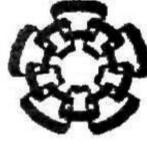


xx (178820.1)



CINVESTAV
BIBLIOTECA CENTRAL



SSIT000009521

CM

TK165 G8

R83

2009

**CINVESTAV
IPN
ADQUISICION
DE LIBROS**



Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del
Instituto Politécnico Nacional

Unidad Guadalajara

**Diagnóstico de faltas para una clase
de sistemas lineales conmutados**

Tesis que presenta:

Lizette Rubio Gómez

para obtener el grado de:

Maestro en Ciencias

en la especialidad de:

Ingeniería Eléctrica

Directores de Tesis

**Dr. José Javier Ruíz León
Dr. Antonio Ramírez Treviño**



CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y
DE ESTUDIOS AVANZADOS DEL
INSTITUTO POLITÉCNICO
NACIONAL

COORDINACIÓN GENERAL DE
SERVICIOS BIBLIOGRÁFICOS

Guadalajara, Jalisco, Diciembre de 2009.

CLASIF.: TK 165. G8, 783 2009
ADQUIS.: 591-599
FECHA: 21-Mayo-2010
PROCED.: DON. - 2010
\$

164594-1001

Diagnóstico de faltas para una clase de sistemas lineales conmutados

**Tesis de Maestría en Ciencias
Ingeniería Eléctrica**

Por:

Lizette Rubio Gómez

Ingeniero en Comunicaciones y Electrónica
Universidad de Guadalajara 2000-2005

Becario de Conacyt, expediente no. 13884

Directores de Tesis

Dr. José Javier Ruíz León

Dr. Antonio Ramírez Treviño

CINVESTAV del IPN Unidad Guadalajara, Diciembre de 2009.

Índice General

| | |
|---|------------|
| Resumen | iii |
| Abstract | v |
| Agradecimientos | vii |
| 1 Introducción | 1 |
| 1.1 Descripción del problema de diagnóstico | 1 |
| 1.2 Antecedentes | 2 |
| 1.3 Objetivos | 3 |
| 1.4 Contribuciones | 4 |
| 1.5 Organización de la tesis | 4 |
| 2 Conceptos básicos | 7 |
| 2.1 Definiciones de diagnóstico | 7 |
| 2.2 Sistemas híbridos | 8 |
| 2.3 Redes de Petri | 9 |
| 2.3.1 Propiedades de los sistemas de redes de Petri | 10 |
| 2.3.2 Subclases de redes de Petri | 11 |
| 2.4 Redes de Petri interpretadas . | 11 |
| 2.5 Sistemas lineales continuos . | 15 |
| 2.6 Sistemas lineales conmutados con redes de Petri interpretadas | 17 |
| 3 Diagnosticabilidad | 19 |
| 3.1 Diagnosticabilidad en sistemas lineales | 19 |
| 3.2 Diagnosticabilidad en redes de Petri interpretadas | 22 |
| 3.3 Modelado de las faltas en el sistema | 25 |
| 3.4 Caracterización del diagnóstico en un sistema lineal conmutado completo | 27 |
| 3.5 Conceptos de distinguibilidad | 30 |
| 3.6 Diseño del distinguidor | 32 |
| 3.7 Evento detectabilidad | 34 |

| | | |
|----------|--|-----------|
| 4 | Caracterización de diagnosticabilidad | 37 |
| 4.1 | Diseño del diagnosticador | 38 |
| 4.2 | Ejemplo ilustrativo | 39 |
| 5 | Conclusiones y trabajo futuro | 43 |
| | Bibliografía | 45 |

Resumen

En este trabajo se aborda el problema de diagnóstico de faltas en una clase particular de sistemas híbridos, que son los Sistemas Lineales Conmutados (*SLC*), donde la parte continua del *SLC* está compuesta por una familia de Sistemas Lineales (*SL*) y la parte discreta se representa por una Red de Petri Interpretada (*RPI*), de forma que para cada marcado de la *RPI* sólo un *SL* está evolucionando.

La técnica de diagnóstico aquí presentada se basa en la generación de residuos, donde para las faltas continuas se genera un residuo por cada una de ellas y para las faltas discretas se genera un residuo único de valor entero, el valor de dicho residuo indica cual falta se presentó.

Las principales aportaciones de este trabajo son las siguientes. La primera es una redefinición del modelo de *SLC* con *RPI*. En la literatura existente, la elección de cuál *SL* está evolucionando depende del marcado de la *RPI* (o del estado de un autómata), esto conlleva a un análisis exhaustivo en la parte discreta, ya que se tiene que crear el grafo de alcanzabilidad de la *RPI*. Con nuestra propuesta este problema ha sido eliminado, ya que la elección del *SL* evolucionando depende ahora de la estructura de la *RPI*. La segunda aportación es redefinir la forma de crear el diagnosticador discreto. En nuestro caso modificamos el diseño de generadores de residuos discretos para que tuvieran la misma forma al diseño de generadores continuos, logrando unificar las teorías de diseño de generadores de residuos discretos y continuos. La tercera aportación es la definición y caracterización de la propiedad de diagnosticabilidad en *SLC*. En este caso estudiamos cómo la información de la *RPI* aporta nueva información a la parte continua y viceversa, permitiendo diagnosticar *SLC* aun cuando ni los *SL* ni la *RPI* son diagnosticables.

Abstract

This work addresses the problem of fault diagnosis in a particular class of hybrid systems, namely, Switched Linear Systems (*SLS*), where the continuous part of the *SLS* is composed by a family of Linear Systems (*LS*) and the discrete part is represented by an Interpreted Petri Net (*IPN*), i.e. for each marking in the *IPN* just one *LS* is evolving.

The diagnostic technique presented here is based on residual generation, where for continuous faults a residual is generated for each one, and for discrete faults a single integer residue is generated, the value of that residual indicates which fault was presented.

The main contributions of this work are as follows. The first one is a redefinition of the *SLS* model with *IPN*. In the literature, the selection of which *LS* is evolving depends of the marking in the *IPN* (or state of an automata), this leads to an exhaustive analysis in the discrete part, because the graph reachability of the *IPN* is created. With our proposal this problem has been eliminated, since the choice of the evolving *LS* now depends on the structure of the *IPN*. The second contribution is to redefine the way to create a discrete diagnoser. In our case we modify the design of discrete residual generators that corresponds to the continuous generator design, achieving unifying the theories of design of discrete and continuous residual generators. The third contribution is the definition and characterization of the property of diagnosticability in *SLS*. In this case we study how the information in the *IPN* provides new information to the continuous part and vice versa, allowing the diagnose of *SLS* even though neither the *LS* nor the *IPN* are diagnosable.

Agradecimientos

A Dios por darme la vida.

A mis padres por todo el amor, comprensión, paciencia y apoyo que siempre me han brindado para alcanzar todos mis sueños.

A mis hermanas quienes en mis horas de desvelo estuvieron a mi lado con una palabra de aliento.

A mis asesores por enseñarme un mundo nuevo de conocimientos a favor de mi formación profesional.

A mis sinodales por sus comentarios para mejorar la redacción de la presente tesis.

A mis compañeros por hacer grato mi caminar académico.

Al CINVESTAV por brindarme un lugar donde desarrollar mis conocimientos.

y

Al CONACyT por el apoyo económico otorgado.

Capítulo 1

Introducción

Recientemente ha surgido un considerable interés en el estudio de sistemas híbridos en las áreas de control y computación. Este tipo de sistemas dinámicos incluye variables de estado continuas y discretas simultáneamente y acopladas, tanto en tiempo continuo como en los saltos discretos. El modelado de sistemas híbridos y el posterior control de los mismos tiene muchos aspectos teóricos aun no resueltos por lo que su estudio presenta muchos desafíos a los investigadores en el área. Tampoco se ha profundizado en el estudio del diagnóstico de faltas en estos sistemas, por lo que este trabajo se enfoca en este tópico.

Un sistema híbrido está conformado de una parte continua y una parte discreta. Hay diferentes clases de sistemas híbridos, como los son los sistemas híbridos lineales, sistemas lineales conmutados, jump linear systems, etc... A lo largo de este trabajo se utilizan los sistemas lineales conmutados (*SLC*) que son representados por una familia \mathcal{F} de sistemas lineales (*SL*) y la parte discreta es representada por una red de Petri interpretada (*RPI*). Los *SLC* son sistemas dinámicos donde la estructura del sistema cambia de acuerdo a reglas de disparo en la parte discreta. El disparo de una transición en la parte discreta provoca que la dinámica continua conmute de un sistema lineal continuo a otro dentro de la familia \mathcal{F} . A pesar de que en la literatura existente ya se utilizaban las *RPI* no se aprovechaban sus propiedades estructurales, dado que el *SL* que evoluciona se escogía por medio del marcado de la red, en este trabajo se ha eliminado este problema. En específico este trabajo trata con la detección de faltas basándose en la propiedad de evento detectabilidad en los *SLC* y el diseño de diagnosticadores asintóticos para esta clase de sistemas.

1.1 Descripción del problema de diagnóstico

Este trabajo se basa en el diagnóstico de faltas de sistemas donde el conjunto de faltas potenciales son conocidas previamente. Lo que se requiere es que la ocurrencia de éstas en tiempo real sea detectado y aislado. Una hipótesis que se asume en este trabajo es que las faltas son disparadas de ciertos estados del sistema, es decir, no pueden ocurrir en cualquier parte. Por ejemplo, un motor puede dañarse sólo si está funcionando.

En el presente trabajo se lleva a cabo el diagnóstico de sistemas lineales conmutados

combinando la generación de residuos, la distinguibilidad y los ciclos indeterminados. Las faltas discretas son representadas por el disparo de ciertas transiciones en la Red de Petri (RP), llamadas transiciones de falta. De esta manera, el Sistema Lineal Conmutado (SLC) salta de un Sistema Lineal (SL) representando un comportamiento normal a otro SL representando una falta por el disparo de una transición de falta. Así la detección y aislamiento de ésta se conoce detectando o calculando el disparo de las transiciones de falta. Para lograr esto último, el conocimiento de la información entrada-salida del SLC , es decir de ambos, la parte continua y discreta es usada.

En particular, el disparo de una transición de falta se puede detectar si es evento detectable. Este concepto es tomado de la Red de Petri Interpretada (RPI) [19], el concepto es extendido a los SLC de dos maneras distintas.

Si el $SL \Sigma_a$ evolucionando antes del disparo de la transición de falta t_{f_i} es distinguible del $SL \Sigma_b$ evolucionando después del disparo de t_{f_i} , entonces el disparo de t_{f_i} puede ser detectado y aislado conociendo cual SL está evolucionando, Σ_a si o Σ_b .

Si el disparo de una transición de falta no puede ser detectada porque no es evento detectable, las faltas discretas no son detectadas con distinguibilidad, entonces el disparo de la transición de falta puede ser detectado si el disparo de transiciones que se encuentran en el comportamiento normal del SLC es detectado.

La detección y aislamiento de las faltas continuas se realiza usando un generador de residuos; para detectar las faltas, el espacio de alcanzabilidad de la falta en un sistema extendido debe ser observable a la salida, mientras que la entrada del sistema, así como el resto de las faltas continuas deben estar en el subespacio \mathcal{N} de no observabilidad del sistema.

1.2 Antecedentes

La mayoría de los trabajos que se encuentran en la literatura se basan en el diagnóstico de faltas para los sistemas de eventos discretos, o bien faltas continuas en los sistemas lineales; pero son pocos los trabajos que diagnostican ambos tipos de faltas a la vez. Con los sistemas híbridos es posible modelar sistemas de potencia, manufactura, electrónicos, etc. de tal manera que el comportamiento normal y de falta se represente por la familia de SL y la RPI especificando la forma en la cual se está desarrollando el sistema (por ejemplo como los componentes de falta y normal son visitados). Se utilizan sistemas lineales conmutados para modelar a priori las faltas discretas y continuas que pudieran ocurrir en el sistema y así detectar y aislar los componentes de falla. Por ejemplo los sistemas de potencia pueden representarse por una familia de SL , uno por cada sistema de operación y uno para cada falta.

En SL existen trabajos que tratan con el diagnóstico de faltas, algunos trabajos introducen las faltas como variaciones paramétricas en el SL , como en [15] donde se utiliza un residuo para mostrar que una falta f_i se puede detectar en el sistema; el residuo lo contruye de tal manera que su salida sólo se ve afectada por la falta f_i , mientras que la entrada del sistema y el resto de las faltas no se observan a la salida del residuo; sin embargo, el número

de faltas que se pueden detectar está limitado al rango del espacio de salida.

El método para diseñar residuos basándose en la entrada-salida de la información, fue originalmente propuesto por Mironovski en 1980, el cual consiste en determinar si las mediciones de entrada-salida del sistema son consistentes con el modelo matemático [17]. También [7] construye un generador de residuos siguiendo la misma línea de investigación y desarrolla un método de espacio de paridad en el dominio \mathbb{Z} , pero requiere calcular una inversa, implicando que computacionalmente se vuelva complicado.

Para diagnosticar Sistemas de Eventos Discretos (*SED*) también existe diversa literatura. En [23] se usa un autómata finito y se introduce una noción de diagnosticabilidad, también propone una técnica para construir un diagnosticador. Las posibles faltas son representadas por medio de transiciones incontrolables o internas llamadas *transiciones* $-\varepsilon$, donde el *SED* es diagnosticable si no existen ciclos F_i indeterminados. La desventaja es que la prueba de diagnosticabilidad tiene complejidad exponencial en el número de estados del sistema. Se han hecho extensiones al trabajo previamente mencionado, como [11] quien basa la propiedad de diagnosticabilidad en la entrada, salida y en la información del tiempo asociada a los eventos; permite que el diagnosticador y el sistema inicialicen su ejecución en condiciones iniciales diferentes. Sin embargo, al no inicializarse en el mismo instante de tiempo, se genera un espacio de estados mayor que en el propuesto en [23].

La diagnosticabilidad en los *SED* ha sido también abordada usando *RP* [10], [9] donde la falta es detectada si la ley conservativa de marcado no se cumple, la desventaja es que sólo monitorean sistemas completamente medibles, lo cual es muy difícil. La diagnosticabilidad en [22] para *SED* usando *RPI* se basa en utilizar las marcas que fueron eliminadas cuando ocurrió la falta f_i , recurriendo a la evento detectabilidad. Sin embargo, aún falta un análisis estructural más completo para caracterizar más clases de *RP* diagnosticables.

En [5] y [6] el problema del diagnóstico de faltas en Sistemas Híbridos es tratado. Este enfoque detecta y aísla faltas usando la secuencia de eventos y asociando a cada evento de falta una etiqueta que puede tomarse de la parte continua o discreta. Sin embargo, la manera en que las variables continuas son escogidas no es mencionada. [3] modela el sistema híbrido físico usando gráficas de conexión y el *SED* como un autómata finito, el diagnóstico se basa en analizar faltas transitorias, estimando por medio del modelo cuando es incorrecto. Sin embargo algunas ambigüedades son detectadas para ciertos tipos de faltas en los sensores.

1.3 Objetivos

Los objetivos principales de este trabajo son:

- Proponer una nueva definición para *SLC* que utiliza mejor las características de las *RPI*.
- Revisar y actualizar la teoría de diagnóstico en *SED* para poderla expresar de igual manera que en *SL*, para obtenerse caracterizaciones que abarquen más tipos de *RP* de forma eficiente, ya que los resultados son estructurales.

- Verificar si la salida de los sistemas continuos ayuda a diagnosticar faltas discretas que la *RPI* no podía.
- Verificar si con la salida de la *RPI* se obtiene más información para los *SL*.
- Presentar un modelo para el diagnóstico de faltas.
- Proponer el diseño de un diagnosticador para los *SLC*.

1.4 Contribuciones

Las principales aportaciones de este trabajo son las siguientes:

- La primera es la unificación de la teoría de diagnóstico discreto a la ya existente en la parte continua. Se modifica el diseño de generadores de residuos discretos para que tengan la misma forma a los generadores continuos.
- Se redefine el modelo de los *SLC* con *RPI*. En la literatura existente, la elección del *SL* que está evolucionando dependía del marcado de la *RPI*, con nuestra propuesta la elección del *SL* que está evolucionando depende de la estructura de la *RPI*, eliminando el problema de crear el grafo de alcanzabilidad.
- En base a la teoría de distinguibilidad propuesta en [8] se diseña un distinguidor para determinar cual *SL* está evolucionando dentro de un conjunto de *SL*.
- Se define y caracteriza la propiedad de diagnosticabilidad en *SLC* de manera estructural y en tiempo polinomial. En este caso se estudia cómo la información de la *RPI* aporta nueva información a la parte continua y viceversa, permitiendo diagnosticar más *SLC*.
- Se presentó el artículo [12] titulado "Diagnóstico de faltas de control en *RPI*" en un congreso, además se tiene aceptado un capítulo en el libro "Petri Nets" con el título "Diagnosability in Switched Linear Systems" [21].

1.5 Organización de la tesis

A continuación se muestra la forma en que la tesis está organizada.

En el Capítulo 2 presenta los conceptos básicos relacionados al diagnóstico; una definición general de los sistemas híbridos; definición de las redes de Petri y algunas de sus propiedades, así como la definición de su extensión a *RPI* (las cuales se utilizan en este trabajo); se expone la teoría de los *SL* y se muestran algunos teoremas relacionados a estos; finalmente se presenta la definición que se utilizará a lo largo de este trabajo para los sistemas lineales conmutados con *RPI*.

En el Capítulo 3 se presenta la propiedad de diagnosticabilidad en *SL* y *RPI*, y se diseña un diagnosticador para cada uno por medio de generadores de residuos. También

se expone la metodología de modelado para capturar las faltas discretas y continuas en el *SLC*. En una sección se propone el diseño de un distinguidor que determine cual *SL*, dentro de un conjunto de *SL*, está evolucionando. Por último se describe la propiedad de evento detectabilidad para *RPI* y una extensión a los *SLC* cuando la información de los *SL* es utilizada.

La caracterización y definición de diagnosticabilidad en *SLC* se presenta en el Capítulo 4, asimismo se propone el diseño del diagnosticador y el algoritmo a seguir para el diagnóstico de *SLC* y por último se presenta un ejemplo ilustrativo.

Finalmente, las conclusiones y trabajo futuro son presentadas en el Capítulo 5.

Capítulo 2

Conceptos básicos

2.1 Definiciones de diagnóstico

En esta sección se presentan algunas definiciones para el diagnóstico de faltas utilizadas a lo largo de este trabajo.

Definición 2.1 Falta. *Es un defecto que puede ocasionar un error en el sistema, el cual tiene potencial de ocurrir en el desempeño normal de éste.*

Definición 2.2 Falla. *Es un defecto que ocasionó que el sistema se desviará de su comportamiento normal, es decir, el sistema no opera de forma correcta o especificada.*

Definición 2.3 Faltas discretas. *Son aquellas faltas que existen cuando hay un cambio erróneo en el modelo del sistema lineal, es decir la dinámica del sistema cambia. Un ejemplo sería que un motor se descomponga.*

Definición 2.4 Faltas continuas. *Representan fallas en los sensores o actuadores en la dinámica del SL y se agregan de forma aditiva a éste, donde las faltas de los sensores se pueden sustituir en la dinámica del sistema como faltas en los actuadores [15].*

Todo sistema es propenso a que su funcionamiento en algún tiempo sea inadecuado. Un sistema con faltas deberá incluir algunas fases para que el sistema opere con el menor riesgo posible para el equipo, así como para los operadores. El procesamiento del error incluye:

1. Detección del error, aquí se deduce la presencia de una falta al detectar un error en algún subsistema. Cuando se detecta el error implica una falla en un componente.
2. Evaluación y confinamiento del daño, se identifica la falla y se delimita el daño causado por ésta.
3. Recuperación del error, el sistema es llevado de un estado erróneo a un estado en el cual se pueda continuar con una operación normal o correcta.

4. Tratamiento de la falla y recuperación del servicio, se identifica el componente en el cual existe la falla; luego se repara para que el componente sea sustituido o reconfigurado; después de reparado, el servicio normal puede continuar finalmente.

En este trabajo sólo se abordan las dos primeras fases del procesamiento del error, es decir, en el diagnóstico de faltas se consideran la detección del error, y la evaluación y confinamiento del daño. El diagnóstico de faltas que se tendrá en cuenta a lo largo de este trabajo se basa en el modelo del sistema y en que se conocen previamente ambas faltas, continuas y discretas.

2.2 Sistemas híbridos

Definición 2.5 *Un sistema híbrido (SH) en tiempo continuo es una tupla $\mathcal{H} = (\mathbf{Q}, \mathbf{P}, \mathbf{U}_D, X, U, V, Y, \text{Init}, \mathbf{S}_C, S, E, \gamma, \text{Inv}, \mathbf{R})$, donde:*

- *Parte Discreta*

$$S_d = \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{Q} = \{q_i, i \in J\} \text{ es el conjunto de estados discretos, } J \subset \mathbb{N}; \\ \mathbf{P} = \{o_i, i \in J\} \cup \{\epsilon\} \text{ es el conjunto de salidas discretas,} \\ \epsilon \text{ es la salida "nula";} \\ \mathbf{U}_D = \mathbf{U}_C \cup \mathbf{U}_{\overline{C}} \cup \{\epsilon_\epsilon\} \text{ es el conjunto de entradas discretas,} \\ \mathbf{U}_C \text{ es el conjunto de eventos controlables, i.e. eventos} \\ \text{cuya disparo puede evitarlo el usuario.} \\ \mathbf{U}_{\overline{C}} \text{ es el conjunto de eventos incontrolables.} \\ \epsilon_\epsilon \text{ es el evento "nulo";} \\ E \subset \mathbf{Q} \times \mathbf{U}_D \times \mathbf{Q} \text{ es el conjunto de transiciones discretas;} \\ \gamma : E \rightarrow \mathbf{P} \text{ es un mapeo que asocia una salida discreta} \\ \text{a cada transición discreta;} \end{array} \right.$$

- *Parte Continua*

$$S_c = \left\{ \begin{array}{l} \dot{x}(t) = f_i(x(t), u(t)), \quad i \in J \text{ o} \\ x(t+1) = f_i(x(t), u(t)), \quad i \in J \end{array} \right.$$

donde $x(t) \in \mathcal{X}$; $u(t) \in \mathcal{U}$ son subconjuntos de espacios vectoriales de dimensión finita y son el estado y la entrada del espacio continuo, respectivamente;

- *Acoplamiento entre sistemas*

$$S_e = \left\{ \begin{array}{l} \text{Init} \subset \mathbf{Q} \times \mathcal{X} \text{ denota el conjunto de posibles} \\ \text{estados iniciales híbridos;} \\ S : \mathbf{Q} \rightarrow \mathbf{S}_C \text{ es un mapeo que asocia a cada} \\ \text{estado discreto un sistema dinámico continuo;} \\ \text{Inv} : \mathbf{Q} \rightarrow 2^{\mathcal{X} \times \mathbf{U}_D \times \mathcal{U}} \text{ es un mapeo invariante, si el} \\ \text{estado del sistema y la entrada se van fuera de} \\ \mathcal{X} \times \mathbf{U}_D \times \mathcal{U} \text{ entonces una conmutación ocurre;} \\ \mathbf{R} : \mathbf{Q} \times E \times \mathcal{X} \times \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{X} \text{ es el mapeo de restablecimiento;} \end{array} \right.$$

las transiciones discretas, definidas como el conjunto E , pueden ser de diferentes tipos:

- Si $\sigma \in \mathcal{U}_{\bar{C}}$, la transición es forzada por un evento interno del sistema y es llamado transición incontrolable.
- Si $\sigma \in \mathcal{U}_C$, el disparo de la transición es determinado por la entrada de un evento controlable y es llamado transición controlable.
- Si una condición invariante no es satisfecha, una transición invariante ocurre.

A lo largo de este trabajo se estudia una clase particular de sistemas híbridos, que son los Sistemas Lineales Conmutados (SLC), los cuales son representados por la tupla $\langle \mathcal{F}, (Q, M_0) \rangle$, donde \mathcal{F} es una familia de sistemas lineales continuos y (Q, M_0) es una red de Petri interpretada. Las siguientes secciones son dedicadas a estos dos sistemas dinámicos. En la última sección de este Capítulo, se presentará la definición de SLC que se utilizará en este trabajo.

2.3 Redes de Petri

La Red de Petri (RP) es una herramienta formal que nos permite capturar el modelo de diversos sistemas como manufactura, eléctricos, de potencia, entre otros. Una explicación más detallada de las RP , así como de sus subclases se encuentra en [18], [24] y [4].

Definición 2.6 Una Red de Petri es un grafo dirigido que contiene dos tipos de nodos: lugares y transiciones relacionados entre sí por arcos. De forma gráfica está representada por círculos, rectángulos y flechas respectivamente. La estructura de la Red de Petri es la 4-tupla $G = (P, T, I, O)$ donde:

- $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ es un conjunto finito de lugares,
- $T = \{t_1, t_2, \dots, t_m\}$ es un conjunto finito de transiciones,
- $I : P \times T \rightarrow \mathbb{Z}^+$ es la función que representa el peso de los arcos que va de los lugares a las transiciones, y
- $O : P \times T \rightarrow \mathbb{Z}^+$ es la función que representa el peso de los arcos que va de las transiciones a los lugares, donde \mathbb{Z}^+ es el conjunto de los enteros positivos y el cero.

Para un transición t_j , $\bullet t_j$ representa el conjunto de todos los lugares p_i tal que $I(p_i, t_j) \neq 0$ y t_j^\bullet el conjunto de todos los lugares p_i tal que $O(p_i, t_j) \neq 0$. De forma similar, $\bullet p_i$ representa el conjunto de todas las transiciones t_j tal que $O(p_i, t_j) \neq 0$ y p_i^\bullet el conjunto de todas las transiciones t_j tal que $I(p_i, t_j) \neq 0$.

La matriz de pre-incidencia es $C^- = [c_{ij}^-]$, donde $c_{ij}^- = I(p_i, t_j)$; la matriz de post-incidencia es $C^+ = [c_{ij}^+]$, donde $c_{ij}^+ = O(p_i, t_j)$; la matriz de incidencia de G es $C = C^+ - C^-$. La función de marcado $M : P \rightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$ es el mapeo que va de los lugares a los enteros

no negativos y representa el número de marcas que contienen los lugares. Las marcas se representan gráficamente por puntos en los lugares.

Definición 2.7 *Un sistema de Red de Petri (RP) es el par $N = (G, M_0)$, donde G es la estructura de la RP y M_0 es el marcado inicial.*

Una transición $t_i \in T$ está habilitada en un marcado M si y sólo si $\forall p_j \in P : M(p_j) \geq PRE(p_i, t_j)$. Una transición $t_j \in T$ habilitada puede ser disparada, y su disparo alcanza un nuevo marcado a M_{k+1} , el cual puede ser calculado con la ecuación de estado (1.1) de la RP:

$$M_{k+1} = M_k + Cv_j \quad (1.1)$$

donde v_j es un vector de m -entradas (m es el número de transiciones), cuyas componentes se definen como: $v_j(i) = 0$, para $i \neq j$, $v_j(j) = 1$. Lo anterior también se denota como: $M_k \xrightarrow{t_j} M_{k+1}$.

Definición 2.8 *El conjunto de alcanzabilidad de la RP son todos aquellos marcados alcanzables del marcado M_0 disparando sólo transiciones habilitadas, el conjunto es denotado por $R(N, M_0)$.*

Definición 2.9 *Una secuencia de disparo de (N, M_0) es una secuencia de transiciones $\sigma = t_i t_j \dots t_k$ tal que $M_0 \xrightarrow{t_i} M_1 \xrightarrow{t_j} \dots \xrightarrow{t_k} M_w$.*

Definición 2.10 *El conjunto $\mathcal{L}(N, M_0)$ de todas las secuencias de disparo es llamado lenguaje de disparo $\mathcal{L}(N, M_0) = \{\sigma | \sigma = t_i t_j \dots t_k \dots \quad M_0 \xrightarrow{t_i} M_1 \xrightarrow{t_j} \dots M_w \xrightarrow{t_k} \dots\}$.*

Definición 2.11 *Sea $\sigma = t_i t_j t_k \dots$ una secuencia de disparo. El vector de Parikh $\vec{\sigma} : T \rightarrow (\mathbb{Z}^+)^m$ donde $\vec{\sigma}$ mapea a cada transición $t \in T$ en el número de ocurrencias de t en σ .*

Definición 2.12 *Sea C la matriz de incidencia de N . Un T -semi flujo X_i de la RP es una solución de valores racionales semi-positivos de la ecuación $CX_i = 0$. El soporte del T -semi flujo X_i es el conjunto $\{||X_i|| = \{t_j | X_i(t_j) \neq 0\}\}$.*

Definición 2.13 *Un P -semi flujo Y de la RP es una solución de valores racionales semi-positivos de la ecuación $Y^T C = 0$. El soporte del P -semi flujo Y_i es el conjunto $\{||Y_i|| = \{p_j | Y_i(p_j) \neq 0\}\}$.*

2.3.1 Propiedades de los sistemas de redes de Petri

Definición 2.14 *Una RP (N, M_0) es viva si $\forall M_i \in R(N, M_0)$ y $\forall t \in T$ se cumple que $\exists M_j \in R(N, M_0)$ el cual habilite a t .*

Definición 2.15 *Una RP (N, M_0) es cíclica si $\forall M_i \in R(N, M_0)$ se cumple que $\exists \sigma$, tal que $M_i \xrightarrow{\sigma} M_0$.*

Definición 2.16 Una $RP(N, M_0)$ es acotada si $\forall p_i$ existe un número natural b tal que $M(p_i) \leq b$ para cada marcado alcanzable M . Si $M(p_i) \leq 1$, la red es llamada binaria.

Definición 2.17 Una $RP(N, M_0)$ es libre de bloqueo si cada marcado alcanzable habilita al menos una transición.

Definición 2.18 Un sifón (cerrojo) es un subconjunto de lugares $S = \{p_1, \dots, p_s\} \subseteq P$ de una RP tal que el conjunto de transiciones de entrada *S se encuentra contenido en el conjunto de transiciones de salida S^* , es decir ${}^*S \subset S^*$

2.3.2 Subclases de redes de Petri

Definición 2.19 Una $RP(N, M_0)$ es una máquina de estados (ME) si $\forall t_i \in T, |{}^*t_i| = 1 = |t_i^*|$. La principal característica de las ME es que cada marcado alcanzable contiene exactamente el mismo número de marcas.

Definición 2.20 Una $RP(N, M_0)$ es una grafo marcado (GM) si $\forall p_i \in P, |{}^*p_i| = 1 = |p_i^*|$. La propiedad fundamental de los GM es que la cantidad de marcas de los circuitos se mantiene invariante bajo el disparo de transiciones.

Definición 2.21 Una $RP(N, M_0)$ es una red libre-elección (LE) si $(p_i, t_j) \in F$ implica que ${}^*t_j \times p_i^* \subseteq F$ para cada lugar y cada transición, donde F es la relación sobre $P \cup T$ tal que $F \cap (S \times S) = F \cap (T \times T) = \emptyset$.

2.4 Redes de Petri interpretadas

A continuación se presentan las Redes de Petri Interpretadas (RPI) [16], las cuales son usadas en lugar de las RP , ya que permiten un análisis de las señales de entrada y salida del sistema.

Definición 2.22 Una RPI es una 4 – tupla $Q = (N, \Sigma, \lambda, \varphi)$ donde,

- $N = (G, M_0)$ es un sistema de RP .
- $\Sigma = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r\}$ es el alfabeto de entrada de la red, donde α_i es el i –ésimo símbolo de entrada.
- $\lambda : T \rightarrow \Sigma \cup \{\varepsilon\}$ es una función de etiquetado de transiciones con las siguientes restricciones: $\forall t_j, t_k \in T, j \neq k$, si $\forall p_i I(p_i, t_j) = I(p_i, t_k) \neq 0$ y ambos $\lambda(t_j) \neq \varepsilon$, $\lambda(t_k) \neq \varepsilon$, entonces $\lambda(t_j) \neq \lambda(t_k)$. En este caso ε representa un evento interno del sistema.
- Hay una matriz φ de dimensiones $q \times n$, tal que $y_k = \varphi M_k$ es el mapeo del marcado M_k en un vector de observación q – dimensional. La columna $\varphi(\bullet, i)$ tiene un uno asociado al lugar p_i donde está ubicado el sensor, si el lugar p_j no tiene asociado sensor alguno será un vector nulo.

Notas:

1. En este trabajo (Q, M_0) será usado en lugar de $Q = (N, \Sigma, \lambda, \varphi)$ para enfatizar que hay un marcado inicial en la *RPI*.
2. No se permiten transiciones equivalentes, esto es se asume que $\forall t_i, t_j$ tal que $t_i \neq t_j, \lambda(t_i) = \lambda(t_j)$, se tiene que $C(\bullet, i) \neq C(\bullet, j)$. Ésto no es una limitación importante, porque las transiciones son redundantes.
3. Dada la definición de λ , nótese que la *RPI* es determinista [13] sobre las transiciones etiquetadas, es decir dos transiciones con el mismo símbolo de entrada asociado (diferente de ε) no puede tener el mismo lugar de entrada. Sin embargo, ellos pueden ser no deterministas [13] sobre transiciones no etiquetadas (aquellos t_j tal que $\lambda(t_j) = \varepsilon$).

Una transición $t_j \in T$ de una *RPI* está habilitada en el marcado M_k si $\forall p_i \in P, M_k(p_i) \geq I(p_i, t_j)$. Si $\lambda(t_j) = \alpha_i \neq \varepsilon$ está presente y t_j está habilitada, entonces t_j debe ser disparada. Si $\lambda(t_j) = \varepsilon$ y t_j está habilitada entonces t_j puede ser disparada. Cuando una transición habilitada t_j es disparada en un marcado M_k , entonces un nuevo marcado M_{k+1} es alcanzado. Este marcado puede ser calculado usando la parte dinámica de la ecuación de estado de una *RPI* que es:

$$\begin{aligned} M_{k+1} &= M_k + Cv_k \\ y_k &= \varphi(M_k) \end{aligned} \tag{1.2}$$

donde C y v_k son definidos igual que en una *RP* y $y_k \in (\mathbb{Z}^+)^q$ es el k – ésimo vector de observación de la *RPI*.

De acuerdo con las funciones λ y φ , transiciones y lugares de la *RPI* (Q, M_0) pueden clasificarse como sigue.

Definición 2.23 Si $\lambda(t_i) \neq \varepsilon$ la transición t_i se dice manipulable. De otra forma es no manipulable. Un lugar $p_i \in P$ es medible si el i – ésimo vector columna de φ no es nulo, esto es $\varphi(\bullet, i) \neq 0$ De otra manera es no medible.

Todos los conceptos de las *RP* pueden ser extendidos a *RPI*. Las siguientes definiciones relacionan símbolos de entrada y de salida de la *RPI* con las secuencias disparables y las secuencias de marcados. Estos conceptos serán importantes porque para diagnosticar los sistemas sólo se usará la información de la entrada y la salida.

Definición 2.24 Una secuencia de símbolos de entrada-salida de (Q, M_0) es una secuencia $\omega = (\alpha_0, y_0)(\alpha_1, y_1) \dots (\alpha_n, y_n)$, donde $\alpha_j \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$ y α_{i+1} es la entrada de la *RPI* cuando el vector de salida cambia de y_i a y_{i+1} , además $\alpha_0 = \varepsilon, y_0 = \varphi(M_0)$ y el par (α_{i+1}, y_{i+1}) pertenece a la secuencia ω cuando:

- (α_i, y_i) pertenece a la secuencia ω ,

- $y_{i+1} \neq y_i$,
- y_{i+1} es el vector de salida generado inmediatamente después de y_i .

Definición 2.25 Sea (Q, M_0) una RPI. El conjunto $\Lambda(Q, M_0) = \{\omega | \omega \text{ es una secuencia de símbolos de entrada-salida}\}$ denota el conjunto de todas las secuencias de símbolos de entrada-salida de (Q, M_0) . El conjunto de todas las secuencias de entrada-salida de cardinalidad igual o mayor que k se denotarán por $\Lambda^k(Q, M_0)$, es decir $\Lambda^k(Q, M_0) = \{\omega \in \Lambda(Q, M_0) | |\omega| \geq k\}$.

Definición 2.26 Si $\omega = (\alpha_0, y_0)(\alpha_1, y_1) \dots (\alpha_n, y_n)$ es una secuencia de símbolos de entrada-salida, entonces el disparo de la secuencia de transición $\sigma \in \mathcal{L}(Q, M_0)$ cuyo disparo realmente genera ω es denotado por σ_ω . El conjunto de todas las secuencias disparables que generan la palabra ω es definido como $\Omega(\omega) = \{\sigma | \sigma \in \mathcal{L}(Q, M_0) \wedge \text{el disparo de } \sigma \text{ produce } \omega\}$.

Definición 2.27 El conjunto de todas las secuencias de símbolos de entrada-salida que llevan a marcados de bloqueo en la RPI se denota por $\Lambda_B(Q, M_0)$, es decir, $\Lambda_B(Q, M_0) = \{\omega \in \Lambda(Q, M_0) | \exists \sigma \in \Omega(\omega) \text{ tal que } M_0 \xrightarrow{\sigma} M_j \wedge \text{si } M_j \xrightarrow{t_i} \text{ entonces } C(\bullet, t_i) = \vec{0}\}$.

Definición 2.28 Una transición en la RPI es evento detectable si su disparo puede ser determinado de manera única con el conocimiento de la entrada y la salida de la red.

A continuación se presenta un ejemplo en el que se pretende ilustrar los conceptos y definiciones vistas anteriormente sobre RP y RPI.

Ejemplo 2.1 Considere la red de la Figura 2.1, la matriz de incidencia es

$$C = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

y el marcado inicial $M_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, donde la función φ de salida es

$$\varphi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

El conjunto de lugares $\{p_1, p_4, p_5\}$ son lugares medibles. El conjunto de transiciones manipulables son $\{t_1, t_2, t_3, t_4\}$. El conjunto de lugares de entrada y salida de la transición t_1 son $\bullet t_1 = \{p_1\}$ y $t_1^\bullet = \{p_2, p_3\}$ respectivamente. Para el lugar p_1 se tiene que el conjunto de

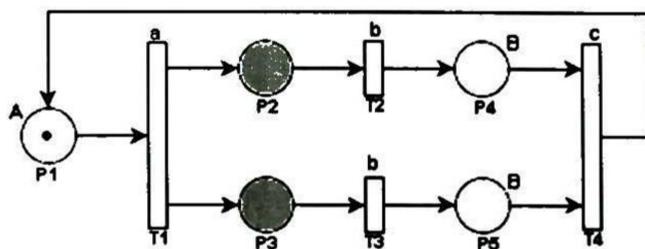


Figura 2.1: Red de Petri interpretada no determinista

transiciones de entrada y salida es $p_1 = \{t_4\}$ y $p_1^* = \{t_1\}$. Los círculos en gris representan lugares no medibles.

El lenguaje de disparo de la red se presenta a continuación

$$\mathcal{L}(Q, M_0) = \{t_1, t_1t_2, t_1t_3, t_1t_2t_3, t_1t_3t_2, t_1t_2t_3t_4, t_1t_3t_2t_4, t_1t_2t_3t_4t_1, \dots\}$$

donde,

$$\Lambda(Q, M_0) = \left\{ \left(\varepsilon, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right), \left(\varepsilon, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \left(a, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right), \left(\varepsilon, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \left(a, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \left(b, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right), \dots \right\}$$

$$\Lambda^2(Q, M_0) = \left\{ \left(\varepsilon, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \left(a, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right), \left(\varepsilon, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \left(a, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \left(b, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right), \dots \right\}$$

$$\Lambda_B(Q, M_0) = \{\}$$

Si se tiene la siguiente secuencia

$$\omega = \left(\varepsilon, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \left(a, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \left(b, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

entonces:

$$\Omega(\omega) = \{t_1t_2, t_1t_3\}$$

y

$$S_\omega = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

2.5 Sistemas lineales continuos

Ahora se introducen algunos conceptos relacionados a los Sistemas Lineales, una explicación más detallada se puede encontrar en [14], [1] y [25].

Definición 2.29 *Un sistema lineal dinámico invariante en el tiempo (SL) es representado por*

$$\sum \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), & x(t_0) = x_0 \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (1.3)$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estado, $u \in \mathbb{R}^p$ es el vector de entrada al sistema, $y \in \mathbb{R}^q$ es el vector de salida del sistema, y A , B , y C son matrices constantes de dimensiones $n \times n$, $n \times p$ y $q \times n$ respectivamente. El espacio de estado de la ecuación (1.3) es \mathcal{X} . A lo largo del trabajo la ecuación (1.3) será referida como $\Sigma(A, B, C)$ o sistema Σ .

La solución del SL representado en la ecuación (1.3) es

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau \quad (1.4)$$

y

$$y(t) = Ce^{At}x_0 + \int_0^t Ce^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau \quad (1.5)$$

Tomando la transformada de Laplace de las ecuaciones (1.4) y (1.5) podemos llegar a la solución del SL en el dominio de la frecuencia.

$$X(s) = (sI - A)^{-1}x_0 + (sI - A)^{-1}BU(s) \quad (1.6)$$

y

$$Y(s) = C(sI - A)^{-1}x_0 + C(sI - A)^{-1}BU(s) \quad (1.7)$$

Definición 2.30 *El conjunto de estados alcanzables (o subespacio de controlabilidad en el espacio \mathcal{X} .) desde la condición inicial $x(0)$ es denotado por \mathbb{R}_0 , donde $\mathbb{R}_0 = \langle A \mid \text{Im } B \rangle$.*

Teorema 2.1 $\mathbb{R}_0 = \langle A \mid \text{Im } B \rangle := \text{Im } B + A \text{Im } B + \dots A^{n-1} \text{Im } B$.

La demostración se puede encontrar en [25].

Definición 2.31 *El sistema (1.3) se dice observable al tiempo t_0 , si es posible determinar el estado $x(t_0)$ a partir del conocimiento de las entradas $u(t)$ y de las salidas $y(t)$ en un intervalo finito de tiempo. El subespacio no observable del sistema está dado por $\mathcal{N} := \ker C \cap \ker CA \cap \dots \cap \ker CA^{n-1}$*

Teorema 2.2 *El sistema $\Sigma(A, B, C)$ es observable si y sólo si el subespacio no observable \mathcal{N} del par (C, A) es el subespacio trivial 0 , esto es*

$$\mathcal{N} = \bigcap_{i=1}^n \ker(CA^{i-1}) = 0 \quad (1.8)$$

o bien, la matriz de observabilidad

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \quad (1.9)$$

es de rango pleno n .

La prueba se puede encontrar en [25] y en [1].

Definición 2.32 *Sean los mapeos $A : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ y $C : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$. Un subespacio $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{X}$ es (C, A) invariante si existe una inyección de salida $D : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$ tal que $(A + DC)\mathcal{W} \subseteq \mathcal{W}$.*

En el siguiente ejemplo se presentan algunos conceptos vistos en esta sección.

Ejemplo 2.2 *Dado el sistema lineal dinámico*

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & -3 & -2 \\ -1 & -1 & -3 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= [1 \ 0 \ 1] x(t) \end{aligned}$$

se puede verificar que el subespacio de alcanzabilidad es

$$\mathbb{R}_0 = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

y el subespacio de no observabilidad es

$$\mathcal{N} = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

2.6 Sistemas lineales conmutados con redes de Petri interpretadas

La parte discreta del SLC se puede modelar usando autómatas, redes de Petri, etc. Aunque las clases de sistemas que se pueden modelar usando autómatas y RP vivas y acotadas (ya que como se verá en la Definición 2.33, la parte discreta de los SLC que se usará tienen estas propiedades) es el mismo, en este trabajo se utilizarán las RP , ya que con éstas se pueden capturar eventos como son la concurrencia, exclusividad, entre otros, de una manera compacta. Como ejemplo se puede tener, los sistemas cooperativos, sistemas multiagente, la industria manufacturera y redes biológicas que son sistemas híbridos altamente paralelos y que se pueden modelar fácilmente con RP . Dado que se requiere obtener información de la red, en realidad la parte discreta es modelada por una RPI .

A continuación se presenta la definición de Sistemas Lineales Conmutados (SLC) que es utilizada a lo largo de este trabajo.

Definición 2.33 *Un Sistema Lineal Conmutado es la tupla $SLC = \{\mathcal{F}, N\}$, donde $\mathcal{F} = \{\Sigma_1, \dots, \Sigma_s\}$ es una familia de sistemas lineales, y N es una RPI . La 2-tupla $SLC = \{\mathcal{F}, N\}$ es un SLC si cumple con las siguientes consideraciones:*

1. *La RPI es viva, binaria y cíclica;*
2. *$\Phi : P \rightarrow \mathcal{F} \cup \{\mu\}$ es una función que asocia a cada lugar un SL o μ , el mapeo $\Phi(p_i) = \mu$ indica que p_i no tiene asociado ningún SL , donde lo siguiente se cumple:
 $\forall t_j \in T, \sum_{p_i \in \bullet t_j} \dim \Phi(p_i) = \sum_{p_k \in t_j^\bullet} \dim \Phi(p_k)$;*
3. *$\forall t_j$ tal que $\{p_1, \dots, p_q\} \in \bullet t_j$ y $\{p'_1, \dots, p'_g\} \in t_j^\bullet$ se define $\delta_{t_j} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ con δ_{t_j}

$$\begin{pmatrix} \bar{x}_1(\tau_k^-) \\ \vdots \\ \bar{x}_q(\tau_k^-) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{x}'_1(\tau_k) \\ \vdots \\ \bar{x}'_g(\tau_k) \end{pmatrix}$$
, donde \bar{x}_i tiene la misma dimensión que $\Phi(p_i)$,
 $p_i \in \bullet t_j$, y \bar{x}'_i tiene la misma dimensión, entonces $\Phi(p_i)$, $p_i \in t_j^\bullet$. El estado final en el tiempo τ_k cuando t_j es disparado, $\bar{x}'_i(\tau_k)$ es la condición inicial de $\Phi(p_i)$;*
4. *Si el símbolo de salida γ_j , donde $(p_i, \gamma_j) \in \varphi$ aparece más de una vez, entonces debe ser asociado a algún lugar en el mismo P – componente;*
5. *El tiempo transcurrido para cambiar de M_k a M_{k+1} es finito y diferente de cero.*

Un SLC es descrito por la siguiente ecuación

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_p x(t) + B_p u(t) \\ y_c(t) &= C_p x(t) \\ M_{k+1} &= M_k + Q v_k \\ y_{d_k} &= \varphi(M_k) \end{aligned} \tag{1.10}$$

El vector de estado $X(t) = [x(t)^T \ M_k(t)^T]^T$ del SLC está compuesto por los vectores de estado continuo y discreto, representado por $x(t)$ y $M_k(t)$ respectivamente.

En la Definición 2.33 de SLC se observa que los SL se asocian a los lugares y no al marcado de la red, como en trabajos que existen en la literatura, es decir se utilizan las propiedades de las RPI .

Capítulo 3

Diagnosticabilidad

3.1 Diagnosticabilidad en sistemas lineales

A continuación se presenta un resultado para determinar la diagnosticabilidad de faltas en SL basada en la construcción de un generador de residuos [15]. La salida del generador es una función del tiempo, la cual es cero o un valor muy cercano a éste cuando no existe alguna falla, y es significativamente diferente de cero cuando un componente ha fallado. Una restricción de este generador es el hecho de que no proporciona mucha libertad para optimizar el rechazo a ruido.

Definición 3.1 Sea $S^c = (A, B, C)$ el comportamiento normal del SL descrito por la ecuación:

$$S^c = \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (1.1)$$

y $SF(S^c)$ es el comportamiento de falta de S^c :

$$SF(S^c) = \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + \sum_{i=0}^q L_i m_i(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (1.2)$$

donde $m_i \in \mathcal{M}_i$ son funciones arbitrarias y desconocidas en el tiempo y $L_i : \mathcal{M}_i \rightarrow \mathcal{X}$ es el mapeo que se refiere a las fallas en los actuadores.

La falta m_i se refiere al modo de falla del i -ésimo actuador. Si no hay falta todas las m_i serán cero por definición. Si el sistema es causal también se pueden representar las faltas de los sensores como una falta $m_j \in q$ en (1.2), para lo cual es necesario modificar las matrices del sistema [15].

La siguiente proposición muestra las características que debe cumplir el sistema para la detección de las faltas.

Proposición 3.1 Sea S^c un SL , se dice que S^c es diagnosticable entrada-salida con respecto al comportamiento de falta $SF(S^c)$ (por ejemplo las faltas descritas en $SF(S^c)$ pueden ser detectadas y aisladas en tiempo finito) ssi $S_j^* \cap \mathcal{L}_i = 0$, $i, j \in \{1, \dots, q\}$, donde $S_j^* = \inf(\sum_{j \neq i} \mathcal{L}_j)$ es el ínfimo subespacio (C, A) invariante de no observabilidad conteniendo la imagen de L_j (\mathcal{L}_i es el rango de la falta m_i).

La demostración se puede encontrar en [15].

Si el sistema es diagnosticable entrada-salida de acuerdo a la proposición anterior, entonces se puede construir un diagnosticador para el sistema (1.2) en donde las faltas son representadas por m_1, \dots, m_q . Éstas se consideran variaciones paramétricas en el sistema, también se debe tomar en cuenta que las faltas son conocidas a priori. Un generador de residuos lineal e invariante en el tiempo de forma convencional para la falta m_i se construye de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \dot{w}(t) &= Fw(t) - Ey(t) + Gu(t) \\ r(t) &= Mw(t) - Hy(t) \end{aligned} \quad (1.3)$$

donde los parámetros F , E , G , M y H son calculados para que el residuo satisfaga las siguientes condiciones:

$r_i \mapsto 0$ si la falta m_i no se presenta

$r_i \mapsto \neq 0$ si la falta m_i se presenta

Se construirán tantos residuos como cantidad de faltas tenga el sistema, siempre y cuando éstas no rebasen el orden del sistema.

Para el diagnóstico de dos faltas el sistema extendido toma la forma

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{w}(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A & 0 \\ -EC & F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B & L_2 \\ G & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(t) \\ m_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_1 \\ 0 \end{bmatrix} m_1(t) \\ r(t) &= \begin{bmatrix} -HC & M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1.4)$$

donde también se requiere que la parte observable del nuevo par (A, C) sea asintóticamente estable y así desaparezca cualquier condición inicial. Como queremos que la falta f_1 genere un residuo diferente de cero implica que el espacio invariante de alcanzabilidad $\langle A|B \rangle$ de (1.4) este dentro del espacio de no observabilidad de $\langle \ker C|A \rangle$, es decir que la entrada al sistema (1.2), con $q = 2$, así como la falta f_2 no se observen en la salida del generador de la falta f_1 .

En el siguiente ejemplo se obtienen los generadores de residuos para un SL en el cual se presentan dos faltas.

Ejemplo 3.1 Considérese el sistema dado por la ecuación (1.5), en el cual aparecen las faltas m_1 y m_2 .

$$\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -9.2602 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3.4872 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 2.3613 & 0.0787 \\ 0.2401 & 0.7896 \end{bmatrix} u(t) \\
&+ \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} m_1(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} m_2(t) \\
y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t)
\end{aligned} \tag{1.5}$$

De la Proposición 3.1 se concluye que:

$$\begin{aligned}
S_1^* \cap \mathcal{L}_2 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cap \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
S_2^* \cap \mathcal{L}_1 &= \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cap \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Entonces ambas faltas, m_1 y m_2 pueden ser detectadas y localizadas.

El generador de residuos para la falta $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ es:

$$\begin{aligned}
\dot{w}(t) &= \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ 0 & -3.4872 \end{bmatrix} w(t) - \begin{bmatrix} 0 & -5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} y(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0.2402 & 0.7896 \end{bmatrix} u(t) \\
r(t) &= [1 \ 0] w(t) - [0 \ 1] y(t)
\end{aligned} \tag{1.6}$$

y para la falta $\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ es

$$\begin{aligned}
\dot{w}(t) &= \begin{bmatrix} -8 & 1 \\ 0 & -9.2602 \end{bmatrix} w(t) - \begin{bmatrix} -8 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} y(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2.3613 & 0.0787 \end{bmatrix} u(t) \\
r(t) &= [1 \ 0] w(t) - [1 \ 0] y(t)
\end{aligned} \tag{1.7}$$

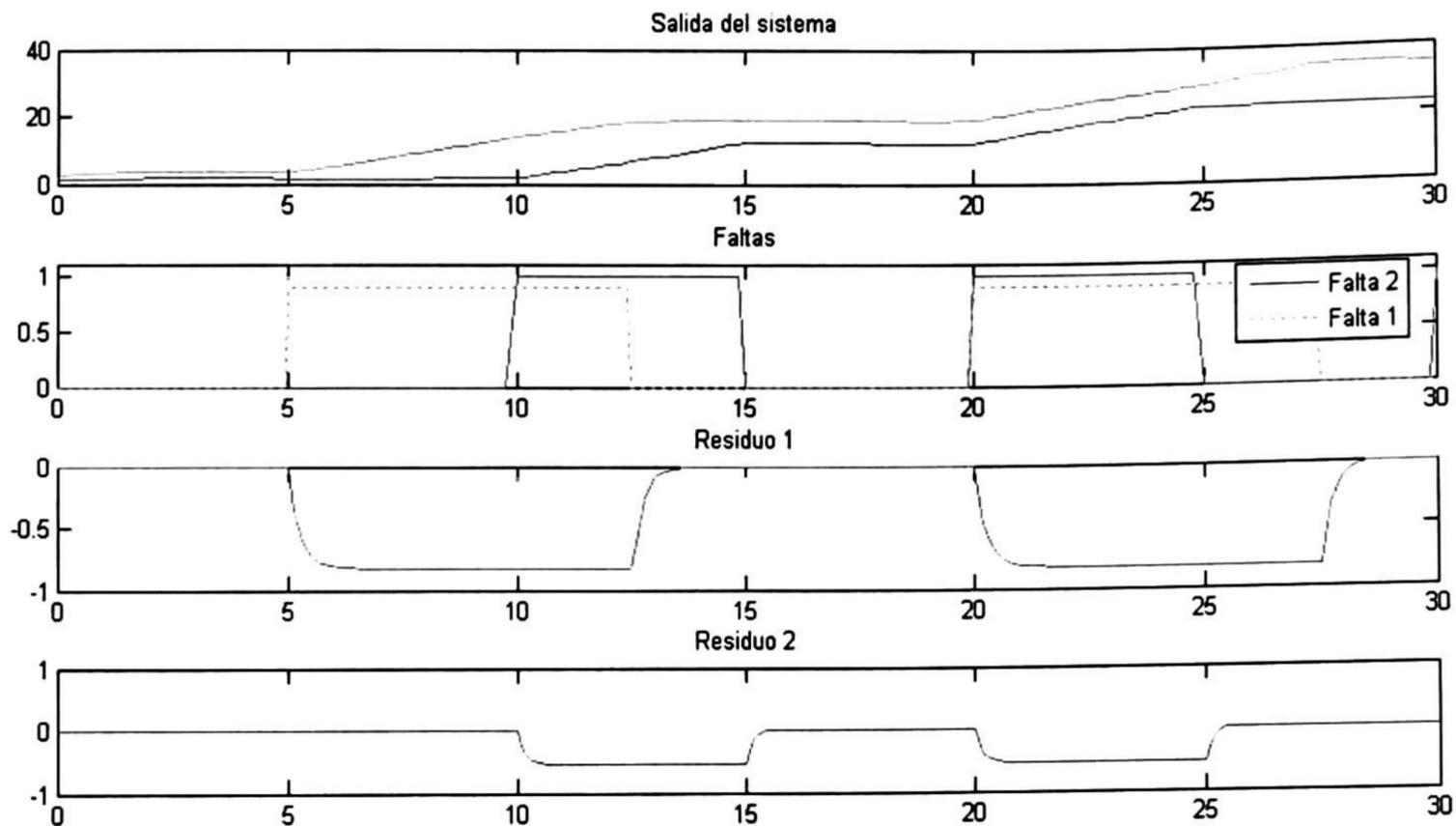


Figura 3.1: Simulación de un sistema lineal con 2 faltas.

En la Figura 3.1 se muestra una simulación en la que se observa como funcionarían los generadores de residuos vistos anteriormente cuando el sistema entra en falla, primero cuando éste presente solamente una falla y luego las dos a la vez. Se ve fácilmente que cuando la falta uno se presenta, el residuo correspondiente parte de cero a un valor cercano a -1 y cuando desaparece la falla, el residuo tiende de nuevo al cero ya que es estable, es decir los polos de la matriz F son negativos. Lo mismo ocurre para la falta 2, cuando aparece en el segundo 10 el residuo 2 cambia de cero a -0.5 y regresa a cero cuando el sistema ya no está en falla.

3.2 Diagnosticabilidad en redes de Petri interpretadas

A continuación se presenta una metodología para el diagnóstico de faltas en RPI desde un punto de vista estructural, también se construye un generador de residuos para unificar la teoría con los SL .

Primero se debe observar que no se permiten ejecuciones al infinito, ya que se necesita la marca eliminada por la falta para que la RPI siga su evolución normal (la RPI es viva por hipótesis). Si ocurren ejecuciones al infinito el sistema puede tener una falla y si solamente se ejecuta la parte de la red no observable o no detectable, no es posible conocer la existencia de dicha falla ya que la RPI seguirá evolucionando en un comportamiento normal [12].

Definición 3.2 Sea $S^d = (N, \Sigma, \lambda, \varphi)$ el comportamiento normal de la RPI descrito por

$$S^d = \begin{cases} M_{k+1} = M_k + Cv_k \\ y_k = \varphi M_k \end{cases} \quad (1.8)$$

y $GF(S^d)$ el comportamiento de falta de S^d :

$$GF(S^d) = \begin{cases} M_{k+1} = M_k + Cv_k + \sum_{j=0}^p C_{f_j} f_j \\ y_k = \varphi M_k \end{cases} \quad (1.9)$$

donde f_j son faltas que permanecen en el sistema, como por ejemplo un cable roto, un motor descompuesto, que ocasionan un bloqueo en el lugar en el que ocurre. La matriz C_{f_j} es el comportamiento estructural de las faltas de bloqueo añadidas al sistema y f_j son nuevas transiciones que representan el comportamiento erróneo de la RPI.

A continuación se enuncia una proposición para determinar la diagnosticabilidad de una RPI.

Proposición 3.2 Sea S^d una RPI viva, segura y evento-detectable, entonces S^d es diagnosticable entrada-salida con respecto al comportamiento de falta $GF(S^d)$ (por ejemplo las faltas descritas en $GF(S^d)$ pueden ser detectadas y localizadas en un número finito de disparo de transiciones) si la distancia relativa entre cualquier par de transiciones es finita.

La demostración se encuentra en [22].

Las RPI que cumplen con la proposición anterior pueden ser diagnosticadas al construir un generador de residuos para las faltas conocidas previamente f_1, \dots, f_p , donde se observa que se tiene solución si para todo P-semiflujo X ocurre que $CX = 0$.

Un generador de residuos para la RPI será propuesto cuando se captura el comportamiento normal y de falta, de manera similar al propuesto para SL . A diferencia de la dinámica continua que se construye un generador para cada falta que se presenta en el SL , aquí solamente es necesario un generador, pero para aislar las faltas y saber exactamente cual ocurrió se recurre a un codificador, el cual será llamado B . El codificador B indica la cantidad de lugares medibles y dado que las transiciones son evento detectable con una base para B se logra su distinción.

Se tiene que la matriz de incidencia se puede separar en la parte detectable (C_{ed}) y la no detectable (C_{ned}), en donde la ecuación de estado tomaría la forma

$$M_{k+1} = M_k + [C_{ed} \quad C_{ned}] \begin{bmatrix} v'_k \\ v''_k \end{bmatrix} \quad (1.10)$$

El diagnosticador para el sistema (1.9) toma sólo la parte medible del sistema original y el generador de residuos discreto es de la forma (1.11), donde I es una matriz identidad y C^d es la matriz de incidencia del diagnosticador, también es igual a C_{ed} . El residuo r de la siguiente ecuación

$$r = \begin{bmatrix} -B\varphi & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{ed} \\ C^d \end{bmatrix} \quad (1.11)$$

es cero cuando ninguna falta se presenta, es decir se forma un P -invariante al tomar en cuenta la estructura de los dos sistemas, el normal sin falta y el diagnosticador, $C^d = B\varphi C_{ed}$. $\begin{bmatrix} -B\varphi & I \end{bmatrix}$ es el invariante de la red. Esto mismo ocurre con los marcados, como se ve a continuación

$$\begin{bmatrix} M_{k+1} \\ M_{k+1}^d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_k \\ M_k^d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{ed} & C_f \\ C^d & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v'_k \\ v_f \end{bmatrix} \quad (1.12)$$

$$r_M = \begin{bmatrix} -B\varphi & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_k \\ M_k^d \end{bmatrix} = 0$$

donde r_M es la diferencia que existe entre el marcado del diagnosticador, el cual debe ser una copia del marcado normal sin falta, y el marcado que se obtiene con el codificador que se asigna a las transiciones evento detectable. Se ve fácilmente que la diferencia en el marcado $M^d - B\varphi M_k$ es cero dado que es un P -invariante cuando no ocurre falta y que va a un número diferente para diagnosticar cada una de las faltas (debido a B).

El marcado del diagnosticador también está dado sobre los lugares medibles, esto es $M_0^d = B\varphi M_0$.

En el siguiente ejemplo se muestra como se haría el diagnóstico de faltas de acuerdo a lo mencionado anteriormente.

Ejemplo 3.2 Considere la RPI viva y segura representada en la Figura 3.2, ésta representa la carga y descarga en un almacén hecha por dos robots en la cual éstos no colisionan al tomar y dejar los objetos en la banda. Su ecuación de estado es representada por:

$$\begin{bmatrix} M_{k+1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_k \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} v_k + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} f_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} f_2 \quad (1.13)$$

De acuerdo a [20], el sistema es evento detectable dado que todas las columnas de φC son diferentes entre sí y del vector nulo

$$\varphi C = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

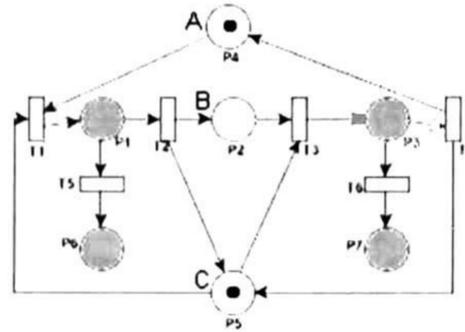


Figura 3.2: RPI diagnosticable entrada-salida.

La base para B es $[1 \ 3 \ 9]$, entonces $B\varphi C$ es $[-10 \ 12 \ -12 \ 10]$, se observa que cada columna es diferente. El marcado inicial del diagnosticador es $M_0^d = 10$.

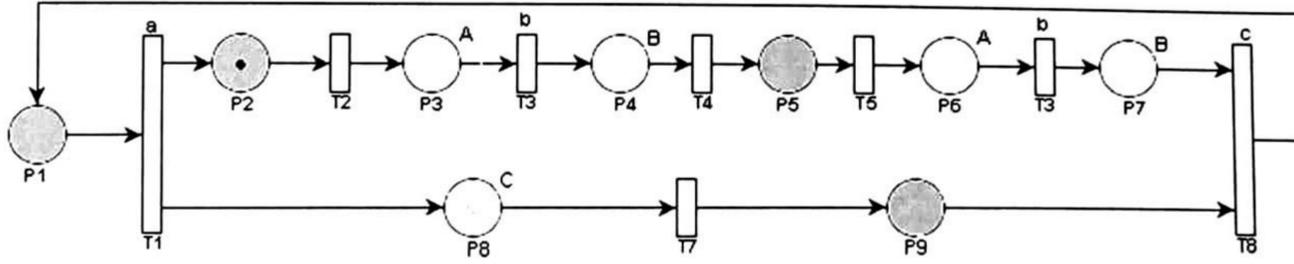
Además, la distancia relativa entre las transiciones de falta f_1 , f_2 y las transiciones normales es finita (todas pertenecen al mismo T -semi flujo). Así la RPI es diagnosticable y la ocurrencia de f_1 o f_2 puede ser detectada y localizada.

En términos generales, un SLC es diagnosticable si las faltas continuas y discretas son localizadas y aisladas, entonces si las condiciones de diagnosticabilidad en ambas partes, continua y discreta, suceden simultáneamente el SLC será diagnosticable. Sin embargo la clase de SLC que son diagnosticables se pueden ampliar si la información cruzada, es decir la información que lo continuo le aporta a lo discreto y viceversa lo discreto a lo continuo, es utilizada. Por ejemplo, cuando una falta discreta f_i no puede ser detectada porque el disparo de la transición no es evento detectable, pero la evolución de la salida continua es suficiente para determinar cual SL está evolucionando, en consecuencia el disparo de cual transición se disparó se detectará. Este caso es cuando la información de salida de la parte continua es usada para diagnosticar una falta discreta.

3.3 Modelado de las faltas en el sistema

En esta subsección se describe como se va a modelar las faltas que ocurren en el SLC .

Definición 3.3 Sea $\{\mathcal{F}, N\}$ un SLC . El sistema es llamado SLC Completo si en el modelo del sistema se incluyen las faltas de la siguiente manera. Para las faltas discretas una transición de falta t_{f_i} y un lugar de falta p_{f_i} son añadidos en la RPI para representar cada falta discreta f_i que el modelo del SLC puede capturar. El lugar p_j del SLC donde el sistema puede evolucionar de un comportamiento normal a uno de falta, donde la falta f_i aparece, debe de conectarse a través de un arco de p_j a t_{f_i} , también un arco de t_{f_i} a p_{f_i} se añade. El conjunto \mathcal{F} se puede expresar como $\mathcal{F}' = \mathcal{F} \cup \{\Phi(p_{f_1}), \dots, \Phi(p_{f_k})\}$. Como las faltas continuas son variaciones en el SL , éstas se agregarán para cada SL en el cual se presentó la falta; entonces el nuevo sistema será $\Phi(p_i) = \{\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + \sum_{i=1}^q f_{\alpha_i} m_{\alpha_i}\}$.

Figura 3.3: Comportamiento normal del *SLC*

Observación. A través de este trabajo, \mathcal{F} , P y T son conjuntos que se descomponen como $\mathcal{F} = F_N \cup F_F$, $P = P_N \cup P_F$ y $T = T_N \cup T_F$ en un *SLC Completo* $\{\mathcal{F}, N\}$, donde F_N , P_N y T_N son elementos del *SLC* y F_F , P_F y T_F son elementos de falta añadidos al *SLC Completo* que representan el comportamiento de las faltas discretas del *SLC*. Dado que no es necesario añadir más elementos en el modelo discreto del *SLC* para las faltas continuas, no es necesario agregar ninguna otra partición.

Definición 3.4 Sea el par $\{\mathcal{F}, N\}$ un *SLC* y $T_F = \{t_{f_1}, \dots, t_{f_k}\}$ el conjunto de transiciones de falta. Un lugar $p_k \in {}^\bullet T_F$ es llamado un lugar de riesgo y una transición $t_i \in T - T_F$, donde $t_i \in p_k^\bullet$ se llama transición post-riesgo.

Definición 3.5 Sea el par $\{\mathcal{F}, N\}$ un *SLC*. Un lugar $p_l \in T_{FC}^\bullet$, donde T_{FC}^\bullet son los lugares en los que se presentan las faltas continuas, las transiciones del conjunto T_{FC} son llamadas transiciones de riesgo continuo, donde $T_{FC}^\bullet \in P_N$. $p_l \in T_{FC}^\bullet = P_{FC}$ es llamado lugar de falta continua.

Las faltas continuas se añaden de forma aditiva en cada sistema como previamente se vio y debe ser diagnósticada en ese sistema. Una restricción del modelo es que si no es posible diagnosticar la falta continua en el *SL* los otros sistemas no ayudarán, es decir no aportarán más información.

A continuación se presenta un ejemplo de como modelar las faltas discretas en el sistema híbrido de acuerdo a la metodología vista anteriormente.

Ejemplo 3.3 Considere el *SLC* donde la parte discreta es representada por la *RPI* mostrada en la Figura 3.3.

La familia \mathcal{F} de *SL* asociados a cada lugar de la *RPI* de la Figura 3.3 se presentan en la Tabla 3.1.

Nótese que el *SL* que está evolucionando cuando el lugar p_1 está marcado es de dimensión cuatro, con dos entradas y dos salidas, cuando la transición t_1 es disparada el *SL* asociado a los lugares p_2 y p_8 evoluciona uno independiente del otro, cada uno de dimensión dos con una entrada y una salida (aunque bien podría ser uno de dimensión uno y otro de dimensión tres), esta situación se puede interpretar como el desacoplamiento de dos

3.4. CARACTERIZACIÓN DEL DIAGNÓSTICO EN UN SISTEMA LINEAL CONMUTADO COMPLETO

máquinas que estaban cooperando una con la otra. De forma similar el disparo de la transición t_8 representa que dos máquinas estarán cooperando de tal manera que sus dinámicas deben unirse para trabajar de forma conjunta.

El comportamiento de falta $P_F = \{p_{10}, p_{11}\}$, es añadido de acuerdo al modelado propuesto en la sección 3.3. El modelo de la RPI del SLC Completo con ambos comportamientos es representado en la Figura 3.4.

Tabla 3.1: Comportamiento lineal correspondiente a los lugares normales P_N .

| P | $\Phi(P_N) = \Sigma(A, B, C)$ | | |
|-------|---|--|--|
| p_1 | $A_1 = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & -1 \\ -3 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ | $B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ | $C_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ |
| p_2 | $A_2 = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}$ | $B_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$ | $C_2 = [1 \ 3]$ |
| p_3 | $A_3 = \begin{bmatrix} -7 & -3 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$ | $B_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ | $C_3 = [7 \ 15]$ |
| p_4 | $A_4 = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$ | $B_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ | $C_4 = [0 \ 1]$ |
| p_5 | $A_5 = \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$ | $B_5 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ | $C_5 = [2 \ -1]$ |
| p_6 | $A_6 = \begin{bmatrix} -5 & -4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ | $B_6 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ | $C_6 = [15 \ 12]$ |
| p_7 | $A_7 = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$ | $B_7 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ | $C_7 = [-1 \ 1]$ |
| p_8 | $A_8 = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ | $B_8 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ | $C_8 = [2 \ -9]$ |
| p_9 | $A_9 = \begin{bmatrix} -6 & 1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$ | $B_9 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ | $C_9 = [1 \ 1]$ |

Las transiciones de post-riesgo son t_3 y t_7 , mientras que $T_F = \{t_9, t_{10}\}$. Los SL de falta son $F_F = \{\Sigma_{10}, \Sigma_{11}\}$, donde las faltas $\Phi(p_{10})$ y $\Phi(p_{11})$ tienen la siguiente información asociada en la Tabla 3.2.

3.4 Caracterización del diagnóstico en un sistema lineal conmutado completo

La caracterización de diagnosticabilidad en SLC se basa en la observación del disparo de una secuencia de transiciones que contengan una transición de falta. Sin embargo, dado

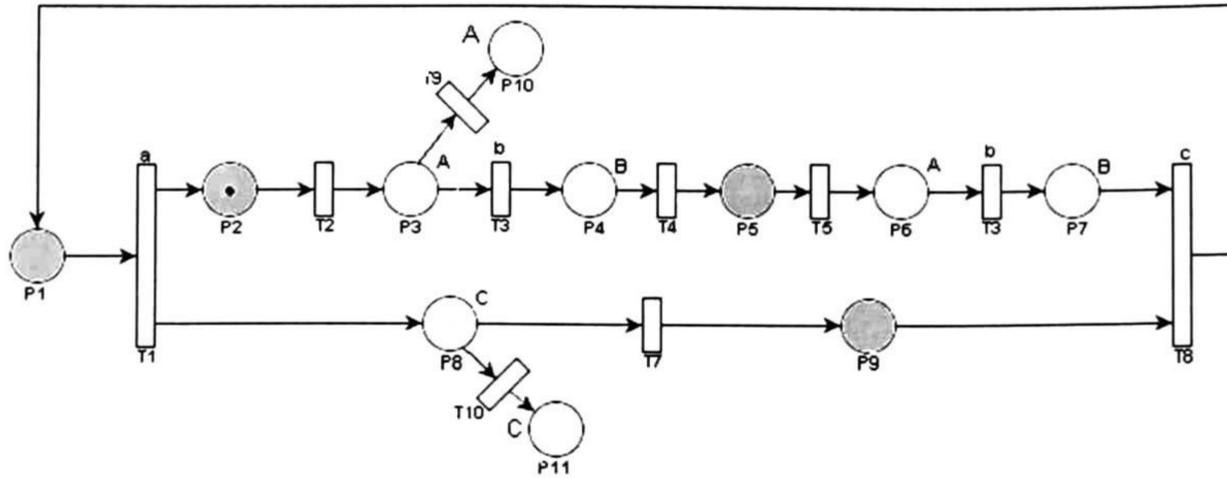


Figura 3.4: Comportamiento normal y de falta del *SLC Completo*

Tabla 3.2: Sistemas Lineales correspondientes a los lugares de falta.

| P | $\Phi(P_N) = \Sigma(A, B, C)$ | | |
|----------|--|---|------------------------|
| p_{10} | $A_{10} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}$ | $B_{10} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ | $C_{10} = [1 \ 0]$ |
| p_{11} | $A_{11} = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 3 & -7 \end{bmatrix}$ | $B_{11} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ | $C_{11} = [-3 \ -1]$ |

que el marcado de algunos lugares no puede ser observado desde la información de salida, entonces la secuencia de información de salida puede ser generada por el disparo de varias maneras en el disparo de la secuencia de transiciones, algunos de ellos que contengan la transición de falta.

La caracterización de diagnosticabilidad se reduce a calcular la secuencia real de transiciones disparadas en un número finito de pasos de disparo de transiciones cuando una transición de falta es disparada. Nótese que el disparo de transiciones de falta es equivalente a no poder disparar una transición de post-riesgo. Así, la idea detrás de este trabajo es detectar si una transición de post-riesgo puede ser disparada (el *SLC* esta evolucionando normalmente) o no (el *SLC* está en falla).

Para asegurar que la detección del disparo de una transición post-riesgo es calculada en un número finito de pasos de transiciones disparadas, se presenta el concepto de distancia relativa entre transiciones. Aunque el cálculo de esta distancia parece ser un problema NP completo, el cálculo se puede hacer en un tiempo finito de manera eficiente para la *RPI* usada en el *SLC*.

La clase NP consiste en aquellos problemas que son "verificables" en tiempo polinomial. Lo que se quiere decir aquí es que si de alguna manera se da un "certificado" de una solución, entonces se puede comprobar que el certificado es correcto en tiempo polinomial en el tamaño de la entrada al problema. La situación de los problemas NP-completos (no

3.4. CARACTERIZACIÓN DEL DIAGNÓSTICO EN UN SISTEMA LINEAL CONMUTADO COMPLETO

determinista polinomial) todavía no se conoce; no se han descubierto aún algoritmos en tiempo polinomial para estos problemas, todavía nadie ha sido capaz de demostrar que no existe algoritmo en tiempo polinomial para cualquiera de ellos. Este párrafo fue tomado de [2].

Definición 3.6 *En una RPI (Q, M_0) segura, la distancia relativa $D(t_i, t_j)$ entre cualquier par de transiciones $t_i, t_j \in T$, es el número máximo que t_i puede ser disparado cuando una marca se retiene en el lugar de entrada $\bullet t_j$, es decir, la marca no puede ser usada para disparar ninguna otra transición. La distancia relativa máxima en una RPI segura (Q, M_0) entre cualquier par de transiciones $t_i, t_j \in T$ es $D_H(t_i, t_j) = \max \{D(t_i, t_j), D(t_j, t_i)\}$.*

Es decir, la distancia relativa máxima mide cuantas veces se puede disparar una transición t_i cuando otra transición t_j ha eliminado las marcas.

Note que en una RPI viva, segura y cíclica la distancia relativa se puede calcular fácilmente. Por ejemplo, la RPI del SLC en el Ejemplo 3.3 está cubierto de P-componentes, estos P-componentes se convierten en sifones cuando una transición de falta se añade. Así el disparo de transiciones de falta en un P-componente desmarca éste, en consecuencia cualquier transición en ese P-componente no se puede volver a disparar, luego la distancia relativa máxima entre cualquier par de transiciones en el P-componente es finito. La siguiente proposición establece que cuando todos los T-componentes comparten transiciones con algún P-componente, si este P-componente se desmarca la RPI ya no está viva.

Proposición 3.3 *Sea $\{\mathcal{F}, N\}$ un SLC y $\{\mathcal{F}', N'\}$ un SLC Completo, donde todos los T-componentes de la RPI en el SLC comparten transiciones con un P-componente que contiene un lugar de riesgo (p_i). Si la transición de falta conectada al lugar de riesgo es disparada, entonces después de un número finito de transiciones disparadas la RPI no es más viva (o está bloqueada).*

Demostración. Dado que la RPI del SLC es viva y binaria, entonces está cubierta de P-componentes [4]. Cuando la transición de falta es añadida, los lugares del P-componente se convierten en un sifón, luego el disparo de las transiciones de falta desmarca el sifón. Dado que los sifones no pueden ser marcados de nuevo, entonces todas las transiciones en el P-componente no pueden volver a ser disparadas. Además, como todos los T-componentes comparten transiciones con el P-componente y todos los T-componentes necesitan disparar todas sus transiciones para estar vivas, eventualmente las transiciones de los T-componente no podrán ser disparados, dado que necesitan el disparo de las transiciones en el P-componente. ■

Corolario 3.1 *Sea $\{\mathcal{F}, N\}$ un SLC y $\{\mathcal{F}', N'\}$ un SLC Completo, donde todos los T-componentes de la RPI comparten transiciones con algún P-componente que contiene un lugar de riesgo (p_i). Entonces $t_i, t_j \in T$ con $D_H(t_i, t_j) < \infty$, donde t_i es una transición de post-riesgo y $t_i \in \bullet p_i$.*

Dado que el disparo de cualquier secuencia contiene una transición $t_i \in \bullet p_i$ entonces la idea es añadir una marca a la transición $t_i \in \bullet p_i$ de tal manera que el disparo (o el no disparo) de esta transición puede ser observado desde la salida del *SLC*. El disparo de esa transición puede ser detectado usando la información entrada-salida del *SL* basándose en la propiedad de distinguibilidad o en la información entrada-salida de la *RPI*, basándose en la propiedad de evento detectable. Más adelante se formalizarán estas ideas.

3.5 Conceptos de distinguibilidad

Definición 3.7 Los sistemas lineales $\Sigma_i(A_i, B_i, C_i)$, $\Sigma_j(A_j, B_j, C_j)$ se dice que son distinguibles uno de otro si el conocimiento de la entrada $u[t_0, t_1]$ y la salida $y[t_0, t_1]$ sobre un intervalo de tiempo finito $[t_0, t_1]$ es suficiente para determinar cual *SL* está evolucionando. Es decir, dos sistemas $\Sigma_1(A_1, B_1, C_1)$ y $\Sigma_2(A_2, B_2, C_2)$ son distinguibles si y sólo si para la misma entrada $u(t)$ producen siempre dos trayectorias de salida $y(t)$ diferentes.

Notación 3.1 Sea $\Sigma_i(A_i, B_i, C_i)$ y $\Sigma_j(A_j, B_j, C_j)$ dos sistemas lineales *SISO*, entonces el sistema lineal $\bar{\Sigma}(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C})$ denota la forma extendida del *SL* con las siguientes matrices

$$\begin{aligned}\bar{A} &= \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \\ \bar{B} &= \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \\ \bar{C} &= [C_1 \quad -C_2]\end{aligned}\tag{1.14}$$

El siguiente lema y teorema son tomados de [8].

Lema 3.1 Sea $\Sigma_1(A_1, B_1, C_1)$, $\Sigma_2(A_2, B_2, C_2)$ dos sistemas lineales escalares, donde $A_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y $A_2 \in \mathbb{R}^{m \times m}$. Entonces los sistemas lineales $\Sigma_1(A_1, B_1, C_1)$ y $\Sigma_2(A_2, B_2, C_2)$ son distinguibles uno del otro, si y sólo si la solución a la ecuación

$$\bar{C}e^{\bar{A}t} \left[x_0 + \int_0^t e^{-\bar{A}\tau} \bar{B}u(\tau) d\tau \right] = 0 \quad \forall t\tag{1.15}$$

es $x_0 = 0$ y $u(t) = 0$.

Demostración. Si los sistemas lineales $\Sigma_1(A_1, B_1, C_1)$ y $\Sigma_2(A_2, B_2, C_2)$ son distinguibles entre si existe una entrada $u(t)$ tal que la misma salida $y(t)$ es producida por ambos sistemas cuando $u(t)$ es aplicada, es decir, para dos condiciones iniciales diferentes x_0^1, x_0^2 se tiene que:

$$y(t) = C_1 e^{A_1 t} \left[x_0^1 + \int_0^t e^{-A_1 \tau} B_1 u(\tau) d\tau \right]\tag{1.16}$$

y

$$y(t) = C_2 e^{A_2 t} \left[x_0^2 + \int_0^t e^{-A_2 \tau} B_2 u(\tau) d\tau \right] \quad (1.17)$$

entonces combinando las ecuaciones (1.16) y (1.17):

$$C_1 e^{A_1 t} \left[x_0^1 + \int_0^t e^{-A_1 \tau} B_1 u(\tau) d\tau \right] = C_2 e^{A_2 t} \left[x_0^2 + \int_0^t e^{-A_2 \tau} B_2 u(\tau) d\tau \right] \quad (1.18)$$

la ecuación se puede reescribir como

$$C_1 e^{A_1 t} x_0^1 - C_2 e^{A_2 t} x_0^2 = \int_0^t \left[-C_1 e^{-A_1(t-\tau)} B_1 + C_2 e^{-A_2(t-\tau)} B_2 \right] u(\tau) d\tau \quad (1.19)$$

La ecuación (1.19) es equivalente a:

$$\begin{bmatrix} C_1 & -C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{A_1 t} & 0 \\ 0 & e^{A_2 t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0^1 \\ x_0^2 \end{bmatrix} = - \int_0^t \begin{bmatrix} C_1 & -C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{A_1(t-\tau)} & 0 \\ 0 & e^{A_2(t-\tau)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u(\tau) d\tau \quad (1.20)$$

entonces la ecuación (1.20) puede ser escrita en términos de las matrices dadas en (1.14), con $x_0 = \begin{bmatrix} x_0^1 & x_0^2 \end{bmatrix}^T$, entonces

$$\bar{C} e^{\bar{A} t} \left[x_0 + \int_0^t e^{-\bar{A} \tau} \bar{B} u(\tau) d\tau \right] = 0 \quad (1.21)$$

Dado que $\Sigma_1(A_1, B_1, C_1)$ es distinguible de $\Sigma_2(A_2, B_2, C_2)$, entonces existe solución $x_0 \neq 0$ y $u(t) \neq 0$ a la ecuación (1.21). Lo contrario también es cierto, entonces $\Sigma_1(A_1, B_1, C_1)$ y $\Sigma_2(A_2, B_2, C_2)$ son indistinguibles uno del otro si y sólo si la solución a la ecuación (1.21) es $x_0 = 0$ y $u(t) = 0$. ■

Teorema 3.1 Sea $\Sigma_i(A_i, B_i, C_i)$ y $\Sigma_j(A_j, B_j, C_j)$ dos sistemas lineales SISO, donde las matrices $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y $A_j \in \mathbb{R}^{m \times m}$. Los sistemas lineales $\Sigma_1(A_1, B_1, C_1)$ y $\Sigma_2(A_2, B_2, C_2)$ son distinguibles uno del otro si y sólo si sistema lineal extendido $\Sigma_{i,j}(A_{i,j}, B_{i,j}, C_{i,j})$ es mínimo y no tiene ceros de transmisión.

Demostración. Suponga que el sistema $\Sigma_{i,j}(A_{i,j}, B_{i,j}, C_{i,j})$ es mínimo y no tiene ceros de transmisión, pero no es distinguible, entonces existe $x_0 \neq 0$ o $u(t) \neq 0$ tal que la ecuación(1.15) se cumple. Dado que $\Sigma_{i,j}(A_{i,j}, B_{i,j}, C_{i,j})$ es mínimo no hay cancelación de términos entre

$$C_{i,j} \text{Adj}(sI - A_{i,j}) B_{i,j} \text{ and } \det(sI - A_{i,j}) \quad (1.22)$$

y $U(s)$ es

$$U(s) = \frac{C_{i,j} \text{Adj}(sI - A_{i,j}) x_0}{C_{i,j} \text{Adj}(sI - A_{i,j}) B_{i,j}} \quad (1.23)$$

como la función de transferencia $C_{i,j} \text{Adj}(sI - A_{i,j})^{-1} B_{i,j}$ no tiene ceros de transmisión, $C_{i,j} \text{Adj}(sI - A_{i,j}) B_{i,j}$ no contiene términos en s . Para que $U(s)$ sea una función de transferencia propia, x_0 necesita ser igual a $\alpha B_{i,j}$ para cualquier α . Entonces de acuerdo al

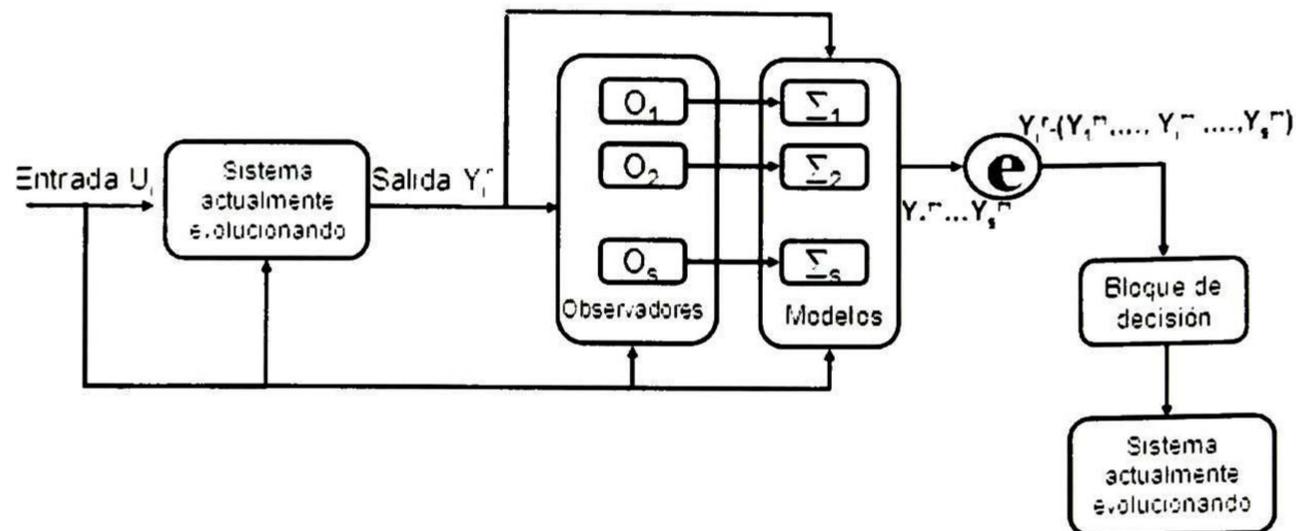


Figura 3.5: Arquitectura del distinguidor

Lema 3.1 los sistemas lineales $\Sigma_i(A_i, B_i, C_i)$ y $\Sigma_j(A_j, B_j, C_j)$ son distinguibles entre sí, una contradicción.

El resto de la prueba se encuentra en [8]. ■

3.6 Diseño del distinguidor

En base a la información de la Sección 3.5 a continuación se presenta el diseño de un distinguidor. Dado que por hipótesis los SL son distinguibles entre sí, para la misma entrada, cada sistema producirá una salida distinta, en este trabajo utilizamos esta información para la construcción del distinguidor. La arquitectura del distinguidor se muestra en la Figura 3.5. Este distinguidor es capaz de calcular cual SL está evolucionando dentro del posible conjunto de sistemas lineales que pudieran estar evolucionando y que a la vez son distinguibles uno del otro. Se puede observar de la figura que el distinguidor está compuesto por un conjunto de observadores, uno por cada sistema, el conjunto de los modelos matemáticos de posibles SL que pudieran estar evolucionando y un bloque de decisión.

Se utiliza un banco de observadores porque si alguno de los sistemas es muy lento (o varios) y la condición inicial entre el sistema real y su modelo es muy diferente, puede haber un error considerable al obtener la diferencia entre ellos y en consecuencia no se podría localizar el sistema adecuado.

El distinguidor trabaja de la siguiente manera. Las señales de entrada y salida del SL que está evolucionando actualmente son introducidas a todos los observadores de Luenberger del conjunto de posibles SL que están evolucionando. Note que uno de los observadores de Luenberger es el observador del SL que está evolucionando actualmente, esto es, al menos este observador calculará el estado del SL actual. De los otros observadores algunos pueden converger incluso a un valor muy próximo al real, otros no, debido a esto último es necesario que los observadores se reinicialicen cada vez que se utilicen. El estado estimado

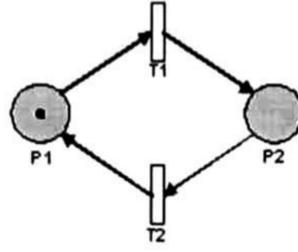


Figura 3.6: Red de Petri

por cada observador O_i es dado como condición inicial al correspondiente modelo del SL Σ_i y la simulación de los modelos empieza. Como todos los SL son distinguibles entre sí, implica que la salida de uno y sólo uno de los sistemas será igual a la salida del SL que está evolucionando. Entonces se hace una comparación de la salida real con la simulada y el bloque de decisión puede aislar el modelo correspondiente al SL que está evolucionando.

A continuación se presenta un algoritmo que describe el funcionamiento del distinguidor.

Algoritmo 3.1 Detección de sistemas distinguibles.

1. *Evaluar la propiedad de evento detectabilidad en la RPI. Si la RPI ya es evento detectable pasar al siguiente punto, si no*

(a) *Si $\varphi C(\bullet, t_k) = 0$, entonces*

- i. Verificar si los SL asociados a $\bullet t_k$ y el SL de t_k^\bullet son distinguibles entre sí.*
- ii. Renombrar la red con la nueva evento detectabilidad $\varphi C(\bullet, t_k) \neq 0$.*

(b) *Si $\varphi C(\bullet, t_i) = \varphi C(\bullet, t_j) \neq 0$, entonces*

- i. Verificar si los SL asociados a t_i^\bullet y el SL de t_j^\bullet son distinguibles entre sí.*
- ii. Renombrar la red con la nueva evento detectabilidad $\varphi C(\bullet, t_i) \neq \varphi C(\bullet, t_j)$.*

Ejemplo 3.4 *Sea $\{\mathcal{F}, N\}$ un SLC, donde la RPI se muestra en la Figura 3.6, y la familia $\mathcal{F} = \{\Sigma_1, \Sigma_2\}$, donde $\Phi(p_1)$ y $\Phi(p_2)$ son sistemas dinámicos $\Sigma_1(A_1, B_1, C_1)$ y $\Sigma_2(A_2, B_2, C_2)$ respectivamente, dados en la Tabla 3.3*

El sistema extendido $\Sigma_{1,2}(A_{1,2}, B_{1,2}, C_{1,2})$ es

$$A_{1,2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -5 \end{bmatrix} \quad B_{1,2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad C_{1,2} = [-2 \quad -4 \quad 4 \quad 1]$$

Tabla 3.3: Sistemas Lineales de los lugares p_1 y p_2 .

| P | $\Phi(P_N) = \Sigma(A, B, C)$ | | | | | |
|-------|-------------------------------|---|--|---------|--|-------------------------|
| p_1 | $A_1 =$ | $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$ | | $B_1 =$ | $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ | $C_1 = [-2 \quad -4]$ |
| p_2 | $A_2 =$ | $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -2 & -5 \end{bmatrix}$ | | $B_2 =$ | $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ | $C_2 = [-4 \quad -1]$ |

Se puede calcular fácilmente que el rango del sistema extendido de la matriz de observabilidad y controlabilidad es 4 en ambos casos, así como para los sistemas Σ_1 y Σ_2 se observa que son observables y controlables cada uno. La función de transferencia es

$$\frac{12}{s^4 + 10s^3 + 35s^2 + 50s + 24}$$

esto es, el sistema $\Sigma_{1,2}$ no tiene ceros. A continuación se muestra una simulación en la Figura 3.7 en la cual se puede observar como el distinguidor selecciona el SL que está evolucionando en cada instante de tiempo. Cuando el marcado de la red es $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, es decir, Σ_1 está evolucionando, el error entre la salida del sistema real y el modelo es cero para el sistema 1. Cuando se dispara la transición t_1 el error del sistema 1 se separa del cero y el sistema 2 tiende a cero detectando que Σ_2 está evolucionando. Lo mismo ocurre al disparar t_2 . La detección se da en un tiempo finito.

Se puede ver que de acuerdo a la ganancia seleccionada el error tenderá a cero más rápida o lentamente según el caso, aunque se tiene que tener en cuenta que si la ganancia es mayor puede haber picos que a veces no son muy deseables, por otro lado si la respuesta es muy lenta se debe retardar el disparo de la transición, ya que el distinguidor todavía no ha aislado el sistema.

En los SL en los cuales existen faltas continuas no es posible el uso de los distinguidores porque se requiere el modelo de la dinámica del SL y con la falta ésta se altera, entonces no es posible seleccionar la evolución del correcto sistema.

3.7 Evento detectabilidad

Definición 3.8 Un RPI dada por (Q, M_0) es evento-detectable si el disparo de cualquier transición se puede determinar de manera única mediante el conocimiento de la información proporcionada por las señales de entrada y salida que produce (Q, M_0) .

El siguiente lema proporciona una caracterización estructural del evento detectabilidad en las RPI .

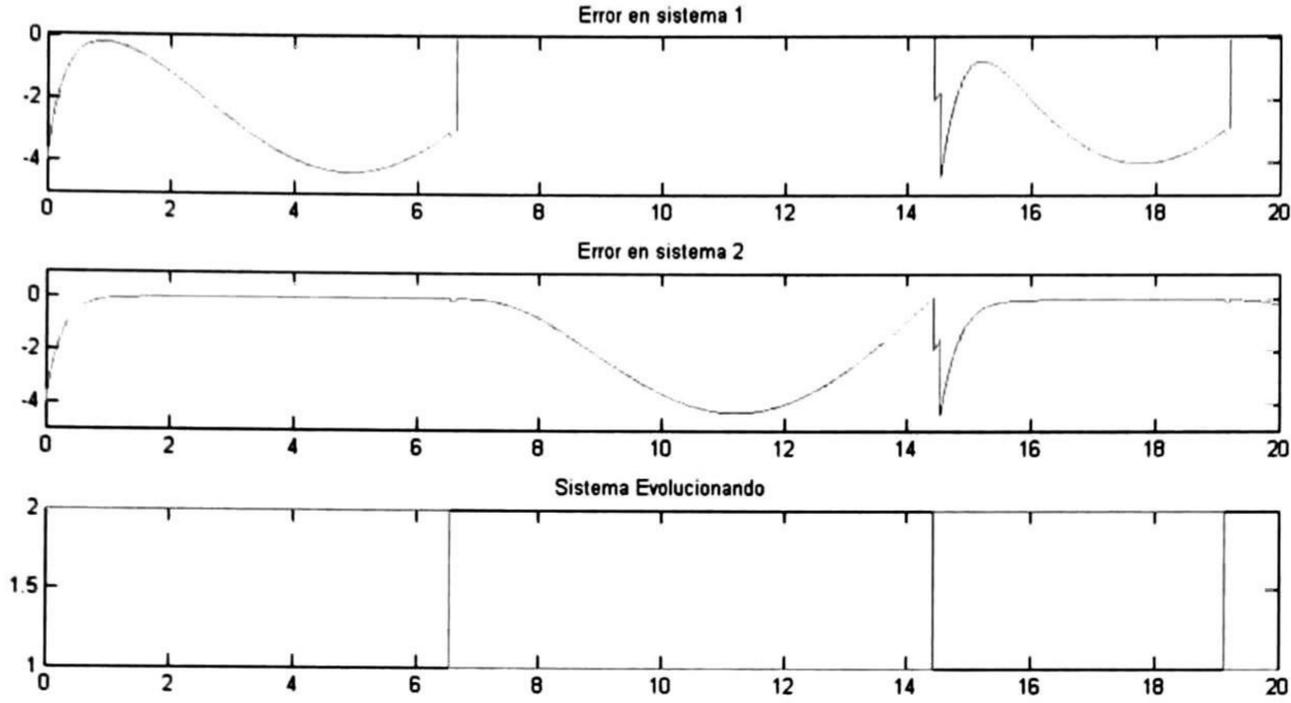


Figura 3.7: Simulación del distinguidor

Lema 3.2 Una RPI viva dada por (Q, M_0) es evento detectable si

1. $\forall t_i, t_j \in T$ tal que $\lambda(t_i) = \lambda(t_j)$ o $\lambda(t_i) = \varepsilon$, se cumple $\varphi C(\bullet, t_i) \neq \varphi C(\bullet, t_j)$, y
2. $\forall t_k \in T$ se cumple que $\varphi C(\bullet, t_k) \neq 0$.

La demostración se puede consultar en [20].

A continuación se hace una extensión al lema anterior, utilizando la información que los *SL* aportan en el *SLC*.

Lema 3.3 Una transición $t_k \in T$ en la RPI N del *SLC* es evento detectable si:

1. $\left\{ \begin{array}{l} \varphi C(\bullet, t_k) \neq 0 \text{ o} \\ \left[\begin{array}{c} \Phi(p'_i) \\ \vdots \\ \Phi(p'_j) \end{array} \right] \end{array} \right\}$ es distinguible de $\left[\begin{array}{c} \Phi(p''_k) \\ \vdots \\ \Phi(p''_l) \end{array} \right]$
donde $p'_r \in \bullet t_k$ y $p''_r \in t_k^\bullet$
y
2. $\left\{ \begin{array}{l} \forall t_i \in T \text{ tal que } \varphi C(\bullet, t_k) = \varphi C(\bullet, t_i) \text{ cumple que} \\ \left[\begin{array}{c} \Phi(p'_i) \\ \vdots \\ \Phi(p'_j) \end{array} \right] \end{array} \right\}$ es distinguible de $\left[\begin{array}{c} \Phi(p''_k) \\ \vdots \\ \Phi(p''_l) \end{array} \right]$
donde $p'_r \in t_k^\bullet$ y $p''_r \in t_i^\bullet$

Demostración. Para determinar de manera única el disparo de cualquier transición, su disparo debe ser detectado (parte 1), esto es, si $\varphi C(\bullet, t_k) \neq 0$ entonces el disparo de t_k es detectado usando el cambio de la información de la parte discreta $y_k - y_{k-1} = \varphi C(\bullet, t_k) \neq 0$,

por otra parte si $\begin{bmatrix} \Phi(p'_i) \\ \Phi(p'_j) \end{bmatrix}$ es distinguible de $\begin{bmatrix} \Phi(p''_k) \\ \Phi(p''_l) \end{bmatrix}$ entonces usando la información de la parte continua puede determinarse el disparo de t_k .

El cambio que cada transición produce en la salida es único (parte 2). Dado que dos transiciones producen la misma información entrada-salida en la parte discreta, se tiene que $\varphi C(\bullet, t_k) = \varphi C(\bullet, t_i)$ pertenece al mismo P-componente (ya que los lugares del mismo P-componente pueden tener el mismo símbolo de salida), entonces la propiedad de distinguibilidad entre SL asociado con t_k^\bullet y el SL que esta asociado a t_i^\bullet puede ser usada. Dado que la parte 2 expresa que ambos sistemas son distinguibles entre si, entonces se puede determinar si los lugares de t_k^\bullet o los de t_i^\bullet están marcados y consecuentemente se puede concluir cual transición fue disparada. ■

Capítulo 4

Caracterización de diagnosticabilidad

La detección y aislamiento de una falta en SL y en RPI han sido estudiados ampliamente en la literatura, como ya se ha visto. Los resultados son idénticos para ambos casos cuando las faltas se dan de forma aditiva. Un generador de residuos puede ser construido de tal manera que el subespacio generado por la entrada pueda ser rotado e introducido al espacio nulo en la salida del mapeo realizado, mientras la falta quede fuera del kernel en la salida del generador. Estos generadores de residuos ([15], [10], [19]) se pueden construir y ser usados para detectar faltas cuando cumplen con ciertas hipótesis. Sin embargo, pueden existir casos cuando las faltas no pueden ser aisladas por estos generadores, pero aún así se puede aislar como es expresado en el siguiente teorema.

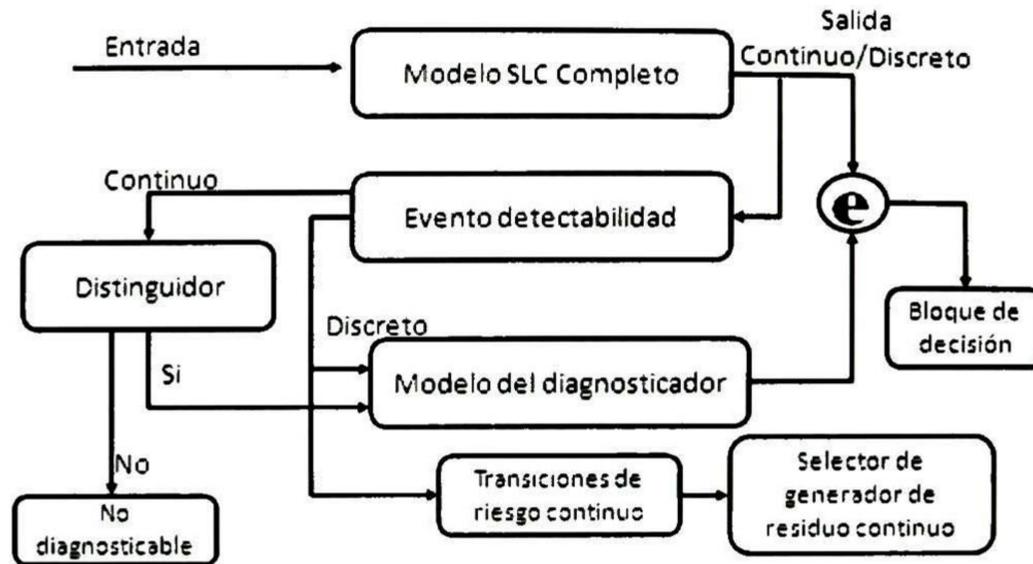
Teorema 4.1 *Sea $\{F, N\}$ un SLC y $\{F', N'\}$ un SLC Completo donde cada falta discreta f_i de los T-Componentes de la RPI en el SLC comparte transiciones con el P-componente que contiene el lugar de riesgo $p_i \in \bullet t_{f_i}$. Si las transiciones de pre-riesgo t_{r_i} , post-riesgo t_i , y la de falta t_{f_i} de cada falta f_i cumple que:*

1. $\forall t_j \in T$ se tiene que $D_H(t_i, t_j) < \infty$,
2. t_{r_i} y t_i son evento detectable o t_{f_i} es evento detectable

y para cada falta continua m_i , las transiciones $t_j \in T_{FC}$ son evento detectable y m_i es diagnosticable; entonces el SLC es diagnosticable.

Demostración. Dado que $\forall t_j \in T$ se tiene que $D_H(t_i, t_j) < \infty$, entonces el disparo de t_i aparece en todas las secuencias de disparo finitas. Para disparar t_i , el lugar de riesgo p_i debe ser marcado. Cuando se tiene este marcado la falta f_i (representada por el disparo de t_{f_i}) puede ocurrir.

Nótese que el momento en el que el lugar p_i es marcado se detecta ya que t_{r_i} es evento detectable. Eventualmente cualquiera, la transición t_i será disparada y detectada (dado que

Figura 4.1: Estructura del diagnosticador del *SLC*

$D_H(t_i, t_j) < \infty$ y t_i es evento detectable) lo que implica que no ocurrió falta en el *SLC*, o bien la *RPI* será bloqueada. Ya que $\lambda(t_i) \neq \varepsilon$ entonces el símbolo $\lambda(t_i)$ puede ser dado a la *RPI*, si el disparo de t_i es detectado, entonces no hay falta en el *SLC*, de otra manera, el *SLC* está en un estado de falla, además se conoce que la falta f_i ocurrió en el *SLC*.

Debido a que cada falta m_i es diagnosticable entonces como las transiciones $t_j \in T_{FC}$ son evento detectable implica que se conocerá si una falta continua m_i ha ocurrido en el *SL*. ■

4.1 Diseño del diagnosticador

El esquema usado para detectar y aislar faltas cuando el sistema está trabajando en línea se presenta en la Figura 4.1. Su funcionamiento es el siguiente, cuando la entrada manipulable o no manipulable $\lambda(t_i)$ es aplicada al sistema, la evento detectabilidad implica que se produce un cambio en la salida del modelo de la *RPI N'* el cual contiene el comportamiento normal y de falta, el modelo del diagnosticador también es binario y sólo contiene la parte de evento detectable del comportamiento normal del sistema. La transición $t_k \in \bullet p_k$, donde p_k es un lugar de riesgo en el *SLC*, es evento detectable. Cuando no ocurra ninguna falta en el *SLC* el error entre el modelo de la *RPI* y el modelo del diagnosticador será cero. Ahora, si una falta ocurre y la *RPI* es evento detectable entonces el error entre el diagnosticador y el *SLC Completo* será diferente de cero. Si una transición es confundida y es necesario verificar cual *SL* está evolucionando, esto es cual lugar está marcado, entonces el distinguidor es utilizado. Este diagnosticador se basa en el evento detectabilidad, cuando hay una diferencia desigual al cero, implica que una falta discreta ha ocurrido en el *SLC Completo*.

Dado que las transiciones de riesgo continuo son evento detectable se conoce cuando se llega a un lugar de falta continua, entonces el selector de generadores de residuo continuo activará los residuos correctos para detectar si ocurre alguna falta continua, si ninguna falta

continua se presenta y el sistema abandona el lugar los residuos dejaron de estar habilitados.

A continuación se presenta un algoritmo que especifica el funcionamiento del diagnosticador.

Algoritmo 4.1 *Detectar cuando un SLC es diagnosticable entrada-salida.*

1. *Primero se tiene que construir el modelo del SLC donde la RPI es viva, segura y cíclica. Además de asociar a cada lugar el SL que corresponde.*
2. *Representar el comportamiento de falta agregando las faltas discretas en la RPI y las continuas en los SL como ya se mencionó arriba. Se vuelve a remarcar que las faltas discretas introducen sifones en la estructura de la RPI.*
3. *Hacer el calculo de φC , o bien evaluar la propiedad de evento detectabilidad en la RPI para las transiciones de riesgo.*
4. *Verificar que los lugares en donde hay faltas continuas sean detectables.*
5. *Si la RPI ya es evento detectable pasar al siguiente punto, si no lo es*
 - (a) *Recurrir al distinguidor.*
 - (b) *Renombrar la red con la nueva evento detectabilidad.*
 - (c) *Verificar que las transiciones de riesgo para las faltas discretas en la RPI son evento detectable.*
6. *Evaluar la propiedad de fuerte conexidad.*
7. *Si existen transiciones no detectables, entonces el SLC es no diagnosticable.*

4.2 Ejemplo ilustrativo

Ejemplo 4.1 *Considere el SLC del Ejemplo 3.3 donde el comportamiento normal y de falta fue presentado, se volverá a mostrar la RPI para motivos prácticos en la Figura 4.2. Se agrega una falta continua en el lugar p_7 como se verá más abajo. Nótese que la RPI es no diagnosticable usando solamente la información de entrada-salida de la parte discreta, porque cuando el sensor A se observe no es posible determinar en que marcado se encuentra la red y en consecuencia no sería posible saber si una falta ocurre. La distancia relativa máxima entre la transición de post-riesgo y el resto de las transiciones en la RPI es finita.*

|| *La RPI tiene dos lugares p_3 y p_6 asociados con el mismo símbolo A ; dado que los dos SL asociados $\Phi(p_3)$ y $\Phi(p_6)$ son distinguibles, si en la RPI el sensor A se detecta, el distinguidor empezará inmediatamente su funcionamiento y el SL que está evolucionando será detectado, en consecuencia se conocerá el lugar marcado. Si el lugar p_6 está marcado*

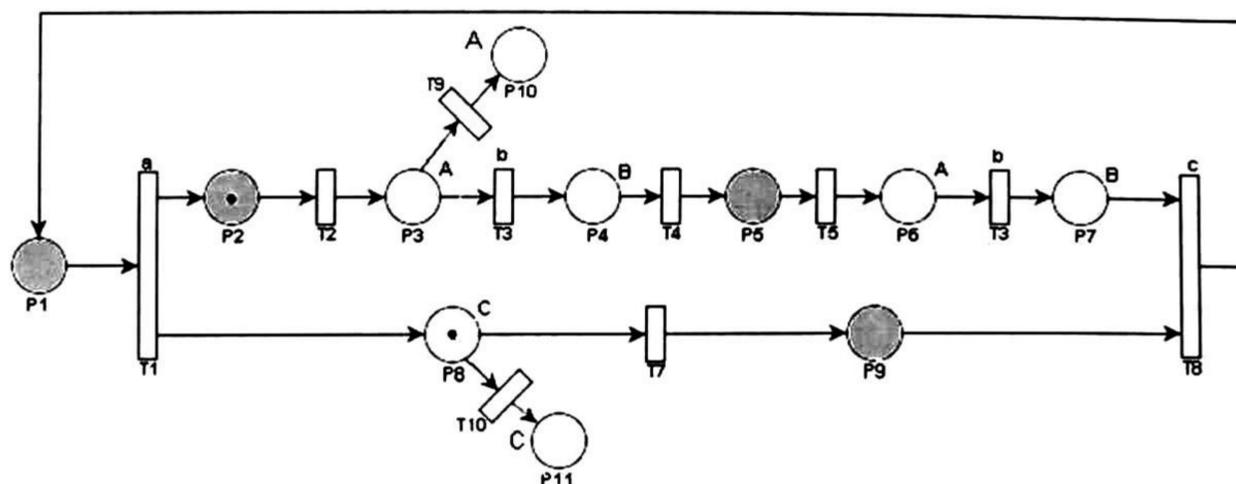


Figura 4.2: RPI del SLC Completo

no puede ocurrir falta alguna. Si el lugar de riesgo p_3 está marcado y como la distancia relativa es finita t_3 se disparará en algún momento al dar la etiqueta b como entrada, si ningún cambio en la RPI es detectado significa que la falta $\Phi(p_{10})$ ocurrió en el sistema.

Para el diagnóstico de la falta $\Phi(p_{11})$ la RPI proporciona suficiente información para saber que se ha llegado a un lugar de riesgo, como los SL que tienen el mismo símbolo C en la RPI son distinguibles, esto es $\Phi(p_8)$ es distinguible de $\Phi(p_{11})$, es decir el sistema extendido

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -7 \end{bmatrix}; \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad y \quad \bar{C} = [2 \quad -9 \quad 3 \quad 1] \quad (1.1)$$

es observable, controlable y no tiene ceros de transmisión. Entonces es fácil ver si una falta ocurrió, usando el distinguidor.

Después de que el distinguidor ubicó por primera vez si $\Phi(p_3)$ o $\Phi(p_6)$ estaba evolucionando no es necesario que se vuelva a utilizar, ya que la RPI se convierte en una secuencia detectable.

El lugar p_7 con la falta es

$$\Phi(p_7) \begin{cases} \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} m_1(t) \\ y(t) = [-1 \quad 1] x(t) \end{cases} \quad (1.2)$$

En la Figura 4.2 se ve que en el lugar p_7 hay un sensor B en la RPI, ahora como ya se identificó por medio del distinguidor si p_3 o p_6 está marcado, en consecuencia se sabrá si p_4 o p_7 se habilita, luego cuando p_7 este marcado el generador de residuos de la falta continua f_1 se podrá activar si ésta ocurre. El residuo para la falta es:

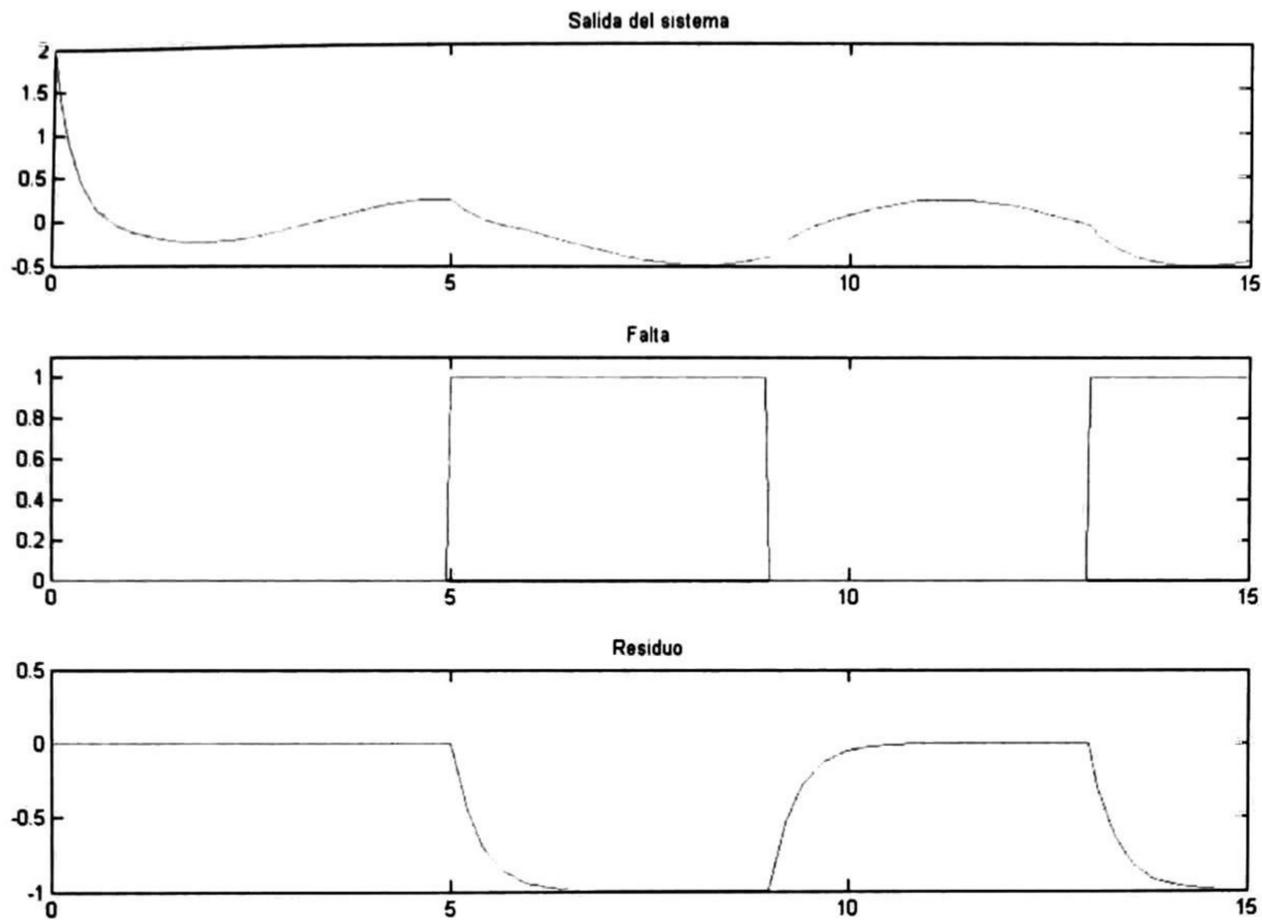


Figura 4.3: Simulación de la falta continua del lugar p_7

$$\begin{aligned} \dot{w}(t) &= -3w(t) + y(t) + u(t) \\ r(t) &= 2w(t) + 2y(t) \end{aligned} \quad (1.3)$$

La simulación de este generador se muestra en la Figura 4.3.

Como se observa en la simulación, cuando la falta $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ se presente en el sistema, el residuo abandonará el cero para posicionarse en -1, indicando que la falta ha ocurrido, cuando ésta desaparece, como el residuo es estable, regresará a cero.

Capítulo 5

Conclusiones y trabajo futuro

En este trabajo se estudia el problema de diagnóstico en SLC representado por una familia \mathcal{F} de SL y una RPI . Se muestra que aunque los resultados de diagnosticabilidad en RPI y en SL se pueden usar, la clase de SLC que se analiza usando la información que proporciona las RPI y los SL incluye aquellos en que ambos no se pueden diagnosticar por si solos.

Al redefinir al SLC se utiliza la estructura de la RPI , ya que en trabajos anteriores dependía del marcado de la red (o del estado de un autómata), lo que llevaba a un análisis exhaustivo en la parte discreta.

La idea principal detrás de la diagnosticabilidad es que la aparición de un error se puede detectar en la salida por medio de un generador de residuos, verificando si el comportamiento normal esperado no se lleva a cabo, usando el concepto de evento detectabilidad en las RPI y el de distinguibilidad en los SL . Esto último es introducido en la RPI usando solamente el concepto de evento detectable, es decir se diseña un distinguidor para que más transiciones sean evento detectable, así cuando hay una falla discreta, las transiciones pre y post riesgo son evento detectable y dado que la distancia relativa de la transición post-riesgo y las otras transiciones es finita entonces el SLC es diagnosticable.

Las ventajas del método propuesto son que la caracterización de la diagnosticabilidad es estructural y polinomial, el diagnosticador converge a una falta discreta en un tiempo finito y el modelo del SLC captura el hecho de que varios sistemas pueden trabajar acoplados o desacoplados, dependiendo de la circunstancia de operación.

Como complemento se detectan las faltas en los SL usando el hecho de que la RPI aporta la suficiente información para ubicar el SL que está evolucionando y luego se usa un generador de residuos.

Como trabajo futuro, se recomienda:

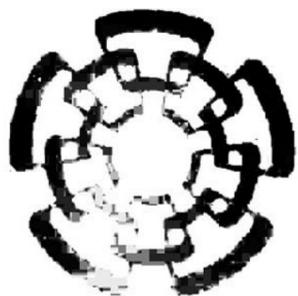
- Relajar más las condiciones de diagnóstico en la parte discreta.
- Extender la teoría de diagnóstico a más clases de sistemas híbridos.
- Estudiar de que otra manera la parte continua puede ayudar en el diagnóstico del sistema.

- Implementar la teoría propuesta en un sistema físico.

Bibliografía

- [1] C. T. Chen. *Linear System Theory and Design*. Holt, Rinehart and Winston, 1970.
- [2] T.H. Cormen, C.E. Leiserson, R. L. Rivest and C. Stein. *Introduction to algorithms*. McGraw-Hill, 2002.
- [3] M. Daigle, X. Koutsoukos and G. Biswas, "An Integrated Approach to Parametric and Discrete Fault Diagnosis in Hybrid Systems," in *HSCC 2008*, Springer-Verlag, 2008, pp 614-617.
- [4] J. Desel and J. Esparza. *Free Choice Petri Nets*. Cambridge University Press, 1995.
- [5] G. K. Fourlas, K. J. Kyriakopoulos and N. J. Krikelis, "Fault Diagnosis of Hybrid Systems," in *Proceedings of the 2005 IEEE International Symposium on Intelligent Control*, 2005, pp. 832-837.
- [6] G. K. Fourlas, "Multiple Faults Diagnosability of Hybrid System," in *Proceedings of the 17th Mediterranean Conference on Control & Automation*, 2009, pp. 365-370.
- [7] J. Gertler, M. Staroswiecki and S. Mengbing, "Direct design of structured residuals for fault diagnosis in linear systems," in *American Control Conference*, 2002, pp. 4519-4524.
- [8] D. Gómez G., *Observability in a Class of Linear Hybrid Systems*. Tesis de Maestría, CINVESTAV Unidad Guadalajara, México, 2008.
- [9] C. N. Hadjicostis and G. Verghese, "Power Systems Monitoring Using Petri Net Embeddings" *IEEE Proceedings C: Generation, Transmission, Distribution*, vol. 147, no. 5, pp. 299-303, 2000.
- [10] C. N. Hadjicostis and G. Verghese, "Structured Redundancy for Fault Tolerance in State-Space models and Petri Nets", *Kybernetika*, vol. 35, no. 1, pp. 39-55, 1999.
- [11] S. Hashtrudi-Zad, R. H. Kwong and W. M. Wonham, "Fault Diagnosis in Discrete Event Systems: Framework and Model Reduction" *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 48, no. 7, pp. 1199-1212, 2003.

- [12] E. Hernández-Flores and L. Rubio-Gómez, "Diagnóstico de faltas de control en RPI," *en la IV Semana Nacional de Ingeniería Electrónica, SENIE'08*, pp. 509-515.
- [13] J.E. Hopcroft and J.D. Ullman. *Introduction to Automata Theory, Languages, and Computation*. Addison Wesley, 1979.
- [14] T. Kailath. *Linear Systems*. Prentice Hall, 1980.
- [15] M. Massoumnia, G. C. Verghese and A. S. Willsky, "Failure Detection and Identification" *IEEE Transactions Automatization Control*, vol. 34, no. 3, pp. 316-321, 1989.
- [16] M.E. Meda, A. Ramírez-Treviño and A. Malo, "Identification in discrete event systems," *in Proceedings of the 1998 IEEE Conference on Systems, Man&Cybernetics*, 1998, pp. 740-745.
- [17] L.A. Mironovski "Functional diagnosis of linear dynamic system- a survey", *Automn Remote Control*, pp.1122-1143, 1980.
- [18] T. Murata. "Petri nets: Properties, analysis and applications," *Proceedings of the IEEE*, vol. 77, no. 4, pp. 541-580, 1989.
- [19] A. Ramírez-Treviño, E. Ruiz-Beltrán, I. Rivera-Rangel and E. López-Mellado, "On-line fault diagnosis of Discrete Event Systems. A Petri Net Based Approach" *in IEEE Transactions on Science and Engineering*. Vol. 1 No. 4, January 2007. pp 31-39, 2007.
- [20] I. Rivera-Rangel, A. Ramirez-Treviño, L.I. Aguirre-Salas, and J. Ruiz-León, "Geometrical characterization of Observability in Interpreted Petri Nets," *Kybernetika*, vol. 41, pp. 553-574, 2005.
- [21] L. Rubio, D. Gómez, A. Ramírez, J. Ruiz and G. Ramírez, "Diagnosability in Switched Linear Systems". ISBN 978-953-7619-X-X, *IN-TECH*, to appear, 2009
- [22] E. Ruiz B., *Esquema de Diagnóstico de Faltas para Sistemas de Eventos Discretos*. Tesis de Doctorado, CINVESTAV Unidad Guadalajara, México, 2007.
- [23] M. Sampath, R. Sengupta, S. Lafortune, K. Sinnamohideen and D. Teneketzis, "Diagnosability of discrete event systems". *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol 4, no. 9, pp. 1555-1575, 1995.
- [24] M. Silva. *Las redes de Petri: en la automática y la informática*. AC, Madrid, España, 1985.
- [25] W. M. Wonham. *Linear Multivariable Control: A Geometric Approach*. Springer-Verlag, 1985.



CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS DEL I.P.N. UNIDAD GUADALAJARA

El Jurado designado por la Unidad Guadalajara del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional aprobó la tesis

Diagnóstico de faltas para una clase de sistemas lineales
conmutados

del (la) C.

Lizette RUBIO GÓMEZ

el día 11 de Diciembre de 2009.

Dra. Ofelia Begovich Mendoza
Investigador CINVESTAV 3B
CINVESTAV Unidad Guadalajara

Dr. José Javier Ruiz León
Investigador CINVESTAV 3B
CINVESTAV Unidad Guadalajara

Dr. Antonio Ramírez Treviño
Investigador CINVESTAV 3A
CINVESTAV Unidad Guadalajara

Dra. Elvía Ruiz Beltrán
Profesor
Instituto Tecnológico de
Aguascalientes

