

**Centro de Investigación y de Estudios Avanzados
del
Instituto Politécnico Nacional**

DEPARTAMENTO DE FÍSICA

**“Tendencia descendente en constante de
Hubble: perspectivas en la tensión de H_0 ”**

Tesis que presenta

Mauricio López Hernández

para obtener el Grado de

Maestro en Ciencias

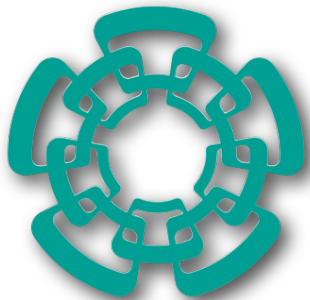
en la Especialidad de

Física

Director de tesis: **Dr. Josué De Santiago Sanabria**

Ciudad de México

Marzo, 2024



CENTRO DE
INVESTIGACIÓN Y DE
ESTUDIOS AVANZADOS DEL
INSTITUTO POLITÉCNICO
NACIONAL

DEPARTAMENTO DE FÍSICA

**Tendencia descendente en constante de Hubble:
perspectivas en la tensión de H_0**

Tesis

Para obtener el grado de:

Maestro en ciencias en la especialidad de Física

Presenta:

Lic. Mauricio López Hernández

Directos de tesis :

Dr. Josué De Santiago Sanabria

Ciudad de México

Marzo de 2024

Para mi familia: mis padres, hermanos y abuelitos †.

Agradecimientos

A mis padres y hermanos por brindarme el apoyo emocional e incondicional durante mi formación de posgrado.

Al plantel académico del departamento de física del CINVESTAV por darme un desarrollo académico de calidad en mis cursos de maestría.

A mi asesor, el doctor Josué De Santiago Sanabria, por todas las enseñanzas y apoyo que me ha brindado a lo largo de mi camino en el posgrado y por todo su tiempo invertido en dirigir esta tesis.

A mis amigos en la Ciudad de México: Moisés, Juan Paulo, Héctor Hugo, Luis, Alberto, Ramón, Johnny, Daniela, Salvador, Ángel, Octavio, Juan Pablo y Rafael. Por su ayuda, compañía, y por todos los buenos momentos que pasé a lado de ellos.

A mis amigos de Dolores Hidalgo: Viridiana, Emigdia, Ninari, Mauricio, Iraís, Anahí, Salvador, Xochitl y Anel. Por brindarme todo su apoyo, consejos y felicidad en los momentos fuera del ámbito académico y en mi vida personal.

Al Consejo Nacional de Humanidades, Ciencias y Tecnologías por brindarme el apoyo económico que permitió llevar a cabo mis estudios de maestría.

Índice general

Resumen	V
Abstract	VII
Abreviaturas	IX
Introducción	1
1. La Tensión de Hubble	3
1.1. Modelo Λ CDM y la tasa de expansión actual del universo	3
1.1.1. Ley de Hubble	3
1.1.2. El modelo cosmológico estándar	5
1.2. Mediciones de H_0 para tiempos tempranos del universo	7
1.2.1. Espectro de potencias angular de la radiación cósmica de fondo	8
1.2.2. Horizonte de sonido como regla estándar: Oscilaciones Acústicas de Bariones	11
1.2.3. Ondas gravitacionales como sirenas estándar: Método prometedor para determinar H_0	15
1.3. Mediciones de H_0 en tiempos tardíos del universo	17
1.3.1. Uso de candelas estándar para la determinación de la distancia lumínica	17
1.3.2. Tiempos de retraso: Lentes gravitacionales	20
1.3.3. Cronómetros cósmicos	23
1.3.4. Megamáseres	25
1.4. Estado actual en el valor de H_0	26

2. Abordando la tensión de Hubble	29
2.1. Problema del horizonte de sonido	30
2.2. Modelos propuestos	31
2.2.1. Energía oscura temprana	31
2.2.2. Energía oscura tardía	33
2.2.3. Modelos de energía oscura con 6 grados de libertad	36
2.2.4. Modelos con interacciones adicionales	37
2.2.5. Cosmologías unificadas	39
2.2.6. Soluciones alternativas	40
2.3. Tendencia descendente de H_0 con el corrimiento al rojo	42
2.3.1. Resultados del proyecto H0LiCOW	42
2.3.2. Misma tendencia para distintos conjuntos de datos	44
3. Resultados	49
3.1. Inferencia bayesiana de los parámetros cosmológicos	49
3.1.1. Métodos de Monte Carlo basados en cadenas de Markov	49
3.1.2. Ajuste de los parámetros cosmológicos al conjunto de datos.	52
3.2. Ajuste de línea recta H_0 - z para Λ CDM	57
3.3. Perspectivas de la tendencia descendente	62
3.3.1. Dependencia en el modelo cosmológico	62
3.3.2. Coincidencia estadística	64
3.4. Tendencia intrínseca $H_0(z)$	67
4. Conclusiones	73
Bibliografía	75

Resumen

La actual discrepancia entre la constante de Hubble, H_0 , medido por la escalera de distancias y la radiación cósmica de fondo, es uno de los problemas más cruciales en la cosmología moderna, indicando sistemáticos desconocidos o nueva física que va mas allá del modelo Λ CDM. En este trabajo exploramos la existencia de una tendencia en el que el valor de H_0 decrece con el corrimiento al rojo en un conjunto de datos actuales de supernovas tipo Ia, cronómetros cósmicos, oscilaciones acústicas de bariones y distancias a megamásers. Esto abre camino a una nueva perspectiva que puede adoptarse en el tratamiento de la tensión de Hubble y que puede aportar nuevas pistas para su resolución. Estudiamos diferentes perspectivas en esta posible tendencia así como implicaciones teóricas derivados de los resultados obtenidos.

Abstract

The current discrepancy in the Hubble constant, H_0 , measured from the distance ladder and the cosmic microwave background, is one of the most crucial problems in modern cosmology, indicating unknown systematics or new physics beyond the Λ CDM model. In this work, we explore the existence of a trend in which the value of H_0 decreases with redshift in a current dataset of Type Ia supernovae, cosmic chronometers, baryon acoustic oscillations, and distances to megamasers. This opens the way to a new perspective that can be adopted in the treatment of the Hubble tension, providing new clues for its resolution. We examine different perspectives on this possible trend, as well as theoretical implications derived from the results obtained.

Abreviaturas

Abreviatura	Significado
CDM	Materia oscura fría
FLRW	Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker
DE	Energía oscura
CMB	Radiación cósmica de fondo
COBE	Explorador de fondo cósmico
BAO	Oscilaciones acústicas de bariones
GW	Ondas gravitacionales
SNIa	Supernova Ia
CC	Cronómetros cósmicos
MCP	Proyecto cosmológico megamáser
SMBHs	Agujeros negros supermasivos

TRGB	Punto de rama de una gigante roja
AGN	Núcleos activos de galaxias
EDE	Energía oscura temprana
PEDE	Energía oscura fenomenológicamente emergente
ADE	Energía oscura acústica
gcg	Gas de Chaplygin generalizado
LSS	Estructura a gran escala
GR	Relatividad general
PDF	Función de distribución de probabilidad
MCMC	Cadenas de Markov Monte Carlo
M—H	Metropolis—Hastings

Introducción

El modelo de materia oscura fría, llamado Λ CDM, ha sido ampliamente exitoso en explicar la mayoría de las observaciones cosmológicas, tales como la formación de estructura y la evolución del universo tardío. Sin embargo, no debemos olvidar que existe poca comprensión de la naturaleza de sus componentes más importantes como la inflación, materia oscura y energía oscura. Con la mejora del número y precisión de las observaciones, discrepancias han ido surgiendo entre los parámetros cosmológicos clave. La más significativa de ellas es el desacuerdo en la constante de Hubble, H_0 , medida por el equipo SH0ES usando la escalera de distancias [1] con valor de $H_0 = 74.03 \pm 1.42 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$, comparada con la obtenida en las mediciones de las anisotropías de la radiación cósmica de fondo por parte de la colaboración Planck [2], con valor de $H_0 = 67.4 \pm 0.5 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$. Este desacuerdo de más de 4σ da origen a lo que conocemos como la **tensión de Hubble**. Si no se debe a errores sistemáticos aún sin considerar, esta tensión podría indicar un fallo en el modelo Λ CDM, invocando la necesidad de nueva física para su explicación.

La gran cantidad de trabajos y soluciones propuestas para la tensión de Hubble que han surgido en los últimos años, ha convertido a esta área en una de las de mayor crecimiento dentro de la comunidad cosmológica. Algunas de estas propuestas son formalmente exitosas, mejorando el ajuste de los datos y reduciendo la tensión dentro de $1\text{--}2\sigma$ entre ambas mediciones. Sin embargo, en la mayoría de las soluciones la reducción de la tensión acarrea consigo un desajuste de otras cantidades cosmológicas bien medidas, por lo que ninguna propuesta hasta ahora presenta argumentos sólidos para afirmar que es mejor que todas las demás.

Una nueva perspectiva en la tensión de Hubble ha surgido recientemente a partir de los resultados obtenidos por la colaboración H0LiCOW [3], donde observan que el valor de

H_0 parece reducirse a medida que el corrimiento al rojo utilizado para inferir su valor va en aumento. El trabajo realizado en [4] confirma que esta tendencia está también presente en un conjunto de datos independientes de los utilizados en H0LiCOW. De confirmarse en el futuro que esta tendencia no es causada por algún efecto evolutivo oculto dentro de los observables astrofísicos, sino por un fenómeno intrínseco para H_0 , abriría camino a nuevos e interesantes escenarios teóricos para su interpretación física que podrían llegar a ser clave en la resolución de la tensión de Hubble.

Desde la fecha en que se publicó [4], han surgido nuevos y mejores datos. En este proyecto, nos preguntamos sobre la existencia de una tendencia descendente de H_0 en estos datos cosmológicos actuales pertenecientes a mediciones de oscilaciones acústicas de bariones [5–11], mediciones de supernovas tipo Ia [12], cronómetros cósmicos [13–21] y distancias hacia megamáseres [22]. Esta tesis se encuentra organizada de la siguiente manera: en el capítulo 1 revisamos las principales características y suposiciones del modelo Λ CDM, los principales métodos experimentales y proyectos para determinar la constante de Hubble, que abarca las mediciones que utilizamos durante este trabajo, y por último, analizamos la situación actual en la tensión de Hubble. En el capítulo 2, hacemos un breve repaso de las soluciones a la tensión a Hubble más eficientes y aspectos importantes a tomar en cuenta para su tratamiento; de igual manera discutimos la tendencia descendente de H_0 encontrada en [3, 4]. El capítulo 3 versa sobre los resultados obtenidos tras analizar el conjunto de datos. Comentamos el método de inferencia utilizado, en el cual los parámetros cosmológicos fueron encontrados mediante la inferencia bayesiana y el uso de cadenas de Markov Monte Carlo. Diferentes perspectivas relacionadas con la tendencia son presentadas dentro del capítulo: una coincidencia estadística, dependencia de la tendencia en el modelo cosmológico utilizado y un efecto intrínseco $H_0(z)$ en la “constante” de Hubble. Al final mostramos las conclusiones y perspectivas a las que llegamos con todo el trabajo de investigación.

Capítulo 1

La Tensión de Hubble

Durante las últimas dos décadas, astrónomos y cosmólogos han realizado un esfuerzo considerable para determinar la constante de Hubble. En este capítulo, discutimos el contexto histórico y cosmológico, así como la importancia de una medición precisa de la constante de Hubble. Introducimos varios métodos de alta precisión para determinar distancias cosmológicas y, con ello, inferir el valor de ciertos parámetros cosmológicos. Al final, discutimos la situación actual en el valor de la constante de Hubble, lo que ha llevado a la comunidad a replantearse nueva física más allá del modelo cosmológico estándar.

1.1. Modelo Λ CDM y la tasa de expansión actual del universo

1.1.1. Ley de Hubble

En el año 1929, el astrónomo Edwin Hubble publicaría una correlación lineal entre la distancia hacia las galaxias y su velocidad de recesión [23], mostrada en la figura 1.1 y a la que denotaremos como diagrama de Hubble. Esta gráfica proporciona evidencia de un universo en expansión, en donde aparentemente todas las galaxias distantes están alejándose de nosotros, y cuya velocidad de recesión v aumenta con la distancia d . Esto se conoce como la *ley de Hubble*

$$v = H_0 d. \quad (1.1)$$

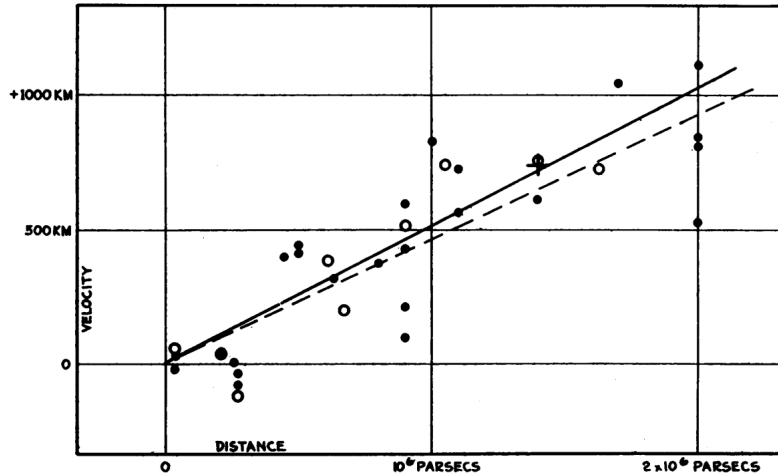


Figura 1.1: Tomada de [23]. Relación entre la velocidad y la distancia entre nebulosas extragalácticas publicado por Edwin Hubble en 1929. La velocidad radial es corregida por el movimiento solar. Los puntos negros y la línea sólida representan la solución para el movimiento solar utilizando las nebulosas individualmente. Los círculos y la línea discontinua representa la solución combinando las nebulosas en grupos. La cruz representa la velocidad media correspondiente a la distancia media de 22 nebulosas cuyas distancias no pudieron ser estimadas individualmente.

Las velocidades son medidas con el corrimiento al rojo de la galaxia¹ que es básicamente un efecto Doppler aplicado a las longitudes de onda de la luz que nos llega producto de la expansión del universo. La constante de proporcionalidad H_0 , conocida como la constante de Hubble, parametriza la tasa de expansión actual del universo y es usualmente expresada en unidades de kilómetros por segundo por megaparsec ($1 \text{ Mpc} \approx 3.086 \times 10^{19} \text{ km}$). El inverso de la constante de Hubble tiene unidades de tiempo, por lo que establece la escala

¹Definido como

$$z \equiv \frac{\lambda_{\text{obs}} - \lambda_{\text{emi}}}{\lambda_{\text{emi}}},$$

donde λ_{emi} y λ_{obs} son las longitudes de onda de la luz en los puntos de emisión (galaxia) y observación (la Tierra) respectivamente. Si objetos cercanos se están alejando a velocidad v , entonces el corrimiento al rojo es

$$z = \frac{v}{c},$$

donde c es la velocidad de la luz.

de la edad del universo. En un universo que se expande uniformemente, el parámetro de Hubble, $H(t)$, cambia como función del tiempo y H_0 es $H(t = t_0)$, con t_0 el tiempo actual.

La ley de Hubble no es exacta, las galaxias poseen movimientos aleatorios conocidos como velocidades peculiares; pero describe muy bien el comportamiento promedio de las galaxias. En las siguientes secciones generalizaremos la relación “distancia - corrimiento al rojo” para grandes distancias, donde la ecuación (1.1) se rompe. Por ahora, señalemos que la relación depende del contenido de energía presente en el universo. Medir H_0 ha sido un tema activo desde las mediciones originales de Edwin Hubble, donde la relación aparentemente simple entre la distancia de las galaxias y su velocidad de recesión no dejaba entrever el gran desafío que plantearían las grandes incertidumbres sistemáticas al intentar obtener un valor preciso de H_0 .

1.1.2. El modelo cosmológico estándar

El modelo de concordancia o modelo Λ CDM (*Lambda Cold Dark Matter*, por sus siglas en inglés) es el modelo cosmológico más simple de la cosmología que está de acuerdo con la mayoría de las observaciones del universo. Este modelo puede resumirse de la siguiente manera: un universo que está dominado en la actualidad por materia oscura no bariónica (*CDM*) y una constante cosmológica Λ , o denotada también por energía oscura (*DE*), con porciones insignificantes de radiación (fotones y neutrinos) y materia ordinaria (bariones y leptones), y en donde las perturbaciones iniciales fueron generadas por la etapa de inflación en el universo primitivo. La materia oscura es la responsable de la formación de estructuras a gran escala, mientras que la constante cosmológica es responsable de la expansión acelerada del universo en tiempos tardíos.

Λ CDM está también definido bajo la suposición del principio cosmológico que establece que el universo es estadísticamente homogéneo e isotrópico a grandes escalas ($\gtrsim 100$ Mpc). Con ello, tenemos que la expansión de un universo homogéneo e isotrópico puede ser descrita mediante una métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (*FLRW*), dada por

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2(\theta) d\phi^2 \right), \quad (1.2)$$

k es una constante que representa la curvatura del universo. La cantidad $a(t)$ es crucial y se conoce como el factor de escala. Es una función únicamente del t y nos dice cómo las separaciones físicas crecen con el tiempo. Si definimos un sistema de referencia comóvil, es decir, un sistema de referencia que se mueve junto con la expansión del universo, de modo que la distancia comóvil \vec{x} entre dos puntos permanece constante, tenemos que el factor de escala relaciona la distancia física real \vec{r} y la distancia comóvil mediante $\vec{r} = a(t)\vec{x}$. Si, por ejemplo, entre los tiempos t_1 y t_2 , el factor de escala duplica su valor, entonces el universo se expandió en tamaño por un factor de dos.

La expansión de un universo homogéneo e isotrópico se caracteriza por parámetros que describen la propia expansión, la geometría global y la composición general del universo. Estos parámetros están todos relacionados a través de la *ecuación de Friedmann*, que es una ecuación derivada de las ecuaciones de campo de la relatividad general de Einstein

$$H^2(t) = \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \sum_i \rho_i(t) - \frac{k}{a^2}, \quad (1.3)$$

donde $H(t) = \frac{\dot{a}}{a}$ es el parámetro de Hubble, G la constante gravitacional de Newton, $\rho_i(t)$ son las componentes individuales de la densidad de energía—materia que componen al universo (radiación, bariones, CDM y DE) y k (con posibles valores $+1, 0, -1$) describe la geometría global. Datos de una variedad de mediciones apuntan a que el escenario actual que mejor se ajusta es un universo plano ($k = 0$) que contiene alrededor del 70 % de energía oscura, 25 % de materia oscura y 5 % de materia bariónica [2, 12, 24].

Dada la expansión del universo, esperamos que la densidad de energía de cada componente disminuya con el tiempo (a excepción de la energía de la constante cosmológica). Con ello, tendremos que cada componente ρ_i escala con $a(t)$ de distinta manera

$$\rho_{\text{mat}} \propto \frac{1}{a^3} = (1+z)^3, \quad \rho_{\text{rad}} \propto \frac{1}{a^4} = (1+z)^4, \quad \rho_{\text{DE}} \propto \frac{1}{a^{3(1+w)}} = (1+z)^{3(1+w)},$$

en donde hemos juntado a la materia oscura y la materia bariónica en una sola densidad ρ_m , además de usar la relación entre el factor de escala $a(t)$ y el corrimiento al rojo z :

$1/a = 1 + z$. Si ahora definimos a la densidad crítica ρ_c como

$$\rho_c(t) \equiv \frac{3H_0^2}{8\pi G}, \quad (1.4)$$

que es el valor de la densidad total requerida para tener un universo plano, podemos finalmente escribir la ecuación de Friedmann, (1.3), de forma alternativa, con $k = 0$, como

$$H^2(z) = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = H_0^2 [\Omega_m(1+z)^3 + \Omega_{\text{rad}}(1+z)^4 + \Omega_{\text{DE}}(1+z)^{3(1+w)}], \quad (1.5)$$

donde

$$\Omega_i \equiv \frac{\rho_{o,i}}{\rho_c},$$

es una cantidad adimensional conocida como el parámetro de densidad y cuyo valor está definido para ser una medida de la densidad actual ρ_0 presente en el universo. Si, por ejemplo, $\Omega_m = 0.3$, entonces quiere decir que la materia (CDM y bariones) contribuye en un 30% a la energía actual del universo. w hace referencia a la ecuación de estado de la energía oscura, que da la razón entre la presión y la densidad: $w = p_{\text{DE}}/\rho_{\text{DE}}$, y donde el valor de $w = -1$ corresponde a una constante cosmológica. La ecuación (1.5) predice la evolución del parámetro de Hubble dependiendo del contenido de energía presente en el universo.

El modelo Λ CDM tiene éxito en explicar la mayoría de las propiedades de una gran cantidad de observaciones cosmológicas como la expansión acelerada del universo [25, 26], el espectro de potencias y las propiedades estadísticas de las anisotropías en la radiación cósmica de fondo (CMB) [2], o el espectro y propiedades estadísticas de estructuras a gran escala en el universo [27], entre otros.

1.2. Mediciones de H_0 para tiempos tempranos del universo

Mediciones de tiempo temprano no se refieren al corrimiento al rojo al momento de realizar las mediciones, sino más bien a la época del modelo Λ CDM que se invoca. Con-

sideramos como predicciones “tempranas” de H_0 a aquellas que se basan, en principio, en las suposiciones que Λ CDM hace sobre la descripción del universo a $z > 1000$, donde la composición del universo era muy distinta a la actual. Muchas de estas suposiciones pueden ser evidentes o dejar una huella visible en el espectro de potencias de la radiación cósmica de fondo (CMB) o en la estructura a gran escala del universo.

A continuación explicaremos los métodos experimentales que logran medir los parámetros cosmológicos, entre ellos la constante de Hubble, y que hacen uso de las suposiciones tempranas del modelo Λ CDM.

1.2.1. Espectro de potencias angular de la radiación cósmica de fondo

La radiación cósmica de fondo es considerada por los cosmólogos como la huella digital del universo, no solo nos provee información acerca del tiempo en el que fue formado, si no también de sus condiciones iniciales. A. Penzias y R. Wilson son acreedores de su descubrimiento en el año 1965 [28], la cual consiste de radiación en la banda del microondas que impacta a la tierra en todas las direcciones. Observaciones realizadas por satélite COBE (*Cosmic Background Explorer*, por sus siglas en inglés) confirmó que el CMB tiene un espectro extremadamente cercano al de un cuerpo negro a una temperatura media de $\bar{T} = 2.725 \pm 0.001$ Kelvin [29], tal y como observamos en la figura 1.2, indicando que el universo temprano estaba en equilibrio termodinámico. La luz del CMB proviene de la región más lejana posible y, por lo tanto, de la época más temprana del universo que podemos ver directamente, conocida como la época de recombinación. En esta etapa, el universo se enfrió lo suficiente para permitir que la luz se desacoplara de los electrones. Como resultado, los electrones libres se combinaron con los protones, formando así los primeros átomos de hidrógeno neutro. Los últimos fotones dispersados formaron lo que conocemos como la “superficie de última dispersión”, y la luz que emana de ella ha viajado casi libremente hasta nosotros dando origen al CMB.

La temperatura del CMB en diferentes partes del cielo es estadísticamente uniforme, lo que constituye una razón sólida a favor del principio cosmológico. Esta uniformidad

estadística implica la existencia de pequeñas variaciones en la temperatura, cuya medición es fundamental para entender el origen de la estructura del universo. En la actualidad, estas mediciones nos proporcionan la comprensión más precisa de la cosmología puesto a que son sensibles a un gran rango de parámetros cosmológicos.

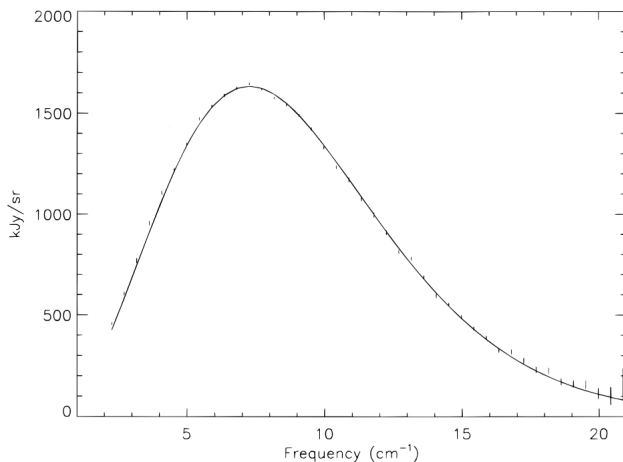


Figura 1.2: Tomada de [29]. Espectro de la radiación cósmica de fondo medida por el satélite COBE. La línea sólida representa el mejor ajuste a una radiación de cuerpo negro con temperatura $T = 2.725$ Kelvin.

La medición más importante es la medición de la temperatura T en una cierta dirección del cielo, $T(\theta, \phi)$. Por lo general, definimos una perturbación a la temperatura adimensional como

$$\frac{\Delta T}{T}(\theta, \phi) = \Theta(\theta, \phi) = \frac{T(\theta, \phi) - \bar{T}}{\bar{T}}. \quad (1.6)$$

La pieza fundamental recae en medir cambios de temperatura respecto a \bar{T} a medida que la dirección angular cambia. Ahora, sabiendo que cualquier función angular puede ser expandida en la base de los armónicos esféricos $Y_{lm}(\theta, \phi)$ podemos escribir (1.6) de la siguiente forma

$$\Theta(\theta, \phi) = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^{m=l} a_{lm} Y_{lm}(\theta, \phi). \quad (1.7)$$

Los subíndices l, m están conjugados con el vector unitario del espacio real $\hat{\theta}$, y en donde por cada l hay $2l + 1$ valores de m . Toda la información contenida en el campo de temperaturas T está también contenida en las amplitudes a_{lm} . Como un ejemplo de esto,

consideremos un experimento que mapea el cielo completo a una resolución de 10° . El cielo completo tiene 4π radianes² que son aproximadamente 41,000 grados², por lo que el mapa tendrá aproximadamente 410 pixeles con áreas de $(10^\circ)^2$. Si codificamos esta información en las a_{lm} en pixeles, en lugar de temperaturas, existirá alguna l_{max} a partir de la cual ya no hay información. Una forma de encontrar esta l_{max} es fijando el número total de a_{lm} que si contienen información como $\sum_{l=0}^{l_{max}} (2l+1) = (l_{max}+1)^2 = 410$. Por lo que la información puede igualmente estar bien caracterizada especificando todas las a_{lm} hasta $l_{max} = 19$. Mientras más a_{lm} haya, mayor resolución tendrá el mapeo de temperaturas.

Para comparar con la teoría, estamos interesados solo en las propiedades estadísticas de las amplitudes a_{lm} cuantificado en el *espectro de potencias angular*, C_l , y definido como la varianza de las a_{lm}

$$C_l = \langle |a_{lm}|^2 \rangle, \quad (1.8)$$

donde $\langle \cdot \rangle$ denota un promedio en el ensamble. Es importante mencionar que existe una incertidumbre fundamental en la información que podemos obtener de C_l . Esta incertidumbre, que es mayor mientras más chica sea l , es llamada *varianza cósmica*. Más precisamente, es la incertidumbre sobre la estimación de C_l , para una l fija, después de usar las $2l+1$ valores de m para inferir su valor [30]

$$\left(\frac{\Delta C_l}{C_l} \right) = \sqrt{\frac{2}{2l+1}}. \quad (1.9)$$

Finalmente, el requisito de que las propiedades estadísticas sean invariantes ante rotaciones implica que el resultado no puede depender de m , por lo que espectro de potencias angular depende únicamente de l . Este índice puede pensarse como aquel que nos da la escala angular; una l pequeña corresponde a escalas angulares grandes y l grandes a escalas angulares pequeñas.

Relacionar la teoría con las estimaciones para C_l resulta en un trabajo bastante extensa, aunque información detallada de la parte teórica puede ser encontrada en [30, 31]. En resumen, las predicciones teóricas son realizadas resolviendo la ecuación de Friedmann (1.5), junto con las ecuaciones de Boltzmann perturbadas para cada componente del universo. El satélite Planck proveyó en el año 2018 las mediciones del CMB más precisas

hasta la fecha. En la figura 1.3 mostramos el espectro de potencias $D_l = [l(l+1)/2\pi] C_l$. Para el mejor ajuste del modelo Λ CDM, el valor inferido de la constante de Hubble fue de $H_0 = 67.4 \pm 0.5 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$.

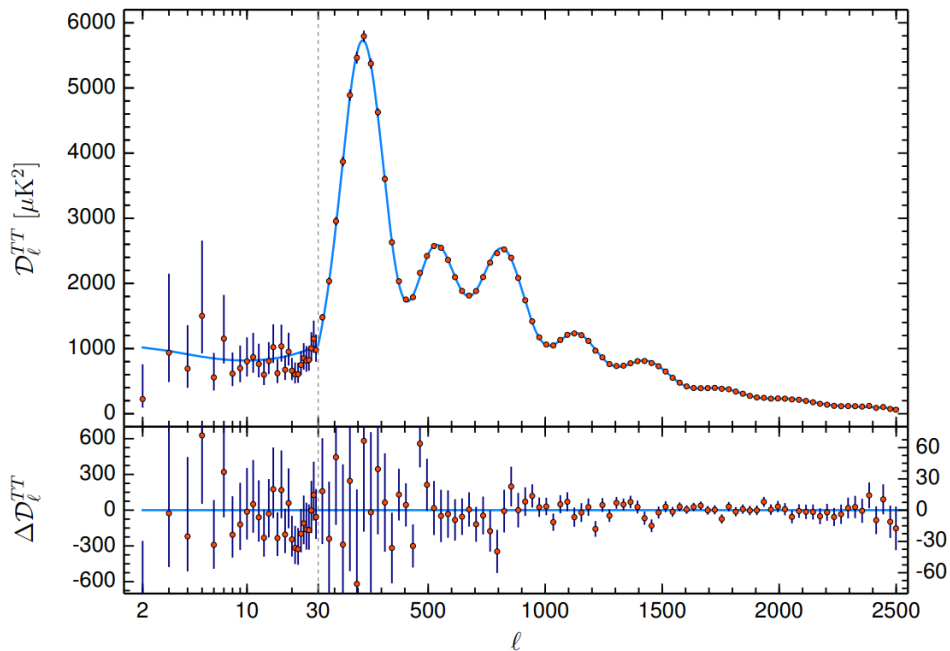


Figura 1.3: Tomada de [2]. Resultados de la colaboración Planck que muestran el espectro de potencias angular D_l^{TT} (superior) y residual ΔD_l^{TT} (inferior) de las fluctuaciones de temperatura como función del momento multipolar l . La línea en azul claro del panel superior representa el mejor ajuste a las probabilidades Planck TT,TE,EE+lowE+lensing suponiendo un modelo cosmológico Λ CDM. Los puntos rojos corresponden a los datos agrupados de Planck. Valores residuales con respecto a este modelo vienen mostrados en el panel inferior. La escala vertical cambia en $l = 30$, donde el eje horizontal cambia de una logarítmica a una lineal.

1.2.2. Horizonte de sonido como regla estándar: Oscilaciones Acústicas de Bariones

Antes de la formación del CMB, es decir, antes de la recombinación ($z > 1100$), el universo consistía de un plasma de bariones acoplados a los fotones. Existía una lucha constante entre la fuerza de gravedad, que intentaba juntar a todas las partículas, y la fuerza de la presión de la luz que actuaba en contra. Perturbaciones en la materia oscura comenzaron a crecer mientras que las perturbaciones en la materia bariónica estaban sujetas

por la presión de los fotones y en una constante oscilación. Las resultantes ondas de sonido en el plasma barión—fotón son conocidas como oscilaciones acústicas de bariones (*BAO*, por sus siglas en inglés). La distancia comóvil viajada por una onda de sonido desde el final de la inflación (con corrimiento al rojo $z = \infty$) hasta el desacoplamiento de los bariones con los fotones es llamada *horizonte de sonido*, denotada por “ r_s ” o “ r_d ”, y dada por la relación [30]

$$r_d \equiv \int_{z_{\text{drag}}}^{\infty} \frac{c_s(z)}{H(z)} dz, \quad (1.10)$$

donde z_{drag} es el corrimiento al rojo de la época de arraste y c_s la velocidad del sonido del plasma barión—fotón dada en términos de la velocidad de la luz c , la densidad de bariones ρ_b y la densidad de fotones ρ_γ , como [32]

$$c_s = \frac{c}{\sqrt{3 \left(1 + \frac{3\rho_b}{4\rho_\gamma}\right)}}. \quad (1.11)$$

Para el momento en el que los fotones se desacoplaron, ya existían pozos gravitacionales de materia oscura, que actuarían como semillas en la formación de estructura. La materia bariónica comenzó a caer libremente en estos pozos de potencial a la vez que mantenían los patrones formados durante las oscilaciones en el plasma. Estos patrones, del tamaño del horizonte de sonido, se caracterizan por tener regiones en donde los bariones están más comprimidos y regiones en las que son más escasos. Esto inmediatamente da indicio de una huella impresa en el acumulamiento de materia a grandes escalas visto hoy en día, con la existencia de una sobre densidad de galaxias separadas por una distancia igual al horizonte de sonido, $r_d \sim 150$ Mpc, que puede servir como una “regla estándar” para medir distancias en el universo, tal y como observamos en la figura 1.4.

Para ver como medir estas distancias necesitamos definir una distancia conocida como *distancia de diámetro angular*. Consideremos una fuente con una escala física conocida r (como la regla estándar r_d) que subtiende un ángulo θ en el cielo. En un espacio Euclidiano la distancia de diámetro angular física está definida como [30]

$$D_A(z) = \frac{r}{\theta}, \quad (1.12)$$

para un universo FLRW plano en expansión, D_A puede expresarse de la siguiente forma [30]:

$$D_A(z) = \frac{c}{1+z} \int_0^z \frac{dz'}{H(z')}, \quad (1.13)$$

donde c es la velocidad de la luz y $H(z)$ el parámetro de Hubble dada por la ecuación de Friedmann (1.3). Con ello podemos relacionar la escala angular θ_d del horizonte de sonido, en la época de recombinación, con los parámetros cosmológicos como

$$\theta_d = \frac{r_d}{d_A(z_{rec})}, \quad (1.14)$$

con $d_A \equiv (1+z)D_A$ la distancia de diámetro angular comóvil evaluada en $z = z_{rec}$. Usando la ecuación (1.13) podemos reescribir θ_d de la siguiente manera

$$\theta_d = \frac{H_0 r_d}{c \int_0^{z_{rec}} \frac{dz'}{E(z')}}, \quad (1.15)$$

con $E(z) \equiv H(z)/H_0$ el parámetro de Hubble normalizado. La ecuación (1.15) indica que al medir θ_d existe una degeneración entre los parámetros H_0 y r_d , por lo que no pueden ser determinadas usando datos únicamente de BAO, solamente restringimos $E(z)$ y el producto $H_0 r_d$. Para romper la degeneración necesitamos incluir otros datos que determinen de forma separada a r_d o H_0 .

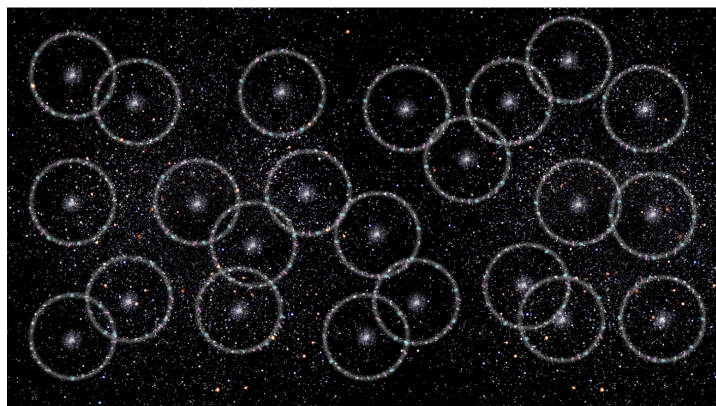


Figura 1.4: Ilustración ejemplificando una serie de galaxias distribuidas a través del espacio. Varias de estas galaxias parecieran estar distribuidas en el centro y sobre la superficie de una estructura esférica, de radio r_d , que representa a una oscilación acústica de bariones. Créditos: Zosia Rostomian, LBNL.

Una de las cantidades más importantes en la estructura a gran escala es la *función de correlación de dos puntos*, definida por

$$\xi(\vec{r}) \equiv \langle \delta(\vec{x})\delta(\vec{x} + \vec{r}) \rangle, \quad (1.16)$$

donde $\delta(\vec{x})$ es una medida de la sobre densidad en el punto \vec{x} . Dada una galaxia aleatoria ubicada en la posición \vec{x} , la función de correlación da la probabilidad de encontrar otra galaxia a una distancia $\vec{x} + \vec{r}$. Las primeras mediciones de estas oscilaciones acústicas fueron reportadas en el año 2005 por dos grupos independientes; la colaboración *Sloan Digital Sky Survey* (SDSS) liderada por Daniel Eisenstein [33] y la colaboración *2dF* liderada por Shaun Cole [34]. La figura 1.5 muestra la función de correlación reportada, en donde es posible visualizar el “pico de BAO” r_d debido a un aumento en la sobre densidad de materia.

Más información sobre cómo obtener distancias a partir de mediciones de BAO puede ser encontrada en [35]. Las mediciones de BAO más actuales corresponden a los proyectos 6dF Galaxy Survey [5], SDSS Main Galaxy Sample [6], SDSS Baryon Oscillation Spectroscopic Survey (BOSS) [7], SDSS Extended Baryon Oscillation Spectroscopic Survey (eBOSS) Luminous Red Galaxy [8], SDSS eBOSS Emission Line Galaxies [9], SDSS eBOSS Quasar [10] y SDSS eBOSS Ly α [11] cuyos datos vienen dados en la tabla 1.1.

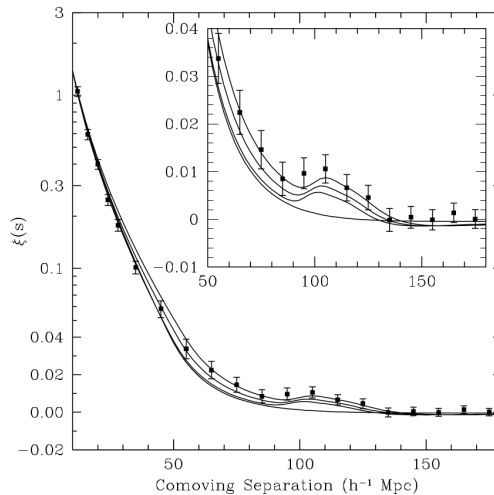


Figura 1.5: Tomada de [33]. Función de correlación de materia de la muestra SDSS LRG. El pico acústico de bariones es visible alrededor de $105 h^{-1}$ Mpc, y es sensible a la densidad de materia. Se muestran modelos con $\Omega_m h^2 = 0.12$ (primera línea), 0.13 (segunda línea) y 0.14 (tercera línea). La última gráfica corresponde a una función de correlación con $\Omega_b = 0$.

Los datos obtenidos de mediciones de BAO, son las distancias $D_V(z)$, $D_M(z)$ y $D_H(z)$, divididas por r_d y que para un universo plano siguen las siguientes relaciones

$$D_H(z) = \frac{c}{H(z)}, \quad (1.17)$$

$$D_M(z) = (1+z)D_A(z) = d_A, \quad (1.18)$$

$$D_V(z) = [zD_M^2(z)D_H(z)]^{1/3}. \quad (1.19)$$

Proyecto	z	$D_V(z)/r_d$	$D_M(z)/r_d$	$D_H(z)/r_d$
6dF	0.097	2.522 ± 0.115		
MGS	0.15	4.47 ± 0.17		
BOSS galaxy	0.38		10.23 ± 0.17	25.00 ± 0.76
BOSS galaxy	0.51		13.36 ± 0.21	22.33 ± 0.58
eBOSS LRG	0.70		17.86 ± 0.33	19.33 ± 0.53
eBOSS ELG	0.85	$18.33^{+0.57}_{-0.62}$		
eBOSS quasar	1.48		30.69 ± 0.80	13.26 ± 0.55
Ly α -Ly α	2.33		37.6 ± 1.9	8.93 ± 0.28
Ly α -quasar	2.33		37.3 ± 1.7	9.08 ± 0.34

Tabla 1.1: Mediciones actuales de $r_d/D_V(z)$, $D_V(z)/r_d$, $D_M(z)/r_d$ y $D_H(z)/r_d$ a partir de oscilaciones acústicas de bariones. Las incertidumbres mostradas son aproximaciones Gaussianas de las probabilidades de cada medición que ignoran las correlaciones entre mediciones.

1.2.3. Ondas gravitacionales como sirenas estándar: Método prometedor para determinar H_0

Un método independiente y altamente prometedor para la determinación de la constante de Hubble es mediante observaciones de ondas gravitacionales (GW , por sus siglas en inglés) que tienen una contraparte electromagnética; a esto le llamamos una *sirena estándar*. En

principio, la colisión de dos agujeros negros generan ondas gravitacionales pero carecen de esa contraparte electromagnética por lo que no podemos inferir el corrimiento al rojo del evento, por ello optamos más por el uso de estrellas de neutrones en las etapas finales de un sistema binario o en la fusión de una estrella de neutrones con un agujero negro de masa estelar. Este método fue propuesto en el año 1986 por Bernard F. Schutz [36] y puede medir directamente la distancia lumínica, d_L , de la fuente.

Para definir la distancia lumínica, consideremos una fuente de luz cosmológica con una luminosidad L absoluta y un observador ubicado a una distancia d_L . La potencia radiada por la fuente se conserva y se distribuye en un cascarón esférico con área $4\pi d_L^2$, por lo tanto el flujo observado es

$$F = \frac{L}{4\pi d_L^2}, \quad (1.20)$$

para un universo plano en expansión, donde la energía de los fotones no se conserva debido al corrimiento al rojo, la distancia lumínica puede ser expresada como [30]

$$d_L(z) = c(1+z) \int_0^z \frac{z'}{H(z')} dz', \quad (1.21)$$

donde c es la velocidad de la luz y $H(z)$ el parámetro de Hubble. Con F observado y L conocido, podemos medir d_L y hacer el ajuste a la ecuación (1.21).

Las sirenas estándar pueden ser calibradas a través de la señal de la onda gravitacional, y debido a que la colisión del sistema binario está bien modelada, las incertidumbres podrían resultar muy pequeñas. La distancia d a la fuente la estimamos de la amplitud de la onda gravitacional detectada $\langle h \rangle$ [36–38]

$$d = C f^{-2} \langle h \rangle^{-1} \tau^{-1}, \quad (1.22)$$

con f la frecuencia de la onda gravitacional, $\tau \equiv f/\dot{f}$ es la escala temporal del cambio en la frecuencia y C una constante numérica. La distancia lumínica $d_L(z)$ la obtenemos mediante la relación

$$d_L(z) = (1+z)d, \quad (1.23)$$

y midiendo el corrimiento al rojo z de la fuente, mediante la contraparte electromagnética del evento, podemos hacer un ajuste de los parámetros cosmológicos usando la ecuación (1.21). El 17 de agosto de 2017, los detectores LIGO y Virgo observaron el evento GW170817 de una onda gravitacional producto de la fusión de un sistema binario de estrellas de neutrones [39] para el cual, el artículo [40] reporta un valor para la constante de Hubble de $H_0 = 70_{-8}^{+12}$ km s⁻¹ Mpc⁻¹. Esperamos que las incertidumbres se vean reducidas considerablemente en los siguientes años conforme más eventos puedan ser medidos.

1.3. Mediciones de H_0 en tiempos tardíos del universo

La forma del modelo Λ CDM en un universo tardío hace uso de diferentes proposiciones que aquellas de un universo temprano, incluyendo descripciones de la materia oscura (frío, sin interacciones además de la gravitacional, etc.) y la energía oscura (en forma de una constante cosmológica). Algunas de estas suposiciones pueden ponerse a prueba, pero no con la precisión con la que están basadas dentro del modelo.

1.3.1. Uso de candelas estándar para la determinación de la distancia lumínica

Como mencionamos en la sección anterior, la distancia lumínica (1.21) la podemos obtener si medimos el flujo F de la fuente que tiene una luminosidad L absoluta. A esta clase de objetos los conocemos como *candela estándar*. El método mejor establecido para medir la constante de Hubble de forma local proviene de medir la relación distancia—corrimiento al rojo, que generalmente se lleva a cabo mediante la construcción de una “escalera de distancias”. Recordemos que la ley de Hubble no es exacta debido a las velocidades peculiares de las galaxias; si queremos que la velocidad de Hubble sea la dominante necesitamos medir distancias suficientemente lejanas (decenas de Mpc) para poder ignorar la velocidad peculiar. Teniendo esto en cuenta, debemos poder estimar estas grandes distancias con precisión y es aquí donde hacemos uso de la escalera de distancias. El enfoque más

utilizado en la escalera es utilizar métodos geométricos, como el paralaje, para calibrar las luminosidades de ciertos tipos de estrellas cercanas (por ejemplo, Cefeidas variables). Lo siguiente, es utilizar esa calibración para determinar la luminosidad intrínseca de alguna candela estándar más brillante, comúnmente una supernova tipo Ia (SNIa), que se encuentre en la misma galaxia. Con esta calibración podemos empezar a medir más SNIa que se encuentren a grandes distancias donde sus corrimientos al rojo miden la expansión cósmica.

Las Cefeidas variables son un tipo de estrellas que pulsan radialmente, variando en el brillo que producen pero teniendo una fuerte y directa relación entre su brillo variable y su periodo de pulsación. Las Cefeidas se utilizan con mayor frecuencia en distancias de 10 a 40 Mpc puesto a que son los objetos más brillantes del sistema óptico, con luminosidades que alcanzan las 100,000 luminosidades solares y precisión de $\approx 3\%$ en distancia en un periodo de pulsación determinado [41, 42].

Las SNIa son un tipo de supernova producidas en un sistema binario de dos estrellas, en donde una de ellas es una enana blanca, la otra puede ser cualquier tipo de estrella desde una gigante roja hasta otra enana blanca [43]. Dada la alta densidad de la enana blanca, esta posee una fuerte atracción gravitacional y extraerá material de su estrella compañera, agregándose esa materia a sí misma. Lo que convierte a este sistema en una candela estándar es el hecho de que la enana blanca, tras alcanzar una masa crítica conocida como límite de Chandrasekhar, empieza una reacción en cadena que termina en una supernova. Debido a que la masa crítica es siempre la misma para todas las enanas blancas, todas las SNIa tienen el mismo brillo. El brillo de las SNIa llega a superar los mil millones de luminosidades solares lo que las hace ideales para medir grandes distancias en el universo.

La distancia lumínica de la ecuación (1.21) puede ser usada para encontrar la magnitud aparente m de una fuente con magnitud absoluta M . Las magnitudes están relacionadas con el flujo F y la luminosidad L a través de las relaciones

$$m = -\frac{5}{2}\log_{10}(F) + cte, \tag{1.24}$$

$$M = -\frac{5}{2}\log_{10}(L) + cte, \quad (1.25)$$

usando la ecuación (1.20) la magnitud aparente queda escrita como $m = M + 5\log_{10}(d_L) + cte$. La convención actual es tomar

$$m(z) = M + 5\log_{10}\left(\frac{d_L(z)}{\text{Mpc}}\right) + 25, \quad (1.26)$$

reescribiendo la ecuación (1.21) como

$$d_L(z) = \frac{c(1+z)}{H_0} \int_0^z \frac{dz'}{E(z')}, \quad (1.27)$$

donde $E(z) \equiv H(z)/H_0$. Sustituyendo en (1.26) obtenemos

$$m = M + 5\log_{10}\left[(1+z) \int_0^z \frac{dz'}{E(z')}\right] + 5\log_{10}\left(\frac{c/H_0}{\text{Mpc}}\right) + 25. \quad (1.28)$$

Esta ecuación indica una degeneración entre la constante de Hubble H_0 y la magnitud absoluta M . El uso de la ecuación (1.28) para medir H_0 requiere un conocimiento sobre el valor de la magnitud absoluta M de las SNIa, la cual podemos obtener usando a las Cefeidas variables como calibradoras de las SNIa locales a $z < 0.01$.

Los estudios indican la relación “distancia—corrimiento al rojo” de las SNIa midiendo la luminosidad máxima de sus curvas de luz característica, y los corrimientos a rojo z de la galaxia anfitriona. El conjunto de datos más reciente y más grande de SNIa que incorpora 1701 curvas de luz de 1550 distintas SNIa en el rango $0.001 < z < 2.26$ es la muestra de Pantheon+ [12]. Para determinar el valor de la constante de Hubble, la colaboración SH0ES reportó la observación de Cefeidas variables en las galaxias anfitrionas de 42 SNIa, con ello lograron la calibración de la magnitud absoluta M e infirieron un valor de la constante de Hubble de $H_0 = 73.04 \pm 1.04 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ [1]. El diagrama de Hubble para Pantheon+ viene mostrada en la figura 1.6.

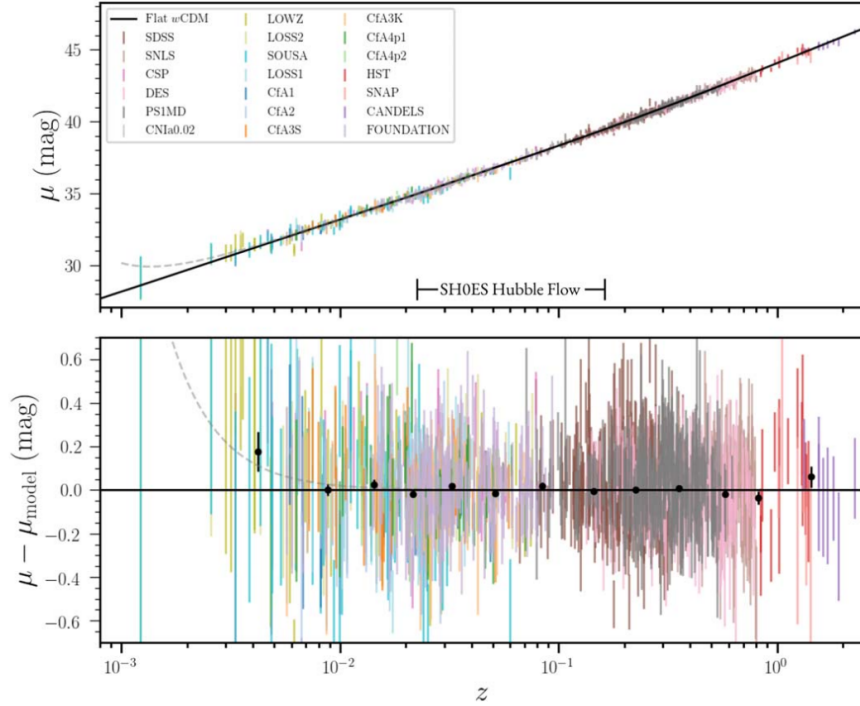


Figura 1.6: Tomada de [12]. Panel superior: Diagrama de Hubble para la muestra de Pantheon+ mostrando la distancia modular μ vs corrimiento al rojo z . Los 18 estudios que conforman a Pantheon+ son mostradas en distinto color. Panel inferior: Valores residuales de la distancia modular relativo al mejor ajuste del modelo cosmológico Λ CDM. Los puntos negros corresponden a datos agrupados. Tanto el error de los datos individuales como el error en los datos agrupados incluyen solo incertidumbres estadísticas. En $z \leq 0.01$ la sensibilidad de las velocidades peculiares es muy grande y las incertidumbres lo reflejan.

1.3.2. Tiempos de retraso: Lentes gravitacionales

La cosmografía de tiempos de retraso con lentes gravitacionales es otro método para la medición de la constante de Hubble. Sjur Refsdal propuso el método en el año 1964 [44]. Una lente gravitacional fuerte ocurre cuando una distribución de masa se encuentra a lo largo de la línea de visión hacia una fuente de fondo, de modo que múltiples imágenes de la fuente aparecen alrededor de la distribución de masa en primer plano (ver figura 1.7). En ocasiones en donde la intensidad de la fuente de fondo varíe, como con un núcleo activo de galaxia (*AGN*, por sus siglas en inglés) o una SN, el patrón con el que varía la intensidad se manifiesta en cada una de las múltiples imágenes en donde el tiempo de llegada de la luz se desfasa producto de las diferentes trayectorias que recorre.

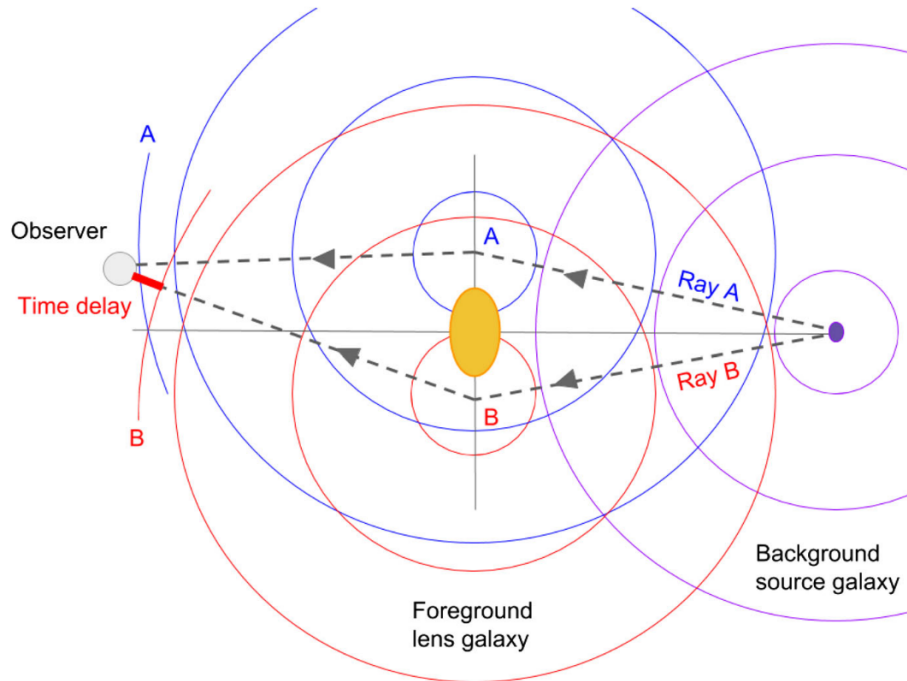


Figura 1.7: Tomada de [45]. Diagrama ilustrando el origen geométrico de los tiempos de retraso producidos por lentes gravitacionales. El rayo A y el rayo B recorren distintos caminos ópticos, por lo que llegan desfasadas una respecto a la otra.

El tiempo de llegada de la imagen i , relativo al caso en el que no existe la lente, viene dada por la relación [45, 46]

$$t(\vec{\theta}_i; \vec{\beta}) = \frac{D_{\Delta t}}{c} \phi(\vec{\theta}_i; \vec{\beta}). \quad (1.29)$$

Aquí, $\vec{\theta}_i$ es la posición de la imagen i aparente en el cielo, $\vec{\beta}$ es la posición de la fuente sin lente, $D_{\Delta t}$ es llamada la distancia del tiempo de retraso, c la velocidad de la luz y $\phi(\vec{\theta}_i; \vec{\beta})$ es el “potencial de Fermat” el cual es predicha modelando la distribución de masa de la lente. El tiempo de llegada anterior no es una cantidad observable por si misma, si no más bien las diferencias en la hora de llegada entre las múltiples imágenes, esto es el tiempo de retraso $\Delta\tau_{ij}$. En la aproximación anterior, el tiempo de retraso entre las imágenes A y B lo podemos predecir mediante

$$\Delta\tau_{AB} = \frac{D_{\Delta t}}{c} \Delta\phi_{AB}, \quad (1.30)$$

donde $\Delta\phi_{AB}$ es la diferencia del potencial de Fermat entre las posiciones de las dos imágenes. Por lo tanto, dado el modelado de la masa que predice el valor de $\Delta\phi_{AB}$ y el tiempo de retraso $\Delta\tau_{AB}$ medido al monitorear y comparar las curvas de luz de las múltiples imágenes, podemos obtener el valor para $D_{\Delta t}$. Si la lente y la fuente tienen corrimientos al rojo z_d y z_s respectivamente, la distancia de tiempo de retraso es una combinación de distancias de diámetro angular igual a la ecuación (1.13)

$$D_{\Delta t} = (1 + z_d) \frac{D_d D_s}{D_{ds}}, \quad (1.31)$$

con D_d la distancia angular a la lente, D_s la distancia angular a la fuente, y D_{ds} la distancia angular entre la fuente y la lente

$$D_{ds} = \frac{c}{1 + z_s} \int_{z_d}^{z_s} \frac{dz'}{H(z')}, \quad (1.32)$$

así, con $D_{\Delta t}$ medida mediante (1.30) podemos usar (1.31) para ajustar los parámetros cosmológicos, en particular H_0 .

Las mediciones más recientes de H_0 con lentes gravitacionales provienen de la colaboración *H0LiCOW* [3], que da mediciones del tiempo de retraso de seis cuásares con lente gravitacional, mostradas en la figura 1.8. El análisis infirió un valor de la constante de Hubble de $H_0 = 73.3^{+1.7}_{-1.8} \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$.

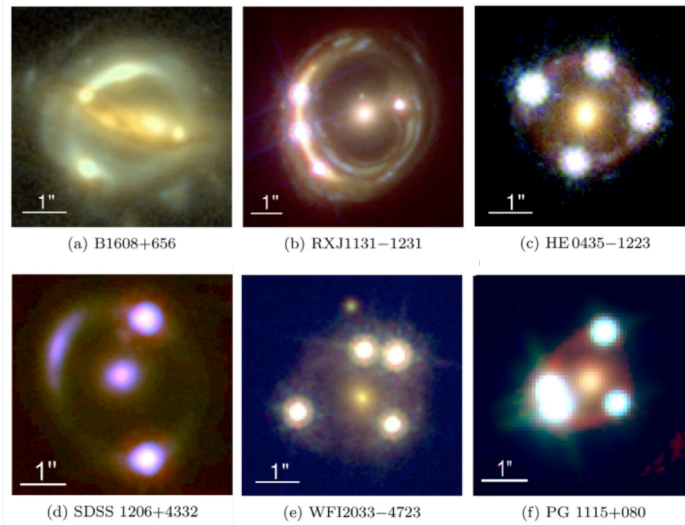


Figura 1.8: Tomada de [3]. Imágenes a color de los seis lentes gravitacionales usados en el análisis de H0LiCOW.

1.3.3. Cronómetros cósmicos

El método de los cronómetros cósmicos (*CC*) para la determinación de la constante de Hubble fue propuesto por Raúl Jiménez y Abraham Loeb en el año 2002 [47] y es capaz de proporcionar una estimación directa, e independiente del modelo cosmológico, de la tasa de expansión del universo. El método utiliza el hecho de que es posible expresar directamente el parámetro de Hubble como función del diferencial temporal dt del universo en un intervalo de corrimiento al rojo dado, dz , como lo da la siguiente ecuación

$$H(z) = \frac{\dot{a}}{a} = -\frac{1}{1+z} \frac{dz}{dt}. \quad (1.33)$$

Dado que la cantidad dz la obtenemos a partir de estudios espectroscópicos con alta precisión, el desafío consiste en medir la evolución diferencial dt del universo, sobre un rango de corrimientos al rojo. Los cronómetros cósmicos, típicamente son galaxias que evolucionan pasivamente en una escala de tiempo mucho más larga que su diferencia de edad. Para que la metodología sea eficaz, necesitamos que la muestra al que le medimos su evolución diferencial dt sea homogénea en función del tiempo cósmico, es decir, que los cronómetros comenzaron de forma sincronizada independientemente de su corrimiento al rojo. Con $H(z)$ medida, los parámetros cosmológicos puede ser obtenidos mediante un ajuste a la ecuación de Friedmann (1.5). Más información de técnicas confiables para la estimación de dt al igual que las incertidumbres estadísticas y sistemáticas puede ser encontrada en [48]. En la misma publicación presentan un análisis con todas las mediciones de $H(z)$ realizadas hasta la fecha. La muestra consta de 32 mediciones obtenidas de los trabajos [13–21], presentadas en la tabla 1.2 y graficadas en la figura 1.9. El análisis infirió un valor para la constante de Hubble de $H_0 = 66.5 \pm 5.4 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$.

z	H(z) (km s ⁻¹ Mpc ⁻¹)
0.07	69.0 ± 19.6
0.09	69 ± 12
0.12	68.6 ± 26.2
0.17	83 ± 8
0.179	75 ± 4
0.199	75 ± 5
0.20	72.9 ± 29.6
0.27	77 ± 14
0.28	88.8 ± 36.6
0.352	83 ± 14
0.38	83 ± 13.5
0.4	95 ± 17
0.4004	77 ± 10.2
0.425	87.1 ± 11.2
0.445	92.8 ± 12.9
0.47	89 ± 49.6
0.4783	80.9 ± 9
0.48	97 ± 62
0.593	104 ± 13
0.68	92 ± 8
0.75	98.8 ± 33.6
0.781	105 ± 12
0.875	125 ± 17
0.88	90 ± 40
0.9	117 ± 23
1.037	154 ± 20
1.3	168 ± 17
1.363	160 ± 33.6
1.43	177 ± 18
1.53	140 ± 14
1.75	202 ± 40
1.965	186.5 ± 50.4

Tabla 1.2: Mediciones de H(z), hasta la fecha, obtenidas con el método de los CC. El error reportado aquí representa la diagonal de la matriz de covarianza; para hacer uso apropiado de los datos, la matriz de covarianza completa debe tomarse en cuenta.

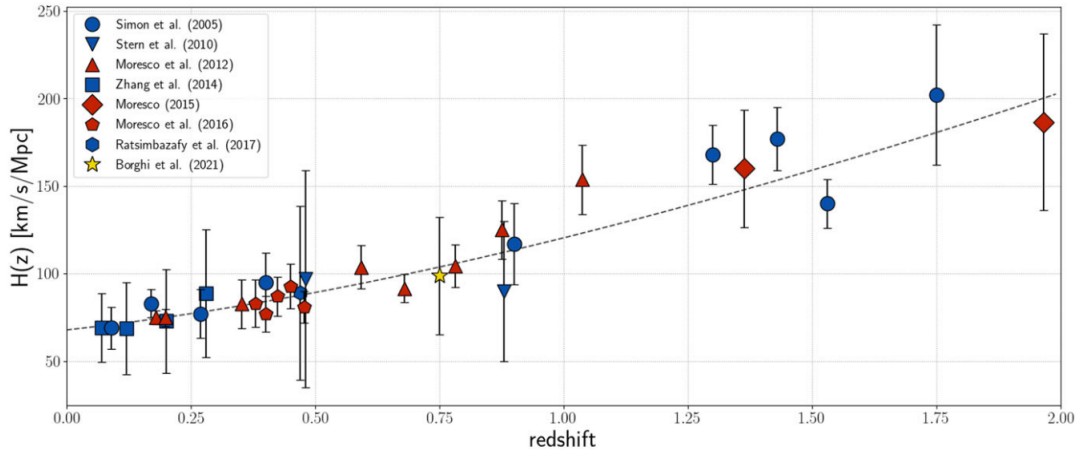


Figura 1.9: Tomada de [48]. Mediciones en el parámetro de Hubble $H(z)$ con el método de los CC. La línea sólida no es el mejor ajuste a los datos, sino que muestra una cosmología fiducial plana Λ CDM restringida por la colaboración Planck ($H_0 = 67.8 \pm 0.9 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$, $\Omega_m = 0.308 \pm 0.012$).

1.3.4. Megamáseres

Los megamáseres de agua que se encuentran en discos de acreción alrededor de agujeros negros supermasivos (*SMBHs*, por sus siglas en inglés) en los AGN proporcionan un método para calcular distancias extragalácticas en un solo paso sin tener que recurrir a la escalera de distancias como el caso de las SNIa [49–51]. Los megamáseres actúan como un rayo láser que arrojan haces en la banda de las microondas en lugar de luz visible (por ello remplazan la letra “L” por “M”).

Si suponemos una órbita circular Kepleriana alrededor del SMBH, tenemos que la aceleración y velocidad centrípeta de la nube siguen las relaciones [52]

$$A = \frac{V^2}{r}, \quad (1.34)$$

$$V = \sqrt{\frac{GM}{r}}, \quad (1.35)$$

con G la constante de Newton, M es la masa del SMBH, y r la distancia entre la nube y el agujero negro. La escala angular θ subtendida por r viene dada por

$$\theta = \frac{r}{D_A}. \quad (1.36)$$

Por lo tanto, de las mediciones de la velocidad y aceleración obtenidas del espectro de líneas de emisión del megamáser, la distancia angular D_A la podemos determinar como

$$D_A = \frac{V^2}{A\theta}, \quad (1.37)$$

en donde un ajuste con los parámetros cosmológicos la realizamos siguiendo la ecuación (1.13). Recientemente, el proyecto cosmológico megamáser (*MCP*, por sus siglas en inglés) usando las distancias angulares a seis galaxias anfitrionas de megamáseres y suponiendo una incertidumbre global de 250 km s^{-1} asociada a los movimientos peculiares de las galaxias, restringió el valor de la constante de Hubble a ser $H_0 = 73.9 \pm 3 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ [22]. La tabla 1.3 muestra las velocidades y distancias de las galaxias máser usadas en el análisis.

Galaxia	Distancia (Mpc)	Velocidad (km s^{-1})
UGC 3789	$51.5^{+4.5}_{-4.0}$	3319.9 ± 0.8
NGC 6264	132.1^{+21}_{-17}	10192.6 ± 0.8
NGC 6323	109.4^{+34}_{-23}	7801.5 ± 1.5
NGC 5765b	$112.2^{+5.4}_{-5.1}$	8525.7 ± 0.7
CGCG 074-064	$87.6^{+7.9}_{-7.2}$	7172.2 ± 1.9
NGC 4258	7.58 ± 0.11	679.3 ± 0.4

Tabla 1.3: Distancias y velocidades de galaxias máser medidas por el proyecto cosmológico megamáser [22]. Para cada dato se cita la mediana posterior y el intervalo de confianza a 1σ . Todas las velocidades son citadas en el marco de referencia del CMB.

1.4. Estado actual en el valor de H_0

A lo largo de este capítulo, hemos repasado el progreso notable realizado durante las últimas décadas en obtener una medición para la constante de Hubble. La figura 1.10 muestra el valor de H_0 obtenido durante las últimas dos décadas y para distintos métodos. Los métodos actuales con la mejor precisión en la constante de Hubble corresponde a la

escalera de distancias usando Cefeidas variables como calibrador (colaboración SH0ES) y la medición de las anisotropías de temperatura del CMB (Colaboración Planck); en ambos el valor de la constante de Hubble es de $H_0 = 73.04 \pm 1.04$ y $H_0 = 67.4 \pm 0.5 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ respectivamente. Las incertidumbres en estos valores han ido disminuyendo para ambos métodos y vemos que actualmente ambas mediciones se encuentran a más de 4σ de estar en concordancia entre si, dando origen a lo que conocemos como la **Tensión de Hubble**.

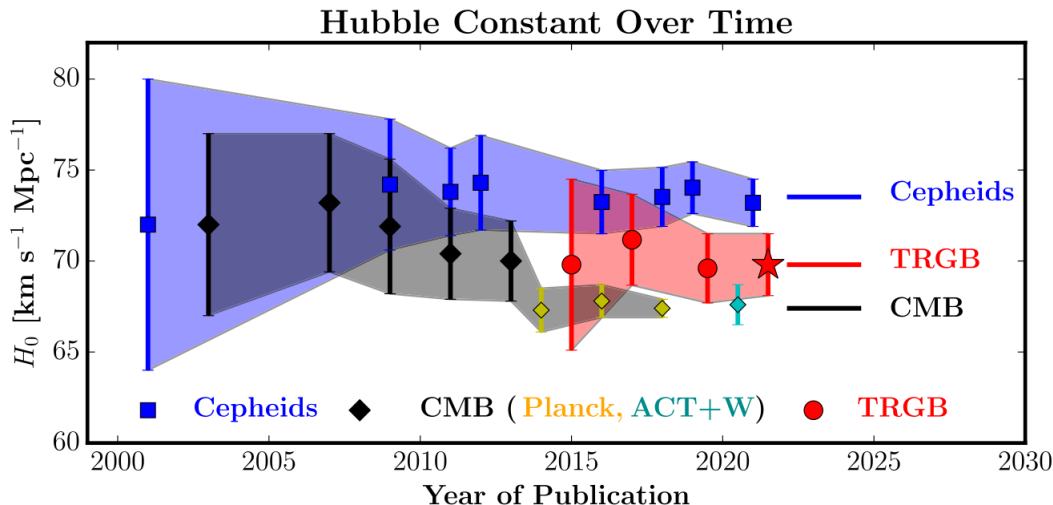


Figura 1.10: Tomada de [53]. Valores inferidos de la constante de Hubble H_0 en las últimas dos décadas basados en el uso de Cefeidas (cuadrados azules), punto de rama de una gigante roja (“TRGB”, por sus siglas en inglés) como calibrador alternativo a las Cefeidas (círculos rojos y la estrella) y estimaciones de las fluctuaciones del CMB (WMAP: diamantes negros; Planck: diamantes amarillos; ACT+WMAP: diamantes cían. Los valores de H_0 del CMB suponen un modelo Λ CDM plano. Los resultados para TRGB caen en el medio entre las estimaciones del CMB y Cefeidas, y se superpone a los resultados del CMB.

La figura 1.11 muestra los valores de la constante de Hubble, con incertidumbres citadas a 1σ , derivado de mediciones recientes. De forma general, la tensión de Hubble parece manifestarse como un desacuerdo entre su valor inferido mediante el uso de mediciones de tiempos tempranos del universo y el valor medido de tiempos tardíos. Muchas posibilidades surgen para aliviar esta tensión: errores sistemáticos aún sin considerar, errores en las suposiciones hechas sobre el modelo cosmológico o inclusive indicios de nueva física que va más allá de lo que el modelo Λ CDM es capaz de explicar.

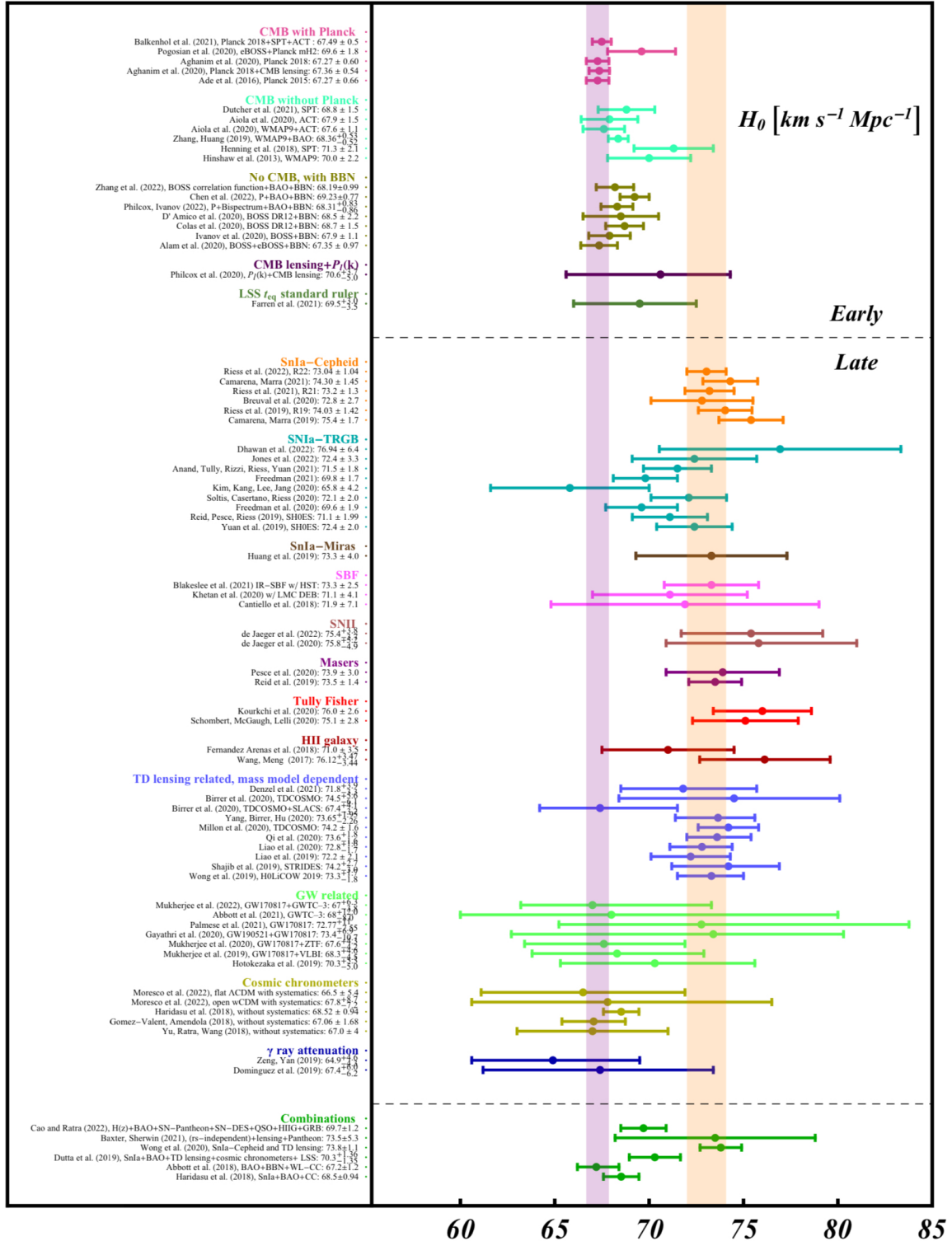


Figura 1.11: Tomada de [54]. Valores de la constante de Hubble H_0 , con incertidumbres citadas a 1σ , derivado de mediciones recientes. La línea punteada separa a las mediciones que utilizan física del universo temprano de aquellas que utilizan física del universo tardío. La línea vertical morada corresponde al valor de H_0 reportado por la colaboración Planck, mientras que la línea vertical color naranja claro corresponde a la colaboración SHOES.

Capítulo 2

Abordando la tensión de Hubble

Las mediciones del experimento Planck han logrado una gran precisión en los parámetros cosmológicos, sin embargo, estas restricciones son siempre dependientes del modelo cosmológico utilizado en el ajuste. Por lo tanto, la tensión de Hubble proporciona una evidencia de que, si no es debido a errores sistemáticos, un mejor modelo que Λ CDM puede ser encontrado, con el cual, al ser utilizado con los datos de Planck, la tensión disminuya o desaparezca.

No olvidemos que existen muchas componentes en el modelo Λ CDM que aún desconocemos, hablando específicamente de: inflación, DM y DE. Era de esperarse que con el aumento en la sensibilidad de los experimentos comenzara a manifestarse una desviación del escenario estándar que planteó Λ CDM. La tensión de Hubble ha generado gran motivación dentro de la comunidad cosmológica con incontables artículos tratando de resolver la discrepancia usando métodos de medición alternativos, errores sistemáticos sin tomar en cuenta, modificaciones teóricas del escenario estándar o inclusive con nueva física más allá del modelo Λ CDM.

En este capítulo, repasaremos una pequeña parte de los modelos teóricos propuestos como solución de la tensión en los últimos años. Además, abordaremos una nueva perspectiva sobre la tensión, donde el valor inferido de H_0 sigue una tendencia descendiente con el corrimiento al rojo z .

2.1. Problema del horizonte de sonido

Uno de los principales puntos a considerar con la tensión de Hubble es el llamado *problema del horizonte de sonido*. Visto en la sección 1.2.2, los datos de BAO logran restringir el producto $H_0 r_d$ de forma muy precisa; con los datos más actuales, mencionados en la tabla 1.1, y ajustando el modelo Λ CDM, $H_0 r_d$ tiene un valor de

$$H_0 r_d = 10,077^{+121.023}_{-123.822} \text{ km s}^{-1}, \quad (2.1)$$

con $\approx 1.2\%$ de precisión. Las mediciones del CMB también logran estimaciones sobre el valor del horizonte de sonido (alrededor de 147 Mpc [2]), por lo tanto, para lograr estar de acuerdo con las mediciones del CMB (ver figura 1.3), las cuales requieren un valor bajo de H_0 , las constricciones de BAO en r_d deben encontrarse no tan alejado de los 147 Mpc. Caso contrario, para estar de acorde con las estimaciones de SH0ES sobre H_0 , los datos de BAO prefieren un menor valor sobre r_d , cercano a los 137 Mpc. En conclusión, para estar de acuerdo con todos los conjuntos de datos, requerimos de un valor de H_0 más alto y un r_d más bajo del CMB suponiendo un modelo específico.

Los modelos propuestos pueden ser clasificados en “soluciones de tiempos tardíos” y “soluciones de tiempos tempranos”. Los primeros dan referencia a soluciones que hacen modificaciones después de la etapa de recombinación y por lo tanto dejan el valor de r_d inalterado. Los últimos, en cambio, modifican la historia de la expansión antes de la recombinación, cambiando tanto H_0 como r_d en una dirección apropiada para resolver la tensión y el problema del horizonte de sonido de forma simultanea. Tomando esto a consideración, se ha argumentado que soluciones de tiempos tardíos están altamente desfavorecidos como una posible solución a la tensión dado a que desajustan los datos del CMB. En su lugar, escenarios con soluciones de tiempos tempranos, como la presencia de radiación extra o una componente de DE temprana, son mejores alternativas. En [55] podemos encontrar una guía para la construcción de modelos destinados a tratar la tensión de Hubble.

Existen muchos modelos pre-recombinación propuestos que se han enfocado en reducir el horizonte de sonido, sin embargo, en [56] argumentan que modelos que solo se enfocan en reducir r_d no podrán nunca resolver la tensión completamente, si esperamos que logren

estar en acuerdo al mismo tiempo con otros conjuntos de datos cosmológicos.

2.2. Modelos propuestos

Esta sección se enfoca en repasar algunos de los modelos propuestos para la tensión de Hubble. Cabe recalcar que existen muchos de ellos, por lo que es imposible cubrirlos todos. Por ello, el enfoque estará más dirigido hacia los más exitosos, aquellos que prometen reducir la tensión a menos de 2σ o incluso hasta 1σ .

2.2.1. Energía oscura temprana

Estos modelos son hasta ahora los más conocidos y prometedores en la solución para la tensión de Hubble, ya que logran al mismo tiempo lidiar con el problema del horizonte de sonido [57, 58]. En el modelo de energía oscura temprana (*EDE*, por sus siglas en inglés), un campo escalar dinámico adicional se comporta como una constante cosmológica en tiempos tempranos del universo (alrededor de la época de igualdad entre materia-radiación, pero antes de la recombinación) y posteriormente decae como radiación, o más rápido, a tiempos posteriores, dejando prácticamente inalterada la evolución tardía del universo hasta un cambio de escala que aumenta el valor de H_0 y disminuye el valor de r_d .

Oscilaciones anarmónicas

Un modelo de EDE puede implementarse usando distintas formas de un campo escalar que contribuye a la densidad de energía antes de la igualdad de materia-radiación. En [58] consideran un campo escalar oscilante ϕ con masa m donde el potencial tiene la forma

$$V(\phi) = m^2 f^2 (1 - \cos(\phi/f))^n, \quad (2.2)$$

con f una constante de decaimiento. La evolución temporal del campo escalar sigue la ecuación [59]

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V'(\phi) = 0, \quad (2.3)$$

donde el punto denota derivada respecto al tiempo cósmico t y la prima una derivada respecto al campo ϕ . A tiempos tempranos, en la etapa de dominación de radiación, el campo está inicialmente “congelado” y actúa como una constante cosmológica con ecuación de estado $w_\phi = -1$ (de ahí el nombre de EDE). A un cierto corrimiento al rojo crítico z_c , el campo oscila alrededor de su mínimo $V \sim \phi^{2n}$, por lo que se comporta como un fluido con ecuación de estado $w = (n - 1)/(n + 1)$ [59]. La densidad de energía y la ecuación de estado del campo escalar evolucionan con el factor de escala $a_c \equiv (1 - z_c)^{-1}$ siguiendo respectivamente las siguientes relaciones

$$\Omega_\phi(a) = \frac{2\Omega(a_c)}{(a/a_c)^{3(1+w_n)} + 1}, \quad (2.4)$$

$$w_\phi(a) = -1 + \frac{1 + w_n}{1 + (a_c/a)^{3(1+w_n)}}, \quad (2.5)$$

por lo tanto, la densidad de energía es constante a tiempos tempranos $a \rightarrow 0$, y decae como $a^{-3(1+w_n)}$ cuando el campo escalar se vuelve dinámico. Para $n = 1$, $n = 2$ y $n \geq 3$, el campo diluye como CDM (a^{-3}), radiación (a^{-4}) y más rápido que radiación respectivamente. En [58] los resultados para $n = 3$ fueron los más favorables; usando como conjunto de datos las mediciones de SH0ES hasta el año 2018 [60] (al que llamaremos R18), datos de la colaboración Planck del año 2015 [61] (al que denotaremos como Planck 2015), mediciones de BAO y el conjunto de supernovas de Pantheon del año 2018 [62], obtuvieron $H_0 = 70.6 \pm 1.3 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ reduciendo la tensión a 2σ . Sin embargo, este análisis incluye el priori de R18 en la constante de Hubble, lo que posiblemente sesga el resultado final hacia valores de H_0 mayores.

Energía oscura acústica exponencial

En [63] proponen una energía oscura acústica (*ADE*, por sus siglas en inglés) consistiendo de un fluido perfecto especificado por su ecuación de estado y su velocidad de sonido en el marco en reposo. La ecuación de estado tiene una dependencia exponencial con el factor de escala

$$w_{\text{eADE}}(a) = -1 + 2^{1 - \frac{a_c}{2a}}, \quad (2.6)$$

donde a_c corresponde al factor de escala crítico en el que el fluido se vuelve dominante. Para $a \ll a_c$ el fluido se comporta como una constante cosmológica con $w = 1$; después de la transición, la ecuación de estado evoluciona hasta tener el valor $w \approx 1$ en el presente. La densidad de energía evoluciona como

$$\Omega_{\text{eADE}}(a) = 2f_c \frac{(c_s^2 + 1)^2 - (w_{\text{eADE}}(a) + 1)^2}{(c_s^2 + 1)^2}, \quad (2.7)$$

donde $f_c \equiv \frac{\rho_{\text{eADE}}(a_c)}{\rho_{\text{tot}}(a_c)}$ es la contribución fraccional de eADE en $a = a_c$ y c_s es la velocidad del sonido. Para este modelo, un ajuste con Planck 2018 [2], R19 y Pantheon, provee el valor inferido de $H_0 = 71.65_{-4.40}^{+1.62} \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$, reduciendo la tensión hasta 1σ pero incluyendo el priori en H_0 de R19.

Los modelos de EDE modifican $H(z)$ a tiempos tempranos y requieren de una mayor densidad de materia para equilibrar este efecto en el CMB. Una cantidad mayor de materia va en contra del valor requerido en tiempos tardíos de datos obtenidos de crecimiento de estructura y de lentes gravitacionales. En el análisis realizado por [64, 65] concluyen que un modelo de EDE no puede resolver la tensión de Hubble por que da como resultado un valor más alto de la amplitud de las fluctuaciones de densidad a tiempos tardíos σ_8 , que conlleva a una nueva tensión con pruebas de estructura a gran escala (*LSS*, por sus siglas en inglés). Por lo tanto, una completa resolución a la tensión de Hubble requiere de múltiples modificaciones al modelo ΛCDM .

2.2.2. Energía oscura tardía

Si no consideramos a la energía oscura como una constante cosmológica con ecuación de estado $w_{\text{DE}} = -1$, si no más bien como una componente con una ecuación de estado dinámica $w_{\text{DE}}(z)$, entonces la tasa de expansión es afectada mediante la ecuación de Friedmann como

$$H^2(z) = H_0^2 [\Omega_r(1+z)^4 + \Omega_m(1+z)^3 + \Omega_{\text{DE}}f(z)], \quad (2.8)$$

con

$$f(z) = \exp \left[3 \int_0^{\ln(1+z)} (1 + w_{\text{DE}}(z')) d\ln(1 + z') \right], \quad (2.9)$$

en donde suponemos un universo plano ($\Omega_k = 0$). Las tensiones existentes en la cosmología pueden llegar a ser interpretadas como evidencia de una energía oscura dinámica no constante tal y como argumentan en la referencia [66].

Modelo w CDM

Este modelo tiene todas las características del modelo Λ CDM a excepción de una constante cosmológica que caracteriza a DE. En su lugar, considera una ecuación de estado w_{DE} constante e independiente del corrimiento al rojo para la componente de DE, $w_{\text{DE}} \equiv w_0 \neq -1$. Este modelo es la extensión de Λ CDM más simple y conocida; aquí la ecuación (2.9) da

$$f(z) = (1 + z)^{3(1+w_0)}. \quad (2.10)$$

Los resultados de Planck 2018 [2] para este modelo arrojaron los valores de $w_0 = -1.58^{+0.16}_{-0.35}$ y $H_0 > 69.9 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$, pudiendo resolver la tensión hasta 2σ . Debido a una degeneración entre H_0 y w_{DE} , la constante de Hubble casi no tiene restricciones. Por lo tanto, este modelo puede arrojar un valor de H_0 que este de acuerdo con lo estimado por SH0ES con el costo final de tener una ecuación de estado para DE de tipo fantasma¹, es decir, $w_0 < -1$. Sin embargo, este modelo desacuerda con otros conjuntos de datos, y al considerar Planck 2018+Pantheon+BAO, la constante de Hubble da $H_0 = 68.34 \pm 0.82 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$, en tensión con SH0ES a 3.2σ .

Energía oscura dinámica con un parámetro libre

Diferentes modelos de energía oscura dinámica, es decir, dependiente del corrimiento al rojo, y que incluyen un parámetro libre, son estudiados en la referencia [67], mostrados en la

¹Una ecuación de estado para DE tipo fantasma implica que la densidad de energía de DE se incremente con el tiempo, por lo que el factor de escala, a , del universo llegara a tomar un valor infinito en un tiempo finito. El universo terminaría en lo que conocemos como “gran desgarramiento”.

tabla 2.1 y graficadas en la figura 2.1 junto con sus resultados para el valor de H_0 . Los datos usados en el análisis consisten en los de Planck 2015, mediciones de BAO y la muestra de análisis de las curvas de luz de SNIa [68], denotado por JLA. En estos modelos el valor de w_0 corresponde al valor de la ecuación de estado evaluado en el presente, $w_0 = w_{\text{DE}}(a = 1)$. Los modelos resuelven la tensión hasta 1σ para Planck 2015, y hasta 2.6σ para Planck 2015+BAO+JLA, siempre con el resultado de una ecuación tipo fantasma de DE en el presente.

Modelo	Ecuación de estado	Planck 2015 +BAO+JLA	
		H_0 (km s ⁻¹ Mpc ⁻¹)	
(i)	$w_{\text{DE}}(a) = w_0 \exp(a - 1)$	74_{-7}^{+11}	$69.2_{-1.0}^{+1.1}$
(ii)	$w_{\text{DE}} = w_0 a [1 - \log(a)]$	81_{-9}^{+12}	$69.0_{-1.1}^{+1.0}$
(iii)	$w_{\text{DE}}(a) = w_0 a \exp(1 - a)$	84_{-8}^{+10}	69.4 ± 1.0
(iv)	$w_{\text{DE}}(a) = w_0 a [1 + \sin(1 - a)]$	$84.3_{-6.5}^{+9.9}$	$70.07_{-0.94}^{+0.91}$
(v)	$w_{\text{DE}}(a) = w_0 a [1 + \arcsin(1 - a)]$	83_{-7}^{+12}	$69.6_{-1.2}^{+1.0}$

Tabla 2.1: Modelos analizados en [67] junto con el valor obtenido de la constante de Hubble, primero para los datos de Planck 2015, y después para Planck 2015+BAO+JLA.

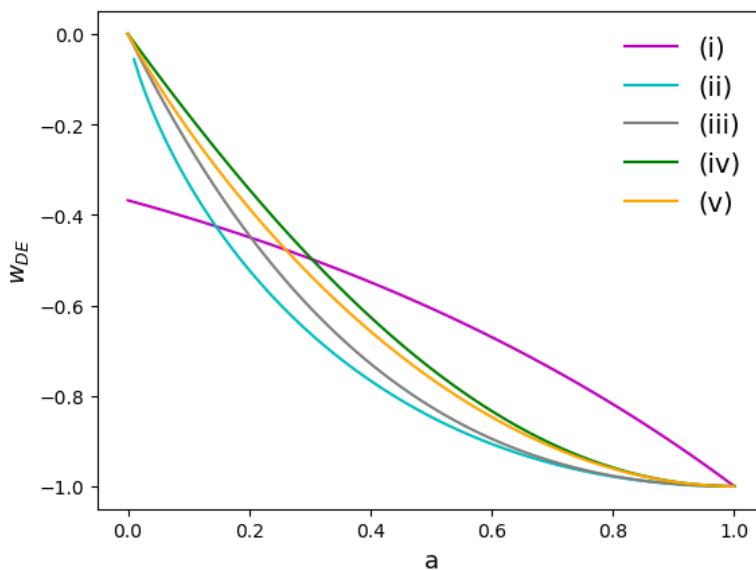


Figura 2.1: Gráfica w_{DE} contra el factor de escala a para las diferentes parametrizaciones de la tabla 2.1 y con valor fijo de $w_0 = -1$

2.2.3. Modelos de energía oscura con 6 grados de libertad

Estos son modelos de DE que no adicionan más parámetros, sino que mantienen los seis parámetros del modelo Λ CDM. El tener el mismo número de grados de libertad significa que estos no se verán desfavorecidos en el análisis de comparación de modelos bayesianos.

Energía oscura fenomenológicamente emergente

En este modelo, propuesto en la referencia [69] y abreviado como *PEDE*, una componente de DE dependiente de z se manifiesta a tiempos tardíos. La densidad de energía fraccional tiene la siguiente parametrización

$$\tilde{\Omega}_{\text{PEDE}}(z) = \Omega_{\text{PEDE},0} [1 - \tanh(\log_{10}(1 + z))], \quad (2.11)$$

donde $\Omega_{\text{PEDE},0} = \Omega_{\text{PEDE}}(z = 0)$. La ecuación de estado de este fluido es de tipo fantasma que, a medida que pasa el tiempo, se va acercando al valor de una constante cosmológica $w_{\text{PEDE}} = -1$.

$$w_{\text{PEDE}}(z) = -1 - \frac{1}{3 \ln 10} [1 + \tanh(\log_{10}(1 + z))]. \quad (2.12)$$

Los autores encontraron un valor de $H_0 = 71.02_{-1.37}^{+1.45}$ km s⁻¹ Mpc⁻¹ usando datos BAO+Pantheon y distancias a priori del CMB de Planck 2015, bajando la tensión con SH0ES a 1.1σ . Considerando un análisis únicamente con los datos completos del CMB de Planck 2015, obtuvieron $H_0 = 72.58_{-0.80}^{+0.79}$ km s⁻¹ Mpc⁻¹ mientras que para Planck 2015+BAO da $H_0 = 71.55_{-0.57}^{+0.55}$ km s⁻¹ Mpc⁻¹, resolviendo la tensión hasta 1σ y 1.2σ respectivamente. Sin embargo, en [70] argumentan que, a un nivel perturbativo, el modelo PEDE no puede ajustar los datos observados en escalas de conglomeración de igual forma a como Λ CDM lo hace.

Energía oscura emergente modificada

En [71] propusieron una generalización al modelo PEDE que incluye un parámetro adicional α , y que denotaremos como *MEDE*. La ecuación de estado de DE queda escrita como

$$w_{\text{MEDE}}(z) = -1 - \frac{\alpha}{3\ln 10} [1 + \tanh(\alpha \log_{10}(1+z))]. \quad (2.13)$$

Λ CDM se recupera para $\alpha = 0$, mientras que para $\alpha = 1$ regresamos al modelo PEDE. Un ajuste a Planck 2018+BAO provee el valor de $H_0 = 68.4 \pm 1.5 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$, bajando la tensión hasta 2.4σ .

2.2.4. Modelos con interacciones adicionales

Varios modelos que permiten una interacción no gravitacional entre las diferentes componentes presentes en el universo han sido propuestos para aliviar la tensión de Hubble.

Energía oscura interactuando con materia oscura

Estos modelos son conocidos como modelos con energía oscura interactuante y presentan un escenario cosmológico en el que DE y DM interactúan el uno con el otro de manera no gravitacional. La formulación básica de estas teorías yacen en un acoplamiento entre DM y DE que caracteriza el flujo de energía entre estos sectores. Debido a este acoplamiento, las ecuaciones de continuidad [30] las escribimos como

$$\dot{\rho}_{\text{DM}} + 3\mathcal{H}\rho_{\text{DM}} = aQ, \quad (2.14)$$

$$\dot{\rho}_{\text{DE}} + 3\mathcal{H}(1 + w_{\text{DE}})\rho_{\text{DE}} = -aQ, \quad (2.15)$$

donde el punto denota derivada respecto al tiempo conforme² τ , a es el factor de escala y $\mathcal{H} \equiv d\ln a/d\tau$ la tasa de expansión conforme del universo. La cantidad Q denota el factor de acoplamiento que caracteriza el flujo de energía. El caso más simple corresponde a DE como una constante cosmológica con $w_{\text{DE}} = -1$. Evidencia observacional indica que este

²Definido por

$$\tau \equiv \int_0^t \frac{dt'}{a(t')},$$

y usado, para la mayoría de los propósitos, como la variable temporal más conveniente para describir la evolución del universo

escenario puede resolver la tensión de Hubble [72,73]. Suponemos que la tasa de interacción Q entre estas dos componentes es proporcional a la densidad de energía de DE ρ_{DE}

$$Q = \xi \mathcal{H} \rho_{DE}, \quad (2.16)$$

con ξ un parámetro adimensional que cuantifica el acoplamiento. Un análisis con datos de Planck 2015 da el valor de $H_0 = 72.2_{-5.0}^{+3.5}$ km s⁻¹ Mpc⁻¹ [73] aliviando la tensión hasta 1σ .

Materia oscura interactuante

El modelo Λ CDM supone que DM está libre de colisiones, es por ello que una posible extensión es tener DM que interactúa con otros componentes del universo. En [74] estudiaron la posibilidad de tener un acoplamiento con fotones, descrito por las ecuaciones

$$\dot{\rho}_{DM} + 3\mathcal{H}\rho_{DM} = -Q, \quad (2.17)$$

$$\dot{\rho}_{\gamma} + 4\mathcal{H}\rho_{\gamma} = Q, \quad (2.18)$$

donde $Q = \Gamma_{\gamma}\mathcal{H}\rho_{DM}$. Para los datos de Planck 2015+ BAO la referencia [75] obtiene el valor de $H_0 = 71.9 \pm 4.0$ km s⁻¹ Mpc⁻¹, reduciendo la tensión con SH0ES a 1σ .

Otra posibilidad recae en una interacción entre DM y materia bariónica. En la referencia [76] exploran este escenario en donde la interacción modifica la ecuación de Euler [30], que regula la tasa de intercambio de momento entre DM y bariones. Sin embargo, un análisis a los datos de Planck 2018 + BAO da un valor de $H_0 = 67.70 \pm 0.43$ km s⁻¹ Mpc⁻¹, manteniendo la tensión con SH0ES a 3.9σ .

Neutrinos autointeractuantes

La física de neutrinos ha ganado gran popularidad en la cosmología moderna. El modelo Λ CDM supone un desacoplamiento muy temprano de los neutrinos con el resto de las componentes del universo (ligeramente antes de la aniquilación entre electrones y positrones), debido a que sus interacciones son bastante débiles [30]. Por lo tanto, una extensión posible es la interacción de los neutrinos con alguna otra componente del universo. Un ejemplo

viene presentado en la referencia [77] en donde plantean un escenario donde un neutrino interactúa consigo mismo. El análisis a Planck 2015 TT arroja un valor de $H_0 = 70.4 \pm 1.3$ km s⁻¹ Mpc⁻¹, bajando la tensión de Hubble hasta 1.6σ .

2.2.5. Cosmologías unificadas

Otro escenario posible es aquel en donde DM y DE se comportan como un solo fluido cuya evolución en el universo temprano va como DM, mientras que para tiempos tardíos se comporta como DE.

Modelo de gas de Chaplygin generalizado

Algunos ejemplos de cosmología unificada derivan del trabajo del físico Sergei Chaplygin en 1902 [78] y conocido como “gas de Chaplygin”, a pesar de no pertenecer originalmente a un ámbito cosmológico. Uno de estas derivaciones es el llamado gas de Chaplygin generalizado, abreviado como gcg, que viene caracterizado por la siguiente ecuación de estado

$$p_{\text{gcg}} = -\frac{A}{(\rho_{\text{gcg}})^\alpha}, \quad (2.19)$$

con A y α dos constantes reales, y p_{gcg} y ρ_{gcg} la presión y la densidad de energía, respectivamente, del fluido. Para este modelo, los datos de Planck 2015 estiman una constante de Hubble de $H_0 = 71.0_{-3.7}^{+1.7}$ km s⁻¹ Mpc⁻¹, bajando la tensión con SH0ES hasta 1σ .

Modelo $\Lambda(t)$ CDM

Las referencias [79, 80] han estudiado un modelo donde la constante cosmológica es en realidad una función del tiempo cósmico t , analizando distintos modelos de interacción que se comportan como un gcg. La expresión para $\Lambda(t)$ CDM, en ambos trabajos, sigue la parametrización

$$\Lambda(t) = \sigma H^{-2\alpha}, \quad (2.20)$$

con $\alpha > -1$ como un parámetro de interacción y $\sigma = 3(1 - \Omega_m)H_0^{2(1+\alpha)}$. En este modelo de unificación del sector oscuro, la ecuación de Friedmann viene dada por la siguiente relación

$$\frac{H(z)}{H_0} = \sqrt{[(1 - \Omega_m) + \Omega_m(1 + z)^{3(1+\alpha)}]^{1+\alpha} + \Omega_r(1 + z)^4}, \quad (2.21)$$

que recupera el modelo Λ CDM para $\alpha = 0$. El análisis aplicado a los datos de Planck 2018 + JLA + R19 junto con una suposición a priori en el valor actual de la densidad de bariones, ρ_b [80], arroja un resultado de $H_0 = 69.3 \pm 1.7 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ [81] reduciendo la tensión de Hubble hasta 1.9σ .

2.2.6. Soluciones alternativas

Los modelos vistos hasta ahora son solo una pequeña parte de la gran cantidad de propuestas que han surgido alrededor de la tensión de la constante de Hubble. Está fuera del alcance de este trabajo el mencionarlos a todos, sin embargo, la referencia [82] presenta una revisión bastante extensa de soluciones propuestas para aliviar la tensión. Brevemente mencionaremos escenarios alternativos que también podemos tomar a consideración.

Modelos con extra grados de libertad relativistas

La posibilidad de tener radiación extra “oscura” en la época de recombinación ha sido una de las extensiones más frecuente del modelo Λ CDM. Esta modificación viene cuantificada en el parámetro N_{eff} que da el número de grados de libertad relativistas en el universo. En el modelo estándar de partículas usualmente esperamos $N_{\text{eff}}^{\text{SM}} \sim 3.046$ [83], correspondiente al número efectivo de neutrinos presentes en el universo. La densidad de radiación ρ_r puede ser escrita en función de la densidad de fotones ρ_γ y de N_{eff} como

$$\rho_r = \rho_\gamma \left[1 + \frac{7}{8} \left(\frac{4}{11} \right)^{4/3} N_{\text{eff}} \right], \quad (2.22)$$

de aquí notamos directamente que grados de libertad relativistas adicionales a los tres neutrinos estándar producirían mayor densidad de energía de radiación. Debido a que existe una gran degeneración entre N_{eff} y la constante de Hubble, es posible obtener un mayor valor de H_0 a cambio de pagar el precio de tener radiación adicional en la recombinación.

Para estar de acuerdo con el valor inferido de SH0ES, necesitaríamos un valor de $N_{\text{eff}} \approx 3.95$ usando Planck 2018+BAO+Pantheon según lo reporta la referencia [84].

Gravedad Modificada

El modelo Λ CDM asume que la teoría de la relatividad general (GR) de Einstein es la teoría correcta que describe a la gravedad a escalas cósmicas. Teorías alternativas que incluyen versiones modificadas de GR o nuevas teorías más allá de GR, han tenido un gran éxito en la tensión de H_0 . La teoría de Einstein puede ser obtenida a través del principio de mínima acción, una vez que introducimos la acción de Einstein—Hilbert como

$$\mathcal{S} = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{R} + \mathcal{S}_m, \quad (2.23)$$

donde g es el determinante del tensor métrico, G la constante gravitacional de Newton, \mathcal{R} el escalar de Ricci y \mathcal{S}_m es la acción que describe los campos de materia. Ejemplos de modificaciones a la relatividad general van desde sustituir a \mathcal{R} por una función genérica $f(\mathcal{R})$ (como el modelo $f(\mathcal{R})$ de Hu—Sawicki [85]), o por una función del escalar de torsión $f(\mathcal{T})$ [86]. También están los modelos en donde no es válida la suposición de una nula derivada covariante de la métrica $\nabla_\alpha g_{\mu\nu} = 0$ y remplazan a \mathcal{R} por una función $f(\mathcal{Q})$ con $\nabla_\alpha g_{\mu\nu} = \mathcal{Q}$ [87], o modelos en donde la constante de gravitación de Newton es una función dependiente del tiempo cósmico $G(t)$ [88].

Modificaciones temprana a la gravedad estándar ha sido un escenario favorable para la tensión de Hubble debido a que provoca un cambio en la evolución de las fluctuaciones de los potenciales gravitacionales [89]. Por otro lado, modificaciones a la gravedad en tiempos tardíos también resultan favorables en elevar el valor de Hubble H_0 , debido a que inducen un cambio en el espectro de las fluctuaciones de temperatura del CMB [89].

Modelos inflacionarios

Inflación es una etapa de expansión acelerada que pudo ocurrir en un tiempo bastante temprano del universo. Fue propuesta para dar una explicación a las observaciones del CMB del por qué el universo es tan homogéneo, isótropo, y plano [30, 90]. En el modelo de

inflación más común, un campo escalar ϕ (inflatón) logra un periodo de expansión acelerada, cuya densidad de energía regula la tasa de expansión del universo [91]. Las fluctuaciones cuánticas del campo ϕ sembraron las perturbaciones de densidad observadas hoy en día en el CMB y que más tarde formarían la estructura a gran escala del universo. Para un cierto modelo de inflación es posible caracterizar varios de los observables cosmológicos.

En un modelo de inflación de solo un campo, existe una degeneración entre el índice espectral del espectro de potencias primordial, n_s y los grados de libertad relativistas, N_{eff} . Gracias a ello es posible construir un modelo en el que el mecanismo inflacionario conlleve a la presencia de radiación oscura adicional, escenario que ya mencionamos aminora la tensión de Hubble. Ejemplos incluyen la elección adecuada del potencial del campo ϕ [92], o con modificaciones del espectro de potencias primordial [93].

2.3. Tendencia descendente de H_0 con el corrimiento al rojo

2.3.1. Resultados del proyecto H0LiCOW

En la sección 1.3.2 comentamos brevemente sobre la medición de la constante de Hubble a través de tiempos de retraso en lentes gravitacionales. Ahí mismo comentamos sobre los resultados más recientes proveniente de la colaboración H0LiCOW [3] de seis lentes gravitacionales (fig. 1.8) dando un valor de la constante de Hubble de $H_0 = 73.3_{-1.8}^{+1.7}$ km s⁻¹ Mpc⁻¹, en una cosmología de Λ CDM plana. Resulta en una medición con 2.4% de precisión, que se encuentra en acuerdo con mediciones locales de SH0ES, pero en una tensión de 3.1σ con las observaciones de Planck 2018. Los cuásares con lente gravitacional analizados por H0LiCOW están listados en la tabla 2.2.

El análisis consistió en calcular, de forma separada, cada una de las funciones de distribución de probabilidad y al final combinarlas para obtener la probabilidad posterior final, tal y como vemos en la figura 2.2. La referencia [94] notó que los lentes B1608+656, RXJ1131-1231 y HE 0435-1223 mostraban una tendencia a que los lentes con z_d más bajos tenían un valor inferido de H_0 mayor. Con la muestra completa de los seis lentes, notamos,

de la tabla 2.2, que está tendencia general permanece. Sin embargo, debido al pequeño número de datos, las correlaciones no son lo suficientemente significantes para determinar si esto es un efecto real que surge por un error sistemático, un efecto físico real causado por el modelo cosmológico o simplemente una coincidencia estadística. Para verificar que los lentes con bajo z_d (RXJ1131-1231 y PG 1115+080) pueden ser combinadas de forma segura con los otros cuatro, H0LiCOW calculó que el factor de Bayes³ entre estos dos grupos era de $F = 1.9$, indicando que no hay una evidencia estadística de que diferentes conjuntos de parámetros cosmológicos representen mejor a estas lentes de bajo z_d .

Notemos, a partir de la figura 2.3, que al cambiar el modelo cosmológico de Λ CDM a w CDM, solamente se inflan los errores en H_0 , por lo que, de ser real, esta es una tendencia que depende del modelo cosmológico, proporcionando un diagnóstico potencialmente nuevo en el tratamiento de la tensión de Hubble. En [95] concluyen que no hay ningún indicio de que la tendencia se deba a un error sistemático sin considerar.

Nombre de la lente	z_d	z_s	H_0 (km s ⁻¹ Mpc ⁻¹)
RXJ1131-1231	0.295	0.654	78.2 ± 3.4
PG 1115+080	0.311	1.722	$81.1^{+8.0}_{-7.1}$
HE 0435-1223	0.4546	1.693	$71.7^{+4.8}_{-4.5}$
B1608+656	0.6304	1.394	$71.0^{+2.9}_{-3.3}$
WFI2033-4723	0.6575	1.662	$71.6^{+3.8}_{-4.9}$
SDSS 1206+4332	0.745	1.789	$68.9^{+5.4}_{-5.1}$

Tabla 2.2: Lentes analizadas por la colaboración H0LiCOW [3]. z_d y z_s son los corrimientos al rojo de la lente y de la fuente respectivamente.

³El factor de bayes, F , es usado para cuantificar la consistencia a favor de un ajuste simultaneo de las lentes usando un conjunto común de parámetros cosmológicos. Si los seis lentes tienen un $F > 1$, para cada posible combinación por pares, significa que los lentes son estadísticamente consistentes el uno con el otro y pueden combinar sus constricciones.

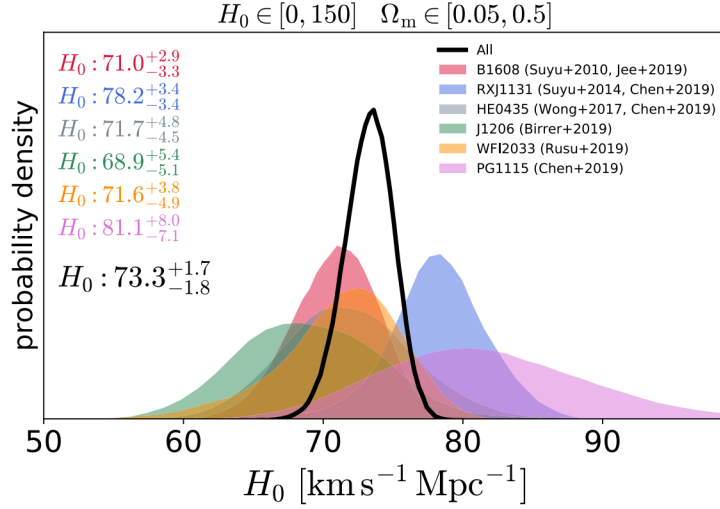


Figura 2.2: Tomada de [3]. Funciones de densidad de probabilidad posteriores de H_0 para cada uno de los sistemas de lentes individuales (curvas sombreadas), así como la distribución combinada de los seis sistemas (curva negra) para un modelo Λ CDM plano con priors uniformes. La mediana y los errores (percentiles al 16th y 84th) de H_0 son mostrados en la figura.

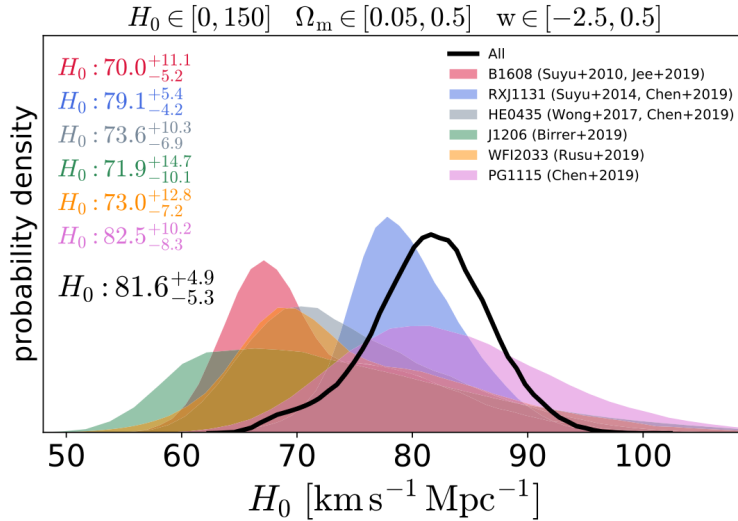


Figura 2.3: Tomada de [3]. Lo mismo que la figura 2.2 para el modelo cosmológico w CDM plano

2.3.2. Misma tendencia para distintos conjuntos de datos

Motivados por la tendencia descendente en el valor de H_0 con el corrimiento al rojo observado en los resultados de H0LiCOW, en la referencia [4] analizaron distintos conjuntos de datos, completamente independientes de H0LiCOW, para ver si estos ocultan una

característica similar. Los datos utilizados fueron los siguientes:

- I. Distancias de galaxias que albergan megamáseres proporcionado por el proyecto cosmológico megamáser [22], comentado en la sección 1.3.4., y cuyos datos mostramos en la tabla 1.3.
- II. Datos pertenecientes al método de cronómetros cósmicos de [13–19].
- III. Mediciones de BAO de distancias isotrópicas D_V/r_d de los proyectos 6dF Galaxy Survey ($z=0.106$) [96] y SDSS—Main Galaxy Sample ($z = 0.15$) [6], así como también mediciones de distancias anisotrópicas, D_M/r_d y D_H/r_d , medidas por BOSS-DR12 ($z = 0.38, 0.51, 0.61$) [7]. Las respectivas mediciones pueden verse en la tabla 1.1.
- IV. Mediciones de la magnitud aparente de supernovas Ia con $z > 0.01$, y pertenecientes a la muestra de Pantheon [62], incluyendo sus incertidumbres estadísticas y sistemáticas.

Debido a la baja calidad y al poco número de datos para corrimientos al rojo grandes, el análisis fue restringido hasta $z \leq 0.7$. Los datos fueron agrupados en intervalos no uniformes, acomodados de tal forma que los desplazamientos al rojo pesados, \bar{z} , de los máseres, SNIa y BAO coincidieran entre sí. \bar{z} , para un intervalo determinado, viene definido por

$$\bar{z} = \frac{\sum_k^{N_i} z_k (\sigma_k)^{-2}}{\sum_k^{N_i} (\sigma_k)^{-2}}, \quad (2.24)$$

donde σ_k denota el error en el observable que tiene corrimiento al rojo z_k . Por lo tanto, \bar{z}_i será el corrimiento al rojo asociado a cada intervalo; la estrategia agrupó los datos de la siguiente manera

- Intervalo 1: $\bar{z}_1 = 0.021 \in (0, 0.029]$,
- Intervalo 2: $\bar{z}_2 = 0.122 \in (0.029, 0.21]$,
- Intervalo 3: $\bar{z}_3 = 0.261 \in (0.21, 0.321]$,
- Intervalo 4: $\bar{z}_4 = 0.38 \in (0.321, 0.47]$,
- Intervalo 5: $\bar{z}_5 = 0.51 \in (0.47, 0.557]$,
- Intervalo 6: $\bar{z}_6 = 0.61 \in (0.557, 0.7]$,

Los parámetros de ajuste fueron la densidad de materia Ω_m , la constante de Hubble H_0 , la magnitud absoluta de las SNIa M , y el horizonte de sonido r_d . Haciendo el mejor ajuste de los parámetros en cada intervalo, mediante el uso del método de Monte Carlo basado en cadenas de Markov, obtuvieron los resultados mostrados en la tabla 2.3 y graficados en la figura 2.4.

\bar{z}	Datos	$H_0 \left[\frac{\text{km}}{\text{s Mpc}} \right]$	Ω_m	r_d [Mpc]	M
0.021	Másers, SNIa	$73.41^{+3.10}_{-2.88}$	$0.51^{+0.33}_{-0.34}$	—	-19.26 ± 0.09
0.122	Iso BAO, SNIa, CC	$69.85^{+3.17}_{-3.10}$	$0.26^{+0.10}_{-0.09}$	$143.08^{+7.14}_{-6.74}$	-19.36 ± 0.09
0.261	SNIa, CC	$69.10^{+12.46}_{-12.12}$	$0.27^{+0.20}_{-0.15}$	—	$-19.39^{+0.40}_{-0.33}$
0.38	Aniso BAO, SNIa, CC	$71.90^{+6.42}_{-6.03}$	$0.22^{+0.11}_{-0.09}$	$143.94^{+9.94}_{-8.91}$	-19.33 ± 0.15
0.51	Aniso BAO, SNIa, CC	$59.98^{+7.64}_{-6.45}$	$0.37^{+0.12}_{-0.10}$	$164.05^{+17.66}_{-15.92}$	-19.65 ± 0.23
0.61	Aniso BAO, SNIa, CC	$58.72^{+6.40}_{-5.87}$	$0.44^{+0.12}_{-0.10}$	$161.04^{+13.31}_{-11.55}$	$-19.59^{+0.18}_{-0.17}$

Tabla 2.3: Valores del mejor ajuste para la constante de Hubble, densidad de materia, el horizonte de sonido y la magnitud absoluta de las SNIa, para cada uno de los intervalos reportado en [4].

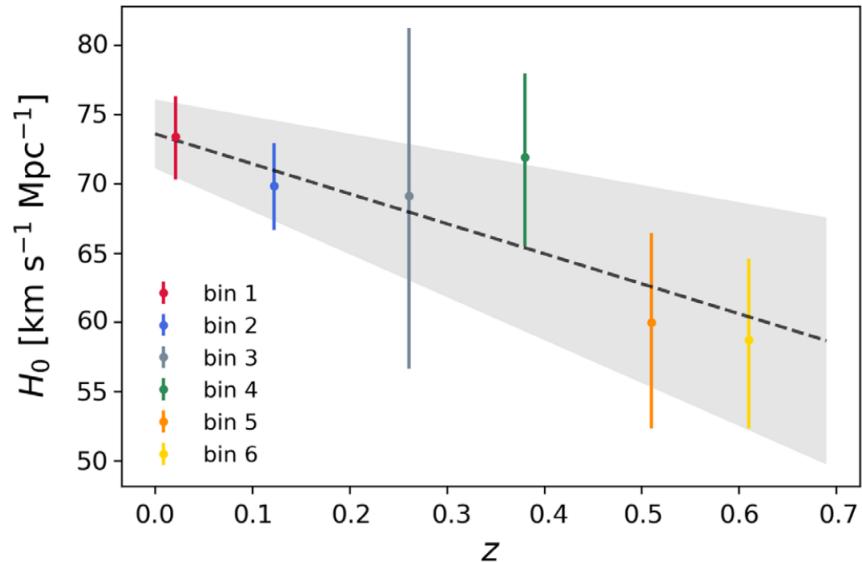


Figura 2.4: Tomada de [4]. Mejor ajuste de línea recta entre H_0 y el corrimiento al rojo z para los datos agrupados siguiendo el modelo Λ CDM y con un máximo de $z \leq 0.7$. La línea recta se desvía por 2.1σ de una línea completamente horizontal, esto se ve reflejado en la sombra gris.

Una vez que los datos son agrupados, las diferencias entre H_0 para cada intervalo pueden llegar a exceder hasta el 1σ , lo que haría cuestionar si los datos pueden combinar sus constricciones libremente. La evidente tendencia de bajar el valor de H_0 con mayores \bar{z} permitió ajustar una línea recta con valor de la pendiente $m = -21.7 \pm 9.4$ que tiene una intercepción en $H_0 = 73.6 \pm 2.5 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$, cercano al valor de H_0 encontrado por H0LiCOW. Vale la pena recordar que los datos de BAO tienen una degeneración entre H_0 y r_d ; esta gran correlación se manifiesta también en grandes valores de r_d , relativo al valor de Planck ($r_d \approx 147 \text{ Mpc}$), en los intervalos 5 y 6. El artículo reitera que no se ha impuesto ninguna información previa a r_d , lo que es esencial para asegurarse de que el análisis solo dependa de física del universo tardío.

La línea recta se desvía de una horizontal por 2.1σ . De forma general, si la tendencia descendente informada por H0LiCOW llegar a ser corroborada en un futuro, pondrá en duda si las soluciones de tiempo temprano del universo son buen candidato para resolver la tensión de Hubble. La tendencia es muy difícil de explicar dejando variar a r_d mientras dejamos inalterado el modelo Λ CDM.

Capítulo 3

Resultados

3.1. Inferencia bayesiana de los parámetros cosmológicos

Esta sección aborda el procedimiento utilizado para determinar el valor de mejor ajuste de los parámetros cosmológicos de interés mediante el uso de la inferencia bayesiana. Describimos el algoritmo implementado y detallamos los datos cosmológicos utilizados a lo largo de todo el trabajo, los cuales consisten en mediciones de BAO, CC, megamásters y supernovas. Además, cada conjunto de datos fue analizado de forma individual para verificar la consistencia con lo citado en sus respectivas referencias.

3.1.1. Métodos de Monte Carlo basados en cadenas de Markov

Muchos métodos de inferencia bayesiana han sido desarrollados para inferir los valores de los parámetros que mejor ajustan el modelo teórico con los datos experimentales. Los libros de texto [97, 98] contienen información extensa y detallada sobre inferencia bayesiana. Uno de estos métodos, y el que utilizaremos para inferir los valores de los parámetros cosmológicos, es el método de cadenas de Markov Monte Carlo, y que denotaremos como *MCMC*. Este es un método general que permite muestrear valores de los parámetros del modelo, que denotaremos por el arreglo θ , a partir de distribuciones aproximadas para luego corregirlos y aproximarse mejor a la distribución real, llamada distribución posterior

$p(\theta|y)$, con “ y ” el arreglo de los datos observados. El muestreo se realiza de manera secuencial, es decir, la distribución de θ^t dados todos los θ 's anteriores depende únicamente del valor más reciente θ^{t-1} ; la secuencia de $(\theta^1, \theta^2, \dots)$ es lo que se conoce como una cadena de Markov. El punto importante en el éxito del método yace en que estas distribuciones aproximadas son mejoradas con cada paso que se da en la simulación, hasta el punto en el que convergen a la distribución real.

MCMC es usado cuando muestrear directamente de $p(\theta|y)$ es computacionalmente costoso (por ejemplo para una dimensión elevada de θ) o simplemente cuando no es posible de llevar a cabo; en su lugar muestreamos de forma iterativa. Una vez que la simulación ha sido implementada y las cadenas de Markov han sido obtenidas, es necesario corroborar la convergencia de las secuencias simuladas. Por ejemplo, la figura 3.1 muestra una cadena de Markov para la constante de Hubble; es evidente que el valor de H_0 está lejos de converger para cuando el número de iteraciones en la simulación es < 50 . Alrededor de la iteración 100 en adelante, el valor de H_0 no difiere significativamente respecto al calculado en el paso anterior, manteniendo un valor promedio. A partir de este punto, podemos asegurar la convergencia de nuestra cadena de Markov.

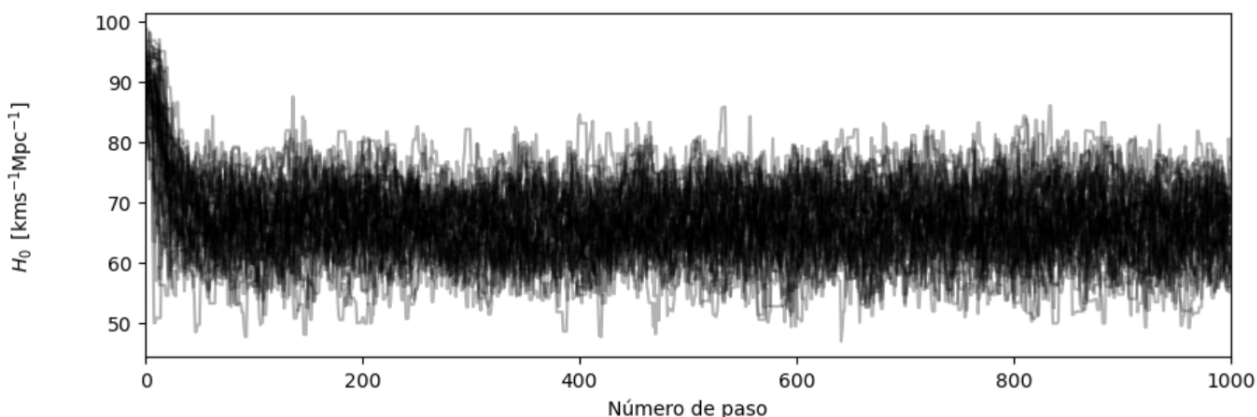


Figura 3.1: Cadena de Markov para la constante de Hubble H_0 , cuyo valor es graficado en función del número de pasos realizados en la simulación.

Algoritmo de Metropolis-Hastings

El algoritmo de MCMC más simple y más utilizado es el de Metrópolis—Hastings, M—H. Este método hace uso de una *densidad de probabilidad* Q que depende del estado

más reciente θ^t . La probabilidad $Q(\theta^t|\theta^{t-1})$ puede ser cualquier probabilidad fija a partir de la cual haremos el muestreo y que no necesariamente tenga que ser parecida a la distribución objetivo $p(\theta)$. Vamos a suponer que podemos evaluar la distribución $p(\theta)$ para cualquier θ , al menos hasta una constante multiplicativa Z ; es decir, podemos evaluar la función $p^*(\theta)$ tal que

$$p(\theta) = \frac{p^*(\theta)}{Z}. \quad (3.1)$$

Un nuevo estado θ' es generado aleatoriamente partir de la probabilidad propuesta $Q(\theta'|\theta^t)$. Para decidir si este nuevo estado es aceptado dentro de la cadena, calculamos la cantidad [97,98]

$$a = \frac{p^*(\theta') Q(\theta^t|\theta')}{p^*(\theta^t) Q(\theta'|\theta^t)}, \quad (3.2)$$

si $a \geq 1$ entonces el nuevo estado es aceptado y hacemos $\theta^{t+1} = \theta'$. Caso contrario, el paso es rechazado y hacemos $\theta^{t+1} = \theta^t$. El algoritmo de M—H converge a un conjunto estacionario de muestras de la distribución a $t \rightarrow \infty$.

Muestreador *emcee*

Jonathan Goodman y Jonathan Weare propusieron en el año 2010 un muestreador de conjunto invariante afín de MCMC [99], implementado en el paquete de PYTHON *emcee* [100]. Este algoritmo supera a M—H produciendo muestras que convergen en un tiempo menor. El método hace uso simultaneo de un conjunto de K caminantes, donde la distribución propuesta para uno de ellos, k , está basada en las posiciones actuales de los $k-1$ caminantes restantes. Con “posición” nos referimos a un vector en el espacio de parámetros.

Para actualizar la posición de un caminante en θ_k^t , extraemos un caminante θ_j entre los caminantes restantes y proponemos una nueva posición

$$\theta' = \theta_j + z [\theta_k^t - \theta_j], \quad (3.3)$$

con z una variable aleatoria extraída de una distribución $g(z)$, donde [99] utiliza la forma particular

$$g(z) = \begin{cases} 1/\sqrt{z} & \text{si } z \in [1/a, a], \\ 0 & \text{caso contrario.} \end{cases}, \quad (3.4)$$

y a siendo un parámetro de escala ajustable [99] fija a 2. La propuesta θ' es aceptada con probabilidad

$$q = \min \left(1, z^{N-1} \frac{p(\theta')}{p(\theta_k^t)} \right), \quad (3.5)$$

N es la dimensión del espacio de parámetros. Después, el procedimiento se repite en serie para cada caminante del conjunto.

3.1.2. Ajuste de los parámetros cosmológicos al conjunto de datos.

En este trabajo utilizamos una versión actualizada de los datos utilizados por [4] para ajustar los parámetros cosmológicos. Restringiremos los parámetros mediante la minimización de χ^2 :

$$-2\ln(\mathcal{P}) = \chi^2 = \Delta \mathbf{D}^T \mathbf{C}^{-1} \Delta \mathbf{D}, \quad (3.6)$$

donde \mathbf{C} es la matriz de covarianza de los datos cuya diagonal contiene el cuadrado de las incertidumbres, y $\Delta \mathbf{D}$ es el vector conformado por los residuos de los datos, calculado como

$$\Delta D_i = y_i - y_{model}, \quad (3.7)$$

con y_i los datos y y_{model} el modelo teórico para el observable. Los parámetros que más comunmente ajustamos fueron la constante de Hubble H_0 , la densidad de materia Ω_m , el horizonte de sonido r_d y la magnitud absoluta de las supernovas M . Para implementar el MCMC durante todo el trabajo, usamos el paquete de PYTHON *emcee*, cuyas entradas

corresponden al logaritmo de la probabilidad $\ln(\mathcal{P})$, el número de parámetros del modelo y el número de caminantes que realizaran el muestreo. De salida obtenemos las cadenas de Markov para cada uno de los parámetros, con las cuales podemos formar la distribución posterior y finalmente inferir los valores de mejor ajuste. Hacemos notar que realizamos el ajuste estando sujetos a las siguientes probabilidades a priori planos:

$$H_0 \in (0, 100), \quad \Omega_m \in (0, 1), \quad r_d \in (0, 200), \quad M \in (-50, 0).$$

Megamáser

Los datos de megamáser que usamos siguen siendo los mismos utilizados en [4], correspondientes al proyecto cosmológico megamáser [22] y que mostramos previamente en la tabla 1.3. Los datos ajustan la distancia de diámetro angular $D_A(z)$ (1.13). Convertimos las velocidades a corrimiento al rojo mediante $v = cz$. Siguiendo a [22], la incertidumbre en las velocidades tiene un error adicional que agregamos para tomar en cuenta la velocidad peculiar de la galaxia. De forma conservativa, agregamos $\sigma_{pec} = 250 \text{ km s}^{-1}$ en cuadratura a las incertidumbres de la velocidad. La función χ^2 queda como

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^6 \left[\frac{(v_i - v_{\text{model},i})^2}{\sigma_{v,i}^2 + \sigma_{pec}^2} + \frac{(D_i - D_A(v_{\text{model},i}/c))^2}{\sigma_{D,i}^2} \right], \quad (3.8)$$

donde tratamos las $v_{\text{model},i}$ como parámetros *molestos*¹ (o parámetros *nuisance*), y v_i , D_i denotan los datos de velocidad y distancia, y $\sigma_{v,i}$, $\sigma_{D,i}$ sus respectivas incertidumbres. Fijando $\Omega_m = 0.315$, de la colaboración Planck [2], el valor que inferimos de la constante de Hubble, para el modelo Λ CDM plano, fue de $H_0 = 73.73_{-2.92}^{+3.16} \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ que esta en perfecto acuerdo con lo obtenido en [22] de $H_0 = 73.9 \pm 3.0 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$.

¹Un parámetro molesto es cualquier parámetro no especificado por un modelo pero que debemos tomar en consideración al hacer inferencias sobre los parámetros de interés. El valor de estos parámetros molestos no son de importancia, pero si modifica la distribución de las observaciones.

Cronómetros Cósmicos

A los datos de CC usados en [4] le agregamos aquellos pertenecientes a los trabajos [20,21], teniendo así un total de 32 mediciones², que mostramos en la tabla 1.2. Los datos los ajustamos directamente el parámetro de Hubble $H(t)$ (1.5) con $\Omega_{\text{rad}} \approx 0$, por lo que el vector $\Delta \mathbf{D}$ vendrá dado por

$$\Delta D_i = H_i - H(z_i), \quad (3.9)$$

con H_i el dato del parámetro de Hubble y z_i su asociado corrimiento al rojo. La matriz de covarianza C la construimos siguiendo a [101]³. El valor que inferimos de la constante de Hubble, bajo un modelo Λ CDM plano, fue de $H_0 = 66.62_{-5.41}^{+5.35}$ km s⁻¹ Mpc⁻¹, en mutuo acuerdo con [48] de $H_0 = 66.5 \pm 5.4$ km s⁻¹ Mpc⁻¹.

Supernovas

En este trabajo, a diferencia de [4] donde usaron la muestra de supernovas de Pantheon [62], empleamos la muestra reciente Pantheon+ [12], compuesta por el análisis de 1701 curvas de luz de 1550 SNIa en el rango $z \in [0.001, 2.26]$ ⁴. Sin embargo, siguiendo a [12], durante el trabajo descartamos aquellas que tuvieran $z < 0.01$, dejando 1590 datos restantes, esto debido a que su sensibilidad en las velocidades peculiares es muy alta, hecho que se ve reflejado en las incertidumbres y sesgaría el resultado.

Pantheon+ mide la magnitud aparente, m , de las supernovas, dato que ajustamos a la ecuación (1.26). Tal y como mencionamos en la sección 1.3.1, existe una degeneración entre la constante de Hubble H_0 y la magnitud aparente M por lo que el ajuste usando únicamente datos de la magnitud aparente no restringe ninguno de estos dos parámetros, solo restringe el valor de Ω_m ; cuando esto suceda denotaremos al conjunto de datos únicamente como “Pantheon+”. El vector $\Delta \mathbf{D}$ lo calculamos como

²Datos que pueden ser descargados de https://apps.difa.unibo.it/files/people/Str957-cluster/astro/CC_data/

³En <https://gitlab.com/mmoresco/CCcovariance> encontramos un repositorio con procedimientos detallados sobre cómo estimar correctamente la matriz de covarianza para datos de cronómetros cósmicos.

⁴Los datos pueden ser descargados de <https://github.com/PantheonPlusSHOES/DataRelease>

$$\Delta D_i = m_i - m(z_i), \quad (3.10)$$

con m_i el dato de la magnitud aparente y z_i su asociado corrimiento al rojo. La matriz de covarianza, incluida en el conjunto de datos, tiene información sobre los errores estadísticos y sistemáticos. El valor que inferimos para la densidad de materia, bajo modelo Λ CDM plano, fue de $\Omega_m = 0.332 \pm 0.018$, que concuerda con lo obtenido por [12] de $\Omega_m = 0.334 \pm 0.018$.

La degeneración de H_0 con M puede romperse si tenemos conocimiento sobre la magnitud absoluta M de las SNIa, dato que es proporcionado por la colaboración SH0ES [1]. Para la discusión es importante definir primero a la distancia modular $\mu(z)$ como

$$\mu(z) = 5 \log_{10} \left(\frac{d_L(z)}{\text{Mpc}} \right) + 25 \quad (3.11)$$

por lo que la magnitud aparente vendrá dado por $m = M + \mu$. Pantheon+ proporciona la magnitud aparente de algunas supernovas que pertenecen a alguna galaxia anfitriona de Cefeidas variables, cuyas distancias modulares han sido medidas por SH0ES. A estas distancias, proporcionadas en el reservorio de los datos, las denotaremos por μ_i^{cepheid} . Cuando incorporamos estas distancias para romper la degeneración, los residuos son modificados de la siguiente manera [12]

$$\Delta D_i = \begin{cases} m_i - (\mu_i^{\text{cepheid}} + M) & \text{si } i \in \text{Huesped cefeida,} \\ m_i - m(z_i) & \text{caso contrario.} \end{cases} \quad (3.12)$$

Esto último lo construimos con el uso de un arreglo de ceros y unos, proporcionado también en el reservorio, que designa si la SNIa está en una galaxia que alberga a una de las Cefeidas. El hecho de poner $\mu_i^{\text{cepheid}} + M$ como el nuevo valor teórico calibrará el valor de la magnitud absoluta M . La mayoría de las distancias de las Cefeidas están en $z < 0.01$, por lo que en este caso si incorporamos datos que tengan $z < 0.01$ pero únicamente aquellos que cumplan con el criterio mencionado con anterioridad, que la SNIa este asociada a una μ_i^{cepheid} . A este nuevo análisis lo denotaremos por “Pantheon+SH0ES”. El resultado que

obtuvimos para la constante de Hubble H_0 , siguiendo el modelo Λ CDM plano, fue de $H_0 = 73.52_{-0.99}^{+1.04}$ km s⁻¹ Mpc⁻¹, valor que esta en completo acuerdo con lo obtenido por Pantheon+ de $H_0 = 73.6 \pm 1.1$ km s⁻¹ Mpc⁻¹.

Oscilaciones acústicas de bariones

Para el análisis de datos de BAO, usamos aquellos mencionados al final de la sección 1.2.2 (tabla 1.1). Conservamos las mediciones de los proyectos 6dF ($z = 0.097$), MGS ($z = 0.15$) y BOSS ($z = 0.38, 0.51$) usados en [4]; y como nuevos datos incluimos a eBOSS-LRG ($z = 0.70$), eBOSS-ELG ($z = 0.85$), eBOSS-quasar ($z = 1.48$), eBOSS-Ly α ($z = 2.33$)⁵. Es importante mencionar que estos datos no incluyen mediciones del parámetro de tasa de crecimiento $f\sigma_8$ por lo tanto no incluyen efectos de distorsiones espaciales de corrimiento al rojo, aunque en [4] argumentan que la omisión de estos efectos no cambia las conclusiones de una tendencia descendente. Los datos de BAO involucran ajustar cualquiera de las distancias $D_H(z)$, $D_M(z)$ y $D_V(z)$, dadas por las ecuaciones (1.17), (1.18) y (1.19) respectivamente. Recordemos que las mediciones arrojan el dato de la distancia, $D_j(z)$, dividido por el horizonte de sonido, r_d . Por lo tanto, el vector $\Delta\mathbf{D}$ vendrá dado por

$$\Delta D_i = \left(\frac{D_j}{r_d} \right)_i - \left(\frac{D_j(z_i)}{r_d} \right) \quad D_j \in D_H, D_M, D_V, \quad (3.13)$$

los datos de BOSS, eBOSS-LRG y eBOSS-quasar tienen su asociada matriz de covarianza. Para eBOSS-ELG, los datos proporcionan directamente la probabilidad en términos de D_V/r_d , normalizada para tener un máximo de uno. De igual forma, las probabilidades de eBOSS-Ly α son proporcionadas directamente, de forma separada para la autocorrelación (Ly α -Ly α) y la correlación cruzada (Ly α -quasar); estos dos datos los tratamos de forma independiente. Tal y como mencionamos en la sección 1.2.2, los datos de BAO solamente logran restringir el productor $H_0 r_d$. Para ello, es necesario reescribir las ecuaciones para $D_H(z)/r_d$, $D_M(z)/r_d$ y $D_V(z)/r_d$ como

$$\frac{D_H(z)}{r_d} = \frac{1}{H_0 r_d} \frac{c}{E(z)}, \quad (3.14)$$

⁵Los datos pueden ser descargados de https://svn.sdss.org/public/data/eboss/DR16cosmo/tags/v1_0_1/likelihoods/BAO-only/

$$\frac{D_M(z)}{r_d} = \frac{1+z}{r_d} D_A(z) = \frac{c}{H_0 r_d} \int_0^z \frac{dz'}{E(z')}, \quad (3.15)$$

$$\frac{D_V(z)}{r_d} = \frac{1}{r_d} [z D_M^2(z) D_H(z)]^{1/3} = \frac{1}{H_0 r_d} \left\{ z \left[c \int_0^z \frac{dz'}{E(z')} \right]^2 \frac{c}{E(z)} \right\}^{1/3}, \quad (3.16)$$

donde $E(z) \equiv H(z)/H_0$. “ $H_0 r_d$ ” es nuestro parámetro de ajuste (cuyo valor varía de acorde al modelo utilizado) junto con la densidad de materia Ω_m . Para el modelo Λ CDM plano, los resultados arrojan un valor de $H_0 r_d = 10,077.41_{-123.82}^{+121.02}$ km s⁻¹ y $\Omega_m = 0.30 \pm 0.02$. Si por ejemplo, tomamos el valor del horizonte de sonido inferido por Planck ($r_d \approx 147$ Mpc), entonces el valor de la constante de Hubble sería de $H_0 = 68.55_{-0.84}^{+0.82}$ km s⁻¹ Mpc⁻¹.

El resumen de los resultados obtenidos es visualizada en la tabla 3.1.

Datos	H_0 $\left[\frac{\text{km}}{\text{s Mpc}} \right]$	Ω_m	$H_0 r_d$ $\left[\frac{\text{km}}{\text{s}} \right]$
Megamásters	$73.73_{-2.92}^{+3.16}$	—	—
Cronómetros cósmicos	$66.62_{-5.41}^{+5.35}$	$0.34_{-0.06}^{+0.08}$	—
Pantheon+	—	0.332 ± 0.018	—
Pantheon+SH0ES	0.33 ± 0.02	$73.52_{-0.99}^{+1.04}$	—
BAO	—	0.30 ± 0.02	$10,077.41_{-123.82}^{+121.02}$

Tabla 3.1: Valores del mejor ajuste para la constante de Hubble, densidad de materia y el producto $H_0 r_d$ para cada conjunto de datos por separado, bajo el modelo Λ CDM plano.

3.2. Ajuste de linea recta H_0 - z para Λ CDM

Recordemos que no parece haber indicio de que la tendencia encontrada en los datos de H0LiCOW sea debida a errores sistemáticos; sin embargo, no hay una conclusión similar de que la tendencia encontrada en [4] para los demás conjuntos de datos no sea debida a algún error sistemático o una coincidencia estadística. A medida que aumenta el número de datos, y mejora la calibración y control del experimento, obtenemos ajustes de los parámetros con barras de error más pequeñas. Por ello, hemos decidido volver a realizar el análisis de [4]

con el conjunto de datos más reciente discutido en la sección 3.1. Los parámetros de ajuste continúan siendo Ω_m , H_0 , M y r_d . Implementando nuevamente el paquete de PYTHON *emcee*, y siguiendo un modelo Λ CDM plano, identificamos los valores de mejor ajuste para los cuatro parámetros dado todo el conjunto de datos a través de MCMC. Estos valores vienen ilustrados en la tabla 3.2. El valor de H_0 yace a 0.5σ del valor obtenido por el equipo de SH0ES, y a 1.5σ de lo inferido por Planck.

$H_0 \left[\frac{\text{km}}{\text{s Mpc}} \right]$	Ω_m	r_d [Mpc]	M
$71.237^{+2.158}_{-2.018}$	0.310 ± 0.012	$140.174^{+4.168}_{-4.174}$	$-19.321^{+0.065}_{-0.062}$

Tabla 3.2: Valores de mejor ajuste para el conjunto de datos másers+CC+Pantheon+BAO, bajo el modelo Λ CDM.

Para el agrupamiento de los datos seguimos el mismo criterio de [4], donde el corrimiento al rojo pesado, dado por (2.24), debe coincidir entre los másers, las supernovas y los datos de BAO. Un total de 8 intervalos fueron acomodados dando los siguientes límites

- Intervalo 1: $\bar{z}_1 = 0.021 \in (0.01, 0.0287]$,
- Intervalo 2: $\bar{z}_2 = 0.122 \in (0.0287, 0.248]$,
- Intervalo 3: $\bar{z}_3 = 0.27 \in (0.248, 0.295]$,
- Intervalo 4: $\bar{z}_4 = 0.38 \in (0.295, 0.449]$,
- Intervalo 5: $\bar{z}_5 = 0.51 \in (0.449, 0.5929]$,
- Intervalo 6: $\bar{z}_6 = 0.724 \in (0.5929, 1.03]$,
- Intervalo 7: $\bar{z}_7 = 1.48 \in (1.03, 1.74]$,
- Intervalo 8: $\bar{z}_8 = 2.33 \in (1.74, 2.27]$,

adaptando el MCMC a los datos de cada intervalo, identificamos los valores de mejor ajuste para cada parámetro, mostrados en la tabla 3.3. Gracias a las cadenas de Markov obtenidas, podemos obtener las funciones de distribución $P_i(H_0)$ para cada intervalo; estas vienen mostradas en la figura 3.2. A partir de las $P_i(H_0)$ podemos ajustar una línea recta a los puntos obtenidos. Si modelamos a H_0 como una función del corrimiento al rojo de la forma

$$H_0(z) = mz + c, \quad (3.17)$$

entonces el logaritmo de la probabilidad total para todos los intervalos, vendrá dado por

$$\ln P_{\text{tot}}(m, c) = \sum_{i=1}^N \ln(P_i(m\bar{z}_i + c)), \quad (3.18)$$

con N el número del intervalo. $\ln(P_{\text{tot}}(m, c))$ es nuestro input en el MCMC con m y c los parámetros de ajuste.

\bar{z}	Datos	$H_0 \left[\frac{\text{km}}{\text{s Mpc}} \right]$	Ω_m	r_d [Mpc]	M
0.021	Másers, SNIa	$73.35^{+3.19}_{-2.87}$	$0.66^{+0.24}_{-0.37}$	—	-19.24 ± 0.09
0.122	Iso BAO, SNIa, CC	$67.21^{+4.62}_{-4.61}$	0.38 ± 0.06	$152.01^{+12.15}_{-10.49}$	-19.43 ± 0.15
0.27	SNIa, CC	$60.91^{+12.41}_{-11.53}$	$0.64^{+0.25}_{-0.34}$	—	$-19.56^{+0.36}_{-0.43}$
0.38	BOSS ($z=0.38$), SNIa, CC	$62.64^{+6.79}_{-6.75}$	$0.43^{+0.13}_{-0.11}$	$153.86^{+15.42}_{-13.31}$	$-19.53^{+0.20}_{-0.22}$
0.51	BOSS ($z=0.51$), SNIa, CC	$63.66^{+7.18}_{-6.83}$	$0.38^{+0.12}_{-0.10}$	$153.21^{+15.86}_{-13.45}$	$-19.54^{+0.20}_{-0.22}$
0.72	eBOSS-LRG, eBOSS-ELG, SNIa, CC	$56.96^{+6.15}_{-5.81}$	$0.49^{+0.12}_{-0.10}$	$159.53^{+13.49}_{-11.64}$	-19.69 ± 0.18
1.48	eBOSS-quasar, SNIa, CC	$70.52^{+7.58}_{-7.38}$	$0.31^{+0.08}_{-0.06}$	$139.38^{+10.40}_{-9.84}$	-19.27 ± 0.17
2.33	eBOSS-Ly α , SNIa, CC	$81.09^{+16.25}_{-14.79}$	$0.20^{+0.05}_{-0.04}$	$142.49^{+28.62}_{-20.82}$	$-19.34^{+0.39}_{-0.42}$

Tabla 3.3: Valores del mejor ajuste para la constante de Hubble, densidad de materia, el horizonte de sonido y la magnitud absoluta de las SNIa, para cada uno de los intervalos, bajo el modelo Λ CDM plano.

El ajuste a la línea recta y los resultados de H_0 para cada intervalo los ilustramos en la figura 3.3. Concretamente, encontramos que el mejor ajuste de la pendiente tiene un valor de $m = -2.73^{+4.38}_{-4.03}$ con intercepción en $c = 69.93^{+2.33}_{-2.52}$ km s $^{-1}$ Mpc $^{-1}$. El valor en la pendiente está a 0.6σ de ajustarse a una línea horizontal, por lo que podemos afirmar que no está presente ninguna tendencia descendente en el valor de H_0 . Sin embargo, el resultado puede estar sesgado debido a la poca calidad de los intervalos 7 y 8, reflejada en unas barras de error bastante grandes, que pueden influenciar en el ajuste moviendo el valor de la pendiente a valores que concuerden con una línea horizontal.

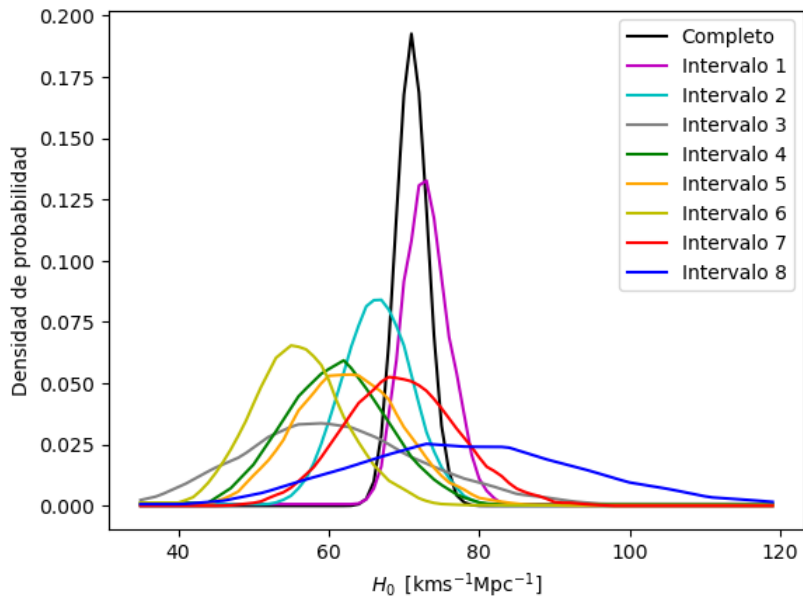


Figura 3.2: Funciones de distribución de probabilidad de H_0 obtenidas en cada intervalo, junto con la obtenida para el conjunto de datos completo.

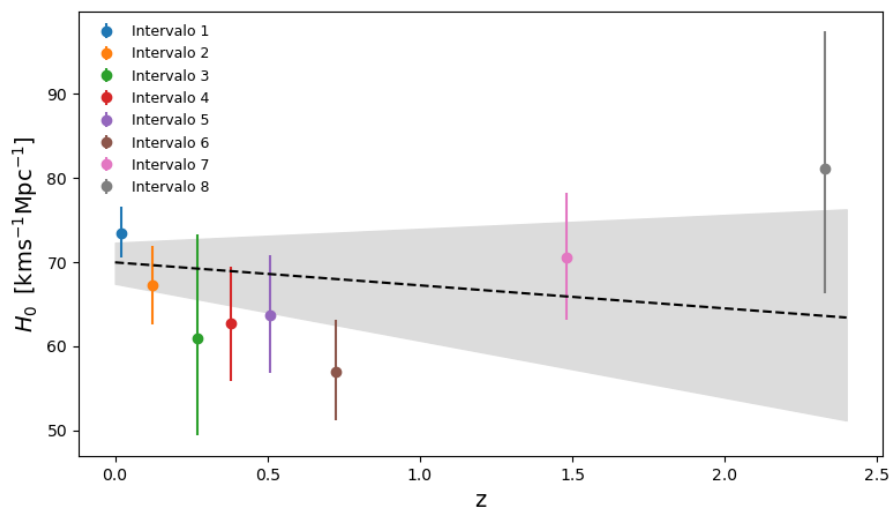


Figura 3.3: Mejor ajuste a la línea recta para los datos agrupados. La línea central está a 0.6σ de ser una línea completamente horizontal.

Removiendo los intervalos 7 y 8 recuperamos una clara tendencia donde H_0 decrece con el corrimiento al rojo z . Los valores de mejor ajuste a la línea recta arroja el valor para la pendiente de $m = -23.58^{+8.42}_{-8.05}$ con intersección en $c = 72.15^{+2.59}_{-2.68}$ $\text{km s}^{-1} \text{Mpc}^{-1}$, en concordancia con el valor de H_0 determinado por H0LiCOW. Los resultados vienen

mostrados en la figura 3.4.

Al igual que en [4], no hemos impuesto ninguna suposición o valor previo en el análisis, y son solamente los datos los que guían hacia los resultados obtenidos. Hemos probado que la tendencia sigue existiendo para el rango de corrimientos al rojo similar al usado en H0LiCOW y en [4]. La escasez del número de datos y su baja calidad hace difícil determinar si la tendencia sigue existiendo al agregar corrimientos al rojo mayores. La figura 3.3 provee indicios de que la tendencia puede removerse satisfactoriamente si contáramos con suficientes datos en el rango $z \in (0.7, 2.3)$.

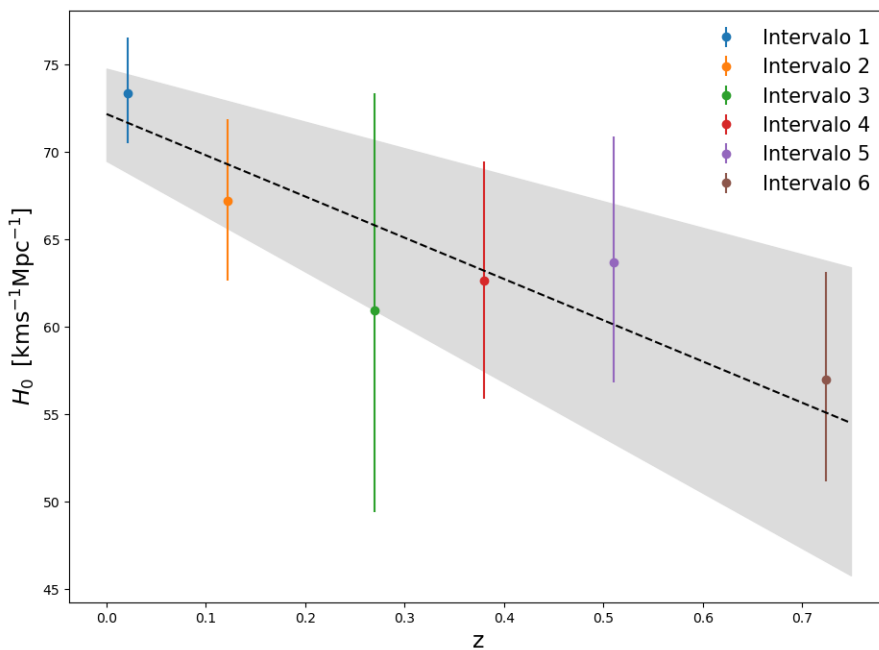


Figura 3.4: Mejor ajuste de línea recta a los datos agrupados. Removimos los intervalos 7 y 8; con ello, la línea está a ahora a 2.8σ de ajustarse a una línea completamente horizontal.

Los datos de CC son cruciales en remover la degeneración entre los datos de BAO y SNIa; estas mediciones poseen errores bastante grandes tal y como observamos en la tabla 1.2. La calidad de estos datos permite una mayor libertad al ajustar el horizonte de sonido r_d , lo que a su vez conlleva a grandes errores en los valores inferidos de H_0 producto de la degeneración de los datos de BAO. Esto nos lleva también a la discusión sobre si la calidad de los datos de CC pueden ser los causantes de la tendencia sin importar que el valor de la pendiente, aún con sus barras de error, no alcanza a formar una línea horizontal.

Una de las principales conclusiones de [4] alude al hecho de ver a la tensión de Hubble desde una nueva perspectiva relacionada con los valores de la pendiente m y la intersección c , en lugar de los dos valores de H_0 entre SH0ES y Planck. De esta nueva perspectiva pueden surgir nuevas ideas encaminadas a encontrar las piezas faltantes de un modelo más allá de Λ CDM. Por ejemplo, en [4] cuestionan si las soluciones de tiempo temprano son buen candidato en perspectiva de esta tendencia, dado a que estos modelos aumentan el valor de r_d implicando que la tendencia solo suba o disminuya.

3.3. Perspectivas de la tendencia descendente

3.3.1. Dependencia en el modelo cosmológico

Adoptamos el modelo w CDM plano en el análisis, con la ecuación de estado para DE diferente de la constante cosmológica, $w_{\text{DE}} \neq -1$, pero que mantiene un valor constante. Con w_{DE} como un nuevo parámetro, los valores que inferimos para todo el conjunto de datos completo son mostrados en la tabla 3.4. Estos resultados, tras agrupar los datos, fueron muy similares en comparación con el caso Λ CDM, pero con barras de error infladas.

Como extra, analizamos también un modelo con una ecuación de estado de DE dinámica, $w(a)$, siguiendo la parametrización propuesta en [67] (tabla 2.1) dada por

$$w_{\text{DE}}(a) = w_o a [1 + \sin(1 - a)] \quad (3.19)$$

Los resultados para la constante de Hubble, en ambos modelos, para cada intervalo los mostramos en la tabla 3.5. No pudimos realizar el análisis con el conjunto de datos completo para este modelo, dado el alto costo computacional.

En ambos el ajuste a la línea recta concuerda perfectamente con una línea horizontal, aunque este resultado de nuevo es obtenido gracias al gran valor de H_0 y sus barras de error en los intervalos 7 y 8. El ajuste a la pendiente y a la intersección fueron de $m = -4.71^{+4.76}_{-3.91}$ y $c = 69.47^{+2.39}_{-2.75}$ km s⁻¹ Mpc⁻¹ para w CDM, y de $m = -4.27^{+5.16}_{-4.40}$ y $c = 68.91^{+2.54}_{-3.33}$ km s⁻¹ Mpc⁻¹ para $w(a)$.

3.3. PERSPECTIVAS DE LA TENDENCIA DESCENDENTE

$H_0 \left[\frac{\text{km}}{\text{s Mpc}} \right]$	Ω_m	r_d [Mpc]	w_{DE}	M
$71.18^{+2.18}_{-2.03}$	0.29 ± 0.02	$139.28^{+4.13}_{-4.17}$	-0.90 ± 0.05	-19.31 ± 0.06

Tabla 3.4: Valores de mejor ajuste para el conjunto de datos másers+CC+Pantheon+BAO, bajo el modelo w CDM. El análisis para $w(a)$ no pudo realizarse dado el alto costo computacional.

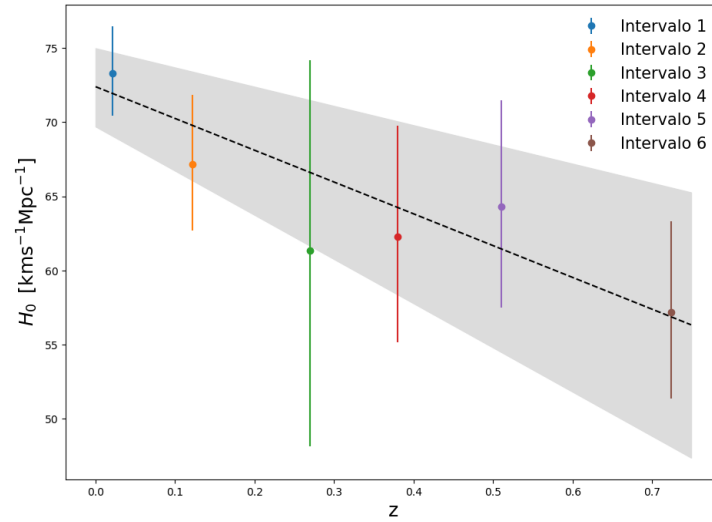
\bar{z}	w CDM $H_0 \left[\frac{\text{km}}{\text{s Mpc}} \right]$	$w(a)$
0.021	$73.30^{+3.06}_{-2.80}$	$73.43^{+2.86}_{-2.83}$
0.12	$67.16^{+4.51}_{-4.72}$	$66.89^{+4.49}_{-4.39}$
0.27	$61.35^{+12.24}_{-11.26}$	$61.28^{+12.64}_{-11.57}$
0.38	$62.25^{+6.88}_{-6.61}$	$62.68^{+6.90}_{-6.62}$
0.51	$64.32^{+7.85}_{-7.12}$	$64.47^{+8.10}_{-7.45}$
0.72	$57.18^{+6.97}_{-5.92}$	$57.60^{+6.98}_{-5.19}$
1.48	$68.99^{+12.69}_{-8.15}$	$70.91^{+12.79}_{-9.04}$
2.33	$83.75^{+26.86}_{-19.01}$	$84.45^{+24.92}_{-19.09}$

Tabla 3.5: Valores del mejor ajuste para la constante de Hubble en cada uno de los intervalos. La segunda columna son los resultados bajo un modelo w CDM y la tercer columna para el modelo dinámico $w(a)$.

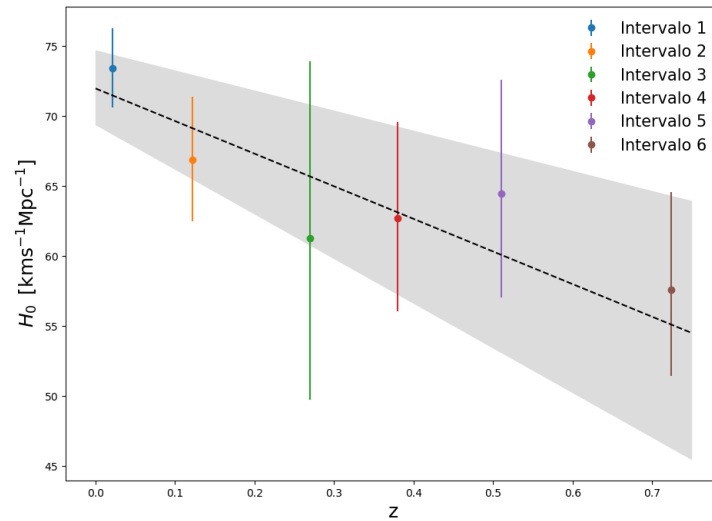
De ahora en adelante removeremos los intervalos 7 y 8 y nos centraremos en el rango $0.01 < z < 0.8$. Al hacerlo recuperamos la tendencia descendente, con resultados para el mejor ajuste de la línea recta de $m = -23.52^{+8.67}_{-8.15}$ y $c = 72.13^{+2.66}_{-2.52}$ $\text{km s}^{-1} \text{Mpc}^{-1}$ para w CDM plano, y de $m = -23.30^{+8.94}_{-8.61}$ y $c = 71.97^{+2.71}_{-2.56}$ $\text{km s}^{-1} \text{Mpc}^{-1}$ para $w(a)$; ambos están a 2.7σ y a 2.6σ , respectivamente, de ajustarse a una línea horizontal. En la figura 3.5 mostramos los resultados obtenidos.

Los resultados para H_0 en ambos modelos y para cada intervalo, difieren ligeramente entre sí, al igual que el ajuste para la pendiente y la intersección, además de inflar las barras de error. Por lo tanto, de ser completamente verdadera, es una tendencia que depende del modelo cosmológico empleado en el análisis. Esto abre nuevas panoramas para la tensión de Hubble tal y como mencionan los autores de [4]. Por ejemplo, la tendencia puede ser

debida a una falla de Λ CDM, por lo que un modelo distinto que lograra corregirla puede ser la clave para desenterrar nuevas pistas relacionadas con la tensión de Hubble.



(a)



(b)

Figura 3.5: Mejor ajuste de línea recta a los datos agrupados para a) w CDM y b) $w(a)$ de [67].

3.3.2. Coincidencia estadística

De la tabla 3.3 podemos notar que las barras de error van en aumento conforme analizamos cada intervalo, esto se debe a varios factores: cada vez menos datos disponibles en

cada intervalo, calidad de los datos muy baja, pocos datos de CC lo que permite mayor libertad en los valores de M y r_d . El ajuste a la pendiente está a 2.8σ de ajustarse a una línea horizontal, por lo que en principio la tendencia no parece depender de la calidad de los datos en cada intervalo. Sin embargo, para ponerlo a prueba y asegurar que la tendencia no es debida a algún tipo de flujo estadístico, realizamos un nuevo análisis tomando como criterio que cada intervalo tuviera aproximadamente el mismo número de datos (≈ 325).

La mayoría de los datos de Pantheon+ están ubicados a $z < 0.8$, esto provoca que dejemos fuera del análisis los datos de eBOSS, ubicados en un alto corrimiento al rojo, dado a que no alcanzan a cumplir los criterios para su agrupamiento. Los restantes datos de BAO (6dF, MGS y BOSS), CC y megamásters siguen estando presentes. Acomodamos un total de 5 intervalos, esto por que todos los intervalos necesitan tener al menos un dato de CC para romper la degeneración presente en los datos de BAO y de SNIa. De escoger un número mayor de intervalos habría algunos que no tendrían datos de CC. El corrimiento al rojo pesado y los rangos que lo abarcan son los siguientes

$$\text{Intervalo 1: } \bar{z}_1 = 0.020 \in (0.01, 0.0282],$$

$$\text{Intervalo 2: } \bar{z}_2 = 0.051 \in (0.0282, 0.12],$$

$$\text{Intervalo 3: } \bar{z}_3 = 0.19 \in (0.12, 0.249],$$

$$\text{Intervalo 4: } \bar{z}_4 = 0.32 \in (0.249, 0.407],$$

$$\text{Intervalo 5: } \bar{z}_5 = 0.59 \in (0.407, 2.27],$$

Nuevamente con MCMC obtuvimos los valores de mejor ajuste para cada parámetro bajo el modelo Λ CDM plano, resultados que mostramos en la tabla 3.6. El ajuste de línea recta para la pendiente da $m = -15.68_{-9.34}^{+10.02}$ con intersección en $c = 72.26_{-2.83}^{+2.95} \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$, está a 1.56σ de obtener una línea horizontal por lo que sigue existiendo una clara tendencia de obtener menores valores de H_0 a mayores corrimientos al rojo. El ajuste viene mostrado en la figura 3.6.

La gran barra de error en el intervalo 2 es producto de solo poseer 2 datos de CC, por lo que no restringe muy bien a H_0 . Los resultados nos indican que si bien, la tendencia es estadísticamente significativa, esta depende de la manera en que sean agrupados los datos. Es evidente que la mejor manera de agruparlos es de tal forma que cada resultado de H_0

tenga aproximadamente la misma precisión para definir de manera optima la evolución de H_0 en cada intervalo. Sin embargo, todavía necesitamos mejorar la calidad de los datos, en particular para los CC, y a su vez, aumentar los de datos disponibles a corrimientos al rojo mayores que vendrán de futuras colaboraciones.

\bar{z}	Datos	H_0 $\left[\frac{\text{km}}{\text{s Mpc}}\right]$	Ω_m	r_d [Mpc]	M
0.020	Másers, SNIa	$73.47^{+3.06}_{-2.89}$	$0.66^{+0.24}_{-0.35}$	—	-19.24 ± 0.09
0.051	SNIa, CC	$64.96^{+10.68}_{-11.07}$	$0.45^{+0.22}_{-0.20}$	—	$-19.49^{+0.33}_{-0.40}$
0.19	Iso BAO, SNIa, CC	$68.95^{+5.33}_{-5.21}$	$0.28^{+0.13}_{-0.12}$	$150.26^{+12.18}_{-10.74}$	-19.41 ± 0.16
0.32	BOSS ($z=0.38$), SNIa, CC	$65.81^{+6.79}_{-6.73}$	$0.32^{+0.11}_{-0.09}$	$151.40^{+15.34}_{-12.88}$	$-19.48^{+0.20}_{-0.22}$
0.59	BOSS ($z=0.51$), SNIa, CC	$64.60^{+4.80}_{-4.49}$	0.36 ± 0.05	$151.98^{9.23}_{-8.66}$	-19.50 ± 0.13

Tabla 3.6: Valores del mejor ajuste para la constante de Hubble, densidad de materia, el horizonte de sonido y la magnitud absoluta de las SNIa, para cada uno de los intervalos, bajo el modelo Λ CDM plano y con aproximadamente el mismo número de datos en cada intervalo.

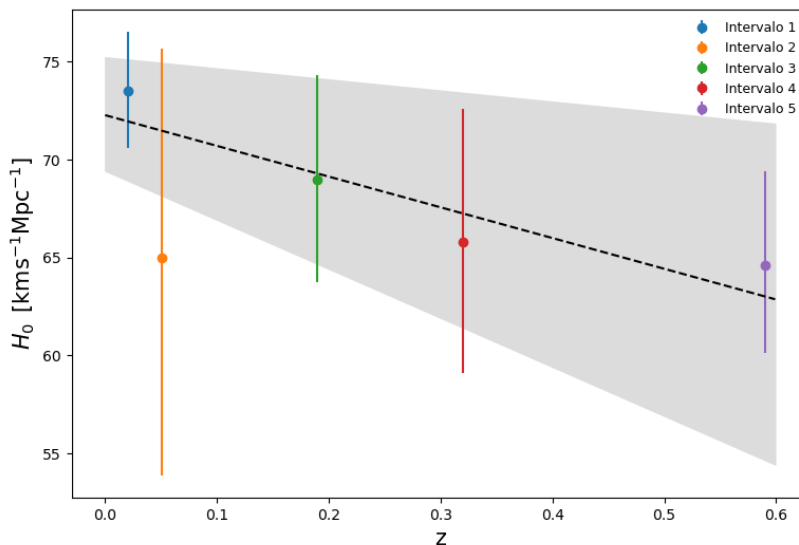


Figura 3.6: Mejor ajuste de línea recta a los datos agrupados. La línea está a 1.56σ de ajustarse a una línea completamente horizontal.

El resumen de los valores de m y c para los modelos Λ CDM (con y sin los intervalos 7 y 8 al igual que el análisis con el mismo número de datos en cada intervalo), w CDM y $w(a)$ CDM, los mostramos en la figura 3.7.

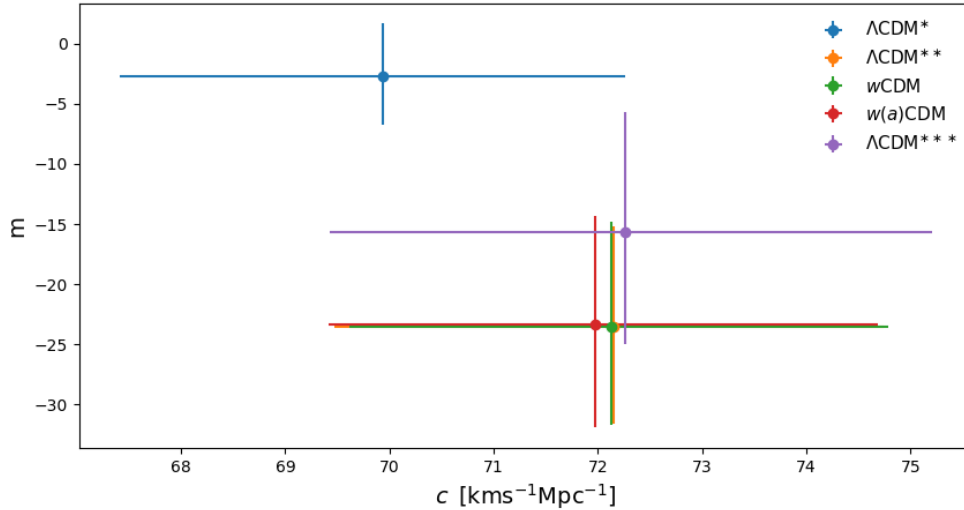


Figura 3.7: Valores de la pendiente m y la intersección c obtenidos en todos los análisis realizados. Λ CDM* y Λ CDM** corresponden a los análisis con y sin los intervalos 7 y 8 respectivamente. Λ CDM*** denota el análisis donde cada intervalo tiene el mismo número de datos.

3.4. Tendencia intrínseca $H_0(z)$

El trabajo realizado en [102] muestra que los datos de Pantheon [62] presentan también una tendencia descendente de H_0 con z , a pesar de fijar valores fiduciales para la magnitud absoluta M y la densidad de materia Ω_m . En lugar de ajustar una línea recta utilizaron una parametrización para $H(z)$ particular. Extrapolando la función, encuentran que los valores de $H_0(z = 0) = 73.577 \pm 0.106 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ y $H_0(z = 1100) = 69.219 \pm 2.159 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ (en la superficie de última dispersión) están cercanos a los reportados por SH0ES y Planck, respectivamente. Esto sugiere a una inhomogeneidad local en el universo como solución a la tensión de Hubble.

Aquí, motivados por aquel resultado, hicimos un reanálisis pero ahora con la muestra de Pantheon+. Tal y como mencionamos con anterioridad, la mejor manera de agrupar los datos es de tal forma que los resultados en cada intervalo tengan la misma precisión. Por ello, los datos los agrupamos nuevamente bajo el criterio de que cada intervalo tenga el mismo número de datos. Realizamos un total de 3 análisis con 4, 6 y 8 intervalos, donde cada uno tiene aproximadamente 397, 265 y 198 datos, respectivamente. Tener una gran número

de datos en cada intervalo (≥ 150) proporciona submuestras que son estadísticamente representativas. Cabe mencionar que de existir efectos evolutivos, estos necesitan una gran cantidad de SNIa en cada intervalo para manifestarse; por ello, aumentar el número de intervalos, que equivale a tener menos datos disponibles, puede sesgar los resultados. Esta observación viene señalada en [102].

El valor de H_0 en cada intervalo lo obtuvimos fijando los valores de Ω_m y M a valores fiduciales determinados por las distancias hacia Cefeidas proporcionadas por SH0ES, tal y como explicamos en la subsección 3.1.2, bajo el modelo Λ CDM plano. Los datos de Pantheon+SH0ES fijan a los valores de $\Omega_m = 0.334$ y $M = -19.244$ [12]. La elección de realizar un análisis unidimensional fijando estos parámetros asegura el minimizar los errores inferidos en H_0 , y es necesario para restringir los parámetros de la función $H_0(z)$ que discutiremos más adelante. Fijamos el siguiente valor a priori plano para el MCMC: $70 < H_0 < 80 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$. La tabla 3.7 proporciona los resultados de H_0 en cada intervalo.

Siguiendo a [102], ya con los valores de H_0 obtenidos y con las distribución a posteriori formadas para cada intervalo, establecimos a H_0 como la siguiente función del corrimiento al rojo

$$H_0(z) = \frac{\hat{H}_0}{(1+z)^\gamma}, \quad (3.20)$$

con \hat{H}_0 y γ siendo los parámetros de ajuste. El coeficiente γ da el factor de evolución y $\hat{H}_0 = H(z = 0)$. La elección de esta parametrización es utilizada ampliamente para caracterizar la evolución de muchas fuentes astrofísicas. En la tabla 3.8 mostramos los resultados que obtuvimos y en la figura 3.8 graficamos los valores del factor de evolución obtenido en cada análisis.

3.4. TENDENCIA INTRÍNSECA $H_0(Z)$

Análisis 1		
\bar{z}	Rango en z	$H_0 \left[\frac{\text{km}}{\text{s Mpc}} \right]$
0.0229	(0.01, 0.0325]	$73.574^{+0.377}_{-0.386}$
0.0958	(0.325, 0.1846]	$73.557^{+0.246}_{-0.256}$
0.260	(0.1846, 0.338]	73.531 ± 0.311
0.522	(0.338, 2.27]	$73.324^{+0.375}_{-0.367}$
Análisis 2		
\bar{z}	Rango en z	$H_0 \left[\frac{\text{km}}{\text{s Mpc}} \right]$
0.0189	(0.01, 0.0248]	$73.487^{+0.479}_{-0.502}$
0.0341	(0.0248, 0.0494]	$73.447^{+0.358}_{-0.350}$
0.121	(0.0494, 0.1848]	$73.763^{+0.301}_{-0.300}$
0.233	(0.1848, 0.2874]	$73.837^{+0.374}_{-0.389}$
0.347	(0.2874, 0.434]	$73.208^{+0.374}_{-0.389}$
0.616	(0.434, 2.27]	$73.155^{+0.499}_{-0.478}$
Análisis 3		
\bar{z}	Rango en z	$H_0 \left[\frac{\text{km}}{\text{s Mpc}} \right]$
0.0170	(0.01, 0.0221]	$73.029^{+0.579}_{-0.598}$
0.0267	(0.0221, 0.032]	$73.828^{+0.442}_{-0.438}$
0.0709	(0.032, 0.071]	$73.335^{+0.376}_{-0.393}$
0.138	(0.071, 0.184]	$73.645^{+0.370}_{-0.368}$
0.220	(0.184, 0.257]	$73.464^{+0.424}_{-0.421}$
0.299	(0.257, 0.336]	$73.386^{+0.388}_{-0.398}$
0.406	(0.336, 0.506]	$73.227^{+0.415}_{-0.437}$
0.686	(0.506, 2.27]	$73.149^{+0.533}_{-0.567}$

Tabla 3.7: Valores de \bar{z} , rango de corrimientos al rojo abarcado y el valor de mejor ajuste para H_0 , en cada intervalo. Suponiendo un modelo Λ CDM plano con valores fijos de $\Omega_m = 0.334$ y $M = -19.244$.

Número de intervalos	\hat{H}_0 $\left[\frac{\text{km}}{\text{s Mpc}} \right]$	γ	$\frac{\gamma}{\sigma_\gamma}$	$H_0(z = 1100)$ $\left[\frac{\text{km}}{\text{s Mpc}} \right]$
4	$73.666^{+0.198}_{-0.179}$	0.010 ± 0.005	2.0	$68.683^{+2.275}_{-2.418}$
6	$73.696^{+0.187}_{-0.177}$	$0.011^{+0.008}_{-0.007}$	1.6	$68.231^{+3.256}_{-3.55}$
8	$73.580^{+0.229}_{-0.208}$	0.015 ± 0.010	1.5	$66.242^{+4.605}_{-4.289}$

Tabla 3.8: Parámetros de ajuste de $H_0(z)$ para el agrupamiento en 4, 6 y 8 intervalos. Suponiendo un modelo Λ CDM plano con valores fijos de $\Omega_m = 0.334$ y $M = -19.244$. La cuarta columna denota la consistencia del parámetro γ con cero en términos de 1σ . En la última columna, mostramos los valores extrapolados de $H_0(z)$ evaluada en la superficie de última dispersión, $z = 1100$.

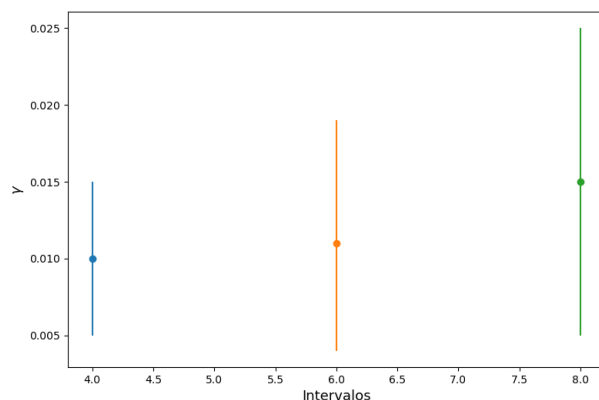


Figura 3.8: Valores del factor de evolución γ obtenido en cada análisis. Los datos azul, naranja y verde corresponden a los análisis con 4, 6 y 8 intervalos respectivamente.

La tasa decreciente de H_0 es observada en los tres análisis, donde γ es compatible con cero a 2.0σ , 1.6σ y 1.5σ en los 4, 6 y 8 intervalos respectivamente, tal y como mostramos en la figura 3.9. Al extrapolar el valor de $H(z)$ a la superficie de última dispersión ($z \approx 1100$) obtenemos valores de H_0 que son compatibles con lo reportado por Planck ($H_0 = 67.4 \pm 0.5$ km s $^{-1}$ Mpc $^{-1}$) dentro del 1σ para los tres análisis, también reportados en la tabla 3.8. Las barras de error en la extrapolación de $H_0(z)$ son largas debido a que hemos propagado los errores tanto de \hat{H}_0 como de γ . De igual manera, el valor de \hat{H}_0 , correspondiente a $H(z = 0)$, es compatible con lo medido por SH0ES ($H_0 = 73.04 \pm 1.04$ km s $^{-1}$ Mpc $^{-1}$) dentro de 1σ .

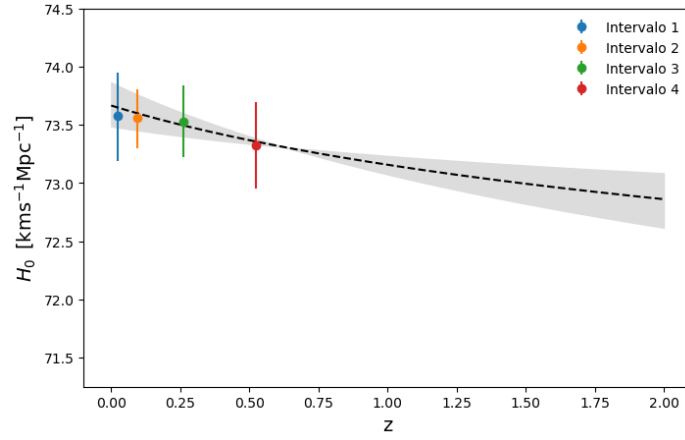
Estos resultados para Pantheon+ concuerdan con lo obtenido en [102] (en donde recor-

demostremos que usaron la muestra de Pantheon) y proveen otra perspectiva adicional con la cual tratar la tensión de Hubble. Suponiendo que esta tendencia en H_0 sea intrínseca y no causada por alguna evolución oculta dentro de los parámetros de Pantheon+, favorecería teorías sobre inhomogeneidades locales en el universo. Estas teorías sugieren que la tensión de Hubble surge de efectos asociados con una inhomogeneidad local del universo que afecta la calibración de los parámetros cosmológicos. Es fácil inferir que estas inhomogeneidades estarían relacionadas con perturbaciones en la densidad: de encontrarnos en una región con una subdensidad, la tasa de expansión será mayor que la tasa de expansión global. Esto va de la mano con el hecho de que regiones con sobredensidad de materia causan, debido a la atracción gravitacional, una tasa de expansión menor. Con subdensidad nos referimos a una densidad de materia menor comparado con la densidad de materia promedio del universo. Para cuantificar vagamente el cambio en densidad necesario para obtener estos resultados, podemos utilizar la ecuación de Friedmann (1.3) que cumple con

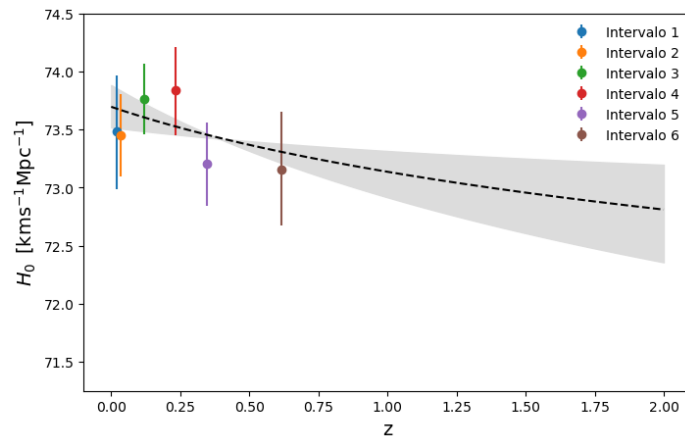
$$\frac{2\delta H}{H} = \frac{\delta\rho}{\rho} = \delta_\rho \quad (3.21)$$

A partir de los valores de H_0 de Planck y SH0ES, tendremos un cambio de $\delta H \approx 5 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$, y tomando $H \approx 73 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ encontramos que el cambio en densidad necesario a partir de estos resultados es de $\delta \approx 0.14$.

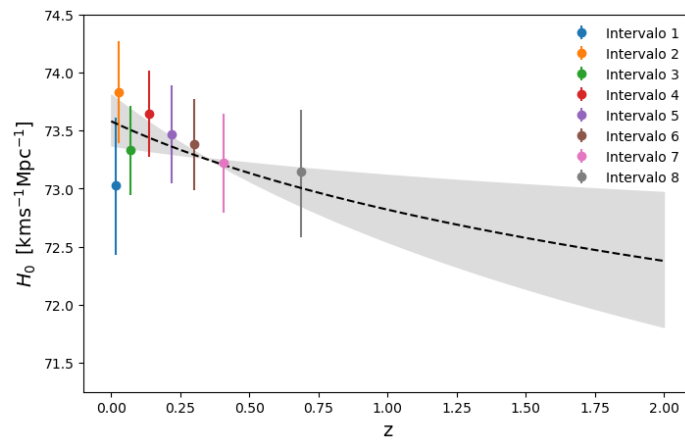
Sin embargo, está claro que para extrapolar cualquier parametrización de $H(z)$ necesitamos de resultados que tengan una mayor precisión, al igual que una mayor cantidad de mediciones que extiendan el alcance de corrimientos al rojo observados. Nuevamente enfatizamos que la tendencia encontrada abre nuevas pistas en el tratamiento de la tensión de Hubble y es importante que siga siendo tratada en futuras observaciones.



(a)



(b)



(c)

Figura 3.9: Mejor ajuste de $H(z)$ a los resultados obtenidos en cada intervalo. Las figuras (a), (b) y (c) corresponden a los análisis de agrupamiento en 4, 6 y 8 intervalos respectivamente.

Capítulo 4

Conclusiones

Obtuvimos una evidente dependencia descendente de la constante de Hubble con el corrimiento al rojo bajo un modelo Λ CDM plano, cuya desviación de tener un valor constante está a 2.8σ , y a partir de los datos cosmológicos más actuales, pertenecientes a mediciones de supernovas tipo Ia, cronómetros cósmicos, oscilaciones acústicas de bariones y distancias hacia megamáseres.

El análisis lo realizamos mediante el agrupamiento de los datos en intervalos con un corrimiento al rojo asignado a cada uno de ellos y ajustando una línea recta, $H_0(z) = mz + c$, al valor de H_0 obtenido en cada intervalo.

Tras reacomodar los intervalos, donde ahora la cantidad de datos en cada uno fue estadísticamente representativa, conservamos la tendencia descendente. Esto indica que la tendencia no parece deberse a una coincidencia estadística, aunque sí depende de la manera en que son acomodados los datos, puesto que ahora la desviación de una línea horizontal bajó hasta 1.5σ con respecto al 2.8σ que obtuvimos previamente.

El cambio de modelo cosmológico a w CDM y a una ecuación de estado dinámica para la energía oscura $w(z)$, también cambiaron la tendencia a 2.7σ y 2.6σ respectivamente, por lo que esta es una tendencia dependiente del modelo cosmológico. Esto abre las puertas a una nueva perspectiva sobre la tensión de Hubble, en donde ya no solamente versamos sobre el desacuerdo entre los valores de H_0 inferidos por el equipo SH0ES y la colaboración Planck, sino también en soluciones que logren corregir la tendencia encontrada de H_0 ajustando a un valor constante.

Suponiendo que la tendencia no es producida por errores sistemáticos o alguna evolución oculta de los parámetros astrofísicos, tenemos que los resultados dan indicios de un comportamiento evolutivo intrínseco de $H_0(z)$, lo que nos conlleva en un futuro a explorar escenarios teóricos para su explicación.

Tras agrupar la muestra de Pantheon+ en 4,6 y 8 intervalos, y obtener el valor de H_0 en cada intervalo, hemos ajustado los valores a la función $H_0(z) = \hat{H}_0/(1+z)^\gamma$, donde γ denota el parámetro de evolución y $\hat{H}_0 = H_0(z=0)$. Nuevamente apreciamos una tendencia descendente donde γ está a lo menos a 1.5σ de tomar un valor nulo. Como dato interesante, si extrapolamos la función $H_0(z)$ a la superficie de última dispersión, $z=1100$, obtenemos un valor de $H_0(z)$ que es compatible dentro de 1σ con el valor de H_0 obtenido por Planck en Λ CDM, aunque con grandes barras de error.

Entre los escenarios que pueden dar una explicación a los obtenido, tenemos el efecto de una inhomogeneidad local del universo. Podríamos argumentar que nos encontramos en una zona subdensa a escalas donde la tendencia descendente es evidente, aumentando la tasa de expansión local del universo comparado con la tasa de expansión global.

Evidentemente, es necesario mejorar la precisión y la cantidad de los datos existentes, así como ampliar el rango alcanzado de corrimientos al rojo. Esto nos sería útil para afinar de manera óptima una parametrización en $H(z)$, investigar si existen escalas donde la constante de Hubble recupera un valor constante y disminuir los errores de H_0 en cada intervalo para concluir satisfactoriamente la existencia de una tendencia descendente.

El gran costo computacional que implica cambiar a un modelo cosmológico con parámetros adicionales o con parametrizaciones dinámicas en la ecuación de estado de la energía oscura impidió que pudiéramos analizar modelos cosmológicos adicionales. Esperamos que en el futuro podamos regresar y darle continuidad a este aspecto.

Independientemente de la parametrización utilizada en $H_0(z)$ y su interpretación física, hemos mostrado que el valor de H_0 , con los datos actuales disponibles, disminuye con el corrimiento al rojo.

Por último, recalamos la gran importancia de la tensión de Hubble, que impone un gran desafío teórico y experimental dar con su solución. Esta tensión ha dejado a la cosmología y la astrofísica en un flujo constante de cambios y modificaciones, con ninguna de

ellas siendo favorecida por sobre las demás. Errores sistemáticos aún sin considerar, fallas en el modelo cosmológico Λ CDM o nueva física por descubrir, han sido las perspectivas a tomar en cuenta. Enfatizamos que la tendencia descendente de H_0 encontrada en esta tesis y en los trabajos [3, 4], debe ser tomada en consideración en un tratamiento futuro para la tensión de Hubble, dado a que desentraña nuevas pistas teóricas y sistemáticas que nos pueden encaminar hacia su completa resolución.

Bibliografía

- [1] A. G. Riess, W. Yuan, L. M. Macri, D. Scolnic, D. Brout, S. Casertano, D. O. Jones, Y. Murakami, G. S. Anand, L. Breuval, *et al.*, “A comprehensive measurement of the local value of the Hubble constant with 1 km s⁻¹ Mpc⁻¹ uncertainty from the Hubble Space Telescope and the SH0ES team,” *The Astrophysical journal letters*, vol. 934, no. 1, p. L7, 2022.
- [2] N. Aghanim, Y. Akrami, M. Ashdown, J. Aumont, C. Baccigalupi, M. Ballardini, A. Banday, R. Barreiro, N. Bartolo, S. Basak, *et al.*, “Planck 2018 results-VI. Cosmological parameters,” *Astronomy & Astrophysics*, vol. 641, p. A6, 2020.
- [3] K. C. Wong, S. H. Suyu, G. C. Chen, C. E. Rusu, M. Millon, D. Sluse, V. Bonvin, C. D. Fassnacht, S. Taubenberger, M. W. Auger, *et al.*, “H0LiCOW–XIII. A 2.4 per cent measurement of H0 from lensed quasars: 5.3 σ tension between early-and late-Universe probes,” *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, vol. 498, no. 1, pp. 1420–1439, 2020.
- [4] C. Krishnan, E. Ó. Colgáin, A. A. Sen, M. Sheikh-Jabbari, T. Yang, *et al.*, “Is there an early Universe solution to Hubble tension?,” *Physical Review D*, vol. 102, no. 10, p. 103525, 2020.
- [5] P. Carter, F. Beutler, W. J. Percival, C. Blake, J. Koda, and A. J. Ross, “Low redshift baryon acoustic oscillation measurement from the reconstructed 6-degree field galaxy survey,” *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, vol. 481, no. 2, pp. 2371–2383, 2018.

-
- [6] A. J. Ross, L. Samushia, C. Howlett, W. J. Percival, A. Burden, and M. Manera, “The clustering of the SDSS DR7 main Galaxy sample–I. A 4 per cent distance measure at $z = 0.15$,” *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, vol. 449, no. 1, pp. 835–847, 2015.
- [7] S. Alam, M. Ata, S. Bailey, F. Beutler, D. Bizyaev, J. A. Blazek, A. S. Bolton, J. R. Brownstein, A. Burden, C.-H. Chuang, *et al.*, “The clustering of galaxies in the completed SDSS-III Baryon Oscillation Spectroscopic Survey: cosmological analysis of the DR12 galaxy sample,” *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, vol. 470, no. 3, pp. 2617–2652, 2017.
- [8] J. E. Bautista, R. Paviot, M. Vargas Magana, S. de La Torre, S. Fromenteau, H. Gil-Marín, A. J. Ross, E. Burtin, K. S. Dawson, J. Hou, *et al.*, “The completed SDSS-IV extended Baryon Oscillation Spectroscopic Survey: measurement of the BAO and growth rate of structure of the luminous red galaxy sample from the anisotropic correlation function between redshifts 0.6 and 1,” *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, vol. 500, no. 1, pp. 736–762, 2021.
- [9] A. Raichoor, A. De Mattia, A. J. Ross, C. Zhao, S. Alam, S. Avila, J. Bautista, J. Brinkmann, J. R. Brownstein, E. Burtin, *et al.*, “The completed SDSS-IV extended Baryon Oscillation Spectroscopic Survey: large-scale structure catalogues and measurement of the isotropic BAO between redshift 0.6 and 1.1 for the Emission Line Galaxy Sample,” *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, vol. 500, no. 3, pp. 3254–3274, 2021.
- [10] J. Hou, A. G. Sánchez, A. J. Ross, A. Smith, R. Neveux, J. Bautista, E. Burtin, C. Zhao, R. Scoccimarro, K. S. Dawson, *et al.*, “The completed SDSS-IV extended Baryon Oscillation Spectroscopic Survey: BAO and RSD measurements from anisotropic clustering analysis of the quasar sample in configuration space between redshift 0.8 and 2.2,” *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, vol. 500, no. 1, pp. 1201–1221, 2021.

- [11] H. D. M. Des Bourboux, J. Rich, A. Font-Ribera, V. de Sainte Agathe, J. Farr, T. Etourneau, J.-M. Le Goff, A. Cuceu, C. Balland, J. E. Bautista, *et al.*, “The completed SDSS-IV extended baryon oscillation spectroscopic survey: baryon acoustic oscillations with Ly α forests,” *The Astrophysical Journal*, vol. 901, no. 2, p. 153, 2020.
- [12] D. Brout, D. Scolnic, B. Popovic, A. G. Riess, A. Carr, J. Zuntz, R. Kessler, T. M. Davis, S. Hinton, D. Jones, *et al.*, “The pantheon+ analysis: cosmological constraints,” *The Astrophysical Journal*, vol. 938, no. 2, p. 110, 2022.
- [13] C. Zhang, H. Zhang, S. Yuan, S. Liu, T.-J. Zhang, and Y.-C. Sun, “Four new observational H(z) data from luminous red galaxies in the Sloan Digital Sky Survey data release seven,” *Research in Astronomy and Astrophysics*, vol. 14, no. 10, p. 1221, 2014.
- [14] R. Jimenez, L. Verde, T. Treu, and D. Stern, “Constraints on the equation of state of dark energy and the Hubble constant from stellar ages and the cosmic microwave background,” *The Astrophysical Journal*, vol. 593, no. 2, p. 622, 2003.
- [15] J. Simon, L. Verde, and R. Jimenez, “Constraints on the redshift dependence of the dark energy potential,” *Physical Review D*, vol. 71, no. 12, p. 123001, 2005.
- [16] M. Moresco, A. Cimatti, R. Jimenez, L. Pozzetti, G. Zamorani, M. Bolzonella, J. Dunlop, F. Lamareille, M. Mignoli, H. Pearce, *et al.*, “Improved constraints on the expansion rate of the Universe up to z 1.1 from the spectroscopic evolution of cosmic chronometers,” *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, vol. 2012, no. 08, pp. 006–006, 2012.
- [17] M. Moresco, L. Pozzetti, A. Cimatti, R. Jimenez, C. Maraston, L. Verde, D. Thomas, A. Citro, R. Tojeiro, and D. Wilkinson, “A 6% measurement of the Hubble parameter at z 0.45: direct evidence of the epoch of cosmic re-acceleration,” *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, vol. 2016, no. 05, pp. 014–014, 2016.

-
- [18] A. Ratsimbazafy, S. Loubser, S. Crawford, C. Cress, B. Bassett, R. Nichol, and P. Väisänen, “Age-dating luminous red galaxies observed with the Southern African Large Telescope,” *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, vol. 467, no. 3, pp. 3239–3254, 2017.
- [19] D. Stern, R. Jimenez, L. Verde, M. Kamionkowski, and S. A. Stanford, “Cosmic chronometers: constraining the equation of state of dark energy. I: $H(z)$ measurements,” *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, vol. 2010, no. 02, p. 008, 2010.
- [20] N. Borghi, M. Moresco, and A. Cimatti, “Toward a Better Understanding of Cosmic Chronometers: A New Measurement of $H(z)$ at $z \sim 0.7$,” *The Astrophysical Journal Letters*, vol. 928, no. 1, p. L4, 2022.
- [21] M. Moresco, “Raising the bar: new constraints on the Hubble parameter with cosmic chronometers at $z \sim 2$,” *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society: Letters*, vol. 450, no. 1, pp. L16–L20, 2015.
- [22] D. Pesce, J. Braatz, M. Reid, A. Riess, D. Scolnic, J. Condon, F. Gao, C. Henkel, C. Impellizzeri, C. Kuo, *et al.*, “The megamaser cosmology project. XIII. Combined Hubble constant constraints,” *The Astrophysical Journal Letters*, vol. 891, no. 1, p. L1, 2020.
- [23] E. Hubble, “A relation between distance and radial velocity among extra-galactic nebulae,” *Proceedings of the national academy of sciences*, vol. 15, no. 3, pp. 168–173, 1929.
- [24] S. Alam, M. Aubert, S. Avila, C. Balland, J. E. Bautista, M. A. Bershadsky, D. Bizyaev, M. R. Blanton, A. S. Bolton, J. Bovy, *et al.*, “Completed SDSS-IV extended Baryon Oscillation Spectroscopic Survey: Cosmological implications from two decades of spectroscopic surveys at the Apache Point Observatory,” *Physical Review D*, vol. 103, no. 8, p. 083533, 2021.
- [25] A. G. Riess, A. V. Filippenko, P. Challis, A. Clocchiatti, A. Diercks, P. M. Garnavich, R. L. Gilliland, C. J. Hogan, S. Jha, R. P. Kirshner, *et al.*, “Observational

- evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant,” *The astronomical journal*, vol. 116, no. 3, p. 1009, 1998.
- [26] S. Perlmutter, G. Aldering, G. Goldhaber, R. Knop, P. Nugent, P. G. Castro, S. Deustua, S. Fabbro, A. Goobar, D. E. Groom, *et al.*, “Measurements of Ω and Λ from 42 high-redshift supernovae,” *The Astrophysical Journal*, vol. 517, no. 2, p. 565, 1999.
- [27] F. Bernardeau, S. Colombi, E. Gaztanaga, and R. Scoccimarro, “Large-scale structure of the Universe and cosmological perturbation theory,” *Physics reports*, vol. 367, no. 1-3, pp. 1–248, 2002.
- [28] A. A. Penzias and R. W. Wilson, “A measurement of excess antenna temperature at 4080 MHz,” in *A Source Book in Astronomy and Astrophysics, 1900–1975*, pp. 873–876, Harvard University Press, 1979.
- [29] D. Fixsen, E. Cheng, J. Gales, J. C. Mather, R. Shafer, and E. Wright, “The cosmic microwave background spectrum from the full coBE* firas data set,” *The Astrophysical Journal*, vol. 473, no. 2, p. 576, 1996.
- [30] S. Dodelson and F. Schmidt, *Modern cosmology*. Academic press, 2020.
- [31] D. Tong, “Lectures on cosmology,” *Cambridge University*, 2019.
- [32] G. Efstathiou and J. R. Bond, “Cosmic confusion: degeneracies among cosmological parameters derived from measurements of microwave background anisotropies,” *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, vol. 304, no. 1, pp. 75–97, 1999.
- [33] D. J. Eisenstein, I. Zehavi, D. W. Hogg, R. Scoccimarro, M. R. Blanton, R. C. Nichol, R. Scranton, H.-J. Seo, M. Tegmark, Z. Zheng, *et al.*, “Detection of the baryon acoustic peak in the large-scale correlation function of SDSS luminous red galaxies,” *The Astrophysical Journal*, vol. 633, no. 2, p. 560, 2005.
- [34] S. Cole, W. J. Percival, J. A. Peacock, P. Norberg, C. M. Baugh, C. S. Frenk, I. Baldry, J. Bland-Hawthorn, T. Bridges, R. Cannon, *et al.*, “The 2dF Galaxy Redshift Survey: power-spectrum analysis of the final data set and cosmological

- implications,” *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, vol. 362, no. 2, pp. 505–534, 2005.
- [35] É. Aubourg, S. Bailey, J. E. Bautista, F. Beutler, V. Bhardwaj, D. Bizyaev, M. Blanton, M. Blomqvist, A. S. Bolton, J. Bovy, *et al.*, “Cosmological implications of baryon acoustic oscillation measurements,” *Physical Review D*, vol. 92, no. 12, p. 123516, 2015.
- [36] B. F. Schutz, “Determining the Hubble constant from gravitational wave observations,” *Nature*, vol. 323, no. 6086, pp. 310–311, 1986.
- [37] C. Bambi, S. Katsanevas, and K. D. Kokkotas, *Handbook of Gravitational Wave Astronomy*. Springer Nature, 2022.
- [38] B. F. Schutz, “Gravitational wave astronomy,” *Classical and Quantum Gravity*, vol. 16, no. 12A, p. A131, 1999.
- [39] B. P. Abbott, R. Abbott, T. Abbott, F. Acernese, K. Ackley, C. Adams, T. Adams, P. Addesso, R. Adhikari, V. B. Adya, *et al.*, “GW170817: observation of gravitational waves from a binary neutron star inspiral,” *Physical review letters*, vol. 119, no. 16, p. 161101, 2017.
- [40] T. L. S. Collaboration, T. D. E. C. G.-E. C. The Virgo Collaboration., The 1M2H Collaboration., and the DES Collaboration. *et al.*, “A gravitational-wave standard siren measurement of the Hubble constant,” *Nature*, vol. 551, no. 7678, pp. 85–88, 2017.
- [41] A. Sandage, G. Tammann, A. Saha, B. Reindl, F. Macchetto, and N. Panagia, “The Hubble constant: a summary of the Hubble Space Telescope program for the luminosity calibration of Type Ia supernovae by means of Cepheids,” *The Astrophysical Journal*, vol. 653, no. 2, p. 843, 2006.
- [42] S. Dhawan, D. Brout, D. Scolnic, A. Goobar, A. Riess, and V. Miranda, “Cosmological model insensitivity of local H_0 from the cepheid distance ladder,” *The Astrophysical Journal*, vol. 894, no. 1, p. 54, 2020.

- [43] B. Leibundgut, “Type Ia Supernovae,” *The Astronomy and Astrophysics Review*, vol. 10, pp. 179–209, 2000.
- [44] S. Refsdal, “On the possibility of determining Hubble’s parameter and the masses of galaxies from the gravitational lens effect,” *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, vol. 128, no. 4, pp. 307–310, 1964.
- [45] T. Treu and P. J. Marshall, “Time delay cosmography,” *The Astronomy and Astrophysics Review*, vol. 24, pp. 1–41, 2016.
- [46] S. H. Suyu, T.-C. Chang, F. Courbin, and T. Okumura, “Cosmological distance indicators,” *Space Science Reviews*, vol. 214, no. 5, p. 91, 2018.
- [47] R. Jimenez and A. Loeb, “Constraining cosmological parameters based on relative galaxy ages,” *The Astrophysical Journal*, vol. 573, no. 1, p. 37, 2002.
- [48] M. Moresco, L. Amati, L. Amendola, S. Birrer, J. P. Blakeslee, M. Cantiello, A. Cimatti, J. Darling, M. Della Valle, M. Fishbach, *et al.*, “Unveiling the Universe with emerging cosmological probes,” *Living Reviews in Relativity*, vol. 25, no. 1, p. 6, 2022.
- [49] J. R. Herrnstein, J. M. Moran, L. J. Greenhill, P. Diamond, M. Inoue, N. Nakai, M. Miyoshi, C. Henkel, and A. Riess, “A geometric distance to the galaxy NGC4258 from orbital motions in a nuclear gas disk,” *Nature*, vol. 400, no. 6744, pp. 539–541, 1999.
- [50] E. Humphreys, M. J. Reid, J. M. Moran, L. J. Greenhill, and A. L. Argon, “Toward a new geometric distance to the active galaxy NGC 4258. III. Final results and the Hubble constant,” *The Astrophysical Journal*, vol. 775, no. 1, p. 13, 2013.
- [51] F. Gao, J. Braatz, M. Reid, K. Lo, J. Condon, C. Henkel, C. Kuo, C. Impellizzeri, D. Pesce, and W. Zhao, “The megamaser cosmology project. VIII. A geometric distance to NGC 5765b,” *The Astrophysical Journal*, vol. 817, no. 2, p. 128, 2016.
- [52] M. Reid, J. Braatz, J. Condon, K. Lo, C. Kuo, C. Impellizzeri, and C. Henkel, “The megamaser cosmology project. IV. A direct measurement of the Hubble constant from UGC 3789,” *The Astrophysical Journal*, vol. 767, no. 2, p. 154, 2013.

-
- [53] W. L. Freedman, “Measurements of the Hubble constant: tensions in perspective,” *The Astrophysical Journal*, vol. 919, no. 1, p. 16, 2021.
- [54] L. Perivolaropoulos and F. Skara, “Challenges for Λ CDM: An update,” *New Astronomy Reviews*, vol. 95, p. 101659, 2022.
- [55] L. Knox and M. Millea, “Hubble constant hunter’s guide,” *Physical Review D*, vol. 101, no. 4, p. 043533, 2020.
- [56] K. Jedamzik, L. Pogosian, and G.-B. Zhao, “Why reducing the cosmic sound horizon alone can not fully resolve the Hubble tension,” *Communications Physics*, vol. 4, no. 1, p. 123, 2021.
- [57] T. Karwal and M. Kamionkowski, “Dark energy at early times, the Hubble parameter, and the string axiverse,” *Physical Review D*, vol. 94, no. 10, p. 103523, 2016.
- [58] V. Poulin, T. L. Smith, T. Karwal, and M. Kamionkowski, “Early dark energy can resolve the Hubble tension,” *Physical review letters*, vol. 122, no. 22, p. 221301, 2019.
- [59] M. S. Turner, “Coherent scalar-field oscillations in an expanding universe,” *Physical Review D*, vol. 28, no. 6, p. 1243, 1983.
- [60] A. G. Riess, S. Casertano, W. Yuan, L. Macri, B. Bucciarelli, M. G. Lattanzi, J. W. MacKenty, J. B. Bowers, W. Zheng, A. V. Filippenko, *et al.*, “Milky Way Cepheid standards for measuring cosmic distances and application to Gaia DR2: implications for the Hubble constant,” *The Astrophysical Journal*, vol. 861, no. 2, p. 126, 2018.
- [61] N. Aghanim, M. Arnaud, M. Ashdown, J. Aumont, C. Baccigalupi, A. Banday, R. Barreiro, J. Bartlett, N. Bartolo, E. Battaner, *et al.*, “Planck 2015 results-XI. CMB power spectra, likelihoods, and robustness of parameters,” *Astronomy & Astrophysics*, vol. 594, p. A11, 2016.
- [62] D. M. Scolnic, D. Jones, A. Rest, Y. Pan, R. Chornock, R. Foley, M. Huber, R. Kessler, G. Narayan, A. Riess, *et al.*, “The complete light-curve sample of spectroscopically confirmed SNe Ia from Pan-STARRS1 and cosmological constraints from the combined pantheon sample,” *The Astrophysical Journal*, vol. 859, no. 2, p. 101, 2018.

- [63] L. Yin, “Reducing the H_0 tension with exponential acoustic dark energy,” *The European Physical Journal C*, vol. 82, no. 1, p. 78, 2022.
- [64] S. Clark, K. Vattis, J. Fan, and S. Koushiappas, “The H_0 and S_8 tensions necessitate early and late time changes to Λ CDM,(2021),” *arXiv preprint arXiv:2110.09562*.
- [65] J. C. Hill, E. McDonough, M. W. Toomey, and S. Alexander, “Early dark energy does not restore cosmological concordance,” *Physical Review D*, vol. 102, no. 4, p. 043507, 2020.
- [66] G.-B. Zhao, M. Raveri, L. Pogosian, Y. Wang, R. G. Crittenden, W. J. Handley, W. J. Percival, F. Beutler, J. Brinkmann, C.-H. Chuang, *et al.*, “Dynamical dark energy in light of the latest observations,” *Nature Astronomy*, vol. 1, no. 9, pp. 627–632, 2017.
- [67] W. Yang, S. Pan, E. Di Valentino, E. N. Saridakis, and S. Chakraborty, “Observational constraints on one-parameter dynamical dark-energy parametrizations and the H_0 tension,” *Physical Review D*, vol. 99, no. 4, p. 043543, 2019.
- [68] M. Betoule, R. Kessler, J. Guy, J. Mosher, D. Hardin, R. Biswas, P. Astier, P. El-Hage, M. König, S. Kuhlmann, *et al.*, “Improved cosmological constraints from a joint analysis of the SDSS-II and SNLS supernova samples,” *Astronomy & Astrophysics*, vol. 568, p. A22, 2014.
- [69] X. Li and A. Shafieloo, “A simple phenomenological emergent dark energy model can resolve the Hubble tension,” *The Astrophysical Journal Letters*, vol. 883, no. 1, p. L3, 2019.
- [70] M. Rezaei, T. Naderi, M. Malekjani, and A. Mehrabi, “A Bayesian comparison between Λ CDM and phenomenologically emergent dark energy models,” *The European Physical Journal C*, vol. 80, no. 5, p. 374, 2020.
- [71] H. Benaoum, W. Yang, S. Pan, and E. Di Valentino, “Modified emergent dark energy and its astronomical constraints,” *International Journal of Modern Physics D*, vol. 31, no. 03, p. 2250015, 2022.

-
- [72] S. Kumar and R. C. Nunes, “Echo of interactions in the dark sector,” *Physical Review D*, vol. 96, no. 10, p. 103511, 2017.
- [73] S. Kumar, R. C. Nunes, and S. K. Yadav, “Dark sector interaction: a remedy of the tensions between CMB and LSS data,” *The European Physical Journal C*, vol. 79, no. 7, p. 576, 2019.
- [74] M. Escudero, L. Lopez-Honorez, O. Mena, S. Palomares-Ruiz, and P. Villanueva-Domingo, “A fresh look into the interacting dark matter scenario,” *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, vol. 2018, no. 06, p. 007, 2018.
- [75] S. Kumar, R. C. Nunes, and S. K. Yadav, “Cosmological bounds on dark matter-photon coupling,” *Physical Review D*, vol. 98, no. 4, p. 043521, 2018.
- [76] N. Becker, D. C. Hooper, F. Kahlhoefer, J. Lesgourgues, and N. Schöneberg, “Cosmological constraints on multi-interacting dark matter,” *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, vol. 2021, no. 02, p. 019, 2021.
- [77] L. Lancaster, F.-Y. Cyr-Racine, L. Knox, and Z. Pan, “A tale of two modes: Neutrino free-streaming in the early universe,” *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, vol. 2017, no. 07, p. 033, 2017.
- [78] V. Gorini, A. Kamenshchik, U. Moschella, and V. Pasquier, “The Chaplygin gas as a model for dark energy,” in *The Tenth Marcel Grossmann Meeting: On Recent Developments in Theoretical and Experimental General Relativity, Gravitation and Relativistic Field Theories (In 3 Volumes)*, pp. 840–859, World Scientific, 2005.
- [79] M. Benetti, W. Miranda, H. A. Borges, C. Pigozzo, S. Carneiro, and J. S. Alcaniz, “Looking for interactions in the cosmological dark sector,” *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, vol. 2019, no. 12, p. 023, 2019.
- [80] M. Benetti, H. Borges, C. Pigozzo, S. Carneiro, and J. Alcaniz, “Dark sector interactions and the curvature of the universe in light of Planck’s 2018 data,” *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, vol. 2021, no. 08, p. 014, 2021.

- [81] R. J. Cooke, M. Pettini, and C. C. Steidel, “One percent determination of the primordial deuterium abundance,” *The Astrophysical Journal*, vol. 855, no. 2, p. 102, 2018.
- [82] E. Di Valentino, O. Mena, S. Pan, L. Visinelli, W. Yang, A. Melchiorri, D. F. Mota, A. G. Riess, and J. Silk, “In the realm of the Hubble tension—a review of solutions,” *Classical and Quantum Gravity*, vol. 38, no. 15, p. 153001, 2021.
- [83] G. Mangano, G. Miele, S. Pastor, T. Pinto, O. Pisanti, and P. D. Serpico, “Relic neutrino decoupling including flavour oscillations,” *Nuclear Physics B*, vol. 729, no. 1-2, pp. 221–234, 2005.
- [84] S. Vagnozzi, “New physics in light of the H_0 tension: An alternative view,” *Phys. Rev. D*, vol. 102, p. 023518, Jul 2020.
- [85] W. Hu and I. Sawicki, “Models of $f(r)$ cosmic acceleration that evade solar system tests,” *Physical Review D*, vol. 76, no. 6, p. 064004, 2007.
- [86] C. Li, Y. Cai, Y.-F. Cai, and E. N. Saridakis, “The effective field theory approach of teleparallel gravity, $f(t)$ gravity and beyond,” *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, vol. 2018, no. 10, p. 001, 2018.
- [87] S. Mandal, D. Wang, and P. K. Sahoo, “Cosmography in $f(q)$ gravity,” *Phys. Rev. D*, vol. 102, p. 124029, Dec 2020.
- [88] C. Brans and R. H. Dicke, “Mach’s Principle and a Relativistic Theory of Gravitation,” *Phys. Rev.*, vol. 124, pp. 925–935, Nov 1961.
- [89] M.-X. Lin, M. Raveri, and W. Hu, “Phenomenology of modified gravity at recombination,” *Phys. Rev. D*, vol. 99, p. 043514, Feb 2019.
- [90] A. H. Guth and S.-Y. Pi, “Fluctuations in the New Inflationary Universe,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 49, pp. 1110–1113, Oct 1982.

-
- [91] A. Linde, “A new inflationary universe scenario: A possible solution of the horizon, flatness, homogeneity, isotropy and primordial monopole problems,” *Physics Letters B*, vol. 108, no. 6, pp. 389–393, 1982.
- [92] T. Tram, R. Vallance, and V. Vennin, “Inflation model selection meets dark radiation,” *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, vol. 2017, p. 046, jan 2017.
- [93] D. K. Hazra, A. Shafieloo, and T. Souradeep, “Parameter discordance in Planck CMB and low-redshift measurements: projection in the primordial power spectrum,” *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, vol. 2019, p. 036, apr 2019.
- [94] V. Bonvin, F. Courbin, S. H. Suyu, P. Marshall, C. Rusu, D. Sluse, M. Tewes, K. Wong, T. Collett, C. Fassnacht, *et al.*, “H0LiCOW–V. New COSMOGRAIL time delays of HE 0435- 1223: H0 to 3.8 per cent precision from strong lensing in a flat Λ CDM model,” *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, vol. 465, no. 4, pp. 4914–4930, 2017.
- [95] M. Millon, A. Galan, F. Courbin, T. Treu, S. Suyu, X. Ding, S. Birrer, G.-F. Chen, A. Shajib, D. Sluse, *et al.*, “TDCOSMO-I. An exploration of systematic uncertainties in the inference of H0 from time-delay cosmography,” *Astronomy & Astrophysics*, vol. 639, p. A101, 2020.
- [96] F. Beutler, C. Blake, M. Colless, D. H. Jones, L. Staveley-Smith, L. Campbell, Q. Parker, W. Saunders, and F. Watson, “The 6dF Galaxy Survey: baryon acoustic oscillations and the local Hubble constant,” *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, vol. 416, no. 4, pp. 3017–3032, 2011.
- [97] D. J. MacKay, *Information theory, inference and learning algorithms*. Cambridge university press, 2003.
- [98] A. Gelman, J. B. Carlin, H. S. Stern, and D. B. Rubin, *Bayesian data analysis*. Chapman and Hall/CRC, 1995.

- [99] J. Goodman and J. Weare, “Ensemble samplers with affine invariance,” *Communications in applied mathematics and computational science*, vol. 5, no. 1, pp. 65–80, 2010.
- [100] D. Foreman-Mackey, D. W. Hogg, D. Lang, and J. Goodman, “emcee: The MCMC Hammer,” *Publications of the Astronomical Society of the Pacific*, vol. 125, p. 306, feb 2013.
- [101] M. Moresco, R. Jimenez, L. Verde, A. Cimatti, and L. Pozzetti, “Setting the stage for cosmic chronometers. II. Impact of Stellar population synthesis models systematics and full covariance matrix,” *The Astrophysical Journal*, vol. 898, no. 1, p. 82, 2020.
- [102] M. G. Dainotti, B. D. Simone, T. Schiavone, G. Montani, E. Rinaldi, and G. Lambiase, “On the Hubble Constant Tension in the SNe Ia Pantheon Sample,” *The Astrophysical Journal*, vol. 912, p. 150, may 2021.