya vieron la vez pasada que *"lo menor da lo mayor y donde hay menos, me dan más".* Probablemente el niño generalizó lo que vieron en la segunda comparación de la vez pasada donde en efecto ocurría eso. Dicho trato era: *por cada 3 naranjas que recojan les dan 2 y en la B por cada 5 naranjas que recojan les dan 3*.

Comentarios

La clase fue fecunda, en la medida en que logró propiciar fuertemente que los alumnos usaran la razón fraccionaria ½ como medio para comparar, como lo vimos con Efraín, Marijose, Luis y Christopher. Otros niños emplean cada vez más las fracciones para expresar los tratos, como José y Edy, este último incluso con un buen manejo del porcentaje. Germán expresa las razones internas con fracciones. Fanny no usa fracciones, pero demuestra un buen manejo de la noción de porcentaje como razón.

Nataly, José y Edy comparan tratos y obtienen tratos equivalentes al trabajar con las razones internas.

Para quienes no llegan aún a incorporar estas herramientas (las fracciones y el porcentaje), la situación sigue siendo accesible gracias a la posibilidad de trabajar con números naturales, ya sea igualando un término, como Nataly y Alan o bien estimando, como Luis.

Así, la situación se ve favorable para la articulación de nociones que los alumnos trabajan en este grado: la razón, la fracción y el porcentaje.

[35] Hasta ahora, Fanny había sido ubicada en el rubro de las respuestas dudosas o erróneas. Parece que en este caso le fue más fácil comparar los tratos recurriendo al porcentaje, pero viendo éste como una razón.

4.3.3 Clase 3

En esta tercera clase se tiene como propósito empezar a institucionalizar el hecho de que las razones del tipo “por cada n, m” se pueden expresar con fracciones; a través de un trabajo donde los alumnos comparen razones expresadas con dos números enteros, contra razones expresadas con una fracción unitaria. Notas adicionales al análisis previo

Situación 1

Hay dos consignas, la primera es que contesten la ficha uno, en la que se les presentan tres tratos, dos expresados con números enteros y el tercero con una fracción. Deben elegir el que más les convenga.

a) Averigua cuál de los siguientes tres tratos es el mejor y cuál el menos bueno Trato A: Por cada 12 que recojan, se quedan con 4 naranjas. Trato B: Por cada 20 naranjas que recojan, se quedan con 5 Trato C: Les doy 1/3 de las naranjas que recojan b) Calcula cuántas naranjas les darían a los niños en cada huerta, si recogieran 60 naranjas: c) Hay dos tratos que son equivalentes. ¿Cuáles son?

Confrontar eventualmente a 60 naranjas para verificar. Quizá vean qué tratos son equivalentes.

La segunda consigna dice: *Cada pareja proponga otros dos tratos que sean equivalentes a “Les doy 1/3 de las naranjas que recojan” Uno que se escriba con una fracción, y otro sin fracción.*

Se verifican los errores aplicando a 60 naranjas (o a otras cantidades).

Situación 2

En esta segunda situación se pide que los alumnos comparen razones expresadas con dos números enteros, contra razones expresadas con una fracción no unitaria. Se dan dos consignas, una para resolver la ficha uno y la segunda para saber si han logrado expresar una razón a través de los términos de la fracción.

Al igual que en la anterior situación se les entrega una ficha de trabajo, dando la siguiente Consigna: *El trato E es el siguiente: Te doy* $\frac{2}{3}$ *de las naranjas que recojas*. *Compara el trato E con cada uno de los tratos siguientes:*

A: por cada 2 naranjas que recojan, les doy 1	¿Conviene más el A el E?	Porque…
B: por cada 3 naranjas que recojan, les doy 2	¿Conviene más el B el E?	Porque…
C: por cada 4 naranjas que recojan, les doy 3	¿Conviene más el C el E?	Porque…
D: por cada 6 naranjas que recojan, les doy 4	¿Conviene más el C el E?	Porque…

Institucionalizar

Hay varias maneras de expresar un trato:

con dos números enteros: "por cada 3, te doy 2"
- con una fracción "te doy 2/3".

También se pueden expresar con un porcentaje, por ejemplo, el trato "por cada 2 te doy uno" equivale a "te doy el 50%"

La segunda consigna le sigue al momento de institucionalización: *Expresen el trato "por cada 5 naranjas que recojas te doy 2", con una fracción. Cuando terminen, busquen una manera de probar que su fracción está bien.*

Análisis Posterior

Situación 1

Sobre la primera ficha, en la cual se pedía elegir de entre tres tratos el mejor y el menos bueno, veintidós niños de treinta contestaron que el trato menos bueno es el B. Recordando quizás elementos de las clases pasadas, los niños se abocaron rápidamente a comprobar los tratos con 60 naranjas, por lo que la parte de verificación propuesta fue innecesaria. De estos 22 niños ninguno eligió como mejor ninguno de los tratos, es decir, ni A, B o C. La rápida comprobación con 60 naranjas les permitió contestar que el A y el C convienen por igual; y a la vez, obtuvieron la respuesta a la pregunta tres de la ficha: Hay dos tratos que son equivalentes, ¿cuáles son? Efectivamente, tanto el trato A como el C ofrecen darte un tercio de las naranjas que recojas.

Clasificamos los procedimientos de los alumnos en 1) Igualan un término mediante la conservación de las razones internas y 2) Aplican la fracción 1/3 a cierta cantidad de naranjas. Se analizan ambas consignas: la de averiguar qué trato es el mejor (A 4-12, B5-20 y C 1/3) y la de proponer tratos equivalentes a “Te doy 1/3 de las naranjas que recojas”.

Los procedimientos de Nataly pertenecen al primer grupo. Para la consigna uno, averiguar qué trato conviene más, elabora las siguientes tres tablas para los tres tratos (A12-4, B20-5, C1/3)

Trato A		**Trato B**		**Trato C**	
Recogen	Dan	Recogen	Dan	Recogen	Dan
12	4	20	5	3	1
24	8	40	10	6	2
36	12	60	15	9	3
48	16			12	4
60	20			15	5
				60	20

Refiriéndose a los tratos A (12-4) y B(20-5) dice *" (en el B) De cuarenta me dan diez, de sesenta me dan quince […] y (en el A) de sesenta me dan veinte, o sea que ahorita me está conviniendo más éste […] (en el C) de tres me dan una, de seis me dan dos, si pongo quince me dan cinco, de treinta me dan diez, de sesenta me dan veinte […] "y sería lo mismo que el A, me convienen los dos".* Nataly muestra una buena interpretación de la fracción como razón al traducir 1/3 como 1 de cada tres, y logra saber de paso qué tratos son equivalentes. Para el trato C (1/3 de lo que recojas) nota que se tardará mucho si va de tres en tres, multiplica entonces tanto el quince como el cinco (ambos términos del trato) por cuatro[36], obteniendo que por 60 naranjas te dan veinte naranjas. Es decir, encontró la razón interna (entre 60 y 15, razón 4 veces). Al parecer, la llegada a 60 no fue planeada, se fue dando sobre la marcha. Llama la atención que no considera el camino más corto[37] para este caso: obtener 1/3 de 60.

Marijose, Ana Belén y Samantha, también buscan igualar el término. Marijose busca averiguar qué trato conviene más realizando una tabla para cada trato e igualando el término a sesenta naranjas[38], es así como sabe que A y C son tratos equivalentes. En sus respuestas persiste una comparación con la mitad y la relación con las naranjas que recoges. Cuando explica el trato A 12-4 escribe "*No es la mitad y te dan pocas por muchas que recoges",* cuando explica el trato B 20-5 "*Te dan la mitad por muchas que recoges"* (no sabemos por qué dice que la mitad). Pero cuando Marijose va contestar la segunda consigna y a proponer tratos equivalentes a "Les doy 1/3 de las naranjas que recojan" cambia su registro. Dibuja una recta dividida en tres segmentos, representando cada uno a 30, 60 y 90 naranjas. Debajo de 30 escribe "*1/3",* debajo de 60 "*2/3"* y debajo de 90 "*3/3".* Está aplicando la fracción a cantidades discretas, para finalmente proponer *"Por cada 90 te doy 40".* Parece que busca una cantidad que sea posible dividir entre tres, con un resultado entero.

[36] Cuando Nataly se da cuenta de que, si sigue sumando de tres en tres, se tardará mucho tiempo en llegar a sesenta, uno de sus compañeros, Luis, le dice que "es más fácil si multiplica por 4". La profesora incluso le dice que, con esa operación, se soluciona su problema (refiriéndose al tiempo que le tomaría sumar).

[37] Los caminos cortos, didácticamente hablando, son los cognitivamente más complejos, le demandan más al alumno.

[38] Es curioso que las tres niñas recurran a la comparación con 60 naranjas, esto puede deberse a que es el número con el que se realizaron las comparaciones durante las clases pasadas, además de su facilidad para dividirse entre los términos de proponen los tratos: 12, 20 y 3.

Ana Belén también hace tres tablas, pero lo hace de una manera distinta. Cuando va a proponer el trato equivalente a "1/3 de las naranjas que recojan" multiplica cierta cantidad de naranjas por tres. En su ficha, escribe "*por cada 126 dan 42 (42x3=126)"* y para su segundo trato propuesto escribe: "*por cada 12 dan 4 (4x3)=12",* identificando la relación externa como una multiplicación (n por cada 3Xn).

Por su parte, Samantha dice que un trato equivalente posible a "1/3 de las naranjas que recojan" es *"Por cada veintisiete, te doy nueve"* porque "*porque nueve por tres es igual a veintisiete y es igual a un tercio".* También ella usa la relación recíproca x3.

Los procedimientos de Kevin forman parte del segundo grupo, al aplicar la fracción 1/3 a los tratos A y B. Primero lo aplica a 15 naranjas, y obtiene 5 (y lo justifica bien, porque 5 multiplicado por 3 es igual a 15). Su ensayo siguiente también le funciona, aplicando 1/3 a doce naranjas: "*mmhh si recogen quince les darían cinco…sí porque cinco por tres son quince…igual…a ver un tercio son cuatro, dos tercios son ocho, tres tercios es un entero, serían doce, entonces esta es igual a ésta, la A y la C".* Conoce también así qué tratos son equivalentes *"éste y este es igual, lo podemos hacer porque 4x3 nos da 12, igual a 1/3".* Empero, para contestar la segunda consigna y proponer tratos equivalentes, su procedimiento es muy similar al de Ana Belén, ya que está buscando múltiplos de tres "*si por cada…noventa te dan treinta…es un tercio…mejor por cada quince te dan cinco…si por cada dieciocho te dan seis, seis por tres son dieciocho y cinco por tres son quince […] a ver, trato A y ya ponemos, A dos puntos, por cada quince que recoges, te doy cinco… ¿qué le ponemos, manzanas, naranjas? Bueno, cacahuates; trato B por cada veintiuno te voy a dar siete cacahuates".* Kevin también aplica la fracción 1/3 a cantidades discretas y muestra haber comprendido que todas esas razones (90, 30) (15, 5) son equivalentes entre sí y se pueden expresar con la fracción 1/3. La fracción 1/3 expresa bien una razón.

Hasta aquí, es claro que varios niños no tienen dificultad en traducir la fracción 1/3 y su recíproca x3) a razones expresadas con dos números. Un tercio significa para ellos "Por cada 3, 1" y más ampliamente, "por cada 3n, n". Pero para otros alumnos, como Daniel, es difícil entender cómo es que te darán 1/3 de las naranjas que recojas. Nataly intenta ayudarlo y le dice que "por cada tres te darán uno", esta explicación no le es suficiente y no logra comparar exitosamente los tratos ni entender la equivalencia de los que proponen sus compañeros. Noé, por su parte, a pesar de que logra interpretar bien el sentido de la fracción cuando dice que *"[…] de doce me dan cuatro, de veinticuatro me dan ocho, de treinta y seis me dan…doce, de cuarenta y ocho me dan dieciséis…no, sí perdón sí de sesenta me dan veinte…de sesenta me darían veinte",* no logra comparar los tratos. Insiste en que el mejor trato es el A, pero no sabe explicar por qué.

Situación 2

Ahora veamos cómo compararon un trato expresado con una fracción no unitaria con tratos expresados con números enteros. En la segunda situación, se les dio el trato E "2/3 de las naranjas que recojan", expresado con una fracción, para que lo compararan con otros cuatro tratos expresados con números enteros (A2-1, B3-2, C4-3, D6-4). Se les pidió que argumentaran el porqué de su elección.

Según lo recabado en las hojas de trabajo, la mayoría de los niños responde correctamente a las comparaciones de los tratos. Interpretan los tratos expresados con una fracción y pueden compararlos exitosamente, así como identificar aquellos que convienen por igual (E2/3, B 3-2 y D6-4). Se han clasificado los procedimientos en dos grupos: 1) Los que expresan con una fracción un trato (A, B, C o D) y lo comparan con 2/3, o bien expresan el trato E (2/3) con números naturales y continúan igualando el término para poder compararlos, y 2) Los que expresan todos los tratos con fracciones y las comparan.

Los procedimientos de Luis y Samantha ejemplificarán el primer grupo. Luis al comparar el trato E (2/3) con el B (3-2) identifica que son iguales al aplicar la fracción 2/3 a 12 naranjas: "*son iguales porque 2/3 o 3/2*[39] *(sic) es igual que 8 y 8 de 12".* Samantha expresa el trato A (2, 1) con una fracción y la compara con la expresión fraccionaria del trato E y escribe: "*conviene el E porque en el A nos dan ½ y en el E nos dan 2/3 que es más de la mitad".* En cambio, cuando compara el trato E (2/3) con el trato C (4-3) iguala un término y escribe "*conviene más el trato C* porque *si el 4 lo convirtiéramos a 12, sería por cada 12 nos dan 9 y en el E por cada 12 nos darían 8*". Ahora no se trata solo de "igualar un término" como cuando los dos tratos están expresados con dos números, ahora hay un trato expresado con fracción (E 2/3). Samantha pudo haber tomado varios caminos para compararlos:

[39] Con esta expresión fraccionaria Luis escribe el trato B. No sabemos si fue una simple confusión al escribir o si bien así está interpretando el trato. De cualquier manera, al aplicarlo a una cantidad de naranjas logra saber que ambos tratos convienen por igual.

1) Obtener un trato equivalente a "por cada 4, 3": el trato (por cada 12, 9). Aplica el trato "2/3 de" a 12 naranjas, y obtiene 8, con esto ya puede comparar; es decir, tuvo que buscar en el primer paso un trato equivalente a "por cada 4, 3" cuyo primer término fuese divisible entre 3, para poder aplicar la fracción 2/3 sin problema.
2) Expresar el trato fraccionario 2/3 con dos números naturales "por cada 3, 2" y obtiene el trato equivalente a éste "por 12, 8" para poder comparar.

En ambos casos lo que hizo fue complejo. Cuando compara los tratos E (2/3) y D (6-4) identifica su equivalencia y escribe: "*son iguales porque el 6 lo convertimos a 12 sería por cada 12 te doy 8 y en el E por cada 12 nos darían igual 8".* Cabe preguntar ¿por qué solo logra comparar en el nivel de las fracciones los tratos E y A? Quizás porque la fracción "1/2" es muy accesible y esto facilita su comparación, lo que ya no ocurre con los otros tratos. Con los que acudir a las razones expresadas con naturales resulta más sencillo. Esto puede verse también en Leslie y Kevin, quienes sólo logran comparar en el terreno de las fracciones los tratos E y A. Leslie escribe "*conviene la E porque 2/3 es mayor que 1/2)"* Kevin escribe "*La E es un poco más grande que un medio".*

En el segundo grupo de la clasificación tenemos a otros niños que comparan todos los tratos en el nivel de las fracciones. Giovanni compara el trato E (2/3) con el C (4-3), escribe éste último con una expresión fraccionaria (3/4) y escribe "*conviene el C porque ¾ es más grande que 2/3".* Tadeo incluso escribe los signos matemáticos entre las fracciones: "$\frac{1}{2} < \frac{2}{3}$" o bien "$\frac{3}{4} > \frac{2}{3}$".

José, como ya lo ha hecho antes, muestra un buen nivel de comprensión de las fracciones, cuando compara el trato C (3-4) con el trato E (2/3: "*Porque ¾ es mayor que 2/3"*.

Edy muestra además una resolución en dos niveles: el de las razones expresadas con dos números, y el de las fracciones en un ir y venir. Interpreta bien la fracción (por cada 3 me van a dar 2) y luego encuentra la razón interna y multiplica ambos términos para obtener el resultado correcto "*por cada tres que recoja me van a dar dos, entonces escojo un número que estos dos…yo escogí el doce […] este lo multipliqué* *por seis, serían dos por seis igual a doce, y ahora voy a multiplicar uno por seis me da seis, ésta sería la A"*[40]*.* Escribe en el pizarrón:

A=2=1 2x6=12 A

1x6=6

"la respuesta sería por cada doce que recoja me están dando seis naranjas, y luego la E es que tengo que multiplicar tres por cuatro me dan doce, luego tengo que multiplicar el dos por cuatro, me da ocho".

E=3=2 3x4=12

2x4=8

Concluye finalmente con "*la A porque la A te está dando la mitad, un medio".*

Es posible dilucidar en la explicación de Edy un procedimiento sistemático y correcto, empero, es necesario señalar que su manejo no convencional de los signos, en específico del signo igual (=), hace que la explicación sea muy confusa y críptica, muy probablemente sus compañeros entendieron poco. Llama la atención que, pese a que Edy hizo todo un trabajo para igualar un término de las dos razones, cuando lo logra (de 12 se dan 6 contra de 12 se dan 8), justifica cuál es el mejor trato acudiendo a las fracciones.

Entre las respuestas erradas, Liliana y Estefanía eligieron el trato E (2/3) como el mejor sobre el trato D (6-4) Estefanía escribe en su ficha de trabajo las fracciones *"4/6=2/3"* lo cual es correcto, pero sigue eligiendo como mejor el trato E. Esta equivalencia quizá fue sólo copiada del pizarrón y no le da el significado pertinente, o quizás es una errónea interpretación de las expresiones fraccionarias. Liliana en cambio sigue centrándose en una sola variable del trato, como se ve cuando explica que *"te dan 4* (refiriéndose al trato D) *y en la otra te dan 3 (*trato E) *casi lo mismo pero por 1".* Diana, por otro lado, toma el primer término que aparece en el trato como la cantidad de naranjas que le darán y así elige e incluso cambia los términos de la

[40] En el esquema, A=2= 1 resume, según Edy, el trato con el que está trabajando. Las dos multiplicaciones siguientes son ambos términos del trato multiplicados por seis, la razón interna, para obtener doce, el número que Edy eligió para poder dividir ambos términos. Representa lo mismo en su siguiente esquema, sólo que esto es para el trato E.

fracción. Al comparar el trato E (2/3) con los tratos C (4-3) y D (6-4) escribe, respectivamente: "*me conviene más porque 4/3 te da más, es la C"* y "*me conviene más 6/4 pido la D".*

Comentarios

El objetivo de la clase era mostrar que hay más de una manera de expresar un trato, ya no sólo con dos números enteros sino también con una fracción. Además de eso, lograr que se realizaran comparaciones tanto con facciones unitarias como no unitarias. En la primera situación, sorprende la rapidez con la que la mayoría del grupo identificó que el trato A (12-4) y C (1/3) eran tratos equivalentes y que, entonces, convenían más que el trato B (20-5). Esta rápida resolución implicaría que logran interpretar al trato 1/3 como una razón "por cada 3, uno", o bien, logran comparar contra 1/3, aunque sea de manera aproximada, la relación multiplicativa entre los términos de los otros tratos. En la actividad de proponer tratos equivalentes a "te doy 1/3 de las naranjas que recojas" la mayoría de los alumnos proponen al menos una pareja de cantidades que guardan esa razón, algunos proponen varias, al descubrir una forma sencilla de generarlas: multiplicar cualquier número por 3.

En cuanto a los pocos errores identificados, prevalece el no lograr interpretar el trato expresado con una fracción o no lograr aplicarlo a una cantidad de naranjas para verificarlo, como en el caso de Noé y Daniel.

En la segunda situación, que implicaba la comparación de tratos expresados con fracciones no unitarias, los alumnos tendieron pasar de la fracción (2/3) a una expresión de la razón con dos números naturales (por cada 3, 2), y luego comparar igualando un término. Pocos hicieron lo contrario, expresar los tratos con fracciones y comparar. Algunos parece que aplicaron la fracción 2/3 a un término de la razón que con la que se compara (el término que indica cuántas naranjas se recogen) y luego compararon lo obtenido con el segundo término.

José, Edy y Giovanni mostraron una amplia facilidad para ir y venir de la expresión clásica de un trato, con dos números enteros, a su expresión fracción; propusieron tratos equivalentes e incluso compararon ambos tratos en el nivel de las fracciones. Nuevamente, y como ya lo habían hecho en clases anteriores, hacen vínculos exitosos con la noción de porcentaje. Los pocos errores identificados en esta sección parecen deberse a una incorrecta interpretación de la fracción o a que están centrándose en una sola variable de los tratos.

Al final de la clase la maestra pregunta: *¿hay diferentes maneras de expresar un trato?* Nataly le responde: *todos los problemas están en enteros y nosotros aprendimos a ponerlos en fracción".* Y Edy la apoya con un ejemplo "*¿será que podemos poner por cada tres kilos de manzana que recoja me dan uno?"* Parece que para estos dos alumnos, es claro que puede haber más de una forma de expresar un trato. Nataly hace explícita la idea de que una fracción se puede aplicar a cualquier cantidad, la cual se convierte en ese momento en unidad, al afirmar que el "entero" es 60 naranjas, y un tercio serían sólo veinte naranjas, y José lo convierte a porcentaje *"¡y se puede con porcentaje!"* y escribe en el pizarrón 33.3%[41]. Considerando que el porcentaje es una razón, es comprensible que varios alumnos hagan esta relación. Se destaca de cualquier forma la facilidad con la que estos mismos alumnos cambian de un registro a otro.

4.3.4 Clase 4

Esta última clase tiene como propósito desarrollar una técnica para expresar una razón de dos cantidades enteras con una fracción.

Notas adicionales al análisis previo

Situación 1

Como en las clases anteriores, se les entrega una ficha a los alumnos con la siguiente consigna: "Expresar los siguientes tratos con fracciones":

[41] En fechas recientes a esta clase, la profesora estuvo trabajando el tema de porcentaje con el grupo, por lo que quizá José trajo ese elemento a colación.

A: “Te doy 12 naranjas cada 24”	
B: “Te doy una naranja por cada 5”	
C: “Te doy 3 naranjas por cada 5”	
D: “Te doy 7 por cada 10”	

La institucionalización consiste en lo siguiente:

> Para saber qué fracción corresponde a “por cada 5 te doy 3” consideren que:
>
> *una sola naranja corresponde a 1/5 de 5,
>
> *entonces, 3 naranjas es 3/5

Situación 2

Esta segunda situación tiene como propósito reafirmar los hallazgos de las clases anteriores. Se busca que los alumnos completen cuatro tablas proporcionales, auxiliándose para esto de la razón externa, esto es, la fracción jugando el papel de operador. La consigna es: En cada una de las siguientes cuatro tablas, en la primera fila se expresa un trato con una fracción. En las filas que siguen, se expresa ese mismo trato mediante dos números. Faltan algunos números. Poner los datos que faltan para que los tratos de cada tabla sean equivalentes. Solamente hacer las dos primeras tablas.

Te doy ¾		Te doy 3/10		Te doy ____		Te doy ____	
Por cada:	Te doy	Por cada:	Te doy	Por cada:	Te doy	Por cada:	Te doy
4	3	10		10	5	6	4
12			6		24		20
	12					60	
100		100		100		100	

Las técnicas a institucionalizar son:

> ¿Cómo se puede saber qué fracción representa un número, digamos 3, de otro, digamos 10?
>
> Una manera es: ver qué fracción representa la unidad (1): 1 de 10 es 1/10, 3 es 3/10. O Bien, directo: 3 es 3/10 de 10.

Análisis posterior

Situación 1

De las hojas de trabajo que se recolectaron (treinta de un grupo de 32) en esta última clase es notable decir que no contienen errores. No obstante hay tres matices a considerar en este resultado: 1) los alumnos se comunican entre sí, 2) quizá corrigieron sus hojas durante la puesta en común y 3) algunos pueden haber descubierto "el truco" sin realmente comprender. Lo que sí presentan son algunas pequeñas variaciones.

Hubo 15 niños que expresan los tratos como fracciones de forma correcta, sin simplificar o dar una fracción equivalente. Nataly por ejemplo, explica: *"[…] veinticuatro son en total y doce son las que te van a dar o sea son doce veinticuatroavos. El veinticuatro es el entero y doce son las que te están repartiendo a ti. El total va abajo, lo que te reparten va arriba".* Nataly está explicando la relación que hay entre las dos cantidades que conformar la razón y anclada en esto especifica cómo debe escribirse la fracción. Concebir a 24 como "el total", o "el entero", es clave, pues establecer una “razón” entre dos cantidades A y B, esto es, ver qué parte es una de la otra, consiste, a final de cuentas, en tomar a una de ellas como nueva unidad (como el total, como el entero), y medir a la otra con esa unidad. Esta noción de entero también la muestra Francisco. Para el trato B (te doy una por cada cinco) dice que “*veo cuál es el entero (*señala el 5) *y veo que nada más me van a dar una”.*

Efraín y Brandon por su parte doblan ambos términos de la fracción, obteniendo una fracción equivalente. Es decir, si tienen “una naranja por cada cinco” lo convierten a “2/10” en el caso del trato A o bien en el trato C “te doy tres naranjas por cada cinco” escriben “6/10”. Otros encuentran la fracción equivalente simplificando como Samantha con el trato A “doce naranjas de cada veinticuatro” (la fracción 12/24) a ½. Si bien, simplificar constituye una práctica de las matemáticas pues permite entre otras cosas trabajar con datos más simples y expresivos, generar fracciones equivalentes ciertamente no era necesario, y quizá los motivó a hacerlo la situación pasada en la que se trataba de encontrar distintos tratos equivalentes.

Luis agrega para el trato “una naranja por cada 5” que “*1/5 solamente me va a tocar una parte”* y para el trato “3 naranjas por cada 5” escribe “*solo me va a tocar 3 partes”.* Esto puede estar dando indicios de que Luis ya tiene muy presente la noción de fracción para la expresión de los tratos, como lo muestra más adelante cuando dice sobre el trato C (te doy 3 naranjas por cada 5) *“Es tres quintos porque me dan tres partes de cada cinco”*. Esta formulación se asemeja a la de la definición clásica: 3/5 significa tres partes de cinco, lo que se le añade en la secuencia es el “de cada”, que le da cierto dinamismo, mismo que el niño expresa en su definición.

Situación 2

En esta segunda situación los niños debían completar unas tablas a fin de que los tratos, expresados con una fracción, fueran equivalentes. Los procedimientos de los alumnos se clasifican en 1) procedimientos sobre la marcha y 2) procedimientos que expresan la razón externa con una fracción.

En el grupo uno localizamos a Kevin y Germán, quienes muestran una tendencia a manejar bien las razones internas y a usar las aproximaciones sucesivas. Logran expresar la fracción (razón) que se da con dos números. Cuando Kevin dice “*Por cada diez me van a dar tres, y yo multipliqué tres por dos son seis y diez por dos, veinte […] multiplico por dos para que me diera seis, porque es un múltiplo. Luego aquí* *treinta y sumé seis más tres igual a nueve"* vemos como lo aditivo entra, pero de manera correcta: a la suma de dos valores de un conjunto le corresponde la suma de dos valores del otro conjunto. A este procedimiento, que combina razón interna con

sumas (correctas), le llamamos "procedimientos sobre la marcha" que corresponde al que en inglés llaman "building up procedures" (Hart, 1988). Su tabla queda así[42]:

Te doy 3/10

Por cada:	Te doy
10	3
20	6
30	9
100	30

Sigue el orden
10, 20, 30

6+3

6x5

Otro ejemplo de este tipo de procedimiento lo da Germán, quien también incorpora sumas término a término a su uso de la razón interna. "*Para cuatro, tres y es igual a doce, dividí doce entre cuatro, tres de cada cuatro, sale nueve. Luego aquí no tenía el primero, dividí este* (señala el 12) *entre tres y me salió cuatro, y luego lo sumé aquí* (señala la casilla siguiente) *y me dio dieciséis* (12+4=16)*. Luego acá* (señala el número 100) *hice lo mismo que aquí, lo dividí entre cuatro y me salió veinticinco. Lo multipliqué por tres y me salió setenta y cinco".*

[42] Los números en rojo señalan el dato faltante en la tabla y que los niños completaron.

Te doy ¾

12÷ 3=4

12+4

Por cada:	Te doy
4	3
12	9
16	12
100	75

100÷ 4=25 → 25x3

En el segundo grupo, los alumnos que expresan la razón externa con una fracción, están los procedimientos de Marijose y José. Marijose pasa a resolver el tercer trato. En éste, la razón externa no está dada, sino que debe completarse. Ella escribe la fracción “5/10” como razón externa, diciendo que su resultado es correcto *“porque es la mitad* […] *este veinticuatro por dos para que me diera cuarenta y ocho. Acá abajo puse cuarenta y ocho y acá noventa y seis”.*

Te doy $\frac{5}{10}$

24x2

48x2

Por cada:	Te doy
10	5
48	24
96	48
100	50

José esboza un intento de identificar la fracción razón cuando resuelve la última tabla de la ficha (ésta dice que “por cada 6 te doy 4, y deben encontrar la razón externa, que podría ser 4/6 o bien 2/3, que es la que José identifica). En la puesta en común José explica que “*yo me di cuenta que dos es la mitad de cuatro, y entonces ponemos la mitad de seis, es tres* (y añade un cero). *Luego abajo sólo ponemos el cero”.* Si bien su explicación nos dice cómo encontró el término faltante (30) no logramos saber cómo es que llegó a la fracción 2/3.

Escribe la mitad de “6” que es “3” y añade un “0”.

Por cada:	Te doy:
6	4
30	20

El “2” del número “20” es la mitad del 4 y un cero

Esta es una forma confusa, pero correcta de encontrar el número que multiplicado por cuatro dará veinte: se pone la mitad de la cifra y añade un cero a las decenas. Al resolver el último reactivo de esa misma tabla que son cien naranjas, dice que “*como no tiene exacto”*, dividirá cien entre tres, obteniendo treinta y tres y luego lo multiplica por dos, obteniendo las sesenta y seis naranjas del resultado final. Esto parece implicar que José aplicó el operador “2/3” a los datos, esto es, la razón externa.

Te doy $^{2}/_{3}$

Por cada:	Te doy:
100	66

100÷3 (2)

La relación con el porcentaje

Al finalizar ambas situaciones se trae a la mesa el recordatorio de que los tratos pueden expresarse con dos números enteros, con una fracción o aún más, con un porcentaje o un decimal. La profesora escribe cada par de tratos de la tabla anterior expresado con las fracciones: *“12/24, 1/5, 3/5, 7/10”,* y les pregunta cómo podrían expresarse esos tratos con un porcentaje. El ejercicio ya terminado queda como lo ilustra la siguiente tabla, pero cada caso se explicará enseguida.

12/24	= .5 = 50% = ½	Germán
1/5	*=1/5= .2 = 20% = 2/10*	Francisco
3/5	*3/5= .6 = 60%= 6/10*	Luis

El primero en pasar al frente para expresarlo con diferentes registros es Germán, quien no tiene mayor complicación para hacerlo, y la maestra no le pide mayores explicaciones. Francisco argumenta a su expresión del porcentaje: *"Aquí dividí cinco entre uno y me salió…ah no uno entre cinco me salió punto dos y lo hice a porcentaje […] sólo le agregué un cero".* La profesora pregunta si sacar el porcentaje es tan sencillo como simplemente añadir un cero. Luego dibuja un cuadrado que divide en cinco partes, señalando una. "*Se agrega un cero ¿pero de dónde sale?"* dice "*si el entero vale 100 y me están pidiendo un pedacito, que es 1/5, ¿cuánto da?"* Esta clase se cruza con otras que ha tenido la maestra con sus alumnos sobre el porcentaje, por ello es concepto que los niños tienen presente. En algún momento evoca una hoja milimétrica que usaron recientemente y que al parecer resultó importante.

Comentarios

Desde el punto de vista de los niños que fueron observados y los procedimientos y resultados aquí consignados, se puede decir que la secuencia funcionó bien: varios alumnos pueden transitar bien entre las dos expresiones de la razón que guardan dos cantidades, con fracción y con dos números naturales, lo que implica que pueden interpretar a una de las cantidades como una totalidad (o entero). Algunos lo dicen explícitamente "*veinticuatro es el total*"; "*veo cuál es el entero (*señala el 5) *y veo que nada más me van a dar una".*

Disponen de procedimientos para calcular valores faltantes, internos (conservación de las razones y suma término a término) y externo (expresión de la razón con una fracción o la razón recíproca, con un número de veces). Varios también logran ver la razón como porcentaje, lo que quizás facilite su comprensión.

4.3.5 La secuencia en lo individual

Karla

Karla no logra realizar comparaciones de tratos si no es utilizando material concreto. Para comparar los tratos A (2 naranjas por cada 5) y B (2 naranjas por cada 6) con gran dificultad logra construir un procedimiento. En un primer momento y usando el material concreto, sólo reparte las naranjas y parece buscar formar varios montones sobre la mesa (de cuántos es algo que no se alcanza a ver en el video). Fastidiada de no comprender. Luego, con ayuda de su compañera Nataly, reúne montones de cinco naranjas hasta llegar a sesenta, y de cada montón saca las dos que le darán en el trato A. Nataly es quien cuenta y Karla participa pasivamente en el conteo, y parece entender mejor una vez que ve los montones de naranjas y observa cómo, de cada uno, se sacarán sólo las 2 naranjas que el trato señala.

Las ventajas que representan para Karla usar el material se evidencian en esa misma clase cuando compara el segundo par de tratos (2 de cada 3 naranjas que recojan; 3 de cada 5 naranjas). Parece deseosa de usar el material para lograr el resultado, esto probablemente en su afán de comprensión. A pesar de las interrupciones de sus compañeros de equipo, Kevin y Nataly, Karla está intentando hacerlo ella sola. Para el primer trato (2 de cada 3 naranjas) y dispone las 60 naranjas en varios montoncitos de 3. Luego, de cada uno, comienza a quitar las dos naranjas que dice el trato, y se las va pasando a Nataly. Al final, las cuenta y llama a la profesora; le dice "*se queda veinte y el otro el que trabajó se queda cuarenta".* Lo cual es correcto.

En las clases posteriores, el uso del material concreto no se contemplaba. A pesar de esto, Karla logra establecer una serie de comparaciones correctas de tres pares de tratos, ya sea tomando como referencia la mitad o bien intentando hacer una relación entre las naranjas que recoges y las que te darán, como en los tratos E (5-4) y F (20-8), cuando escribe que *"en la D (sic, se refiere al F) recolectas muchos y me dan pocas naranjas".* Esto devino de su discusión con el equipo, donde hablaban de que aunque en el trato F dan ocho naranjas, son pocas en comparación con las que recolectas, en el E al contrario y en palabras del equipo, te dan "casi todo" lo que recolectas. También logra identificar los tratos equivalentes.

	Conviene más:	Porque…
C: por cada 10 naranjas , te doy 6 D: por cada 30 naranjas, te doy 15	*La C*	*Porque en la C porque solo recolectas 10 y me dan 6 y es más de la mitad*
E: por cada 5 naranjas, te doy 4 F: por cada 20 naranjas, te doy 8	*La E*	*Porque en la D(sic) recolectas muchos y me dan pocas naranjas*
G: por cada 6 naranjas, te doy 3 H: por cada 12 naranjas, te doy 6	*Las G H*	*Porque son múltiplos*

En las primeras clases, era frecuente que Karla confundiera el numerador con el denominador en la expresión fraccionaria de un reparto de pasteles, lo que parece arrastrar hasta ésta clase. En la clase siguiente, cuando se le pide comparar el trato E “2/3 de las naranjas que recojan” con el D “por cada 6 naranjas que recojan, les doy 4” ella responde que *“Conviene más la E porque es más 6/4 es menos que 2/3”* es decir, intenta expresar el trato D con una fracción, pero invierte el numerador y el denominador. Esto quizás se deba a que en esta ocasión, el trato E está expresado con una fracción y no con dos números enteros como en los ejercicios anteriores. El tránsito de un registro a otro no es sencillo, como se ha visto en los estudios de Block (2001, 2006). Cuando llegó el momento en que Karla debía expresar directamente un trato con una fracción, dijo: “*a esto no le entiendo, las otras veces lo entendí bien y ahorita ya no me acuerdo”*. Cuando le comenté que en esta ocasión era un poco diferente porque estábamos usando fracciones, ella me responde: “*pero es igual, son tratos”.*

Su respuesta revela cierta comprensión del contenido en su trasfondo. Ciertamente estábamos trabajando con tratos, pero expresados con diferente registro; además, Karla parece referirse por “las otras veces” a la clase anterior, donde pudo manipular material concreto o bien a la forma en la que se expresaban los tratos.

Carmen

Resuelve las primeras comparaciones de tratos iterando las cantidades de naranjas. Decide tomar el dato de 60 naranjas (que ya se había manejado en clases anteriores) y aplicar cada trato a esa cantidad. Para el trato A "te doy dos por cada cinco que recojas" dice: *"si me dan dos por cada cinco, cuento cinco, cinco, cinco y son doce, luego multiplico por 2 y son 24".* [...].

Para comparar los tratos C (10-6) y D (30-15) acomoda los datos del trato C en una tabla y comienza a duplicar[43], por 20 naranjas le darían doce, por treinta le darían 18. Así, en el trato C le dan 18 mientras que en el D le dan 15, y como ella misma concluye "*serían dos naranjas de diferencia".* Cuando compara los tratos E (por cada 5 naranjas, te doy 4) y F (por cada 20 naranjas, te doy 8) elige el E *"Por que multiplicas y es más"*. Esta explicación se refiere a que primero fue sumando, para el trato E, cuántas naranjas le darían si recogiera diez naranjas, le darían ocho; cuántas si recogiera quince naranjas, le darían doce naranjas. En algún momento vio que podía multiplicar para agilizar este cálculo y multiplica ambos términos del trato, tanto el 5 como el 4, por cuatro, para llegar a veinte naranjas y poder así compararlo con el trato F, con lo que economiza de forma importante su procedimiento. No identifica la pertinencia de la división, pero sí la de la multiplicación y aunque no lo hace de forma explícita, encuentra la razón interna (entre 5 y 4, razón 4 veces).

Al expresar los tratos con una fracción escribe el número de naranjas que recogerán como denominador y el número de naranjas que les darán como denominador, de forma muy rápida (para el trato C "te doy tres naranjas por cada cinco" escribe "*3/5"*). Esta rapidez deja suponer que lo hace mecánicamente y cabe preguntarse qué tanto conoce su justificación. Quizás una pista sobre esta comprensión se encuentre en la última situación, donde debe proponer tratos equivalentes para una serie de tratos expresados con fracción. Para la pareja "6-4" (esto es por cada 6 naranjas que recojas, te doy 4) escribe la fracción *"4/6"*.

[43] En esta secuencia, la profesora anota los datos en el pizarrón y les dice, directamente, que lo apliquen a 60 naranjas. Esto cambia un poco el sentido de la secuencia ya que la actividad se convierte en una simple aplicación del trato a una cantidad de naranjas. En cierto momento, yo le pedí a Carmen que "olvidara" el dato de las 60 naranjas que la maestra adelantó al grupo, y que lo resolviera como si desconociera ese número.

Te doy *4/6*	
Por cada:	Te doy
6	4
36	24
60	*40*
100	*66*

Encontrando la razón externa (6 y 30, razón x6 ; 6 y 60, razón x10) logra completar el segundo y tercer renglón de la tabla. Para el siguiente y último, no encuentra aquel número que multiplicado por 6 le de 100. Busca dividir el 100, pero no sabe entre qué cantidad hacerlo. Finalmente, busca aproximarse y a 60 le va sumando seis naranjas más (por las 6 que te da el trato). Así, tiene:

66	44
72	48
78	52
84	56
90	60
96	64
99	66

Al final, ve que si le sumara a 96 seis naranjas más se pasaría de las 100 que le señala la tabla, por lo que dice que "*si me recogiera sólo tres me darían dos*" teniendo 66 como resultado final. Es una buena aproximación y se inserta en los procedimientos que hemos llamado "sobre la marcha".

En el cuestionario inicial Carmen no lograba resolver los problemas de razón, ya que se centraba en una sola variable sin considerar la relación con el otro dato. Como puede apreciarse esta secuencia le fue especialmente provechosa ya que le permitió comparar razones, inclinándose por igualar ambos términos de los tratos, y no sólo eso, sino que interpretó tratos expresados ya sea con números enteros o con fracción.

Maribel

La trayectoria de Maribel se caracteriza por un buen manejo de las razones expresadas con dos números, las cuales logra comparar usando con procedimientos sobre la marcha (building up), identificando incluso, a veces, las razones internas de manera explícita. Logra transitar de la razón a la fracción e incluso a porcentaje.

Un ejemplo típico de Maribel es el que aplicó al trato B (2 por cada 6) para sesenta naranjas. Escribe una tabla y comienza duplicando ambos términos: si por cada dos te dan seis, por cada cuatro te darán doce; pero en cierto momento identifica que lleva la mitad de naranjas “recogidas” (treinta naranjas) y multiplica por “2” ambos términos , lo cual representa una economía importante.

Trato B	
6	2
12	4
18	6
24	8
30	10

Al hacer esto, posiblemente aplica una de las propiedades de la proporcionalidad al sumar “por cada 6 de un lado, un 2 del otro” y la de multiplicar ambos términos por un mismo número (“al doble le toca el doble”). Su buen manejo de las razones se manifiesta también cuando compara los tratos *A* (por cada 3 naranjas que recoge me dan 2) *y* *B* (por cada 5 que recoge me dan 3). Elige el trato A porque *“tres para dos, toca uno y cinco para tres, toca a dos, pero lo voy a comprobar”.* Aunque posiblemente está utilizando un procedimiento aditivo (algo como “en el 2 de cada 3”, me quitan 1, y en el “3 de cada 5, me quitan 2”) ella hace una tabla para cada trato y dice *“Si en la B por cinco dieran cuatro, convendría más la B”.* ¿Cómo lo sabe?, en este caso la diferencia entre lo que se recoge y lo que se da sería de uno, igual que en el otro trato. Esto quiere decir que no se está fijando solamente en la diferencia, sino que tiene en cuenta algo más.

Su facilidad para cambiar de registro se ejemplifica cuando compara los tratos C (por cada 10 naranjas, te doy 6) y D (por cada 30 naranjas, te doy 15). Dice que en "*la C dan más por menos*"; después explica cómo usar el porcentaje: *"si dicen que por cada diez, el diez es el cien por ciento y entonces el seis es el sesenta por ciento y el treinta de la D es el cien por ciento, y como nada más te van a dar la mitad, quince, es el cincuenta por ciento".* Esta relación exitosa que logra establecer Maribel manifiesta la cercanía que estos contenidos matemáticos; la razón expresada con una fracción y el porcentaje visto como razón.

Maribel retoma estos elementos, la fracción y la razón interna al comparar tres tratos más (A12-4; B20-5; C 1/3). Escribe en su hoja "*B: 20-5, C: 20-60"* y explica que: *"por cada sesenta que recojan (en) la C, le dan veinte… porque multipliqué, uno por veinte y veinte por tres, porque éste, C, tendría que decir uno de cada tres".* Luego, para comparar su trato C (60, 20) con A (12, 4), con la calculadora divide sesenta entre doce, obtiene cinco, y dice *"entonces multipliqué por cinco por cuatro"*. Así encuentra que el trato *A "por 12, les doy 4" es equivalente a "por 60, les doy 20".* En este fragmento Maribel deja ver dos cuestiones importantes: 1) ve a la fracción 1/3 del tato C como equivalente al trato "uno de cada tres" y usa la razón interna por 20 para generar un trato equivalente (C: 20-60), 2) Para comparar el trato A (12-4) con los otros dos igualando un término a 60, determina la razón interna 60 a 12, mediante división, y lo convierte a A: 60-15.

Maribel está manejando la conservación de la razón interna para generar equivalencias. Al inicio, se explicó cómo Maribel había logrado auxiliarse de la multiplicación para generar las equivalencias, esta vez, usa la división. Cuando explica su resultado, su resumen expresa el procedimiento que ha pulido "*La A, sesenta entre doce es cinco y cuatro por cinco es veinte. La B, veinte por tres es sesenta y cinco por tres, quince, es menor*. *La C, sesenta, tres por veinte y veinte por uno, veinte, te dan lo mismo (que en la A)".*

Durante la última clase, recurre nuevamente al uso de la razón interna y hace algunas conexiones con la razón externa, como podemos verlo en su resolución del trato "Te doy ¾"[44]:

[44] Los números marcados en rojo indican el número que escribió Maribel.

Te doy ¾

Por cada:	Te doy
4	3
12	9
16	12
100	75

Completar esta tabla no le representa dificultad, escribe rápidamente y de manera correcta los números faltantes. En el tercer trato (cuya expresión fraccionaria no se da y es parte de lo que los niños deben encontrar) cuyo dato inicial es “por cada 10 te doy 5” para resolver “10,5 = x, 24” ella explica que *“multiplico el cinco por cuatro, dan veinte, me quedan cuatro”*. Entonces multiplica 10x4 = 40 y añade (+ 4) (los 4 quedaron) = 44. En otras palabras: encontró que si de 10 dan 5, de 40 dan 20, y entonces se cuela lo aditivo: de 40 +4 dan 20 +4.

Llama la atención nuevamente la inclinación de Maribel por utilizar por las razones internas. El observador le hace ver que “24” no es la mitad de “44”, a diferencia de que “5” sí lo es de “10”. Entonces ella se centra esta vez en la razón externa “mitad”, y dice *“entonces hay que multiplicar por dos… cuarenta y ocho”*. En el último trato (que tampoco está expresado con fracción) se auxilia de esto cuando no logra encontrar el último número para “6, 4 =100, x”. Obtiene 6, 4 = 60, 40 multiplicando por 10 ambos términos. Luego divide entre tres ambos términos (60 y 40) y obtiene veinte y trece (deja de lado el residuo).Finalmente multiplica por cinco ambos términos.

	6	4	
X10			X10
	60	40	
÷3			÷3
	20	13	
X5			X5
	100	65	

Cabe notar que el observador, seguramente sin proponérselo, dio a la alumna una información adicional, a saber, que el número de naranjas recibidas debería ser la mitad del número de naranjas recogidas, en virtud de que esto ocurre en el primer par (10, 5). Maribel acepta la información, no sabemos si porque coincide con ella o porque la recibe de una autoridad

Como puede verse, su comprensión de las nociones en juego: razón fracción, porcentaje incluso decimal es muy buena aunque no logra expresar el trato “por cada 6, 4” con una fracción.

Comentario final de la secuencia “Tratos buenos y no tan buenos”

El desempeño observado de los alumnos, permite hacer la jerarquización de las tareas y los procedimientos que se presenta a continuación. Consideramos aquí las tres alumnas del seguimiento (Karla, Carmen y Maribel)

En el nivel de los tratos expresados con dos números naturales, se tienen las siguientes tareas alcanzadas:

- Comparar dos tratos aplicándolos a una cantidad dada (eventualmente con material concreto) lo logran las tres niñas, Carmen, Karla y Maribel.
- Comparar dos tratos igualando un término. También logran hacerlo las tres niñas.
- Mejorar las técnicas que se usan aplicar tratos (por cada m, n) a una cantidad A: dividir A entre m, y multiplicar por n (lo logran Carmen y Maribel); o bien, determinar una razón interna y conservarla (sólo lo logra Maribel)

En la relación con las fracciones

- Comparar tratos contra ½. Para las tres niñas esto fue posible.

- Pasar del trato expresado con fracción (no unitaria) al trato con dos números y vice versa, para poder comparar (la logran Carmen y Maribel)
- Comprender que para una fracción dada, existen muchos tratos (demuestran dominar esto Carmen y Maribel)
- Transitar entre razón, porcentaje en el caso de Maribel, y en una menor medida hacia fracción y decimal. Ni Carmen ni Karla logran llegar a este punto.

Así, puede decirse que esta secuencia funcionó satisfactoriamente en términos generales, en virtud de que 1) Fue accesible para la mayor parte de los alumnos del grupo, posibilitando, desde la primera situación, procedimientos elementales (aplicación de los tratos a una cantidad con apoyo de material concreto para poder comparar) y procedimientos más avanzados como se vio en el análisis; 2) Ofreció una retroalimentación que permitió a los alumnos validar sus resultados, y sobre todo 3) Permitió a los alumnos desarrollar procedimientos para comparar razones entre dos cantidades, y expresar las razones con fracciones. El desempeño de varios alumnos (Kevin, Germán, Nataly) permite suponer que para ellos la fracción enriqueció su significado al expresar ya no solamente una medida (a/b como una unidad que se parte en b y se toman a), sino una razón (a/b como tomar a *por cada* b unidades): entender que 3 de 4 es ¾, es muy cercano a la definición de fracción (3 partes de cuatro partes iguales), pero entender que ¾ expresa 3 de 4, pero también 6 de 8, 9 de 12, 30, de 40 es un poco más difícil. También el tratamiento de problemas sobre razones adquirió una herramienta más: la fracción, la cual expresa con uno solo número aquello que es invariante.

Se puede señalar también que en este contexto, el de la comparación de razones, es en donde el contenido “fracciones de cantidades discretas” cobra sentido, pues ¿qué justifica decir, por ejemplo, “2/3 de 60 naranjas” en lugar de simplemente 40 naranjas? La expresión fraccionaria se justifica justamente cuando expresa una razón y no una cantidad. Y que algunos niños, como Nataly, comprendieron bien al denominar la cantidad total de naranjas (60) como un “tipo entero”.

4.4 Reflexiones sobre el trabajo docente en el marco de una experiencia de ingeniería didáctica

En el presente texto analizo elementos de la práctica docente que aparecen entreverados en la experimentación. Si bien estos elementos no forman parte del foco de la investigación, sí es importante traerlos a la mesa ya que por una parte explican en cierta medida la dinámica del aula y, por otra, dejan ver el proceso difícil de apropiación de una secuencia didáctica por parte de quien debe conducirla poco después de conocerla.

Los aspectos que se reportan se agrupan en 1) los referidos a la exigencia para el docente de apropiación inmediata se la secuencia, 2) algunas características de la dinámica de la clase y 3) referentes a ciertas pautas de trabajo en la clase de matemáticas.

Dificultades derivadas de la exigencia de apropiación inmediata para el docente

<u>La dificultad para entender el contenido a trabajar.</u> El tránsito de las razones a las fracciones no es un contenido sencillo para los alumnos, como hemos podido comprobar, por lo que requiere secuencias didácticas que faciliten esta transición y que, a la vez, sean comprensibles para los docentes. En esta experiencia sin embargo, la profesora si bien mostró siempre una actitud de colaboración incluso entusiasta ante el reto de la implementación, también nos dejó ver ciertas dificultades para la apropiación las situaciones. Estas dificultades redundaron en diferentes problemas, principalmente al dar consignas confusas, comprensión limitada de algunas de las participaciones de los alumnos, validaciones centradas en un aspecto que iban dejando fuera otros. A continuación se comentan estas dificultades.

- <u>La dificultad en la transmisión de las consignas</u>. Ocurrió en la primera clase de la secuencia “Los pasos del Robot”, cuando, para introducir la actividad, comienza a lanzar preguntas sobre medición “*si estamos hablando de medir, ¿a qué nos referimos”* a lo que los niños contestan “*a centímetros” “a pulgadas”.* A partir de ahí la profesora permitió una larga intromisión de las unidades de medida convencionales a la actividad, e incluso les pidió a los alumnos sacar su regla para medir. Este evento provocó que cuando se enfrentaran a la tarea de medir los pasos del robot, los niños usaran los centímetros como unidades y no la tira verde destinada para ese fin, con lo que se pierde el objetivo de la sesión al intentar provocar la expresión de ese paso con una fracción. En las situaciones que se diseñan para propiciar que los alumnos pongan en juego determinados conocimientos matemáticos sin apelar a ellos directamente, es común que un pequeño cambio en la consigna altere de manera importante el desarrollo. Por ello la consigna es de las cuestiones a las que hay que prestar en la comunicación con el docente, y en la él con los alumnos. En este caso, por ejemplo, no se previó que podían introducirse subrepticiamente unidades convencionales, y por lo tanto no se le advirtió el riesgo a la maestra

- La dificultad para identificar el efecto de las variables de la secuencia. En la misma primera clase de los pasos del robot, la profesora intenta conectar esta secuencia con la anterior de los pasteles. En el caso del robot que avanza tres unidades en 5 pasos y se busca el tamaño de un paso, la profesora toma varias tiras verdes (unidades con las que se pretendía medir el paso del robot) y les da el trato similar al de "pasteles" diciendo "*Si tomamos una tira y otra tira y otra tira y sacamos 1/5 de cada una el paso medirá 3/5".* En la secuencia anterior, en efecto, se podía "repartir" cada pastel por separado, y entonces, se tomaba 1/5 de cada uno.
- La profesora también se está esforzando por entender algo que le resulta nuevo y difícil. En el proceso de entender, y por ver la relación que hay entre esta situación y la de los pasteles, pasa por alto que, aunque la conclusión matemática a la que se llegará es la misma, el camino es distinto, al menos durante la fase en que el contexto pesa e importa. ¿Faltó enfatizar con más fuerza y claridad la diferencia entre las dos secuencias y lo que podía esperarse que hicieran los alumnos? De ahí que digamos que un libro de texto no cambiará las cosas por sí solo, es necesario el trabajo con el docente.
- Las aportaciones de los alumnos. Las dificultades por parte de la maestra para comprender algunos de los conocimientos en juego, se reflejaron, como suele ocurrir, en dificultades para comprender las participaciones de los alumnos relacionadas con ese conocimiento. El siguiente ejemplo se deriva de la dificultad que se mencionó antes, de percibir que la partición en juego en el contexto de los robots es diferente de la que ocurre en el contexto de los pasteles: cuando le da instrucciones a Karla al resolver el caso del robot que avanza 2 unidades en 4 pasos. Karla le pregunta "*¿son cuatro pasos en las dos unidades o cuatro pasos en cada una?"* y la maestra responde "*cuatro pasos en cada una"* con lo que cambia el problema (2 unidades en 8 pasos). Otro ejemplo lo tenemos en la segunda clase de tratos, cuando Nataly intentaba explicarle la manera en la que

comparó un par de tratos (C 10-6 y D 30-15) igualando el término. La niña dice "*Yo lo que hice fue que en la C te dan, dice que por 10 te dan 6, si de 10 te dan 6 de 30, ¿cuántas te darán? […] Me dijo que 10 me dan 6, entonces yo me hice la pregunta, si junto 3 ¿cuántas me van a dar? Yo lo que hice fue si de 10 me dan 6, multiplico 6x3 igual a 18",* y la profesora le pide varias veces que le explique nuevamente *"la verdad no entiendo de dónde dices 30 en el primero Nataly, si te dice de cada 10 naranjas te dan 6 en un lugar, y en el otro de 30 te dan 15".* Llega un punto en el que Nataly le contesta "*es que ya no sé cómo explicárselo".* Naturalmente, para un observador que escucha explicaciones como la de Nataly sin la presión de la conducción de la clase o la exigencia de responder de inmediato, es mucho más factible comprenderlos, así como lo sería para la misma maestra, probablemente, si ella pudiera "repasar" a posterior la escena.

Referentes a la dinámica de la clase

No solamente las dificultades imprimen un sello a la experiencia, también, y quizá sobre todo, elementos de la práctica del maestro que se han vuelto rutinas, muchas veces conscientemente establecidas, a partir de una convicción, de una visión determinada del oficio de enseñar. A continuación destacamos algunas de las rutinas y modalidades que se identificaron.

- <u>Una política de total inclusión</u>. Esto tiene que ver con la loable intención de la profesora por incluir a todos sus alumnos, sin importar el nivel de desempeño que ella observaba en cada uno, dentro de la dinámica de la clase. Esto se observa en los tiempos para el trabajo individual, donde se concentraba en aquellos niños que de antemano reconocía con mayores dificultades para resolver determinado ejercicio e invertía este tiempo en una explicación individual. Este acto, de dirigir su atención "a quien más la necesita" nos da cuenta del conocimiento que tiene sobre su propio grupo y la heterogeneidad que lo caracteriza, pautado por el adecuado manejo del tiempo que poseía, porque si bien se concentraba en estas explicaciones personalizadas, no perdía jamás la noción del tiempo y usualmente estaba lista para la siguiente fase de la actividad que casi siempre era la puesta en común. En este momento de revisión colectiva se notaba el afán de la profesora por ser equitativa con todos los niños, permitiendo que pasaran al frente todos los equipos sin importar si los procedimientos sonaban repetitivos. Esto le toma mucho tiempo a la sesión.

- Preguntas ambiguas. Durante la clase la profesora hizo algunas preguntas cuya formulación las volvía muchas veces incontestables. Fue común escucharla preguntar "*¿y eso cómo lo representamos?"* cuando la representación de dicha operación ya está en el pizarrón o "*¿qué operación utilizamos"?* cuando los niños están haciendo estimaciones. Curiosamente esto que nosotros vimos como ambigüedad o confusión, es una característica bien conocida y sobre todo bien sorteada por sus alumnos, quienes entienden de qué habla su profesora o bien, prueban lanzando varias respuestas y mediante las respuestas (no muy explicitas) de la maestra, iban aproximándose a lo que ella tenía en mente, al estilo de una adivinanza. En la tercera clase sobre los pasos del robot la profesora pregunta sobre la medida del paso de un robot que avanza 3 unidades en 6 pasos. Germán rápidamente contesta "*tres sextos"* y la profesora remata con *"tres sextos ¿y saldría exacto? ¿no sobraría nada? ¿cuántos pasos daría? "seis pasos, a tres sextos, ¿cuánto te sale?"* El "¿cuántos pasos daría?" resulta extraño ya que en el problema se especifica que está dando seis pasos, y el "¿cuánto te sale?" desconcierta ya que no hay una operación explícita. A pesar de esto Germán le contesta "*tres unidades"* con lo que queda escenificada la relación tan cercana, incluso de complicidad entre docente y alumno.

Sobre cómo se trabaja en la clase de matemáticas

Como dijimos en el capítulo 2, en la interacción en el aula se negocian significados, se transmiten expectativas y se establecen normas que van formando en los alumnos ciertas nociones sobre lo que se puede y no se puede hacer con respecto a cierta cuestión matemática. Esta serie de normas monitorean el accionar de los alumnos dentro de la clase (Sadovsky: 2005:15) y forman parte de lo que en la Teoría de las Situaciones Didácticas se denomina Contrato didáctico. Durante la secuencia, observamos tres normas que fueron constantemente traídas a la mesa por la profesora y que tenían su efecto directo en las acciones de los alumnos.

- Establecimiento de rutinas. La profesora ha logrado establecer una serie de rutinas que son bien conocidas por los alumnos. Tal es el caso del “cálculo mental”, una serie de operaciones mentales que los niños deben responder en sus cuadernos. Los niños, sin indicaciones, entraban al salón, se sentaban y sacaban su libreta de matemáticas. Tras dictarles las 5 operaciones intercambian su cuaderno para revisarle al compañero. La participación durante la revisión es tan rica, que se ven varias manos levantadas queriendo pasar a explicar su respuesta.

- La constante argumentación que muestran sus alumnos. Esta es quizás la práctica sobre la que más insistía la profesora. Constantemente, tras terminar alguna actividad, la profesora le pedía a sus alumnos “argumentar” su respuesta, eso es, explicar cómo la obtuvieron y porqué optaron por ese camino en lugar de otro. Incluso, era común que, en un intento de cierre o síntesis final de la clase, les pidiera escribir lo aprendido durante la clase.

- El procedimiento diverso. Resalta la valoración que tiene dentro del aula la aplicación de un procedimiento diverso, diferente al de los demás y que los pueda llevar por distintos caminos al mismo resultado. Esto parece llevar a los alumnos a una propensión a probar nuevos caminos e ir “más allá” de la respuesta. Marifer, en una de las clases de “Tratos buenos y no tan buenos” propone un trato equivalente ya no con naranjas, sino con kilos de almendras. Edy, buscaba siempre diferentes maneras de registro para sus resultados: si señalaba un reparto en una recta numérica, buscaba además expresarlo en decimales y en porcentaje. Con respecto a Edy, en una ocasión la profesora se refirió a su participación como “ya saben que Edy siempre quiere hacer un poco más”. Esta tendencia de Edy parece estar bien alimentada por lo que cree que se espera de él dentro de la clase de matemáticas.

Una experiencia de ingeniería didáctica es conducida por un docente con su particular forma de enseñar, su visión sobre las matemáticas y su enseñanza, sus conocimientos previos específicos. La experiencia lo somete a la necesidad de apropiarse de la intención didáctica de otro y en un plazo corto. Lo lleva a comprender en el momento no solo lo que se propone en cada situación sino la manera en que responden los alumnos. Todo ello, además, ante la mirada atenta de los observadores y de las cámaras.

Desde el punto de vista del docente, no queda más que admirar la fortaleza de ánimo y el deseo de aprender que se traslucen tras aceptar participar en estas experiencias. Entender que, el mismo valor con el que encaró el reto que se le propuso, es el mismo que la llevaba a hacer intervenciones ciertamente osadas durante la implementación.

Para el estudioso, se desprende otra compleja tarea: discernir qué de lo que observa en cada experiencia particular, tiene un valor más allá de ésta. Más concretamente: ¿qué podemos concluir de las relaciones de los alumnos con las secuencias, siendo que éstas están mediadas por docentes particulares?[45] Eso se retoma en las conclusiones.

4.5 Un breve análisis cuantitativo

Finalmente, se mostrará a continuación una caracterización global del desempeño del grupo basados en los resultados obtenidos en los tres cuestionarios. Es importante recordar que éste no es el eje de ese trabajo, sin embargo, la información obtenida puede ayudar a enriquecer lo obtenido durante el análisis cualitativo de los procedimientos surgidos en clase.

En el primer cuestionario, los reactivos más difíciles fueron aquellos en los que se pedía que se determinase con cociente una fracción. En el contexto de reparto: Siete niños se reparten en partes iguales 3 barras de chocolate y no sobra. ¿Qué fracción de barra le toca a cada uno? acertaron 4 de 24 alumnos; en el contexto de división de longitud**:** Con 3 metros de listón se hacen 4 moños del mismo (tamaño. ¿Qué fracción de metro mide cada listón? Acertó 1 alumno de 24 y en la recta: señalar la fracción indicada con una flecha sobre la recta acertaron 2 alumnos de 24. Esto nos dice que obtener un cociente fraccionario es difícil para el grupo. Se confirma además que es más difícil en el caso de longitudes.

[45] Esta pregunta compleja se vincula con al noción de "reproductibilidad" de una experiencia didáctica (Artigue,)

En cambio, las preguntas con mayor número de aciertos fueron aquellas en las que se pedía comparar razones: “Aportar 2 de cada 5 vs aportar 3 de cada 8” acertaron 18 de 24 alumnos, y en “Aportar 5/12 contra Aportar 4/5” acertaron 17 de 24 alumnos. Comparar razones es algo que alrededor de 2/3 del grupo logra. Esto apoyaría el argumento de que las tareas que parten de comparación de razones, como la de la secuencia de “tratos buenos y no tan buenos” son más accesibles de entrada antes de cualquier enseñanza.

En cuanto a cuantificar la razón con una fracción, poco menos de la mitad del grupo pueden expresar con una razón la parte que es una cantidad de otra. Así se notó en las preguntas: “Si recorre 9 kilómetros, ¿cuántas vueltas enteras (de 6 km) habrá dado y qué parte de otra? Donde acertaron 11 de 24 alumnos; y en la que se desprende de ésta “Y si recorre 4 vueltas ¿qué fracción de vueltas habrá dado?” donde acertaron 10 de 24 alumnos. Esto también indica que esta tercera parte del grupo aborda la secuencia tratos con cierto conocimiento previo.

En cuanto al cuestionario final, obtener un cociente fraccionario (*a* unidades entre *b* a/b de unidad) fueron las preguntas más difíciles en el cuestionario inicial. Aquí aparecen como entre las fáciles, tanto en contexto reparto como longitud. Así lo muestran los reactivos como “Si se reparten 2 pasteles entre 5 personas, ¡qué fracción de pastelito les toca?” acertaron 28 de 29 alumnos, o bien “¿Qué fracción miden los pasos del robot A si avanza 3 unidades en 4 pasos?” donde acertaron 20 de 29 alumnos. En cambio, en el contexto recta numérica, es difícil, como se vio cuando se les pidió ubicar la fracción ¾ en una recta, y sólo logran hacerlo 4 de 29 niños

La tarea de comparar tratos expresados con fracción y con dos naturales resultó fácil excepto si se cambia el contexto a mezclas. Mientras que 25 de 29 alumnos logran comparar el trato A “6 de cada 12” con el trato B ¼ de lo que recojas”; sólo 7 de 29 alumnos aciertan cuando se les pregunta “la naranjada A se prepara con 2 vasos de agua y 3 de jugo, y la naranjada B se prepara con 3 vasos de agua y 4 de jugo)9, ¿cuál sabe más a naranja?”. El contexto de mezclas es ya anteriormente conocido como difícil.

En el cuestionario inicial más de la mitad de los niños ya podían comparar tratos y usar la fracción para expresar la relación entre dos cantidades; y al final vemos cómo logran expresar ese trato con una fracción, interpretarlo y compararlo.

En una visión de desempeño general, y fijándonos más detenidamente en el desempeño por alumno (ver tabla anexa) se puede observar cómo el grupo tiene un avance regular. Los niños que de entrada mostraron un desempeño alto (Germán, Edy, José) continuaron mostrándolo también al final, mientras que los niños con un desempeño bajo (Diana, Liliana, Daniel) continúan también mostrando un bajo desempeño. En cambio, los niños ubicados en la media del grupo (Karla, Marijose, Efraín, Kevin, Carmen) logran un avance con respecto al resto de sus compañeros de grupo. A este respecto, Marijose y Kevin muestran buenos ejemplos de este avance: Kevin en el primer cuestionario obtiene 10 de 27 aciertos, logra cuantificar razón con fracción y de comparación de tratos. En el cuestionario final logra encontrar cociente fraccionario, tanto en el contexto de reparto como en el de longitud. Logra también expresar tratos con fracción y lo traslada exitosamente al contexto de la naranjada, sólo falla en el ítem de la recta numérica. Marijose en el primer cuestionario logra acertar en un reactivo de comparación de tratos, pero no encuentra cociente fraccionario ni en el contexto de reparto o longitud. En el cuestionario final mejora notablemente: logra encontrar el cociente fraccionario en reparto, en longitud; expresa los tratos con fracción y solo falla al pasarlo al contexto de la naranjada.

Esto es consecuente con los objetivos que se plantean al diseñar una secuencia didáctica y tratar de que llegue a la mayor cantidad de niños posibles. Aquellos con un bajo desempeño (como Diana) escapaban a nuestro radar ya que, según su profesora, requería de atención psicológica por cuestiones médicas. Los de mayor rendimiento parecen operar de esa manera bajo cualquier método de enseñanza. Lograr que una buena cantidad de alumnos “alcance” a sus compañeros más “adelantados” es un buen indicio del funcionamiento del diseño.

Capítulo 5

Consideraciones finales

En el capítulo 1 se planteó que las fracciones pueden tener varios significados: medida, razón, operador y cociente. Además, pueden definirse de varias maneras, principalmente como quebrados (en general expresando medidas), o como cocientes". En la enseñanza se suele enseñar una sola definición (la fracción como quebrado) perdiéndose con esto la riqueza conceptual que aportan los otros significados y también su posible articulación con otras nociones matemáticas. En el mismo apartado, se discutió la interrelación entre la razón-operador y cociente como posibles vías de acceso hacia las expresiones fraccionarias.

En este marco, se estudiaron dos casos en los que las fracciones juegan distintos papeles; un primer caso donde expresan una medida y son un cociente; intervienen dos magnitudes distintas (pasteles y personas; pasos y unidades, sub secuencias 1 y 2). La noción de razón está implícita en las parejas de cantidades del tipo "3 pasteles para 4 niños" o "3 unidades en 4 pasos" y actúa como un cociente indicado. En el segundo caso la razón es más explícita y expresa una relación parte-todo, por lo tanto no tiene dimensión; interviene una sola magnitud (naranjas) a través de tratos del tipo: "Por cada 5 naranjas te doy 2".

Así pueden distinguirse dos significados en juego: medida-cociente-valor unitario, por un lado y razón-operador externo por otro. Empero, más allá de estas diferencias, lo común entre las tres sub secuencias está en el estadio primigenio de razones entre pares de cantidades: ahí, la comparación, la equivalencia, funciona igual: antes de ser fracciones (una medida-cociente, la otra razón) fueron relaciones entre cantidades; 3 pasteles por 4 niños; 3 unidades por cada 2 pasos; se dan 2 naranjas por cada 5 recogidas. En la sub secuencia de pasteles, prácticamente no se dio lugar a un trabajo en este nivel de parejas de cantidades porque no se consideró muy necesario y era necesario reducir la duración de la experiencia, pero en la secuencia de tratos sí se trabajó en este nivel. En la sub secuencia de robots durante las clases no se plantearon específicamente problemas de comparación (¿qué paso del robot es más grande?) aunque sí se plantearon algunas comparaciones que buscaban que los niños dieran más de una respuesta para la medida de un paso (si el robot avanza 2 en 5 pasos, entonces avanza 4 en 10 pasos).

Con esto, se pretendió indagar sobre las condiciones didácticas necesarias para que los alumnos lograran expresar un cociente indicado y una razón parte-todo con una expresión fraccionaria.

¿Qué elementos pudieron verse en esta búsqueda?

1.- La facilidad de abordar el estudio de las fracciones a través del trabajo con razones del tipo "por cada n, te doy m" (caso 2, razón-operador externo).

La última sub secuencia, Tratos buenos y no tan buenos, fue la que funcionó mejor en el grupo, lo que se manifestó tanto en las participaciones de los alumnos, como en un mayor número de aciertos en las fichas de trabajo. También, una mayor cantidad de niños logró los objetivos inicialmente planteados: mejorar las técnicas para comparar razones del tipo "por cada m, n", y también aplicarlas a una cantidad A determinando una razón interna o bien dividiendo A entre m y multiplicando por n.

Además lograron transitar de la expresión de los tratos con números enteros a su expresión fraccionaria. Quienes no lograban establecer una expresión fraccionaria, tuvieron el recurso de seguir trabajando parejas de cantidades enteras, echando mano de las propiedades de la proporcionalidad (mediante la tabla proporcional). La parte que contempló el manejo de material concreto también resultó importante para niños como Karla.

Estos resultados abogan en favor del trabajo con razones como un trayecto accesible y rico conceptualmente hacia el aprendizaje de las fracciones. Estas razones se revelan como un espacio propicio para la articulación de nociones multiplicativas que se empiezan a estudiar al final de la primaria y al inicio de la secundaria (multiplicación y división, fracción y decimal, razón y porcentaje). El vaivén entre expresión de la razón con una fracción, o con dos números naturales propiciada en estas actividades de comparación, parece dar lugar a un enriquecimiento importante del significado de las fracciones, ahora como razones. La expresión *a/b* no se reduce a dos números naturales aislados a, y b, como tantas veces ocurre, sino a la relación dinámica "por cada b, a".

A la vez, constituye una acepción muy cercana a la típica con la que se introducen la fracciones: "a/b de a significa a partido en b partes, de las que ese toman a, la cual se puede parafrasear así “de b, partes se toman a”. Pero en el contexto actual, se agrega el “DE CADA”, el cual da un giro interesante a la situación, porque la fracción deja de expresar una cantidad, para pasar a expresar una relación. Es decir, el “de cada” introduce un dinamismo a la noción de fracción y, al mismo tiempo le devuelve su carácter de razón, de relación entre cantidades. Este carácter relacional, según Freudenthal, es lo que vuelve valiosa a la razón (1983:3).

La sub secuencia, que permite una significación de las fracciones distinta a la comúnmente enseñada, pareció permitir en varios casos (Belén, Edy, Kevin, Germán, José) una articulación con la noción de porcentaje.

Finalmente, si bien para varios alumnos lo que esta sub secuencia aportó fue un complemento a su conocimiento previo de fracciones, para quienes no habían logrado ese conocimiento previo, la secuencia ofreció una segunda oportunidad para tener una primera aproximación a esta noción. En ese sentido, el trabajo aporta elementos para considerar el interés de esta secuencia como una vía de acceso complementaria a la enseñanza de las fracciones.

2.- El trabajo con la fracción como cociente (caso 1: Reparto de pasteles y Pasos del robot).

El procedimiento que se quiso propiciar (usar el caso hipotético de un robot que avanza solamente una unidad en 5 pasos, daría pasos de 1/5 de unidad) sólo se vio en Carmen y Germán. Ambos en situaciones particulares; Carmen lo usa durante una entrevista posterior, buscando desentrañar las respuestas de su propia evaluación, y Germán con cierta ayuda de uno de los observadores. Si bien ambos emplean correctamente dicho procedimiento, el hecho de que apareciera bajo estas circunstancias y en sólo dos casos, nos lleva a plantear la dificultad que este procedimiento aún representa para los niños de sexto grado. Al igual que en el trabajo de Solares (2001) es posible que aparezca, pero es muy poco frecuente.

El otro procedimiento sistemático, el que consiste en “partir” cada unidad en un número de partes igual divisor (número de niños, o número de pasos) sí tendió a ser usado por más niños, aunque éstos no dieron muestras de comprender por qué esa partición era conveniente. Al parecer, el que en algunos casos dicha partición funcionara fue suficiente para que se asumiera en clase que así debía ser siempre.

Aunque en un sentido más abstracto, en ambas secuencias la fracción exprese un cociente calculado, hay una diferencia importante entre ambas: la magnitud. La secuencia de robots es probablemente más difícil al no propiciar la división de unidad por unidad, mientras que la idea de repartir pasteles sí los lleva a considerar dividir cada pastel.

Es decir, la misma idea de “pasar por 1” es mucho más difícil en un caso que en el otro, en Robots es una hipótesis que hace intervenir el rol del valor unitario en la solución del problema (si solo hubiera avanzado una unidad…) mientras que en reparto de pasteles corresponde a acciones que se podrían realizar realmente (es más sencillo imaginar que se divide y reparte un pastel que una unidad lineal). Como se dijo arriba, la relación entre ambas es a un nivel de cierta abstracción, sin embargo en la implementación se planteó prematuramente esa vinculación por parte de la maestra, lo que por un momento tendió a borrar la diferencia entre las dos sub secuencias y dificultó la emergencia de procedimientos claros para los alumnos en la segunda.

Otra característica del trabajo con el significado como cociente fue una coexistencia entre fracciones y decimales, tanto en la sub secuencia de reparto de pasteles como en la de los pasos del robot. En la primera, los repartos cuyo cociente era un entero o no entero pero mayor que la unidad, desencadenó que los niños usaran decimales (los niños repartían 4 pasteles entre 7 personas= 5.7 de pastel) y, en cambio usaran las fracciones para cocientes menores que uno (1 pastel entre 7 personas= 1/7 de pastel). En el contexto de los pasos del robot, la presencia de una situación de división (unidades y pasos) también dio lugar a varios intentos por interrelacionar ambos registros. El caso de Maribel y sus intentos por interpretar los decimales desde la primera sub secuencia, es el mejor ejemplo.

Esta coexistencia parece verse favorecida con situaciones que propicien una división y que incluyan cocientes mayores y menores que uno. Así, los niños ponen en juego no sólo representaciones gráficas (icónicas para los pasteles y rectas para los robots) sino también una interpretación de un decimal en el contexto de pasteles y de unidades de longitud (¿qué significa .7 de pastel o bien qué significa .33 de unidad?). Los alumnos también llegaron a notar cómo en ciertos contextos el decimal no otorga un resultado exacto, como en los robots, y es preferible usar un cociente fraccionario. Este manejo de registros y significaciones no se logra de la misma manera trabajando con una situación típica de fracción-medida.

3.- Las interrelaciones entre las sub secuencias 1, 2 y 3

Como se dijo al inicio, la secuencia no estaba diseñada para actuar de forma lineal, sino más bien en contrapunto, abordando desde diferentes frentes una cuestión, la expresión de razones y cocientes con fracciones. Como tal, no se esperaban transferencias entre los elementos de las tres, aunque sí cierta vinculación entre la sub secuencias 1 y 2, ambas sobre la división de una medida en un número de partes. Desafortunadamente, las que se dieron quizás se forzaron, como cuando la profesora dio el mismo trato a las unidades de “Los pasos del robot” que a los pasteles enteros, siendo que se trata de magnitudes con características diferentes y que ahí radica la principal diferencia entre ambas sub secuencias: en un caso, reparto de pasteles, el tipo de magnitud y de contexto favorecen el procedimiento de partición unidad por unidad, y en el otro no. En Robots se favorece la división de todas las unidades que mide el recorrido y no de una por una. Se esperaba que la posible interrelación apareciera ya no ligada al contexto, sino en un sentido más abstracto: el de la división de medidas. En las verbalizaciones de algunos alumnos pudieron advertirse indicios de que este vínculo empezaba a establecerse. No se llegó más allá pero el que ocurrieran deja abierta la puerta para seguir explorando esta posibilidad.

Con respecto a la tercera secuencia, como ya se dijo, no se pretendió ningún tipo de transferencia, y en efecto esto no ocurrió.

4.- La apremiante necesidad de comunicar con suficiente claridad el sentido de las consignas a los profesores

Cada consigna tiene su razón de ser dentro de la secuencia, y obedece a las variables didácticas y a los procedimientos que se buscan propiciar, íntimamente ligados al contenido. En el marco de las experiencias de ingeniería, al docente se le enfrenta a la difícil tarea de tener claros estos porqués en muy poco tiempo, y, de no estar esto claro, puede incurrir en modificaciones importantes al momento de ponerla en práctica, como ocurrió algunas veces en nuestra experiencia. Esto constituye uno de los retos complejos y poco tematizados de los montajes experimentales. Es necesario que la comunicación de la ficha didáctica se dé de manera eficaz y muy clara, teniendo siempre en cuenta que muchas veces el docente construye a la par que los alumnos su propio conocimiento del contenido a trabajar, y que esto, lejos de ser una limitante, es una oportunidad para entender la matemática que vive en el aula.

Aportes e Indagaciones futuras

Los resultados del estudio permiten decir que, aun considerando las carencias detectadas en el diseño y las dificultades propias de la mediación de la maestra, un número considerable de los alumnos del grupo con el que se trabajó demostró poder abordar las problemáticas planteadas en torno a la fracción como cociente y como razón; y estableció vinculaciones de nociones en el campo de lo multiplicativo (razón, cociente, fracción), al mismo tiempo que siguió aprendiendo a resolver problemas de proporcionalidad.

Estos resultados, aunados a los de otros estudios que lo anteceden, permiten suponer que otros alumnos, en condiciones similares, podrían abordar con provecho las problemáticas planteadas. No obstante, la secuencia deberá ser mejorada. La experiencia realizada permite ya ver algunos cambios necesarios, sobre todo, en la manera de comunicarla al maestro: habría que hacer más explícitos los propósitos didácticos de cada parte, lo que puede esperarse de los alumnos y lo que no; sería conveniente también reintegrar dos partes que fueron omitidas por falta de tiempo y porque se consideró, erróneamente, que no eran indispensables. En la misma dirección, es necesario mejorar la atención a alumnos que se rezagan, por ejemplo, ampliando un poco el acceso al material concreto. Es necesario también dar el espacio para la afirmación de procedimientos, y para institucionalizar. Para ello se requiere de condiciones menos sujetas a la premura que acarrea el tiempo destinado para un tesista, aunque por supuesto en la escuela siempre habrá presión de tiempo.

Sin embargo, consideramos que quizás el principal aporte del presente trabajo no son las secuencias en sí mismas sino el conocimiento de una forma posible de favorecer la puesta en juego de las nociones de fracción, cociente y razón de manera integrada, al término de la primaria, el cual puede dar pie a la búsqueda de otras formas posibles. El estudio deja ver además los recorridos de los alumnos, de sus logros y dificultades. Estos elementos pueden ser valiosos insumos para adaptar o rediseñar situaciones con mayor conocimiento de causa. No obstante, poder abordar las problemáticas no es sinónimo de dominarlas y esta diferencia justifica cierta prudencia a la hora de tomar decisiones relativas al currículo. Consideramos que es hasta la secundaria cuando debe esperarse que los alumnos *sepan* que toda división de naturales da lugar a una fracción cuyo numerador y denominador son, respectivamente, el dividendo y el divisor. En la primaria pueden avanzar significativamente hacia esa conclusión.

Otro aporte del trabajo es, pensamos, la explicitación de un acercamiento “en contrapunto” y no de manera lineal (es decir, sin una secuenciación estricta entre las partes), para trabajar conceptos multifacéticos como la fracción: secuencias en las que conceptos como éste aparezcan en sus diferentes maneras de expresión, protagonizando diversas situaciones y no limitándolo a una sola significación.

Como se dijo al inicio de esta tesis, este trabajo se inserta en un marco amplio sobre el estudio de las fracciones. Nuestro trabajo, como suele ocurrir, intenta aportar algunos elementos de respuesta y al mismo tiempo abre otras preguntas o vías de indagación. Nos parece pertinente plantear aquí tres, con distinto nivel de generalidad.

a) Extensiones posibles de la secuencia de los tratos. Una ampliación posible de la secuencia tratos es considerando las relaciones parte-parte, lo cual abre la posibilidad de introducir fracciones mayores que la unidad. Por ejemplo, en un contexto como el de los intereses bancarios, cabe la posibilidad de un “trato” como “por cada 10 pesos de préstamo tendrás que pagar (en determinado plazo) 12 pesos”. La razón sigue siendo sin dimensión gracias a que la magnitud en juego es una sola, y con ello, se mantiene la posibilidad de vincular razones con fracciones, decimales y porcentajes (Mendoza y Block, 2010). Otro paso más, no necesariamente en secuencia con el anterior, puede darse considerando magnitudes de distinta naturaleza, por ejemplo “por cada 3 fichas te doy 5 estampas”. En este caso, la dificultad adicional radica en que el operador externo que vendría a expresar a la razón sí tiene dimensión, no es solamente, por ejemplo, 5/3, sino 5/3 estampas por ficha. Este contexto fue explorado por Block (2006) para el caso de “razones múltiplo” con operadores enteros[46], está pendiente analizarlo también para el caso de razones que no son múltiplo que dan lugar a operadores fraccionarios.

b) En la misma dirección que la anterior es posible preguntarnos si los contenidos que sobre razones deben incluirse más tempranamente en el currículo de matemáticas que los de la fracción e incluso, si la significación de las fracciones como razones podría ser una vía más accesible que la del “quebrado expresando medidas” como la

[46] En este trabajó se mostró que un trabajo con razones expresadas con dos números naturales, y poniendo en juego magnitudes distintas (fichas, estampas) puede integrarse bien con el estudio de la multiplicación y la división desde tercer grado de primaria.

introducción de estos números. Algunos estudios ya han teorizado al respecto (Block, 2009 y 2006). Sigue haciendo falta un estudio longitudinal más amplio que articule las distintas secuencias puntuales que han sido estudiadas. Cabe señalar que el trabajo de Brousseau (2014) en el que las razones son la vía de introducción de las fracciones y que ya hemos mencionado, sigue siendo un faro en la búsqueda de alternativas en esta dirección. Sin embargo, la ingeniería que propone ese trabajo es quizá demasiado compleja de comprender y de gestionar como para considerarla ya una solución definitiva, por esta razón se han presentado propuestas como el presente trabajo, y los que se citan.

Bibliografía

Artigue, Michel. (1995) "Ingeniería Didáctica". En Ingeniería Didáctica en Educación Matemática, 33-60. Artigue, M., R. Douady, L. Moreno, P. Gómez. Bogotá: Grupo Editorial Iberoamérica.

Balbuena, Hugo, Claudia Espinosa, H. Espinosa, Dilma Fregona, Irma Saiz (1984). "Descubriendo las fracciones". Laboratorio de Psicomatemática. No. 5. México, DIE-CINVESTAV-IPN. Adjiage y Pluvinage (2007) An experiment in teaching ratio and proportion. *Educational studies in mathematics*, 65: 149-175

Bessot, Anne (2003) Une introduction á la théorie des situations didactiques, *Laboratoire Leibniz,* 91: 2-35

Block David, Tatiana Mendoza y Margarita Ramírez (2010) *¿Al doble le toca el doble? La enseñanza de la proporcionalidad en la educación básica,* México, SM de Ediciones

Block David y Margarita Ramírez (2009) "La razón y la fracción; un vínculo difícil en las matemáticas escolares" *Educación Matemática,* Vol. 21 (1): 63-90

Block David y Diana Solares (2001) "Las divisiones y las fracciones en la escuela primaria: análisis didáctico de un vínculo" *Educación Matemática,* vol. 13(2): 5-30

Block, David (2006); "Se cambian fichas por estampas. Un estudio didáctico sobre la noción de razón "múltiplo" y su vinculación con la multiplicación de números naturales". *Educación Matemática* 18 (2): 5-36

Block, David (1987) "Estudio didáctico sobre la enseñanza y el aprendizaje de la noción de fracción en la escuela primaria", México, Departamento de Investigación Educativa del Centro de Investigación y estudios avanzados del Instituto Politécnico Nacional.

Block, David (2000) "¿Suma de razones?" Manuscrito no publicado.

Block, David (2001) "La noción de razón en las matemáticas de la escuela primaria", México, Departamento de Investigación Educativa del Centro de Investigación y estudios avanzados del Instituto Politécnico Nacional.

Block, David y Patricia Martínez (1999). "Frogs' jumps: An example of using computers as a means of empirical validation" En: *Eurologo 99. Proceedings of the Seventh European Logo Conference.* Bulgaria, Sofía: Virtech Ltd., pp. 150-159 (22-25 agosto). ISBN: 954-9582-03-5

Brousseau Guy, Nadine Brousseau y Virginia Warfield (2004) "Rationals and decimals as required in the school curriculum. Part 1: Rationals as measurement" *Journal of mathematical behavior,* Vol. 23:1-20

Brousseau, Guy, Nadine Brousseau y Virginia Warfield (2014) "Teaching fractions through situations: a fundamental experiment", USA, Springer

Dávila, Martha. (2002) "Las situaciones de reparto para la enseñanza de las fracciones. Aportes para la elaboración de un estado del conocimiento" México, Departamento de Investigación Educativa del Centro de Investigación y estudios avanzados del Instituto Politécnico Nacional.

Freudenthal, Hans (1983) “Ratio and proportional” Didactical Phenomenology of Mathematical Structures. Dordrecht: Reidel. 1, en *Fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas*,CINVESTAV-IPN, 2001.

Freudenthal, Hans. (1983) “Fracciones” en *Fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas,* CINVESTAV-IPN, 7-54

Hart, Kathleen (1988). “Ratio and proportion”. In *Number Concepts and operations in the middle grades,* Vol 2, 198-219. Lawrence Erlbaum Associates National Council of teachers of mathematics.

Kieren, Thomas (1976) “On the mathematical cognitive and instructional foundation of rational numbers” En Number and measurement papers from a research workshop. R. Lesh, ERIC.

Mancera, Eduardo (1992) “Significados y significantes relativos a las fracciones” *Educación Matemática,* Vol. 4(2):30-54

Sadovsky, Patricia (2005): "La teoría de situaciones didácticas: un marco para pensar y actuar la ensañanza de la matemática". Reflexiones teóricas para la educación matemática, Buenos Aires, Libros Del Zorzal

Secretaría de Educación Pública SEP (2011) *Programas de Estudio 2011. Guía para el Maestro*, México, SEP

Secretaría de Educación Pública, SEP (2011); *Plan de estudios de Educación Básica,* México, SEP.

Secretaría de Educación Pública, SEP (2011); *Programas de Estudio 2011, Guía para el maestro, Educación Primaria Básica, Cuarto Grado,* México, SEP.

Secretaría de Educación Pública, SEP (2011); *Programas de Estudio 2011, Guía para el maestro, Educación Primaria Básica, Quinto Grado,* México, SEP.

Secretaría de Educación Pública, SEP (2011); *Programas de Estudio 2011, Guía para el maestro, Educación Primaria Básica, Sexto Grado,* México, SEP.

Solares, Diana (1999) La fracción como resultado de una división. Un estudio didáctico. México, Departamento de Investigación Educativa del Centro de Investigación y estudios avanzados del Instituto Politécnico Nacional.

Streefland, Leen (1993) Las fracciones, un enfoque realista, *In rational numbers: an integration of research”,* Elrbaum.

Schwartz, J. L. (1988). “Intensive quantity and referent transforming compositions arithemtic operatations”: In J. Hiebert, y M. Behr (Eds) Number Concepts and operations in tha middle grades. Vol 2. Lawrence Erlbaum Associates National Council of teachers of mathematics.

Vergnaud, Gerard. (1981) Algunas Orientaciones Teóricas y Metodológicas de las Investigaciones Francesas en Didáctica de las Matemáticas. Traducción de Verónica Hoyos.

Waldegg, Guillermina. Constructivismo y Educación Matemática.En “La enseñanza de las Matemáticas en la escuela primaria” (27-39) SEP, 1995.