

xx(178681.1)



CINVESTAV
BIBLIOTECA CENTRAL



SSIT000009512

TK 165 98

• G85

2009

**CINVESTAV
IPN
ALQUISICION
DE LIBROS**



**Centro de Investigación y de Estudios Avanzados
del Instituto Politécnico Nacional
Unidad Guadalajara**

**El Problema de Observación y Control
de una Clase de Sistemas Dinámicos
Utilizando Esquemas Híbridos de
Medición**

Tesis que presenta:

Carmen Patricia Guillén Flores

para obtener el grado de:

Maestro en Ciencias

en la especialidad de:

Ingeniería Eléctrica

Directores de Tesis

Dr. Bernardino Castillo Toledo

Dr. Juan Paulo García Sandoval

CINVESTAV del IPN Unidad Guadalajara, Guadalajara, Jalisco, Diciembre de 2009.



**CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y
DE ESTUDIOS AVANZADOS DEL
INSTITUTO POLITÉCNICO
NACIONAL**

**COORDINACIÓN GENERAL DE
SERVICIOS BIBLIOGRÁFICOS**

CLASIF.: TK 165.98 .G85 2009
ADQ.: SSI-590
FECHA: 21-Mayo-2010
PROCED.: DON.-2010
\$

164568-1001

El Problema de Observación y Control de una Clase de Sistemas Dinámicos Utilizando Esquemas Híbridos de Medición

**Tesis de Maestría en Ciencias
Ingeniería Eléctrica**

Por:

Carmen Patricia Guillén Flores
Ingeniero Químico

Universidad de Guadalajara 2001-2006

Becario de CONACYT, expediente no. 14112

Directores de Tesis

Dr. Bernardino Castillo Toledo

Dr. Juan Paulo García Sandoval

CINVESTAV del IPN Unidad Guadalajara, Diciembre de 2009.

Resumen

Esta tesis aborda el problema de observadores con restablecimiento de la condición inicial aplicados a un cierto tipo de sistemas dinámicos que cuentan con esquemas híbridos de medición. Usualmente al trabajar con reactores químicos se cuenta con mediciones continuas y discretas, en base a esto se presenta el diseño de dos observadores que emplean tanto las mediciones continuas como las mediciones discretas para estimar los estados no medibles pero observables.

Primero se desarrolla un observador continuo con actualización discreta de la condición inicial, el cual restablece su condición inicial en cada periodo de muestreo y actualiza sus estados constantemente a partir de las mediciones continuas. Este observador es aplicado a un modelo de digestión anaeróbica. Una vez probado su desempeño, se aprovechan los estados observados para aplicar un control linealizante entrada-salida, que tiene como objetivo mantener las salidas del sistema en una referencia constante.

El observador continuo así diseñado es un observador local, ya que las ganancias son calculadas a partir de la linealización del sistema en estudio. Por esta razón, se propone el diseño de un observador difuso con actualización discreta de la condición inicial, que es un observador global en la región donde la representación difusa es válida. El observador difuso es aplicado al mismo modelo de digestión anaeróbica; para el cual la representación difusa se obtiene usando la metodología propuesta por Takagi-Sugeno. De la misma manera se diseñan leyes de control linealizante utilizando los estados de este observador difuso.

Los resultados obtenidos en simulación usando los parámetros del modelo de digestión anaeróbica reportados en trabajos previos, sugieren la validez del enfoque aquí presentado.

Abstract

This thesis is related to the problem of observers with resetting of the initial condition applied to a certain kind of dynamical systems that have measurement hybrid schemes. Usually, the chemical reactors monitoring involves continuous and discrete measurements, for this reason is presented two observers that use continuous and discrete measurements to estimate unmeasurable but observable states.

First, a continuous observer with resetting of the initial condition is developed. This observer updates its states each sampled instants due to a suitable initial condition reset policy. This observer is applied to an anaerobic digestion model. Once the observer performance is guaranteed, an input-output linearizing control is designed on the basis of the observer states to force the system to track a constant reference.

The continuous observer with initial condition discrete reset was designed in this way is a local observer, since the gains are calculated from the linearization of the system under study, therefore, intends to design a fuzzy observer with resetting of the initial condition, which is a global observer in the region where the fuzzy representation is valid. The fuzzy observer is applied to the same anaerobic digestion model; in order to get the fuzzy representation, the methodology proposed by Takagi-Sugeno is used. Since the good performance of the observer has been proved, input-output linearization control laws are designed using fuzzy observer states.

The simulation results using the parameters of anaerobic digestion model reported in previous works, suggest the validity of the approach presented here.

Índice general

1. Introducción	9
1.1. Justificación	10
1.2. Objetivos	10
1.3. Organización de la tesis	11
2. Antecedentes	13
2.1. Sistemas con actualización de la condición inicial	13
2.2. Fundamentos sobre observadores con actualización discreta de la condición inicial (ADCI)	16
2.2.1. Observador continuo ADCI para sistemas continuos con mediciones discretas	16
2.2.2. Ejemplo del observador continuo ADCI	18
2.3. Fundamentos sobre la construcción del modelo difuso	19
2.3.1. Modelo difuso Takagi-Sugeno	19
2.3.2. Sector no lineal	22
2.4. Diseño de observadores difusos	22
2.4.1. Diseño de sistemas aumentados	23
3. Observador ADCI para sistemas continuos con mediciones continuas y discretas	27
3.1. Planteamiento del problema	27
3.2. Diseño de un observador ADCI para sistemas continuos con mediciones continuas y discretas	28
3.3. Caso de estudio: digestor anaeróbico	32

3.3.1. Modelo del digestor anaeróbico	32
3.3.2. Diseño del observador ADCI	37
3.3.3. Diseño del controlador por linealización entrada-salida	41
3.4. Conclusiones	46
4. Observador difuso ADCI para sistemas continuos con mediciones continuas y discretas	47
4.1. Planteamiento del problema	47
4.2. Diseño del observador difuso ADCI para sistemas continuos con mediciones continuas y discretas	48
4.3. Caso de estudio: digestor anaeróbico	52
4.3.1. Obtención de la representación difusa del modelo de digestión anaeróbica	52
4.3.2. Diseño del observador difuso ADCI	59
4.3.3. Diseño del controlador por linealización entrada-salida	61
4.4. Conclusiones	65
5. Conclusiones	67
5.1. Conclusiones	67
5.2. Trabajo Futuro	68
Bibliografía	69
A. Artículo en Congreso	71

Índice de figuras

2.1. Sistema con actualización de las condiciones iniciales.	13
2.2. Sistema estable con actualización de la condición inicial.	14
2.3. Simulación del sistema inestable.	15
2.4. Sistema inestable con actualización de la condición inicial.	15
2.5. Observador continuo ADCI para sistemas con mediciones discretas.	18
2.6. Simulación del observador continuo ADCI para sistemas continuos con mediciones discretas.	20
2.7. Construcción del modelo difuso Takagi-Sugeno.	21
2.8. Sector no lineal global	22
2.9. Sector no lineal local.	23
3.1. Observador continuo ADCI para sistemas continuos con mediciones continuas y discretas.	31
3.2. Esquemmatización del proceso de digestión anaerobia.	33
3.3. Simulación del observador continuo ADCI.	39
3.4. Simulación del observador continuo.	40
3.5. Comparación entre los errores del observador continuo y del observador ADCI.	41
3.6. Sistema con control linealizante para llevar la salida y_2 a la referencia deseada.	43
3.7. Entrada de control para llevar la salida y_2 a la referencia deseada.	44
3.8. Sistema con control linealizante para llevar la salida y_1 a la referencia deseada.	45
3.9. Entrada de control para llevar la salida y_1 a la referencia deseada.	45
4.1. Funciones de membresía $E_1(z_1(t))$ y $E_2(z_1(t))$	57

4.2. Funciones de membresía $N_1(z_2(t))$ y $N_2(z_2(t))$	58
4.3. Funciones de membresía $M_1(z_3(t))$ y $M_2(z_3(t))$	58
4.4. Simulación de observador difuso ADCI.	60
4.5. Error del observador difuso ADCI.	62
4.6. Sistema con control linealizante para llevar la salida y_2 a la referencia deseada.	63
4.7. Entrada de control para llevar la salida y_1 a la referencia deseada.	64
4.8. Sistema con control linealizante para llevar la salida y_1 a la referencia deseada.	64
4.9. Entrada de control para llevar la salida y_1 a la referencia deseada.	65

Índice de tablas

3.1. Parámetros del digestor anaeróbico.	35
3.2. Concentraciones de entrada para el digestor anaeróbico.	35
3.3. Puntos de equilibrio del digestor anaeróbico.	35
3.4. Condiciones iniciales utilizadas en las simulación del observador continuo ADCI.	41
3.5. Parámetros para simular las leyes de control, utilizando los estados del obser- vador continuo ADCI.	43
4.1. Condiciones iniciales utilizadas en las simulación del observador difuso ADCI.	61
4.2. Parámetros para simular las leyes de control, utilizando los estados del obser- vador difuso ADCI.	63

Agradecimientos

A Dios por estar conmigo y ser mi sustento en todo momento.

A mi madre Patricia Flores por todo el amor, el apoyo, el ejemplo y la comprensión que ha lo largo de mi vida me ha brindado y que ha sido la roca en la cual me he cimentado para llevar a cabo todos mis objetivos.

A Víctor Aguilera por todo su cariño, infinita paciencia e incondicional apoyo, los cuales me han ayudado para seguir luchando y que me ha enseñado que la constancia y la determinación son indispensables para llegar a la meta. Gracias por estar en mi vida y compartir mis logros.

A mi hermano Roberto Guillén por toda su paciencia y comprensión que me ha hecho aprender que un hombre paciente, cariñoso y noble es un hombre de Dios.

A mi director de tesis, Dr. Bernardino Castillo, por la orientación, el esfuerzo y el tiempo que me brindó y que fue esencial para desarrollar este trabajo y sobre todo por la amistad y cariño que siempre recibí de su parte.

A mi director de tesis, Dr. Juan Paulo García Sandoval, por el invaluable apoyo, disponibilidad y paciencia; por su generosidad al compartirme sus conocimientos y experiencia, sin los cuales este trabajo no hubiera sido posible.

A mis compañeros de generación Rocío Carrasco, Blanca León, Marcos Galicia, Riemann Ruiz, Lizette Rubio, Armando López, Eduardo Castañeda, Roberto Ross, Luis Luque, Gerardo Valdovinos, Saúl Nuño, Rubén Belmonte y Joel Gurubel por todo el apoyo y amistad que me ofrecieron en esta etapa de mi vida.

Al Dr. Javier Ruíz León, al Dr. Antonio Ramírez Treviño y al Dr. Andres Méndez Vázquez, por el tiempo y esfuerzo invertido en la revisión de este trabajo.

Al Centro de Investigación y Estudios Avanzados del I.P.N. Unidad Guadalajara, por el apoyo académico que me proporcionó para realizar mis estudios y durante la realización de este trabajo de tesis.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología por el apoyo económico otorgado que me permitió concluir este posgrado.

Capítulo 1

Introducción

Para aplicar cualquier estrategia de control en general es necesario tener información de las principales variables del proceso. Esto puede llevarse a cabo colocando sensores adecuados [2]; sin embargo, aunque en muchos casos las mediciones continuas son fácilmente obtenidas, por ejemplo, la temperatura o el pH, debido a razones económicas o técnicas que consumen demasiado tiempo, otras variables importantes pueden ser sólo medidas intermitentemente, o incluso pueden no estar disponibles. Por esta razón, es deseable que las variables de estado no medidas puedan ser estimadas a partir de mediciones disponibles [19]. Para tratar con este problema, muchas soluciones han sido propuestas, tales como el bien conocido filtro de Kalman clásico y el observador de Luenberger [22]; ambos con enfoques continuos y discretos. La razón de la popularidad de estos observadores es que son fáciles de implementar debido a que el algoritmo puede ser derivado directamente del modelo en espacio de estados. Sin embargo, estos observadores de estados no son necesariamente fáciles de implementar cuando datos continuos y discretos se deben combinar. En esta dirección, en [23] se ha propuesto un filtro de Kalman extendido, el cual actualiza algunos parámetros del observador cada tiempo en que el dato muestreado está disponible. Usando funciones de Lyapunov, en [17] y [21] se han diseñado controladores que involucran mediciones continuas y discretas retardadas. En [18] también se usan mediciones discretas para diseñar algoritmos de control difuso continuos. Tomando como base esta idea, en el presente trabajo se propone un observador continuo y un observador difuso que se actualizan constantemente a partir de las mediciones continuas y también resintonizan sus estados cada instante de muestreo cuando la medición discreta está disponible.

Actualmente, la operación, monitoreo y control de procesos biológicos son de gran interés, debido a la importancia industrial de este tipo de sistemas, ya que están relacionados con la producción de insumos para la industria farmacéutica y de alimentos, además de su aplicación al tratamiento de efluentes contaminados. A causa de la necesidad de preservar el ambiente, de normas ambientales más estrictas y de factores económicos, los procesos biológicos aplicados a la depuración de aguas residuales representan una valiosa alternativa. Extensas investigaciones sobre el tema se han desarrollado [8]; su utilización se fundamen-

ta en aprovechar la capacidad de los microorganismos para degradar, acumular, adsorber, precipitar o volatilizar una gran variedad de contaminantes presentes en aguas o efluentes.

Los procesos biológicos de tratamiento de aguas residuales son más eficientes y llaman más la atención por su buen desempeño que los métodos fisicoquímicos tradicionales, pero al mismo tiempo resultan más complejos, ya que conducen a la necesidad de instrumentación, control y automatización más eficaces. Sin embargo, la naturaleza intrínseca de los procesos biológicos y la falta de mediciones en línea rápidas y confiables de las principales variables de operación, como velocidades de respiración de microorganismos, velocidades de consumo de sustrato, concentraciones de biomasa, metabolitos producidos, etc., ha ocasionado un problema para lograr la correcta operación de este tipo de procesos. Por este motivo, los observadores de estado son una herramienta poderosa en la determinación de estados no medibles.

1.1. Justificación

Cuando se trabaja con reactores químicos comúnmente se dispone de mediciones continuas, como la temperatura y el pH, las cuales son obtenidas colocando sensores adecuados; además de mediciones discretas, por ejemplo las mediciones de concentración comúnmente se realizan en laboratorio. Las variables que no pueden ser medidas, es posible estimarlas utilizando observadores de estado. En el caso en que con las mediciones continuas el sistema sea observable, es sencillo diseñar un observador de estados continuo. Por otro lado, cuando el sistema es completamente observable con las mediciones discretas, se puede diseñar un observador discreto, la desventaja de dicho observador es que sólo se tiene la dinámica del sistema en instantes de muestreo; además, para obtener una versión discreta, es necesario tener bien definida la entrada a fin de colocar un retenedor apropiado, por lo que variaciones inesperadas de la entrada entre periodos de muestreo, pueden producir fallas en el observador discreto.

En el caso en que el sistema no sea observable con la medición continua, se pueden aprovechar ambas mediciones para obtener un sistema completamente observable; es por esta razón que se propone el diseño de un observador continuo con actualización discreta de la condición inicial (ADCI), que actualiza sus estados constantemente a partir de las mediciones continuas; además se modifican los valores de los estados en cada instante en que se dispone de una medición discreta, de tal forma que estos observadores proveen estimaciones continuas tanto de los estados medidos de manera continua, como de los obtenidos de modo discreto, así como de todos los no medidos pero observables.

1.2. Objetivos

El objetivo principal de este trabajo consiste en garantizar el monitoreo eficiente de una clase de sistemas dinámicos que utilizan esquemas híbridos de medición, a través de observadores

de estado que aprovechen tanto las mediciones continuas como las discretas.

A partir de estos observadores se pretende construir leyes de control que utilicen los estados observados para seguir trayectorias deseadas.

Los objetivos particulares son:

1. Completar la teoría sobre observadores continuos con actualización discreta de la condición inicial desarrollada en [9], para sistemas continuos con mediciones continuas y discretas.
2. Diseñar un observador continuo difuso con actualización discreta de la condición inicial que aproveche tanto las mediciones continuas como las mediciones discretas.
3. Probar el desempeño de ambos observadores en el modelo de un reactor de digestión anaeróbica.
4. Aplicar leyes de control basadas en la teoría de linealización entrada-salida, para llevar las salidas del sistema del digestor anaeróbico a una referencia deseada.

1.3. Organización de la tesis

Este trabajo consta de 5 capítulos. El capítulo 2 presenta los antecedentes teóricos necesarios para el desarrollo de esta tesis. Se muestra el estado del arte de los observadores continuos con actualización discreta de la condición inicial (observador continuo ADCI); la teoría para construir un modelo difuso que servirá para obtener el modelo difuso del sistema en estudio; además de la teoría sobre observadores difusos que será el fundamento para el diseño del observador difuso con actualización discreta de la condición inicial (observador difuso ADCI). Asimismo, se presenta la teoría sobre la linealización entrada-salida que es el fundamento de las leyes de control diseñadas. En los capítulos 3 y 4 se diseñan un observador continuo ADCI y un observador difuso ADCI respectivamente, para sistemas continuos con mediciones continuas y discretas, los cuales luego son aplicados al modelo de un digestor anaeróbico. En base a estos observadores, se diseñan leyes de control para llevar las salidas del digestor anaeróbico a una referencia deseada, aprovechando las variables observadas. Finalmente en el capítulo 5 se presentan las conclusiones y el trabajo futuro.

Capítulo 2

Antecedentes

2.1. Sistemas con actualización de la condición inicial

Cuando se estudia la evolución dinámica de un sistema, en general se considera que las condiciones iniciales se fijan en un tiempo dado, a partir del cual la dinámica evoluciona libremente o dependiendo de entradas externas; sin embargo, existen casos donde es conveniente actualizar la condición inicial cada cierto periodo de tiempo (Figura 2.1). Un caso particular es actualizar la condición inicial en intervalos de tiempo regulares. En el caso de mediciones discretas, el intervalo de actualización puede coincidir con el periodo de muestreo. Éste es el concepto que se utiliza en esta tesis, para el diseño de los observadores propuestos. A fin de ilustrar el concepto, se presentan dos ejemplos sencillos.

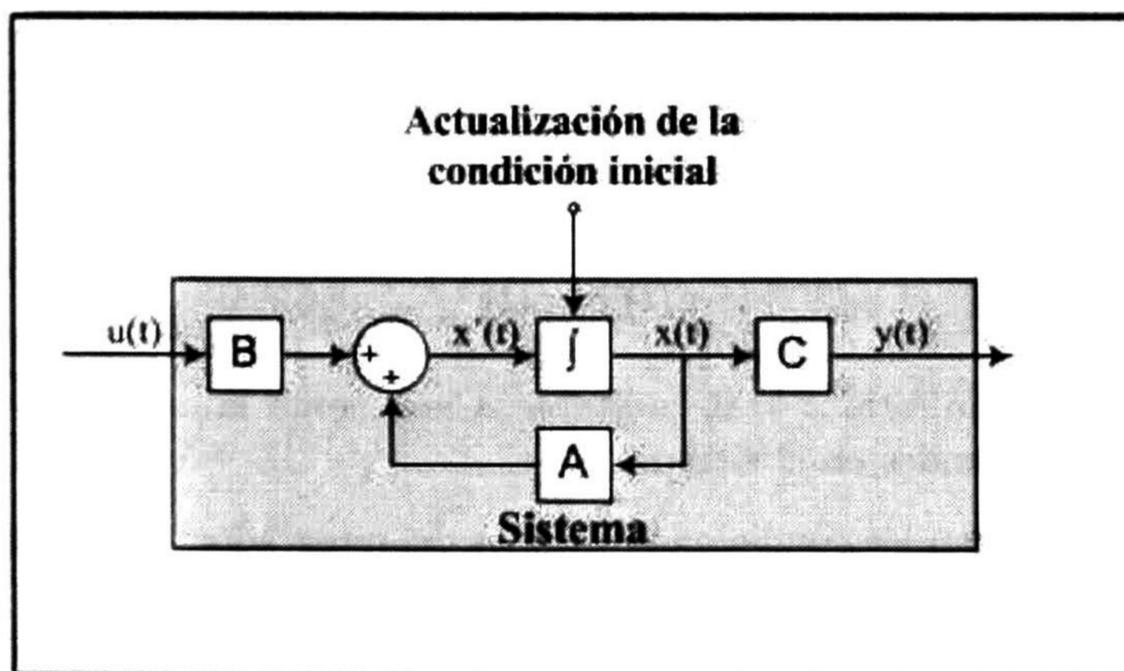


Figura 2.1: Sistema con actualización de las condiciones iniciales.

Considérese el sistema

$$\dot{x}(t) = -x(t)$$

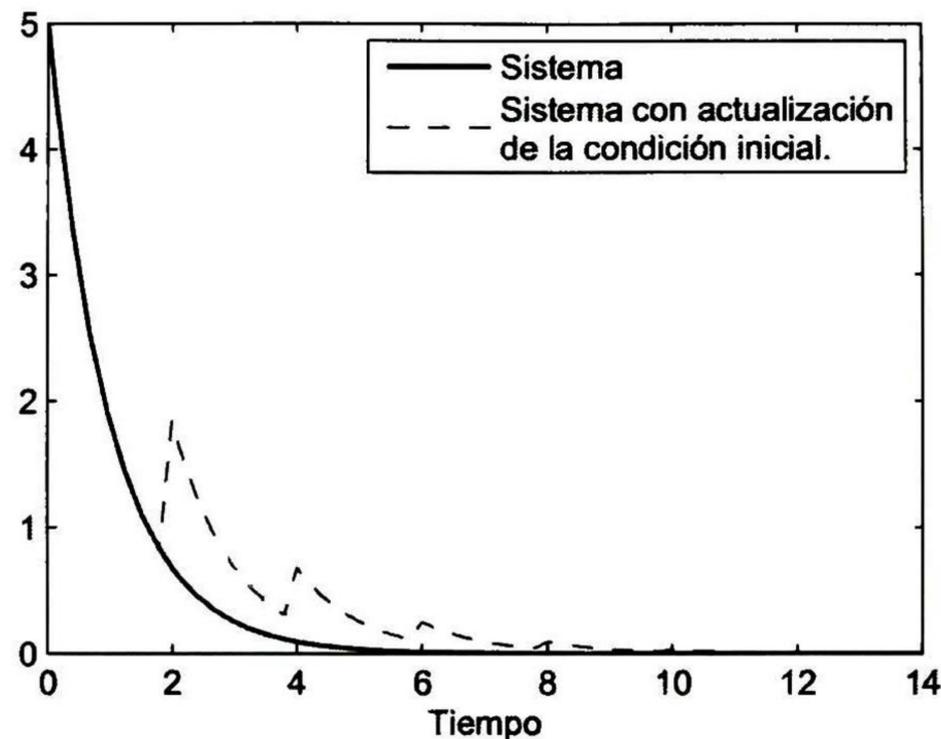


Figura 2.2: Sistema estable con actualización de la condición inicial.

En la Figura 2.2 se muestra el comportamiento del sistema colocando la condición inicial en $x(0) = 5$. Se puede ver que el sistema es estable; actualizando la condición inicial del integrador cada determinado tiempo de manera monótona decreciente, en este caso cada 2 seg, se observa que el estado presenta saltos debido a la actualización de la condición inicial, sin embargo, la evolución del sistema converge a cero.

Por otro lado, considérese el sistema

$$\dot{x}(t) = x(t)$$

que tiene un punto de equilibrio $x = 0$, inestable. Claramente la dinámica de este sistema tiende a tomar valores grandes en el tiempo.

No obstante, si se actualizan las condiciones iniciales del integrador, es posible lograr que las actualizaciones de las condiciones iniciales fueren al sistema a estabilizarse.

Estos ejemplos sencillos permiten comprender el fundamento de los observadores con actualización de la condición inicial que serán presentados en este trabajo. La ventaja de esta actualización de las condiciones iniciales, radica en que se garantiza la convergencia del observador, a pesar de la inestabilidad del sistema. En la siguiente sección se presenta un observador desarrollado en [9] para comprender más a detalle estos observadores.

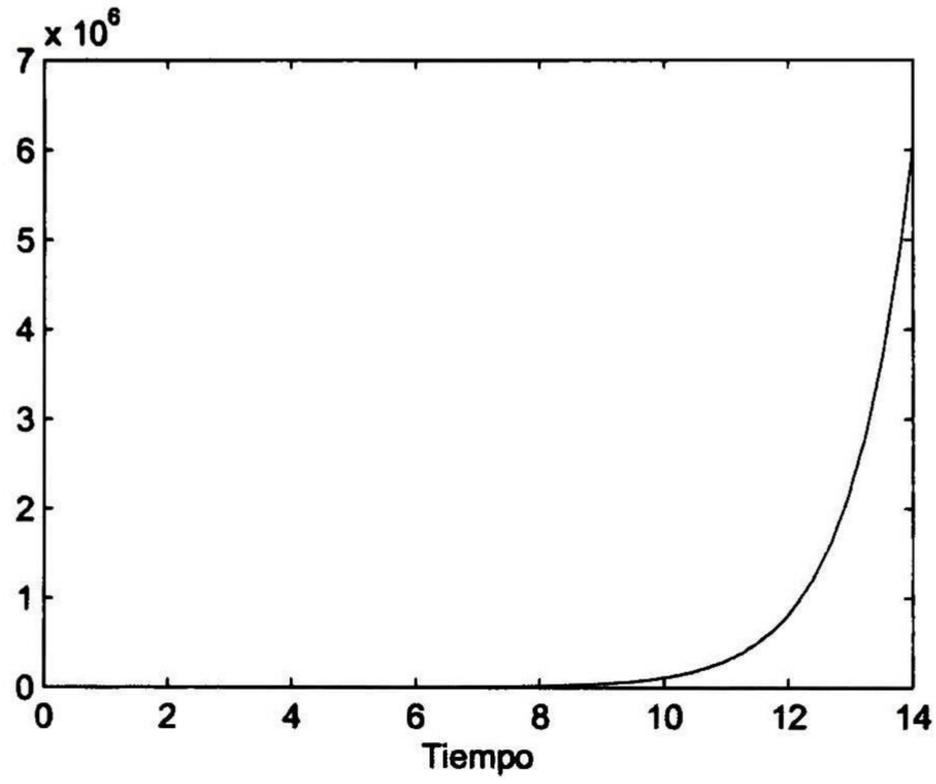


Figura 2.3: Simulación del sistema inestable.

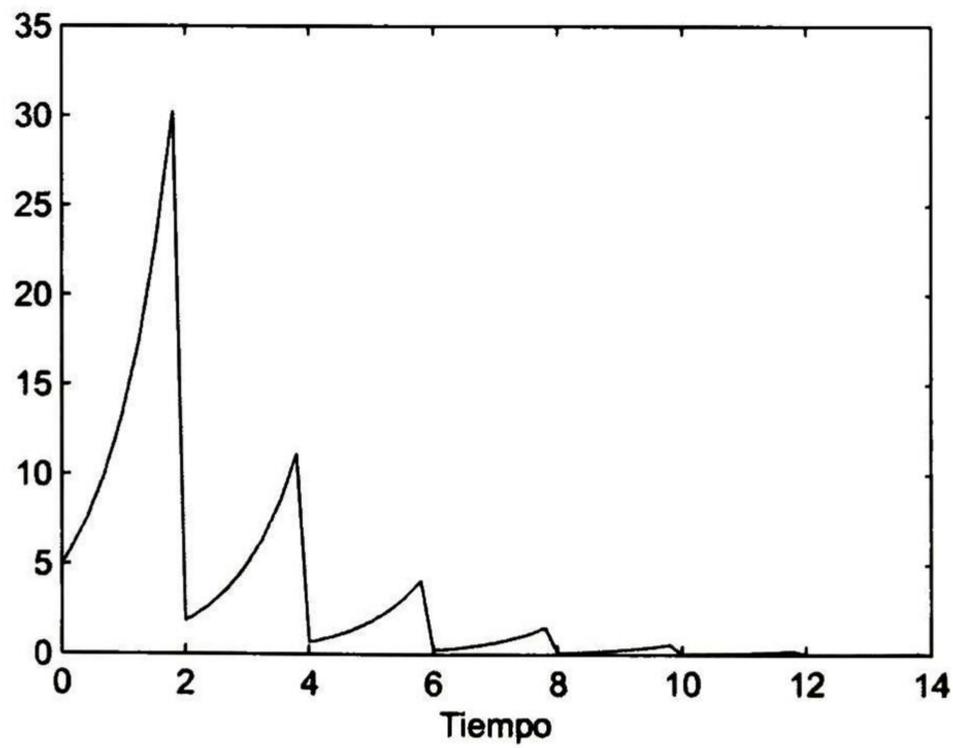


Figura 2.4: Sistema inestable con actualización de la condición inicial.

2.2. Fundamentos sobre observadores con actualización discreta de la condición inicial (ADCI)

En [9] se presenta el diseño de un observador continuo ADCI para sistemas continuos con mediciones discretas, el cual se actualiza cada periodo de muestreo, con base en esto en el capítulo 3 se diseña una estructura similar para un observador continuo ADCI para sistemas continuos con mediciones continuas y discretas. La idea fundamental de los observadores continuos ADCI se muestra en esta sección y sólo para probar su desempeño se presenta un ejemplo sencillo.

2.2.1. Observador continuo ADCI para sistemas continuos con mediciones discretas

Considérese el sistema lineal

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad \forall t \in [0, \infty) \quad (2.1)$$

$$y(k\delta) = Cx(k\delta) \quad k = 1, 2, 3, \dots, \quad (2.2)$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, y $y \in \mathbb{R}^q$ son los vectores de estados, entradas y salidas, respectivamente. En este caso las salidas son obtenidas cada periodo de muestro δ .

La forma usual para estimar los estados desconocidos del sistema (2.1) a partir de la salida (2.2) consiste en discretizarlo y diseñar un observador discreto; sin embargo, el observador así obtenido sólo provee información en cada periodo de muestreo. Además, para obtener una versión discreta de (2.1) es necesario tener bien definida la entrada, a fin de colocar un retenedor apropiado (por ejemplo, un retenedor de orden cero o un retenedor exponencial). Entonces variaciones inesperadas en la entrada entre los periodos de muestreo, pueden producir fallas en el observador discreto. De esta forma, para obtener información del sistema aún entre periodos de muestreo, en [9] se diseñó un observador continuo que no impone restricciones en el tipo de entrada entre cada periodo de muestreo empleando observadores con actualización de la condición inicial. El observador está dado por

$$\dot{z}(t) = Az(t) + Bu(t) \quad \forall t \neq k\delta \quad (2.3a)$$

$$z(k\delta^+) = z(k\delta) - G[y(k\delta) - Cz(k\delta)] \quad t = k\delta \quad (2.3b)$$

donde $z \in \mathbb{R}^n$ son los estados del observador y $z(k\delta^+)$ denota los estados del observador actualizados cada instante de muestreo. Éste es un observador continuo que actualiza sus estados cada instante de muestreo. El siguiente lema establece las condiciones para la existencia de dicho observador [9].

Lema 2.1 *Considérese el sistema (2.1)-(2.2) y supóngase que el par $(e^{A\delta}, C)$ es observable, entonces un observador de la forma (2.3a)-(2.3b) con una ganancia G tal que la matriz $(I + GC)e^{A\delta}$ es Schur, garantiza que $\lim_{t \rightarrow \infty} [x(t) - z(t)] = 0$.*

Prueba. Definiendo

$$\xi(t) = x(t) - z(t), \quad \text{and } \xi(k\delta^+) = x(k\delta) - z(k\delta^+),$$

donde $\xi(t)$ representa el error continuo y $\xi(k\delta^+)$ es el error actualizado cada periodo de muestreo. Nótese que $x(k\delta^+) = x(k\delta)$ debido a que el sistema (2.1) es continuo. Ahora

$$\dot{\xi}(t) = A\xi(t) \quad \forall t \neq k\delta \quad (2.3d)$$

$$\xi(k\delta^+) = (I + GC)\xi(k\delta) \quad t = k\delta. \quad (2.3e)$$

Resolviendo (2.3d) para $t \in [k\delta^+, (k+1)\delta]$, se sigue que

$$\xi(k+1) = A_d \xi(k\delta^+), \quad (2.3f)$$

donde $A_d = e^{A\delta}$. De (2.3e) y (2.3f) se obtiene que

$$\begin{aligned} \xi((k+1)\delta^+) &= (I + GC)\xi(k+1) \\ &= (I + GC)A_d \xi(k\delta^+), \end{aligned}$$

si el par (A_d, CA_d) es observable, la matriz G puede ser calculada de tal manera que $A_d + GCA_d$ es Schur y el error $\xi(k\delta^+)$ convergerá a cero, por lo tanto $\lim_{k \rightarrow \infty} [x(k\delta) - z(k\delta^+)] = 0$; entonces para $k\delta < t \leq (k+1)\delta$ la solución $z(t)$ converge a $x(t)$, esto es $\lim_{t \rightarrow \infty} [x(t) - z(t)] = 0$.

Por otra parte, para probar que el par (A_d, CA_d) es observable si el par (A_d, C) es observable, considérese su matriz de observabilidad

$$\mathcal{O} = \begin{pmatrix} CA_d \\ CA_d^2 \\ \vdots \\ CA_d^n \end{pmatrix}$$

donde $A_d \in \mathbb{R}^{n \times n}$, entonces usando el teorema de Cayley-Hamilton [14]

$$A_d^n = a_0 I + a_1 A_d + \cdots + a_{n-1} A_d^{n-1},$$

la matriz de observabilidad se convierte en

$$\mathcal{O} = \begin{pmatrix} CA_d \\ CA_d^2 \\ \vdots \\ a_0 C + a_1 CA_d + \cdots + a_{n-1} CA_d^{n-1} \end{pmatrix}$$

Debido a que A_d es obtenida a través de la discretización de la matriz A entonces $a_0 \neq 0$ y \mathcal{O} tiene rango completo si el par (A_d, C) es observable. ■

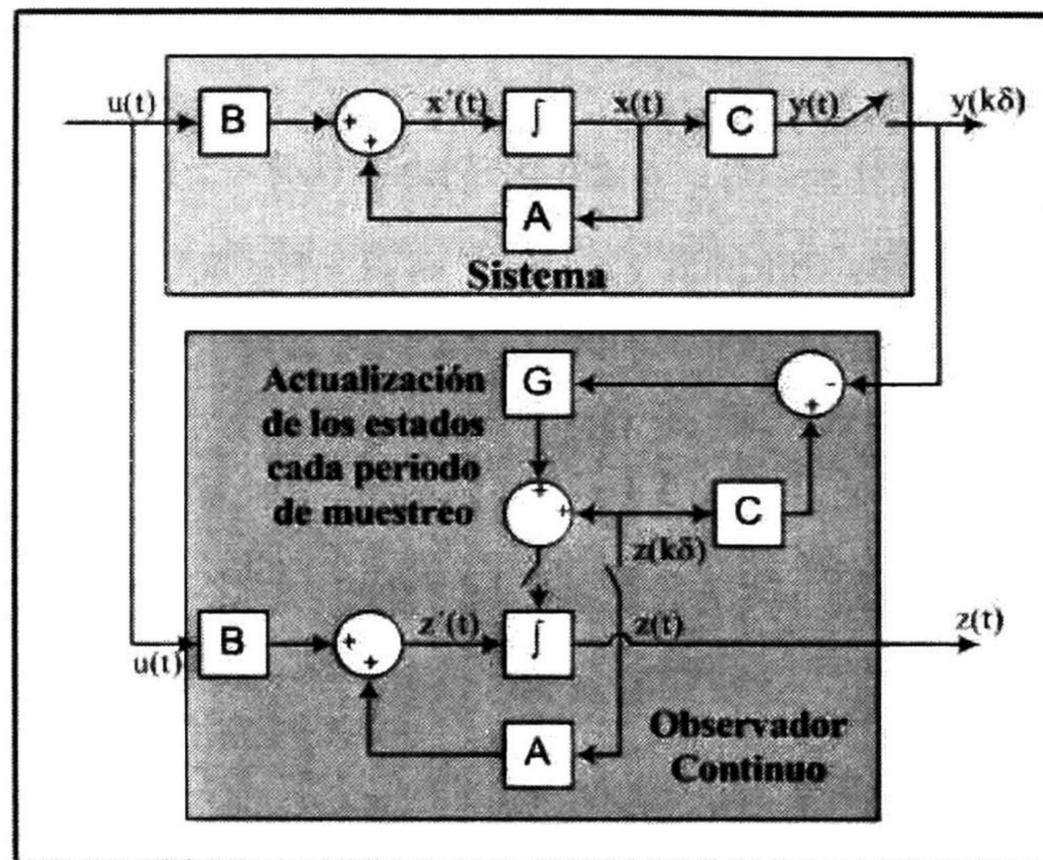


Figura 2.5: Observador continuo ADCI para sistemas con mediciones discretas.

Observación 2.1 La principal característica del observador (2.3a)-(2.3b) (ver Figura 2.5) radica en que la información de los estados entre periodo de muestreo está disponible en cualquier tiempo y no es necesario tener preestablecido el comportamiento dinámico de la entrada. La ecuación (2.3a) puede ser vista como un observador continuo a lazo abierto entre los periodos de muestreo y cuyos estados, de acuerdo a (2.3b), son resintonizados cada periodo de muestreo, ya que la condición inicial del integrador es actualizada cada que se dispone de la medición discreta.

A continuación se presenta un ejemplo sencillo de un observador para este tipo de sistemas.

2.2.2. Ejemplo del observador continuo ADCI

Considérese el sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(k\delta) &= Cx(k\delta)\end{aligned}$$

donde

$$x = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{8}{4} & -6 & -\frac{3}{10} \end{pmatrix}, \quad C = (1 \ 0 \ 0), \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

la salida es obtenida cada periodo de muestreo δ . Ya que el sistema es observable, se puede diseñar un observador de la forma (2.3), para el cual se calcula

$$A_d = \begin{pmatrix} 0,6160 & -0,7240 & 0,2698 \\ -0,3206 & -0,0251 & 0,1897 \\ -0,7587 & -2,5967 & -0,4595 \end{pmatrix},$$

asignando los polos $(0,2 \ 0,25 \pm 0,2i)$ para la matriz $(I + GC) A_d$, se calcula G ,

$$G = \begin{pmatrix} -0,9723 \\ -0,6197 \\ 2,6644 \end{pmatrix}$$

Para simular el observador se define una entrada senoidal ($u = \text{sen}(2\pi t)$) y se utilizan las condiciones iniciales

$$\begin{aligned} x(0) &= (1,433 \ 0,8 \ -1,221)^T \\ z(0) &= (1,433 \ 0 \ 0)^T \end{aligned}$$

Se puede apreciar en la Figura 2.6, que la ventaja del observador continuo ADCI radica en que entre cada periodo de muestreo se puede reproducir el comportamiento del sistema, evitando así la utilización de retenedores exponenciales.

2.3. Fundamentos sobre la construcción del modelo difuso

En este trabajo se presentan desarrollos basados en el modelo difuso Takagi-Sugeno, por este motivo, a continuación se muestran los fundamentos para construir este modelo.

2.3.1. Modelo difuso Takagi-Sugeno

El modelo difuso propuesto por Takagi-Sugeno [24] es descrito por reglas difusas SI ENTONCES las cuales representan relaciones locales lineales entrada-salida de un sistema no

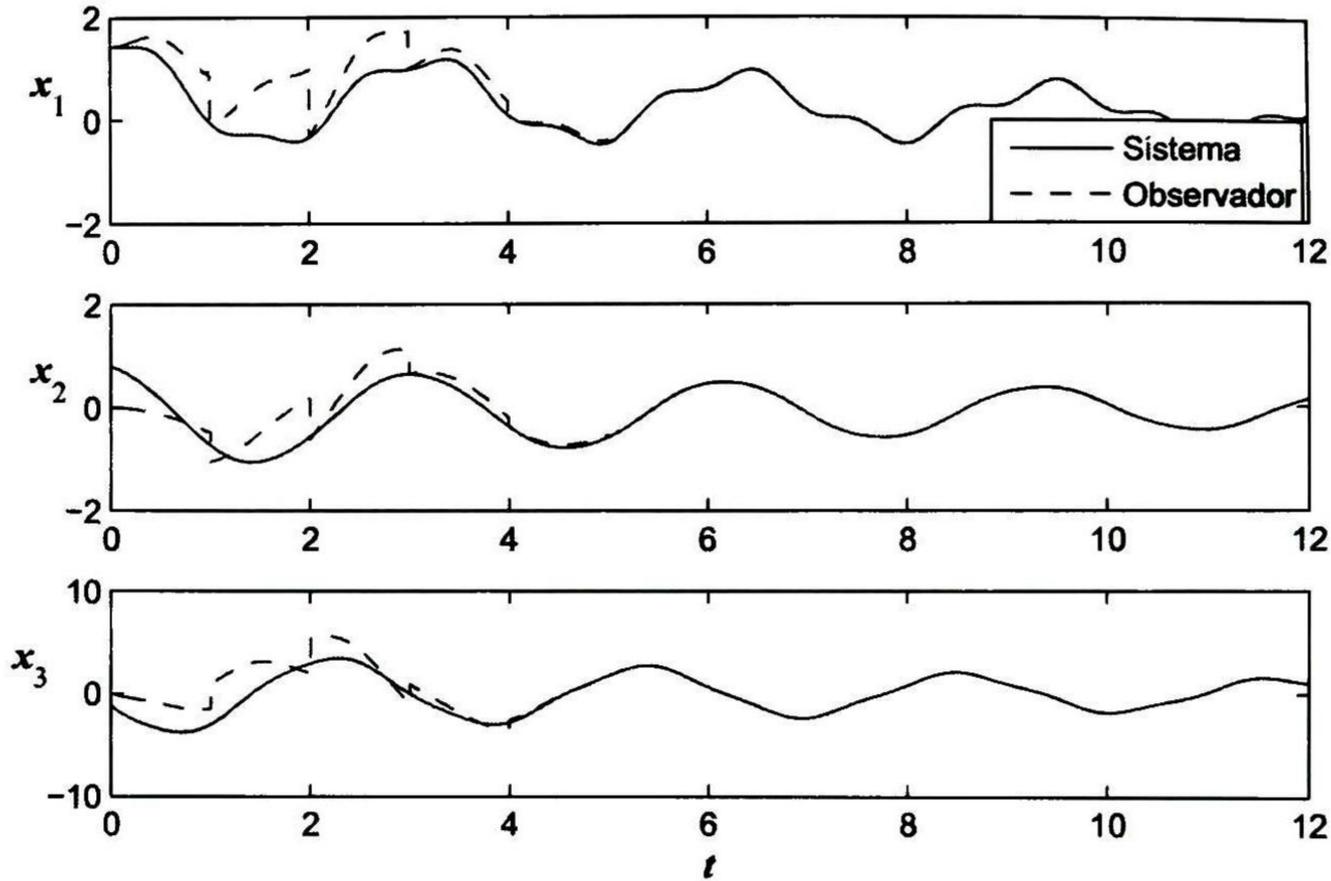


Figura 2.6: Simulación del observador continuo ADCI para sistemas continuos con mediciones discretas.

lineal. La principal característica del modelo difuso Takagi-Sugeno es que expresa la dinámica local de cada implicación difusa (regla) por un sistema lineal. El modelo difuso global del sistema se consigue mediante la mezcla de subsistemas lineales. La i -ésima regla para un sistema difuso Takagi-Sugeno (T-S) continuo es de la forma

$$\text{SI } z_1(t) \text{ es } M_{i1} \text{ y } \dots \text{ y } z_p(t) \text{ es } M_{ip}$$

$$\text{ENTONCES } \begin{cases} \dot{x}(t) = A_i x(t) + B_i u(t) \\ y(t) = C_i x(t) \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, r$$

Donde M_{ij} son los conjuntos difusos y r es el número de reglas; $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ y $y(t) \in \mathbb{R}^q$ son los vectores de estados, entradas y salidas del sistema, respectivamente. $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B_i \in \mathbb{R}^{n \times m}$, y $C_i \in \mathbb{R}^{q \times n}$; $z_1(t), \dots, z_p(t)$ son conocidas como variables premisas que pueden ser funciones de las variables de estado, disturbios externos y/o tiempo.

Dado un par de $(x(t), u(t))$ las salidas finales del sistemas difuso son inferidas como sigue

$$\dot{x}(t) = \frac{\sum_{i=1}^r w_i(z(t)) \{A_i x(t) + B_i u(t)\}}{\sum_{i=1}^r w_i(z(t))} = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) \{A_i x(t) + B_i u(t)\}.$$

$$y(t) = \frac{\sum_{i=1}^r w_i(z(t)) C_i x(t)}{\sum_{i=1}^r w_i(z(t))} = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) C_i x(t),$$

donde

$$z(t) = [z_1(t) \ z_2(t) \ \cdots \ z_p(t)],$$

$$w_i(z(t)) = \prod_{j=1}^p M_{ij}(z_j(t)),$$

$$h_i(z(t)) = \frac{w_i(z(t))}{\sum_{i=1}^r w_i(z(t))},$$

para toda t . El término $M_{ij}(z_j(t))$ es el grado de membresía de $z_j(t)$ en M_{ij} .

Para construir modelos difusos existen dos enfoques; identificación usando datos entrada-salida y derivación del modelo difuso a partir de las ecuaciones del sistema no lineal (ver Figura 2.7). En esta sección se trabaja con el segundo enfoque.

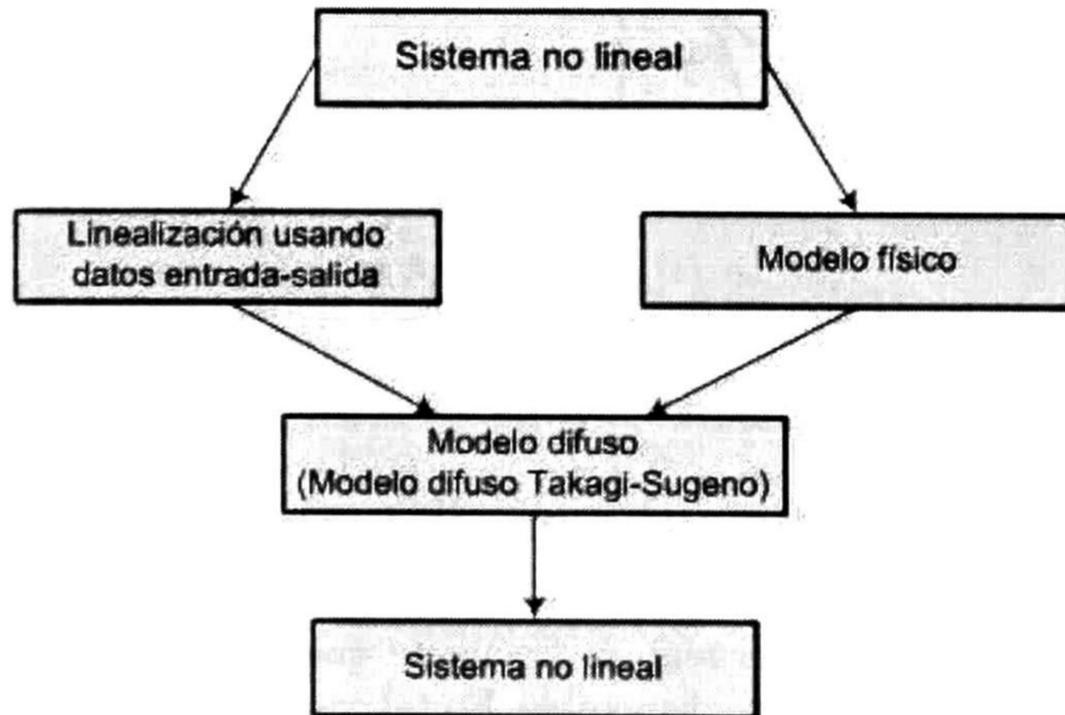


Figura 2.7: Construcción del modelo difuso Takagi-Sugeno.

2.3.2. Sector no lineal

La idea de usar el sector no lineal para construir un modelo difuso apareció por primera vez en [16]. El sector no lineal está basado en el siguiente concepto.

Considérese un sistema no lineal simple $\dot{x}(t) = f(x(t))$, donde $f(0) = 0$. El objetivo es encontrar un sector global tal que $\dot{x}(t) = f(x(t)) \in [a_1 \ a_2] x(t)$. La Figura 2.8 ilustra el enfoque del sector no lineal. Este enfoque garantiza una construcción del modelo difuso exacto. Sin embargo, algunas veces es difícil encontrar un sector global para sistemas no lineales generales. En estos casos, se consideran sectores no lineales locales. Esto es razonable debido a que las variables de sistemas físicos están siempre acotadas. La Figura 2.9 muestra el sector no lineal local, donde dos líneas se convierten en el sector no lineal local bajo $-d < x(t) < d$. El modelo difuso exactamente representa el sistema no lineal en la región "local", esto es, $-d < x(t) < d$ [24].

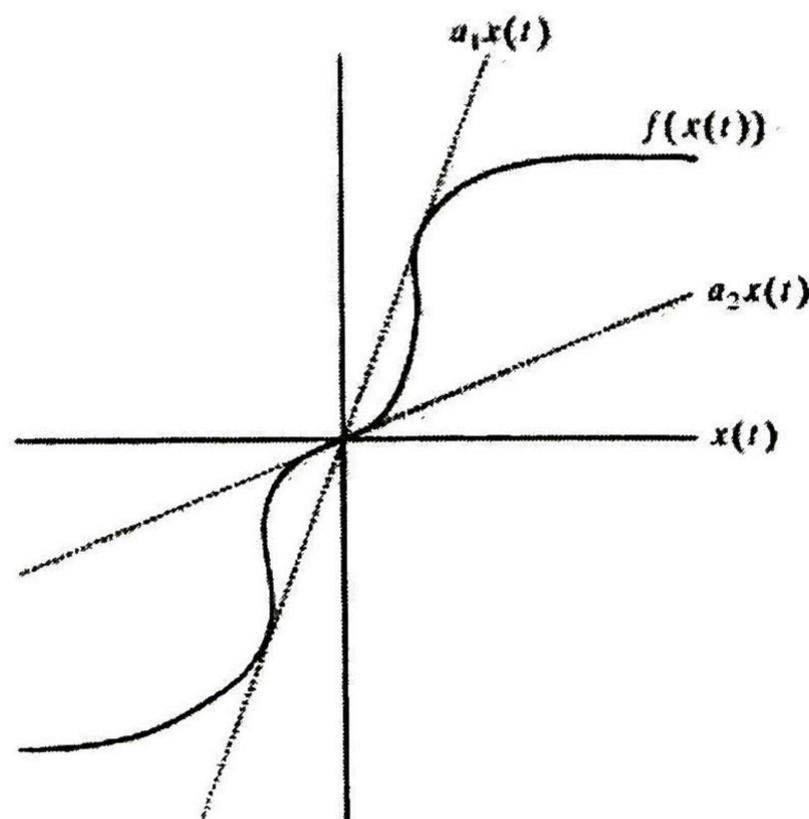


Figura 2.8: Sector no lineal global

2.4. Diseño de observadores difusos

En problemas de control de la vida real, es frecuente que la información completa de los estados de un sistema no está siempre disponible. En tal caso, es necesario recurrir a métodos de retroalimentación de la salida tales como diseños basados en observadores de estado. Esta sección presenta metodologías de diseño de observadores difusos involucrando estimación de estados para modelos difusos Takagi-Sugeno.

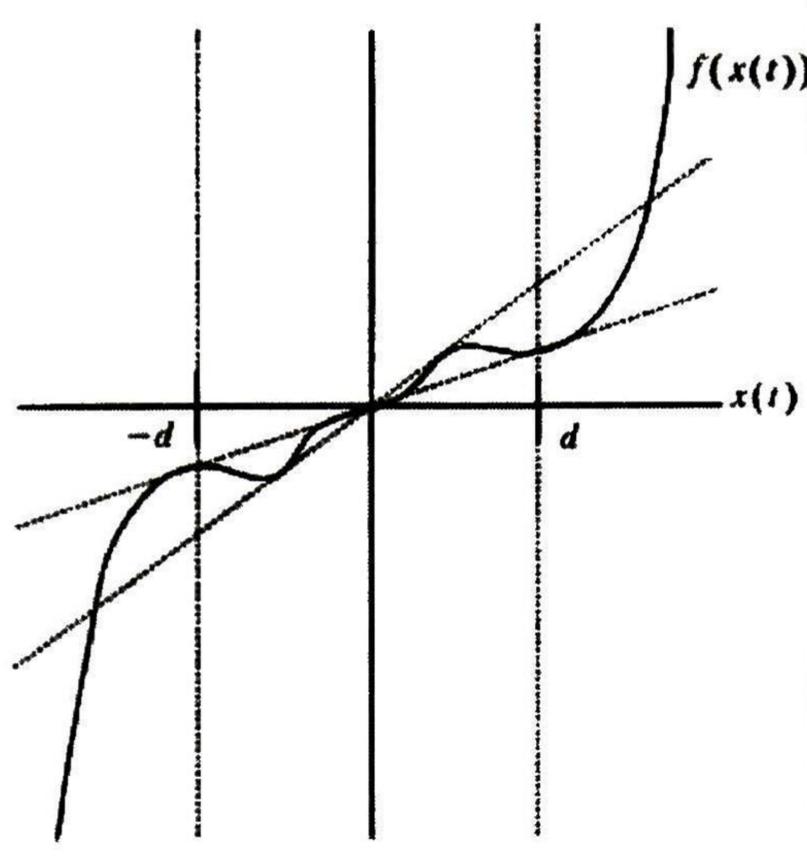


Figura 2.9: Sector no lineal local.

Como en todo diseño de un observador, los observadores difusos requieren satisfacer

$$x(t) - \hat{x}(t) \rightarrow 0 \quad \text{cuando } t \rightarrow \infty$$

donde $\hat{x}(t)$ denota el vector de estados estimados para un observador difuso. Esta condición garantiza que el error de estado estable entre $x(t)$ y $\hat{x}(t)$ converge a 0. La estructura del observador difuso es la siguiente

Regla del observador i

Si $z_1(t)$ es M_{i1} y ... y $z_p(t)$ es M_{ip}

Entonces

$$\dot{\hat{x}}(t) = A_i \hat{x}(t) + B_i u(t) + K_i (y(t) - \hat{y}(t))$$

$$\hat{y}(t) = C_i \hat{x}(t) \quad i = 1, 2, \dots, r$$

2.4.1. Diseño de sistemas aumentados

A continuación se muestra el diseño basado en desigualdades matriciales lineales (LMI) para sistemas aumentados conteniendo controlador y observador difuso, para el caso en que las variables premisas $z_1(t), \dots, z_p(t)$ no dependen de las variables de estado estimadas por el observador difuso.

El observador difuso para este caso se representa como

$$\begin{aligned}
 \dot{\hat{x}}(t) &= \frac{\sum_{i=1}^r w_i(z(t)) \{A_i \hat{x}(t) + B_i u(t) + K_i (y(t) - \hat{y}(t))\}}{\sum_{i=1}^r w_i(z(t))} \\
 &= \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) \{A_i \hat{x}(t) + B_i u(t) + K_i (y(t) - \hat{y}(t))\}, \\
 \hat{y}(t) &= \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) C_i \hat{x}(t).
 \end{aligned} \tag{2.7}$$

El diseño del observador difuso consiste en determinar las ganancias locales K_i .

El controlador difuso toma la forma

$$u(t) = -\frac{\sum_{i=1}^r w_i(z(t)) F_i \hat{x}(t)}{\sum_{i=1}^r w_i(z(t))} = -\sum_{i=1}^r h_i(z(t)) F_i \hat{x}(t). \tag{2.8}$$

Combinando el controlador difuso (2.8) y el observador difuso (2.7) y denotando $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$, se obtiene la siguiente representación del sistema

$$\begin{aligned}
 \dot{x}(t) &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t)) h_j(z(t)) \{(A_i - B_i F_j) x(t) + B_i F_j e(t)\}, \\
 \dot{e}(t) &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t)) h_j(z(t)) \{A_i - K_i C_j\} e(t).
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, los sistemas aumentados se representan como sigue

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_a(t) &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t)) h_j(z(t)) G_{ij} x_a(t) \\
 &= \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) h_i(z(t)) G_{ii} x_a(t) + 2 \sum_{i=1}^r \sum_{i < j} h_i(z(t)) h_j(z(t)) \frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} x_a(t),
 \end{aligned} \tag{2.9}$$

donde

$$x_a(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ e(t) \end{bmatrix}, \quad G_{ij} = \begin{bmatrix} A_i - B_i F_j & B_i F_j \\ 0 & A_i - K_i C_j \end{bmatrix}$$

Teorema 2.1 *El equilibrio del sistema aumentado (2.9) es globalmente asintóticamente estable si existe una matriz común definida positiva P tal que*

$$\begin{aligned} G_{ii}^T P + P G_{ii} &< 0, \\ \left(\frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \right)^T P + P \left(\frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \right) &< 0 \quad i < j \text{ s.a. } h_i \cap h_j \neq \phi. \end{aligned}$$

Prueba. Ver [24]. ■

Capítulo 3

Observador ADCI para sistemas continuos con mediciones continuas y discretas

Cuando se trabaja con reactores químicos típicamente se dispone de mediciones continuas tales como la temperatura y el pH, además de mediciones discretas; por ejemplo las mediciones de concentración comúnmente se realizan en laboratorio, debido a que los equipos de medición en línea son muy costosos. En este caso las mediciones son muestreadas con intervalos de tiempo usualmente grandes [10]. Por esta razón, para resolver el problema de control es deseable utilizar estimadores de estados a partir de las mediciones continuas y discretas. En este trabajo se pretende utilizar observadores con actualización discreta de la condición inicial (ADCI), que se actualizan constantemente a partir de las mediciones continuas; además se modifican los valores de los estados en cada instante en que se dispone de una medición discreta, de tal forma que estos observadores proveen estimaciones continuas de los estados medidos de forma continua, de los obtenidos de manera discreta y de todos los no medidos pero observables [9].

3.1. Planteamiento del problema

Considérese el sistema dinámico

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \quad \forall t \in [0, \infty) \quad (3.1a)$$

$$y_1(t) = C_1 x(t) \quad \forall t \in [0, \infty) \quad (3.1b)$$

$$y_2(k\delta) = C_2 x(k\delta) \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (3.1c)$$

y su linealización dada por

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

donde

$$A = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=0, u=0}, \quad B = \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{x=0, u=0} \quad \text{y} \quad C = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$$

$x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$ y $y_1 \in \mathbb{R}^{q_1}$, $y_2 \in \mathbb{R}^{q_2}$ son los vectores de estados, entradas y salidas del sistema dinámico, respectivamente. Las salidas están divididas en continuas (y_1) y discretas (y_2), con periodo de muestreo δ . Para este sistema se desea diseñar un observador continuo, el cual use tanto las mediciones continuas como las mediciones discretas, a fin de tener información continua sobre todo el vector de estados. La siguiente hipótesis es necesaria para el diseño del observador.

Hipótesis 3.1 *El par (A, C) es observable.*

Nótese que no se requiere que los pares (A, C_1) y (A, C_2) relacionados con las mediciones continuas y discretas, sean observables. Esto es, la matriz de observabilidad de estos pares podría no tener rango pleno.

En la siguiente sección se presenta un observador continuo para el sistema 3.1, el cual restablece su condición inicial cada periodo de muestreo y actualiza sus estados constantemente a partir de la medición continua.

3.2. Diseño de un observador ADCI para sistemas continuos con mediciones continuas y discretas

Cuando se dispone de mediciones continuas y discretas, es posible diseñar un observador de estados aprovechando las mediciones continuas, sin embargo, usando las mediciones discretas es posible diseñar un observador con actualización discreta de la condición inicial (ADCI), el cual incluye ambas mediciones continuas y discretas, como se describe en la sección 2.2.1. El siguiente teorema establece este resultado.

Teorema 3.1 *Considérese el sistema (3.1), el cual tiene un conjunto de mediciones continuas (3.1b) y un conjunto de mediciones discretas (3.1c) con periodo de muestreo δ . Se calcula la matriz G_2 de tal manera que $(I + G_2C)A_d$ es Schur, con $A_d = e^{A\delta}$. Entonces, un observador para el sistema (3.1), el cual utiliza las mediciones continuas y también se actualiza cada periodo de muestreo es dado por*

$$\dot{\zeta}(t) = f(\zeta(t), u(t)) \quad \forall t \neq k\delta \quad (3.2a)$$

$$\zeta(k\delta^+) = \zeta(k\delta) + G_2(C\zeta(k\delta) - y(k\delta)), \quad t = k\delta, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (3.2b)$$

3.2. Diseño de un observador ADCI para sistemas continuos con mediciones continuas y discretas 29

donde $\zeta \in \mathbb{R}^n$ son los estados del observador y $\zeta(k\delta^+)$ son los valores actualizados cada periodo de muestreo y

$$y(k\delta) = \begin{pmatrix} y_1(k\delta) \\ y_2(k\delta) \end{pmatrix}$$

Este observador garantiza que, en una vecindad del origen, el error entre los estados del sistema y los estados del observador tiende asintóticamente a cero, i.e. $\lim_{t \rightarrow \infty} [x(t) - \zeta(t)] = 0$.

Prueba. Considérese la aproximación lineal de ambos, el sistema (3.1a) y el observador (3.2a)

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) + \hat{f}_1(x(t), u(t)) \quad \forall t \in [0, \infty) \\ \dot{\zeta}(t) &= A\zeta(t) + Bu(t) + \hat{f}_1(\zeta(t), u(t)) \quad \forall t \in [0, \infty) \end{aligned}$$

Definiendo el error

$$\begin{aligned} e(t) &= x(t) - \zeta(t) \\ e(k\delta) &= x(k\delta) - \zeta(k\delta) \end{aligned}$$

su aproximación dinámica lineal alrededor de $e = 0$ es

$$\dot{e}(t) = Ae(t) + g(0, t) \quad \forall t \neq k\delta \quad (3.3)$$

$$e(k\delta^+) = (I + G_2C)e(k\delta) + g(0, k\delta) \quad t = k\delta, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (3.4)$$

Si se considera que $g(0, t) = 0$ y $g(0, k\delta) = 0$, los errores (3.3) y (3.4) toman la forma

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= Ae(t) \quad \forall t \neq k\delta \\ e(k\delta^+) &= (I + G_2C)e(k\delta) \quad t = k\delta, \quad k = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (3.5)$$

Ahora tomando la función de Lyapunov de la forma

$$V(k\delta) = \|e(k\delta)\|$$

$$\Delta V(k\delta) = \|e(k\delta^+)\| - \|e(k\delta)\| = \|(I + G_2C)e(k\delta)\| - \|e(k\delta)\|$$

$$\Delta V(k\delta) \leq \|(I + G_2C)\| \|e(k\delta)\| - \|e(k\delta)\|$$

$$\Delta V(k\delta) \leq (\|K\| - 1) \|e(k\delta)\|,$$

donde $\|K\| = \|(I + G_2C)\|$.

Debido a que $(I + G_2C)A_d$ es Schur, se satisface que $\|K\| < 1$, por lo tanto $\Delta V(k\delta)$ es decreciente y la dinámica del error discreto es estable y asegura que $\lim_{k \rightarrow \infty} [x(k\delta) - \zeta(k\delta)] = 0$.

Por otro lado, definiendo $t = k\delta + \theta$, $\theta \in [0, \delta)$ y $t_0 = k\delta$, entonces la solución de la ecuación (3.5) es

$$e(t) = e^{A(t-t_0)}e(t_0),$$

o bien,

$$e(k\delta + \theta) = e^{A\theta}e(k\delta).$$

Dado que θ es una señal acotada, debido a que es una señal de tipo diente de sierra, entonces

$$\|e^{A\theta}\| < M < \infty$$

de donde

$$\|e(k\delta + \theta)\| \leq M \|e(k\delta)\|, \quad (3.6)$$

dado que $e(k\delta)$ tiende a cero, entonces por continuidad se tiene que $\|e(k\delta + \theta)\|$ también tiende a cero y se garantiza que $\lim_{t \rightarrow \infty} [x(t) - \zeta(t)] = 0$. ■

Observación 3.1 *La ecuación (3.2a) puede ser vista como un observador continuo a lazo abierto entre los periodos de muestreo, cuyas condiciones iniciales son actualizadas cada periodo de muestreo de acuerdo a (3.2b).*

Nótese que la ecuación (3.2a) no cuenta con el término de retroalimentación del error de seguimiento continuo a lazo cerrado, ya que no es necesario para la convergencia del observador (3.2). Sin embargo, es posible aumentar la velocidad de convergencia de los estados que son observables a partir de la salida y_1 , agregando el término de retroalimentación del error de seguimiento. Este resultado se ilustra en el siguiente corolario.

Corolario 3.1 *Supóngase que existe una transformación $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$, tal que la aproximación lineal del sistema (3.1a)-(3.1b) se descompone en*

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= \bar{A}z(t) + \bar{B}u(t) \\ y_1(t) &= \bar{C}_1z(t) \end{aligned} \quad (3.7)$$

donde

$$\begin{aligned} z &= Tx = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}, \quad \bar{A} = TAT^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \\ \bar{B} &= TB = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} \quad \bar{C}_1 = C_1T^{-1} = (C_{11} \ 0) \end{aligned}$$

$z_1 \in \mathbb{R}^{n_1}$, $z_2 \in \mathbb{R}^{n_2}$, y el par (A_{11}, C_{11}) es completamente observable. En este caso un observador parcial para z_1 puede ser diseñado de tal manera que dada una matriz G_{11} , $(A_{11} - G_{11}C_{11})$ es Hurwitz. Aplicando la transformación inversa, el observador propuesto es.

$$\dot{\zeta}(t) = f(\zeta(t), u(t)) - G_1(C_1\zeta(t) - y_1(t)),$$

3.2. Diseño de un observador ADCI para sistemas continuos con mediciones continuas y discretas 31

donde

$$G_1 = T^{-1} \begin{pmatrix} G_{11} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Entonces el observador con actualización discreta de la condición inicial (ADCI) que incorpora la retroalimentación del error de seguimiento continuo es

$$\begin{aligned} \dot{\zeta}(t) &= f(\zeta(t), u(t)) - G_1 (C_1 \zeta(t) - y_1(t)) & \forall t \neq k\delta & \quad (3.8a) \\ \zeta(k\delta^+) &= \zeta(k\delta) + G_2 (C\zeta(k\delta) - y(k\delta)), & t = k\delta, \quad k = 1, 2, 3, \dots & \quad (3.8b) \end{aligned}$$

donde

$$y(k\delta) = \begin{pmatrix} y_1(k\delta) \\ y_2(k\delta) \end{pmatrix}$$

Los observadores (3.2) y (3.8) pueden ser considerados como observadores híbridos debido a que incorporan dinámicas continuas y eventos discretos, los cuales modifican la parte continua (ver Figura 3.1).

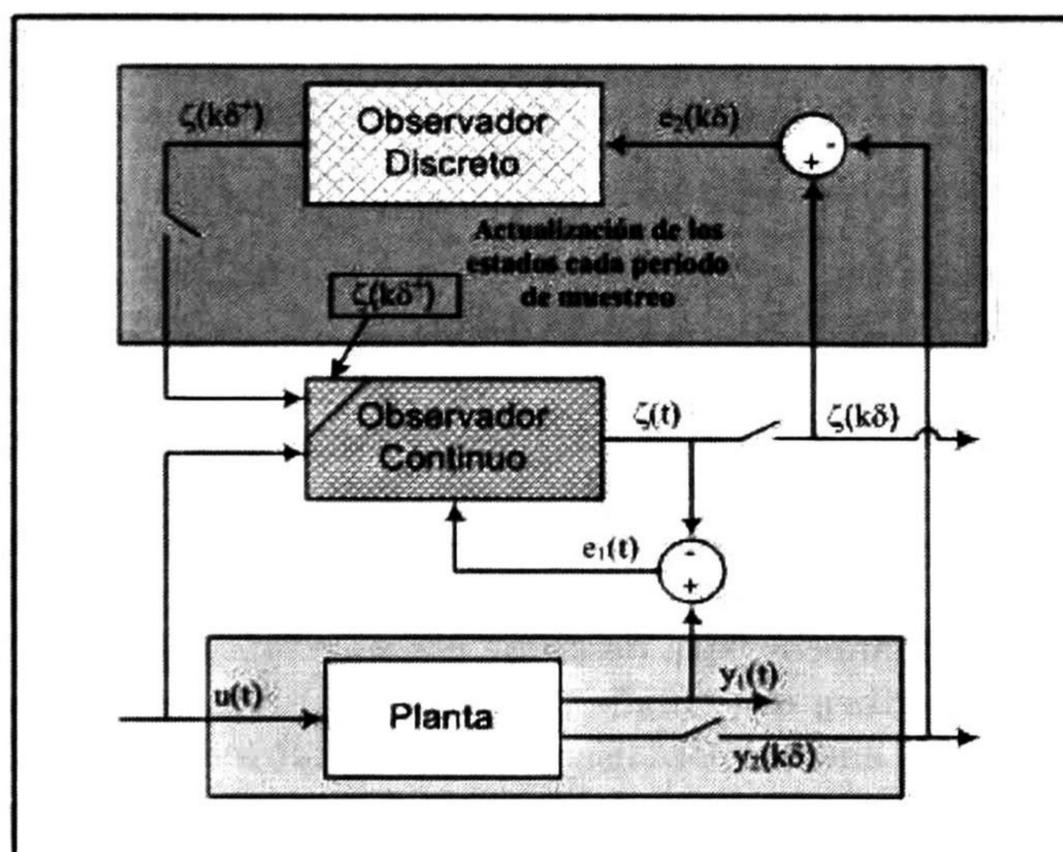


Figura 3.1: Observador continuo ADCI para sistemas continuos con mediciones continuas y discretas.

3.3. Caso de estudio: digestor anaeróbico

La concentración y actividad de las poblaciones humanas están en constante crecimiento a nivel mundial. Éstas tienen como consecuencia la producción de una importante cantidad de desechos líquidos, sólidos y gaseosos, que son capaces, de no existir tratamiento, de alterar su entorno poniendo en peligro la permanencia del hombre. El agua, necesaria para toda forma de vida, es particularmente sensible a la contaminación en la medida en que todos los efluentes, tratados o no, se reúnen tarde o temprano en los ríos y océanos. En los últimos años, las leyes ambientales se han endurecido y se ha hecho obligatorio el tratamiento de las aguas residuales de hogares e industrias [2], [13]. Debido a esto se reavivó el interés por la investigación y desarrollo de tratamientos eficientes y confiables. Es así como los procesos de control de tratamiento de aguas residuales han recibido una gran importancia; especialmente los procesos anaeróbicos están siendo ampliamente considerados como una alternativa para el tratamiento de aguas residuales debido a su alta capacidad para degradar sustratos difíciles y concentrados (residuos de plantas, desechos animales, aguas residuales de industrias alimenticias), además que producen menores cantidades de materia orgánica que los procesos aerobios y requieren menor energía (en algunos casos ésta puede incluso ser producida usando la combustión del metano [5], [20]). A pesar de estas ventajas, las plantas de tratamiento anaeróbico aún son muy raras a escala industrial, probablemente porque se sabe que se vuelven fácilmente inestables bajo algunas circunstancias, tales como variaciones en las condiciones de operación del proceso. Sin embargo, esta desventaja puede ser superada llevando a cabo un procedimiento de monitoreo que permita la actuación estable del tratamiento de aguas residuales en línea por medio de un control a lazo cerrado. Para lograr el diseño de este control, frecuentemente son usados observadores de estados, ya que debido a razones económicas la instrumentación es usualmente escasa y costosa a escala industrial.

3.3.1. Modelo del digestor anaeróbico

La digestión anaeróbica consiste en una serie de procesos biológicos que toma lugar en ausencia de oxígeno y por medio de la cual la materia orgánica (expresada como la demanda química de oxígeno, DQO) es descompuesta y convertida en biogas, una mezcla principalmente de dióxido de carbono y metano, biomasa microbiana y materia orgánica residual. Existen muchos modelos dinámicos para describir procesos anaeróbicos [1], [6], [7]. Sin embargo, los modelos que describen con detalle todos los procesos responsables de la digestión anaeróbica son generalmente difíciles para usar en los propósitos de control. Es por esta razón que se considera un modelo macroscópico del proceso anaeróbico desarrollado y validado en [5]. Se asume que las poblaciones bacterianas pueden ser divididas en dos principales grupos de características homogéneas, y que la digestión anaeróbica puede ser descrita por dos etapas. En el primer paso (acidogénesis), la bacteria acidogénica (X_1) consume el sustrato orgánico (S_1) y produce dióxido de carbono y ácidos grasos volátiles (S_2). La población de la bacteria metanogénica (X_2) usa, en un segundo paso (metanogénesis), los ácidos grasos

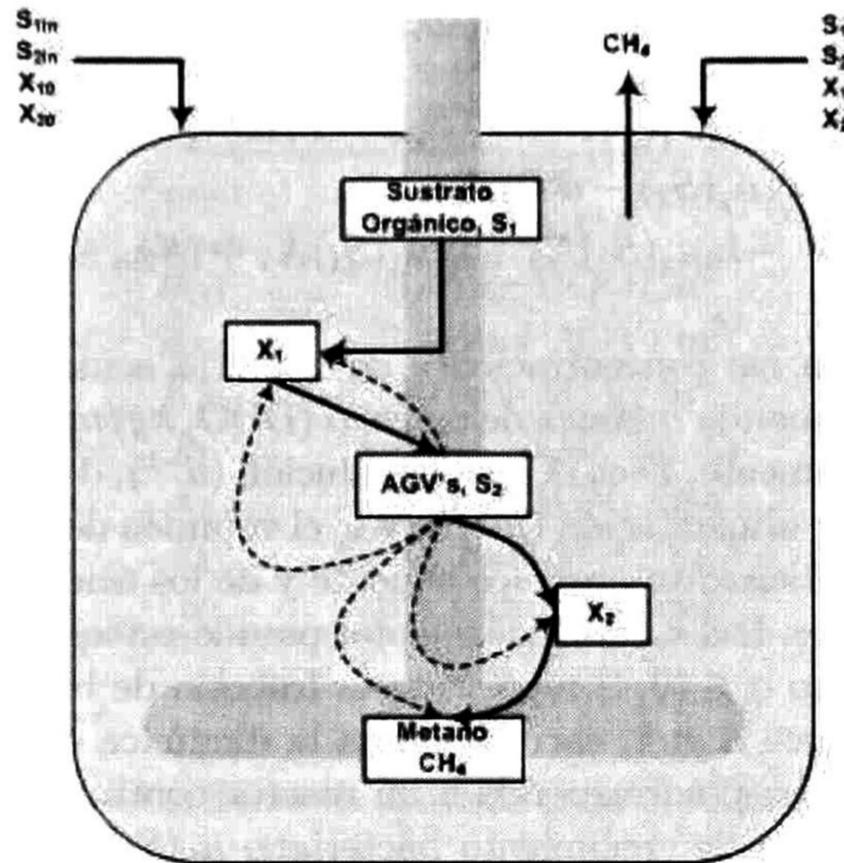
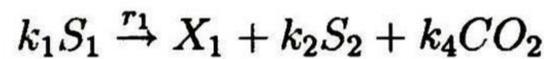


Figura 3.2: Esquematización del proceso de digestión anaerobia.

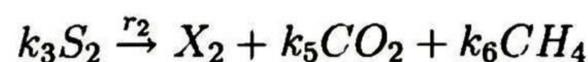
volátiles y el sustrato orgánico para crecer, y producir dióxido de carbono y metano. Si el sistema funciona adecuadamente, los ácidos grasos volátiles son destruidos tan rápidamente como son formados. Si esto no es así, los ácidos grasos volátiles se acumulan, disminuye el pH y se produce la inhibición de la acción de las bacterias metanogénicas (Figura 3.2).

Las bacterias acidogénicas y metanogénicas intervienen en las siguientes reacciones biológicas:

Acidogénesis (con velocidad de reacción $r_1 = \mu_1(S_1)X_1$):



Metanogénesis (con velocidad de reacción $r_2 = \mu_2(S_2)X_2$):



El balance de masa para un reactor continuo de tanque agitado (CSTR) es directamente obtenido

$$\dot{X}_1 = (\mu_1(S_1) - \alpha D)X_1 \quad (3.9a)$$

$$\dot{S}_1 = -k_1\mu_1(S_1)X_1 + (S_{1in} - S_1)D \quad (3.9b)$$

$$\dot{X}_2 = (\mu_2(S_2) - \alpha D)X_2 \quad (3.9c)$$

$$\dot{S}_2 = -k_3\mu_2(S_2)X_2 + k_2\mu_1(S_1)X_1 + (S_{2in} - S_2)D \quad (3.9d)$$

donde X_1 , X_2 , S_1 , S_2 , son las concentraciones de bacteria acidogénica (kg/m^3), bacteria metanogénica (kg/m^3), demanda química de oxígeno (DQO, kg/m^3) y ácidos grasos volátiles (AGV, mol/m^3) respectivamente, D es la tasa de dilución (d^{-1}), definida por la relación $D = Q/V$, donde Q es el flujo de alimentación (m^3/d) y V el volumen del digestor (m^3), S_{1in} y S_{2in} son las concentraciones del sustrato orgánico efluente y de los ácidos grasos volátiles (AGV) de entrada, respectivamente. Las k_i s son coeficientes pseudo-estequiométricos asociadas a las bioreacciones. El parámetro $\alpha \in (0, 1]$ representa la fracción de biomasa que no es retenida en el digestor, si se establece $\alpha = 1$, corresponde a la dinámica de un reactor de lecho fijo ideal, mientras que para $\alpha = 0$ corresponde a un reactor continuo de tanque agitado ideal (CSTR) [12]. Las velocidades de crecimiento bacteriano $\mu_1(S_1)$ y $\mu_2(S_2)$, son funciones no lineales dadas por las cinéticas de Monod y Haldane respectivamente [11],

$$\mu_1(S_1) = \mu_{\max 1} \frac{S_1}{S_1 + K_{S1}}, \quad (3.10)$$

$$\mu_2(S_2) = \mu_{\max 2} \frac{S_2}{S_2 + K_{S2} + \left(\frac{S_2}{K_{I2}}\right)^2}, \quad (3.11)$$

donde $\mu_{1\max}$, K_{S1} , $\mu_{2\max}$, K_{S2} y K_{I2} son la velocidad máxima de crecimiento bacteriano y la constante de saturación media asociada con el sustrato S_1 , la velocidad máxima de crecimiento bacteriano en ausencia de inhibición, y las constantes de saturación e inhibición asociadas al sustrato S_2 , respectivamente. Los valores de los parámetros y las concentraciones de entrada usadas en las simulaciones están listadas en las Tablas 3.1 y 3.2.

Ahora se analizan los valores en estado estable de las variables del modelo (3.9), a fin de ser usados más tarde en la linealización del mismo. En [12] se presenta un extenso análisis de los estados estables del sistema. Nótese que el sistema tiene una estructura en cascada, lo cual hace su análisis y uso más sencillo.

Estado estacionario

Condición de operación inestable

En este caso el cultivo de bacterias dentro del digestor se mantiene inactivo o muerto, lo cual implica que $X_1 = 0$ y $X_2 = 0$ para toda $t \geq 0$. Bajo estas condiciones el estado estable alcanzado para el proceso de la digestión anaeróbica (3.9) es dado por la concentración de entrada (i.e. $S_1^* = S_{1in}$ y $S_2^* = S_{2in}$, ver Tabla 3.3). Esto significa que los agentes contaminantes dentro del agua residual no han sido removidos por el digestor. Como consecuencia, esta condición de operación es indeseable y debe ser evitada a toda costa [20].

Tabla 3.1: Parámetros del digestor anaeróbico.

Parámetro	Valor
$\mu_{\text{máx}1}$	$1,2 \text{ d}^{-1}$
$\mu_{\text{máx}2}$	$0,69 \text{ d}^{-1}$
K_{S1}	$4,95 \text{ kg DQO/m}^3$
K_{S2}	$9,28 \text{ mol AGV/m}^3$
K_{I2}	20 mol AGV/m^3
k_1	$6.6 \text{ kg DQO/kg } X_1$
k_2	$7.8 \text{ mol AGV/kg } X_1$
k_3	$611.2 \text{ mol AGV/kg } X_2$
α	$0.5 \text{ (adimensional)}$

Tabla 3.2: Concentraciones de entrada para el digestor anaeróbico.

Sustrato	Valor
S_{1in}	20 kg DQO/m^3
S_{2in}	100 mol AGV/m^3

Condición normal de operación

Bajo esta condición la concentración de la biomasa permanece activa y la estabilidad de los lodos se conserva (i.e. $X_1, X_2 > 0$ para toda $t \geq 0$). Esto físicamente significa que parte de los agentes contaminantes que entran al digestor son consumidos por el cultivo bacteriano (i.e. $(S_{1in} - S_1) > 0$ y $(S_{2in} - S_2) > 0$). Los puntos de equilibrio para el modelo del digestor anaeróbico (3.9) son mostrados en la Tabla 3.3, donde se puede ver que sólo el punto 4 tiene significado físico y es un estado deseado [20].

Tabla 3.3: Puntos de equilibrio del digestor anaeróbico.

	X_1^*	X_2^*	S_1^*	S_2^*
$P1$	0	0	S_{1in}	S_{2in}
$P2$	0	$\frac{(S_{2in} - S_2^*)}{\alpha k_3}$	S_{1in}	ver ecuación 3.16
$P3$	$\frac{(S_{1in} - S_1^*)}{\alpha k_1}$	0	$K_{S1} \frac{\alpha D^*}{\mu_{\text{máx}1} - \alpha D^*}$	$S_2^* + \frac{k_2(S_{1in} - S_1^*)}{k_1}$
$P4$	$\frac{(S_{1in} - S_1^*)}{\alpha k_1}$	$\frac{(S_{2in} - S_2^*) + \alpha k_2 X_1^*}{\alpha k_3}$	$K_{S1} \frac{\alpha D^*}{\mu_{\text{máx}1} - \alpha D^*}$	ver ecuación 3.16

A continuación se muestra el cálculo del punto de equilibrio 4, que es utilizado en el diseño del observador.

A partir de las ecuaciones (3.9a) y (3.9c) en estado estable y sin considerar el estado estable indeseable $X_1, X_2 = 0$ se obtiene

$$\mu_1(S_1) = \alpha D, \tag{3.12}$$

$$\mu_2(S_2) = \alpha D. \tag{3.13}$$

Si $\mu_{\text{máx}1} > \alpha D$, implica de la ecuación (3.10) que S_1^* , el valor en estado estable de S_1 , es igual a

$$S_1^* = K_{S1} \frac{\alpha D}{\mu_{\text{máx}1} - \alpha D}. \tag{3.14}$$

Los posibles estados estables para S_2 son soluciones de la ecuación (3.13). La función $\mu_2(S_2)$ comienza creciendo a partir de cero, llega a un máximo, y decrece a cero. Entonces, la ecuación (3.13) admite dos soluciones (que pueden reducirse a una) sólo si

$$\alpha D \leq \text{máx} [\mu_2(S_2)].$$

Esto implica, con la expresión (3.11) de μ_2 , que

$$D \leq \frac{\mu_{\text{máx}2}}{\alpha} \frac{\sqrt{K_{I2}}}{\sqrt{K_{I2}} + 2\sqrt{K_{S2}}}.$$

Entonces, los posibles estados estables para S_2 son soluciones de la siguiente ecuación, deducida de las ecuaciones (3.11) y (3.13)

$$\frac{S_2^2}{K_{I2}^2} + \left(1 - \frac{\mu_{\text{máx}2}}{\alpha D}\right) S_2 + K_{S2} = 0. \tag{3.15}$$

Tomando la máxima solución para el estado estable de S_2

$$S_2^* = -\frac{K_{I2}^2}{2} \left\{ \left(1 - \frac{\mu_{\text{máx}2}}{\alpha D^*}\right) + \sqrt{\left(1 - \frac{\mu_{\text{máx}2}}{\alpha D^*}\right)^2 - 4 \left(\frac{K_{S2}}{K_{I2}^2}\right)} \right\} \tag{3.16}$$

Usando la ecuación (3.9b) y (3.12), se obtiene

$$X_1^* = \frac{(S_{1in} - S_1^*)}{\alpha k_1}. \tag{3.17}$$

De las ecuaciones (3.9d), (3.12), (3.13) y (3.17), se tiene el valor para X_2

$$X_2^* = \frac{(S_{2in} - S_2^* + \alpha k_2 X_1^*)}{\alpha k_3}.$$

3.3.2. Diseño del observador ADCI

Si consideramos que la concentración de AGV (S_2) es una medición continua, mientras la concentración de DQO (S_1) puede sólo ser adquirida periódicamente [20], el observador desarrollado en la sección previa puede ser aplicado a la dinámica del sistema (3.9) escribiéndolo en la forma

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} \mu_1(S_1)X_1 \\ -k_1\mu_1(S_1)X_1 \\ \mu_2(S_2)X_2 \\ -k_3\mu_2(S_2)X_2 + k_2\mu_1(S_1)X_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\alpha X_1 \\ S_{1in} - S_1 \\ -\alpha X_2 \\ S_{2in} - S_2 \end{pmatrix} u(t) \quad (3.18)$$

$$\begin{aligned} y_1(t) &= (0 \ 0 \ 0 \ 1) x(t) \\ y_2(k\delta) &= (0 \ 1 \ 0 \ 0) x(k\delta) \end{aligned}$$

donde

$$x(t) = \begin{pmatrix} X_1 \\ S_1 \\ X_2 \\ S_2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

y $u(t) = D(t)$. El sistema (3.18) puede ser representado como

$$\dot{x}(t) = f(x) + g(x)u(t). \quad (3.19)$$

Para calcular el observador con actualización de la condición inicial (3.2) es necesario linealizar el sistema (3.19) alrededor de una vecindad del punto de equilibrio 4 (ver Tabla 3.3), [12], [20], entonces el sistema toma la forma

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

donde

$$A = \left[\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial x} u \right]_{x=0, u=0}, \quad B = g(x)|_{x=0}$$

son la aproximación matricial lineal alrededor del punto de equilibrio de interés (ver [12] para el detalle del análisis de estado estable). En este caso, la matriz de observabilidad para

el par (A, C_1) , tiene rango 4, i.e. usando S_2 y S_1 es posible estimar los cuatro estados del sistema.

Considerando un periodo de muestreo $\delta = 1$ día y los parámetros listados en las Tablas 3.1 y 3.2, es fácil verificar que A , B y A_d toman los valores

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0,6559 & 0 & 0 \\ -2,3318 & -5,0356 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,0059 \\ 2,7558 & 5,1161 & -215,9386 & -4,3395 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} -2,7173 \\ 17,9345 \\ -0,1819 \\ 90,0000 \end{pmatrix},$$

$$A_d = \begin{pmatrix} 0,7756 & 0,1067 & 0 & 0 \\ -0,3795 & -0,0438 & 0 & 0 \\ 0,0008 & 0,0013 & 0,7878 & 0,0011 \\ 0,0347 & 0,0047 & -41,3525 & -0,0432 \end{pmatrix}$$

El observador (3.2) se diseña a fin de cumplir con el Teorema 3.1, además se agrega el término de retroalimentación del error de seguimiento continuo, para aumentar la velocidad de convergencia de los estados observados a partir de la salida continua, como se muestra en el Corolario 3.1, las ganancias son calculadas usando técnicas LQR, obteniendo

$$G_1 = \begin{pmatrix} 0,0001 \\ 0,0097 \\ -0,9941 \\ 16,8560 \end{pmatrix} \quad G_2 = \begin{pmatrix} 0,0009 & 0,4119 \\ -0,0004 & -0,2022 \\ 0 & 0,0005 \\ 0 & -0,0004 \end{pmatrix}$$

A fin de ilustrar el desempeño del observador (3.8), se realizan algunas simulaciones; las condiciones iniciales y las concentraciones de entrada son enlistadas en las Tablas 3.2 y 3.4, mientras que la velocidad de dilución fue considerada como una señal senoidal variante en el tiempo alrededor del valor nominal ($u(t) = 1 + \text{sen}(t)$). Para verificar si la incorporación de la medición discreta al observador continuo reduce el tiempo de convergencia, el observador ADCI (3.2) fue comparado con un observador continuo idéntico a (3.2a) sin el uso de (3.2b) (lo que equivale, para este observador, a que la ganancia G_2 fue tomada como cero).

La Figura 3.3 muestra el comportamiento dinámico del observador ADCI, la actualización discreta de las condiciones iniciales claramente es visible en la figura, donde a tiempo $t = 1$ día hay un salto en la estimación de la biomasa acidogénica. Como se puede ver, los estados del observador convergen en aproximadamente tres días.

En contraste, el observador continuo, (Figura 3.4) converge en aproximadamente doce días, i.e. cuatro veces más lento que el observador ADCI. Comparando ambos observadores es fácil ver que el observador ADCI obtiene una velocidad de convergencia más rápida.

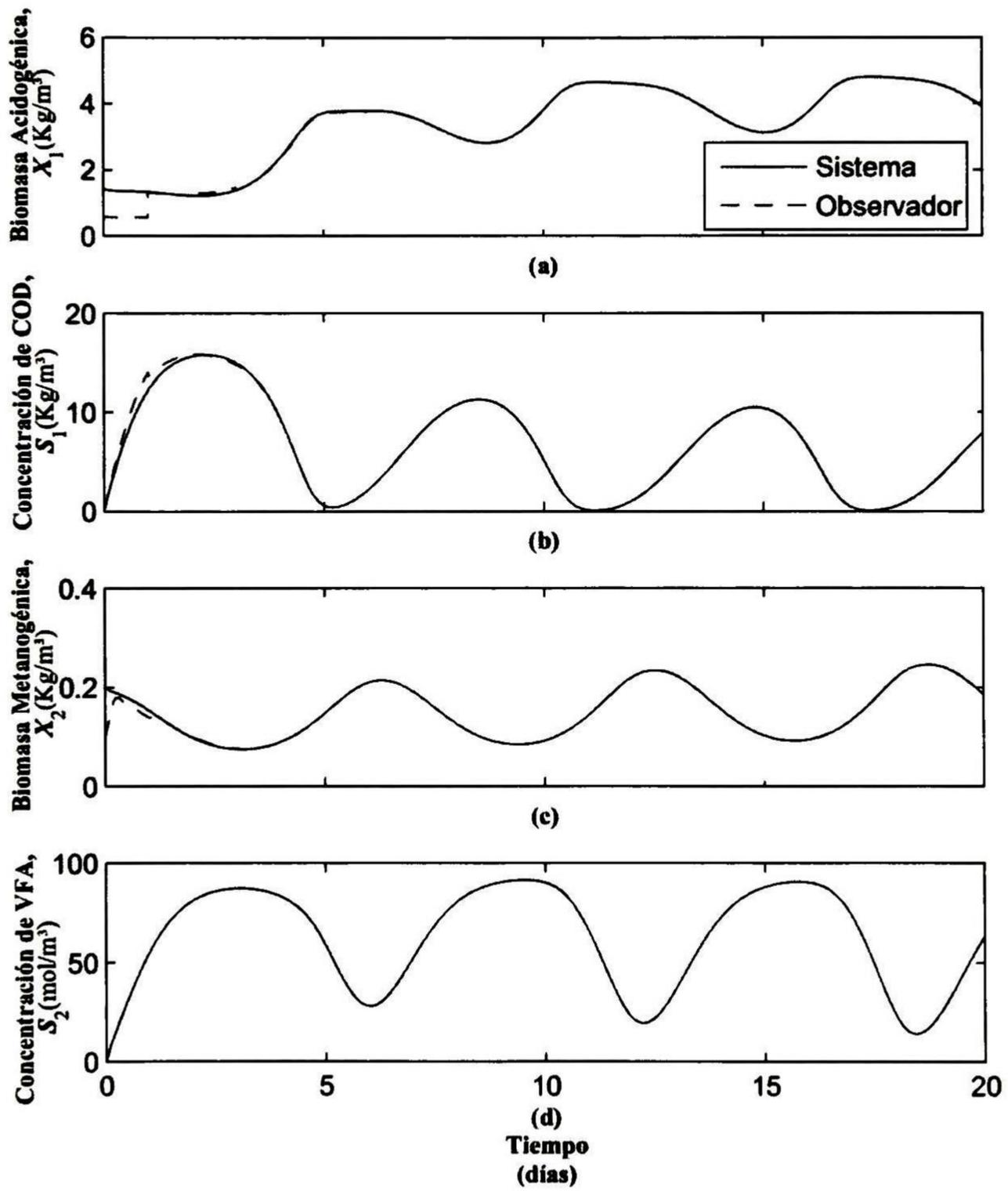


Figura 3.3: Simulación del observador continuo ADCL.

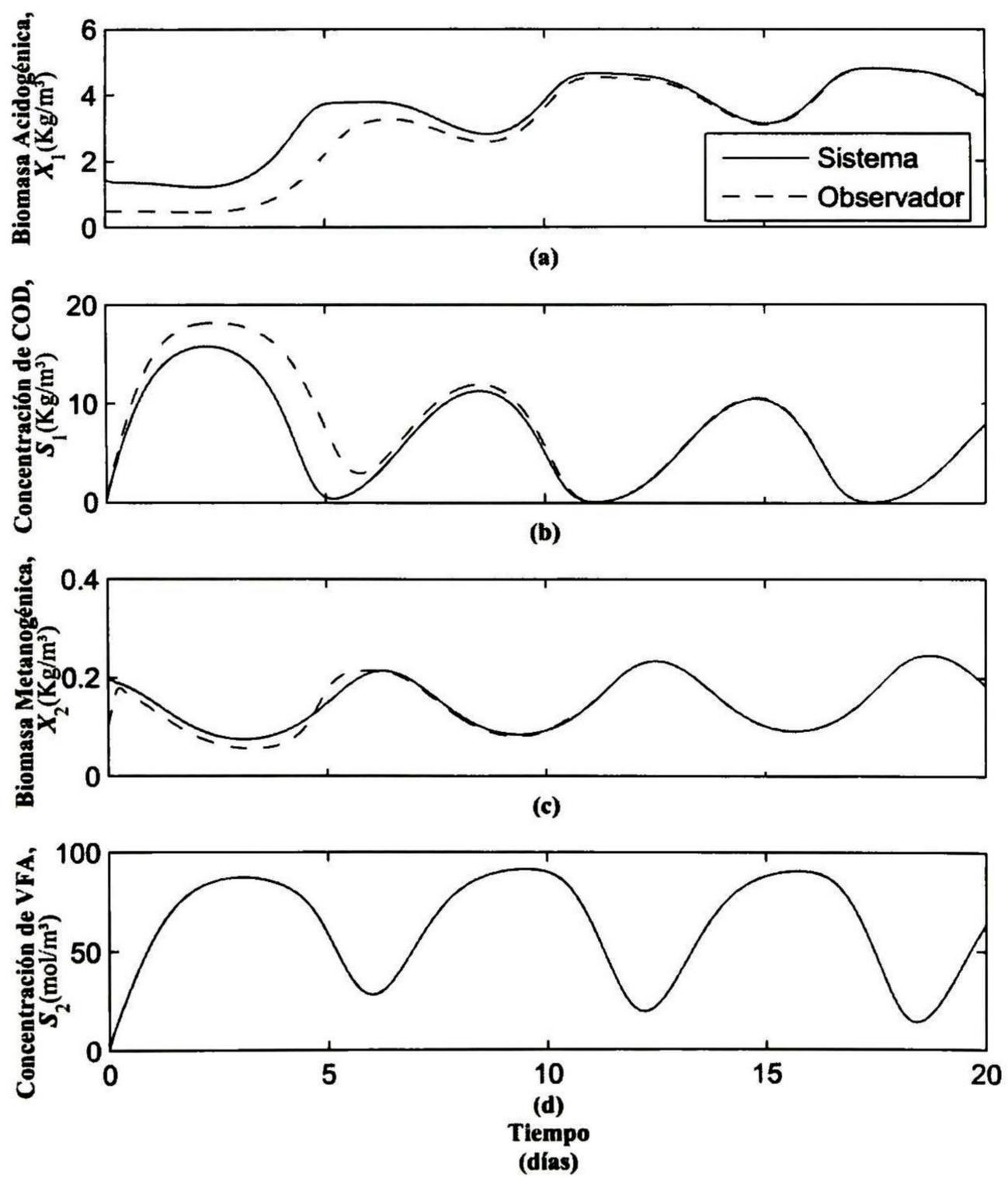


Figura 3.4: Simulación del observador continuo.

Tabla 3.4: Condiciones iniciales utilizadas en las simulación del observador continuo ADCI.

Variable de estado	$X_1(0)$ kg/m ³	$S_1(0)$ kg/m ³	$X_2(0)$ kg/m ³	$S_2(0)$ mol/m ³
Planta	1,433	0,1	0,2	0,4
Observador	0,5	0,3	0,1	1

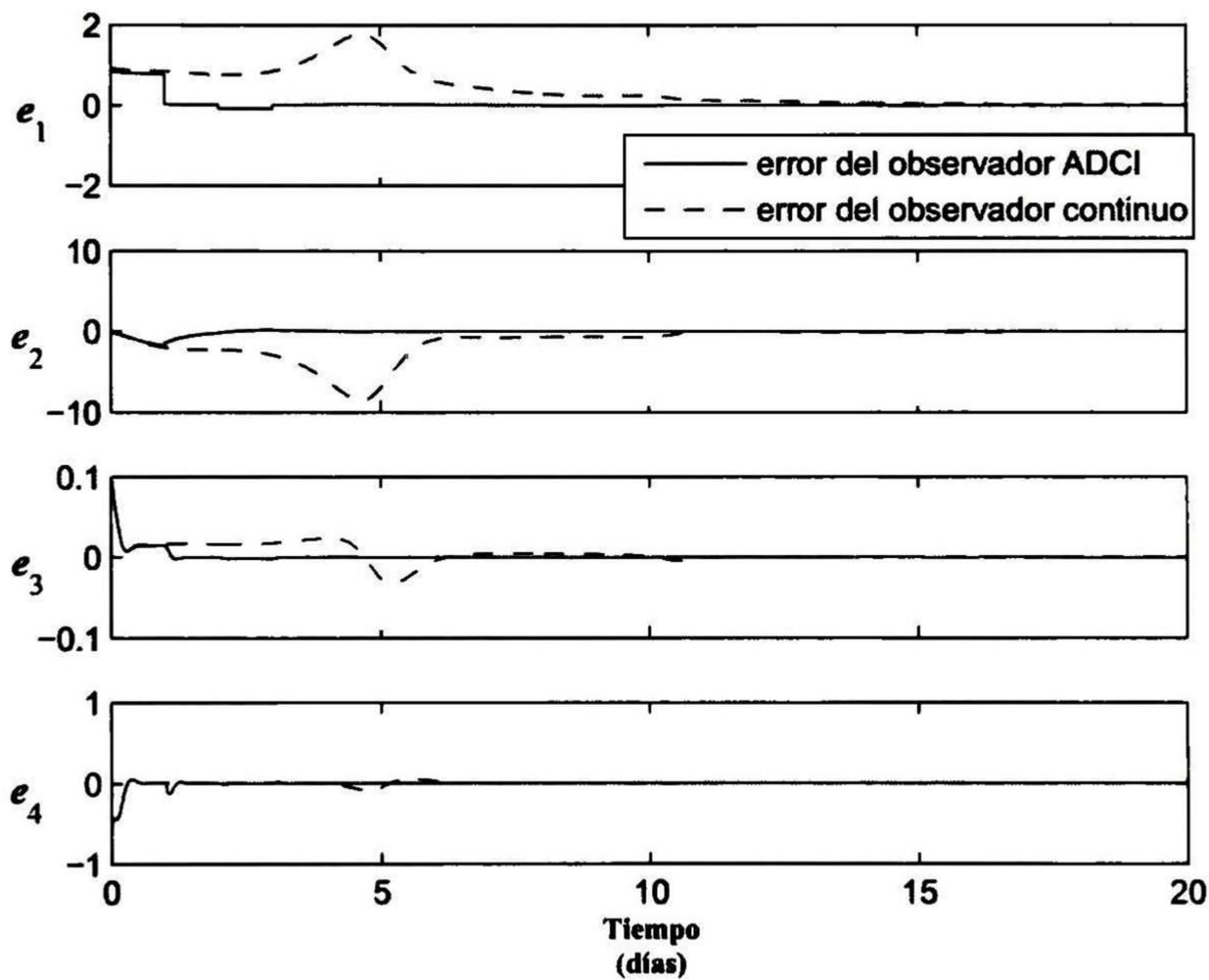


Figura 3.5: Comparación entre los errores del observador continuo y del observador ADCI.

En la Figura 3.5 se comparan los errores de seguimiento del observador continuo ADCI y el observador continuo; se puede ver que las actualizaciones de las condiciones iniciales en el integrador del observador continuo ADCI, aumentan la velocidad de convergencia de dicho observador.

3.3.3. Diseño del controlador por linealización entrada-salida

Considérese el modelo del digestor anaeróbico (3.9), donde las salidas son

$$\begin{aligned} y_1 &= h_1(x) = S_2 \\ y_2 &= h_2(x) = S_1 \end{aligned}$$

$$x(t) = [X_1 \quad S_1 \quad X_2 \quad S_2]^T \quad u(t) = D(t).$$

Siguiendo el procedimiento mostrado en [15], calculando las derivadas de las salidas y_1 y y_2 , se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= -k_3\mu_2(S_2)X_2 + k_2\mu_1(S_1)X_1 + (S_{2in} - S_2)u(t) \\ \dot{y}_2 &= -k_1\mu_1(S_1)X_1 + (S_{1in} - S_1)u(t). \end{aligned}$$

El sistema tiene grado relativo 1 tanto para la salida y_1 como para la salida y_2 .

Considerando por el momento que todos los estados del sistema se tienen disponibles (esta suposición se eliminará más tarde), con respecto a la salida y_1 , el sistema es linealizable entrada-salida, ya que la ley de control

$$u_1(t) = \frac{k_3\mu_2(S_2)X_2 - \mu_1(S_1)k_2X_1 + v_1}{(S_{2in} - S_2)}, \quad (3.20)$$

reduce el mapeo entrada-salida a

$$\dot{y}_1 = v_1.$$

Con respecto a la salida y_2 , el sistema también es linealizable entrada-salida utilizando la ley de control

$$u_2(t) = \frac{k_1\mu_1(S_1)X_1 + v_2}{(S_{1in} - S_1)}, \quad (3.21)$$

que reduce el mapeo entrada-salida a

$$\dot{y}_2 = v_2.$$

Tomando v_1 y v_2 como

$$\begin{aligned} v_1 &= -K_1(S_2 - S_{2ref}), \\ v_2 &= -K_2(S_1 - S_{1ref}), \end{aligned}$$

para que las salidas y_1 y y_2 alcancen las referencias deseadas S_{2ref} y S_{1ref} , respectivamente.

Como se puede ver de las anteriores leyes de control, para alcanzar las referencias deseadas, es necesario tener disponibles todos los estados del sistema. Si éste no es el caso, entonces se puede utilizar la estructura del observador ADCI (3.2) presentado anteriormente, es decir, se utilizan los estados observados para aplicar las leyes de control propuestas.

Tomando ventaja del observador (3.2), ya aplicado al modelo del digestor anaeróbico, se simula el sistema (3.9) con las entradas de control (3.20) y (3.21). En la Tabla 3.5 se enlistan los parámetros utilizados en la simulaciones.

Tabla 3.5: Parámetros para simular las leyes de control, utilizando los estados del observador continuo ADCI.

Parámetro	Valor
K_1	12 (adimensional)
K_2	2 (adimensional)
S_{2ref}	10 kgAGV/ m ³
S_{1ref}	2,5 kgDQO/ m ³

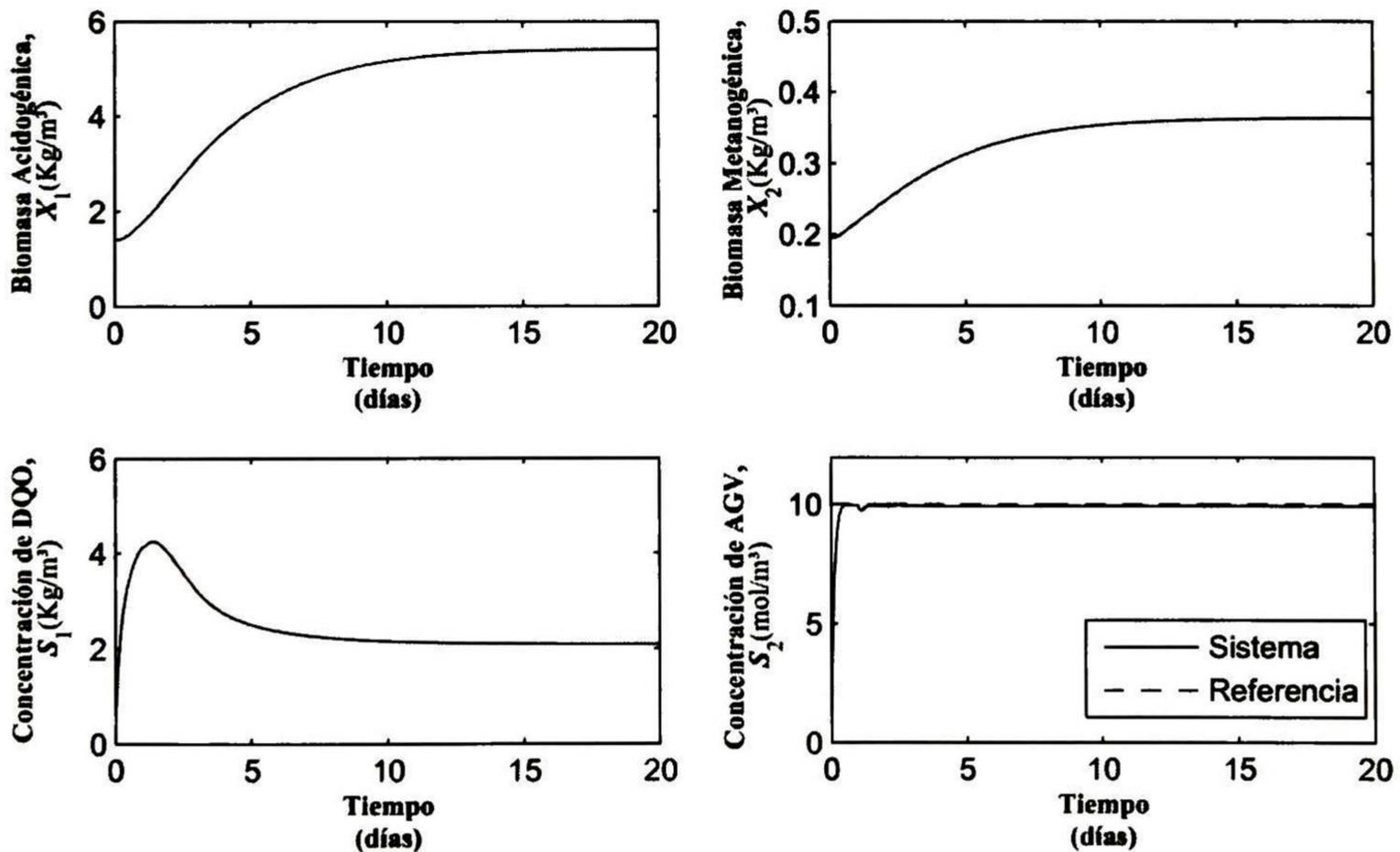


Figura 3.6: Sistema con control linealizante para llevar la salida y_2 a la referencia deseada.

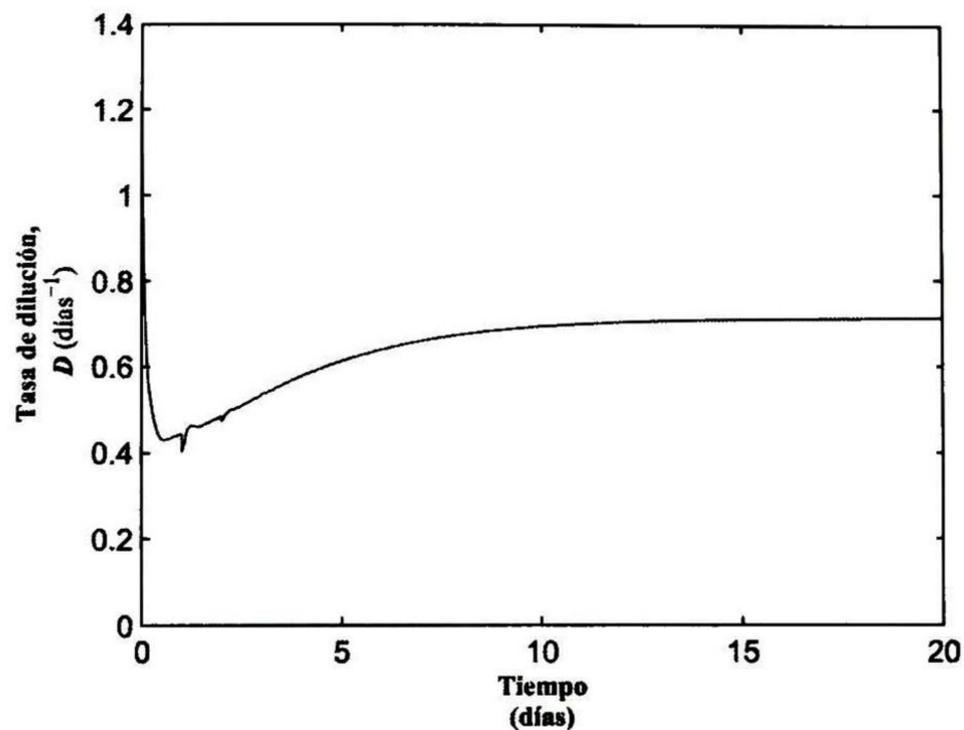


Figura 3.7: Entrada de control para llevar la salida y_2 a la referencia deseada.

La Figura 3.6 muestra el sistema cuando se le aplica el control linealizante entrada-salida u_1 , se ve que la salida y_1 alcanza la referencia que es de 10 kg/m^3 . En la Figura 3.7 se presenta la señal de control (tasa de dilución) que es necesaria para alcanzar dicha referencia.

En la Figura 3.8 se ve la dinámica del sistema cuando se le aplica el control linealizante entrada-salida u_2 , se observa que la salida y_2 alcanza la referencia preestablecida de 2.5 kg/m^3 . La Figura 3.9 muestra la señal de control (tasa de dilución) que fue necesaria para alcanzar dicha referencia.

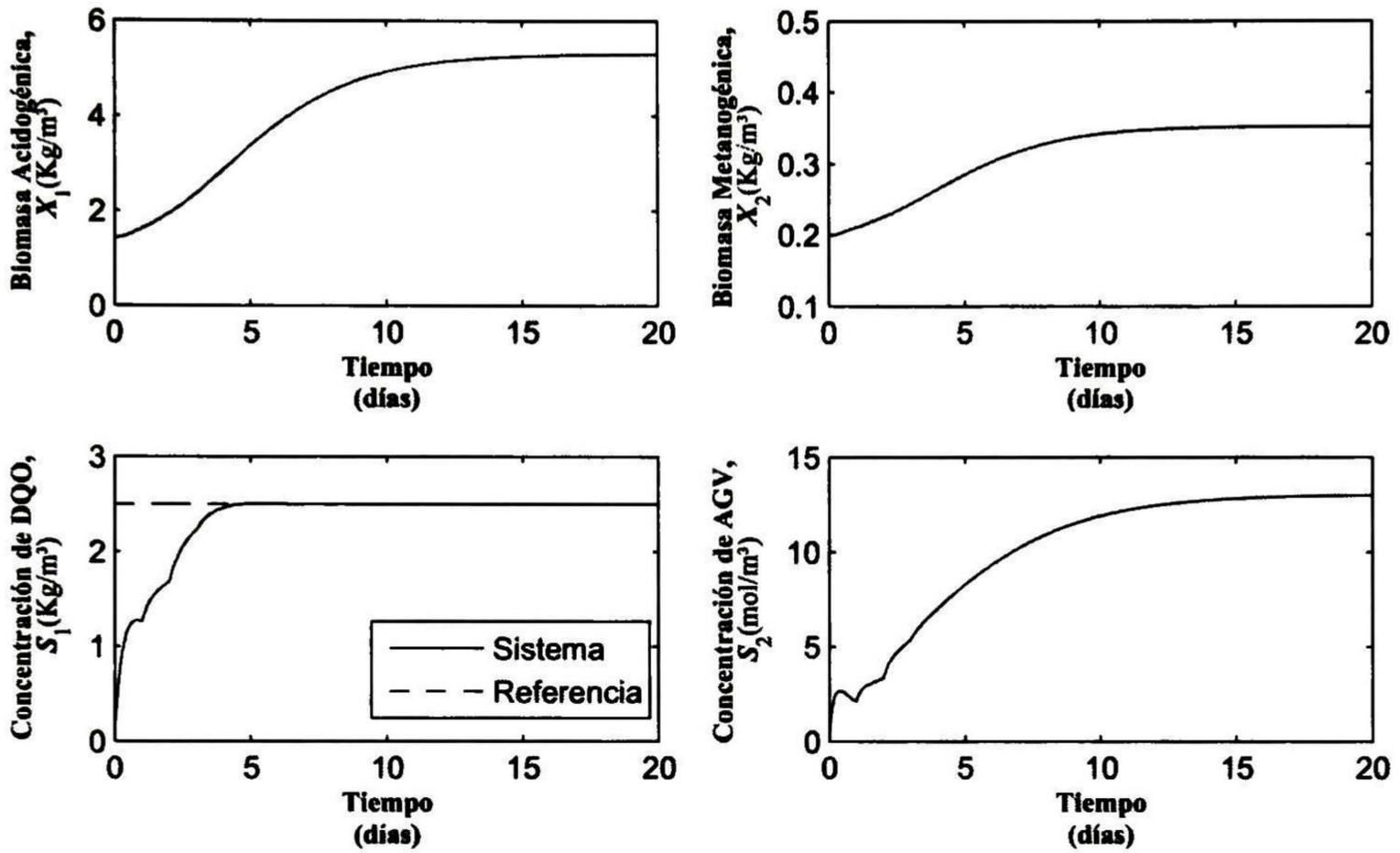


Figura 3.8: Sistema con control linealizante para llevar la salida y_1 a la referencia deseada.

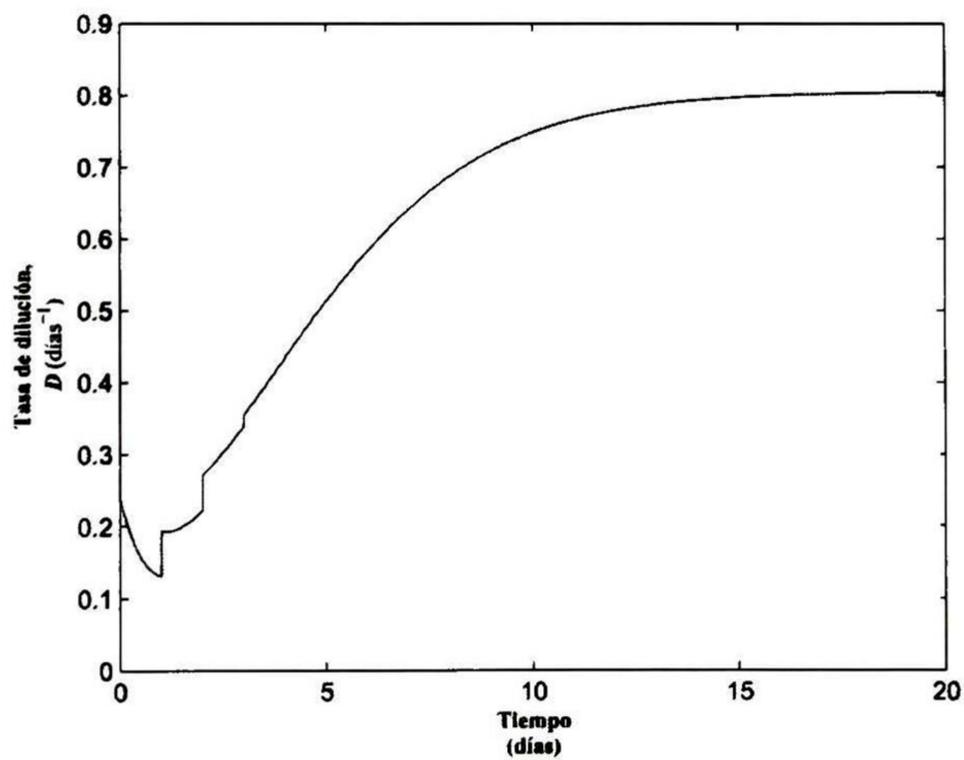


Figura 3.9: Entrada de control para llevar la salida y_1 a la referencia deseada.

3.4. Conclusiones

En el presente capítulo se diseñó un observador que actualiza los estados utilizando mediciones continuas y discretas. A pesar de que éste es un observador local, debido a que las ganancias fueron calculadas usando la aproximación lineal del sistema no lineal original, su aplicación a un modelo de digestión anaeróbica presenta un excelente desempeño y estabilidad, obteniendo una mejora en la velocidad de convergencia en comparación con un observador que sólo usa la información continua. La velocidad de convergencia fue aumentada por la actualización de la condición inicial del observador cada periodo de tiempo en que se dispone de la medición discreta. Si comparamos el tiempo de residencia del reactor de digestión anaeróbica, el cual es aproximadamente 30 días, con el tiempo que tardó en converger el observador, se puede concluir que el desempeño del observador es bueno. Aprovechando los estados observados se diseñó un controlador linealizante entrada-salida, que permitió llevar las salidas del digestor anaeróbico a una referencia deseada.

Capítulo 4

Observador difuso ADCI para sistemas continuos con mediciones continuas y discretas

A pesar del buen desempeño que presentó el observador continuo ADCI diseñado en la sección 3.2, éste es un observador local, ya que las ganancias fueron calculadas a partir de la linealización del sistema original. Para lograr construir un observador que sea global, se propone diseñar un observador difuso con actualización discreta de la condición inicial, el cual es global en la región donde es válida la representación difusa del sistema.

4.1. Planteamiento del problema

Considérese el sistema dinámico

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \quad \forall t \in [0, \infty) \quad (4.1a)$$

$$y_1(t) = C_1 x(t) \quad \forall t \in [0, \infty) \quad (4.1b)$$

$$y_2(k\delta) = C_2 x(k\delta) \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (4.1c)$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$ y $y_1 \in \mathbb{R}^{q_1}$, $y_2 \in \mathbb{R}^{q_2}$ son los vectores de estados, entradas y salidas del sistema dinámico, respectivamente. Las salidas están divididas en continuas (y_1), y discretas (y_2) con periodo de muestreo δ .

El sistema 4.1 puede ser transformado a su representación difusa

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r m_i(z) A_i x(t) + \sum_{i=1}^r m_i(z) B_i u(t) \quad (4.2a)$$

$$y_1(t) = C_1 x(t) \quad (4.2b)$$

$$y_2(k\delta) = C_2 x(k\delta) \quad (4.2c)$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estados, $u \in \mathbb{R}^m$ es el vector de entradas, $y_1 \in \mathbb{R}^{q_1}$ es el vector de salidas continuas, mientras $y_2 \in \mathbb{R}^{q_2}$ es el vector de salidas discretas, el cual es medido cada periodo de muestreo δ , m_i , $i = 1, \dots, r$ son las funciones de membresía y z son las variables premisas.

En la siguiente sección se presenta el diseño de un observador difuso para el sistema 4.2, el cual restablece su condición inicial en cada periodo de muestreo y actualiza sus estados constantemente a partir de las mediciones continuas.

4.2. Diseño del observador difuso ADCI para sistemas continuos con mediciones continuas y discretas

Aprovechando las mediciones continuas y discretas del sistema (4.2), se diseña un observador difuso con actualización discreta de la condición inicial (ADCI), análogo al que se construyó en la sección 3.2. El siguiente teorema establece este resultado.

Teorema 4.1 *Considérese el sistema difuso*

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \sum_{i=1}^r m_i(z) A_i x(t) + \sum_{i=1}^r m_i(z) B_i u(t) \\ y_1(t) &= C_1 x(t) \\ y_2(k\delta) &= C_2 x(k\delta) \end{aligned}$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estados, $u \in \mathbb{R}^m$ es el vector de entradas, $y_1 \in \mathbb{R}^{q_1}$ es el vector de salidas continuas, mientras $y_2 \in \mathbb{R}^{q_2}$ es el vector de salidas discretas el cual es medido cada periodo de muestreo δ ; m_i , $i = 1, \dots, r$ son las funciones de membresía y z son las variables premisas.

Dada la existencia de las matrices $Q > 0$ y R y la constante γ , las cuales resuelven las desigualdades matriciales lineales

$$0 \leq \begin{pmatrix} Q - (\beta + \gamma\sigma)I & Q + RC \\ Q + C^T R^T & Q \end{pmatrix} \quad (4.2d)$$

$$\gamma\sigma I < Q \quad (4.2e)$$

$$A_i^T Q + Q A_i \leq \gamma [I + \sigma (A_i^T + A_i)], \quad i = 1, \dots, r \quad (4.2f)$$

donde

$$\sigma \geq \frac{\exp(\alpha\delta) - 1}{\alpha}, \quad (4.2g)$$

$$\alpha \geq \sum_{i=1}^r |\lambda_{\max}(A_i^T + A_i)| \quad (4.2h)$$

$\beta > 0$ es una constante arbitraria, entonces definiendo la matriz $G_d = Q^{-1}R$, el observador está dado por

$$\dot{\xi}(t) = \sum_{i=1}^r m_i(z) A_i \xi(t) + \sum_{i=1}^r m_i(z) B_i u(t), \quad t \neq k\delta, \quad (4.2ia)$$

$$\xi(k^+\delta) = \xi(k\delta) - G_d [y(k\delta) - C\xi(k\delta)], \quad (4.2ib)$$

donde

$$y(k\delta) = \begin{pmatrix} y_1(k\delta) \\ y_2(k\delta) \end{pmatrix}$$

Este observador actualiza el vector de estados $\xi(k^+\delta)$ cada periodo de muestreo, usa constantemente las mediciones continuas y garantiza que $\lim_{t \rightarrow \infty} [x(t) - \xi(t)] = 0$.

Prueba. Debido a que $x(k^+\delta) = x(k\delta)$, el error de observación, $e = x - \xi$, tiene la dinámica

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= \sum_{i=1}^r m_i(z) A_i e(t), \quad t \neq k\delta, \\ e(k^+\delta) &= (I + G_d C) e(k\delta). \end{aligned} \quad (4.10)$$

Dada la matriz $P > 0$, definiendo la función de Lyapunov

$$V(e) = e^T P e,$$

se tiene que

$$\begin{aligned} \int_{k^+\delta}^t \frac{d}{dt} [V(e(t))] dt &= V(e(t)) - V(e(k^+\delta)) \\ &= \int_{k^+\delta}^t \sum_{i=1}^r \mu_i e^T(\lambda) (P A_i + A_i^T P) e(\lambda) d\lambda. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Considerando ahora que existe una constante γ , que puede ser incluso positiva, tal que

$$P A_i + A_i^T P \leq \gamma I, \quad \forall i = 1, 2, \dots, r \quad (4.12)$$

se calcula

$$V(e(t)) - V(e(k^+\delta)) \leq \gamma I \int_{k^+\delta}^t e^T(t) e(t) dt. \quad (4.13)$$

Considérese en el instante de muestreo

$$V(e(k^+\delta)) - V(e(k\delta)) = e^T(k^+\delta) P e(k^+\delta) - e^T(k\delta) P e(k\delta),$$

entonces con (4.11) se llega a

$$V(e(t)) - V(e(k\delta)) \leq \gamma \int_{k^+\delta}^t e^T(t) e(t) dt + e^T(k^+\delta) P e(k^+\delta) - e^T(k\delta) P e(k\delta).$$

Además, debido a que $\|e(t)\|^2 = e^T(t) e(t)$, entonces

$$\frac{d}{dt} \|e(t)\|^2 = \sum_{i=1}^r \mu_i e^T(\lambda) (A_i + A_i^T) e(\lambda).$$

Definiendo α como en (4.2h) $\left(\alpha \geq \sum_{i=1}^r |\lambda_{\max}(A_i^T + A_i)|\right)$, entonces

$$\frac{d}{dt} \|e(t)\|^2 \leq \alpha \|e(t)\|^2$$

y $\|e(t)\|^2 \leq \|e(k^+\delta)\|^2 \exp(\alpha(t - k^+\delta))$. Entonces la integral en (4.13) satisface la desigualdad

$$\int_{k^+\delta}^t e^T(\lambda) e(\lambda) d\lambda \leq \frac{\exp(\alpha(t - k^+\delta)) - 1}{\alpha} \|e(k^+\delta)\|^2$$

Cuando $t = (k + 1)\delta$ esta desigualdad se vuelve

$$\int_{k^+\delta}^{(k+1)\delta} e^T(\lambda) e(\lambda) d\lambda \leq \sigma \|e(k^+\delta)\|^2$$

donde σ se describe por (4.2g). En este punto, (4.13) puede escribirse como

$$V(e((k + 1)\delta)) - V(e(k\delta)) = e^T(k\delta) \left[(I + G_d C)^T (\gamma \sigma I + P) (I + G_d C) - P \right] e(k\delta).$$

La función de Lyapunov por lo tanto es decreciente en cada periodo de muestreo si, dada una constante positiva β , se satisface que

$$(I + G_d C)^T (\gamma \sigma I + P) (I + G_d C) - P \leq -\beta I. \quad (4.14)$$

garantizando que $\lim_{k \rightarrow \infty} [x(k\delta) - \xi(k\delta)] = 0$. Definiendo $Q = \gamma\sigma I + P > 0$ y $Q > \gamma\sigma I$, la cual es la LMI (4.2e), P es definida positiva. Adicionalmente, (4.14) es equivalente a

$$(I + G_d C)^T Q (I + G_d C) - Q \leq -(\beta + \gamma\sigma) I,$$

lo cual produce la LMI (4.2d) usando el complemento de Schur, donde $R = QG$. Finalmente debido a la hipótesis (4.12), en términos de Q esta desigualdad se vuelve (4.2f).

Por otra parte, es posible mostrar que la solución de la ecuación (4.10) se puede escribir como

$$e(k\delta + \theta) = F(e(k\delta), \theta) \quad \text{donde } |F(e(k\delta), \theta)| < \varepsilon$$

y $F(0, \theta) = 0$, por lo que se asegura que $\lim_{t \rightarrow \infty} [x(t) - \xi(t)] = 0$. ■

La ecuación (4.2ia) puede ser vista como un observador continuo a lazo abierto entre los periodos de muestreo, cuyas condiciones iniciales son actualizadas cada periodo de muestreo de acuerdo a (4.2ib).

Nótese que la ecuación (4.2ia) no cuenta con el término de retroalimentación del error de seguimiento continuo a lazo cerrado, ya que no es necesario para la convergencia del observador (4.2i). Sin embargo, es posible aumentar la velocidad de convergencia de los estados que son observables a partir de la salida y_1 , agregando el término de retroalimentación del error de seguimiento continuo, como se ilustra en el siguiente corolario.

Corolario 4.1 *Supóngase que existe una transformación T , tal que el par (A_i, C_1) con $i = 1, \dots, r$, puede ser expresado como sigue*

$$\bar{A}_i = T A_i T^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11,i} & 0 \\ A_{21,i} & A_{22,i} \end{pmatrix}, \quad \bar{C}_1 = C_1 T^{-1} = (C_{11} \ 0)$$

donde cada par $(A_{11,i}, C_{11})$ es completamente observable. Considérese también que existen matrices definidas positivas $\hat{P} > 0$ y $\hat{Q} > 0$, y r matrices \hat{N}_i , las cuales son la solución de las siguientes desigualdades matriciales lineales

$$-\hat{Q} + (C_{11}^T \hat{N}_i^T + \hat{N}_i C_{11}) - (A_{11,i}^T \hat{P} + \hat{P} A_{11,i}) > 0 \quad (4.15)$$

Dada la existencia de las matrices $Q > 0$ y R y la constante γ , las cuales resuelven las desigualdades matriciales lineales

$$0 \leq \begin{pmatrix} Q - (\beta + \gamma\sigma) I & Q + RC \\ Q + C^T R^T & Q \end{pmatrix} \quad (4.16)$$

$$\gamma\sigma I < Q \quad (4.17)$$

$$\hat{A}_i^T Q + Q \hat{A}_i \leq \gamma \left[I + \sigma (\hat{A}_i^T + \hat{A}_i) \right] \quad i = 1, \dots, r \quad (4.18)$$

donde

$$\sigma \geq \frac{\exp(\alpha\delta) - 1}{\alpha},$$

$$\alpha \geq \sum_{i=1}^r \left| \lambda_{\max} \left(\hat{A}_i^T + \hat{A}_i \right) \right|$$

$$\hat{A}_i = A_i - G_i C_1$$

$$G_i = T^{-1} \begin{pmatrix} \hat{P}^{-1} \hat{N}_i \\ 0 \end{pmatrix} \quad i = 1, \dots, r$$

$\beta > 0$ es una constante arbitraria, entonces definiendo la matriz $G_d = Q^{-1}R$, el observador es dado por

$$\dot{\xi}(t) = \sum_{i=1}^r m_i(z) A_i \xi(t) + \sum_{i=1}^r m_i(z) B_i u(t) - G(t) [C_1 \xi(t) - y_1(t)] \quad (4.19a)$$

$$\xi(k^+\delta) = \xi(k\delta) - G_d [y_2(k\delta) - C\xi(k\delta)], \quad (4.19b)$$

donde $G(t) = \sum_{i=1}^r m_i(z(t)) G_i$ y

$$y(k\delta) = \begin{pmatrix} y_1(k\delta) \\ y_2(k\delta) \end{pmatrix}$$

4.3. Caso de estudio: digestor anaeróbico

El modelo de estudio es el mismo del digestor anaeróbico que se estudió en el capítulo 3, como ya se mencionó, es un modelo ampliamente usado para describir el proceso de digestión anaeróbica, debido a su simplicidad y capacidad para representar la dinámica de varios bioreactores continuos de digestión anaeróbica (por ejemplo, continuo de tanque agitado, de lecho fijo, de lecho expandido, de lecho fluidizado).

4.3.1. Obtención de la representación difusa del modelo de digestión anaeróbica

Para llevar a cabo el diseño del observador difuso, es necesario obtener una representación difusa del modelo de digestión anaeróbica

$$\dot{X}_1 = (\mu_1(S_1) - \alpha D) X_1 \quad (4.20a)$$

$$\dot{S}_1 = -k_1 \mu_1(S_1) X_1 + (S_{1in} - S_1) D \quad (4.20b)$$

$$\dot{X}_2 = (\mu_2(S_2) - \alpha D) X_2 \quad (4.20c)$$

$$\dot{S}_2 = -k_3 \mu_2(S_2) X_2 + k_2 \mu_1(S_1) X_1 + (S_{2in} - S_2) D \quad (4.20d)$$

donde X_1, X_2, S_1, S_2 , son las concentraciones de bacteria acidogénica, bacteria metanogénica, demanda química de oxígeno (DQO) y ácidos grasos volátiles (AGV) respectivamente, D es la velocidad de dilución, definida por la relación $D = Q/V$, donde Q es el flujo de alimentación y V el volumen del digestor, S_{1in} y S_{2in} son las concentraciones del sustrato orgánico efluente y de los AGV de entrada, respectivamente. Las k_i s son coeficientes pseudo-estequiométricos asociadas a las bioreacciones. El parámetro $\alpha \in (0, 1]$ representa la fracción de biomasa que no es retenida en el digestor, si se establece $\alpha = 1$, corresponde a la dinámica de un reactor de lecho fijo ideal, mientras que para $\alpha = 0$ corresponde a un reactor continuo de tanque agitado ideal (CSTR) [12]. Las velocidades de crecimiento bacteriano $\mu_1(S_1)$ y $\mu_2(S_2)$, son funciones no lineales dadas por las cinéticas de Monod y Haldane respectivamente [11]

$$\begin{aligned}\mu_1(S_1) &= \mu_{\text{máx}1} \frac{S_1}{S_1 + K_{S1}} \\ \mu_2(S_2) &= \mu_{\text{máx}2} \frac{S_2}{S_2 + K_{S2} + \left(\frac{S_2}{K_{I2}}\right)^2},\end{aligned}$$

donde $\mu_{1\text{máx}}, K_{S1}, \mu_{2\text{máx}}, K_{S2}$ y K_{I2} son la velocidad máxima de crecimiento bacteriano y la constante de saturación media asociada con el sustrato S_1 , la velocidad máxima de crecimiento bacteriano en ausencia de inhibición, y las constantes de saturación e inhibición asociadas al sustrato S_2 , respectivamente. Los valores de los parámetros del modelo están listados en el Tabla 3.1.

Definiendo las variables premisas como

$$\begin{aligned}z_1(t) &= D \\ z_2(t) &= \frac{S_1}{S_1 + K_{S1}} \\ z_3(t) &= \frac{S_2}{S_2 + K_{S2} + \left(\frac{S_2}{K_{I2}}\right)^2}\end{aligned}$$

donde $D(t), S_1(t)$ y S_2 están acotados, i.e.

$$\begin{aligned}0 &< D_2 \leq D \leq D_1 \\ 0 &< c_2 \leq \frac{S_1}{S_1 + K_{S1}} \leq c_1 \\ 0 &< b_2 \leq \frac{S_2}{S_2 + K_{S2} + \left(\frac{S_2}{K_{I2}}\right)^2} \leq b_1\end{aligned}$$

Con estas cotas se garantiza la observabilidad del sistema difuso. Entonces el sistema no lineal (4.20) es reescrito como

$$\dot{X}_1 = (\mu_{\text{máx } 1} z_2 - \alpha z_1) X_1 \quad (4.21a)$$

$$\dot{S}_1 = -k_1 \mu_{\text{máx } 1} z_2 X_1 - S_1 z_1 + S_{1in} z_1 \quad (4.21b)$$

$$\dot{X}_2 = (\mu_{\text{máx } 2} z_3 - \alpha z_1) X_2 \quad (4.21c)$$

$$\dot{S}_2 = -k_3 \mu_{\text{máx } 2} z_3 X_2 + k_2 \mu_{\text{máx } 1} z_2 X_1 - S_2 z_1 + S_{2in} z_1 \quad (4.21d)$$

Los valores máximos y mínimos de $z_1(t)$, $z_2(t)$ y $z_3(t)$ son

$$\begin{aligned} \text{máx } z_1(t) &= D_1 & \text{mín } z_1(t) &= D_2 \\ \text{máx } z_2(t) &= c_1 & \text{mín } z_2(t) &= c_2 \\ \text{máx } z_3(t) &= b_1 & \text{mín } z_3(t) &= b_2 \end{aligned}$$

entonces $z_1(t)$, $z_2(t)$ y $z_3(t)$ pueden ser escritas como

$$z_1(t) = \sum_{i=1}^2 E_i(z_1(t)) D_i \quad (4.22)$$

$$z_2(t) = \sum_{i=1}^2 N_i(z_2(t)) c_i \quad (4.23)$$

$$z_3(t) = \sum_{i=1}^2 M_i(z_3(t)) b_i \quad (4.24)$$

donde $E_i(z_1(t))$, $N_i(z_2(t))$ y $M_i(z_3(t))$ son las funciones de membresía y son igual a

$$\begin{aligned} E_1(z_1(t)) &= \frac{z_1(t) - D_2}{D_1 - D_2} & E_2(z_1(t)) &= \frac{D_1 - z_1(t)}{D_1 - D_2} \\ N_1(z_2(t)) &= \frac{z_2(t) - c_2}{c_1 - c_2} & N_2(z_2(t)) &= \frac{c_1 - z_2(t)}{c_1 - c_2} \\ M_1(z_3(t)) &= \frac{z_3(t) - b_2}{b_1 - b_2} & M_2(z_3(t)) &= \frac{b_1 - z_3(t)}{b_1 - b_2} \end{aligned}$$

Utilizando (4.22), (4.23) y (4.24) se construye el modelo difuso Takagi-Sugeno para el modelo del digestor anaeróbico (4.20), obteniendo

$$\begin{bmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{S}_1 \\ \dot{X}_2 \\ \dot{S}_2 \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 E_i(z_1(t)) N_j(z_2(t)) M_k(z_3(t)) \times \left(\begin{pmatrix} \mu_{\max 1} c_j - \alpha D_i & 0 & 0 & 0 \\ -k_1 \mu_{\max 1} c_j & -D_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_{\max 2} b_k - \alpha D_i & 0 \\ k_2 \mu_{\max 1} c_j & 0 & -k_3 \mu_{\max 2} b_k & -D_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ S_1 \\ X_2 \\ S_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ S_{1in} D_i \\ 0 \\ S_{2in} D_i \end{pmatrix} \right)$$

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 E_i(z_1(t)) N_j(z_2(t)) M_k(z_3(t)) \times \{A_{ijk}x(t) + B_{ijk}\}$$

$$\dot{x}(t) = \sum_{\rho=1}^8 h_{\rho}(z(t)) \times \{A_{\rho}^*x(t) + B_{\rho}^*\} \quad (4.25)$$

$$y_1(t) = C_1x(t) \quad (4.26)$$

$$y_2(k\delta) = C_2x(k\delta) \quad (4.27)$$

donde

$$\begin{aligned} x(t) &= [X_1, S_1, X_2, S_2]^T \\ \rho &= k + 2(j - 1) + 4(i - 1) \\ h_{\rho}(z(t)) &= E_i(z_1(t)) N_j(z_2(t)) M_k(z_3(t)) \\ A_{\rho}^* &= A_{ijk}, \quad B_{\rho}^* = B_{ijk} \\ C_1 &= (0 \ 0 \ 0 \ 1), \quad C_2 = (0 \ 1 \ 0 \ 0) \end{aligned}$$

La ecuación 4.25 significa que el modelo difuso tiene las siguientes 8 reglas

Regla 1: Si $z_1(t)$ es grande y $z_2(t)$ es grande y $z_3(t)$ es grande
entonces $\dot{x}(t) = A_1^*x(t) + B_1^*$

Regla 2: Si $z_1(t)$ es grande y $z_2(t)$ es grande y $z_3(t)$ es pequeño
entonces $\dot{x}(t) = A_2^*x(t) + B_2^*$

Regla 3: Si $z_1(t)$ es grande y $z_2(t)$ es pequeño y $z_3(t)$ es grande
entonces $\dot{x}(t) = A_3^*x(t) + B_3^*$

Regla 4: Si $z_1(t)$ es grande y $z_2(t)$ es pequeño y $z_3(t)$ es pequeño entonces $\dot{x}(t) = A_4^*x(t) + B_4^*$

Regla 5: Si $z_1(t)$ es pequeño y $z_2(t)$ es grande y $z_3(t)$ es grande entonces $\dot{x}(t) = A_5^*x(t) + B_5^*$

Regla 6: Si $z_1(t)$ es pequeño y $z_2(t)$ es grande y $z_3(t)$ es pequeño entonces $\dot{x}(t) = A_6^*x(t) + B_6^*$

Regla 7: Si $z_1(t)$ es pequeño y $z_2(t)$ es pequeño y $z_3(t)$ es grande entonces $\dot{x}(t) = A_7^*x(t) + B_7^*$

Regla 8: Si $z_1(t)$ es pequeño y $z_2(t)$ es pequeño y $z_3(t)$ es pequeño entonces $\dot{x}(t) = A_8^*x(t) + B_8^*$

Aquí, $z_1(t)$, $z_2(t)$ y $z_3(t)$ son variables premisas y las matrices A_1^* a A_8^* y B_1^* a B_8^* toman los valores

$$A_1^* = A_{111} = \begin{bmatrix} \mu_{\text{máx}1}c_1 - \alpha D_1 & 0 & 0 & 0 \\ -k_1\mu_{\text{máx}1}c_1 & -D_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_{\text{máx}2}b_1 - \alpha D_1 & 0 \\ k_2\mu_{\text{máx}1}c_1 & 0 & -k_3\mu_{\text{máx}2}b_1 & -D_1 \end{bmatrix}, \quad B_1^* = B_{111} \begin{bmatrix} 0 \\ S_{1in}D_1 \\ 0 \\ S_{2in}D_1 \end{bmatrix}$$

$$A_2^* = A_{112} = \begin{bmatrix} \mu_{\text{máx}1}c_1 - \alpha D_1 & 0 & 0 & 0 \\ -k_1\mu_{\text{máx}1}c_1 & -D_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_{\text{máx}2}b_2 - \alpha D_1 & 0 \\ k_2\mu_{\text{máx}1}c_1 & 0 & -k_3\mu_{\text{máx}2}b_2 & -D_1 \end{bmatrix}, \quad B_2^* = B_{112} \begin{bmatrix} 0 \\ S_{1in}D_1 \\ 0 \\ S_{2in}D_1 \end{bmatrix}$$

$$A_3^* = A_{121} = \begin{bmatrix} \mu_{\text{máx}1}c_2 - \alpha D_1 & 0 & 0 & 0 \\ -k_1\mu_{\text{máx}1}c_2 & -D_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_{\text{máx}2}b_1 - \alpha D_1 & 0 \\ k_2\mu_{\text{máx}1}c_2 & 0 & -k_3\mu_{\text{máx}2}b_1 & -D_1 \end{bmatrix}, \quad B_3^* = B_{121} \begin{bmatrix} 0 \\ S_{1in}D_1 \\ 0 \\ S_{2in}D_1 \end{bmatrix}$$

$$A_4^* = A_{122} = \begin{bmatrix} \mu_{\text{máx}1}c_2 - \alpha D_1 & 0 & 0 & 0 \\ -k_1\mu_{\text{máx}1}c_2 & -D_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_{\text{máx}2}b_2 - \alpha D_1 & 0 \\ k_2\mu_{\text{máx}1}c_2 & 0 & -k_3\mu_{\text{máx}2}b_2 & -D_1 \end{bmatrix}, \quad B_4^* = B_{122} \begin{bmatrix} 0 \\ S_{1in}D_1 \\ 0 \\ S_{2in}D_1 \end{bmatrix}$$

$$A_5^* = A_{211} = \begin{bmatrix} \mu_{\max 1} c_1 - \alpha D_2 & 0 & 0 & 0 \\ -k_1 \mu_{\max 1} c_1 & -D_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_{\max 2} b_1 - \alpha D_2 & 0 \\ k_2 \mu_{\max 1} c_1 & 0 & -k_3 \mu_{\max 2} b_1 & -D_2 \end{bmatrix}, \quad B_5^* = B_{211} \begin{bmatrix} 0 \\ S_{1in} D_2 \\ 0 \\ S_{2in} D_2 \end{bmatrix}$$

$$A_6^* = A_{212} = \begin{bmatrix} \mu_{\max 1} c_1 - \alpha D_2 & 0 & 0 & 0 \\ -k_1 \mu_{\max 1} c_1 & -D_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_{\max 2} b_2 - \alpha D_2 & 0 \\ k_2 \mu_{\max 1} c_1 & 0 & -k_3 \mu_{\max 2} b_2 & -D_2 \end{bmatrix}, \quad B_6^* = B_{212} \begin{bmatrix} 0 \\ S_{1in} D_2 \\ 0 \\ S_{2in} D_2 \end{bmatrix}$$

$$A_7^* = A_{221} = \begin{bmatrix} \mu_{\max 1} c_2 - \alpha D_2 & 0 & 0 & 0 \\ -k_1 \mu_{\max 1} c_2 & -D_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_{\max 2} b_1 - \alpha D_2 & 0 \\ k_2 \mu_{\max 1} c_2 & 0 & -k_3 \mu_{\max 2} b_1 & -D_2 \end{bmatrix}, \quad B_7^* = B_{221} \begin{bmatrix} 0 \\ S_{1in} D_2 \\ 0 \\ S_{2in} D_2 \end{bmatrix}$$

$$A_8^* = A_{222} = \begin{bmatrix} \mu_{\max 1} c_2 - \alpha D_2 & 0 & 0 & 0 \\ -k_1 \mu_{\max 1} c_2 & -D_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_{\max 2} b_2 - \alpha D_2 & 0 \\ k_2 \mu_{\max 1} c_2 & 0 & -k_3 \mu_{\max 2} b_2 & -D_2 \end{bmatrix}, \quad B_8^* = B_{222} \begin{bmatrix} 0 \\ S_{1in} D_2 \\ 0 \\ S_{2in} D_2 \end{bmatrix}$$

Las Figuras 4.1, 4.2 y 4.3 muestran las funciones de membresía.

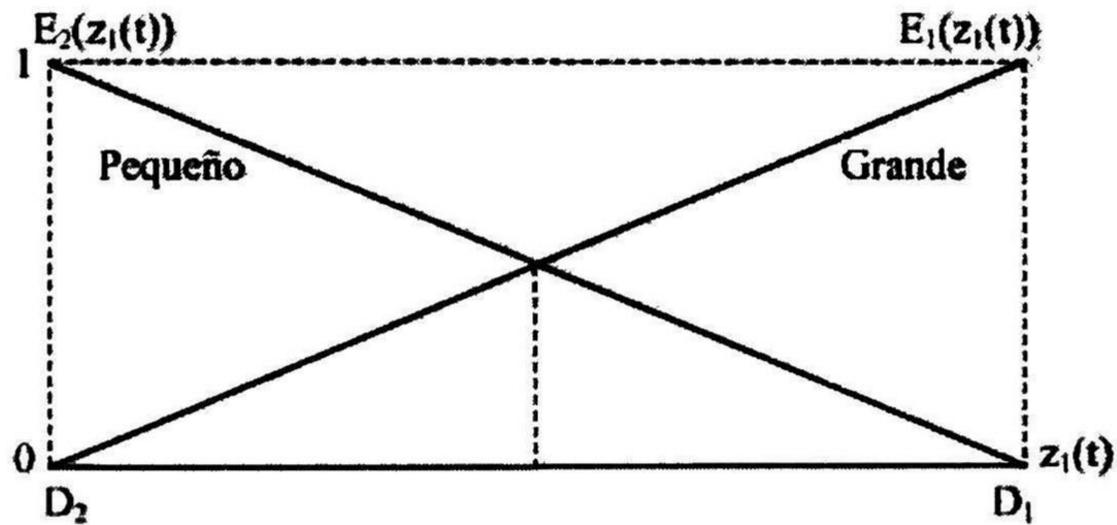


Figura 4.1: Funciones de membresía $E_1(z_1(t))$ y $E_2(z_1(t))$.

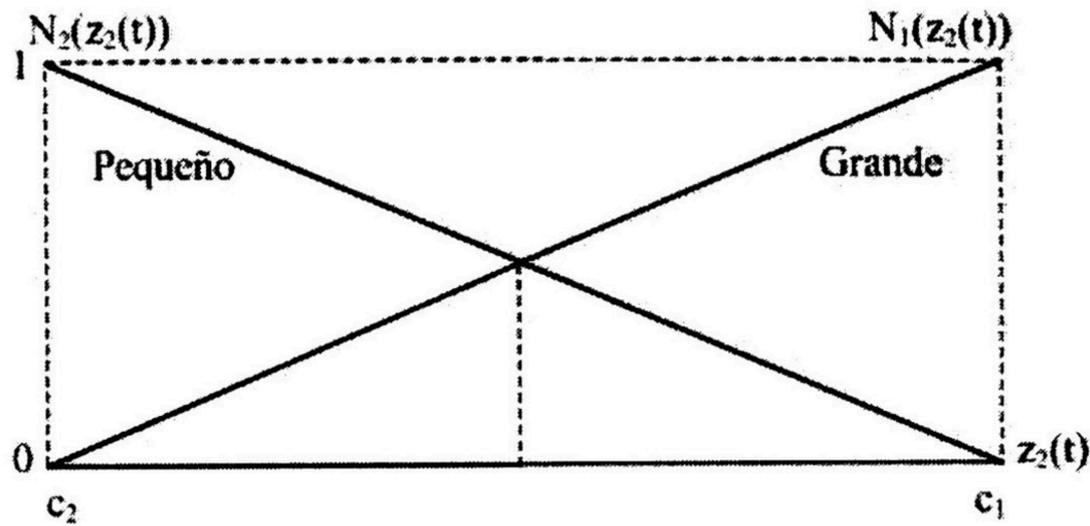


Figura 4.2: Funciones de membresía $N_1(z_2(t))$ y $N_2(z_2(t))$.

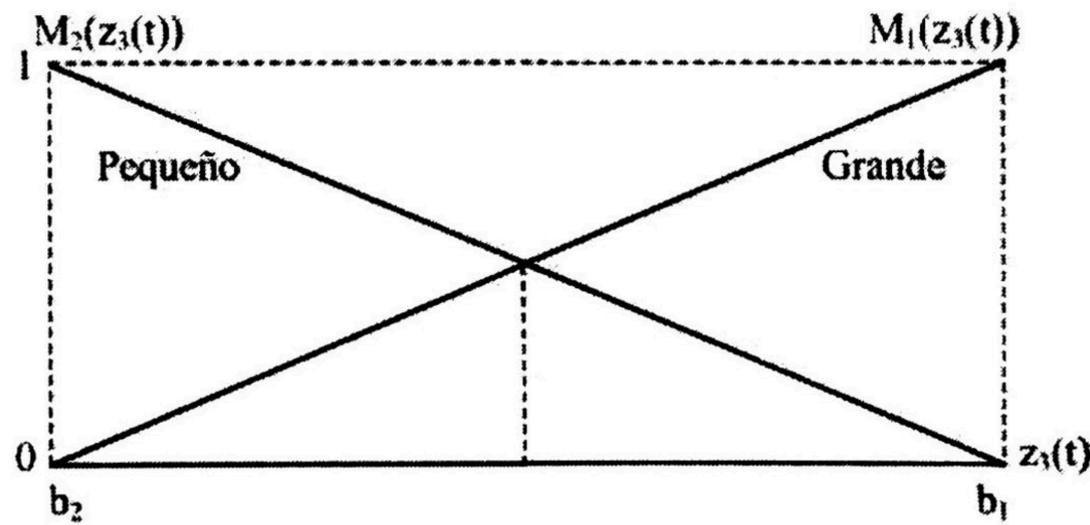


Figura 4.3: Funciones de membresía $M_1(z_3(t))$ y $M_2(z_3(t))$.

Para obtener los valores numéricos de las matrices A_i^* y B_i^* , se definen los máximos y mínimos de las variables premisas para delimitar el sector no lineal donde será válida la representación difusa del sistema

$$\begin{aligned}
 \text{máx } z_1(t) &= D_1 = 1,15 & \text{mín } z_1(t) &= D_2 = 1,0 \\
 \text{máx } z_2(t) &= c_1 = \frac{3}{3 + K_{S1}} & \text{mín } z_2(t) &= c_2 = \frac{1,5}{1,5 + K_{S1}} \\
 \text{máx } z_3(t) &= b_1 = \frac{25}{25 + K_{S2} + \left(\frac{25}{K_{I2}}\right)^2} & \text{mín } z_3(t) &= b_2 = \frac{0,05}{0,05 + K_{S2} + \left(\frac{0,05}{K_{I2}}\right)^2}
 \end{aligned}$$

De los anteriores máximos y mínimos se puede ver que $1,0 < D < 1,15$, $1,5 < S_1 < 3$ y $0,05 < S_2 < 25$, los cuales son los rangos recomendados de operación de estas variables en el reactor de digestión anaeróbico [4]. Entonces los valores numéricos de las matrices A_i^* y B_i^*

son obtenidos sustituyendo los parámetros del digestor anaeróbico $\mu_{\text{máx}1}$, $\mu_{\text{máx}2}$, α , k_1 , k_2 , k_3 , S_{1in} y S_{2in} enlistados en las Tablas 3.1 y 3.2, y los máximos D_1 , c_1 y b_1 , y los mínimos D_2 , c_2 y b_2 .

4.3.2. Diseño del observador difuso ADCI

Una vez obtenida la representación difusa del sistema no lineal (4.25), se diseña el observador difuso ADCI de acuerdo al Corolario 4.1, a fin de aumentar la velocidad de convergencia de los estados observados a partir de la medición continua.

Primero, es necesario obtener la matriz de transformación T , tal que los pares (A_{11i}, C_{11}) sean completamente observables.

Así las matrices A_i y C_1 toman la forma

$$\bar{A}_i = TA_iT^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11,i} & 0 \\ A_{21,i} & A_{22,i} \end{pmatrix}, \quad \bar{C}_1 = C_1T^{-1} = (C_{11} \ 0)$$

Tomando $A_{11,i}$ y C_{11} se resuelven las desigualdades matriciales lineales (4.15) para encontrar las matrices \hat{P} y \hat{N}_i , y así calcular la ganancia $G(t) = \sum_{i=1}^r m_i(z(t)) G_i$.

Además se resuelven las desigualdades matriciales lineales (4.16), (4.17) y (4.18) de donde se obtienen las matrices Q y R , para calcular la ganancia $G_d = Q^{-1}R$, obteniendo

$$G_d = \begin{bmatrix} -0,0305 & 0,4027 \\ 0,0005 & -0,9998 \\ 0,0043 & 0,0049 \\ -1,0092 & -0,0048 \end{bmatrix}$$

Con el objetivo de ilustrar el desempeño del observador (4.19), se llevan a cabo simulaciones; las condiciones iniciales son enlistadas en la Tabla 4.1, mientras que la velocidad de dilución fue considerada una señal senoidal variante en el tiempo dentro del sector de no linealidad considerado ($u(t) = 1,05 + 0,55(\sin(0,5t))$).

La Figura (4.4) muestra el comportamiento dinámico del observador difuso ADCI, la actualización discreta es claramente visible en la figura, en la cual a tiempo $t = 1$ día hay una discontinuidad en la estimación de los estados del sistema. Como se puede ver los estados del observador convergen en aproximadamente tres días.

En la Figura 4.5 se presenta el error de seguimiento del observador difuso ADCI; se ve que las actualizaciones de las condiciones iniciales aumentan la velocidad de convergencia del observador.

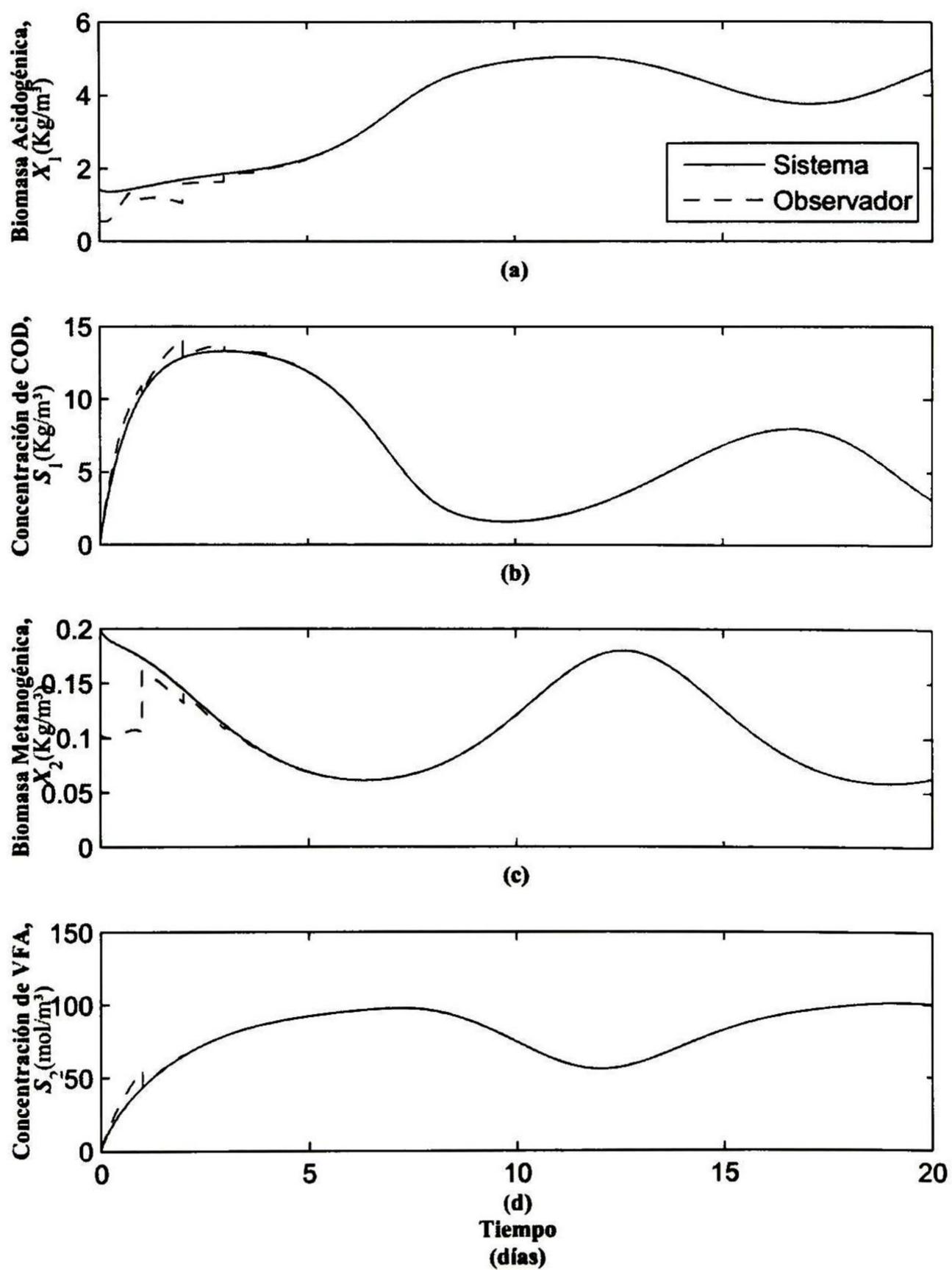


Figura 4.4: Simulación de observador difuso ADCI.

Tabla 4.1: Condiciones iniciales utilizadas en las simulación del observador difuso ADCI.

Variable de estado	$X_1(0)$ kg/m ³	$S_1(0)$ kg/m ³	$X_2(0)$ kg/m ³	$S_2(0)$ mol/m ³
Planta	1,433	0,1	0,2	0,4
Observador	0,5	0,3	0,1	1

4.3.3. Diseño del controlador por linealización entrada-salida

Considérese el modelo del digestor anaeróbico (3.9d), donde las salidas son

$$\begin{aligned} y_1 &= h_1(x) = S_2 \\ y_2 &= h_2(x) = S_1 \end{aligned}$$

$$x(t) = [X_1 \quad S_1 \quad X_2 \quad S_2]^T \quad u(t) = D(t).$$

Siguiendo el procedimiento mostrado en [15], calculando las derivadas de las salidas y_1 y y_2 , se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= -k_3\mu_2(S_2)X_2 + k_2\mu_1(S_1)X_1 + (S_{2in} - S_2)u(t) \\ \dot{y}_2 &= -k_1\mu_1(S_1)X_1 + (S_{1in} - S_1)u(t) \end{aligned}$$

El sistema tiene grado relativo 1 tanto para la salida y_1 como para la salida y_2 .

Considerando por el momento que todos los estados del sistema se tienen disponibles (esta suposición se eliminará más tarde), con respecto a la salida y_1 el sistema es linealizable entrada-salida, ya que la ley de control

$$u_1(t) = \frac{k_3\mu_2(S_2)X_2 - \mu_1(S_1)k_2X_1 + v_1}{(S_{2in} - S_2)}, \quad (4.28)$$

reduce el mapeo entrada-salida a

$$\dot{y}_1 = v_1.$$

Con respecto a la salida y_2 el sistema también es linealizable entrada-salida, utilizando la ley de control

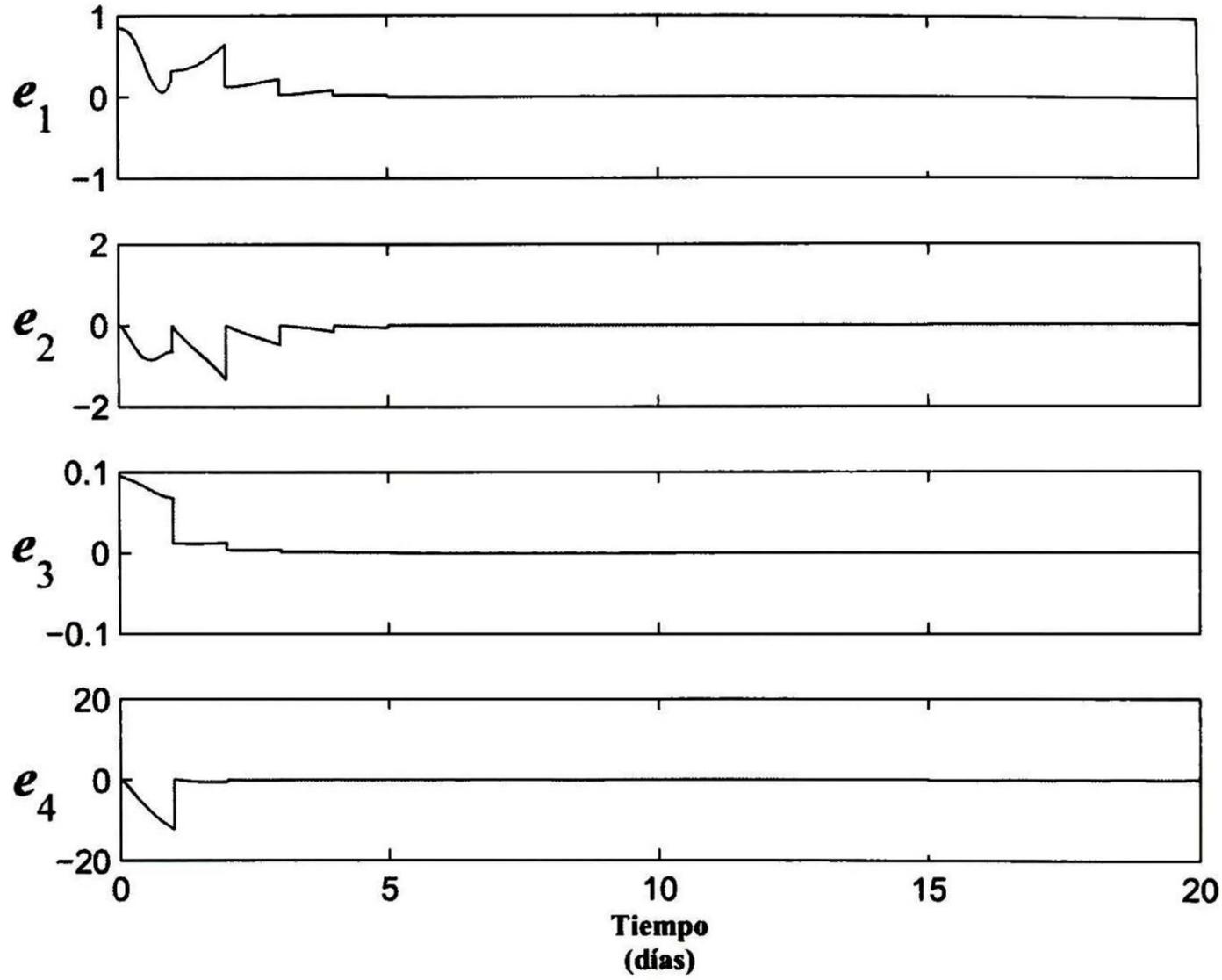


Figura 4.5: Error del observador difuso ADCI.

$$u_2(t) = \frac{k_1 \mu_1(S_1) X_1 + v_2}{(S_{1in} - S_1)}, \quad (4.29)$$

que reduce el mapeo entrada-salida a

$$\dot{y}_2 = v_2.$$

Tomando v_1 y v_2 como

$$\begin{aligned} v_1 &= -K_1 (S_2 - S_{2ref}), \\ v_2 &= -K_2 (S_1 - S_{1ref}), \end{aligned}$$

para que las salidas y_1 y y_2 alcancen las referencias deseadas S_{2ref} y S_{1ref} , respectivamente.

Como se puede ver de las anteriores leyes de control, para alcanzar las referencias deseadas, es necesario tener disponibles todos los estados del sistema. Si éste no es el caso, entonces se

puede utilizar la estructura del observador ADCI (3.2) presentado anteriormente, es decir, se utilizan los estados observados para aplicar las leyes de control propuestas.

Tomando ventaja del observador difuso (4.2i) ya aplicado al modelo del digestor anaeróbico, se simula el sistema (3.9b) con las entradas de control (4.28) y (4.29). En la Tabla (4.2) se enlistan los parámetros utilizados en la simulaciones.

Tabla 4.2: Parámetros para simular las leyes de control, utilizando los estados del observador difuso ADCI.

Parámetro	Valor
K_1	2 (adimensional)
K_2	12 (adimensiona)
S_{2ref}	20 kgAGV/ m ³
S_{1ref}	2,5 kgDQO/ m ³

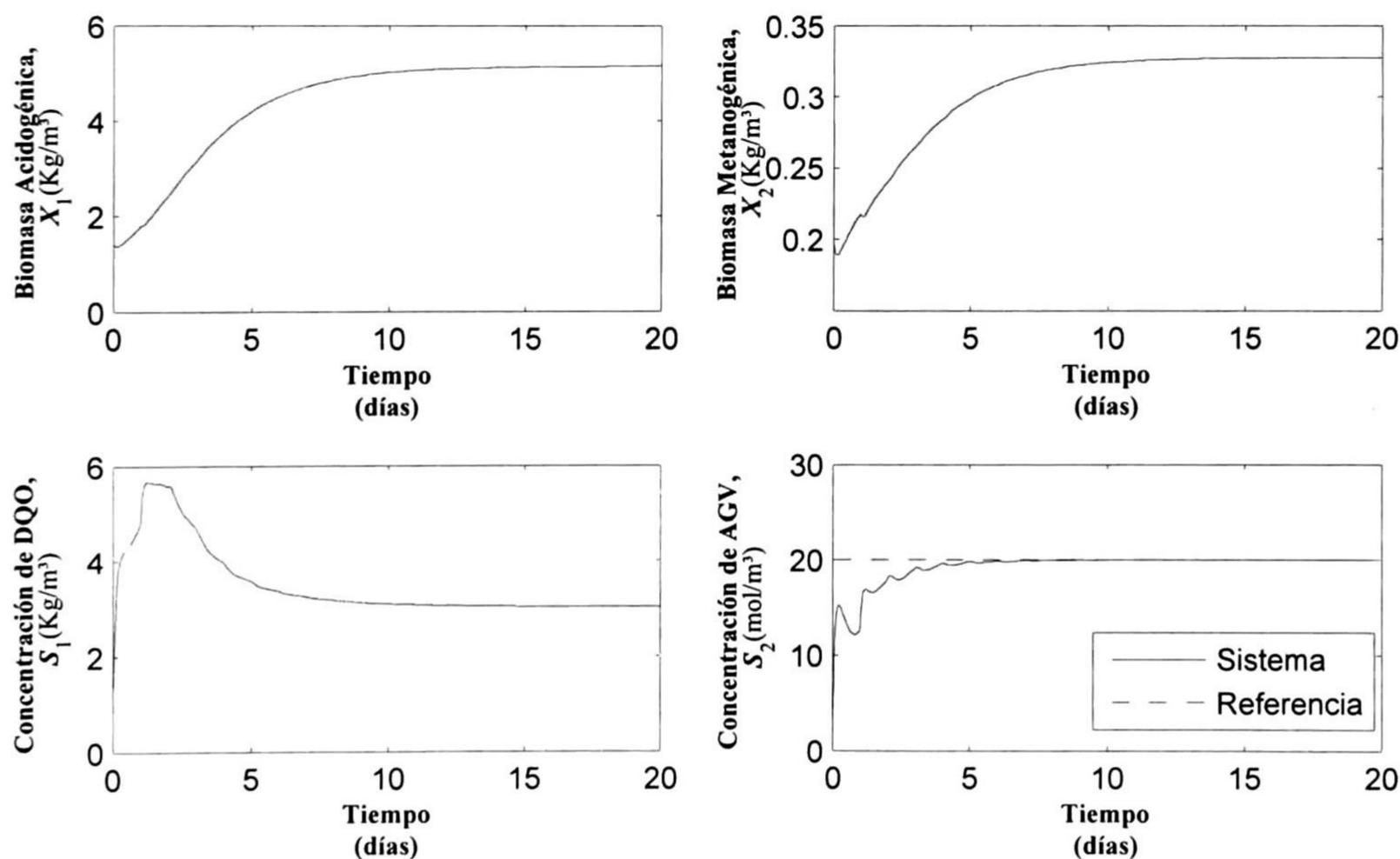


Figura 4.6: Sistema con control linealizante para llevar la salida y_2 a la referencia deseada.

La Figura 4.6 muestra el sistema cuando se le aplica el control linealizante entrada-salida u_1 , se observa que la salida y_1 alcanza la referencia que es de 20 kg/m³. En la Figura 4.7 se presenta la señal de control (tasa de dilución) que es necesaria para alcanzar dicha referencia.

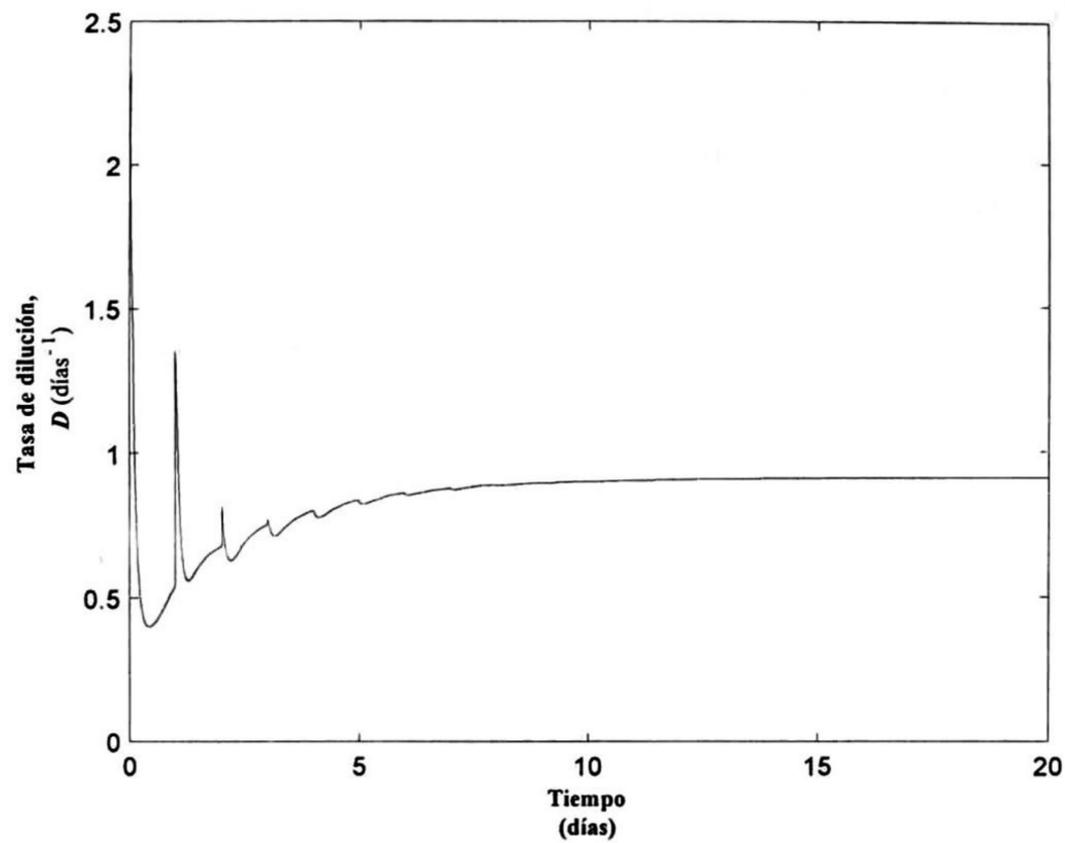


Figura 4.7: Entrada de control para llevar la salida y_1 a la referencia deseada.

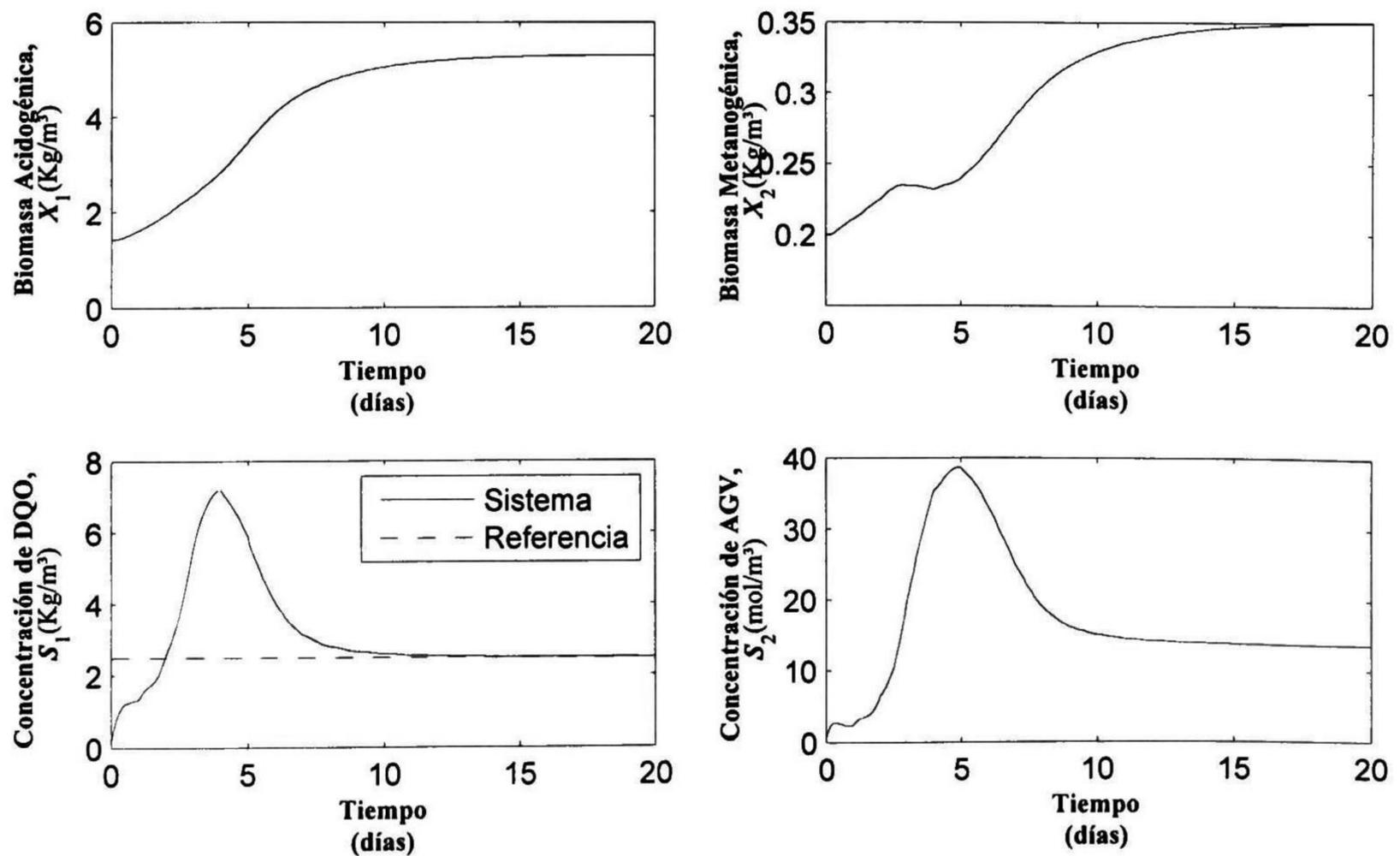


Figura 4.8: Sistema con control linealizante para llevar la salida y_1 a la referencia deseada.

La Figura 4.8 presenta la dinámica del sistema cuando se le aplica el control linealizante entrada-salida u_2 , se observa que la salida y_2 alcanza la referencia preestablecida de 2.5 kg/m^3 . La Figura 4.9 muestra la señal de control (tasa de dilución) necesaria para alcanzar dicha referencia.

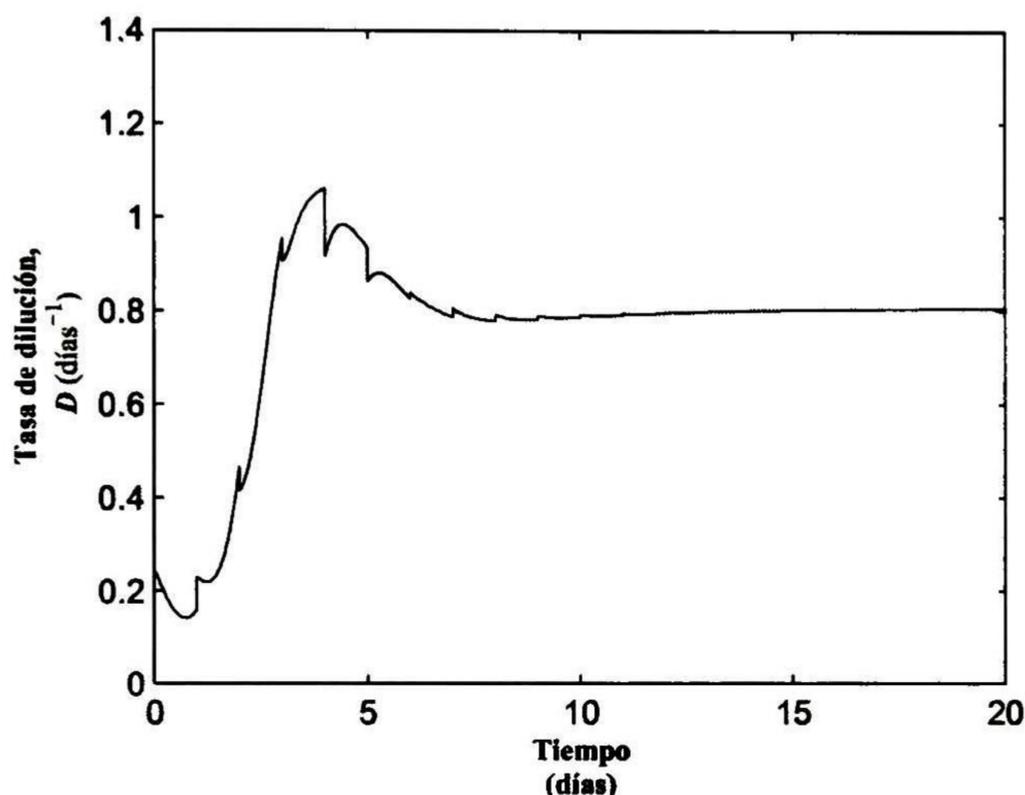


Figura 4.9: Entrada de control para llevar la salida y_1 a la referencia deseada.

4.4. Conclusiones

En este capítulo se presentó un observador difuso que actualiza constantemente sus estados a partir de las mediciones continuas y restablece su condición inicial cada periodo de muestreo. Éste es un observador válido en la región donde se obtiene la representación difusa del sistema no lineal. Su aplicación a un modelo de digestión anaeróbica presenta excelente desempeño y estabilidad, tomando en cuenta que el tiempo de residencia del reactor de digestión anaeróbica es de 30 días y que la velocidad de convergencia del observador fue alrededor de 3 días. La actualización de la condición inicial del observador cada periodo de tiempo en que se dispone de la medición discreta, aumenta la velocidad de convergencia de dicho observador. El control linealizante entrada-salida diseñado, permitió llevar las salidas del sistema a valores preestablecidos deseados.

Capítulo 5

Conclusiones

5.1. Conclusiones

Este trabajo propone esquemas de observación para sistemas dinámicos que cuentan con mediciones continuas y discretas. Actualmente existen versiones discretas y continuas de observadores de estado, sin embargo, estos observadores no pueden ser fácilmente implementados cuando información continua y discreta debe ser considerada. Por esta razón, la principal aportación de este trabajo es el diseño de dos observadores con actualización discreta de la condición inicial (ADCI), los cuales se actualizan constantemente a partir de las mediciones continuas y también restablecen sus estados cada instante de muestreo cuando la medición discreta está disponible. La característica primordial de estos observadores radica en que la información de los estados entre periodo de muestreo está disponible a cualquier tiempo y no es necesario tener el comportamiento preestablecido de la entrada, garantizando además la convergencia entre el observador y los estados del sistema en cada periodo de muestreo y también entre los periodos de muestreo.

Primero se propuso un observador continuo con actualización discreta de la condición inicial, el cual fue aplicado a un modelo de digestión anaeróbica no lineal, tomando en cuenta que el tiempo de residencia del reactor de digestión anaeróbica es de 30 días, y la velocidad de convergencia del observador propuesto es de 3 días, se concluye que el desempeño de dicho observador es bueno y cumple con las necesidades de observación de los estados para garantizar un monitoreo eficiente del proceso. La actualización de la condición inicial del observador cada periodo de tiempo en que se dispone de la medición discreta, aumenta la velocidad de convergencia de dicho observador. La desventaja de este observador es que es local, ya que las ganancias necesarias para su diseño, fueron calculadas a partir de la linealización del sistema, por lo que el observador es válido en una pequeña región alrededor del punto de operación.

Con el fin de conseguir un observador que sea global, se propone el diseño de un observador difuso con actualización discreta de la condición inicial, el cual se obtiene a partir de la

representación difusa del modelo no lineal. Dicho observador fue aplicado a un modelo de digestión anaeróbica no lineal; para lo cual fue necesario obtener la representación difusa del modelo y para ello se utilizó la metodología propuesta por Takagi-Sugeno. Igualmente este observador presentó un excelente desempeño, ya que su velocidad de convergencia fue alrededor de 3 días, que comparado con el tiempo de residencia, cumple con las necesidades de observación del modelo en estudio. La actualización de la condición inicial del observador cada periodo de tiempo en que se dispone de la medición discreta, aumenta la velocidad de convergencia de dicho observador. La ventaja de este observador difuso con respecto al observador continuo, es que es un observador global, el cual es válido en toda la región donde la representación difusa del modelo fue obtenida.

Para garantizar la estabilidad operacional del digestor anaeróbico es necesario mantener algunas variables del proceso en valores predeterminados; para lograr este objetivo se diseñaron leyes de control linealizante entrada-salida, que permiten mantener las salidas del sistema en una referencia constante deseada; tomando en cuenta el buen desempeño obtenido de los observadores, los estados observados son utilizados en estas leyes de control.

5.2. Trabajo Futuro

Como trabajo futuro se propone:

Diseñar un observador con modos deslizantes con actualización discreta de la condición inicial que sea robusto ante variaciones paramétricas.

Diseñar esquemas de control que garanticen la estabilidad operacional del sistema de digestión anaeróbica y que sean robustos ante disturbios y variaciones paramétricas.

Probar el desempeño de los observadores y controladores propuestos en un reactor de digestión anaeróbica real.

Bibliografía

- [1] Andrews, J. (1968). “*A mathematical model for the continuous culture of microorganisms utilizing inhibitory substrates*” *Biotechnology and Bioengineering*, Vol. 10, pp.707–723.
- [2] Alcaraz-González, V. and González-Álvarez, V. (2007). *Selected Topics in Dynamics and Control of Chemical and Biological Processes*, Vol. 361 of *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, chapter *Robust Nonlinear Observers for Bioprocesses Application to Wastewater Treatment*, pp. 119-164. Springer, Berlin.
- [3] Alcaraz-González, V., Harmand, J., Dochain, D., Rapaport, A., Steyer, J., Pelayo-Ortiz, C., and González-Álvarez, V. (2003). “*A robust asymptotic observer for chemical and biochemical reactors*”. In *Proc. Of the IFAC ROCOND 2003*. IFAC.
- [4] Angelidaki, I., Boe, K., and Ellegaard L. (2004). “*Efect of operating conditions and reactor configuration on efficiency of full-scale biogas plants*”. In *10th World Congress of Anaerobic Digestion*, pp. 275-280. Montreal.
- [5] Bernard, O., Hadj-Sadok, Z., Dochain, D., Genovesi, A., and Steyer, J. (2001). “*Dynamical model development and parameter identification for anaerobic wastewater treatment process*”. *Biotechnology & Bioengineering*, Vol. 75, No. 4, pp. 424–439.
- [6] Batstone, D., Keller, J., Angelidaki, I., Kalyuzhnyi, S., Pavlostathis, S., Rozzi, A., Sanders, W., Siegrist, H., and Vavilin, V. (2002). *Anaerobic Digestion Model No. 1 (ADM1)*, Vol. 13 of *Scientific and Technical Report*. IWA Publishing, London.
- [7] Bernard, O., Chachuat, B., Hélias, A., and Rodríguez, J. (2006). “*Can we assess the model complexity for a bioprocess: Theory and example of the anaerobic digestion process*”. *Water Science Technology*, Vol. 53, No. 1, pp. 85–92.
- [8] Dochain, D. (2008). “*Bioprocess Control*” *Control Systems, Robotics and Manufacturing*. John Wiley & Sons Inc.
- [9] García-Sandoval, J. (2006). “*The Robust Regulation Problem Using Immersions: Reactors Applications*” Ph.D. thesis, CINVESTAV, México.
- [10] Gordon L., (2005). “*Basic Regulatory Control*” *Control Engineering*, January.

-
- [11] Henze, M. and Harremoes, P. (1983). "Anaerobic treatment of wastewater in fixed film reactors- a literature review". *Water Science and Technology*, Vol. 15, No. 1, pp. 1–101.
- [12] Hess, J. and Bernard, O. (2008). "Design and study of a risk management criterion for an unstable anaerobic wastewater treatment process" *Journal of Process Control*, Vol. 18, No. 1, pp. 71–79.
- [13] Huntington, R. (1998). "Twenty years development of ICA in a water utility". *Wat. Sci. Technol.*, Vol. 37, No. 12, pp. 27–34.
- [14] Kailath, T. (1980). *Linear Systems*. Prentice Hall.
- [15] Khalil, H. K. (1996). "Nonlinear Systems". 3th Edition, Prentice Hall, New Jersey, USA
- [16] Kawamoto, S. (1992). "An Approach to Stability Analysis of Second Order Fuzzy Systems". First IEEE International Conference on Fuzzy Systems, Vol. 1, pp. 1427-1434.
- [17] Liu, J., Muñoz de la Peña, D., Ohran, B. J., Christofides, P. D., and Davis, J. F. (2008). "A two-tier architecture for networked process control" *Chemical Engineering Science*, Vol. 63, pp. 5394–5409.
- [18] Nguang, S. and Shi, P. (2003). Fuzzy H_∞ output feedback control of nonlinear systems under sampled measurements. *Automatica*, Vol. 39, pp. 2169–2174.
- [19] Meleiro, L. and Filho, R. (2000). "State and parameter estimation based on a nonlinear filter applied to an industrial process control of ethanol production". *Braz. J. Chem. Eng.*, Vol. 17, pp. 4-7.
- [20] Méndez-Acosta, H., Palacios-Ruiz, B., Alcaraz-González, V., Steyer, J., González-Álvarez, V., and Latrille, E. (2008). "Robust control of volatile fatty acids in a anaerobic digesters" *Industrial and Engineering Chemical Research*, Vol. 47, No. 20, pp. 7715–7720.
- [21] Muñoz de la Peña, D. and Christofides, P. D. (2008). "Output feedback control of nonlinear systems subject to sensor data losses". *Science Direct*, Vol. 57, pp.631–642.
- [22] Ray, W. (1980). "Advanced Process Control" McGraw-Hil, USA.
- [23] Scali, C., Morretta, M., and Semino, D. (1997). "Control of the quality of polymer products on continuous reactors: Comparison of performance of state estimators with and without updating parameters". *Journal of Process Control*, Vol. 7, No. 5, pp. 357-369.
- [24] Tanaka, K., Wang, H. O. (2001). "Fuzzy Control Systems Design and Analysis: A Linear Matrix Inequality approach", John Wiley & Sons Inc, New York, USA.

Apéndice A

Artículo en Congreso

C. P. Guillén-Flores, B. Castillo-Toledo, J.P. García-Sandoval and V. González-Álvarez, “*Observer Design for Systems with Continuous and Discrete Measurements*”, International Symposium on Advanced Control of Chemical Processes, Estambul, Turquía, Julio, 2009.

Observer Design for Systems with Continuous and Discrete Measurements^{*}

C.P. Guillén-Flores^{*} B. Castillo-Toledo^{*}
J.P. García-Sandoval^{**} and V. González-Álvarez^{**}

^{*} CINVESTAV-IPN, Av. Científica 1145, colonia el Bajío, Zapopan, 45015, Jalisco, México (e-mail: [cguillen, toledo]@gdl.cinvestav.mx)

^{**} Chemical Engineering Department, University of Guadalajara, Calz. Gral. Marcelino García Barragán 1451, Guadalajara, Jalisco 44430, México (e-mail: paulo.garcia@cucei.udg.mx)

Abstract: Classical observers are constructed on the basis of the nature of the measurement signals, namely, a continuous observer requires continuous output measurements. In this work, a novel observer which estimates continuous states when continuous and discrete measurements are available is presented. By resetting the initial condition of the observer at each sample instant, the convergence of the continuous states is guaranteed. The application to the estimation of substrate and biomass concentrations in an anaerobic wastewater treatment process in which continuous and discrete measurements usually appear, shows the feasibility of the proposed scheme

Keywords: jump observer, anaerobic digestion, discrete measurements

1. INTRODUCTION

Because of the increasing complexity and necessity for safety of industrial processes, efficient monitoring, decision and control systems are becoming more and more important. This is particularly true in the case of bioprocesses where the state of the live organisms of the system must be closely monitored. Extensive surveys have been published on this topic (Dochain, 2008). Furthermore, the last two decades have seen an increasing interest in improving the operation of bioprocesses by applying advanced control schemes. In particular, biological waste treatment process, more efficient than the traditional physicochemical methods but at the same time more complex, call for a consistent good performance, which leads to a need for more efficient instrumentation, control and automation.

To apply any control strategy it is necessary to measure the process main variables, this can be performed placing sensors (Alcaraz-González and González-Álvarez, 2007), however, although in many cases continuous measurements are easily available, for example the temperature or pH, due to economical reasons or consuming time techniques, other key variables can be only measured intermittently, or even not measured at all. For this reason the non measurable state variables should be estimated from available measurements (Meleiro and Filho, 2000). To deal with these problems, many solutions have been proposed in the past such as the well known classical Kalman filters and Luenberger observers (Ray, 1980) in both, continuous and discrete approaches. One of the reasons for the popularity of these estimators is that they are easy to implement since the algorithm can be derived directly from the state space

model. However, these state observers can not be easily implemented when both continuous and discrete information must be considered. In this direction Scali et al. (1997) have proposed an extended Kalman filter which updates some observer parameters each time that the sampled data is available. Using Lyapunov functions, Liu et al. (2008) and Muñoz de la Peña and Christofides (2008) have designed controllers that involve continuous and discrete retarded measurements. Nguang and Shi (2003) also use discrete measurements to design continuous fuzzy control algorithms. Based on this idea in this work it is proposed a continuous observer to be continuously updated from the continuous measurements and also retune the states each at each instant when the discrete measurements are available.

This work is organized as follows. A review of jump observers is presented in section 2, then in section 3 the observational problem is formulated, while the proposed solution is developed in section 4. In section 5 we analyze the dynamic behavior through numerical simulations for an anaerobic digestion system. Finally we close the paper with some concluding remarks.

2. BASIC FACTS OF JUMP OBSERVERS

Consider the linear system

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad \forall t \in [0, \infty) \quad (1)$$

$$y(k\delta) = Cx(k\delta) \quad k = 1, 2, 3, \dots, \quad (2)$$

where $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, and $y \in \mathbb{R}^q$ are the state, input and output vectors, respectively. In this case the outputs are obtained at each sampling time δ .

The usual way to estimate the unknown states of system (1) from output (2) consists in discretizing the system

^{*} Partially Supported by PROMEP under project 103.5/08/2919 and CONACYT under grant 43658.

and design a discrete observer. However, the observer thus obtained provides only information at each sampling period. Additionally, to obtain a discrete version of (1) it is necessary to have a well defined input in order to place the appropriate holder (for example a zero holder or a exponential holder), hence unexpected input variations during intersampling periods may produce discrete observer failures (García-Sandoval, 2006). For this reason, an interesting problem would be to construct an observer given by

$$\dot{z}(t) = Az(t) + Bu(t) \quad \forall t \neq k\delta \quad (3)$$

$$z(k\delta^+) = z(k\delta) - G[y(k\delta) - Cz(k\delta)] \quad t = k\delta \quad (4)$$

where $z \in \mathbb{R}^n$ are the observer states and $z(k\delta^+)$ denotes the updated observer states at each sampling instant. This is a continuous observer which updates its states at each sampling instant. The next lemma establishes conditions for the existence of such observer.

Lemma 1. Consider system (1)-(2) and suppose the pair $(e^{A\delta}, C)$ is observable, then an observer of the form (3)-(4) with the matrix gain G such that matrix $(I + GC)e^{A\delta}$ is Schur, guaranteeing that $\lim_{t \rightarrow \infty} [x(t) - z(t)] = 0$.

Proof. See Appendix.

Remark 2. The main feature of observer (3)-(4) remains in the fact that the intersampling state information is available at any time and it is not necessary to have a pre-established dynamic behavior for the input. Equation (3) can be seen as an continuous open loop observer in the intersampling period and whose states, according to (4), are reseted at sampling period.

3. PROBLEM FORMULATION

Consider the dynamic system

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \quad \forall t \in [0, \infty) \quad (5a)$$

$$y_1(t) = C_1 x(t) \quad \forall t \in [0, \infty) \quad (5b)$$

$$y_2(k\delta) = C_2 x(k\delta) \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (5c)$$

where $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$ and $y_1 \in \mathbb{R}^{q_1}$, $y_2 \in \mathbb{R}^{q_2}$ are the state, input and output vectors for the dynamic system, respectively. The outputs are divided into continuous (y_1), and discrete (y_2) with sampling time δ . For this system it is desirable to design a continuous observer which uses both discrete and continuous measurements, in order to have continuous information about the full vector state. The following assumption is instrumental for the observer design.

Assumption 3. Defining

$$A = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=0, u=0} \quad \text{and} \quad B = \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{x=0, u=0}$$

as the linear matrices for system (5), it is assumed that the pair (A, C) , with

$$C = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$$

is observable but, the pairs (A, C_1) and (A, C_2) related with continuous and discrete measurements, are not necessarily completely observable. That is, the observability matrix of these pairs may not have full rank.

In the following section it is presented a continuous observer for system (5), which is the main result of this work.

4. OBSERVER DESIGN

Assume that there is a transformation $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$, such that the linear approximation of system (5a)-(5b) becomes

$$\dot{z} = \bar{A}z(t) + \bar{B}u(t) \quad (6)$$

$$y_1 = \bar{C}_1 z(t)$$

where

$$z = Tx = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}, \quad \bar{A} = TAT^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

$$\bar{B} = TB = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix}, \quad \bar{C}_1 = C_1 T^{-1} = (C_{11} \ 0)$$

$z_1 \in \mathbb{R}^{n_1}$, $z_2 \in \mathbb{R}^{n_2}$, and the pair (A_{11}, C_{11}) is completely observable. In this case a partial observer for z_1 can be designed in such way that given a matrix G_{11} , $(A_{11} - G_{11}C_{11})$ is Hurwitz. Applying the inverse transformation, the proposed observer is,

$$\dot{\zeta}(t) = f(\zeta(t), u(t)) - G_1(C_1\zeta(t) - y_1(t))$$

where

$$G_1 = T^{-1} \begin{pmatrix} G_{11} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

This is a partial observer which only make use of continuous measurements (5b), however, using discrete measurements it is possible to design a jump observer as described in section 2, which include both continuous and discrete measurement. The following theorem states this result.

Theorem 4. Consider the system (5), which has a set of continuous measurements (5b) and a set of discrete measurements (5c) with sampling time δ . Furthermore consider that there is a transformation $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ which transforms the linear approximation of system (5a)-(5b) to its observable canonical form (6), while the matrix $G_1 = T^{-1}(G_{11}^T \ 0)^T$, is calculated in such a way that $(A_{11} - G_{11}C_{11})$ is Hurwitz and the matrix G_2 is such that $(I + G_2C)A_d$ is Schur, with $A_d = e^{(A - G_1C_1)\delta}$. Then, an observer for system (5), which takes continuous measurements and is also updated each sampling period is given by

$$\dot{\zeta}(t) = f(\zeta(t), u(t)) \quad \forall t \neq k\delta \quad (7a)$$

$$-G_1(C_1\zeta(t) - y_1(t)),$$

$$\zeta(k\delta^+) = \zeta(k\delta) \quad t = k\delta, \quad (7b)$$

$$+G_2(C_2\zeta(k\delta) - y_2(k\delta)), \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

where $\zeta \in \mathbb{R}^n$ are the observer states and $\zeta(k\delta^+)$ are its updated values at each sampling time and

$$y(k\delta) = \begin{pmatrix} y_1(k\delta) \\ y_2(k\delta) \end{pmatrix}.$$

This observer guarantees that, in a neighborhood of the origin, the error between the system and the observer states tends asymptotically to zero, i.e. $\lim_{t \rightarrow \infty} [x(t) - \zeta(t)] = 0$.

Proof. First, consider the linear approximations of both, system (5a) and observer (7a)

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad \forall t \in [0, \infty) \quad (8)$$

$$\dot{\zeta}(t) = (A - G_1 C_1) \zeta(t) + Bu(t) + G_1 y_1(t) \quad (9)$$

additionally, consider that there is a matrix T that transforms the system (8) and its output (5b) to its observable canonical form (6), i.e.

$$z = Tx = \text{col}(z_1, z_2),$$

$$\xi = T\zeta = \text{col}(\xi_1, \xi_2),$$

where z_1 and ξ_1 are the observable modes of x and ζ . Then for the observable subsystems of z and ξ defining the error $e_1(t) = z_1(t) - \xi_1(t)$, whose dynamic is

$$e_1(t) = (A_{11} - G_{11}C_{11}) e_1(t).$$

Since G_{11} is such that $(A_{11} - G_{11}C_{11})$ is Hurwitz, $e_1(t)$ tends asymptotically to zero. On the other hand, using discrete measurements, $y(k\delta)$, a jump observer (7) which allows the updating of the continuous dynamic observer states in every sampling period it is designed, taking advantage of the discrete information. Defining now the error

$$\eta(t) = x(t) - \zeta(t)$$

$$\eta(k\delta^+) = x(k\delta) - \eta(k\delta^+)$$

its linear dynamic approximation around $\eta = 0$ is

$$\dot{\eta}(t) = (A - G_1 C_1) \eta(t) \quad \forall t \neq k\delta$$

$$\eta(k\delta^+) = (I + G_2 C) \eta(k\delta) \quad t = k\delta, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

As described in Lemma 1, these dynamics are stable if the pair (A_d, C) with $A_d = e^{(A - G_1 C_1)\delta}$ is observable and the gain G_2 is such that the matrix $(I + G_2 C)A_d$ is Schur, thereby ensuring that $\lim_{k \rightarrow \infty} [x(k\delta) - \zeta(k\delta)] = 0$ and thus $\lim_{t \rightarrow \infty} [x(t) - \zeta(t)] = 0$, which proves the theorem.

Observer (7) can be seen as a hybrid observer since incorporate continuous dynamics (7a) and a discrete event (7b) which modify the continuous part. It should be also noted that the calculation of the observer part for continuous measurements is independent of the discrete observer part, however, the total discrete observer depends on the gain G_1 .

5. STUDY CASE

Last years, the environmental laws have been tightened and it has become mandatory treating wastewater from industries as well households (Alcaraz-González and González-Álvarez, 2007; Huntington, 1998). Because of this, the wastewater treatment control processes have received great importance, especially anaerobic processes are being widely considered as an alternative for the treatment of wastewater because it produces smaller quantities of organic matter and also yields a high-energy gas (Méndez-Acosta et al., 2008). To achieve the control of these processes, state observers are frequently used, however for economical reasons some key variables can just be measured using long sampling times, while others may be measured more often. For this reason, a jump observer is proposed as presented in theorem 4.

There exists many dynamic models to describe anaerobic process (Andrews, 1968; Batstone et al., 2002; Bernard

et al., 2006). However, to apply the proposed observer, a macroscopic model of the anaerobic process developed and validated by Bernard et al. (2001) it is considered,

$$\dot{X}_1 = (\mu_1(S_1) - \alpha D) X_1 \quad (10a)$$

$$\dot{S}_1 = -k_1 \mu_1(S_1) X_1 + (S_{1in} - S_1) D \quad (10b)$$

$$\dot{X}_2 = (\mu_2(S_2) - \alpha D) X_2 \quad (10c)$$

$$\dot{S}_2 = -k_3 \mu_2(S_2) X_2 + k_2 \mu_1(S_1) X_1 + (S_{2in} - S_2) D \quad (10d)$$

where X_1 , X_2 , S_1 , S_2 , are respectively the concentrations of acidogenic bacteria, methanogenic bacteria, Chemical Oxygen Demand (COD) and Volatile Fatty Acids (VFA), D is the dilution rate, defined by the ratio $D = Q/V$, where Q is the feeding flow and V the digester volume, S_{1in} and S_{2in} are respectively the concentrations of influent organic substrate and of influent VFA. The k_i s are pseudo-stoichiometric coefficients associated to the bioreactions. Parameter $\alpha \in (0, 1]$ represents the fraction of the biomass which is not retained in the digester (Hess and Bernard, 2008). The bacterial growth rates $\mu_1(S_1)$ and $\mu_2(S_2)$, are nonlinear functions given respectively by the Monod and Haldane kinetics (Henze and Harremoes, 1983)

$$\mu_1(S_1) = \mu_{\max 1} \frac{S_1}{S_1 + K_{S1}}$$

$$\mu_2(S_2) = \mu_{\max 2} \frac{S_2}{S_2 + K_{S2} + (S_2/K_{I2})^2}$$

where $\mu_{1 \max}$, K_{S1} , $\mu_{2 \max}$, K_{S2} and K_{I2} are the maximum bacterial growth rate and the half-saturation constant associated to the substrate S_1 , the maximum bacterial growth rate in the absence of inhibition, and the saturation and inhibition constants associated to substrate S_2 , respectively. The values of parameters and the input concentrations used for simulations are listed in Tables 1 and 2.

If we consider that VFA concentration (S_2) is a continuous measurement while the COD concentration (S_1) can just be periodically acquired (in fact in real operations, VFA concentration can be obtained up to every hour or less (Méndez-Acosta et al., 2008), hence it can be considered continuous compared with the resident time and the COD

Table 1. Model Parameters (Alcaraz-González et al., 2003)

Parameter	Value
μ_1	1.2 d ⁻¹
$\mu_{\max 2}$	0.69 d ⁻¹
K_{S1}	4.95 kg COD/m ³
K_{S2}	9.28 mol VFA/m ³
K_{I2}	20 mol VFA/m ³
k_1	6.6 kg COD/kg X_1
k_2	7.8 mol VFA/kg X_1
k_3	611.2 mol VFA/kg X_2
α	0.5 (addimentional)

Table 2. Input Concentrations

Substrate	Value
S_{1in}	20 Kg COD/m ³
S_{2in}	100 mol VFA/m ³

concentration that could be measured even just once a day), the jump observer developed in the previous section can be then applied to the dynamic system (10) writing it in the form

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} \mu_1(S_1)X_1 \\ -k_1\mu_1(S_1)X_1 \\ \mu_2(S_2)X_2 \\ -k_3\mu_2(S_2)X_2 + k_2\mu_1(S_1)X_1 \\ -\alpha X_1 \\ S_{1in} - S_1 \\ -\alpha X_2 \\ S_{2in} - S_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\alpha X_1 \\ S_{1in} - S_1 \\ -\alpha X_2 \\ S_{2in} - S_2 \end{pmatrix} u(t) \quad (11)$$

$$y_1(t) = (0 \ 0 \ 0 \ 1) x(t)$$

$$y_2(k\delta) = (0 \ 1 \ 0 \ 0) x(k\delta)$$

where

$$x(t) = \begin{pmatrix} X_1 \\ S_1 \\ X_2 \\ S_2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

and $u(t) = D(t)$. System (11) can be represented as

$$\dot{x}(t) = f(x) + g(x)u(t). \quad (12)$$

To calculate the jump observer (7) is necessary to linearize the system (12) around a neighborhood of equilibrium points (Hess and Bernard, 2008; Méndez-Acosta et al., 2008) so the system has the form

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + f(x, u)$$

where

$$A = \left[\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial x} u \right]_{x=0, u=0} \quad B = g(x)|_{x=0}$$

are the linear approximation matrices around the steady state [see (Hess and Bernard, 2008) for a detailed steady state analysis]. In this case, the observability matrices for pairs (A, C_1) , (A, C_2) and (A, C) have ranks 4, 2 and 4, respectively, i.e. using S_2 it is possible to estimate the four states, while using S_1 it is just possible to estimate the acidogenic part of the system. This is obvious since system (10) has a cascade dynamic form between acidogenic and methanogenic dynamics.

Considering a sampling time (δ) equal to 1 and parameters listed in Tables 1 and 2, it is easy to verify that A , B and A_d take the values

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0.7900 & 0 & 0 \\ -1.8756 & -5.7825 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0015 \\ 2.2166 & 6.1622 & -173.6936 & -1.4701 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} -2.7976 \\ 18.4640 \\ -0.1413 \\ 90.0000 \end{pmatrix},$$

$$A_d = \begin{pmatrix} 0.8033 & 0.1145 & 0 & 0 \\ -0.2719 & -0.0349 & 0 & 0 \\ 0.0003 & 0.0008 & 0.9186 & 0.0007 \\ 0.1556 & 0.3069 & -87.2825 & 0.1798 \end{pmatrix},$$

Using LQR techniques to calculate observer gains, observer (7) is designed in order to fulfill theorem 4, obtaining

Table 3. Initial conditions for simulations runs.

State variable	$X_1(0)$ kg/m ³	$S_1(0)$ kg/m ³	$X_2(0)$ kg/m ³	$S_2(0)$ mol/m ³
Plant	1.433	0.1	0.2	0.4
Observer	0.5	0.3	0.1	1

$$G_1 = \begin{pmatrix} -0.0005 \\ 0.0115 \\ -0.9985 \\ 17.2429 \end{pmatrix} \quad G_2 = \begin{pmatrix} 0.0007 & 0.3923 \\ -0.0002 & -0.1330 \\ 0 & 0.0003 \\ 0 & -0.0002 \end{pmatrix}.$$

5.1 Simulation Results

In order to illustrate the performance of observer (7), some numerical simulations were carried out. Initial conditions and input concentrations for these simulations are listed in Table 3 and 2, while dilution rate was considered as a time varying sinusoidal signal around the nominal value. To verify if the incorporation of the discrete measurement to the continuous observer reduces convergence time, hybrid observer (7) was compared with a continuous observer identical to (7a) without the use of (7b) (or equivalently, for this observer G_2 was settled equal to zero). Figure 1 shows the dynamic behavior of hybrid observer, the discrete actualization is clearly visible in Figure 1a where at time $t = 1$ d there is a jump on the acidogenic biomass estimation. As can be seen, observer states converges after approximately tree days. In contrast, the continuous observer (see Figure 2) converges in approximately twelve days, i.e. four times slower than the hybrid observer. Comparing both observers it easy to see that the hybrid observer obtained a faster convergence rate.

6. CONCLUSIONS

An nonlinear observer which updates the states using continuous and discrete measurements was presented. Despite this is a local observer, since observer gain matrices were calculated using the linear approximation of the original nonlinear system, its application to an anaerobic digestion model presents an excellent performance and stability, obtaining an improvement in convergence rate in comparison with an observer which only uses the continuous information. As future work, the authors are considering to extend this theory to the case where there exists parametric variations in the original plant, as well as the use of these observers to the control of systems with continuous and discrete measurements.

(Chapter head:)*

Bibliography

- Alcaraz-González, V. and González-Álvarez, V. (2007). *Selected Topics in Dynamics and Control of Chemical and Biological Processes*, volume 361 of *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, chapter Robust Nonlinear Observers for Bioprocesses Application to Wastewater Treatment, 119–164. Springer, Germany.
- Alcaraz-González, V., Harmand, J., Dochain, D., Rapaport, A., Steyer, J., Pelayo-Ortiz, C., and González-Álvarez, V. (2003). A robust asymptotic observer for chemical and biochemical reactors. In *Proc. Of the IFAC ROCOND 2003*. IFAC.

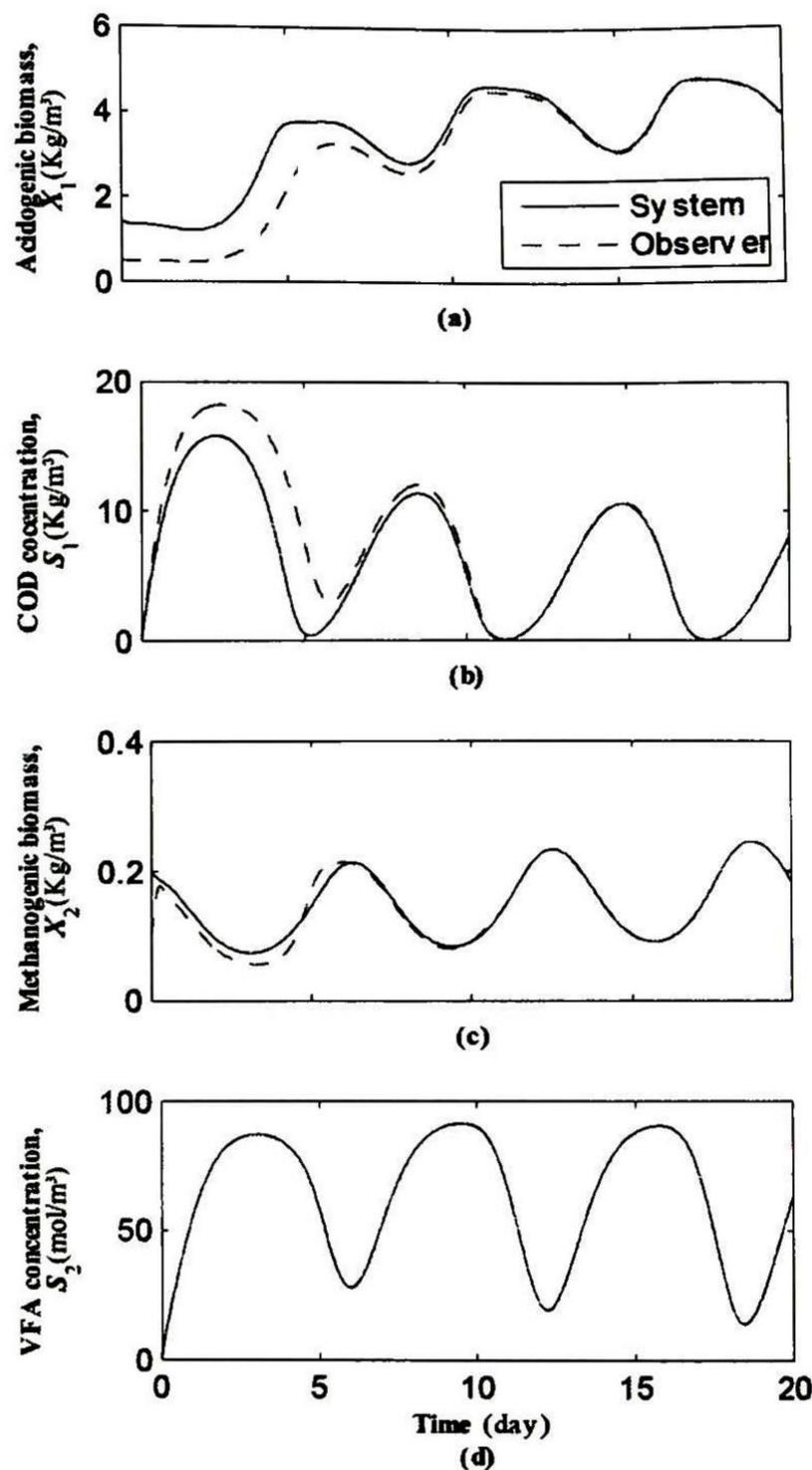
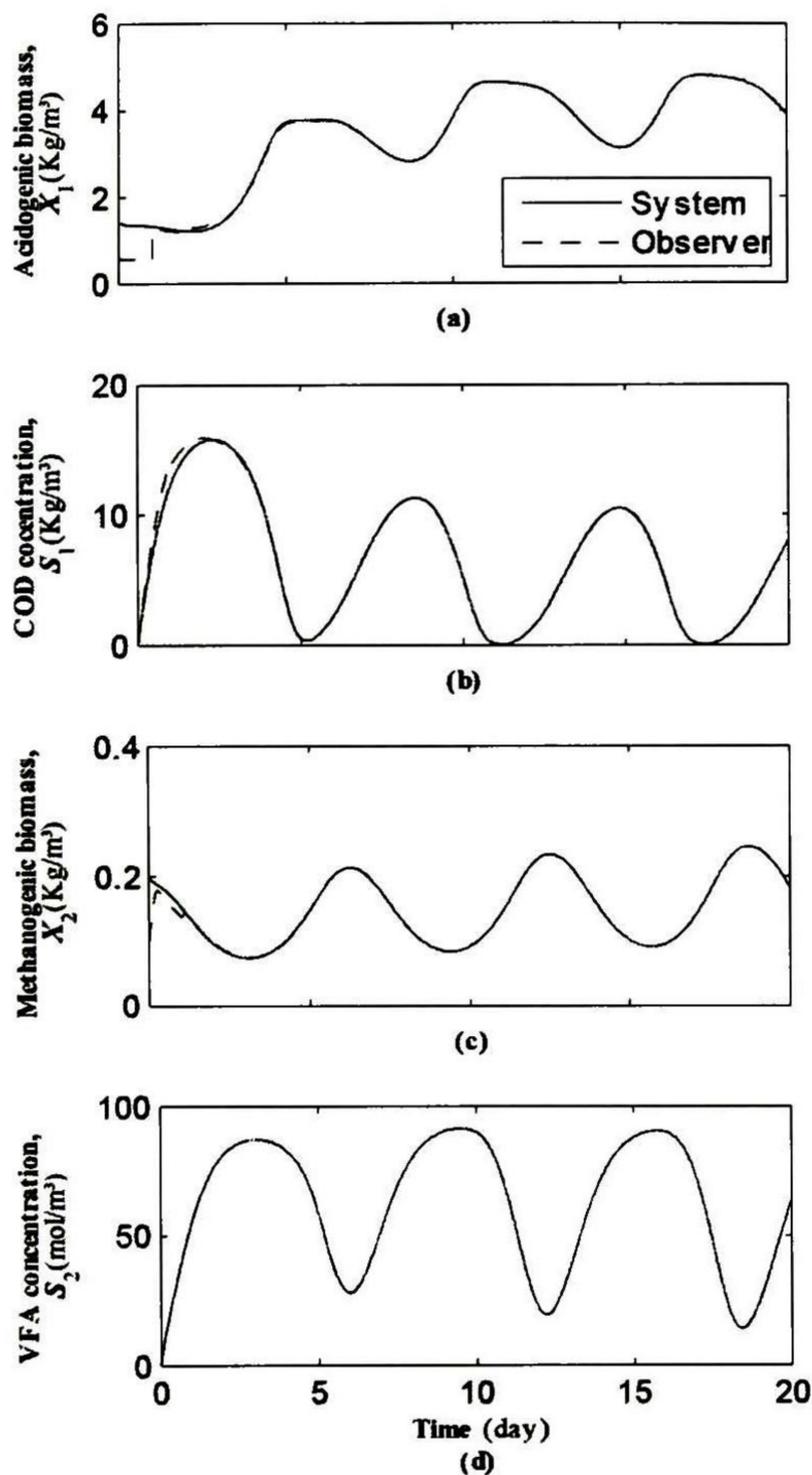


Fig. 1. Hybrid observer simulation.

Fig. 2. Continuous observer simulation.

Andrews, J. (1968). A mathematical model for the continuous culture of microorganisms utilizing inhibitory substrates. *Biotechnology and Bioengineering*, 10, 707–723.

Batstone, D., Keller, J., Angelidaki, I., Kalyuzhnyi, S., Pavlostathis, S., Rozzi, A., Sanders, W., Siegrist, H., and Vavilin, V. (2002). *Anaerobic Digestion Model No. 1 (ADM1)*, volume 13 of *Scientific and Technical Report*. IWA Publishing, London.

Bernard, O., Chachuat, B., Hélias, A., and Rodríguez, J. (2006). Can we assess the model complexity for a bioprocess: Theory and example of the anaerobic digestion process. *Water Science Technology*, 53(1), 85–92.

Bernard, O., Hadj-Sadok, Z., Dochain, D., Genovesi, A., and Steyer, J. (2001). Dynamical model development and parameter identification for anaerobic wastewater treatment process. *Biotechnology & Bioengineering*,

75(4), 424–439.

Dochain, D. (2008). *Bioprocess Control*. Control Systems, Robotics and Manufacturing. Wiley.

García-Sandoval, J. (2006). *The Robust Regulation Problem Using Immersions: Reactors Applications*. Ph.D. thesis, CINVESTAV.

Henze, M. and Harremoës, P. (1983). Anaerobic treatment of wastewater in fixed film reactors- a literature review. *Water Science and Technology*, 15(1), 1–101.

Hess, J. and Bernard, O. (2008). Design and study of a risk management criterion for an unstable anaerobic wastewater treatment process. *Journal of Process Control*, 18(1), 71–79.

Huntington, R. (1998). Twenty years development of ICA in a water utility. *Wat. Sci. Technol.*, 37(12), 27–34.

Kailath, T. (1980). *Linear Systems*. Prentice Hall.

Liu, J., Muñoz de la Peña, D., Ohran, B.J., Christofides, P.D., and Davis, J.F. (2008). A two-tier architecture

for networked process control. *Chemical Engineering Science*, (63), 5394–5409.

Meleiro, L. and Filho, R. (2000). State and parameter estimation based on a nonlinear filter applied to an industrial process control of ethanol production. *Braz. J. Chem. Eng.*, 17, 4–7.

Méndez-Acosta, H., Palacios-Ruiz, B., Alcaraz-González, V., Steyer, J., González-Álvarez, V., and Latrille, E. (2008). Robust control of volatile fatty acids in an anaerobic digester. *Industrial and Engineering Chemical Research*, 47(20), 7715–7720.

Muñoz de la Peña, D. and Christofides, P.D. (2008). Output feedback control of nonlinear systems subject to sensor data losses. *Science Direct*, (57), 631–642.

Nguang, S. and Shi, P. (2003). Fuzzy \mathcal{H}_∞ output feedback control of nonlinear systems under sampled measurements. *Automatica*, 39, 2169–2174.

Ray, W. (1980). *Advanced Process Control*. McGraw-Hill.

Scali, C., Morretta, M., and Semino, D. (1997). Control of the quality of polymer products on continuous reactors: Comparison of performance of state estimators with and without updating of parameters. *Journal of Process Control*, 7(5), 357–369.

Appendix A. APPENDIX

Proof. [Lemma 1] Let us define

$$\xi(t) = x(t) - z(t), \quad \text{and} \quad \xi(k\delta^+) = x(k\delta) - z(k\delta^+),$$

where $\xi(t)$ represents the continuous error and $\xi(k\delta^+)$ is the updated error for each sampling period. Note that $x(k\delta^+) = x(k\delta)$ since system (1) is continuous. Now

$$\dot{\xi}(t) = A\xi(t) \quad \forall t \neq k\delta \quad (\text{A.1})$$

$$\xi(k\delta^+) = (I + GC)\xi(k\delta) \quad t = k\delta. \quad (\text{A.2})$$

Solving (A.1) for $t \in [k\delta^+, (k+1)\delta]$, it follows that

$$\xi(k+1) = A_d \xi(k\delta^+), \quad (\text{A.3})$$

where $A_d = e^{A\delta}$. From (A.2) and (A.3) it is obtained

$$\begin{aligned} \xi((k+1)\delta^+) &= (I + GC)\xi(k+1) \\ &= (I + GC)A_d \xi(k\delta^+), \end{aligned}$$

and thus, if the pair (A_d, CA_d) is observable, then a matrix G can be calculated such that $A_d + GCA_d$ is Schur and the error $\xi(k\delta^+)$ will converge to zero, hence $\lim_{k \rightarrow \infty} [x(k\delta) - z(k\delta^+)] = 0$; then for $k\delta < t \leq (k+1)\delta$ the solution $z(t)$ converges to $x(t)$, that is $\lim_{t \rightarrow \infty} [x(t) - z(t)] = 0$. On the other hand, to prove that the pair (A_d, CA_d) is observable if the pair (A_d, C) is observable, consider its observability matrix

$$\mathcal{O} = \begin{pmatrix} CA_d \\ CA_d^2 \\ \vdots \\ CA_d^n \end{pmatrix}$$

where $A_d \in \mathbb{R}^{n \times n}$, then using the Hamilton-Cailey theorem (Kailath, 1980)

$$A_d^n = a_0 I + a_1 A_d + \dots + a_{n-1} A_d^{n-1},$$

and the observability matrix becomes

$$\mathcal{O} = \begin{pmatrix} CA_d \\ CA_d^2 \\ \vdots \\ a_0 C + a_1 CA_d + \dots + a_{n-1} CA_d^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Since A_d is obtained through a discretization of matrix A then $a_0 \neq 0$ and \mathcal{O} has full rank if the pair (A_d, C) is observable.



CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS DEL I.P.N. UNIDAD GUADALAJARA

El Jurado designado por la Unidad Guadalajara del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional aprobó la tesis

El Problema de Observación y Control de una Clase de Sistemas Dinámicos Utilizando Esquemas Híbridos de Medición

del (la) C.

Carmen Patricia GUILLÉN FLORES

el día 17 de Diciembre de 2009.

Dr. Bernardino Castillo Toledo
Investigador CINVESTAV 3C
CINVESTAV Unidad Guadalajara

Dr. José Javier Ruíz León
Investigador CINVESTAV 3B
CINVESTAV Unidad Guadalajara

Dr. Antonio Ramírez Treviño
Investigador CINVESTAV 3A
CINVESTAV Unidad Guadalajara

Dr. Juan Paulo García Sandoval
* Profesor Investigador
CUCEI Universidad de Guadalajara

