Centro de Investigación y de Estudios Avanzados
del
Instituto Politécnico Nacional

UNIDAD ZACATENCO
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

"Dualidad T no-Abeliana en Modelos Sigma Lineales normados supersimétricos (2,2) con superpotencial"

Tesis que presenta

Juan Paulo Mejia Picon

para obtener el Grado de

Maestro en Ciencias

en la Especialidad de

Física

Director de tesis: **Dr. Héctor Hugo García Compeán**

Ciudad de México Febrero, 2024

DEDICATORIA

Para mi padre, por su guía, su amor
y su apoyo incondicional, que siempre
permanecerá en mi ser.
Para mi madre, por su indulgencia,
su bondad y el tierno cariño que siempre
me ha brindado.

AGRADECIMIENTOS

- A mis padres María y José, quienes siempre me han apoyado y cuyo amor no tiene límites.
- A mis hermanos y hermanas Felipe, Diego, Carlos, Tere, Lupe y Diana, en quienes siempre he podido encontrar apoyo y resguardo.
- A Nadia por su compañia, su cariño y su apoyo incondicional en todo momento.
- A Manuel, Martina, Alejandro, Fernada y Sebastián, por brindarme siempre un segundo hogar.
- A mis profesores, en especial a mi asesor el Dr. Héctor Hugo por compartir su conocimiento de manera paciente conmigo y por guiarme en la realización de esta tesis.
- A mis compañeros Mauricio y Moises, por las discusiones, apoyo e ideas que aligeraron los primeros semestres de la maestría.
- A mis compañeros y amigos del posgrado Héctor, Ramón, Iván, Luis, Jhonny, Salvador, Eduardoy Ángel con quienes compartí momentos agradables que me permitieron disfrutar el posgrado.
- Al personal académico, en especial a Mariana por su apoyo siempre cálido y entusiasta.
- A CONAHCyT y al pueblo mexicano por brindarme una generosa beca que sirvió de apoyo para realizar esta tesis.

RESUMEN

En este trabajo se implementa el algoritmo de dualidad T abeliana y no-Abeliana sobre un Modelo Sigma Lineal Normado (2,2) en 2D con un término de superpotencial. Para realizar la dualidad T tomamos una forma general del superpotencial en términos de un supercampo quiral neutro, un supercampo quiral cargado y una función holomórfica de supercampos quirales arbitrarios y convertimos el término superpotencial un tipo de término escalar que cambia completamente el modelo dual. Una vez obtenido el modelo dual, se calcula y discute el potencial escalar.

ABSTRACT

In this work it is implemented the Abelian and non-Abelian T-duality algorithm on a 2D Gauged Linear Sigma Model (2,2) with a superpotential term. To carry out the T-duality we take a general form of the superpotential in terms of a neutral chiral superfield, a charged chiral superfield and an holomorphic function of arbitrary chiral superfields and convert the superpotential term in some kind of scalar term which change completely the dual model. Once the dual model is obtained, the scalar potencial is calculated and it is discussed the vacua geometry.

Índice general

Capítulo 1

Introducción

En diversas áreas de la física existen teorías llamadas duales, estas pueden ser transformadas de tal manera que se obtiene una teoría en principio diferente a la primera pero que describe los mismos fenómenos físicos. Algunos ejemplos de dualidad son: la obtenida al intercambiar campos eléctricos y magnéticos en la teoría electromagnética de Maxwell, la dualidad de la temperatura en el modelo de Ising, la dualidad entre bosones y fermiones y la dualidad S, U y T en teoría de cuerdas. En particular una de las simetrías más destacadas es la dualidad T, la cual en un caso sencillo establece que un modelo sigma en una circunferencia de radio R es equivalente a un modelo sigma en una circunferencia de radio $\frac{1}{R}$; esto es también es válido en teorías supersimétricas (2,2) sobre la hoja de mundo. La dualidad T ha sido fundamental para descubrimiento y comprensión de otras dualidades.
Asimismo, se ha observado que la dualidad T está fuertemente relacionada con la simetría espejo, la cual conecta variedades Calabi-Yau y es de gran interés tanto en matemáticas como en teoría de cuerdas [1].

Por otro lado en 1993, E. Witten introdujo los llamados Modelos Sigma Lineales Normados (GLSM por sus siglas en inglés) en respuesta a una notable relación entre el espectro de hipersuperficies Calabi-Yau en espacios proyectivos pesados y el espectro de Modelos Landau-Ginzburg. Estos modelos, que en principio son distintos, pueden ser vistos como dos "fases"de una misma teoría mediante la interpolación de un GLSM.
Existen diversos trabajos [2, 3, 4, 5, 6] en los cuales se implementa la dualidad T en GLSM. Esto se logra de manera sencilla al considerar un sistema con una simetría global, promoviendo la simetría global a una simetría local mediante la introducción de un campo de norma y agregando multiplicadores de Lagrange que aseguren la planitud del campo de norma. Esto permite obtener un modelo general, que puede ser reducido al modelo original integrando los multiplicadores de Lagrange, o bien obtener el modelo dual integrando el

supercampo vectorial de la simetría de norma. Dado que la dualidad T se relaciona con la simetría espejo y que los GLSM, en una de sus "fases" representan una hipersuperficie Calabi-Yau, es posible implementar la dualidad T y obtener modelos duales.

En [2], se implementa la dualidad T no-Abeliana en un GLSM con la esperanza de obtener una clasificación de simetrías espejo en variedades Calabi-Yau más generales. Sin embargo no se considera el término con superpotencial para el Lagrangiano en estos modelos. En este trabajo se busca complementar esto y considerar modelos con término de superpotencial, utilizando la dualidad T Abeliana y no-Abeliana para obtener modelos duales más completos. Esto es importante debido a que en el término cinético del Lagrangiano se encuentra la información de la estructura Kähler del espacio target, mientras en el término de superpotencial se encuentra información de la estructura compleja de la geometría.

Esta tesis se centra en realizar la dualidad T Abeliana y no-Abeliana sobre un Modelo Sigma Lineal Normado con supersimetría (2,2), incorporando la novedad de incluir un término de superpotencial en el modelo. Tras llevar a cabo la dualidad, se obtiene el Lagrangiano del modelo dual, lo que permite estudiar la geometría de este nuevo modelo. Esta tesis está estructurada en seis capítulos: en el segundo capítulo se introduce el concepto de dualidad, se mencionan algunos ejemplos y se presenta el algoritmo para realizar la dualidad T en teoría de cuerdas: En el tercer capítulo se abordan los Modelos Sigma Lineales Normados, discutiendo su implementación, estructura y propiedades: En el cuarto capítulo sigue la metodología de [2, 5] para realizar la dualidad T Abeliana y no-Abeliana en Modelos Sigma Lineales Normados sin superpotencial y se obtienen sus potenciales escalares: En el quinto capítulo se utilizan ideas de [6] para llevar a cabo la dualidad T sobre Modelos Sigma Lineales Normados con término de superpotencial y se obtiene el potencial escalar de los modelos duales. Finalmente, en el sexto capítulo, se presentan las conclusiones de la tesis y se ofrecen algunas perspectivas para posibles trabajos a futuro.

Capítulo 2

Dualidad

En el siguiente capítulo se aborda la noción de dualidad, se hace un resumen de las principales características y se revisan algunos ejemplos. En particular se revisa la dualidad T que es el objeto de estudio de esta tesis. Así mismo se comenta el procedimiento para encontrar una teoría dual a otra para los casos de dualidad en teorías con simetrías globales Abelianas y no-Abelianas.

2.1. Dualidades

Se define la dualidad como la existencia de dos caracteres o fenómenos distintos en un mismo estado de cosas, este concepto es común en física puesto que se ha encontrado que existen teorías que en principio lucen diferentes pero que al estudiarlas se encuentra que están relacionadas, que son dos formas de ver una sola teoría. La dualidad más conocida, vista a nivel licenciatura es la dualidad existente en la teoría electromagnética de Maxwell, donde resulta que al intercambiar campos eléctricos y magnéticos, se obtienen dos teorías que describen los mismos fenómenos electromagnéticos pero que en principio son distintas entre sí, a alguna de estas teorías se le considera la original y a la otra se le denomina la "dual"de la original. En específico esta dualidad tiene que ver con el intercambio de los grados de libertad eléctricos y magnéticos.

En [7, 8, 9] se mencionan otros ejemplos de dualidad entre los cuales se encuentran la dualidad de la temperatura en el modelo de Ising 2D descubierto por Kramers y Wannier y la dualidad entre fermiones y bosones (bosonización) en modelos 2D descubierta por Luther y Preschel la cual se relaciona con el intercambio de acoplamientos fuertes y débiles.

Así mismo en teoría de cuerdas existe la dualidad S que se relaciona con el acoplamiento fuerte y débil, la dualidad U, la dualidad T, la simetría espejo entre otras.

La dualidad en la que nos concentraremos en este trabajo es la dualidad T en teoría de cuerdas, la cual relaciona los targets de distintas teorías, por lo que ha ayudado a comprender mejor lo que es conocido como "simetría espejo", que es una simetría que existe en teorías de cuerdas cuyos target son variedades Calabi-Yau. En [1] se muestra la relación entre la dualidad T y la simetría espejo para casos específicos, concluyendo que la simetría espejo puede formularse como una dualidad entre dos teorías cuánticas de campos. Por otro lado en [10] Polchinski hace mención del gran descubrimiento que ha sido la dualidad T y comenta sus consecuencias que en 1995 causaron una revolución en la teoría de cuerdas, a su vez analiza las preguntas abiertas que emergieron a partir de esta. Para realizar este análisis considera distintos casos y brinda una opinión sobre cada uno, entre estos casos se encuentra la cuerda heterótica en un toro, la dualidad S heterótica en $d = 4$ y sus duales.

2.2. Dualidad T Abeliana

La dualidad T de una teoría de cuerdas es una dualidad de la hoja de mundo de la cuerda, esta fue propuesta primeramente por Kikkawa y Yamasaki [11], quienes consideraron una teoría de cuerdas compactificada en un círculo. Bajo esta consideración existen sólo dos tipos de excitación; las cuerdas con momento en la dirección compacta y las cuerdas que se ”enredan” alrededor de la dirección compacta. Se percataron entonces de que al invertir el radio de la circunferencia ($R \rightarrow \frac{1}{R}$) se obtiene una teoría equivalente en la que se intercambian los modos de momento y de enredamiento de la cuerda. Este procedimiento puede ser encontrado en [11, 12, 13, 4] y la forma más sencilla de desarrollarlo consiste en considerar la teoría de cuerdas bosónica con una de sus 25 direcciones espaciales compactificada en un círculo de radio R, por lo que las condiciones de borde estarán dadas por

$$X^{25}(\sigma, \tau) = X^{25}(\sigma, \tau) + 2\pi RW, \tag{2.1}$$

donde $X(\sigma, \tau)$ define las coordenadas de la cuerda, R es el radio de la circunferencia y W es el número de ”enredamiento” de la cuerda, esto es el número de veces que la cuerda da ”vueltas” a la circunferencia y debe ser un número entero.

Puesto que hay una dimensión compactificada, el eigenvalor del momento en esta dirección esta cuantizado y su valor es $p^{25} = \frac{K}{R}$ con K el número de excitación Kaluza-Klein. En esta teoría podemos expandir las coordenadas en modos izquierdos y derechos en términos de los cero modos (oscilador armónico), con esto puede obtenerse la condición de level matching

$$N_D - N_I = WK, \tag{2.2}$$

donde los subíndices D, I hacen referencia a los modos derechos e izquierdos. Así mismo se puede obtener la fórmula de masa

$$\alpha' M^2 = \alpha' \left[\left(\frac{K}{R} \right)^2 + \left(\frac{WR}{\alpha'} \right)^2 \right] + 2N_L + 2N_R - 4. \tag{2.3}$$

Es sencillo ver que estas dos ecuaciones son invariantes bajo los intercambios

$$R \to \overline{R} = \frac{\alpha'}{R}; \quad W \iff K, \tag{2.4}$$

la equivalencia de ambas teorías bajo estos intercambios es conocida como dualidad T. Sin embargo este intercambio afecta a toda la coordenada no solo a los modos cero, teniendo como consecuencia que las coordenadas tras hacer la dualidad se mapeen como

$$X(\sigma, \tau) = X_L(\sigma + \tau) + X_R(\sigma - \tau) \to \overline{X}(\sigma, \tau) = X_L(\sigma + \tau) - X_R(\sigma - \tau). \tag{2.5}$$

También es posible visualizar esta dualidad al obtener el tensor de estres de la teoría, el cual describe el movimiento de la cuerda sobre la circunferencia.

Otra manera práctica de entender la dualidad T es considerando un sistema con una simetría global U(1), esta puede ser promovida a una simetría local al introducir campos de norma (normar la simetría) y agregando multiplicadores de Lagrange en el Lagrangiano que fuercen que la conexión sea plana. Con estos elementos es posible obtener un Lagrangiano general a través del cual podemos obtener el modelo dual. Esto es posible para casos Abelianos y el procedimiento resulta ventajoso, pues puede ser generalizado directamente a modelos no-Abelianos.

Por otro lado puede ser estudiado un caso más general que involucra la compactificación en un producto de circunferencias cuyo resultado, como se ve en [11] es una dualidad para cada circunferencia. Igualmente se muestra que la dualidad T es una transformación de norma mejorada, sabiendo que una transformación de norma se implementa a través de un automorfismo de la hoja de mundo se puede relacionar la dualidad T con los automorfismos. Finalmente se muestra que es posible desarrollar dualidad T Abeliana en una teoría sin isometrías.

La misma generalización es hecha en [7], pero en este caso se expresa en términos del espacio modular

$$
\begin{aligned}
T &= B + i\sqrt{G}, \\
U &= \frac{G_{12}}{G_{22}} + i\frac{\sqrt{G}}{G_{22}},
\end{aligned}
\tag{2.6}
$$

donde U es el parámetro modular y T es la estructura Kähler modular, esto puede verse más a fondo en [14]. Entonces, utilizando la fórmula de masa se pueden identificar las siguientes simetrías

$$
U \rightarrow \frac{aU+b}{cU+d}, \quad T \rightarrow \frac{aT+b}{cT+d}, \quad T \iff U, \tag{2.7}
$$

donde se asocia la primer transformación como simetría modular, la segunda es la llamada dualidad T, que para el caso particular de la compactificación en una circunferencia se reduce al resultado previamente visto y finalmente la tercera es la llamada simetría espejo que intercambia la estructura modular compleja con la estructura modular Kähler.

Igualmente puede verse que la dualidad T puede ser empleada en casos más específicos, por ejemplo un agujero negro sin carga, en el cual para el caso 3D se puede considerar su geometría como la de una "cuerda negra" y la dualidad T puede ser empleada para evaluar el punto singular del agujero negro, puesto que al hacer la dualidad T la singularidad del modelo original se mapea a una superficie regular, lo que facilita el estudio del punto singular.

Por otro lado podemos ver la dualidad T desde el punto de vista de la hoja de mundo, para esto consideramos el algoritmo general para realizar dualidad, el cual consiste en que, si hay una simetría global en la teoría, esta puede ser normada y se impone un término extra con multiplicadores de Lagrange, el cual ayuda a que la intensidad de campo F de los campos de norma se elimine. Por tanto, al hacer esto en la acción de la hoja de mundo, tendremos

$$
S = \int \left(\frac{1}{2} V^{\alpha} V_{\alpha} - \epsilon^{\alpha\beta} X \partial_{\beta} V_{\alpha} \right) d^2\sigma, \tag{2.8}
$$

donde, al variar X tendremos la condición

$$\epsilon^{\alpha\beta}\partial_\beta V_\alpha = 0 \Rightarrow V_\alpha = \partial_\alpha \overline{X}, \tag{2.9}$$

por lo que la acción es

$$S = \int \left(\frac{1}{2}\partial^\alpha \overline{X} \partial_\alpha \overline{X} - \epsilon^{\alpha\beta}\partial_\beta \partial_\alpha \overline{X} \right) d^2\sigma. \tag{2.10}$$

Como $\partial_\beta \partial_\alpha \overline{X} = 0$, tendremos que la acción se reduce a

$$S = \int \left(\frac{1}{2}\partial^\alpha \overline{X} \partial_\alpha \overline{X} \right) d^2\sigma, \tag{2.11}$$

que es la acción original de la hoja de mundo.
Por otro lado variando V_α en lugar de X en (2.8), obtenemos la condición

$$V_\alpha = -\epsilon_\alpha^{'\beta}\partial_\beta(X) \tag{2.12}$$

y al sustituir esto en (2.8), tendremos que la acción es

$$S = \int \left(\frac{1}{2}\partial_\beta(X)\partial^\beta(X) \right) d^2\sigma. \tag{2.13}$$

Este es el algoritmo de dualidad T, el cual nos permite encontrar la acción de la teoría dual.
Cabe mencionar que si la coordenada asociada a la isometría Abeliana es periódica, su dual define la misma teoría de campos conforme. Al no ser periódica no se puede establecer nada y como se mencionó previamente, la dualidad T es un remanente de una simetría de norma.
Finalmente debido a que la bosonización es un tipo de dualidad, en [15, 7] se muestra que en particular, la bosonización es una dualidad T. Esto se hace partiendo de la acción de Dirac para un fermión libre en 2D, se define la función de partición y se emplea el algoritmo de dualidad T, obteniendo como resultado el Lagrangiano bosónico, lo cual resulta en una equivalencia entre bosones y fermiones.

2.3. Dualidad T No-Abeliana

Lo mencionado previamente hace referencia únicamente al caso de dualidad T Abeliana, el cual es el caso más sencillo. Cuando la teoría admite isometrías no-Abelianas la situación cambia, hay distintos trabajos [5, 16, 17, 18, 19] que abordan esta problemática. Para realizar dualidad T no-Abeliana se considera un modelo sigma con un espacio target cuya métrica tiene un grupo G de isometrías no-Abelianas. La idea es la siguiente, al identificar la simetría global buscamos normarla y añadimos los términos con multiplicadores de Lagrange en el Lagrangiano con lo que obtenemos el Lagrangiano general, entonces podemos integrar las coordenadas correspondientes para obtener el modelo original o el modelo dual.

En [7, 17] se consideran ejemplos de dualidad Abeliana y se contrastan con ejemplos de dualidad no-Abeliana sobre los mismos modelos, en particular se destaca el caso de un agujero negro, donde es posible hacer dualidad no-Abeliana sin el uso de isometrías, lo que permite inferir que no es necesario que exista una simetría global para realizar la dualización, esta cuestión se aborda en dualidad T Poisson-Lie.

Una característica de la dualidad no-Abeliana es que si el grupo no-Abeliano G es no compacto, puede haber una anomalía que evite que la teoría dual sea conforme. También se ha demostrado que la dualidad no-Abeliana puede realizarse como una transformación canónica [20].

Hay dos maneras de hacer una generalización de la dualidad no-Abeliana, por una parte se puede lograr definiendo un modelo sigma invariante bajo un grupo no-Abeliano, en este caso se sigue el mismo procedimiento que el de la dualidad Abeliana y las complicaciones son solamente técnicas. Por otro lado se pueden considerar tensores antisimétricos de alto rango como campos de norma no-Abelianos. En este trabajo utilizamos la primera de estas generalizaciones.

Una manera interesante de obtener una teoría dual es a través de la llamada dualidad T Poisson-Lie [7], esta consiste en considerar un modelo sigma invariante bajo la acción de algún grupo G, por lo que tendrá una corriente de Noether asociada. Si esta corriente no es conservada pero satisface una ecuación específica, se dice que la teoría tiene simetría de Poisson- Lie con respecto a un grupo $\tilde{G}$. Para la dualidad Poisson-Lie es necesario el concepto de doblete Drinfield, el cual es cualquier grupo de Lie D tal que su álgebra de Lie $\mathbf{D}$ puede descomponerse en un par de subálgebras maximalmente isotrópicas con respecto a una forma bilinear no degenerada en **D** [19]. Los dobletes Drinfield permiten expresar el álgebra como al suma de otras dos, las cuales pueden corresponder al álgebra de la teoría original y su dual, por lo que es posible generalizar el procedimiento de dualidad al normar la simetría de Poisson-Lie en lugar de la simetría global. La propuesta surge de la posibilidad de que para un modelo sigma con una isometría global no-Abeliana respecto a un grupo G, se puede encontrar un modelo dual ausente de isometría, por lo que en principio no sería posible encontrar el modelo original nuevamente [18] si la dualidad T dependiera completamente de la isometría.

Hay dobletes Abelianos que corresponden a la dualidad T Abeliana, así como dobletes semi Abelianos que corresponden a la dualidad T no-Abeliana entre un modelo con isometría y otro sin isometría y, finalmente hay dobletes no-Abelianos que corresponden a la dualidad T Poisson-Lie entre modelos sin isometría.

Capítulo 3

Modelos Sigma Lineales normados

En este capítulo se comentan los modelos sigma lineales normados, introducidos primeramente por Witten. Se enfatiza su funcionalidad, su estructura y se explica el proceso de reducción dimensional.

3.1. Necesidad de los Modelos Sigma Lineales Normados

Los Modelos Sigma Lineales Normados (GLSM por sus siglas en inglés) fueron primeramente introducidos por E. Witten en [21], artículo en el cual se estudian las "transiciones de fase"que ocurren al variar los parámetros de las teorías de norma. El motivo de introducir estos GLSM es debido a que a principios de 1995 la comunidad científica había notado una relación entre el espectro de hipersuperficies Calabi-Yau en espacios proyectivos pesados y el espectro de modelos Landau-Ginzburg. Lo inquietante es que ambas teorías previamente mencionadas son distintas, por lo que no se encontraba alguna respuesta a tal "equivalencia". En su artículo, Witten considera una teoría de norma renormalizable construída con multipletes vectoriales y multipletes quirales cargados. En específico, considera una teoría con supersimetría $N = 2$ en dos dimensiones, la cual puede ser obtenida como una reducción dimensional de una teoría con supersimetría $N = 1$ en cuatro dimensiones espacio temporales. Esta reducción dimensional se discutirá más a fondo posteriormente.
Así, considerando el caso más simple con un grupo de norma $G = U(1)$ (por tanto un solo supercampo vectorial V) y teniendo d supercampos quirales Φ_i como n campos S_i de carga 1 y un campo P de carga $-n$ se asegura la condición para la cancelación de la anomalía y la invariancia R que demanda el superpotencial W (el que cumpla esto lo hace cuasihomogéneo de segundo grado) para ser una función invariante de norma que con algunas constricciones define una hipersuperficie suave $X \in CP^{n-1}$ y se encuentra el

potencial bosónico dado por

$$U = |W(s_i)|^2 + |p|^2 \sum_i \left| \frac{\partial W}{\partial s_i} \right|^2 + \frac{1}{2e^2} D^2 + 2|\sigma|^2 \left(\sum_i |s_i|^2 + n^2 |p|^2 \right), \tag{3.1}$$

donde W es un polinomio homogéneo de grado n, s_i y p denotan los campos bosónicos en supermultipletes de S_i y P respectivamente y

$$D = -e^2 \left(\sum_i \bar{s}_i s_i - n\bar{p}p - r \right), \tag{3.2}$$

donde r es el parámetro Fayet-Iliopoulous que surge del grupo de norma $U(1)$ y e es la constante de acoplamiento de norma. Así, al explorar los límites del término de Fayet-Iliopoulous ($r \ll 0$, $r \gg 0$) en el potencial de los campos escalares dinámicos y tras un análisis (haciendo distintas consideraciones para cada uno de los valores dados al término de Fayet-Ilioupoulous), se pueden encontrar distintos vacíos dependiendo de los valores que se le den a los distintos parámetros. Se concluyó que esta construcción sugiere que, más que una "equivalencia" entre los modelos Landau-Ginzburg y Calabi-Yau ambos modelos son dos "fases" distintas de un mismo sistema, (donde se usa la palabra fase puesto se relaciona al cambio de fase que suele ser visto en termodinámica) en el cual el cambio se dá al variar el término de Fayet-Iliopoulous.

De esta manera, al analizar la singularidad en $r = 0$ (que depende del hecho de que la acción de la hoja de mundo es de volumen finito), es posible extraer algunas conclusiones sobre la relación entre los modelos, de este análisis se concluye que hay una familia de teorías de campos conformes que se interpolan desde el modelo Landau-Ginzburg al Calabi-Yau. Este resultado es invariante ante un cambio en la topología (simetría espejo).

3.1.1. Estructura

Para definir un GLSM se necesita tener

- Un grupo de norma (G) el cual puede ser abeliano o no-Abeliano (el caso de grupos no-Abelianos sigue en investigación actualmente).
- Un espacio vectorial complejo (V) (como se definió previamente)

- Una representación de materia $(\rho_\eta) : G \to GL(V)$ (esta impone una restricción que puede ser la condición para variedades Calabi-Yau)

- Simetría R $U(1)_R$

- Un toro maximal de G $T \subset G$

- Parámetros Fayet Iliopoulous r^a los cuales vienen de la estructura de la supersimetría

- Componentes escalares del multiplete vectorial σ

3.2. Teorías $N = 2$ en dos dimensiones

Uno puede estudiar teorías de norma supersimétricas desde el punto de vista de teoría de cuerdas al identificar la simetría de norma como una geometría singular de la compactificación de la cuerda [22, 3, 23]. Lo cual es útil debido a que permite hacer predicciones en los efectos dinámicos dentro del régimen de acoplamiento fuerte. Esto resulta ventajoso debido a que es más sencillo trabajar con las herramientas de la teoría de cuerdas.
Por ejemplo en [24] S. Kachru y C. Vafa estudian el vacío supersimétrico de compactificaciones de cuerdas heteróticas en $N = 2$ y las relacionan con compactificaciones Calabi-Yau de tipo II , lo cual confirma la conexión entre el espacio moduli de cuerdas heteróticas y la geometría de la variedad Calabi-Yau. Igualmente en [25] donde se construyen configuraciones de branas Tipo IIA para estudiar modelos sigma no-lineales con espacios target CP^{n-1} o variedades Grassmanianas, una vez hecha y estudiada la configuración se pueden identificar efectos ya conocidos como la dualidad "level-rank".
Uno de los primeros trabajos en crear una configuración de branas para una teoría supersimétrica fue publicado por E. Witten y A. Hannany [26], en este a diferencia del artículo mencionado previamente, se construye una configuración de branas Tipo IIB con el cual se puede dar una explicación a la correspondencia entre la rama de Coulomb de cierta teoría de norma supersimétrica tres dimensional y cierto espacio modular de monopolos magnéticos así como a la simetría espejo.

$$
\begin{array}{cccc}
U(1)_A & & & \\
+1 & Q_R & \overline{Q_L} & \\
\text{-1} & Q_L & \overline{Q_R} & \\
 & \text{-1} & +1 & U(1)_V
\end{array}
$$

3.2.1. Reducción dimensional

Trabajaremos con supersimetría $N = 2$ en dos dimensiones, la cual se obtiene de una reducción dimensional de una supersimetría $N = 1$ en 4 dimensiones por lo que, al ser obtenida por reducción dimensional no tendrá anomalías. Se sabe que el álgebra supersimétrica $N = 1$ en 4 dimensiones tiene cuatro supercargas que transforman como espinores de Majorana bajo el grupo de Lorentz en cuatro dimensiones, esta álgebra contiene además una simetría R $U(1)$ bajo la cual las supercargas de la derecha tienen carga $+1$ y las de la izquierda tienen carga -1.
Por tanto, si hacemos reducción dimensional, la cual consiste en eliminar la dependencia de los campos en dos coordenadas, así al elegir las coordenadas $x^{2,3}$, tendremos que:

- El grupo de Lorentz cuatro dimensional es roto a un grupo de Lorentz dos dimensional y el grupo de simetría interna $U(1)_A$, el cual está asociado con las rotaciones en las direcciones $x^{2,3}$

- Los espinores cuatro dimensionales izquierdos (derechos) ahora serán espinores de Dirac dos dimensionales y tendrán bajo $U(1)_A$ una carga opuesta $\mp 1(\pm 1)$

- Tendremos cuatro supercargas $Q_{L,R}$, $\overline{Q_{L,R}}$ donde L, R denota la quiralidad dos dimensional y la barra indica la quiralidad cuatro dimensional. Las supercargas satisfacen $(Q_L)^\dagger = \overline{Q_L}$ and $(Q_R)^\dagger = \overline{Q_R}$ y obedecen las siguientes relaciones de conmutación

$$
\begin{aligned}
Q_L, \overline{Q_L} = 2(H + P), \quad Q_R, \overline{Q_R} = 2(H - P); \\
Q_L^2 = Q_R^2 = \overline{Q_L}^2 = \overline{Q_R}^2 = 0,
\end{aligned} \tag{3.3}
$$

  donde H y P son los operadores Hamiltoniano y de momento.

- La simetría R $U(1)$ en cuatro dimensiones pasará a ser una simetría interna, la cual denotaremos por $U(1)_V$.

La manera en la cual la simetrías $U(1)_A$ y $U(1)_V$ actúan en la supercargas está dada por

Representaciones

Las representaciones del álgebra supersimétrica $N = 1$ cuatro dimensional básicas son: multipletes anti-quirales y multipletes vectoriales los cuales tras hacer la reducción dimensional pasan a la representación del álgebra supersimétrica $N = 2$ como:

- Multiplete quiral: Está compuesto de un campo escalar ϕ y un fermión de Dirac $\psi_{L,R}$. El mutiplete quiral en el superespacio $N = 2$ dos dimensional está representado como un supercampo quiral Φ el cual obedece

$$\overline{\mathrm{D}}_L\Phi = \overline{\mathrm{D}}_R\Phi = 0. \tag{3.4}$$

- Multiplete Vectorial: Está compuesto por un campo vectorial A_μ, fermiones de Dirac $\lambda_{L,R}$, $\overline{\lambda}_{L,R}$ y un escalar complejo σ. El multiplete vectorial en el superespacio $N = 2$ dos dimensional es interpretado como un supercampo vectorial V que satisface

$$V^\dagger = V. \tag{3.5}$$

De igual manera, podemos definir una intensidad de campo como $\Sigma = \{\overline{D}_L, D_R\}/2$ donde $D_\alpha = e^{-V}\mathrm{D}_\alpha e^V$ y $\overline{D}_\alpha = e^V\overline{\mathrm{D}}_\alpha e^{-V}$. Este es un supercampo quiral torcido (twisted quiral) ya que satisface (4.3) y su mínima componente es un campo escalar complejo.
Para construir el Lagrangiano de nuestro modelo supersimétrico, tendremos tres tipos de acoplamientos supersimétricos:
El primero es el término D, que en nuestro caso podrá estar relacionado con un término de norma o un término de materia cinética. Este término es invariante bajo las simetrías $U(1)_V$ y $U(1)_A$ y está dado por

$$\int d^4\theta K(\Phi, \overline{\Phi}), \tag{3.6}$$

donde la integración es sobre las coordenadas de Grassman y K es alguna combinación real de supercampos Φ y $\overline{\Phi}$.
El segundo es el término F que está dado por

$$\int d^2\theta W + h.c, \tag{3.7}$$

donde W es una función holomórfica de supercampos quirales llamada superpotencial. Este término es siempre invariante bajo $U(1)_A$ pero es invariante bajo $U(1)_V$ únicamente si W es cuasihomogéneo de grado 2 con respecto a $U(1)_V$.
Por último, puede haber un término F torcido, dado por

$$\int d^2\tilde{\theta}\widetilde{W} + h.c, \tag{3.8}$$

donde $\widetilde{W}$ es una combinación holomórfica de supercampos quirales torcidos llamado superpotencial torcido. Este término es siempre invariante bajo $U(1)_V$ pero bajo $U(1)_A$ es invariante únicamente si $\widetilde{W}$ es cuasihomogéneo de grado dos respecto a $U(1)_A$.

Como se comentó previamente, tenemos un GLSM si consideramos teorías de norma $N = 2$ en dos dimensiones con n_1 multipletes quirales Q^i en la representación fundamental K y n_2 multipletes quirales $\widetilde{Q}_{\tilde{j}}$ en la representación antifundamental.
Entonces el Lagrangiano estará dado por tres distintos tipos de acoplamientos supersimétricos.
El término cinético (término D) estará dado por

$$L_{cin} = \int d^4\theta \left(\sum_{i=1}^{n} \overline{\Phi}_i e^{2Q_iV_0 + 2\hat{Q}_iV_i}\Phi_i - \frac{1}{2e^2}Tr(\overline{\Sigma_0}\Sigma_0) \right), \tag{3.9}$$

donde es necesario introducir el término de Fayet Iliopoulous, este es descrito por un término F torcido con $\widetilde{W} = \frac{i\tau}{4}Tr\Sigma$ (el cual es un superpotencial torcido cuasihomogéneo de grado dos), por lo que tendremos

$$L_{FI} = -\frac{1}{2}\int d^2\tilde{\theta} t Tr(\Sigma_0) - \frac{1}{2}\int d^2\theta \bar{t} Tr(\overline{\Sigma_0}). \tag{3.10}$$

Este término no rompe la supersimetría $U(1)_A$.
También podemos considerar términos de masa dados por

$$L_m = \sum_{i,\tilde{j}} \int d^2\theta m_i^{\tilde{j}} \tilde{Q}_{\tilde{j}} Q^i + h.c \tag{3.11}$$

E igualmente hay otro término el cual es obtenido al normar la simetría de sabor $U(n_1) \times U(n_2)$ para ciertos valores en el vacío de la componente escalar del supercampo vectorial y haciendo que los campos se eliminen. Este término estará dado por

$$L_{mc} = \int d^4\theta \left(\overline{\Phi_1} e^{2V_1} \Phi_1 + \Phi_2 e^{-2V_2} \overline{\Phi}_2 \right) . \tag{3.12}$$

Considerando un sistema clásico tendremos una simetría global dada por $SU(n_1) \times SU(n_2) \times U(1)_a \times U(1)_A \times U(1)_V$ donde los primeros dos términos están relacionados con la simetría quiral y los últimos tres términos están relacionados con las simetrías R internas.

Si consideramos una teoría cuántica tendremos dos correcciones. La primera será que tendremos una anomalía en $U(1)_A$ (en una teoría cuántica de campos dos dimensional una simetría continua no puede ser rota espontáneamente a nivel árbol).

Sin embargo en este trabajo no consideraremos simetría de sabor así que este término extra no será considerado. A nivel árbol el grupo de simetría global es $SU(n_1) \times SU(n_2) \times U(1)_a \times U(1)_A \times U(1)_V$, al considerar términos de masa algunas de las simetrías son rotas.

Capítulo 4

Dualidad T para GLSM sin superpotencial

En esta sección se muestran los cálculos de como realizar la dualidad T Abeliana y no-Abeliana en GLSM. Para esto se siguió el mismo procedimiento que en [2].

4.1. Modelo

Consideraremos en este caso la reducción dimensional de una teoría de norma 4D supersimétrica $N = 1$ a una 2D la cual es una teoría supersimétrica $N = 2$ que, como se mencionó previamente tendrá dos generadores supersimétricos a la izquierda Q_- ,$\overline{Q_-}$ y dos a la derecha Q_+, $\overline{Q_+}$ en 2D y los cuales vienen directamente de los generadores supersimétricos en 4D.

Las derivadas covariantes son relevantes debido a que dan restricciones sobre supercampos genéricos que llevan a las representaciones supersimétricas. Al considerar la reducción, las derivadas covariantes tendrán solo dos coordenadas relevantes dependiendo de cuales hayan sido eliminadas tras la reducción, debido a que estas coordenadas serán independientes.

Por tanto, la introducción de la derivada covariante permite definir lo que son los campos quirales, anti-quirales, los campos quirales torcidos y anti-quirales torcidos. Estos últimos son representaciones supersimétricas que sólo ocurren en 2 dimensiones.

Una transformación no-Abeliana para un supercampo quiral Φ en la representación fundamental de un grupo no-Abeliano está dada por:

$$\Phi' = e^{i\lambda}\Phi, \quad \lambda = \lambda^A T_A, \quad \overline{D}_{\dot\alpha}\lambda = 0, \tag{4.1}$$

donde λ genera la transformación, T_A son los generadores del grupo, λ^A son los parámetros de la transformación y dependen de las coordenadas del superespacio. Vemos que λ satisface las condiciones de un supercampo quiral y se asegura así mismo que Φ' transforme como un supercampo quiral. Sencillamente se puede obtener un resultado análogo para la transformación de supercampos anti-quirales $\overline{\Phi'}$.

Para transformaciones locales la teoría tiene un multiplete real de supercampos vectoriales valuados en el álgebra de Lie $V = V^A T_A$ que transforman bajo transformaciones de norma λ y $\overline{\lambda}$ como

$$e^{V'} = e^{i\overline{\lambda}} e^V e^{-i\lambda}. \tag{4.2}$$

También hay derivadas covariantes respecto a las transformaciones λ (representación quiral de norma) y $\overline{\lambda}$ (representación anti-quiral de norma). Podemos considerar entonces dos conjuntos de derivadas covariantes $\overline{D}_{\dot{\alpha}} = \overline{D}_{\dot{\alpha}}, \quad D_\alpha = e^{-V} D_\alpha e^V$ para λ y $D'_\alpha = D_\alpha, \quad \overline{D'}_{\dot{\alpha}} = e^V \overline{D}_{\dot{\alpha}} e^{-V}$ para $\overline{\lambda}$. Estos conjuntos de derivadas covariantes, nos permiten definir una intensidad de campo invariante de norma como un supercampo quiral torcido para la teoría 2D como

$$\Sigma = \frac{1}{2}\{\overline{D}_+, D_-\}, \quad D_+\Sigma = \overline{D}_-\Sigma = 0, \tag{4.3}$$

donde las D_α y $\overline{D_{\dot{\alpha}}}$ son derivadas covariantes de norma. La transformación de norma de la intensidad de campo está dada por $\Sigma \to e^{i\lambda}\Sigma e^{-i\lambda}$.

Podemos reescribir la intensidad de campo como

$$\begin{aligned} \Sigma &= \frac{1}{2}(\overline{D}_+ e^{-V} D_- e^V + e^{-V}\overline{D}_+ D_- e^V), \\ \overline{\Sigma} &= \frac{1}{2}(D_+ e^V \overline{D}_- e^{-V} + e^V D_+ \overline{D}_- e^{-V}). \end{aligned} \tag{4.4}$$

Para un grupo de norma Abeliano, tendremos que

$$\Sigma_0 = \frac{1}{2}\overline{D}_+ D_- V_0, \quad \overline{\Sigma}_0 = \frac{1}{2}\overline{D}_- D_+ V_0, \tag{4.5}$$

donde el subíndice 0 hace referencia a que representa el grupo de norma original ($U(1)$) del GLSM, por otro lado , los términos que no tengan el subíndice, representan la simetría global normada.

Posteriormente serán de utilidad las expansiones de los supercampos (anti) quirales torcidos y de la intensidad de campo torcido de un campo vectorial Abeliano, estos fueron obtenidos de [27]

$$\begin{aligned}
X_i &= x_i + \sqrt{2}\theta^+\overline{\chi}_+ + \sqrt{2}\overline{\theta}^-\chi_- + 2\theta^+\overline{\theta}^-G_i + \cdots,\\
\overline{X_i} &= \overline{x_i} + \sqrt{2}\chi_+\overline{\theta}^+ + \sqrt{2}\overline{\chi}_-\theta^- + 2\theta^-\overline{\theta}^+\overline{G_i} + \cdots,\\
\Sigma_0 &= \sigma_0 + i\sqrt{2}\theta^+\overline{\xi}_+ - i\sqrt{2}\overline{\theta}^-\xi_- + 2\theta^+\overline{\theta}^-(D - iv_{03}) + \cdots,\\
\overline{\Sigma_0} &= \overline{\sigma_0} + i\sqrt{2}\xi_+\overline{\theta}^+ - i\sqrt{2}\overline{\xi}_-\theta^- + 2\theta^-\overline{\theta}^+(D + iv_{03}) + \cdots,
\end{aligned} \tag{4.6}$$

donde x_i es un campo escalar, $(\overline{\chi}_+, \chi_-)$, $(\overline{\xi}_+, \xi_-)$ son fermiones de spin $\frac{1}{2}$, G_i, D son campos auxiliares, σ_0 es un escalar, v_{03} es la intensidad de campo de norma 2D y los términos extras representan derivadas de los campos que contribuyen a los términos cinéticos del Lagrangiano.

4.1.1. T dualidad Abeliana para GLSM sin Superpotencial

A continuación se desarrolla la dualidad T para el caso más simple de un GLSM supersimétrico. Para esto se seguirá el algoritmo de dualidad comentado previamente. Considerando un GLSM supersimétrico $(2,2)$ en 2D con grupo de norma $U(1)$ y n supercampos quirales cargados Φ_i (con cargas Q_i), el Lagrangiano sin término de superpotencial estará dado por

$$L_0 = \int d^4\theta \left(\sum_{i=1}^{n} \overline{\Phi}_i e^{2Q_iV_0}\Phi_i - \frac{1}{2e^2}\overline{\Sigma_0}\Sigma_0 \right) - \frac{1}{2}\int d^2\tilde{\theta} t\Sigma_0 - \frac{1}{2}\int d^2\theta\bar{t}\overline{\Sigma_0}, \tag{4.7}$$

donde e es la constante de acoplamiento de norma, $t = r - i\theta$ con r el parámetro de Fayet Iliopoulous y θ el ángulo. Previamente se comentaron las simetrías de este tipo de teorías. La anomalía quiral de la simetría $U(1)_A$ puede ser cancelada usando la relación de carga $\sum_i Q_i = 0$.

La teoría tiene otras simetrías globales las cuales son por lo menos $(N-1)$ simetrías $U(1)$, estas son las rotaciones de fase de los N supercampos con transformaciones de norma modulo $U(1)$, por lo que cada supercampo quiral cargado Φ_i puede ser dualizado utilizando las simetrías de rotación de fase.

Entonces, consideramos el caso más sencillo que consiste de un GLSM supersimétrico $(2,2)$ en 2D con un grupo de norma Abeliano $U(1)$ y dos supercampos quirales con cargas Q_0 y Q_{02}. Por tanto, tendremos una simetría global $U(1)$ dada por las rotaciones de fase de Φ_1 y Φ_2.

Fijamos la norma para remover la transformación de fase de Φ_2, para después implementar la dualidad T normando la rotación de fase del campo Φ_1 por lo que los campos bajo la simetría global transformarán como

$$\Phi_1 \to e^{i\alpha}\Phi_1, \quad \Phi_2 \to \Phi_2. \tag{4.8}$$

Ahora, promoviendo la simetría global a una simetría local introduciendo el supercampo vectorial V y los multiplicadores de Lagrange Ψ y $\overline{\Psi}$, tendremos el Lagrangiano general

$$\begin{aligned} L_g = -\int d^4\theta \Big[& \overline{\Phi}_1 e^{2QV_0+2QV}\Phi_1 + \overline{\Phi_2}e^{2Q_{02}V_0}\Phi_2 - \frac{1}{2e^2}\overline{\Sigma_0}\Sigma_0 \\ & +\Sigma\Psi + \overline{\Sigma\Psi}\Big] - \frac{1}{2}\int d^2\tilde{\theta}t\Sigma_0 - \frac{1}{2}\int d^2\theta\bar{t}\overline{\Sigma_0}, \end{aligned} \tag{4.9}$$

donde todas las componentes con subíndice 0 hacen referencia a la simetría global $U(1)$ y las que no lo tienen hacen referencia la simetría normada.

A partir de este Lagrangiano general podemos encontrar las ecuaciones de movimiento para los multiplicadores de Lagrange, al hacerlo obtenemos que $\Sigma = 0$ y $\overline{\Sigma}_0 = 0$, lo cual nos lleva al Lagrangiano para la teoría original tras una fijación de norma.

Por otro lado, al encontrar las ecuaciones de movimiento para el supercampo vectorial V, con $\frac{\delta L}{\delta V} = 0$ y usando las formas previamente vistas para $\Sigma, \overline{\Sigma}$, llegaremos a que

$$\overline{\Phi}_1 e^{2QV_0+2QV}\Phi_1 = \frac{\Lambda + \overline{\Lambda}}{2Q}, \tag{4.10}$$

donde $\Lambda = \frac{1}{2}\overline{D}_+D_-\Psi$ y $\overline{\Lambda} = \frac{1}{2}\overline{D_-}D_+\overline{\Psi}$ por lo que podemos ver que $\overline{\Lambda}$ y Λ son supercampos anti-quirales torcidos. De igual manera podemos despejar el supercampo vectorial, obteniendo de esta manera

$$V = \frac{1}{2Q}\ln\left(\frac{\Lambda + \overline{\Lambda}}{2Q}\right) - \frac{1}{2Q}\ln(\overline{\Phi}_1 e^{2QV_0}\Phi_1). \tag{4.11}$$

Por lo que, tras incorporar todo esto en el Lagrangiano general, obtenemos lo que llamamos el Lagrangiano dual

$$
\begin{aligned}
L_d = \int d^4\theta \Big\{ \frac{\Lambda + \overline{\Lambda}}{2Q} + \frac{1}{2}\Psi\overline{D_+}D_-\Big[\frac{1}{2}\ln\Big(\frac{\Lambda+\overline{\Lambda}}{2Q}\Big) - \frac{1}{2Q}\ln(\overline{\Phi}_1 e^{2QV_0}\Phi_1)\Big] \\
+\frac{1}{2}\overline{\Psi D_-}D_+\Big[\frac{1}{2}\ln\Big(\frac{\Lambda+\overline{\Lambda}}{2Q}\Big) - \frac{1}{2Q}\ln(\overline{\Phi}_1 e^{2QV_0}\Phi_1)\Big]\overline{\Phi_2}e^{2Q_{02}V_0}\Phi_2 - \frac{1}{2e^2}\overline{\Sigma_0}\Sigma_0\Big\} \\
-\frac{1}{2}\int d^2\tilde{\theta}t\Sigma_0 - \frac{1}{2}\int d^2\theta\overline{t}\overline{\Sigma_0}.
\end{aligned}
\tag{4.12}
$$

Ahora, podemos simplificar algunos términos usando integración por partes, obtenemos que

$$
\begin{aligned}
L_d = \int d^4\theta\Big\{-\frac{\Lambda+\overline{\Lambda}}{2Q}\ln\Big(\frac{\Lambda+\overline{\Lambda}}{Q}\Big) - \frac{\Lambda+\overline{\Lambda}}{2Q}\ln(\overline{\Phi_1}e^{2QV_0}\Phi_1) + \overline{\Phi_2}e^{2Q_{02}V_0}\Phi_2 \\
-\frac{1}{2e^2}\overline{\Sigma_0}\Sigma_0\Big\} - \frac{1}{2}\int d^2\tilde{\theta}t\Sigma_0 - \frac{1}{2}\int d^2\theta\overline{t}\overline{\Sigma_0},
\end{aligned}
\tag{4.13}
$$

también podemos simplificar estos términos debido a la forma de Λ y $\overline{\Lambda}$, la cual nos permite reducir las integrales y acoplar los términos con los correspondientes al término Fayet Iliopoulous, para esto vemos que

$$
-\int d^4\theta\frac{\Lambda+\overline{\Lambda}}{2Q}\ln(\overline{\Phi_1}e^{2QV_0}\Phi_1) = -\int d^4\theta\frac{\Lambda+\overline{\Lambda}}{2Q}\Big[\ln(|\Phi_1|^2) - \ln(e^{2QV_0})\Big]. \tag{4.14}
$$

El primer término del lado derecho de la ecuación se elimina debido a la propia definición de los supercampos quirales por lo que

$$
\int d^4\theta\frac{\Lambda}{2Q}\ln(\overline{\Phi_1}\Phi_1) = \frac{1}{4}\int d\theta^+ d\overline{\theta}^-\frac{\Lambda}{2Q}\overline{D}_+D_-\ln(\overline{\Phi}_1\Phi_1) = 0, \tag{4.15}
$$

entonces volviendo a (4.14), podemos separar Λ e integrar por partes para obtener que

$$
\begin{aligned}
\int d^4\theta\frac{\Lambda+\overline{\Lambda}}{2Q}2Q_0V_0 = -\int d^4\theta\frac{Q_0}{Q}(\Lambda V_0) - \int d^4\theta\frac{Q_0}{Q}(\overline{\Lambda}V_0) \\
= \frac{Q_0}{2Q}\int d\theta^+ d\overline{\theta}^-\Sigma_0\Lambda + \frac{Q_0}{2Q}\int d\overline{\theta}^+ d\theta^-\overline{\Sigma_0\Lambda}.
\end{aligned}
\tag{4.16}
$$

Finalmente, podemos reescribir (4.13) como

$$\begin{aligned} L_d = \int d^4\theta \Big[-\frac{\Lambda + \overline{\Lambda}}{2Q} ln(\frac{\Lambda + \overline{\Lambda}}{Q}) + \overline{\Phi_2} e^{2Q_{02}V_0}\Phi_2 - \frac{1}{2e^2}\overline{\Sigma_0}\Sigma_0 \Big] \\ -\frac{1}{2}\Big[\int d^2\theta(\Lambda Q_0 - t)\Sigma_0 + \int d^2\tilde{\theta}(\overline{\Lambda}Q_0 - \overline{t})\overline{\Sigma_0}\Big], \end{aligned} \tag{4.17}$$

este resultado puede ser generalizado para múltiples supercampos quirales fácilmente partiendo del Lagrangiano (4.7) y considerando $n = N+1$ supercampos quirales Φ_i con carga Q_i, $i = 1, ...N$. Tendremos $U(1)^N$ simetrías globales que pueden ser normadas, dando lugar así al Lagrangiano general, a través del cual podemos obtener el Lagrangiano dual. Entonces, considerando que cada campo Φ_i está cargado únicamente bajo la simetría global $U(1)_i$ con carga $\hat{Q}_i$, tendremos que transformarán como

$$U(1)_i : \Phi_i \to e^{i\hat{Q}_i\Lambda_i}\Phi_i, \quad \forall_{j=\neq i}\Phi_j \to \Phi_j. \tag{4.18}$$

Por lo tanto el Lagrangiano general será

$$\begin{aligned} L = \int d^4\theta \Big[\sum_{i=1}^{n} \overline{\Phi}_i e^{2Q_iV_0 + 2\hat{Q}_iV_i}\Phi_i - \frac{1}{2e^2}\overline{\Sigma_0}\Sigma_0 + \sum_{i=1}^{N}(\Psi_i\Sigma_i + \overline{\Psi}_i\overline{\Sigma}_i)\Big] \\ + \int d^4\theta \Big(\overline{\Phi}_{N+1} e^{2Q_{N+1}V_0}\Phi_{N+1}\Big) - \frac{1}{2}\int d^2\tilde{\theta} t \Sigma_0 - \frac{1}{2}\int d^2\theta \overline{t}\overline{\Sigma_0}, \end{aligned} \tag{4.19}$$

donde los términos con subíndice i representan los asociados con la simetría $U(1)_i$, el supercampo "espectador" Φ_{N+1} no está cargado bajo $U(1)_i$ y únicamente es implementado para tener N simetrías globales en el sistema, por lo que es el análogo a Φ_2 en el caso donde sólo tenemos una simetría global.

Entonces, para obtener el Lagrangiano dual encontramos las ecuaciones de movimiento para el supercampo vectorial V_i

$$\overline{\Phi}_i e^{2Q_iV_0 + 2\hat{Q}_iV_i}\Phi_i = \frac{\Lambda_i + \overline{\Lambda}_i}{2\hat{Q}_i}, \tag{4.20}$$

por lo que V_i es

$$V_i = \frac{1}{2\hat{Q}_i}\ln\Big(\frac{\Lambda_i + \overline{\Lambda}_i}{2\hat{Q}_i}\Big) - \frac{1}{2\hat{Q}_i}\ln(\overline{\Phi}_i e^{2Q_iV_0}\Phi_i). \tag{4.21}$$

Con estos resultados, obtenemos el Lagrangiano dual

$$L_d = \int d^4\theta\Big[-\sum_{i=1}^{N}\frac{\Lambda_i+\overline{\Lambda}_i}{2\hat{Q}_i}\ln\Big(\frac{\Lambda_i+\overline{\Lambda}_i}{2\hat{Q}_i}\Big) + \overline{\Phi}_{N+1}e^{2Q_{N+1}V_0}\Phi_{N+1}$$
$$\frac{1}{2e^2}\overline{\Sigma}_0\Sigma_0\Big] + \frac{1}{2}\int d^2\theta\Big(\sum_{i=1}^{N}\frac{\Lambda_i Q_i}{\hat{Q}_i} - t\Big)\Sigma_0 + \frac{1}{2}\int d^2\overline{\theta}\Big(\sum_{i=1}^{N}\frac{\overline{\Lambda_i}Q_i}{\hat{Q}_i} - \overline{t}\Big)\overline{\Sigma_0}. \tag{4.22}$$

Este es el Lagrangiano dual considerando $N+1$ supercampos quirales cargado y $U(1)^N$ simetrías globales.

Considerando el caso más simple posible, usando las expansiones (4.6) obtener el potencial escalar de la teoría. El procedimiento consiste en expandir los supercampos y tras desarrollar la expansión encontrar las ecuaciones de movimiento para los campos auxiliares para poder eliminarlos y finalmente considerar únicamente los términos escalares de la expansión. Haciendo este procedimiento se obtiene el potencial escalar

$$U = \frac{e^2}{2}\Big[Q_0(y+\overline{y}) - Q_{02}x_2\overline{x}_2\Big]^2 - K^2_{1\overline{1}}|\sigma_0|^2. \tag{4.23}$$

A través de este potencial pueden obtenerse el espacio de vacios supersimétricos.

4.1.2. Caso no-Abeliano sin superpotencial

Para realizar el caso no-Abeliano, consideraremos un GLSM $(2,2)$ con un grupo de norma Abeliano $U(1)$, N supercampos quirales $\Phi_{k,i}$ con cargas Q_k tal que $\sum_k n_k = N$, $i = 1,...,n_k$ donde n_k es el número de supercampos quirales con carga Q_k. Debido a la coincidencia de cargas en los distintos supercampos quirales habrá una simetría no-Abeliana denotada por G que actuará sobre estos. Podemos obtener el modelo dual al realizar el algoritmo de dualidad, de la misma manera que se hizo en el caso Abeliano.

Obtenemos primeramente la ecuación de movimiento más general y después consideramos el caso específico de SU(2).

Para esto partimos del Lagrangiano para el modelo antes mencionado, la cual es una teoría de norma $U(1)$ con supercampos quirales acoplados al supercampo vectorial $U(1)$.

$$L_0 = \int d^4\theta\Big[\sum_k \overline{\Phi}_{k,i}e^{2Q_kV_0}\Phi_{k,j} - \frac{1}{2e^2}\overline{\Sigma}_0\Sigma_0\Big] + \frac{1}{2}\Big(-\int d^2\theta t\Sigma_0 - \int d^2\overline{\theta}\overline{t}\overline{\Sigma_0}\Big). \tag{4.24}$$

Por lo que, al normar la simetría global no-Abeliana G e introducir el supercampo vectorial V y los multiplicadores de Lagrange, tendremos el Lagrangiano general

$$\begin{aligned} L_g = \int d^4\theta \Big[\sum_k \overline{\Phi}_{k,i}(e^{2Q_K V_0 + V})_{ij}\Phi_{k,j} + Tr(\Psi\Sigma) + Tr(\overline{\Psi\Sigma}) - \frac{1}{2e^2}\overline{\Sigma_0}\Sigma_0\Big] \\ -\frac{1}{2}\Big(\int d^2\tilde{\theta} t\Sigma_0 + c.c\Big), \end{aligned} \tag{4.25}$$

donde podemos identificar a los multiplicadores de Lagrange $\Psi, \overline{\Psi}$ como supercampos sin constricciones en la representación adjunta del grupo no-Abeliano G.

Al integrar los multiplicadores de Lagrange, obtenemos las condiciones $\Sigma = 0$ y $\overline{\Sigma} = 0$, los cual nos regresa al modelo original.

Por otro lado, para obtener el modelo dual, debemos integrar respecto al supercampo vectorial. Para hacer esto primeramente podemos expandir los términos del Lagrangiano que tienen los multiplicadores de Lagrange como

$$\begin{aligned} \int d^4\theta Tr(\Psi\Sigma) &= \int d^4\theta Tr\Big(-\frac{1}{2}(\overline{D_+}\Psi)e^{-V}D_- e^V\Big), \\ \int d^4\theta Tr(\overline{\Psi\Sigma}) &= \int d^4\theta Tr\Big(-\frac{1}{2}(D_+\overline{\Psi})e^V\overline{D_-}e^{-V}\Big). \end{aligned} \tag{4.26}$$

Podemos hacer esto debido a que para el caso no-Abeliano tenemos

$$\Sigma = \frac{1}{2}\overline{D_+}(e^{-V}D_- e^V), \quad \overline{\Sigma} = \frac{1}{2}D_+(e^V\overline{D_-}e^{-V}). \tag{4.27}$$

Por otro lado la variación del supercampo vectorial δe^V puede usarse para encontrar la variación de δe^{-V} como

$$\delta e^{-V} = -e^{-V}(\delta e^V)e^{-V}, \tag{4.28}$$

δe^V no es invariante de norma, pero una variación invariante de norma de V es

$$\Delta V = e^{-V}\delta e^V. \tag{4.29}$$

La cual puede ser expresada como $\Delta V = \Delta V_a T_a$ donde T_a son los generadores del grupo de norma. Dado esto, podemos encontrar la variación de los términos con supercampo vectorial, los cuales son el término cinético y los términos con multiplicadores de Lagrange.

Tendremos que

$$\delta(e^{2Q_kV_0+V}) = e^{2Q_kV_0}e^V\Delta V. \tag{4.30}$$

Por lo que la variación del término cinético del Lagrangiano estará dada por

$$\int d^4\theta\delta\Big(\sum_k \overline{\Phi}_{k,i}(e^{2Q_kV_0+V})_{ij}\Phi_{k,j}\Big) = \int d^4\theta\sum_k\Big(\overline{\Phi}_{k,i}(e^{2Q_kV_0+V})_{ij}(T_a)_{jl}\Phi_{k,l}\Big)\Delta V_a. \tag{4.31}$$

Y la variación de los términos con los multiplicadores de Lagrange será

$$\begin{aligned}\delta Tr(\Psi\Sigma) &= -\frac{1}{2}Tr[(\chi\tau+\tau\chi+D_-\tau)\Delta V],\\ \delta Tr(\overline{\Psi\Sigma}) &= -\frac{1}{2}Tr[(\overline{\chi\tau}+\overline{\tau\chi}+\overline{D_-}\overline{\tau})\Delta V],\end{aligned} \tag{4.32}$$

donde

$$\begin{aligned}\chi = -e^{-V}D_-e^V, \quad \overline{\chi} = -e^V\overline{D_-}e^{-V},\\ \tau = \overline{D_+}\Psi, \quad \overline{\tau} = D_+\overline{\Psi}.\end{aligned} \tag{4.33}$$

Con estos resultados, vemos que la variación del Lagrangiano estará dada por

$$\begin{aligned}\delta L = \overline{\Phi_{k,i}}(e^{2Q_kV_0+V})_{ij}\Delta V\Phi_j - \frac{1}{2}Tr[(e^{-V}D_-e^V\overline{D_+}\Psi + \overline{D_+}\Psi e^{-V}D_-e^V\\ +D_-\overline{D_+}\Psi)\Delta V] - \frac{1}{2}Tr[(-e^V\overline{D_-}e^{-V}D_+\overline{\Psi} - D_+\overline{\Psi}e^V\overline{D_-}e^{-V} - \overline{D_-}D_+\overline{\Psi})\Delta V] = 0.\end{aligned} \tag{4.34}$$

Para simplificar esto, podemos utilizar la norma de Wess-Zumino, donde se cumple que

$$e^{\pm V} = 1 \pm V_a\sigma_a + \frac{1}{2}V_aV_b\sigma_a\sigma_b, \quad e^{-V}D_\alpha e^V = D_\alpha V - \frac{[V, D_\alpha V]}{2}, \tag{4.35}$$

donde podemos reescribir la expresión de e^V como

$$e^V = 1 + V_a\sigma_a + \frac{1}{2}(V_aV_a + i\epsilon_{abc}V_aV_b\sigma_c) = 1 + V_a\sigma_a + \frac{1}{2}V^2 \tag{4.36}$$

y consideramos $i\epsilon_{abc}V_aV_b\sigma_c = 0$. Entonces, debido a que podemos expresar la variación de V en términos de e^V, tendremos que

$$\Delta V = e^{-V}\delta e^V = 1 - V_a\sigma_a + \frac{1}{2}V^2)\delta(1 + V_a\sigma_a + \frac{1}{2}V^2,$$
$$\Delta V = (1 - V_a\sigma_a + \frac{1}{2}V^2)(\sigma_b + V_b)\delta V_b = (\sigma_a + V_a)\delta V_a - V_a\sigma_a\sigma_b\delta V_b,$$
$$\Delta V = (\sigma_a + i\epsilon_{abc}V_b\sigma_c)\delta V_a \tag{4.37}$$

y de manera análoga

$$\Delta V^\dagger = (\sigma_a - i\epsilon_{abc}V_b\sigma_c)\delta V_a. \tag{4.38}$$

Por lo tanto las ecuaciones de movimiento serán

$$\overline{\Phi}_{k,i}e^{2QV_0}(e^V)_{ij}(T_a)_{jp}\Phi_{k,p} = \frac{1}{2}(\chi\tau + \tau\chi + D_-\tau)_a + \frac{1}{2}(\overline{\chi\tau} + \overline{\tau\chi} + \overline{D_-\tau})_a. \tag{4.39}$$

Estas ecuaciones de movimiento son generales para cualquier grupo de simetría no-Abeliano G.

Considerando que el grupo de simetría global es $G = SU(2)$ y por simplicidad tomando en cuenta sólo dos supercampos quirales con la misma carga bajo la simetría de norma $U(1)$. El Lagrangiano general estará dado por

$$\begin{aligned} L_{g,SU(2)} = \int d^4\theta\Big[\overline{\Phi}_i(e^{2QV_0+V})_{ij}\Phi_j + Tr(\Psi\Sigma) + Tr(\overline{\Psi\Sigma}) - \frac{1}{2e^2}\overline{\Sigma}_0\Sigma_0\Big] \\ -\frac{1}{2}\Big(\int d^2\tilde{\theta}t\Sigma_0 + c.c\Big). \end{aligned} \tag{4.40}$$

Con V_0, Σ_0 el supercampo vectorial y la intensidad de campo del grupo de norma $U(1)$ del GLSM, Φ_j y su conjugado denotan los dos supercampos quiral y anti-quiral, V es el campo de norma de la simetría $SU(2)$ normada con intensidad de campo Σ y Ψ es el multiplicador de Lagrange, que es un supercampo sin constricciones.

Los supercampos Φ y $\overline{\Phi}$ forman dobletes bajo la simetría global $SU(2)$, debido a la coincidencia de cargas la teoría tiene un doblete quiral y un anti-quiral (Φ_1, Φ_2) y $(\overline{\Phi_1}, \overline{\Phi_2})$ respectivamente.

Bajo estas consideraciones la ecuación de movimiento (4.39) para el supercampo vectorial normado V será

$$\overline{\Phi}e^{2QV_0}e^VT_a\Phi = -X_a - \overline{X}_a, \tag{4.41}$$

donde

$$\overline{X}_a = Tr((\overline{\chi\tau} + \overline{\tau\chi} - \overline{D}_-\overline{\tau})T_a), \quad X_a = Tr((\chi\tau + \tau\chi - D_-\tau)T_a), \tag{4.42}$$

que debido a que para $SU(2)$ tendremos $\chi = \chi_a\sigma_a$ y $\tau = \tau_a\sigma_a$, es posible reducir $Tr(\chi\tau + \tau\chi) = 0$, por lo que

$$\overline{X}_a = \overline{D}_- D_+ \overline{\Psi}_a; \quad X_a = D_- \overline{D}_+ \Psi_a. \tag{4.43}$$

La cual es la definición de un supercampo quiral torcido y un anti-quiral torcido, lo que permite deducir que los supercampos de la teoría dual son supercampos quirales torcidos. Las ecuaciónes de movimiento se reducen a

$$\overline{\Phi}_i e^{2QV_0}(e^V\sigma_a)_{ij}\Phi_j = \overline{D}_- D_+ \overline{\Psi}_a + \overline{D}_+ D_- \Psi_a, \tag{4.44}$$

las cuales constituyen tres ecuaciones de movimiento, una para cada generador. De estas ecuaciónes podemos obtener los siguientes resultados para $a = 1, 2$ y $j, i = 1, 2$

$$\begin{aligned} e^V_{12} &= -e^V_{22}\frac{\overline{\Phi}_2}{\overline{\Phi}_1} + \frac{X_1 + \overline{X}_1 - i(X_2 + \overline{X}_2)}{2e^{2QV_0}\Phi_1\overline{\Phi}_1}, \\ e^V_{21} &= -e^V_{11}\frac{\overline{\Phi}_1}{\overline{\Phi}_2} + \frac{X_1 + \overline{X}_1 + i(X_2 + \overline{X}_2)}{2e^{2QV_0}\Phi_2\overline{\Phi}_2}. \end{aligned} \tag{4.45}$$

Que serán de utilidad para poder expresar el término cinético en términos de los supercampos quirales torcidos.

Considerando que el término cinético está dado por

$$e^{2QV_0}\overline{\Phi}_i(e^V)_{ij}\Phi_j = e^{2QV_0}\Big[\overline{\Phi}_1 e^V_{11}\Phi_1 + \overline{\Phi}_1 e^V_{12}\Phi_2 + \overline{\Phi}_2 e^V_{21}\Phi_1 + \overline{\Phi}_2 e^V_{22}\Phi_2\Big]. \tag{4.46}$$

Y utilizando los resultados obtenidos de las ecuaciones de movimiento (4.45) llegamos a que

$$\overline{\Phi}_i e^{2QV_0}(e^V)_{ij}\Phi_j = -\frac{\Big[\Phi_1^2(X_1 + \overline{X}_1 + i(X_2 + \overline{X}_2)) + \Phi_2^2(X_1 + \overline{X}_1 - i(X_2 + \overline{X}_2))\Big]}{(2\Phi_1\Phi_2)}. \tag{4.47}$$

De igual manera considerando la ecuación de movimiento para $a = 3$

$$\begin{aligned} \overline{\Phi}_i e^{2QV_0}(e^V)_{ij}\Phi_j = -\Big[\Phi_1^2(X_1 + \overline{X}_1 + i(X_2 + \overline{X}_2)) + \Phi_2^2(X_1 + \overline{X}_1 - i(X_2 + \overline{X}_2))\Big] \\ = (2\Phi_1\Phi_2)(X_3 + \overline{X}_3) = 0, \end{aligned} \tag{4.48}$$

podemos dividir por Φ_1^2 y resolver la ecuación para $F = \frac{\Phi_2}{\Phi_1}$, lo cual da como resultado

$$F = \frac{-(X_3 + \overline{X}_3) \pm \sqrt{(X_3 + \overline{X}_3)^2 + (X_1 + \overline{X}_1)^2 + (X_2 + \overline{X}_2)^2}}{(X_1 + \overline{X}_1 - i(X_2 + \overline{X}_2))} \tag{4.49}$$

y tomando como solución el caso $+$, podemos expresar el término cinético del Lagrangiano como

$$e^{2QV_0}\Phi_i e^V_{ij}\Phi_j = \sqrt{(X_1 + \overline{X}_1)^2 + (X_2 + \overline{X}_2)^2 + (X_3 + \overline{X}_3)^2}. \tag{4.50}$$

Ya tenemos una expresión para el término cinético del Lagrangiano en términos de los supercampos quirales torcidos, falta ver como podemos reescribir los términos con los multiplicadores de Lagrange, para esto debemos encontrar una solución para el supercampo vectorial normado. Por esta razón resulta útil considerar la dirección Abeliana dentro del grupo de dualidad sobre el generador σ_1, vemos que para el supercampo vectorial V alineado con el generador σ_1, $V = V_1\sigma_1$ la exponencial queda como

$$e^V = \begin{pmatrix} cosh(V_1) & sinh(V_1) \\ sinh(V_1) & cosh(V_1) \end{pmatrix}. \tag{4.51}$$

Por lo que, utilizando (4.45) obtenemos las ecuaciones

$$\begin{aligned} sinh(V_1) = -cosh(V_1)\frac{\overline{\Phi}_2}{\overline{\Phi}_1} + \frac{X_1 + \overline{X}_1 - i(\overline{X}_2) + X_2}{2e^{2QV_0}\Phi_1\overline{\Phi}_1}, \\ sinh(V_1) = -cosh(V_1)\frac{\overline{\Phi}_1}{\overline{\Phi}_2} + \frac{X_1 + \overline{X}_1 + i(\overline{X}_2) + X_2}{2e^{2QV_0}\Phi_2\overline{\Phi}_2}, \end{aligned} \tag{4.52}$$

las cuales pueden sumarse para obtener la solución

$$e^{V_1} = \frac{(X_1 + \overline{X}_1) + i(X_2 + \overline{X}_2)}{2e^{2QV_0\phi_2}\phi_2(\overline{\phi}_1 + \overline{\phi}_2)} + \frac{(X_1 + \overline{X}_1) - i(X_2 + \overline{X}_2)}{2e^{2QV_0}\phi_1(\overline{\phi}_1 + \overline{\phi}_2)}, \tag{4.53}$$

de donde podemos despejar el supercampo vectorial, obteniendo

$$V_1 = \ln((X_1 + \overline{X}_1) + i(X_2 + \overline{X}_2)\frac{\overline{F} - 1}{\overline{F} + 1}) - \ln(2|\Phi_1|^2) - 2QV_0, \tag{4.54}$$

por lo que el Lagrangiano dual es

$$\begin{aligned} L_d = \int d^4\theta\Big[\sqrt{(X_1 + \overline{X}_1)^2 + (X_2 + \overline{X}_2)^2 + (X_3 + \overline{X}_3)^2} \\ -\frac{1}{2}Tr(\overline{D}_+\Psi e^{-V}D_-e^V + D_+\overline{\Psi}e^V\overline{D}_-e^{-V}) \\ -\frac{1}{2e^2}\Sigma_0\Sigma_0\Big] - \frac{1}{2}\Big(\int d^2\tilde{\theta}\Sigma_0 + c.c\Big). \end{aligned} \tag{4.55}$$

Ahora, como vimos para $SU(2)$ tendremos

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}Tr\Big(\overline{D}_+\Psi e^{-V}D_-e^V + D_+\overline{\Psi}e^V\overline{D}_-e^{-V}\Big) &= D_-\overline{D}_+\Psi_aV_a + D_+\overline{D}_-\overline{\Psi}_aV_a \\ &= X_aV_a + \overline{X}_aV_a. \end{aligned} \tag{4.56}$$

Por lo que, como estamos en $a = 1$, tendremos que el Lagrangiano dual estará dado por

$$\begin{aligned} L_{dual} = \int d^4\theta\Big[\sqrt{(X_1 + \overline{X}_1)^2 + (X_2 + \overline{X}_2)^2 + (X_3 + \overline{X}_3)^2} \\ -(X_1V_1 + \overline{X}_1V_1) - \frac{1}{2e^2}\Sigma_0\Sigma_0\Big] - \frac{1}{2}\Big(\int d^2\tilde{\theta}\Sigma_0 + c.c\Big), \end{aligned} \tag{4.57}$$

usando la expresión encontrada para el supercampo vectorial, tendremos que el Lagrangiano será

$$\begin{aligned} L_d = \int d^4\theta\Big[\sqrt{(X_1 + \overline{X}_1)^2 + (X_2 + \overline{X}_2)^+2 + (X_3 + \overline{X}_3)^2} \\ -(X_1 + \overline{X}_1)\left(Ln((X_1 + \overline{X}_1) + i(X_2 + \overline{X}_2)\frac{\overline{F} - 1}{\overline{F} + 1} - Ln(2|\Phi_1|^2) - 2QV_0\right) \\ -\frac{1}{2e^2}\Sigma_0\Sigma_0\Big] - \frac{1}{2}\Big(\int d^2\tilde{\theta}t\Sigma_0 + c.c\Big). \end{aligned} \tag{4.58}$$

Podemos concentrarnos en dos términos del Lagrangiano, primeramente

$$\int d^4\theta(X_1 + \overline{X}_1)\ln(2\overline{\Phi}_1\Phi_1) = 0 \tag{4.59}$$

y por otro lado

$$\begin{aligned}\int d^4\theta(X_1+\overline{X}_1)2QV_0 &= 2Q\int d^4\theta(D_-\overline{D}_+\Psi_1 + D_+\overline{D}_-\overline{\Psi}_1)V_0 \\ &= Q\int d\theta^+ d\tilde{\theta}^- D_-\overline{D}_+\Psi_1\Sigma_0 + Q\int d\theta^- d\tilde{\theta}^+ D_+\overline{D}_-\overline{\Psi}_1\overline{\Sigma}_0 \\ &= Q\int d\theta^+ d\tilde{\theta}^- X_1\Sigma_0 + Q\int d\theta^- d\tilde{\theta}^+ \overline{X}_1\overline{\Sigma}_0.\end{aligned} \tag{4.60}$$

Por lo que el Lagrangiano dual quedará como

$$\begin{aligned}L_d = \int d^4\theta\Big[&\sqrt{(X_1+\overline{X}_1)^2 + (X_2+\overline{X}_2)^+2 + (X_3+\overline{X}_3)^2} - (X_1+\overline{X}_1) \\ &\times \ln\Big((X_1+\overline{X}_1) + i(X_2+\overline{X}_2)\frac{\overline{F}-1}{\overline{F}+1}\Big) - \frac{1}{2e^2}\Sigma_0\Sigma_0\Big] \\ &+Q\int d\theta^+ d\tilde{\theta}^-\left(X_1 - \frac{t}{2Q}\right)\Sigma_0 + Q\int d\theta^- d\tilde{\theta}^+\left(\overline{X}_1 - \frac{\tilde{t}}{2Q}\right)\overline{\Sigma}_0.\end{aligned} \tag{4.61}$$

El cual está completamente expresado en términos de los nuevos supercampos quirales torcidos X_i.

Haciendo uso del Lagrangiano y de las expansiones de los supercampos (4.6) es posible escribir el potencial escalar de esta teoría

$$U = 2Q^2e^2\Big(\frac{x_1+\overline{x}_1-(t+\overline{t})}{2Q}\Big)^2 \tag{4.62}$$

y haciendo uso de este resultado es posible encontrar el vacío supersimétrico de la teoría, el cual es $Re(x_1) = Re(t)/(2Q)$.

Capítulo 5

T- dualidad para GLSM con superpotencial

En este capítulo, haciendo uso del algoritmo de dualidad previamente visto, se calcula la teoría dual de dos GLSM considerando que contienen ambos un término en el Lagrangiano generado por un superpotencial. Se consideran los casos Abeliano y no-Abeliano. De igual manera se obtienen y analizan los potenciales escalares para las teorías duales obtenidas.

5.1. Cálculo de dualidad para GLSM Abeliano con término de superpotencial

Considerando el mismo modelo que para el caso Abeliano sin superpotencial sabemos que el Lagrangiano esta dado por

$$L_0 = -\int d^4\theta \Big[\overline{\Phi}_1 e^{2QV_0}\Phi_1 + \overline{\Phi_2} e^{2Q_{02}}\Phi_2 - \frac{1}{2e^2}\overline{\Sigma_0}\Sigma_0\Big] - \frac{1}{2}\int d^2\tilde{\theta} t\Sigma_0 - \frac{1}{2}\int d^2\theta \bar{t}\overline{\Sigma_0}, \tag{5.1}$$

añadiendo un término de potencial, el Lagrangiano será de la forma

$$\begin{aligned} L_1 = -\int d^4\theta \Big[\overline{\Phi}_1 e^{2QV_0}\Phi_1 + \overline{\Phi_2} e^{2Q_{02}}\Phi_2 - \frac{1}{2e^2}\overline{\Sigma_0}\Sigma_0\Big] - \frac{1}{2}\int d^2\tilde{\theta} t\Sigma_0 \\ -\frac{1}{2}\int d^2\theta \bar{t}\overline{\Sigma_0} + \int d^2\tilde{\theta} W + \int d^2\theta \overline{W}. \end{aligned} \tag{5.2}$$

Ahora, la idea para poder hacer de manera sencilla la dualidad es cambiar el término agregado por el potencial (el cual es llamado término F) por un término D que es de la forma del primer término del Lagrangiano. Para esto, podemos considerar el potencial de la forma [6]

$$W = \phi w \overline{\Phi_1}, \tag{5.3}$$

donde w es el superpotencial que depende de los otros supercampos distintos de Φ_1, Φ_1 es un supercampo cargado y ϕ es un supercampo neutro el cual puede ser escrito como $\phi = D_+ D_- C$ con C un supercampo complejo. De esta manera, podemos escribir el Lagrangiano como

$$L_1 = -\int d^4\theta \Big[|\phi| + \overline{\Phi}_1 e^{2QV_0} \Phi_1 + \overline{\Phi_2} e^{2Q_{02}V_0} \Phi_2 - \frac{1}{2e^2} \overline{\Sigma_0} \Sigma_0 + \Big(Cw\Phi_1 + \overline{C}\overline{w}\overline{\Phi_1} \Big) \Big] \\ -\frac{1}{2} \int d^2\tilde{\theta} t \Sigma_0 - \frac{1}{2} \int d^2\theta \bar{t} \overline{\Sigma_0}. \tag{5.4}$$

Para realizar la dualidad, siguiendo el algoritmo de dualidad tenemos que normar la transformación global $\Phi_1 \rightarrow e^{QV} \Phi_1$ y añadimos multiplicadores de Lagrange, por lo que el Lagrangiano general será

$$L_{1g} = -\int d^4\theta \Big[|\phi| + \overline{\Phi}_1 e^{2QV_0 + 2QV} \Phi_1 + \overline{\Phi_2} e^{2Q_{02}V_0} \Phi_2 - \frac{1}{2e^2} \overline{\Sigma_0} \Sigma_0 \\ + e^{QV} (Cw\Phi_1 + \overline{C}\overline{w}\overline{\Phi_1}) + \Sigma\Psi + \overline{\Sigma\Psi} \Big] - \frac{1}{2} \int d^2\tilde{\theta} t \Sigma_0 - \frac{1}{2} \int d^2\theta \bar{t} \overline{\Sigma_0}, \tag{5.5}$$

donde se añadió un nuevo supercampo y un nuevo superpotencial el cual está expresado en la forma $\Sigma = \frac{1}{2} \overline{D_+} D_- V$.
Podemos obtener el Lagrangiano original al encontrar las ecuaciones de movimiento para los multiplicadores de Lagrange, esto es directo y se hizo previamente.
Por otro lado, para obtener el Lagrangiando dual, debemos encontrar las ecuaciones de movimiento para el sistema completo, estas se consiguen de la misma manera que se hizo previamente en el caso sin superpotencial. De esta se obtiene la siguiente ecuación de movimiento

$$\frac{(\Lambda + \overline{\Lambda})}{2Q} = \overline{\Phi_1} e^{2QV_0} \Phi_1 e^{2QV} + \frac{e^{QV}}{2} (Cw\Phi + \overline{C}\overline{w}\overline{\Phi}). \tag{5.6}$$

Al ser una ecuación de segundo grado para e^{QV}, podemos encontrar la solución de manera sencilla

$$e^{QV} = \frac{-\frac{1}{4}(Cw\Phi_1 + \overline{C}\overline{w}\overline{\Phi_1}) \pm \sqrt{\frac{1}{16}(Cw\Phi_1 + \overline{C}\overline{w}\overline{\Phi_1})^2 + (\overline{\Phi_1} e^{2QV_0} \Phi_1)(\frac{\Lambda + \overline{\Lambda}}{2Q})}}{(\overline{\Phi_1} e^{2QV_0} \Phi_1)}, \tag{5.7}$$

la cual, al considerar que $C=0$ se reduce al caso sin término de superpotencial visto previamente en el capítulo 4. Ahora, despejando V, tenemos que

$$V=\frac{1}{Q}\ln\Big[-\frac{1}{4}(Cw\Phi_1+\overline{C}\overline{w}\overline{\Phi_1})+\sqrt{\frac{1}{16}(Cw\Phi_1+\overline{C}\overline{w}\overline{\Phi_1})^2+(\overline{\Phi_1}e^{2QV_0}\Phi_1)\Big(\frac{\Lambda+\overline{\Lambda}}{2Q}\Big)}\Big] \\ -\ln[\overline{\Phi_1}e^{2QV_0}\Phi_1]. \tag{5.8}$$

Con estos resultados, obtenemos el Lagrangiano dual

$$\begin{aligned} L_1=\int d^4\theta\Big\{&-\frac{1}{8}(\overline{\Phi_1}e^{2QV_0}\Phi_1)^{-1}(Cw\Phi_1+\overline{C}\overline{w}\overline{\Phi_1})^2+\Big(\frac{\Lambda+\overline{\Lambda}}{2Q}\Big)+\frac{1}{2}(\overline{\Phi_1}e^{2QV_0}\Phi_1)^{-1}\\ &\times(Cw\Phi_1+\overline{C}\overline{w}\overline{\Phi_1})\sqrt{\frac{1}{16}(Cw\Phi_1+\overline{C}\overline{w}\overline{\Phi_1})^2+(\overline{\Phi_1}e^{2QV_0}\Phi_1)\Big(\frac{\Lambda+\overline{\Lambda}}{2Q}\Big)}+|\phi|\\ &+\overline{\Phi_2}e^{2Q_0V_0}\Phi_2-\Big(\frac{\Lambda+\overline{\Lambda}}{Q}\Big)\ln\Big[-\frac{1}{4}(Cw\Phi_1+\overline{C}\overline{w}\overline{\Phi_1})\\ &+\sqrt{\frac{1}{16}(Cw\Phi_1+\overline{C}\overline{w}\overline{\Phi_1})^2+(\overline{\Phi_1}e^{2QV_0}\Phi_1)\Big(\frac{\Lambda+\overline{\Lambda}}{2Q}\Big)}\Big]\Big(\frac{\Lambda+\overline{\Lambda}}{Q}\Big)\\ &\times\ln(\overline{\Phi_1}e^{2QV_0}\Phi_1)\frac{1}{2e^2}\overline{\Sigma_0}\Sigma_0\Big\}-\frac{1}{2}\int d^2\tilde{\theta}t\Sigma_0-\frac{1}{2}\int d^2\theta\bar{t}\overline{\Sigma_0}. \end{aligned}\tag{5.9}$$

También podemos reescribir los términos como lo hicimos en el caso sin superpotencial, por lo que tendremos que el Lagrangiano dual es

$$\begin{aligned} L_{1d}=\int d^4\theta\Big\{&-\frac{1}{8}(\overline{\Phi_1}e^{2QV_0}\Phi_1)^{-1}(Cw\Phi_1+\overline{C}\overline{w}\overline{\Phi_1})^2+\Big(\frac{\Lambda+\overline{\Lambda}}{2Q}\Big)+\frac{1}{2}(\overline{\Phi_1}e^{2QV_0}\Phi_1)^{-1}\\ &\times(Cw\Phi_1+\overline{C}\overline{w}\overline{\Phi_1})\sqrt{\frac{1}{16}(Cw\Phi_1+\overline{C}\overline{w}\overline{\Phi_1})^2+(\overline{\Phi_1}e^{2QV_0}\Phi_1)\Big(\frac{\Lambda+\overline{\Lambda}}{2Q}\Big)}\\ &+|\phi|+\overline{\Phi_2}e^{2Q_0V_0}\Phi_2-\Big(\frac{\Lambda+\overline{\Lambda}}{Q}\Big)\ln\Big[-\frac{1}{4}(Cw\Phi_1+\overline{C}\overline{w}\overline{\Phi_1})\\ &+\sqrt{\frac{1}{16}(Cw\Phi_1+\overline{C}\overline{w}\overline{\Phi_1})^2+(\overline{\Phi_1}e^{2QV_0}\Phi_1)(\frac{\Lambda+\overline{\Lambda}}{2Q})}\Big]-\frac{1}{2e^2}\overline{\Sigma_0}\Sigma_0\Big\}\\ &+\frac{1}{2}\int d^2\tilde{\theta}\Big(4\frac{Q_0}{Q}\Lambda-t\Big)\Sigma_0+\frac{1}{2}\int d^2\theta\Big(4\frac{Q_0}{Q}\overline{\Lambda}-\bar{t}\overline{\Sigma_0}\Big). \end{aligned}\tag{5.10}$$

Para simplificar el problema, notamos que es posible fijar la norma

$$Cw\Phi_1+\overline{C}\overline{w}\overline{\Phi}_1=1;\quad \overline{\Phi}_1\Phi_1=1. \tag{5.11}$$

Por lo que el Lagrangiano dual esta dado por

$$
\begin{aligned}
L_{1d} = \int d^4\theta\Big\{&-\frac{1}{8}e^{-2QV_0} + \Big(\frac{\Lambda+\overline{\Lambda}}{2Q}\Big) + \frac{1}{2}e^{-2QV_0}\sqrt{\frac{1}{16} + (e^{2QV_0})\Big(\frac{\Lambda+\overline{\Lambda}}{2Q}\Big)} \\
&+|\phi| + \overline{\Phi_2}e^{2Q_0V_0}\Phi_2 - \Big(\frac{\Lambda+\overline{\Lambda}}{Q}\Big)\ln\Big[-\frac{1}{4} + \sqrt{\frac{1}{16} + (e^{2QV_0})\Big(\frac{\Lambda+\overline{\Lambda}}{2Q}\Big)}\Big] \\
&-\frac{1}{2e^2}\overline{\Sigma_0}\Sigma_0\Big\} + \frac{1}{2}\int d^2\tilde{\theta}\Big(4\frac{Q_0}{Q}\Lambda - t\Big)\Sigma_0 + \frac{1}{2}\int d^2\theta\Big(4\frac{Q_0}{Q}\overline{\Lambda} - \overline{t}\overline{\Sigma_0}\Big).
\end{aligned}
\tag{5.12}
$$

Podemos obtener el superpotencial escalar de este Lagrangiano dual, con la intención de encontrar la geometría del espacio target del modelo sigma no-lineal de la teoría dual. Para encontrar el potencial escalar es necesario expandir todos los campos y considerar las componentes bosónicas que no tienen derivadas.

Entonces, analizamos cada uno de los términos

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2e^2}\int d^4\theta\Sigma_0\overline{\Sigma}_0 &= \frac{2}{e^2}(D^2 + v_{03}^2), \\
\frac{1}{2}\int d^2\tilde{\theta}\Big(4\frac{Q_0}{Q}\Lambda - t\Big)\Sigma_0 &= \frac{4Q_0}{Q}\Big[y(D - iv_{03}) + \sigma_0 G\Big] - t(D - iv_{03}), \\
\frac{1}{2}\int d^2\tilde{\overline{\theta}}\Big(4\frac{Q_0}{Q}\overline{\Lambda} - \overline{t}\Big)\overline{\Sigma_0} &= \frac{4Q_0}{Q}\Big[\overline{y}(D + iv_{03}) + \overline{\sigma_0}\overline{G}\Big] - \overline{t}(D + iv_{03}).
\end{aligned}
\tag{5.13}
$$

Consideramos ahora las componentes de los campos dentro del término cinético del Lagrangiano. Para esto, notamos que podemos hacer la expansión de algunos términos, en particular aquellos que contienen campos dentro de funciones como logaritmo y raíz cuadrada.

$$
\frac{1}{4}\sqrt{1 + 8e^{2QV_0}\Big(\frac{\Lambda+\overline{\Lambda}}{2Q}\Big)} \approx \frac{1}{4}\Big[8e^{2QV_0}\Big(\frac{\Lambda+\overline{\Lambda}}{2Q}\Big)\Big]
\tag{5.14}
$$

y

$$
\begin{aligned}
\Big(\tfrac{\Lambda+\overline{\Lambda}}{Q}\Big)\ln\Big[-\tfrac{1}{4} + \sqrt{\tfrac{1}{16} + e^{2QV_0}(\tfrac{\Lambda+\overline{\Lambda}}{2Q})}\Big] &= \Big(\tfrac{\Lambda+\overline{\Lambda}}{Q}\Big)\Big[\ln(-\tfrac{1}{4}) + \ln(1 - 4e^{2QV_0}(\tfrac{\Lambda+\overline{\Lambda}}{Q}))\Big] \\
&\approx \Big(\tfrac{\Lambda+\overline{\Lambda}}{Q}\Big)\Big[\ln(-\tfrac{1}{4}) - 4e^{2QV_0}(\tfrac{\Lambda+\overline{\Lambda}}{Q})\Big].
\end{aligned}
\tag{5.15}
$$

Por lo que, usando estos resultados en el término cinético y las expansiones correspondientes a los campos, es posible obtener las componentes del término cinético del Lagrangiano

$$\int d^4\theta\Big\{-\frac{1}{8}e^{-2QV_0}+\Big(\frac{\Lambda+\overline{\Lambda}}{2Q}\Big)+\frac{1}{2}e^{-2QV_0}\sqrt{\frac{1}{16}+(e^{2QV_0})\Big(\frac{\Lambda+\overline{\Lambda}}{2Q}\Big)}$$
$$+|\phi|+\overline{\Phi_2}e^{2Q_0V_0}\Phi_2-\Big(\frac{\Lambda+\overline{\Lambda}}{Q}\Big)\ln\Big[-\frac{1}{4}+\sqrt{\frac{1}{16}+(e^{2QV_0})\Big(\frac{\Lambda+\overline{\Lambda}}{2Q}\Big)}\Big]\Big\} \tag{5.16}$$
$$=F_2\overline{F}_2+Q_{02}Dx_2\overline{x}_2+\frac{8e^{2QV_0}}{Q^2}G\overline{G}.$$

Por lo tanto, es posible escribir el potencial escalar de la teoría, sumando las componentes de cada uno de los términos del Lagrangiano, obteniendo

$$U=D\Big[\frac{4Q_0}{Q}(y+\overline{y})-(t+\bar{t})\Big]+\frac{2}{e^2}D^2+\frac{8Q_0}{Q}(Re(\sigma_0G))+G\overline{G}+Q_{02}Dx_2\overline{x}_2, \tag{5.17}$$

donde los campos auxiliares relacionados con el campo Φ_2 y con $|\Phi|$ no aportan al potencial escalar debido a que no están acoplados a ningún campo. Podemos eliminar los campos auxiliares, obteniendo las ecuaciones de movimiento, para D tendremos

$$D=\frac{e^2}{4}Q_{02}x_2\overline{x}_2-\frac{e^2Q_0}{Q}(y+\overline{y})+\frac{e^2}{4}(t+\bar{t}) \tag{5.18}$$

y haciendo la variación para el campo auxiliar G, tendremos

$$G=-\frac{4Q_0}{Q}\overline{\sigma_0},\qquad \overline{G}=-\frac{4Q_0}{Q}\sigma_0. \tag{5.19}$$

Por tanto el potencial escalar es

$$U=\Big[\frac{4Q_0}{Q}(y+\overline{y})-(t+\bar{t})+Q_{02}x_2\overline{x}_2\Big]^2(1-\frac{e^2}{4})+2(\frac{4Q_0}{Q})^2|\sigma_0|^2. \tag{5.20}$$

5.2. Caso no-Abeliano con superpotencial

Consideramos ahora un GLSM con un grupo de norma Abeliano $U(1)$ con N supercampos quirales $\Phi_{k,i}$ con cargas Q_k tal que $\sum_k n_k=N$, $i=1,...,n_k$ con n_k el número de supercampos quirales con carga Q_k. Como vimos, habrá una simetría no-Abeliana que denotaremos como G y actuará sobre los supercampos quirales. Por tanto el Lagrangiano sin superpotencial está dado por

$$L_0 = \int d^4\theta \left(\sum_k \overline{\Phi}_{k,i} (e^{2Q_K V_0})_{ij} \Phi_{k,j} - \frac{1}{2e^2} \overline{\Sigma_0} \Sigma_0 \right) + \frac{1}{2} \left(\int d^2\tilde{\theta} t \Sigma_0 + c.c \right). \tag{5.21}$$

Buscamos introducir un término con superpotencial en el Lagrangiano, este debe tener la forma

$$\int d^2\theta W + h.c, \tag{5.22}$$

para introducir este término en el Lagrangiano de manera análoga al caso Abeliano consideramos el superpotencial como

$$W = \sum_k \Phi_{k,i} w_{ij} \phi_j, \tag{5.23}$$

donde a diferencia del caso Abeliano, estamos considerando de manera general los supercampos quirales con carga Q_k.
Tomando $\phi = D_+ D_- C$ logramos reescribir (5.22) como

$$\int d^2\theta W + h.c = \int d^4\theta \sum_k (\Phi_{k,i} w_{ij} C_j + \overline{\Phi}_{k,i} \overline{w}_{ij} \overline{C}_j). \tag{5.24}$$

Por lo que el Lagrangiano para el caso no-Abeliano con superpotencial es

$$\begin{aligned} L_1 = \int d^4\theta \Big[\sum_k \overline{\Phi}_{k,i} (e^{2Q_K V_0})_{ij} \Phi_{k,j} + \sum_k (\Phi_{k,i} w_{ij} C_j + \overline{\Phi}_{k,i} \overline{w}_{ij} \overline{C}_j) \\ - \frac{1}{2e^2} \overline{\Sigma_0} \Sigma_0 \Big] + \frac{1}{2} \left(\int d^2\tilde{\theta} t \Sigma_0 + c.c \right). \end{aligned} \tag{5.25}$$

El Lagrangiano general es obtenido al normar la simetría global no-Abeliana G e introducir los multiplicadores de Lagrange en el Lagrangiano (5.24), al hacer esto obtenemos

$$\begin{aligned} L_{1g} = \int d^4\theta \Big\{ \sum_k \overline{\Phi}_{k,i} (e^{2Q_K V_0 + V})_{ij} \Phi_{k,j} + Tr(\Psi\Sigma) + Tr(\overline{\Psi\Sigma}) \\ + \sum_k \Big[\Phi_{k,i} w_{il} (e^V)_{lj} C_j + \overline{\Phi}_{k,i} \overline{w}_{il} (e^V)_{lj} \overline{C}_j \Big] - \frac{1}{2e^2} \overline{\Sigma_0} \Sigma_0 \Big\} + \frac{1}{2} \left(\int d^2\tilde{\theta} t \Sigma_0 + c.c \right), \end{aligned} \tag{5.26}$$

donde a diferencia del caso no-Abeliano sin superpotencial, hemos promovido el supercampo complejo C a un supercampo vectorial con valores en el grupo de simetría global no-Abeliano para tener consistencia al ejecutar el algoritmo de dualidad.

Además de (5.26) es sencillo ver que al integrar los multiplicadores de Lagrange, obtenemos condiciones que nos devuelven el modelo original y que al considerar $C_{i,j} = 0$ obtenemos el caso sin superpotencial visto previamente.
Entonces, de manera análoga al caso no-Abeliano sin superpotencial tendremos que los términos con multiplicadores de Lagrange pueden ser reescritos como (4.26).
Debido a que buscamos encontrar las ecuaciones de movimiento al variar el superpotencial vectorial V. Resulta más sencillo hacerlo para cada uno de los términos, los cuales son el término cinético, el término con multiplicadores de Lagrange y el término con el superpotencial. Para hacer esto resulta útil definir una cantidad invariante de norma

$$\Delta V = e^{-V}\delta e^{V}, \tag{5.27}$$

con esto vemos que la variación del término cinético será

$$\int d^4\theta\delta\Big(\sum_k \overline{\Phi}_{k,i}(e^{2Q_K V_0+V})_{ij}\Phi_{k,j}\Big) = \int d^4\theta\sum_k \overline{\Phi}_{k,i}(e^{2Q_K V_0+V})_{ij}(T_a)_{jn}\Phi_{k,n}\Delta V_a. \tag{5.28}$$

Por otro lado la variación de los términos con multiplicadores de Lagrange es

$$\begin{aligned} \delta Tr(\Psi\Sigma) &= -\frac{1}{2}Tr[(\chi\tau+\tau\chi+D_-\tau)\Delta V], \\ \delta Tr(\overline{\Psi\Sigma}) &= -\frac{1}{2}Tr[(\overline{\chi\tau}+\overline{\tau\chi}+\overline{D}_-\overline{\tau})\Delta V], \end{aligned} \tag{5.29}$$

donde usamos las mismas expresiones que para el caso No-Abeliano sin superpotencial (4.33).
Finalmente para el término de superpotencial tendremos que la variación será

$$\begin{aligned} &\int d^4\theta\delta\left(\sum_k(\Phi_{k,i}w_{il}(e^V)_{lj}C_j + \overline{\Phi}_{k,i}\overline{w}_{il}(e^V)_{lj}\overline{C}_j)\right) \\ &= \int d^4\theta\sum_k\Big[\Phi_{k,i}w_{il}(e^V)_{l,j}(T_a)_{j,n}C_n + \overline{\Phi}_{k,i}\overline{w}_{il}(e^V)_{lj}(T_a)_{jn}\overline{C}_n\Big]\Delta V, \end{aligned} \tag{5.30}$$

donde $\Delta V = T_a\Delta V_a$, con T_a los generadores del grupo de simetría global No-Abeliano.
Para simplificar las ecuaciones de movimiento podemos usar la norma de Wess-Zumino, donde

$$e^{\pm V} = 1 \pm V_a\sigma_a + \frac{1}{2}V_aV_b\sigma_a\sigma_b = 1 \pm V_a\sigma_a + \frac{1}{2}V^2, \tag{5.31}$$

lo cual permite expresar

$$\begin{aligned} \Delta V &= (\sigma_a + i\epsilon_{abc}V_b\sigma_c)\delta V_a, \\ \Delta V^\dagger &= (\sigma_a - i\epsilon_{abc}V_b\sigma_c)\delta V_a. \end{aligned} \tag{5.32}$$

Con todas estas variaciones obtenemos un conjunto de ecuaciones de movimiento que estarán dadas por

$$\begin{aligned} \sum_k \overline{\Phi}_{k,i}(e^{2Q_K V_0 + V})_{ij}(T_a)_{ji}\Phi_{k,i}\Delta V - \frac{1}{2}Tr[(\chi\tau + \tau\chi + D_-\tau)T_a]\Delta V_a \\ -\frac{1}{2}Tr\Big[(\overline{\chi\tau} + \overline{\tau\chi} + \overline{D}_-\overline{\tau})T_a\Big]\Delta V_a + \sum_k \Big[\Phi_{k,i}w_{il}(e^V)_{lj}C_j \\ +\overline{\Phi}_{k,i}\overline{w}_{il}(e^V)_{lj}\overline{C}_j\Big]\Delta V_a = 0. \end{aligned} \tag{5.33}$$

Estas ecuaciones de movimiento son generales, para cualquiera que sea el grupo de simetría no-Abeliano G.

Para resolver estas ecuaciones de movimiento, podemos considerar un grupo no-Abeliano simple $G = SU(2)$, cuyos elementos de grupo son las matrices de Pauli

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{5.34}$$

Por simplicidad consideramos dos supercampos quirales con la misma carga bajo la simetría de norma $U(1)$. Bajo estas consideraciones el Lagrangiano general es

$$\begin{aligned} L_{g,SU(2)} = \int d^4\theta\Big[\overline{\Phi}_i(e^{2QV_0+V})_{ij}\Phi_j + Tr(\Psi\Sigma) + Tr(\overline{\Psi\Sigma}) \\ +\Phi_i w_{il}(e^V)_{lj}C_j + \overline{\Phi}_i\overline{w}_{il}(e^V)_{lj}\overline{C}_j - \frac{1}{2e^2}\overline{\Sigma_0}\Sigma_0\Big] + \frac{1}{2}\left(\int d^2\tilde{\theta}t\Sigma_0 + c.c\right), \end{aligned} \tag{5.35}$$

con $i, j = 1, 2$.

Como se vió en el caso no-Abeliano sin superpotencial, para $SU(2)$, los términos con traza se reducen y podemos expresar $\overline{X}_a = \overline{D}_- D_+ \overline{\Psi}_a, \quad X_a = \overline{D}_+ D_- \Psi_a$. Por tanto las ecuaciones de movimiento serán

$$e^{2QV_0}\overline{\Phi}_i(e^V\sigma_a)_{ij}\Phi_j + \Phi_i w_{il}(e^V\sigma_a)_{lj}C_j + \overline{\Phi}_i\overline{w}_{il}(e^V\sigma_a)_{lj}\overline{C}_j = \overline{X}_a + X_a, \tag{5.36}$$

o bien

$$e^{2QV_0}\overline{\Phi}_i e^V_{il}(\sigma_a)_{lj}\Phi_j + \Phi_i w_{il} e^V_{ln}(\sigma_a)_{nj}C_j + \overline{\Phi}_i \overline{w}_{il} e^V_{ln}(\sigma_a)_{nj}\overline{C}_j = \overline{X}_a + X_a. \tag{5.37}$$

Tendremos tres ecuaciones de movimiento, una para cada elemento del grupo ($a = 1, 2, 3$)

$$\begin{aligned}
e^{2QV_0}\Big[\overline{\Phi}_1 e^V_{12}\Phi_1 + \overline{\Phi}_1 e^V_{11}\Phi_2 + \overline{\Phi}_2 e^V_{22}\Phi_1 + \overline{\Phi}_2 e^V_{21}\Phi_2\Big] + \Phi_1\Big[(w_{11}e^V_{12} + w_{12}e^V_{22})C_1 \\
+(w_{11}e^V_{11} + w_{12}e^V_{21})C_2\Big] + \Phi_2\Big[(w_{21}e^V_{12} + w_{22}e^V_{22})C_1 + (w_{21}e^V_{11} + w_{22}e^V_{21})C_2\Big] \\
+\overline{\Phi}_1\Big[(\overline{w}_{11}e^V_{12} + \overline{w}_{12}e^V_{22})\overline{C}_1 + (\overline{w}_{11}e^V_{11} + \overline{w}_{12}e^V_{21})\overline{C_2}\Big] + \overline{\Phi}_2\Big[(\overline{w}_{21}e^V_{12} + \overline{w}_{22}e^V_{22})\overline{C}_1 \\
+(\overline{w}_{21}e^V_{11} + \overline{w}_{22}e^V_{21})\overline{C}_2\Big] = \overline{X}_1 + X_1,
\end{aligned} \tag{5.38}$$

$$\begin{aligned}
ie^{2QV_0}\Big[\overline{\Phi}_1 e^V_{12}\Phi_1 - \overline{\Phi}_1 e^V_{11}\Phi_2 + \overline{\Phi}_2 e^V_{22}\Phi_1 - \overline{\Phi}_2 e^V_{21}\Phi_2\Big] + i\Phi_1\Big[(w_{11}e^V_{12} + w_{12}e^V_{22})C_1 \\
-(w_{11}e^V_{11} + w_{12}e^V_{21})C_2\Big] + i\Phi_2\Big[(w_{21}e^V_{12} + w_{22}e^V_{22})C_1 - (w_{21}e^V_{11} + w_{22}e^V_{21})C_2\Big] \\
+i\overline{\Phi}_1\Big[(\overline{w}_{11}e^V_{12} + \overline{w}_{12}e^V_{22})\overline{C}_1 - (\overline{w}_{11}e^V_{11} + \overline{w}_{12}e^V_{11})\Big]\overline{C_2} + i\overline{\Phi}_2\Big[(\overline{w}_{21}e^V_{22} + \overline{w}_{22}e^V_{22})\overline{C}_1 \\
-(\overline{w}_{21}e^V_{11} + \overline{w}_{22}e^V_{21})\overline{C}_2\Big] = \overline{X}_2 + X_2,
\end{aligned} \tag{5.39}$$

$$\begin{aligned}
e^{2QV_0}\Big[\overline{\Phi}_1 e^V_{11}\Phi_1 - \overline{\Phi}_1 e^V_{12}\Phi_2 + \overline{\Phi}_2 e^V_{21}\Phi_1 - \overline{\Phi}_2 e^V_{22}\Phi_2\Big] + \Phi_1\Big[(w_{11}e^V_{11} + w_{12}e^V_{21})C_1 \\
-(w_{11}e^V_{12} + w_{12}e^V_{22})C_2\Big] + \Phi_2\Big[(w_{21}e^V_{11} + w_{22}e^V_{21})C_1 - (w_{21}e^V_{12} + w_{22}e^V_{22})C_2\Big] \\
+\overline{\Phi}_1\Big[(\overline{w}_{11}e^V_{11} + \overline{w}_{12}e^V_{21})\overline{C}_1 - (\overline{w}_{11}e^V_{12} + \overline{w}_{12}e^V_{22})\overline{C_2}\Big] + \overline{\Phi}_2\Big[(\overline{w}_{21}e^V_{11} + \overline{w}_{22}e^V_{21})\overline{C}_1 \\
-(\overline{w}_{21}e^V_{12} + \overline{w}_{22}e^V_{22})\overline{C}_2\Big] = \overline{X}_3 + X_3.
\end{aligned} \tag{5.40}$$

Podemos utilizar estas ecuaciones de movimiento para encontrar una expresión para el término cinético

$$e^{2QV_0}\overline{\Phi}_i(e^V)_{ij}\Phi_j = e^{2QV_0}\Big[\overline{\Phi}_1 e^V_{11}\Phi_1 + \overline{\Phi}_1 e^V_{12}\Phi_2 + \overline{\Phi}_2 e^V_{21}\Phi_1 + \overline{\Phi}_2 e^V_{22}\Phi_2\Big]. \tag{5.41}$$

Para esto, utilizamos (5.38) y (5.39) y encontramos las siguientes expresiones para e^V_{12} y e^V_{21}

$$
\begin{aligned}
e^V_{12} = &-\left(\frac{\overline{\Phi}_2\Phi_1 e^{2QV_0} + \Phi_1 w_{12}C_1 + \Phi_2 w_{22}C_1 + \overline{\Phi}_1\overline{w}_{12}\overline{C}_1 + \overline{\Phi}_2\overline{w}_{21}\overline{C}_1}{\overline{\Phi}_1\Phi_1 e^{2QV_0} + \Phi_1 w_{11}C_1 + \Phi_2 w_{21}C_1 + \overline{\Phi}_1\overline{w}_{11}\overline{C}_1 + \overline{\Phi}_2\overline{w}_{21}\overline{C}_1}\right) e^V_{22} \\
&+\frac{1}{2}\left(\frac{\overline{X}_1 + X_1 - i(\overline{X}_2 + X_2)}{\overline{\Phi}_1\Phi_1 e^{2QV_0} + \Phi_1 w_{11}C_1 + \Phi_2 w_{21}C_1 + \overline{\Phi}_1\overline{w}_{11}\overline{C}_1 + \overline{\Phi}_2\overline{w}_{21}\overline{C}_1}\right),
\end{aligned}
\tag{5.42}
$$

$$
\begin{aligned}
e^V_{21} = &-\left(\frac{\overline{\Phi}_1\Phi_2 e^{2QV_0} + \Phi_1 w_{11}C_2 + \Phi_2 w_{21}C_2 + \overline{\Phi}_1\overline{w}_{11}\overline{C}_2 + \overline{\Phi}_2\overline{w}_{21}\overline{C}_2}{\overline{\Phi}_2\Phi_2 e^{2QV_0} + \Phi_1 w_{12}C_2 + \Phi_2 w_{22}C_2 + \overline{\Phi}_1\overline{w}_{12}\overline{C}_2 + \overline{\Phi}_2\overline{w}_{22}\overline{C}_2}\right) e^V_{11} \\
&+\frac{1}{2}\left(\frac{\overline{X}_1 + X_1 + i(\overline{X}_2 + X_2)}{\overline{\Phi}_2\Phi_2 e^{2QV_0} + \Phi_1 w_{12}C_2 + \Phi_2 w_{22}C_2 + \overline{\Phi}_1\overline{w}_{12}\overline{C}_2 + \overline{\Phi}_2\overline{w}_{22}\overline{C}_2}\right),
\end{aligned}
$$

las cuales al considerar $C_{1,2} = \overline{C}_{1,2} = 0$ se reducen a las mismas que para el caso sin superpotencial (4.45).

Con estos resultados en (5.41) tendremos que

$$
\begin{aligned}
e^{2QV_0}\overline{\Phi}_i(e^V)_{ij}\Phi_j = e^{2QV_0}\Big\{&\overline{\Phi}_1 e^V_{11}\Phi_1 + \overline{\Phi}_2 e^V_{22}\Phi_2 \\
&-\overline{\Phi}_1\left(\frac{\overline{\Phi}_2\Phi_2 e^{2QV_0} + \frac{\overline{\Phi}_2}{\overline{\Phi}_1}(\Phi_1 w_{11}C_2 + \Phi_2 w_{21}C_2 + \overline{\Phi}_1\overline{w}_{11}\overline{C}_2 + \overline{\Phi}_2\overline{w}_{21}\overline{C}_2)}{\overline{\Phi}_2\Phi_2 e^{2QV_0} + \Phi_1 w_{12}C_2 + \Phi_2 w_{22}C_2 + \overline{\Phi}_1\overline{w}_{12}\overline{C}_2 + \overline{\Phi}_2\overline{w}_{22}\overline{C}_2}\right)\Phi_1 e^V_{11} \\
&+\frac{1}{2}\overline{\Phi}_1\left(\frac{\overline{X}_1 + X_1 - i(\overline{X}_2 + X_2)}{\overline{\Phi}_1\Phi_1 e^{2QV_0} + \Phi_1 w_{11}C_1 + \Phi_2 w_{21}C_1 + \overline{\Phi}_1\overline{w}_{11}\overline{C}_1 + \overline{\Phi}_2\overline{w}_{21}\overline{C}_1}\right)\Phi_2 \\
&+\frac{1}{2}\overline{\Phi}_2\left(\frac{\overline{X}_1 + X_1 + i(\overline{X}_2 + X_2)}{\overline{\Phi}_2\Phi_2 e^{2QV_0} + \Phi_1 w_{12}C_2 + \Phi_2 w_{22}C_2 + \overline{\Phi}_1\overline{w}_{12}\overline{C}_2 + \overline{\Phi}_2\overline{w}_{22}\overline{C}_2}\right)\Phi_1 \\
&-\overline{\Phi}_2\left(\frac{\overline{\Phi}_1\Phi_1 e^{2QV_0} + \frac{\overline{\Phi}_1}{\overline{\Phi}_2}(\Phi_1 w_{12}C_1 + \Phi_2 w_{22}C_1 + \overline{\Phi}_1\overline{w}_{12}\overline{C}_1 + \overline{\Phi}_2\overline{w}_{22}\overline{C}_1)}{\overline{\Phi}_1\Phi_1 e^{2QV_0} + \Phi_1 w_{11}C_1 + \Phi_2 w_{21}C_1 + \overline{\Phi}_1\overline{w}_{11}\overline{C}_1 + \overline{\Phi}_2\overline{w}_{21}\overline{C}_1}\right)\Phi_2 e^V_{22}\Big\},
\end{aligned}
\tag{5.43}
$$

donde notamos que los términos entre paréntesis que acompañan a e^V_{11} y e^V_{22} se simplifican. Eliminando la dependencia en e^V del lado derecho de la ecuación únicamente si se satisface la condición

$$
\begin{aligned}
&\frac{\overline{\Phi}_2}{\overline{\Phi}_1}(\Phi_1 w_{11}C_2 + \Phi_2 w_{21}C_2 + \overline{\Phi}_1\overline{w}_{11}\overline{C}_2 + \overline{\Phi}_2\overline{w}_{21}\overline{C}_2) \\
&= \Phi_1 w_{12}C_2 + \Phi_2 w_{22}C_2 + \overline{\Phi}_1\overline{w}_{12}\overline{C}_2 + \overline{\Phi}_2\overline{w}_{22}\overline{C}_2,
\end{aligned}
\tag{5.44}
$$

o bien

$$
\frac{\overline{\Phi}_2}{\overline{\Phi}_1} = 1 \quad w_{11} = w_{12}, \quad w_{22} = w_{21}.
\tag{5.45}
$$

Sin embargo, considerando este conjunto de condiciones el modelo se vuelve trivial y el Lagrangiano queda únicamente en términos de los supercampos quirales torcidos $X_1, \quad \overline{X}_1$. Para evitar esto, podemos considerar $w_{12} = w_{21} = 0, \quad \overline{w}_{12} = \overline{w}_{21} = 0$ debido a que tenemos la libertad de elegir la interacción. Bajo esta consideración, tendremos que (5.42) será

$$\begin{aligned} e_{12}^V &= -\left(\frac{\overline{\Phi}_2\Phi_1 e^{2QV_0}+(\Phi_2 w_{22}C_1+\overline{\Phi}_2\overline{w}_{22}\overline{C}_1)}{\overline{\Phi}_1\Phi_1 e^{2QV_0}+(\Phi_1 w_{11}C_1+\overline{\Phi}_1\overline{w}_{11}\overline{C}_1)}\right)e_{22}^V + \frac{1}{2}\left(\frac{\overline{X}_1+X_1-i(\overline{X}_2+X_2)}{\overline{\Phi}_1\Phi_1 e^{2QV_0}+(\Phi_1 w_{11}C_1+\overline{\Phi}_1\overline{w}_{11}\overline{C}_1)}\right), \\ e_{21}^V &= -\left(\frac{\overline{\Phi}_1\Phi_2 e^{2QV_0}+(\Phi_1 w_{11}C_2+\overline{\Phi}_1\overline{w}_{11}\overline{C}_2)}{\overline{\Phi}_2\Phi_2 e^{2QV_0}+(\Phi_2 w_{22}C_2+\overline{\Phi}_2\overline{w}_{22}\overline{C}_2)}\right)e_{11}^V + \frac{1}{2}\left(\frac{\overline{X}_1+X_1+i(\overline{X}_2+X_2)}{\overline{\Phi}_2\Phi_2 e^{2QV_0}+(\Phi_2 w_{22}C_2+\overline{\Phi}_2\overline{w}_{22}\overline{C}_2)}\right). \end{aligned} \tag{5.46}$$

Entonces (5.43) será

$$\begin{aligned} e^{2QV_0}\overline{\Phi}_i(e^V)_{ij}\Phi_j = e^{2QV_0}\Big\{&\overline{\Phi}_1 e_{11}^V\Phi_1 - \overline{\Phi}_1\left(\frac{\overline{\Phi}_2\Phi_2 e^{2QV_0}+\frac{\overline{\Phi}_2}{\overline{\Phi}_1}(C_2 w_{11}\Phi_1+\overline{C}_2\overline{w}_{11}\overline{\Phi}_1)}{\overline{\Phi}_2\Phi_2 e^{2QV_0}+(C_2 w_{22}\Phi_2+\overline{C}_2\overline{w}_{22}\overline{\Phi}_2)}\right)\Phi_1 e_{11}^V \\ &+\frac{1}{2}\overline{\Phi}_1\left(\frac{\overline{X}_1+X_1-i(\overline{X}_2+X_2)}{\overline{\Phi}_1\Phi_1 e^{2QV_0}+(C_1 w_{11}\Phi_1+\overline{C}_1\overline{w}_{11}\overline{\Phi}_1)}\right)\Phi_2 + \frac{1}{2}\overline{\Phi}_2\left(\frac{\overline{X}_1+X_1+i(\overline{X}_2+X_2)}{\overline{\Phi}_2\Phi_2 e^{2QV_0}+(C_2 w_{22}\Phi_2+\overline{C}_2\overline{w}_{22}\overline{\Phi}_2)}\right)\Phi_1 \\ &+\overline{\Phi}_2 e_{22}^V\Phi_2 - \overline{\Phi}_2\left(\frac{\overline{\Phi}_1\Phi_1 e^{2QV_0}+\frac{\overline{\Phi}_1}{\overline{\Phi}_2}(C_1 w_{22}\Phi_2+\overline{C}_1\overline{w}_{22}\overline{\Phi}_2)}{\overline{\Phi}_1\Phi_1 e^{2QV_0}+(C_1 w_{11}\Phi_1+\overline{C}_1\overline{w}_{11}\overline{\Phi}_1)}\right)\Phi_2 e_{22}^V\Big\}. \end{aligned} \tag{5.47}$$

Notamos que para que los términos e_{11}^V y e_{22}^V se eliminen, debe cumplirse

$$\frac{\overline{\Phi}_2}{\overline{\Phi}_1}(C_2 w_{11}\Phi_1 + \overline{C}_2\overline{w}_{11}\overline{\Phi}_1) = (C_2 w_{22}\Phi_2 + \overline{C}_2\overline{w}_{22}\overline{\Phi}_2), \tag{5.48}$$

o bien

$$\frac{\Phi_1}{\overline{\Phi}_1} = \frac{\Phi_2}{\overline{\Phi}_2}, \quad w_{11} = w_{22}. \tag{5.49}$$

Por lo que (5.47) se reduce a

$$\begin{aligned} e^{2QV_0}\overline{\Phi}_i(e^V)_{ij}\Phi_j = e^{2QV_0}\Big[&\frac{1}{2}\overline{\Phi}_1\left(\frac{\overline{X}_1+X_1-i(\overline{X}_2+X_2)}{\overline{\Phi}_1\Phi_1 e^{2QV_0}+(C_1 w_{11}\Phi_1+\overline{C}_1\overline{w}_{11}\overline{\Phi}_1)}\right)\Phi_2 \\ &+\frac{1}{2}\overline{\Phi}_2\left(\frac{\overline{X}_1+X_1+i(\overline{X}_2+X_2)}{\overline{\Phi}_2\Phi_2 e^{2QV_0}+(C_2 w_{22}\Phi_2+\overline{C}_2\overline{w}_{22}\overline{\Phi}_2)}\right)\Phi_1\Big]. \end{aligned} \tag{5.50}$$

Esta expresión puede ser reducida considerando $F = \frac{\Phi_2}{\Phi_1}$ y la condición (5.45), por lo que después de una manipulación algebraica llegamos a que

$$
\begin{aligned}
e^{2QV_0}\overline{\Phi}_i(e^V)_{ij}\Phi_j = \frac{e^{2QV_0}}{2}\Big[&\frac{(\overline{X}_1 + X_1 - i(\overline{X}_2 + X_2))F}{e^{2QV_0} + \frac{\overline{C_1}\overline{w}_{11}}{\Phi_1} + \frac{C_1 w_{11}}{\overline{\Phi}_1}} \\
&+ \frac{\overline{X}_1 + X_1 + i(\overline{X}_2 + X_2)}{F(e^{2QV_0} + \frac{\overline{C_2}\overline{w}_{22}}{\Phi_2} + \frac{C_2 w_{22}}{\overline{\Phi}_2})}\Big],
\end{aligned}
\tag{5.51}
$$

que para el caso $C_{1,2} = 0, \quad \overline{C}_{1,2} = 0$ se reduce al mismo resultado que sin considerar el término con superpotencial. Sin embargo aquí surge una problemática, en el caso sin superpotencial podíamos emplear este resultado y la tercera ecuación ($a = 3$) para encontrar una solución para F. Sin embargo en este caso no tenemos una ecuación que dependa únicamente de F, el término

$$
\frac{\overline{C_i}\overline{w}_{ii}}{\Phi_i} + \frac{C_i w_{ii}}{\overline{\Phi}_i}, \tag{5.52}
$$

es el que ocasiona que no podamos resolver para F en términos de los nuevos supercampos quirales torcidos X_a. Para solucionar esto, es posible fijar la norma como

$$
\Phi_i\overline{\Phi}_i = 1, \quad (C_i w_{ii}\Phi_i + \overline{C}_i\overline{w}_{ii}\overline{\Phi}_i) = 1. \tag{5.53}
$$

Por lo que

$$
\frac{\overline{C_i}\overline{w}_{ii}}{\Phi_i} + \frac{C_i w_{ii}}{\overline{\Phi}_i} = 1. \tag{5.54}
$$

Con esto, podemos reescribir el término cinético (5.51) como

$$
\begin{aligned}
e^{2QV_0}\overline{\Phi}_i(e^V)_{ij}\Phi_j = &\frac{\Big[\overline{X}_1 + X_1 - i(\overline{X}_2 + X_2)\Big]F}{2} \\
&+ \frac{\overline{X}_1 + X_1 + i(\overline{X}_2 + X_2)}{2F}.
\end{aligned}
\tag{5.55}
$$

Podemos reescribir F en términos de los supercampos duales utilizando la ecuación de movimiento para el generador σ_3 (5.40). Obtenemos entonces la ecuación

$$\begin{aligned}
&\frac{e^{2QV_0}}{2}\Big[-\frac{(\overline{X}_1+X_1-i(\overline{X}_2+X_2))F}{e^{2QV_0}+\frac{\overline{C}_1\overline{w}_{11}}{\Phi_1}+\frac{C_1w_{11}}{\overline{\Phi}_1}}+\frac{\overline{X}_1+X_1+i(\overline{X}_2+X_2)}{F(e^{2QV_0}+\frac{\overline{C}_2\overline{w}_{22}}{\Phi_2}+\frac{C_2w_{22}}{\overline{\Phi}_2})}\Big]+\Phi_1e^V_{11}C_1w_{11}\\
&+\Phi_2e^V_{22}C_2w_{22}-\frac{\Phi_1C_2w_{12}}{2}\Big(\frac{\overline{X}_1+X_1-i(\overline{X}_2+X_2)}{\overline{\Phi}_1\Phi_1e^{2QV_0}+C_1w_{11}\Phi_1+\overline{C}_1\overline{w}_{11}\overline{\Phi}_1}\Big)+\overline{\Phi}_1e^V_{11}\overline{C}_1\overline{w}_{21}\\
&+\overline{\Phi}_2e^V_{22}\overline{C}_2\overline{w}_{22}-\frac{\overline{\Phi}_1\overline{C}_2\overline{w}_{12}}{2}\Big(\frac{\overline{X}_1+X_1-i(\overline{X}_2+X_2)}{\overline{\Phi}_1\Phi_1e^{2QV_0}+C_1w_{11}\Phi_1+\overline{C}_1\overline{w}_{11}\overline{\Phi}_1}\Big)-\Phi_1e^V_{11}C_1w_{11}\\
&-\Phi_2e^V_{22}C_2w_{22}+\frac{\Phi_2C_1w_{21}}{2}\Big(\frac{\overline{X}_1+X_1+i(\overline{X}_2+X_2)}{\overline{\Phi}_2\Phi_2e^{2QV_0}+C_2w_{22}\Phi_2+\overline{C}_2\overline{w}_{22}\overline{\Phi}_2}\Big)-\overline{\Phi}_1e^V_{11}\overline{C}_1\overline{w}_{21}\\
&-\overline{\Phi}_2e^V_{22}\overline{C}_2\overline{w}_{22}+\frac{\overline{\Phi}_2\overline{C}_1\overline{w}_{21}}{2}\Big(\frac{\overline{X}_1+X_1+i(\overline{X}_2+X_2)}{\overline{\Phi}_2\phi_2e^{2QV_0}+C_2w_{22}\Phi_2+\overline{C}_2\overline{w}_{22}\overline{\Phi}_2}\Big)=\overline{X}_3X_3,
\end{aligned}\tag{5.56}$$

donde para simplificar se usó la condición (5.45).

En la ecuación previa se pueden eliminar algunos términos considerando $w_{12}=w_{21}=0$, $\overline{w}_{12}=\overline{w}_{21}=0$ y las condiciones de fijación de norma, obteniendo

$$\frac{e^{2QV_0}}{2}\Big[\frac{\overline{X}_1+X_1+i(\overline{X}_2+X_2)}{F(e^{2QV_0}+1)}-\frac{(\overline{X}_1+X_1-i(\overline{X}_2+X_2))F}{e^{2QV_0}+1}\Big]=\overline{X}_3X_3,\tag{5.57}$$

la cual puede reescribirse como

$$\begin{aligned}
-F^2\Big[\overline{X}_1+X_1-i(\overline{X}_2+X_2)\Big]+\overline{X}_1+X_1+i(\overline{X}_2+X_2)&\\
=2F(\overline{X}_3+X_3)\frac{e^{2QV_0}+1}{e^{2QV_0}}&.
\end{aligned}\tag{5.58}$$

y puede ser resuelta para F sencillamente, dando como resultado

$$F=\frac{-(\frac{1+e^{2QV_0}}{e^{2QV_0}})(\overline{X}_3+X_3)\pm\sqrt{(\frac{1+e^{2QV_0}}{e^{2QV_0}})^2(\overline{X}_3+X_3)^2+(\overline{X}_2+X_2)^2+(\overline{X}_3+X_3)^2}}{(\overline{X}_1+X_1)-i(\overline{X}_2+X_2)}.\tag{5.59}$$

Por lo que el término cinético (5.55) puede reescribirse completamente en términos de los campos duales.

Por otro lado, al igual que para el caso sin superpotencial, podemos considerar el supercampo vectorial V alineado con el generador σ_1 ($V=V_1\sigma_1$), por lo que podemos expresar la exponencial del supercampo vectorial como (4.51) y utilizando (5.42), vemos que se cumplen las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned} sinh(V_1) = -\Bigg((\frac{\overline{\Phi}_2\Phi_1 e^{2QV_0} + (\Phi_2 w_{22} C_1 + \overline{\Phi}_2\overline{w}_{22}\overline{C}_1)}{\overline{\Phi}_1\Phi_1 e^{2QV_0} + (\Phi_1 w_{11} C_1 + \overline{\Phi}_1\overline{w}_{11}\overline{C}_1)}\Bigg) cosh(V_1) \\ + \frac{1}{2}\Bigg(\frac{\overline{X}_1 + X_1 - i(\overline{X}_2 + X_2)}{\overline{\Phi}_1\Phi_1 e^{2QV_0} + (\Phi_1 w_{11} C_1 + \overline{\Phi}_1\overline{w}_{11}\overline{C}_1)}\Bigg), \end{aligned} \tag{5.60}$$

$$\begin{aligned} sinh(V_1) = -\Bigg(\frac{\overline{\Phi}_1\Phi_2 e^{2QV_0} + (\Phi_1 w_{11} C_2 + \overline{\Phi}_1\overline{w}_{11}\overline{C}_2)}{\overline{\Phi}_2\Phi_2 e^{2QV_0} + (\Phi_2 w_{22} C_2 + \overline{\Phi}_2\overline{w}_{22}\overline{C}_2)}\Bigg) cosh(V_1) \\ + \frac{1}{2}\Bigg(\frac{\overline{X}_1 + X_1 + i(\overline{X}_2 + X_2)}{\overline{\Phi}_2\Phi_2 e^{2QV_0} + (\Phi_2 w_{22} C_2 + \overline{\Phi}_2\overline{w}_{22}\overline{C}_2)}\Bigg). \end{aligned}$$

Sumando y restando estas ecuaciones es posible encontrar una solución para V_1

$$V_1 = \ln\Big[\frac{\overline{X}_1+X_1-i(\overline{X}_2+X_2)+\sqrt{-4\overline{\Phi}_1^2\Phi_1^2(1-F)^2(e^{2QV_0}F+\frac{\overline{C}_2\overline{w}_{22}}{\Phi_2}+\frac{C_2 w_{22}}{\overline{\Phi}_2})^2+(\overline{X}_1+X_1+i(\overline{X}_2+X_2))^2}}{(\overline{\Phi}_1\Phi_1)(1+F)(e^{2QV_0}F+\frac{\overline{C}_2\overline{w}_{22}}{\Phi_2}+\frac{C_2 w_{22}}{\overline{\Phi}_2})}\Big]. \tag{5.61}$$

Por lo que

$$e^{V_1} = \frac{\overline{X}_1+X_1-i(\overline{X}_2+X_2)+\sqrt{-4\overline{\Phi}_1^2\Phi_1^2(1-F)^2(e^{2QV_0}F+\frac{\overline{C}_2\overline{w}_{22}}{\Phi_2}+\frac{C_2 w_{22}}{\overline{\Phi}_2})^2+(\overline{X}_1+X_1+i(\overline{X}_2+X_2))^2}}{(\overline{\Phi}_1\Phi_1)(1+F)(e^{2QV_0}F+\frac{\overline{C}_2\overline{w}_{22}}{\Phi_2}+\frac{C_2 w_{22}}{\overline{\Phi}_2})}. \tag{5.62}$$

Sin embargo, podemos fijar la norma (5.54) por lo que tendremos que (5.61) y (5.62) serán

$$\begin{aligned} V_1 &= \ln\Big[\frac{\overline{X}_1+X_1-i(\overline{X}_2+X_2)+\sqrt{-4(1-F)^2(e^{2QV_0}F+1)^2+(\overline{X}_1+X_1+i(\overline{X}_2+X_2))^2}}{(1+F)(e^{2QV_0}F+1)}\Big], \\ e^{V_1} &= \frac{\overline{X}_1+X_1-i(\overline{X}_2+X_2)+\sqrt{-4(1-F)^2(e^{2QV_0}F+1)^2+(\overline{X}_1+X_1+i(\overline{X}_2+X_2))^2}}{(1+F)(e^{2QV_0}F+1)}. \end{aligned} \tag{5.63}$$

Por otro lado sabemos que para $SU(2)$ se cumple (4.56), de esta manera usando (5.51) tendremos que el Lagrangiano dual es

$$\begin{aligned} L_{d,SU(2)} = \int d^4\theta \Big\{ \frac{e^{2QV_0}}{2}\Big[\frac{(\overline{X}_1 + X_1 - i(\overline{X}_2 + X_2))F}{e^{2QV_0} + 1} + \frac{\overline{X}_1 + X_1 + i(\overline{X}_2 + X_2)}{e^{2QV_0}F + 1}\Big] \\ -(X_1 V_1 + \overline{X}_1 V_1) + 2e^{V_1} - \frac{1}{2e^2}\Sigma_0\Sigma_0\Big\} - \frac{1}{2}\Big(\int d^2\tilde{\theta}\Sigma_0 + c.c\Big). \end{aligned} \tag{5.64}$$

Por lo que utilizando el resultado obtenido para el superpotencial (5.63), podremos escribir el Lagrangiano como

$$
\begin{aligned}
L_{d,SU(2)} = \int d^4\theta \Big\{ \frac{e^{2QV_0}}{2} \Big[\frac{(\overline{X}_1 + X_1 - i(\overline{X}_2 + X_2))F}{e^{2QV_0}+1} + \frac{\overline{X}_1 + X_1 + i(\overline{X}_2 + X_2)}{e^{2QV_0}F+1} \Big] \\
-(X_1+\overline{X}_1)\ln\Big[(\overline{X}_1+X_1+i(\overline{X}_2+X_2)+\sqrt{-4(1-F)^2(e^{2QV_0}F+1)^2+(\overline{X}_1+X_1+i(\overline{X}_2+X_2))^2}\Big] \\
+(X_1+\overline{X}_1)\ln(1+F) + \ln(e^{2QV_0}F+1) \\
+\frac{\overline{X}_1+X_1+i(\overline{X}_2+X_2)+\sqrt{-4(1-F)^2(e^{2QV_0}F+1)^2+(\overline{X}_1+X_1+i(\overline{X}_2+X_2))^2}}{(e^{2QV_0}F+1)} \\
-\frac{1}{2e^2}\Sigma_0\Sigma_0\Big\} - \frac{1}{2}\Big(\int d^2\tilde{\theta}\Sigma_0 + c.c\Big),
\end{aligned}
\tag{5.65}
$$

donde vemos que

$$
\begin{aligned}
\int d^4\theta(\overline{X}_1 + X_1)\ln\Big[e^{2QV_0}\Big(F+\frac{1}{e^{2QV_0}}\Big)\Big] \\
= \int d^4\theta(\overline{X}_1 + X_1)\ln(e^{2QV_0}) + \int d^4\theta(\overline{X}_1 + X_1)\Big(F+\frac{1}{e^{2QV_0}}\Big).
\end{aligned}
\tag{5.66}
$$

Como se vió en el caso sin superpotencial

$$
\int d^4\theta(X_1+\overline{X}_1)2QV_0 = Q\int d\theta^+ d\tilde{\theta}^- X_1\Sigma_0 + Q\int d\theta^- d\tilde{\theta}^+ \overline{X}_1\overline{\Sigma}_0. \tag{5.67}
$$

Finalmente el Lagrangiano dual queda como

$$
\begin{aligned}
L_{d,SU(2)} = \int d^4\theta \Big\{ \frac{e^{2QV_0}}{2} \Big[\frac{(\overline{X}_1 + X_1 - i(\overline{X}_2 + X_2))F}{e^{2QV_0}+1} + \frac{\overline{X}_1 + X_1 + i(\overline{X}_2 + X_2)}{e^{2QV_0}F+1} \Big] \\
-(X_1+\overline{X}_1)\ln\Big[(\overline{X}_1+X_1+i(\overline{X}_2+X_2)+\sqrt{-4(1-F)^2(e^{2QV_0}F+1)^2+(\overline{X}_1+X_1+i(\overline{X}_2+X_2))^2}\Big] \\
+(X_1+\overline{X}_1)\ln(1+F) + \ln\Big(F+\frac{1}{e^{2QV_0}}\Big) \\
+\frac{\overline{X}_1+X_1+i(\overline{X}_2+X_2)+\sqrt{-4(1-F)^2(e^{2QV_0}F+1)^2+(\overline{X}_1+X_1+i(\overline{X}_2+X_2))^2}}{(e^{2QV_0}F+1)} \\
-\frac{1}{2e^2}\Sigma_0\Sigma_0\Big\} + Q\int d\theta^+ d\tilde{\theta}^- \left(X_1 - \frac{t}{2Q}\right)\Sigma_0 + Q\int d\theta^- d\tilde{\theta}^+ \left(\overline{X}_1 - \frac{\tilde{t}}{2Q}\right)\overline{\Sigma}_0.
\end{aligned}
\tag{5.68}
$$

Debido a que la solución de F (5.59) está dada en términos de los nuevos campos quirales torcidos, el nuevo Lagrangiano queda completamente en términos de estos campos.

Podemos calcular el superpotencial escalar del modelo dual para encontrar la geometría del espacio target de la teoría dual.

Para esto, igual que en el caso pasado, analizamos cada uno de los términos del Lagrangiano, expandiendo las componentes en términos de sus componentes bosónicas, tendremos que

$$\frac{1}{2e^2}\int \Sigma_0\overline{\Sigma}_0 d^4\theta = \frac{2}{e^2}(D^2+v_{03}^2), \tag{5.69}$$

$$\begin{aligned}
Q\int\Big(X_1-\frac{t}{2Q}\Big)\Sigma_0 d^2\tilde{\theta} &= 2Q[i(\overline{\lambda}_+\chi_- - \overline{\chi}_+\lambda_-) \\
&\quad +\sigma_0 G_1 + x_1(D-iv_{03})] - t(D-iv_{03}), \\
Q\int\Big(\overline{X}_1-\frac{\bar{t}}{2Q}\Big)\overline{\Sigma}_0 d^2\tilde{\overline{\theta}} &= 2Q[i(\overline{\lambda}_-\chi_+ - \overline{\chi}_-\lambda_+) \\
&\quad +\overline{\sigma}_0\overline{G}_1 + \overline{x}_1(D+iv_{03})] - \bar{t}(D+i\overline{v}_{03}).
\end{aligned} \tag{5.70}$$

Por otro lado, para el término cinético tendremos que seguir el mismo procedimiento que para el caso Abeliano, el término cinético es

$$\begin{aligned}
&\int d^4\theta \frac{e^{2QV_0}}{2}\Big[\frac{(\overline{X}_1+X_1-i(\overline{X}_2+X_2))F}{e^{2QV_0}+1} + \frac{\overline{X}_1+X_1+i(\overline{X}_2+X_2)}{e^{2QV_0}F+1}\Big] \\
&-(X_1+\overline{X}_1)\ln\Big[\overline{X}_1+X_1+i(\overline{X}_2+X_2)+\sqrt{-4(1-F)^2(e^{2QV_0}F+1)^2+(\overline{X}_1+X_1+i(\overline{X}_2+X_2))^2}\Big] \\
&\qquad +(X_1+\overline{X}_1)\ln(1+F)+\ln(F+\frac{1}{e^{2QV_0}}) \\
&+\frac{\overline{X}_1+X_1+i(\overline{X}_2+X_2)+\sqrt{-4(1-F)^2(e^{2QV_0}F+1)^2+(\overline{X}_1+X_1+i(\overline{X}_2+X_2))^2}}{(e^{2QV_0}F+1)},
\end{aligned} \tag{5.71}$$

donde el valor de F es (5.59). Debido a que F está a su vez en términos de los campos, para poder hacer la expansión y obtener las componentes que quedan tras realizar la integración utilizamos las siguientes expansiones

$$\begin{aligned}
ln(1+x) &= x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots, \\
ln(1-x) &= -x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-\cdots, \\
\sqrt{1+x} &= 1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\frac{x^3}{16}+\cdots, \\
\sqrt{1-x} &= 1-\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}-\frac{x^3}{16}-\cdots.
\end{aligned} \tag{5.72}$$

Haciendo uso de estas expansiones, podemos reescribir F como

$$\begin{aligned} F \approx -\Big(\frac{1+e^{2QV_0}}{e^{2QV_0}}\Big)\Big(\frac{X_3+\overline{X}_3}{X_1+\overline{X}_1}\Big)+1+\frac{1}{2}\frac{\Big(\frac{1+e^{2QV_0}}{e^{2QV_0}}\Big)^2(X_3+\overline{X}_3)^2+(X_2+\overline{X}_2)^2}{(X_1+\overline{X}_1)^2} \\ +i\Big(\frac{1+e^{2QV_0}}{e^{2QV_0}}\Big)\frac{(X_2+\overline{X}_2)(X_3+\overline{X}_3)}{(X_1+\overline{X}_1)^2}-i\frac{X_2+\overline{X}_2}{X_1+\overline{X}_1} \\ -\frac{i}{2}\Big(\frac{X_2+\overline{X}_2}{X_1+\overline{X}_1}\Big)\frac{\Big(\frac{1+e^{2QV_0}}{1-e^{2QV_0}}\Big)^2(X_3+\overline{X}_3)^2+(X_2+\overline{X}_2)^2}{(X_1+\overline{X}_1)^2}. \end{aligned} \tag{5.73}$$

Igualmente será útil utilizar las expresiones

$$\begin{aligned} \frac{1}{X_i+\overline{X}_i} &= \frac{1}{(x_i+\overline{x}_i)^2}[x_i+\overline{x}_i-\sqrt{2}\theta^+\overline{\chi}_+-\sqrt{2}\overline{\theta}^+\chi_+-2\theta^+\overline{\theta}^-G_i \\ &\qquad -\sqrt{2}\chi_-\overline{\theta}^--\sqrt{2}\overline{\chi}_-\theta^-+2\theta^-\overline{\theta}^+\overline{G_i}], \\ \frac{1}{X_i+\overline{X}_i+i(X_j+\overline{X}_j)} &= \frac{1}{(x_i+x_j+\overline{x}_i+\overline{x}_j)^2}[x_i+x_j+\overline{x}_i+\overline{x}_j \\ &\qquad -2\sqrt{2}(\theta^+\overline{\chi}_++\overline{\theta}^-\chi_-+\overline{\theta}^+\chi_++\theta^-\overline{\chi}_-)-2(\theta^+\overline{\theta}^-(G_i+G_j) \\ &\qquad +\theta^-\overline{\theta}^+(\overline{G}_i+\overline{G}_j))]. \end{aligned} \tag{5.74}$$

Con estos resultados, podemos encontrar las componentes de cada uno de los términos cinéticos del Lagrangiano

$$\begin{aligned} &\int d^4\theta\frac{e^{2QV_0}}{2}\Big[\frac{(X_1+\overline{X}_1-i(X_2+\overline{X}_2))F}{e^{2QV_0}+1}\Big] \\ &= \int d^4\theta\frac{e^{2QV_0}}{2(e^{2QV_0}+1)}\Big\{\frac{1}{2}\Big(\frac{(X_2+\overline{X}_2)^2+(X_3+\overline{X}_3)^2\Big(\frac{1+e^{2QV_0}}{e^{2QV_0}}\Big)^2}{X_1+\overline{X}_1}\Big) \\ &\qquad +2i\Big(\frac{1+e^{2QV_0}}{e^{2QV_0}}\Big)\frac{(X_3+\overline{X}_3)(X_2+\overline{X}_2)}{(X_1+\overline{X}_1)} \\ &\qquad -i(X_2+\overline{X}_2)\Big(\frac{(X_2+\overline{X}_2)^2+(X_3+\overline{X}_3)^2\Big(\frac{1+e^{2QV_0}}{e^{2QV_0}}\Big)}{(X_1+\overline{X}_1)^2}\Big) \\ &\qquad +\frac{(X_2+\overline{X}_2)^2}{(X_1+\overline{X}_1)}\Big[1+\frac{1}{2}\Big(\frac{(X_2+\overline{X}_2)^2+(X_3+\overline{X}_3)^2\Big(\frac{1+e^{2QV_0}}{e^{2QV_0}}\Big)^2}{(X_1+\overline{X}_1)^2}\Big)\Big]\Big\}. \end{aligned} \tag{5.75}$$

Haciendo la expansión de las componentes y usando (5.74), obtenemos para el primer término

$$
\begin{aligned}
&\int d^4\theta \frac{e^{2QV_0}}{2}\Big[\frac{(X_1+\overline{X}_1-i(X_2+\overline{X}_2))F}{e^{2QV_0}+1}\Big] \\
&= \frac{e^{2QV_0}}{2(e^{2QV_0}+1)}\Big\{\frac{\overline{x}_1+x_1}{(\overline{x}_1+x_1)^2}2\Big[\overline{G}_2G_2+(\overline{G}_3G_3)\Big(\frac{e^{2QV_0}+1}{e^{2QV_0}}\Big)\Big] \\
&+\frac{8i}{(\overline{x}_1+x_1)^2}\Big(\frac{e^{2QV_0}+1}{e^{2QV_0}}\Big)[\overline{G}_2G_3+\overline{G}_3G_2]-\frac{i}{(\overline{x}_1+x_1)^2}4[(\overline{G}_2G_1 \\
&+\overline{G}_1G_2)\Big(\Big(\frac{e^{2QV_0}+1}{e^{2QV_0}}\Big)(\overline{x}_3x_3)+\overline{x}_2x_2\Big)+\Big(\overline{G}_2G_2+\overline{G}_3G_3\Big(\frac{e^{2QV_0}+1}{e^{2QV_0}}\Big)\Big)(\overline{x}_1+x_1 \\
&+\overline{x}_2+x_2)]+\frac{4}{(\overline{x}_1+x_1)^2}[\overline{G}_2G_2(\overline{x}_1+x_1)]+2\Big[\Big(\Big(\frac{e^{2QV_0}+1}{e^{2QV_0}}\Big)(\overline{x}_3x_3)+\overline{x}_2x_2\Big)(\overline{G}_2G_2 \\
&+\overline{G}_1G_1)(\overline{x}_1+x_1)+\Big(\overline{G}_2G_2+\overline{G}_3G_3\Big(\frac{e^{2QV_0}+1}{e^{2QV_0}}\Big)(\overline{x}_1x_1\overline{x}_2x_2)(\overline{x}_1+x_1)\Big)\Big]\Big\},
\end{aligned}
\tag{5.76}
$$

donde hemos considerado en el resultado final únicamente las componentes bosónicas y los campos auxiliares de la expansión.

Para el segundo término

$$
\begin{aligned}
\int d^4\theta \frac{e^{2QV_0}}{2}\Big[\frac{X_1+\overline{X}_1+i(X_2+\overline{X}_2)}{1+Fe^{2QV_0}}\Big] &= \int d^4\theta \frac{e^{2QV_0}}{2}[X_1+\overline{X}_1+i(X_2+\overline{X}_2)] \\
-\int d^4\theta \frac{e^{4QV_0}}{2}\Big\{-\frac{1}{2}\Big(&\frac{(X_2+\overline{X}_2)^2+(X_3+\overline{X}_3)^2\Big(\frac{1+e^{2QV_0}}{e^{2QV_0}}\Big)^2}{X_1+\overline{X}_1}\Big) \\
+\frac{(X_2+\overline{X}_2)^2}{(X_1+\overline{X}_1)}\Big[1+\frac{1}{2}\Big(&\frac{(X_2+\overline{X}_2)^2+(X_3+\overline{X}_3)^2\Big(\frac{1+e^{2QV_0}}{e^{2QV_0}}\Big)^2}{(X_1+\overline{X}_1)^2}\Big)\Big]\Big\}
\end{aligned}
\tag{5.77}
$$

y al hacer la expansión en componentes obtendremos

$$
\begin{aligned}
&\int d^4\theta \frac{e^{2QV_0}}{2}\Big[\frac{(X_1+\overline{X}_1-i(X_2+\overline{X}_2))F}{e^{2QV_0}+1}\Big] \\
&= \frac{e^{4QV_0}}{2}\Big\{-\frac{\overline{x}_1+x_1}{(\overline{x}_1+x_1)^2}2\Big[\overline{G}_2G_2+(\overline{G}_3G_3)\Big(\frac{e^{2QV_0}}{e^{2QV_0}}\Big)\Big] \\
&+\frac{4}{(\overline{x}_1+x_1)^2}[\overline{G}_2G_2(\overline{x}_1+x_1)]+\frac{1}{2}\Big[\Big(\Big(\Big(\frac{e^{2QV_0}+1}{e^{2QV_0}}\Big)(\overline{x}_3x_3) \\
&-i(\overline{x}_2x_2)\Big)4(\overline{G}_2G_2+\overline{G}_1G_1)(\overline{x}_1+x_1)+4\Big(\overline{G}_2G_2 \\
&+\overline{G}_3G_3\Big(\frac{e^{2QV_0}+1}{e^{2QV_0}}\Big)(\overline{x}_1x_1\overline{x}_2x_2)(\overline{x}_1+x_1)\Big)\Big]\Big\}.
\end{aligned}
\tag{5.78}
$$

Para el tercer término

$$
\begin{aligned}
&-\int d^4\theta\Big[(X_1+\overline{X}_1)\ln[\overline{X}_1+X_1+i(\overline{X}_2+X_2)\\
&+\sqrt{-4(1-F)^2(e^{2QV_0}F+1)^2+(\overline{X}_1+X_1+i(\overline{X}_2+X_2))^2}\Big]=-(X_1+\overline{X}_1)\\
&\times\Big[\frac{e^{4QV_0}(F^4-F^3+F^2)+2e^{2QV_0}(F^3-2F^2)+F^2-2F(e^{2QV_0}-1)+1}{X_1+\overline{X}_1+i(X_2+\overline{X}_2)}\\
&+\frac{i(X_2+\overline{X}_2)}{2(\overline{X}_1+X_1)}+\ln(2(X_1+\overline{X}_1))\Big].
\end{aligned}
\tag{5.79}
$$

Debido a que en los F^n, con $n>1$, al hacer la expansión en componentes se obtienen términos que no contienen $\theta^+\theta^-\tilde{\theta}^+\tilde{\theta}^-$, por lo que no aportarán al superpotencial escalar. Sin estos términos que

$$
\begin{aligned}
&-\int d^4\theta\Big[(X_1+\overline{X}_1)\ln[\overline{X}_1+X_1+i(\overline{X}_2+X_2)\\
&+\sqrt{-4(1-F)^2(e^{2QV_0}F+1)^2+(\overline{X}_1+X_1+i(\overline{X}_2+X_2))^2}\Big]\\
&=\frac{2(e^{2QV_0}-1)}{\overline{X}_1+X_1+i(\overline{X}_2+X_2)}\Big[-\Big(\frac{1+e^{2QV_0}}{e^{2QV_0}}\Big)\Big(\frac{X_3+\overline{X}_3}{X_1+\overline{X}_1}\Big)\\
&+1+\frac{1}{2}\frac{\Big(\frac{1+e^{2QV_0}}{e^{2QV_0}}\Big)^2(X_3+\overline{X}_3)^2+(X_2+\overline{X}_2)^2}{(X_1+\overline{X}_1)^2}\\
&+i\Big(\frac{1+e^{2QV_0}}{e^{2QV_0}}\Big)\frac{(X_2+\overline{X}_2)(X_3+\overline{X}_3)}{(X_1+\overline{X}_1)^2}-i\frac{X_2+\overline{X}_2}{X_1+\overline{X}_1}\\
&-\frac{i}{2}\Big(\frac{X_2+\overline{X}_2}{X_1+\overline{X}_1}\Big)\frac{\Big(\frac{1+e^{2QV_0}}{1-e^{2QV_0}}\Big)^2(X_3+\overline{X}_3)^2+(X_2+\overline{X}_2)^2}{(X_1+\overline{X}_1)^2}\Big]-\frac{\overline{X}_1+X_1}{\overline{X}_1+X_1+i(\overline{X}_2+X_2)}
\end{aligned}
\tag{5.80}
$$

y al hacer la expansión, obtenemos

$$
\begin{aligned}
&-\int d^4\theta[(X_1+\overline{X}_1)\ln\Big[\overline{X}_1+X_1+i(\overline{X}_2+X_2)\\
&+\sqrt{-4(1-F)^2(e^{2QV_0}F+1)^2+(\overline{X}_1+X_1+i(\overline{X}_2+X_2))^2}\Big]\\
&=-\frac{2(e^{2QV_0}-1)}{(\overline{x}_1+x_1+\overline{x}_2+x_2)^2}\Big\{-\Big(\frac{e^{2QV_0}+1}{e^{2QV_0}}\Big)\frac{1}{(\overline{x_1}+x_1)^2}4[\overline{G}_1G_3+\overline{G}_3G_1]\\
&+\frac{2}{(\overline{x}_1x_1)^2}\Big[\overline{G}_1G_1\Big(\Big(\frac{e^{2QV_0}+1}{e^{2QV_0}}\Big)(\overline{x}_3x_3)+\overline{x}_2x_2)\Big)+\Big(\overline{G}_3G_3\Big(\frac{e^{2QV_0}+1}{e^{2QV_0}}\Big)\\
&+\overline{G}_2G_2\Big)(\overline{x}_1x_1)\Big]+\frac{i}{(\overline{x}_1x_1)^2}\Big(\frac{e^{2QV_0}+1}{e^{2QV_0}}\Big)4\Big[\overline{G}_1G_1(\overline{x}_2x_3+\overline{x}_3x_2)+(\overline{G}_2G_3\\
&+\overline{G}_2G_3)(\overline{x}_1x_1)\Big]-\frac{i}{(\overline{x}_1+x_1)^2}4[\overline{G}_1G_2+\overline{G}_2G_1]-\frac{i}{2(\overline{x}_1x_1)^2(\overline{x}_1+x_1)^2}\\
&\times\Big[\Big(\overline{G}_3G_3\Big(\frac{e^{2QV_0}+1}{e^{2QV_0}}\Big)+\overline{G}_2G_2\Big)\times(\overline{x}_1+x_1)^2(\overline{x}_2+x_2)+\Big(\overline{x}_3x_3\Big(\frac{e^{2QV_0}+1}{e^{2QV_0}}\Big)\\
&+\overline{x}_2x_2\Big)(\overline{x}_1+x_1)(\overline{x}_2x_2)\overline{G}_1G_1+(\overline{G}_2G_3+\overline{G}_3G_2)(\overline{x}_1x_1)\Big(\overline{x}_3x_3\Big(\frac{e^{2QV_0}+1}{e^{2QV_0}}\Big)\\
&-\overline{x}_2x_2\Big)\Big]\Big\}-\frac{4}{(\overline{x}_1+x_1+\overline{x}_2+x_2)^2}\times[G_1(\overline{G}_2+\overline{G}_3)+\overline{G}_1(G_2+G_3)].
\end{aligned}
\tag{5.81}
$$

Para el cuarto término

$$
\begin{aligned}
&\int d^4\theta(X_1+\overline{X}_1)\ln(1+F)\\
&=\int d^4\theta\Big\{(\overline{X}_1+X_1)+\frac{1}{2}\Big[\tfrac{1}{2}\Big(\frac{(X_2+\overline{X}_2)^2+(X_3+\overline{X}_3)^2\Big(\frac{1+e^{2QV_0}}{e^{2QV_0}}\Big)^2}{X_1+\overline{X}_1}\Big)\\
&+i\Big(\frac{1+e^{2QV_0}}{e^{2QV_0}}\Big)\frac{(X_3+\overline{X}_3)(X_2+\overline{X}_2)}{(X_1+\overline{X}_1)}-i(X_2+\overline{X}_2)\Big(\frac{(X_2+\overline{X}_2)^2+(X_3+\overline{X}_3)^2\Big(\frac{1+e^{2QV_0}}{e^{2QV_0}}\Big)^2}{(X_1+\overline{X}_1)^2}\Big)\Big]\Big\}
\end{aligned}
\tag{5.82}
$$

y el resultado en componentes es

$$
\begin{aligned}
&\int d^4\theta(X_1+\overline{X}_1)ln(1+F)=\frac{1}{(\overline{x}_1+x_1)^2}\Big[\overline{G}_2G_2+(\overline{G}_3G_3)\Big(\frac{e^{2QV_0}+1}{e^{2QV_0}}\Big)\Big]\\
&+\frac{i}{\overline{x}_1+x_1}[\overline{G}_2G_3+\overline{G}_3G_2]-\frac{i}{(\overline{x}_1+x_1)^2}[(\overline{G}_2G_1+\overline{G}_1G_2)\Big(\Big(\frac{e^{2QV_0}+1}{e^{2QV_0}}\Big)(\overline{x}_3x_3)\\
&+\overline{x}_2x_2\Big)+\Big(\overline{G}_2G_2+\overline{G}_3G_3\Big(\frac{e^{2QV_0+1}}{e^{2QV_0}}\Big)\Big)(\overline{x}_1+x_1+\overline{x}_2+x_2)].
\end{aligned}
\tag{5.83}
$$

Para el quinto término

$$
\begin{aligned}
\int d^4\theta \ln\Big(F + \frac{1}{e^{2QV_0}}\Big) = \int d^4\theta \Big\{ -2QV_0 + e^{2QV_0}\Big[-\Big(\frac{1+e^{2QV_0}}{e^{2QV_0}}\Big)\Big(\frac{X_3+\overline{X}_3}{X_1+\overline{X}_1}\Big) \\
+1 + \frac{1}{2}\frac{\Big(\frac{1+e^{2QV_0}}{e^{2QV_0}}\Big)^2 (X_3+\overline{X}_3)^2 + (X_2+\overline{X}_2)^2}{(X_1+\overline{X}_1)^2} \\
+i\Big(\frac{1+e^{2QV_0}}{e^{2QV_0}}\Big)\frac{(X_2+\overline{X}_2)(X_3+\overline{X}_3)}{(X_1+\overline{X}_1)^2} - i\frac{X_2+\overline{X}_2}{X_1+\overline{X}_1} \\
-\frac{i}{2}\Big(\frac{X_2+\overline{X}_2}{X_1+\overline{X}_1}\Big)\frac{\Big(\frac{1+e^{2QV_0}}{1-e^{2QV_0}}\Big)^2 (X_3+\overline{X}_3)^2 + (X_2+\overline{X}_2)^2}{(X_1+\overline{X}_1)^2}\Big]\Big\}.
\end{aligned}
\tag{5.84}
$$

y al hacer la expansión de los campos tendremos

$$
\begin{aligned}
\int d^4\theta \ln\Big(F + \frac{1}{e^{2QV_0}}\Big) = e^{2QV_0}\Big\{ -\Big(\frac{e^{2QV_0}+1}{e^{2QV_0}}\Big)\frac{1}{(\overline{x_1}+x_1)^2} 4[\overline{G}_1 G_3 + \overline{G}_3 G_1] \\
+\frac{2}{(\overline{x}_1 x_1)^2} 4\Big[\overline{G}_1 G_1\Big(\Big(\frac{e^{2QV_0}+1}{e^{2QV_0}}\Big)(\overline{x}_3 x_3) + \overline{x}_2 x_2\Big) + \Big(\overline{G}_3 G_3\Big(\frac{e^{2QV_0}+1}{e^{2QV_0}}\Big) \\
+\overline{G}_2 G_2\Big)(\overline{x}_1 x_1)\Big] + \frac{i}{(\overline{x}_1 x_1)^2}\Big(\frac{e^{2QV_0}+1}{e^{2QV_0}}\Big) 4\Big[\overline{G}_1 G_1(\overline{x}_2 x_3 + \overline{x}_3 x_2) + (\overline{G}_2 G_3 \\
+\overline{G}_2 G_3)(\overline{x}_1 x_1)\Big] - \frac{i}{(\overline{x}_1 + x_1)^2} 4[\overline{G}_1 G_2 + \overline{G}_2 G_1] - \frac{i}{2(\overline{x}_1 x_1)^2(\overline{x}_1 + x_1)^2} \\
\times\Big[\Big(\overline{G}_3 G_3\Big(\frac{e^{2QV_0}+1}{e^{2QV_0}}\Big) + \overline{G}_2 G_2\Big)(\overline{x}_1 + x_1)^2(\overline{x}_2 + x_2) + \Big(\overline{x}_3 x_3\Big(\frac{e^{2QV_0}+1}{e^{2QV_0}}\Big) \\
+\overline{x}_2 x_2\Big)(\overline{x}_1 + x_1)(\overline{x}_2 x_2)\overline{G}_1 G_1 + (\overline{G}_2 G_3 + \overline{G}_3 G_2) \\
\times(\overline{x}_1 x_1)\Big(\overline{x}_3 x_3\Big(\frac{e^{2QV_0}+1}{e^{2QV_0}}\Big) + \overline{x}_2 x_2\Big)\Big]\Big\}
\end{aligned}
\tag{5.85}
$$

Para el sexto término

$$
\begin{aligned}
\int d^4\theta \Big[\frac{\overline{X}_1 + X_1 + i(\overline{X}_2 + X_2) + \sqrt{-4(1-F)^2(e^{2QV_0}F+1)^2 + (\overline{X}_1 + X_1 + i(\overline{X}_2 + X_2))^2}}{(e^{2QV_0}F+1)}\Big] \\
= \frac{e^{6QV_0}(-F^5+F^4-F^3) + e^{4QV_0}(F^4+2F^3-F^2) + e^{2QV_0}(F^3-2F^2) + F^2 + e^{2QV_0}F - 2F + 1}{\overline{X}_1 + X_1 + i(\overline{X}_2 + X_2)},
\end{aligned}
\tag{5.86}
$$

donde podemos considerar la misma reducción que en el tercer término, obteniendo

$$
\begin{aligned}
&\int d^4\theta \Big[\tfrac{\overline{X}_1+X_1+i(\overline{X}_2+X_2)+\sqrt{-4(1-F)^2(e^{2QV_0}F+1)^2+(\overline{X}_1+X_1+i(\overline{X}_2+X_2))^2}}{(e^{2QV_0}F+1)}\Big] \\
&= -\Big(\frac{e^{2QV_0}-2}{\overline{X}_1+X_1+i(\overline{X}_2+X_2)}\Big)\Big[-\Big(\frac{1+e^{2QV_0}}{e^{2QV_0}}\Big)\Big(\frac{X_3+\overline{X}_3}{X_1+\overline{X}_1}\Big)+1 \\
&\quad +\frac{1}{2}\frac{\Big(\frac{1+e^{2QV_0}}{e^{2QV_0}}\Big)^2(X_3+\overline{X}_3)^2+(X_2+\overline{X}_2)^2}{(X_1+\overline{X}_1)^2} \\
&\quad +i\Big(\frac{1+e^{2QV_0}}{e^{2QV_0}}\Big)\frac{(X_2+\overline{X}_2)(X_3+\overline{X}_3)}{(X_1+\overline{X}_1)^2}-i\frac{X_2+\overline{X}_2}{X_1+\overline{X}_1} \\
&\quad -\frac{i}{2}\Big(\frac{X_2+\overline{X}_2}{X_1+\overline{X}_1}\Big)\frac{\Big(\frac{1+e^{2QV_0}}{1-e^{2QV_0}}\Big)^2(X_3+\overline{X}_3)^2+(X_2+\overline{X}_2)^2}{(X_1+\overline{X}_1)^2}\Big]+\frac{1}{\overline{X}_1+X_1+i(\overline{X}_2+X_2)}
\end{aligned}
\tag{5.87}
$$

y haciendo la expansión obtendremos que

$$
\begin{aligned}
&\int d^4\theta \Big[\tfrac{\overline{X}_1+X_1+i(\overline{X}_2+X_2)+\sqrt{-4(1-F)^2(e^{2QV_0}F+1)^2+(\overline{X}_1+X_1+i(\overline{X}_2+X_2))^2}}{(e^{2QV_0}F+1)}\Big] \\
&= -\frac{(e^{2QV_0}-2)}{(\overline{x}_1+x_1+\overline{x}_2+x_2)^2}\Big\{-\Big(\frac{e^{2QV_0}+1}{e^{2QV_0}}\Big)\frac{1}{(\overline{x_1}+x_1)^2}4[\overline{G}_1G_3+\overline{G}_3G_1] \\
&\quad +\frac{2}{(\overline{x}_1x_1)^2}\Big[\overline{G}_1G_1\Big(\Big(\frac{e^{2QV_0}+1}{e^{2QV_0}}\Big)(\overline{x}_3x_3)+\overline{x}_2x_2\Big)+\Big(\overline{G}_3G_3\Big(\frac{e^{2QV_0}+1}{e^{2QV_0}}\Big) \\
&\quad +\overline{G}_2G_2\Big)(\overline{x}_1x_1)\Big]+\frac{i}{(\overline{x}_1x_1)^2}\Big(\frac{e^{2QV_0}+1}{e^{2QV_0}}\Big)4\Big[\overline{G}_1G_1(\overline{x}_2x_3+\overline{x}_3x_2) \\
&\quad +(\overline{G}_2G_3+\overline{G}_2G_3)(\overline{x}_1x_1)\Big]-\frac{i}{(\overline{x}_1+x_1)^2}4[\overline{G}_1G_2+\overline{G}_2G_1]-\frac{i}{2(\overline{x}_1x_1)^2(\overline{x}_1+x_1)^2} \\
&\quad \times\Big[\Big(\overline{G}_3G_3\Big(\frac{e^{2QV_0}+1}{e^{2QV_0}}\Big)+\overline{G}_2G_2\Big)(\overline{x}_1+x_1)^2(\overline{x}_2+x_2)+\Big(\overline{x}_3x_3\Big(\frac{e^{2QV_0}+1}{e^{2QV_0}}\Big) \\
&\quad +\overline{x}_2x_2\Big)(\overline{x}_1+x_1)(\overline{x}_2x_2)\overline{G}_1G_1+(\overline{G}_2G_3+\overline{G}_3G_2)(\overline{x}_1x_1)\Big(\overline{x}_3x_3\Big(\frac{e^{2QV_0}+1}{e^{2QV_0}}\Big) \\
&\quad +\overline{x}_2x_2\Big)\Big]\Big\}+\frac{4}{(\overline{x}_1+x_1+\overline{x}_2+x_2)^2}[G_1(\overline{G}_2+\overline{G}_3)+\overline{G}_1(G_2+G_3)].
\end{aligned}
\tag{5.88}
$$

Al sumar todos los resultados previamente obtenidos, obtenemos el potencial escalar

$$
\begin{aligned}
U = {} & \frac{(3e^{2QV_0}+2)}{2(e^{2QV_0}+1)}\Big\{\frac{\overline{x}_1+x_1}{(\overline{x}_1+x_1)^2}2\Big[\overline{G}_2G_2+(\overline{G}_3G_3)\Big(\frac{e^{2QV_0}+1}{e^{2QV_0}}\Big)\Big] \\
& +\frac{8i}{(\overline{x}_1+x_1)^2}\Big(\frac{e^{2QV_0}+1}{e^{2QV_0}}\Big)[\overline{G}_2G_3+\overline{G}_3G_2]-\frac{i}{(\overline{x}_1+x_1)^2}4[(\overline{G}_2G_1 \\
& +\overline{G}_1G_2)\Big(\Big(\frac{e^{2QV_0}+1}{e^{2QV_0}}\Big)(\overline{x}_3x_3)+\overline{x}_2x_2\Big)+\Big(\overline{G}_2G_2+\overline{G}_3G_3\Big(\frac{e^{2QV_0}+1}{e^{2QV_0}}\Big)\Big)(\overline{x}_1+x_1 \\
& +\overline{x}_2+x_2)]\Big\}+\frac{e^{4QV_0}}{2}\Big\{\frac{\overline{x}_1+x_1}{(\overline{x}_1+x_1)^2}2\Big[\overline{G}_2G_2+\Big(\overline{G}_2G_2 \\
& +\overline{G}_3G_3\Big(\frac{e^{2QV_0}+1}{e^{2QV_0}}\Big)\Big)(\overline{x}_1+x_1+\overline{x}_2+x_2)-\frac{4}{(\overline{x}_1+x_1)^2}[\overline{G}_2G_2(\overline{x}_1+x_1)] \\
& -2\Big[\Big(\Big(\frac{e^{2QV_0}+1}{e^{2QV_0}}\Big)(\overline{x}_3x_3)+\overline{x}_2x_2\Big)(\overline{G}_2G_2+\overline{G}_1G_1)(\overline{x}_1+x_1)+\Big(\overline{G}_2G_2 \\
& +\overline{G}_3G_3\Big(\frac{e^{2QV_0}+1}{e^{2QV_0}}\Big)\Big)(\overline{x}_1x_1\overline{x}_2x_2)(\overline{x}_1+x_1)\Big]\Big\}+\frac{e^{2QV_0}}{2(e^{2QV_0}+1)}\Big\{\frac{4}{(\overline{x}_1+x_1)^2} \\
& \times[\overline{G}_2G_2(\overline{x}_1+x_1)]+2\Big[\Big(\Big(\frac{e^{2QV_0}+1}{e^{2QV_0}}\Big)(\overline{x}_3x_3)+\overline{x}_2x_2\Big)(\overline{G}_2G_2+\overline{G}_1G_1)(\overline{x}_1+x_1) \\
& +\Big(\overline{G}_2G_2+\overline{G}_3G_3\Big(\frac{e^{2QV_0}+1}{e^{2QV_0}}\Big)\times(\overline{x}_1x_1\overline{x}_2x_2)(\overline{x}_1+x_1)\Big)\Big]\Big\} \\
& -\frac{2e^{2QV_0}}{(\overline{x}_1+x_1+\overline{x}_2+x_2)^2}\Big\{-\Big(\frac{e^{2QV_0}+1}{e^{2QV_0}}\Big)\frac{1}{(\overline{x_1}+x_1)^2}4[\overline{G}_1G_3+\overline{G}_3G_1] \\
& +\frac{2}{(\overline{x}_1x_1)^2}\Big[\overline{G}_1G_1\Big(\Big(\frac{e^{2QV_0}+1}{e^{2QV_0}}\Big)(\overline{x}_3x_3)+\overline{x}_2x_2\Big)+\Big(\overline{G}_3G_3\Big(\frac{e^{2QV_0}+1}{e^{2QV_0}}\Big) \\
& +\overline{G}_2G_2\Big)(\overline{x}_1x_1)\Big]+\frac{i}{(\overline{x}_1x_1)^2}\Big(\frac{e^{2QV_0}+1}{e^{2QV_0}}\Big)4\Big[\overline{G}_1G_1(\overline{x}_2x_3+\overline{x}_3x_2) \\
& +(\overline{G}_2G_3+\overline{G}_2G_3)(\overline{x}_1x_1)\Big]-\frac{i}{(\overline{x}_1+x_1)^2}4[\overline{G}_1G_2+\overline{G}_2G_1]-\frac{i}{2(\overline{x}_1x_1)^2(\overline{x}_1+x_1)^2} \\
& \times\Big[\Big(\overline{G}_3G_3\Big(\frac{e^{2QV_0}+1}{e^{2QV_0}}\Big)+\overline{G}_2G_2\Big)(\overline{x}_1+x_1)^2(\overline{x}_2+x_2)+\Big(\overline{x}_3x_3\Big(\frac{e^{2QV_0}+1}{e^{2QV_0}}\Big)+\overline{x}_2x_2\Big) \\
& \times(\overline{x}_1+x_1)(\overline{x}_2x_2)\overline{G}_1G_1+(\overline{G}_2G_3+\overline{G}_3G_2)(\overline{x}_1x_1)\Big(\overline{x}_3x_3\Big(\frac{e^{2QV_0}+1}{e^{2QV_0}}\Big)+\overline{x}_2x_2\Big)\Big]\Big\},
\end{aligned}
\tag{5.89}
$$

donde x_i son las componentes de X_i, G_i son los campos auxiliares asociados a X_i. Este es el potencial escalar del modelo dual.

Capítulo 6

Conclusiones

Se empleó el algoritmo de dualidad T Abeliano y no-Abeliano en un Modelo Sigma Lineal Normado (GLSM) [2], el cual consiste en promover la simetría global a una local normando los supercampos e imponer términos con multiplicadores de Lagrange para que la intensidad de campo sea plana. Con esto se obtiene un Lagrangiano general donde al integrar los multiplicadores de Lagrange se recupera el modelo original e integrando el supercampo vectorial se obtiene el modelo dual. Una vez obtenido el modelo dual se encontró el potencial escalar al hacer la expansión de los supercampos quirales torcidos y de la intensidad de campo; donde el potencial escalar está dado en términos de las componentes escalares de dichas expansiones.

Siguiendo los mismos pasos del caso sin superpotencial, se implementó la dualidad T en un GLSM con término de superpotencial. Para poder emplear el algoritmo de dualidad se definió una forma general del superpotencial en términos de un supercampo escalar siguiendo [6]. Esto nos permite expresar el término del superpotencial como un tipo de término escalar en el Lagrangiano, con lo cual es posible emplear el algoritmo de dualidad T. Una vez que se obtuvo el modelo dual se realizó la expansión de los campos y se encontró el potencial escalar. En todo momento se corroboró que el modelo con superpotencial pudiese ser reducido al modelo sin superpotencial, corroborando de esta manera que el procedimiento no tenía fallas.

Para el caso de dualidad T Abeliana, el potencial escalar del modelo con superpotencial es muy parecido al potencial escalar del modelo sin superpotencial, varía únicamente por constantes.

Sin embargo para el caso de dualidad T no-abeliana el potencial escalar se dejó expresado en términos de los campos auxiliares puesto que al integrarlos surge una gran cantidad de componentes, por lo que en término de las componentes el potencial escalar es muy extenso.

Finalmente podemos concluír que se encontró una manera sencilla de implementar el algoritmo de dualidad T conocido a un GLSM, considerando el término de superpotencial.

Apéndice A

Supersimetría

A continuación se hace un resumen de supersimetría, basado en [28, 29, 30, 31] donde se muestran las herramientas que se utilizan en el trabajo.
Usualmente hay interés de trabajar en un espacio tiempo de 3 dimensiones debido a que las representaciones irreducibles de supersimetrías globales simples ($N = 1$) son más fáciles de obtener que en 4 dimensiones.
El grupo de Lorentz en tres dimensiones $SL(2, R)$ y su representación fundamental actúan en un espinor real de dos componentes $\psi^\alpha = (\psi^+, \psi^-)$ (Majorana). Normalmente usamos letras del abecedario Griego para denotar los índices del espinor, por lo que un vector será descrito como un espinor de segundo grado antisimétrico $V^{\alpha\beta} = (V^{++}, V^{+-}, V^{--})$. Consideramos que todos los espinores que usamos anticonmutan, esto es, siguen el álgebra de Grassmann.
Uno puede bajar y subir los índices de un espinor (de la misma manera en que se hace en relatividad con la métrica) haciendo uso del símbolo antisimétrico de segundo grado $C_{\alpha\beta}$. Este mismo nos permite definir lo que es el "cuadrado" de un espinor

$$C_{\alpha\beta} = -C_{\beta\alpha} = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} = -C^{\alpha\beta}, \quad \psi_\alpha = \psi^\beta C_{\beta\alpha}, \quad \psi^2 = \frac{1}{2}\psi^\alpha\psi_\alpha. \tag{A.1}$$

Trabajaremos en el superespacio el cual es etiquetado usualmente por tres coordenadas espacio-tiempo $x^{\mu\nu}$ y dos coordenadas espinoriales que anticonmutan θ^μ. En la literatura, el conjunto de estas coordenadas suele ser denotado de manera colectiva como $z^M = (x^{\mu\nu}, \theta^\mu)$ las cuales cumplen las propiedades de hermiticidad $(z^M)^\dagger = z^M$. De igual manera, es importante mencionar que podemos definir derivadas de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \partial_\mu\theta^\eta &\equiv \{\partial_\mu, \theta^\eta\} \equiv \delta_\mu^\eta, \\ \partial_{\mu\eta}x^{\sigma\tau} &\equiv [\partial_{\mu\eta}, x^{\sigma\tau}] \equiv \frac{1}{2}\delta^\sigma_{(\mu}\delta^\tau_{\eta)}. \end{aligned} \tag{A.2}$$

Así los operadores de "momento" tienen propiedades de hermiticidad

$$(i\partial_\alpha)^\dagger = -(i\partial_\alpha), \quad (i\partial_{\mu\eta})^\dagger = +(i\partial_{\mu\eta}). \tag{A.3}$$

Para las coordenadas espinoriales, debido a que anticonmutan, se cumple que la diferenciación es igual a la integración $\int d\theta_\alpha = \partial_\alpha$, por lo que

$$\int d\theta_\alpha \theta^\beta = \delta_\alpha^\beta, \quad \int d^2\theta\theta^2 = -1. \tag{A.4}$$

Las funciones sobre el superespacio transforman de manera usual bajo el grupo de Poincaré con generadores $P_{\mu\eta}$ y bajo rotaciones de Lorentz $M_{\alpha\beta}$. Podemos graduar el álgebra de Poincaré al introducir generadores de supersimetría espinorial adicionales Q_α, los cuales satisfacen el álgebra supersimétrica

$$\begin{aligned} [P_{\mu\eta}, P_{\rho\sigma}] &= 0, \\ \{Q_\mu, Q_\eta\} &= 2P_{\mu\eta}, \\ [Q_\mu, P_{\eta\rho}] &= 0. \end{aligned} \tag{A.5}$$

Esta álgrbea representa traslaciones en el superespacio debido a que un elemento de grupo del álgebra induce un movimiento en el espacio de parámetros lo que nos lleva a una representación del álgebra supersimétrica actuando sobre el superespacio.
Así mismo, estos satisfacen las relaciones de conmutación con $M_{\alpha\beta}$. Por otro lado, sobre los supercampos el álgebra actúa en términos de derivadas como

$$\begin{aligned} P_{\mu\eta} = i\partial_{\mu\eta}, \quad Q_\mu = i(\partial_\mu - \theta^\eta i\partial_{\eta\mu}); \\ \psi(x^{\mu\eta}, \theta^\mu) = exp[i(\xi^{\lambda\rho}P_{\lambda\rho} + \epsilon^\lambda Q_\lambda)]\psi(x^{\mu\eta} + \xi^{\mu\eta} - \frac{i}{2}\epsilon^{(\mu}\theta^{\eta)} + \epsilon^\mu). \end{aligned} \tag{A.6}$$

Puede demostrarse que las derivadas de supercampos siguen siendo supercampos, pero las derivadas espinoriales de supercampos, no son más supercampos.
De igual manera, podemos definir derivadas supersimétricas invariantes como

$$D_M = (D_{\mu\eta}) = (\partial_{\mu\eta}, \partial_\mu + \theta^\eta i\partial_{\mu\eta}), \tag{A.7}$$

las cuales conmutan con los generadores del grupo de Poincaré y anticonmutan con los generadores de la superálgebra. Estas derivadas tienen su propio conjunto de relaciones de conmutación dado por

$$
\begin{aligned}
\{D_\mu, D_\eta\} = 2iD_{\mu\eta}, \quad [D_\mu, D_{\eta\sigma}] = [D_{\mu\eta}, D_{\sigma\tau}] = 0,& \\
[D_M, D_N\} = T_{MN}^P D_P,&
\end{aligned}
\tag{A.8}
$$

de donde notamos que el superespacio global tiene torsión.
Un conjunto de identidades útiles son las siguientes.

$$
\begin{aligned}
\partial^{\mu\sigma}\partial_{\eta\sigma} = \delta_\eta^\mu \Box, \quad D_\mu D_\eta = i\partial_{\mu\eta} + C_{\eta\mu}D^2,& \\
D^\eta D_\mu D_\eta = 0, \quad D^2 D_\mu = -D_\mu D^2 = i\partial_{\mu\eta}D^\eta.&
\end{aligned}
\tag{A.9}
$$

Estas derivadas satisfacen las reglas de Leibnitz y pueden ser integradas por partes dentro de las integrales, por lo que podemos obtener una identidad bastante útil

$$
\int d^3x d^2\theta \Phi(x,\theta) = \int d^3x \partial^2 \Phi(x,\theta) = \int d^3x (D^2\Phi(x,\theta)). \tag{A.10}
$$

Los supercampos pueden ser expandidos en series de Taylor para la variable θ. Por ejemplo

$$
\Phi_{\alpha\beta\cdots}(x,\theta) = A_{\alpha\beta\cdots}(x) + \theta^\mu \lambda_{\mu\alpha\beta\cdots}(x) - \theta^2 F_{\alpha\beta\cdots}(x), \tag{A.11}
$$

donde $A, \quad B, \quad F$ son los campos componentes de Φ. Las transformaciones supersimétricas de las componentes pueden ser obtenidas de las transformaciones supersimétricas del supercampo, esto puede ser revisado en [27]. Estas transformaciones supersimétricas preservan la naturaleza del campo. Entonces las componentes transforman como

$$
\begin{aligned}
\delta A &= -\epsilon^\alpha \psi_\alpha, \\
\delta\psi_\alpha &= -\epsilon^\beta (C_{\alpha\beta}F + i\partial_{\alpha\beta}A), \\
\delta F &= -\epsilon^\alpha i\partial_\alpha^\beta \psi_\beta.
\end{aligned}
\tag{A.12}
$$

Debido a que las transformaciones supersimétricas son transformaciones de coordenadas en el superespacio es sencillo construir invariantes. Cualquier integral en el superespacio puede ser escrita como

$$
S = \int d^3x d^2\theta f(\Phi, D_\alpha\Phi, \cdots), \tag{A.13}
$$

la cual, como no depende explícitamente de las coordenadas es invariante bajo el álgebra. Un método más sencillo para obtener las expansiones en θ consiste en observar la forma

de las componentes de la expansión al comparar con la transformación infinitesimal del supercampo. Este método es llamado "por proyección".
Una teoría es descrita por campos, los cuales tienen cierto valor p^2 en el espacio de momentos. Para este valor los campos están en una representación del grupo de Poincaré (representación off-shell del grupo de Poincaré). De manera análoga para p^2 los campos pueden estar en una representación del álgebra supersimétrica (representación off-shell de supersimetría). Cuando imponemos las ecuaciones de campo nos quedamos únicamente con las componentes físicas que satisfacen las ecuaciones clásicas de movimiento y que forman la representación on-shell del grupo de Poincaré, sucede lo mismo para la supersimetría.

A.1. Multiplete escalar

La versión supersimétrica más simple de un multiplete escalar es descrita por un supercampo $\Phi(x,\theta)$ que cumple la condición de realidad, donde por supercampo entendemos una función sobre el superespacio que puede ser expresada en series de potencias de θ y $\overline{\theta}$, además contiene los escalares A, F y el espinor de dos componentes ψ_α. Donde θ tiene dimensiones de $(masa)^{-\frac{1}{2}}$. Para describir campos físicos debemos asignar a Φ dimensiones de $(masa)^{\frac{1}{2}}$, de esta manera ψ_a tiene dimensión canónica $(masa)^1$ por lo que A tendrá dimensión $(masa)^{\frac{1}{2}}$ y será el compañero físico escalar de ϕ.
En términos de dimensión uno espera que la siguiente expresión represente la acción cinética del multiplete escalar (sin masa)

$$S_{kin} = \frac{1}{2}\int d^3x d^2\theta (D_\alpha \Phi)^2. \tag{A.14}$$

Expandiendo, podemos obtener

$$S_{kin} = \int \frac{1}{2}(F^2 + \psi^\alpha i\partial_\alpha^\beta \psi_\beta + A\Box A)d^3x, \tag{A.15}$$

la cual es la acción en términos de los campos auxiliares. Podemos eliminar el campo auxiliar F con las ecuaciones de movimiento. La acción es invariante bajo transformaciones de Bose-Fermi las cuales son transformaciones supersimétricas sólo si es "on shell".
De igual manera, podemos añadir términos de masa a la acción cinética considerando el

término

$$S_I = \int d^3x d^2\theta f(\Phi), \tag{A.16}$$

y al expandir, tendremos

$$S_I = \int d^3x [f''(A)\phi^2 + f'(A)F]. \tag{A.17}$$

Considerando un modelo renormalizable, $f(\Phi)$ está dado por $f(\Phi) = \frac{1}{2}m\Phi^2 + \frac{1}{6}\lambda\Phi^3$, el cual consiste de un término de Yukawa y términos cúbicos de interacción. Así junto con términos cinéticos, obtenemos la acción

$$S = \int d^3x d^2\theta \Big[-\frac{1}{2}(D_\alpha\Phi)^2 + \frac{1}{2}m\Phi^2 + \frac{1}{6}\lambda\Phi^3\Big], \tag{A.18}$$

de nuevo podemos expandir y obtener la acción en términos de campos auxiliares y campos espinoriales

$$S_I = \int d^3x \Big[-\frac{1}{2}(A\Box A + \psi^\alpha i\partial_\alpha^\beta\psi_\beta + F^2) + m(\psi^2 + AF) + \lambda(A\psi^2 + \frac{1}{2}A^2F)\Big]. \tag{A.19}$$

A.2. Multiplete Vectorial

Podemos usar un supercampo de norma espinorial (real) Λ_α con superhelicidad $h = \frac{1}{2}$ para describir un campo vectorial de norma sin masa y su compañero fermiónico.
Para el caso Abeliano, podemos considerar un supercampo escalar complejo el cual transforme bajo una rotación de fase constante como

$$\begin{aligned} \Phi &\to \Phi' = e^{iK}\Phi, \\ \overline{\Phi} &\to \overline{\Phi}' = \overline{\Phi}e^{-iK}. \end{aligned} \tag{A.20}$$

Esta invariancia de fase deja invariante el Lagrangiano y se puede pasar a una invariancia local haciendo a K un supercampo escalar real que dependa de x y θ, de la siguiente manera

$$D_\alpha \to \nabla_\alpha = d_\alpha \mp i\Gamma_\alpha, \tag{A.21}$$

esto es, haciendo covariantes las derivadas espinoriales D_α. Donde el potencial de norma espinorial transforma como

$$\delta\Gamma_\alpha = D_\alpha K, \tag{A.22}$$

para garantizar que el Lagrangiano $|\nabla\Phi|^2$ sea localmente invariante de norma, dado que bajo esta condición tendremos

$$\nabla'_\alpha = e^{iK}\nabla_\alpha e^{-iK}. \tag{A.23}$$

Ahora, queremos encontrar una intensidad de campo invariante de norma y una acción para el multiplete descrito por el supercampo espinorial de norma Γ_α, para esto es conveniente introducir una derivada espacio-temporal, por lo que necesitamos el siguiente objeto covariante.

$$\nabla_{\alpha\beta} = \partial_{\alpha\beta} - i\Gamma_{\alpha\beta}, \quad \delta\Gamma_{\alpha\beta} = \partial_{\alpha\beta}K, \tag{A.24}$$

donde hemos introducido otro supercampo de norma potencial $\Gamma_{\alpha\beta}$ cuya transformación es escogida de tal manera que $\nabla'_{\alpha\beta} = e^{iK}\nabla_{\alpha\beta}e^{-iK}$.

Tras hacer una expansión en series de Taylor para θ, podemos examinar las componentes de Γ, las cuales serán

$$\begin{aligned} \chi_\alpha = \Gamma_\alpha, \quad B = \frac{1}{2}D^\alpha\Gamma_\alpha, \\ V_{\alpha\beta} = -\frac{i}{2}D_{(\alpha}\Gamma_{\beta)}, \quad \lambda_\alpha = \frac{1}{2}D^\beta D_\alpha\Gamma_\beta, \\ \mathcal{W}_{\alpha\beta} = \Gamma_{\alpha\beta}, \quad \rho_\beta = D^\alpha\Gamma_{\alpha\beta}, \\ \psi_{\alpha\beta\gamma} = D_{(\alpha}\Gamma_{\beta\gamma}, \quad T_{\alpha\beta} = D^2\Gamma_{\alpha\beta}. \end{aligned} \tag{A.25}$$

Bajo una transformación de norma estas transforman como

$$\begin{aligned} \delta\chi_\alpha = \sigma_\alpha, \quad \delta B = \tau, \\ \delta V_{\alpha\beta} = \partial_{\alpha\beta}\omega, \quad \delta\lambda_\alpha = 0, \\ \delta\mathcal{W}_{\alpha\beta} = \partial_{\alpha\beta}\omega, \quad \delta\rho_\alpha = \delta_{\alpha\beta}\sigma^\beta, \\ \delta\psi_{\alpha\beta\gamma} = \partial(\beta\gamma\sigma_\alpha, \quad \delta T_{\alpha\beta} = \partial_{\alpha\beta}\tau. \end{aligned} \tag{A.26}$$

La norma que cumple $\chi = B = 0$ es llamada "norma de Wess-Zumino", rompe explícitamente la supersimetría, simplifica la forma del supercampo vectorial y puede ser utilizada para analizar el contenido físico del multiplete Λ_α.

De los términos restantes podemos ver que hay dos componentes de potencial de norma $V_{\alpha\beta}$ y $\mathcal{W}_{\alpha\beta}$ para una sola simetría de norma.

Por otro lado las derivadas covariantes $\nabla_A = (\nabla_\alpha, \nabla_{\alpha\beta})$ cumplen las relaciones de conmutación

$$
\begin{aligned}
[\nabla_A, \nabla_B\} = T_{AB}^C \nabla_C - iF_{AB} &= 2i\nabla_{\alpha\beta} - iF_{\alpha\beta} \\
&= 2i\partial_{\alpha\beta} + 2\Gamma_{\alpha\beta} - iF_{\alpha\beta},
\end{aligned}
\tag{A.27}
$$

donde F_{AB} son las intensidades de campo, las cuales con invariantes debido a la covariancia de las derivadas ∇_A.

Considerando $\Gamma_{\alpha\beta} = -\frac{i}{2} D_{(\alpha}\Gamma_{\beta)}$ y la constricción $F_{\alpha\beta}$, vemos que las derivadas covariantes de espacio tiempo satisfacen

$$
\{\nabla_\alpha, \nabla_\beta\} = 2i\nabla_{\alpha\beta}. \tag{A.28}
$$

Con este resultado el problema de que haya dos campos de norma $\mathcal{W}_{\alpha\beta}$, $V_{\alpha\beta}$ es resuelto.

Por otro lado, utilizando las identidades de Bianchi y la intensidad de campo podemos ver que

$$
\mathcal{W}_\alpha = \frac{1}{2} D^\beta D_\alpha \Gamma_\beta, \tag{A.29}
$$

y notar que $\mathcal{W}_\alpha$ es la única intensidad de campo independiente invariante de norma por lo que sólo una componente de Lorentz de $\mathcal{W}_\alpha$ es independiente. Lo que permite construir una acción con $\mathcal{W}_\alpha$

$$
S = \frac{1}{g^2} \int d^3x d^2\theta \mathcal{W}^2 = \frac{1}{g^2} \int d^3x d^2\theta (\frac{1}{2} D^\beta D_\alpha \Gamma_\beta)^2. \tag{A.30}
$$

Así mismo podemos añadir materia utilizando la componente del Lagrangiano que describe el acoplamiento a un multiplete escalar complejo. De esta manera, podemos analizar las componentes de este Lagrangiano definiendo componentes covariantes de Φ al hacer la proyección covariante la cual se obtiene tras redefinir el campo, esta provee la misma descripción de la teoría.

Para el caso no abeliano consideramos un multiplete de supercampos escalares que transforma como $\Phi' = e^{iK}\Phi$, donde $K = K^i T_i$, con T_i los generadores del álgebra de Lie, además introducimos las derivadas espinoriales covariantes ∇_α de la misma manera que en el caso anterior (A.21), por lo que definiendo $\Gamma_\alpha = \Gamma^i_\alpha T_i$ tendremos

$$\nabla_\alpha = D_\alpha - i\Gamma^i_\alpha T_i. \tag{A.31}$$

Entonces, la conexión espinorial transformará como

$$\delta\Gamma = \nabla_\alpha K = D_\alpha K - i[\Gamma_\alpha, K] \tag{A.32}$$

y la derivada covariante cumplirá

$$\nabla_{\alpha\beta} = -\frac{i}{2}\{\nabla_\alpha, \nabla_\beta\}, \tag{A.33}$$

siempre y cuando

$$\Gamma_{\alpha\beta} = -\frac{i}{2}[D_{(\alpha}\Gamma_{\beta)} - i\{\Gamma_\alpha, \Gamma_\beta\}], \tag{A.34}$$

la acción del supercampo $\mathcal{W}_\alpha$ no es modificada. Y siguiendo un proceso análogo al anterior, podemos ver que la intensidad de campo covariante $\mathcal{W}$ será

$$\mathcal{W}_\alpha = \frac{1}{2}D^\beta D_\alpha \Gamma_\beta - \frac{i}{2}[\Gamma^\beta, D_\beta\Gamma_\alpha] - \frac{1}{6}[\Gamma^\beta, \{\Gamma_\beta, \Gamma_\alpha\}], \tag{A.35}$$

la cual transforma como $W_\alpha = e^{iK}W_\alpha e^{iK}$

A.3. Expansiones de las componentes

Ya que el cuadrado de cualquier número que anticonmuta se elimina, cualquier función de variables finitas que anticonmutan tendrá una expansión en series de Taylor finita con respecto a esta variable. Debido a esto, podemos expandir un supercampo en términos de un número finito de campos componentes. Por lo general para N supercampos, tendremos $4N$ números independientes que anticonmutan en θ y 2^{4N} componentes en un supercampo escalar sin constricciones. Por ejemplo, para $N = 1$ un supercampo vectorial real tendrá la expansión

$$V = C + \theta^\alpha \xi_\alpha + \overline{\theta}^{\dot\alpha}\overline{\xi}_{\dot\alpha} - \theta^{2M} - \overline{\theta}^2\overline{M} + \theta^\alpha\overline{\theta}^{\dot\alpha} A_a - \overline{\theta}^2\theta^\alpha\lambda_\alpha - \theta^2\overline{\dot\alpha}\overline{\alpha}_{\dot\alpha} + \theta^2\overline{\theta}^2 D' \tag{A.36}$$

y un supercampo chiral escalar

$$\Phi = A + \theta^\alpha \psi_\alpha - \theta^2 F + \frac{i}{2}\theta^\alpha \overline{\theta}^{\dot{\alpha}} \partial_a A + \frac{i}{2}\theta^2 \overline{\theta}^{\dot{\alpha}} \partial_a \psi^\alpha + \frac{1}{4}\theta^2 \overline{\theta}^2 \Box A. \tag{A.37}$$

De igual manera, estas componentes transforman de manera específica bajo la supersimetría, estas transformaciones pueden ser obtenidas por el método de proyección, pero al no ser de utilidad en el trabajo, estas transformaciones han sido omitidas.

Por otro lado, es útil tener una noción de integración con respecto a θ para construir acciones invariantes. Usando las propiedades de invariancia ante traslación y linealidad de las integrales de Berezin, podemos encontrar que $\int d\theta(a+\theta b) \sim b$, donde la normalización de la integral es arbitraria. Podemos elegir

$$\int d\theta\theta = 1 \tag{A.38}$$

y la integral de cualquier constante será cero.

Igualmente, podemos definir una función delta como

$$\delta(\theta - \theta') = \theta - \theta'. \tag{A.39}$$

Estos conceptos pueden ser generalizados a espacios que anticonmutan de mayor dimensión. De hecho, todas las propiedades de las integrales de Berezin pueden ser englobadas al proponer que esta es igual a a la diferenciación.

$$\int d\theta_\beta f(\theta) = \partial_\beta f(\theta). \tag{A.40}$$

Esto es importante debido a que en el contexto de supersimetría las acciones son integradas sobre el superespacio y sobre θ por lo que cualquier derivada total puede ser añadida al integrando sin afectar. Es por esta razón que dentro de la integral podemos reemplazar $\int d\theta_\beta = \partial_\beta$ por D_β. Lo cual nos permite hacer uso del método de proyección para expandir las acciones del superespacio.

Las variaciones supersimétricas son derivadas totales por tanto, para cualquier supercampo un invariante supersimétrico será

$$S_\Phi = \int d^4x d^{4N}\theta\Phi. \tag{A.41}$$

La manera en que se encuentra la acción para el supercampo chiral es por medio de análisis dimensional. El supercampo contiene dos escalares complejos que difieren por una unidad dimensional, sin embargo contiene solamente un espinor y requiere que el espinor tenga dimensión $\frac{3}{2}$. Por lo que debemos asignar dimensión 1 al supercampo, lo que nos lleva a una única elección para una acción sin masa y sin parámetros dimensionales (Skin)
El procedimiento para construir parte de los Lagrangianos supersimétricos consiste en tomar cualquier supercampo, observar las transformaciones supersimétricas de sus componentes e identificar cuales componentes son derivadas totales, pues esto asegura que serán invariantes ante transformaciones supersimétricas, una vez hecho esto se escribe el Lagrangiano como la integral de estos términos invariantes. En general se encuentran tres tipos de términos: el término D, el término F y el término F torcido los cuales se discutirán más adelante.

A.4. Invariancia R

Para estudiar modelos supersimétricos usualmente usamos la simetría R la cual es la simetría chiral generada al rotar θ y $\bar{\theta}$ en fases opuestas (de tal manera que $\int d^4\theta$ es invariante, pero $\int d^2\theta$ no lo es) y al rotar diferentes campos chirales en fases relacionadas.

$$\Phi(x, \theta, \overline{\theta}) \to e^{iwr}(x, e^{ir}\theta, e^{-ir}\overline{\theta}). \tag{A.42}$$

En ocasiones es posible asignar pesos apropiados w a los distintos supercampos para hacer la acción completamente invariante ante R.
Algunas propiedades generales de las teorías supersimétricas son que:
1.- El rompimiento de la supersimetría está parametrizado por los términos F.
2.- El potencial es positivo semidefinido.
3.- El potencial se elimina si y sólo si tenemos una solución supersimétrica

REFERENCIAS

[1] K. Hori and C. Vafa, "Mirror symmetry," *HUTP-00-A005*, 2 2000. [Online]. Available: https://arxiv.org/abs/hep-th/0002222

[2] N. C. Bizet, A. Martínez-Merino, L. A. P. Zayas, and R. Santos-Silva, "Non abelian T-duality in gauged linear sigma models," *High Energy Physics - Theory (hep-th), FOS: Physical sciences, FOS: Physical sciences*, 2017. [Online]. Available: https://arxiv.org/abs/1711.08491

[3] K. Hori, "Duality in two-dimensional (2,2) supersymmetric non-abelian gauge theories," *Journal of High Energy Physics*, vol. 2013, 04 2011.

[4] A. Giveon, E. Rabinovici, and G. Veneziano, "Duality in string background space," *Nuclear Physics B*, vol. 322, no. 1, pp. 167–184, 1989. [Online]. Available: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0550321389904896

[5] N. G. C. Bizet, Y. J. Santana, and R. S. Silva, "Non abelian dual of the resolved conifold gauged linear sigma model," *HEP-TH*, 12 2021. [Online]. Available: https://arxiv.org/abs/2112.15590

[6] T. Kimura and M. Yata, "T-duality Transformation of Gauged Linear Sigma Model with F-term," *Nucl. Phys. B*, vol. 887, pp. 136–167, 2014.

[7] F. Quevedo, "Duality and global symmetries," *Nuclear Physics B - Proceedings Supplements*, vol. 61, no. 1, pp. 23–41, 1998. [Online]. Available: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0920563297005173

[8] K. Hori and D. Tong, "Aspects of non-abelian gauge dynamics in two-dimensional N = (2,2) theories," *Journal of High Energy Physics - J high energy phys*, vol. 5, 05 2007.

[9] J. Polchinski, "Recent results in string duality," *High Energy Physics - Theory (hep-th), High Energy Physics - Phenomenology (hep-ph), FOS: Physical sciences, FOS: Physical sciences*, 1995. [Online]. Available: https://arxiv.org/abs/hep-th/9511157

[10] A. Giveon and M. Porrati, "Aspects of dualities," in *28th International Conference on High-energy Physics*, 7 1996, pp. 1661–1663.

[11] M. Evans and I. Giannakis, "T-duality in arbitrary string backgrounds," *Nuclear Physics B*, vol. 472, no. 1, pp. 139–162, 1996. [Online]. Available: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0550321396002040

[12] D. Tong, *String Theory*, 1st ed. Department of Applied Mathematics and Theoretical Physics, Center for Mathematical Sciences: Lecture notes, University of Cambridge, 2009.

[13] K. Becker, M. Becker, and J. H. Schwarz, *String theory and M-theory: A modern introduction.* Cambridge University Press, 12 2006.

[14] N. A. Obers and B. Pioline, "U-duality and M-theory," *High Energy Physics - Theory (hep-th), FOS: Physical sciences, FOS: Physical sciences*, 1998. [Online]. Available: https://arxiv.org/abs/hep-th/9809039

[15] C. Burgess and F. Quevedo, "Bosonization as duality," *Nuclear Physics B*, vol. 421, no. 2, pp. 373–387, 1994. [Online]. Available: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0550321394903328

[16] M. Gasperini, R. Ricci, and G. Veneziano, "A problem with non-abelian duality?" *Physics Letters B*, vol. 319, no. 4, pp. 438–444, 1993. [Online]. Available: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/037026939391748C

[17] E. Álvarez, L. Álvarez Gaumé, and Y. Lozano, "On non-abelian duality," *Nuclear Physics B*, vol. 424, no. 1, pp. 155–183, 1994. [Online]. Available: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0550321394900930

[18] C. Klimcik, "Poisson-Lie T-duality," *Nuclear Physics B - Proceedings Supplements*, vol. 46, no. 1, pp. 116–121, 1996. [Online]. Available: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0920563296000138

[19] C. Klimcik and P. Severa, "Dressing cosets," *Phys. Lett. B*, vol. 381, pp. 56–61, 1996.

[20] Y. Lozano, "Duality and canonical transformations," *Mod. Phys. Lett. A*, vol. 11, pp. 2893–2914, 1996.

[21] E. Witten, "Phases of N = 2 theories in two dimensions," *High Energy Physics - Theory (hep-th), FOS: Physical sciences*, 1993. [Online]. Available: https://arxiv.org/abs/hep-th/9301042

[22] K. Hori, *Trieste Lectures On Mirror Symmetry*, 1st ed. Department ofMathematics, University of Toronto, Toronto, Ontario, Canada: Lecture notes, ICTP, 2002.

[23] M. T. Grisaru, M. Massar, A. Sevrin, and J. Troost, "Some aspects of N=(2, 2), D=2 supersymmetry," *High Energy Physics - Theory (hep-th), FOS: Physical sciences, FOS: Physical sciences*, 1998. [Online]. Available: https://arxiv.org/abs/hep-th/9801080

[24] S. Kachru and C. Vafa, "Exact results for N=2 compactifications of heterotic strings," *High Energy Physics - Theory (hep-th), FOS: Physical sciences, FOS: Physical sciences*, 1995. [Online]. Available: https://arxiv.org/abs/hep-th/9505105

[25] A. Hanany and K. Hori, “Branes and N = 2 theories in two dimensions,” *Nuclear Physics B*, vol. 513, no. 1-2, pp. 119–174, Mar. 1998. [Online]. Available: https://doi.org/10.1016/s0550-3213(97)00754-2

[26] A. Hanany and E. Witten, “Type IIB superstrings, BPS monopoles, and three-dimensional gauge dynamics,” *High Energy Physics - Theory (hep-th), FOS: Physical sciences, FOS: Physical sciences*, 1996. [Online]. Available: https://arxiv.org/abs/hep-th/9611230

[27] M. R. S. J. James, M. T. Grisaru and W.Siegel, *Superspace or one thousand and one lessons in supersymmetry*, 1st ed. Front. Phys. 58, 1983.

[28] D. Tong, *Supersymmetric Field Theory*, 1st ed. Department of Applied Mathematics and Theoretical Physics, Center for Mathematical Sciences: Lecture notes, University of Cambridge, 2022.

[29] M. Maggiore, *A Modern Introduction to Quantum Field Theory*, 1st ed. Great Clarendon Street, Oxford OX2 6DP: Oxford University Press, 2005.

[30] J. Wess and J. Bagger, *Supersymmetry and Supergravity*, 2nd ed. 41 William Street, Priceton,: Priceton University Press, 1992.

[31] S. Cecotti and C. Vafa, “On classification of n=2 supersymmetric theories,” *High Energy Physics - Theory (hep-th), FOS: Physical sciences, FOS: Physical sciences*, 1992. [Online]. Available: https://arxiv.org/abs/hep-th/9211097