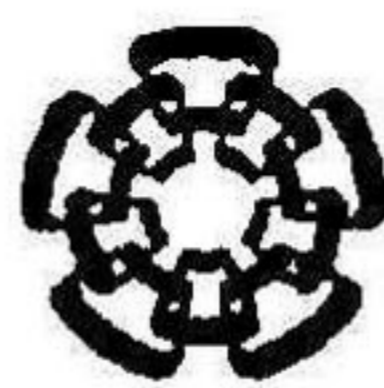


XX(178682.1)



CINVESTAV
BIBLIOTECA CENTRAL



SSIT000009511

T165 98

987

2009

**CINVESTAV
IPN
ADQUISICION
DE LIBROS**



Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del I.P.N.
Unidad Guadalajara

**Control Óptimo de Un Reactor de
Fermentación en Sustrato Sólido**

Tesis que presenta:
Kelly Joel Gurubel Tun

para obtener el grado de:
Maestro en Ciencias

en la especialidad de:
Ingeniería Eléctrica

Director de Tesis
Dr. Arturo del Sagrado Corazón Sánchez Carmona



CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y
DE ESTUDIOS AVANZADOS DEL
INSTITUTO POLITÉCNICO
NACIONAL
COORDINACIÓN GENERAL DE
SERVICIOS BIBLIOGRÁFICOS

Guadalajara, Jalisco, Octubre de 2009.

CLASIF.: TK165.68.987 2009
ADQUI.: SSI-589
FECHA: 21-Mayo-2010
PROCED.: JUN-2010
\$

164567-1001

Control Óptimo de Un Reactor de Fermentación en Sustrato Sólido

**Tesis de Maestría en Ciencias
Ingeniería Eléctrica**

Por:

Kelly Joel Gurubel Tun
Ingeniero Químico

Instituto Tecnológico de Mérida 2001-2005

Becario de CONACYT, expediente no. 13508

Director de Tesis

Dr. Arturo del Sagrado Corazón Sánchez Carmona

Resumen

En años recientes la investigación de procesos de fermentación en sustrato sólido (FSS) ha conducido a un amplio rango de aplicaciones en reactores a escala de laboratorio. Los procesos de FSS tienen gran aplicación en los sectores económicos de agro-industria, control del medio ambiente e industria de la fermentación. FSS también se ha utilizado para la producción de compuestos del alto valor agregado tales como enzimas, ácidos orgánicos, biopesticidas, combustible biológico y saborizantes.

La FSS es un proceso de crecimiento y maduración de microorganismos (i.e. biomasa) presentes en un sustrato húmico, cuyo objetivo es el aumento selectivo de ciertas familias de microorganismos. En este proceso, la entrada de aire fresco, las condiciones de humedad y temperatura afectan el metabolismo microbiano.

El proceso de FSS industrial (fase 2) para el cultivo del hongo comestible *Agaricus bisporus* tiene un período de duración de 150 horas y se divide en 3 etapas isotérmicas: pre-acondicionamiento (40°C, 40 h), pasteurización (55°C, 10 h) y acondicionamiento (40°C, 40 h). Estas condiciones fueron determinadas experimentalmente y validadas en la práctica industrial para obtener una producción adecuada de biomasa. En este proceso la masa es empacada en un reactor de convección forzada, por lotes y sin volteo. El aire es suministrado de manera homogénea en el volumen de reacción a una velocidad constante controlando su temperatura y humedad; la altura de la composta decrece conforme avanza la reacción del proceso y como parte de la corriente de gases de salida.

En este trabajo se propone una estrategia de control para optimizar la fase 2 del proceso de FSS industrial. Se exponen dos metodologías de control óptimo aplicadas a un modelo no lineal que representa el proceso de FSS a escala de laboratorio, para el cálculo de una trayectoria óptima del flujo de aire de entrada que maximice la producción de biomasa (hongos termofílicos).

Los métodos del Gradiente Descendente y Proyección del Gradiente son algoritmos que optimizan una función de desempeño que está relacionada con el comportamiento futuro del sistema que depende de las trayectorias de control calculadas en el intervalo de tiempo definido. Las estrategias de control óptimo propuestas para resolver este problema calculan una trayectoria óptima del flujo del aire de entrada en el reactor que maximiza la producción de biomasa en menor tiempo. El método del Gradiente Descendente calcula una trayectoria de flujo variable con el que se obtiene una producción un 25.66 % mayor de biomasa y en menor tiempo que el proceso con un flujo constante de aire. El método Proyección del Gradiente calcula una trayectoria del flujo de aire similar al obtenido con el Gradiente Descendente y una producción de un 25.06 % mayor de biomasa y en menor tiempo. Los algoritmos también son sometidos a un análisis de sensibilidad variando las condiciones del flujo de entrada, condiciones iniciales y tiempo del proceso.

Los resultados obtenidos en simulación demostraron un buen comportamiento de los algoritmos. El objetivo de optimizar la fase 2 del proceso de FSS fue alcanzado y el control óptimo aplicado al modelo demostró ser un buen método para el cálculo de trayectorias óptimas en lazo abierto.

Abstract

In recent years, research on solid substrate fermentation (SSF) has led to a wide range of applications on lab scale. SSF processes have great applications in economical sectors of agroindustry, environmental control and fermentation industry. SSF has also been used for the production of high added value compounds such as enzymes, organic acids, biopesticides, biofuel and flavours.

The SSF is a process of growth and maturation of microorganisms (i.e. biomass) present in a humic substrate, whose objective is the selective increase of certain families of microorganisms. In this process, the intake air fresh, the humidity and temperature conditions affect the microbial metabolism.

The industrial SSF process (phase 2) for the culture of *Agaricus bisporus* mushroom food has a period of duration of 150 hours and it is divided in 3 isothermal stages: preconditioning (40°C, 40 h), pasteurization (55°C, 10 h) and conditioning (40°C, 40 h). These conditions were determined experimentally and validated in industry practice to obtain a suitable production of biomass. In this process, compost mass is packed in a batch reactor with forced aeration and remains static without turning. In the volume of reaction air is supplied at a constant rate of homogenous way with controlled humidity and temperature; the height of compost decreases as advances the reaction of the process and as part of the exhaust air.

In this work a control strategy is proposed to optimize phase 2 of the industrial SSF process. Two applied methodologies of optimal control to a model nonlinear that represents the scale laboratory process of SSF are exposed, for the calculation of an optimal trajectory of the flow air intake that maximizes the biomass production (thermophilic fungi).

Steepest Descent and Gradient Projection methods are algorithms that optimize a performance function that is related to the future behavior of the system that depends on the calculated trajectories of control in the defined time interval. The proposed optimal control strategies to solve this problem calculate an optimal trajectory of the flow air intake in the reactor that maximizes the biomass production in less time.

The Steepest Descent method calculates a variable flow trajectory with which is obtained a 25.66% major biomass production in less time than the process with a constant air flow. The Gradient Projection method calculates an air flow trajectory similar to the obtained with the Steepest Descent and a 25.06% major biomass production in less time. The algorithms also are put under a sensitivity analysis varying the conditions of the flow air intake, system initial conditions and time of the process.

The results obtained in simulation demonstrated good behavior of the algorithms. The objective to optimize phase 2 of the SSF process was reached and the applied optimal control to the model demonstrated to be a good method for the calculation of optimal trajectories in open loop.

Agradecimientos

Dedico esta tesis:

A mi familia por su apoyo, paciencia, comprensión y porque siempre han estado ahí para motivarme a alcanzar mis metas.

A mis abuelos que siempre me han dado su cariño, consejos y han sido un ejemplo de disciplina y perseverancia.

Y quiero agradecer:

A mi asesor el Doctor Arturo Sánchez por orientarme en el desarrollo de este trabajo y por sus enseñanzas.

A Carlos, Luis, Xochitli, Gabriela, Cristina, Moisés, Michelle y Daniel que conformaron el equipo de trabajo del proyecto del proceso de FSS y por el apoyo que me brindaron.

A mis profesores por sus enseñanzas y por su paciencia.

A mis amigos de la especialidad en control automático y en especial a la generación 2007-2009 por todos los buenos y malos momentos que pasamos, por su apoyo, sus enseñanzas y por su amistad.

A mis tíos, primos y amigos de Yucatán porque siempre he tenido su apoyo y confianza en los proyectos que he emprendido.

Y al CONACyT por brindarme los recursos para estudiar la maestría y desarrollar esta tesis.

Índice general

1. Introducción	5
1.1. Revisión Bibliográfica	5
1.1.1. Fermentación en sustrato sólido	5
1.1.2. Microorganismos genéricos: actinomicetos, hongos termofílicos e inhibidores	8
1.1.3. Factores ambientales que afectan el crecimiento microbiano y la síntesis de biomasa en la FSS	10
1.1.4. Aplicaciones de FSS	12
1.1.5. Modelos dinámicos de FSS	13
1.1.6. Métodos de control en reactores FSS comerciales	17
1.2. Antecedentes	20
1.2.1. Proceso FSS industrial: producción de biomasa para el cultivo del hongo comestible <i>Agaricus bisporus</i>	20
1.2.2. Materiales y métodos	21
1.2.3. Resultados de industria	23
1.3. Motivación	23
1.4. Objetivos	24
1.5. Organización de la tesis	24
2. Modelo	25
2.1. Introducción	25
2.2. Reactor experimental	25
2.2.1. Suposiciones realizadas	26

2.3. Estequiometría de la reacción en la composta	27
2.4. Dinámica de reacción de los microorganismos	28
2.5. Descripción del Modelo	30
2.6. Parámetros del modelo	33
2.7. Verificación del modelo	34
3. Métodos de Control Óptimo	37
3.1. Introducción	37
3.2. Gradiente Descendente	37
3.2.1. Algoritmo del gradiente descendente	38
3.3. Proyección del Gradiente	41
3.3.1. Requerimientos de cálculo	42
3.3.2. Condiciones necesarias y suficientes para un mínimo global restringido	45
3.3.3. Procedimiento iterativo de la proyección del gradiente	47
3.3.4. Características adicionales del algoritmo proyección del gradiente . .	49
3.3.5. Cálculo de trayectorias óptimas con el algoritmo proyección del gradiente	49
3.3.6. Procedimiento para resolver problemas de control óptimo usando la proyección del gradiente	53
4. Control Óptimo del Reactor FSS	55
4.1. Introducción	55
4.2. Aplicación del algoritmo del Gradiente Descendente	55
4.2.1. Prueba de concavidad de la función de desempeño	56
4.2.2. Cálculo de ecuaciones del gradiente descendente	56
4.3. Resultados	60
4.3.1. Trayectorias de control óptimo y respuesta del sistema	60
4.4. Aplicación del algoritmo Proyección del Gradiente	63
4.4.1. Cálculo de ecuaciones de proyección del gradiente	63
4.4.2. Prueba de conjunto convexo	72
4.4.3. Cálculo del gradiente	73

4.5. Resultados	75
4.5.1. Trayectorias de control óptimo y respuesta del sistema	75
5. Análisis de Sensibilidad	79
5.1. Introducción	79
5.2. Análisis de sensibilidad del Gradiente Descendente	79
5.2.1. Variación de parámetros de la función de desempeño	79
5.2.2. Variación de las condiciones de la variable de entrada	84
5.2.3. Variación del período de tiempo y condiciones iniciales	88
5.3. Análisis de sensibilidad de Proyección del Gradiente	91
5.3.1. Variación de parámetros de la función de desempeño	91
5.3.2. Variación de las condiciones de la variable de entrada	96
5.3.3. Variación del período de tiempo y condiciones iniciales	100
6. Conclusiones y trabajo futuro	105
A. Nomenclatura	111
B. Publicaciones	115

Capítulo 1

Introducción

1.1. Revisión Bibliográfica

1.1.1. Fermentación en sustrato sólido

La transformación aeróbica microbiana de materiales sólidos o fermentación en sustrato sólido (FSS) es un tipo de cultivo en donde se crea un microorganismo sobre la superficie o en el interior de una partícula porosa sólida y esta partícula puede ser asimilable o inerte. El agua está ligada al interior de la matriz porosa y no se observan fenómenos macroscópicos de drenaje entre las partículas; sin embargo, el cultivo sólido es un sistema complejo en virtud de que la interrelación ambiente-sustrato –microorganismo tiene diversas limitaciones físicas y como consecuencia se presenta gradientes de temperatura, pH, humedad, etc., que afectan de forma crítica al proceso fermentativo. Los sustratos sólidos quizás sean vistos como una mezcla de gas-líquido-sólido en la cual una fase acuosa está inmediatamente asociada con superficies sólidas en varios estados de absorción y está en contacto con una fase de gas continua con el gas externo del medio ambiente; la fase sólida provee una fuente rica y compleja de nutrientes, los cuales quizás sean completos o incompletos con respecto a los requerimientos nutricionales del organismo que será cultivado y también provee una mezcla de sustratos de alto peso molecular como componentes de carbono, los cuales quizá impliquen mecanismos de inducción, inhibición o represión en el metabolismo microbiano [25].

Sustrato

Todos los sustratos sólidos tienen una característica común: su estructura macromolecular básica. Los sustratos para FSS son generalmente productos compuestos y heterogéneos de la agricultura o de subproductos de la agroindustria. Esta estructura macromolecular básica (e.g. celulosa, almidón, pectina, lignocelulosa, fibras, etc.) confiere las propiedades de un sólido al sustrato. La macromolécula estructural puede proporcionar simplemente una matriz

inerte (bagazo de la caña de azúcar, fibras inertes, resinas) dentro de la cual las fuentes de carbón y de energía (azúcares, lípidos, ácidos orgánicos) se fijan por adsorción. Pero generalmente, la matriz macromolecular representa el sustrato y proporciona también las fuentes de carbón y de energía [33].

La preparación y el tratamiento previo representan los pasos necesarios para convertir el sustrato crudo en una forma conveniente para su uso, que incluyen [29]:

- Reducción de tamaño moliendo, raspando o cortando.
- Hidrólisis física, química o enzimática de los polímeros para aumentar la disponibilidad del sustrato para el hongo.
- Suplementación con nutrientes (fósforo, nitrógeno, sales), ajuste del pH y del contenido de agua, a través de una solución mineral.
- Tratamiento térmico o de vapor para la pre-degradación de la estructura macromolecular y la eliminación de contaminantes importantes.

El éxito del proceso FSS se relaciona directamente con las características físicas del sustrato, que favorecen la difusión de los gases y de los nutrientes y la fijación de los microorganismos. Desde un punto de vista práctico, las características físicas siguientes de la matriz sólida se deben considerar debido a su influencia en el desarrollo de FSS [23]: tamaño y forma de partícula, porosidad y consistencia del material.

Proceso

El crecimiento de los microorganismos presentes en el sustrato es inicialmente desencadenado por la disponibilidad de sacáridos solubles y el ataque enzimático a la lignina produce la degradación parcial del sólido [25].

Durante la fermentación en sustrato sólido se genera una gran cantidad de calor metabólico que eleva considerablemente la temperatura del sustrato e inhibe el crecimiento de la biomasa. Naturalmente, será necesario eliminar el exceso de calor con el fin de mantener la temperatura en los valores deseados tanto para este crecimiento como para la formación de determinados metabolitos, según sea el objetivo.

Existen varios métodos de eliminación del calor, pero el más utilizado es la aireación forzada [1]. La aireación del sustrato es estrictamente necesaria para el abastecimiento de oxígeno y la extracción de CO₂ y otros gases. Este mecanismo puede presentarse en diferentes variantes:

- Mediante flujo constante de aire y controlando la humedad de este. Esta técnica es la utilizada por H. Paján et al., [26].

- Mediante flujo de aire variable, preferentemente seco, para aumentar su capacidad evaporadora.
- Mediante la manipulación, tanto del flujo como de la humedad del aire.

Es conocido que el enfriamiento por evaporación es mucho más efectivo que el enfriamiento por convección y por conducción y que su capacidad alcanza el 80 % de todo el calor que se extrae. Por eso, sin duda el uso de la aireación forzada constituye el mecanismo más adecuado para extraer el calor metabólico, en particular a escalas que rebasan las de laboratorio [1].

Producto

La FSS produce un producto (biomasa) más estable, con menos requerimientos energéticos y volúmenes menores de efluentes contaminantes. Algunas características que se controlan en la FSS son la humedad y aireación, estas determinarán el crecimiento y desarrollo del microorganismo, ello conlleva al intercambio de gases como oxígeno y CO₂ a través de los poros del sustrato y la salida de metabolitos secundarios, como ácidos grasos, enzimas entre otros. El sustrato de la fermentación sólida debe cumplir con varias condiciones, mismas que cubren la mayoría de los residuos agrícolas usados en la FSS. La capacidad de los microorganismos para crecer en un sustrato sólido es una función de sus requerimientos de actividad de agua, de su capacidad de la adherencia, de la penetración en el sustrato y su capacidad de asimilar las mezclas de diversos polisacáridos debido a la naturaleza, a menudo compleja, de los sustratos usados.

Los hongos filamentosos son los microorganismos mejor adaptados para FSS debido a sus características fisiológicas, enzimológicas y bioquímicas. Las hifas dan a los hongos filamentosos la energía de penetrar en los sustratos sólidos en búsqueda de nutrientes. Esto también les da una ventaja importante sobre los microorganismos unicelulares para la colonización del sustrato y la utilización de los alimentos disponibles. Además, su capacidad para crecer en la actividad baja del agua y altas condiciones de la presión osmótica (alta concentración de nutriente) los hace hongos eficientes y competitivos en la microflora natural para bioconversión de los sustratos sólidos. La determinación directa del producto en FSS es muy difícil debido al problema de separación de la biomasa microbiana del sustrato. Esto es especialmente cierto para los procesos de FSS que implican hongos, porque las hifas penetran dentro y atan firmemente al sustrato. Por otra parte, para el cálculo de las tasas de crecimiento y de producciones, es la cantidad absoluta de biomasa lo que importa. Algunos métodos que se han utilizado para la estimación de biomasa en FSS son: cultivo en filtro de membrana, mediciones metabólicas y medición de componentes específicos de la biomasa [33].

1.1.2. Microorganismos genéricos: actinomicetos, hongos termofílicos e inhibidores

La materia orgánica o los ingredientes crudos tienen muchos organismos naturales. Las bacterias, los hongos y los actinomicetos son solamente algunos de los muchos tipos de microbios que existen en la composta. En la fase 2 del proceso de FSS se consideran tres tipos importantes de microorganismos genéricos: actinomicetos, hongos termofílicos e inhibidores [12]. Sus respectivas tasas de crecimiento y muerte están en función de la concentración de alimento disponible, oxígeno y temperatura. La mayoría de los microbios benéficos que crecen durante la fase 2 son los hongos termofílicos.

En general los actinomicetos se encargan de la degradación enzimática de la celulosa y son vistos como termofílicos si demuestran un apreciable crecimiento a una temperatura de 50°C y superior. La mayoría puede crecer a temperaturas bajas de 37°C y en algunos casos hasta 30°C , y relativamente pocos tienen un rango restringido de crecimiento a temperaturas más altas. Las esporas de la mayoría de las especies de actinomicetos mueren después de unos pocos minutos de exposición a temperaturas entre 65 y 70°C . El tipo de cepa usada, el medio de soporte, el tiempo de la incubación, la temperatura y la humedad influyen en el crecimiento del microorganismo. Los actinomicetos termófilos tienen una distribución geográfica amplia y son probablemente más numerosos en suelos. En la mayoría de los ambientes estos organismos sobrevivirán como esporas, las cuales a veces parecerán ser tan resistentes a las condiciones adversas como bacterias endosporas. Cuando se tienen condiciones ambientales adecuadas de la temperatura, humedad y nutrientes, las esporas germinan y rápidamente colonizan y se esparcen en el sustrato. Debido a su naturaleza micelial y producción prolífica de espora, los actinomicetos termófilos podrían tener una ventaja ecológica sobre otras bacterias en un ambiente conveniente aumentando el número de esporas encontradas en ciertos henos embalados y composta. Su capacidad para producir antibióticos y enzimas bacteriolíticas estables a altas temperaturas pueden darles una ventaja agregada [10]. Las colonias de millones de células o de fragmentos individuales de actinomicetos aparecen como especies blancas que tienen bordes bien definidos, no se separan hacia fuera y crecen generalmente solamente donde son originados con el alimento, agua y temperatura convenientes [6]. Las pruebas para promover el crecimiento del *A. Bisporus* con actinomicetos y otras bacterias han sido negativas [41].

Los hongos termofílicos desempeñan un papel importante en el proceso FSS. Estos organismos crecen óptimamente a temperaturas mayores a 40°C . Las temperaturas óptimas de muchas especies son alrededor 45 a 50°C , y la temperatura máxima del crecimiento es menor que 60°C para todas las especies, aunque las esporas pueden sobrevivir a temperaturas más altas. Los hongos termofílicos crecen masivamente durante la última fase del proceso FSS, de las esporas que han sobrevivido a la etapa de pasteurización. Se cree que ellos contribuyen significativamente a la calidad de la composta. Los efectos de estos hongos sobre el crecimiento del micelio del hongo comestible se han descrito en tres distintos niveles. Primero, estos hongos disminuyen la concentración de amoníaco en la composta, que de otra manera podría perjudicar el crecimiento del micelio del hongo comestible. Segundo, inmovilizan

los nutrientes en una forma que aparentemente está disponible para el micelio del hongo comestible. Y tercero, pueden tener un efecto promotor del crecimiento sobre el micelio del hongo comestible, como se ha demostrado para el *Scytalidium thermophilum* y para varios otros hongos termofílicos [45]. Los microorganismos termofílicos en composta han sido estudiados extensivamente y seguía siendo difícil indicar las especies dominantes entre actinomicetos, bacterias y hongos termofílicos. Straatsma et al., [39] estimaron que la relación de biomasa de hongos termofílicos a procariotas en la composta después de la fase 2 fue de 1.8:1. Wiegant [45], encontró relaciones de 0.9:1 y 2.3:1 para compostas convencional y experimental respectivamente. Claramente los hongos termofílicos fueron abundantes. El curso sucesivo de hongos termofílicos puede ser parcialmente explicado por los datos ecofisiológicos disponibles. Los pioneros típicos *Rhizomucor* spp. y el *Aspergillus fumigatus* tienen pH óptimo abajo de 7, y la temperatura óptima del *A. fumigatus* está en 40°C. Cuando inicia la generación de calor y la amonificación y el pH llega a 9 los hongos mueren. *Talaromyces thermophilus* y *Thermomyces lanuginosus* tienen pH relativamente alto y temperatura óptima. Sus altos puntos de muerte térmica dan una ventaja selectiva en el período de máxima producción de calor. Ellos no degradan la celulosa y tienen una tasa de crecimiento moderada. *Scytalidium Thermophilum* y *Chaetomium thermophilum* crecen rápido y degradan celulosa fuertemente [45]. La densidad de *S. thermophilum* en composta fue encontrada positivamente correlacionada con la producción de hongos comestibles y estimula la velocidad de crecimiento de la extensión del micelio de los hongos comestibles [39]. Los hongos termofílicos tienen una gran capacidad para degradar polisacáridos de la biomasa [21]. Las características de sus enzimas demuestran diferencias no sólo entre especies sino también entre cepas de las mismas especies. Sus enzimas extracelulares desarrollan temperaturas óptimas para la actividad que son cercanas o arriba de la temperatura óptima para el crecimiento del organismo. Algunas enzimas extracelulares del hongo termofílico se están produciendo comercialmente, y algunos otros tienen perspectivas comerciales. Genes de los hongos termofílicos que codifican lipasa, proteasa, xilanasas y la celulasa han sido clonados y sobrepuestos en hongos heterólogos, y han sido obtenidas proteínas cristalinas puras para elucidar los mecanismos de su termoestabilidad y catálisis intrínsecas [21]. Los hongos termofílicos son ramificados, tienen micelio y pueden crecer en dirección del alimento o hacia condiciones de crecimiento más favorables [6]. Los hongos termofílicos tienen un área más grande de conversión debido a la manera en que pueden crecer a través del sustrato denso de la composta. Mientras que el sustrato más caliente de la composta es disminuído a través del rango de acondicionamiento de la temperatura, los hongos termofílicos crecen en las áreas densas y acaban la conversión del amoníaco.

Los microorganismos actinomicetos y termofílicos son considerados microbios benéficos porque proporcionan el alimento para el hongo comestible [45]. Otros son microbios desfavorables que compiten por el alimento o pueden causar enfermedad. Los objetivos de la fase 2 son procurar a los microbios benéficos y eliminar a los inhibidores (bacterias, nemátodos y hongos dañinos) [6]. La composta es pasteurizada (a temperaturas de 55 a 60°C) para reducir o eliminar a los microorganismos inhibidores.

1.1.3. Factores ambientales que afectan el crecimiento microbiano y la síntesis de biomasa en la FSS

Los factores ambientales tales como actividad del agua, contenido de agua, temperatura, pH, niveles del oxígeno y concentraciones de nutrientes y productos afectan perceptiblemente al crecimiento microbiano y a la formación de biomasa [29].

Actividad del agua y contenido de agua del sustrato

El contenido de agua es un factor crítico en procesos de FSS porque esta variable tiene influencia sobre el crecimiento, biosíntesis y secreción de diversos metabolitos. Un contenido de agua más baja causa la reducción en la solubilidad de los nutrientes del sustrato, un grado bajo de esponjado y una alta tensión del agua. Por otra parte, los niveles de un contenido de agua más alta pueden causar una reducción en la producción de enzimas debido al obstáculo estérico del crecimiento del productor de tensión por la reducción en la porosidad (espacios interpartículas) de la matriz sólida, interfiriendo así en la transferencia de oxígeno. Como el valor óptimo del contenido de agua depende del microorganismo y del sólido de la matriz usada, para la producción económica, el microorganismo debe crecer en niveles óptimos de la humedad para maximizar el crecimiento o la producción del metabolito (enzimas, ácidos orgánicos, etc) dependiendo de la aplicación.

Generalmente, el contenido en agua del sustrato oscila entre 30 y el 75%. Valores más bajos pueden inducir la esporulación del microorganismo, mientras que niveles más altos pueden reducir la porosidad del sistema, que puede producir limitación en la transferencia del oxígeno, y aumentar el riesgo de contaminación bacteriana. Durante la fermentación, el nivel del agua del sustrato puede cambiar debido a la evaporación y a la actividad microbiana. El resultado de todos estos procesos es generalmente la pérdida de humedad, siendo necesario agregar agua usando humidificadores o aplicando un flujo de aire saturado de agua. Los requisitos de agua del microorganismo se deben definir mejor en términos de actividad del agua en lugar del contenido de agua del sustrato sólido [33]. La actividad del agua se define como la relación entre la presión de vapor del agua en un sistema y la presión de vapor del agua pura. Desde un punto de vista microbiológico la actividad del agua indica el agua disponible o accesible para el crecimiento del microorganismo. La actividad del agua afecta el desarrollo de la biomasa, a las reacciones metabólicas, y a los procesos de la transferencia de masa. Aunque la actividad del agua sea una función de la concentración de los solutos, en esos sistemas en los que las soluciones se fijan por adsorción en una matriz, los valores de la actividad del agua también dependen de la estructura física y de la naturaleza química de la matriz. El valor adecuado de la actividad del agua depende del producto y requisitos del microorganismo [5]. Generalmente, la actividad del agua para la producción del metabolito es más alto que para el crecimiento de microorganismos.

Procesos de transferencia de masa: aeración y difusión de nutrientes

En FSS, los procesos de transferencia de masa relacionados con la difusión de los gases y de los nutrientes están fuertemente influenciados por la estructura física de la matriz y por la fase líquida del sistema [31]. Raghavarao et al., [31] describieron dos clases de fenómenos de transferencia de masa; uno en la microescala y otro en la macroescala fuera de las células. El primero se ocupa de la transferencia total dentro y fuera de las células del microorganismo. El segundo incluye más factores: el flujo de aire volumétrico dentro y fuera del reactor, la convección natural, la difusión y la conducción a través del sustrato, los materiales del reactor, el daño que causa el microorganismo y la integridad de las partículas del sustrato.

Difusión de los gases: La aireación tiene esencialmente dos funciones: (1) suministro de oxígeno para el metabolismo aerobio y (2) retiro del CO_2 , el calor, el vapor de agua y los componentes volátiles producidos durante el metabolismo. El intercambio de O_2 y CO_2 entre el sólido y la fase de gas ocurre en el nivel inter-particular e intra-particular. Esto depende de los factores que aumenten la superficie de contacto entre las fases: fracción vacía de la matriz, tamaño del poro y del diámetro de la partícula, grado de mezcla y de profundidad de la matriz, aireación adicional generada por paso forzado del aire estéril, agitación y nivel de la humedad del sustrato. La difusión de los gases aumenta generalmente con el tamaño del poro y disminuye con la reducción del diámetro debido a la compactación del sustrato.

Difusión de los nutrientes: Ocurre en un nivel intraparticular e incluye la difusión de nutrientes hacia las células y la hidrólisis de sustratos sólidos por las enzimas microbianas. Este último punto es un aspecto importante en FSS porque la mayor parte del sustrato es agua insoluble [31]. En sustratos con un pequeño tamaño del poro, la resistencia a la transferencia de masa intraparticular incrementa con el diámetro de la partícula y la degradación del sustrato ocurre principalmente en la superficie externa. Los procesos de difusión de nutrientes son especialmente importantes en FSS bacteriano y de levadura. No son tan críticos para el cultivo de hongos porque el micelio puede penetrar mejor la matriz sólida.

Temperatura

El aumento de la temperatura en FSS es una consecuencia de la actividad metabólica cuando el calor retirado no es suficiente. Esto afecta directamente a la germinación de esporas, crecimiento y formación del producto. El nivel de temperatura alcanzado es una función del tipo de microorganismo, de la porosidad, del diámetro de la partícula y de la profundidad del sustrato. La transferencia de calor total depende de los índices de transferencia de calor intra e interpartículas y de la velocidad a la que el calor es transferido de la superficie de la partícula a la fase gas [33]. El control de la temperatura es más difícil en FSS que en procesos de fermentación en sustrato líquido (FSL) [29]. Así los métodos de control utilizados en FSL no son convenientes para FSS. En un contexto industrial, la supervisión y control de esta variable son críticas para aumentar la producción [5]. La aireación es convencionalmente el principal método usado para controlar la temperatura del sustrato. Debido a que las

altas velocidades de la aireación pueden reducir la actividad del agua del sustrato por la evaporación, el aire saturado de agua se utiliza generalmente [31]. La agitación de la masa de fermentación puede también ayudar a controlar la temperatura.

pH

La medida y el control de esta variable en FSS son muy difíciles. Sin embargo, los sustratos empleados en FSS tienen generalmente un efecto amortiguador debido a su composición química compleja. En estos casos, el control del pH no es necesario. Cuando esta variable debe ser controlada, las soluciones amortiguador se agregan como fase líquida. Otra posibilidad para controlar la evolución del pH consiste en adicionar una mezcla de fuentes de nitrógeno con influencia opuesta sobre la evolución del pH de manera que unas contrarresten el efecto de las otras. En este sentido, las sales de amonio se han utilizado en FSS conjuntamente con las sales de la urea o del nitrato debido a los efectos respectivos de la acidificación y de la alcalización [29].

1.1.4. Aplicaciones de FSS

Las aplicaciones socioeconómicas de FSS ofrecen el potencial de aumentar significativamente los estándares de vida con solamente requerimientos de entrada bajos de tecnología. Varios autores han repasado las diferentes aplicaciones de la fermentación en sustrato sólido. La FSS se asocia a la producción de alimentos fermentados tradicionales tales como “koji”, “tempeh” indonesio o “ragi ” indio. FSS también se ha utilizado para la producción de compuestos del alto valor agregado (tales como enzimas, ácidos orgánicos, biopesticidas, combustible biológico y saborizantes). En los años pasados, nuevas aplicaciones de FSS en el control del medio ambiente han sido desarrolladas, incluyendo el tratamiento y la biodegradación de compuestos peligrosos y la desintoxicación de residuos agro-industriales. La tabla 1.1 muestra algunos ejemplos de los procesos de FSS en sectores económicos de agro-industria, control del medio ambiente e industria de la fermentación [27].

Tabla 1.1: Algunas aplicaciones económicas de FSS

Sector	Aplicación	Ejemplos
Industria agro-alimenticia	Biotransformación de residuos de cosecha	Alimento tradicional fermentado (koji, sake, ragi, tempeh), producción de proteínas y hongos.
	Aditivos alimenticios	Compuestos aromáticos, colorantes, grasas esenciales y ácidos orgánicos.
Control ambiental	Tratamiento y biodegradación de compuestos peligrosos	Residuos cafeinados, pesticidas y bifenilos policlorados (BPCs).
	Desintoxicación biológica de desechos agroindustriales	Pulpa de café, cáscaras de mandioca, canola y café
Fermentación industrial	Producción de enzimas	Amilasas, celulasas, proteasas, pectinasas, xilanasas y glucoamilasas
	Productos bioactivos	Micotoxinas, giberelinas, alcaloides, antibióticos y hormonas
	Producción de ácidos orgánicos	Ácido cítrico, ácido fumárico, ácido itacónico y ácido láctico
	Biocombustibles	Producción de etanol
	Compuestos misceláneos	Pigmentos, biosurfactantes, vitaminas y goma xantan

1.1.5. Modelos dinámicos de FSS

Los procesos biotecnológicos, de los cuales los de fermentación son de los más comunes e importantes, son altamente no lineales y variantes en el tiempo[1]. Esta última característica, se debe al hecho de que los microorganismos están cambiando, aunque lentamente, su fisiología y morfología de forma continua, presentándose las fases o estados de la población microbiana. Cada uno de estos estados requiere de un modelo particular para ser descrito. Por otra parte, el comportamiento no lineal se debe a muchos factores como son la cinética del crecimiento celular, la formación de productos y las limitaciones termodinámicas. La fermentación en sustrato sólido, como proceso biotecnológico, no constituye una excepción a lo antes señalado.

Varios modelos que predicen el funcionamiento de los reactores de cama empacada para la fermentación en sustrato sólido han sido publicados en las últimas décadas. Muchos de esos modelos no pueden utilizarse para estudios de mayor escala, porque ellos no toman en cuenta el mecanismo más importante de transferencia de calor: la evaporación. Un modelo matemático que predice perfiles de temperatura, humedad, biomasa y sustrato en un reactor de FSS a gran escala podría ser de gran utilidad para evaluar escalas aumentadas. También, ninguno de los modelos propuestos se han validado correctamente. Varios autores intentaron verificar su modelo ajustando las predicciones del modelo a las temperaturas medidas. Por

supuesto un ajuste no prueba que los modelos son válidos. Los resultados de los mismos autores indican que su “validación” no fue realizada correctamente, porque cuando utilizaron parámetros independientemente determinados en sus modelos, se obtuvieron predicciones del modelo insatisfactorias. La urgente necesidad de experimentos de validación apropiados también fue reconocido por Mitchell et al. [24] en su revisión sobre el diseño y operación de los reactores FSS.

Brevemente nos referiremos a algunos de estos modelos propuestos en la literatura y que han sido validados por el trabajo experimental:

Weber et al. [44] proponen un modelo que consiste en dos ecuaciones diferenciales parciales del balance de entalpía y balance de agua. Los balances consideran entalpías y contenido de agua en la masa de composta y en el flujo de aire.

El modelo fue simplificado tomando en cuenta las siguientes suposiciones:

- la contribución de los gases y los términos de acumulación de masa son despreciables
- se asume un estado pseudo-estable con respecto a la temperatura y a la velocidad de consumo de oxígeno
- el aire está en equilibrio con la matriz sólida en cualquier punto
- la velocidad de producción de agua es proporcional a la velocidad del consumo de oxígeno.

EL modelo fue previamente validado en un reactor de polipropileno con un diámetro interno de 20 cm y una altura de 70 cm (altura de cama 50 cm). El reactor puede ser esterilizado en una autoclave. La temperatura fue medida a diferentes alturas del reactor. El aire saturado se suministró desde el fondo del reactor con una temperatura controlada de 18°C. Los hongos usados en el reactor adiabático de 15 dm³ fueron *Coniothyrium minitans* y *aspergillus Oryzae*. Los efectos de la temperatura sobre la respiración, el crecimiento, y la esporulación de los hongos *C. minitans* sobre el cáñamo impregnado con un medio líquido fueron determinados en experimentos independientes, y los dos primeros efectos fueron traducidos en un modelo cinético, que fue incorporado en los balances de materia y de energía del modelo de cama empacada. El modelo consiste en dos partes: una parte biológica y una parte física. La parte biológica predice la actividad del hongo en respuesta a temperaturas cambiantes en varias posiciones en la cama. La parte física del modelo utiliza estas actividades para predecir temperaturas en varias posiciones en la cama. Ambas partes del modelo han sido validadas.

Para estimar la velocidad de producción de calor se necesita conocer la velocidad de crecimiento de los microorganismos, sin embargo todavía no hay métodos confiables para cuantificar la biomasa producida [44]. El consumo de oxígeno es fácilmente determinado y directamente correlacionado con la producción de calor. Por lo tanto con la medición del consumo de oxígeno se estima el crecimiento de los microorganismos.

Las velocidades predichas y medidas del consumo de oxígeno fueron muy parecidas. Se obtuvieron buenas predicciones cuando la parte física del modelo fue validada usando las velocidades de respiración medidas en la cama empacada. El modelo puede ser mejorado con la incorporación de cinéticas de gas-sólidos en el balance de agua y la transferencia de calor relacionado con el crecimiento rápido de los hongos.

Fernández-Fernández y Pérez-Correa [14] proponen un modelo de 7 ecuaciones diferenciales ordinarias para un reactor FSS a escala con aireación forzada que considera cinética de los microorganismos, balance de materia, balance de agua, balance de energía con transferencia de calor para predecir la temperatura del aire de salida, producción de CO_2 , consumo de O_2 , consumo de N_2 y adicionalmente proveen un modelo de ruido, de modo que las variables simuladas reproduzcan el comportamiento complejo observado en mediciones reales. El modelo completo abarca un submodelo fenomenológico determinista y un submodelo del ruido. Los submodelos fueron calibrados con los datos experimentales obtenidos en el reactor con capacidad de 200 kilogramos en el cual el hongo filamentoso *Gibberella fujikuroi* se cultivó sobre salvado y almidón de trigo bajo limitación de nitrógeno.

Las principales suposiciones hechas en las relaciones cinéticas son: sistema homogéneo; la resistencia a la transferencia de oxígeno es insignificante; el nitrógeno disponible es el reactivo limitante del sustrato; los parámetros del modelo siguen siendo constantes a través del cultivo y la temperatura, y la actividad del agua no afecta a los parámetros cinéticos; todas las variables se expresan sobre una base de masa seca. La expresión de velocidad de Monod es utilizada para modelar el efecto del nutriente limitante (nitrógeno disponible) sobre la velocidad específica de crecimiento.

Se asume que el aire de salida es saturado, la acumulación de la fase gaseosa es insignificante y que las propiedades físicas permanecen constantes durante el cultivo. Los gradientes del agua y de temperatura en la cama sólida son despreciables. Las paredes del reactor se consideran parte de la cama de fermentación en el balance energético. El balance de agua de la cama considera la producción metabólica, adición directa de agua fresca, evaporación, filtración, y degradación sólida de la cama. El balance energético contiene los siguientes términos: generación de calor metabólico, enfriamiento por aire, abarcando la convección forzada y la evaporación del agua, enfriamiento de la pared, implicando convección natural y la radiación, así como también otros términos de menor importancia asociados a la entalpía de la adición de agua fresca, y entalpía de gases respiratorios. Ambos submodelos fueron combinados para obtener simulaciones que fueron comparados con las mediciones reales. Este modelo integrado proporcionó simulaciones realistas.

Kaiser [16] hace una clasificación de las materias primas y de los organismos de microflora más importantes cuantitativamente por su masa orgánica y por su actividad de respiración y propone un modelo no lineal de 12 ecuaciones diferenciales ordinarias para un reactor de FSS con convección forzada. Hace una clasificación natural dentro del rango de sustrato: azúcares y almidones, hemicelulosa, celulosa, lignina y sustancias húmicas. También hace una clasificación del rango de microflora restringido a los representantes principales de la

degradación regularmente aerobia de los materiales vegetales: bacteria(sin actinomicetos), actinomicetos, hongo café y hongo blanco. El hongo café y el hongo blanco difieren en sus funciones para degradar celulosa y lignina respectivamente. Una suposición del modelo es la adaptación análoga de la bacteria al recurso de azúcares y almidones, y de los actinomicetos a la hemicelulosa. Así la bacteria utiliza sólo azúcares y almidones, los actinomicetos también hemicelulosa, el hongo café adicionalmente utiliza celulosa y el hongo blanco utiliza el rango completo de sustrato. El modelo está conformado por balance de CO_2 , balance de agua, balance de energía, cinética del rango de microorganismos, cinética de sustancias húmicas y degradación del rango de sustrato.

Un proceso experimental es simulado para demostrar cómo trabaja el modelo y como los resultados de simulación confirman el buen conocimiento del fenómeno del proceso. Se simuló un proceso a escala de 1 m^3 , el material de composta empleado consistió de residuos hortícolas y paja que reunieron las condiciones ideales para composteo, i.e. baja densidad y alta concentración de sustratos. El flujo de aire de entrada al reactor fue saturado y con una temperatura de 10°C . Se efectuaron pruebas con intervalos de aeración y variación del coeficiente de transferencia de calor. El modelo tuvo éxito al reflejar el buen conocimiento del fenómeno de varias tecnologías de composta. La elección de los elementos del modelo parece reunir los factores clave del proceso de FSS. Los resultados de simulación justifican la clasificación de los rangos de sustrato y microorganismos así como también las suposiciones del modelo acerca de la utilización del sustrato. Como limitación se tiene que el modelo es determinístico y la precisión de los resultados depende de las fluctuaciones estocásticas del proceso.

Seki [36] propone un modelo macroscópico de 9 ecuaciones diferenciales parciales que considera disminución de volumen, transferencia de agua y conducción de calor para un proceso de FSS sin volteo, con aireación forzada y por lotes. En este proceso la masa de composta compuesta de residuos de materia orgánica es empacada en un contenedor y permanece estática sin volteo. El aire es suministrado a una velocidad constante desde el fondo del contenedor. Este tipo de sistemas de composteo es típico de fermentadores de laboratorio, escala piloto o tipo silo. En este modelo pueden ser simulados durante el proceso, cambios temporales y espaciales en las variables de estado, concentraciones del microbio y del sustrato, contenido de humedad, concentración de oxígeno y temperatura en el contenedor, considerando disminución del volumen de la masa de composta y fenómeno de transporte tal como transferencia de humedad y conducción de calor. El proceso se modela bajo ciertas suposiciones y queda compuesto por las siguientes ecuaciones: balance de concentraciones de microbios y sustratos, contenido volumétrico de masa sólida, contenido volumétrico de agua, humedad, concentración de oxígeno, balance de energía, entalpía de la fase gaseosa y descenso de altura. Debido a que la altura de la composta está cambiando con el tiempo por la disminución de su volumen, existe un problema de frontera móvil. Se emplea la ecuación lagrangiana para sistemas conservativos para obtener ecuaciones que incluyan la derivada sustancial con respecto al tiempo y simplificar el modelo. Este modelo fue validado a través de comparaciones con resultados experimentales anteriores.

Se observó a través de la simulación del modelo macroscópico que hay un cambio de la zona de reacción desde la región más baja a la superior de la masa de la composta con el tiempo; y la transferencia de agua y conducción de calor afectan las distribuciones de humedad y temperatura solo en la región más baja de la masa de la composta, cerca del fondo del contenedor, pero no en las regiones media y superior. Los parámetros y condiciones de operación para la simulación fueron ajustados asumiendo un proceso a escala con un volumen del contenedor de 10 m^3 .

González y De la Torre [15] desarrollaron un modelo para un reactor experimental de FSS con capacidad de 80 kg, de convección forzada, por lotes y sin volteo. El modelo consiste de 9 ecuaciones diferenciales ordinarias que consideran la cinética de cada uno de los microorganismos genéricos descritos anteriormente, balance de materia, balance del flujo de aire de entrada, contenido volumétrico de masa sólida, contenido volumétrico de agua, humedad, balance de energía y disminución de la altura de la masa de composta. La principal aportación de este modelo es la inclusión de las dinámicas de los tres microorganismos genéricos que existen en la composta: actinomicetos, hongos termofílicos e inhibidores. El proceso de FSS en el reactor experimental tiene una duración de 250 horas y el aire es suministrado de manera homogénea en el volumen de reacción a un flujo constante de $0.8 \text{ m}^3/h$. El modelo fue validado con datos experimentales de la trayectoria de temperatura en el reactor experimental. El reactor y el modelo fueron diseñados para calcular trayectorias de temperatura y efectuar diseño de control. El modelo representa el proceso de FSS a nivel laboratorio que queremos controlar por lo tanto éste será empleado para el cálculo de las trayectorias de control óptimo que se describirán más adelante en este trabajo.

1.1.6. Métodos de control en reactores FSS comerciales

El diseño de control de procesos de FSS es difícil. Esto viene del hecho de que FSS implica microorganismos vivos. Sus dinámicas son a menudo difícilmente entendidas, fuertemente no lineales y no estacionarias. Los parámetros del modelo no permanecen constantes por largos períodos debido a las variaciones metabólicas y modificaciones fisiológicas. La complejidad y la incertidumbre de FSS generalmente no permite el uso de controladores convencionales para proporcionar el funcionamiento de control deseado del sistema en lazo cerrado y satisfacción de condiciones tecnológicas. Estos problemas son solucionados usando métodos modernos para el diseño de control (e.g. redes neuronales, control difuso, control adaptable, control óptimo, modos deslizantes, etc.). Sin embargo, la mayoría de los algoritmos de control propuestos no son muy robustos o son complejos y difíciles de implementar en la práctica. Brevemente nos referiremos a algunos de estos métodos de control propuestos en la literatura.

Aguado y Gómez [1] proponen una estrategia de control para un proceso de fermentación en sustrato sólido que consiste en un regulador difuso de la temperatura del lecho sólido y un regulador proporcional del coeficiente de velocidad de crecimiento de la biomasa. Se

parte de un modelo fenomenológico compuesto de 5 ecuaciones diferenciales ordinarias en el que se asume que, tanto la temperatura como las concentraciones de los componentes son homogéneas, que el crecimiento de la biomasa queda limitado solo por el nitrógeno, que el aire de salida es saturado y que no se acumula gas en el interior del reactor.

El mecanismo seleccionado para extraer el calor metabólico fue la manipulación del flujo de aire que se fuerza a través del sustrato, sin manipular su humedad. Este mecanismo, sin embargo, ocasiona la pérdida de agua y el consecuente secado del sustrato, por tanto, es esencial combinar el control de la temperatura con el control del contenido del agua en el sustrato. El control de la temperatura del lecho sólido, de vital importancia para mantener la estabilidad y la integridad del proceso de crecimiento de la biomasa, se realiza controlando el flujo de aire seco, que se supone a una temperatura constante de 23°C .

El controlador propuesto incluye un lazo de control de la temperatura del lecho sólido realizado mediante un regulador difuso (RF) que actúa sobre el flujo de aire y otro lazo independiente que controla la velocidad específica de crecimiento de la biomasa mediante un regulador proporcional que actúa sobre la adición de nitrógeno. Este último lazo utiliza la medición del CO_2 producido para estimar, mediante un observador diseñado *ad hoc*, los valores de la velocidad específica de crecimiento que no pueden ser medidos.

La estrategia de control para el fermentador en sustrato sólido propuesta parece ser una solución simple y efectiva para estabilizar este proceso y para obtener el crecimiento requerido de la biomasa en un tiempo razonable. Tiene además, la ventaja práctica de que se basa en mediciones que son fácilmente realizables. El regulador difuso de la temperatura del lecho superó con creces a otros métodos ensayados, en particular al convencional PI. En todos los casos mostró un comportamiento robusto y preciso, a pesar de las características dinámicas complejas del proceso, en particular la no linealidad.

Von Meien et al. [43] proponen estrategias de control basadas en el control proporcional integral derivativo clásico (PID) y en los algoritmos avanzados de control de matriz dinámica (DMC) para un reactor FSS con aireación forzada. El estudio fue hecho usando un modelo en parámetros distribuidos para reproducir las características principales de desempeño del reactor.

El modelo matemático está conformado por 6 ecuaciones diferenciales parciales que considera balances de agua en las fases gas y sólida, balances de energía para ambas fases, producción de la biomasa, consumo del sustrato y restricciones termodinámicas. Se asume que la porosidad de la cama y la velocidad del flujo de aire permanecen constantes, mientras que la conducción de calor axial y radial dentro de la cama se consideran insignificantes.

Dos diferentes lazos de una sola entrada y una sola salida (SISO) fueron utilizados para controlar el reactor. En un lazo la temperatura del aire saturado de entrada fue manipulada en respuesta a la temperatura de la cama. En el otro la humedad realtiva del aire fue variada en respuesta a la temperatura de la cama, con la temperatura del aire de entrada constante. También fue utilizada una estrategia de control multivariable (MISO). En este caso, la temperatura y la humedad realtiva del aire de entrada fueron variados en respuesta

a la temperatura de la cama. En estos lazos de control, la temperatura del aire de entrada no fue manipulada abajo de 25 °C. Todos los lazos de control tenían el objetivo de mantener la temperatura promedio de la cama en la temperatura óptima durante todo el proceso para el crecimiento de los microorganismos. Las técnicas de control PID y DMC fueron aplicadas a ambos lazos. En las pruebas hechas con el controlador PID se concluye que la mejor estrategia es manipular solamente la temperatura del aire de entrada y mantenerlo saturado. Los mejores resultados con el control DMC también fueron obtenidos controlando la temperatura del aire de entrada y mantenerlo saturado. El control DMC tiene mejores resultados que el control PID debido a sus características predictivas. El control DMC realizado con convolución múltiple de matrices hace que el sistema sea mucho más estable desvaneciendo las perturbaciones indeseables de la cama de composta. Las simulaciones hechas con el control fueron mucho más cercanas a la producción máxima teórica de biomasa que al no aplicar control, lo que significa que el uso del control mejora perceptiblemente la productividad del reactor.

Pérez-Correa y Fernández-Fernández [28] proponen un algoritmo de control avanzado para controlar la temperatura de la cama de composta de un reactor experimental de FSS con convección forzada usando simulaciones realistas [14]. Utilizan un modelo de 7 ecuaciones diferenciales ordinarias que representan al proceso fenomenológico de FSS, combinado con un modelo realista de ruido, para probar controladores de modelo predictivo lineal. Se enfocan en los efectos que tiene el ruido sobre el funcionamiento de los algoritmos de control, y para mejorar el desempeño usan una combinación de filtros de paso-bajo y de valores inconsistentes. En las simulaciones realizadas directamente con el modelo fenomenológico era relativamente rápido alcanzar un buen funcionamiento del control. Sin embargo, el control fue perturbado cuando la salida del modelo fenomenológico fue contaminada con ruido usando el modelo realista del ruido, incluso con la filtración apropiada de la señal. La temperatura de la cama fue mantenida a 28°C por enfriamiento evaporativo, controlando la humedad del flujo de aire de entrada.

Keener et al. [17] se enfocan en el estudio de los efectos de aereación intermitente en el proceso de FSS. Utilizaron un modelo de 4 ecuaciones diferenciales ordinarias con multiparámetros cinéticos en conjunto con balances de materia y energía para predecir y optimizar el desempeño del proceso de FSS. Fueron desarrolladas ecuaciones que evaluaron el flujo de aire intermitente sobre la temperatura, oxígeno y humedad de la composta. Para derivar las ecuaciones que evaluaron el proceso de FSS fueron usados datos cinéticos de experimentos a escala usando tres diferentes soportes: desechos sólidos municipales, biosólidos y grasa/residuos de plantas vegetales. Los requerimientos de flujo de aire calculados en la simulación fueron 1.56, 3.87 y 0.65 $m^3 kg_{c,o}^{-1} dia^{-1}$ para desechos sólidos municipales, biosólidos y grasa/residuos de plantas vegetales respectivamente. La densidad del aire de entrada fue de 1.18 $kg_a m^{-3}$. Los niveles de oxígeno evaluados a la salida del reactor fueron de 0.20 $kgkg^{-1}$ para todas las mezclas de composta en $t = 0$ y llegaron al nivel de concentración del ambiente (nivel de oxígeno en el ambiente 0.23 $kgkg^{-1}$) a lo largo del tiempo. A esos niveles de oxígeno en la composta no se limita la reacción ni se promueven condiciones anaeróbi-

cas. De acuerdo a las ecuaciones desarrolladas para evaluar el flujo de aire intermitente, los períodos apagado/encendido para el soplador fueron calculados para un período de 40 días. después del día 20 los niveles de oxígeno se mantuvieron en estado estable para un flujo de aire constante. Los gradientes de temperatura calculados durante los períodos de apagado del ventilador fueron 0.8, 1.5 y 1.8°C para biosólidos, grasa/residuos de plantas vegetales y desechos sólidos municipales respectivamente. Con esos gradientes se podría esperar que no hubieran cambios significativos en la reacción. La simulación del proceso FSS fue hecho para temperaturas iniciales de 60, 65 y 70°C respectivamente. La referencia del controlador fue 60°C. Los resultados de simulación mostraron que para minimizar la ventilación constante y costos de operación mientras se conseguía un tiempo mínimo del proceso FSS, el sistema de aereación debe operar inicialmente alrededor de 5°C de la temperatura óptima de la reacción para cada mezcla de composta.

1.2. Antecedentes

1.2.1. Proceso FSS industrial: producción de biomasa para el cultivo del hongo comestible *Agaricus bisporus*

El hongo *Agaricus bisporus*, es cultivado en composta para hongos comestibles. Durante la preparación de la composta los microorganismos degradan cerca del 40 % de la materia seca, siendo esta el valor potencial para la nutrición del *A. bisporus*. No obstante sólo la fase 2 (Proceso FSS aeróbico controlado) es un sustrato selectivo para el *A. Bisporus*.

Existen por lo general varios métodos de FSS en la industria para la producción de biomasa para el cultivo del hongo comestible *A. bisporus*: el método de largo plazo, de corto plazo, de composta en invernadero, etc. Algunos de estos métodos resultan ineficientes para alcanzar el objetivo principal en el proceso de FSS que es producir biomasa con los nutrientes necesarios para el crecimiento del hongo comestible. El método que por ahora se considera más eficiente consiste en cuatro fases [12]. En las dos primeras fases (fase 0 y fase 1) el crecimiento poblacional de microorganismos en la composta es indiscriminado. Dichos microorganismos comienzan por metabolizar la materia orgánica rompiéndola en formas más simples; es necesario someterlo a un riego y mezclado periódicos con el fin de promover una desintegración uniforme de la materia orgánica. En cuanto los microorganismos comienzan a aumentar en número, la temperatura de la composta aumenta debido a la combustión de los carbohidratos que se descomponen rápidamente. Tal incremento de temperatura provee condiciones convenientes en el ambiente para el crecimiento de microorganismos mesofílicos y termofílicos. La fase 1 se considera completa una vez que el material presenta un color café oscuro debido a un proceso de humificación con un agudo olor a amoníaco y que el material se ha vuelto flexible y capaz de contener agua [20].

La fase 2, es el proceso de crecimiento y maduración de microorganismos (i.e. biomasa) presentes en un sustrato húmico, cuyo objetivo es el aumento selectivo de ciertas familias

de microorganismos. Esta fase tiene como objetivos principales después de los cuales la biomasa está lista para el cultivo de los hongos comestibles: el crecimiento de los hongos termofílicos, acabar con los microorganismos inhibidores y liberar la cantidad de amoníaco producido por la degradación biológica. La fase 3 marca su inicio por el acondicionamiento del ambiente en cambios de temperatura y humedad para la siembra del micelio, y continúa con el crecimiento vegetativo y con el crecimiento generativo o reproductivo que comprende la formación del champiñón y su posterior cosecha. La fase 4 o empaque marca entonces el final de la producción de hongos comestibles. El ciclo total de producción del champiñón es de 12-13 semanas, y es considerado un cultivo con ciclo relativamente corto y de un manejo intensivo.

1.2.2. Materiales y métodos

Preparación del sustrato sólido

La producción comercial de *A. bisporus* depende de varias materias primas composteadas que consisten en la combinación de heno, rastrojo, pasto, olote, cáscara de semilla de algodón, estiércol de pollo y de caballo, corteza, harina de soya y de semilla de algodón, desechos de la destilación de etanol y yeso [35]. El proceso de composteo consiste de dos fases, en la cual cada fase dura, más o menos, una semana: La fase 1 es llevada a cabo a la intemperie sobre un patio o búnker aireado o bien en pisos aireados de concreto, mientras que la fase 2 es conducida en Reactores FSS.

La aireación forzada de la composta fase 1 ha reducido empíricamente la emisión de compuestos de azúfre en un promedio de 40 %, comparado con una pila tradicional de composta, pero esta reducción es muy variable debido a las diferencias que se dan cada semana en las prácticas de cada planta de cultivo. Además, los compuestos reducidos de azúfre tienen un umbral muy bajo de tal manera que los humanos pueden detectar estos compuestos en concentraciones muy bajas [35].

Reactor FSS experimental

El proceso de fermentación en sustrato sólido es realizado en grandes cámaras de concreto o túneles con sopladores que fuerzan el aire a través del sustrato (convección forzada) [20], [35]. En este proceso la masa es empacada en las cámaras y permanece estática sin volteo. El aire es suministrado a una velocidad constante desde el fondo de la cámara controlando su temperatura y humedad; la altura de composta decrece conforme avanza la reacción del proceso y como parte de la corriente de gases a la salida [36]. La instrumentación con que cuentan las cámaras para la medición de las variables son: sensores de temperatura distribuidos en la cama sólida, en la entrada y salida del aire, higrómetro en la entrada del aire, medición de caída de presión en la cama sólida, medición de CO_2 y O_2 a la salida, y medición de la velocidad del aire a la entrada [14], [20].

Sistema de aire acondicionado

Sistema de refrigeración, humidificación y calefacción del aire externo [12]. Un sistema controlado para la entrega de vapor permite un control exacto de la humedad relativa de la entrada de aire. Este sistema es externamente controlado y consiste de un controlador de flujo másico, un controlador de flujo de agua y un evaporador con control de temperatura.

Mediciones en línea

Sensores de temperatura fueron introducidos dentro de la cama sólida para mediciones de temperatura, mediciones de flujo, humedad y temperatura del aire de entrada, temperatura del aire de salida y medición de NH_3 [14], [20].

Mediciones y análisis fuera de línea

Otras variables del proceso importantes fueron medidas manualmente: contenido de agua de la cama sólida, masa seca total (al principio y en el final del proceso de fermentación), cenizas, nitrógeno en materia seca, relación C:N, pH y altura de la composta [14], [20].

Estrategia de control

La fase 2 del proceso FSS industrial [12], [6] se divide en 3 etapas isotérmicas con sus respectivos tiempos de permanencia y flujo volumétrico de aire saturado constante los cuales fueron determinados experimentalmente y validados en la práctica industrial [12], [20] para la obtención adecuada de biomasa que produzca la mayor cantidad de hongos.

La primer etapa es el pre-acondicionamiento en donde la temperatura es mantenida a 40°C y el tiempo de residencia es de 40h. La finalidad de dicha etapa es favorecer el crecimiento de los microorganismos y obtener una estabilización de poblaciones bacterianas.

La segunda etapa es la pasteurización, la cual consta de un aumento en la temperatura con la finalidad de eliminar a los microorganismos inhibidores. En esta etapa la temperatura es llevada a 55°C y tiene una duración de 10h, tiempo en el que se considera que los microorganismos inhibidores son minimizados o eliminados.

La tercera y última etapa del proceso es el acondicionamiento, donde las condiciones de operación son iguales en tiempos de residencia y temperatura que la etapa de pre-acondicionamiento. La finalidad del acondicionamiento es lograr un crecimiento selectivo de los rubros de biomasa que favorece el buen desarrollo de los hongos cultivados, refiriéndose a los microorganismos actinomicetos y hongos termofílicos.

1.2.3. Resultados de industria

Durante el proceso existe una disminución en la altura de composta debido al reacomodo del sustrato por la liberación de CO_2 , H_2O y NH_3 , así como por la producción de microorganismos siendo parte de las reacciones químicas y bioquímicas presentes [12], [20]. Otro factor que afecta la altura es la liberación de agua producto de la convección forzada en el reactor. Debido a ello, la altura de composta disminuye aproximadamente un 20 % durante todo el proceso de FSS [20]. La concentración máxima de amoníaco en el sistema se encuentra entre 160 y 200 ppm, aunque existe una producción del mismo conforme avanza la reacción. La razón por la cual dichas concentraciones no llegan a ser mayores es por la actividad de los hongos termofílicos y la convección forzada, que las reduce gradualmente hasta llegar a ≈ 5 ppm, una vez que la estabilización de rubros de biomasa es lograda [20]. Dicho comportamiento de concentración de amoníaco y categorías de biomasa indican el fin del proceso de FSS. En lo que concierne a las fracciones de contenido líquido, sólido y concentración de oxígeno de la masa de composta, conservan un valor muy similar a la salida que al de entrada [12]. Tal disminución mínima también es debida al reacomodo del sistema y la convección forzada.

Las condiciones de operación para cada etapa del proceso tales como el tiempo, la humedad, la temperatura, las condiciones de entrada del flujo del aire, la cantidad de NH_3 , el consumo de sustrato total y el comportamiento dinámico del sistema (que incluye la reducción de ≈ 20 % en la altura de composta) son datos industriales que fueron obtenidos y validados experimentalmente [12], [20].

1.3. Motivación

Con base en la información bibliográfica disponible y a las aportaciones industriales se puede notar que en la actualidad múltiples investigaciones están dirigidas a dar un importante aporte tecnológico a los procesos de FSS. Específicamente para la producción de hongos comestibles, existe la creciente necesidad de optimizar estos procesos a través de modelos matemáticos que representen lo mejor posible la dinámica de los microorganismos e implementar técnicas de control que actúen de manera eficiente ante la variabilidad del proceso, esto con la finalidad de obtener una mayor producción y reducir costos de operación.

Muchos de los métodos de control propuestos son complejos o determinados para cierto tipo de escalas de procesos específicos que no consideran ciertas dinámicas de variables del proceso y presentan las desventajas de que no pueden ser aplicados a procesos diferentes o son difíciles de implementar.

Es por eso que en este trabajo se propone un control óptimo mediante los métodos del gradiente descendente y proyección del gradiente que tienen las ventajas de trabajar con sistemas altamente no lineales, la convergencia ocurre para una variedad de condiciones iniciales y se requieren pocas iteraciones. Los algoritmos optimizan un criterio de desempeño

para obtener una trayectoria óptima de control en lazo abierto. Las dinámicas de los sistemas biológicos a menudo presentan no linealidades que pueden ser enfrentadas y resueltas con estos métodos de control óptimo.

1.4. Objetivos

El principal objetivo de la implementación del control óptimo en el procesos FSS para el cultivo del hongo comestible *Agaricus bisporus*, es encontrar la trayectoria óptima del flujo volumétrico del aire de entrada en el reactor que controle la temperatura y que maximice la producción de biomasa (microorganismos termofílicos) que beneficia el crecimiento de los hongos comestibles.

Como objetivos secundarios se consideran:

- Optimizar el tiempo de duración del proceso
- Minimizar el esfuerzo de control
- Comparar los resultados a flujo constante de aire con los obtenidos con el control óptimo
- Verificar el comportamiento de los algoritmos ante variaciones del sistema

1.5. Organización de la tesis

En el capítulo II, se describe el modelo dinámico del proceso que se desea controlar, se describe el reactor experimental sobre el cual se determinó el modelo, los parámetros utilizados y la verificación del modelo.

En el capítulo III, se describen los métodos de control óptimo gradiente descendente y proyección del gradiente que se aplicarán al modelo del reactor FSS y se justifica el empleo de estos dos algoritmos.

En el capítulo IV, se muestran las trayectorias óptimas de flujo volumétrico de aire como resultados de la aplicación de los algoritmos de control óptimo y se hace un comparativo con los resultados obtenidos a flujo de aire constante.

En el capítulo V, se analizan los algoritmos de control óptimo ante variación de las condiciones de la variable de entrada y de las condiciones iniciales del sistema.

El capítulo VI se exponen las conclusiones de este trabajo y se plantea el trabajo futuro.

Capítulo 2

Modelo

2.1. Introducción

La fermentación en sustrato sólido (FSS) es generalmente definido como el crecimiento de microorganismos sobre sustratos sólidos en sistemas con una fase continua gaseosa y sin flujo libre de agua. Para desarrollar reactores FSS a gran escala es necesario un análisis cuantitativo de la cinética y de la estequiometría de la reacción. Este análisis es obstaculizado en muchos sistemas naturales de FSS por dificultades experimentales, porque el sustrato es estructuralmente y nutricionalmente heterogéneo y la medición de biomasa seca es imposible. Varios modelos de sistemas han sido desarrollados para superar esos problemas. En este capítulo se describe el modelo en ecuaciones diferenciales ordinarias desarrollado para un reactor FSS a escala por lotes y de convección forzada (figura 2.1), donde se consideran estequiometría y cinéticas químicas de reacción microbiana para tres categorías de microorganismos, transferencia de calor, transferencia de masa con reacción microbiana en la masa de la composta, balance del aire de entrada, transferencia de agua y una disminución de volumen de la masa de composta [15].

2.2. Reactor experimental

El reactor experimental de FSS para el que se diseñó el modelo se encuentra en un laboratorio bajo condiciones controladas ubicado en el Cinvestav Unidad Guadalajara. El reactor está hecho de material de acrílico y es de forma rectangular con dimensiones de $0.8 \times 0.6 \times 0.5$ m, y con capacidad para 80 kg de composta. La masa de composta del proceso está compuesta de residuos de materia orgánica (paja de trigo, harinola y pollinaza), es empacada en el reactor y permanece estática sin volteo. El reactor está implementado con los siguientes aditamentos e instrumentación:

1. Chaqueta de aislamiento térmico para evitar transferencia de calor hacia el exterior
2. Ductos de recirculación y liberación de gases
3. 10 sensores de temperatura distribuidos en el volumen de la cama del reactor (la composta contenida en el reactor se divide en 9 zonas y se ubica cada sensor en el centro de cada una, el décimo sensor se ubica en el centro del volumen total de la masa de composta. Los valores de temperatura son promediados para obtener una trayectoria de la temperatura promedio del lote)
4. Sistema de aire acondicionado con flujo de aire variable suministrado desde el fondo del reactor
5. Sensores de temperatura, humedad y velocidad a la entrada y salida del flujo de aire

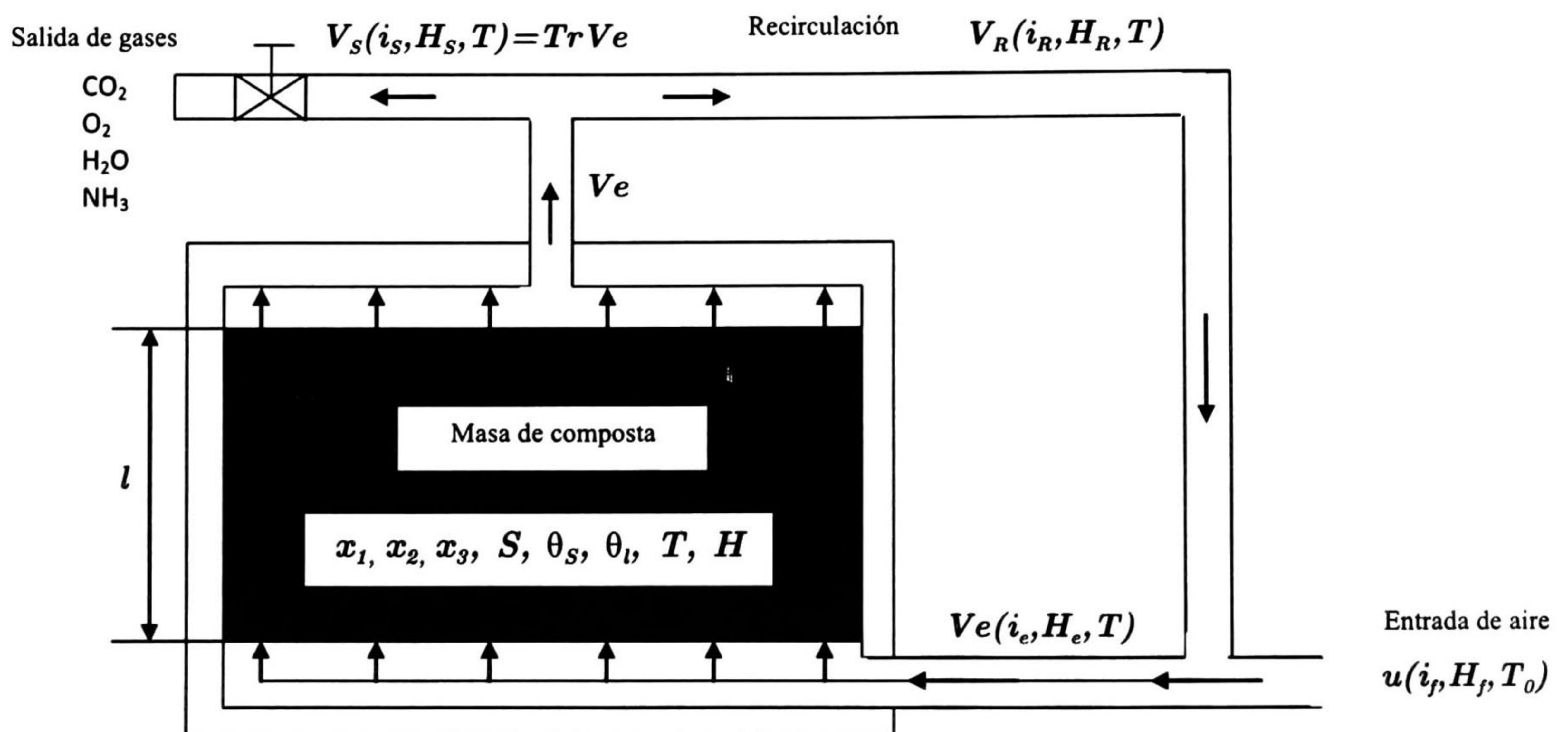


Figura 2.1: Esquema del reactor de FSS experimental

2.2.1. Suposiciones realizadas

Las siguientes suposiciones fueron hechas para modelar el proceso FSS en el reactor experimental :

1. Las fases sólida, líquida y gas coexisten dentro de la unidad representativa de volumen, los cambios de fase (evaporación y condensación de agua) y las reacciones microbianas ocurren uniformemente en dicha unidad de volumen.

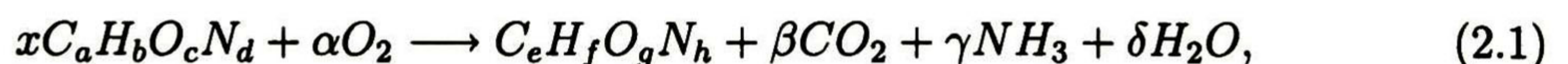
2. Los flujos verticales de transferencia de humedad y de oxígeno en fase gas son gobernados por transporte convectivo, la concentración de oxígeno se considera constante.
3. La aproximación de estado cuasi-estable se mantiene para la concentración de oxígeno.
4. El cambio temporal en la altura de la masa de composta es proporcional a su peso y sigue el modelo visco-elástico de Maxwell.
5. La concentración inicial para cada uno de los rubros de biomasa considerados en el modelo es igual y no existe competencia entre ellos.
6. Los parámetros del modelo siguen siendo constantes a través del cultivo y la temperatura, y la actividad del agua no afecta a los parámetros cinéticos.
7. El cambio de la densidad del sistema, depende únicamente del cambio de las fracciones sólida y líquida en la masa de composta respecto al tiempo.

Para la suposición 2, el flujo difusivo es muy pequeño en comparación con el flujo convectivo según el número de Peclet [36].

El cambio de volumen de la composta en una pila estática no se encuentra del todo claro, por lo que la suposición 4 fue tomada porque se presume que el cambio de volumen de composta se comporta como un medio poroso natural.

2.3. Estequiometría de la reacción en la composta

Las relaciones estequiométricas entre las variables de estado fundamentales en el proceso FSS, que incluyen concentraciones de microbios, sustrato, oxígeno y contenido de humedad, han sido determinadas por muchos investigadores (e.g. Seki, 2000; Kubota and Ohga, 1980; Haug, 1993; Fujita, 1993). De acuerdo a ellos podemos escribir la siguiente ecuación de reacción en la composta:



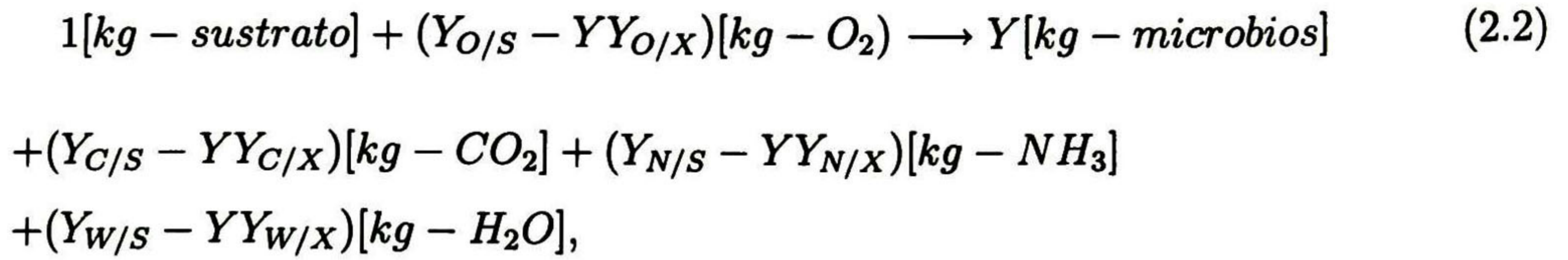
donde

$C_a H_b O_c N_d$ = composición de los grupos de sustrato

$C_e H_f O_g N_h$ = composición de los grupos de microorganismos

$\alpha, \beta, \gamma, \delta, x$ = coeficientes estequiométricos

La ecuación anterior está basada en unidades molares, sin embargo, debido a que el peso molecular no puede ser definido sustancialmente para una masa colectiva de sustratos y microbios, es más conveniente reescribirla en la siguiente ecuación basada en unidades de masa:



donde

- Y = masa de microbios producida por oxidación de unidad de masa de sustrato
- $Y_{O/S}$ = masa del oxígeno consumida por oxidación de unidad de masa de sustrato
- $Y_{C/S}$ = masa de CO_2 producida por oxidación de unidad de masa de sustrato
- $Y_{W/S}$ = masa de agua producida por oxidación de unidad de masa de sustrato
- $Y_{N/S}$ = masa de amoníaco producida por oxidación de unidad de masa de sustrato
- $Y_{O/X}$ = masa de oxígeno producida por la síntesis de microbios
- $Y_{C/X}$ = masa de dióxido de carbono consumida por la síntesis de microbios
- $Y_{W/X}$ = masa de agua consumida por la síntesis de microbios
- $Y_{N/X}$ = masa de amoníaco consumida por la síntesis de microbios

2.4. Dinámica de reacción de los microorganismos

La velocidad de reacción de la producción total de microbios por crecimiento y muerte es expresado por una ecuación algebraica de primer orden de concentración de microbios. El subíndice i en las ecuaciones que se describen a continuación identifica cada uno de los microorganismos considerados en la división de biomasa: $i = 1$ para actinomicetos, $i = 2$ para hongos termofílicos e $i = 3$ para los inhibidores.

$$R_{X_i} = (\mu_i - \lambda_i)X_i, \quad (2.3)$$

donde

- R_{X_i} = tasa de producción neta de los microbios (kg/m^3h)
- X_i = concentración de microbios (kg/m^3)
- μ_i = velocidad específica de crecimiento microbiano ($1/h$)
- λ_i = velocidad específica de muerte microbiana ($1/h$)

La relación tipo Michaelis-Menten para μ_i es la usualmente aplicada en análisis de reacción microbiana. Asumiendo que la dependencia de oxígeno de μ_i también obedece la relación

tipo Michaelis-Menten, se puede escribir la siguiente ecuación [36]:

$$\mu_i = \mu_{\text{máx}_i}(T) \frac{S}{K_{S_i} + S} \frac{O}{K_{O_i} + O}, \quad (2.4)$$

donde

$\mu_{\text{máx}_i}$ = velocidad máxima de crecimiento de microbios (1/h)

S = concentración de sustrato (kg/m^3)

O = concentración de oxígeno (kg/m^3)

K_{S_i} = constante de saturación para la concentración del sustrato (kg/m^3)

K_{O_i} = constante de saturación para la concentración del oxígeno (kg/m^3)

$\mu_{\text{máx}}$ es una función de la temperatura expresada como sigue [36]:

$$\mu_{\text{máx}_i}(T) = \frac{a_{1_i} \exp \{-b_{1_i}/(T + 273)\}}{1 + (a_{1_i}/a_{2_i}) \exp \{-(b_{1_i} + b_{2_i})/(T + 273)\}}, \quad (2.5)$$

donde

T = temperatura ($^{\circ}C$) de la masa de composta

a_{1_i}, a_{2_i} = constantes (1/h)

b_{1_i}, b_{2_i} = constantes (K)

La velocidad específica de muerte de microbios es tratada como dependiente solo de la temperatura expresada por la siguiente ecuación tipo Arrhenius [36]:

$$\lambda_i = a_{d_i} \exp \{-b_{d_i}/(T + 273)\}. \quad (2.6)$$

donde

a_{d_i} = constante (1/h)

b_{d_i} = constante (K).

Considerando que el consumo de sustrato ocurre con el crecimiento de microbios y que la muerte de los mismos es incorporado dentro del sustrato [36], la velocidad de cambio en el sustrato es:

$$R_S = \sum_{i=1}^3 \left(-\frac{1}{Y} \mu_i + \lambda_i\right) X_i. \quad (2.7)$$

Por otra parte el agua es producida y el oxígeno es consumido con el cambio en la cantidad de materiales orgánicos (sustratos y microbios). Como se observa en el balance estequiométrico la velocidad de producción de agua R_W (kg/m^3h) y la velocidad de consumo de oxígeno

R_O (kg/m^3h) son dados por la suma de contribuciones de las velocidades de consumo de sustrato y crecimiento de microbios [36]:

$$R_W = \sum_{i=1}^3 \left(\frac{Y_{W/S}}{Y} - Y_{W/X} \right) \mu_i X_i \quad (2.8)$$

$$R_O = \sum_{i=1}^3 \left(\frac{Y_{O/S}}{Y} - Y_{O/X} \right) \mu_i X_i. \quad (2.9)$$

La velocidad de generación de calor R_H (kJm^3/h) es expresado por la suma de cambios de entalpía para la reacción endotérmica de crecimiento de microbios y para la reacción exotérmica de consumo de sustrato [36]:

$$R_H = \sum_{i=1}^3 \left(-\frac{\Delta h_{S_i}}{Y} - \Delta h_{X_i} \right) \mu_i X_i, \quad (2.10)$$

donde

Δh_{S_i} = cambio de entalpía para la reacción de consumo de sustrato (kJ/kg)

Δh_{X_i} = cambio de entalpía para la reacción de crecimiento de microbios (kJ/kg)

2.5. Descripción del Modelo

El modelo desarrollado por González y De la Torre [15] es un sistema altamente no lineal y se diseñó considerando un elemento diferencial de volumen de control, se aplicó el principio de conservación de materia y energía y se simplificaron las ecuaciones aplicando la derivada sustancial. Las ecuaciones del modelo se describen a continuación:

$$\frac{dx_1}{dt} = -\frac{1}{l} \frac{dl}{dt} x_1 + R_{x_1} \quad (2.11)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -\frac{1}{l} \frac{dl}{dt} x_2 + R_{x_2} \quad (2.12)$$

$$\frac{dx_3}{dt} = -\frac{1}{l} \frac{dl}{dt} x_3 + R_{x_3} \quad (2.13)$$

$$\frac{dS}{dt} = -\frac{1}{l} \frac{dl}{dt} S + R_S \quad (2.14)$$

$$\frac{d\theta_s}{dt} = -\frac{1}{l} \frac{dl}{dt} \theta_s + \frac{1}{\rho_s} (R_{x_1} + R_{x_2} + R_{x_3} + R_S) \quad (2.15)$$

$$\frac{d\theta_l}{dt} = -\frac{1}{l} \frac{dl}{dt} \theta_l + \frac{1}{\rho l} (R_W - \frac{v_e * \rho_a}{V} (H^* - H)) \quad (2.16)$$

$$\frac{dH}{dt} = \frac{v_e}{V} (H_e + H^* - 2H) \quad (2.17)$$

$$\frac{dT}{dt} = \frac{1}{\rho C_p} \left\{ -\frac{v_e * \rho_a}{V} (i^* - i_e) + R_H - \frac{U l_p}{A_b} (T - T_0) \right\} \quad (2.18)$$

$$\frac{dl}{dt} = -\frac{g\rho}{\eta} l^2, \quad (2.19)$$

donde

x_1 = concentración de microorganismos actinomicetos (kg/m^3)

x_2 = concentración de microorganismos termofílicos (kg/m^3)

x_3 = concentración de microorganismos inhibidores (kg/m^3)

S = concentración de sustrato (kg/m^3)

θ_s = contenido sólido volumétrico de la masa de composta

θ_l = contenido húmedo volumétrico de la masa de composta

H = humedad del aire ($kg-H_2O \ kg-DA^{-1}$)

T = temperatura de la masa de composta ($^{\circ}C$)

l = altura de la masa de composta (m)

Ecuaciones algebraicas auxiliares

$$H^* = \frac{M_w P_w}{M_{DA} (P - P_w)} \quad (2.20)$$

$$P_w = 10^{8,10765 - \frac{1750,286}{T+235}} \quad (2.21)$$

$$C_p = 1,29 + 2,9w \quad (2.22)$$

$$i^* = C_H T + \lambda_0 H^* \quad (2.23)$$

$$i_e = \frac{((1 - Tr) / Tr) v_s i^* + u * i_f}{v_e} \quad (2.24)$$

$$i_f = C_H T + \lambda_0 H_f \quad (2.25)$$

$$C_H = C_A + C_w H \quad (2.26)$$

$$H_e = \frac{(1 - Tr) / Tr v_s H + u * H_f}{v_e} \quad (2.27)$$

$$v_e = (1 - Tr) / Tr v_s + u \quad (2.28)$$

$$\rho = \rho_s \theta_s + \rho_l \theta_l, \quad (2.29)$$

donde

H^* = humedad de saturación

P_w = presión de vapor del agua ($mmHg$)

C_p = calor específico de la composta (kJ/kgK)

i^* = entalpía de equilibrio del aire humedo ($kJ/kgDA$)

i_e = entalpía del aire a la entrada del reactor ($kJ/kgDA$)

i_f = entalpía del aire fresco ($kJ/kgDA$)

C_H = calor humedo del aire ($kJ/kgDA^\circ C$)

H_e = humedad del aire a la entrada del reactor

v_e = flujo volumétrico de la mezcla gaseosa de entrada en el reactor (m^3/h)

ρ = densidad de la composta (kg/m^3).

La variable de control es el flujo volumétrico del aire fresco de entrada u que aparece de manera implícita en la ecuación algebraica del flujo volumétrico de la mezcla de entrada v_e (aire fresco y recirculación). El flujo volumétrico de la mezcla de entrada propociona la humedad y la temperatura necesarias que contribuyen al crecimiento de los microorganismos benéficos y a su vez mantiene la trayectoria de temperatura del reactor dentro de los rangos adecuados.

2.6. Parámetros del modelo

Los valores de los parámetros que se muestran en las tablas 2.1 y 2.2 fueron determinados por González y De la Torre [15] mediante ajustes a prueba y error para validar el modelo.

Tabla 2.1: Valores de parámetros cinéticos

Simbolo	Actinomicetos	Termofílicos	Inhibidores	Unidad
a_1	6.405E9	4.375E4	2.337E06;	1/h
a_2	1.113E-35	2.226E-36	2.745E-36	1/h
b_1	7843	3971	5057	K
b_2	2.601E4	2.601E4	2.601E4	K
a_d	4.035E18	5.956E20	2.253E19	1/h
b_d	1.59E4	1.738E4	1.545E4	K
K_S	86	57	75	kg/m^3
K_O	0.042	0.045	0.063	kg/m^3

Tabla 2.2: Valores de parámetros y condiciones de operación del sistema

Simbolo	Valor	Unidad	Simbolo	Valor	Unidad
Y	0.18		η	2.5446E14	kg/mh
$Y_{W/S}$	0.2103		g_1	9.81	m/s^2
$Y_{W/X}$	0.2103		g_2	1.27008E08	m/h^2
Δh_S	-9800	kJ/kg	M_w	0.018	kg/mol
Δh_X	27800	kJ/kg	M_{DA}	0.029	kg/mol
ρ_l	1000	kg/m^3	P	760	$mmHg$
ρ_s	2120	kg/m^3	λ_0	2454.3	kJ/kg
ρ_a	1.0556	kg/m^3	O	0.3	kg/m^3
H_f	0.055	$kgH_2O/kgDA$	x_{10}	0.1	kg/m^3
u	0.8	m^3/h	x_{20}	0.1	kg/m^3
v_s	0.8	m^3/h	x_{30}	0.1	kg/m^3
T_r	0.3		S_0	40	kg/m^3
C_A	1	kJ/kg	θ_{S_0}	0.10795	
C_w	1.93	kJ/kg	θ_{l_0}	0.35885	
A_b	0.62	m^2	H_0	0.04	$kgH_2O/kgDA$
U	5.75	kJ/m^2hK	T_0	30	$^{\circ}C$
l_p	2.8	m	l_0	.45	m
V	0.2064	m^3			

2.7 Verificación del modelo

Para verificar el modelo no lineal De la Torre [11] obtuvo datos experimentales de la trayectoria de temperatura en el reactor a escala de laboratorio. A través de un sistema de adquisición de datos se obtuvieron más de 33000 valores de temperatura con 10 sensores ubicados en la cama empacada. Los valores de temperatura fueron promediados para obtener una trayectoria de la temperatura promedio de la masa de composta que fue comparada con el resultado de la simulación del modelo como se muestra en la figura 2.2. Las condiciones de operación están descritas en las tablas 2.1 y 2.2. En la figura se puede observar que la máxima temperatura alcanzable y la forma del perfil de temperatura del modelo concuerdan con los del resultado experimental.

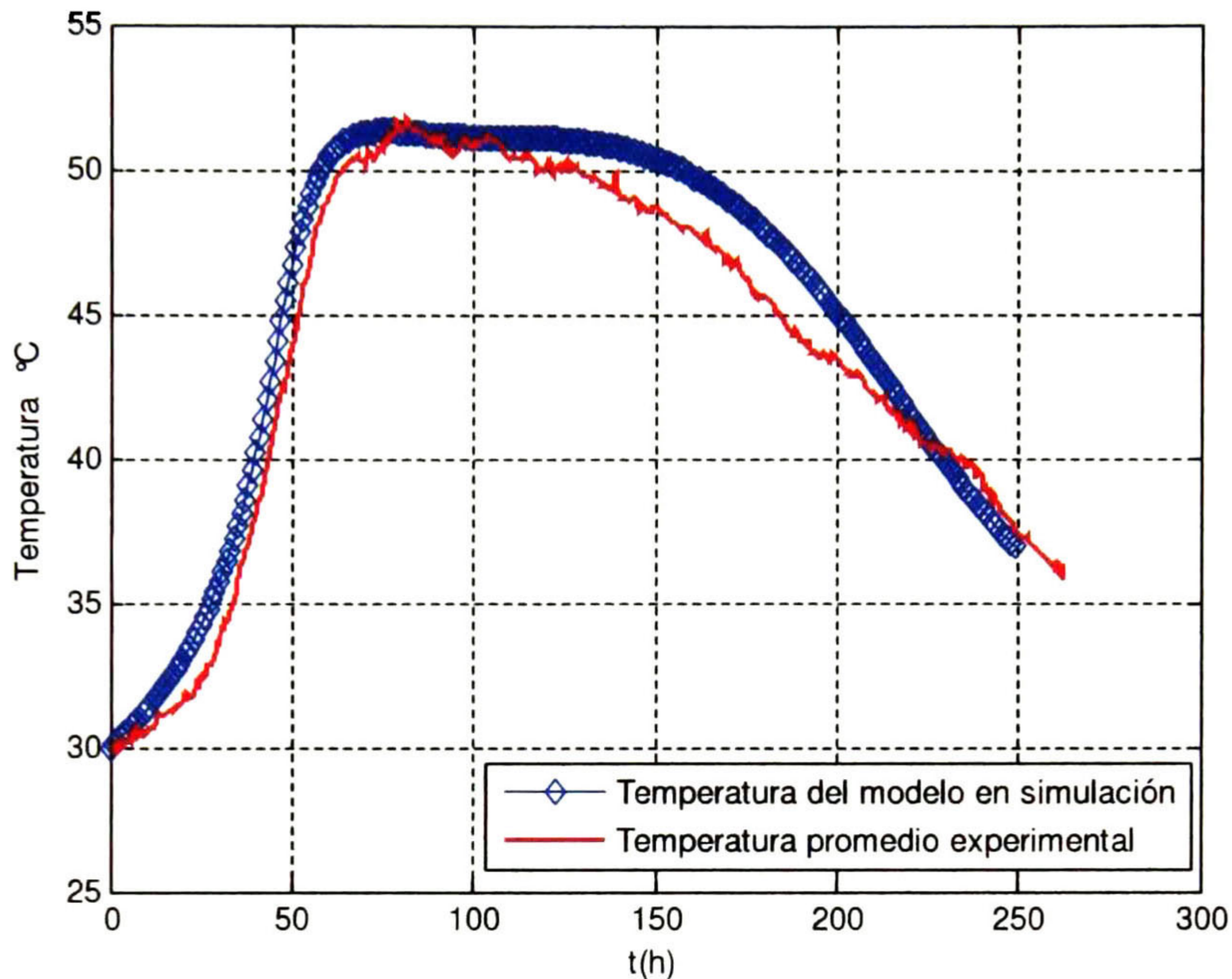


Figura 2.2: Comparación del resultado experimental de la trayectoria de temperatura para el proceso FSS y el resultado calculado con el modelo presentado.

La figura 2.3 muestra los resultados calculados con el modelo del proceso FSS (ecs. 2.11 - 2.19) para un flujo de aire constante e igual a $0.8 \text{ m}^3/\text{h}$. Las demás condiciones para la simulación del modelo están descritas en las tablas 2.1 y 2.2. Como se puede apreciar en la figura los microorganismos termofílicos tienen una concentración de $3 \text{ kg}/\text{m}^3$ para el flujo constante de $0.8 \text{ m}^3/\text{h}$ y la máxima temperatura alcanzada es de 52.64°C . El objetivo de este trabajo es maximizar la concentración de los microorganismos termofílicos mediante el cálculo de una trayectoria óptima de flujo de aire de entrada. En los métodos de control óptimo que se describirán en el siguiente capítulo se consideran la minimización del esfuerzo de control, que el flujo no afecte a la temperatura para que descienda abajo de los 50°C y que los microorganismos inhibidores no aumenten su concentración. Esto es logrado alcanzando la temperatura de los 50°C .

En el proceso de FSS experimental llevado a cabo en el laboratorio se observaron las siguientes características particulares que se describen a continuación y que en general también han sido establecidos previamente por investigadores [11], [36]:

1. El proceso FSS experimenta tres períodos sucesivos: un incremento de temperatura, una temperatura estable y una disminución de temperatura.

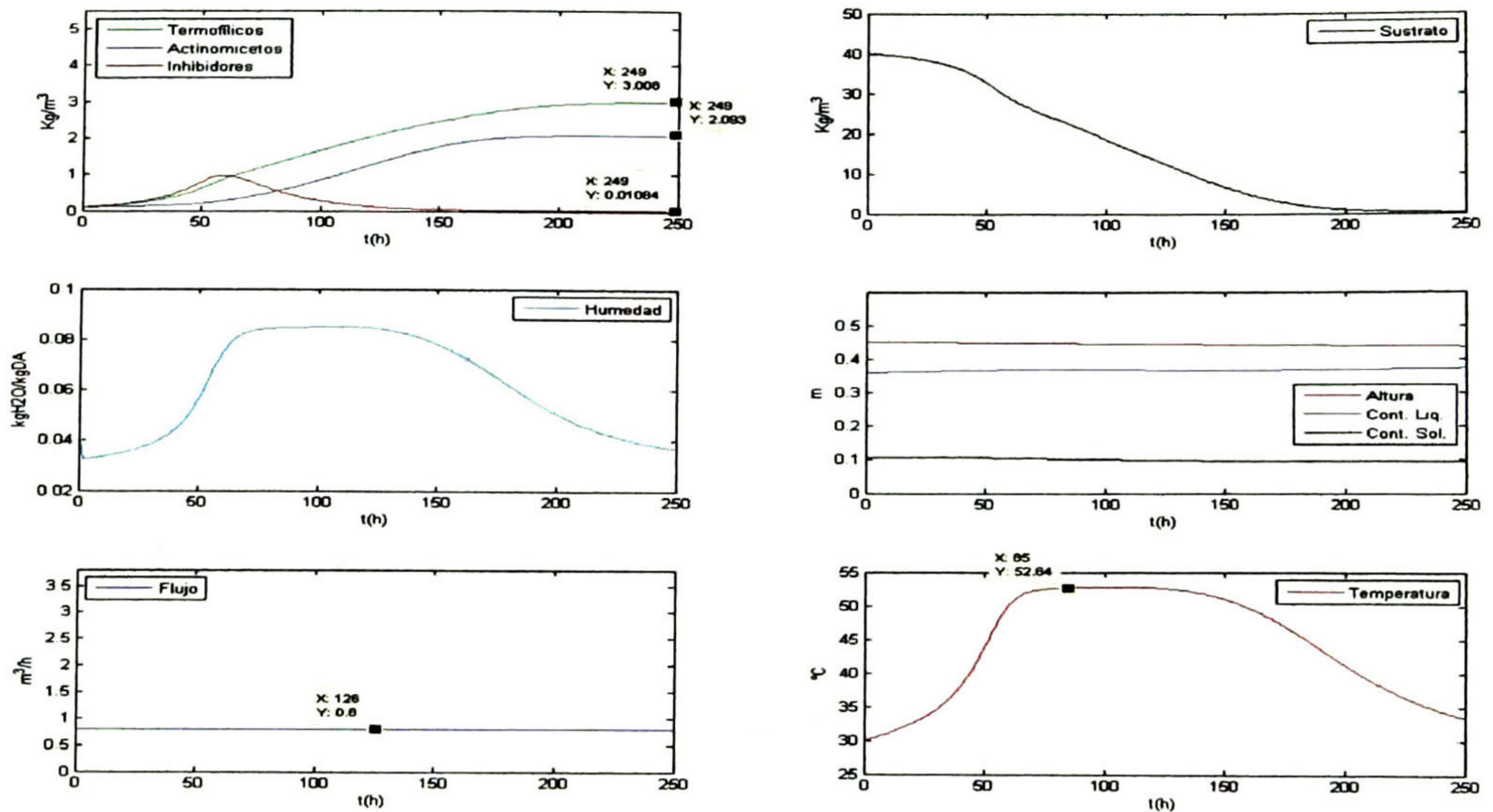


Figura 2.3: Resultados obtenidos con el modelo no lineal con flujo constante

2. La velocidad del consumo del sustrato es mayor en el período inicial y disminuye gradualmente.
3. después de 20 horas la velocidad de reacción empieza a incrementar en la parte baja de la masa de composta hasta las 70 h. Gradualmente la zona de reacción cambia a la parte superior de la masa de composta en el período de 70 a 250 h.
4. La generación de calor interna facilita la evaporación del agua. El vapor es llevado hacia arriba por el flujo de aire. Conforme el aire se aproxima a lo alto de la masa de composta llega a ser saturado y la pérdida de calor latente llega a ser mínima. Las temperaturas medidas en cada zona del volumen de la composta no discreparon significativamente.
5. Las fracciones de contenido líquido y contenido sólido de la masa de composta, conservan un valor similar a la salida que al de entrada [12].

Con estos resultados y el comparativo de las trayectorias de temperatura de la figura 2.2 observamos que el modelo es una buena aproximación del proceso FSS y podemos proceder a la optimización de la producción de biomasa que es el objetivo de este trabajo.

Capítulo 3

Métodos de Control Óptimo

3.1. Introducción

Como se mencionó en la revisión bibliográfica del capítulo 1 el diseño de control de procesos de FSS es difícil debido a que sus dinámicas son a menudo difícilmente entendidas, fuertemente no lineales y no estacionarias. Es por eso que estos problemas son solucionados usando métodos modernos para el diseño de control tales como: redes neuronales, control difuso, control adaptable, control óptimo, modos deslizantes, etc. La teoría de control óptimo ofrece varios métodos para determinar leyes de control y trayectorias óptimas mediante la minimización de una función de desempeño. Los métodos de iteración numérica más usuales encontrados en la literatura son: programación dinámica, cálculo variacional, quasilinealización, gradiente descendente, gradiente conjugado y proyección del gradiente [9], [18]. Este capítulo se enfoca en la descripción de dos métodos de control óptimo seleccionados para controlar el modelo del proceso FSS descrito en el capítulo anterior: el gradiente descendente y la proyección del gradiente [18]. La razón por la cual estos métodos son elegidos es por su facilidad de programación, trabajan con sistemas altamente no lineales, la convergencia ocurre para una variedad de condiciones iniciales y se requieren pocas iteraciones. Las secciones 3.2 y 3.3 son una transcripción de [18].

3.2. Gradiente Descendente

El método del algoritmo del gradiente descendente considera una función f compuesta de variables independientes (y) y se desea encontrar el punto donde esa función asume su mínimo valor. Se asume que las variables independientes no son restringidas por fronteras y una condición necesaria para que (y^*) sea un punto donde f tiene un mínimo relativo es que la diferencial de la función f se desvanezca en el punto (y^*). Es decir, para que $f(y^*)$ sea un mínimo relativo es necesario que el gradiente de f sea cero en el punto (y^*). Una manera

de determinar (y^*) es visualizando la minimización como un problema de escalamiento de una colina. La función f define colinas y valles en el espacio tridimensional. Una manera de encontrar el fondo de un valle es escoger un punto de prueba (y^0) y escalar hacia abajo hasta que es alcanzado un punto (y^*) donde moviéndose en cualquier dirección incrementa el valor de la función. Para hacer eficiente el proceso de escalamiento, elegimos escalar en la dirección del gradiente descendente, así aseguramos que la distancia más corta es trazada para alcanzar el fondo del valle. La dirección del gradiente descendente en (y^0) es determinada evaluando la pendiente o gradiente de la colina en el punto (y^0). El vector gradiente es normal al contorno de elevación de f .

3.2.1. Algoritmo del gradiente descendente

Para aplicar el algoritmo del gradiente descendente primero se establece la función objetivo (compuesta de variables independientes del sistema), el hamiltoniano, los coestados y el gradiente [18].

$$\dot{x}_i(t) = a(x(t), u(t), t) \quad (3.1)$$

$$J = h(x(t_f)) + \int_{t_0}^{t_f} g(x(t), u(t), t) dt \quad (3.2)$$

$$H_m = g(x(t), u(t), t) + \sum_{i=1}^n p_i \dot{x}_i(t) \quad (3.3)$$

$$\dot{p}_i(t) = -\frac{\partial H_m}{\partial x_i}(x(t), u(t), p(t), t) \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial H_m}{\partial u}(x(t), u(t), p(t), t) = 0 \quad t \in [t_0, t_f] \quad (3.5)$$

A continuación se describe el procedimiento para resolver problemas de control óptimo por el método del gradiente descendente:

1. Seleccionar una aproximación discreta a la trayectoria nominal de control $u^{(0)}(t)$, $t \in [t_0, t_f]$
2. Usando la trayectoria de control nominal integre las ecuaciones de estado de t_0 a t_f con condiciones iniciales $x(t_0) = x_0$ y almacene la trayectoria de estados resultante $x^{(i)}$ como un vector.

3. Calcule la condición límite $P^{(i)}(t_f)$ para los coestados $P^{(i)}(t)$ sustituyendo $x^{(i)}(t_f)$ del paso 2 en la ecuación $P^{(i)}(t_f) = \frac{\partial h}{\partial x}(x^{(i)}(t_f))$. Usando este valor de $P^{(i)}(t_f)$ como la condición inicial y el vector $x^{(i)}$ almacenado en el paso 2, integre las ecuaciones de los coestados $P^{(i)}(t)$ de t_f a t_o , evalúe $\frac{\partial H_m^{(i)}(t)}{\partial u}$, $t \in [t_o, t_f]$ y almacene esta función como un vector.

4. Si

$$\left\| \frac{\partial H_m^{(i)}}{\partial u} \right\| \leq \gamma, \quad (3.6)$$

donde γ es una constante preseleccionada positiva pequeña y

$$\left\| \frac{\partial H_m^{(i)}}{\partial u} \right\|^2 = \int_{t_o}^{t_f} \left[\frac{\partial H_m^{(i)}}{\partial u}(t) \right] \left[\frac{\partial H_m^{(i)}}{\partial u}(t) \right] dt, \quad (3.7)$$

termina el procedimiento iterativo, y salen las trayectorias óptimas de los estados y el control. Si el criterio de paro (3.6) no es satisfecho, genere una nueva función vector de control dado por

$$u^{(i+1)}(t_k) = u^{(i)}(t_k) - \tau \frac{\partial H_m^{(i)}}{\partial u}(t_k), \quad k = 0, \dots, N - 1 \quad (3.8)$$

donde

$$u^{(i)}(t) = u^{(i)}(t_k) \quad \text{para} \quad t \in [t_k, t_{k+1}], \quad k = 0, \dots, N - 1. \quad (3.9)$$

Reemplace $u^{(i)}(t_k)$ por $u^{(i+1)}(t_k)$, $k = 0, \dots, N - 1$, y retorne al paso 2.

Teorema 3.1 Si J es convexa en (u, x) , donde $p \leq 0$ y $a(x(t), u(t), t)$ es convexa en (u, x) (ó $p \geq 0$ y $a(x(t), u(t), t)$ es cóncava en (u, x)), entonces H_m es convexa (cóncava) en (u, x) lo que asegura la optimalidad de la solución $(u^*(t), x^*(t), p^*(t))$ [3].

En la figura 3.1 se muestra un diagrama de flujo de este procedimiento.

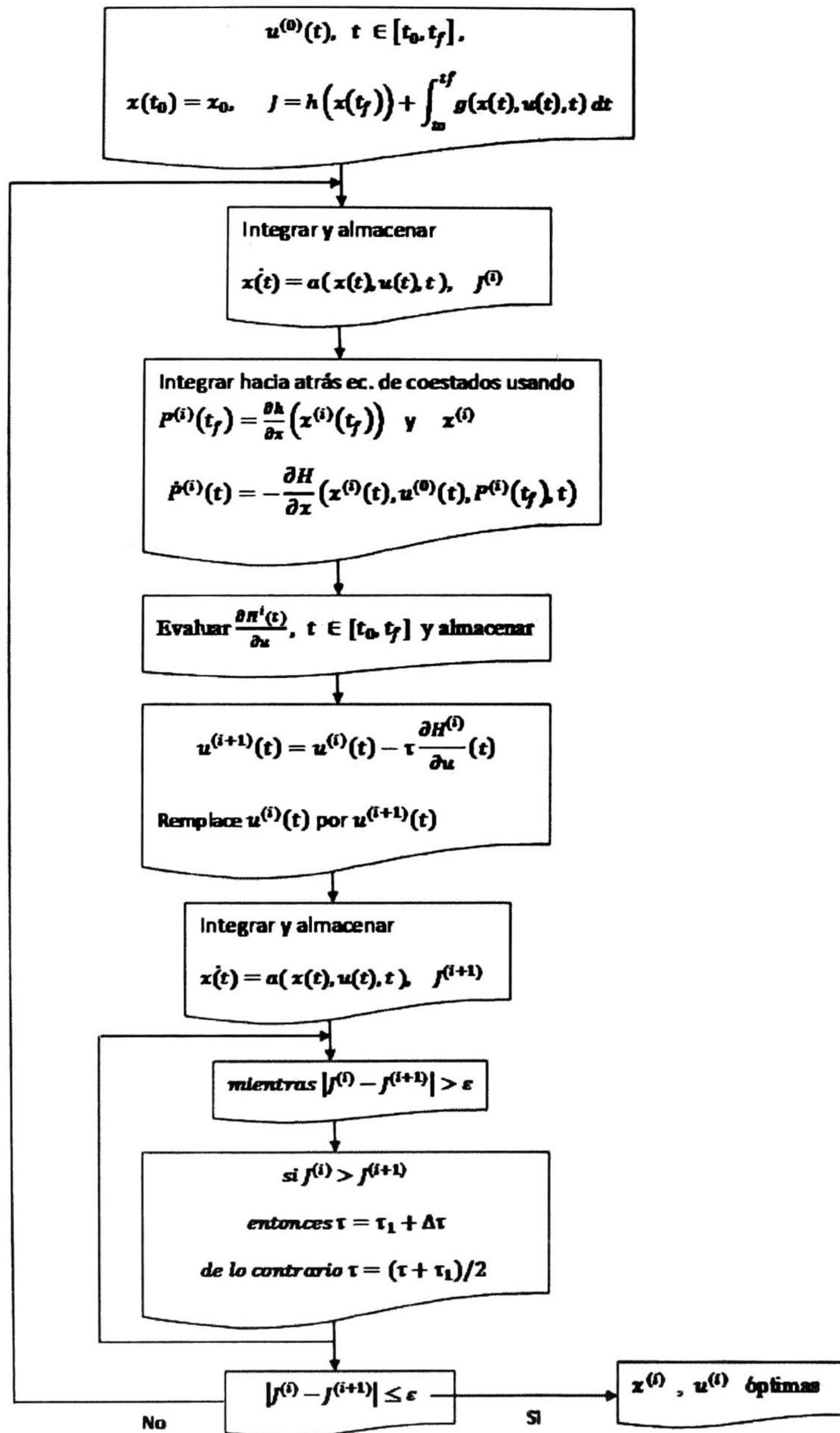


Figura 3.1: Diagrama del algoritmo del gradiente descendente

El valor usado para la constante de terminación γ dependerá del problema que está siendo resuelto y de la exactitud deseada de la solución. Puede ser deseable realizar varias corridas de prueba sobre un problema antes de que γ sea seleccionada. El procedimiento iterativo también puede ser terminado cuando $|J^{(i)} - J^{(i+1)}| \leq \epsilon$. Donde ϵ es una constante preseleccionada positiva pequeña. Una estrategia para seleccionar el tamaño de paso τ es usar una búsqueda de una sola variable. Se escoge un valor arbitrario inicial de τ , se calcula $\frac{\partial H_m^{(i)}}{\partial u}$, y se encuentra $u^{(i+1)}$. Entonces una búsqueda entre valores de $\tau > 0$ es efectuada hasta que se obtiene el valor más pequeño de J . Es decir nos movemos en la dirección del gradiente descendente hasta que no hay mas disminución de J .

3.3. Proyección del Gradiente

El método proyección del gradiente es un procedimiento numérico iterativo para encontrar el extremo de una una función de varias variables que requieren satisfacer varias relaciones restrictivas. Si la función objetivo a ser minimizada y las restricciones son funciones lineales de las variables, el problema de optimización es referido como un problema de programación lineal; cuando terminos no lineales están presentes en las relaciones restrictivas o en la función objetivo, el problema es referido como un problema de programación no lineal.

Sea f una función de variables y y $f(y)$ denota el valor f al punto y . El problema es encontrar el punto y^* donde f tiene su valor mínimo. Las variables y requieren satisfacer desigualdades restrictivas lineales; el conjunto de puntos que satisfacen las restricciones es denotado por R y llamado la región admisible. R es el interior y la frontera de la región, cuya frontera es determinada por las líneas que forman las restricciones H_i . En la figura 3.2 se muestran las líneas determinadas por las restricciones, los contornos de la función f , el gradiente negativo de f al punto $y^{(i)}$ ($-\partial f^{(i)}/\partial y$) y la proyección del gradiente $P[-\partial f^{(i)}/\partial y]$

Se asume que el punto inicial $y^{(0)}$ esta en la región admisible como se muestra. El primer paso es determinar el gradiente en el punto $y^{(0)}$. Ya que un mínimo es buscado, y es cambiado en la dirección del gradiente negativo tan lejos como sea posible sin violar las restricciones o hasta que el valor de la función objetivo incremente, lo primero que suceda. Como se muestra en la figura 3.2, y es cambiada en la dirección de el vector $-\partial f^{(0)}/\partial y$ hasta alcanzar la línea H_3 , que está sobre la frontera de la región admisible, encontrado al punto $y^{(1)}$. Si y fuera cambiado en la dirección del gradiente $-\partial f^{(1)}/\partial y$, la restricción H_3 podría ser violada, por lo tanto se toma la dirección sobre la línea H_3 que es la proyección $P[-\partial f^{(1)}/\partial y]$ del gradiente $-\partial f^{(1)}/\partial y$. y es cambiada en esta dirección hasta que el punto $y^{(2)}$ en la intersección de H_3 y H_4 es alcanzado. El siguiente movimiento es a lo largo de la proyección $P[-\partial f^{(2)}/\partial y]$ sobre H_4 hasta llegar al punto $y^{(3)}$, los valores encontrados de la función continúan decreciendo. Del punto $y^{(3)}$, se cambia y en la dirección de la proyección $P[-\partial f^{(3)}/\partial y]$ hasta llegar al punto $y^{(4)}$. Evaluando el gradiente en el punto $y^{(4)}$ es encontrado que la proyección $P[-\partial f^{(4)}/\partial y]$ indica un movimiento hacia atrás, hacia el punto $y^{(3)}$. Por una repetida interpolación a lo largo de la línea H_5 el punto $y^{(4)} = y^*$ es encontrado, donde f asume su mínimo valor.

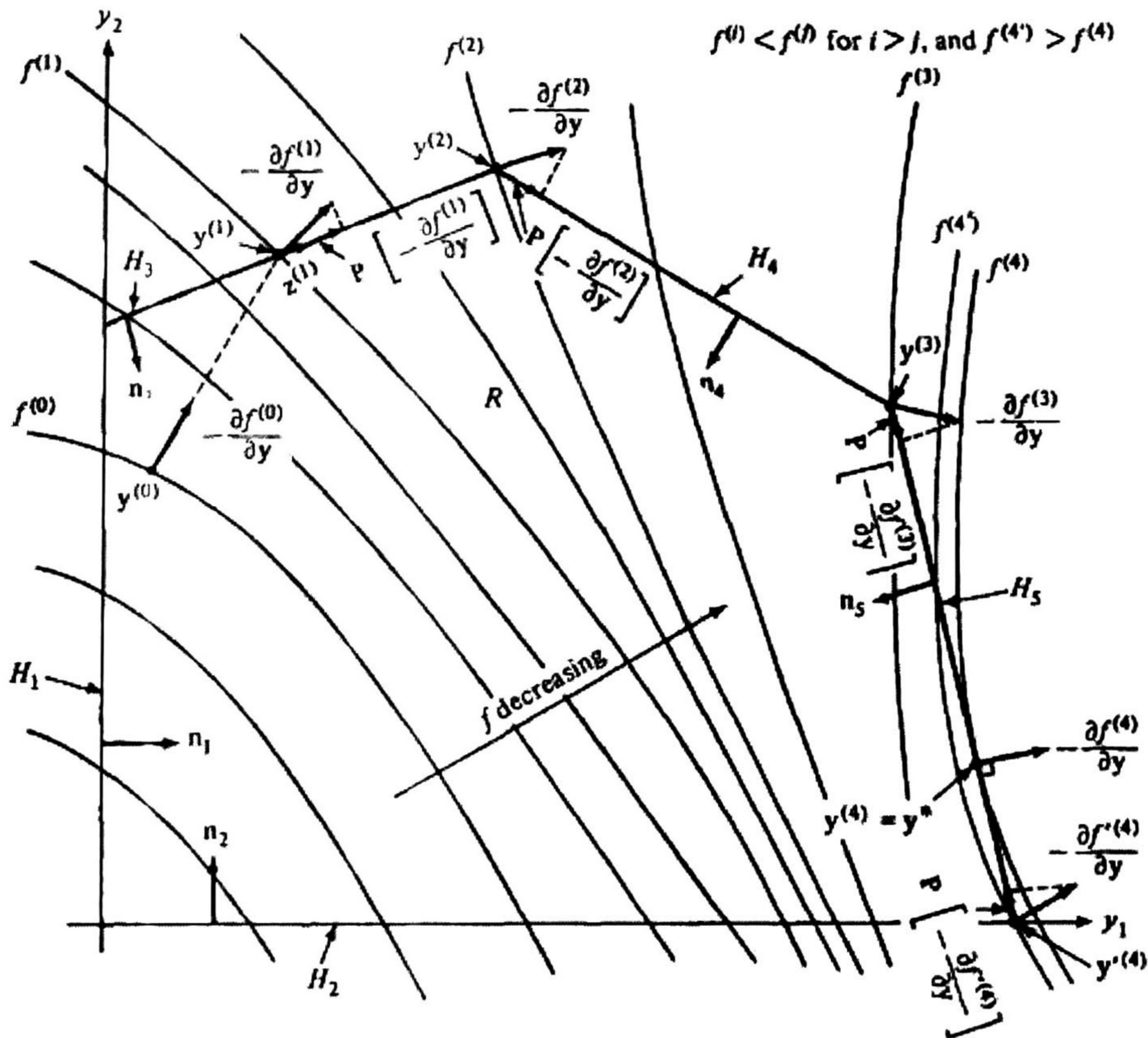


Figura 3.2: Minimización de una función de dos variables mediante la proyección del gradiente [18]

$-\partial f^{(4)}/\partial y$ es normal a H_5 y dirigido hacia la región inadmisble, eso indica que no pueden ser obtenidas mejoras por moverse a lo largo de H_5 , o por moverse en el interior de la región admisible.

3.3.1. Requerimientos de cálculo

El gradiente. Es asumido que la expresión para la función f a ser minimizada es conocida, es convexa y tiene segundas derivadas parciales continuas en un región R acotada y convexa. Los componentes del vector gradiente son encontrados por tomar las derivadas parciales de f con respecto a y_1, y_2, \dots, y_k . $-\partial f^{(i)}/\partial y$ es obtenido por cambiar el signo a cada componente de $\partial f^{(i)}/\partial y$.

La matriz proyección. Para determinar la matriz proyección P_q en algún punto $y^{(i)}$, es nece-

sario encontrar la matriz \mathbf{N}_q que está conformada por los vectores unitarios normales a H_i linealmente independientes. Primero se arreglan las L restricciones lineales normalizadas en la forma

$$\lambda(y^{(i)}) = \mathbf{N}_L^T y^{(i)} - \mathbf{v}_L. \quad (3.10)$$

Donde \mathbf{N}_L^T es un vector $K \times L$ conformado por los vectores normales a H_i y \mathbf{v}_L es un vector de tamaño L conformado por los elementos constantes de H_i . Se revisa el signo de cada componente de λ , ya que $y^{(i)}$ es asumido ser un punto admisible, cada componente de λ debe de ser no negativo. Si λ_j es cero, el vector unitario \mathbf{n}_j (tomado de \mathbf{N}_L^T) se incluye en \mathbf{N}_q ; si $\lambda_j > 0$, \mathbf{n}_j no se incluye en \mathbf{N}_q . Una vez que \mathbf{N}_q es conocida la matriz proyección puede ser formada

$$\mathbf{P}_q = \mathbf{I} - \mathbf{N}_q [\mathbf{N}_q^T \mathbf{N}_q]^{-1} \mathbf{N}_q^T \quad (3.11)$$

Donde \mathbf{I} es la matriz identidad $K \times K$. Ya que los vectores unitarios $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \dots, \mathbf{n}_q$ son linealmente independientes, la matriz $[\mathbf{N}_q^T \mathbf{N}_q]$ es no singular, y su inversa existe.

Subsecuentemente, podemos ver que solo un vector \mathbf{n}_q es adherido o quitado de \mathbf{N}_q en cada etapa del proceso iterativo. Las L desigualdades lineales definen una región convexa R en un espacio euclideo K -dimensional (E^K). Es asumido que R es acotado; por lo tanto deben haber al menos $(K + 1)$ desigualdades lineales ($L \geq K + 1$).

El máximo tamaño de paso permitido. Al cambiar y en la dirección del gradiente proyectado, es necesario conocer el máximo tamaño de paso que puede ser usado sin causar violación de alguna restricción. Se calcula $\mathbf{z}^{(i)}$ que representa el vector unitario en la dirección del gradiente proyectado,

$$\mathbf{z}^{(i)} = \mathbf{P}_q [-\partial f^{(i)} / \partial y] / \|\mathbf{P}_q [-\partial f^{(i)} / \partial y]\| \quad (3.12)$$

y se define

$$y' \triangleq y^{(i)} + \tau \mathbf{z}^{(i)}, \quad (3.13)$$

donde τ es un escalar que representa el tamaño de paso. Para encontrar el máximo valor de τ para el que todas las restricciones son satisfechas, sabemos que $y^{(i)}$ permanece en la intersección de los hiperplanos linealmente independientes H_1, H_2, \dots, H_q los cuales serán denotados por Q' y y' define una línea que también permanece en Q' para todos los valores de τ . La siguiente ecuación es determinada para el cálculo de τ

$$\tau_j = \frac{v_j - \mathbf{n}_j^T y^{(i)}}{\mathbf{n}_j^T \mathbf{z}^{(i)}}. \quad (3.14)$$

τ_j es calculado para todos los hiperplanos no solo los de Q' ; el valor mínimo positivo de esos τ_j 's, denotado por τ_m , determina el máximo paso que puede ser tomado a lo largo de la línea y' sin violar alguna restricción. Así

$$y'^{(i+1)} = y^{(i)} + \tau_m \mathbf{z}^{(i)} \quad (3.15)$$

es el punto más distante de $y^{(i)}$ a lo largo de la proyección del gradiente para el que no son violadas las restricciones.

Interpolación. Si el máximo paso es tomado al punto $y'^{(i+1)}$, la siguiente etapa del procedimiento iterativo puede indicar un paso de regreso hacia el punto $y^{(i)}$. Para determinar si el máximo tamaño de paso debe ser usado o no, formamos el producto interno

$$\mathbf{z}^{(i)T} \left[-\frac{\partial f}{\partial y} (y'^{(i+1)}) \right] \quad (3.16)$$

Si este producto interno es más grande o igual a cero, entonces el máximo paso es tomado; esto es,

$$y^{(i+1)} = y'^{(i+1)}. \quad (3.17)$$

Después de que el máximo paso ha sido tomado, el punto $y'^{(i+1)}$ permanece en la intersección de Q' y el hiperplano H_m (que corresponde a τ_m); por lo tanto H_m es adherido a Q' , y se calcula la nueva matriz proyección \mathbf{P}_{q+1} . Por otra parte si el producto interno es negativo, el máximo paso no es tomado. En su lugar la interpolación es usada para encontrar el punto

$$y^{(i+1)} = y^{(i)} + \theta \tau_m \mathbf{z}^{(i)} \quad (0 < \theta < 1), \quad (3.18)$$

donde

$$\mathbf{z}^{(i)T} \left[-\frac{\partial f}{\partial y} (y^{(i+1)}) \right] = 0, \quad (3.19)$$

esto es, el punto donde el gradiente es ortogonal a Q' . Un método directo para encontrar el valor apropiado de θ es por interpolación. $\theta = 0$ corresponde al punto $y^{(i)}$ y $\theta = 1$ corresponde al punto $y'^{(i+1)}$. θ_1 , la abscisa donde la línea recta de A a B tiene una ordenada de cero, es determinada de la relación

$$\theta_1 = \frac{\mathbf{z}^{(i)T} \left[-\frac{\partial f^{(i)}}{\partial y} \right]}{\mathbf{z}^{(i)T} \left[-\frac{\partial f^{(i)}}{\partial y} \right] - \mathbf{z}^{(i)T} \left[-\frac{\partial f'^{(i+1)}}{\partial y} \right]} \quad (3.20)$$

Enseguida evaluamos el gradiente al punto

$$y''^{(i+1)} = y^{(i)} + \theta_1 \tau_m \mathbf{z}^{(i)} \quad (3.21)$$

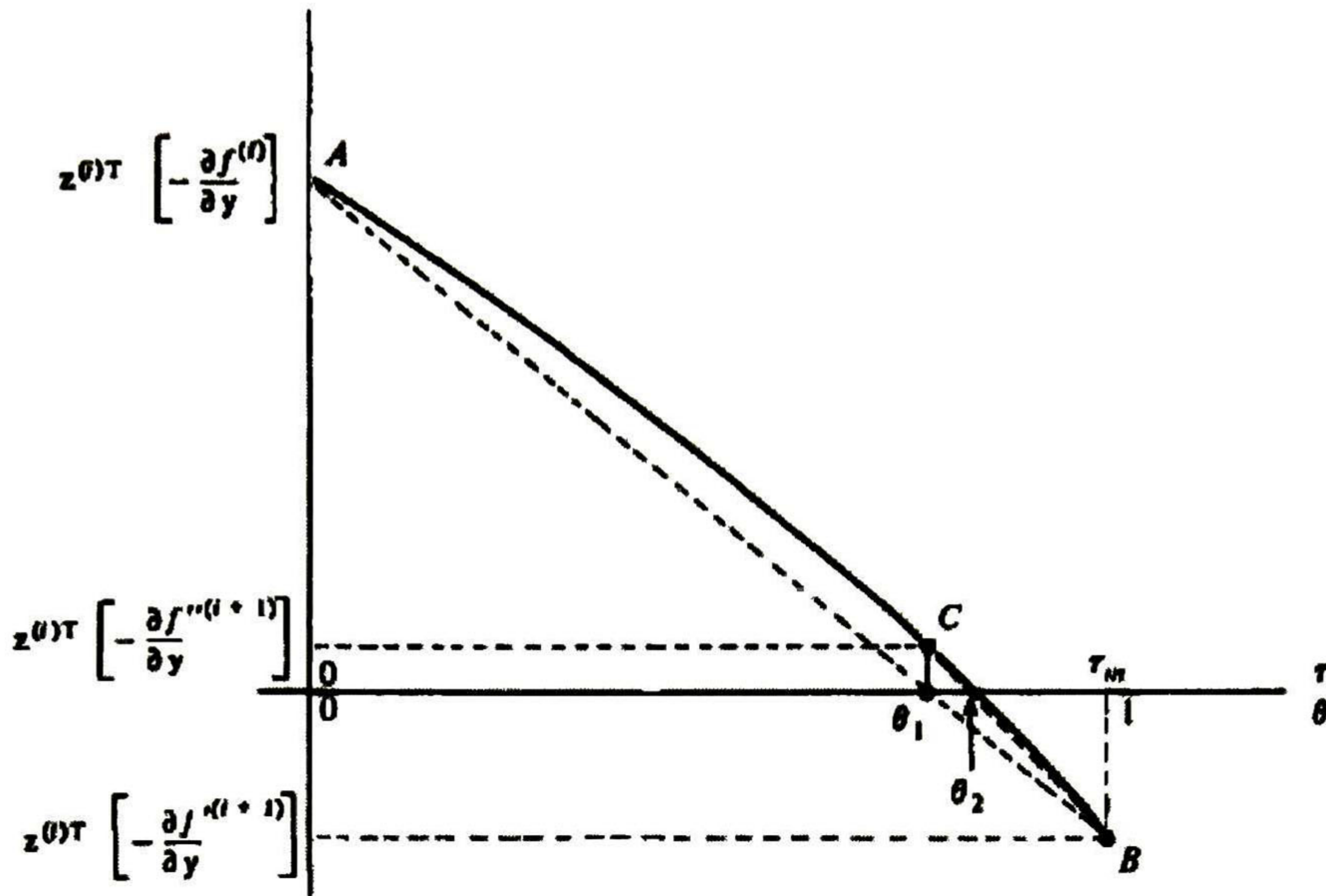


Figura 3.3: Interpolación [18]

y formamos el producto interno

$$\mathbf{z}^{(i)T} \left[-\frac{\partial f^{(i+1)}}{\partial y} \right] \tag{3.22}$$

Si este producto interno es positivo, como en la figura 3.3, usamos los puntos C y B para interpolarlo otra vez (si el producto interno es negativo, el punto C podría tener una ordenada negativa y los puntos A y C serían usados para la siguiente interpolación). Este procedimiento es repetido hasta que un punto $y^{(i+1)}$ es encontrado donde la magnitud del producto interno es menor que un preasignado número pequeño positivo ϵ_2 ; esto es

$$\left| \mathbf{z}^{(i)T} \left[-\frac{\partial f^{(i+1)}}{\partial y} \right] \right| < \epsilon_2. \tag{3.23}$$

3.3.2. Condiciones necesarias y suficientes para un mínimo global restringido

Teorema 3.2 *Asuma que f es una función convexa con segundas derivadas parciales continuas en una región R cerrada y acotada de E^K . Sea y^* un punto acotado de R que permanece en exactamente q , $1 \leq q \leq K$, hiperplanos que son asumidos linealmente independientes. Q denota la intersección de esos hiperplanos. El punto y^* es un mínimo global restringido de*

f si y solo si,

$$\mathbf{P}_q \left[-\frac{\partial f}{\partial y}(y^*) \right] = 0 \quad (3.24)$$

y

$$\mathbf{r} = [\mathbf{N}_q^T \mathbf{N}_q]^{-1} \mathbf{N}_q^T \left[-\frac{\partial f}{\partial y}(y^*) \right] \leq 0 \quad (3.25)$$

Una prueba de este teorema esta dada en [18] y no será repetida aquí. Sin embargo se hacen unos comentarios al respecto:

1. La prueba de que (3.24) y (3.25) son necesarias para que y^* sea un mínimo global restringido es un procedimiento constructivo para obtener un punto con un valor más pequeño de la función objetivo si ambas condiciones no son satisfechas en y^* . Así el algoritmo proyección del gradiente sigue directamente de la prueba.
2. Si y^* es un punto interior de R (y^* permanece dentro no sobre la frontera de R), entonces la matriz proyección \mathbf{P}_q es simplemente la matriz identidad $K \times K$, y la primera ecuación se reduce a

$$\frac{\partial f}{\partial y}(y^*) = 0. \quad (3.26)$$

La suficiencia sigue de la suposición de que f es una función convexa.

3. Debe ser enfatizado que este teorema da las condiciones necesarias y suficientes para que $f(y^*)$ sea un mínimo global (o absoluto) restringido. Esto es, si y^* satisface las ecuaciones anteriores, entonces $f(y^*) \leq f(y)$ para toda y admisible.

Debido a inexactitudes numéricas, si $\|\mathbf{P}_q [-\partial f/\partial y]\| \leq \epsilon_1$, donde ϵ_1 es una pequeña constante positiva, podemos suponer $\mathbf{P}_q [-\partial f/\partial y] \approx 0$, que indica que el vector gradiente es ortogonal a Q' y que el vector \mathbf{r} debe ser calculado para determinar si el mínimo global ha sido encontrado, o si no, que hiperplano debe ser quitado de Q' . Si la proyección del gradiente no es ortogonal a Q' , esto es, $\|\mathbf{P}_q [-\partial f/\partial y]\| > \epsilon_1$, todavía puede ser deseable quitar un hiperplano de Q' . Para detectar si un hiperplano debe ser quitado aunque $\|\mathbf{P}_q [-\partial f/\partial y]\| > \epsilon_1$, se efectúa una prueba que consiste de los siguientes pasos:

1. Sea α_i = la suma de los valores absolutos de los elementos de la i -ésima fila de la matriz $[\mathbf{N}_q^T \mathbf{N}_q]^{-1}$, se calcula α_i , $i = 1, 2, \dots, q$, y se determina

$$\beta = \max_i \{\alpha_i\} \quad (3.27)$$

2. Calcular el vector \mathbf{r} y determinar r_q , el máximo componente positivo de \mathbf{r} .
3. Si $r_q > \beta$, quitar el hiperplano H_q de Q' . Si $r_q \leq \beta$, no se quita hiperplano de Q' .

3.3.3. Procedimiento iterativo de la proyección del gradiente

Será asumido que el punto inicial $y^{(0)}$ es admisible y permanece en la intersección Q' de q hiperplanos linealmente independientes. Para determinar el mínimo global restringido:

1. Calcule la matriz proyección \mathbf{P}_q , el vector gradiente al punto $y^{(i)}$, $-\partial f^{(i)}/\partial y$, el vector \mathbf{r} y la proyección del gradiente $\mathbf{P}_q [-\partial f^{(i)}/\partial y]$. Si $\|\mathbf{P}_q [-\partial f^{(i)}/\partial y]\| \leq \epsilon_1$, y $\mathbf{r} \leq 0$, entonces $y^{(i)}$ es el mínimo global restringido y el procedimiento es terminado; de otra forma, ir al paso 2.
2. Determine si el hiperplano debe ser o no quitado de Q' . Si $\|\mathbf{P}_q [-\partial f^{(i)}/\partial y]\| \leq \epsilon_1$, quite el hiperplano H_q que corresponde a $r_q > 0$, forme la matriz proyección \mathbf{P}_{q-1} , y vaya al paso 3. La otra alternativa es que la norma de la proyección del gradiente sea más grande que ϵ_1 . En este caso, calcule β dado (3.27). Si $r_q > \beta$, quite el hiperplano H_q de Q' ; si $r_q \leq \beta$, Q' permanece sin cambio.
3. Calcule la proyección del gradiente normalizado $\mathbf{z}^{(i)}$ y el máximo tamaño de paso permitido τ_m . El siguiente punto tentativo $y'^{(i+1)}$ es encontrado de

$$y'^{(i+1)} = y^{(i)} + \tau_m \mathbf{z}^{(i)}. \quad (3.28)$$

4. Calcule el gradiente al punto $y'^{(i+1)}$, si

$$\mathbf{z}^{(i)T} \left[-\frac{\partial f}{\partial y} (y'^{(i+1)}) \right] \geq 0, \quad (3.29)$$

ajuste $y^{(i+1)} = y'^{(i+1)}$; ya que $y^{(i+1)}$ permanece en la intersección de Q' y H_m (el hiperplano que corresponde al tamaño de paso τ_m calculado en el paso 3), adhiera H_m a Q' , y retorne al paso 1.

De otra manera, si

$$\mathbf{z}^{(i)T} \left[-\frac{\partial f}{\partial y} (y'^{(i+1)}) \right] < 0, \quad (3.30)$$

encuentre $y^{(i+1)}$ por interpolación como se ilustra en la figura 3.3, mediante las ecuaciones (3.20) y (3.21). La intersección Q' permanece sin cambios, y el algoritmo comienza otra iteración retornando al paso 1.

En la figura 3.4 se muestra un diagrama de flujo de este procedimiento.

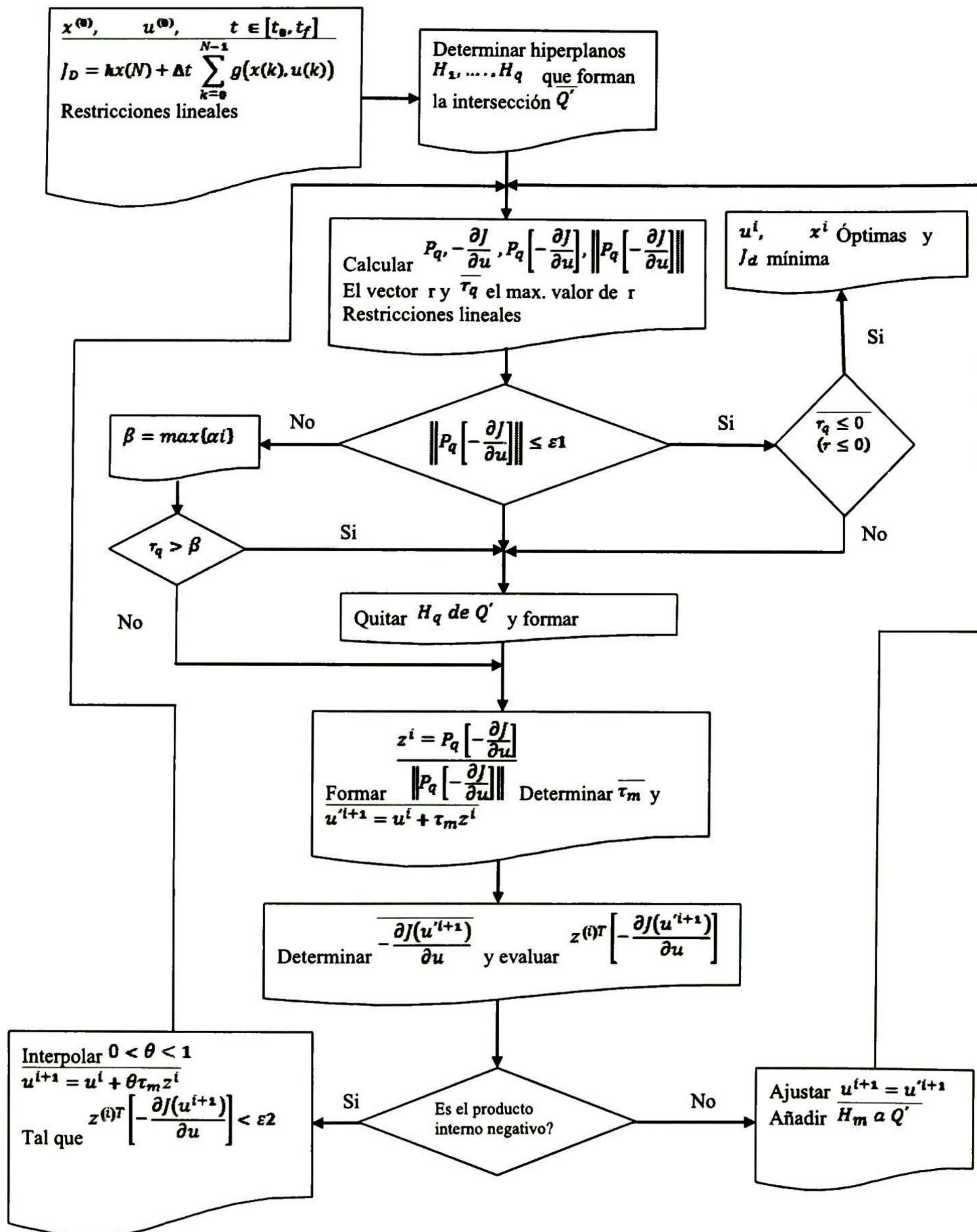


Figura 3.4: Diagrama de flujo del algoritmo proyección del gradiente

3.3.4. Características adicionales del algoritmo proyección del gradiente

1. Puede ocurrir que un punto calculado por el procedimiento iterativo permanezca en la intersección de i hiperplanos, de los cuales solo $q < i$ son linealmente independientes; el método proyección del gradiente contiene provisiones para tratar con tales situaciones.
2. El algoritmo provee un procedimiento de inicialización para generar un punto admisible de un arbitrario inicial supuesto $y^{(0)}$.
3. Si f es una función convexa en la región admisible de E^K y tiene segundas derivadas parciales continuas con respecto a cada uno de los componentes de y en la región admisible R , entonces el algoritmo proyección del gradiente converge a un mínimo global de f . Si f no es convexo en R , el algoritmo generalmente convergirá a un mínimo local. Para encontrar el mínimo global, usualmente se recurre a intentar puntos de inicio diferentes para determinar varios mínimos locales como sean posibles; el punto y^* que corresponde al mínimo local que tiene el valor más pequeño de f es el entonces seleccionado como el mejor punto posible.

3.3.5. Cálculo de trayectorias óptimas con el algoritmo proyección del gradiente

La técnica para resolver problemas de control óptimo usando el algoritmo proyección del gradiente consiste en encontrar una trayectoria de control admisible u^* que cause que el sistema

$$\dot{x}(t) = a(x(t), u(t)) \quad (3.31)$$

con estado inicial conocido $x(t_0) = x_0$ siga una trayectoria admisible x^* que minimice la función de desempeño

$$J = h(x(t_f)) + \int_{t_0}^{t_f} g(x(t), u(t)) dt. \quad (3.32)$$

Por simplicidad de notación, se debe asumir que el tiempo no aparece explícitamente en las ecuaciones de estado o en la función de desempeño; la solución de problemas que varían en el tiempo requiere solo modificaciones directas del procedimiento a ser descrito. Es también asumido que el tiempo final t_f es especificado, y ya que las ecuaciones son invariantes en el tiempo podemos dejar $t_0 = 0$. Aunque la técnica a ser presentada aplica a problemas que involucran restricciones lineales entre las variables de estado y control, debemos limitar nuestra discusión a problemas con restricciones de la forma

$$\begin{aligned} M_{i-} &\leq u_i(t) \leq M_{i+}, & t \in [0, t_f] & & i = 1, 2, \dots, m \\ S_{i-} &\leq x_i(t) \leq S_{i+}, & t \in [0, t_f] & & i = 1, 2, \dots, n \\ x_i(t_j) &= T_{ij}, & t_j \text{ especificado}, & & i = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (3.33)$$

M_{i-} y M_{i+} denotan las cotas inferior y superior sobre el i –ésimo componente de control, S_{i-} y S_{i+} son las cotas inferior y superior sobre el i –ésimo componente del estado, y T_{ij} es el valor requerido de la componente del estado x_i en el tiempo final t_j .

Ya que la proyección del gradiente es un algoritmo para minimizar una función de varias variables, primero debemos aproximar el problema de control óptimo a resolver por un problema discreto. Aproximamos las ecuaciones diferenciales de los estados por ecuaciones en diferencias, y el termino integral en la función de desempeño por una sumatoria. Aplicamos la aproximación más simple, discretización por el método de Euler

$$\begin{aligned} x(k+1) &= x(k) + a(x(k), u(k)) \cdot \Delta t \\ &\triangleq a_D(x(k), u(k)). \end{aligned} \quad (3.34)$$

$$J_D = h(x(N)) + \Delta t \sum_{k=0}^{N-1} g(x(k), u(k)). \quad (3.35)$$

Esta aproximación de la función de desempeño es una función de las variables $x(0), x(1), \dots, x(N)$, y $u(0), u(1), \dots, u(N-1)$. Recordando que el vector de estados es de dimensión n , y el vector de control de dimensión m , podemos ver que hay $n[N+1]$ valores de estado y mN valores de control, o un total de $n[N+1] + mN$ variables contenidas en J_D . Ya que $x(0)$ es especificado, el problema es encontrar las $N \cdot n + N \cdot m$ variables que minimizan J_D , y satisfacen la aproximación de las ecuaciones en diferencias de estados (3.34) y las restricciones (3.33).

En el planteamiento de la proyección del gradiente fue asumido que las relaciones de restricción fueron lineales; no obstante, las ecuaciones en diferencias de estados pueden ser no lineales. Para evitar esta dificultad debemos linealizar las ecuaciones de estado cerca de una trayectoria de estados-control nominal, y resolver una secuencia de problemas linealizados (técnica empleada en el método de cuasilinealización) [18]. En el límite, la secuencia de soluciones a los problemas linealizados convergirá a la solución del problema discreto no lineal si ciertos requerimientos técnicos son satisfechos:

1. Los valores de los estados y el control admisibles permanecen en un conjunto acotado y convexo (las restricciones lineales garantizan esto).
2. Las funciones g y h en la función de desempeño son convexas.
3. Cada componente de a en las ecuaciones de estado es convexo o concavo para los valores admisibles de estado-control.

Se ha notado que el método puede todavía converger aunque no sean satisfechas todas esas condiciones; no obstante, la convergencia no es asegurada [18].

Se asume que la i – ésima trayectoria de estado-control $(x^{(i)}(0), x^{(i)}(1), \dots, x^{(i)}(N); u^{(i)}(0), u^{(i)}(1), \dots, u^{(i)}(N-1))$ es conocida; la trayectoria inicial de estado-control es supuesta. Expandiendo la $(i+1)$ – ésima trayectoria en series de Taylor sobre la i – ésima trayectoria y reteniendo terminos hasta el primer orden, tenemos:

$$\begin{aligned} x^{(i+1)}(k+1) &= x^{(i)}(k+1) + \left[\frac{\partial a_D}{\partial x}(x^{(i)}(k), u^{(i)}(k)) \right] [x^{(i+1)}(k) - x^{(i)}(k)] \\ &\quad + \left[\frac{\partial a_D}{\partial u}(x^{(i)}(k), u^{(i)}(k)) \right] [u^{(i+1)}(k) - u^{(i)}(k)] \end{aligned} \quad (3.36)$$

Sustituyendo $a_D(x^{(i)}(k), u^{(i)}(k))$ para $x^{(i)}(k+1)$ y arreglando, obtenemos

$$\begin{aligned} x^{(i+1)}(k+1) &= \left[\frac{\partial a_D}{\partial x}(x^{(i)}(k), u^{(i)}(k)) \right] x^{(i+1)}(k) \\ &\quad + \left[\frac{\partial a_D}{\partial u}(x^{(i)}(k), u^{(i)}(k)) \right] u^{(i+1)}(k) + a_D(x^{(i)}(k), u^{(i)}(k)) \\ &\quad - \left[\frac{\partial a_D}{\partial x}(x^{(i)}(k), u^{(i)}(k)) \right] x^{(i)}(k) \\ &\quad - \left[\frac{\partial a_D}{\partial u}(x^{(i)}(k), u^{(i)}(k)) \right] u^{(i)}(k). \end{aligned} \quad (3.37)$$

Ya que $x^{(i)}$ y $u^{(i)}$ son conocidos, la ecuación puede ser escrita

$$x^{(i+1)}(k+1) = \mathbf{A}(k)x^{(i+1)}(k) + \mathbf{B}(k)u^{(i+1)}(k) + \mathbf{c}(k), \quad (3.38)$$

donde \mathbf{A} , \mathbf{B} y \mathbf{c} son matrices conocidas de apropiadas dimensiones que dependen de la i – ésima trayectoria de estado-control.

Hasta este punto se podría proceder a minimizar la función de costo J_D de la ecuación (3.35) sujeta a las restricciones de las ecuaciones de estado linealizadas (ec. 3.38), y cualquier restricción adicional (ec. 3.33), que para el problema discreto sería de la forma

$$M_{i-} \leq u_i(k) \leq M_{i+}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (3.39a)$$

$$S_{i-} \leq x_i(k) \leq S_{i+}, \quad k = 0, 1, \dots, N, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3.39b)$$

$$x_i(j) = T_{ij}, \quad j \text{ especificado}, \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad (3.39c)$$

no obstante, hay un beneficio adicional derivado de la linealización que hemos realizado. Ya que $x(0) = x_0$ es especificado, $x^{(i)}(0) = x_0$ para todo i . Sustituyendo la condición inicial y los valores de k en la ecuación (3.38), en general se obtiene:

$$\begin{aligned} x^{(i+1)}(k+1) &= \mathbf{A}(k)x_H(k) + \mathbf{c}(k) + \mathbf{A}(k)\dots\mathbf{A}(1)\mathbf{B}(0)u^{(i+1)}(0) \\ &\quad + \mathbf{A}(k)\dots\mathbf{A}(2)\mathbf{B}(1)u^{(i+1)}(1) + \dots \\ &\quad + \mathbf{A}(k)\mathbf{B}(k-1)u^{(i+1)}(k-1) + \mathbf{B}(k)u^{(i+1)}(k) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\triangleq x_H(k+1) + \mathbf{D}_0^{k+1}u^{(i+1)}(0) + \mathbf{D}_1^{k+1}u^{(i+1)}(1) + \dots \\
&\quad + \mathbf{D}_{k-1}^{k+1}u^{(i+1)}(k-1) + \mathbf{D}_k^{k+1}u^{(i+1)}(k) \\
&= x_H(k+1) + \sum_{l=0}^{N-1} [\mathbf{D}_l^{k+1}u^{(i+1)}(l)] \tag{3.40}
\end{aligned}$$

$x_H(k+1)$ es la parte de la solución para $x^{(i+1)}(k+1)$ que no depende de los valores del control $u^{(i+1)}(0), \dots, u^{(i+1)}(N-1)$, y \mathbf{D}_l^{k+1} es una matriz $n \times m$ que determina la contribución del control al l -ésimo instante para el valor del estado al $(k+1)$ -ésimo instante. Las matrices $x_H(k+1)$ y \mathbf{D} son encontradas de las siguientes relaciones

$$x_H(k+1) = \mathbf{A}(k)x_H(k) + \mathbf{c}(k), \quad x_H(0) = x_0, \tag{3.41}$$

$$\mathbf{D}_l^{k+1} = \begin{cases} \mathbf{A}(k)\mathbf{A}(k)\dots\mathbf{A}(k)\mathbf{B}(0), & \text{para } k > l \\ \mathbf{B}(l), & \text{para } k = l \\ 0, & \text{para } k < l. \end{cases} \tag{3.42}$$

Si la trayectoria de estado discreto entera se escribe en términos de la trayectoria de control discreto en forma de matriz particionada, tenemos

$$\begin{bmatrix} x^{(i+1)}(0) \\ x^{(i+1)}(1) \\ x^{(i+1)}(2) \\ \vdots \\ x^{(i+1)}(N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_0^0 & \mathbf{D}_1^0 & \dots & \mathbf{D}_{N-1}^0 \\ \mathbf{D}_0^1 & \mathbf{D}_1^1 & \dots & \mathbf{D}_{N-1}^1 \\ \mathbf{D}_0^2 & \mathbf{D}_1^2 & \dots & \mathbf{D}_{N-1}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{D}_0^N & \mathbf{D}_1^N & \dots & \mathbf{D}_{N-1}^N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^{(i+1)}(0) \\ u^{(i+1)}(1) \\ u^{(i+1)}(2) \\ \vdots \\ u^{(i+1)}(N-1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_H(0) \\ x_H(1) \\ x_H(2) \\ \vdots \\ x_H(N) \end{bmatrix} \tag{3.43}$$

o

$$X^{(i+1)} = \mathbf{D}U^{(i+1)} + X_H. \tag{3.44}$$

De la ecuación (3.42) se nota que la matriz \mathbf{D} contendrá una matriz de ceros trinagular, y que las matrices \mathbf{D}_j^0 , $j = 0, \dots, N-1$, en la fila superior son todas definidas cero.

La ecuación (3.43) es importante porque permite reducir sustancialmente el número de variables usadas en el algoritmo proyección del gradiente. Esto es realizado reemplazando $x^{(i+1)}(k)$ en la expresión J_D por $\mathbf{D}_0^k u^{(i+1)}(0) + \mathbf{D}_1^k u^{(i+1)}(1) + \dots + \mathbf{D}_{N-1}^k u^{(i+1)}(N-1) + x_H(k)$, para $k = 0, 1, \dots, N$. En adición, si hay desigualdades restrictivas para los estados como en (3.39), esas relaciones pueden ser expresadas como restricciones lineales que incluyen solo

los valores de control. Para recapitular, el problema a ser resuelto es ahora de la forma: Encontrar los valores de control que satisfagan las restricciones

$$\begin{bmatrix} M_{1-} \\ M_{2-} \\ \vdots \\ M_{m-} \end{bmatrix} \leq u^{(i+1)}(k) \leq \begin{bmatrix} M_{1+} \\ M_{2+} \\ \vdots \\ M_{m+} \end{bmatrix}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1, \quad (3.45a)$$

$$\begin{bmatrix} S_{1-} \\ S_{2-} \\ \vdots \\ S_{n-} \end{bmatrix} \leq \mathbf{D}_0^k u^{(i+1)}(0) + \mathbf{D}_1^k u^{(i+1)}(1) + \dots + \mathbf{D}_{N-1}^k u^{(i+1)}(N-1) + x_H(k) \leq \begin{bmatrix} S_{1+} \\ S_{2+} \\ \vdots \\ S_{n+} \end{bmatrix}, \quad k = 0, 1, \dots, N, \quad (3.45b)$$

$$\begin{bmatrix} T_{1j} \\ T_{2j} \\ \vdots \\ T_{nj} \end{bmatrix} = \mathbf{D}_0^j u^{(i+1)}(0) + \mathbf{D}_1^j u^{(i+1)}(1) + \dots + \mathbf{D}_{N-1}^j u^{(i+1)}(N-1) + x_H(j),$$

j especificado (3.45c)

y minimizar la función de Nm variables

$$J_D = h(U^{(i+1)}) + \Delta t \sum_{k=0}^{N-1} g(U^{(i+1)}). \quad (3.46)$$

Esta expresión para la medida de desempeño simplemente indica que solo los valores de control $u^{(i+1)}(0), \dots, u^{(i+1)}(N-1)$ aparecen explícitamente, ya que la ecuación (3.43) ha sido usada para eliminar la presencia de los valores de estado.

3.3.6. Procedimiento para resolver problemas de control óptimo usando la proyección del gradiente

El procedimiento para resolver control óptimo y su trayectoria es:

1. Aproximar las ecuaciones diferenciales de los estados por ecuaciones en diferencias y el término integral de la medida de desempeño por una sumatoria; linealice las ecuaciones en diferencias de estados.

2. Determine las expresiones, en forma literal, para las restricciones de estado y la medida de desempeño J_D en términos de $x_H(k)$ ($k = 0, 1, \dots, N$), $u^{(i+1)}(k)$ ($k = 0, 1, \dots, N - 1$), y las matrices \mathbf{D} de la ecuación (3.43).
3. Suponga una trayectoria nominal de estado y una trayectoria nominal de control, $x^{(0)}$, $u^{(0)}$. Ajuste el índice de iteración i igual a cero.
4. Usando las trayectorias de estados-control $x^{(i)}$, $u^{(i)}$, calcule las matrices \mathbf{A} , \mathbf{B} y \mathbf{c} , y use esas matrices para determinar X_H y D .
5. Sustituya los valores numéricos de X_H y D en las expresiones obtenidas en el paso 2 para determinar los coeficientes en las ecuaciones restrictivas y la medida de desempeño.
6. Minimice la función J_D , usando el algoritmo proyección del gradiente.
7. Determine $x^{(i+1)}$ evaluando la ecuación (3.44) con $u^{(i+1)}$ encontrado en el paso 6.
8. Si la norma de la diferencia entre sucesivas iteraciones de control es pequeña, es decir,

$$\|U^{(i+1)} - U^{(i)}\| \leq \gamma, \quad (3.47)$$

termina el procedimiento y salen $x^{(i+1)}$, $u^{(i+1)}$ y el valor mínimo de J_D ; de otra manera se incrementa i y se retorna al paso 4.

Capítulo 4

Control Óptimo del Reactor FSS

4.1. Introducción

En este capítulo se presentan las aplicaciones de los dos métodos de control óptimo al modelo del reactor FSS, para obtener la trayectoria óptima de flujo volumétrico del aire acondicionado de entrada en el reactor que controle la temperatura y maximice la producción de microorganismos termofílicos. Primero se describe la metodología de la aplicación del algoritmo del gradiente descendente con búsqueda de una sola variable, y se presentan las trayectorias óptimas de los estados y el control óptimo obtenidos. Posteriormente se presenta la metodología de aplicación del algoritmo proyección del gradiente y las trayectorias óptimas de los estados y el control encontradas. Los algoritmos se programaron en Matlab y convergen en pocas iteraciones.

4.2. Aplicación del algoritmo del Gradiente Descendente

Primero establecemos la función de desempeño con base en el objetivo de nuestro proceso que consiste en maximizar la producción de microorganismos termofílicos para el cultivo de hongos comestibles. También requerimos que el esfuerzo de control no sea grande. Por lo tanto construimos la siguiente función de desempeño:

$$J = - \int_{t_0}^{t_f} (Qx_2^2 + Ru^2) dt, \quad (4.1)$$

la cual indica una maximización de la variable x_2 (microorganismos termofílicos) sin un consumo grande del esfuerzo de control (flujo volumétrico de aire). En general Q es una matriz simétrica real semidefinida positiva y R es una matriz simétrica real definida positiva. Para

nuestro caso Q y R son parámetros escalares cuyos valores se seleccionan arbitrariamente [18].

Con base en el teorema 3.1 del capítulo 3 procederemos a verificar si la función de desempeño es cóncava.

4.2.1. Prueba de concavidad de la función de desempeño

Teorema 4.1 (Caracterización de convexidad del Hessiano) *Dado un conjunto convexo y no vacío $S \subset R^n$, suponga que la función continua $f : S \rightarrow R$ es dos veces continuamente diferenciable en S . Entonces f es convexa(cóncava) si y solo si su matriz Hessiano es semidefinida positiva (semidefinida negativa). f es estrictamente convexa (estrictamente cóncava) si su matriz Hessiano es definida positiva (definida negativa) [8].*

Prueba

Del teorema 4.1 verificaremos si $g(x(t), u(t)) = -(Qx_2^2 + Ru^2)$ de la función de desempeño es cóncava para la optimalidad de las trayectorias $(x(t), u(t))$. El Hessiano de $g(x(t), u(t))$ es

$$H_{ss}(g) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 g}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 g}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 g}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 g}{\partial x_2^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2Q & 0 \\ 0 & -2R \end{bmatrix}$$

Como Q es semidefinida positiva y R es definida positiva la función de desempeño es cóncava para $Q \geq 0$ y es estrictamente cóncava para $Q > 0$. En la función de desempeño $Q > 0$ por lo tanto la función de desempeño es estrictamente cóncava.

Para las ecuaciones de estado suponemos que cada componente de $a(x(t), u(t))$ es convexo o concavo para los valores admisibles de estado-control.

4.2.2. Cálculo de ecuaciones del gradiente descendente

Primero construimos el Hamiltoniano empleando las ecuaciones diferenciales del modelo del reactor FSS (ecs. 2.11 - 2.19) y la función de desempeño (ec. 4.1):

$$\begin{aligned}
H_m = & -(Qx_2^2 + Ru^2) + p_1 \left[-\frac{1}{l} \frac{dl}{dt} x_1 + R_{x_1} \right] + p_2 \left[-\frac{1}{l} \frac{dl}{dt} x_2 + R_{x_2} \right] \\
& + p_3 \left[-\frac{1}{l} \frac{dl}{dt} x_3 + R_{x_3} \right] + p_4 \left[-\frac{1}{l} \frac{dl}{dt} S + R_S \right] \\
& + p_5 \left[-\frac{1}{l} \frac{dl}{dt} \theta_s + \frac{1}{\rho_s} (R_{x_1} + R_{x_2} + R_{x_3} + R_S) \right] \\
& + p_6 \left[-\frac{1}{l} \frac{dl}{dt} \theta_l + \frac{1}{\rho l} (R_W - \frac{v_e \rho_a}{V} (H^* - H)) \right] \\
& + p_7 \left[\frac{1}{\rho C_p} \left(-\frac{v_e \rho_a}{V} (i^* - i_e) + R_H - \frac{Ul_p}{A_b} (T - T_0) \right) \right] \\
& + p_8 \left[\frac{v_e}{V} (H_e + H^* - 2H) \right] + p_9 \left[-\frac{g\rho}{\eta} l^2 \right]
\end{aligned} \tag{4.2}$$

Los coestados se obtienen de las derivadas del Hamiltoniano con respecto a los estados:

$$\begin{aligned}
\dot{p}_1 = & -\frac{\partial H_m}{\partial x_1} = - \left[p_1 \left[-\frac{1}{l} \frac{dl}{dt} + (\mu_1 - \lambda_1) \right] + p_4 \left[-\frac{1}{Y} \mu_1 + \lambda_1 \right] \right. \\
& + p_5 \left[\frac{1}{\rho_s} (\mu_1 - \lambda_1) + \left(-\frac{1}{Y} \mu_1 + \lambda_1 \right) \right] + p_6 \left[\frac{1}{\rho l} \left(\frac{Y_{W/S}}{Y} - Y_{W/X} \right) \mu_1 \right] \\
& \left. + p_7 \left[\left(\frac{(-\frac{\Delta h s_1}{Y} - \Delta h x_1)}{C_p \rho} \right) \mu_1 \right] \right]
\end{aligned} \tag{4.3}$$

$$\begin{aligned}
\dot{p}_2 = & -\frac{\partial H_m}{\partial x_2} = 2Qx_2 - \left[p_2 \left[-\frac{1}{l} \frac{dl}{dt} + (\mu_2 - \lambda_2) \right] + p_4 \left[-\frac{1}{Y} \mu_2 + \lambda_2 \right] \right. \\
& + p_5 \left[\frac{1}{\rho_s} (\mu_2 - \lambda_2) + \left(-\frac{1}{Y} \mu_2 + \lambda_2 \right) \right] + p_6 \left[\frac{1}{\rho l} \left(\frac{Y_{W/S}}{Y} - Y_{W/X} \right) \mu_2 \right] \\
& \left. + p_7 \left[\left(\frac{(-\frac{\Delta h s_2}{Y} - \Delta h x_2)}{C_p \rho} \right) \mu_2 \right] \right]
\end{aligned} \tag{4.4}$$

$$\begin{aligned}
\dot{p}_3 = & -\frac{\partial H_m}{\partial x_3} = - \left[p_3 \left[-\frac{1}{l} \frac{dl}{dt} + (\mu_3 - \lambda_3) \right] + p_4 \left[-\frac{1}{Y} \mu_3 + \lambda_3 \right] \right. \\
& + p_5 \left[\frac{1}{\rho_s} (\mu_3 - \lambda_3) + \left(-\frac{1}{Y} \mu_3 + \lambda_3 \right) \right] + p_6 \left[\frac{1}{\rho l} \left(\frac{Y_{W/S}}{Y} - Y_{W/X} \right) \mu_3 \right] \\
& \left. + p_7 \left[\left(\frac{(-\frac{\Delta h s_3}{Y} - \Delta h x_3)}{C_p \rho} \right) \mu_3 \right] \right]
\end{aligned} \tag{4.5}$$

$$\begin{aligned}
\dot{p}_4 = -\frac{\partial Hm}{\partial S} = & - \left[p_1 \left[\frac{\partial R_{x_1}}{\partial S} \right] + p_2 \left[\frac{\partial R_{x_2}}{\partial S} \right] + p_3 \left[\frac{\partial R_{x_3}}{\partial S} \right] \right. \\
& + p_4 \left[-\frac{1}{l} \frac{dl}{dt} + \frac{\partial R_S}{\partial S} \right] + p_5 \left[\frac{1}{\rho_s} \left(\frac{\partial R_{x_1}}{\partial S} + \frac{\partial R_{x_2}}{\partial S} + \frac{\partial R_{x_3}}{\partial S} + \frac{\partial R_S}{\partial S} \right) \right] \\
& \left. + p_6 \left[\frac{1}{\rho l} \frac{\partial R_W}{\partial S} \right] + p_7 \left[\frac{\partial R_H}{\partial S} \right] \right] \quad (4.6)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{p}_5 = \frac{\partial Hm}{\partial \theta_S} = & - \left[p_1 \left[\frac{\partial \left(-\frac{1}{l} \frac{dl}{dt} \right)}{\partial \theta_S} x_1 \right] + p_2 \left[\frac{\partial \left(-\frac{1}{l} \frac{dl}{dt} \right)}{\partial \theta_S} x_2 \right] \right. \\
& + p_3 \left[\frac{\partial \left(-\frac{1}{l} \frac{dl}{dt} \right)}{\partial \theta_S} x_3 \right] + p_4 \left[\frac{\partial \left(-\frac{1}{l} \frac{dl}{dt} \right)}{\partial \theta_S} S \right] \\
& + p_5 \left[\frac{\partial \left(-\frac{1}{l} \frac{dl}{dt} \right)}{\partial \theta_S} \theta_S \right] + p_6 \left[\frac{\partial \left(-\frac{1}{l} \frac{dl}{dt} \right)}{\partial \theta_S} \theta_l \right] \\
& + p_7 \left[\frac{\partial \left(-\frac{1}{l} \frac{dl}{dt} \right)}{\partial \theta_S} T - \frac{\partial \left(\frac{1}{\rho} \right)}{\partial \theta_S} \frac{1}{C_p} \left(-\frac{v_e \rho_a}{V} (i^* - i_e) + R_H - \frac{U l_p}{A_b} (T - T_0) \right) \right] \\
& \left. + p_9 \left[\frac{\partial \rho}{\partial \theta_S} \left(-\frac{g}{\eta} l^2 \right) \right] \right] \quad (4.7)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{p}_6 = \frac{\partial Hm}{\partial \theta_l} = & - \left[p_1 \left[\frac{\partial \left(-\frac{1}{l} \frac{dl}{dt} \right)}{\partial \theta_l} x_1 \right] + p_2 \left[\frac{\partial \left(-\frac{1}{l} \frac{dl}{dt} \right)}{\partial \theta_l} x_2 \right] \right. \\
& + p_3 \left[\frac{\partial \left(-\frac{1}{l} \frac{dl}{dt} \right)}{\partial \theta_l} x_3 \right] + p_4 \left[\frac{\partial \left(-\frac{1}{l} \frac{dl}{dt} \right)}{\partial \theta_l} S \right] \\
& + p_5 \left[\frac{\partial \left(-\frac{1}{l} \frac{dl}{dt} \right)}{\partial \theta_l} \theta_S \right] + p_6 \left[\frac{\partial \left(-\frac{1}{l} \frac{dl}{dt} \right)}{\partial \theta_l} \theta_l \right] \\
& + p_7 \left[\frac{\partial \left(-\frac{1}{l} \frac{dl}{dt} \right)}{\partial \theta_l} T - \frac{\partial \left(\frac{1}{\rho} \right)}{\partial \theta_l} \frac{1}{C_p} \left(-\frac{v_e \rho_a}{V} (i^* - i_e) + R_H - \frac{U l_p}{A_b} (T - T_0) \right) \right] \\
& \left. + p_9 \left[\frac{\partial \rho}{\partial \theta_l} \left(-\frac{g}{\eta} l^2 \right) \right] \right] \quad (4.8)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{p}_7 = -\frac{\partial Hm}{\partial T} = & - \left[p_1 \left[\frac{\partial R_{x_1}}{\partial T} \right] + p_2 \left[\frac{\partial R_{x_2}}{\partial T} \right] + p_3 \left[\frac{\partial R_{x_3}}{\partial T} \right] + p_4 \left[\frac{\partial R_S}{\partial T} \right] \right. \\
& + p_5 \left[\frac{1}{\rho_s} \left(\frac{\partial R_{x_1}}{\partial T} + \frac{\partial R_{x_2}}{\partial T} + \frac{\partial R_{x_3}}{\partial T} + \frac{\partial R_S}{\partial T} \right) \right] + p_6 \frac{1}{\rho_l} \left[\frac{\partial R_W}{\partial T} - \frac{v_e \rho_a}{V} \frac{\partial H^*}{\partial T} \right] \\
& \left. + p_7 \left[\frac{1}{\rho C_p} \left(-\frac{v_e \rho_a}{V} \left(\frac{\partial i^*}{\partial T} - \frac{\partial i_e}{\partial T} \right) + \frac{\partial R_H}{\partial T} - \frac{U l_p}{A_b} \right) \right] + p_8 \left[\frac{v_e}{V} \left(\frac{\partial H^*}{\partial T} \right) \right] \right] \quad (4.9)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{p}_8 = -\frac{\partial Hm}{\partial H} = & \left[-p_6 \left[\frac{1}{\rho l} \frac{v_e \rho_a}{V} \right] + p_7 \left[-\frac{1}{C_p \rho} \frac{v_e \rho_a}{V} \left(\frac{di^*}{dH} - \frac{di}{dH} \right) \right] \right. \\
& \left. + p_8 \left[\frac{v_e}{V} \left(\frac{dH_e}{dH} - 2 \right) \right] \right] \quad (4.10)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{p}_9 = -\frac{\partial Hm}{\partial l} = & - \left[p_1 \frac{g}{\eta} \rho x_1 + p_2 \frac{g}{\eta} \rho x_2 + p_3 \frac{g}{\eta} \rho x_3 + p_4 \frac{g}{\eta} \rho S + p_5 \frac{g}{\eta} \rho \theta_S \right. \\
& \left. + p_6 \frac{g}{\eta} \rho \theta_l - p_9 2 \frac{g}{\eta} \rho l \right] \quad (4.11)
\end{aligned}$$

Las condiciones finales para la integración hacia atrás de los coestados son determinados por $P^{(i)}(t_f) = \frac{\partial h}{\partial x}(x^{(i)}(t_f))$. Debido a que en la función de desempeño no se incluye el término para los estados finales entonces se define:

$$P^{(i)}(t_f) = 0 \quad (4.12)$$

El vector gradiente se obtiene de la derivada del hamiltoniano con respecto a la variable de control:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial Hm}{\partial u} = & -2Ru + p_6 \left[-\frac{1}{\rho l} \frac{\rho_a}{V} (H^* - H) \frac{\partial v_e}{\partial u} \right] + p_7 \left[-\frac{1}{\rho C_p} \frac{\rho_a}{V} \frac{\partial v_e}{\partial u} (i^* - i) \right] \\
& + p_8 \left[\frac{1}{V} \frac{\partial v_e}{\partial u} (H_e + H^* - 2H) \right] \quad (4.13)
\end{aligned}$$

De acuerdo al procedimiento para la implementación del algoritmo (sección 3.2.1) estas ecuaciones calculadas se programaron en Matlab y se implementó un lazo de búsqueda entre valores de $\tau > 0$ partiendo de un valor arbitrario inicial para encontrar el mínimo valor de J en cada iteración. Se inició el ciclo iterativo para maximizar la función de desempeño con los valores de parámetros y variable de control descritos en la tabla 4.1. Los valores de las condiciones finales de los coestados están dados por la ecuación (4.12) y los valores de las condiciones iniciales de los estados y los parámetros del modelo se encuentran en las tablas 2.1 y 2.2.

Tabla 4.1: Valores de parámetros y $u^{(0)}(t)$ del algoritmo del gradiente descendente

Valores de parámetros y $u^{(0)}(t)$	
$u^{(0)}(t) = 0.1$	$t \in [t_0, t_f]$
$R = 0.1$	
$Q = 0.12$	
$\tau = 0.5$	

4.3. Resultados

A continuación se presentan los resultados del modelo obtenidos con la aplicación del algoritmo del gradiente descendente sujeto a las condiciones descritas en la sección 4.2. El modelo requirió 12 iteraciones para converger.

4.3.1. Trayectorias de control óptimo y respuesta del sistema

Aplicando los valores de parámetros y $u^{(0)}(t)$ de la tabla 4.1 para iniciar el algoritmo se obtuvieron las trayectorias mostradas en la figura 4.1:

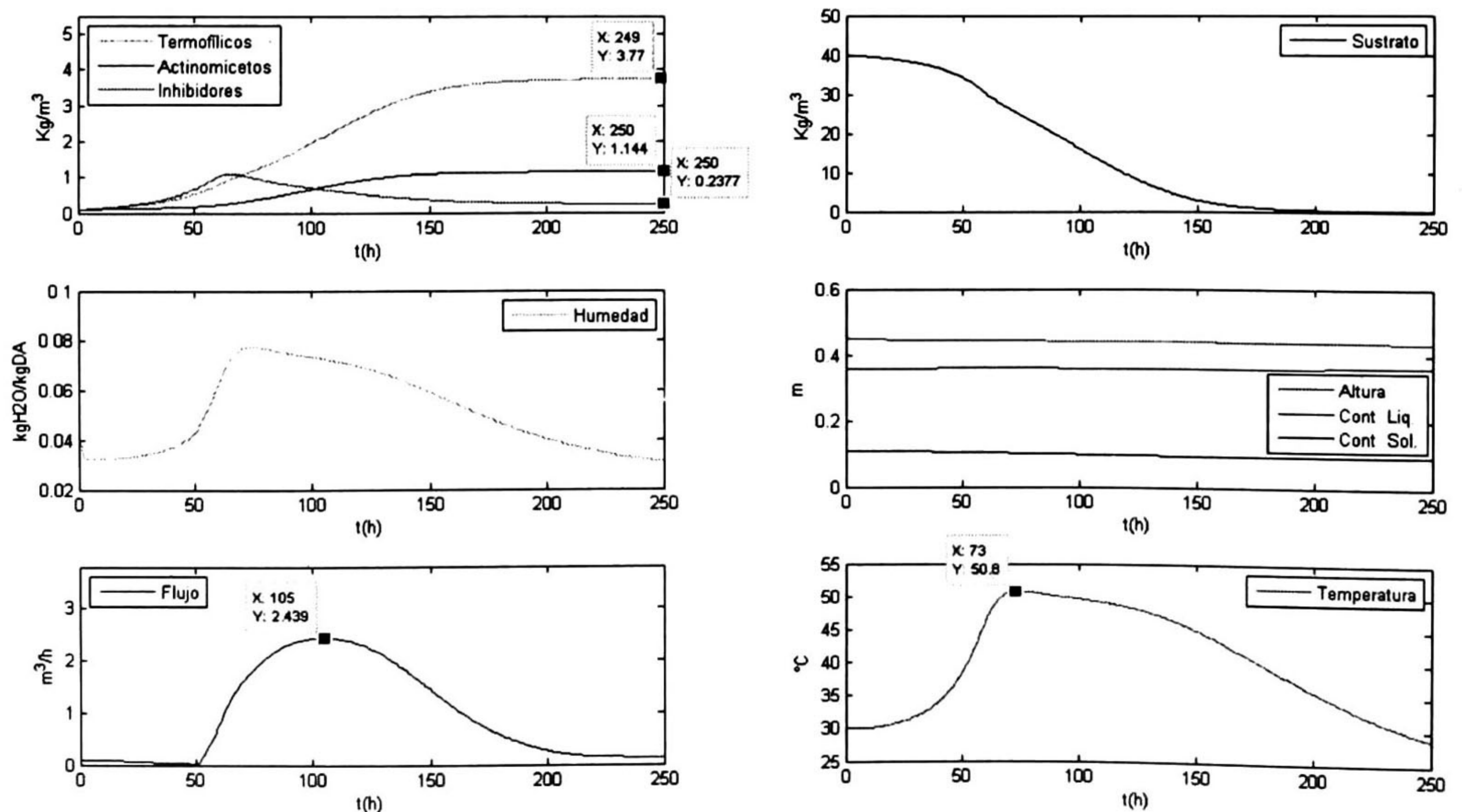


Figura 4.1: Resultados del modelo obtenidos con el gradiente descendente con una $u^{(0)}(t)=0.1$

El criterio a maximizar es la función de desempeño, el algoritmo inició con un valor de $J = 64.88$ y después de 12 iteraciones convergió y se obtuvo un valor máximo de $J = 261.49$ y el valor final de τ fue de 0.07. Como se puede apreciar en la figura 4.1 la nueva trayectoria del flujo volumétrico calculada con el gradiente descendente ofrece una producción de 3.77 kg/m^3 comparado con la producción a flujo constante obtenida en el capítulo 2 (figura 2.4) que fue de 3 kg/m^3 . El aumento de la producción fue de un 25.66% y el flujo óptimo alcanzó un valor máximo de $2.43 \text{ m}^3/\text{h}$ a las 105 horas del proceso. La temperatura alcanzó su valor máximo de $50.8 \text{ }^\circ\text{C}$ a las 73 horas. La producción de los microorganismos actinomicetos fue de 1.14 kg/m^3 , que disminuyó un 45% comparado con la producción a flujo constante. El crecimiento de los microorganismos inhibidores fue de 0.23 kg/m^3 un crecimiento mínimo comparado con el aumento de la producción de los hongos termofílicos. El flujo óptimo beneficia a los microorganismos termofílicos maximizando su concentración que es el objetivo de este método aplicado. También se puede notar en la figura 4.1 que el sustrato se acaba cerca de las 180 horas y la concentración de microorganismos termofílicos se mantiene constante en el resto del tiempo del proceso. Por lo tanto se logró una producción mayor en menos tiempo lo cual representa una optimización del proceso. El contenido sólido, contenido líquido, humedad y el descenso de la altura de la masa de composta tienen un comportamiento casi constante por lo que sólo nos dedicaremos al análisis de las demás variables. Si elegimos otra trayectoria inicial para la variable de control $u^{(0)}(t)$ el algoritmo también converge. El algoritmo se probó con otros dos valores, $u^{(0)}(t) = 0.5$ y $u^{(0)}(t) = 1$, los resultados se muestran en la figuras 4.2 y 4.3 respectivamente.

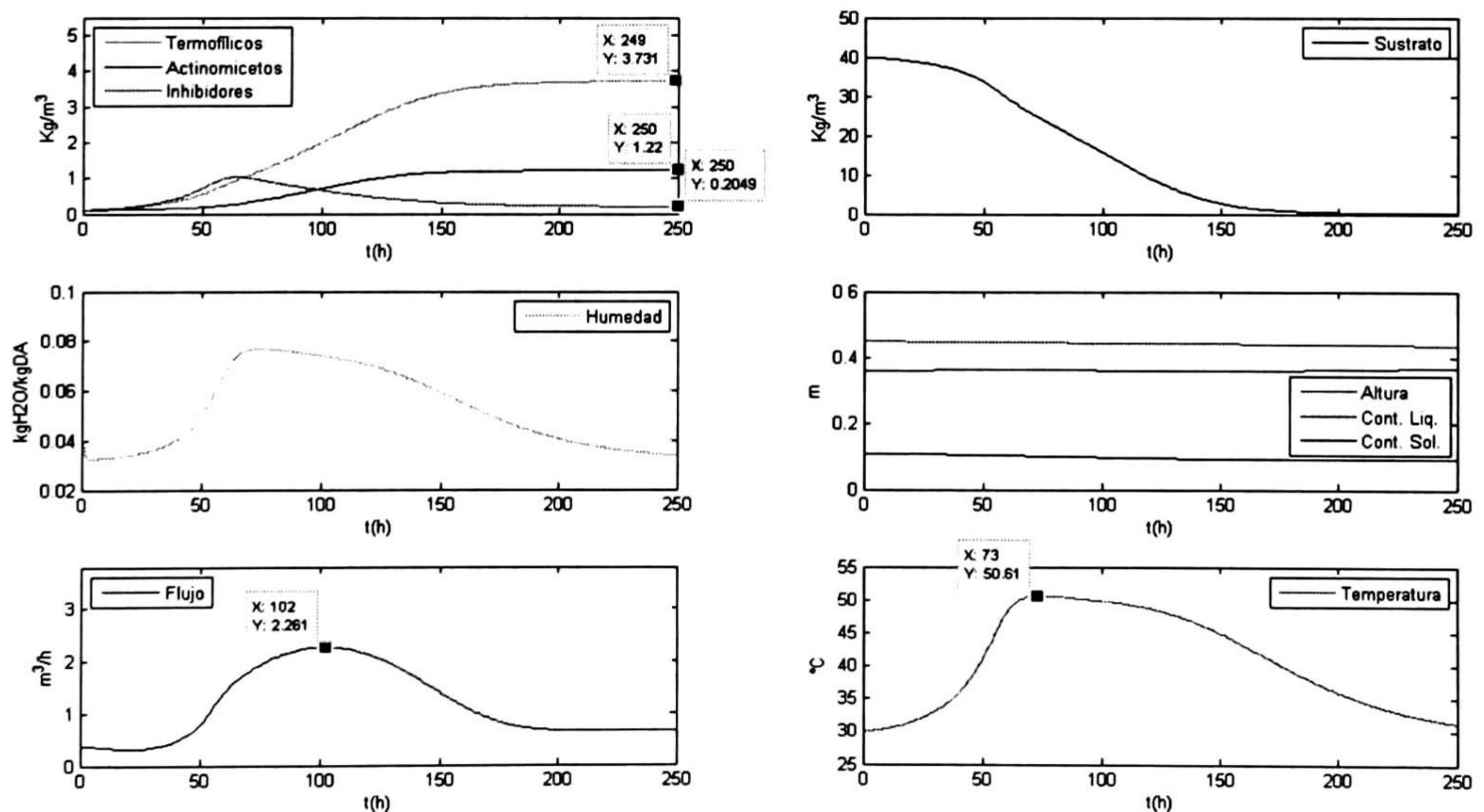


Figura 4.2: Resultados del modelo obtenidos con el gradiente descendente con una $u^{(0)}(t) = 0.5$

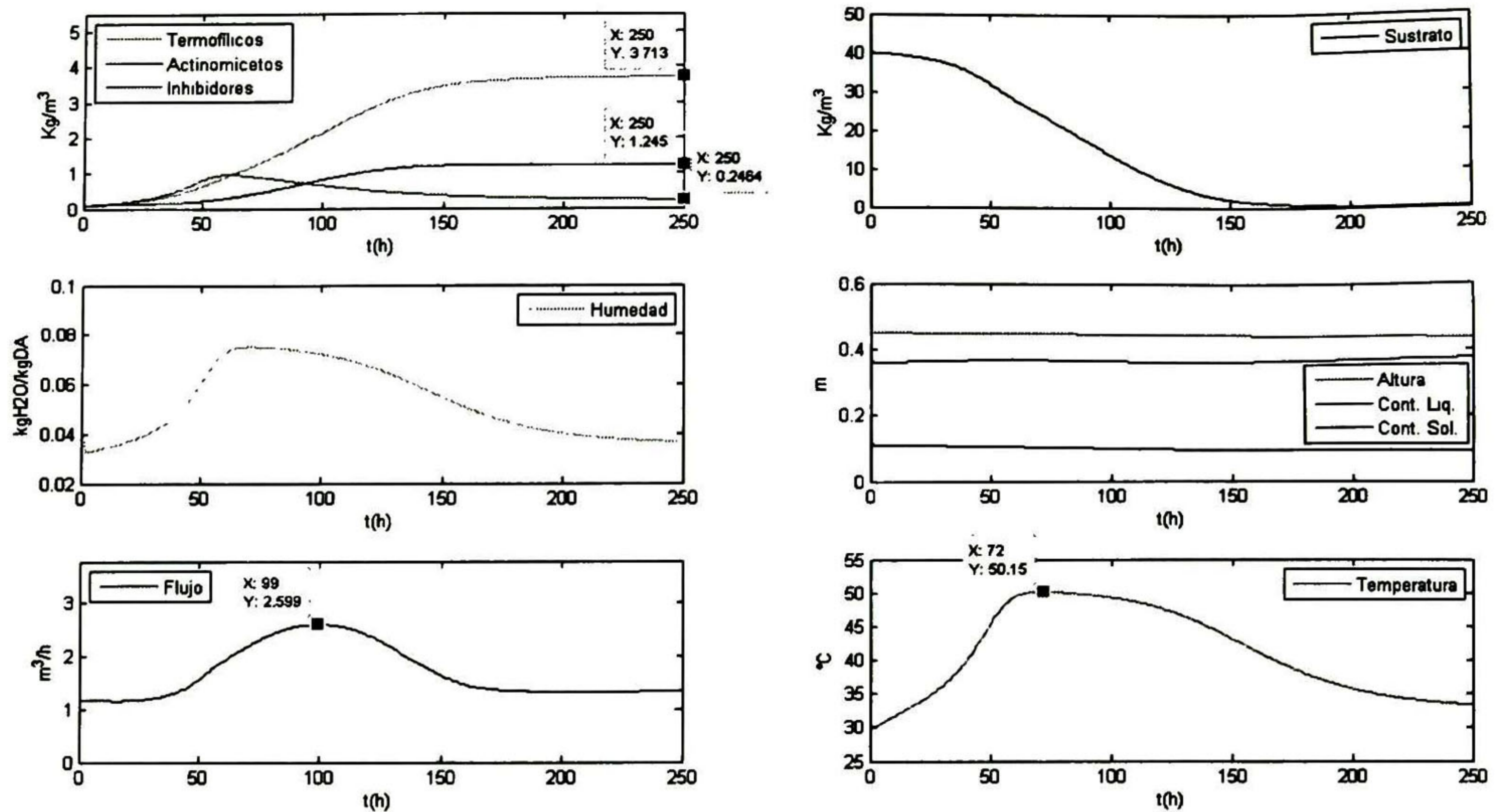


Figura 4.3: Resultados del modelo obtenidos con el gradiente descendente con una $u^{(0)}(t)=1$

En la figura 4.2 donde se inició el algoritmo con un valor de $u^{(0)}(t) = 0.5$ la función de desempeño inició con un valor de $J = 106.66$ y después de 12 iteraciones el algoritmo convergió y se obtuvo un valor máximo de $J = 261.69$ y el valor final de τ fue de 0.04. Se observa una concentración de microorganismos termofílicos de $3.73 \text{ kg}/\text{m}^3$, la trayectoria óptima del flujo de aire alcanzó su máximo valor en $2.26 \text{ m}^3/\text{h}$ a las 102 horas del proceso, y la temperatura alcanza su valor máximo en 50.61°C a las 73 horas. En la figura 4.3 donde se inició el algoritmo con $u^{(0)}(t) = 1$ la función de desempeño inició con un valor de $J = 186.58$ y después de 12 iteraciones el algoritmo convergió y se obtuvo un valor máximo de $J = 301.15$ y el valor final de τ fue de 0.04. Se observa una concentración de microorganismos termofílicos de $3.713 \text{ kg}/\text{m}^3$, la trayectoria óptima del flujo de aire alcanzó su máximo valor en $2.60 \text{ m}^3/\text{h}$ a las 99 horas del proceso, y la temperatura alcanzó su valor máximo en 50.15°C a las 72 horas. La convergencia para una variedad de trayectorias iniciales diferentes es una característica del gradiente descendente, los resultados obtenidos a diferentes trayectorias iniciales del control son parecidos, sin embargo la primera trayectoria supuesta $u^{(0)}(t) = 0.1$ presentó una concentración ligeramente mayor de hongos termofílicos, por lo que los resultados obtenidos con esta trayectoria serán tomados como punto de referencia para hacer un comparativo con los resultados obtenidos a flujo constante, y también para analizar la sensibilidad del algoritmo en el siguiente capítulo. En la figura 4.4 se muestra un comparativo de las trayectorias del flujo de aire, temperatura y concentración de hongos termofílicos para las diferentes entradas iniciales.

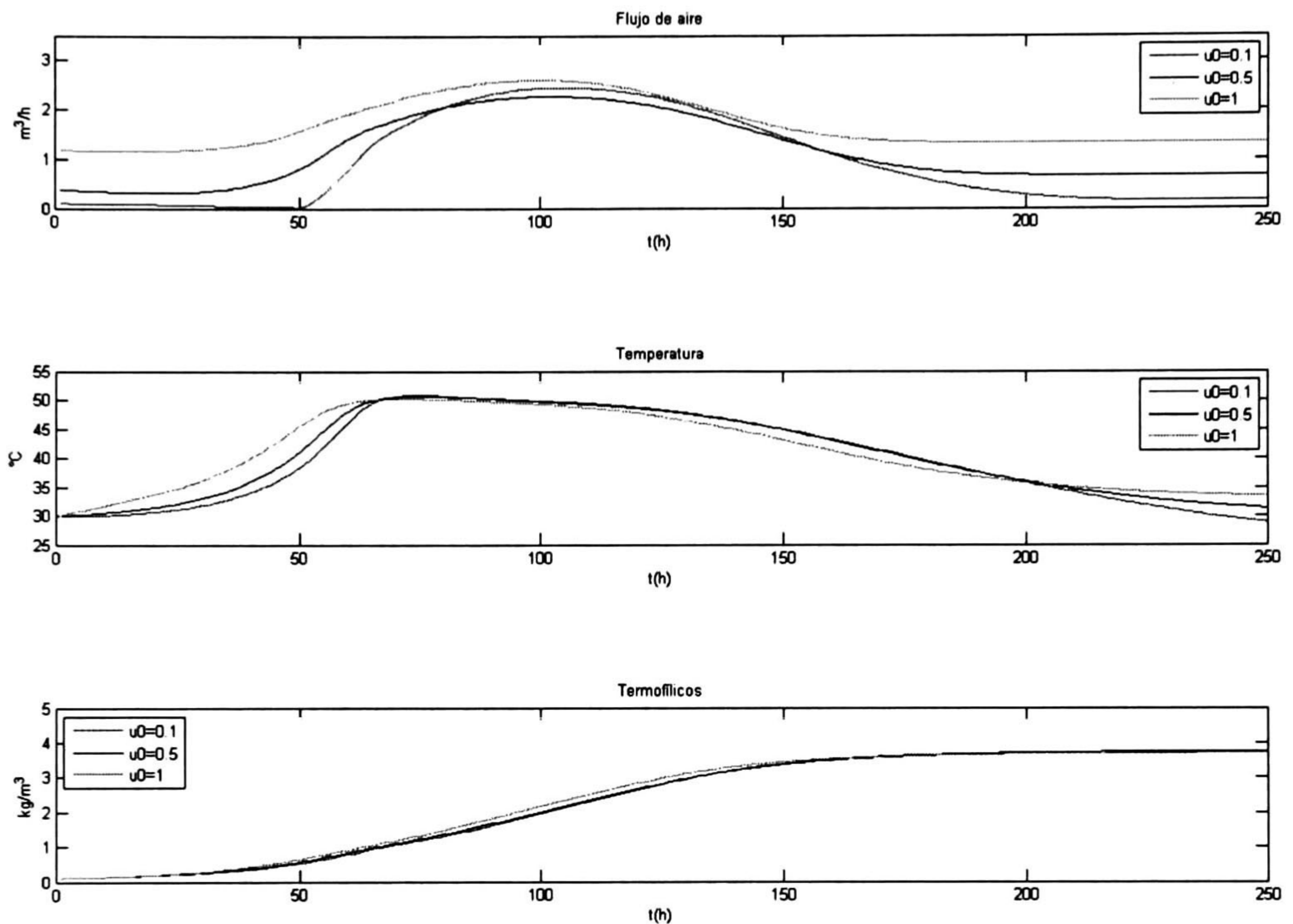


Figura 4.4: Comparativo de trayectorias para diferentes $u^{(0)}(t)$

4.4. Aplicación del algoritmo Proyección del Gradiente

El algoritmo proyección del gradiente trabaja con el modelo discreto linealizado por series de Taylor el cual está sujeto a desigualdades lineales para la variable de entrada (sección 3.3.5). La función de desempeño de igual manera es discretizada y transformada en una función en la que solo aparece explícitamente la variable de entrada $u^{(i+1)}(k)$ (ec. 3.46).

4.4.1. Cálculo de ecuaciones de proyección del gradiente

De acuerdo al procedimiento descrito en la sección 3.3.6 discretizamos el modelo FSS (ecs. 2.11 - 2.19) por el método de Euler

$$x_1(k+1) = x_1(k) + h \left(-\frac{1}{l(k)} ([l(k+1) - l(k)]/h) x_1(k) + R_{x_1}(k) \right) \quad (4.14)$$

$$x_2(k+1) = x_2(k) + h \left(-\frac{1}{l(k)} ([l(k+1) - l(k)]/h) x_2(k) + R_{x_2}(k) \right) \quad (4.15)$$

$$x_3(k+1) = x_3(k) + h \left(-\frac{1}{l(k)} ([l(k+1) - l(k)]/h) x_3(k) + R_{x_3}(k) \right) \quad (4.16)$$

$$S(k+1) = S(k) + h \left(-\frac{1}{l(k)} ([l(k+1) - l(k)]/h) S(k) + R_S(k) \right) \quad (4.17)$$

$$\begin{aligned} \theta_s(k+1) = & \theta_s(k) + h \left(-\frac{1}{l(k)} ([l(k+1) - l(k)]/h) \theta_s(k) \right. \\ & \left. + \frac{1}{\rho_s} \left(\sum_{i=1}^3 R_{x_i}(k) + R_S(k) \right) \right) \end{aligned} \quad (4.18)$$

$$\begin{aligned} \theta_l(k+1) = & \theta_l(k) + h \left(-\frac{1}{l(k)} ([l(k+1) - l(k)]/h) \theta_l(k) \right. \\ & \left. + \frac{1}{\rho l} \left(R_W(k) - \frac{v_e(k) * \rho_a}{V} (H^*(k) - H(k)) \right) \right) \end{aligned} \quad (4.19)$$

$$H(k+1) = H(k) + h \left(\frac{v_e(k)}{V} (H_e(k) + H^*(k) - 2H(k)) \right) \quad (4.20)$$

$$\begin{aligned} T(k+1) = & T(k) + h \left(\frac{1}{\rho(k) C_p} \left\{ -\frac{v_e(k) * \rho_a}{V} (i^*(k) - i_e(k)) \right. \right. \\ & \left. \left. + R_H(k) - \frac{U l_p}{A_b} (T(k) - T_0) \right\} \right) \end{aligned} \quad (4.21)$$

$$l(k+1) = l(k) + h \left(-\frac{g\rho(k)}{\eta} (l(k))^2 \right) \quad (4.22)$$

y la función de desempeño (4.1)

$$\begin{aligned}
 J_D &= -h \sum_{k=0}^{N-1} [Qx_2^2(k) + Ru^2(k)] \\
 &= -h \sum_{k=0}^{N-1} [Qx_2^T(k)x_2(k) + Ru^2(k)]
 \end{aligned} \tag{4.23}$$

Linealizando por series de Taylor hasta términos de primer orden y arreglando, las ecuaciones en diferencias quedan:

$$\begin{aligned}
 x_1^{(i+1)}(k+1) &= \left[1 + h \left(-\frac{1}{l} \frac{dl}{dt} + (\mu_1 - \lambda_1) \right) \right] x_1^{(i+1)}(k) \\
 &+ \left[h \left(\frac{\partial R_{x_1}}{\partial S} \right) \right] S^{(i+1)}(k) + \left[h^2 \left(\frac{g\rho_s l}{\eta} x_1 \right) \right] \theta_s^{(i+1)}(k) \\
 &+ \left[h^2 \left(\frac{g\rho_l l}{\eta} x_1 \right) \right] \theta_l^{(i+1)}(k) + \left[h \left(\frac{\partial R_{x_1}}{\partial T} \right) \right] T^{(i+1)}(k) \\
 &+ \left[h^2 \left(\frac{g\rho}{\eta} x_1 \right) \right] l^{(i+1)}(k) - \left[h \left(\frac{\partial R_{x_1}}{\partial S} \right) \right] S^{(i)}(k) \\
 &- \left[h^2 \left(\frac{g\rho_s l}{\eta} x_1 \right) \right] \theta_s^{(i)}(k) - \left[h^2 \left(\frac{g\rho_l l}{\eta} x_1 \right) \right] \theta_l^{(i)}(k) \\
 &- \left[h \left(\frac{\partial R_{x_1}}{\partial T} \right) \right] T^{(i)}(k) - \left[h^2 \left(\frac{g\rho}{\eta} x_1 \right) \right] l^{(i)}(k)
 \end{aligned} \tag{4.24}$$

$$\begin{aligned}
 x_2^{(i+1)}(k+1) &= \left[1 + h \left(-\frac{1}{l} \frac{dl}{dt} + (\mu_2 - \lambda_2) \right) \right] x_2^{(i+1)}(k) \\
 &+ \left[h \left(\frac{\partial R_{x_2}}{\partial S} \right) \right] S^{(i+1)}(k) + \left[h^2 \left(\frac{g\rho_s l}{\eta} x_2 \right) \right] \theta_s^{(i+1)}(k) \\
 &+ \left[h^2 \left(\frac{g\rho_l l}{\eta} x_2 \right) \right] \theta_l^{(i+1)}(k) + \left[h \left(\frac{\partial R_{x_2}}{\partial T} \right) \right] T^{(i+1)}(k) \\
 &+ \left[h^2 \left(\frac{g\rho}{\eta} x_2 \right) \right] l^{(i+1)}(k) - \left[h \left(\frac{\partial R_{x_2}}{\partial S} \right) \right] S^{(i)}(k) \\
 &- \left[h^2 \left(\frac{g\rho_s l}{\eta} x_2 \right) \right] \theta_s^{(i)}(k) - \left[h^2 \left(\frac{g\rho_l l}{\eta} x_2 \right) \right] \theta_l^{(i)}(k) \\
 &- \left[h \left(\frac{\partial R_{x_2}}{\partial T} \right) \right] T^{(i)}(k) - \left[h^2 \left(\frac{g\rho}{\eta} x_2 \right) \right] l^{(i)}(k)
 \end{aligned} \tag{4.25}$$

$$\begin{aligned}
x_3^{(i+1)}(k+1) = & \left[1 + h \left(-\frac{1}{l} \frac{dl}{dt} + (\mu_3 - \lambda_3) \right) \right] x_3^{(i+1)}(k) \\
& + \left[h \left(\frac{\partial R_{x_3}}{\partial S} \right) \right] S^{(i+1)}(k) + \left[h^2 \left(\frac{g\rho_s l}{\eta} x_3 \right) \right] \theta_s^{(i+1)}(k) \\
& + \left[h^2 \left(\frac{g\rho_l l}{\eta} x_3 \right) \right] \theta_l^{(i+1)}(k) + \left[h \left(\frac{\partial R_{x_3}}{\partial T} \right) \right] T^{(i+1)}(k) \\
& + \left[h^2 \left(\frac{g\rho}{\eta} x_3 \right) \right] l^{(i+1)}(k) - \left[h \left(\frac{\partial R_{x_3}}{\partial S} \right) \right] S^{(i)}(k) \\
& - \left[h^2 \left(\frac{g\rho_s l}{\eta} x_3 \right) \right] \theta_s^{(i)}(k) - \left[h^2 \left(\frac{g\rho_l l}{\eta} x_3 \right) \right] \theta_l^{(i)}(k) \\
& - \left[h \left(\frac{\partial R_{x_3}}{\partial T} \right) \right] T^{(i)}(k) - \left[h^2 \left(\frac{g\rho}{\eta} x_3 \right) \right] l^{(i)}(k)
\end{aligned} \tag{4.26}$$

$$\begin{aligned}
S^{(i+1)}(k+1) = & \left[h \left(-\frac{1}{Y} \mu_1 + \lambda_1 \right) \right] x_1^{(i+1)}(k) \\
& + \left[h \left(-\frac{1}{Y} \mu_2 + \lambda_2 \right) \right] x_2^{(i+1)}(k) \\
& + \left[h \left(-\frac{1}{Y} \mu_3 + \lambda_3 \right) \right] x_3^{(i+1)}(k) \\
& + \left[1 + h \left(-\frac{1}{l} \frac{dl}{dt} + \frac{\partial R_S}{\partial S} \right) \right] S^{(i+1)}(k) \\
& + \left[h^2 \left(\frac{g\rho_s l}{\eta} S \right) \right] \theta_s^{(i+1)}(k) + \left[h^2 \left(\frac{g\rho_l l}{\eta} S \right) \right] \theta_l^{(i+1)}(k) \\
& + \left[h \left(\frac{\partial R_S}{\partial T} \right) \right] T^{(i+1)}(k) + \left[h^2 \left(\frac{g\rho}{\eta} S \right) \right] l^{(i+1)}(k) \\
& - \left[h \left(\frac{\partial R_S}{\partial S} \right) \right] S^{(i)}(k) - \left[h^2 \left(\frac{g\rho_s l}{\eta} S \right) \right] \theta_s^{(i)}(k) \\
& - \left[h^2 \left(\frac{g\rho_l l}{\eta} S \right) \right] \theta_l^{(i)}(k) - \left[h \left(\frac{\partial R_S}{\partial T} \right) \right] T^{(i)}(k) \\
& - \left[h^2 \left(\frac{g\rho}{\eta} S \right) \right] l^{(i)}(k)
\end{aligned} \tag{4.27}$$

$$\begin{aligned}
\theta_S^{(i+1)}(k+1) = & \left[h \left(\frac{1}{\rho_s} \left(\frac{\partial R_{x_1}}{\partial x_1} + \frac{\partial R_S}{\partial x_1} \right) \right) \right] x_1^{(i+1)}(k) \\
& + \left[h \left(\frac{1}{\rho_s} \left(\frac{\partial R_{x_2}}{\partial x_2} + \frac{\partial R_S}{\partial x_2} \right) \right) \right] x_2^{(i+1)}(k) \\
& + \left[h \left(\frac{1}{\rho_s} \left(\frac{\partial R_{x_3}}{\partial x_3} + \frac{\partial R_S}{\partial x_3} \right) \right) \right] x_3^{(i+1)}(k) \\
& + \left[h \left(\frac{1}{\rho_s} \left(\frac{\partial R_{x_1}}{\partial S} + \frac{\partial R_{x_2}}{\partial S} + \frac{\partial R_{x_3}}{\partial S} \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. + \frac{\partial R_S}{\partial S} \right) \right) \right] S^{(i+1)}(k) \\
& + \left[1 + h \left(-\frac{1}{l} \frac{dl}{dt} + h \left(\frac{g\rho_s l \theta_s}{\eta} \right) \right) \right] \theta_S^{(i+1)}(k) \\
& + \left[h^2 \left(\frac{g\rho_l l \theta_s}{\eta} \right) \right] \theta_l^{(i+1)}(k) \\
& + \left[h \left(\frac{1}{\rho_s} \left(\frac{\partial R_{x_1}}{\partial T} + \frac{\partial R_{x_2}}{\partial T} + \frac{\partial R_{x_3}}{\partial T} \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. + \frac{dR_S}{dT} \right) \right) \right] T^{(i+1)}(k) \\
& + \left[h^2 \left(\frac{g\rho \theta_s}{\eta} \right) \right] l^{(i+1)}(k) \\
& - \left[h \left(\frac{1}{\rho_s} \left(\frac{\partial R_{x_1}}{\partial S} + \frac{\partial R_{x_2}}{\partial S} + \frac{\partial R_{x_3}}{\partial S} \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. + \frac{\partial R_S}{\partial S} \right) \right) \right] S^{(i)}(k) \\
& - \left[h^2 \left(\frac{g\rho_s l \theta_s}{\eta} \right) \right] \theta_S^{(i)}(k) \\
& - \left[h^2 \left(\frac{g\rho_l l \theta_s}{\eta} \right) \right] \theta_l^{(i)}(k) \\
& - \left[h \left(\frac{1}{\rho_s} \left(\frac{\partial R_{x_1}}{\partial T} + \frac{\partial R_{x_2}}{\partial T} + \frac{\partial R_{x_3}}{\partial T} \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. + \frac{dR_S}{dT} \right) \right) \right] T^{(i)}(k) \\
& - \left[h^2 \left(\frac{g\rho \theta_s}{\eta} \right) \right] l^{(i)}(k)
\end{aligned} \tag{4.28}$$

$$\begin{aligned}
\theta_i^{(i+1)}(k+1) = & \left[h \frac{1}{\rho l} \left(\frac{Y_{W/S}}{Y} - Y_{W/X} \right) \mu_1 \right] x_1^{(i+1)}(k) \\
& + \left[h \frac{1}{\rho l} \left(\frac{Y_{W/S}}{Y} - Y_{W/X} \right) \mu_2 \right] x_2^{(i+1)}(k) \\
& + \left[h \frac{1}{\rho l} \left(\frac{Y_{W/S}}{Y} - Y_{W/X} \right) \mu_3 \right] x_3^{(i+1)}(k) \\
& + \left[h \frac{1}{\rho l} \left(\frac{\partial R_W}{\partial S} \right) \right] S^{(i+1)}(k) \\
& + \left[h^2 \left(\frac{g \rho_s l \theta_l}{\eta} \right) \right] \theta_S^{(i+1)}(k) \\
& + \left[1 + h \left(-\frac{1}{l} \frac{dl}{dt} \right. \right. \\
& \left. \left. + h \left(\frac{g \rho_s l \theta_l}{\eta} \right) \right) \right] \theta_l^{(i+1)}(k) \\
& + \left[h \left(\frac{1}{\rho l} \left(\frac{\partial R_W}{\partial T} \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. - \frac{v_e(k) * \rho_a}{V} \frac{\partial H^*}{\partial T} \right) \right) \right] T^{(i+1)}(k) \\
& + \left[h \left(\frac{1}{\rho l} \frac{v_e(k) * \rho_a}{V} \right) \right] H^{(i+1)}(k) \\
& + \left[h^2 \left(\frac{g \rho \theta_l}{\eta} \right) \right] l^{(i+1)}(k) \\
& + \left[h \left(\frac{1}{\rho l} \left(-\frac{\rho_a}{TrV} \right) (H^* - H) \right) \right] u^{(i+1)}(k) \\
& - \left[h \frac{1}{\rho l} \left(\frac{\partial R_W}{\partial S} \right) \right] S^{(i)}(k) \\
& - \left[h^2 \left(\frac{g \rho_s l \theta_l}{\eta} \right) \right] \theta_S^{(i)}(k) \\
& - \left[h^2 \left(\frac{g \rho_s l \theta_l}{\eta} \right) \right] \theta_l^{(i)}(k) \\
& - \left[h \frac{1}{\rho l} \left(\frac{\partial R_W}{\partial T} - \frac{v_e(k) * \rho_a}{V} \frac{\partial H^*}{\partial T} \right) \right] T^{(i)}(k) \\
& - \left[h \left(\frac{1}{\rho l} \frac{v_e(k) * \rho_a}{V} \right) \right] H^{(i)}(k) \\
& - \left[h^2 \left(\frac{g \rho \theta_l}{\eta} \right) \right] l^{(i)}(k)
\end{aligned} \tag{4.29}$$

$$\begin{aligned}
T^{(i+1)}(k+1) = & \left[h \left(\frac{1}{\rho C_p} \frac{\partial R_H}{\partial x_1} \right) \right] x_1^{(i+1)}(k) + \left[h \left(\frac{1}{\rho C_p} \frac{\partial R_H}{\partial x_2} \right) \right] x_2^{(i+1)}(k) \\
& + \left[h \left(\frac{1}{\rho C_p} \frac{\partial R_H}{\partial x_3} \right) \right] x_3^{(i+1)}(k) \\
& + \left[h \frac{1}{\rho C_p} \left(\frac{\partial R_H}{\partial S} \right) \right] S^{(i+1)}(k) \\
& + \left[h \frac{1}{C_p} \left(-\frac{v_e(k) * \rho_a}{V} (i^* - i_e) + R_H \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \frac{Ul_p}{A_b} (T - T_0) \right) \frac{\partial \frac{1}{\rho}}{\partial \theta_s} \right] \theta_S^{(i+1)}(k) \\
& + \left[h \frac{1}{C_p} \left(-\frac{v_e(k) * \rho_a}{V} (i^* - i_e) + R_H \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \frac{Ul_p}{A_b} (T - T_0) \right) \frac{\partial \frac{1}{\rho}}{\partial \theta_l} \right] \theta_l^{(i+1)}(k) \\
& + \left[1 + h \frac{1}{C_p \rho} \left(-\frac{v_e(k) * \rho_a}{V} \left(\frac{\partial i^*}{\partial T} - \frac{\partial i_e}{\partial T} \right) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{\partial R_H}{\partial T} - \frac{Ul_p}{A_b} \right) \right] T^{(i+1)}(k) \\
& + \left[h \left(-\frac{1}{C_p \rho} \frac{v_e(k) * \rho_a}{V} \left(\frac{\partial i^*}{\partial H} - \frac{\partial i_e}{\partial H} \right) \right) \right] H^{(i+1)}(k) \\
& + \left[h \left(-\frac{1}{\rho C_p TrV} \rho_a (i^* - i_e) \right) \right] u^{(i+1)}(k) \\
& + \left[h \left(-\frac{1}{\rho C_p} \frac{Ul_p}{A_b} (-T_0) \right) \right] - \left[h \frac{1}{\rho C_p} \left(\frac{\partial R_H}{\partial S} \right) \right] S^{(i)}(k) \\
& - \left[h \frac{1}{C_p} \left(-\frac{v_e(k) * \rho_a}{V} (i^* - i_e) + R_H \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \frac{Ul_p}{A_b} (T - T_0) \right) \frac{\partial \frac{1}{\rho}}{\partial \theta_s} \right] \theta_S^{(i)}(k) \\
& - \left[h \frac{1}{C_p} \left(-\frac{v_e(k) * \rho_a}{V} (i^* - i_e) + R_H \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \frac{Ul_p}{A_b} (T - T_0) \right) \frac{\partial \frac{1}{\rho}}{\partial \theta_l} \right] \theta_l^{(i)}(k) \\
& - \left[h \frac{1}{C_p \rho} \left(-\frac{v_e(k) * \rho_a}{V} \left(\frac{\partial i^*}{\partial T} - \frac{\partial i_e}{\partial T} \right) + \frac{\partial R_H}{\partial T} \right) \right] T^{(i)}(k) \\
& - \left[h \left(-\frac{1}{C_p \rho} \frac{v_e(k) * \rho_a}{V} \left(\frac{\partial i^*}{\partial H} - \frac{\partial i_e}{\partial H} \right) \right) \right] H^{(i)}(k) \tag{4.30}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H^{(i+1)}(k+1) = & \left[h \left(\frac{v_e}{V} \frac{\partial H^*}{\partial T} \right) \right] T^{(i+1)}(k) \\
& + \left[1 + h \left(\frac{v_e}{V} \left(\frac{\partial H_e}{\partial H} - 2 \right) \right) \right] H^{(i+1)}(k) \\
& + \left[h \left(\frac{1}{TrV} (H_e + H^* - 2H) \right) \right] u^{(i+1)}(k) \\
& - \left[h \left(\frac{v_e}{V} \frac{\partial H^*}{\partial T} \right) \right] T^{(i)}(k) - \left[h \left(\frac{v_e}{V} \left(\frac{\partial H_e}{\partial H} - 2 \right) \right) \right] H^{(i)}(k) \quad (4.31)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
l^{(i+1)}(k+1) = & \left[h \left(-\frac{g\rho_s l^2}{\eta} \right) \right] \theta_S^{(i+1)}(k) + \left[h \left(-\frac{g\rho_l l^2}{\eta} \right) \right] \theta_l^{(i+1)}(k) \\
& + \left[1 - h \left(2\frac{g\rho_l}{\eta} l \right) \right] l^{(i+1)}(k) - \left[h \left(-\frac{g\rho_s l^2}{\eta} \right) \right] \theta_S^{(i)}(k) \\
& - \left[h \left(-\frac{g\rho_l l^2}{\eta} \right) \right] \theta_l^{(i)}(k) - \left[-h \left(\frac{g\rho_l}{\eta} l \right) \right] l^{(i)}(k) \quad (4.32)
\end{aligned}$$

Ya que $x^{(i)}$ y $u^{(i)}$ son conocidas las ecuaciones (4.24) a (4.32) se pueden escribir de la siguiente forma

$$\begin{aligned}
x_1^{(i+1)}(k+1) = & a_{11}(k) x_1^{(i+1)}(k) + a_{14}(k) S^{(i+1)}(k) + a_{15}(k) \theta_S^{(i+1)}(k) \\
& + a_{16}(k) \theta_l^{(i+1)}(k) + a_{17}(k) T^{(i+1)}(k) + a_{19}(k) l^{(i+1)}(k) \\
& + c_1(k) \quad (4.33)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_2^{(i+1)}(k+1) = & a_{22}(k) x_1^{(i+1)}(k) + a_{24}(k) S^{(i+1)}(k) + a_{25}(k) \theta_S^{(i+1)}(k) \\
& + a_{26}(k) \theta_l^{(i+1)}(k) + a_{27}(k) T^{(i+1)}(k) + a_{29}(k) l^{(i+1)}(k) \\
& + c_2(k) \quad (4.34)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_3^{(i+1)}(k+1) = & a_{33}(k) x_1^{(i+1)}(k) + a_{34}(k) S^{(i+1)}(k) + a_{35}(k) \theta_S^{(i+1)}(k) \\
& + a_{36}(k) \theta_l^{(i+1)}(k) + a_{37}(k) T^{(i+1)}(k) + a_{39}(k) l^{(i+1)}(k) \\
& + c_3(k) \quad (4.35)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S^{(i+1)}(k+1) = & a_{41}(k)x_1^{(i+1)}(k) + a_{42}(k)x_2^{(i+1)}(k) + a_{43}(k)x_3^{(i+1)}(k) \\
& + a_{44}(k)S^{(i+1)}(k) + a_{45}(k)\theta_S^{(i+1)}(k) + a_{46}(k)\theta_l^{(i+1)}(k) \\
& + a_{47}(k)T^{(i+1)}(k) + a_{49}(k)l^{(i+1)}(k) + c_4(k)
\end{aligned} \tag{4.36}$$

$$\begin{aligned}
\theta_S^{(i+1)}(k+1) = & a_{51}(k)x_1^{(i+1)}(k) + a_{52}(k)x_2^{(i+1)}(k) + a_{53}(k)x_3^{(i+1)}(k) \\
& + a_{54}(k)S^{(i+1)}(k) + a_{55}(k)\theta_S^{(i+1)}(k) + a_{56}(k)\theta_l^{(i+1)}(k) \\
& + a_{57}(k)T^{(i+1)}(k) + a_{59}(k)l^{(i+1)}(k) + c_5(k)
\end{aligned} \tag{4.37}$$

$$\begin{aligned}
\theta_l^{(i+1)}(k+1) = & a_{61}(k)x_1^{(i+1)}(k) + a_{62}(k)x_2^{(i+1)}(k) + a_{63}(k)x_3^{(i+1)}(k) \\
& + a_{64}(k)S^{(i+1)}(k) + a_{65}(k)\theta_S^{(i+1)}(k) + a_{66}(k)\theta_l^{(i+1)}(k) \\
& + a_{67}(k)T^{(i+1)}(k) + a_{68}(k)H^{(i+1)}(k) + a_{69}(k)l^{(i+1)}(k) \\
& + b_6(k)u^{(i+1)}(k) + c_6(k)
\end{aligned} \tag{4.38}$$

$$\begin{aligned}
T^{(i+1)}(k+1) = & a_{71}(k)x_1^{(i+1)}(k) + a_{72}(k)x_2^{(i+1)}(k) + a_{73}(k)x_3^{(i+1)}(k) \\
& + a_{74}(k)S^{(i+1)}(k) + a_{75}(k)\theta_S^{(i+1)}(k) + a_{76}(k)\theta_l^{(i+1)}(k) \\
& + a_{77}(k)T^{(i+1)}(k) + a_{78}(k)H^{(i+1)}(k) + b_7(k)u^{(i+1)}(k) \\
& + c_7(k)
\end{aligned} \tag{4.39}$$

$$H^{(i+1)}(k+1) = a_{87}(k)T^{(i+1)}(k) + a_{88}(k)H^{(i+1)}(k) + b_8(k)u^{(i+1)}(k) + c_8(k) \tag{4.40}$$

$$l^{(i+1)}(k+1) = a_{95}(k)\theta_S^{(i+1)}(k) + a_{96}(k)\theta_l^{(i+1)}(k) + a_{99}(k)l^{(i+1)}(k) + c_9(k) \tag{4.41}$$

En general el sistema discreto linealizado (ecs. 4.33 - 4.41) se representa por

$$\mathbf{x}^{(i+1)}(k+1) = \mathbf{A}(k)\mathbf{x}^{(i+1)}(k) + \mathbf{B}(k)\mathbf{u}^{(i+1)}(k) + \mathbf{c}(k), \tag{4.42}$$

donde \mathbf{A} , \mathbf{B} y \mathbf{c} son matrices conocidas de apropiadas dimensiones que dependen de la i - ésima trayectoria de estado-control.

Para reducir sustancialmente el número de variables usadas en el algoritmo proyección del gradiente se transforma el sistema (4.42) en una matriz compuesta (ec. 3.43) por la parte que no depende del control $\mathbf{x}_H(k+1)$ y la parte que determina la contribución del control \mathbf{D}_l^{k+1}

$$\mathbf{x}^{(i+1)}(k+1) = \mathbf{x}_H(k+1) + \sum_{l=0}^{N-1} [\mathbf{D}_l^{k+1} u^{(i+1)}(l)], \quad (3.40)$$

las matrices $\mathbf{x}_H(k+1)$ y \mathbf{D} son encontradas por las relaciones (3.41) y (3.42) respectivamente.

En general la matriz particionada que representa al sistema queda representada por la ecuación (3.44) descrita en la sección 3.3.5.

$$X^{(i+1)} = DU^{(i+1)} + X_H. \quad (3.44)$$

De acuerdo a los requerimientos de convergencia enunciados en la sección 3.3.5 el control debe permanecer en una región cóncava y la función de desempeño debe ser cóncava. En la sección 4.2 comprobamos que la función de desempeño es cóncava y supusimos que cada componente de $a(x(t), u(t))$ era cóncavo o convexo para las trayectorias admisibles de estado-control. A continuación establecemos las restricciones lineales para el control para que la búsqueda de la trayectoria óptima sea en una región cóncava y acotada. Anteriormente en la aplicación del gradiente descendente pudimos notar que la variable de control se mantenía en un rango positivo no mayor a $4 \text{ m}^3/h$, con base en esto establecemos las siguientes restricciones lineales

$$0 \leq u(k) \leq 4, \quad k = 0, 1, \dots, N-1. \quad (4.43)$$

4.4.2. Prueba de conjunto convexo

Teorema 4.2 *Un conjunto C en E^k es convexo si el segmento de línea que une a cualesquiera dos puntos x e y en C esta contenida en C : algebraicamente, $\lambda x + (1 - \lambda)y \in C$ para toda $0 \leq \lambda \leq 1$ [8].*

Prueba

Sean $u^{(1)}, u^{(2)} \in C$, tal que:

$$0 \leq u^{(1)} \leq 4$$

$$0 \leq u^{(2)} \leq 4$$

De acuerdo al teorema tenemos que probar que $\forall \lambda \in [0, 1]$ se cumpla que $u^{(3)} = \lambda u^{(1)} + (1 - \lambda)u^{(2)} \in C$, es decir que $0 \leq u^{(3)} \leq 4$

Como $0 \leq u^{(1)} \leq 4$ entonces $0 \leq \lambda u^{(1)} \leq 4\lambda$ pues $\lambda \in [0, 1]$

y como $0 \leq u^{(2)} \leq 4$ entonces $0 \leq (1 - \lambda) u^{(2)} \leq 4(1 - \lambda)$

sumando ambas expresiones se obtiene la desigualdad por lo tanto C es un conjunto convexo. Si cambiamos el signo de la desigualdad lineal obtenemos que C es un conjunto cóncavo.

Las restricciones especificadas por (4.43) deben ser expresadas en la forma $n_i u(k) - v_i \geq 0$. Para $u(k) \leq 4$

$$-u(k) + 4 \geq 0, \quad k = 0, 1, \dots, N - 1, \quad (4.44)$$

y para $0 \leq u(k)$

$$u(k) \geq 0, \quad k = 0, 1, \dots, N - 1. \quad (4.45)$$

La implementación de las N restricciones de la ecuación (4.43) implican $2N$ restricciones en la programación del algoritmo.

4.4.3. Cálculo del gradiente

A continuación expresamos la medida de desempeño J_D en términos de los valores de control. Para realizar esto, sustituimos la ecuación (3.40) en la ecuación (4.23)

$$J_D = -h \sum_{k=0}^{N-1} \left[Q \left[\mathbf{x}_H(k) + \sum_{j=0}^{N-1} \mathbf{D}_j^k u^{(i+1)}(j) \right]^T \left[\mathbf{x}_H(k) + \sum_{j=0}^{N-1} \mathbf{D}_j^k u^{(i+1)}(j) \right] + R [u^{(i+1)}(k)]^2 \right] \quad (4.46)$$

$\mathbf{x}_H(k)$ y \mathbf{D}_j^k son evaluados de la i -ésima trayectoria de estado-control. $\mathbf{D}_j^0 = 0$, $j = 0, 1, \dots, N - 1$.

Para obtener el l -ésimo componente del gradiente de J_D con respecto a U evaluada en la $(i + 1)$ -ésima trayectoria, tenemos

$$\left[\frac{\partial J_D}{\partial u(l)} \right]_{(i+1)} = \left\{ \left[\frac{\partial J_D}{\partial x(1)} \right]^T \frac{\partial x(1)}{\partial u(l)} + \left[\frac{\partial J_D}{\partial x(2)} \right]^T \frac{\partial x(2)}{\partial u(l)} + \dots + \left[\frac{\partial J_D}{\partial x(N-1)} \right]^T \frac{\partial x(N-1)}{\partial u(l)} + 2Ru(l)_{(i+1)} \right\}_{(i+1)}, \quad (4.47)$$

$$l = 0, 1, \dots, N - 1.$$

Usando la expresión para J_D (ec. 4.23) tenemos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial J_D}{\partial u(l)} &= -2h \left\{ Q \left[\mathbf{x}^T(1) \frac{\partial x(1)}{\partial u(l)} + \mathbf{x}^T(2) \frac{\partial x(2)}{\partial u(l)} + \dots \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \mathbf{x}^T(N-1) \frac{\partial x(N-1)}{\partial u(l)} \right] + Ru(l) \right\}_{(i+1)} \\
&= -2h \left[\sum_{k=1}^{N-1} Q \left[\mathbf{x}^T(k) \frac{\partial x(k)}{\partial u(l)} \right] + Ru(l) \right]_{(i+1)} \quad (4.48)
\end{aligned}$$

De la relación para $x(k)$ usada en la ecuación (4.46),

$$\frac{\partial x(k)}{\partial u(l)} = \mathbf{D}_i^k; \quad (4.49)$$

por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial J_D}{\partial u(l)} &= -2h \left[\sum_{k=1}^{N-1} \left\{ Q \left[\mathbf{x}_H(k) + \sum_{j=0}^{N-1} \mathbf{D}_j^k u^{(i+1)}(j) \right]^T \mathbf{D}_i^k \right\} + Ru(l) \right]_{(i+1)}, \\
&\quad l = 0, 1, \dots, N-1. \quad (4.50)
\end{aligned}$$

Las trayectorias iniciales supuestas para los estados y el control así como el valor de los parámetros de J se describen en la tabla 4.2

Tabla 4.2 Trayectorias iniciales supuestas para los estados y el control discretos

Condiciones iniciales	
$x_1^{(0)}(k) = 2.7$	$k = 1, \dots, N-1$
$x_2^{(0)}(k) = 1.3$	$k = 1, \dots, N-1$
$x_3^{(0)}(k) = 0.1$	$k = 1, \dots, N-1$
$S^{(0)}(k) = 1.4$	$k = 1, \dots, N-1$
$\theta_S^{(0)}(k) = 0.2$	$k = 1, \dots, N-1$
$\theta_l^{(0)}(k) = 0.8$	$k = 1, \dots, N-1$
$T^{(0)}(k) = 26$	$k = 1, \dots, N-1$
$H^{(0)}(k) = 0.04$	$k = 1, \dots, N-1$
$l^{(0)}(k) = 0.4$	$k = 1, \dots, N-1$
$u^{(0)}(k) = 0.5$	$k = 0, 1, \dots, N-1$
	$R = 0.2$
	$Q = 0.6$

La programación de este algoritmo se hizo en Matlab, los cálculos fueron realizados de acuerdo al procedimiento descrito en la sección 3.3.6 y el criterio de paro fue

$$\|U^{(i+1)} - U^{(i)}\| \leq \max_k |u^{(i+1)}(k) - u^{(i)}(k)| \leq 1 \times 10^{-3} \quad (4.51)$$

4.5. Resultados

A continuación se presentan los resultados del modelo obtenidos con la aplicación del algoritmo proyección del gradiente sujeto a las condiciones descritas en la sección 4.4. El algoritmo requirió 10 iteraciones para converger.

4.5.1. Trayectorias de control óptimo y respuesta del sistema

Aplicando los valores de las tablas 2.1, 2.2 y 4.2 , se inició el algoritmo y se obtuvieron las siguientes trayectorias

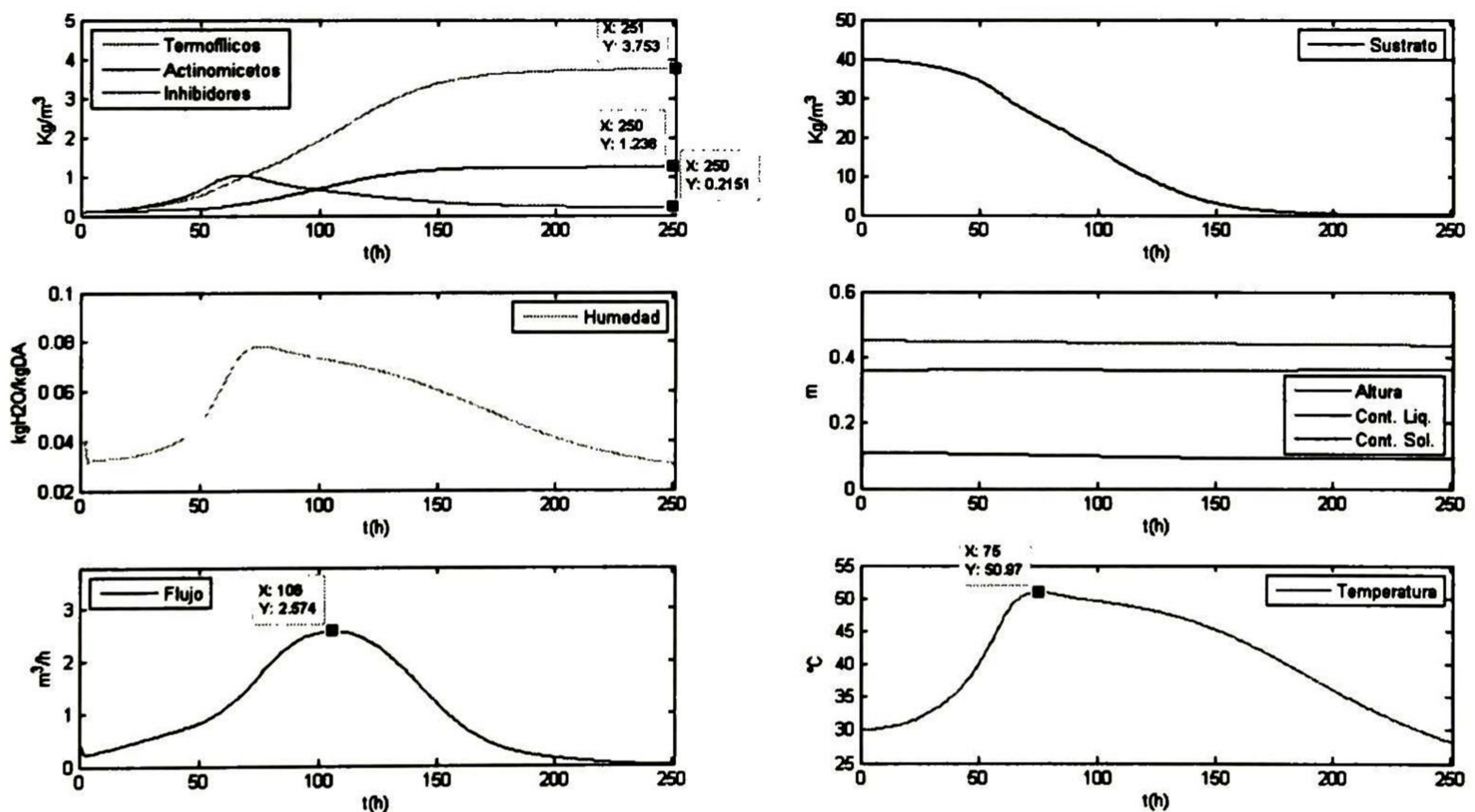


Figura 4.5: Resultados del modelo obtenidos con la proyección del gradiente con una $u^{(0)}(k) = 0.5$

El algoritmo inició con un valor de $J = 1184.9$ y después de 10 iteraciones convergió y se obtuvo un valor de $J = 3025.3$. Como se puede apreciar en la figura 4.5 la nueva trayectoria

del flujo óptimo calculada ofrece una producción de $x_2(k) = 3.753 \text{ kg/m}^3$. Comparando este resultado con la producción obtenida con el gradiente descendente, el gradiente obtuvo una concentración 0.47% mayor de hongos termofílicos. El flujo óptimo alcanzó un valor máximo de $2.57 \text{ m}^3/\text{h}$ a las 108 horas del proceso y la temperatura alcanzó $50.97 \text{ }^\circ\text{C}$ a las 75 horas. La producción de los microorganismos actinomicetos fue de 1.238 kg/m^3 , que disminuyó un 40.85% comparado con la producción a flujo constante. El crecimiento de los microorganismos inhibidores fue de 0.21 kg/m^3 , un crecimiento mínimo comparado con el aumento de la producción de los hongos termofílicos. Los resultados de este método son muy parecidos al del gradiente descendente, el flujo óptimo beneficia a los microorganismos termofílicos maximizando su concentración que es el objetivo principal. También se puede notar en la figura 4.5 que el sustrato se acaba cerca de las 180 horas y el aumento de la concentración de microorganismos termofílicos después de ese tiempo es mínimo. Por lo tanto se logra una producción mayor en menos tiempo lo cual representa una optimización del proceso. Si elegimos otra trayectoria inicial para la variable de control $u^{(0)}(k)$ el algoritmo también converge. La convergencia del algoritmo ocurre para una variedad de trayectorias iniciales y en pocas iteraciones. La convergencia se probó con otros dos valores, $u^{(0)}(k) = 0.1$ y $u^{(0)}(k) = 1$, los resultados se muestran en la figuras 4.6 y 4.7 respectivamente.

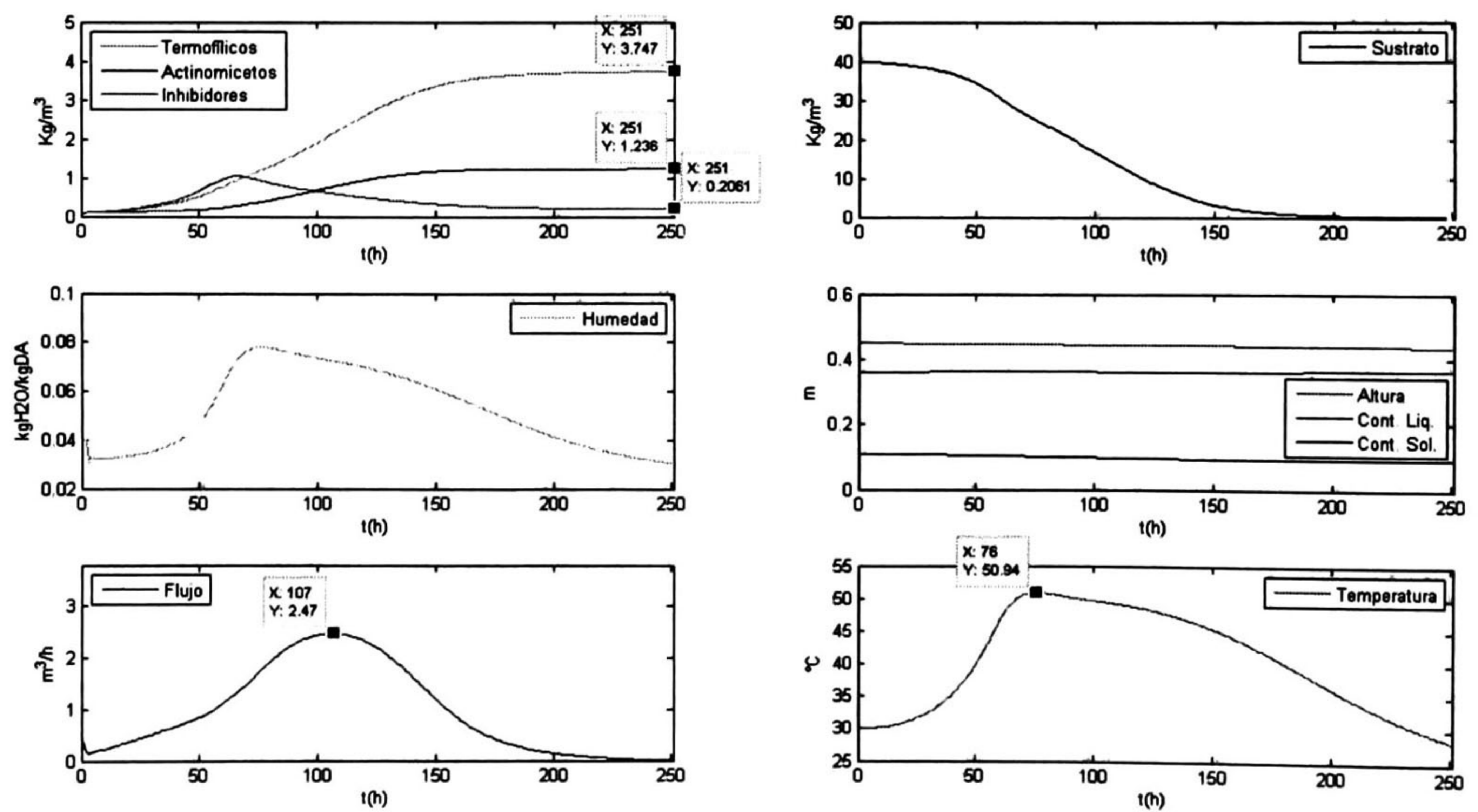


Figura 4.6: Resultados del modelo obtenidos con la proyección del gradiente con una $u^{(0)}(k) = 0.1$

En la figura 4.6 el valor inicial de la función de desempeño fue $J=1369.4$ y después de 10 iteraciones el algoritmo convergió a $J=3457.9$. Se observa una concentración de microorganismos termofílicos de 3.747 kg/m^3 , la trayectoria óptima del flujo de aire alcanzó su máximo

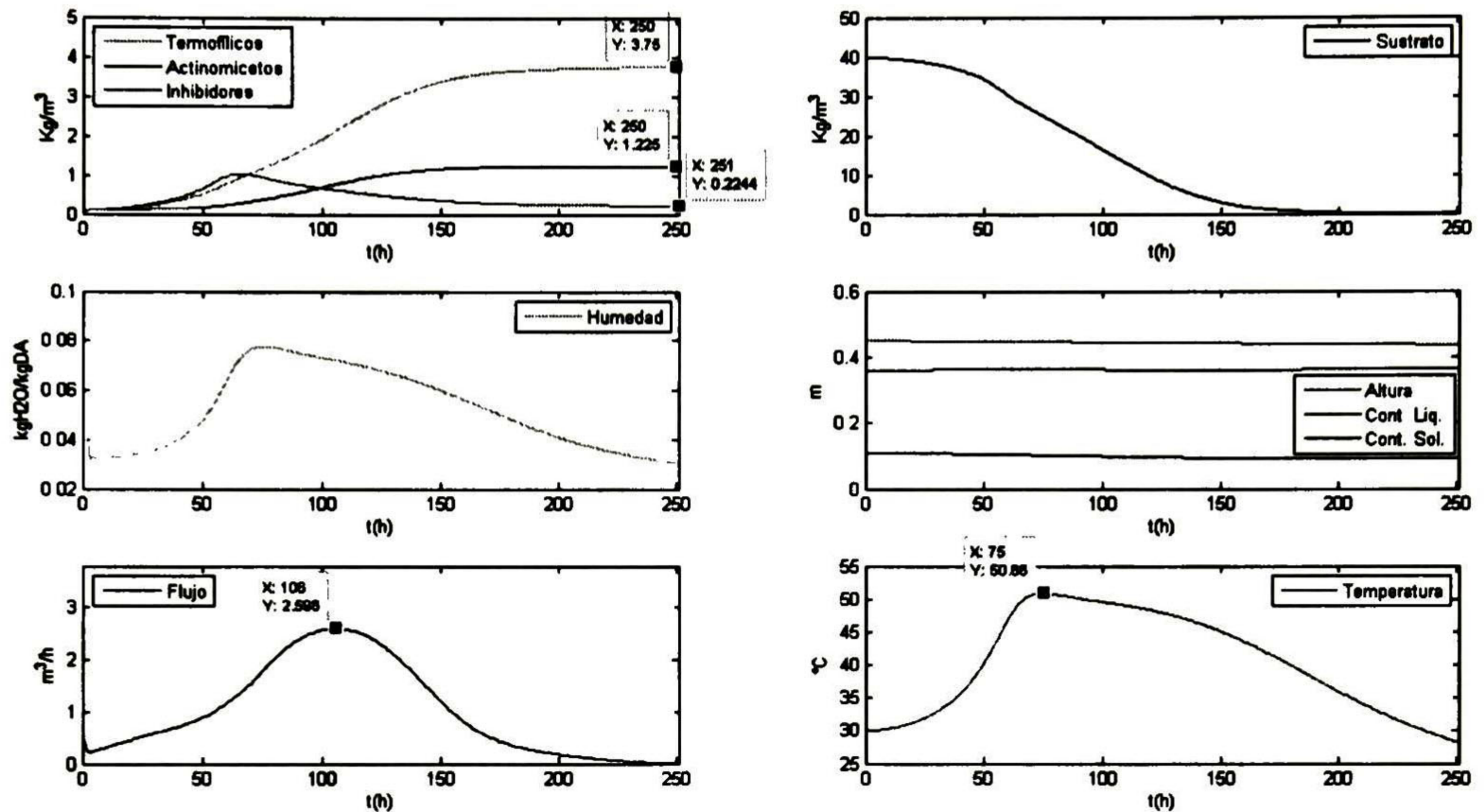


Figura 4.7: Resultados del modelo obtenidos con la proyección del gradiente con una $u^{(0)}(k) = 1$

valor en $2.47 \text{ m}^3/\text{h}$ a las 107 horas del proceso, y la temperatura alcanza su valor máximo en 50.94°C a las 76 horas. En la figura 4.7 el valor inicial de la función de desempeño fue $J = 1673.2$ y después de 10 iteraciones el algoritmo convergió a $J = 4308.5$. La concentración de microorganismos termofílicos es de $3.75 \text{ kg}/\text{m}^3$, la trayectoria óptima del flujo de aire alcanzó su máximo valor en $2.59 \text{ m}^3/\text{h}$ a las 106 horas y la temperatura alcanzó su valor máximo en 50.86°C a las 75 horas.

Los resultados obtenidos a diferentes trayectorias iniciales del control son muy parecidos entre si y también con los del algoritmo del gradiente descendente, esto demuestra que la secuencia de soluciones lineales convergen al sistema discreto no lineal. La concentración de microorganismos termofílicos fue ligeramente mayor con $u^{(0)}(k) = 0.5$ por lo tanto los resultados obtenidos con esta trayectoria serán tomados como punto de referencia para hacer un comparativo con los resultados obtenidos a flujo constante, y también para analizar la sensibilidad del algoritmo en el siguiente capítulo. En la figura 4.8 se muestra un comparativo de las trayectorias del flujo de aire, temperatura y concentración de hongos termofílicos para las diferentes entradas iniciales.

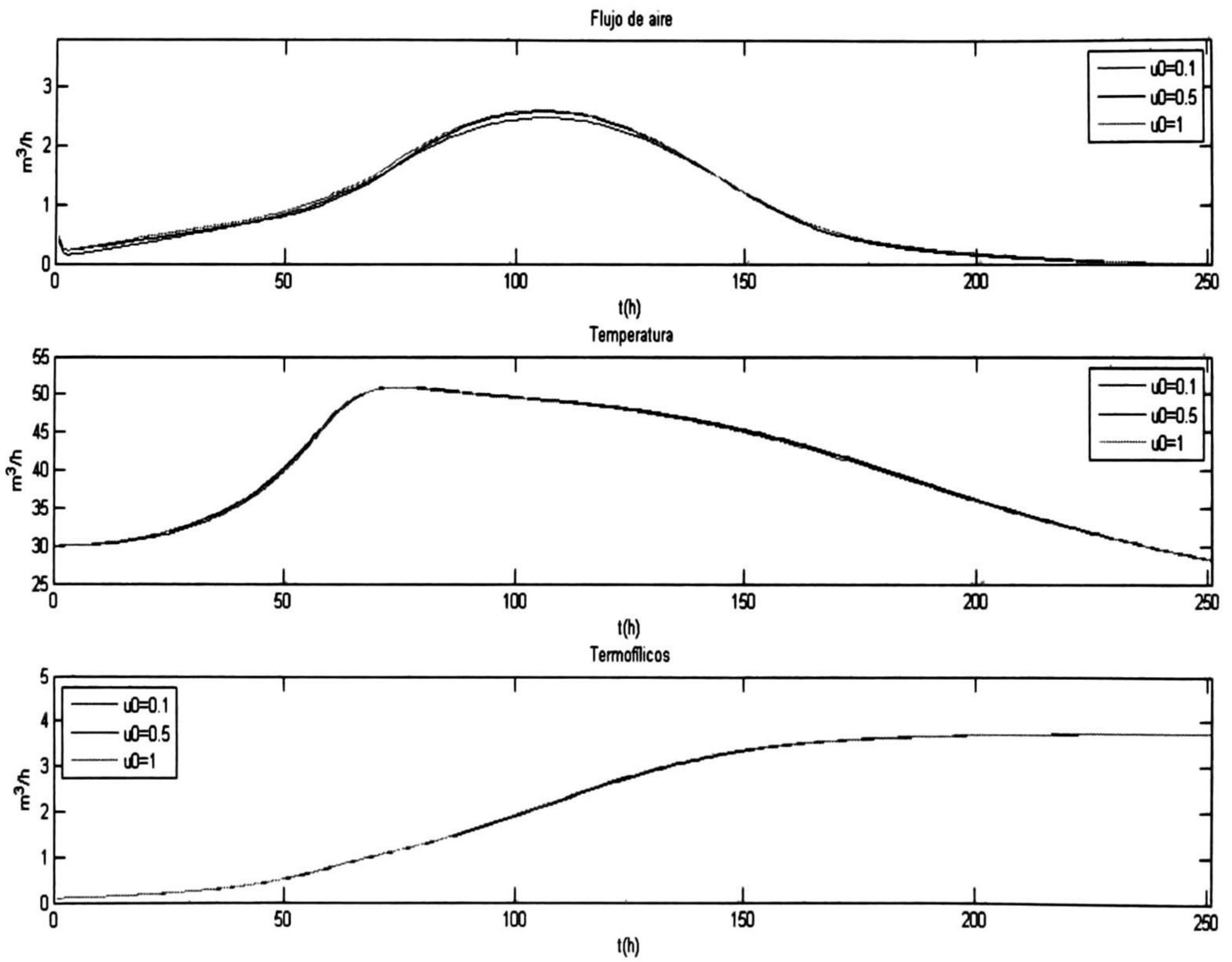


Figura 4.8: Comparativo de trayectorias para diferentes $u^{(0)}(k)$

Capítulo 5

Análisis de Sensibilidad

5.1. Introducción

En este capítulo se someterán a prueba los desempeños de los algoritmos de control óptimo ante variación de los parámetros Q y R de la función de desempeño, la variación de la humedad y la temperatura del flujo de aire, variación de las condiciones iniciales del modelo y variación del tiempo del proceso. Se presentarán las simulaciones variando cada parámetro y manteniendo a los demás constantes, y analizaremos el comportamiento de los algoritmos y las trayectorias calculadas.

5.2. Análisis de sensibilidad del Gradiente Descendente

5.2.1. Variación de parámetros de la función de desempeño

El parámetro R de la función de desempeño es un peso que pondera a la variable de control para reducir o aumentar el consumo del esfuerzo. El análisis que se hace en esta sección es acerca del comportamiento del algoritmo ante la variación del parámetro R . Las pruebas se hicieron para valores de $R = 0.01$ y $R = 0.3$, la convergencia se obtuvo en 12 iteraciones. Las figuras 5.1 y 5.2 muestran los resultados respectivos.

En la figura 5.1 se aprecia una disminución del esfuerzo de control para un valor de $R = 0.01$. Se obtuvo una concentración máxima de $x_2(t) = 3.74 \text{ kg/m}^3$ para un valor máximo de $u(t) = 2.09 \text{ m}^3/\text{h}$ y la temperatura alcanzó un máximo valor de 51.1°C a las 78 horas.

En la figura 5.2 se aprecia un aumento del esfuerzo de control para un valor de $R = 0.3$. Se obtuvo una concentración máxima de $x_2(t) = 3.77 \text{ kg/m}^3$ para un valor máximo de $u(t) = 3.15 \text{ m}^3/\text{h}$ y un valor máximo de temperatura de 50.17°C a las 72 horas. En el capítulo anterior

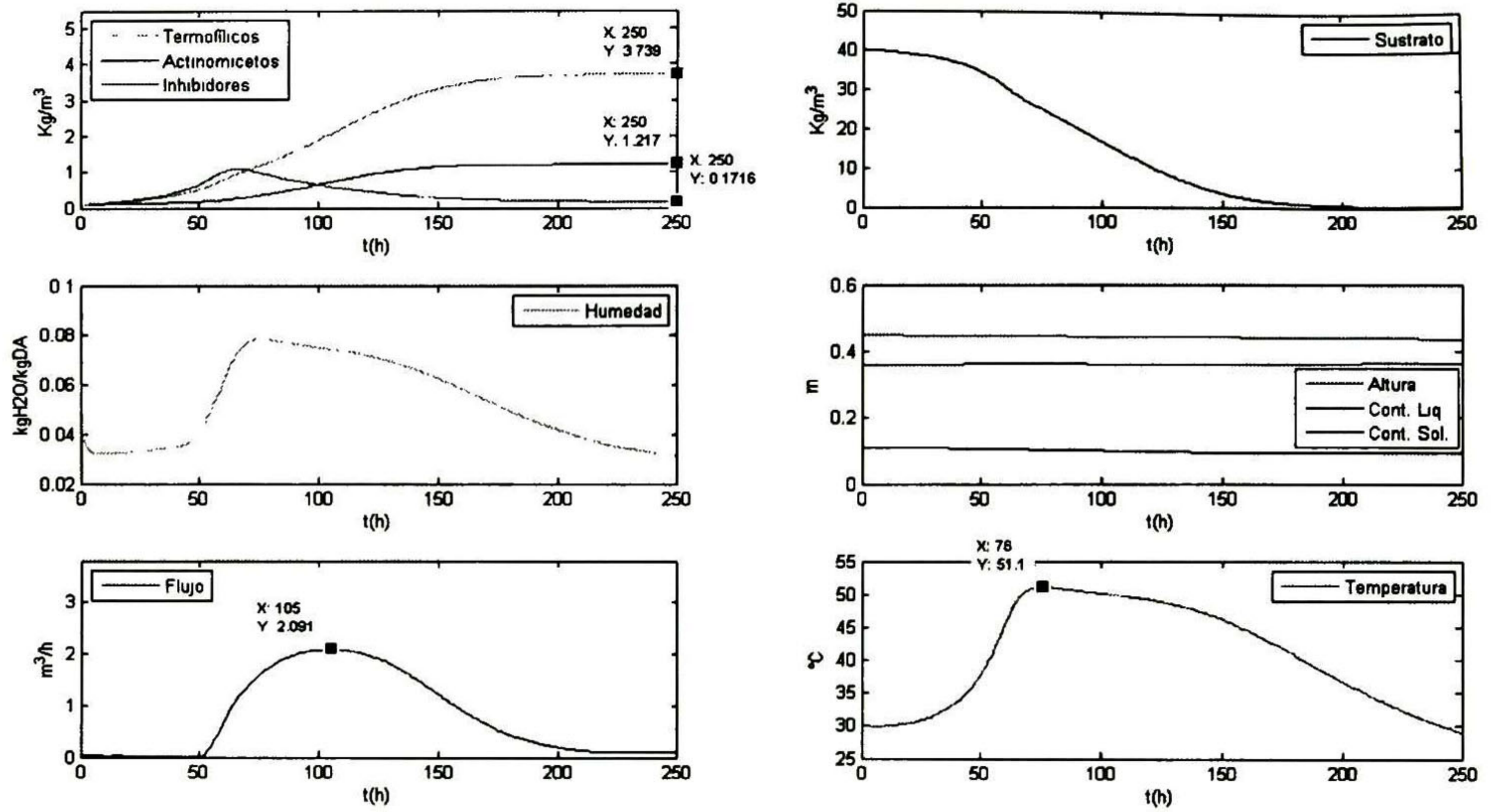


Figura 5.1: Resultados del sistema con un valor del parámetro $R = 0.01$

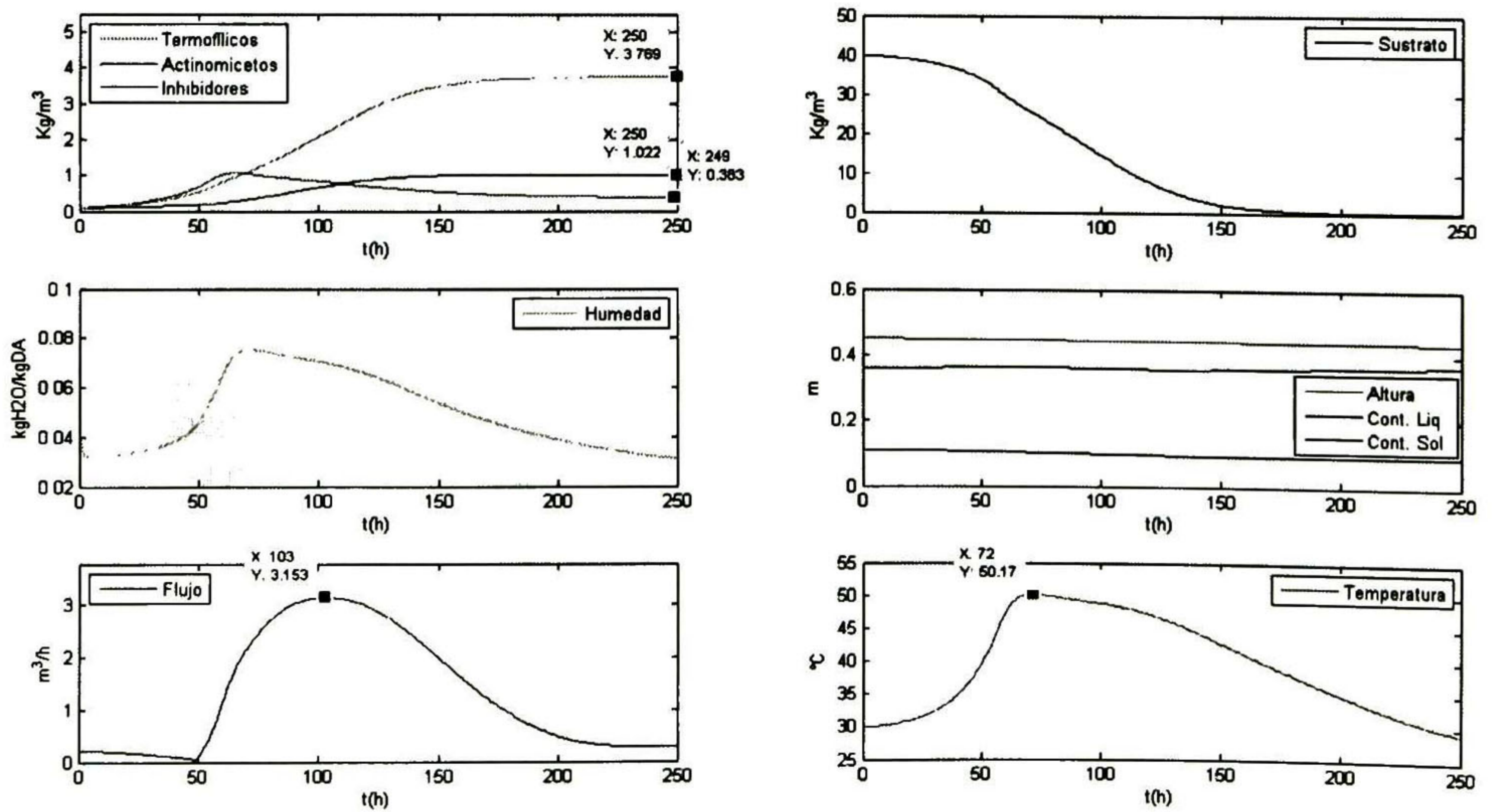


Figura 5.2: Resultados del sistema con un valor del parámetro $R = 0.3$

utilizamos un valor de $R = 0.1$ para ponderar el esfuerzo de control y obtuvimos un valor máximo de $u(t) = 2.43 \text{ m}^3/\text{h}$ para una concentración máxima de $x_2(t) = 3.77 \text{ kg}/\text{m}^3$. Al comparar este resultado con los anteriores podemos notar que un valor grande del parámetro R aumenta el esfuerzo de control aunque sin una concentración mayor de microorganismos y por otro lado un valor pequeño de R disminuye el esfuerzo de control y por consiguiente también la concentración de hongos termofílicos. Por lo tanto una elección adecuada del parámetro R debe ser hecha con base en los requerimientos del proceso y a las restricciones del control.

En la figura 5.3 se muestra un comparativo de las trayectorias del flujo de aire, temperatura y concentración de hongos termofílicos para los diferentes valores de R .

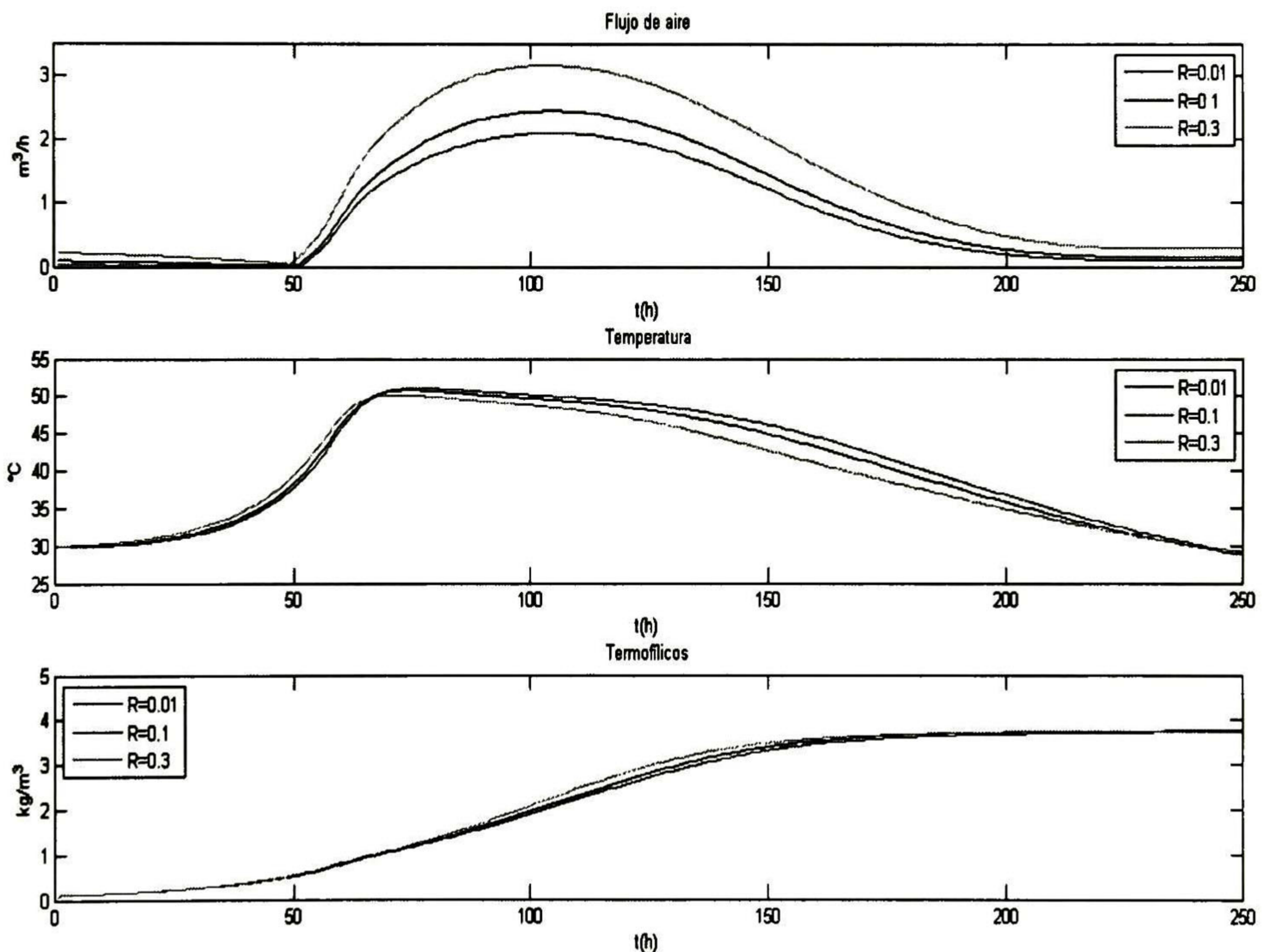


Figura 5.3: Comparativo de trayectorias ante diferentes valores de R

Ahora verificaremos el comportamiento del algoritmo ante la variación del parámetro Q que pondera al estado $x_2(t)$. Las pruebas se hicieron para valores de $Q = 0.03$ y $Q = 0.3$, la convergencia se obtuvo en 10 iteraciones y los resultados se muestran en las figuras 5.4 y 5.5 respectivamente.

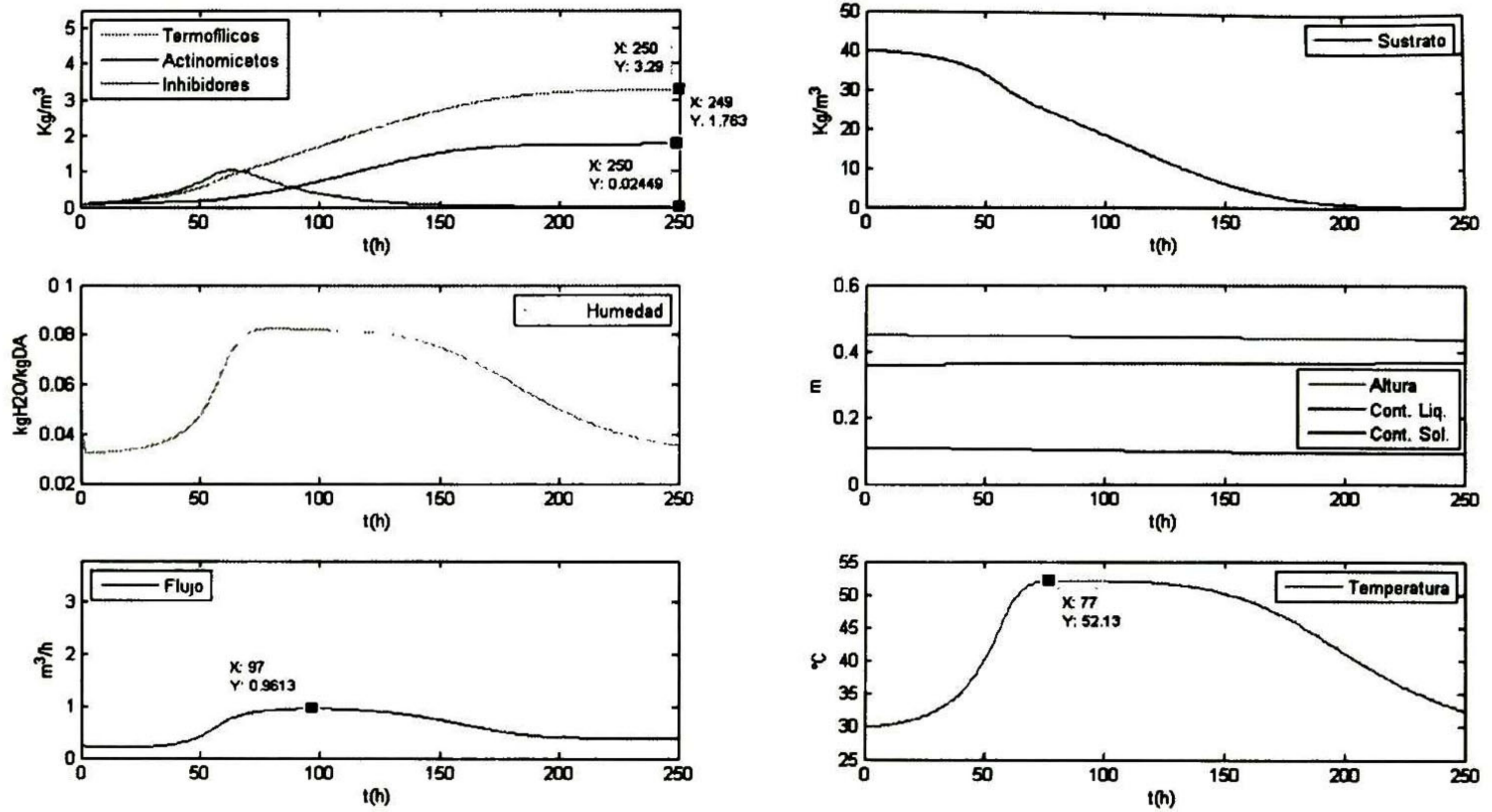


Figura 5.4: Resultados del sistema con un valor del parámetro $Q = 0.03$

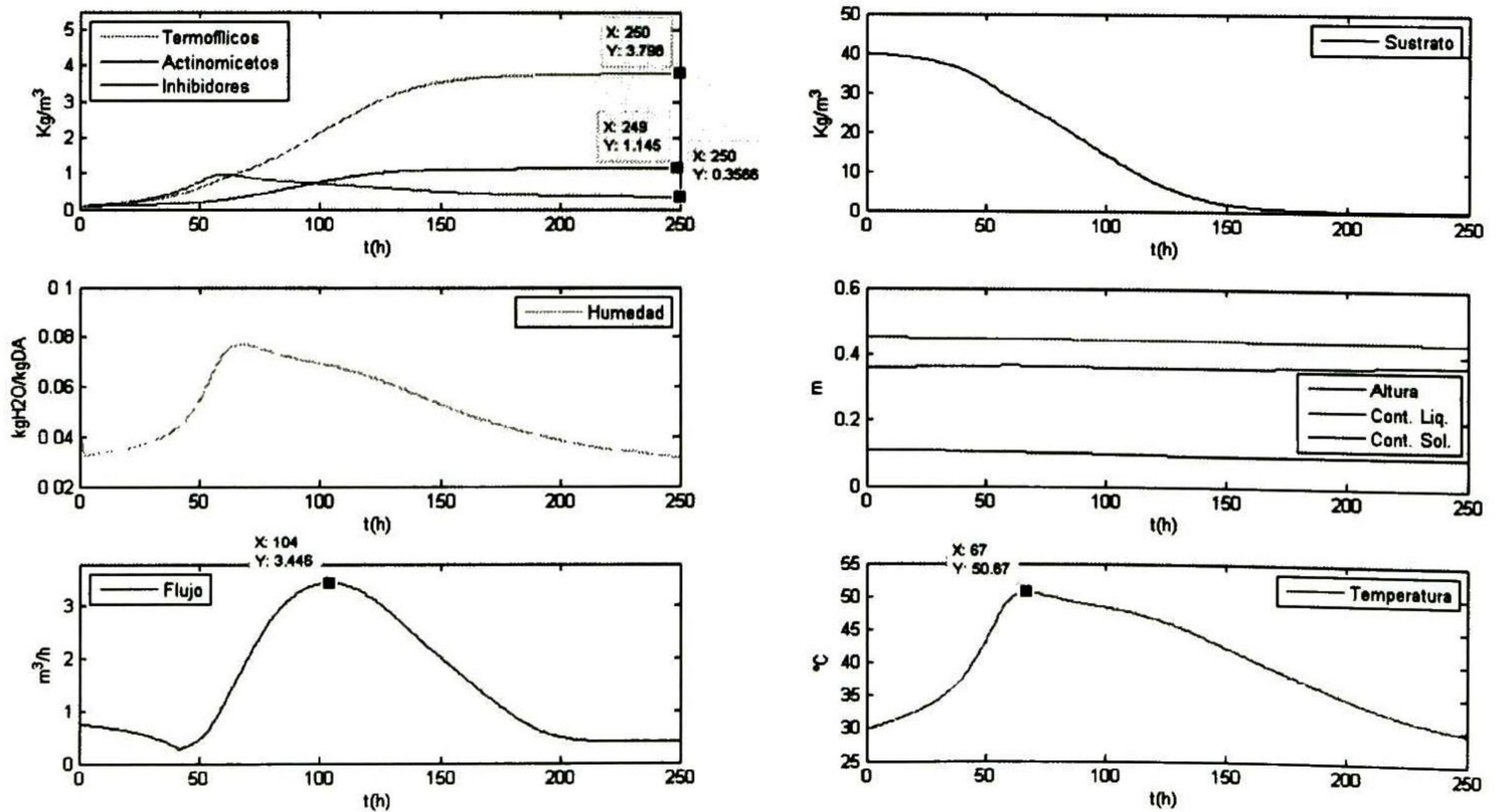


Figura 5.5: Resultados del sistema con un valor del parámetro $Q = 0.3$

En la figura 5.4 se aprecia que no hay gran aumento en la concentración de los microorganismos termofílicos $x_2(t) = 3.29 \text{ kg/m}^3$, el esfuerzo de control alcanzó un valor máximo de $u(t) = 0.96 \text{ m}^3/\text{h}$ y la temperatura alcanzó un máximo de 52.1°C a las 77 hoas. El flujo de aire no es muy grande por lo que los microorganismos no tienen el oxígeno suficiente para crecer. En la figura 5.5 la concentración de los hongos termofílicos aumentó $x_2(t) = 3.79 \text{ kg/m}^3$ con un valor máximo de $u(t) = 3.44 \text{ m}^3/\text{h}$ y una temperatura máxima de 50.67°C a las 67 horas. Por lo tanto concluimos que un valor grande del parámetro Q aumenta la concentración y el esfuerzo de control aunque al compararlo con los resultados de la figura 4.1 del capítulo anterior podemos observar que con un esfuerzo de $u(t) = 2.43 \text{ m}^3/\text{h}$ obtuvimos una concentración de $x_2(t) = 3.77 \text{ kg/m}^3$ utilizando un valor de $Q = 0.12$, que es una concentración similar a la obtenida con $Q = 0.3$ pero con menor esfuerzo de control. Por otro lado un valor pequeño de Q disminuye el esfuerzo de control y por consiguiente también la concentración de hongos termofílicos. Por lo tanto también una elección adecuada del parámetro Q debe ser hecha con base en los requerimientos del proceso y a las restricciones del control. En la figura 5.6 se muestra un comparativo de las trayectorias del flujo de aire, temperatura y concentración de hongos termofílicos para los diferentes valores de Q .

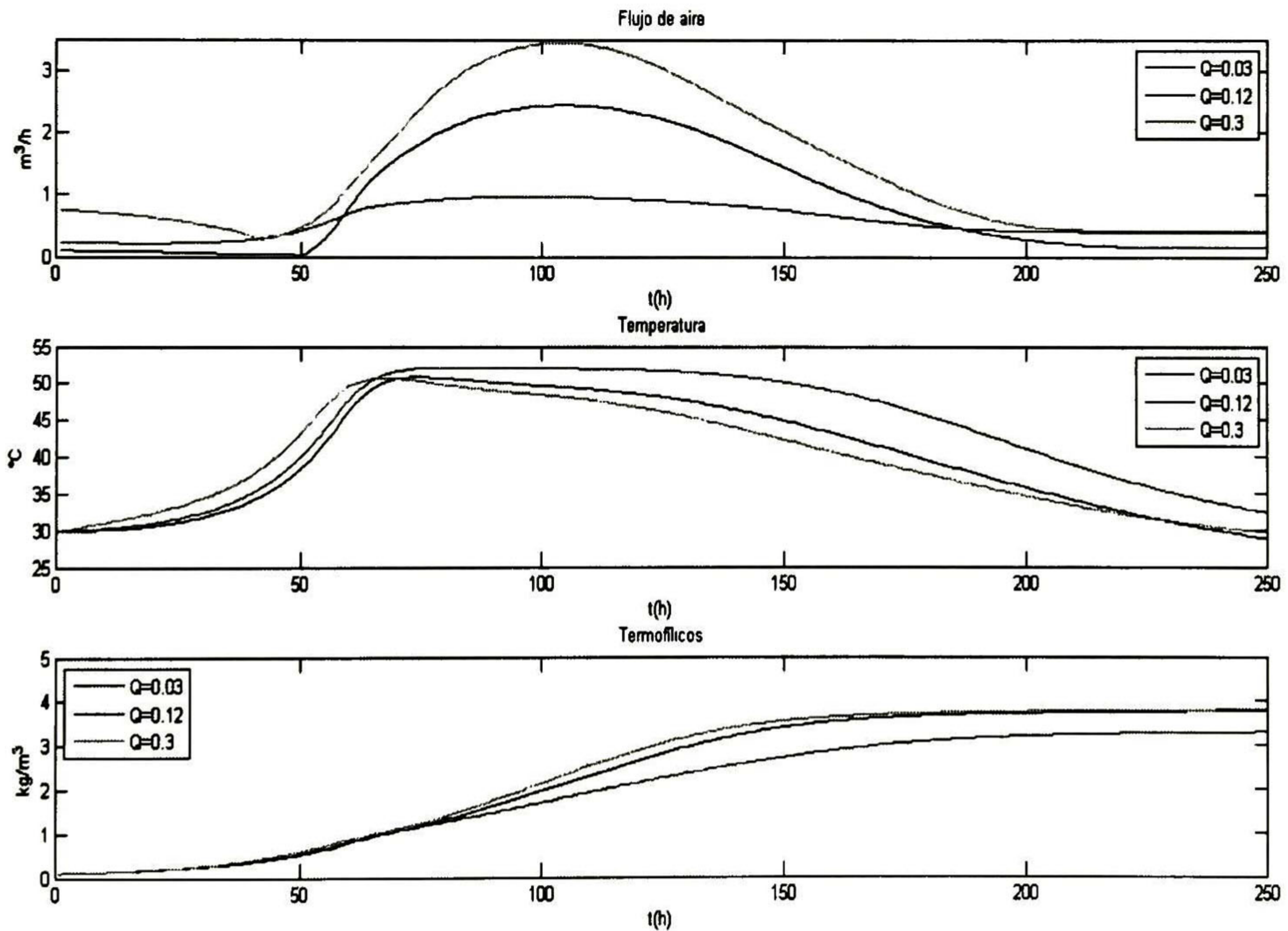


Figura 5.6: Comparativo de trayectorias ante diferentes valores de Q

5.2.2. Variación de las condiciones de la variable de entrada

Hasta ahora hemos visto que los parámetros $R = 0.1$ y $Q = 0.12$ elegidos en el capítulo anterior fueron adecuados porque obtuvimos una máxima concentración de biomasa sin un gran esfuerzo de control, la temperatura alcanzó un máximo de 50.8°C y la máxima concentración se obtuvo en un menor tiempo del proceso.

Ahora analizaremos el comportamiento del algoritmo ante la variación de las condiciones del flujo volumétrico del aire de entrada en el reactor. Las condiciones que se variarán son la humedad H_f y la temperatura T_{0a} del flujo de aire. Primero analizaremos el comportamiento del algoritmo ante la variación de la humedad H_f . Las pruebas se hicieron para valores de $H_f = 0.045$ y $H_f = 0.065$, la convergencia se obtuvo en 14 iteraciones.

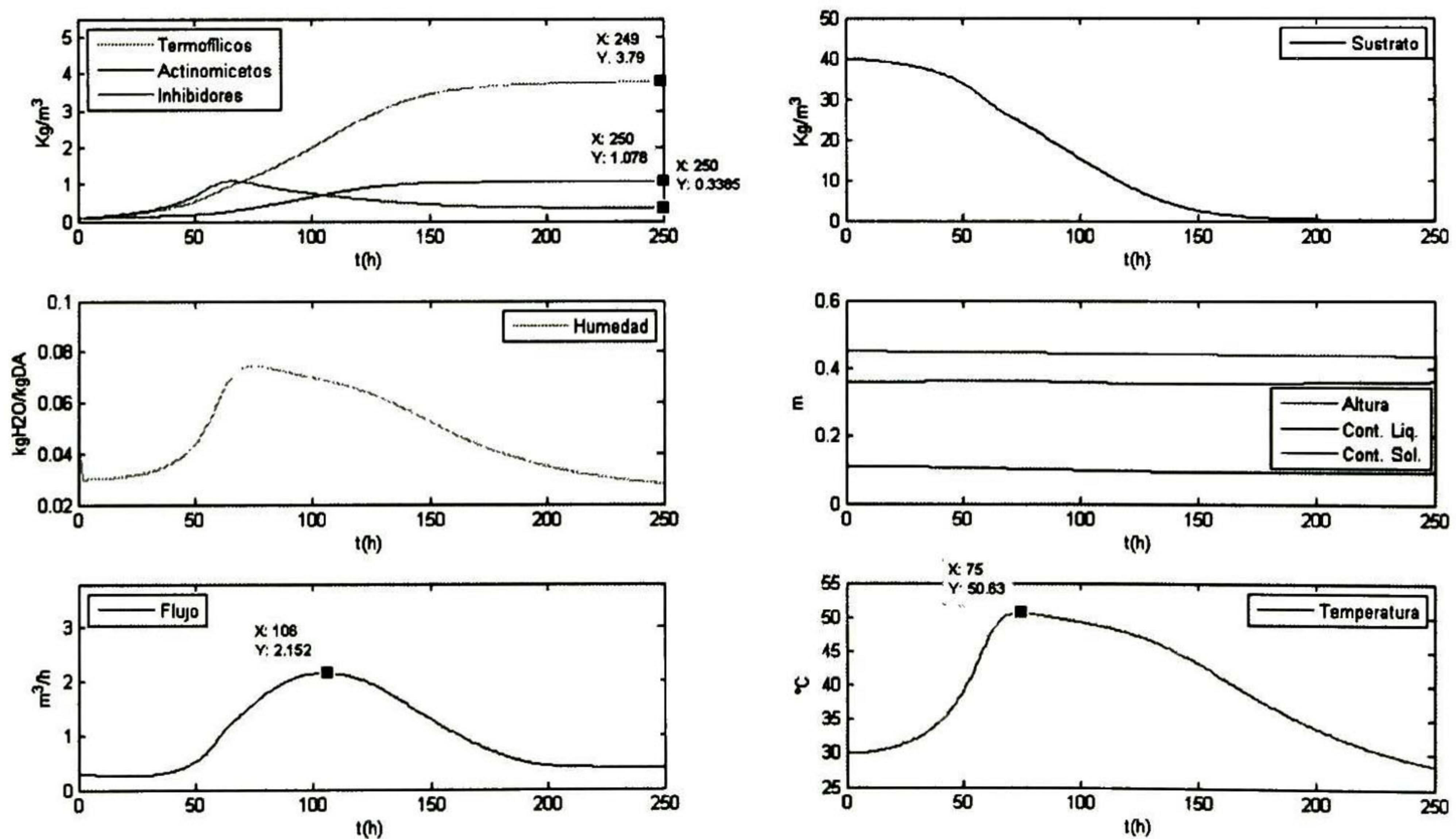


Figura 5.7: Resultados del modelo ante variación de la humedad del flujo de aire, $H_f = 0.045$

En la figura 5.7 se puede observar que el esfuerzo de control alcanza un valor máximo de $u(t) = 2.15 \text{ m}^3/\text{h}$, la concentración de hongos termofílicos es de $x_2(t) = 3.79 \text{ kg/m}^3$ y la temperatura alcanza un valor máximo de 50.63°C a las 75 horas. La concentración de hongos termofílicos alcanza un valor máximo cerca de las 200 horas y después su incremento es mínimo. No obstante la concentración de los inhibidores aumenta llegando a $x_3(t) = 0.33 \text{ kg/m}^3$.

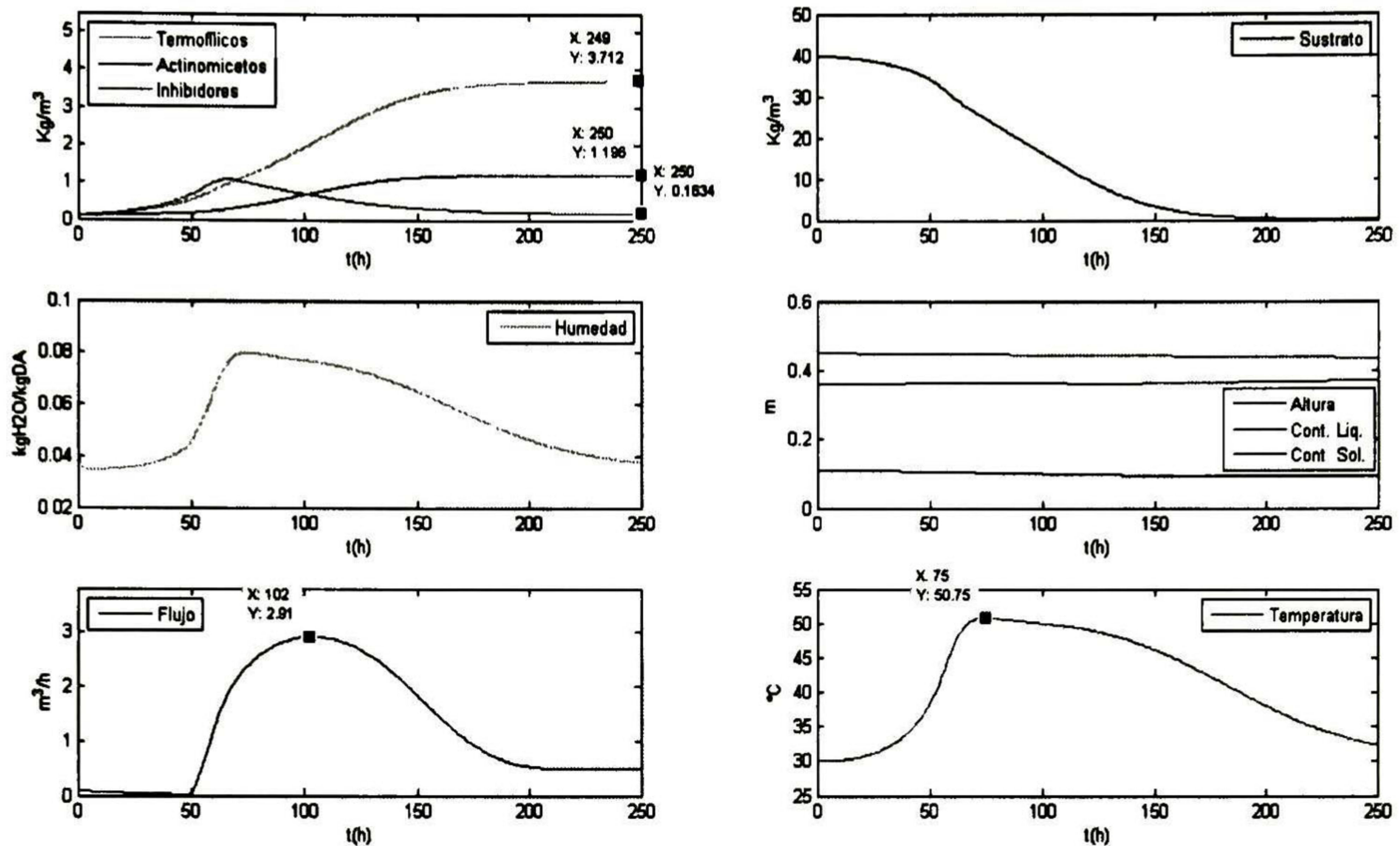


Figura 5.8: Resultados del modelo ante variación de de la humedad del flujo de aire, $H_f = 0.065$

La figura 5.8 muestra un incremento del esfuerzo de control alcanzando un valor máximo de $u(t) = 2.91 \text{ m}^3/\text{h}$, la concentración de hongos termofílicos alcanza un valor máximo de $x_2(t) = 3.71 \text{ kg}/\text{m}^3$ y la temperatura alcanza un valor máximo de 50.75°C a las 75 horas. La concentración de los inhibidores llegó a $0.16 \text{ kg}/\text{m}^3$.

Con estos resultados concluimos que un valor pequeño de la variable H_f aumenta la concentración de los hongos termofílicos y disminuye el esfuerzo de control, sin embargo se obtiene un incremento en la concentración de los inhibidores. El aumento de la variable H_f incrementa el esfuerzo de control pero sin una mayor producción de hongos termofílicos, sin embargo disminuye la concentración de los inhibidores.

Las ventajas y desventajas de variar esta variable son evidentes por lo que se recomienda una elección adecuada de H_f para obtener mejores resultados.

En la figura 5.9 se muestra un comparativo de las trayectorias del flujo de aire, temperatura y concentración de hongos termofílicos para los diferentes valores de H_f .

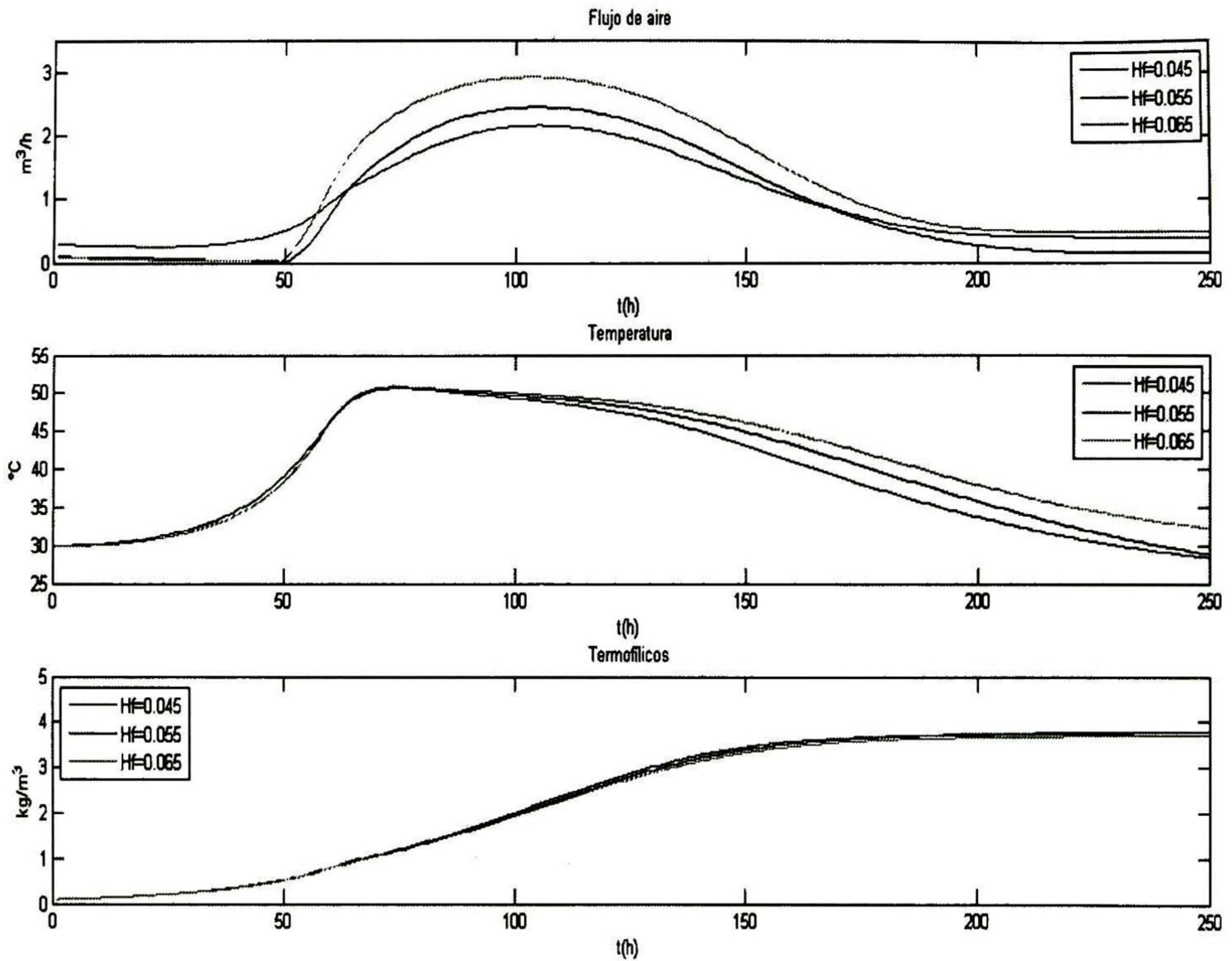


Figura 5.9: Comparativo de trayectorias ante diferentes valores de H_f

Ahora verificaremos el comportamiento del algoritmo ante la variación de la temperatura del aire $T0_a$. Las pruebas se hicieron para valores de $T0_a = 15^\circ C$ y $T0_a = 25^\circ C$, el algoritmo convergió en 14 iteraciones y los resultados se muestran en las figuras respectivas.

En la figura 5.10 se observa que el esfuerzo de control alcanza un valor máximo de $u(t) = 1.99 \text{ m}^3/h$, la concentración de hongos termofílicos es de $x_2(t) = 3.8 \text{ kg/m}^3$ y la temperatura alcanza un valor máximo de $51.12^\circ C$ a las 79 horas. La concentración de los inhibidores es de $x_2(t) = 0.29 \text{ kg/m}^3$. La figura 5.11 muestra un incremento del esfuerzo de control alcanzando un valor máximo de $u(t) = 2.89 \text{ m}^3/h$, la concentración de hongos termofílicos es de $x_2(t) = 3.70 \text{ kg/m}^3$ y la temperatura alcanza un valor máximo de $50.24^\circ C$ a las 70 horas. La concentración de los inhibidores llegó a 0.18 kg/m^3 . Los resultados demuestran que la disminución de la temperatura $T0_a$ aumenta la concentración de los hongos termofílicos, disminuye el esfuerzo de control y se obtiene un incremento en la concentración de los

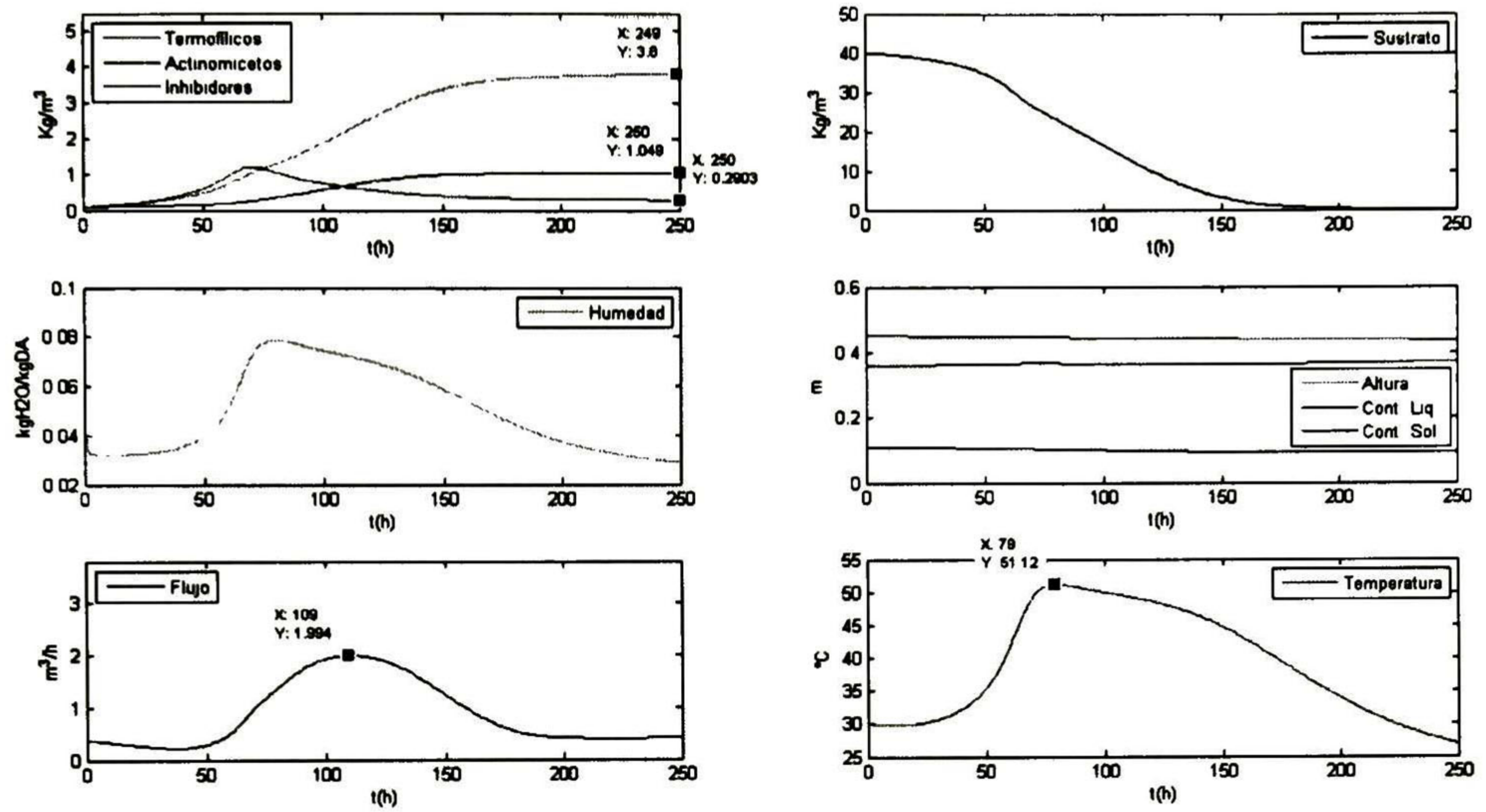


Figura 5.10: Resultados del modelo ante variación de la temperatura del flujo de aire, $T_{0a} = 15$

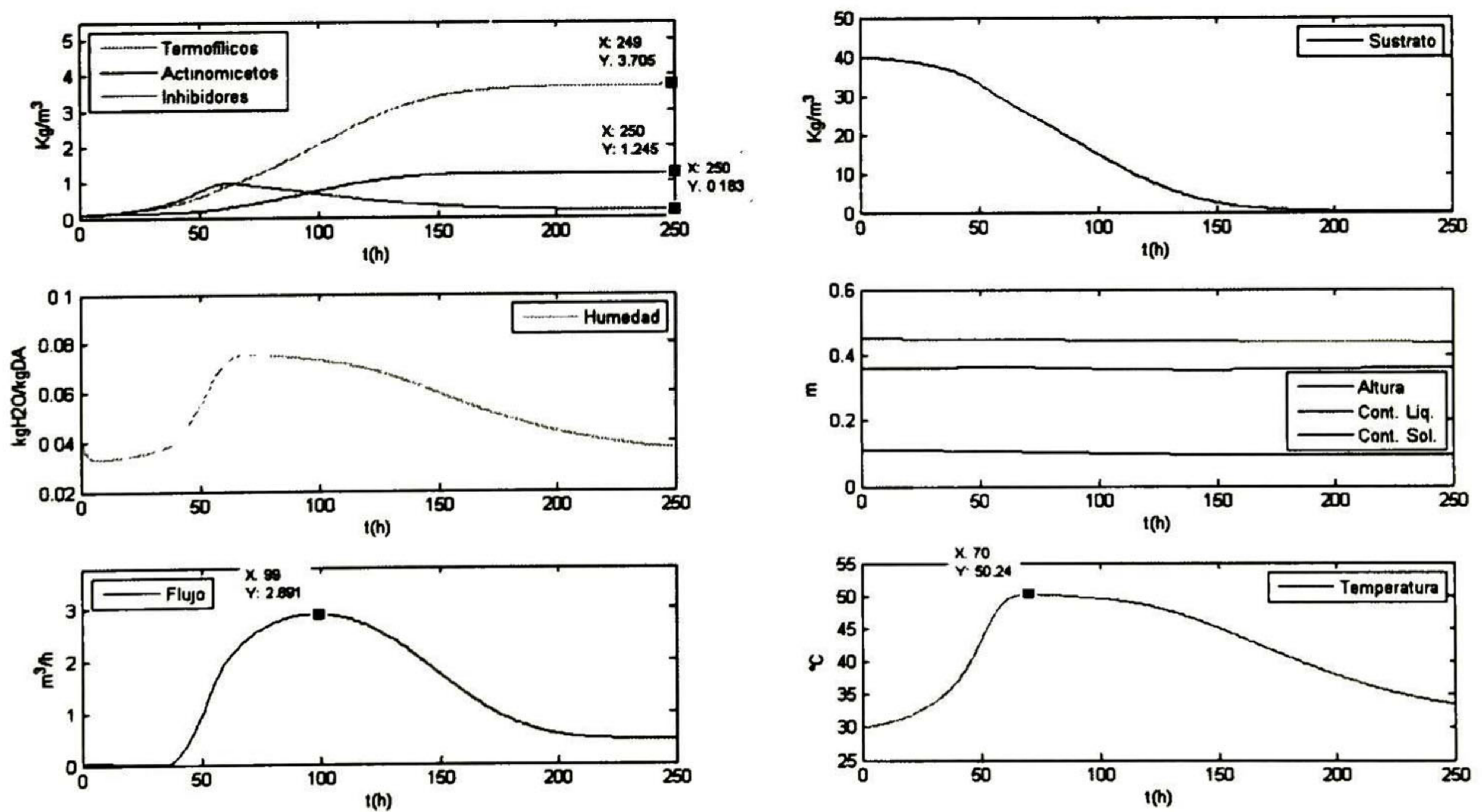


Figura 5.11: Resultados del modelo ante variación de la temperatura del flujo de aire, $T_{0a} = 25$

inhibidores. El aumento de $T0_a$ incrementa el esfuerzo de control sin una mayor producción de hongos termofílicos y disminuye la concentración de los inhibidores. Las conclusiones obtenidas para esta variable son similares a las obtenidas con la variable H_f , tal vez una combinación adecuada de estas variables podrían mejorar el desempeño del algoritmo y obtener mejores resultados. En la figura 5.12 se muestra un comparativo de las trayectorias del flujo de aire, temperatura y concentración de hongos termofílicos para los diferentes valores de $T0_a$.

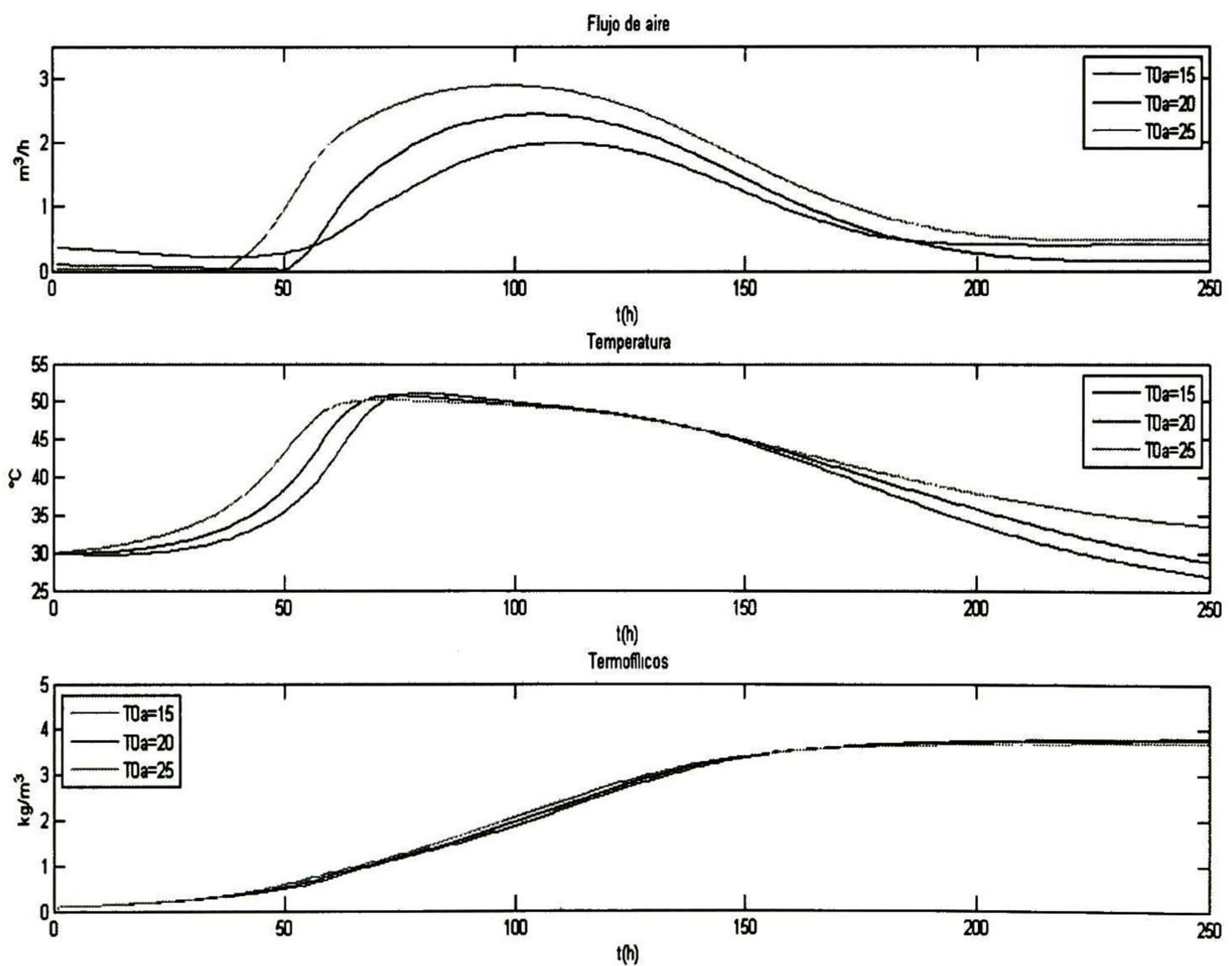


Figura 5.12: Comparativo de trayectorias ante diferentes valores de $T0_a$

5.2.3. Variación del período de tiempo y condiciones iniciales

Ahora evaluaremos el comportamiento del algoritmo ante variaciones de las condiciones iniciales y el período de tiempo. Primero evaluamos el algoritmo para el incremento de los valores iniciales para el período de 250 horas: $x_{1_0} = 0.2$, $x_{2_0} = 0.3$, $x_{3_0} = 0.15$, $S_0 = 45$,

$\theta_{S_0} = 0.14795$, $\theta_{I_0} = 0.39885$, $T_0 = 35$, $l_0 = 0.5$, $H_0 = 0.06$. La convergencia se obtuvo en 14 iteraciones y los resultados se muestran en la figura 5.13.

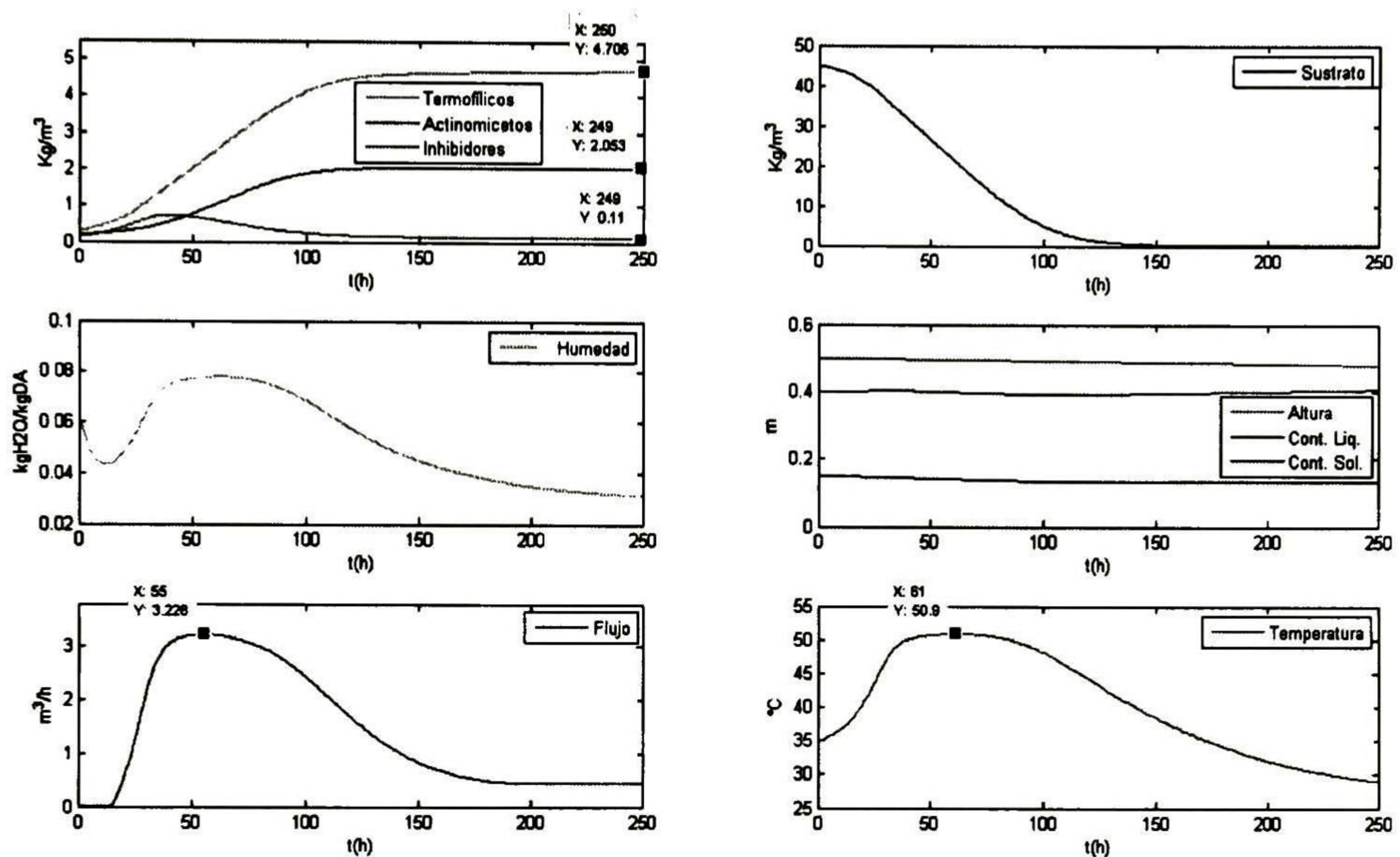


Figura 5.13: Resultado del modelo ante incremento de las condiciones iniciales

Las condiciones iniciales juegan un papel importante en el proceso de FSS, las concentraciones iniciales mayores de microorganismos influyen en la velocidad de la reacción reduciendo el tiempo del proceso.

En este análisis se redujo el flujo de aire usando un valor de $Q = 0.09$. La disminución del control no perjudicó la maximización de los microorganismos termofílicos ya que alcanzaron una concentración máxima de $x_2(t) = 4.7 \text{ kg/m}^3$ con un esfuerzo de control máximo de $u(t) = 3.22 \text{ m}^3/\text{h}$. La concentración de los microorganismos actinomicetos también incrementó, $x_1(t) = 2.05 \text{ kg/m}^3$ y los inhibidores disminuyeron, $x_3(t) = 0.11 \text{ kg/m}^3$. Las concentraciones de los microorganismos alcanzan una concentración máxima alrededor de las 150 horas del proceso y después su incremento es mínimo.

La variación de las condiciones iniciales en esta sección demostró que una concentración inicial mayor de microorganismos aceleran la reacción, crecen con mayor rapidez y en menor tiempo con los suministros adecuados. El sustrato se acabó en 150 horas y después de ese tiempo el incremento de los dos principales rubros de microorganismos fue mínimo.

Ahora evaluaremos el comportamiento del algoritmo ante variación del período de tiempo y condiciones iniciales. Se emplean las condiciones iniciales descritas en la tabla 2.2 y las propuestas en esta sección. El algoritmo convergió en 12 iteraciones y los resultados se muestran en las figuras 5.14 y 5.15 respectivamente. En la figura 5.14 se puede observar que el flujo de aire alcanzó un máximo de $3.24 \text{ m}^3/\text{h}$ a las 113 horas y después de ese tiempo comenzó a descender. No obstante después de las 250 horas la trayectoria de flujo parece incrementarse ligeramente hasta el final del período de las 450 horas. La temperatura alcanzó su máximo en 51.33°C en 75 horas. El sustrato se acaba en 200 horas y la producción de microorganismos termofílicos llega a una concentración de $3.927 \text{ kg}/\text{m}^3$, los microorganismos actinomicetos e inhibidores no presentaron incrementos.

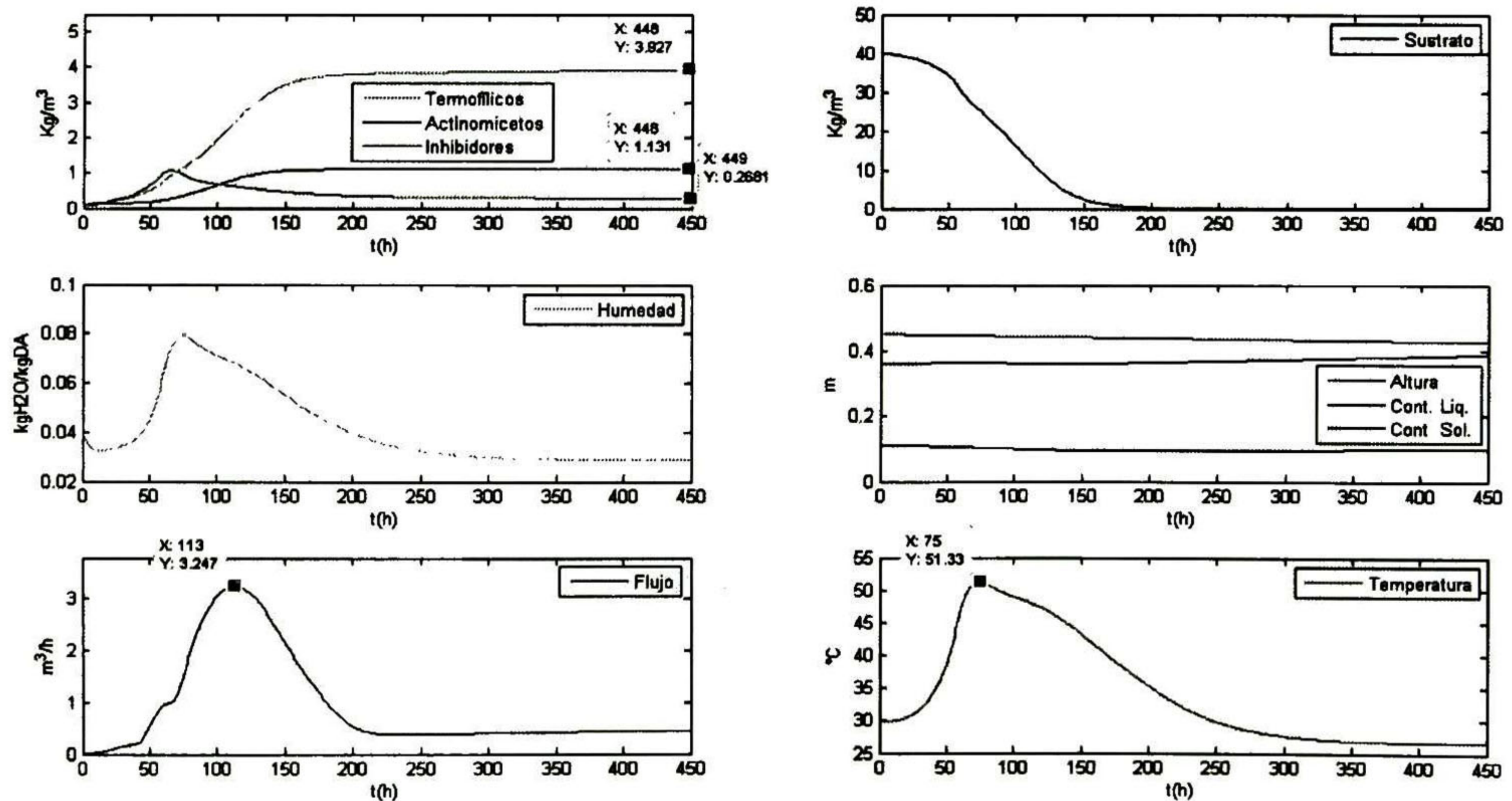


Figura 5.14: Resultado del modelo para un período de tiempo de 450 h y condiciones iniciales de la tabla 2.2

La figura 5.15 muestra el comportamiento del sistema sujeto a un período de tiempo de 450 horas y a las condiciones iniciales incrementadas propuestas en esta sección. Nuevamente la concentración inicial mayor de microorganismos acelerarán la reacción, el sustrato se acaba en 150 horas y la producción máxima de hongos termofílicos es de $4.95 \text{ kg}/\text{m}^3$. El valor del flujo en su punto máximo es de $3.56 \text{ m}^3/\text{h}$ en 59 horas, la temperatura alcanzó su máximo en 50.55°C en 58 horas, los actinomicetos aumentaron su concentración a $1.98 \text{ kg}/\text{m}^3$ y los inhibidores disminuyeron hasta $0.13 \text{ kg}/\text{m}^3$. El esfuerzo de control fue reducido usando los valores de $Q=0.07$ y $R=0.07$, la maximización de los microorganismos termofílicos no fue afectada.

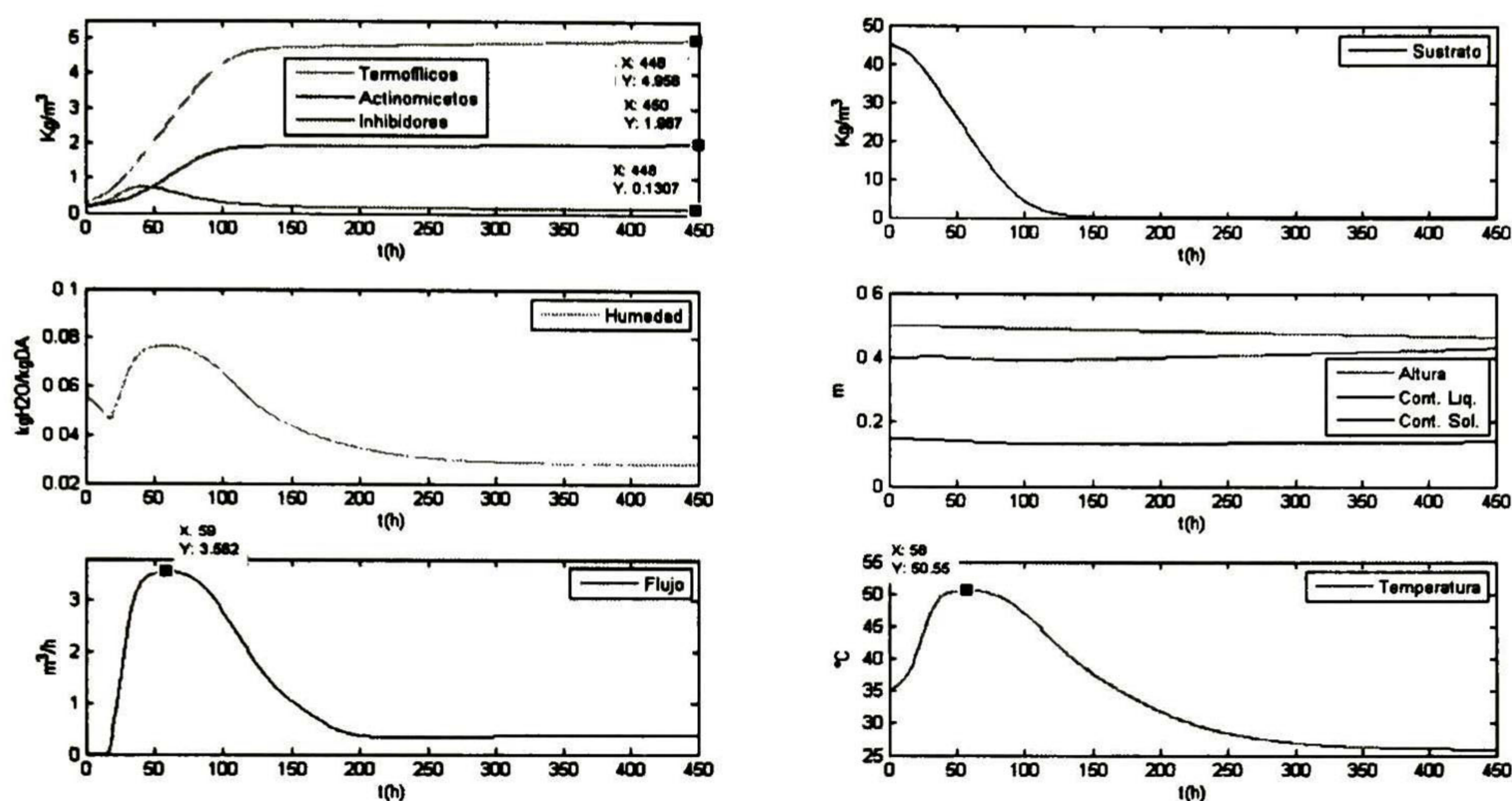


Figura 5.15: Resultado del modelo para un período de tiempo de 450 h y condiciones iniciales incrementadas

En este análisis pudimos observar el comportamiento de los microorganismos ante diferentes condiciones iniciales y períodos de tiempo, así como el comportamiento de la trayectoria óptima calculada por el método del gradiente descendente. En general en este análisis de sensibilidad el algoritmo demostró tener un buen desempeño ante diferentes variaciones y ser un buen método para encontrar trayectorias óptimas para sistemas altamente no lineales.

5.3. Análisis de sensibilidad de Proyección del Gradiente

5.3.1. Variación de parámetros de la función de desempeño

En esta sección procederemos de la misma manera que en la sección anterior, primero comenzaremos variando el parámetro R de la función de desempeño y analizaremos el comportamiento del algoritmo ante esta variación. La proyección del gradiente presenta algunas variantes en los valores de los parámetros de la función de desempeño con respecto al gradiente descendente. Por ejemplo el valor utilizado de R en el capítulo anterior fue de 0.2 y el de Q fue de 0.6. Por lo tanto las pruebas se hicieron para valores de $R = 0.1$ y $R = 0.3$, la convergencia se alcanzó en 10 iteraciones. Los resultados se muestran en las figuras 5.16 y 5.17 respectivamente.

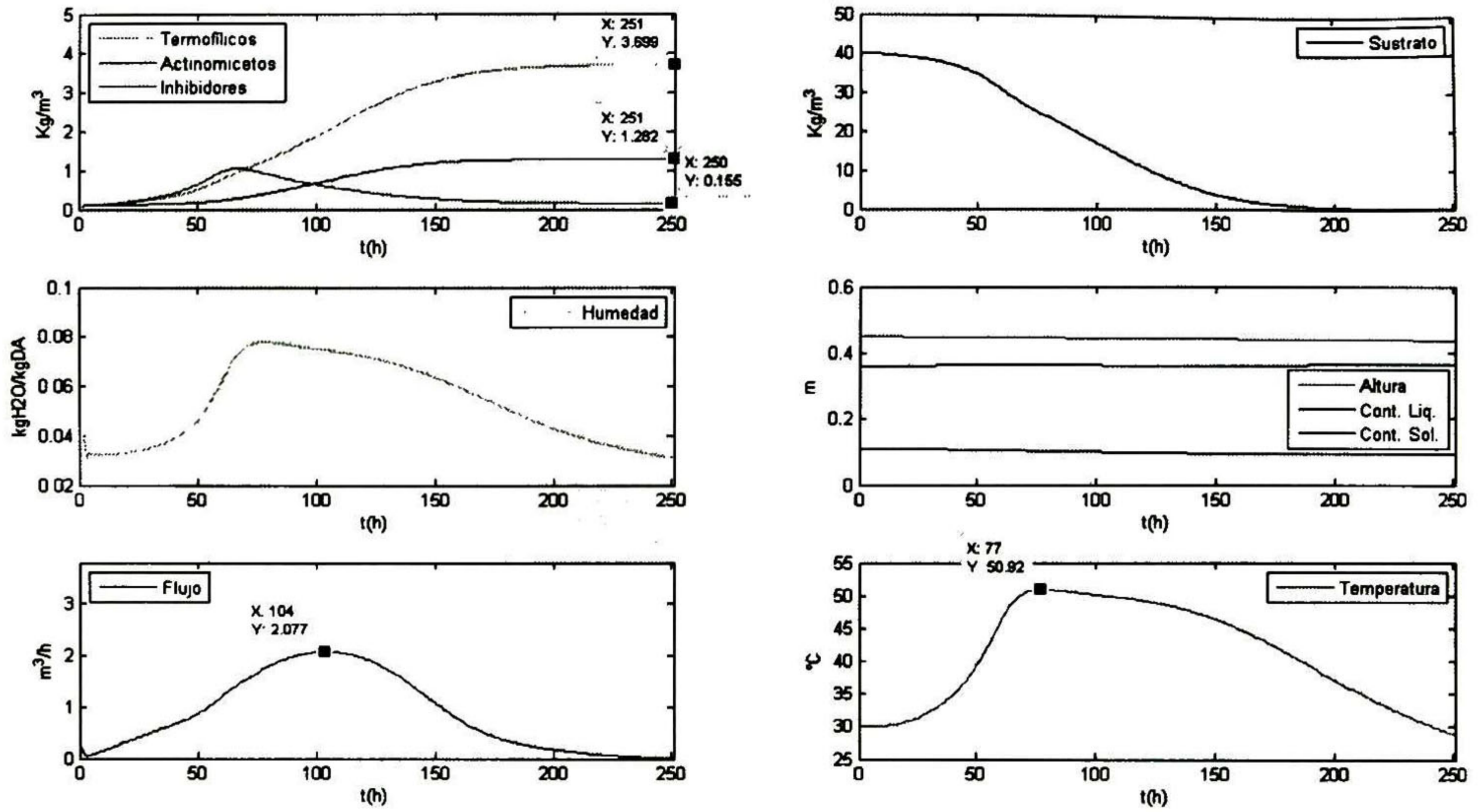


Figura 5.16: Resultados del sistema con un valor del parámetro $R = 0.1$

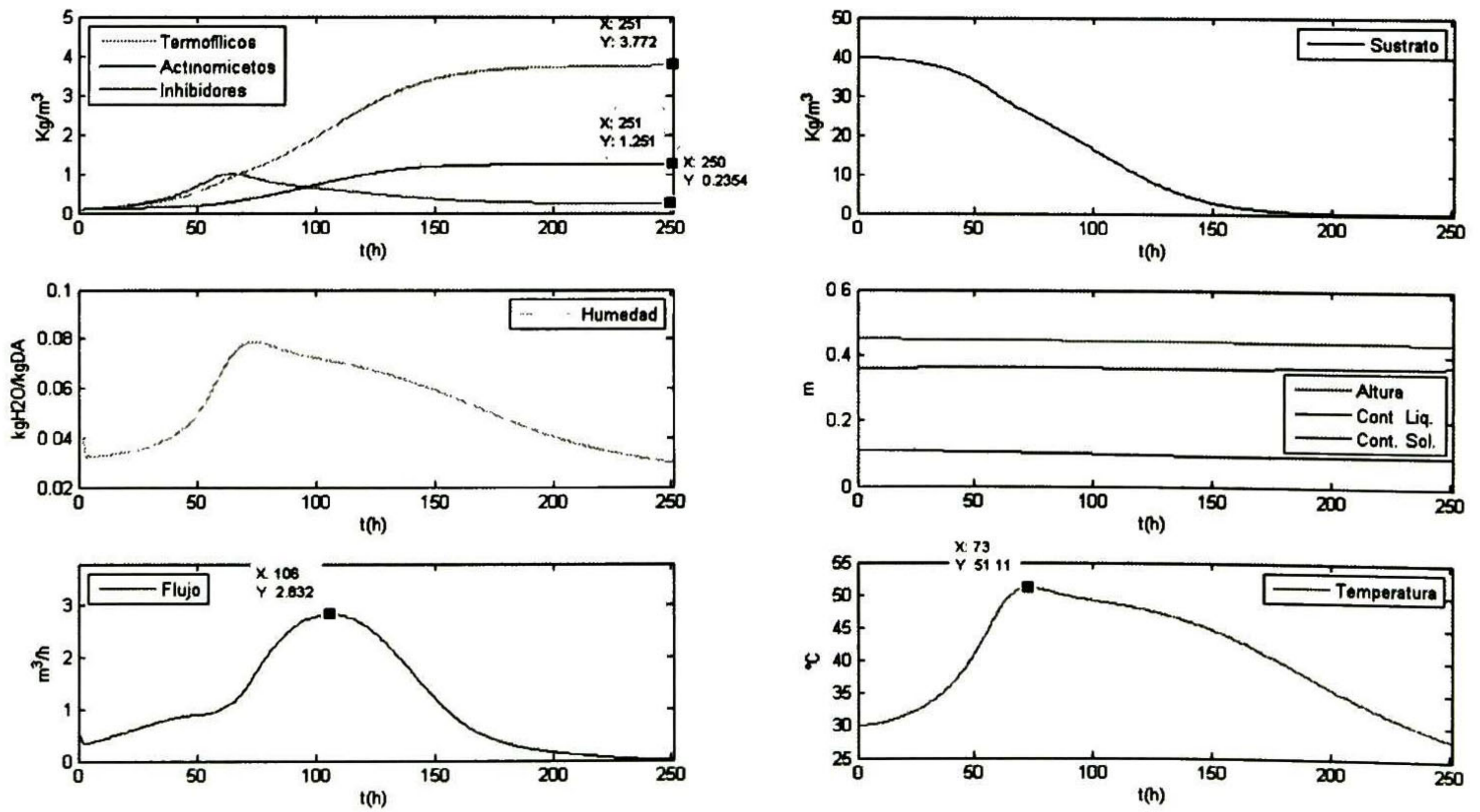


Figura 5.17: Resultados del sistema con un valor del parámetro $R = 0.3$

En la figura 5.16 se aprecia una disminución del esfuerzo de control para un valor de $R = 0.1$. Se obtuvo una concentración máxima de $x_2(k) = 3.7 \text{ kg/m}^3$ para valores máximos de $u(k) = 2.07 \text{ m}^3/\text{h}$ y $T(k) = 50.92^\circ\text{C}$. En la figura 5.17 se aprecia un aumento del esfuerzo de control. Se obtuvo una concentración máxima de $x_2(k) = 3.77 \text{ kg/m}^3$ para valores máximos de $u(k) = 2.83 \text{ m}^3/\text{h}$ y $T(k) = 51.11^\circ\text{C}$. Al comparar este resultado con los anteriores podemos notar que un valor grande del parámetro R aumenta el esfuerzo de control con un pequeño incremento en la concentración de hongos termofílicos y por otro lado un valor pequeño de R disminuye el esfuerzo de control y por consiguiente también la concentración de los hongos termofílicos. Por lo tanto una elección adecuada del parámetro R debe ser hecha con base en los requerimientos del proceso y a las restricciones del control. En la figura 5.18 se muestra un comparativo de las trayectorias del flujo de aire, temperatura y concentración de hongos termofílicos para los diferentes valores de R .

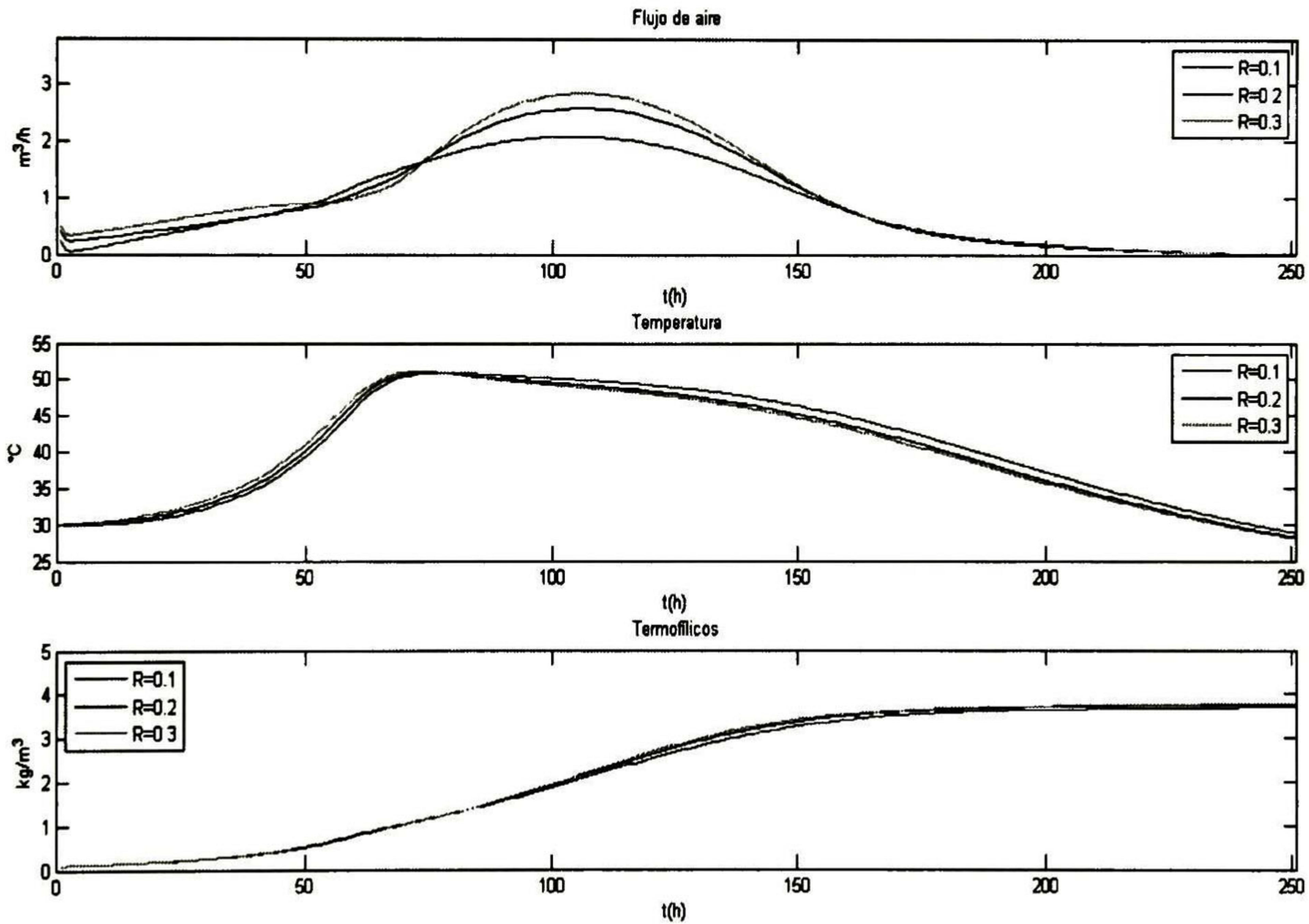


Figura 5.18: Comparativo de trayectorias ante diferentes valores de R

Ahora verificaremos el comportamiento del algoritmo ante la variación del parámetro Q que pondera al estado $x_2(k)$. Las pruebas se hicieron para valores de $Q = 0.5$ y $Q = 0.7$, la convergencia se obtuvo con 10 iteraciones. Los resultados se muestran en las figuras 5.19 y 5.20 respectivamente.

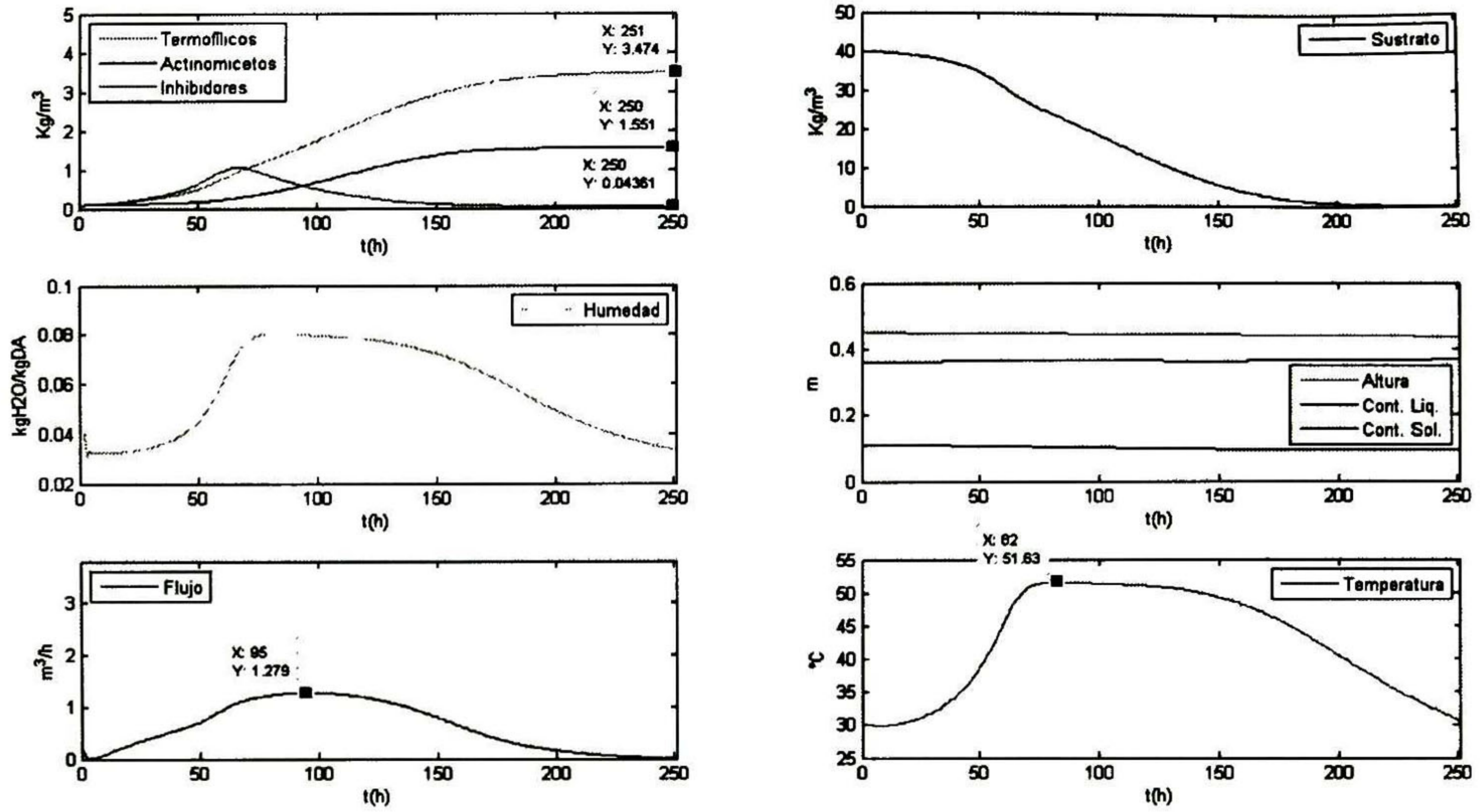


Figura 5.19: Resultados del sistema con un valor del parámetro $Q = 0.5$

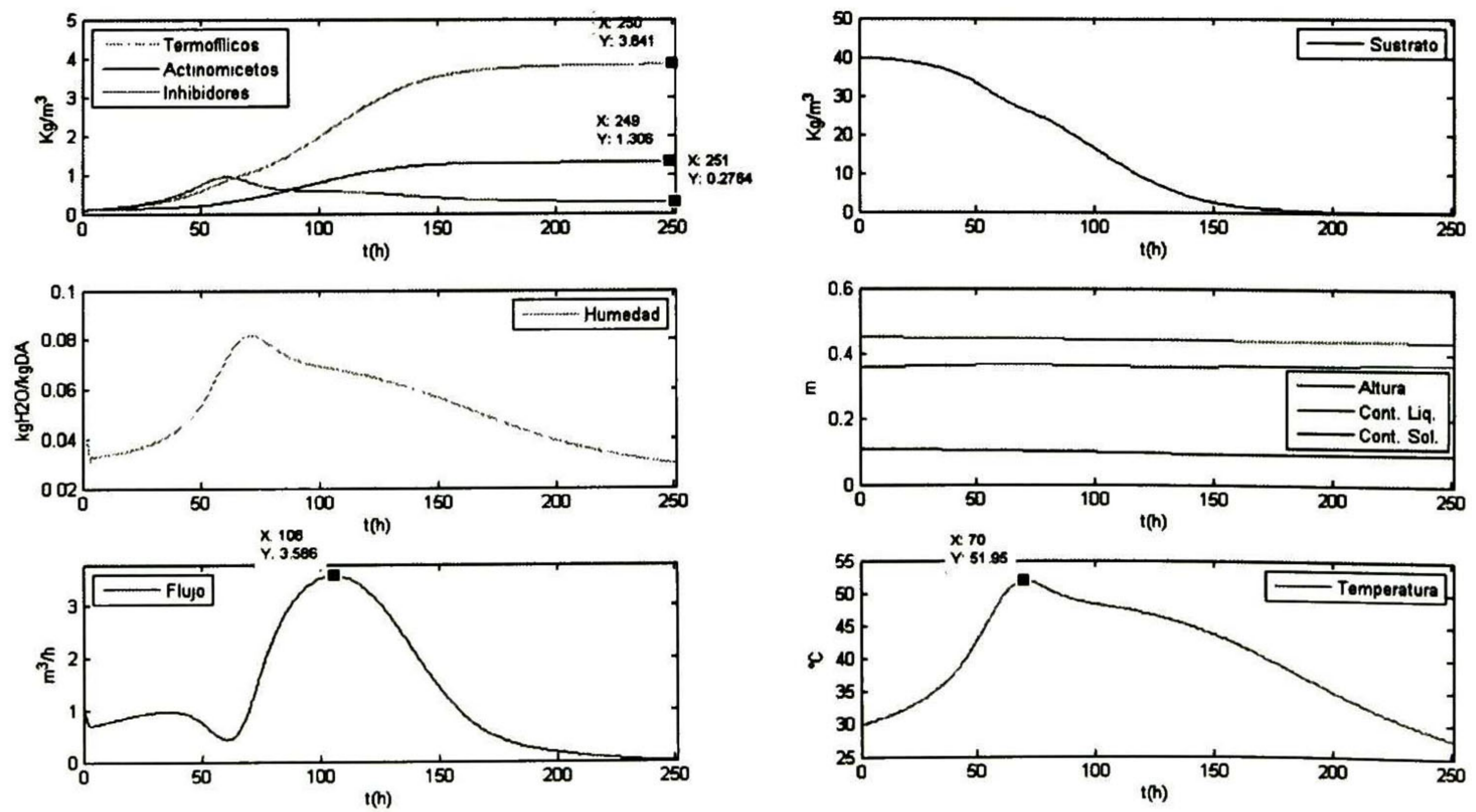


Figura 5.20: Resultados del sistema con un valor del parámetro $Q = 0.7$

En la figura 5.19 se observa que la concentración de los microorganismos termofílicos es $x_2(k) = 3.47 \text{ kg/m}^3$, el esfuerzo de control alcanzó un valor máximo $u(k) = 1.28 \text{ m}^3/\text{h}$ y la temperatura alcanzó un máximo de 51.63°C a las 82 horas. La concentración de los hongos termofílicos comparada con los casos anteriores no es muy grande debido a que el flujo de aire es pequeño y los microorganismos no tienen el oxígeno suficiente para crecer. En la figura 5.20 la concentración de los hongos termofílicos aumentó, $x_2(k) = 3.84 \text{ kg/m}^3$ con un valor máximo de $u(k) = 3.58 \text{ m}^3/\text{h}$ y una temperatura máxima de 51.95°C a las 70 horas. Por lo tanto concluimos que un valor grande del parámetro Q aumenta la concentración y el esfuerzo de control y un valor pequeño de Q disminuye el esfuerzo de control y por consiguiente también la concentración de hongos termofílicos. Por lo tanto también una elección adecuada del parámetro Q debe ser hecha con base en los requerimientos del proceso y a las restricciones del control.

En la figura 5.21 se muestra un comparativo de las trayectorias del flujo de aire, temperatura y concentración de hongos termofílicos para los diferentes valores de Q .

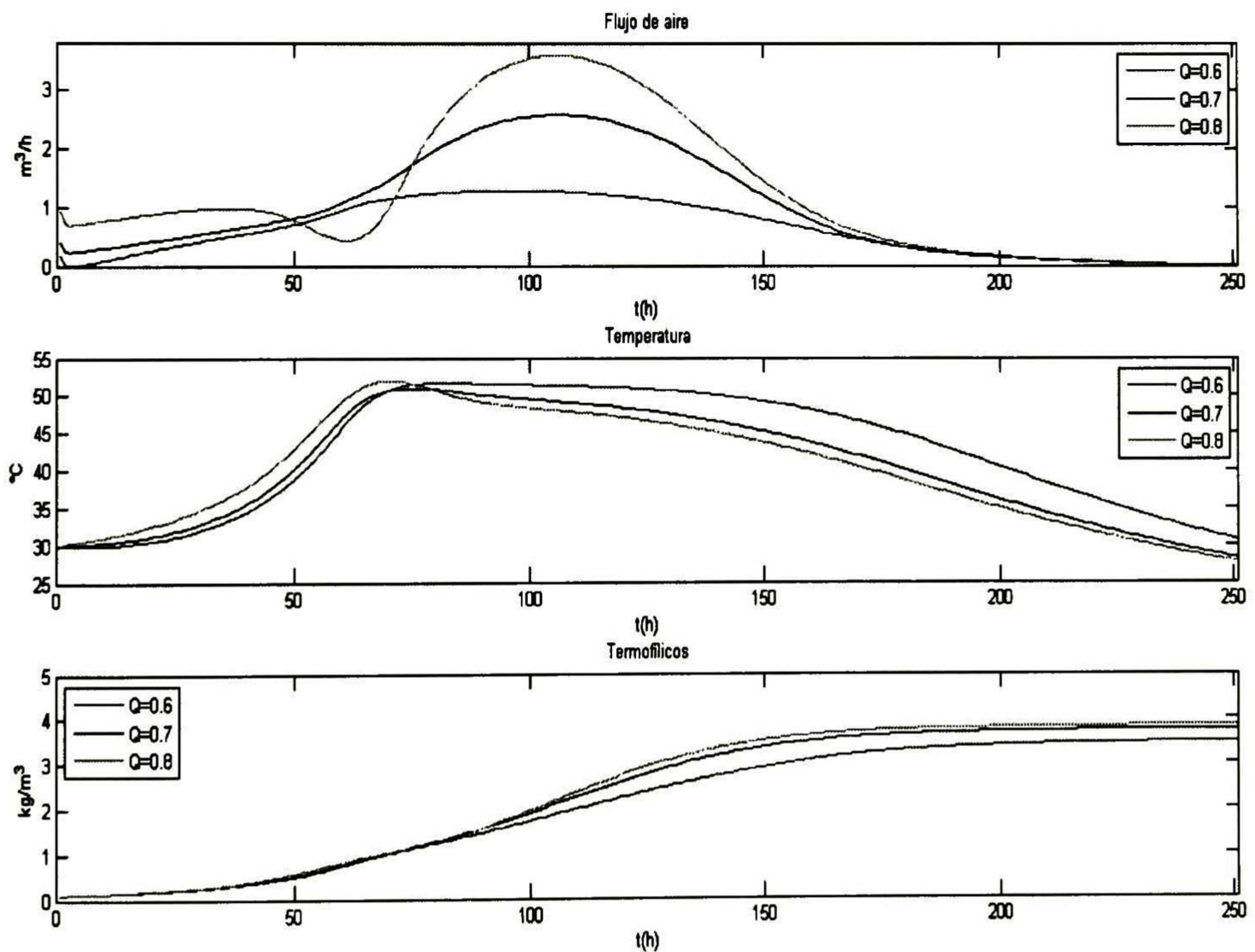


Figura 5.21: Comparativo de trayectorias ante diferentes valores de Q

5.3.2. Variación de las condiciones de la variable de entrada

Hasta ahora hemos conocido el comportamiento del sistema ante variaciones de los parámetros R y Q de la función de desempeño, los cuales deben ser elegidos de acuerdo a las restricciones y requerimientos del proceso. Para nuestro caso de estudio el objetivo es maximizar la biomasa sin un gran esfuerzo de control. Ahora variaremos la humedad H_f y la temperatura T_{0a} del flujo volumétrico del aire de entrada en el reactor. Primero evaluaremos el comportamiento del algoritmo ante la variación de la humedad H_f .

Las pruebas se hicieron para valores de $H_f = 0.045$ y $H_f = 0.065$, la convergencia se obtuvo en 10 y 11 iteraciones respectivamente.

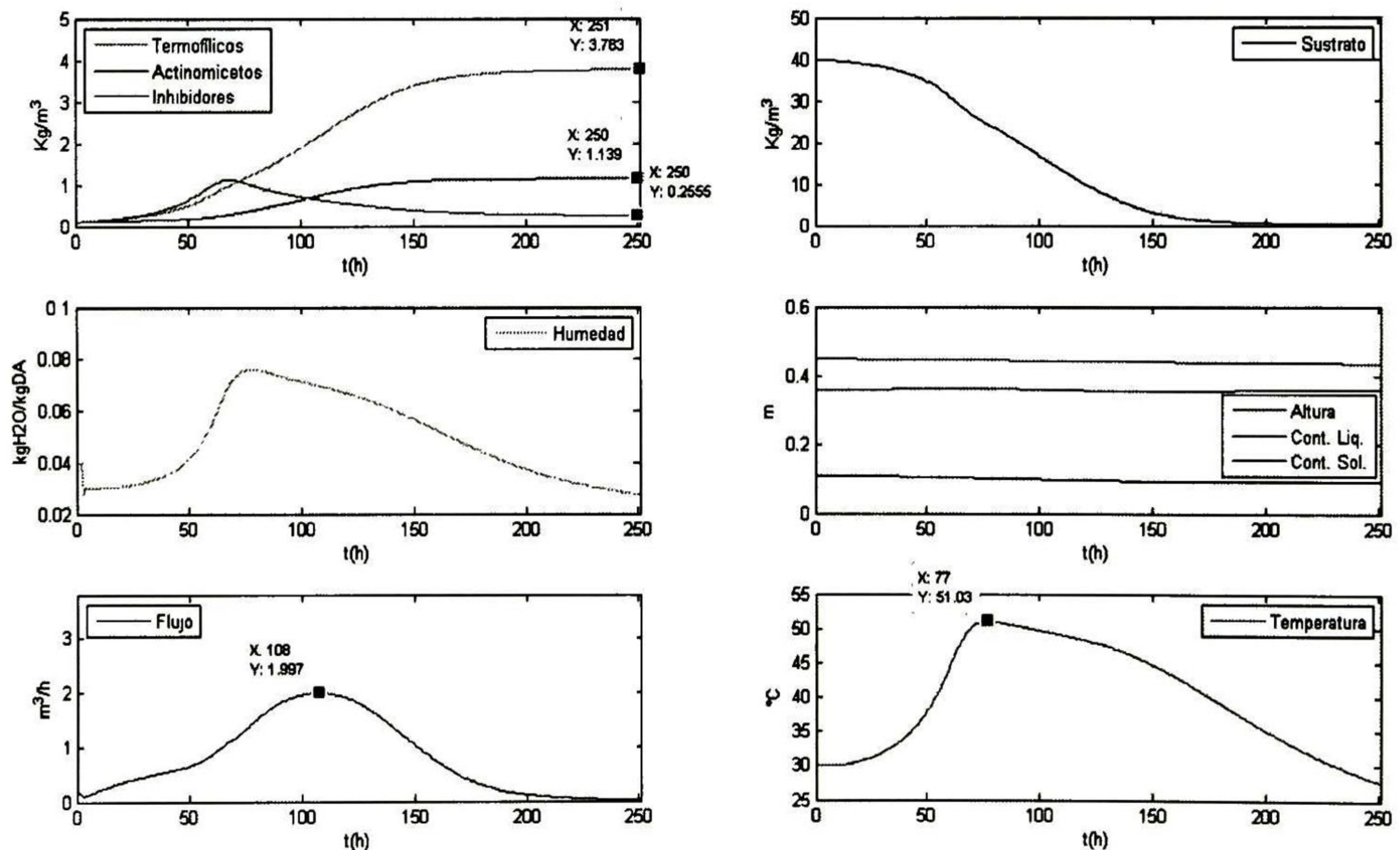


Figura 5.22: Resultados del modelo ante variación de la humedad del flujo de aire, $H_f = 0.045$

En la figura 5.22 se observa que el esfuerzo de control alcanza un valor máximo de $u(k) = 1.99 \text{ m}^3/\text{h}$ a las 108 horas, la concentración de hongos termofílicos es de $x_2(k) = 3.78 \text{ kg}/\text{m}^3$ y la temperatura alcanza un valor máximo de 51.03°C a las 77 horas. La concentración de hongos termofílicos alcanza un valor máximo alrededor de las 200 horas y después su incremento es mínimo. Las concentraciones de los inhibidores $x_3(k) = 0.25 \text{ kg}/\text{m}^3$ y actinomicetos $x_1(k) = 1.14 \text{ kg}/\text{m}^3$ no aumentan considerablemente.

La figura 5.23 muestra un incremento del esfuerzo de control alcanzando un valor máximo de $u(k) = 2.83 \text{ m}^3/\text{h}$, la concentración de hongos termofílicos es de $x_2(k) = 3.67 \text{ kg}/\text{m}^3$ y la temperatura alcanza un valor máximo de 50.64°C a las 76 horas. Al igual que en la figura anterior se observa que la concentración de hongos termofílicos alcanza un valor máximo alrededor de las 200 horas y después su incremento es mínimo. La concentración de los inhibidores disminuyó a $x_3(k) = 0.13 \text{ kg}/\text{m}^3$ y la de los actinomicetos incrementó ligeramente a $x_1(k) = 1.3 \text{ kg}/\text{m}^3$.

Con estos resultados concluimos que un valor pequeño de H_f aumenta la concentración de los hongos termofílicos sin gran esfuerzo de control, con un ligero incremento en la concentración de los inhibidores. Un valor grande de H_f incrementa el esfuerzo de control pero sin una mayor producción de hongos termofílicos, sin embargo disminuye la concentración de los inhibidores. Nuevamente las ventajas y desventajas de variar esta variable son evidentes por lo que se recomienda una elección adecuada de H_f para obtener mejores resultados.

En la figura 5.24 se muestra un comparativo de las trayectorias del flujo de aire, temperatura y concentración de hongos termofílicos para los diferentes valores de H_f .

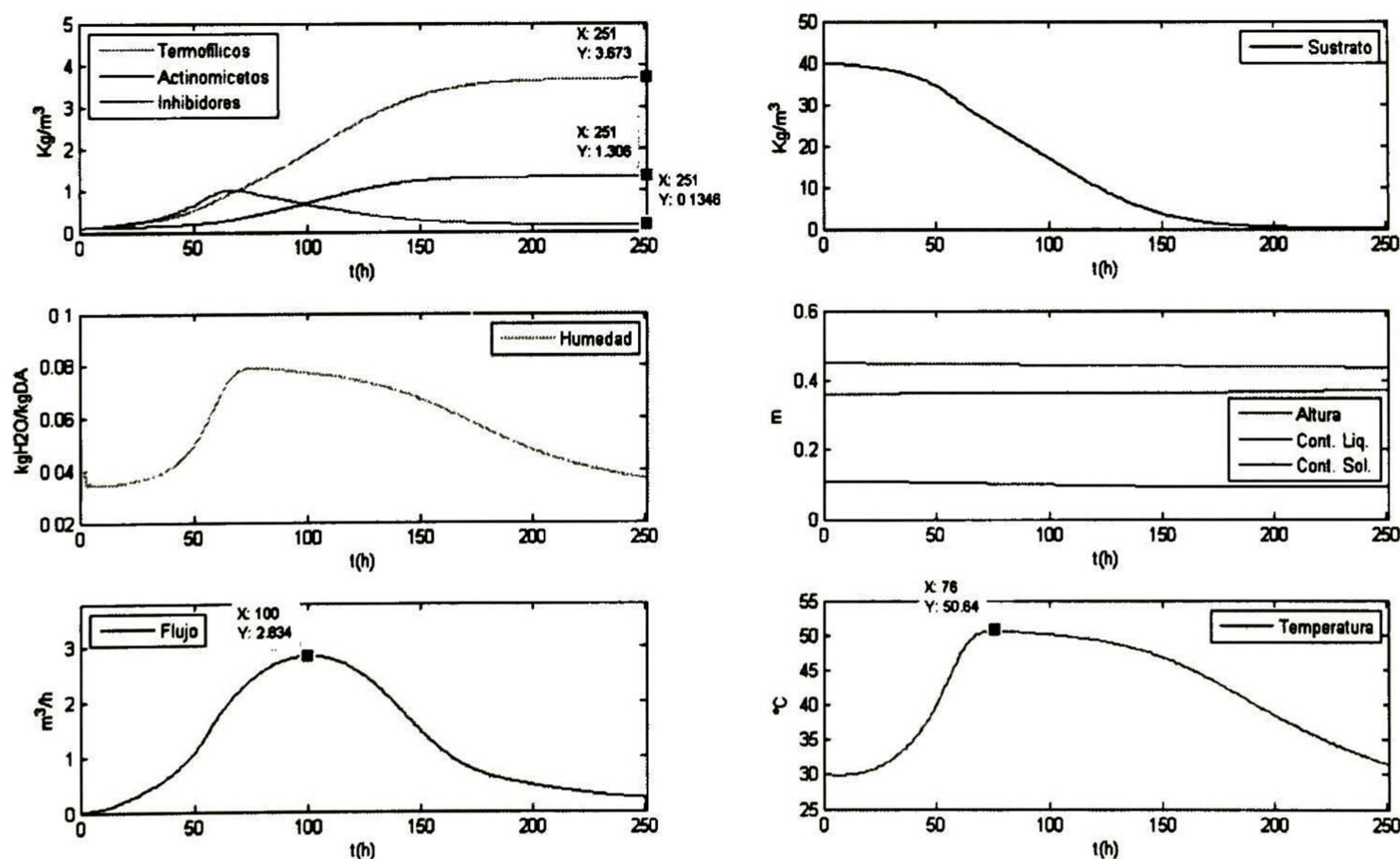


Figura 5.23: Resultados del modelo ante variación de la humedad del flujo de aire, $H_f = 0.065$

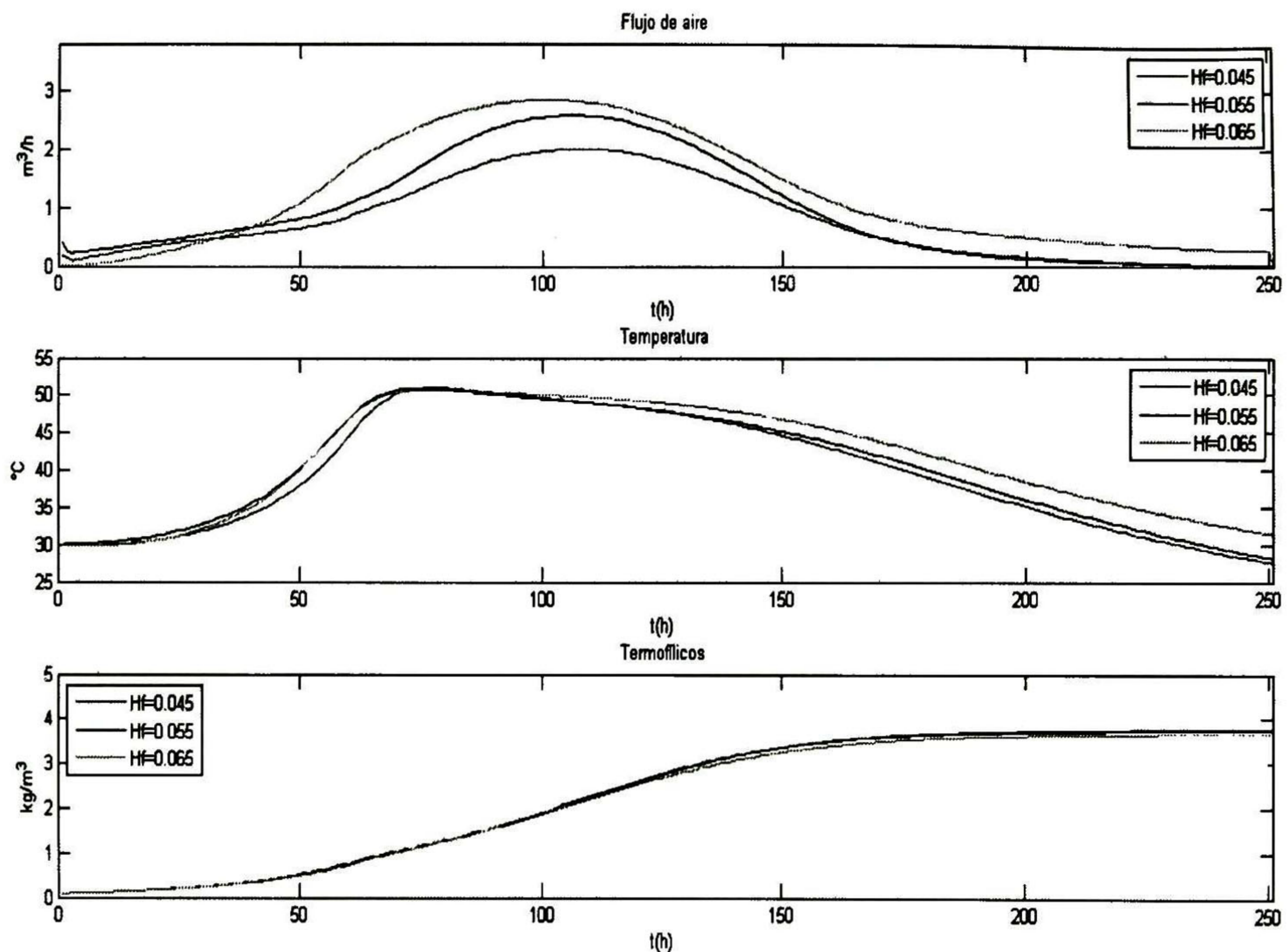


Figura 5.24: Comparativo de trayectorias ante diferentes valores de H_f

Ahora verificaremos el comportamiento del algoritmo ante la variación de la temperatura del aire $T0_a$. Las pruebas se hicieron para valores de $T0_a = 15^{\circ}C$ y $T0_a = 25^{\circ}C$, la convergencia se obtuvo en 11 iteraciones. Las figuras 5.25 y 5.26 muestran los resultados respectivos.

En la figura 5.25 se observa que el esfuerzo de control alcanza un valor máximo de $u(k) = 2.19 m^3/h$, la concentración de hongos termofílicos es de $x_2(k) = 3.80 kg/m^3$ y la temperatura alcanza un valor máximo de $51.53^{\circ}C$ a las 80 horas. La concentración de los inhibidores es de $x_3(k) = 0.26 kg/m^3$

Los resultados mostrados en la figura 5.26 muestran que el esfuerzo de control incrementa alcanzando un valor máximo de $u(k) = 2.8 m^3/h$, la concentración de hongos termofílicos es de $x_2(k) = 3.68 kg/m^3$ y la temperatura alcanza un valor máximo de $50.74^{\circ}C$ a las 72 horas. La concentración de los inhibidores llegó a $0.14 kg/m^3$. Los resultados demuestran que la disminución de la temperatura $T0_a$ aumenta la concentración de los hongos termofílicos, disminuye el esfuerzo de control y se obtiene un incremento en la concentración de los inhibidores.

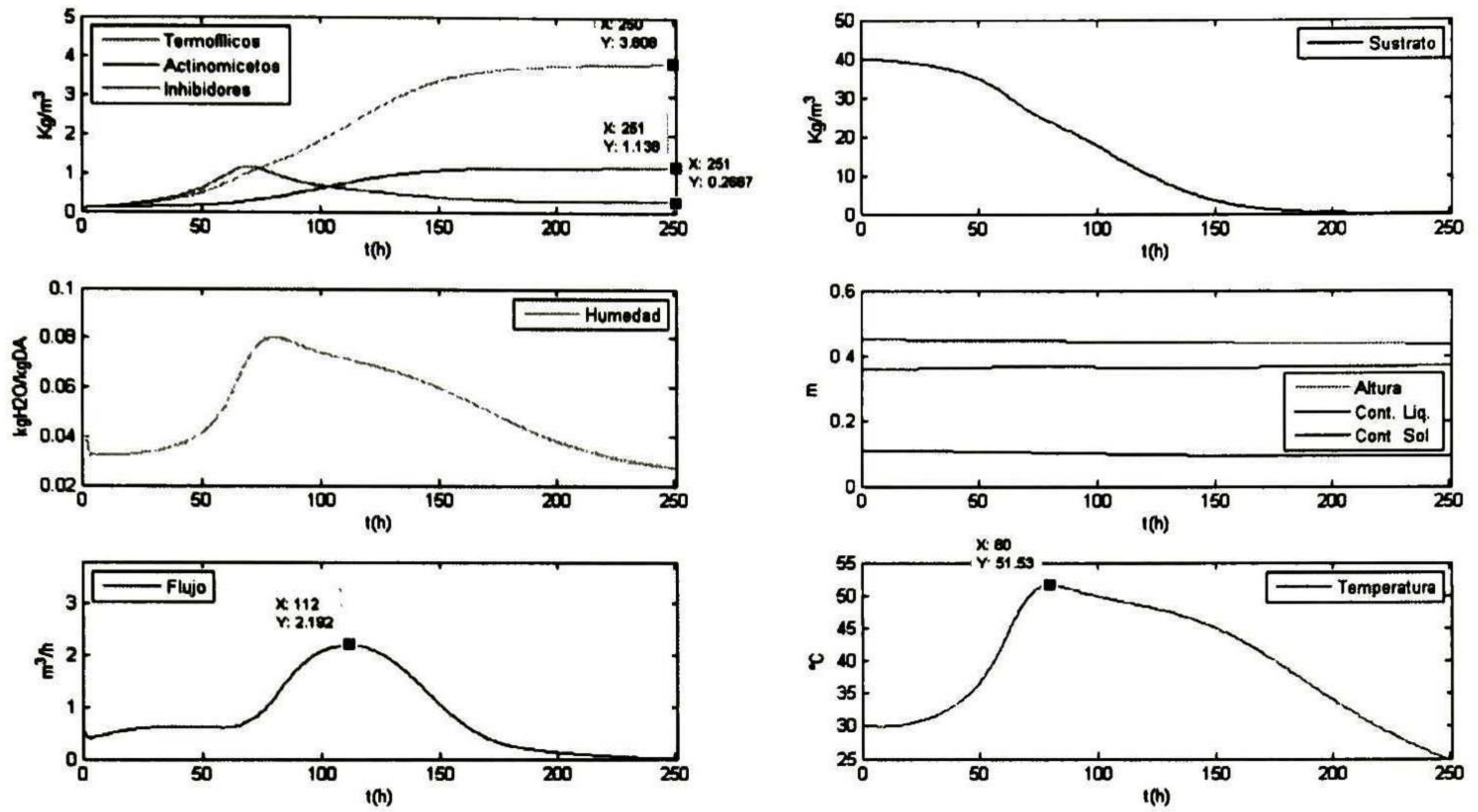


Figura 5.25: Resultados del modelo ante variación de la temperatura del flujo de aire, $T_{0a} = 15$

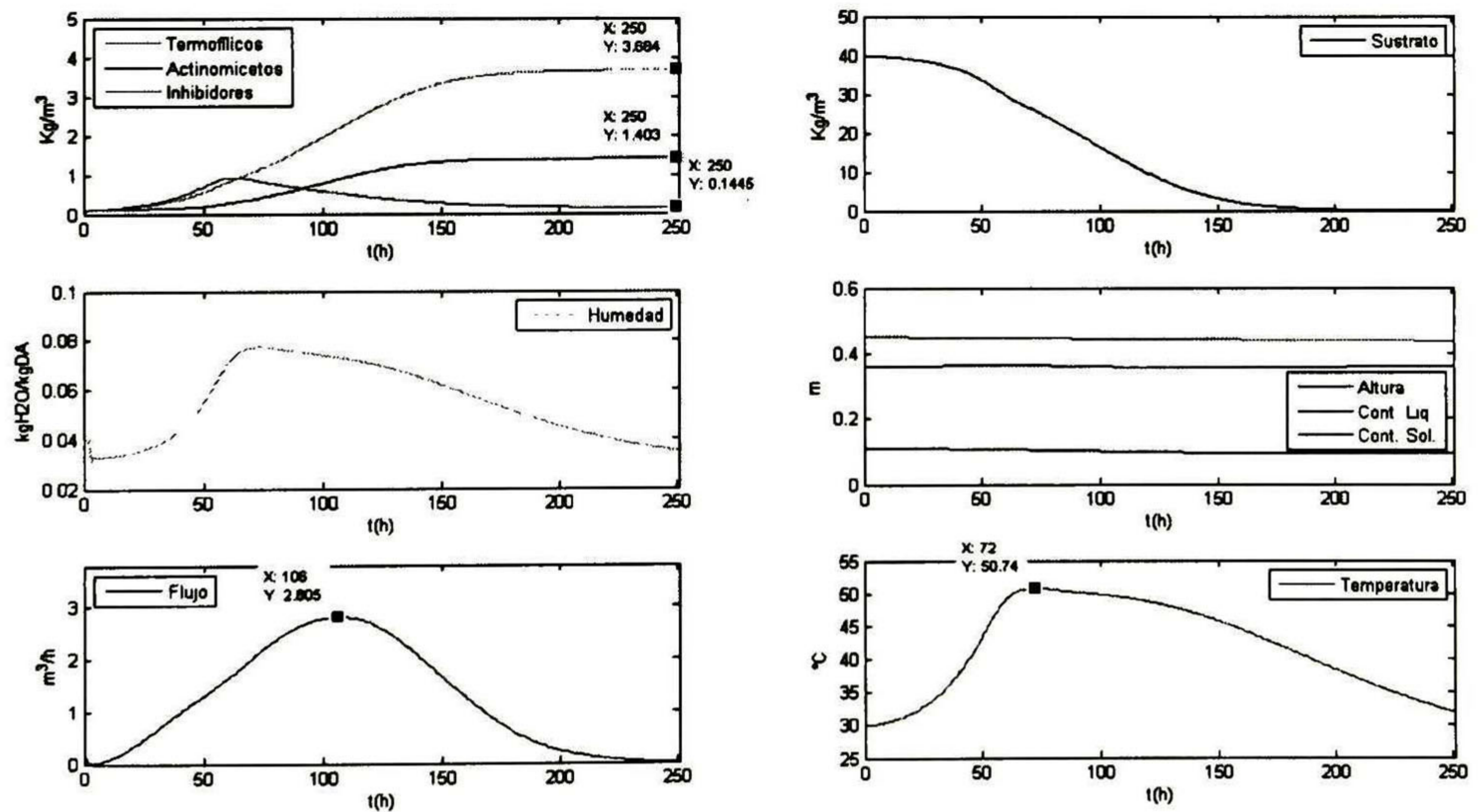


Figura 5.26: Resultados del modelo ante variación de la temperatura del flujo de aire, $T_{0a} = 25$

El aumento de $T0_a$ incrementa el esfuerzo de control sin una mayor producción de hongos termofílicos pero disminuye la concentración de los inhibidores. Las conclusiones obtenidas para esta variable son similares a las obtenidas con la variable H_f , nuevamente se plantea el hecho de que una combinación adecuada de estas variables podría mejorar el desempeño del algoritmo y obtener mejores resultados. En la figura 5.27 se muestra un comparativo de las trayectorias del flujo de aire, temperatura y concentración de hongos termofílicos para los diferentes valores de $T0_a$.

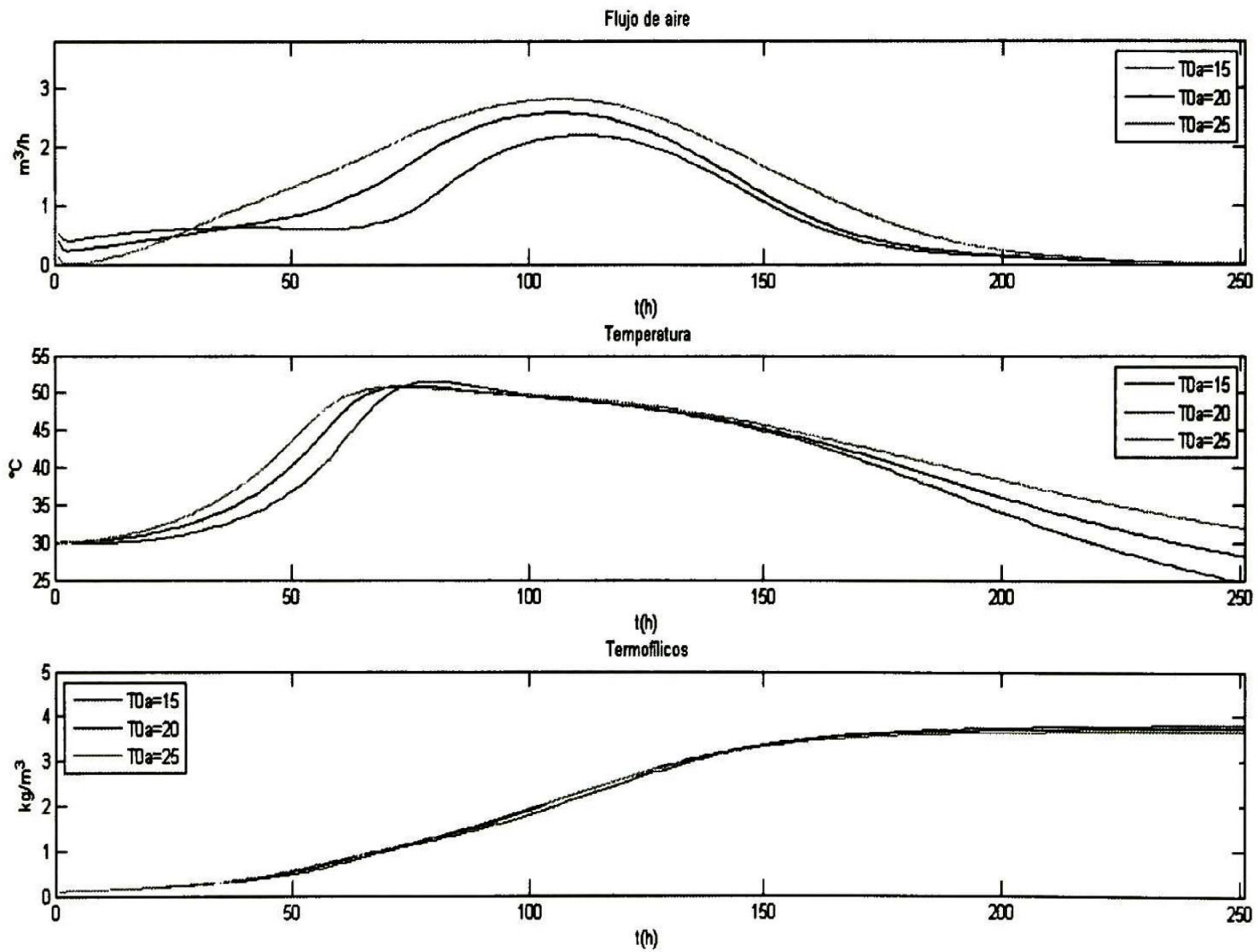


Figura 5.27: Comparativo de trayectorias ante diferentes valores de $T0_a$

5.3.3. Variación del período de tiempo y condiciones iniciales

Ahora evaluaremos el comportamiento del algoritmo ante variaciones de las condiciones iniciales y el período de tiempo. Primero evaluamos el algoritmo para el incremento de los valores iniciales para el período de 250 horas: $x_{1_0}(1) = 0.2$, $x_{2_0}(1) = 0.3$, $x_{3_0}(1) = 0.15$,

$S_0(1) = 45$, $\theta_{S_0}(1) = 0.14795$, $\theta_{l_0}(1) = 0.39885$, $T_0(1) = 35$, $l_0(1) = 0.5$, $H_0(1) = 0.06$. El algoritmo convergió en 12 iteraciones y los resultados se muestran en la figura 5.28.

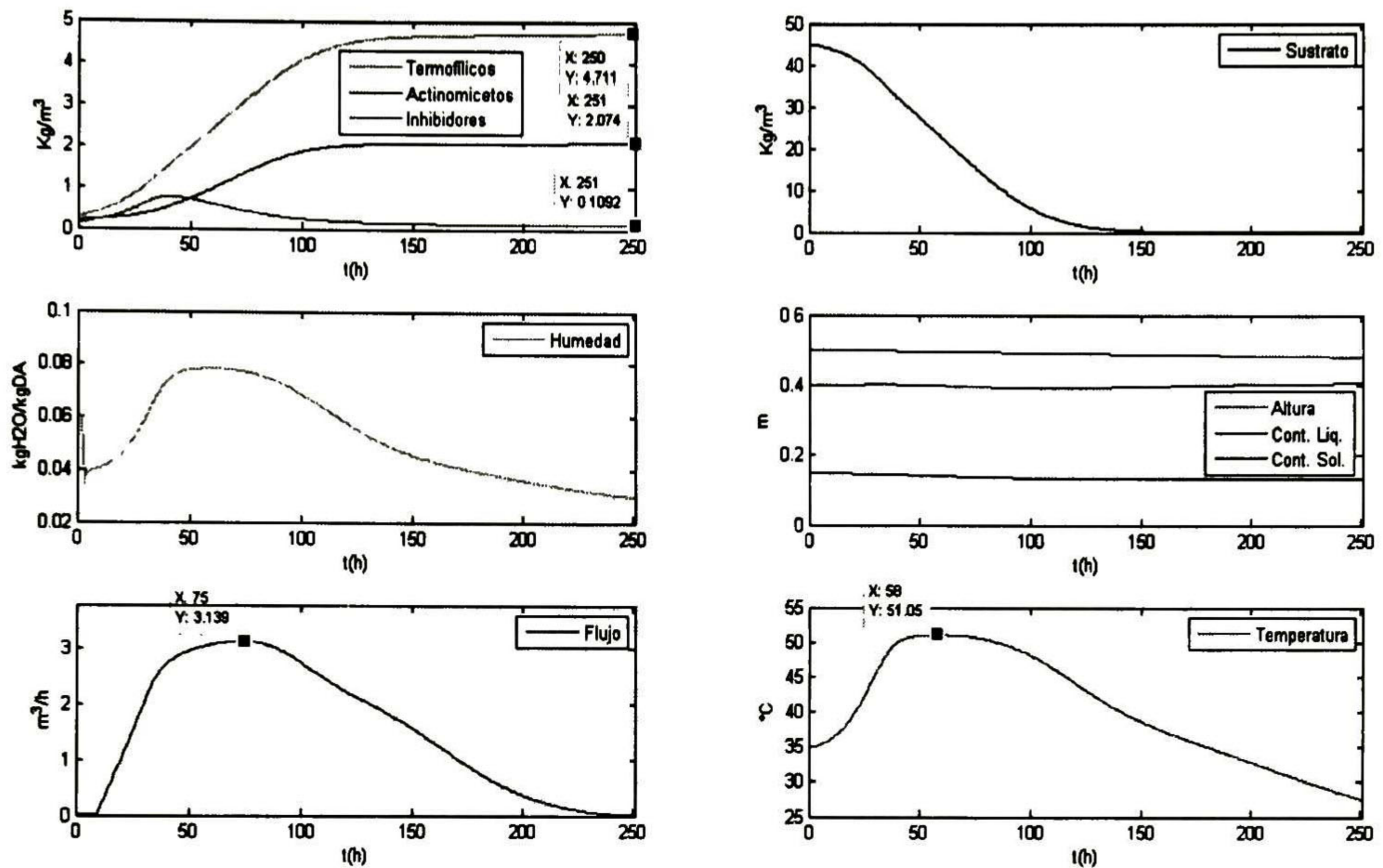


Figura 5.28: Resultado del modelo ante incremento de las condiciones iniciales

En la figura se puede observar que al incrementar las concentraciones iniciales de los microorganismos la velocidad de la reacción aumenta y la máxima producción se alcanza en menor tiempo del proceso. Los microorganismos termofílicos alcanzaron una concentración máxima de $x_2(k) = 4.71 \text{ kg}/m^3$ con un esfuerzo de control máximo de $u(k) = 3.14 \text{ m}^3/h$ en 75 horas y una temperatura máxima de $51.05^{\circ}C$ en 58 horas. La concentración de los microorganismos actinomicetos también incrementó, $x_1(k) = 2.07 \text{ kg}/m^3$ y los inhibidores disminuyeron, $x_3(k) = 0.1 \text{ kg}/m^3$.

Los microorganismo termofílicos y actinomicetos alcanzan una concentración máxima alrededor de las 150 horas del proceso y después de ese tiempo su incremento fue mínimo. El sustrato también se termina a las 150 horas.

Ahora evaluaremos el comportamiento del algoritmo ante variación del período de tiempo y condiciones iniciales. Se incrementa el tiempo de simulación en 450 horas y se emplean

las condiciones iniciales descritas en la tabla 2.2 y las propuestas en esta sección. El algoritmo convergió en 12 iteraciones y los resultados se muestran en las figuras 5.29 y 5.30 respectivamente.

En la figura 5.29 se puede observar que el flujo de aire alcanzó un máximo de $3.48 \text{ m}^3/\text{h}$ a las 113 horas y después de ese tiempo comenzó a descender. No obstante después de las 250 horas la trayectoria de flujo parece incrementarse ligeramente hasta el final del período de las 450 horas. La temperatura alcanzó su máximo en 50.87°C en 74 horas. El sustrato se acaba en 200 horas y la producción de microorganismos termofílicos llega a una concentración de $3.90 \text{ kg}/\text{m}^3$, los microorganismos actinomicetos tienen una concentración de $1.08 \text{ kg}/\text{m}^3$ y los inhibidores $0.32 \text{ kg}/\text{m}^3$.

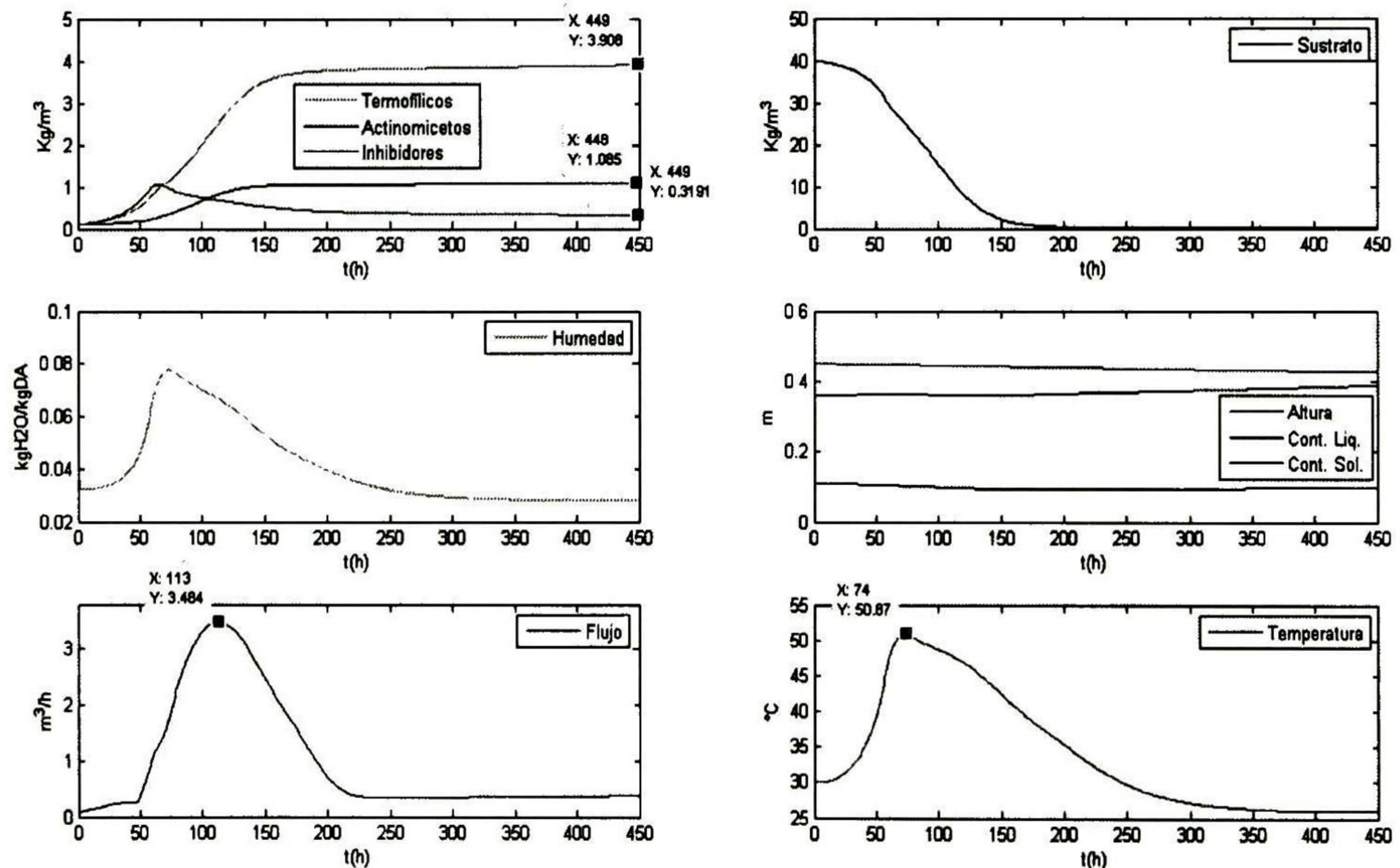


Figura 5.29: Resultado del modelo para un período de tiempo de 450 h y condiciones iniciales de la tabla 2.2

La figura 5.30 presenta los resultados para las condiciones iniciales incrementadas. Nuevamente la concentración inicial mayor de microorganismos acelerarán la reacción, el sustrato se acaba en 150 horas y la producción máxima de hongos termofílicos es de $4.88 \text{ kg}/\text{m}^3$. El valor del flujo en su punto máximo es de $3.27 \text{ m}^3/\text{h}$ en 60 horas, la temperatura alcanzó su máximo en 50.84°C en 61 horas, los actinomicetos aumentaron su concentración a $2.08 \text{ kg}/\text{m}^3$ y los inhibidores disminuyeron hasta $0.1 \text{ kg}/\text{m}^3$

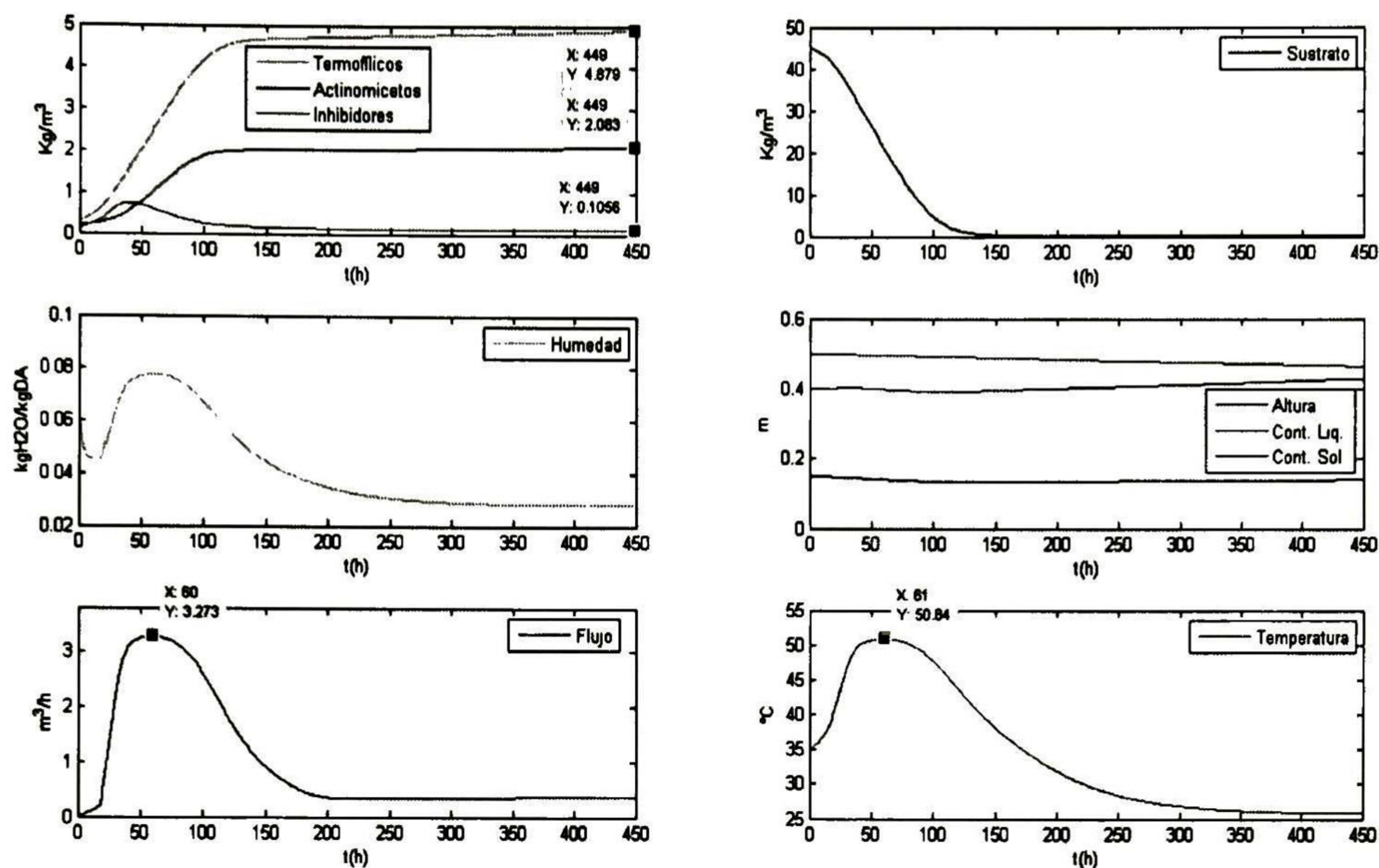


Figura 5.30: Resultado del modelo para un período de tiempo de 450 h y condiciones iniciales incrementadas

En este análisis pudimos observar el comportamiento de los microorganismos ante diferentes condiciones iniciales y períodos de tiempo, así como el comportamiento de la trayectoria óptima calculada por el método del gradiente descendente. En general en este análisis de sensibilidad el algoritmo proyección del gradiente también demostró tener un buen desempeño ante diferentes variaciones y ser un buen método para encontrar trayectorias óptimas para sistemas altamente no lineales.

Capítulo 6

Conclusiones y trabajo futuro

En este trabajo se ha desarrollado un control óptimo para un reactor de fermentación en sustrato sólido (FSS). El modelo no lineal incluye dinámicas de tres categorías diferentes de microorganismos y podría plantearse como un problema de frontera móvil porque la altura de la masa de composta cambia en el tiempo con la disminución del volumen. Esta dinámica de la altura se incluyó en el modelo para representar el comportamiento en el proceso real, sin embargo un análisis de estabilidad no podría garantizarse por tal motivo. En las simulaciones se puede ver que el sistema no presenta problemas de inestabilidad. Los métodos numéricos propuestos para resolver este problema no lineal calcularon una trayectoria óptima del flujo del aire de entrada en el reactor que maximizó la producción de biomasa en un menor tiempo del proceso. Los algoritmos optimizan un función de desempeño concava, que está relacionada con el comportamiento futuro del sistema que depende de las trayectorias de control calculadas en el intervalo de tiempo definido. Se han mostrado los resultados obtenidos en simulación para distintos casos, tanto para cambios en los parámetros de la función de desempeño como la respuesta ante perturbaciones medibles en la entrada del flujo de aire.

El método del gradiente descendente calcula un trayectoria de flujo variable con el que se obtiene una producción un 25.66 % mayor que el proceso con un flujo constante de aire. El método proyección del gradiente trabaja con una secuencia del sistema discreto linealizado cuya trayectoria de control permanece en una región acotada. Este algoritmo calcula una trayectoria del flujo de aire similar al obtenido con el gradiente descendente y una producción de un 25.06 % mayor de biomasa comparado con la obtenida a flujo constante. Esto indica que la secuencia de soluciones lineales convergen al sistema discreto no lineal.

Como conclusión se puede decir que el control óptimo en lazo abierto presenta un buen comportamiento para hacer frente a las no linealidades del modelo. Las ventajas de los métodos aquí aplicados es que pueden trabajar con sistemas altamente no lineales, la convergencia ocurre para una variedad de condiciones iniciales y se requieren pocas iteraciones.

Como desventaja está el tiempo computacional para el cálculo de las trayectorias que se

incrementa con la complejidad del sistema y la limitación del control a un comportamiento invariante del sistema. La posible discrepancia entre el comportamiento predicho y el comportamiento real del sistema crean la necesidad de imponer cierta robustez al sistema incorporando realimentación del mismo.

El objetivo de optimizar la fase 2 del proceso de FSS fue alcanzado y el control óptimo aplicado al modelo demostró ser un buen método para el cálculo de trayectorias óptimas en lazo abierto. El método del gradiente descendente es suficiente para obtener la trayectoria de control óptimo del modelo, sin embargo el método proyección del gradiente también es adecuado porque pudimos comparar y verificar que los resultados no difieren significativamente con los del método del gradiente descendente.

Como trabajo futuro se implementarán en tiempo real las trayectorias óptimas de control y se extenderá esta técnica de control óptimo en lazo cerrado mediante la implementación de un control predictivo (MPC) no lineal. Esta realimentación se consigue gracias a la técnica del horizonte deslizante que consiste en aplicar las actuaciones obtenidas durante un periodo de tiempo, tras el cual se muestrea el estado del sistema y se resuelve un nuevo problema de optimización. También en el trabajo futuro está el incluir la compensación de perturbaciones medibles, el uso de estimadores para compensar las perturbaciones no medibles y un esquema de estimación de estados que permita eliminar los errores de estado estacionario. También se propone implementar un modelo en parámetros distribuidos que represente mejor el comportamiento de la FSS.

Bibliografía

- [1] A. Aguado and A. Gómez, "Control de un proceso de fermentación en sustrato sólido", Reporte de Investigación del Instituto de Cibernética, Matemática y Física (ICIMAF), La Habana, Cuba, 2004.
- [2] A. Assandri, C. Moraga and E. Martínez, "Control predictivo no lineal de orden reducido", Reporte de Investigación del Departamento de Ingeniería de Sistemas y Automática, Valladolid, España, 2001.
- [3] D. Bardey and H. Bonnet, "Teoría de control óptimo: Guía para principiantes" Reporte de Investigación de la Universidad del Rosario, Bogotá, Colombia, 2006.
- [4] R. Barrena, C. Canovas and A. Sánchez, "Prediction of Temperature and thermal inertia effect in the maturation stage and stockpiling of a large composting mass", *Waste Management*, vol. 26, pp. 953-959, 2006.
- [5] V. Bellon-Maurel, O. Orliac and P. Christen, "Sensors and Measurements in Solid State Fermentation: A Review", *Process Biochemistry*, vol. 38, pp. 881- 896, 2003.
- [6] D. M. Beyer, "Basic Procedures for Agaricus Mushroom Growing", Pennsylvania State University, CAT UL210 5M8/03ps4599, 2003.
- [7] R. B. Bird, W.E. Stewart, and E.N. Lightfoot, *Transport Phenomena*, 2nd ed., Wiley International Edition, 2006.
- [8] J. M. Borwein and A. S. Lewis, *Convex Analysis and Nonlinear Optimization, Theory and Examples*, 1st ed., Springer Publishing Company, Burnaby, B.C., Canada, 2000.
- [9] A. E. Bryson and Y C. Ho, *Applied Optimal Control: optimization, estimation, and control*, 1st ed., Taylor and Francis Publishing Company, Washington, D.C., 1975.
- [10] T. Cross "Therrnophilic Actinomycetes", *Journal of Applied Bacteriology*, vol. 31, pp. 36-53, 1968.
- [11] L. M. De la Torre, "Mediciones en un reactor experimental de FSS", Reporte de Investigación de la Unidad de Ingeniería Avanzada, Cinvestav Guadalajara, Guadalajara, Jalisco, 2009.

- [12] D. Deyra, K. M. Labeaga and A. Sánchez, "Modelado y simulación dinámica de un reactor de fermentación en estado sólido para el cultivo de hongos", En memorias del XXIX Encuentro Nacional de la AMIDIQ, Puerto Vallarta, Jalisco, May, 2008.
- [13] K. Ekinici, H. M. Keener, D. L. Elwell and F.C. Michel, "Effects of Aeration Strategies on the Composting Process: Part I. Experimental Studies", American Society of Agricultural Engineers, vol. 47, no.5, pp. 1697-1698, 2004.
- [14] M. Fernández-Fernández and J. R. Pérez-Correa "Realistic model of a solid substrate fermentation packed-bed pilot bioreactor", Process Biochemistry, vol. 42, pp. 224-234, 2007.
- [15] C. González and L.M. De la Torre, "Modelo matemático para un proceso de FSS experimental", Reporte de Investigación de la Unidad de Ingeniería Avanzada, Cinvestav Guadalajara, Guadalajara, Jalisco, 2009.
- [16] J. Kaiser, "Modelling composting as a microbial ecosystem: a simulation approach", Ecological Modelling, vol. 91, pp. 26-28, 1996.
- [17] H. M. Keener, K. Ekinici and F. C. Michel, "Composting Process Optimization Using On/Off Controls", Compost science & utilization, vol. 13, No. 4, pp. 288-299, 2005.
- [18] D. E. Kirk, *Optimal control Theory: An Introduction*, Illustrated edition, Courier Dover Publications, Mineola, New York, 2004.
- [19] S. E. Labance, P. H. Heinemann, R. E. Graves and D. M. Beyer, "Evaluation of the effects of forced aeration during phase I mushroom substrate preparation: part 2. Measurements and model results", American Society of Agricultural and Biological Engineers, vol.49, no.1, pp. 175-176, 2006.
- [20] H. Leal, *Formulation experiments in compost for agaricus bisporus*, Personal communication, 2006.
- [21] R. Maheshwari, G. Bharadwaj and M. K. Bhat, "Thermophilic Fungi: Their Physiology and Enzymes", Microbiology and Molecular Biology Reviews, vol. 64, no. 3, pp. 461-488, September, 2000.
- [22] I. G. Mason, "Mathematical Modelling of the Composting Process: A Review", Waste Management, vol.26, pp. 3-21, 2006.
- [23] D. A. Mitchell, Z. Targonski, J. Rogalski and A. Leonowicz, "In Solid Substrate Cultivation", Elsevier Science Publications Ltd., London and New York, pp. 29-55, 1992.
- [24] D. A. Mitchell, N. Krieger, D. M. Stuart and A. Pandey, "New developments in solid-state fermentation II. Rational approaches to the design, operation and scale-up of bioreactors", Process Biochemistry, vol. 35, pp. 1211-1225, 2000.

- [25] R. E. Mudgett, "Solid state fermentations. in: Manual of Industrial Microbiology & Biotechnology", American Society for Microbiology, Washigton D.C., pp. 66-83, 1986.
- [26] H. Pajan, R. Perez-Correa, I. Solar and E. Agosin, "Multivariable Model Predictive Control of a Solid Substrate Pilot Bioreactor. A Simulation Study", Global Environmental Biotechnology, pp. 4493-4504, 1997.
- [27] A. Pandey, C. R. Soccol, and D. Mitchell, "New developments in solid state fermentation: I bioprocesses and products", Process Biochemistry, vol. 35, pp. 1153-1169, 2000.
- [28] J. R. Pérez-Correa and M. Fernández-Fernández, "Predictive controller evaluation including non-stationary high frequency noise and outliers for batch solid substrate fermentation bioreactors", Bioprocess and Biosystems Engineering, vol. 29, pp. 399-407, 2006.
- [29] N. Pérez-Guerra, A. Torrado-Agrasar, C. López-Macias and L. Pastrana, "Main Characteristics and applications of solid substrate fermentation", Electronic Journal of environmental, Agricultural and Food Chemistry (EJEAFChe), vol. 2, no. 3, pp. 343-350, 2003.
- [30] R.H. Perry, D.W.Green and J. O. Maloney, *Perry's Chemical Engineers' Handbook*, 6th ed., McGraw-Hill, New York, 1984.
- [31] K. S. M. S. Raghavarao, T. V. Ranganathan and N.G. Karanth, "Some engineering aspects of solid-state fermentation", Biochemical Engineering Journal, vol. 13, pp. 127-135, 2003.
- [32] Y. S. P. Rahardjo, J. Tramper and A. Rinzema, "Modeling conversion and transport phenomena in solid-state fermentation: A review and perspectives", Biotechnology Advances, vol. 24, pp. 162-263, 2006.
- [33] M. Raimbault, "General and microbiological aspects of solid substrate fermentation", Electronic Journal of Biotechnology, vol. 1, no. 3, pp. 174-188, 1998.
- [34] C. Riascos and José M. Pinto, "Optimal control of bioreactors: a simultaneous approach for complex systems", vol. 99, no. 1, pp. 23-34, May, 2004.
- [35] D. J. Royse, "Sustratos no composteados para la producción de *Agaricus Bisporus*", Cultivo, Mercadotecnia e Inocuidad Alimenticia de *Agaricus bisporus*, pp. 57-64, 2008.
- [36] H. Seki , "A New Deterministic Model for Forced-Aeration Composting Processes with Batch Operation", American Society of Agricultural Engineers, vol. 45, no. 4, pp. 1239-1250, 2002.
- [37] J. D. Stigter and K. J. Keesman, "Optimal parametric sensitivity control of a fed-batch reactor", Automatica, vol. 40, pp. 1459-1464, 2004.

- [38] G. Straatsma, J. P. G. Gerritsa, J. T. N. M. Thissenb, J. G. M. Amsinga, H. Loeffenc and L. J. L. D. Van Griensven, "Adjustment of the composting process for mushroom cultivation based on initial substrate composition", *Bioresource Technology*, vol.72, no. 1, pp. 67-74, 2000.
- [39] G. Straatsma, R. A. Samson, T. W. Olijnsma, H. J. M. Op den Camp, J. P. G. Gerrits and L. J. L. D. Van Griensven, "Ecology of Thermophilic Fungi in Mushroom Compost, with Emphasis on *Scytalidium thermophilum* and Growth Stimulation of *Agaricus bisporus* Mycelium", *Applied and Environmental Microbiology*, vol. 60, no. 2, pp. 454-458, February, 1994.
- [40] G. Straatsma, J. P. G. Gerrits, T. M. Gerrits, H. J. M. Op den Camp and L. J. L. D. Van Griensven, "Growth kinetics of *Agaricus bisporus* mycelium on solid substrate (mushroom compost)", *Journal of General Microbiology*, vol. 137, pp. 1471-1477, 1991.
- [41] G. Straatsma, J. P. G. Gerrits, M. P. A. M. Augustijn, H. J. M. Op den Camp, G. D. Vogels and L. J. L. D. Van Griensven, "Population Dynamics of *Scytalidium thermophilum* in Mushroom Compost and Stimulatory Effects on Growth Rate and Yield of *Agaricus bisporus*", *Journal of General Microbiology*, vol. 135, pp. 751-759, 1989.
- [42] O.F. Von Meien and D.A. Mitchell, "A Two-Phase Model for Water and Heat Transfer Within an Intermittently-Mixed Solid-State Fermentation Bioreactor with Forced Aeration", *Biotechnology and Bioengineering*, vol. 79, no. 4, pp. 417, 2002.
- [43] O. F. von Meien, L. F. L. Luz Jr, D. A. Mitchell, M. Fernández-Fernández, J. R. Pérez-Correa, J. A. Arcas and E. Agosin, "Control strategies for intermittently mixed, forcefully aerated solid-state fermentation bioreactors based on the analysis of a distributed parameter model", *Chemical Engineering Science*, vol. 59, no. 21, pp. 4493-4504, 2004.
- [44] F. J. Weber, J. Oostra, J. Tramper and A. Rinzema, "Validation of a Model for Process Development and Scale-Up of Packed-Bed Solid-State Bioreactors", *Biotechnology and bioengineering*, vol. 77, no.4, pp. 381-393, 2002.
- [45] W. M. Wiegant, "Growth Characteristics of the Thermophilic Fungus *Scytalidium thermophilum* in Relation to Production of Mushroom Compost", *Applied and environmental microbiology*, vol. 58, no. 4, pp. 1301-1307, April, 1992.

Apéndice A

Nomenclatura

Símbolo	Significado
Y	Masa de microbios producida por oxidación de unidad de masa de sustrato
$\frac{Y_W}{S}$	Masa de agua producida por oxidación de unidad de masa de sustrato
$\frac{Y_W}{X}$	Masa de agua consumida por la síntesis de microbios
Δh_S	Cambio de entalpía para la reacción de consumo de sustrato (kJ/kg)
Δh_x	Cambio de entalpía para la reacción de crecimiento de microbios (kJ/kg)
ρ_l	Densidad de la fase líquida en la masa de composta (kg m ⁻³)
ρ_s	Densidad de la fase sólida en la masa de composta (kg m ⁻³)
ρ_a	Densidad del aire (kg m ⁻³)
H_f	Humedad del aire fresco de entrada (kg-H ₂ O kg-DA ⁻¹)
\bar{u}	Flujo volumétrico de aire de entrada (m ³ h ⁻¹)
\bar{v}_s	Flujo volumétrico de gases de salida (m ³ h ⁻¹)
\bar{v}_e	Flujo volumétrico de mezcla de gases de entrada (m ³ h ⁻¹)
\bar{T}_r	Porcentaje de los gases de salida
\bar{C}_A	Calor específico del aire seco (kJ kg-DA ⁻¹ °C ⁻¹)
\bar{C}_W	Calor específico del vapor de agua (kJ kg ⁻¹ °C ⁻¹)
A_b	Área de sección transversal del reactor (m ²)
U	Coefficiente de transferencia de calor a los lados del reactor (kJm ⁻² h ⁻¹ K ⁻¹)
l_p	Perímetro del reactor (m)

Símbolo	Significado
\bar{V}	Volumen de la masa de composta (m^3)
$\bar{\eta}$	Viscosidad de la masa de composta ($kg\ m^{-1}h^{-1}$)
\bar{g}_1	Aceleración de la gravedad ($m\ s^{-2}$)
\bar{g}_2	Aceleración de la gravedad ($m\ h^{-2}$)
\bar{M}_W	Peso molecular del agua ($kg\ mol^{-1}$)
\bar{M}_{DA}	Peso molecular del aire seco ($kg\text{-}DA\ mol^{-1}$)
\bar{P}	Presión atmosférica (mmHg)
λ_0	Entalpía de vaporización del agua a T_0 ($kJ\ kg\text{-}DA^{-1}$)
\bar{O}	Concentración de oxígeno ($kg\ m^{-3}$)
\bar{a}_1	Constante cinética (h^{-1})
\bar{a}_2	Constante cinética (h^{-1})
\bar{b}_1	Constante cinética (K)
\bar{b}_2	Constante cinética (K)
\bar{a}_d	Constante cinética (h^{-1})
\bar{b}_d	Constante cinética (K)
\bar{K}_S	Constante de saturación para la concent. del sustrato ($kg\ m^{-3}$)
\bar{K}_O	Constante de saturación para la concent. del oxígeno ($kg\ m^{-3}$)
\bar{P}_W	Presión de vapor del agua (mmHg)
\bar{C}_p	Calor específico de la composta ($kJ\ kg^{-1}K^{-1}$)
\bar{w}	Humedad de la composta en base húmeda ($kg\ kg^{-1}$)
\bar{C}_H	Calor húmedo del aire ($kJ\ kg\text{-}DA^{-1}K^{-1}$)
\bar{i}_e	Entalpía de la mezcla de gases de entrada al reactor kJ/kg
\bar{i}_f	Entalpía del aire fresco de entrada al reactor kJ/kg
\bar{i}^*	Entalpía de equilibrio del aire húmedo kJ/kg
\bar{H}_e	Humedad de la mezcla de gases de entrada al reactor ($kg\text{-}H_2O\ kg\text{-}DA^{-1}$)
\bar{H}^*	Humedad de saturación del aire a la temp. del reactor ($kg\text{-}H_2O\ kg\text{-}DA^{-1}$)
\bar{T}_0	Temperatura ambiente ($^{\circ}C$)

Símbolo	Significado
ρ	Densidad de la composta (kg m^{-3})
μ	Tasa específica de crecimiento microbiano (h^{-1})
μ_{max}	Tasa máxima de crecimiento microbiano (h^{-1})
λ	Tasa específica de muerte microbiana (h^{-1})
R_H	Tasa de generación de calor ($\text{kJ m}^{-3}\text{-composta h}^{-1}$)
R_W	Tasa de producción de agua ($\text{kg m}^{-3}\text{-composta h}^{-1}$)
R_S	Tasa de consumo del sustrato ($\text{kg m}^{-3}\text{-composta h}^{-1}$)
R_X	Tasa neta de producción microbiana ($\text{kg m}^{-3}\text{-composta h}^{-1}$)
R_O	Tasa de consumo de oxígeno ($\text{kg m}^{-3}\text{-composta h}^{-1}$)
x_1	Concentración de microorganismos Actinomicetos (kg m^{-3})
x_2	Concentración de microorganismos Termofílicos (kg m^{-3})
x_3	Concentración de microorganismos Inhibidores (kg m^{-3})
S	Concentración de sustrato (kg m^{-3})
θ_S	Contenido sólido volumétrico de la masa de composta
θ_L	Contenido líquido volumétrico de la masa de composta
T	Temperatura de la masa de composta ($^{\circ}\text{C}$)
H	Humedad del aire ($\text{kg-H}_2\text{Okg-DA}^{-1}$)
l	Altura de la masa de composta (m)

Apéndice B

Publicaciones

K. J. Gurubel and A. Sánchez, “Cálculo de trayectorias óptimas de temperatura en un reactor de fermentación en sustrato sólido”, XXX Encuentro Nacional de la AMIDIQ, Mazatlán, Sinaloa, May, 2009.



CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS DEL I.P.N. UNIDAD GUADALAJARA

El Jurado designado por la Unidad Guadalajara del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional aprobó la tesis

Control Óptimo de Un Reactor de Fermentación en Sustrato Sólido

del (la) C.

Kelly Joel GURUBEL TUN

el día 15 de Octubre de 2009.

Dr. José Javier Ruíz León
Investigador CINVESTAV 3B
CINVESTAV Unidad Guadalajara

Dr. Arturo del Sagrado Corazón
Sánchez Carmona
Investigador CINVESTAV 3B
CINVESTAV Unidad Guadalajara

Dr. Carlos Gonzalez Figueredo
Jefe de Laboratorio de Ingeniería
Química
Universidad Autónoma de
Guadalajara

