Cinvestav

Centro de Investigación y de Estudios Avanzados
del Instituto Politécnico Nacional

Unidad Zacatenco

Departamento de Matemática Educativa

Saberes docentes del profesorado de matemáticas de secundaria y media superior en formación inicial en el área de trigonometría

Tesis que presenta

Gerardo Josué Cruz Márquez

Para obtener el grado de

Doctor en Ciencias en la Especialidad de Matemática Educativa

Directora de tesis

Gisela Montiel Espinosa

Ciudad de México *Febrero, 2024*

Dedicatoria

A Marleny,
por darme la vida y, sobre todo,
por enseñarme a vivirla
en libertad.

Esto es, en gran medida,
resultado del amor por la educación,
la admiración por el profesorado,
y la pasión por escuchar y contar historias
que aprendí de ti.

Agradecimientos

Agradezco profundamente a mi familia, que siempre siempre,
de una forma u otra, han apoyado mis proyectos personales y profesionales.
Su confianza, amparo y compañía han sido la fuerza para continuar cuando las cosas han
sido difíciles o cuando no han salido como esperaba –lo cual sucede con frecuencia–.
Marleny, Harold y Sofi, por su cariño y apoyo incondicional, gracias.

Agradezco a mis amigos y colegas, quienes,
durante un seminario, un evento académico, una reunión o una charla fortuita,
han contribuido al conjunto de ideas que aquí se vierten y ejecutan.
Mel, Sel, Ele, Gris, Carlos, Eli, M, … todos, por hacer de esta una
meta posible y del camino una aventura compartida, gracias.

Agradezco a mi asesora, quien ha sabido darme
espacio y apoyo en la medida justa para poder concluir
mi proceso formativo oficial con este escrito.
Gis, por tu tiempo e instrucción, gracias.

Agradezco también a Adriana Parra Hernández,
Jacqueline Desfassiaux Duarte y demás personal del Cinvestav
por su importante apoyo durante todos estos años.

Agradezco a la Dra. Ruth Mercado y la Dra. Gabriela Valverde
por su colaboración en el planteamiento teórico y
metodológico de esta investigación.

Agradezco enormemente a la Dra. Gricelda Mendivil Rosas,
directora de la Facultad de Pedagogía e Innovación Educativa (FPIE) de la
Universidad Autónoma de Baja California (UABC), por todas las facilidades brindadas
para la producción de datos de este estudio.

Agradezco a Melvin, Candy, Mercedes y Santiago
por su disposición, apertura y trabajo en el curso optativo
utilizado como dispositivo de producción de datos.

Agradezco profundamente a la Dra. Nuria Climent Rodríguez
y al Grupo de Investigación DESYM (Formación Inicial y Desarrollo Profesional del
Profesorado) de la Universidad de Huelva (UHU), por los espacios concedidos para
robustecer mi formación profesional y este proyecto de investigación.

Agradezco al Consejo Nacional de Humanidades, Ciencias y Tecnologías (Conahcyt) por el apoyo brindado para la realización de esta investigación.

Gerardo Cruz Márquez – CVU 748062

En algún lugar,
entre las parcelas del norte de México
y marismas del sur de España.
— G

Índice

Resumen

La presente investigación parte de nuestro interés por comprender la integración de la investigación en matemática educativa, y en particular de nuestra línea y corriente teórica, en la formación inicial del profesorado de matemáticas.

Por medio de una revisión bibliográfica sistematizada sobre la formación y los conocimientos del profesorado de matemáticas, concretamos esta pretensión en un estudio centrado en los saberes docentes que construye y manifiesta un grupo de profesores/as en formación inicial al vivenciar experiencias de problematización de la trigonometría escolar y al diseñar, implementar y analizar sus propias actividades de aula en el área de trigonometría.

Para atender este objeto, coordinamos la teoría socioepistemológica con la perspectiva de los saberes docentes, y configuramos un experimento de desarrollo del profesorado que nos permitió diseñar un espacio de formación inicial docente *ad hoc* a nuestros intereses de investigación.

Entre los resultados de diseño, narramos algunos aspectos, como la metodología de enseñanza aplicada, que favorecieron la consecución de los objetivos instruccionales del curso optativo; así como algunas preguntas abiertas que deja su ejecución, por ejemplo, la óptima gestión de las clases simuladas realizadas por los/as participantes.

Con relación a los resultados de investigación, describimos los momentos de confrontación con el significado lineal y de resignificación de la relación ángulo-lado vivenciados, así como los saberes docentes construidos y manifestados por los/as profesores/as en formación inicial. A este respecto, destacamos la limitada influencia de las experiencias de problematización de la trigonometría escolar en la práctica del profesorado en formación inicial, al compararla, por ejemplo, con otros ámbitos como la experiencia docente previa.

Abstract

The present research is the result of our interest in understanding the integration of research in mathematics education, particularly our line and theoretical current, in the initial mathematics teacher education.

Through a systematic bibliographic review on the training and knowledge of mathematics teachers, we realize this aim in a study focused on the '*saberes docentes*' (concept similar to teaching knowledge) constructed and manifested by a group of pre-service teachers when living experiences of problematization of school trigonometry and when designing, implementing, and analyzing classroom activities in trigonometry.

To address this object, we coordinated the socio-epistemological theory with the perspective of '*saberes docentes*', and configured a teacher development experiment that enabled us to design a space for pre-service teacher education *ad hoc* to our research interests.

Among the design results, we narrate some aspects, such as the teaching methodology applied, which favored the achievement of the instructional objectives of the educational space; as well as some open questions that came out of its execution, for example, the optimal management of the simulated classes carried out by the participants.

In relation to the research results, we describe the moments of confrontation with the linear meaning and resignification of the angle-side relationship experienced, as well as the '*saberes docentes*' constructed and manifested by pre-service teachers. In this regard, we highlight the limited influence of the experiences of problematization of school trigonometry in the practice of pre-service teachers, when compared, for example, with other social voices, such as previous teaching and student experiences.

Resumo

Este trabalho decorre de nosso interesse em compreender a integração da pesquisa em educação matemática, em particular, de nossa linha e corrente teórica, na formação inicial de professores de matemática.

Por meio de uma revisão bibliográfica sistematizada sobre a formação e o conhecimento dos professores de matemática, concretizamos esse objetivo em um estudo focado nos '*saberes docentes*' que um grupo de professores em formação inicial constrói e manifesta quando vivencia a problematização da trigonometria na escola e quando projeta, implementa e analisa atividades em sala de aula.

Para abordar esse objeto, coordenamos a teoria socioepistemológica com a perspectiva dos '*saberes docentes*' e criamos um experimento de desenvolvimento de professores que nos permitiu projetar um espaço de formação inicial de professores *ad hoc* para nossos interesses de pesquisa.

Entre os resultados do projeto, relatamos alguns aspectos, como a metodologia de ensino aplicada, que favoreceram a realização dos objetivos instrucionais do espaço de formação; bem como algumas questões em aberto deixadas por sua execução, por exemplo, o gerenciamento ideal das aulas simuladas realizadas pelos participantes.

Em relação aos resultados da pesquisa, descrevemos os momentos de confronto com o significado linear e a ressignificação da relação ângulo-lado vivenciados, bem como os '*saberes docentes*' construídos e expressos pelos professores em formação inicial. Nesse sentido, destacamos a pouca influência das experiências de problematização da trigonometria escolar na prática dos professores em pré-serviço, quando comparadas, por exemplo, com outras vozes sociais, como as experiências docentes e discentes anteriores.

Introducción

El estudio de Montiel y Jácome (2014) reconoce que las nociones trigonométricas –particularmente la razón– son usadas exclusivamente como herramientas técnicas para el cálculo de un valor faltante. Lo que deviene en una marcada disociación entre la geometría y la trigonometría escolar, así como en la admisión de un significado lineal para la relación ángulo-lado en el triángulo y la promoción de un significado aritmético para las razones trigonométricas.

Ante este fenómeno, en Cruz-Márquez (2018) realizamos un estudio histórico-epistemológico cuyo objetivo fue acercarnos a los usos y significados que permitieron la emergencia de las nociones trigonométricas. Para robustecer la aportación epistemológica del estudio, dicha investigación incluyó una experiencia de problematización de las nociones trigonométricas[1] con profesores/as de matemáticas de educación secundaria y media superior en formación inicial, cuya situación de aprendizaje se fundamentó en los resultados del estudio histórico.

Producto de esta investigación y de algunas experiencias posteriores realizadas con la misma población, observamos que al llevar al aula un uso alternativo de las nociones trigonométricas lográbamos que quienes participaban comenzaran a problematizar la trigonometría escolar, esto es, que confrontaran y

[1] Una experiencia de problematización de la matemática escolar refiere al espacio en que un grupo de personas –habitualmente estudiantes o profesores/as– atiende una situación de aprendizaje. Entendiendo esta última como un diseño didáctico, un conjunto de tareas matemáticas, fundamentado en una propuesta epistemológica alternativa a la dominante en el discurso escolar y que, en consecuencia, pretende confrontar y enriquecer los usos y significados de quienes la afrontan.

enriquecieran los significados que habían construido alrededor de las nociones trigonométricas.

Más importante aún, advertimos que este tipo de experiencias producía en los y las profesoras cierto cuestionamiento respecto a la enseñanza y el aprendizaje de las nociones geométricas y trigonométricas puestas en juego. Por ejemplo, se justificaban –entre ellos/as– el uso de una herramienta matemática por la forma en que les habían enseñado una asignatura, se cuestionaban acerca de qué les dirían a sus futuros educandos cuando estudiaran dichas nociones, y externaban dudas e inseguridades respecto al proceder pedagógico y didáctico en las aulas de clases a la luz de las ideas trigonométricas discutidas.

Si bien estos cuestionamientos y reflexiones no eran el centro de nuestro análisis en aquel momento, conjeturamos que la problematización de la trigonometría escolar podría detonar la construcción y uso de conocimientos provenientes de ‘otras esferas’ –no exclusivamente de la matemática– en las y los profesores.

Con esta presunción como punto de partida, comenzamos una investigación que se centra en los conocimientos del profesorado de matemáticas de educación secundaria y media superior en formación inicial. Más específicamente, se enfoca en los conocimientos que dichos/as profesores/as usan y construyen al vivenciar experiencias de problematización de la trigonometría escolar, así como al diseñar, implementar y analizar actividades de aula en el área de trigonometría.

Retomando el carácter social, constructivista y pragmático de nuestra perspectiva teórica de partida –la teoría socioepistemológica–, nos interesamos por realizar este estudio desde una visión cercana a la práctica del profesorado, y un enfoque descriptivo –no prescriptivo– del conocimiento que este posee –no deficitario– y hace efectivo en su labor.

Organizamos los antecedentes, planteamiento, desarrollo, resultados y prospectivas de esta investigación en 10 capítulos. En el capítulo 1 sintetizamos los resultados de la revisión bibliográfica sistematizada realizada alrededor de la formación docente en matemáticas y del conocimiento del profesorado, en general y en las áreas de geometría y trigonometría.

En el capítulo 2 describimos nuestro problema de investigación, su viabilidad, originalidad e importancia, y explicitamos una primera versión de los objetivos generales y específicos del estudio.

En el capítulo 3 introducimos los componentes teóricos de la investigación. En particular, aludimos a algunos elementos de la teoría socioepistemológica, a resultados específicos sobre la construcción social del conocimiento trigonométrico, a los aspectos esenciales de la perspectiva de los saberes docentes, y a la coordinación de los anteriores en el planteamiento y desarrollo del estudio.

En el capítulo 4 detallamos los componentes metodológicos de la investigación. Más específicamente, introducimos a la investigación basada en el diseño y a los experimentos de desarrollo del profesorado en cuanto marco metodológico general, y describimos nuestro experimento en cuanto método específico de producción y análisis de datos.

En el capítulo 5 narramos de forma concisa lo sucedido antes y durante la intervención de nuestro experimento de desarrollo del profesorado –nuestra producción de datos–, así como los subsiguientes procesos de selección, organización y análisis de los datos producidos.

En el capítulo 6 describimos los resultados de la síntesis del análisis continuo llevado a cabo, de acuerdo con las categorías de información construidas para esa causa.

En el capítulo 7 presentamos los resultados de la primera parte del análisis retrospectivo: la actividad matemática de los/as participantes durante la experiencia de problematización de las nociones trigonométricas. Siguiendo el método configurado, describimos estos de acuerdo con las actividades matemáticas que componen la situación de aprendizaje y lo dividimos en análisis por participante y de grupo.

En el capítulo 8 exponemos los resultados de la segunda parte del análisis retrospectivo: los saberes docentes construidos y manifestados por los/as participantes durante nuestro experimento de desarrollo del profesorado. De nueva cuenta, de acuerdo con el método configurado, narramos estos conforme las etapas de la intervención y lo dividimos en análisis por participante y de grupo.

En el capítulo 9 ofrecemos una síntesis del planteamiento, ejecución y resultados del estudio, así como la conclusión a los objetivos de investigación trazados.

Y, finalmente, en el capítulo 10, aludimos a algunas limitaciones de este proyecto y esbozamos algunos estudios futuros que podrían darle continuidad.

1.
Revisión bibliográfica sobre la formación docente

Si he logrado ver más lejos,
ha sido porque he subido a
hombros de gigantes.
— Isaac Newton

Como primera etapa de esta investigación realizamos una revisión bibliográfica sistematizada alrededor de la formación docente en matemáticas –en cuanto práctica y campo de investigación– y, con mayor profundidad, sobre la formación inicial docente en matemáticas y los conocimientos del profesorado de matemáticas de educación secundaria y media superior[2] en formación inicial[3] en las áreas de geometría y trigonometría. Esto con un doble objetivo: introducirnos en el campo de la formación docente y concretar nuestra conjetura inicial en un planteamiento de investigación.

Considerando la bibliografía al respecto (entre ellos Codina, 2018; Grant y Booth, 2009; Kitchenham y Charters, 2007), realizamos dicha revisión en tres fases:

---

[2] Utilizamos la nomenclatura habitual en México: educación primaria (7-12 años), educación secundaria (12-15 años), educación media superior o bachillerato (15-18 años), educación superior o universitaria (18 años en adelante).

[3] En adelante referido únicamente como "profesorado en formación inicial".

búsqueda, evaluación, y análisis y redacción. En la primera de ellas construimos el protocolo inicial de la búsqueda, que explicita los objetivos, fuentes, palabras claves, criterios de inclusión y exclusión de resultados, y periodo de búsqueda; y ejecutamos la búsqueda bibliográfica primaria.

En la segunda fase llevamos a cabo una primera selección de los resultados, el refinamiento del protocolo inicial (ajustes a las palabras clave, los tipos de resultados y los procesos de búsqueda para algunas revistas), la reiteración de la búsqueda mediante el protocolo actualizado (Complemento 1[4]) y la evaluación secundaria de los resultados.

Dicha evaluación secundaria refiere a la lectura comprensiva de los 59 resultados encontrados y de 10 fuentes clasificadas como "otros" –productos de investigación que incluimos dada nuestra experiencia previa en el campo–, y la construcción de fichas bibliográficas individuales. Estas fichas se elaboraron a partir de un formato (Complemento 2) que reúne la información general del documento (título, autor, año y referencia) y aspectos centrales de su contenido (objeto del estudio, los elementos teóricos, los aspectos metodológicos y metódicos, y principales resultados), así como los extractos (citas textuales) y notas que consideramos relevantes para los intereses de nuestra revisión bibliográfica (ver ejemplo, Complemento 3).

Por último, durante la tercera fase de nuestra revisión, reorganizamos los resultados encontrados, esto es, descartamos algunos estudios y clasificamos el resto en: estudios específicos en geometría o trigonometría, estudios generales, periféricos de investigación o periféricos temáticos. Además, construimos tablas descriptivas de los resultados de la búsqueda, destacando características como

[4] Con el afán de ser concisos y de mantener abiertos los procesos y recursos de investigación, cargamos las herramientas de la búsqueda bibliográfica en la base de datos que reúne los archivos complementarios del estudio: https://doi.org/10.7910/DVN/LTAVNQ

idioma, población, cantidad de participantes, entre otros. Y, finalmente, con base en las lecturas comprensivas, las fichas bibliográficas individuales y teniendo en cuenta los objetivos de nuestra revisión, generamos fichas bibliográficas conjuntas y cuatro categorías de información: formación docente como práctica, formación docente como campo de investigación, conocimientos docentes, y conocimientos del profesorado en formación inicial respecto a geometría y trigonometría.

En este capítulo sintetizamos los resultados de la revisión bibliográfica sistematizada[5]. Utilizamos para ello cuatro secciones. En la primera, presentamos algunos aspectos de las tablas descriptivas construidas, con la intención de delinear *grosso modo* las investigaciones en la disciplina respecto a los conocimientos del profesorado de matemáticas. En la segunda sección, mostramos algunos resultados asociados a la constitución y desarrollo de la formación docente en Latinoamérica, y el nacimiento y auge de la investigación en este campo –primeras dos categorías de nuestra revisión–. En la tercera sección, describimos los avances y retos en el estudio sobre los conocimientos del profesorado de matemáticas, en general y en las áreas de geometría y trigonometría –tercera y cuarta categoría de nuestra revisión–. Y, por último, en la cuarta sección, realizamos una síntesis de algunos de los resultados de la revisión bibliográfica primordiales para plantear nuestro objeto de estudio.

1.1. Descripción del campo

Producto de la evaluación secundaria reducimos los resultados de la búsqueda –no incluyen los productos de investigación clasificados como otros– a 48 (Tabla 1): 26 estudios específicos sobre los conocimientos del profesorado de

---

5 Más detalles sobre las decisiones metodológicas y los resultados obtenidos en esta búsqueda bibliográfica pueden consultarse en Cruz-Márquez y Montiel-Espinosa (En prensa-a).

matemáticas en formación inicial, 3 en el área de trigonometría y 23 en geometría; 3 estudios generales sobre la formación inicial docente en cuanto práctica y campo de investigación; y 19 estudios periféricos, 13 periféricos de investigación y 6 estudios periféricos temáticos.

Tabla 1
Resultados finales de la búsqueda bibliográfica sistematizada por revista

Revista	Cant.	Tipo de resultado				
		Trig.	Geo.	Gral.	P. inv.	P. tem.
Mathematics Education Bulletin – Bolema	10	0	3	0	6	1
Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa – Relime	0	0	0	0	0	0
Educación Matemáticas	2	0	1	0	1	0
Revista Latinoamericana de Etnomatemática		0	0	0	0	0
Revista Iberoamericana de Educación Matemática – UNIÓN	7	0	4	1	2	0
Revista de Didáctica de las Matemáticas – UNO	0	0	0	0	0	0
Revista de Didáctica de las Matemáticas – NÚMEROS	1	0	0	1	0	0
Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas – SUMA	0	0	0	0	0	0
Avances de Investigación en Educación Matemática – AIEM	2	0	0	0	1	1
Revista de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática – EPSILON	1	0	1	0	0	0
Revista de Investigación en Didáctica de las Matemáticas – PNA	1	0	0	0	1	0
Revistas hispano/lusohablantes	**24**	**0**	**9**	**2**	**11**	**2**
Educational Studies in Mathematics – ESM	9	1	5	0	0	3
Journal for Research in Mathematics Education – JRME	0	0	0	0	0	0
Journal of Mathematical Behavior – JMB	4	2	1	0	1	0
For the Learning of Mathematics – FLM	0	0	0	0	0	0
Mathematical Thinking and Learning – MTL	1	0	1	0	0	0
Journal of Mathematics Teacher Education – JMTE	5	0	3	1	1	0
ZDM Mathematics Education	3	0	2	0	0	1
Mathematics Education Research Journal – MERJ	2	0	2	0	0	0
Revistas anglohablantes	**24**	**3**	**14**	**1**	**2**	**4**
Total	**48**	**3**	**23**	**3**	**13**	**6**

Con relación a los intereses de este capítulo, la observación más importante que nos permite realizar esta primera tabla descriptiva es la poca investigación reportada acerca de los conocimientos del profesorado en formación inicial respecto al área de trigonometría, en comparación con los estudios sobre geometría realizados con la misma población, por ejemplo. Puesto que este es un tópico propio de la matemática educativa y dadas las características de nuestra búsqueda –su amplitud de fuentes, periodo de búsqueda, etcétera–, consideramos que esta observación señala un espacio de investigación poco explorado en nuestra disciplina.

Para entrar más en detalle, construimos una segunda tabla descriptiva para referir a algunas de las características de los 26 estudios específicos encontrados que versan sobre los conocimientos del profesorado en formación inicial en las áreas de geometría y trigonometría (Tabla 2).

Tabla 2
Descripción de los estudios específicos

Característica	**Geometría**	**Trigonometría**	**Total**
opciones	**Cantidad (%)**	**Cantidad (%)**	**Cantidad (%)**
Idioma			
Español	9 (39.1%)	0 (0.0%)	9 **(34.6%)**
Inglés	14 (60.9%)	3 (100.0%)	17 **(65.4%)**
Tipo de investigación			
Empírica	23 (100.0%)	3 (100.0%)	26 **(100.0%)**
Teórica	0 (0.0%)	0 (0.0%)	0 **(0.0%)**
Cualitativa	22 (95.7%)	3 (100.0%)	25 **(96.2%)**
Cuantitativa	0 (0.0%)	0 (0.0%)	0 **(0.0%)**
Mixta	1 (4.3%)	0 (0.0%)	1 **(3.8%)**
Población			
Profesores en formación inicial	19 (82.6%)	3 (100.0%)	22 **(84.6%)**
Profesores en formación inicial y continua	4 (17.4%)	0 (0.0%)	4 **(15.4%)**
Cantidad de participantes			
De 1 a 25	12 (52.2%)	3 (100.0%)	15 **(57.7%)**
De 26 a 50	5 (21.7%)	0 (0.0%)	5 **(19.2%)**
Más de 50	1 (4.3%)	0 (0.0%)	1 **(3.8%)**
No explícito	5 (21.7%)	0 (0.0%)	5 **(19.2%)**
Año de publicación			
2000 a 2005	3 (13.0%)	1 (33.3%)	4 **(15.4%)**
2006 a 2010	4 (17.4%)	0 (0.0%)	4 **(15.4%)**
2011 a 2015	8 (34.8%)	1 (33.3%)	9 **(34.6%)**
2016 a 2020	8 (34.8%)	1 (33.3%)	9 **(34.6%)**

Estudio interno o externo			
Interno	19 (82.6%)	3 (100.0%)	22 **(84.6%)**
Externo	3 (13.0%)	0 (0.0%)	3 **(11.5%)**
No explicito	1 (4.3%)	0 (0.0%)	1 **(3.8%)**

Aunque incluye relativamente pocos resultados, esta tabla nos permite hacer algunas observaciones respecto a la investigación llevada a cabo sobre los conocimientos del profesorado en formación inicial en las áreas de geometría y trigonometría. Así, podemos decir que la publicación de estudios en esta línea creció en los últimos 20 años; que la mayoría de estas investigaciones se publican en inglés; casi todas son cualitativas y empíricas; en más de la mitad de estos estudios trabajan con 1-25 profesores/as en formación; y que casi todas las investigaciones consideradas son de tipo interno –realizadas por profesores/instituciones formadoras al interior de sus propios cursos/espacios–.

Pese a que nuestra revisión es más específica –al centrarse en la formación inicial docente, y en un nivel educativo y áreas temáticas concretas– y tiene diferentes fuentes –al incluir también revistas hispano/lusohablantes–, estos resultados descriptivos son consistentes con otros estudios en el campo. Por ejemplo, en la revisión bibliográfica reportada por Adler et al. (2005) también predominan los estudios internos, publicados en inglés, de naturaleza cualitativa y empírica, y llevados a cabo con relativamente pocos participantes.

Como bien mencionan Adler y colaboradores, estas características podrían tener diferentes interpretaciones –por ejemplo, que los formadores investiguen sus propios cursos podría deberse a que sus responsabilidades laborales incluyen tanto la enseñanza como la investigación– e indicar espacios de estudio –la necesidad de investigaciones a gran escala, por mencionar uno–. Para efectos del presente, estas características son un marco formativo e informativo inicial respecto a quién, cómo y con qué objetivos se estudia la formación y los conocimientos del profesorado de matemáticas, en general, y en las áreas de geometría y trigonométrica, en particular.

1.2. Formación docente

1.2.1. En cuanto práctica

En las primeras décadas del siglo XIX se desarrollaron los primeros esfuerzos orientados a la formación del profesorado y la constitución de sistemas educativos nacionales; en el entendido de que estos contribuirían al establecimiento y unificación de las repúblicas latinoamericanas recién independizadas (González, 2018). Hacia comienzos del siglo XX la estructura organizacional y jurídica del sistema educativo de los países latinoamericanos era ya sumamente diversa; no obstante, compartían algunas características como el progresivo avance de la educación laica, la necesidad de producir libros de texto, la constitución de un sistema educativo nacional –de mayor o menor solidez–, y la preocupación por la calidad y formación de aquellos/as que tenían la responsabilidad de enseñar matemática (Ossenbach, 1993).

Hoy día, la preparación inicial y el desarrollo profesional docente parece atravesar un periodo de 'reforma dinámica' a nivel mundial. Esto debido a la presión que ejercen los entes políticos, sociales y económicos sobre los Estados respecto a la formación y el desempeño del profesorado (Tatto et al., 2010), y al reconocimiento de que la calidad de la instrucción matemática que reciben los estudiantes depende en gran medida de los/as docentes (Adler et al., 2005).

Con este interés social y político sobre la formación docente coexiste una gran diversidad respecto a quién forma al profesorado de matemáticas y cómo se forma. Por ejemplo, con relación a quién lo forma, el estudio comparativo de Tatto et al. (2010) observa que en tres cuartas partes de los 21 países (regiones) participantes las universidades son quienes se encargan de la formación de los/as docentes, mientras que en el resto la formación del profesorado se imparte en escuelas normales nacionales o representa una combinación de ambas (universidades y escuelas normales).

En lo que respecta a la estructura de la formación inicial que reciben los/as docentes, Tatto et al. (2010) reporta que, aunque existe una gran variabilidad entre las opciones de formación ofrecidas, estas pueden agruparse en dos tipos: las concurrentes y las consecutivas. Las concurrentes son las que reúnen bajo un mismo programa la educación general (matemática), la formación pedagógica y la práctica docente; y las consecutivas las que solo incluyen la formación pedagógica y la práctica docente, mientras que la educación general se produce de forma independiente –y por lo general precede al resto–.

En suma, nuestra revisión bibliográfica reporta que la formación inicial y continua del profesorado de matemáticas fue un tema importante casi desde la misma fundación de los sistemas educativos latinoamericanos. Una preocupación que aumentó en las últimas décadas con el reconocimiento de la trascendencia de la formación del profesorado en la calidad educativa y la consecuente presión que los entes políticos, sociales y económicos ejercen sobre los Estados. También señala que, pese a sus orígenes cercanos –al menos a nivel latinoamericano–, la formación docente es actualmente muy diversa; a nivel nacional e incluso regional existen diferentes opciones respecto a quién y cómo se forma el profesorado de matemáticas.

1.2.2. En cuanto campo de investigación

Respecto al surgimiento de la formación docente como campo de investigación, Lerman (2001) menciona que:

> La investigación sobre los profesores de matemáticas y la formación de profesores de matemáticas ha crecido sustancialmente en los últimos 10 a 20 años con el reconocimiento de la enorme influencia del profesor en el aprendizaje de las matemáticas por parte de los niños. (p. 33; traducción propia)

Adler et al. (2005), por su parte, consideran que la emergencia de este campo es un 'desarrollo natural' de la disciplina, pues, como muestra la presentación del Survey Team 1 – ICME10, ocurrió un cambio de enfoque de la investigación sobre la enseñanza de las matemáticas, "que comenzó con un enfoque en los planes de estudio en los 70, pasó a centrarse en los alumnos en los 80-90 y, más recientemente, ha pasado a centrarse en los profesores" (p. 374; traducción propia).

De cualquier manera, el auge de este campo en la matemática educativa es evidente. Como ejemplo de esto podemos mencionar la creación y consolidación de revistas dedicadas a los estudios sobre el profesorado de matemáticas y su formación, como *Journal for Mathematics Teacher Education* –fundada en 1998–; la publicación de libros y números especiales, como *Mathematics Teachers in Transition* –publicado por Fennema y Nelson en 1997–; la inclusión de este campo entre los temas y grupos de discusión de los principales eventos de la disciplina, por ejemplo, las conferencias anuales del *International Group for the Psychology of Mathematics Education* (PME) y el *International Congress on Mathematical Education* (ICME); y una mayor atención a la formación del profesorado de matemáticas en los *handbooks* internacionales publicados (Lerman, 2001; Adler et al., 2005; entre otros).

En consecuencia, pese a ser un campo de estudio relativamente joven, estas casi cuatro décadas de intensa investigación sobre el profesorado de matemáticas y su formación permitieron la construcción de distintos enfoques y tendencias de investigación, así como de espacios en los que estos se reflexionan, discuten y amplían de forma constante.

Ya algunos colegas han escrito acerca de estos enfoques y tendencias de investigación en la formación docente en matemáticas. Sánchez (2011), por ejemplo, analiza libros, *conference proceedings*, revistas y artículos sobre la formación inicial y continua del profesorado de matemáticas publicados –principalmente– entre 1999 y 2009. Como resultado identifica cuatro tendencias consolidadas en el campo: las creencias, 'puntos de vista' y concepciones de los/as profesores/as; las prácticas de los/as docentes; los *conocimientos y habilidades del profesorado*; la relación entre la teoría y la práctica; y la práctica reflexiva. Además, reconoce tres constructos teóricos de amplio uso en la investigación sobre la formación del profesorado: *conocimiento del contenido pedagógico y otras formas* *de conocimiento*; reflexión en acción y reflexión sobre la acción; y las comunidades de práctica.

Más recientemente, Strutchens et al. (2017) realizan una revisión sistemática sobre los estudios acerca de la formación inicial de docentes de matemáticas publicados, durante los últimos diez años, en nueve revistas angloparlantes. Con base en ello, señalan cuatro áreas principales en el campo: *conocimiento del profesorado*; tecnologías, herramientas y recursos; identidad profesional del profesorado; y experiencias de campo.

No es nuestro objetivo ahondar en dichas tendencias o constructos, estos resultados sobre el origen, auge y estado actual de la investigación sobre la formación docente son importantes para, como dijimos, introducirnos en el campo, así como para reconocer a los estudios sobre la naturaleza, estructura y desarrollo del conocimiento del profesorado –en la que nos enmarcamos– como un área de investigación amplia y vigente.

1.3. Conocimientos docentes

De forma general, la literatura reconoce a Elbaz (1983), Schön (1983) y Shulman (1986) como parte de los estudios germinales de una era de investigación sobre la naturaleza del conocimiento del profesorado y sobre cómo ese conocimiento crece y cambia con el tiempo (v. g. Herbst et al., 2017).

Según Ponte y Chapman (2006), el estudio de Elbaz (1983) se “centró en la identificación de lo que los profesores sabían que otros no sabían” (p. 461; traducción propia), a lo que denominó conocimiento práctico. Por su parte, la investigación de Schön (1983) distinguía entre la práctica reflexiva y la racionalidad técnica, en este sentido, “el conocimiento de los profesores no es solo "saber cosas" (hechos, propiedades, relaciones...), sino también saber cómo identificar y resolver problemas profesionales y, en términos más generales, saber cómo construir el conocimiento” (p. 461; traducción propia). Mientras que el trabajo de Shulman (1986) propuso siete categorías de conocimiento que permiten al profesorado enseñar y tratar algo más que el conocimiento práctico, entre ellas, el conocimiento de los contenidos, conocimiento pedagógico general y el conocimiento pedagógico del contenido.

Si bien estos estudios fueron criticados y refinados con el tiempo –incluso por sus propios autores–, resultaron fundamentales para la constitución del conocimiento del profesorado de matemáticas como auténtica área de investigación y debate.

De forma similar a revisiones previas en el campo (v. g. Ponte y Chapman, 2006), seccionamos los resultados de nuestra búsqueda bibliográfica respecto al conocimiento del profesorado en tres partes: conocimientos sobre matemáticas, conocimientos sobre la enseñanza de las matemáticas, y conocimiento y práctica. Al interior de cada una de ellas referimos a los resultados de los estudios generales, y de los específicos en las áreas de geometría y trigonometría.

1.3.1. Conocimiento sobre matemáticas

El conocimiento sobre matemáticas es ampliamente reconocido como uno de los atributos críticos del profesorado de matemáticas, por lo que no es sorprendente que sea el foco de atención de gran parte de las investigaciones del campo. Ponte y Chapman (2006), por ejemplo, al analizar las conferencias del PME realizadas desde 1977 a 2005, mencionan que encontraron estudios relativos a los conocimientos matemáticos del profesorado en casi todos los años incluidos y con mayor recurrencia en las últimas dos décadas.

Respecto a los resultados de estos estudios, el trabajo de Liljedahl et al. (2009) observa que, a diferencia del profesorado de educación primaria, al profesorado de secundaria en formación inicial se le exige a menudo que obtenga conocimientos matemáticos de carácter más académico. Esto es, se le exige que domine las matemáticas de nivel universitario que se les suele enseñar a un amplio espectro de estudiantes de otras carreras, como matemáticas e ingeniería. Según los mismos autores:

> La razón de ello es la tradición, la tradición de lo que significa ser un profesor de matemáticas. Desde el período clásico, ser profesor de matemáticas significaba que uno era primero un matemático. Esta forma de pensar ha cambiado muy poco en los últimos 2,500 años. *Los futuros profesores de matemáticas deben convertirse primero en matemáticos*. (p. 29; énfasis añadido, traducción propia)

Ahora bien, pese a este énfasis heredado, gran parte de los estudios al respecto son consistentes en lo problemáticos, fragmentados o inadecuados que son los conocimientos matemáticos de los/as profesores/as de matemáticas de nivel secundario y medio superior.

El aludido estudio de Ponte y Chapman (2006), por ejemplo, menciona que “la mayoría de los estudios realizados durante los tres decenios de conferencias del PME, directa o indirectamente, se centraron en las dificultades o deficiencias que los profesores mostraban para determinados conceptos o procesos matemáticos” (p. 463; traducción propia); y que:

> Muchos estudios muestran que el conocimiento de las matemáticas de los profesores es generalmente *problemático* en términos de lo que los profesores saben, y cómo mantienen este conocimiento de los conceptos o procesos matemáticos, incluyendo conceptos fundamentales del currículo de matemáticas de la escuela. *No siempre poseen una comprensión profunda, amplia y exhaustiva del contenido que deben enseñar*. (p. 484; énfasis añadido, traducción propia)

Coincidiendo con esto, Tsamir (2007) menciona que diversos estudios del campo –entre ellos Cooney, 1994, 1999; Even y Tirosh, 1995– comprobaron que en ocasiones los conocimientos matemáticos del profesorado en formación inicial y continua acerca de los temas que enseñan son fragmentados y/o inadecuados.

En el área de geometría, las investigaciones consultadas coinciden con lo mencionado respecto al conocimiento matemático del profesorado, es decir, gran parte de la investigación de esta línea alude a las deficiencias y poca adecuación de los conocimientos disciplinares de los/as docentes.

Por ejemplo, Sinclair et al. (2017) mencionan que los estudios acerca del conocimiento geométrico del profesorado realizados con base en los niveles de van Hiele –Jones, 2006; Sarama y Clements, 2009; Unal et al., 2009; Van Putten, 2008; entre otros– concuerdan en que los conocimientos de geometría de la mayoría de los/as profesores/as se ubican en el nivel 1 y 2 de dicho modelo. En consecuencia, concluyen que "las investigaciones existentes sugieren que los profesores de muchos países diferentes no están adecuadamente preparados en geometría" (Sinclair et al., 2017, p. 475; traducción propia).

Siendo más específicos, fruto de la revisión bibliográfica, advertimos dos tipos de resultados relevantes acerca de los conocimientos geométricos del profesorado en formación inicial: 1) los relativos a problemas y dificultades al trabajar con nociones geométricas específicas y 2) los asociados a fenómenos didácticos más amplios.

Entre los primeros nos interesa aludir a los que se centran en nociones geométricas cercanas al trabajo con trigonometría clásica. Por ejemplo, la revisión bibliográfica de Jones y Tzekaki (2016), quienes –con base en Silfverberg y Joutsenlahti, 2014– señalan la diversidad de interpretaciones que profesores/as de primaria y secundaria en formación inicial dan al ángulo: como una línea que consta de dos segmentos de recta, como dos rayos o como una región definida por estos elementos. También refieren a la indecisión del profesorado respecto a si un ángulo se extiende fuera de la representación mostrada –en la dirección determinada por el ángulo– o no.

Además, estos mismos investigadores –con base en Alatorre y Saiz, 2009– mencionan algunas concepciones erróneas que profesores/as de primaria y secundaria en formación inicial evidencian al trabajar con triángulos:

> Entre ellas figuraban la idea de que la base de un triángulo es necesariamente horizontal (con el resto de la figura sobre ella) y la altura necesariamente vertical y/o dibujada desde el punto más alto, la idea de que los triángulos deben ser necesariamente isósceles, que las altitudes deben ser internas, la idea de que cada triángulo tiene sólo una base y una altura, confundiendo la altura con la mediana, el uso de la terminología de los triángulos rectángulos con los no rectángulos, varias ideas erróneas sobre el teorema de Pitágoras y sus aplicaciones, y errores con la fórmula para el área de un triángulo. (p. 134; traducción propia)

Por otro lado, entre los fenómenos didácticos reportados al trabajar con el profesorado en formación inicial en el área de geometría, destacamos tres: la percepción visual, el uso del lenguaje y los prototipos geométricos. Con relación al primero, diversas investigaciones –entre ellas Cruz y Mantica, 2017; Etcheverry et al., 2013; Iglesias y Ortiz, 2019– aluden a que, al trabajar situaciones geométricas, los/as profesores/as en formación inicial tienden a dejarse llevar por la percepción visual de los objetos geométricos, por encima de sus propiedades y relaciones matemáticas.

Respecto al segundo, de forma similar a como sucede con la terminología de los triángulos mencionada por Jones y Tzekaki (2016), hay reportes respecto a imprecisiones en el uso del lenguaje al trabajar con otras nociones geométricas. Por ejemplo, Iglesias y Ortiz (2019) mencionan que, al resolver algunas tareas de demostración en ambientes de geometría dinámica, los/as profesores/as de secundaria en formación inicial “hablan de ángulos iguales en vez de ángulos congruentes, así como la división del segmento AB en n partes proporcionales en vez de su división en n partes iguales” (p. 168).

En cuanto al tercero, los prototipos geométricos, que representa quizá el fenómeno más reportado según nuestra revisión bibliográfica, diferentes investigaciones —entre ellas Freyre y Mántica, 2019; Iglesias y Ortiz, 2019; Jones y Tzekaki, 2016; Mamolo y Pali, 2014– aluden a que los/as profesores/as de secundaria en formación inicial tienen imágenes prototípicas muy arraigadas respecto a qué son y cómo se representan los objetos geométricos, planos o sólidos.

Por último, en el área de trigonometría, pese a que –como adelantamos– solo encontramos tres estudios acerca del conocimiento del profesorado en formación inicial en dicha área, dos de ellos refieren parcialmente al conocimiento trigonométrico del profesorado: Moore et al. (2016) y Weber et al. (2020).

El estudio de Moore et al. (2016) se centra en los significados sobre el círculo unitario de dos profesores en formación inicial cuando se los expone a un enfoque con fundamentos en el razonamiento cuantitativo. Dados nuestros intereses, el aporte más relevante del estudio es explicitar algunas características del trabajo en trigonometría de los profesores en formación inicial. Por ejemplo, los autores señalan que el trabajo en trigonometría de los estudiantes de pregrado se centra en el desarrollo de procedimientos y cálculos paso a paso; y aluden a la dificultad de dichos estudiantes para construir objetos geométricos al trabajar tareas de trigonometría: “lo que parecía faltarles a estos alumnos era la capacidad o la inclinación para construir mental o físicamente objetos geométricos que les ayudaran a enfrentarse a situaciones trigonométricas” (Weber, 2005, como se citó en Moore et al., 2016, p. 222; traducción propia).

Mientras que el estudio de Weber et al. (2020) pretende dar evidencia de que un curso de matemáticas avanzadas puede ser útil, no solo para el aprendizaje matemático de los/as profesores/as en formación inicial, sino también para su proceder pedagógico. Para nuestra investigación, el resultado más relevante de este estudio es la evidencia respecto a deficiencias en el conocimiento trigonométrico del profesorado en formación inicial, en particular respecto al trabajo con las funciones y ecuaciones trigonométricas.

1.3.2. Conocimiento sobre la enseñanza de la matemática

Aunque parece haber menor cantidad de estudios que aludan a los conocimientos sobre la enseñanza –en comparación con los que tratan sobre los conocimientos matemáticos del profesorado–, este tipo de estudios encontró resultados sumamente interesantes para el campo. En particular, consecuencia de nuestra búsqueda, podemos destacar el rol de la experiencia para el desarrollo de los conocimientos sobre la enseñanza de las matemáticas.

En este sentido, Ponte y Chapman (2006) –con base en Rossouw y Smith (1998)– aluden a que los/as profesores/as acaban desarrollando sus propios conocimientos sobre la enseñanza de las matemáticas producto de sus experiencias y percepciones personales.

Esta influencia de las experiencias parece no limitarse al ámbito de la docencia, también las experiencias como estudiantes –de secundaria y bachillerato– demostraron ser determinantes para el desarrollo de los conocimientos sobre la enseñanza de las matemáticas. Morales (2018), por ejemplo, señala que “el estudiante [profesor/a en formación inicial], cuando llega a la universidad, ya trae una idea sobre cómo enseñar algún tipo de contenido matemático, y probablemente esa concepción es producto de su experiencia personal vivida como alumno en una escuela” (p. 1051). Esto podría entenderse como natural puesto que, como mencionan Liljedahl et al. (2009), al trabajar con profesores/as de matemáticas en formación inicial, “lo que están aprendiendo es también cómo están aprendiendo” (p. 29; traducción propia).

En el área de geometría, de acuerdo con lo anterior, encontramos varios estudios que señalan lo poco adecuado que son los conocimientos para la enseñanza del profesorado en formación inicial y el importante rol de la experiencia para el desarrollo de este tipo de conocimientos.

Por ejemplo, Herbst et al. (2017) mencionan que la forma en que los programas de formación planifican y enseñan geometría a los/as profesores/as parecen *no estar bien alineados* con los conocimientos relevantes para la enseñanza de dicha área, así que estos últimos terminan aprendiéndose "típicamente en el trabajo a través de la experiencia de enseñar la asignatura" (p. 140; traducción propia).

Coincidiendo con esto, la revisión bibliográfica de Sinclair et al. (2017) señala que la experiencia en la enseñanza de la geometría parece tener mayor influencia en los conocimientos sobre la enseñanza de esta área que los cursos universitarios recibidos al respecto o los años de experiencia en la enseñanza de la matemática en general.

Por último, en el área de trigonometría, la única investigación que contiene una referencia a los conocimientos sobre la enseñanza del profesorado es la de Cavey y Berenson (2005). En ella, las autoras estudian el crecimiento de la comprensión de la trigonometría del triángulo rectángulo de una profesora en formación inicial, mientras esta planifica una lección sobre el tópico, a través de un *lesson plan study* –un método derivado del *lesson study* japonés–.

Para nuestros fines, el resultado más relevante de esta investigación es la conjetura de que los contextos de enseñanza no solo permiten el crecimiento de la comprensión de las matemáticas escolares por parte del profesorado en formación, sino que también conducen "a un crecimiento en la comprensión de las estrategias de enseñanza por parte de los futuros maestros" (p. 188; traducción propia).

1.3.3. Conocimiento y práctica

Según Shriki (2010), de reconocer que “los maestros tienden a enseñar de la manera en que se les enseñaba en la escuela” (p. 159; traducción propia), se desprendió la necesidad de instruir y exponer a los/as profesores/as en formación a prácticas de aula en las que implementen enfoques de enseñanza innovadores.

> Como muestra la investigación, si los PT [profesores en formación inicial] experimentan métodos de enseñanza que son diferentes de los que ellos mismos experimentaron como estudiantes, es más probable que los implementen más adelante en su trabajo como maestros de escuela. (Beswick, 2005, como se citó en Shriki, 2010, p. 177; traducción propia)

En efecto, estos procesos de instrucción y práctica durante la formación docente reportaron múltiples beneficios. Por ejemplo, Hollebrands y Lee (2016) observan que a medida los/as docentes adquieren experiencia con los estudiantes “pueden anticipar mejor cómo responderá un estudiante a una pregunta planteada y pueden formular una pregunta o respuesta de seguimiento adecuada” (p. 149; traducción propia). Por su parte, Llinares y Krainer (2006) mencionan que el acercar los conocimientos y la práctica en la formación de los/as profesores/as de matemáticas les ofrece una mejor oportunidad de integrar la teoría y la práctica; más específicamente, les permite ampliar su vocabulario, cambiar su visión de la enseñanza, desarrollar una mayor sensibilidad hacia el estudiantado y el reconocimiento de la legitimidad de las perspectivas de pensamiento puestas en juego en una situación particular.

No obstante, pese a todos estos beneficios reportados al involucrar al profesorado de matemáticas en formación inicial en experiencias de aula, la revisión realizada muestra que este tipo de estudios son escasos al compararlos con los que se centran en los conocimientos matemáticos e incluso con las investigaciones acerca del conocimiento sobre la enseñanza de las matemáticas que poseen los/as profesores/as de secundaria y media superior en formación.

Consecuencia de esta misma observación, Ponte y Chapman (2006) concluyen su revisión bibliográfica señalando que:

> La mayoría de los estudios sobre los conocimientos matemáticos de los profesores se centraron en un hecho, concepto o procedimiento matemático particular de una manera que no nos da una idea de la relación con la práctica. […] Parece, entonces, que la labor futura debería incluir un enfoque en el entendimiento de los conocimientos que tienen los maestros en términos de su comprensión y en relación con la práctica. (p. 487; traducción propia)

En el área de geometría, los escasos estudios que refieren a este respecto indican una relación promisoria, pero compleja entre los conocimientos del profesorado en formación y la práctica. Herbst et al. (2017), por ejemplo, –con base en van der Sandt y Nieuwoudt 2003, 2005– concluyen que "la formación previa al servicio de los profesores no prepara adecuadamente a los profesores para la enseñanza de la geometría" (p. 146; traducción propia).

Además, dado que van der Sandt y Nieuwoudt (2003, 2005) trabajan con ambas poblaciones, los autores observan que los/as profesores/as en servicio superaron consistentemente sus colegas en formación inicial respecto a sus conocimientos sobre geometría –medidos a través de los niveles de van Hiele–, lo que para Herbst et al. (2017) significa que "el conocimiento de la geometría de los profesores continúa creciendo con el tiempo; es decir, *los profesores están aprendiendo a través de la enseñanza*" (p. 146; énfasis añadido, traducción propia).

1.4. Epílogo

La revisión bibliográfica nos dio resultados útiles para posicionar nuestro estudio. En primer lugar, nos permitió reconocer a la formación inicial y continua del profesorado como una problemática de interés, casi desde la misma fundación de los sistemas educativos latinoamericanos. Una preocupación que ha aumentado en las últimas décadas ante el reconocimiento de la trascendencia de dicha formación en la calidad educativa.

Producto de esta creciente preocupación y de la misma evolución de la disciplina, surge la formación docente en matemáticas como campo de estudio. Cuatro décadas más tarde, este posee un amplio cúmulo de resultados de investigación, tendencias y perspectivas propias, así como grupos especializados, revistas, eventos y otros espacios donde estos resultados se discuten y amplían de forma constante. Al interior de este campo, la revisión bibliográfica nos muestra que, tanto en la formación inicial como continua, el estudio y reflexión sobre la naturaleza, estructura y desarrollo del conocimiento del profesorado de matemáticas constituyen un área amplia y vigente.

Ahora bien, como es natural, los resultados sobre los conocimientos del profesorado de matemáticas se organizaron en diversas aproximaciones, enfoques y líneas de investigación. Producto de la revisión, reconocimos, por ejemplo, la existencia de dos aproximaciones dominantes respecto al conocimiento del profesorado, una dualidad que puede ser sintetizada como la tensión entre el conocimiento que el profesorado 'debería tener' –un tanto más afín a estudios prescriptivos y teóricos– y el que 'tiene' –un tanto más cercana a entornos exploratorios y prácticos–.

Según Liljedahl et al. (2009), esta dualidad puede explicarse en gran parte como "producto de la constante confluencia de la teoría, la investigación y la práctica en el campo de la enseñanza de las matemáticas y no puede ni debe resolverse mediante la exclusión de una u otra" (p. 30; traducción propia).

También advertimos que gran parte de los resultados de investigación respecto a los conocimientos docentes –en general, y en las áreas de geometría y trigonometría– se centró en los conocimientos matemáticos de esta población. Y que de forma consistente estos estudios subrayan lo problemáticos, fragmentados o inadecuados que son dichos conocimientos.

Ante esta centración en los conocimientos matemáticos y este enfoque ‘deficitario’, Ponte y Chapman (2006) declaran que:

> La imagen emergente del profesor es la de un profesional con un conocimiento deficiente, en particular, de las matemáticas y de la enseñanza de las matemáticas. *Estos estudios ponen de relieve lo que el profesor no sabe, no comprende o no hace*. (p. 486; énfasis añadido, traducción propia)

Por último, existen –de forma natural– líneas de investigación más y menos exploradas en el campo; entre las segundas ubicamos a la trigonometría. Como mencionamos, en nuestra revisión bibliográfica encontramos solo 3 estudios relativos a los conocimientos del profesorado en formación inicial en dicha área temática; estos, además, nos dan escasa o nula información sobre los conocimientos no-disciplinarios del profesorado en formación inicial o de la relación de dichos conocimientos con la práctica docente.

En este sentido, coincidimos nuevamente con Ponte y Chapman (2006) cuando señalan que “la labor futura debería incluir un enfoque en el entendimiento de los conocimientos que tienen los docentes en términos de su comprensión y en relación con la práctica” (p. 487; traducción propia).

En conclusión, los resultados mostrados nos dan certeza respecto a que nuestra investigación se enmarca en un campo –la formación docente– y un área –los conocimientos del profesorado– amplios y vivaces. Y, al mismo tiempo, se adscribe en una línea relativamente nueva y poco explorada: los conocimientos del profesorado en el área de trigonometría.

Además, nos ayudan a ir posicionando nuestra investigación con relación a las aproximaciones y enfoques previos. Así, dado nuestro aludido interés por explorar los conocimientos que los/as profesores/as usan y construyen al vivenciar experiencias de problematización de la trigonometría escolar y al diseñar, implementar y analizar actividades de aula en trigonometría; nos aproximamos a los conocimientos –no exclusivamente matemáticos– del profesorado desde su práctica, desde un enfoque no deficitario, sino orientado a indagar los conocimientos que el profesor en formación 'tiene' –lo que sí sabe y sí hace–, sin un modelo teórico a priori ni un referente institucional respecto al conocimiento que el profesorado 'debería tener'.

2.
Problema y objetivos de investigación

Para poder comprender lo que sucede en las aulas es necesario tratar de explicar cuál es el conocimiento tácito de los profesores y profesoras, o sea los constructos, principios y creencias con los que este colectivo de profesionales prácticos deciden y actúan.
— Philip W. Jackson

En este capítulo presentamos nuestro problema de investigación. Utilizamos para ello dos secciones. En la primera, describimos la viabilidad, originalidad e importancia de nuestro objeto de estudio. En la segunda, explicitamos una primera versión de los objetivos generales y específicos que pretendemos atender en la investigación.

2.1. Problema de investigación

Como mencionamos, dada nuestra investigación de partida y las experiencias previas al trabajar con el profesorado de matemáticas en formación inicial, partimos este estudio con la conjetura de que problematizar la trigonometría escolar promueve la manifestación de conocimientos provenientes de ‘otras esferas’ –no exclusivamente de la matemática– en dicha población.

Así, un resultado importante de nuestra revisión bibliográfica fue comprobar la viabilidad de dicha conjetura, es decir, identificar estudios que proponían actividades matemáticas a profesores/as en formación inicial y reportaban la emergencia de conocimientos, discusiones y reflexiones asociadas a otras esferas de conocimiento.

Un buen ejemplo de esto es el estudio de Zazkis y Leikin (2008), el cual tenía el objetivo de examinar la comprensión de lo que implica una definición matemática para 40 profesores/as que cursaban el último semestre de su formación inicial. Para ello, las autoras presentaron a los/as profesores/as dos tareas: en la primera se pedía construir tantos ejemplos como fuera posible que definieran su concepción de cuadrado, y en la segunda se pedía analizar y discutir una lista de 24 ejemplos-definiciones del mismo concepto matemático.

Uno de los resultados más importantes del estudio es la emergencia de una fuerte injerencia de reflexiones y consideraciones pedagógicas frente a las matemáticas:

> Es decir, aunque la pregunta presentada era "¿qué ejemplos de la lista son definiciones válidas de un cuadrado?", muchos participantes en sus argumentos reformularon implícitamente la pregunta a "¿cuál de las siguientes definiciones utilizaría con mis alumnos?". (Zazkis y Leikin, 2008, p. 146; traducción propia)

Este resultado no solo coincide con nuestras experiencias previa al trabajar situaciones de problematización de la trigonometría escolar con profesores/as en formación inicial; sino que muestra cómo estos/as, al menos quienes cursan su etapa final de estudio, piensan en su rol como docentes y en sus futuros alumnos al realizar una actividad, incluso cuando esta está dirigida a aspectos matemáticos de su formación.

Adicionalmente, gracias a nuestra revisión, advertimos que no solo es ampliamente reportada la incidencia de las experiencias y conocimientos matemáticos sobre los conocimientos para la enseñanza y la práctica del profesorado en formación inicial (v. g. Blanton, 2002; Cavey y Berenson, 2005;

Grover y Connor, 2000; Herbst et al., 2017; Jones y Tzekaki, 2016; Steele, 2013); sino que también se reportó que las experiencias didácticas y prácticas anteriores (v. g. Cavey y Berenson, 2005), las experiencias educativas previas (v. g. Blanton, 2002), las preferencias y experiencias personales (v. g. Morales, 2018), y diversos ámbitos de la vida de los/as profesores/as en formación inicial (v. g. Yanik, 2011) influyen en su conocimiento.

Esta observación es relevante pues, pese a que en nuestras experiencias previas solo emergieron discusiones y reflexiones de carácter pedagógico, la literatura nos muestra que, al enfrentar una situación matemática específica o al diseñar, implementar y analizar situaciones de aula, los/as profesores/as en formación *usan y construyen* conocimientos de diversas procedencias y naturalezas.

Un segundo resultado relevante es respecto a la originalidad del estudio, pues la revisión bibliográfica realizada evidencia que en nuestra disciplina no hay gran cantidad de investigaciones acerca de los conocimientos del profesorado en formación inicial en el área de trigonometría. Además, los estudios existentes –detallados en el capítulo anterior– no ahondan en los conocimientos no-disciplinares que los/as profesores/as en formación inicial tienen o de sus conocimientos en relación con la práctica.

Por último, en cuanto a la importancia de esta investigación, fruto de la revisión bibliográfica reseñada, podemos señalar en dos direcciones. Primero, como dijimos, la literatura reporta que existe una gran desvinculación o desalineamiento entre la formación inicial del profesorado y la realidad escolar (v. g. Rockwell y Mercado, 1988; Herbst et al., 2017). Lo que nos lleva a la cuestión: cómo acercamos la formación inicial del profesorado con la realidad educativa, con los conocimientos que le son útiles a los/as profesores/as en su práctica. Para atender esto, primero debemos conocer cuáles son esos conocimientos útiles o, más específicamente, cuáles son los conocimientos que el profesorado construye y usa –efectivamente– al enseñar un tópico o área matemática particular.

Una segunda dirección para sostener la importancia de estudiar los conocimientos del profesorado en formación inicial en el área de trigonometría, un poco más cercana a la formación docente como campo de investigación que como práctica, es la creciente necesidad por teorías situadas acerca del conocimiento del profesorado.

Al respecto, en su revisión bibliográfica sistematizada sobre la formación docente en matemáticas, Adler et al. (2005) mencionan que, ante la creciente cantidad de marcos y modelos teóricos generales sobre el conocimiento del profesorado, "el campo necesita *mejores teorías "locales"* (geográficas, temáticas, etc.) de aprendizaje de los profesores antes de tratar de lograr teorías generales sobre cómo los profesores aprenden" (p. 378; énfasis añadido, traducción propia).

Con nuestro estudio ofrecemos una descripción detallada de los conocimientos que los/as profesores/as en formación inicial construyen y usan al vivenciar experiencias de problematización, así como al diseñar, implementar y analizar actividades de aula en trigonometría. Esto abona en las dos direcciones aludidas, pues, por un lado, arroja luz sobre el conocimiento que los/as profesores/as en formación construyen y usan –efectivamente– al trabajar y enseñar esta área matemática, lo que podrá ser base para futuras propuestas de formación inicial del profesorado que acerquen los procesos de instrucción con la práctica; y, por otro lado, nos permite construir explicaciones teóricas situadas respecto al desarrollo del conocimiento de un grupo de profesores/as en formación inicial acerca a un área matemática específica, lo que será útil para desafiar y robustecer los marcos y modelos teóricos generales existentes.

2.2. Objetivos de investigación

2.2.1. Objetivos generales

Con base en la revisión bibliográfica realizada y las decisiones metodológicas tomadas hasta este punto, nos planteamos atender los siguientes objetivos generales de investigación (OG):

OG1. Identificar los conocimientos que el profesorado de matemáticas en formación inicial construye y usa al vivenciar experiencias de problematización de la trigonometría escolar y al diseñar, implementar y analizar actividades de aula en el área de trigonometría.

OG2. Describir el rol que juegan las experiencias de problematización de la trigonometría escolar al diseñar, implementar y analizar actividades de aula en el área de trigonometría.

2.2.2. Objetivos específicos

Como un desglose del primer objetivo general nos trazamos los siguientes objetivos específicos (OE):

OE1. Identificar y describir los conocimientos que el profesorado de matemáticas en formación inicial construye y usa al vivenciar experiencias de problematización de la trigonometría escolar.

OE2. Identificar y describir los conocimientos que el profesorado de matemáticas en formación inicial construye y usa al diseñar, implementar y analizar actividades de aula en el área de trigonometría.

Con relación al segundo objetivo general nos propusimos los siguientes objetivos específicos:

OE3. Involucrar a los/as profesores/as de matemáticas en formación inicial participantes en experiencias de problematización de la trigonometría escolar.

OE4. Describir cómo estas experiencias de problematización dialogan con los conocimientos docentes al diseñar, implementar y analizar actividades de aula en el área de trigonometría.

3.
Consideraciones teóricas

Una teoría no es una solución,
es la posibilidad de tratar un problema.
— Edgar Morin

En este capítulo introducimos los componentes teóricos del estudio. Utilizamos para ello cuatro secciones. En la primera, narramos algunos elementos fundamentales de la teoría socioepistemológica, en cuanto nuestra postura general sobre el conocimiento matemático y su significación. En la segunda sección, detallamos algunos resultados específicos sobre la significación de las nociones trigonométricas, útiles para la producción y análisis de los datos del estudio. En la tercera sección, describimos algunos aspectos de la perspectiva de los saberes docentes, en cuanto nuestra posición acerca de los conocimientos del profesorado. Y, por último, en la cuarta sección, presentamos una síntesis de los elementos teóricos, así como las adaptaciones, coordinaciones y roles que juegan en el planteamiento y desarrollo del estudio.

3.1. Sobre la significación de las nociones matemáticas

Con relación a nuestra visión sobre el conocimiento matemático y su significación, cuatro elementos juegan un rol fundamental al proponer y llevar a cabo este estudio: los supuestos de partida de la teoría socioepistemológica, las nociones de discurso Matemático Escolar y democratización del aprendizaje, problematización del saber matemático y problematización de la matemática escolar, y el modelo de anidación de prácticas. Describimos estos en los siguientes apartados.

3.1.1. Uso y significación de las nociones matemáticas

Desde sus estudios fundacionales, realizados entre la segunda mitad de los 80 y la primera de los 90, las investigaciones realizadas desde la teoría socioepistemológica –o socioepistemología– centraron su atención en el rol que juega el uso y el contexto social y cultural en la significación de las nociones y procedimientos matemáticos.

Treinta años después, esta teoría se determina como una perspectiva sociocultural, constructivista y pragmática, cuya piedra angular es el reconocimiento de que la significación de las nociones y procedimientos matemáticos pende de su *uso situado*. Entendiendo dicho uso como las formas en que es empleada una noción matemática en un contexto específico (Cabañas-Sánchez y Cantoral, 2012).

Este posicionamiento se soporta en la asunción de cuatro principios:

Principio de racionalidad contextualizada

La visión formalista o tradicional de la racionalidad señala que “ser racional reside únicamente en pensar y actuar de acuerdo con reglas abstractas y universalmente aplicables, como las reglas lógicas, probabilísticas, matemáticas, etc.” (Xiang, 2008, p. 103).

No obstante, a partir de la década de los 60, experimentos como el denominado ‘problema de la selección de tarjeta’, comenzaron a agrietar la visión tradicional de la racionalidad, pues evidenciaron que las personas no siempre piensan y realizan acciones racionales con base en las reglas lógicas, probabilísticas y matemáticas.

La ola posterior de estudios comenzó a delinear una nueva perspectiva de la racionalidad; una que consideraba elementos contextuales como la limitación biológica de nuestra capacidad cognitiva, los contextos espaciales y temporales, nuestros propósitos prácticos y los contextos sociales como factores determinantes al realizar una inferencia (Xiang, 2008).

La teoría socioepistemológica –al igual que otros enfoques socioculturales– asume esta concepción contextualizada de la racionalidad, al partir de que la significación de las nociones y procedimientos matemáticos reside en su uso cultural, histórica e institucionalmente situado.

Principio de relativismo epistemológico

De admitir que las formas en que las personas piensan y significan las nociones matemáticas se configuran en función de aspectos socioculturales, deviene el que no pueda existir un criterio de validez universal para el conocimiento matemático. En este sentido, la teoría socioepistemológica admite también que "la validez del saber es relativa a la epistemología de partida, tanto del individuo como del grupo cultural y su contexto" (Cantoral, 2013, p. 158).

Esta postura es opuesta a la visión objetivista, en la cual el conocimiento "es un conocimiento sin conocedor; es conocimiento sin sujeto cognoscente" (Popper, 1979, como se citó en Chalmers, 1990, p. 169).

Principio de significación progresiva

Al partir de que la significación de las nociones y procedimientos matemáticos proviene de su uso situado, y admitir que las culturas y las disciplinas científicas usan el conocimiento matemático de distintas formas (Reyes-Gasperini, 2017), esta postura teórica acepta que una noción matemática puede poseer un amplio abanico de significados.

Más aún, la teoría socioepistemológica admite que el sujeto –individual o colectivo– puede significar progresivamente cierta noción o procedimiento matemático consecuencia de su uso en diferentes contextos (Cantoral et al., 2015).

Principio de normatividad de la práctica social

Por último, la teoría socioepistemológica sostiene –fruto de décadas de investigación empírica– que transversal a los usos situados desde los cuales se construye cierto conocimiento matemático es posible identificar invariantes, esto es, lo que fundamentalmente está normando la significación y construcción del conocimiento matemático, a lo que denomina *práctica social* (Reyes-Gasperini, 2017). En este sentido, las prácticas sociales "son la base y orientación en los procesos de construcción del conocimiento, se constituyen, por así decirlo, en las generadoras del conocimiento" (Cantoral, 2013, p. 155).

Así, la teoría socioepistemológica incorpora –quizá como su fundamento más particular– un principio de normativa de la práctica social, que coloca a la práctica social como el ente que coacciona y al mismo tiempo norma la construcción del conocimiento matemático.

Estos supuestos respecto a la significación de las nociones y procedimientos matemáticos, que centran la atención en el uso situado de las nociones matemáticas –expresado en términos de prácticas contextualizadas–, constituyen el trasfondo del planteamiento y desarrollo de este estudio.

3.1.2. Discurso matemático escolar y la democratización del aprendizaje

A mediados de los años 70, producto de la introducción de las denominadas matemáticas modernas a los sistemas educativos europeos y estadounidense, se intensifica el debate sobre la distancia entre la matemática y la matemática escolar. En este contexto nace la noción de transposición didáctica, propuesta inicialmente por Michel Verret y retomada a título personal por Yves Chevallard una década más tarde (Gómez, 2005).

Desde entonces, se reconoce que la introducción del conocimiento matemático –un objeto funcional– en el sistema educativo le impone un “conjunto de transformaciones adaptativas que van a hacerlo apto para ocupar un lugar entre los objetos de enseñanza” (Chevallard, 1998, p. 45).

La teoría socioepistemológica –al igual que otros enfoques de la disciplina– reconoce la existencia y configuración de este proceso. Más aún, sostiene que el conjunto de modificaciones que transforman un objeto funcional en un objeto de enseñanza no es aleatorio, sino que está regido por un sistema de razón que selecciona, organiza y estructura los conocimientos de la matemática que son incluidos en la matemática escolar (Reyes-Gasperini, 2016); sistema de razón al que denomina *discurso Matemático Escolar*.

Este discurso determina la forma y estructura de los distintos planos educativos, como ser, libros de texto, planes y programas de estudio, el discurso escolar, y las creencias y concepciones del profesorado, estudiantado y comunidad académica en general (Montiel y Jácome, 2014). Más de dos décadas de investigación empírica alrededor de estos planos permitieron identificar algunas de las características del discurso Matemático Escolar vigente, entre ellas –las describimos parafraseando a Soto (2010)–:

- **Atomización de conceptos.** Refiere a la disociación existente entre las nociones matemáticas escolares y los contextos sociales y culturales que permiten la constitución del conocimiento.
- **Carácter hegemónico.** Alude a la imposición de algunos significados, argumentos y procedimientos sobre otros, que el discurso Matemático Escolar promueve.
- **Matemática como un conocimiento acabado y continuo.** Se entiende a la matemática como un cuerpo de objetos preexistentes a la experiencia humana que siguen un estricto orden lineal, esto ha generado que su enseñanza se reduzca a la mecanización de procesos y memorización de los conceptos matemáticos.
- **Carácter utilitario.** Apunta a la prioridad que recibe la utilidad del conocimiento por encima de cualquiera de sus restantes cualidades, incluida

su funcionalidad –entendida como la posibilidad de integrar tal conocimiento a la vida cotidiana, con la intención de transformarla–.

- **Falta de marcos de referencia.** Se ha desatendido el hecho de que la matemática responde también a otras disciplinas y, por tanto, es ahí donde encuentra una base de significados naturales.

Para la teoría socioepistemológica, el principal objetivo de nuestra disciplina es *democratizar el aprendizaje en matemáticas* (Cantoral, 2013). Para lograr este propósito no es suficiente con asegurar el acceso a la educación o la aprobación del estudiantado; sino que se requiere garantizar que las bases democráticas "apunten a un aprendizaje masivo y real, que desarrolle el pensamiento matemático de los futuros ciudadanos, promoviendo ciudadanos críticos y pensantes, significando la matemática a partir de su valor de uso" (Reyes-Gasperini, 2017, p. 31).

La evidencia empírica muestra que el discurso Matemático Escolar –dadas las características mencionadas– excluye a los actores del sistema didáctico (estudiantes y profesores/as) de la construcción del conocimiento matemático (Soto, 2010). En consecuencia, la teoría socioepistemológica sostiene que para conducirnos hacia la democratización del aprendizaje es necesario el constante *rediseño el discurso Matemático Escolar*.

Este rediseño incluye la modificación de las características del discurso Matemático Escolar aludidas, la transformación de los planos educativos mencionados y la elaboración/implementación de propuestas concretas de enseñanza orientadas al aula, con base en una epistemología renovada (Reyes-Gasperini, 2017). Esta última tarea –la más cercana a nuestro estudio–, nos plantea dos cuestiones importantes: la procedencia de esta epistemología renovada y el rol del profesorado de matemáticas en la introducción de dichas propuestas al aula.

Con relación al primer punto, la teoría socioepistemológica propone que, ante el carácter utilitario, la falta de marcos de referencia y demás restricciones que impone el discurso Matemático Escolar, es necesario introducir nuevas epistemologías que amplíen y robustezcan los usos y significados que habitan la escuela. Además, sugiere una estrategia teórico-metodológica para construir y poner a prueba estas epistemologías: la *problematización del saber matemático*.

Respecto a la segunda cuestión, con base en experiencias e investigaciones previas (v. g. Lezama y Mariscal, 2008; Reyes-Gasperini, 2017), advertimos que llevar dichas propuestas innovadoras de enseñanza al aula es un tema poco sencillo, pues requiere, en primera instancia, de procesos amplios de trabajo y reflexión con el profesorado de matemáticas. En este sentido, la teoría socioepistemológica propone que, previo a dialogar sobre la viabilidad y adaptación de una propuesta al aula, es fundamental involucrar al profesorado de matemáticas en experiencias de *problematización de la matemática escolar*.

3.1.3. Problematización del saber matemático y de la matemática escolar

De forma general, problematizar refiere a "plantear algo como problema" (Real Academia Española, s.f., definición 1). En nuestra disciplina, el término problematizar, y en particular problematizar el saber, se introdujo a principios de los años 70 por la denominada didáctica fundamental francesa y sirvió como un parteaguas entre la visión clásica de nuestra disciplina –centrada exclusivamente en el alumnado y profesorado– y una visión ampliada de nuestro objeto, que incluye el saber matemático puesto en juego (Chevallard et al., 2009).

Desde la teoría socioepistemológica, *problematizar el saber matemático* refiere a una estrategia teórico-metodológica útil para estudiar la articulación de las dimensiones epistemológica, cognitiva, didáctica y social de un *saber matemático específico* –entendido como conocimiento puesto en uso– (Reyes-Gasperini, 2016). Para esta teoría, la problematización de una pieza de saber matemático requiere de dos momentos: la historización y la dialectización.

La *historización del saber matemático* refiere al estudio e identificación de aquellos usos y significados que le son propios a la noción matemática en cuestión y que se diluyeron, transformaron o perdieron en su introducción a la matemática escolar (Montiel y Buendía, 2013). Es necesario explicitar que –de acuerdo con los principios aludidos– este estudio no se limita al examen del objeto matemático *per se*; sino que incluye también el análisis detallado de las circunstancias socioculturales que permitieron la construcción y significación de la pieza de conocimiento en cuestión, “de la racionalidad contextualizada con la cual fue concebida en su tiempo y espacio” (Reyes-Gasperini, 2017, p. 54).

La *dialectización del saber matemático*, por su parte, alude a la confrontación de los usos y significados reconocidos en la historización con los que viven en la escuela, los ambientes técnicos-profesionales, la cotidianidad de las personas, entre otros espacios.

En este sentido, la problematización del saber, desde la perspectiva teórica adoptada, es una herramienta útil para identificar usos, significados y otros elementos que permitieron la construcción y significación de una noción matemática específica, así como para –con base en estos– confrontar y enriquecer los usos y significados que habitan la escuela y otros espacios; una herramienta que permite “hablar entre sí a las distintas posturas y explicaciones, significarlas con base en sus contextos, entenderlas y estudiarlas con base en ellos” (Reyes-Gasperini, 2017, p. 55).

Por otro lado, *problematizar la matemática escolar*, desde la teoría socioepistemológica, refiere a los momentos de confrontación y resignificación que vive una persona o grupo de personas –usualmente estudiantes y profesores/as– al trabajar situaciones de aprendizaje elaboradas con base en los usos, significados y demás elementos de la construcción social de un saber matemático específico, identificados fruto de una historización del saber matemático.

Nos referimos a *momentos de confrontación* cuando los significados de las personas respecto a las nociones matemáticas en cuestión entran en conflicto y/o se muestran insuficientes para resolver una tarea concreta de la situación de aprendizaje. Y hablamos de *momentos de resignificación* cuando, consecuencia de la actividad matemática propuesta, los significados de los sujetos respecto a las nociones matemáticas en cuestión comienzan a modificarse y/o enriquecerse, de tal suerte que permiten atender la tarea con la que sus significados se vieron confrontados inicialmente (Cruz-Márquez y Montiel-Espinosa, en prensa-b).

Ambas nociones teóricas, la problematización del saber matemático y la problematización de la matemática escolar, son fundamentales para estructurar y desarrollar este estudio. El primero, pues la situación de aprendizaje que proponemos a los/as profesores/as en formación inicial se construyó con base en los resultados de la historización de las nociones trigonométricas llevada a cabo en nuestra investigación de partida –el estudio reportado en Cruz-Márquez (2018)–. Mientras que la problematización de la matemática escolar son los momentos de confrontación y resignificación en los cuales pretendemos involucrar a los/as profesores/as en formación inicial consecuencia de enfrentar dicha situación de aprendizaje.

3.1.4. El modelo de anidación de prácticas

Como dijimos, la socioepistemología parte de reconocer que la significación de las nociones y procedimientos matemáticos pende de su uso situado, y este se estudia a través de las prácticas contextualizadas de los sujetos. Más específicamente, para dar cuenta de dichas prácticas, se propone un modelo en el que se coordinan acciones, actividades y prácticas socialmente compartidas, reguladas por prácticas de referencia y prácticas sociales (Cantoral, 2020), denominado *modelo de anidación de prácticas*.

En este estudio referimos exclusivamente a la *progresión pragmática de la anidación de prácticas* –sus tres niveles inferiores– (Figura 1), ya que esta es útil para describir, con base el análisis de la actividad matemática evidenciada por los sujetos –del dato observable–, los usos que hacen de las nociones matemáticas, así como los momentos de confrontación y resignificación que atraviesan.

Figura 1
Progresión pragmática de la anidación de prácticas

Nota. Adaptada de *Modelo de prácticas anidadas: P→PR→PS* (p. 334), de Cantoral, 2013, Gedisa.

La lectura ascendente de esta fracción del modelo parte de las *acciones* objetivas e intencionadas del sujeto ante el medio. Con objetivas nos referimos a que dichas acciones –sean físicas, verbales o mentales– se evidencian a través de comportamientos observables: el actuar del sujeto, sus expresiones orales y escritas, sus gestos, etcétera. Mientras que con intencionadas aludimos a que partimos del hecho de que estas acciones no son instintivas o inconscientes, sino que tienen un propósito, una justificación racional asociada a los conocimientos del sujeto y a la tarea matemática en cuestión –aunque esta no siempre sea expresa por el sujeto– (Cruz-Márquez y Montiel-Espinosa, en prensa-b).

Cabe aclarar también que el sujeto al que nos referimos puede ser un individuo o un colectivo, contemporáneo o histórico (Cantoral, 2020). Y que con medio o contexto aludimos a las condiciones materiales y simbólicas determinantes para la actividad matemática del sujeto, que puede incluir desde instrumentos físicos como un compás hasta elementos abstractos como el lenguaje.

En el segundo nivel de la progresión pragmática se ubican las *actividades*, caracterizadas como organizaciones de acciones útiles para atender la tarea en cuestión, bajo las condiciones contextuales dadas. Finalmente, la organización de actividades constituye *prácticas socialmente compartidas*, en cuanto sistemas de acción que el sujeto lleva a cabo de manera deliberada e iterada al atender un tipo de tarea (Cruz-Márquez y Montiel-Espinosa, en prensa-b).

En nuestro estudio, esta fracción del modelo de anidación de prácticas será una herramienta útil para diseñar la situación de aprendizaje que se propondrá a los/as profesores/as en formación inicial, al retomar la historización de las nociones trigonométricas del estudio de partida; y, posteriormente, para analizar la actividad matemática de los/as participantes ante dicha situación de aprendizaje. Detallamos estos procesos más adelante, al describir la construcción de la situación de aprendizaje y el análisis de la actividad matemática de los/as profesores/as en formación inicial, respectivamente.

3.2. Sobre la construcción del conocimiento trigonométrico

Respecto a los resultados de nuestro grupo de investigación que son base para el planteamiento y desarrollo de este proyecto destacamos dos: el estudio germinal de la línea de construcción social de conocimiento trigonométrico y la investigación de partida. Describimos estos en los siguientes apartados.

3.2.1. Antecedentes del grupo de investigación

En el marco de la teoría socioepistemológica, el trabajo de Montiel (2005, 2011) constituye la investigación base de la línea de construcción social del conocimiento trigonométrico y el desarrollo del pensamiento matemático asociado.

En ella, fruto del estudio detallado de la literatura especializada, así como de una revisión de libros de texto y planes y programas de estudio de educación secundaria, media superior y superior del sistema escolar mexicano, la autora caracteriza tres fenómenos didácticos vinculados a la evolución de la trigonometría en la escuela: la aritmetización de la trigonometría, la extensión geométrico-analítica y la indiferencia a la fundamentación analítica.

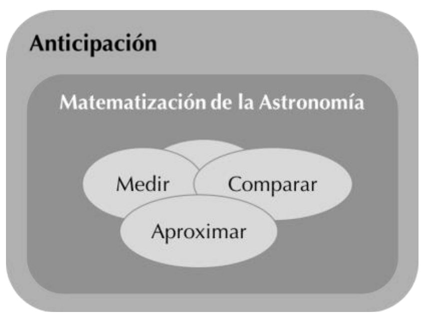
Grosso modo, el primero de ellos –en el que decidimos enfocar nuestra investigación de partida– refiere a la centración en la componente aritmética de las razones trigonométricas en la escuela; el segundo alude a la construcción de la función trigonométrica como simple extensión de la razón trigonométrica; y el tercero al papel de objeto matemático que adquieren las nociones trigonométricas en la educación superior, sin remediar en las explicaciones analíticas que problematizan la longitud de arco, la conveniencia o necesidad del uso del radián, entre otros.

El objetivo principal del estudio de Montiel (2005, 2011) es ampliar las explicaciones que la disciplina ha dado a dichos fenómenos, específicamente busca establecer elementos que fundamenten propuestas de rediseño del discurso

Matemático Escolar asociado a la trigonometría escolar, que a la postre permitan confrontar los fenómenos aludidos. Para ello, la autora realiza un análisis de las nociones trigonométricas un ambiente histórico, que la acerque a los contextos, las circunstancias y las situaciones en las que dicho conocimiento se construye, tiene uso y sentido.

Como resultado, la investigadora propone tres momentos históricos de construcción social del conocimiento trigonométrico: la matematización de la astronomía, la matematización de la física y la matematización de la transferencia de calor. En el primero de ellos –de especial interés para nuestro estudio dado el fenómeno elegido–, ubica a la anticipación como la práctica social[6] que norma y orienta las actividades asociadas a la práctica de referencia de matematización de la astronomía y, por ende, a la emergencia de la cantidad trigonométrica (Figura 2).

Figura 2
Primer momento de construcción del conocimiento trigonométrico



Nota. Adaptada de [*Figura sin nombre*] (p. 111), de Montiel, 2011, Ediciones Díaz de Santos.

Además, en este primer momento de construcción social del conocimiento trigonométrico, la autora reconoce que la *construcción de modelos a escala* de la esfera celeste, propia de la astronomía de la época en cuestión, promueve el tránsito de lo macro a lo micro; situación en la que la proporcionalidad condiciona la

---

[6] Este uso de práctica social y práctica de referencia difieren de las caracterizaciones brindadas más arriba, producto del desarrollo mismo de la teoría.

precisión del modelo, así como su utilidad como herramienta explicativa y anticipatoria.

Algunos de los principios básicos que rigen este primer momento de construcción social del conocimiento trigonométrico se describen en la siguiente tabla (Tabla 3):

Tabla 3
Principios básicos para la construcción social del conocimiento trigonométrico en un escenario histórico

Practica Social	Anticipación
Práctica de referencia	Matematización de la astronomía
Contexto	Estático-proporcional
Lenguaje	Geométrico-numérico
Racionalidad	Helenística-euclidiana
Herramientas	Razón trigonométrica
Variables	sen µ (longitud) µ ángulo (en grados)
Escala de Tiempo	Finita

Nota. Adaptada de *Principios básicos para la construcción social del conocimiento trigonométrico en un escenario histórico* (p. 123), de Montiel, 2011, Ediciones Díaz de Santos.

A la luz de estos hallazgos, la autora propone un rediseño del discurso Matemático Escolar que reconcilie el estudio de la trigonometría escolar con la geometría, esto es, que nociones geométricas como el triángulo, el círculo, el ángulo y las relaciones entre ellos sean herramientas en la construcción de modelos geométricos, en los que emerja la cantidad trascendente trigonométrica.

Por último, la investigadora sugiere estudios que se centren en elementos puntuales de la construcción del conocimiento trigonométrico y del desarrollo del pensamiento asociado, así como en nociones y procedimientos matemáticos contiguos (ángulo, triángulo, etcétera), todo esto como antecedente para el diseño de secuencias didácticas que busquen construir y dar significado a dichos conceptos entre el estudiantado.

Para efecto de nuestro estudio, la investigación de Montiel (2005, 2011) nos ofrece un panorama amplio respecto a los fenómenos reportados alrededor de la enseñanza y aprendizaje de las nociones trigonométricas, y una caracterización de tres momentos históricos de construcción social del conocimiento trigonométrico. Como adelantamos, al estar interesados en la emergencia de la cantidad trascendente y la razón trigonométrica, decidimos enfocar la investigación de partida en el primer fenómeno didáctico –la aritmetización de la trigonometría– y, en consecuencia, profundizar en el primer momento de construcción social que la autora describe.

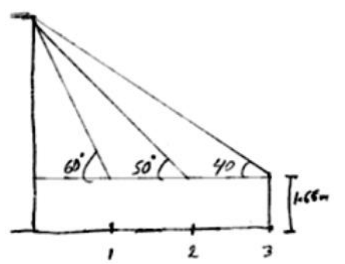
Adicionalmente, esta investigación nos ofrece elementos concretos –como la atención al paso de lo macro a lo micro y a la proporcionalidad en la construcción de modelos a escala– que se retoman en la situación de aprendizaje construida en la investigación de partida y que incluso tienen cierta continuidad en la experiencia de problematización diseñada a propósito de este estudio.

3.2.2. Investigación de partida

Como recién mencionamos, la *aritmetización de la trigonometría* es el fenómeno didáctico que refiere al exclusivo uso como herramienta técnica para el cálculo de un valor faltante que reciben las nociones trigonométricas. Consecuencia del cual se genera una marcada disociación entre la geometría y la trigonometría escolar, y la admisión de un significado lineal y la promoción de un significado aritmético para las razones trigonométricas (Montiel y Jácome, 2014).

El *significado lineal* alude a la concepción y tratamiento lineal que la trigonometría escolar admite para la relación ángulo-lado en el triángulo rectángulo, producto de no analizar explícitamente la naturaleza de dicha relación. A manera de ejemplo, en el estudio realizado por Montiel y Jácome (2014), al construir un modelo a escala de una situación-problema de medición de distancias inaccesibles, más de la mitad de los/as profesores/as participantes presentan bosquejos en los cuales coexisten decrementos constantes del ángulo de elevación con crecimientos constantes del lado adyacente al mismo (Figura 3).

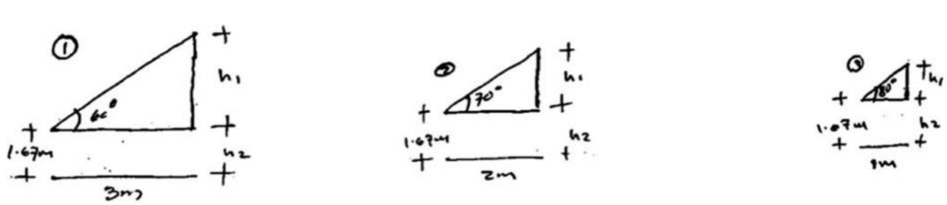
Figura 3
Modelo propuesto que refleja una relación lineal entre el ángulo de elevación y el lado adyacente al mismo



Nota. Adaptada de *Ejemplo de significado lineal en la relación ángulo-distancia (cateto)* (p. 1194), de Montiel y Jácome, 2014, Boletim de Educação Matemática, *28*(50).

El *significado aritmético*, por su parte, hace alusión a la concepción de las nociones trigonométricas –en particular la razón– como solo un proceso aritmético de dividir las longitudes de los lados del triángulo, producto de la centración que la trigonometría escolar tiene sobre el dominio aritmético de dichas nociones. En el estudio referido (Montiel y Jácome, 2014), por ejemplo, pese a la explicita solicitud de construir un modelo a escala de la situación-problema, ninguna de las representaciones fabricadas por los/as participantes del estudio constituye un modelo geométrico a escala *stricto sensu* (Figura 4), en cuanto no guardan proporción con la realidad, sino que fungen únicamente como una ilustración de donde tomar los datos a sustituir en la 'fórmula trigonométrica' que resuelve el problema.

Figura 4
Bosquejos propuestos por un participante donde h1 –la altura a calcular– cambia 'proporcionalmente' de un bosquejo a otro



Nota. Adaptada de *Modelos del cálculo de alturas del objetivo* (p. 1211), de Montiel y Jácome, 2014, Boletim de Educação Matemática, *28*(50).

Ante estos limitados usos y significados que la trigonometría escolar permite y promueve para las nociones trigonométricas, en Cruz-Márquez (2018) realizamos una problematización de las nociones trigonométricas. En conformidad con lo mencionado sobre la problematización del saber matemático desde la teoría socioepistemológica, dicho estudio incluyó dos partes: la historización de las nociones trigonométricas y la dialectización de los resultados encontrados.

La historización[7] tenía la intención de identificar usos, significados y otros elementos que permitieron la construcción inicial de las nociones trigonométricas y que pudieran ser de ayuda para ampliar el uso exclusivo como herramienta técnica atribuido a dichas nociones, así como para confrontar y enriquecer los significados que la trigonometría escolar actual permite y promueve.

Centramos este análisis en el capítulo IX del libro I del *Almagesto* de Ptolomeo, dado que –de forma general– la literatura coincide en que la tabla trigonométrica construida en dicho apartado constituye la comunicación humana más antigua en la que encontramos evidencia del nacimiento de la trigonometría. Entendiendo esta última como el estudio sistemático y cuantitativo de las relaciones que se establecen entre un ángulo y las distancias que este subtiende.

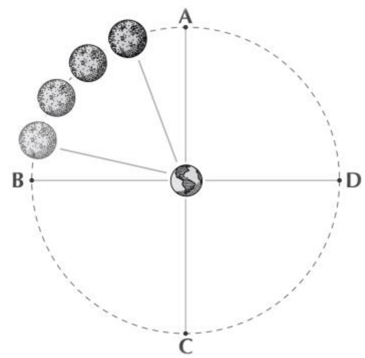
Los resultados del estudio histórico indican que, producto de establecer relaciones entre los fenómenos naturales terrestres y los astronómicos, las antiguas civilizaciones de occidente se vieron en la necesidad de observar y registrar los fenómenos celestes y, más adelante, de componer sistemas que explicaran y anticiparan los mismos.

Consecuencia del afán por construir estos sistemas, en el marco de la cosmovisión aristotélica del universo –que coloca a la Tierra como ente inmóvil en el centro del cosmos y a los planetas girando de forma circular, uniforme e ininterrumpida alrededor de esta–, es que los astrónomos griegos enfrentaron con

[7] Más detalles sobre las decisiones metodológicas y los resultados obtenidos en esta historización de las nociones trigonométricas pueden consultarse en Cruz-Márquez y Montiel-Espinosa (2022).

recurrencia la tarea de calcular la distancia entre dos puntos de un círculo conociendo el ángulo central que los separa, esto es, de *medir indirectamente distancias en el contexto del círculo* (Figura 5).

Figura 5
Problemática astronómica de la época de Ptolomeo



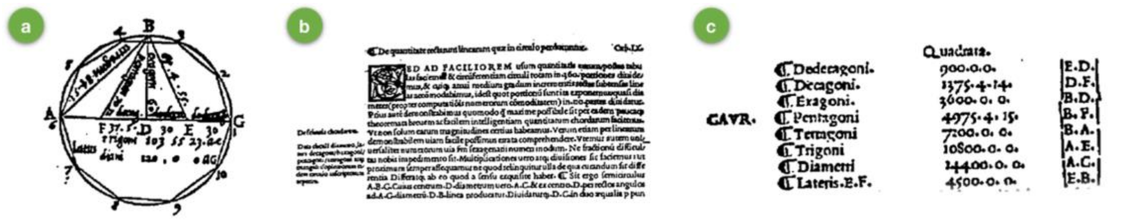
Nota. Adaptada de *Problemática astronómica de la época de Ptolomeo* (p. 106), de Cruz-Márquez, 2018.

Realizar este tipo de mediciones requiere de la construcción de una explicación sistemática y cuantitativa de la relación matemática existente entre un ángulo central y las longitudes que este subtiende. En consecuencia, previo a iniciar la explicación de su modelo astronómico en el *Almagesto*, Ptolomeo se dio a la tarea de construir una tabla que relaciona los ángulos entre 0.5º y 180º –con un intermedio de medio grado– con sus respectivas cuerdas, la tabla trigonométrica más antigua que ha llegado hasta nosotros.

Para construir dicha tabla, Ptolomeo usó las nociones geométricas, especialmente *la proporcionalidad, el círculo y el triángulo rectángulo –sus elementos, relaciones y propiedades*–, con al menos tres propósitos: como *herramientas de construcción*, como *herramientas teóricas* y como *herramientas aritmético-algebraicas*.

El primer uso refiere a cuando el autor declara y/o agrega los objetos geométricos que van a intervenir en una proposición (Figura 6a). El segundo hace alusión a cuando Ptolomeo formula y prueba relaciones geométricas existentes entre los objetos declarados y construidos anteriormente (Figura 6b). Y el tercer uso refiere a cuando el astrónomo utiliza implicaciones aritméticas y/o algebraicas de las relaciones geométricas construidas para agregar nuevos pares ángulo-cuerda a su tabla (Figura 6c). A la sinergia de estos tres usos que Ptolomeo da las nociones geométricas aludidas en su obra es lo que –para efectos del estudio– denominamos *trabajo geométrico*.

Figura 6
Usos de las nociones geométricas



Nota. Adaptada de [*Figuras sin nombre*] (apéndice), de Saiz, 2003, Maxtor.

En suma, producto del estudio histórico realizado, planteamos –a manera de hipótesis epistemológica– que la medición indirecta de distancias en el contexto del círculo permite, mediante el trabajo geométrico sobre nociones como el círculo, el triángulo rectángulo y la proporcionalidad –sus elementos, propiedades y relaciones–, ampliar los usos y significados escolares de las nociones trigonométricas.

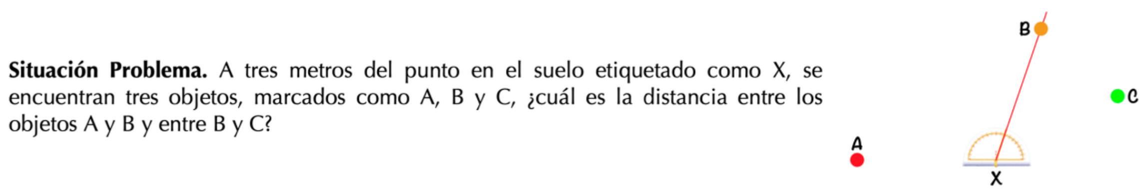
Por otro lado, la dialectización[8] realizada tenía el objetivo de robustecer –desde la evidencia empírica– la hipótesis epistemológica construida en la primera parte del estudio. En consecuencia, realizamos una visita académica a la Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán, en Honduras. Esta se compuso de una experiencia de problematización, llevada a cabo con ocho estudiantes del segundo año del Profesorado en Matemáticas que recién

8 Más detalles sobre las decisiones metodológicas y los resultados obtenidos en esta dialectización de las nociones trigonométricas pueden consultarse en Cruz-Márquez y Montiel-Espinosa (en prensa-b).

comenzaban su curso de Trigonometría y geometría analítica, y de dos reuniones con la docente a cargo de dicho curso.

La situación de aprendizaje construida para esta experiencia constó de tres bloques de actividades: la situación-problema, el trabajo geométrico y la vuelta a la situación-problema. En el primero se planteó una situación-problema de medición indirecta de distancias (Figura 7), en la cual se pretendía que los/as participantes calcularan la distancia entre los objetos A y B y entre B y C, con base en la medición del ángulo central que los separa.

Figura 7
Situación-problema



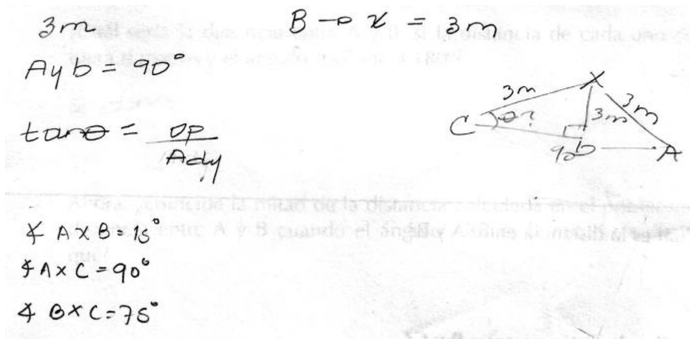
En el segundo bloque de actividades se pedía a los/as profesores/as en formación inicial que: 1) construyeran un modelo a escala de la situación-problema propuesta, 2) analizaran casos hipotéticos para los cuales las distancias entre objetos son de fácil acceso –cuando los ángulos centrales son 180º, 90º y 60º–, y 3) con base en dichos casos, construyeran métodos geométricos útiles para calcular la distancia entre los objetos en escenarios hipotéticos más complejos –cuando la distancia buscada corresponde a la cuerda subtensa por el ángulo mitad de un ángulo cuya cuerda se conoce, por ejemplo–.

Por último, en el tercer bloque de actividades, se solicitaba a los/as participantes que retomaran la situación-problema y la resolvieran con base en los pares ángulo-cuerda descubiertos y los métodos geométricos construidos en el bloque anterior.

Como resultado, esta experiencia permitió, en primera instancia, dar evidencia de momentos de confrontación con el significado lineal y aritmético asociado a las nociones trigonométricas. Así, por ejemplo, algunos/as estudiantes propusieron nociones trigonométricas para resolver la situación-problema planteada (Figura 8), sin embargo, al no contar con los datos que les permitiera usar la 'fórmula trigonométrica' respectiva –consecuencia de la ausencia explícita del triángulo rectángulo–, no continuaron con la ejecución de su estrategia.

Figura 8

La razón tangente como herramienta insuficiente para la resolución de la situación-problema

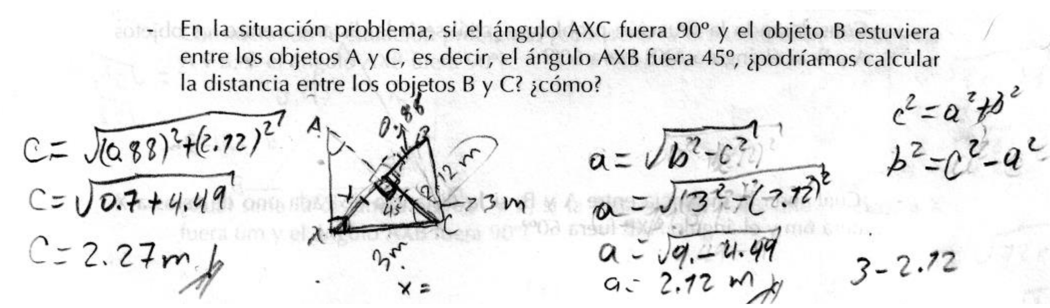


Nota. Adaptada de *Actividad 2 – Alumno 6* (p. 177), de Cruz-Márquez, 2018.

En segundo lugar –y acaso un resultado más importante–, esta experiencia nos permitió advertir algunos momentos de resignificación de las nociones trigonométricas. Así, por ejemplo, los/as participantes construyeron un método geométrico que les permitió, conociendo la distancia entre dos objetos cuando el ángulo central que los separa es 90º, calcular la distancia de dos objetos cuando el ángulo central que los separa es la mitad, esto es, 45º (Figura 9).

Figura 9

Método geométrico para calcular la cuerda mitad de un ángulo cuya cuerda se conoce



Nota. Adaptada de *Actividad 4, Sección A – Alumno 3* (p. 189), de Cruz-Márquez, 2018.

Luego, partiendo de la cuerda subtensa por un ángulo central de 60º y aplicando dos veces el método construido, fueron capaces de calcular la distancia entre los objetos A y B –cuyo ángulo central asociado es 15º–, resolviendo parcialmente la situación-problema; tarea matemática ante la que sus significados iniciales se mostraron insuficientes.

En suma, la investigación de partida nos permitió, en primer lugar, identificar como uso germinal de las nociones trigonométricas a la medición indirecta de distancias en el contexto del círculo, y nos dio evidencia empírica inicial de que su inclusión en actividades escolares promueve la confrontación y resignificación de las nociones trigonométricas.

También hizo posible el constatar que el trabajo geométrico –en cuanto sinergia de los usos mencionados– sobre nociones geométricas como el círculo y la semejanza –sus elementos, propiedades y relaciones– constituye una estrategia viable para la inclusión de este uso de las nociones trigonométricas en actividades escolares.

Por último, nos dio evidencia empírica del importante papel que juegan actividades como medir, comparar, construir, conjeturar y calcular en el uso de las nociones geométricas al medir distancias indirectamente.

Para efectos del presente, y de forma similar a los resultados del estudio de Montiel (2005, 2011) descritos en la sección anterior, los usos y prácticas reconocidos en esta problematización del saber matemático serán útiles para la construcción y análisis de la situación de aprendizaje diseñada a propósito de esta investigación.

3.3. Sobre los saberes docentes

A partir de su origen, en los referidos trabajos de Elbaz (1983), Schön (1983) y Shulman (1986), los estudios sobre la subjetividad del profesor y en particular de sus conocimientos, han tenido –como es natural– diferentes encuadres. Desde sus enfoques iniciales en el conocimiento práctico, la práctica reflexiva y las categorías de conocimiento, hasta las actuales orientaciones cognitivas, fenomenológicas y sociales (Tardif, 2014).

Hoy día, contamos con diversos modelos teóricos respecto a los conocimientos del profesorado –en general y de matemáticas– (v. g. Ball et al., 2008; Bromme, 1994; Carrillo-Yañez et al., 2018; Davis y Simmt, 2006; Rowland et al., 2009; Shulman, 1987). Cada una de estas propuestas tiene enfoques y características particulares, y en su conjunto muestran la complejidad de conceptualizar y operacionalizar el trabajo en esta área de investigación.

En nuestro caso, dada la postura teórica asumida respecto a la significación del conocimiento matemático y nuestros intereses de estudio, requerimos de una visión sociocultural del conocimiento del profesorado que nos permita acercarnos de forma descriptiva a su práctica. Optamos por la perspectiva de los *saberes docentes* propuesta en Mercado (1991, 1994, 2002)[9].

En ella, la autora conceptualiza a los saberes docentes como saberes cotidianos, en cuanto "*conocimiento* sobre la realidad que *utilizamos de un modo efectivo* en la vida cotidiana, del modo más heterogéneo (como guía para las *acciones, como temas de conversación, etcétera*)" (Heller, 1977, citada en Mercado, 2002, p. 13; énfasis añadido).

[9] En esta sección nos limitamos a describir las bases de esta postura teórica, en la siguiente sección referimos a la viabilidad y pertinencia de su elección.

Según la propuesta inicial de Heller, del saber cotidiano, el sujeto solo se *apropia* de lo que considera le es o puede serle necesario para mantener y estructurar su vida en la época, ambiente o situación determinada. De forma paralela, bajo la perspectiva de los saberes docentes, Mercado (2002) plantea que el docente solo se apropia de los saberes que estima necesarios para su labor. En el transcurso de este proceso de apropiación el docente *construye* nuevos saberes a la vez que *integra o rechaza* conocimientos provenientes de distintos ámbitos sociales y momentos históricos.

En consecuencia, Mercado (2002) caracteriza a los saberes docentes como *históricos, dialógicos y socialmente construidos*. El carácter histórico de los saberes docentes refiere a que, al tomar una decisión, los/as docentes ponen en juego *voces sociales* provenientes de distintos momentos históricos, reformas educativas pasadas o vigentes, experiencias de formación inicial o de actualización docente, experiencia docente, entre otros. Mientras que el carácter dialógico refiere a que las acciones y expresiones de los/as docentes sobre su enseñanza no pueden verse únicamente desde una perspectiva individual, sino que deben entenderse como "producto de construcciones sociales, históricas, ya que representan huellas provenientes de distintas épocas y ámbitos sociales con las cuales *dialogan* las percepciones individuales" (Mercado, 2002, p. 15; énfasis añadido).

Naturalmente, esta perspectiva sobre los conocimientos del profesorado es cercana a posturas teóricas previas. Por ejemplo, Mercado (2002) explicita que, de forma similar a las teorías de la actividad situada, concibe que "los maestros *construyen su conocimiento o su saber cotidiano* sobre la enseñanza en determinados contextos *definidos situacionalmente*" (Mercado, 2002, p. 16; énfasis añadido).

También coincide con Chaiklin y Lave (1993) en su visión *social e ilimitada* del hacer y conocer, y con Lave (1991) y Olson (1992) respecto a la consideración de *objetivos o propósitos* –previos o construidos en la práctica– como orientadores de las acciones docentes:

> El significado de lo que la gente hace descansa en los propósitos a los cuales sirvieron aquellas acciones; estas no son significantes en sí mismas, sino indicadores de aquellos propósitos a los que ellas sirven y que les dan significado. (Olson, 1992, p. 47, en Mercado, 2002, p. 21)

Por último, menciona que su visión de los saberes docentes es cercana también a los estudios desarrollados sobre el conocimiento práctico del profesor y del conocimiento tácito que elaboran acerca de la enseñanza, al concebir que el *conocimiento es inherente a la acción* (Schön 1992, 1991), es *dinámico* (Elbaz, 1981), “*creativo, multifacético* y los maestros hacen lo posible por realizar *propósitos claramente concebidos* ya sea que ellos (o los investigadores que les espían) *puedan o no especificar* los criterios que guían cualquier acción” (Elbaz y Elbaz, 1983, como se citó en Mercado, 2002, p. 21; énfasis añadido).

En conclusión, la visión que propone los saberes docentes es contraria a la visión tradicional –normativa, evaluativa y/o prescriptiva– de los conocimientos del profesor y su práctica (Mercado, 1998), pues asume a los/as profesores/as como *sujetos de conocimiento*, que poseen saberes específicos respecto a su labor, y a su práctica como un espacio de construcción, transformación y de movilización –no solo de aplicación– de saberes (Tardif, 2014).

Estos saberes docentes específicos tienen diferentes fuentes, provienen de voces sociales correspondientes a diversos ámbitos sociales y momentos históricos, y su apropiación y diálogo constituye la base que guía el actuar de los/as profesores/as en su práctica. En consecuencia, al trabajar desde esta perspectiva, se observan y analizan las acciones –decisiones, opiniones y explicaciones– que el profesor lleva a cabo en su práctica concreta y situada, como indicadores de los propósitos que les dan sentido, de los saberes docentes que las fundamentan, y de las voces sociales de donde provienen dichos saberes.

3.4. Coordinación teórica

En esta sección se retoman algunos elementos teóricos mencionados anteriormente en el capítulo con el fin de explicitar cómo se coordinan en el planteamiento y desarrollo del estudio. Así, inicialmente detallamos las adecuaciones necesarias a los saberes docentes, luego cómo estas adaptaciones se articulan con el resto de las nociones teóricas introducidas en el capítulo y, por último, una reformulación de nuestros objetivos de investigación –producto de las decisiones anteriores–.

3.4.1. Adecuación teórico-metodológica de los saberes docentes

De forma general, tanto los estudios fundacionales de la propuesta de los saberes docentes (v. g. Mercado, 1991, 1994, 2002; Rockwell y Mercado, 1988) como los más recientes (v. g. Barradas, 2022; Santana y Espinosa, 2017), se centraron en describir etnográficamente los saberes que los/as docentes de educación primaria construyen y manifiestan al trabajar en aula –frente a grupo–, sin delimitar un área epistemológica específica.

En consecuencia, para integrar esta perspectiva a nuestro estudio requerimos de ciertas adecuaciones. En primera instancia, requerimos ampliar la "práctica docente" o "práctica cotidiana del profesor" a la que refiere Mercado en su propuesta, hacia un espacio de formación inicial docente. Así, la práctica docente o práctica cotidiana a la que nos referiremos en este estudio se lleva a cabo en una universidad, por profesores/as en formación inicial e incluye, entre otras, prácticas parciales como la vivencia de actividades matemáticas, el diseño de sus propias experiencias de aula, y la implementación –en clases simuladas o prácticas profesionales– y análisis de dichas experiencias.

Esta ampliación de la práctica cotidiana hacia la formación inicial, que incluye más que el trabajo en aula, también extiende los saberes docentes a tratar. Esto, pues, en prácticas parciales como la discusión entre profesores/as en formación inicial que diseñan una experiencia de aula, por ejemplo, resulta natural encontrar saberes de un carácter más discursivo que procedimental –caso contrario a lo reportado en los trabajos realizados habitualmente desde la perspectiva de los saberes docentes–.

En sus trabajos con el profesorado en servicio, Mercado alude a que los saberes docentes se construyen y manifiestan preeminentemente en la práctica de aula, con lo que justifica su centración en este espacio. No obstante, la ampliación que proponemos no excede el planteamiento teórico inicial, pues, como mencionamos al definir los saberes docentes, la propuesta base considera que los saberes cotidianos son la guía no solo del actuar de los sujetos, sino también de sus temas de conversación (Heller, 1977, citada en Mercado, 2002).

Así, producto de nuestra necesidad por trasladar la práctica cotidiana del profesorado hacia la formación inicial, extendemos también el carácter de los saberes docentes que esperamos que se construyan y manifiesten. Esto nos acerca a una concepción más amplia de los saberes docentes que incluye saberes procedimentales, discursivos, aptitudinales e incluso actitudinales, o sea, “lo que se ha llamado muchas veces saber, saber hacer y saber ser” (Tardif, 2014, p. 46).

Otras adecuaciones necesarias para el uso de esta perspectiva son el cambio de nivel educativo, al pasar de trabajar con el profesorado de educación primaria al profesorado de educación secundaria y media superior; y la centración en un dominio epistemológico específico, por tratarse de profesores/as de matemáticas.

Dado el carácter situacional e histórico de la propuesta, estos cambios al entorno y población son determinantes en los resultados del estudio. Así, por ejemplo, en nuestra investigación, ‘los/as estudiantes’ podría ser una voz social de menor incidencia que lo reportado en los estudios de Mercado (1991, 1994, 2002), mientras que las voces sociales provenientes de la formación inicial docente podrían tomar mayor relevancia en comparación con lo reportado en dichas investigaciones.

La última adecuación necesaria es respecto al encuadre metodológico del estudio. De forma general, las investigaciones realizadas desde esta perspectiva teórica utilizan métodos etnográficos para la identificación y descripción de los saberes docentes del profesorado. No obstante, para nuestro estudio, esta no resulta la estrategia más adecuada, dado que requerimos intervenir en la práctica cotidiana del profesorado –introduciendo un espacio de problematización de las nociones trigonométricas–. En consecuencia, también nos distanciamos de la propuesta de Mercado en ese aspecto y optamos por un tipo particular de investigación basada en el diseño.

3.4.2. Coordinación teórica y reformulación de los objetivos de investigación

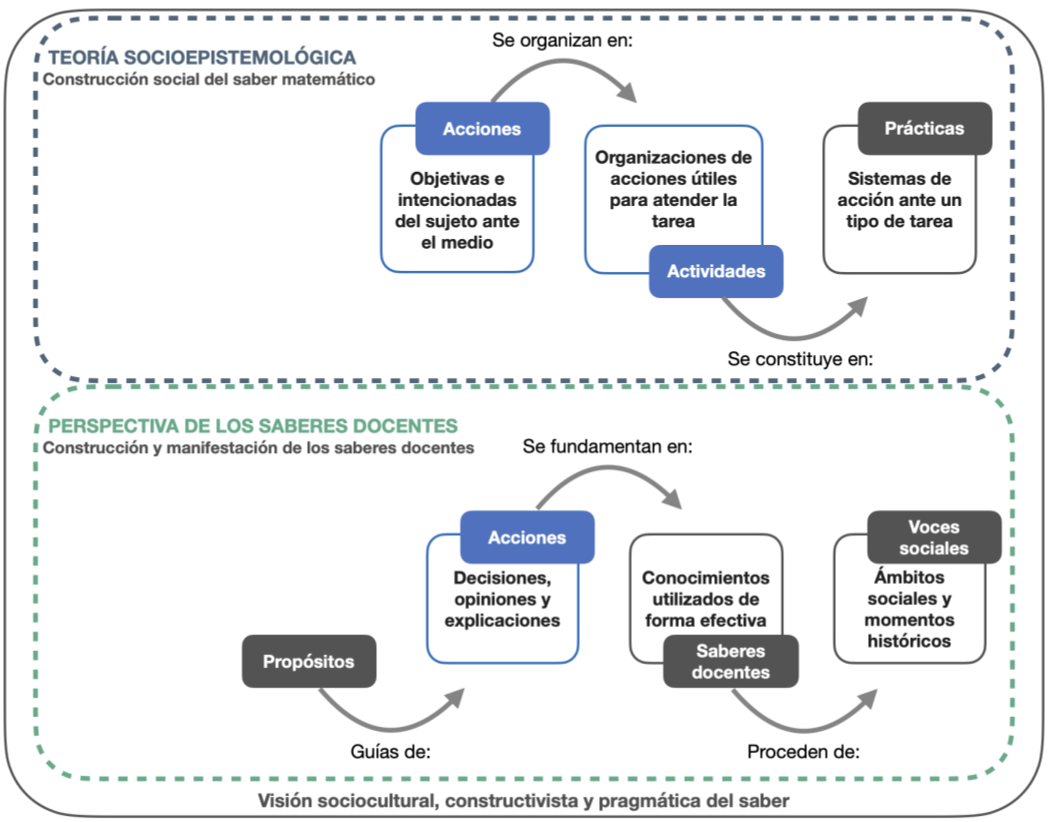
Ante la coordinación de dos teorías para atender nuestro objeto de estudio, es necesario reflexionar sobre la pertinencia y viabilidad de los saberes docentes, y especificar el rol de ambos planteamientos en la investigación.

Respecto a lo primero, consideramos que la perspectiva de los saberes docentes es pertinente a nuestra investigación en cuanto es un marco diseñado específicamente para el estudio de los conocimientos que construyen y utilizan de modo efectivo los/as docentes en su práctica cotidiana. Lo que es consistente con nuestro interés por describir los conocimientos –no solo el disciplinar– que el profesorado en formación inicial sí tiene, lo que sí sabe y sí hace, y hacerlo de forma cercana a su práctica concreta.

Con relación a lo segundo, es viable por su compatibilidad con nuestra postura teórica inicial respecto a la significación del conocimiento matemático, al ser también un enfoque sociocultural, constructivista y pragmático. Esta coherencia permite, por ejemplo, que contemos con caracterizaciones paralelas de ‘saber’ en ambos posicionamientos teóricos, como conocimiento puesto en uso, situacional, construido socialmente, ilimitado y dinámico.

Al margen de esta compatibilidad, también es importante subrayar que pretendemos hacer una coordinación de ambas posturas –no una fusión a priori–, en la que cada una aporta desde su objeto y herramientas propias. Así, mientras la teoría socioepistemológica nos provee una visión específica respecto a la significación de las nociones trigonométricas, con base en su uso situado –expresado en la coordinación de prácticas contextualizadas de diferente índole–; la perspectiva de los saberes docentes son nuestros lentes para identificar y describir –con base en el análisis de las acciones: decisiones, opiniones y explicaciones– los saberes que los/as docentes en formación inicial construyen y manifiestan en su práctica cotidiana, los propósitos que les dan sentido y las voces sociales de donde provienen dichos saberes (Figura 10).

Figura 10
Diagrama de los principales elementos teóricos del estudio



Aunque ambas posturas son irreductibles a la otra, se entrevén en este diagrama algunas posibles relaciones y cercanías. Por ejemplo, intuimos la existencia de conocimientos matemáticos que sean 'usados' por los/as profesores/as en formación inicial tanto en la problematización de las nociones trigonométricas como para el diseño, implementación y análisis de aula. En los resultados del estudio, a la luz del análisis de los datos, esperamos ampliar sobre estas posibles correspondencias teóricas.

Por último, planteada esta coordinación de posturas teóricas, consideramos necesario refinar la redacción de nuestros objetivos de estudio. Así, en este punto, nos proponemos los siguientes objetivos generales (OG):

OG1. Identificar los saberes docentes que el profesorado de matemáticas en formación inicial construye y manifiesta al vivenciar experiencias de problematización de la trigonometría escolar y al diseñar, implementar y analizar actividades de aula en el área de trigonometría.

OG2. Describir el rol que juegan las experiencias de problematización de la trigonometría escolar al diseñar, implementar y analizar actividades de aula en el área de trigonometría.

Y los siguientes objetivos específicos (OE):

OE1. Identificar y describir los saberes docentes que el profesorado de matemáticas en formación inicial construye y manifiesta al vivenciar experiencias de problematización de la trigonometría escolar.

OE2. Identificar y describir los saberes docentes que el profesorado de matemáticas en formación inicial construye y manifiesta al diseñar, implementar y analizar actividades en el área de trigonometría.

OE3. Involucrar a los/as profesores/as de matemáticas en formación inicial participantes en experiencias de problematización de la trigonometría escolar.

OE4. Describir cómo estas experiencias de problematización dialogan con los saberes docentes al diseñar, implementar y analizar actividades de aula en el área de trigonometría.

Los dos cambios introducidos son, primero, sustituir “conocimiento” por “saberes docentes”, con la intención de subrayar que –dentro de las diversas conceptualizaciones y operacionalizaciones de los conocimientos del profesorado– optamos por la postura de los saberes docentes, que –como se explicitó– se centra en los conocimientos que *utilizan de forma efectiva* los/as profesores/as en su práctica cotidiana.

El segundo cambio es remplazar “construyen y usan” por “construyen y manifiestan”. Este cambio es consecuencia del cambio anterior, pues la caracterización de los saberes docentes ya refiere a los conocimientos que el profesor “utiliza”. Acerca de este cambio también es importante señalar que, aunque no diseñamos esta investigación para explicar a detalle los procesos de construcción de los saberes docentes, consideramos que la configuración actual permitirá observar con cierta claridad la “construcción” de algunos saberes, producto natural de la interacción entre los/as participantes del estudio, y entre los/as participantes y el diseño de intervención mismo.

4. Consideraciones metodológicas y metódicas

Caminante, no hay camino,
se hace camino al andar.
— Antonio Machado

Dados los objetivos y la coordinación teórica planteados para nuestro estudio, requerimos de un marco metodológico que nos permita configurar un espacio de formación inicial docente, compuesto por una experiencia de problematización de las nociones trigonométricas y un momento de diseño, implementación y análisis de actividades de aula. Con esto en mente, optamos, como dijimos, por un tipo de investigación basada en el diseño: los experimentos de desarrollo del profesorado.

En este capítulo detallamos los aspectos metodológicos y metódicos de nuestro estudio. Utilizamos para ello dos secciones. En la primera introducimos la investigación basada en el diseño y los experimentos de desarrollo del profesorado, en cuanto marco metodológico general. Mientras que en la segunda describimos nuestro experimento, en cuanto método específico de producción y análisis de datos.

4.1. Sobre la metodología

4.1.1. Investigación basada en el diseño

El estudio del aprendizaje en entornos cotidianos en lugar de ambientes con condiciones artificiales ha sido una necesidad imperante en la investigación educativa desde sus orígenes; como una respuesta a este reto surge la investigación basada en el diseño (Collins et al., 2004; Steffe y Thompson, 2000).

La *investigación de diseño* o *investigación basada en el diseño* es un paradigma de investigación, de naturaleza principalmente cualitativa, que ha sido desarrollado dentro de las denominadas ciencias del aprendizaje (Molina et al., 2011). Comenzó a principios de los 90 y se volvió popular en los últimos 15 años, en los que se ha discutido ampliamente respecto a sus principios, características, objetivos y las prácticas que supone (Valverde, 2014).

Según Molina et al. (2011), el objetivo de la investigación basada en el diseño es "analizar el *aprendizaje en contexto* mediante el *diseño* y *estudio sistemático* de formas particulares de aprendizaje, estrategias y herramientas de enseñanza, de una forma sensible a la naturaleza sistémica del aprendizaje, la enseñanza y la evaluación" (p. 76; énfasis añadido).

Aunque en las últimas décadas se produjeron muchas variaciones al interior de las investigaciones basadas en el diseño, es posible ubicar algunas características comunes de este tipo de investigación. Entre estas, la literatura menciona que se realiza en contextos naturales de enseñanza y aprendizaje, la complejidad de estos entornos se traduce en la implicación de múltiples variables, algunas de las cuales no se pueden controlar (Valverde, 2012); se lleva a cabo a través de un ciclo continuo de diseño, puesta en práctica, análisis y rediseño (Molina et al., 2011; Valverde, 2012); combina dos propósitos: el diseño y caracterización de situaciones de aprendizaje y el desarrollo de modelos teóricos empíricamente fundamentados, relativos a una área específica de aprendizaje (Cobb et al., 2003; Molina et al., 2011; Valverde, 2012); y que debe explicar cómo y por qué funcionan las situaciones de aprendizaje diseñadas, y cómo estas pueden adaptarse a nuevas circunstancias, no debe limitarse a documentar su éxito o fracaso (Valverde, 2012).

En la literatura también se discute acerca de las fortalezas y debilidades de este tipo de investigación. Entre las fortalezas, Molina et al. (2011), por ejemplo, menciona que esta elimina el abismo existente entre la práctica educativa y los análisis teóricos, que pone a prueba constructos y modelos teóricos en la práctica, que desarrolla teorías específicas y contextualizadas sobre la enseñanza y aprendizaje, y que aborda problemas cotidianos del aula, de los centros y las comunidades en las que se realiza.

Por otro lado, dentro de sus debilidades se menciona la complejidad del contexto y la multiplicidad de roles y participantes que involucra, la dificultad en la producción y análisis de extensas cantidades de datos, y la complejidad al comparar y transpolar los resultados entre diferentes contextos de investigación (Molina et al., 2011; Valverde, 2012).

4.1.2. Experimentos de desarrollo del profesorado

Los *experimentos de desarrollo del profesor* o *experimentos del desarrollo del conocimiento del profesor* –en adelante como experimento de desarrollo del profesorado–, son un tipo de investigación basada en el diseño. Nacen como una adaptación y extensión de los experimentos de enseñanza y los experimentos con ‘todo el grupo’ (Simon, 2000).

Características heredadas

De los experimentos de enseñanza, los experimentos de desarrollo del profesorado heredan al menos seis características distintivas –las describimos parafraseando el trabajo de Simon (2000)–.

Investigador-profesor. Como mencionamos, la investigación de diseño fusiona las tareas de quien enseña y quien investiga, con la intención de que el equipo de investigación pueda experimentar de primera mano el aprendizaje y razonamiento de los/as participantes del estudio.

Esta fusión permite que el equipo amplíe su conocimiento sobre el desarrollo del conocimiento de los/as participantes a través de múltiples interacciones del denominado ciclo de reflexión-interacción. Durante la etapa de reflexión, el/la investigador-profesor pone en práctica –de forma intencional– el conocimiento construido por la comunidad de investigadores y su conocimiento personal, al mismo tiempo que –de forma implícita– su intuición y sus esquemas de acción. Así, durante la etapa de intervención, algunos aspectos del conocimiento del/a investigador-profesor se ven corroborados y otros confrontados; por lo que este ciclo permite a quienes investigan trabajar al filo de su creciente conocimiento sobre cómo se desarrolla el conocimiento de los/as participantes del estudio.

Investigador-observador. Los/as investigadores-observadores contribuyen de forma importante a la implementación y resultados de los experimentos de desarrollo del profesorado, pues complementan el rol del/a investigador-profesor y amplifican la capacidad analítica del equipo de investigación. Más específicamente, el/la investigador-observador: constituye una perspectiva externa a la interacción entre el/la investigador-profesor y los/as participantes del estudio, advierte sobre aspectos de los datos que el/la investigador-profesor podría pasar por alto, propone explicaciones alternativas que amplían el análisis de los datos, desafían las interpretaciones del/a investigador-profesor, y participa en la articulación e intercambio de ideas con el resto del equipo de investigación.

Análisis continuo y retrospectivo. Como es natural en las investigaciones de diseño, los experimentos de desarrollo del profesorado involucran dos niveles de análisis de datos: el análisis continuo y el análisis retrospectivo.

El análisis continuo suele realizarse tras cada sesión de trabajo y es la base para las intervenciones espontaneas y planificadas con los/as participantes, interacciones útiles para recopilar información adicional, probar hipótesis y promover mayor desarrollo de los conocimientos de los/as participantes. Mientras que el análisis retrospectivo implica el reexamen de un corpus mayor de datos, ya sea de todo el experimento o de un subconjunto de datos que se consideran una unidad útil de análisis.

Construcción de modelos. Al igual que sus predecesores, los experimentos de desarrollo del profesorado tiene un objetivo teórico: la construcción de modelos explicativos respecto al desarrollo del conocimiento de sus participantes. Dichos modelos comienzan a desarrollarse durante el análisis continuo, sin embargo, es en el análisis retrospectivo donde se articulan de manera completa.

Generación y prueba de hipótesis. Tanto los experimentos de enseñanza como los experimentos de desarrollo del profesorado incluyen ciclos continuos de generación y prueba de hipótesis. Las hipótesis actuales del equipo de investigación guían sus interacciones con los/as participantes y a su vez, estas interacciones proporcionan datos útiles para robustecer o modificar las hipótesis de partida.

Grabación. De forma similar a como ocurre con todos los tipos de investigación basadas en el diseño, la grabación en video de las sesiones con los/as participantes resulta fundamental. Mientras que las cintas de audio y las notas de campo del/a investigador-profesor y el/la investigador-observador proporcionan una fuente adicional de datos para el análisis retrospectivo.

Simon (2000) también alude a dos características que los experimentos de desarrollo del profesorado heredaron de los experimentos con todo el grupo –de igual manera, las describimos parafraseando su trabajo–.

Marco conceptual. Desde sus inicios, este tipo de estudios incorpora, en correspondencia con la perspectiva emergente de Cobb y colaboradores, un marco interpretativo para analizar la actividad individual y colectiva en el aula de clase. Dicho marco mantiene la complementariedad de un enfoque social y uno psicológico, e implica prestar atención a la participación individual, de grupos pequeños y de grupos grandes en el contenido y a las conversaciones explícitas de los miembros de la comunidad.

Confiabilidad y conmensurabilidad. La confiabilidad refiere a la completitud y sistematicidad de los análisis de los datos, mientras que la conmensurabilidad alude a uno de los objetivos de la investigación es desarrollar constructos teóricos que permitan dar sentido a variaciones inesperadas de los resultados al cambiar los contextos en los cuales se realiza el experimento.

Particularidades

Según su autor (Simon, 2000), la principal diferencia entre los experimentos de desarrollo del profesorado y sus metodologías antecesoras es que estos se centran específicamente en el desarrollo del profesorado –en formación inicial o continua– más allá de los aspectos matemáticos. Esto es, los experimentos de desarrollo del profesor son útiles para “generar modelos para el desarrollo pedagógico de los profesores, así como su desarrollo matemático” (Simon, 2000, p. 345; traducción propia).

A este respecto, Simon (2000) aclara que entienden el ‘desarrollo’ como el conjunto de cambios en el conocimiento, las creencias, las disposiciones y las habilidades que sustentan la capacidad del profesorado para implementar su labor con éxito.

Más en términos metodológicos, el creador de esta propuesta menciona que este tipo de experimentos adoptan una postura similar a los experimentos de enseñanza: promover un desarrollo como medio para poder estudiarlo.

Limitaciones

Aunadas a las debilidades de las investigaciones basadas en el diseño mencionadas más arriba, Simon (2000) también alude a las limitaciones que los experimentos de desarrollo del profesorado pueden enfrentar. Entre ellas, la complejidad de aunar las tareas de quien investiga y de quien enseña; lo laboriosa, costosa e incluso abrumadora que puede ser la gestión y análisis de los datos; la escasez de espacios adecuados en nuestra disciplina para compartir los resultados de los experimentos realizados; y la falta de conocimientos específicos respecto al desarrollo pedagógico del profesorado –en contraste con su desarrollo matemático de nociones particulares–.

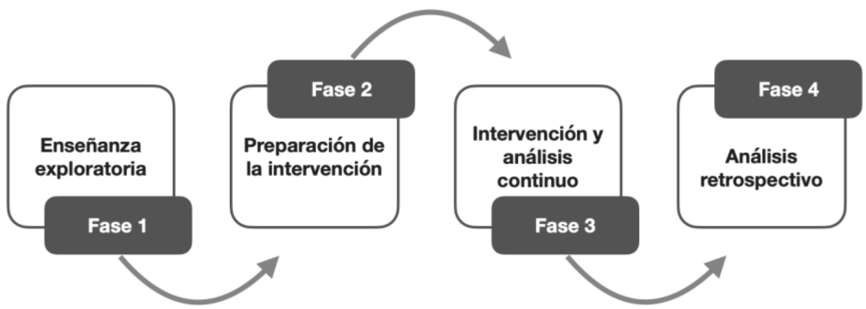
En suma, dada estas caracterizaciones de los experimentos de desarrollo del profesorado, en particular la cercanía entre investigación y práctica que promueven, la producción de teorías locales como objetivo implícito, y la elaboración y robustecimiento de diseños de intervención que permiten, es que optamos por esta alternativa metodológica como base para nuestra producción de datos.

Ahora bien, como es natural en las ciencias sociales y más en las aproximaciones cualitativas, las propuestas teóricas y metodológicas se deben adaptar y matizan a las particularidades de cada proyecto de investigación, sus objetos, objetivos y recursos. En la siguiente sección detallamos las decisiones tomadas en la construcción de nuestro experimento de desarrollo del profesorado.

4.2. Sobre el método

Considerando las lecturas realizadas acerca de las investigaciones basada en el diseño y los experimentos de desarrollo del profesorado, en particular los trabajos de Steffe y Thompson (2000), Molina et al. (2011) y Valverde (2012), decidimos dividir nuestra producción y análisis de datos en cuatro grandes fases (Figura 11).

Figura 11
Fases de nuestro experimento de desarrollo del profesorado



En los siguientes cuatro apartados explicitamos el propósito, las actividades y decisiones metodológicas, así como las herramientas e instrumentos construidos para cada una de estas fases[10].

4.2.1. Fase 1 – Enseñanza exploratoria

Steffe y Thompson (2000) enfatizan la conveniencia de que, en caso de no haber realizado un experimento de enseñanza con anterioridad, el equipo de investigación se involucre en una fase de enseñanza exploratoria. Según los autores, previo al inicio del experimento, "es importante familiarizarse a fondo, a

[10] Más detalles sobre las decisiones metodológicas, las herramientas docentes e instrumentos de investigación dispuestos para este experimento pueden consultarse en Cruz-Márquez y Montiel-Espinosa (2024).

nivel experiencial, con las formas y los medios de operar de los alumnos en cualquier dominio de conceptos y operaciones matemáticas de interés” (p. 274; traducción propia). Una recomendación de la que Simon (2000) hace eco y que nosotros retomamos para el diseño de nuestro experimento.

En consecuencia, para nuestro estudio, incluimos en la fase de enseñanza exploratoria dos tipos de experiencias (Tabla 4).

Tabla 4
Actividades de la Fase 1 – Enseñanza exploratoria

Fase 1 – Enseñanza exploratoria
– Experiencias de problematización de la trigonometría escolar con el profesorado de matemáticas.
– Experiencias de diseño, implementación y análisis de actividades de aula con el profesorado en formación inicial.

Experiencias de problematización de la trigonometría escolar

En los últimos años realizamos más de una docena de experiencias de problematización de la trigonometría escolar con el profesorado de matemáticas en formación inicial y continua. Estas se llevaron a cabo de forma presencial o virtual; en el marco de distintos proyectos educativos nacionales, congresos de la disciplina, estancias académicas, entre otros. Todas fueron diseñadas con base en los elementos teóricos mencionados más arriba, en particular la problematización de las nociones trigonométricas reportada en Cruz-Márquez (2018).

Dos observaciones que construimos fruto de estas experiencias y que en este punto nos parecen relevantes son: 1) las situaciones de aprendizaje construidas generan la confrontación matemática esperada y, además, suelen originar dudas y preguntas respecto al proceder didáctico y pedagógico en los/as docentes; y 2) las situaciones de aprendizaje parecen despertar mayor resistencia y confrontación al trabajar con profesores/as con una larga trayectoria como docentes de matemáticas o con una formación matemática muy sólida.

Experiencias de diseño, implementación y análisis de actividades de aula

Durante un par de años diseñamos e implementamos un curso regular en la Licenciatura en Docencia de la Matemática, que oferta la Universidad Autónoma de Baja California (UABC), a través de la Facultad de Pedagogía e Innovación Educativa (FPIE).

Dicha unidad didáctica está dirigida al séptimo –penúltimo– semestre de la carrera y tiene como propósito que los/as profesores/as vivencien, diseñen, implementen y analicen experiencias de aula relativas a geometría euclidiana y analítica. Con esto en mente, durante el curso, los/as profesores/as en formación inicial trabajaron dos situaciones de aprendizaje construidas con base en resultados de investigación de la disciplina, y diseñaron, implementaron –con estudiantes de secundaria, bachillerato y de otros semestres de su misma carrera– y analizaron sus propias clases.

Cinco observaciones que construimos fruto de esta experiencia y que fueron importantes para la configuración de nuestro experimento son: 1) la necesidad de estructuras teóricas y metodológicas que guíen el trabajo de diseño de las clases y de una etapa de formación sobre estas estructuras; 2) la importancia de la discusión al interior de cada grupo de trabajo y con el resto del salón de clases para afinar las los diferentes productos del curso; 3) la poca certeza los/as profesores/as en formación inicial respecto a qué podrían hacer o decir sus estudiantes ante una pregunta o actividad específica; 4) el estrés y ansiedad que causa la implementación de las clases diseñadas; y 5) la utilidad del análisis de los resultados obtenidos en la implementación a la luz de la planificación, la trayectoria hipotética de aprendizaje construida y la bibliografía consultada sobre el tema.

En suma, aunque la mayoría de estas experiencias no se sistematizaron ni reportaron, reconocemos su aporte para el diseño inicial de nuestro experimento de desarrollo del profesorado. Además, coincidiendo con nuestros antecedentes metodológicos, creemos importante subrayar el valor de estas experiencias en la familiarización del equipo de investigación con el trabajo que realiza el profesorado ante ciertos tipos de actividades, así como en la generación de habilidades y estrategias para interactuar con dicha población de forma efectiva, pero también amena y respetuosa.

4.2.2. Fase 2 – Preparación de la intervención

La fase de preparación tiene el propósito de delimitar los objetivos, preguntas y/o hipótesis de investigación, así como el plan inicial del experimento: participantes, cantidad de sesiones, objetivo e hipótesis de cada sesión, entre otros. En nuestro caso, con base en los trabajos de Molina et al. (2011, p. 80) y Valverde (2012, pp. 211-212), incluimos al menos seis actividades en esta fase (Tabla 5).

Tabla 5
Actividades de la Fase 2 – Preparación de la intervención

Fase 2 – Preparación de la intervención
– Definir el problema de investigación. – Justificar el interés y la necesidad de realizar este estudio. – Elegir, justificar la elección y describir a los/as participantes. – Diseñar, en líneas generales, en que va a consistir la intervención –la secuencia de sesiones de trabajo– y justificar dicho diseño. – Identificar los objetivos concretos de la intervención a realizar. – Elaborar hipótesis sobre los resultados a obtener en la intervención.

En capítulos anteriores explicitamos los objetivos de nuestro estudio y referimos a su originalidad e importancia; así que dedicamos esta sección a detallar el plan inicial de nuestro experimento en cinco subapartados: los/as participantes elegidos y el contexto institucional, la secuencia de sesiones de la intervención, la experiencia de problematización a utilizar, las decisiones instruccionales (objetivos instruccionales y metodología de enseñanza), y las decisiones de investigación (objetivos, hipótesis, registros de la información y métodos de análisis).

Sobre quienes participan y el contexto institucional

Realizamos la intervención de nuestro experimento de desarrollo del profesorado como un curso optativo en la Licenciatura en Docencia de la Matemática, que oferta la Universidad Autónoma de Baja California, campus

Mexicali, a través de la Facultad de Pedagogía e Innovación Educativa. Como participantes elegimos a los/as profesores/as en formación inicial que, durante el periodo académico 2021-1, cursan el quinto, sexto, séptimo y octavo semestre de la carrera.

En términos de Tatto et al. (2010), este es un programa concurrente –que aúna la formación general y didáctico-pedagógica–, ofrecido completamente por una institución universitaria –no normalista— y dedicado de forma exclusiva a la formación del profesorado de matemáticas en los niveles de secundaria y media superior.

La elección de los/as participantes responde, en primera instancia, a que pertenecen a la población de interés de nuestro estudio: profesores/as de matemáticas de secundaria y media superior en formación inicial. También, fue decisiva la cercanía con la Facultad de Pedagogía e Innovación Educativa y nuestra aludida familiaridad al trabajar con estudiantes de esta carrera.

Decidimos incluir los/as profesores/as en formación inicial de los últimos cuatro semestres de la carrera pues los/as de quinto y sexto se encuentran en la etapa disciplinar –que va del cuarto al sexto semestre–, mientras que los/as de séptimo y octavo semestre se encuentran cursando la etapa terminal de su formación, la única que incluye unidades didácticas dedicadas a prácticas profesionales en centros educativos de secundaria y media superior (Anexo 1). En nuestras experiencias previas notamos diferencias importantes en la forma que estos grupos afrontan situaciones de problematización de la matemática escolar y en el tipo de reflexiones que producen en ellos; al incluir ambos grupos esperamos que nuestro estudio también arroje luz al respecto.

Además, es importante mencionar que decidimos llevar a cabo nuestro experimento de desarrollo del profesorado como un curso optativo, con valor curricular para los/as profesores/as en formación inicial. Estas características son convenientes para procurar el interés y permanencia de quienes participen en las actividades de la intervención.

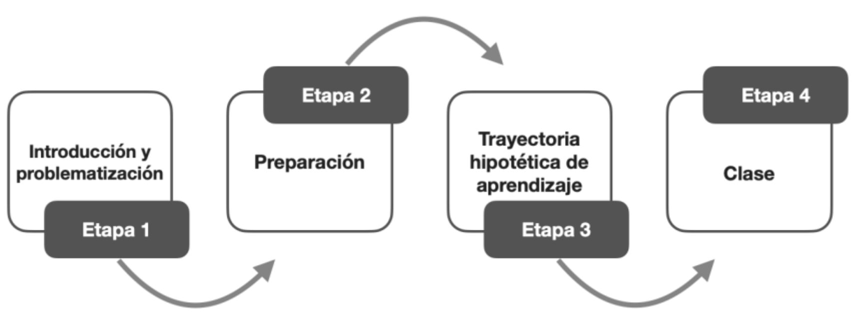
Por último, respecto a la modalidad de trabajo, debido a las circunstancias de salud pública, realizaremos el curso optativo en modalidad virtual. Si bien estas condiciones fueron imprevistas, el trabajo realizado los últimos años con el profesorado en formación inicial y continua fue parcialmente en dicha modalidad, por lo que nos es relativamente familiar.

Sobre la secuencia de sesiones

El curso optativo contará con la participación voluntaria de menos de 12 profesores/as en formación inicial, que conformarán equipos de trabajo de dos o tres personas. Tendrá una duración de 12 semanas, que abarcan del 8 de marzo al 28 de mayo de 2021. Durante este periodo se realizarán 20 reuniones con los participantes, 10 reuniones por equipo de trabajo y 10 reuniones con el grupo completo, todas ellas en modalidad virtual sincrónica. Las reuniones por equipo de trabajo tendrán una duración de entre treinta minutos y una hora, mientras que las reuniones de todo el grupo una duración máxima de dos horas.

La secuencia de sesiones diseñadas para el curso optativo está dividida en cuatro etapas (Figura 12).

Figura 12
Etapas de la intervención



Etapa 1: introducción y problematización

Como su nombre permite advertir, esta etapa incluye dos partes esenciales: la introducción al curso y la experiencia de problematización de la trigonometría escolar (Tabla 6). La primera refiere a la presentación del curso, sus objetivos, duración, organización general, participantes, entre otros. La segunda está dedicada a la experiencia de problematización de la trigonometría escolar a realizar con los/as profesores/as en formación inicial participantes, en las que se desarrollarán y analizarán actividades matemáticas diseñadas por el equipo de investigación con base en los fundamentos teóricos aludidos anteriormente.

Tabla 6
Partes, sesiones, duración, actividades y tipo de sesión de la etapa 1

Sesión Semana	**Horas**	**Actividades**	**Tipo**
Etapa 1: introducción y problematización (6hrs.)			
A. Introducción			
Sesión 1 Semana 1	2	– Presentación del curso, sus objetivos, duración, organización, participantes, etc. – Llenar la encuesta – Asignar lecturas teóricas-metodológicas	Todo el grupo
B. Experiencia de problematización			
Sesión 2 Semana 1	2	– Experiencia de problematización de la trigonometría escolar	Todo el grupo
Sesión 3 Semana 1	2	– Experiencia de problematización de la trigonometría escolar	Todo el grupo

Además, durante esta primera etapa se le solicitará a los/as participantes que llenen una encuesta, que incluye preguntas acerca de sus datos personales y algunos antecedentes académicos propios y de su núcleo familiar; y se les asignarán dos productos de investigación, los cuales se discutirán y serán la base del trabajo de la siguiente etapa.

Etapa 2: preparación

Como mencionamos más arriba, en nuestras experiencias previas al trabajar actividades de diseño con profesores/as en formación inicial nos percatamos de la necesidad de incluir discusiones teóricas y metodológicas que asistieran el proceso de construcción de situaciones de aula, así como de un periodo para refrescar sus conocimientos respecto a las nociones matemáticas en cuestión y sobre estrategias didácticas que pudieran serles útiles en el diseño.

En consecuencia, esta etapa incluye dos partes complementarias: la preparación teórica-metodológica, y la preparación matemática y didáctica-pedagógica (Tabla 7). En la primera, los estudiantes leerán y reflexionarán sobre dos productos de investigación, estos versan sobre el desarrollo del pensamiento matemático –una reflexión de carácter más teórico– y la trayectoria hipotética de aprendizaje –una de naturaleza más bien metodológica–.

Tabla 7
Partes, sesiones, duración, actividades y tipo de sesión de la etapa 2

Sesión Semana	**Horas**	**Actividades**	**Tipo**
Etapa 2: preparación (8hrs.)			
A. Teórica-metodológica			
Sesión 4 Semana 2	2	– Discusión sobre la lectura acerca del desarrollo del pensamiento matemático	Todo el grupo
Sesión 5 Semana 2	2	– Discusión sobre la lectura acerca de la trayectoria hipotética de aprendizaje – Asignación de tópicos y referentes de investigación – Asignación del “Análisis matemático, didáctico-pedagógico y de referentes de investigación”	Todo el grupo
B. Matemática y didáctica-pedagógica			
Sesión 6 Semana 3	1	– Avances del “Análisis matemático, didáctico-pedagógico y de referentes de investigación”	Equipo de trabajo
Sesión 7 Semana 4	1	– Avances del “Análisis matemático, didáctico-pedagógico y de referentes de investigación”	Equipo de trabajo
Sesión 8 Semana 4	2	– Presentación del “Análisis matemático, didáctico-pedagógico y de referentes de investigación” – Asignación del “Objetivo de aprendizaje”	Todo el grupo

En la segunda leerán y reflexionarán sobre algunos artículos de investigación en matemática educativa relativos a la enseñanza y aprendizaje de las nociones trigonométricas –proporcionados por el equipo de investigación–; y buscarán, en libros de texto, internet y otros medios información, actividades matemáticas y estrategias didácticas que podrían ser útiles durante el diseño de sus propias experiencias de aula.

Fruto de esta última parte se entregará y presentará ante el grupo completo un documento que sintetice la búsqueda, lectura y reflexión realizada por cada grupo de trabajo. El cual será el primer producto que se evaluará en términos del curso.

Etapa 3: trayectoria hipotética de aprendizaje

Por su parte, la tercera etapa del curso optativo está dedicada a la construcción de una trayectoria hipotética de aprendizaje –en cuanto modelo teórico para el diseño de la instrucción matemática (Gómez y Lupiáñez, 2007; Simon y Tzur, 2004)– por cada grupo de trabajo. En este sentido, está compuesta por dos partes: el objetivo de aprendizaje, y el proceso hipotético de aprendizaje y sus tareas asociadas (Tabla 8). Como sus nombres dejan ver, en la primera parte cada grupo de trabajo decidirá un objetivo para su trayectoria hipotética de aprendizaje, mientras que la segunda se dedicará a la construcción del proceso hipotético de aprendizaje y las tareas que lo acompañan. En ambos casos tomarán como referencia sus revisiones y discusiones previas, en particular la preparación matemática y didáctico-pedagógica.

Tabla 8
Partes, sesiones, duración, actividades y tipo de sesión de la etapa 3

Sesión Semana	**Horas**	**Actividades**	**Tipo**
Etapa 3: trayectoria hipotética de aprendizaje (7hrs.)			
A. Objetivo de aprendizaje			
Sesión 9 Semana 5	1	– Avances del “Objetivo de aprendizaje”	Equipo de trabajo
Sesión 10 Semana 5	2	– Presentación del “Objetivo de aprendizaje” – Asignación del “Proceso hipotético de aprendizaje y tareas asociadas”	Todo el grupo
B. Proceso hipotético de aprendizaje y tareas asociadas			
Sesión 11 Semana 6	1	– Avances del “Proceso hipotético de aprendizaje y tareas asociadas”	Equipo de trabajo
Sesión 12 Semana 7	1	– Avances del “Proceso hipotético de aprendizaje y tareas asociadas”	Equipo de trabajo
Sesión 13 Semana 7	2	– Presentación del “Proceso hipotético de aprendizaje y tareas asociadas” – Asignación de la “Planificación de la clase”	Todo el grupo

En cada una de las partes de esta etapa se entregará y presentará un documento que sintetice las reflexiones y decisiones del grupo de trabajo respecto a los elementos de su trayectoria hipotética de aprendizaje. Estos serán el segundo y tercer producto que se evaluará en términos del curso.

Etapa 4: clase

Por último, la cuarta etapa del curso optativo se enfoca en la experiencia de aula a realizar por cada equipo de trabajo. En consecuencia, se divide en tres partes: planificación, implementación y análisis de la clase (Tabla 9).

Tabla 9

Partes, sesiones, duración, actividades y tipo de sesión de la etapa 4

Sesión Semana	**Horas**	**Actividades**	**Tipo**
Etapa 4: clase (9hrs.)			
A. Planificación			
Sesión 14 Semana 8	1	– Avances de la “Planificación de la clase”	Equipo de trabajo
Sesión 15 Semana 9	1	– Avances de la “Planificación de la clase”	Equipo de trabajo
Sesión 16 Semana 9	2	– Presentación de la “Planificación de la clase”	Todo el grupo
B. Implementación			
Sesión 17 Semana 10	1	– Puesta en escena de las clases – Asignación del “Análisis de la clase”	Equipo de trabajo
C. Análisis			
Sesión 18 Semana 11	1	– Avances del “Análisis de la clase”	Equipo de trabajo
Sesión 19 Semana 12	1	– Avances del “Análisis de la clase”	Equipo de trabajo
Sesión 20 Semana 12	2	– Presentación del “Análisis de la clase”	Todo el grupo

Durante la primera parte se planificará una experiencia de aula concreta, con base en la trayectoria hipotética de aprendizaje construida en la etapa anterior. En la segunda parte los/as participantes llevarán al aula la experiencia planificada, esta implementación podrá ser virtual o presencial, con estudiantes de secundaria, media superior e incluso educación superior, según las condiciones de salud pública e institucionales lo permitan. La tercera parte de esta etapa se dedicará al análisis de la implementación llevada a cabo, en esta se contrastarán los objetivos e hipótesis de la planificación y los resultados obtenidos durante la clase realizada.

El producto de la primera parte de esta etapa será la planificación de la clase, el de la segunda parte será el desarrollo de la clase en sí misma y el de la tercera será un escrito que sintetice el análisis de la clase. Estos constituirán el cuarto, quinto y sexto producto que se evaluará en términos del curso.

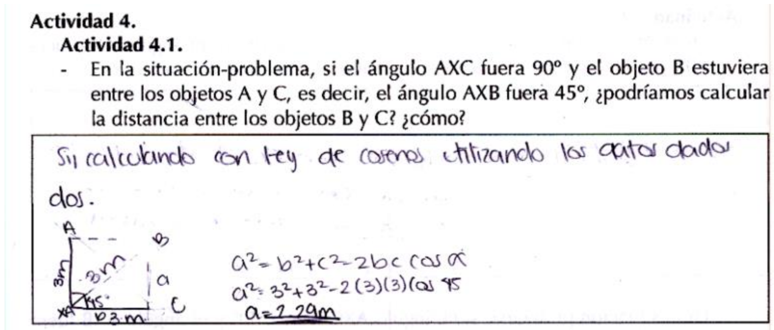
Sobre la experiencia de problematización de la trigonometría escolar

Como mencionamos más arriba, después de la problematización de las nociones trigonométricas reportada en Cruz-Márquez (2018), llevamos a cabo otras experiencias de problematización con profesores/as de matemáticas en formación inicial, utilizando situaciones de aprendizaje basadas en dicho estudio.

En una de ellas trabajamos con el profesorado en formación inicial de la Licenciatura en Docencia de la Matemática, que oferta la Universidad Autónoma de Baja California, Campus Mexicali. Dicha experiencia de problematización, compuesta por dos sesiones presenciales de aproximadamente dos horas cada una, se realizó con profesores/as que cursaban el espacio de Práctica profesional, ubicado en el octavo y último semestre, y los que cursaban el espacio de Geometría analítica, ubicado en el sexto semestre.

Para efectos de este documento, esta experiencia tuvo tres resultados importantes. Primero, notamos ciertas diferencias respecto a la manera en que los/as profesores/as en formación inicial afronta las experiencias de problematización, según la etapa de formación en la cual se encuentren –hecho que influyó en la selección de participantes de este estudio–. En segundo lugar, advertimos cierto cuestionamiento respecto a la enseñanza y aprendizaje de las nociones geométricas y trigonométricas puestas en juego –que fue fundamental para el planteamiento de la investigación misma–. Y, por último, observamos que, a diferencia de lo sucedido con los/as participantes de la investigación de partida, la gran mayoría de los/as profesores/as en formación inicial en esta experiencia –sobre todo quienes cursaban el octavo semestre de la carrera– utilizaron la ley de cosenos para resolver las tareas orientadas a la resignificación de la relación ángulo-lado en el triángulo (Figura 13).

Figura 13
Actividad 4.1 – Alumno 7, Grupo 2


Actividad 4.
Actividad 4.1.
- En la situación-problema, si el ángulo AXC fuera 90° y el objeto B estuviera entre los objetos A y C, es decir, el ángulo AXB fuera 45°, ¿podríamos calcular la distancia entre los objetos B y C? ¿cómo?

Si, calculando con ley de cosenos utilizando los datos dados.

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$
$a^2 = 3^2 + 3^2 - 2(3)(3)\cos 45$
$a = 2.29m$

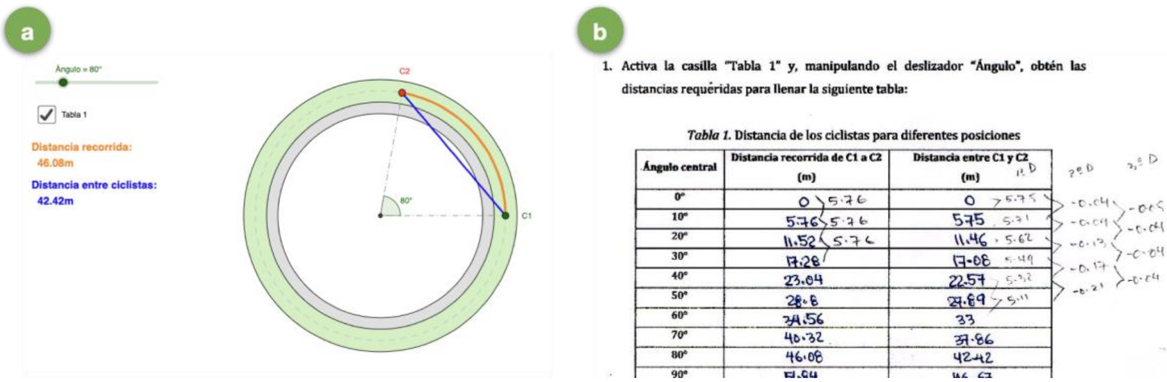
El empleo de esta herramienta trigonométrica deja sin lugar los procesos de construcción y argumentación geométrica que, según nuestra historización, requiere la resignificación de la relación ángulo-lado. En este sentido, a diferencia de lo sucedido con los/as profesores/as en formación inicial que recién comenzaban su curso de trigonometría en Honduras, los/as participantes de esta última experiencia confrontaron el significado lineal atribuido a la relación ángulo-lado, pero no mostraron indicios de resignificarla a través de las nociones y procedimientos geométricos.

Este último resultado fue importante para realizar variaciones a nuestra situación de aprendizaje, así como para comenzar a explorar fenómenos que hasta el momento habíamos dejado un tanto de lado. Un ejemplo de esto último fue el proyecto de Problematización de la matemática escolar; una iniciativa de desarrollo profesional docente llevado a cabo con profesores/as del nivel medio superior en México, cuyo objetivo fue mejorar el desempeño matemático escolar a través de situaciones diseñadas con sustento socioepistemológico, abordando tópicos matemáticos específicos.

En el módulo de Desarrollo del pensamiento trigonométrico de dicho proyecto, se realizó la resolución, análisis y discusión de tres tareas. En la primera de ellas se estudió la distancia recorrida y la distancia entre dos ciclistas holandeses que pasean sobre el puente circular Hovenring. La intención de esta tarea era observar y analizar que, a diferencia de la relación 'ángulo-distancia recorrida', la relación ‘ángulo-distancia entre los ciclistas’ tiene una naturaleza no-proporcional, una naturaleza trigonométrica.

Entre las respuestas de los/as participantes a esta tarea, algunas llamaron particularmente nuestra atención. Por ejemplo, en la sección de análisis, en la cual se les proporcionaba un recurso GeoGebra que simula las posiciones y las distancias de los ciclistas para distintos valores el ángulo entre estos (Figura 14a), algunos/as profesores/as realizaron el cálculo de diferencias entre valores sucesivos con la intención de descubrir la naturaleza de cada relación (Figura 14b).

Figura 14
Recurso GeoGebra proporcionado y respuestas de un profesor a la tarea



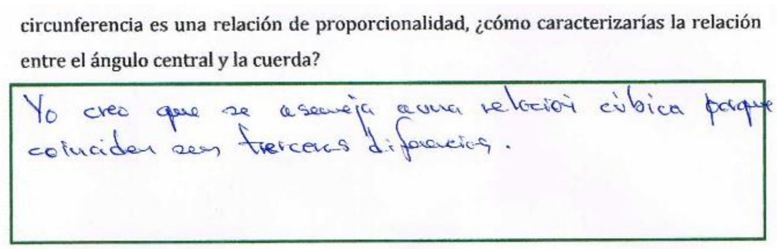
1. Activa la casilla "Tabla 1" y, manipulando el deslizador "Ángulo", obtén las distancias requeridas para llenar la siguiente tabla:

Tabla 1. Distancia de los ciclistas para diferentes posiciones

Ángulo central	Distancia recorrida de C1 a C2 (m)	Distancia entre C1 y C2 (m) 1ª D	2ª D	3ª D
0°	0 5.76	0 5.75	-0.04	-0.05
10°	5.76 5.76	5.75 5.71	-0.09	-0.04
20°	11.52 5.76	11.46 5.62	-0.13	-0.04
30°	17.28	17.08 5.49	-0.17	-0.04
40°	23.04	22.57 5.32	-0.21	
50°	28.8	27.89 5.11		
60°	34.56	33		
70°	40.32	37.86		
80°	46.08	42.42		
90°	[illegible]	[illegible]		

Esta estrategia lleva al profesor que se ilustra a reconocer, en primera instancia, la naturaleza proporcional de la relación ‘ángulo-distancia recorrida’ y la naturaleza no-proporcional de la relación ‘ángulo-distancia entre los ciclistas’. Además, al consultarle cómo caracterizaría esta última, el docente alude a que “[…] se asemeja a una relación cúbica porque coinciden sus terceras diferencias” (Figura 15).

Figura 15
Extracto de la respuesta de un profesor participante


circunferencia es una relación de proporcionalidad, ¿cómo caracterizarías la relación entre el ángulo central y la cuerda?

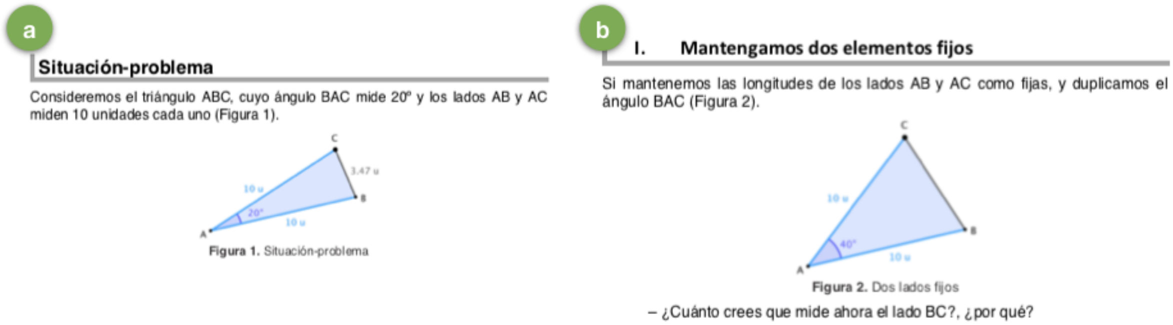
Yo creo que se asemeja a una relación cúbica porque coinciden sus terceras diferencias.

Consecuencia de esta experiencia y tomando como base los fenómenos didácticos referidos en nuestra investigación de partida, diseñamos una nueva situación de aprendizaje que denominamos ¿Lineal, cuadrática, cúbica, …?: el estudio de una relación extraña. Esta tuvo el objetivo de explorar la hipótesis de que al confrontar el significado lineal asociado a la relación ángulo-lado, y previo a reconocer su naturaleza trigonométrica, surge una concepción polinómica –cuadrática, cúbica, etcétera– de esta.

Dividimos esta experiencia de problematización en tres momentos: la situación-problema, las tareas matemáticas y la discusión. En la primera presentamos la situación-problema de partida: un triángulo isósceles del cual se conocen la medida de todos sus lados y de su ángulo desigual (Figura 16a). Alrededor de esta situación, durante el segundo momento, propusimos cuatro tareas matemáticas, planteadas en contextos numéricos, geométricos y gráficos –mostramos la primera de ellas como ejemplo (Figura 16b)–. Por último, en el tercer momento, llevamos a cabo una reflexión conjunta acerca de las nociones y procedimientos matemáticos puestos en juego a causa de la situación-problema y las cuatro tareas trabajadas, y sobre algunos de los fenómenos que acarrea la enseñanza y aprendizaje de las nociones trigonométricas en las aulas de clase.

Figura 16

Situación-problema y primera tarea matemática propuesta



Esta experiencia se realizó con 20 participantes, profesores/as de educación secundaria y media superior en formación inicial y continua, en el marco del VIII Congreso de Matemática Educativa (COME) que organiza la Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán, en Tegucigalpa, Honduras. Estuvo compuesta por una sesión presencial de dos horas, de la cual se tomó –con permiso expreso– registro fotográfico y de video, así como los guiones de trabajo utilizados por los/as participantes.

El análisis de esta experiencia aún se encuentra en proceso, no obstante, entre los resultados parciales importantes para este estudio podemos mencionar una clara confrontación con el significado lineal atribuido a la relación ángulo-lado en el triángulo, evidencia respecto a la concepción polinómica que emerge al confrontar el significado lineal de la relación ángulo-lado en tareas que incluyen registros tabulares, e indicios de un proceso de resignificación de dicha relación.

Con base en estos resultados, decidimos que –para efecto de la producción de datos de este estudio– utilizaremos una versión ajustada de la situación de aprendizaje diseñada para esta última experiencia de problematización (Anexo 2). Esta, aunque se aleja de algunos de los elementos de construcción del conocimiento trigonométrico identificados en nuestra investigación de partida, sí demostró generar la problematización de las nociones trigonométricas –los momentos de confrontación y resignificación– que requerimos vivencien quienes participen de nuestro estudio: profesores/as de matemáticas en formación inicial que cursan los últimos semestres de su carrera.

Sobre las decisiones instruccionales

Como advierte Simon (2000), uno de los retos que plantean los experimentos de desarrollo del profesorado es que, además de los desafíos y actividades propias de la investigación, se agregan las de la enseñanza. Esto tiene mucho sentido pues no habrá desarrollo que investigar si el equipo de investigación no es capaz de establecer las condiciones necesarias y de detonar dicho desarrollo.

Con esto en mente, el diseño de un experimento de desarrollo del profesorado, particularmente de su fase de intervención, requiere determinar y explicitar algunas cuestiones instruccionales básicas. Más arriba ya mencionamos la distribución de las sesiones, su tipo, las actividades que incluyen, su duración y los productos a presentar por los/as participantes. En este apartado mencionamos los objetivos instruccionales que persiguen cada una de estas sesiones y la metodología de enseñanza que seguiremos en cada etapa de la intervención.

Objetivos instruccionales

A continuación, enlistamos los objetivos instruccionales declarados en la planificación del curso optativo diseñado (Tabla 10).

Tabla 10
Objetivos instruccionales por sesión de trabajo

Sesión	Objetivos instruccionales
Etapa 1: introducción y problematización	
A. Introducción	
Sesión 1	– Organización inicial de las actividades del curso.
B. **Experiencia de problematización**	
Sesión 2 Sesión 3	– Vivenciar situaciones de aula asociadas al área de trigonometría, similares a las que construirán más adelante en el curso.
Etapa 2: preparación	
A. Teórica-metodológica	
Sesión 4	– Lectura, reflexión y discusión respecto a la construcción del conocimiento matemático y el desarrollo del pensamiento matemático.
Sesión 5	– Lectura, reflexión y discusión respecto a la trayectoria hipotética de aprendizaje, en cuanto herramienta metodológica a utilizar como base para la planificación de las clases.
B. Matemática y didáctico-pedagógica	
Sesión 6	

Sesión 7	– Búsqueda, lectura, reflexión y discusión (por equipo de trabajo) respecto a algunos aspectos matemáticos, propuestas didáctico-pedagógicas de libros de texto y otras fuentes, y artículos de investigación en matemática educativa –proporcionados por el equipo de investigación–.
Sesión 8	– Presentación y discusión (con el grupo completo) respecto a la búsqueda y reflexión realizada por cada equipo de trabajo durante las dos sesiones anteriores.
Etapa 3: trayectoria hipotética de aprendizaje	
A. Objetivo de aprendizaje	
Sesión 9	– Discusión, acuerdo y redacción (por equipo de trabajo) del objetivo de la trayectoria hipotética de aprendizaje.
Sesión 10	– Presentación y discusión (con el grupo completo) respecto al objetivo de aprendizaje construido por cada equipo de trabajo.
B. Proceso hipotético de aprendizaje y tareas asociadas	
Sesión 11 Sesión 12	– Discusión, acuerdo y redacción (por equipo de trabajo) de la trayectoria hipotética de aprendizaje y sus tareas asociadas.
Sesión 13	– Presentación y discusión (con el grupo completo) respecto a la trayectoria hipotética de aprendizaje y sus tareas asociadas.
Etapa 4: clase	
A. Planificación	
Sesión 14 Sesión 15	– Discusión, acuerdo y redacción (por equipo de trabajo) de la planificación (actividades, preguntas, materiales, tiempos e hipótesis) de la clase a realizar.
Sesión 16	– Presentación y discusión (con el grupo completo) respecto a la planificación de clase construida por cada equipo de trabajo.
B. Implementación	
Sesión 17	– Puesta en escena de la clase planificada.
C. Análisis	
Sesión 18 Sesión 19	– Análisis, discusión, acuerdo y redacción (por equipo de trabajo) de los resultados obtenidos en la puesta en escena, a la luz de la trayectoria hipotética de aprendizaje construida.
Sesión 20	– Presentación y discusión (con el grupo completo) respecto al análisis de la puesta en escena realizado.

Metodología de enseñanza

Como mencionamos, en los últimos años diseñamos y pusimos en práctica un conjunto amplio de experiencias de problematización de la trigonometría escolar con profesores/as en formación inicial y continua. Producto de estas configuramos una manera de trabajar con el profesorado que está orientada a provocar los momentos de confrontación y resignificación que implica la problematización de la trigonometría escolar, así como cierta reflexión respecto a lo que sucede en el aula de clase. A continuación, describimos los seis momentos que componen dicha forma de trabajo con el profesorado.

Momento 1: trabajo individual. Está dedicado a que quienes participan interactúen de forma individual con las tareas matemáticas diseñadas. En consecuencia, durante este primer momento, los/as participantes suelen guardar silencio y trabajar concentradamente en cada tarea, intentando diferentes estrategias y –en caso de haberlas– realizando preguntas al equipo de investigación sobre algún elemento (enunciado, figura, pregunta, instrucción, material, etcétera) de la actividad. El equipo de investigación, por su parte, suele sondear –con preguntas o simple observación– el trabajo de los/as participantes con la intención de irse formando un panorama de las nociones y procedimientos matemáticos, y las estrategias de resolución que están poniendo en juego, así como de los momentos de confrontación que puedan originarse al ejecutar dichas estrategias.

Momento 2: trabajo en equipo. Apunta a que quienes participan discutan e intenten atender la tarea en pequeños equipos de trabajo. En consecuencia, durante este momento, los/as participantes dialogan en sus equipos acerca de las estrategias, nociones y procedimientos matemáticos utilizados con o sin éxito al resolver la actividad, así como sobre la pertinencia y validez de estos elementos. Mientras que el equipo de investigación se mueve entre los equipos de trabajo promoviendo la reflexión de los/as participantes con preguntas abiertas, que apuntan a las justificaciones e implicaciones que podría tener el uso de determinada estrategia, noción o procedimiento matemático.

Momento 3: plenaria. Está enfocado en que cada grupo comparta con el resto de las personas que participan sus estrategias, reflexiones y dudas acerca de la tarea matemática trabajada. En este sentido, durante el tercer momento, los/as participantes suelen pasar al pizarrón y contar las estrategias creadas individualmente o por el equipo de trabajo, haciendo hincapié en las justificaciones de dichas estrategias; además, reaccionan al trabajo que presentan el resto de los equipos de trabajo. El equipo de investigación, mientras tanto, escucha atentamente las estrategias, invita a intervenir a algún participante o equipo de trabajo que usó una estrategia novedosa o llegó a un resultado matemático diferente, esto con la intención de seguir promoviendo la reflexión al respecto; además, en caso de ser necesario, realiza alguna aclaración, pregunta o comentario con relación a las estrategias presentadas.

Momento 4: discusión matemática. Se realiza después de haber pasado los tres momentos anteriores con cada una de las tareas matemáticas que componen la situación de aprendizaje y tiene el propósito de permitir una reflexión panorámica de las actividades en su conjunto. En consecuencia, en este cuarto momento, tanto los/as participantes como el equipo de investigación comparten preguntas y comentarios acerca de las tareas matemáticas realizadas y de cómo estas se hilan.

Momento 5: transparentación. Está dedicado a mostrar los fenómenos didácticos a los que apunta y los resultados de investigación que permitieron la construcción de la situación de aprendizaje trabajada. Así, durante este quinto momento, los/as participantes suelen escuchar con atención, y realizar comentarios y preguntas al respecto; mientras que el equipo de investigación expone algunos resultados de investigación y cómo estos son base para las tareas matemáticas presentadas y para las hipótesis que se tenían sobre la reacción de los/as participantes.

Momento 6: discusión didáctico-pedagógica. Apunta a que quienes participan realicen observaciones y comentarios acerca de lo que pasa en el salón de clases al abordar los tópicos matemáticos en cuestión, así como sobre cómo podrían llevarse algunas de las ideas trabajadas a la práctica educativa. En este sentido, durante el sexto momento, los/as participantes están al frente de la discusión con sus reflexiones y cuestiones; mientras que el equipo de investigación realiza eventuales comentarios y preguntas para detonar la reflexión y promover la participación.

Para efectos de nuestro curso optativo, dada su modalidad, duración y objetivos, es necesario realizar tres adaptaciones a este método de trabajo. Primero, la etapa de introducción y problematización, en particular la parte dedicada a la problematización de la trigonometría escolar, se desarrollará a través de tres de los momentos descritos anteriormente: trabajo individual, plenaria y discusión matemática. Dejamos por fuera el momento de trabajo en equipo pues en la modalidad virtual requeriría que el equipo de investigación salte de una videollamada a otra, perdiendo siempre partes considerables de la discusión de los equipos de trabajo; no obstante, dada nuestra experiencia en estos ambientes, consideramos que al trabajar con una cantidad tan reducida de participantes esto no tendrá mayores repercusiones en la discusión y reflexión lograda.

Segundo, la etapa de preparación se desarrollará como una extensión y adaptación del momento de transparentación, pues estará orientada al estudio de algunos productos de investigación que fueron base para el diseño de la experiencia de problematización trabajada, así como lo serán –probablemente– para la planificación, implementación y análisis de clase que llevarán a cabo los/as participantes. En esta etapa los roles cambiarán considerablemente respecto al momento de transparentación descrito más arriba, pues serán los/as participantes quienes dirijan la discusión con sus reflexiones y preguntas.

Por último, las dos últimas etapas del curso optativo –trayectoria hipotética de aprendizaje y clase– se desarrollarán como una adaptación y ampliación del momento de discusión didáctico-pedagógica, en cuanto tienen el propósito de llevar algunas de las ideas y reflexiones de momentos anteriores a las condiciones de aula. En estas etapas los roles se mantienen en gran medida, con la diferencia de que los/as participantes no solo reflexionarán sobre cómo podrían vivir las ideas discutidas en un salón de clases, sino que planificarán, implementarán y analizarán una experiencia de aula concreta con tal objetivo.

Sobre las decisiones de investigación

Según los referentes metodológicos asumidos, entre los aspectos de investigación de este tipo de experimentos es necesario explicitar los objetivos de investigación e hipótesis de nuestra intervención, los registros de la información y los métodos de análisis que se utilizarán. Dedicamos los siguientes apartados a describir estos elementos.

Objetivos de investigación

Como objetivos de investigación asociados a cada etapa de nuestro curso optativo utilizamos los introducidos anteriormente como objetivos específicos (OE) y los separamos en dos grupos: el primero incluye solo la etapa 1, en la que se ubica la experiencia de problematización de la trigonometría escolar; y el segundo abarca las etapas 2, 3 y 4, en las cuales los/as profesores/as en formación inicial diseñan, implementan y analizan sus propias situaciones de aula.

Tabla 11
Objetivos de investigación por etapa

Etapa	Objetivo de investigación
Etapa 1: introducción y problematización	**OE1.** Identificar y describir los saberes docentes que el profesorado de matemáticas en formación inicial construye y manifiesta al vivenciar experiencias de problematización de la trigonometría escolar. **OE3.** Involucrar a los/as profesores/as de matemáticas en formación inicial participantes en experiencias de problematización de la trigonometría escolar.
Etapa 2: preparación Etapa 3: trayectoria hipotética de aprendizaje Etapa 4: clase	**OE2.** Identificar y describir los saberes docentes que el profesorado de matemáticas en formación inicial construye y manifiesta al diseñar, implementar y analizar actividades en el área de trigonometría. **OE4.** Describir cómo estas experiencias de problematización dialogan con los saberes docentes al diseñar, implementar y analizar actividades de aula en el área de trigonometría.

Hipótesis generales

De acuerdo con la organización de los objetivos de investigación recién descrita, relatamos las hipótesis generales de nuestro curso optativo en dos grupos.

Etapa 1. Con base en las experiencias previas, consideramos que durante esta primera etapa la situación de problematización de la trigonometría escolar evidenciará el significado lineal que el profesorado en formación inicial suele construir en su trayectoria académica, y lo confrontará.

Además, estimamos que la experiencia de problematización permitirá que los/as profesores/as en formación inicial participantes comiencen a enriquecer dicho significado, más específicamente, que se replanteen la naturaleza no-lineal de la relación ángulo-lado en el triángulo.

Por último, consideramos que este proceso de confrontación y resignificación de las nociones trigonométricas detonará la emergencia de conocimientos de otras esferas –no necesariamente matemáticas–. En particular, dadas nuestras experiencias anteriores y la revisión bibliográfica realizada, esperamos que los/as participantes externen algunas reflexiones, preguntas y comentarios asociados a sus clases de trigonometría en niveles educativos previos (sus profesores/as, libros de texto, dinámica de clase, entre otros).

Etapas 2, 3 y 4. Consideramos que las búsquedas, lecturas, análisis y discusiones a realizarse durante estas etapas se confrontarán y comenzarán a dialogar con los conocimientos previos de los/as participantes sobre la matemática y su enseñanza. Respecto a sus conocimientos previos, esperamos que surjan referencias a sus clases de trigonometría en niveles educativos previos (sus profesores/as, libros de texto, dinámica de clase, entre otros) y a su futuro rol como profesores/as de secundaria y media superior (interés y motivación de los estudiantes, contenidos curriculares, tiempo de clase, cantidad de estudiantes por salón, entre otros).

Con relación al rol de la experiencia de problematización, estimamos que algunas ideas generales –por ejemplo, el uso de problemas matemáticos no escolares, la atención a las justificaciones y argumentos de los estudiantes, etcétera– de las experiencias y las lecturas teóricas y de investigación realizadas podrían mantenerse en algunas de las clases diseñadas por los/as participantes; no obstante, sus experiencias anteriores como estudiantes de trigonometría y su visión acerca de la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas predominará en el diseño e implementación de las clases.

Registro de la información

Como mencionamos más arriba, una de las características y principales retos que plantea el realizar experimentos de desarrollo del profesorado –y en general cualquier investigación basada en el diseño– es la cantidad de información que se registra durante la intervención. A continuación, enlistamos y describimos los siete tipos de registro que utilizaremos para la recolección de la información, así como su distribución a lo largo de la intervención.

Encuesta. Quienes participen llenarán una encuesta (Complemento 4[11]) a través un formulario Google con preguntas que incluyen sus datos personales, los precedentes académicos de su núcleo familiar, sus antecedentes laborales y académicos, y sus experiencias anteriores en áreas de geometría y trigonometría. En esta encuesta son especialmente valiosas las preguntas alusivas a las clases de trigonometría y geometría que recibieron –en términos matemáticos y didácticos-pedagógicos–, a sus experiencias previas en la planificación, implementación y análisis de clases, y a cómo planificarían una clase introductoria de trigonometría en ese momento.

Grabación de video. Grabaremos en video todas las sesiones del curso optativo, tanto las de tipo grupo completo como las de equipo de trabajo. Dado que estás serán en modalidad virtual, a través de videollamadas de la plataforma Zoom, para hacerlo utilizaremos la opción de grabación automática que ofrece el software. La grabación en video de las sesiones será la principal fuente de información para el análisis continuo y retrospectivo de nuestra intervención.

GeoGebra. Dada la modalidad en la que realizaremos el curso optativo, la experiencia de problematización de la trigonometría escolar se llevará a cabo utilizando el sitio web de GeoGebra, en particular su herramienta Grupos

[11] Con el afán de ser concisos y de mantener abiertos los procesos y recursos de investigación, cargamos los instrumentos de producción de datos en la base de datos que reúne los archivos complementarios del estudio: https://doi.org/10.7910/DVN/LTAVNQ

(Complemento 5[12]). Esta nos servirá para presentar las actividades a los/as participantes, así como para alojar sus respuestas durante las sesiones dedicadas a esta experiencia.

Notas del investigador-profesor. Durante todas las sesiones del curso optativo el investigador-profesor llenará un formato (Complemento 6) de notas sobre acontecimientos que llamen su atención y que podría ser relevante para los análisis posteriores. Entre estas serán particularmente importantes las anotaciones respecto a las modificaciones espontáneas a la dinámica, objetivos o hipótesis realizadas por el mismo investigador-profesor, así como de su justificación.

Notas del investigador-observador. Por su parte, el investigador-observador llenará un formato (Complemento 7) de notas sobre lo que sucede durante cada sesión de la intervención, priorizando en la interacción entre el investigador-profesor y los/as participantes. Estas anotaciones son sumamente importantes, pues, como mencionamos en apartados anteriores, el observador goza de una perspectiva distinta al resto de personas involucradas en la intervención, sumado a que dispone de mayor tiempo para hacer apuntes.

Productos del curso. También incluiremos dentro de nuestros registros de la información los seis productos que los equipos de trabajo construirán y presentarán a lo largo de la intervención: análisis matemático y de referentes de investigación (Complemento 8), objetivo de aprendizaje (Complemento 9), trayectoria hipotética de aprendizaje (Complemento 10), planificación de clase (Complemento 11), implementación y el análisis de clase (Complemento 12). Estos serán valiosos como síntesis de la discusión y acuerdo que los/as profesores/as en formación inicial lograron a lo largo del curso.

---

[12] Ante la inminente desaparición de los grupos GeoGebra, compusimos un documento con las ligas permanentes a cada una de las actividades a utilizar en el curso.

Entrevista. Al final del curso optativo realizaremos una entrevista semiestructurada (Complemento 13) con los/as participantes, a través de la cual pretendemos recolectar sus impresiones, comentarios y sugerencias acerca de la intervención. Además, será útil para recoger su opinión sobre la enseñanza y aprendizaje de la trigonometría después de concluir las sesiones de trabajo.

Con el propósito de aclarar el uso que haremos de estos tipos de registro, los enlistamos en relación con las etapas del curso optativo en las que serán implementados (Tabla 12).

Tabla 12
Registros de información por etapa del curso optativo

Etapa del curso	Registro de información
Etapa 1: introducción y problematización	– Encuesta – Grabación de video – GeoGebra – Notas del investigador-profesor – Notas del investigador-observador
Etapa 2: preparación	– Grabación de video – Notas del investigador-profesor – Notas del investigador-observador – Producto del curso
Etapa 3: trayectoria hipotética de aprendizaje	– Grabación de video – Notas del investigador-profesor – Notas del investigador-observador – Producto del curso
Etapa 4: clase	– Grabación de video – Notas del investigador-profesor – Notas del investigador-observador – Producto del curso – Entrevista

Análisis continuo

Como advertimos más arriba, el análisis continuo se realiza tras cada sesión del curso y es la base para las intervenciones espontaneas y planificadas con quienes participan, interacciones útiles para recopilar información adicional, probar hipótesis y promover mayor desarrollo de los conocimientos de los/as participantes.

Así, en nuestro caso, después de cada sesión, se reunirá el equipo de investigación –el investigador-profesor y el investigador-observador– para estudiar lo acontecido. En particular, compartiremos nuestras observaciones generales e interpretaciones de los hechos; examinaremos las notas individuales tomadas durante la sesión; revisaremos algunos momentos de la grabación en video que consideremos relevantes, así como otros registros que hayan sido utilizados y aporten información adicional (entrevista, encuesta, productos del curso, GeoGebra, etcétera); y tomaremos decisiones respecto a las actividades, objetivos e hipótesis de las sesiones siguientes (Figura 17).

Figura 17
Análisis continuo sesión tras sesión

Durante cada sesión de análisis continuo será fundamental tomar nota de las modificaciones en las actividades, objetivos o hipótesis que el equipo de investigación acuerde, así como de su justificación. Estos significan, en términos de nuestra metodología, aprendizajes importantes respecto al diseño inicial del curso optativo.

Al finalizar el curso, junto con el análisis retrospectivo, realizaremos una síntesis del análisis continuo; con base en las notas individuales y conjuntas de los investigadores, y las observaciones vertidas por las personas involucradas –participantes e investigadores– durante el desarrollo de las sesiones. Esto con la intención de atender el objetivo de diseño de este tipo de investigaciones: robustecer la fundamentación y diseño inicial de la intervención.

Análisis retrospectivo

El análisis retrospectivo, como dijimos, implica el reexamen de un corpus mayor de datos, ya sea de todo el experimento o de un subconjunto de datos que se consideran una unidad útil de análisis, con la intención de atender los objetivos de investigación trazados para el experimento de desarrollo del profesorado.

En nuestro caso, dada la configuración de nuestro objeto de estudio y la coordinación teórica planteada a propósito de este, realizamos un análisis compuesto inicialmente de dos partes: el análisis de la actividad matemática y el análisis de los saberes docentes del profesorado en formación inicial.

La primera de estas se centra en los registros recogidos durante la etapa 1 de nuestro curso optativo y pretende, mediante el estudio de la práctica matemática, evidenciar momentos de confrontación y resignificación de las nociones trigonométricas vividos por los participantes. Mientras que la segunda incluye todos los registros tomados durante el curso y pretende, a través del análisis de las acciones (decisiones, opiniones y explicaciones), identificar y describir los saberes que los/as participantes construyen y manifiestan a lo largo de todo este periodo.

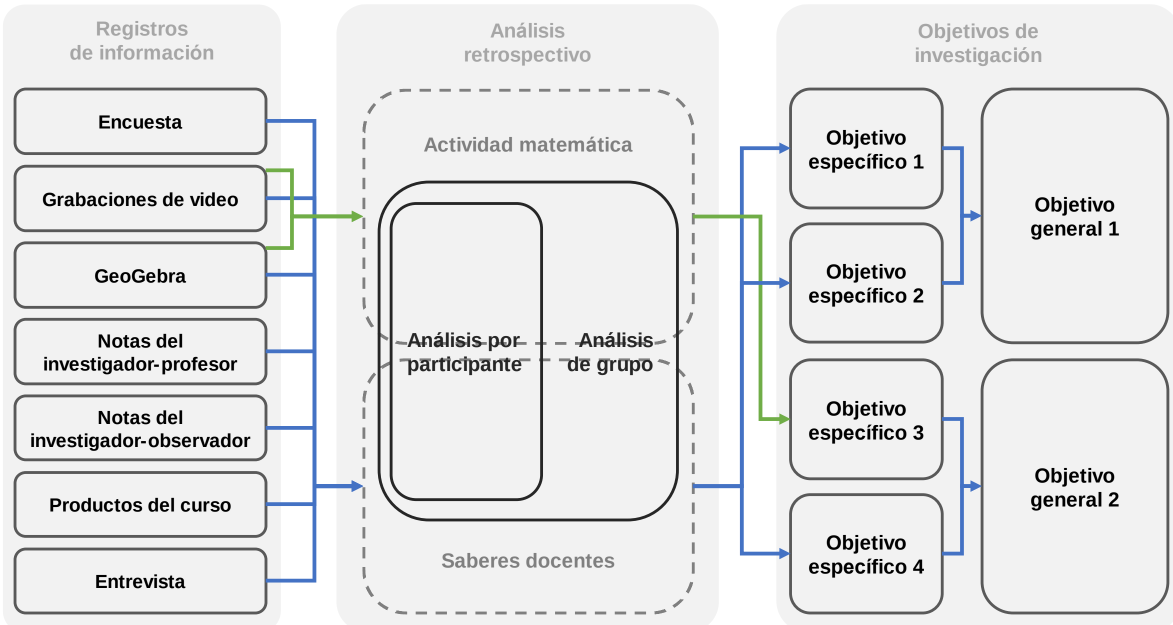
Además, retomando el énfasis en el desarrollo individual y colectivo sugerido por Cobb y colaboradores en la propuesta original, organizamos el análisis retrospectivo de nuestro experimento de desarrollo del profesorado en dos fases –consecutivas y complementarias–: el análisis por participante y el análisis de grupo.

Con su nombre indica, en el análisis por participante estudiaremos la actividad matemática y los saberes docentes construidos y manifestados por cada uno de los/as participantes del experimento. Mientras que en el análisis de grupo estableceremos vínculos, concordancias y particularidades de las lecturas individuales, con el afán de ofrecer un panorama robusto de los resultados, que permita atender nuestros objetivos de investigación.

En general, podemos diagramar la relación entre nuestros registros de información, las partes y fases del análisis retrospectivo, y los objetivos de investigación de la siguiente manera (Figura 18).

Figura 18

Diagrama general del análisis retrospectivo



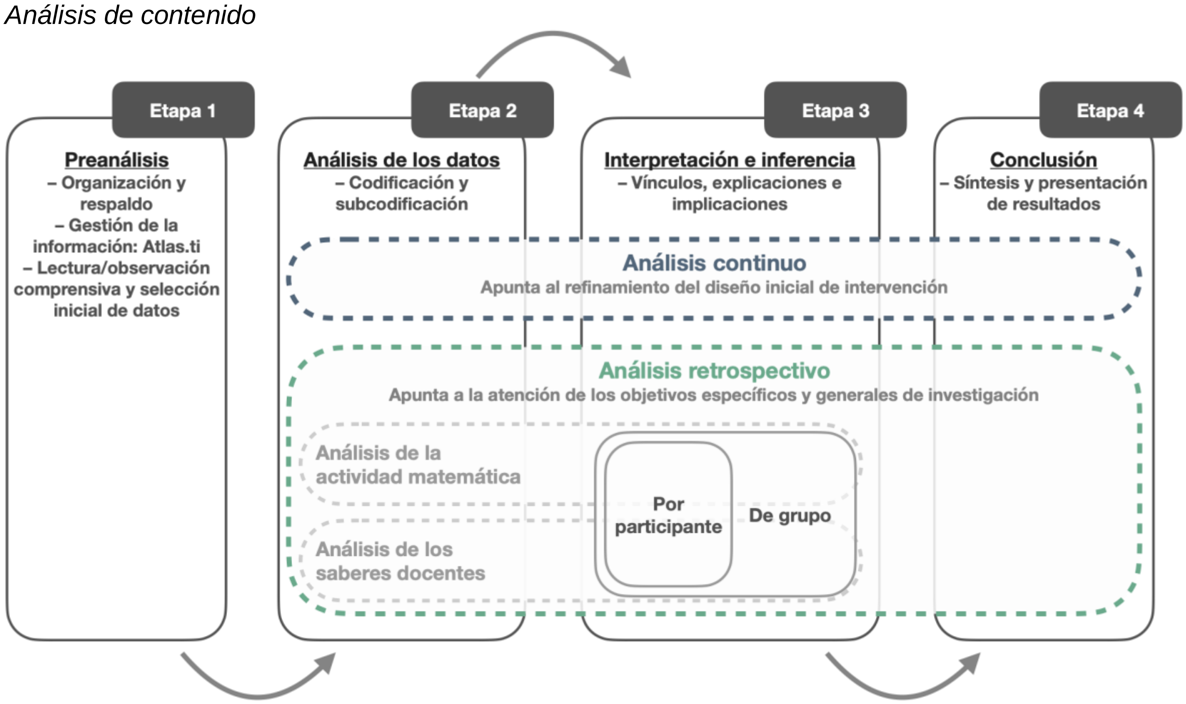
Realizaremos el análisis retrospectivo de nuestro experimento, así como la síntesis del análisis continuo, a través de un análisis de contenido. De forma amplia, en su vertiente netamente cualitativa, el *análisis de contenido* es “una aproximación empírica, de análisis metodológicamente controlado de textos [en cuanto comunicación humana] al interior de sus contextos de comunicación, siguiendo reglas analíticas de contenido y modelos paso a paso, sin cuantificación de por medio” (Mayring, 2000 en Cáceres, 2003, p. 56).

Entre las principales características de esta opción metodológica destacan la atención a los contextos de producción/recepción de las comunicaciones (Andréu, 2000); el establecimiento y, de ser necesario, constante ajuste de unidades de análisis, códigos y categorías; y la permanencia de los antecedentes, propósitos de análisis y posicionamiento teórico del estudio como referentes para las decisiones metodológicas del análisis (Mayring, 2015).

Dadas estas características, es usual que los estudios que requieren sintetizar e interpretar una amplia variedad y cantidad de fuentes de información, en el marco de un contexto específico de enseñanza, aprendizaje o práctica, hagan uso de esta estrategia de análisis. Tal es el caso de algunas investigaciones previas basadas en el diseño (v. g. Valverde, 2012), así como de estudios en profundidad acerca de los conocimientos del profesorado de matemáticas (v. g. Reyes y Sosa, 2019).

Como es natural en las herramientas metodológicas cualitativas, existen diversas maneras de estructurar el proceso de organización, síntesis e interpretación de la información que encierra el análisis de contenido. En nuestro caso, inspirados en el trabajo de Cáceres (2003) y de acuerdo con las partes y fases de análisis comentadas previamente, realizamos un análisis de contenido compuesto por cuatro etapas (Figura 19).

Figura 19
Análisis de contenido



El *preanálisis* es la etapa dedicada a la preparación organizacional y técnica de la información recolectada; en este sentido, como menciona Hernández (1994) “la gran tarea del pre-análisis radica en definir ‘el universo’ adecuado, sobre el cual aplicaremos la técnica” (como se citó en Cáceres, 2003, p. 60). En nuestro caso, durante esta primera etapa incluiremos la organización, respaldo y gestión de la información producida, así como la lectura/observación comprensiva de los registros tomados y la selección inicial de fragmentos de interés –las que, en términos del análisis de contenido, constituirán nuestras unidades de análisis–.

El *análisis de los datos* alude al estudio de los fragmentos organizados, seleccionados y procesados anteriormente, esto mediante la construcción y uso de códigos y subcódigos de información. Dicha construcción se rige por los antecedentes, los objetivos del análisis y el posicionamiento teórico del estudio. En nuestro caso, este proceso se diferenciará según síntesis del análisis continuo o análisis retrospectivo, dadas sus diferentes naturalezas y propósitos.

La *interpretación e inferencia*, tercera fase de nuestro análisis de contenido, apunta al establecimiento de causalidades, correspondencias, vínculos y explicaciones de y entre las categorías de información construidas previamente, en pro de atender los objetivos propuestos para el análisis. Mientras que la *conclusión* refiere al proceso de redacción y presentación de los resultados obtenidos.

4.2.3. Fase 3 – Intervención y análisis continuo

Como su nombre deja ver, la tercera fase de nuestro experimento de desarrollo del profesorado refiere a la puesta en práctica y registro exhaustivo de la intervención, así como a su análisis y modificación sesión por sesión. En este sentido, retomando los trabajos de Molina et al. (2011, p. 80) y Valverde (2012, pp. 211-212), incluimos en la fase de intervención y análisis continuo las siguientes actividades (Tabla 13).

Tabla 13
Actividades de la Fase 3 – Intervención y análisis continuo

Fase 3 – Intervención y análisis continuo
– Realizar una recolección exhaustiva de los registros de la sesión: las grabaciones de video, grabaciones de audio, notas de campo, hojas de trabajo, entre otras que se hayan predestinados para este fin. – Si es necesario, modificar –durante la sesión– el diseño de la intervención de acuerdo con los objetivos específicos de la sesión. Estos cambios deben ser justificados y reportados. – Analizar los registros de la sesión.

– Contrastar los resultados del análisis de la sesión con los objetivos e hipótesis previamente establecidos y, de ser necesario, replantear las hipótesis y modificar el diseño de intervención de las sesiones futuras.

Los elementos de esta fase son actividades por realizar durante la producción de datos en sí misma, en consecuencia, se describen en los capítulos siguientes.

4.2.4. Fase 4 – Análisis retrospectivo

Por último, la fase de análisis retrospectivo refiere al estudio final de los datos recogidos, y apunta atender los objetivos de la investigación y a construir explicaciones teóricas del desarrollo de los conocimientos del profesorado. Según Molina et al. (2011), para esta fase es fundamental: 1) distanciarse de los resultados del análisis continuo, de las hipótesis iniciales y de la justificación del diseño de la intervención, para profundizar en la comprensión de la situación de enseñanza y aprendizaje en su globalidad, y 2) identificar la ruta conceptual seguida por el grupo y por cada participante, a través de los cambios observables.

Con esto en mente, y considerando el trabajo de Valverde (2012, pp. 211-212), incluimos en la fase de análisis retrospectivo las siguientes actividades (Tabla 14).

Tabla 14
Actividades de la Fase 4 – Análisis retrospectivo

Fase 4 – Análisis retrospectivo
– Organizar la información recogida.
– Analizar los datos de forma conjunta.
– Dar respuesta, si es posible, a los objetivos del estudio.
– Elaborar un modelo que describa el desarrollo de los conocimientos de los/as profesores/as en formación inicial.
– Contrastar los resultados con los obtenidos en otros estudios.

Los elementos de esta fase son actividades por realizar después de la producción de datos, en consecuencia, se describen en los capítulos siguientes.

5.
Descripción y análisis

Un proceso interno necesita criterios externos.
— Ludwig Wittgenstein

En este capítulo describimos la ejecución y análisis del curso optativo que fungió como intervención en nuestro experimento de desarrollo del profesorado. Utilizamos para ellos dos secciones. En la primera narramos lo sucedido antes y durante la puesta en práctica del curso. Mientras que en la segunda detallamos los subsiguientes procesos de selección, organización y análisis de los datos.

5.1. Descripción de la intervención

Narramos la planificación y ejecución de nuestro curso optativo en cuatro apartados: la organización inicial y las personas involucradas –participantes e investigadores–, el desarrollo de las sesiones del curso, las entrevistas finales, y las reuniones del equipo de investigación destinadas al análisis continuo.

5.1.1. Sobre la organización inicial y las personas involucradas

Como mencionamos, uno de los principales retos que comprende la realización de un experimento de desarrollo del profesorado es la fusión de los roles de investigador y profesor. En nuestro caso, pese a que la motivación inicial del curso optativo es un proyecto de investigación, para su propuesta y funcionamiento requerimos construir y –en algunos casos– someter a revisión de las autoridades algunos productos y herramientas adicionales a las de investigación.

Así, en primera instancia, diseñamos y sometimos a revisión la descripción sintética de la modalidad de aprendizaje (Complemento 14[13]) y el sílabo, en los cuales se detalla, entre otras cosas, la descripción del curso; las fechas, duración, actividades y modalidad de las sesiones que lo componen; y la propuesta de evaluación de este. También construimos y validamos un volante informativo del curso (Complemento 15); el cual se difundió el 23 de febrero de 2021, a través del correo institucional y las redes sociales de la Facultad.

Además, para completar las herramientas docentes, construimos formatos para la evaluación docente (Complemento 16) y para la auto y coevaluación de las asignaciones por parte de los/as estudiantes (Complemento 17), así como una tabla que reúne y pondera las evaluaciones anteriores (Complemento 18); todo esto siguiendo los criterios y los pesos relativos descritos en la propuesta de evaluación presentada y consensuada a través del sílabo.

Posteriormente, el 3 y 5 de marzo 2021, se realizaron dos reuniones informativas abiertas a los/as profesores/as en formación inicial interesados/as. En estas se detallaron los objetivos –didácticos y de investigación– del curso, la cantidad de horas requeridas, la dinámica de trabajo y la propuesta de evaluación, y se atendieron las preguntas de quienes asistieron. Finalizado este proceso, tres

---

[13] Con el afán de ser concisos y de mantener abiertos los procesos y recursos de investigación, cargamos las herramientas docentes y documentos adicionales del curso en la base de datos que reúne los archivos complementarios del estudio: https://doi.org/10.7910/DVN/LTAVNQ

profesores/as en formación inicial se matricularon en el curso: Candy[14] y Santiago –del octavo/último semestre de la carrera–, y Mercedes –de quinto semestre–.

Previo al inicio de la intervención, también se invitó a ser parte del equipo de investigación –en calidad de investigador-observador– al M. C. Melvin Cruz Amaya; quien es profesor de matemáticas y estudiante del Doctorado en Ciencias especialidad en Matemática Educativa. Fueron determinantes para su elección algunas de sus características personales, su cercanía a las investigaciones previas del grupo –incluido el estudio histórico de partida–, su experiencia profesional como formador de docentes de matemáticas y su interés de investigación en este campo.

Como preparación para el curso optativo se presentó al M. C. Cruz Amaya el planteamiento de la investigación, el curso optativo diseñado, y las herramientas docentes e instrumentos de investigación construidos a causa de este. Además, se acordó que su rol como investigador-observador incluiría tomar notas respecto al desarrollo de cada sesión –según el formato construido para ello–, solicitar aclaraciones cuando considerara que una parte importante del trabajo de los/as participantes –en particular respecto a sus decisiones, explicaciones y opiniones– no quedara completamente clara, y formar parte de las reuniones de análisis continuo a realizarse después de cada una de las veinte sesiones del curso.

Estando listas las herramientas docentes y los instrumentos de investigación, y conformado el grupo de participantes y el equipo de investigación, se convocó a una reunión preliminar. Esta se realizó el 10 de marzo 2021 y su propósito fue la presentación personal de investigadores y participantes, así como convenir las fechas/horas para las sesiones y las dinámicas de comunicación del curso.

[14] Tanto en este escrito como en los documentos complementarios disponibles se utilizan los seudónimos elegidos por los/as participantes, con el afán de mantener su anonimato.

El 12 de marzo se envió a los/as profesores/as inscritos/as el formato de consentimiento informado (Complemento 19) y el sílabo final del curso (Complemento 20). En el primero los/as participantes declaran formar parte de manera voluntaria y dan su autorización para tomar registro documental, fotográfico y de video de las sesiones; mientras que el equipo de investigación se compromete a utilizar dichos registros exclusivamente con fines académicos. En el sílabo, por su parte, se explicita –como dijimos– el objetivo; la fechas, número de horas, actividades y modalidad de cada una de las 20 sesiones del curso; y la propuesta de evaluación consensuada para este.

5.1.2. Sobre el desarrollo de las sesiones

Organizamos la descripción general de lo sucedido en las sesiones del curso optativo de acuerdo con las cuatro etapas de este: introducción y experiencia de problematización, preparación, trayectoria hipotética de aprendizaje y clase.

Etapa 1: introducción y experiencia de problematización

La primera sesión del cuso se llevó a cabo el 15 de marzo, a las 11:00 (Ciudad de México), a través de una sesión de Zoom. Contó con la asistencia del investigador-profesor, el investigador-observador, los/as profesores/as en formación inicial participantes y la Dra. Gricelda Mendivil, entonces subdirectora de la Facultad de Pedagogía e Innovación Educativa (FPIE).

En esta sesión, después de la inauguración del curso por parte de la Dra. Mendivil, se atendieron dudas de los/as participantes respecto a la organización y dinámica del curso, las plataformas de trabajo –Google Classroom y Zoom–, y la asignación de las lecturas y la encuesta de partida.

Las sesiones dos y tres, por su parte, se realizaron el 16 y 19 de marzo, respectivamente, a las 10:00 (Ciudad de México), a través de sesiones de Zoom. A estas asistieron solamente –como sería en el resto de las sesiones de grupo– el investigador-profesor, el investigador-observador y los/as profesores/as participantes.

Durante la sesión dos el investigador-profesor explicó el objetivo de la experiencia de problematización a desarrollar, introdujo los grupos GeoGebra, hizo algunas advertencias sobre las actividades y la dinámica de trabajo –las tareas no son ‘típicamente’ escolares, no tienen un rol evaluativo, la posibilidad de usar libremente materiales concretos y digitales para resolverlas, y el trabajar primero de forma individual y después conjunta–, y presentó la situación-problema. En esta sesión los/as participantes realizaron el trabajo individual y la discusión plenaria de las actividades uno y dos de la situación de aprendizaje.

En la sesión tres el investigador-profesor reiteró los objetivos, advertencias y dinámica de trabajo comunicados en la reunión previa. Durante esta sesión los/as participantes llevaron a cabo el trabajo individual y la discusión plenaria de las tres actividades restantes de la situación de aprendizaje, así como la discusión matemática general, que concluyó con una reflexión matemática del investigador-profesor.

Una decisión importante tomada durante esta primera etapa fue el agregar, al inicio de la sesión cuatro, una pequeña sección de transparentación de la situación de aprendizaje utilizada –en el sentido expresado en la metodología original de trabajo–. Esto ante la observación del equipo de investigación, corroborada por una solicitud expresa de un participante, de que se requería un cierre más amplio y explicativo de las tareas matemáticas trabajadas.

Etapa 2: preparación

Las sesiones cuatro y cinco, diseñadas para la preparación teórico-metodológica, se realizaron el 23 y 26 de marzo, respectivamente, a las 10:00 (Ciudad de México), a través de la plataforma acordada. En la sesión cuatro se realizó la transparentación añadida, esto es, se mostraron los resultados de investigación que subyacen al diseño de la situación de aprendizaje, y se atendieron las preguntas y comentarios de los/as profesores/as en formación inicial al respecto. También se discutió la lectura 1 del curso (Complemento 21), partiendo con los comentarios y preguntas de los participantes, seguida de una síntesis preparada por el investigador-profesor.

Durante la sesión cinco se discutió la lectura 2 (Complemento 22), siguiendo la misma dinámica: comenzando con los comentarios y preguntas de los/as profesores/as en formación inicial, y con una presentación de cierre a cargo del investigador-profesor. Hacia el final de esta sesión se asignaron los tópicos matemáticos sobre los que diseñarían los/as participantes y los tres referentes de investigación –Montiel (2013), Montiel y Jácome (2014), y Montiel y Scholz (2021)– que serían la base para las sesiones restantes de esta etapa.

Una de las decisiones importantes que se tomaron en esta primera parte de la etapa de preparación fue que, dada la cantidad de participantes inscritos/as al curso, estos/as diseñarían, implementarían y analizarían sus clases de forma individual –y no en grupos de dos o tres personas, como se había previsto inicialmente–. Además, se asignaron como tópicos matemáticos las razones trigonométricas –a Mercedes la razón seno, a Candy la razón coseno, y a Santiago la razón tangente–, esto con la intención de que trabajaran sobre objetos matemáticos diferentes, pero suficientemente cercanos como para poder discutir sus avances y dudas en el transcurso de las siguientes etapas.

Las sesiones seis, siete y ocho del curso, diseñadas para la preparación matemática y didáctico-pedagógica, se llevaron a cabo el 6, 9 y 13 de abril, respectivamente, a las 11:00 (Ciudad de México) –que sería en adelante el horario regular–. Las primeras dos fueron sesiones individuales de 40 minutos por participante, en ellas se atendieron dudas de los/as profesores/as en formación inicial acerca de los formatos y dinámicas de trabajo, así como sus avances y comentarios respecto a las lecturas –de referentes de investigación, libros de texto, planes y programas de estudio, y otras fuentes– y las observaciones que habían realizado sobre estos documentos.

Durante la sesión ocho, por su parte, diseñada como una sesión de todo el grupo, los/as participantes presentaron sus avances en el análisis matemático, didáctico-pedagógico y de referentes de investigación –primera asignación del curso– y recibieron retroalimentación por parte del resto de personas involucradas. Hacia el final de la sesión el investigador-profesor repasó la propuesta de evaluación del curso, las actividades de la semana siguiente y asignó el segundo producto del curso, el objetivo de aprendizaje.

Etapa 3: trayectoria hipotética de aprendizaje

Las sesiones nueve y diez, planeadas para la construcción del objetivo de la trayectoria hipotética de aprendizaje, se realizaron el 16 y 20 de abril, respectivamente, en el horario y a través de la plataforma habitual. En la sesión nueve, diseñada como una sesión individual, los/as participantes comentaron sus avances y dudas respecto a la construcción del objetivo de aprendizaje. Mientras que en la sesión diez, una sesión de grupo, los/as profesores/as presentaron sus avances en dicha asignación y recibieron retroalimentación por parte del resto de personas involucradas.

Las sesiones once, doce y trece, diseñadas para la construcción del proceso hipotético y las actividades asociales –elementos restantes de la trayectoria hipotética de aprendizaje–, se llevaron a cabo el 27 y 30 de abril, y 4 de mayo, respectivamente, en el horario y plataforma usual. Estas tuvieron dinámicas similares a las sesiones individuales y de grupo anteriores: en las primeras dos se comentaron los avances y dudas de cada uno de los/as participantes, mientras que en la última cada profesor/a en formación inicial presentó y discutió sus progresos con el resto del grupo.

Etapa 4: clase

Las sesiones catorce, quince y dieciséis, dedicadas a la planificación de la clase, se realizaron el 7, 10 y 14 de mayo, respectivamente, a través de la plataforma y en el horario habitual. Las primeras dos siguieron la dinámica de las sesiones individuales anteriores: presentación de avances y dudas por parte de los/as profesores/as en formación inicial, y preguntas y comentarios por parte de los investigadores. La sesión dieciséis siguió la dinámica usual para las sesiones de grupo: presentaciones de cada uno de los/as participantes y cometarios del resto de personas involucradas.

Entre las decisiones relevantes es esta primera parte de la etapa se encuentran: aumentar –de cuarenta minutos a una hora– la duración las sesiones individuales, y acordar los grupos y tiempos en los que se implementarían las clases. Así, se determinó que, dadas las circunstancias de salud pública e institucionales, todas las implementaciones serían clases simuladas, desarrolladas con otros/as profesores/as en formación inicial de séptimo u octavo semestre –penúltimo y último semestre– de la misma Licenciatura en Docencia de la Matemática[15]. También se acordó que estas se llevarían a cabo en modalidad en línea, con a lo sumo diez estudiantes universitarios por clase, y con una duración de cuarenta y cinco minutos –antecedidos por cinco minutos de introducción y seguidos por diez minutos de cierre, ambos dirigidos por el investigador-profesor–.

Además, los/as profesores/as en formación inicial participantes acordaron implementar sus clases simuladas siguiendo el orden: Candy, Santiago y Mercedes, y hacerlo con grupos de estudiantes universitarios de octavo, séptimo y séptimo semestre, respectivamente.

La sesión diecisiete, útil para la implementación de las clases, se compuso de cuatro reuniones: tres clases simuladas y una de cierre. Estas se llevaron a cabo el 18, 19, 20 y 21 de mayo, a las 20:30, 15:00, 11:00 y 11:00 (Ciudad de México), respectivamente. Todas a través de la plataforma Zoom. Las clases simuladas

---

[15] Para evitar confusiones, en el resto de este escrito y en los documentos complementarios que forman parte del estudio, a los/as profesores/as en formación inicial que fungen como estudiantes de las clases simuladas se les denomina “estudiantes universitarios/as”.

contaron con la asistencia adicional de la Dra. Mendivil –subdirectora de la FPIE– y de los respectivos grupos de estudiantes universitarios.

Las implementaciones tuvieron una dinámica similar entre sí: la Dra. Mendivil dio la bienvenida a la actividad; luego el investigador-profesor detalló la dinámica de la sesión y agradeció la participación voluntaria de estudiantes universitarios; se desarrolló la clase simulada; los/as estudiantes universitarios y la Dra. Mendivil realizaron preguntas y comentarios sobre la clase; y, por último, los investigadores y el/la participante permanecieron en la sesión para compartir de forma privada sus primeras impresiones sobre la implementación.

La reunión de cierre, por su parte, tuvo una dinámica similar a una sesión de grupo, en ella los/as participantes comentaron la implementación de su clase y sus sensaciones al respecto, mientras que el resto de las personas involucradas exteriorizaron sus observaciones y consultas. Por último, el investigador-profesor repasó la entrega y evaluación de productos, y comentó el proceso de análisis de la clase, última parte y asignación del curso.

Las sesiones dieciocho, diecinueve y veinte del curso, diseñadas para el análisis de la clase simulada, se realizaron el 24 y 28 de mayo, y 1 de junio, respectivamente, en el horario y a través de la plataforma acordada. Estas tuvieron dinámicas similares a las sesiones individuales y de grupo anteriores, en las primeras dos se discutieron individualmente los avances y dudas acerca de la asignación, mientras que en la última cada profesor/a en formación inicial presentó y discutió sus progresos con el resto de personas involucradas. Hacia el fin de la sesión veinte el investigador-profesor repasó las fechas y procesos finales de evaluación, y abrió un espacio para que los/as participantes y el investigador-observador dieran sus impresiones del desarrollo general del curso.

5.1.3. Sobre las entrevistas

Posterior a la sesión veinte del curso optativo y de la entrega de calificaciones y certificados de participación, se invitó a los/as profesores/as en formación inicial participantes a ceder una entrevista individual semiestructurada. Las preguntas iniciales de la entrevista pretendían recolectar información adicional acerca de la experiencia de cada uno de los participantes, en particular, su opinión sobre el diseño y ejecución del curso –útil para la síntesis del análisis continuo a realizar–.

Los/as participantes accedieron a realizar la entrevista. Estas se programaron como reuniones individuales vía Zoom, a las que asistieron únicamente el investigador-profesor y el/la participante. Tuvieron una duración aproximada de una hora cada una, y se llevaron a cabo el 7 de junio, a 12:00, 13:00 y 14:00 (Ciudad de México), con Mercedes, Santiago y Candy, respectivamente.

5.1.4. Sobre el análisis continuo

Como dijimos, el análisis continuo en los experimentos de desarrollo del profesorado se realiza tras cada sesión de trabajo y pretende ser la base para las intervenciones espontaneas y planificadas con quienes participan, interacciones útiles para recopilar información adicional, probar hipótesis y promover mayor desarrollo de los conocimientos de los/as participantes (Simon, 2000).

Siguiendo nuestro plan inicial para el análisis tras cada sesión (Figura 17), el investigador-profesor y el investigador-observador se reunieron el mismo día o, en casos excepcionales, uno o dos días después de cada una de las veinte sesiones del curso. En dichas reuniones, también siguiendo el plan inicial, discutieron sus observaciones e interpretaciones generales de lo sucedido; compartieron las notas tomadas individualmente durante la sesión; revisaron, cuando fue necesario, algunos momentos de la grabación en video u otros registros de información; y plantearon –en una nota conjunta– observaciones y decisiones respecto al diseño inicial y las sesiones siguientes.

Estas notas individuales y conjuntas, junto con las opiniones vertidas por los/as participantes en el transcurso de las sesiones y en las entrevistas finales, son la base para la síntesis del análisis continuo que realizamos. Dicha síntesis es, como advertimos antes, nuestra estrategia para cumplir el objetivo de diseño de este tipo de investigación: producir una versión refinada y más robusta del curso optativo inicial.

5.2. Selección y análisis de los datos producidos

Describimos los procesos de selección, organización, síntesis e interpretación de los datos según las etapas del análisis de contenido utilizado, así como las partes y fases en las que configuramos este.

5.2.1. Etapa 1: preanálisis de datos

Como mencionamos en el capítulo anterior, el preanálisis tiene el objetivo de preparar –organizacional y técnicamente– la información recolectada, de "definir 'el universo' adecuado, sobre el cual aplicaremos la técnica" (Hernández, 1994, como se citó en Cáceres, 2003, p. 60). En consecuencia, en esta primera etapa incluimos tres tareas principales: la organización y respaldo de la información, gestión de la información a través de Atlas.ti, y la lectura/observación comprensiva y selección inicial de fragmentos de texto/video de interés.

Organización y respaldo

Como dijimos, de nuestro curso optativo pretendíamos recolectar siete tipos de registros de información: encuestas, grabaciones de las sesiones, grupos GeoGebra, notas del investigador-observador, notas del investigador-profesor, producto del curso, y entrevistas.

Cada registro de información requirió tratamientos particulares. Por ejemplo, exportamos las encuestas de los/as participantes (v. g. Complemento 23[16]), los productos del curso (v. g. Complemento 24), y las notas individuales y conjuntas de

[16] Con el afán de ser concisos y de mantener abiertos los procesos y recursos de investigación, cargamos algunos extractos anonimizados de los documentos primarios en la base de datos que reúne los archivos complementarios del estudio: https://doi.org/10.7910/DVN/LTAVNQ

los investigadores (v. g. Complemento 25) como documentos en formato portátil (PDF) –con la intención de tener un registro estable de esta información de tipo texto–. Elaboramos también archivos PDF del trabajo de los/as participantes durante la experiencia de problematización, estos reúnen las respuestas ingresadas a través del grupo GeoGebra, así como trazos, tablas, operaciones y demás realizadas en lápiz y papel (v. g. Complemento 26). Por último, editamos las sesiones y las entrevistas registradas en video –recortando los tiempos muertos y agregando una portada a cada uno de ellos– y las exportamos en archivos MP4 (v. g. Complemento 27).

Así, fruto de nuestra intervención, recolectamos y reelaboramos 108 archivos (Tabla 15), 64 en formato PDF y 44 en formato MP4.

Tabla 15
Cantidad y tamaño aproximado de los archivos reelaborados

Registro de información	Cantidad (formato)	Dimensión aproximada
Encuestas	3 (PDF)	30 páginas
Resolución de experiencia de problematización	3 (PDF)	21 páginas
Notas de investigadores	40 (PDF)	135 páginas
Productos del curso	15 (PDF)	199 páginas
Sesiones del curso	41 (MP4)	45 horas
Entrevistas	3 (MP4)	3 horas

Esta cantidad y variedad de información es un reflejo de, como advierten nuestros referentes metodológicos –v. g. Molina et al., 2011; Simon, 2000; Valverde, 2012–, el reto que constituye la producción, organización y gestión de la información en este tipo de investigaciones.

Posteriormente, organizamos los archivos reelaborados en subcarpetas, según el tipo de registro –en el caso de las encuestas, entrevistas y los productos–, o la etapa y sesión del curso a la que corresponden –en el caso de los videos de las sesiones, las notas y demás–. Por último, realizamos diversos respaldos de la carpeta general, en la nube y en dispositivos físicos.

Es importante subrayar que, fruto de la planificación y sistematicidad del proceso de producción, reelaboración y respaldo de la información, no se perdió ningún archivo o registro de información deseado; contamos con todos los registros previstos para nuestros análisis, todos ellos en una calidad técnica adecuada.

Gestión de la información a través de Atlas.ti

Considerando la gran cantidad de información producida durante las investigaciones de diseño, en general, y de los experimentos de desarrollo del profesorado, en particular, es usual que la gestión y el análisis de los datos en este tipo de estudios se soporte en programas informáticos. Algunos de los más conocidos y utilizados son Atlas.ti, NVivo y MAXQDA2 (Sabariego-Puig et al., 2014).

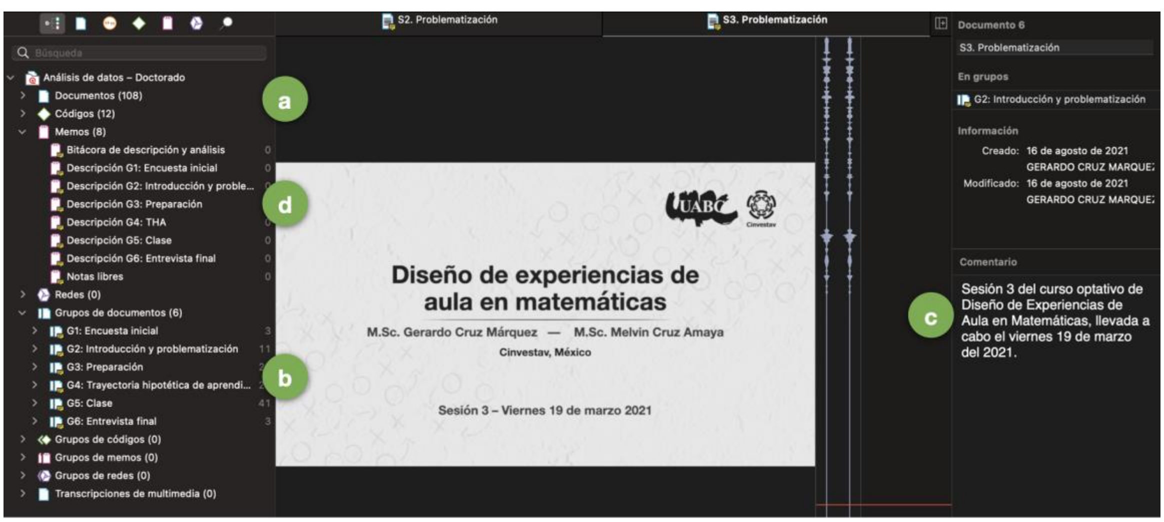
Las funciones principales que estos programas desempeñan en los procesos de investigación cualitativa son: gestionar grandes volúmenes de datos; almacenar de forma organizada la información elaborada durante el análisis; segmentar, codificar y recuperar fragmentos significativos de material empírico; elaborar anotaciones del proceso y los resultados del análisis; y visualizar relaciones complejas entre datos, categorías y códigos (Muñoz-Justicia y Sahagún-Padilla, 2017).

En este sentido, es importante advertir que si bien los programas para el análisis cualitativo nos asisten en aspectos operativos cruciales –que pueden favorecer una aproximación sistemática, rigurosa, minuciosa y creativa a los datos–, no sustituyen ni desplazan el rol de las preguntas y los elementos teóricos de la investigación al momento de interpretar y dar sentido a los datos. “Es aquí en donde el software para análisis cualitativo encuentra su razón de ser. No es que el software analice […] sino que ofrece apoyo en la parte operativa del análisis” (Muñoz-Justicia y Sahagún-Padilla, 2017, p. 4).

En nuestro caso, decidimos hacer uso del programa Atlas.ti en su versión 9.1.3. Los cinco principales componentes de este programa son las unidades hermenéuticas, los documentos primarios, las citas, los códigos y los memos. Las *unidades hermenéuticas* son los archivos básicos del programa, en ellos se contiene toda la información cargada y producida en el transcurso del análisis. Los *documentos primarios* son los archivos que sirven como base para el análisis, pueden ser archivos de texto, audio, video y otros. Las *citas* son fragmentos significativos de los documentos primarios, representan una selección inicial de los datos. Los *códigos*, por su parte, son usualmente conceptualizaciones que reúnen un conjunto de citas, representan –en este sentido– la unidad básica de análisis del programa. Por último, los *memos*, son anotaciones útiles para diferentes propósitos, por ejemplo, describir el proceso de análisis, o esbozar las relaciones o hipótesis que van surgiendo en el transcurso de este.

Así, comenzamos nuestro trabajo con Atlas.ti creando una unidad hermenéutica que contuviera todo nuestro ejercicio de análisis. Cargamos en ella nuestros documentos primarios, los 108 archivos reelaborados (Figura 20a). Luego, organizamos estos en seis grupos de documentos (Figura 20b), según la etapa del curso optativo a la que correspondían, o si eran encuestas o entrevistas; y agregamos a cada uno de ellos un comentario descriptivo (Figura 20c).

Figura 20
Interfaz de la unidad hermenéutica creada a causa del análisis



Por último, siguiendo las recomendaciones de la bibliografía al respecto (v. g. Muñoz-Rojas, 2016; Muñoz-Justicia y Sahagún-Padilla, 2017), creamos ocho memos (Figura 20d): uno de bitácora de la descripción y análisis, útil para ir dejando un registro de las decisiones y avances del proceso; uno dedicado a las descripciones y las observaciones de cada uno de los seis grupos de documentos construidos previamente; y uno de notas libres, destinado a las observaciones e hipótesis generales que emergen en el desarrollo del análisis.

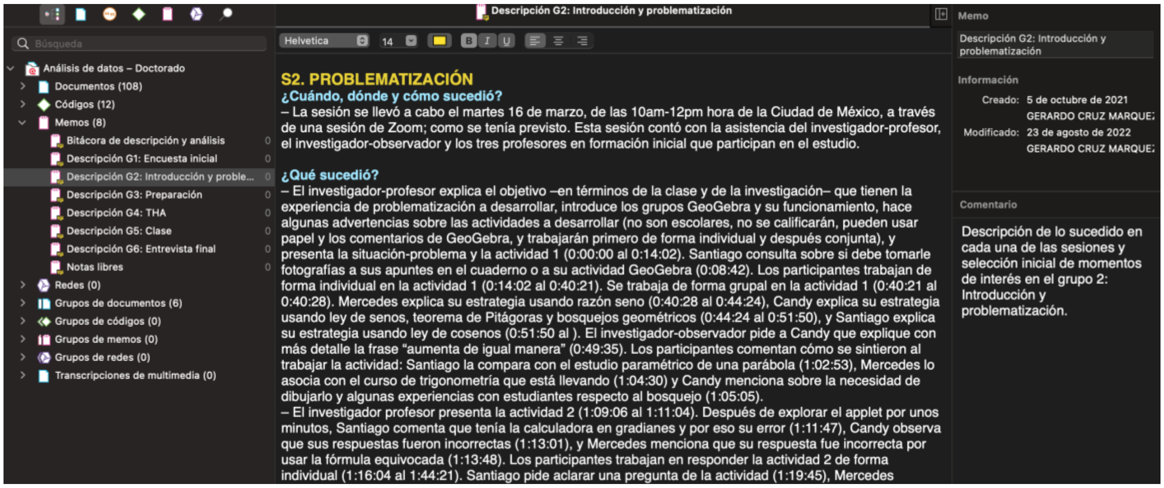
Lectura/observación comprensiva y selección inicial

Para finalizar la etapa de preanálisis, realizamos reiteradas lecturas/observaciones de los documentos primarios del estudio, seleccionamos fragmentos que pudieran ser de interés para nuestro trabajo –a través de las citas de Atlas.ti–, realizamos notas descriptivas de las sesiones en los memos destinados a ello, y comenzamos a organizar las citas mediante códigos.

Más específicamente, realizamos tres rondas de lectura/observación de los documentos primarios; como es natural, en cada una de ellas se llevaron a cabo tareas simultaneas, y se refinaron progresivamente los criterios para la citación y codificación de momentos de interés en los documentos y videos.

De forma muy sintética, durante la primera ronda –llevada a cabo de septiembre 2021 a febrero 2022– construimos memos que reunían descripciones generales de cada una se las veinte sesiones del curso optativo (Figura 21).

Figura 21
Ejemplo de la descripción por sesión en memos – sesión 2



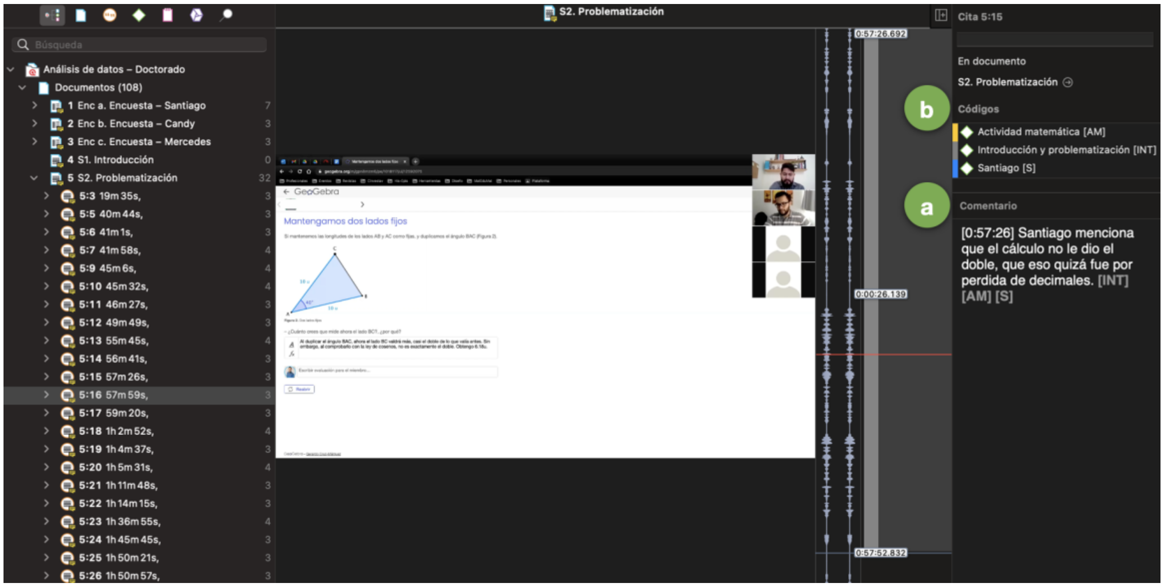
Además, dados los objetivos de diseño e investigación de nuestro análisis, durante esa primera lectura/observación citamos tres tipos de fragmentos de interés: 1) los que contenían comentarios de las personas involucradas sobre la planificación y ejecución del curso; 2) los relativos a la actividad matemática de los/as profesores/as en formación inicial al abordar la situación de problematización de la trigonometría escolar; y 3) los que referían a decisiones, explicaciones u opiniones de los/as participantes respecto a su práctica.

5.2.2. Etapa 2: análisis de los datos

En la segunda ronda de lectura/observación de los documentos primarios –realizada de febrero a mayo 2022– procuramos refinar y homogeneizar las citas construidas en la etapa anterior; anonimizamos los documentos, comentarios y memos de la unidad hermenéutica; agregamos comentarios descriptivos a las citas creadas (Figura 22a); y empleamos los primeros códigos para organizar el contenido de los tres tipos de fragmentos de interés citados hasta el momento (Figura 22b).

Figura 22

Ejemplo de la selección inicial de momentos de interés en citas – cita 5:15



Por último, en la tercera y última ronda de lectura/observación completa de los documentos primarios –llevada a cabo en agosto y septiembre 2022– concluimos la citación de momentos de interés, y construimos la primera versión del libro de códigos, que enlista y define los códigos usados hasta el momento, según el tipo de análisis.

Síntesis del análisis continuo

Para la síntesis del análisis continuo, partiendo de las secciones utilizadas en el capítulo anterior para describir el diseño inicial del curso, los elementos fundamentales de la didáctica y las reiteradas lecturas/observaciones de los documentos primarios, organizamos las citas pertenecientes al primer tipo de momentos de interés aludido. Construimos para ello cinco códigos no mutuamente excluyentes –un mismo momento de interés/cita puede estar asociada a más de un código del mismo tipo–; luego, a través del estudio de cada una de estas cinco grandes categorías de información, creamos 18 subcódigos no mutuamente excluyentes (Tabla 16). La definición y los ejemplos de estos subcódigos se exponen en la primera sección de nuestro libro de códigos (Complemento 28[17]).

Tabla 16
Códigos iniciales para la síntesis del análisis continuo

Código	Siglas	Definición	Subcódigos asociados
Interacción y ambiente	[IA]	Útil para señalar las observaciones de los involucrados respecto a la interacción entre las personas implicadas en el curso y el ambiente construido en este.	IA: Ambiente general IA: Entre participantes IA: Entre participantes e investigadores IA: Entre profesores en formación inicial
Metodología y técnicas de enseñanza	[MT]	Útil para designar los cambios realizados y observaciones de los involucrados con relación a la metodología de enseñanza planificada y las técnicas de enseñanza puestas en juego por los investigadores.	MT: Metodología de enseñanza MT: Técnicas y estrategias específicas
Modalidad	[MO]	Útil para señalar los cambios implementados y las observaciones de los involucrados relacionados con los recursos utilizados y dinámicas construidas asociadas a la modalidad del curso.	MO: Conexión a internet MO: Dinámica e interacción en línea MO: Manejo de recursos digitales
Organización de las sesiones	[OS]	Útil para indicar los cambios realizados y observaciones de los involucrados acerca de los objetivos, contenidos, recursos, tiempos y actividades planificadas para las sesiones del curso.	OS: Actividades OS: Contenidos OS: Objetivos OS: Recursos y materiales OS: Tiempos
Personas involucradas	[PI]	Útil para indicar los cambios realizados y observaciones de los involucrados acerca del rol de las diversas personas implicadas en el curso: participantes, investigadores, personal administrativo y otros.	PI: Autoridades universitarias PI: Estudiantes de clases simuladas PI: Investigador-observador PI: Participantes

17 Con el afán de ser concisos y de mantener abiertos los procesos y recursos de investigación, cargamos las herramientas y documentos producidos durante el análisis en la base de datos que reúne los archivos complementarios del estudio: https://doi.org/10.7910/DVN/LTAVNQ

Es importante explicitar que estos códigos y subcódigos, sus nombres, definiciones y ejemplos, son el producto final de un proceso deductivo e inductivo. Así, por ejemplo, algunos códigos, como el de organización de las sesiones y sus subcódigos asociados, los retomamos principalmente del diseño inicial del curso optativo; mientras que otros, como modalidad y sus subcódigos, los construimos a partir de las lecturas/observaciones sucesivas de la información recolectada.

Análisis retrospectivo

Con base en nuestros intereses, así como en las etapas y tipos de análisis a llevar a cabo, para nuestro análisis retrospectivo creamos inicialmente cuatro grupos de códigos: generales, de participante, de actividad, y de etapa del curso o grupo de documento. El primer grupo es útil para organizar las citas pertenecientes a los dos últimos tipos de momentos de interés mencionados, y está compuesto por dos códigos no mutuamente excluyentes (Tabla 17).

Tabla 17
Códigos generales para el análisis retrospectivo

Código	Siglas	Definición
Actividad matemática	[AM]	Útil para indicar los momentos de interés que permiten describir la actividad matemática de los profesores en formación inicial participantes al atender la experiencia de problematización diseñada.
Saberes docentes	[SD]	Útil para designar los momentos de interés que contengan acciones –decisiones, explicaciones y opiniones– de los profesores en formación inicial que refieran a sus saberes docentes, así como los conocimientos en los que se fundamentan, las voces sociales de los cuales provienen o los propósitos docentes que guían dichos saberes.

El segundo grupo de códigos es útil para indicar los/as profesores/as en formación inicial involucrados/as en un momento de interés específico (Tabla 18). En este sentido, otorga detalle y permite la lectura individual de las citas –fundamental para el análisis retrospectivo por participante–.

Tabla 18
Códigos de participante para el análisis retrospectivo

Código	Siglas	Definición
Candy	[C]	Útil para indicar los momentos de interés en los que Candy está involucrada.
Mercedes	[M]	Útil para señalar los momentos de interés en los que Mercedes está involucrada.
Santiago	[S]	Útil para designar los momentos de interés en los que Santiago está involucrado.

Por su caracterización, los códigos de este grupo tampoco son mutuamente excluyentes, esto es, en un mismo momento de interés puede haber varios códigos que refieran a participantes involucrados.

El tercer grupo de código creado tiene el propósito de indicar el número de la actividad de la situación de aprendizaje a la que refiere una cita (Tabla 19). En este sentido, otorga temporalidad a los momentos de interés útiles para el análisis de la actividad matemática de los/as profesores/as en formación inicial participantes.

Tabla 19
Códigos de actividad de la situación de aprendizaje para el análisis de la actividad matemática

Código	Siglas	Definición
Actividad 1	[Act 1]	Útil para señalar los momentos de interés situados durante la resolución de la actividad 1 de la situación de aprendizaje diseñada para la experiencia de problematización.
Actividad 2	[Act 2]	Útil para indicar momentos de interés sucedidos durante la resolución de la actividad 2 de la situación de aprendizaje diseñada para la experiencia de problematización.
Actividad 3	[Act 3]	Útil para designar momentos de interés sucedidos durante la resolución de la actividad 3 de la situación de aprendizaje diseñada para la experiencia de problematización.
Actividad 4	[Act 4]	Útil para señalar momentos de interés sucedidos durante la resolución de la actividad 4 de la situación de aprendizaje diseñada para la experiencia de problematización.

Actividad 5	[Act 5]	Útil para designar momentos de interés situados durante la resolución de la actividad 5 de la situación de aprendizaje diseñada para la experiencia de problematización.

El último grupo de códigos construido *a priori* en el análisis retrospectivo es útil para señalar la etapa del curso optativo o grupo de documentos en el que se encuentra una cita (Tabla 20). En este sentido, otorga temporalidad a los momentos de interés útiles para el análisis de los saberes docentes.

Tabla 20
Códigos de etapa del curso o grupo de documentos para el análisis de los saberes docentes

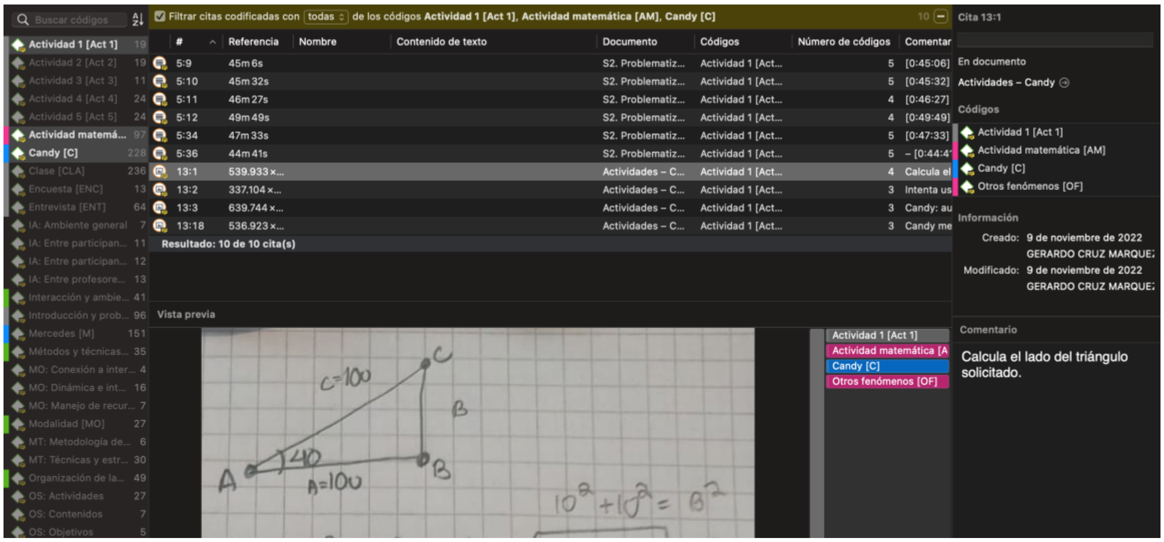
Código	Siglas	Definición
Encuesta	[ENC]	Útil para señalar los momentos de interés situados en el primer grupo de documentos primarios, las encuestas iniciales del curso.
Introducción y problematización	[INT]	Útil para indicar momentos de interés sucedidos durante la primera etapa del curso.
Preparación	[PRE]	Útil para designar momentos de interés sucedidos durante la etapa de preparación del curso.
Trayectoria hipotética de aprendizaje	[THA]	Útil para señalar momentos de interés sucedidos durante la tercera etapa del curso, la construcción de la trayectoria hipotética de aprendizaje.
Clase	[CLA]	Útil para indicar momentos de interés sucedidos durante la cuarta y última etapa del curso, la clase.
Entrevista	[ENT]	Útil para designar momentos de interés situados en el último grupo de documentos primarios, las entrevistas finales a los participantes.

A diferencia de los primeros, estos dos últimos grupos de códigos son imprescindibles y mutuamente excluyentes, es decir, un momento de interés debe estar ubicado en un y solo un grupo de documentos/etapa del curso o actividad de la situación de aprendizaje.

Análisis de la actividad matemática

Para la organización y análisis de las citas respecto a la actividad matemática de los/as participantes no necesitamos crear más códigos y subcódigos, pues la filtración utilizando el código general actividad matemática [AM], más el código del participante y el número de la actividad de la situación de aprendizaje en cuestión nos permitían concentrar todos los momentos de interés –fragmentos de video, texto o imágenes– útiles (Figura 23).

Figura 23
Ejemplo de la filtración de citas para el análisis de la actividad matemática: Actividad matemática [AM], Actividad 1 [Act 1], Candy [C]



Como adelantamos, para el análisis de la actividad matemática de los/as participantes utilizamos la progresión pragmática del modelo de anidación de prácticas propuesto al interior de la teoría socioepistemológica, en especial, sus primeros dos niveles –el de *acción* y *actividad*–, útiles para describir el uso de las nociones matemáticas que hacen los sujetos ante una situación matemática concreta, a partir del dato observable.

Para identificar las *acciones* –en cuanto interacciones objetivas e intencionadas del sujeto ante el medio– de los/as participantes utilizamos las preguntas *¿qué hace?* y *¿cómo lo hace?* Estas cuestiones son indicadores usuales al realizar este tipo de análisis (v. g. Cruz-Márquez y Montiel-Espinosa, en prensa-b) y en su conjunto permiten identificar –en la evidencia empírica recolectada– el comportamiento físico, verbal o mental del sujeto ante una tarea matemática concreta, así como las nociones y procedimientos matemáticos usados, las herramientas materiales y simbólicas puestas en juego, y el contexto en el cual se manifiesta dicho comportamiento. Mientras que, con el afán de comprender el propósito de la organización/secuenciación de estas acciones matemáticas contextualizadas en *actividades*, utilizamos la pregunta *¿para qué lo hace?*

Análisis de los saberes docentes

A diferencia del caso anterior, para la organización y análisis de las citas asociadas a los saberes docentes de los/as profesores/as en formación inicial participantes sí requerimos de nuevos códigos y subcódigos (Tabla 21). Para su construcción partimos de la caracterización teórica de los saberes docentes –del uso de las acciones como base para la identificación de propósitos, saberes y voces sociales–, más algunos códigos y los subcódigos emergentes de las lecturas/observaciones comprensivas de los datos; al igual que antes, la definición y ejemplos de los subcódigos se exponen en nuestro libro de códigos (Complemento 28).

Tabla 21
Subcódigos para el análisis de los saberes docentes

Código	Siglas	Definición	Subcódigos asociados
Saber docente	[SD]	Útil para designar las acciones de los participantes en las que se evidencien conocimientos efectivos específicos.	
Propósito	[PR]	Útil para señalar las referencias que los participantes hagan a los propósitos que guían su actuar en las etapas, sesiones o actividades del curso.	
Voz social	[VS]	Útil para indicar las referencias a procedencias de los saberes de los profesores, así como al diálogo de estas.	VS: Actividad del curso VS: Condición material VS: Equipo de investigación VS: Estudiante VS: Experiencia docente VS: Experiencia estudiantil VS: Experiencia personal VS: Internet VS: Libro de texto VS: Modalidad VS: Otro docente VS: Otro participante

			VS: Producto de investigación VS: Programa de estudio
Asociación	[AS]	Útil para designar las referencias y reinterpretaciones que hacen los participantes a experiencias previas, en alusión a las actividades del curso. No constituyen un saber docente como tal en cuanto no se explicita de qué manera dichas experiencias inciden en su acción.	
Contexto	[CO]	Útil para señalar las referencias a partes significativas del contexto –general o específico– de la práctica de los profesores en formación inicial.	
Improvisación	[IM]	Útil para indicar las referencias a momentos de improvisación realizados por los participantes en la implementación de sus clases simuladas.	
Prueba	[PR]	Útil para designar las referencias a momentos de prueba como determinantes para la construcción y planificación de las clases simuladas.	
Potencial saber	[PS]	Útil para señalar los "conocimientos" que los participantes declaran haber obtenido y que podrían ser útiles posteriormente en su práctica.	

Estos códigos y subcódigos son no mutuamente excluyentes, así, en una misma cita o momento de interés podemos identificar a la vez, por ejemplo, referencias a varios saberes docentes, propósitos y voces sociales.

5.2.3. Etapa 3: interpretación e inferencia

Como mencionamos en la descripción de nuestro método para el análisis de los datos, la etapa de interpretación e inferencia apunta al establecimiento de causalidades, correspondencias, vínculos y explicaciones de y entre las categorías de información construidas previamente, en pro de atender los objetivos de investigación propuestos.

Así, después de los procesos de selección, procesamiento, organización y codificación de la información realizados en la etapa precedente, en esta nos dedicamos a interpretar las categorías de información construidas, sin perder de vista la naturaleza y objetivos de cada tipo de análisis.

Síntesis del análisis continuo

Dado que, como reiteramos, el objetivo de esta síntesis es organizar y presentar los cambios realizados y las observaciones de las personas involucradas –participantes e investigadores– acerca de la ejecución del curso, este resumen no parte de elementos teóricos, sino que tiene más bien un carácter descriptivo. Su propósito es ser de ayuda en próximas intervenciones o experiencias similares de producción de datos, realizadas por el mismo grupo de investigación o por terceros.

En consecuencia, para cerrar esta síntesis filtramos las citas por subcódigo en Atlas.ti, leímos/observamos de forma conjunta dichos momentos de interés, y realizamos anotaciones acerca de cada una de las categorías utilizadas para la descripción del funcionamiento del curso –códigos y subcódigos declarados previamente– (Tabla 22).

Tabla 22
Ejemplo de la síntesis del análisis continuo – Interacción y ambiente: ambiente general

Momentos de interés
Se ha logrado una relación respetuosa y de confianza en las sesiones: los participantes no tienen pena de emitir sus dudas y comentarios. **[9:2 p 4 en S3. Notas del observador]**
Hacia el final de esta clase es la primera vez que los tres participantes encienden su cámara de forma simultánea. **[18:7 1h 29m 20s en S5. Lectura 2]**
Los participantes mantienen sus cámaras encendidas durante toda la sesión individual. **[21:8 9s en S6c. Reunión 1 – Santiago]**
Los participantes mantienen sus cámaras encendidas durante toda la sesión individual. **[22:7 9s en S6b. Reunión 1 – Candy]**

Los participantes mantienen sus cámaras encendidas durante toda la sesión individual. **[23:2 14s en S6a. Reunión 1 – Mercedes]**

Es importante, como se hizo, advertir sobre la naturaleza –no escolar, no evaluativa– de las actividades, para generar mayor confianza y participación. **[105:1 p 1 en Nota conjunta del análisis continuo]**

Candy comenta que le gustó mucho la organización del curso en cuanto a tiempos y trabajo, que los investigadores eran flexibles, la libertad al trabajar, que no fueron tantas lecturas, el ambiente del curso, las correcciones no eran como un regaño, que fue una gran experiencia y que lo tomaría de nuevo pues le cree que le ayudó a crecer y en su labor como profesora. **[107:17 17m 6s en Ent c. Entrevista – Candy]**

Observaciones
• Ambiente general de respeto, cercanía y confianza. [9:2] • Los participantes no solo comentan y preguntan constantemente, sino que dejan sus cámaras encendidas durante todas las reuniones individuales y durante tramos grandes de las reuniones de grupo. [18:7] [21:8] [22:7] [23:2] • Algunos factores para la creación y mantenimiento del ambiente favorable. [105:1] [107:17]

Con el afán de ser concisos y de mantener abiertos los procesos y recursos del estudio, dispusimos el documento completo de nuestra síntesis del análisis continuo en la base de datos construida a causa de este proyecto de investigación (Complemento 29). Este reúne las citas –su comentario descriptivo y referencia– y las observaciones elaboradas para cada una de las categorías de interés. Dicho archivo es la base para los resultados mostrados en el capítulo 6 de este documento.

Análisis retrospectivo

Dadas sus distintas naturalezas y propósitos, dividimos el análisis retrospectivo en análisis de la actividad matemática y análisis de los saberes docentes.

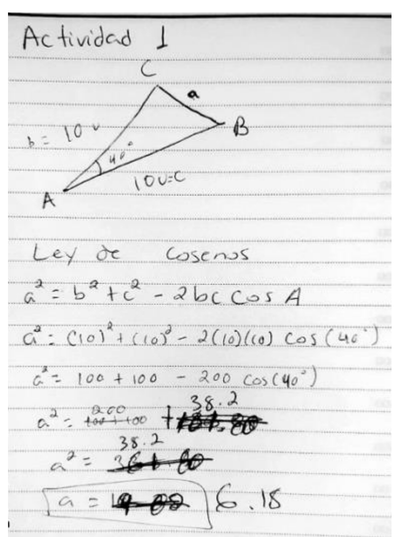
Análisis de la actividad matemática

En un principio, transcribimos las intervenciones orales de los/as participantes siguiendo un manual de claves de transcripción (Complemento 30), elaborado teniendo en cuenta los trabajos de McNaughton (2009), Schütte et al. (2019) y Bassi (2015), y las necesidades de nuestro estudio. Este proceso es crucial pues procura mantener el anonimato de los/as participantes, así como conservar la riqueza de los datos pese al tránsito de un formato de audio-video a uno exclusivamente de texto.

Luego, siguiendo el esquema para el análisis retrospectivo descrito previamente, dividimos el análisis de la actividad matemática en dos fases: por participante y de grupo. En el primero, con base en las transcripciones y demás evidencias del trabajo de los/as participantes, y a través de las preguntas que fungen como indicadores –aludidas más arriba–, describimos la actividad matemática de los/as profesores/as en formación inicial en términos de *acciones* y *actividades*; haciendo énfasis en las nociones y procedimientos matemáticos que usan a causa de cada tarea, los fenómenos didácticos que evidencia su trabajo, y los momentos de confrontación y resignificación que atraviesan en el proceso.

A modo de ejemplo, mostramos el análisis de la actividad matemática del trabajo de Santiago con motivo de la primera tarea de la situación de aprendizaje (Tabla 23).

Tabla 23
Ejemplo del análisis individual de la actividad matemática – Actividad 1, Santiago

Qué hace	Cómo lo hace
Bosqueja la situación-problema y *calcula* la longitud de BC	*Bosqueja* la situación-problema de acuerdo con la figura dada y *calcula*, a través de la *ley de cosenos*, el lado BC. 

[12:1 875.894 × 1,143.116 en Actividades – Santiago]

> “Pues lo primero que… que pensé también al verlo, eh::: yo también estaba indeciso entre si era ley de senos o ley de cosenos. Eh::: ya ve que dependiendo los::: los datos que se tengan se puede utilizar una u otra. Entonces, pues, ya googleé, eh::: ley de coseno, que fue la que tenía más…/ mmm… de la más sospechaba y pues sí, ¿no?, era… era justo ese, donde tienes un ángulo/ bueno, en este caso que tenemos el ángulo entre el valor de dos lados… y queremos obtener el otro lado. Entonces, pues lo que hice fue *aplicar la ley de cosenos*, primero definí, pues, las variables, ahí como está en la foto, eh::: y *dibujé el triángulo* otra vez para… para tomarlo como referencia.” **[5:13 55m 45s en S2. Problematización]**

*Inicialmente, a través de este método, obtiene un valor cercano a 18.25. Dado que su calculadora estaba programada en radianes.

“Ahí los tachones que están en la figura es porque lo hice con radianes, ¿no?, primero [*entre risas*], ya lo… lo… lo corregí.” **[5:38 58m 22s en S2. Problematización]**

Compara la respuesta con los valores proporcionales

Compara el valor obtenido mediante la *ley de cosenos* con el valor proporcional, el doble la longitud inicial de BC, y observa que es *casi el doble*.

> “Al duplicar el ángulo BAC, ahora el lado BC valdrá más, *casi el doble* de lo que valía antes. Sin embargo, al comprobarlo con la *ley de cosenos*, no es exactamente el doble. Obtengo 6.18u.” **[12:2 618.768 × 55.72 en Actividades – Santiago]**

Asocia que el valor calculado no sea igual al valor proporcional a la *pérdida de decimales* en el cálculo. Además, *compara* el caso en el que el ángulo de referencia mide 40º con la longitud de BC cuando el ángulo BAC mide 80º, y se percata de que también mide *casi el doble*.

> “Si bien *no es el doble exactamente*, o tal vez sea por *pérdida de decimales* por allí, pero sí es… sí es *casi el doble*, comparado con el tres punto y garra [refiriéndose al 3.47 u] que estaba en el original/ en la figura original. Y solo por curiosidad, bueno, allí no lo escribí, pero aquí en la calculadora hice el cálculo con coseno de 80 también, y me daba como 11, entonces, también *casi como el doble* de… de 40, ¿no?… bueno, del ángulo de 40.” **[5:15 57m 26s en S2. Problematización]**

Describe la relación ángulo-lado

Coincide con Candy en que la relación ángulo-lado tiene la característica de que, *si el ángulo de referencia aumenta*, el lado opuesto *también aumenta*, aunque no parece tener una *proporción exacta*.

> “Como dice /Candy/, ¿no?, me/ no…/ al abrir más el ángulo, pues el lado se hace más grande, solo que::: pues no crece de man…/ bueno, a lo… *a lo mejor tiene una proporción, pero no exacta*, ¿no? No como que… el doble, el doble, sino que… sí tiene un crecimiento y parece cercano al doble, con los resultados que obtuve, pero no el doble estrictamente.” **[5:16 57m 59s en S2. Problematización]**

Además, comenta que el crecimiento del lado opuesto *no es tal cual proporcional* porque las *funciones trigonométricas son todas raras*.

> “Entonces, el problema aquí::: es que… pues, coseno::: o sea, coseno de 20 y coseno de 40 *no es tal cual el doble*, o sea, no por aumentar el doble

	del ángulo aumenta el valor el doble del coseno, porque, pues *las funciones trigonométricas son… todas raras*, ¿no? […] No hay un crecimiento tal cual proporcional, o por lo menos no muy claro, ¿no?" **[5:14 56m 41s en S2. Problematización]**

Para qué lo hace
Calcular un segundo par ángulo-lado y caracterizar la relación ángulo-lado.

Mientras que en la segunda fase compusimos tablas generales de la actividad matemática del grupo (Tabla 24) y tablas sintéticas que incluyen algunos elementos adicionales importantes (Tabla 25). En este sentido, esta fase nos ofrece una visión sintética del trabajo realizado por los/as profesores/as en formación inicial durante la experiencia; valiosa para ser contrastada con los objetivos e hipótesis generales de diseño planteadas inicialmente, así como para atender nuestros objetivos de investigación.

Tabla 24

Ejemplo del análisis de grupo de la actividad matemática – Actividad 1

Qué hacen	Cómo lo hacen
Bosquejan la situación-problema	Bosquejan la situación-problema a través de un *triángulo rectángulo* o de un *triángulo isósceles*, tomando como referencia la figura dada.
Calculan y *aproximan* la longitud de BC	*Calculan* y *aproximan* la longitud de BC al duplicar el ángulo de referencia con ayuda del *teorema de Pitágoras*, la *razón seno*, la *ley de senos* y la *ley de cosenos*.
Comparan los cálculos realizados con los proporcionales	*Comparan* explícitamente las longitudes obtenidas con los valores proporcionales del lado BC.
Describen la relación ángulo-lado	Observan que la relación cumple con la *característica* que, si ángulo de referencia crece, la longitud de BC también crece. Una participante menciona que el lado crece "de igual manera" que el ángulo –manteniendo una proporción–, y otro que si la relación ángulo-lado tiene una proporción, esta no es exacta.

Para qué lo hacen
Calcular/aproximar un segundo par ángulo-lado y caracterizar la relación ángulo-lado.

Tabla 25

Ejemplo de tabla sintética de la actividad matemática – Actividad 1

Actividades y acciones	Nociones y procedimientos matemáticos
Calcular/aproximar un segundo par ángulo-lado y caracterizar la relación ángulo-lado. • Bosquejar la situación-problema • Calcular el lado BC • Aproximar el lado BC • Comparar los cálculos/aproximaciones • Describir la relación ángulo-lado	• Triángulo rectángulo • Triángulo isósceles • Teorema de Pitágoras • Ley de senos • Ley de cosenos • Razón seno • Multiplicación • Resta
Momentos de confrontación y resignificación	**Fenómenos didácticos**
La expresión de Candy 'aumenta de igual manera' –que luego explicita refiere a la proporción entre el ángulo de referencia y el lado opuesto–, y el cálculo y comparación de los valores proporcionales realizado por Santiago son indicios de *momentos de confrontación con el significado lineal* asociado a la relación ángulo-lado. Nuevas características de la relación ángulo-lado: cuando el ángulo de referencia crece, el lado opuesto crece.	• Predominancia del triángulo rectángulo • Errores al plantear y realizar los cálculos • Inexactitud en la nomenclatura • Dificultades con el uso de la calculadora
Otras observaciones	
• No responden de forma inmediata a la tarea, sino que calculan y aproximan primero. • Realizan bosquejos, no construcciones geométricas. • Coinciden en la caracterización, e indecisión respecto a la procedencia de la inexactitud –pérdida de decimales o naturaleza del cálculo–. • El trabajo de Candy y Santiago reflejan –además de realizar lo solicitado– una reflexión respecto a la naturaleza de la relación ángulo-lado.	

De igual manera, con el afán de ser concisos y de mantener abiertos los procesos y recursos del estudio, dispusimos el documento completo de nuestro análisis de la actividad matemática en la base de datos construida a causa de este proyecto de investigación (Complemento 31). Este reúne las tablas generales y sintéticas elaboradas para cada una de las actividades de la situación de aprendizaje. Dicho archivo es la base para los resultados mostrados en el capítulo 7 de este documento.

Análisis de los saberes docentes

También dividimos el análisis de los saberes docentes en dos fases: por participante y de grupo. En el primero enlistamos las transcripciones anonimizadas de los momentos de interés en las que está involucrado cada participante y marcamos en ellas los fragmentos específicos en los que identificamos los distintos códigos y subcódigos analíticos (Tabla 26). Luego, en una tabla sintetizamos las referencias encontradas a cada componente teórico –saberes docentes, propósitos, voces sociales, etcétera–, según la etapa del curso (Tabla 27). Así, esta fase nos ofrece una visión detallada de los saberes docentes que manifiesta y construye cada participante, así como de los propósitos que los guían y las voces sociales de las cuales provienen estos, con relación a cada una de las etapas del curso.

Tabla 26
Ejemplo (fragmento) del análisis individual de los saberes docentes – Etapa III, Candy

Acciones Decisiones, explicaciones y opiniones	**Propósitos** Guías de acción	**Saberes docentes** Conocimientos efectivos	**Voces sociales** Ámbitos de procedencia	**Otros**
Objetivo de aprendizaje – Sesión 9				
Comenta que con reconocer la razón coseno se refiere a que pretende introducir la razón como una constante en triángulos rectángulos, de forma similar a como lo vio en un libro de texto. Y que cree que para enfocarse en una razón primero se deben explicar las tres. “Primero era lo de ‘reconoce las razones trigonométricas’ y pensaba hacerlo del triángulo… quizá, a lo mejor, hacer lo que mire en un libro [de texto], que era una… una constante… que::: lo mencioné, que utilizaban…/ o sea, hacer la explicación del triángulo, como que… explicar las::: tres::: razones naturales, creo que así lo encontré, ajá, las tres razones naturales, cómo funcionan y a partir de encontrar esas tres, enfocarnos en la razón coseno, porque… siento que no puedes hablar específicamente de una razón si no explicaste antes las tres.” **[38:4 21m 51s en S9c. Reunión 1 – Candy]**		Introducir las razones trigonométricas como constantes en triángulos rectángulos semejantes. Hablar de las tres razones trigonométricas básicas para después enfocarse en coseno.	Libro de texto (no específico)	*Nota*: integra una actividad proveniente de un libro de texto observado.
Comenta que no le parece cotidiano calcular el largo de un lago, sobre todo porque vive en un desierto; así que por eso			Condición material (ubicación geográfica)	**Asociación:** Asocia la decisión sobre si incluir lo cotidiano o no

tiene conflictos con si incluir o no lo "cotidiano" en su objetivo. "Lo que pasa es que… no me pareció cotidiano encontrar el largo de un lago, ¿sabes?, no es como que… bueno, *yo vivo en un desierto*, entonces no es como…/ geográficamente no es posible que '¡ah!, sí, chicos vamos a salir aquí al parque donde hay un lago a medir cuando mide su hipotenusa', o sea, <u>no</u>, no… en mi cabeza no cabe, entonces por eso *estoy en duda de lo cotidiano*, no estoy tan segura… ah::: no estoy segura de qué <u>tan real</u> lo puedo volver… lo puedo hacer o ejemplificar." **[38:5 24m 11s en S9c. Reunión 1 – Candy]**				en su objetivo con su ubicación geográfica y el tipo de problemas en las que se suelen utilizar las razones trigonométricas. **Relacionada con:** 38:6
Comenta que colocó un verbo en el objetivo no complicado, básico, pues le interesa algo tranquilo, bonito y que recuerden toda la vida. Lo memorable de una actividad es algo que ya había comentado como importante para ella. "Eh::: mi verbo de acción, de mi objetivo, no es muy complicado, es básico, porque dije '¡ah!, pues, algo tranquilo, no más, así, una actividad bonita,… *que se acuerden de ella* para toda la vida, no más." **[38:7 34m 30s en S9c. Reunión 1 – Candy]**	<u>Sobre la matemática y su enseñanza</u>: el que la actividad sea memorable constituye una idea constante en los propósitos didácticos de Candy.			**Relacionada con:** 42:13
Consulta por qué en la venta de pantallas se usa la diagonal y no el alto o ancho, finalmente menciona que como es la hipotenusa lo puede usar para su clase. "Una pregunta, así, se me acaba de ocurrir: ¿por qué en las televisiones y *tablets* y esas cosas calculan las distancias… como… las de en medio, ya ven que dicen como que '¡ah!, *esta pantalla tiene tantas pulgadas*', pero… no es como de alto o de ancho, sino… <Investigador-profesor: ¿la diagonal?> ¡Ajá!" **[38:10 43m 50s en S9c. Reunión 1 – Candy]**			Experiencia personal (cotidianidad)	**Asociación:** Asocia las dimensiones de las pantallas con la construcción de una tarea trigonométrica 'cotidiana'. **Relacionada con:** 58:7
…	…	…	…	…

Tabla 27

Ejemplo (fragmento) de la síntesis individual del análisis de los saberes docentes – Etapa III, Candy

¿Qué propósitos guían sus acciones?
Sobre la matemática y su enseñanza-aprendizaje: construir actividades memorables
En esta etapa, Candy alude explícitamente a que, al diseñar actividades de aula, busca constantemente que estas sean memorables para los estudiantes [54:7]; al mismo tiempo expresa su opinión respecto a algunas actividades específicas, en la cual alude a si estas cumplen o no con dicho objetivo [38:7] [42:13] [49:4] [49:9] [49:10] [54:2].
De su clase: ir de lo general a lo particular
Inspirada en los libros de texto, Candy comenta que pretende desarrollar las actividades de su clase simulada de lo general a lo particular: introducir las tres razones trigonométricas y luego enfocarse en coseno [42:10].
De su clase: construir actividades no típicamente escolares
Al igual que en etapas anteriores, por ejemplo [22:8], Candy señala su interés por construir actividades novedosas, no típicamente escolares [49:4] [49:9] [49:10].
…
¿Qué saberes fundamentan sus acciones?
Saber estructurar objetivos de aprendizaje
Con base en experiencias estudiantiles y de planificación previas, Candy señala las partes que debe tener un objetivo de aprendizaje, aunque no aparezcan así en los planes y programas de estudio [49:11].
Saber adecuar los recursos y actividades a los estudiantes
Al presentar su hoja de trabajo, así como al dar sugerencias sobre los recursos de sus compañeros, Candy sugiere tener en cuenta las capacidades, condiciones y posibilidades de los estudiantes en cuestión al elegir o construir un recurso didáctico [49:14] [58:3].
Saber retomar actividades y recursos didácticos
Candy muestra el poder retomar actividades matemáticas conocidas en otros espacios, en particular adapta el ejercicio de un libro de texto en el que se introducen las razones trigonométricas como razones constantes de triángulos rectángulos anidados [38:4] [49:8] [54:4].
Saber que el uso exclusivo de figuras prototípicas dificulta el análisis de sus propiedades matemáticas
Con base en discusiones anteriores, Candy señala que el uso de figuras –en particular el triángulo rectángulo– siempre con proporciones y posiciones similares, dificulta que los estudiantes se centren en la observación y análisis de sus propiedades matemáticas [49:7].
…
¿Qué asociaciones, potenciales saberes y otros momentos de interés hay en esta etapa?
Contexto: nunca ha planificado con este detalle una clase que vaya a dar
Candy refiere a que nunca había planificado así una clase que tuviera que implementar realmente [49:1].
Asociación: ubicación geográfica
Candy asocia el diseño de sus problemas 'cotidianos' con la ubicación geográfica, y las restricciones (de trabajo empírico) y de situaciones cotidianas (acceso a lagos) que esta tiene [38:5] [38:6].
…
¿De qué voces sociales provienen dichos propósitos, saberes, asociaciones y demás?
Experiencia docente
En las voces sociales del trabajo realizado por Candy en esta etapa, identificamos múltiples referencias a experiencias docentes no específicas, estas aluden a respuestas hipotéticas de los estudiantes, al uso y configuración de recursos, y el manejo del tiempo [42:9] [49:6] [49:14] [54:6] [54:8] [58:3] [58:8].
Libro de texto
Candy también alude en numerosas ocasiones a los libros de texto (no específicos) consultados durante esta etapa, en particular al referir la forma en la que desea desarrollar su clase (de lo general a lo particular) y cómo introducir las

razones trigonométricas (como constante de triángulos rectángulos semejantes) [38:2] [38:4] [42:10] [49:1] [49:8] [54:5].

Actividad del curso

Identificamos también referencias a las actividades del curso realizadas hasta el momento: a la transparentación de la experiencia de problematización [49:7] [54:4] [54:10], y a ambas actividades (transparencia y experiencia de problematización) [54:7] [58:4].

Experiencia estudiantil

Durante esta etapa, Candy alude a diferentes experiencias estudiantiles previas, en particular al decidir cómo desarrollar su clase (de lo general a lo particular), cómo estructurar un objetivo y para retomar algunas actividades (aproximar ángulos con la mano). Estas referencias en ocasiones no son específicas [42:9] o aluden explícitamente a experiencias en la Facultad de Pedagogía e Innovación Educativa [49:11] [49:13] [54:2].

…

Mientras que, para el análisis por grupo, compusimos tablas generales que reúnen los saberes y demás componentes teóricos observados en la trayectoria individual de los/as participantes en cada una de las etapas del curso (Tabla 28). En este sentido, esta fase nos ofrece una visión sintética de los saberes y demás componentes teóricos manifestados por los participantes; fundamental para ser contrastado con los objetivos e hipótesis generales de diseño planteadas inicialmente, así como para atender nuestros objetivos de investigación.

Tabla 28

Ejemplo (fragmento) del análisis de grupo de los saberes docentes – Etapa III

¿Qué propósitos guían sus acciones?

	•Candy [C] Gr=217	•Mercedes [M] Gr=149	•Santiago [S] Gr=186
•PR: Propósito Gr=55	12	10	6

Tabla de co-ocurrencia. Propósito [PR] por participante [C] [M] [S], en Etapa III: Trayectoria hipotética de aprendizaje [THA]

En las veintiocho citas que aluden a propósitos de los profesores en formación inicial durante esta tercera etapa del curso, identificamos un propósito relativo al curso, dos asociados a la matemática y su enseñanza-aprendizaje, y seis específicos para las clases simuladas que se pretenden construir posteriormente.

Respecto al propósito del curso, de forma similar a lo ocurrido en la primera etapa, Mercedes explicita que –pese a no estar del todo conforme con el trabajo realizado– sabía que debía entregar algo para cumplir con la asignación, dar una respuesta a las actividades planteadas [42:1]. De igual forma, podríamos explicar esto a través del contrato didáctico implícito entre profesor-estudiante: el profesor propone tareas que se espera el estudiante responda satisfactoriamente.

Con relación a los propósitos sobre la matemática y su enseñanza-aprendizaje, Candy explicita la importancia que para ella tiene como profesora de matemáticas el construir actividades memorables para los estudiantes [54:7], además, como lo hizo en la etapa anterior, evalúa constantemente actividades específicas de acuerdo con si pueden o no ser memorables para los estudiantes [38:7] [42:13] [49:4] [49:9] [49:10] [54:2]. También de acuerdo con lo sucedido en la etapa anterior, Mercedes expresa su interés por construir actividades que capten la atención de los estudiantes, particularmente al justificar el uso de Kahoot y no solo de Word [58:2].

…

¿Qué saberes fundamentan sus acciones?

	●Candy [C] Gr=217	●Mercedes [M] Gr=149	●Santiago [S] Gr=186
●SD: Saber docente Gr=150	20	9	16

Tabla de co-ocurrencia. Saber docente [SD] por participante [C] [M] [S], en Etapa III: Trayectoria hipotética de aprendizaje [THA].

Esta tercera etapa está dedicada a la construcción de los objetivos, el proceso hipotético y las actividades de la trayectoria hipotética de aprendizaje que será base para —en la etapa posterior– elaborar la planificación de la clase simulada, esto con base en las revisiones y discusiones mantenidas en la etapa precedente. Con esto en mente, en las cuarenta y cinco citas de esta etapa, identificamos cinco saberes procedimentales y quince saberes discursivos.

Entre los primeros, dados de forma conjunta, ubicamos: el retomar actividades y recursos didácticos de libros de texto y espacios escolares previos, evidenciado por Mercedes en la etapa anterior y por los tres participantes en esta etapa [38:4] [49:8] [54:4] [55:5] [42:15]; con base en su experiencia docente, Candy y Santiago muestran saber adecuar los recursos y actividades a los estudiantes, a sus condiciones y posibilidades [49:14] [58:3] [48:5] [48:7] [53:1] [53:2] [53:3]; Candy muestra saber estructurar objetivos de aprendizaje y –en clases posteriores– Mercedes muestras haberse apropiado de este saber [49:11] [50:8].

…

¿Qué asociaciones, potenciales saberes y otros momentos de interés hay en esta etapa?

	●Candy [C] Gr=217	●Mercedes [M] Gr=149	●Santiago [S] Gr=186
●AS: Asociación Gr=79	10	4	10
●CO: Contexto Gr=14	1	1	0

Tabla de co-ocurrencia. Otros momentos por participante [C] [M] [S], en Etapa III: Trayectoria hipotética de aprendizaje [THA].

Respecto a otros momentos de interés (asociaciones, potenciales saberes, pruebas, etc.), identificamos, en las veintiséis citas, diecisiete referencias a asociaciones y dos a información del contexto de la práctica docente.

Entre las primeras identificamos seis grupos: 1) con experiencias de formación docente (clase de Trigonometría [50:1] [55:1], curso de Didáctica general [49:13], otros espacios de formación [37:2] [42:16]); 2) con los involucrados (comentarios de Santiago y el investigador-profesor [42:20] [49:3], equipo de investigación [55:6] [48:8]); 3) con internet y fuentes bibliográficas institucionales (fuentes bibliográficas [38:2], documentos educativos institucionales [38:2] [42:6] [49:1], internet [38:2] [58:7]); 4) con espacios personales (ubicación geográfica [38:5] [38:6], cotidianidad [38:10] [58:7], etimología [37:9], música [37:15]); 5) con los estudiantes (estudiantes [39:3]); y 6) con la naturaleza de las nociones en juego (naturaleza de la relación ángulo-lado [37:3]).

…

¿De qué voces sociales provienen dichos propósitos, saberes, asociaciones y demás?

	•Candy [C] Gr=217	•Mercedes [M] Gr=149	•Santiago [S] Gr=186
•VS: Experiencia docente Gr=50	7	0	8
•VS: Actividad del curso Gr=42	5	5	4
•VS: Experiencia estudiantil Gr=47	4	2	8
•VS: Libro de texto Gr=21	6	0	5
•VS: Equipo de investigación Gr=22	4	1	4
•VS: Experiencia personal Gr=32	3	3	3
•VS: Otro participante Gr=27	4	2	1
•VS: Otro docente Gr=26	0	3	3
•VS: Estudiante Gr=23	0	1	4
•VS: Internet Gr=13	2	0	2
•VS: Condición material Gr=18	3	0	0
•VS: Producto de investigación Gr=16	1	0	2
•VS: Programa de estudio Gr=4	3	0	0

Tabla de co-ocurrencia. Voces sociales [VS] por participante [C] [M] [S], en Etapa III: Trayectoria hipotética de aprendizaje [THA].

Con relación a las voces sociales de las que provienen los saberes y otros momentos de interés marcados, identificamos ciento tres referencias, implícitas y explícitas, que aluden a trece voces sociales distintas.

A diferencia de las etapas anteriores en las que la experiencia estudiantil fue la voz más frecuente, en esta se ubica en tercer lugar, superada por la experiencia docente y la actividad del curso. Respecto a la experiencia docente, al construir su trayectoria hipotética de aprendizaje, Candy y Santiago refieren a experiencias previas enseñando matemáticas de forma no específica [42:9] [49:6] [49:14] [54:6] [54:8] [58:3] [58:8] [42:3] [48:1] [48:3] [48:9] [53:1] [53:6], o aludiendo particularmente a sus prácticas profesionales [53:2] o trabajo en asesorías [37:13].

…

De igual modo, dispusimos el documento completo de nuestro análisis de los saberes docentes en la base de datos construida a causa de este proyecto de investigación (Complemento 32). Este aúna todas las tablas de los momentos de interés y sintéticas por participante, y las tablas de análisis de grupo elaboradas para cada una de las etapas de la intervención. Dicho archivo es la base para los resultados mostrados en el capítulo 8 de este documento.

5.2.4. Etapa 4: conclusión

Durante la etapa final de nuestro análisis de contenido, con base en las observaciones de la síntesis del análisis continuo y los análisis de la actividad matemáticas y de los saberes docentes, narramos y ejemplificamos los resultados encontrados. Estos se presentan, respectivamente, en los siguientes tres capítulos.

6.
Resultados del análisis continuo

La vida no es la que uno vivió,
sino la que recuerda y cómo la recuerda para contarla.
— Gabriel García Márquez

En este capítulo exponemos los resultados de la síntesis del análisis continuo llevado a cabo. Utilizamos para ello dos secciones. En la primera describimos los resultados encontrados, de acuerdo con las categorías –códigos y subcódigos– construidas para esa causa, introducidos en el capítulo anterior. Mientras que en la segunda ofrecemos una síntesis general de dichos resultados.

6.1. Diseño y ejecución de la intervención

6.1.1. Interacción y ambiente

El primer tema importante sobre esta categoría es el *ambiente general* de respeto, cercanía y confianza sostenido durante el curso. Este comenzó a construirse desde las primeras sesiones; el investigador-observador, en su nota individual de la sesión tres, por ejemplo, comenta que percibe "una relación respetuosa y de confianza, los participantes no tienen pena en emitir sus preguntas y comentarios" (9:2 p 4 en S3. Notas del observador).

En el transcurso de las sesiones, además de con sus frecuentes preguntas y comentarios, los/as profesores/as en formación inicial participantes reflejan parte de esta confianza, por ejemplo, al activar sus cámaras –siempre por iniciativa propia– en porciones extensas de las sesiones de grupo (v. g. 18:7 1h 29m 20s en S5. Lectura 2) y al mantenerla activa durante todas las sesiones individuales (v. g. 23:2 14s en S6a. Reunión 1 – Mercedes). Algunos/as participantes incluso refieren explícitamente a este punto; por ejemplo, Candy, en la entrevista final de la intervención, menciona "también me gustó […] ¿Qué más? También el ambiente, o sea, tanto tú como Melvin fueron personas muy amables, muy agradables, y te hacen entrar como que en confianza" (107:17 18m 19s en Ent c. Entrevista – Candy).

Las observaciones de las personas involucradas también aluden a algunas condiciones que permitieron y promovieron este ambiente de trabajo. Entre ellas la explicitud y claridad sobre las actividades y sus objetivos (105:1 p 1 en Nota conjunta del análisis continuo); libertad de trabajo en el curso, al no ser estructurado como "tema, lectura, plática, ejercicio"; flexibilidad respecto a lo que los/as participantes necesitan, refiriéndose específicamente al establecimiento de acuerdos en las actividades y sus tiempos; y el tono de las modificaciones a los productos, las correcciones "no era como un regaño" (107:17 17m 6s en Ent c. Entrevista – Candy).

Los tres temas restantes acerca de la interacción y ambiente del curso refieren a las relaciones específicas entre las personas involucradas. Así, las observaciones sobre la *relación entre los/as participantes* refieren a un ámbito de amabilidad y colaboración. Asociamos esto a los momentos en los que los/as participantes valoran y retoman el trabajo y las sugerencias de los/as demás participantes (v. g. 6:44 2h 6m 32s en S3. Problematización), y cuando solicitan explícitamente su opinión y ayuda (v. g. 84:22 8m 15s en S17c. Clase simulada – Mercedes).

Algunas de las acciones que promovieron este tipo de relación entre los/as participantes, señaladas en las observaciones de las personas involucradas, son realizar preguntas abiertas o relacionales –sobre todo al inicio del curso– (v. g. 6:43 1h 25m 56s en S3. Problematización) y sugerir el trabajo colaborativo entre los/as profesores/as en formación inicial (v. g. 68:2 p 2 en S14. Notas del profesor).

Por otro lado, respecto a la *relación entre los/as participantes y los investigadores*, dos puntos resultan ser relevantes a la luz de las observaciones de las personas involucradas. Primero, el ambiente general de confianza y de trabajo colaborativo observado durante las sesiones individuales (v. g. 40:1 p 2 en S9. Notas del observador). Y, segundo, la naturaleza y evolución de la interacción entre el investigador-profesor y los/as participantes; siendo, al menos hasta la sesión diez, más instruccional y centrada en discusiones matemáticas con Mercedes –quien cursa el quinto semestre de la carrera– que con Candy y Santiago –que cursan el octavo y último semestre–, con quienes se discute cuestiones más de corte didáctico-pedagógico desde el comienzo (v. g. 105:17 p 16 en Nota conjunta del análisis continuo).

Por último, acerca de la *relación entre profesores/as en formación inicial* –participantes y estudiantes universitarios–, se observa, como es natural, una dualidad: fragmentos en las que los/as participantes se comportan como profesores/as y los estudiantes universitarios como estudiantes; y secciones en las que interactúan como compañeros/as, recordándose asignaciones de cursos pasados (v. g. 80:35 5m 11s en S17a. Clase simulada – Candy), refiriéndose entre ellos/as como "compañeros" (v. g. 84:21 8m 2s en S17c. Clase simulada – Mercedes) y compartiéndose el material que diseñaron para la clase simulada, dado que "todos nosotros vamos a ser maestros" (v. g. 80:36 33m 34s en S17a. Clase simulada – Candy).

6.1.2. Metodología y técnicas de enseñanza

En esta categoría, los cambios espontáneos y planificados, así como las observaciones de las personas involucradas, se agrupan respecto a dos temas: la metodología de enseñanza y las técnicas específicas de enseñanza puestas en juego por los investigadores.

Con relación al primero, las citas rescatadas subrayan dos puntos: la funcionalidad general del método de enseñanza, y la necesidad de reflexionar acerca del propósito de la discusión matemática, la transparentación del diseño y la preparación teórica-metodológica. Así, el investigador-observador, por ejemplo, menciona respecto a la metodología de enseñanza que “parece que es una metodología didáctica productiva, porque hay momento de comprensión de la actividad, de trabajo individual y de trabajo grupo” (9:1 p 1 en S3. Notas del observador).

Mientras que, en cuanto a la discusión matemática y la transparentación del diseño, las personas involucradas coincidieron en la necesidad de un cierre matemático más contundente, ante la amplia discusión de cuál es la naturaleza de la relación ángulo-lado que propone el diseño inicial de la experiencia de problematización. Santiago, por ejemplo, menciona que “ojalá haya espacio en la sesión cuatro para responder esas dudas porque si es como que… bueno, la clásica sensación de: bueno, ¿cuál es la respuesta correcta?, ¿no?… aunque no sea el objetivo” (6:45 2h 13m 30s en S3. Problematización).

Estos constituyen observaciones importantes y potenciales cambios para la planificación y ejecución del curso optativo, pues el diseño inicial contemplaba solo un tiempo corto de discusión matemática y no incluía un momento de transparentación del diseño como tal, sino que este se remplazó por la etapa de preparación del curso. El análisis continuo de esta experiencia muestra que –al igual que en las experiencias previas– se requiere una discusión matemática final más robusta e incluir un momento concreto de transparentación del diseño de la experiencia de problematización.

Finalmente, con relación a la preparación teórico-metodológica, las observaciones de las personas involucradas dejan varias preguntas abiertas de cara a futuras implementaciones del curso, entre ellas: “¿Qué rol debe jugar esta primera lectura en términos de la investigación y del curso?, ¿cómo debe llevarse a cabo?” (17:2 p 1 en S4. Notas del profesor).

Por otro lado, acerca del segundo tema, las *técnicas y estrategias específicas de enseñanza*, de acuerdo con las modificaciones y observaciones de las personas involucradas, algunas de las técnicas de enseñanza que resultaron especialmente valiosas para la ejecución del curso son realizar preguntas abiertas o asociativas, en lugar de preguntas dirigidas a un/a participante o sobre una respuesta específica (v. g. 6:43 1h 25m 56s en S3. Problematización); aclarar los objetivos, implicaciones, dinámicas y tiempos de las actividades a realizar (v. g. 8:1 p 1 en S2. Notas del observador); promover el trabajo colaborativo (v. g. 68:2 p 2 en S14. Notas del profesor); procurar la participación de todos (v. g. 108:17 19m 45s en Ent a. Entrevista – Mercedes); y planificar el orden de presentación de avances por parte de los/as participantes (v. g. 105:4 p 1 en Nota conjunta del análisis continuo).

Otro resultado importante a este respecto fue la construcción y naturalización de dinámicas particulares para las sesiones de grupo e individuales. Las primeras, de forma general, comenzaban enlistando las actividades de la sesión; seguían con la presentación de avances y dudas de los/as participantes, los comentarios y preguntas del resto de participantes, y las observaciones e interrogantes del investigador-profesor y el investigador-observador; y, por último, se enlistaban las actividades de instrucción y evaluación programadas para las sesiones posteriores.

Para las sesiones individuales se habituó que los/as participantes comenzaran presentando –mientras compartían su pantalla– sus avances y dudas respecto al trabajo de la semana, y posterior a eso los comentarios y dudas de los investigadores sobre lo observado en el documento en línea o lo mencionado por el/la participante en su presentación. La construcción de esta dinámica fue importante para registrar en video las discusiones, así como para no coartar las explicaciones de los/as participantes respecto a sus avances y dudas (v. g. 41:1 p 2 en S9. Notas del profesor).

Por último, los cambios y las observaciones de los/as participantes sobre este tema dejan abierta la pregunta de qué dinámica podría ser más efectiva para la discusión de las lecturas de la etapa de preparación teórica-metodológica. Al respecto, el investigador-observador sugiere que “se podría elaborar preguntas que permitan detonar mayor reflexión sobre la lectura y la discusión grupal. Es decir, iniciar con las participaciones de cada uno y la discusión grupal, cuando se queden sin participar se hace una pregunta que detone una reflexión grupal" (16:1 p 1 en S4. Notas del observador).

Otra reflexión abierta es cómo abordar los momentos en los que el trabajo y discusión de los/as participantes evidencia fenómenos didácticos como, por ejemplo, la interminación de las nociones trigonométricas –razón, función, ley e identidad– o la imprecisión en los términos geométricos. Para esta puesta en escena del curso se optó por consultar a un/a participante el uso que hacía de cierta noción matemática en algún libro de texto, plan y programa, u otro/a participante (v. g. 42:27 41m 51s en S10. Presentación), o con reflexiones directas iniciadas por el investigador-profesor (v. g. 31:46 1h 4m 34s en S8. Presentación); pero esto podría ser objeto de mayor planificación en intervenciones futuras.

6.1.3. Modalidad

El primer tema en esta categoría es relativo a la *dinámica e interacción en línea*. Por un lado, algunas dinámicas aprendidas y naturalizadas durante el curso fueron el no compartir pantalla durante la resolución individual de la situación de aprendizaje –en pro de no influenciar las estrategias de los/as profesores/as– (v. g. 10:1 p 1 en S2. Notas del profesor); el intercambio de información –apuntes en lápiz y papel, problemas matemáticos y otros– a través de mensajería instantánea (v. g. 10:2 p 1 en S2. Notas del profesor); y el pedir a los/as participantes que compartieran pantalla durante la exposición de sus avances y dudas, para que dicha discusión fuera más clara y se registrara en las grabaciones de video (v. g. 48:12 4m 4s en S11b. Reunión 1 – Santiago).

Por otro lado, acerca de la interacción entre las personas involucradas, los/as participantes naturalizaron, como mencionamos, el activar –siempre por decisión propia– su cámara durante su intervención y otros tramos de las sesiones de grupo, y durante todas las sesiones individuales (v. g. 18:7 1h 29m 20s en S5. Lectura 2); así como intervenir constantemente en las discusiones y reflexiones de las sesiones del curso, a diferencia de lo sucedido con los/as estudiantes universitarios en las clases simuladas o –según sus comentarios– con los/as mismos/as participantes en otros espacios pedagógicos (v. g. 108:17 19m 45s en Ent a. Entrevista – Mercedes).

El segundo tema de esta categoría apunta al *manejo de recursos digitales* por parte de los/as participantes. En particular, para el desarrollo de las sesiones y las clases simuladas, fue notable el mayor o menor manejo que tenían de herramientas como Zoom o Microsoft PowerPoint (v. g. 84:22 8m 15s en S17c. Clase simulada – Mercedes). Mientras que para la planificación de las clases simuladas destacó el empleo de recursos útiles para el diseño gráfico –Canva o GeoGebra– y el uso de pizarras digitales (v. g. 68:1 p 2 en S14. Notas del profesor).

Finalmente, un tercer grupo de cambios y de observaciones refiere a la *conexión a internet* de las personas involucradas. Pese a ser en línea y sincrónico, las interrupciones en el curso optativo debidas a este elemento fueron menores: una desconexión momentánea del investigador-profesor durante la sesión dos, un par de fragmentos de las sesiones individuales siete y once donde Candy no pudo activar su cámara o compartir pantalla, y –la más importante– la sesión nueve de Mercedes, que se tuvo que postergar por problemas con su servicio de internet (39:11 24m 33s en S9b. Reunión 1 – Mercedes).

6.1.4. Organización de las sesiones

Esta es la categoría con mayor cantidad de citas. Aúna los cambios espontáneos y planificados, así como las observaciones de las personas involucradas, respecto a cinco temas: las actividades, los contenidos, objetivos, recursos y materiales, y tiempos del curso optativo.

Con relación a las *actividades*, los/as participantes expresaron –sobre todo en las entrevistas finales– su experiencia y parecer sobre las distintas etapas del curso. Así, la experiencia de problematización tuvo percepciones favorables; Candy, por ejemplo, comentó que fue una gran introducción al curso, pues te acerca a lo que vas a hacer (107:19 23m en Ent c. Entrevista – Candy). Santiago mencionó que fueron sus sesiones favoritas, pues la situación de aprendizaje –al estar basada en resultados de investigación– predecía sus estrategias de resolución y eso le “sumó a darle más importancia a la investigación” (106:19 5m 24s en Ent b. Entrevista – Santiago).

La etapa de preparación, por su parte, tuvo una percepción dual. Por un lado, las lecturas y discusiones de la preparación teórico-metodológica fueron confundidas (v. g. 106:20 9m 16s en Ent b. Entrevista – Santiago) o poco recordadas por los/as participantes (v. g. 108:14 9m 48s en Ent a. Entrevista – Mercedes). Mientras que las búsquedas, lecturas y discusiones de la preparación matemática, didáctico-pedagógica y de referentes de investigación tuvieron percepciones muy favorables; Santiago, por ejemplo, mencionó que le hubiera gustado leer más productos de investigación (106:21 9m 28s en Ent b. Entrevista – Santiago) y libros de texto (106:22 11m 32s en Ent b. Entrevista – Santiago).

Los/as participantes también tuvieron una percepción favorable de la planificación, implementación y análisis de la clase. Santiago, por ejemplo, comentó que se le hizo muy interesante el análisis, poder ver la grabación de la clase simulada y el tener preguntas concretas para llevarlo a acabo, le gustó mucho y fue un ejercicio que no había hecho en la carrera (106:27 21m 1s en Ent b. Entrevista – Santiago).

En términos generales, los/as participantes coinciden en que el curso fue pesado, por el tipo y cantidad de trabajo a realizar, pero que también concuerdan en que tomarían otra clase similar y que lo recomendarían a otros/as profesores/as en formación inicial (v. g. 108:16 18m 39s en Ent a. Entrevista – Mercedes). Candy, además, comenta que fue una gran experiencia y lo tomaría de nuevo pues cree que le ayudó a crecer y en su labor como profesora (107:17 17m 6s en Ent c. Entrevista – Candy).

Durante la ejecución no fueron necesarios grandes cambios a las etapas o actividades para la consecución de los objetivos instruccionales del curso; así que las percepciones de los/as participantes coinciden, de forma general, con las de los investigadores respecto al correcto funcionamiento de las actividades. Algunas de las cuestiones que quedan abiertas de cara a futuras implementaciones del curso optativo o de ejercicios similares de investigación son: cómo articular de mejor manera el uso de la trayectoria hipotética de aprendizaje y la planificación de clase (v. g. 105:19 p 21 en Nota conjunta del análisis continuo), y cómo gestionar las clases simuladas, de tal suerte que se tenga certeza lo antes posible de cómo y con quién se llevarán a cabo estos ejercicios de implementación (v. g. 105:13 p 9 en Nota conjunta del análisis continuo).

Por otro lado, respecto a los *contenidos del curso*, las observaciones de las personas involucradas muestran que, además de las discusiones acerca de las razones trigonométricas y su enseñanza-aprendizaje –que eran centrales del diseño–, se requirieron y realizaron reflexiones sobre otros contenidos periféricos. Por ejemplo, en el ámbito matemático, se discutió –como advertimos antes– sobre la indeterminación de las distintas nociones trigonométricas y el rol del ángulo recto en la definición de las razones trigonométricas. En aspectos más bien didácticos, los/as participantes expresaron sus dudas sobre la estructura de los objetivos de aprendizaje solicitados (v. g. 37:16 18m 46s en S9a. Reunión 1 – Santiago) y a la organización general de las actividades de su clase simulada (v. g. 105:15 p 14 en Nota conjunta del análisis continuo). También solicitaron –como mencionamos– recomendaciones y explicaciones acerca de recursos tecnológicos concretos, como Zoom, pizarras digitales y programas útiles para el diseño gráfico de las figuras que acompañan los problemas trigonométricos (v. g. 105:16 p 15 en Nota conjunta del análisis continuo).

Con relación a los *objetivos instruccionales*, las observaciones de las personas involucradas subrayan dos cuestiones abiertas: repensar los objetivos de la preparación teórico-metodológica –en particular de la primera lectura– y de la etapa transparentación (v. g. 105:8 p 5 en Nota conjunta del análisis continuo), y reconsiderar si diseñar clases ‘no-tradicionales’ es un objetivo del curso, como parece ser percibido por los/as participantes (v. g. 22:8 9m 32s en S6b. Reunión 1

– Candy), y, de ser así, qué herramientas y estructuras se dispondrán para apoyar dicho fin.

Respecto a los *recursos y materiales*, los cambios y las observaciones de las personas involucradas apuntan hacia reconsiderar los grupos GeoGebra como base para el diseño, ante problemas como no poder completar y guardar la información de las tablas desde dispositivos móviles (v. g. 5:42 1h 22m 19s en S2. Problematización) o la dificultad de subir imágenes del trabajo en lápiz y papel a través de comentarios (v. g. 5:39 37m 2s en S2. Problematización). Otro grupo de observaciones indica la percepción favorable de los/as participantes a contar con los formatos en línea para la realización de las asignaciones del curso (v. g. 48:11 22s en S11b. Reunión 1 – Santiago).

Las ultimas observaciones son sobre el *tiempo de las etapas y actividades*; en ellas destaca la percepción favorable de los/as participantes acerca del manejo general del tiempo, ya que el trabajo no se acumuló hacia el final del curso (v. g. 107:17 17m 6s en Ent c. Entrevista – Candy), y la necesidad de aumentar la cantidad de sesiones dedicadas a la experiencia de problematización, ya que en esta implementación fueron dos sesiones intensas de trabajo y que rebasaron por poco las dos horas de duración cada una (v. g. 17:3 p 2 en S4. Notas del profesor).

6.1.5. Personas involucradas

El primer tema de esta categoría refiere a las *autoridades universitarias*, en particular, a la conveniente participación de la Dra. Mendivil, entonces subdirectora de la Facultad, en el arranque del curso (v. g. 7:1 p 1 en S1. Notas del observador) y más aún en las clases simuladas (v. g. 84:18 8s en S17c. Clase simulada – Mercedes), que involucraban no solo a los/as participantes sino a profesores/as en formación de otros semestres de la carrera.

Otro tema es justamente el rol de los *estudiantes universitarios* en las clases simuladas, en particular, su ya mencionada relación dual con los/as participantes –

interactuando regularmente como profesor/a-estudiante y en ocasiones como compañeros–. Al respecto también se observa la poca asistencia de estudiantes universitarios a las clases simuladas –entre tres y ocho–, así como su relativa baja participación y apertura (falta de explicaciones detalladas, reducida activación de micrófonos/cámaras, etcétera) en las clases; pese a las invitaciones a participar realizadas por la Dra. Mendivil, el investigador-profesor y los/as participantes (v. g. 82:16 5m 24s en S17b. Clase simulada – Santiago).

El tercer tema en las observaciones de esta categoría es el papel del *investigador-observador*. Referente a esto destacan tres puntos: su pronta retirada en una sesión por compromisos académicos imprevistos (60:1 p 2 en S13. Notas del profesor); la naturalización de su rol como observador por los/as participantes, desde el cual solicitaba explicaciones respecto a las decisiones y opiniones de estos últimos (v. g. 70:7 9m 1s en S15c. Reunión 2 – Candy); y la paulatina evolución de su interacción con los/as profesores/as en formación inicial, haciendo cada vez menos preguntas –a medida los/as participantes naturalizaban el ser detallados en sus intervenciones– y dando opiniones o explicaciones esporádicas por solicitud explicita de los/as profesores/as o del investigador-profesor (v. g. 66:8 8m 27s en S14b. Reunión 1 – Mercedes).

Por último, el cuarto tema de las observaciones son acerca de los/as *participantes*, en particular: la poca cantidad de profesores/as en formación inicial que hicieron parte del curso, que obligó el trabajo individual en el diseño de las clases simuladas y permitió la "atención personalizada" (v. g. 107:18 20m 6s en Ent c. Entrevista – Candy); ciertas situaciones personales y familiares que afectaron el trabajo, puntualidad y estado de ánimo de los/as participantes en algunas sesiones (v. g. 95:4 35m 14s en S19c. Reunión 2 – Candy); y el mencionado ambiente de amabilidad y colaboración entre los/as profesores/as, que permitía se compartieran ayuda u opinión en el desarrollo de las actividades (v. g. 42:28 45m 40s en S10. Presentación).

6.2. Epílogo

El análisis continuo, en las investigaciones de diseño, en general, y en los experimentos de desarrollo del profesorado, en particular, pretende ser la base para las intervenciones espontaneas y planificadas con quienes participan, interacciones útiles para recopilar información adicional, probar hipótesis y promover mayor desarrollo de los conocimientos de los/as participantes (Simon, 2000).

En este sentido, la síntesis del análisis continuo presentada no es más que un intento por sistematizar la experiencia de las personas involucradas en el curso. Esto con el afán de rescatar, desde los acontecimientos y las opiniones registradas, elementos que pudieron ser trascendentales para cumplir los objetivos instruccionales y lograr el desarrollo del conocimiento de los/as profesores/as en formación inicial –del que nos hablará el análisis retrospectivo–.

Por un lado, esta síntesis resulta ser particularmente útil para describir de forma detallada el contexto –por ejemplo, el ambiente de respecto y confianza– en el cual se desarrolló el curso, el funcionamiento y adaptación de las herramientas planificadas –por ejemplo, la metodología general de enseñanza–, y la constitución de nuevos instrumentos –por ejemplo, las técnicas y dinámicas de enseñanza–. En algunas ocasiones permite incluso, como vimos, ubicar –en voz de las personas involucradas– algunas acciones concretas que permitieron o promovieron la emergencia/funcionamiento de dicho contexto y herramientas.

Además, esta síntesis resulta fundamental para precisar las cuestiones de diseño que quedan abiertas. Entre ellas: los tiempos y cantidad de sesiones dedicadas a la experiencia de problematización; el uso de los grupos GeoGebra; la funcionalidad y forma de la discusión matemática, la transparentación y la preparación teórico-metodológica; el tratamiento de los fenómenos didácticos en el curso; el uso conjunto de la trayectoria hipotética de aprendizaje y la planificación de clase; y la gestión de las clases simuladas. Todas estas constituyen áreas de importante reflexión y potenciales cambios de cara a futuras implementaciones del curso optativo o el diseño de ejercicios similares de producción de datos, sean estos realizados por el mismo equipo de investigación o por terceros.

En suma, aunque este estudio no posee herramientas teóricas para analizar *stricto sensu* los componentes afectivos, didácticos, pedagógicos, etcétera que incluyen las observaciones de las personas involucradas –participantes e investigadores– respecto al curso, su descripción detallada es clave para, en futuras experiencias, poder producir una versión refinada y más robusta del curso optativo realizado, lo que cumple el objetivo de diseño de este tipo de investigaciones. El diseño inicial y dicha posibilidad de rediseño representa, además, de acuerdo con nuestros referentes metodológicos, un aporte de esta investigación al campo, en cuanto herramienta específica para el desarrollo del profesorado de matemáticas en formación inicial en el área de trigonometría.

7. Resultados del análisis de la actividad matemática

O no hay saber
o todo saber está condicionado socialmente.
— Luis Villoro

En este capítulo exponemos los resultados de la primera parte del análisis retrospectivo: la actividad matemática de los/as participantes durante la experiencia de problematización de las nociones trigonométricas. Utilizamos para ello dos secciones. En la primera describimos la actividad matemática y algunos fenómenos didácticos observados en el trabajo realizado por los/as profesores/as en formación inicial participantes. Mientras que en la segunda ofrecemos una síntesis general de dichos resultados, con el fin de atender el tercer objetivo específico de investigación, vinculado a este análisis, y puntualizar algunas observaciones finales importantes.

7.1. Actividad matemática

De acuerdo con el método utilizado, describimos la actividad matemática de los/as participantes según las tareas de la situación de aprendizaje y, en su interior, –dadas las fases de análisis– por participante y luego por grupo.

Recordamos que la situación de aprendizaje presentada a los/as profesores/as en formación inicial durante la experiencia de problematización se compone de cinco actividades, las cuales parten de la siguiente situación-problema (GeoGebra).

Consideremos el triángulo ABC, cuyo ángulo BAC mide 20º y los lados AB y AC miden 10 unidades cada uno (Figura 1).

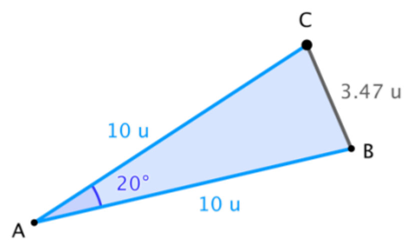


Figura 1. Situación-problema

7.1.1. Actividad 1: mantengamos dos lados fijos

La primera actividad de la situación de aprendizaje (GeoGebra) cuestiona a los/as participantes por la medida del lado opuesto del triángulo dado, cuando se duplica el ángulo de referencia.

Si mantenemos las longitudes de los lados AB y AC como fijas, y duplicamos el ángulo BAC (Figura 2).

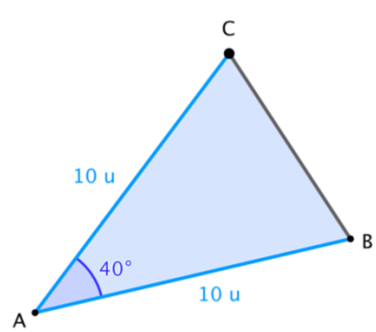


Figura 2. Dos lados fijos

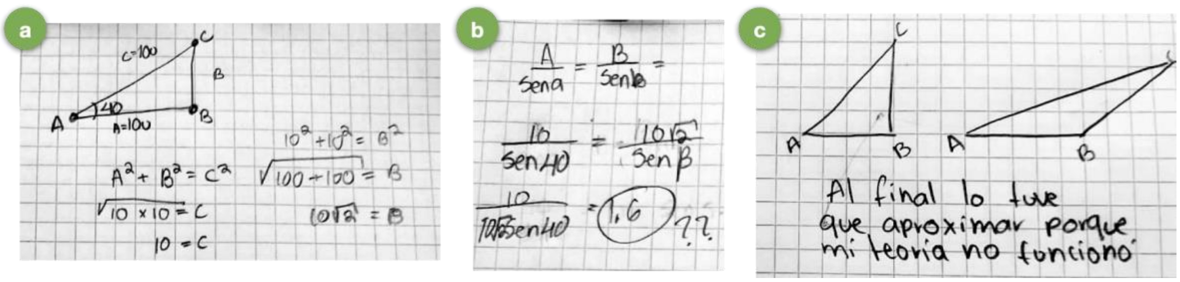
– ¿Cuánto crees que mide ahora el lado BC?, ¿por qué?

Por participante

Candy

Al atender la actividad 1 de la situación de aprendizaje, Candy bosqueja la situación-problema con un triángulo rectángulo y calcula la longitud del lado BC a través del teorema de Pitágoras (Figura 24a).

Figura 24
Actividad 1 – Candy



Luego, utiliza este resultado para calcular, mediante la ley de senos, el valor del seno del ángulo B (Figura 24b). Por último, descarta este último valor, considerando que ningún ángulo interior del triángulo rectángulo utilizado en el bosquejo podría medir 1.6 –aunque calculó el seno del ángulo–. Bosqueja nuevamente la situación-problema con un triángulo rectángulo y el aumento del ángulo B, y aproxima la longitud del lado opuesto a dicho ángulo en 15 unidades, considerando el cálculo inicial realizado y su percepción de que –al aumentar el ángulo de referencia– el lado opuesto crece aproximadamente un 50% (Figura 24c).

Al responder las preguntas planteadas en la actividad, Candy advierte que, al aumentar el ángulo de referencia, el lado opuesto también aumenta, y lo hace 'de igual manera' –cita siguiente–.

> *Al aumenta el ángulo BCA* la distancia del lado *BC aumenta de igual manera*, ya que las líneas que une los ángulos quedan lejanas, creo que mide 15 u. (Candy, 13:3 639.744 × 68.281 en Actividades – Candy)

Al consultarle a este respecto, explica que ‘de igual manera’ refiere a la *proporción* que guarda el aumento en el ángulo de referencia con el aumento del lado opuesto –cita siguiente–.

> Bueno, lo que… lo que yo intenté decir es que, no, pues si el ángulo aumenta, las distancias también aumentan, ¿no? Si el ángulo aumenta, no sé, tres grados, pues entonces <u>en proporción</u> […] <u>de unidades</u> [*simula comillas con sus dedos*] también aumenta la diferencia. (Candy, 5:12 49m 49s en S2. Problematización)

Esta breve descripción nos permite advertir que la *actividad* –en el sentido del modelo de anidación de prácticas– realizada por Candy en esta primera parte de la situación de aprendizaje fue calcular y estimar un segundo par ángulo-lado y caracterizar la relación ángulo-lado. Esto, partiendo de un contexto geométrico, a través de *acciones* –en el sentido del modelo de anidación de prácticas– como bosquejar, calcular, aproximar y describir, realizadas por medio de *nociones matemáticas* como el triángulo rectángulo, el teorema de Pitágoras y la ley de senos.

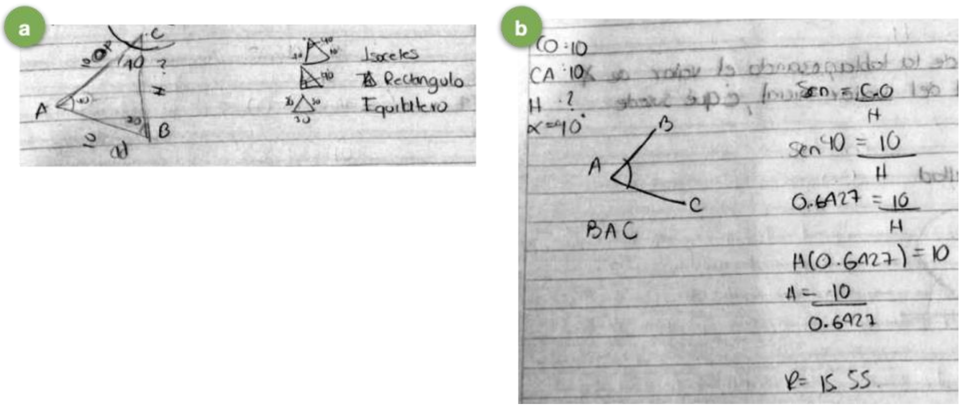
Nos permite, además, plantear dos observaciones adicionales importantes. Primero, subrayar la mención que Candy hace sobre cierta proporción entre el crecimiento del ángulo de referencia y el lado opuesto, en cuento primer indicio del significado lineal asociado a la relación ángulo-lado. Segundo, evidenciar algunos fenómenos didácticos previamente reportados en la disciplina, como el uso del triángulo rectángulo para modelar situaciones que no cumplen con sus características básicas, errores matemáticos al plantear y realizar los cálculos a través del teorema de Pitágoras y la ley de senos, e imprecisiones en la nomenclatura de las nociones geométricas involucradas –al nombrar el ángulo BAC como BCA en la cita 13:3, por ejemplo–.

Mercedes

Al resolver la actividad 1 de la situación de aprendizaje, Mercedes bosqueja la situación-problema e intenta deducir información adicional –el tipo de triángulo involucrado y los ángulos internos restantes del triángulo– (Figura 25a).

Posteriormente, designa los lados del triángulo conocidos como catetos de un triángulo rectángulo y calcula la longitud de BC como la hipotenusa del triángulo, con ayuda de la razón seno (Figura 25b).

Figura 25
Actividad 1 – Mercedes



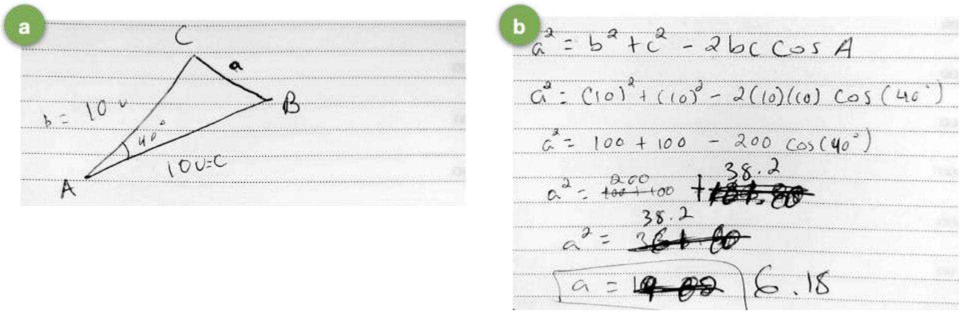
Así, la *actividad* realizada por Mercedes en esta primera parte de la situación de aprendizaje fue calcular un segundo par ángulo-lado. Esto, partiendo de un contexto geométrico, a través de *acciones* como bosquejar, deducir y calcular, realizadas por medio de *nociones matemáticas* como el triángulo rectángulo y la razón seno.

En su resolución también podemos advertir algunos fenómenos didácticos reportados previamente, como el uso del triángulo rectángulo para modelar situaciones que no cumplen con sus características básicas.

Santiago

Por su parte, al enfrentar la actividad 1 de la situación de aprendizaje, Santiago bosqueja la situación-problema basándose en la figura dada (Figura 26a) y calcula la longitud del lado BC a través de la ley de cosenos (Figura 26b).

Figura 26
Actividad 1 – Santiago



Adicionalmente, compara de forma explícita el resultado obtenido con el valor proporcional, el doble de la longitud inicial de BC, y con el valor del lado BC cuando el ángulo de referencia mide 80º –el doble del ángulo solicitado en la actividad 1–, y observa que, en ambos casos, no es exactamente el doble, lo que asocia inicialmente con la pérdida de decimales en los cálculos –cita siguiente–.

> Si bien *no es el doble exactamente*, o tal vez sea por *pérdida de decimales* por allí, pero sí es… sí es <u>casi</u> *el doble*, comparado con el tres punto y garra [refiriéndose al 3.47 u] que estaba en el original/en la figura original. Y solo por curiosidad, bueno, allí no lo escribí, pero aquí en la calculadora hice el cálculo con coseno de 80 también, y me daba como 11, entonces, también *casi como el doble* de… de 40, ¿no?… bueno, del ángulo de 40. (Santiago, 5:15 57m 26s en S2. Problematización)

Por último, coincide con Candy en que, al aumentar el ángulo de referencia, el lado opuesto también aumenta, aunque pone en duda que dicho crecimiento sea proporcional, debido a que el cálculo depende del coseno del ángulo y que las funciones trigonométricas son todas raras –cita siguiente–.

> Entonces, el problema aquí::: es que… pues, coseno::: o sea, coseno de 20 y coseno de 40 *no es tal cual el doble*, o sea, no por aumentar el doble del ángulo aumenta el valor el doble del coseno, porque, pues *las funciones trigonométricas son… todas raras*, ¿no? […] No hay un crecimiento <u>tal cual</u> proporcional, o por lo menos no muy claro, ¿no? (Santiago, 5:14 56m 41s en S2. Problematización)

En suma, la *actividad* realizada por Santiago en esta primera parte de la situación de aprendizaje fue calcular un segundo par ángulo-lado y caracterizar la relación ángulo-lado. Esto, partiendo de un contexto geométrico, a través de *acciones* como bosquejar, calcular, comparar y describir, realizadas por medio de *nociones matemáticas* como la ley de cosenos, la multiplicación y la resta.

Además, en el trabajo de Santiago advertimos dificultades en el uso de la calculadora para el cálculo de la longitud de BC a través de la ley de cosenos –de allí los tachones (Figura 26b)–, e irresolución sobre si la diferencia entre los valores calculados y los proporcionales devienen de la naturaleza de la noción matemática involucrada o del proceso de cálculo seguido.

De grupo

De forma general, durante esta primera actividad de la situación de aprendizaje, los/as profesores/as en formación inicial calcularon y/o aproximaron un segundo par ángulo-lado, la longitud del lado opuesto al duplicar el ángulo de referencia de la situación-problema. Además, con base en los bosquejos, cálculos, aproximaciones, comparaciones y descripciones realizadas, fueron capaces de comenzar a caracterizar la relación ángulo-lado –algo que no se solicita en la tarea–; en particular, coincidieron en que, cuando el ángulo de referencia crece, el lado opuesto del triángulo también crece, aunque la naturaleza –proporcional o no– y justificación –pérdida de decimales o la naturaleza de las nociones involucradas– de este crecimiento aún no se acuerdan.

Como adelantamos, la comparación entre los resultados obtenidos y los valores proporcionales, y la subsecuente discusión sobre el porqué no coinciden exactamente constituye el primer momento de confrontación con el significado lineal vinculado a la relación ángulo-lado que vivencian los/as participantes.

Por otro lado, entre las nociones y procedimientos matemáticos usados por los/as profesores/as en formación inicial para atender esta primera actividad de la situación de aprendizaje encontramos el triángulo rectángulo e isósceles, teorema de Pitágoras, ley de senos y de cosenos, razón seno, multiplicación y resta.

Estos resultados respecto a la actividad matemática de los/as participantes concuerdan con el propósito general e hipótesis de diseño declarados para esta actividad:

> Esta primera actividad está dedicada específicamente a la confrontación del significado lineal asociado a la relación ángulo-lado en el triángulo. En este sentido, se plantea el caso en el que se duplica la medida del ángulo comprendido entre los lados conocidos y se solicita determinar la longitud del lado opuesto a dicho ángulo y explicar –con uso o no de nociones o procedimientos matemáticos– el porqué de dicho resultado.
>
> Se espera que los/as participantes, en primera instancia, consideren que la longitud de BC pudiera ser el doble de la distancia inicial dada y, a medida incluyan herramientas matemáticas –especialmente geométricas y trigonométricas–, descubran que no es el doble de la longitud inicial. (Anexo 2)

Además de la descripción de la actividad matemática y la observación de un momento de confrontación del significado lineal en el trabajo de los/as participantes, hay algunos resultados adicionales interesantes de cara a próximas investigaciones o implementaciones de esta situación de aprendizaje.

Por ejemplo, pese a que la actividad consulta cuánto ‘crees’ que mide el lado BC al duplicar el ángulo BAC, –a diferencia de experiencias presenciales anteriores– los/as profesores/as en formación inicial tomaron un tiempo considerable para realizar bosquejos, cálculos y aproximaciones antes expresar una respuesta. Otra observación relevante es que los/as participantes, sin importar el tipo de triángulo utilizado, realizaron bosquejos a mano alzada de la situación-problema, y no construcciones geométricas con instrumentos concretos o recursos digitales.

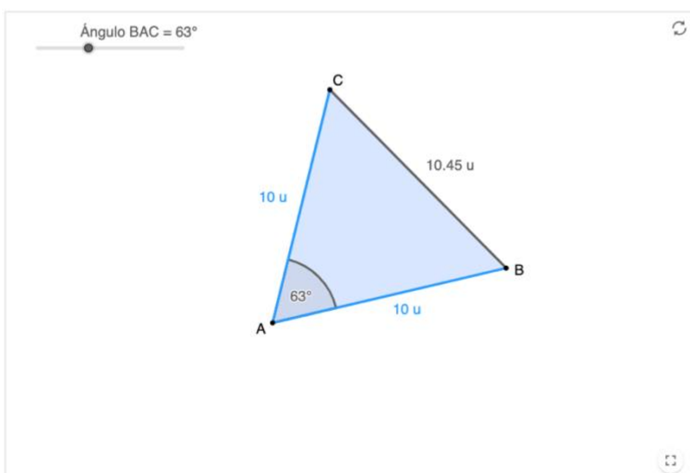
Entre los fenómenos didácticos observados, destacamos el predominio del uso del triángulo rectángulo y el teorema de Pitágoras, los errores al plantear y realizar los cálculos, la inexactitud de la nomenclatura y las dificultades en el uso de la calculadora.

Una última observación es que, como podría esperarse, las respuestas y reflexiones de Candy y Santiago –quienes cursan el octavo/último semestre de la carrera– incluyen no solo el cálculo/aproximación del lado opuesto al ángulo de referencia, sino también una primera descripción y debate respecto a la naturaleza de la relación ángulo-lado. Mientras que, hasta este punto, el trabajo e interacción con Mercedes –que cursa el quinto semestre– no refleja este tipo de reflexiones.

7.1.2. Actividad 2: más casos

La segunda actividad de la situación de aprendizaje (GeoGebra) proporciona a los/as participantes un applet GeoGebra que muestra la longitud del lado opuesto para valores del ángulo de referencia entre 0º y 180º, con intermedio de 1º, y les pide: determinar algunos pares ángulo-lado, compararlos y –con base en ello– caracterizar la relación.

Mueve el deslizador 'Ángulo BAC' para conocer la longitud del lado BC para diversos valores del ángulo BAC, bajo las mismas condiciones del caso anterior –manteniendo las longitudes de los lados AB y AC como fijas–.



Con los datos obtenido, completa la siguiente tabla:

Nº	Ángulo BAC	Lado BC
1	10°	
2	20°	
3	30°	
4	40°	
5	50°	
6	60°	

- En el primer caso de la tabla, cuando el valor del ángulo BAC es la mitad del valor inicial, ¿qué sucede con la medida del lado opuesto a dicho ángulo?, ¿BC también es la mitad?, ¿a qué crees que se debe este hecho?
- En el sexto caso de la tabla, cuando el valor del ángulo BAC es el triple del valor inicial, ¿qué sucede con la medida del lado opuesto a dicho ángulo?, ¿BC también es el triple?, ¿a qué crees que se debe este hecho?
- A la luz de los casos analizados, ¿cómo describirías la relación que se establece entre el ángulo de referencia y el lado opuesto a este?, ¿por qué?

Por participante

Candy

Al enfrentar la actividad 2 de la situación de aprendizaje, Candy parte de que, cuando el ángulo de referencia es 60º, el lado opuesto mide 10 unidades –por ser un triángulo equilátero– para establecer 1º-0.17 unidades como un par ángulo-lado que funge como proporción; así, multiplicando el 0.17 por la cantidad de grados dados en cada caso, Candy completa los valores de la tabla (Figura 27).

Figura 27
Actividad 2 – Candy

Nº	Ángulo BAC	Lado BC
1	10°	1.7
2	20°	3.4
3	30°	5.1
4	40°	6.8
5	50°	8.5
6	60°	

Luego, Candy compara los valores obtenidos a través del par ángulo-lado establecido como proporción con los valores ofrecidos por el applet incluido en la actividad y observa que los primeros son mayores en todos los casos. Concluye que el aumento quizá no es proporcional y que a partir de 43º la respuesta proporcional calculada será incorrecta, lo que atribuye a los errores de redondeo –cita siguiente–.

> Si multiplico en 0.17 (que son las u por cada °) el valor que me dará es correcto, sin embargo, a partir de los 43° este número *comienza a ser erróneo por el redondeo*. De igual manera, pude establecer que por cada grado que aumenta el ángulo CAB el lado BC también aumente, *quizá no es la misma proporción* pero si una cantidad aproximada (dependiendo de que tan grande es el ángulo). (Candy, 13:7 635.165 × 96.912 en Actividades – Candy)

Por último, Candy caracteriza la relación ángulo-lado, advirtiendo que el ‘aumenta de igual manera’ que usó en la actividad anterior no es del todo cierto y que, entre más grande sea el ángulo en cuestión, menos preciso es el valor proporcional calculado –cita siguiente–.

> En la primera actividad, mencioné que "aumenta de igual manera" esto lo comprobé con los ángulos de la tabla, lo primero que hice fue identificar cuanto mide el lado BC cuando el ángulo CAB mide 1°, sin embargo, al comprobarlo esto *no es del todo cierto* por que entra más grande es el ángulo, menos preciso es el resultado (si multiplico 0.17u por número de °). (Candy, 13:5 637.946 × 85.956 en Actividades – Candy)

En suma, la *actividad* realizada por Candy en esta segunda parte de la situación de aprendizaje fue calcular cuatro nuevos pares ángulo-lado y caracterizar la relación ángulo-lado. Esto, partiendo de un contexto geométrico y numérico-tabular, a través de *acciones* como establecer una proporción, calcular, comparar y describir, realizadas por medio de *nociones matemáticas* como el triángulo equilátero, la multiplicación y la resta.

Esta breve descripción de la actividad matemática de Candy nos permite, además, identificar un nuevo momento de confrontación del significado lineal atribuido a la relación ángulo-lado: el ‘aumenta de igual manera’, no es del todo cierto.

Mercedes

Por su parte, al atender la actividad 2 de la situación de aprendizaje, Mercedes determina las longitudes del lado BC con ayuda del applet proporcionado (Figura 28), compara estas longitudes entre sí y caracteriza la relación ángulo-lado, coincidiendo con sus compañeros en que, a medida que el ángulo se reduce, el lado opuesto también se va a reducir, y si el ángulo crece, el lado opuesto también lo hará.

Figura 28
Actividad 2 – Mercedes

Nº	Ángulo BAC	Lado BC
1	10°	1.74
2	20°	3.47
3	30°	5.18
4	40°	6.84
5	50°	8.45
6	60°	10

Así, la *actividad* realizada por Mercedes en esta segunda parte de la situación de aprendizaje fue calcular cuatro nuevos pares ángulo-lado y caracterizar la relación ángulo-lado. Esto, partiendo de un contexto geométrico y numérico-tabular, a través de *acciones* como comparar y describir, realizadas por medio de *nociones matemáticas* como la multiplicación y la resta.

Dos observaciones adicionales nos parecen relevantes sobre el trabajo realizado por Mercedes en esta parte de la situación de aprendizaje. Primero, que comenta que hay clases en las que sus profesores/as le dijeron que no importan los decimales, así que despreció algunas cifras decimales en la actividad. Por ejemplo, pese a notó que la medida del lado BC cuando el ángulo de referencia mide 10º 'se pasaba un poquito' de la mitad de la medida de BC cuando el ángulo mide 20º, concluyó que sí es la mitad –cita siguiente–.

> A medida que el ángulo ABC se reduce o crece el valor del lado BC, realiza la misma función, dependiendo el ángulo. En el caso del ángulo de 20, el lado BC *si es la mitad*. (Mercedes, 14:3 640.669 × 68.463 en Actividades – Mercedes)

Y, segundo, durante el cálculo de los nuevos pares ángulo-lado, Mercedes consulta sobre la relación existente entre la situación de aprendizaje y el trabajo con el círculo, sus ángulos centrales, cuerdas y arcos –cita siguiente–, pero esto no aparece en sus respuestas ni interacciones posteriores.

> Como lo del… lo del… ¿cómo se dice?... lo del *círculo*. Que no tiene nada que ver con el triángulo. Pero, en el círculo verdad que tiene la *cuerda*… ah, no, el *arco*, … y el *ángulo central*. Que cuando el ángulo (*central*) se va abriendo también la… se llama cuerda, ¿no?... <investigador-profesor: ambos están, la cuerda y el arco, ambos existen> Cuando se va abriendo el ángulo central el arco también. ¿Si tiene algo que ver con eso o no? (Mercedes, 14:3 640.669 × 68.463 en Actividades – Mercedes)

Santiago

Al afrontar la actividad 2 de la situación de aprendizaje, Santiago determina las longitudes del lado BC con ayuda del applet proporcionado (Figura 29).

Figura 29
Actividad 2 – Santiago

Nº	Ángulo BAC	Lado BC
1	10°	1.74u
2	20°	=3.47u
3	30°	=5.18u
4	40°	6.84u
5	50°	8.45u
6	60°	10u

Luego, reduce el ángulo de referencia del applet hasta 1º y establece el par 1º-0.17 unidades como un par ángulo-lado proporción; y, multiplicando los valores del ángulo BAC por 0.17, calcula los valores proporcionales de BC para los casos solicitados en la tabla. Después, compara los valores brindados por el applet con los valores proporcionales calculados, y concluye que da un valor cercano, pero que a medida el ángulo va creciendo estos valores se van alejando –cita siguiente–.

> Reducí a un grado, y me da que el valor era 0.17. Entonces multipliqué 0.17 por la cantidad de grados que iba abriendo, pero no me daba el valor real, ¿no?, me daba otro valor; *cercano*, pero conforme iba creciendo, como mencionaba el maestro, *se*

> *alejaba*. Entonces, a eso me refiero con algo parecido, con una proporcional casi como el… como… como el número por el que triplicas, duplicas, etc. (Santiago, 5:26 1h 50m 57s en S2. Problematización)

A continuación, compara las filas 1-2 y 6-2 de la tabla –completada con ayuda del applet– y concluye que las longitudes de BC no son exactamente la mitad –cita siguiente– y el triple, lo que asocia con que se deba realizar el cálculo a través del coseno del ángulo.

> *No es exactamente la mitad*. La mitad estrictamente sería 1.735u (y el valor que se marca es 1.74u). Sin embargo, *parece existir una relación parecida* y muy cercana a la mitad. Esto creo que se debe a que, el único valor que está variando es el ángulo y a este ángulo se le debe sacar el Coseno, *por lo que la relación no es exacta*. (Santiago, 12:4 640.311 × 88.534 en Actividades – Santiago)

Por último, Santiago caracteriza la relación ángulo-lado, al reiterar que a medida que el ángulo de referencia (de)crece, el lado opuesto también (de)crece, aunque aclara que no puede definir en qué proporción se da este crecimiento o decrecimiento. Además, al cuestionarle sobre a qué se refiere con querer encontrar una relación 'parecida a la proporcional', comenta que quizá la proporción no sea exactamente el doble, sino un poco menos, por ejemplo, cinco sextos –cita siguiente–.

> Sí, estaba tratando de encontrar una relación parecida [a una proporcional], por ejemplo, me refería a que… si hablamos de que… algo aumenta el doble… eh:::… esto podría aumentar… bueno, no sé, podría poner el ejemplo de que… no, no es, no es a lo que me refiero, pero… de que *un entero no es, pero podría ser cinco sextos*, ¿no?, a eso me refiero como que… casi. Como que… entonces, encontrar una proporcional… que, al multiplicarlo por el número de ángulos, nos diera… el valor del lado. (Santiago, 5:26 1h 50m 57s en S2. Problematización)

En suma, la *actividad* realizada por Santiago en esta segunda parte de la situación de aprendizaje fue calcular cuatro nuevos pares ángulo-lado y caracterizar la relación ángulo-lado. Esto, partiendo de un contexto geométrico y numérico-tabular, a través de *acciones* como establecer una proporción, calcular, comparar y describir, realizadas por medio de *nociones matemáticas* como la multiplicación y la resta.

De grupo

De forma general, durante esta segunda actividad de la situación de aprendizaje, los/as profesores/as en formación inicial calcularon cuatro nuevos pares ángulo-lado y, con base en el establecimiento de un par ángulo-lado proporción y la comparación –con los proporcionales y entre sí–, asociaron nuevas características a la relación ángulo-lado.

Más específicamente, al completar la tabla mediante el uso del applet y comparar las longitudes de BC entre sí, advirtieron que cuando el ángulo de referencia decrece, la longitud del lado opuesto también decrece. Esta ampliación de la característica anterior –que cuando el ángulo crece, el lado opuesto crece– está asociada al uso del applet, ya que este permite aumentar o disminuir de forma 'continua' la medida del ángulo de referencia –entre 0º y 180º– y observar 'en tiempo real' el cambio numérico y figural que esto produce en el lado opuesto del triángulo.

Observaron también que las longitudes de BC no mantienen la proporción existente entre sus respectivos ángulos de referencia, 'que no crecen de la misma manera'. En este punto, asocian este hecho al cálculo de las longitudes de BC –errores en el redondeo o a que se realice a través del coseno del ángulo de referencia–, no con la naturaleza misma de la relación.

Además, pese a que la actividad no lo solicitaba, los/as participantes también completaron la tabla mediante el uso de un par ángulo-lado proporción y compararon estos valores con los obtenidos a través del applet. Fruto de este cotejo, confirmaron que los valores no coincidían y que, entre más grande es el ángulo de referencia –muy notorio después de los 43º, según Candy–, la diferencia entre el valor proporcional y el valor arrojado por el applet es mayor.

Como mencionamos, esta comparación con los valores proporcionales y el consecuente descarte de afirmaciones previas sobre la relación ángulo-lado –como “aumenta de igual manera”–, constituyen nuevos momentos de confrontación del significado lineal que vivencian los/as participantes.

Dos puntos resultan sumamente interesantes a este respecto. Primero, aunque los/as participantes continúan caracterizando la relación ángulo-lado y diferenciándola de un comportamiento proporcional, en sus interacciones aluden a desconocer ‘en qué proporción’ se da el crecimiento o decrecimiento del lado BC o a querer encontrar una relación ‘parecida a la proporcional’ que la describa, lo que indica cierta persistencia del modelo proporcional asociado a la relación ángulo-lado. Segundo, desde la actividad anterior los/as participantes son conscientes de que el cálculo del lado BC es posible a través de la ley de cosenos, lo cual asocian parcialmente a que el cálculo no sea ‘exacto’ o no coincida con el proporcional, pero –hasta el momento– no se vincula con que la naturaleza de la relación ángulo-lado pueda ser trigonométrica.

Por otro lado, entre las nociones y procedimientos matemáticos usados por los/as profesores/as en formación inicial para atender esta segunda actividad de la situación de aprendizaje encontramos el triángulo equilátero, la multiplicación y la resta.

Estos resultados respecto a la actividad matemática de los/as participantes concuerdan con el propósito general e hipótesis de diseño declarados para esta actividad:

> Esta segunda actividad también está dedicada a la confrontación del significado lineal asociado a la relación ángulo-lado en el triángulo. Así, presenta seis valores del ángulo BAC y solicita se encuentre –con el uso de un applet– la longitud del lado opuesto correspondiente cada uno de ellos. Además, se pide explícitamente que se compare dos de los valores obtenidos con los valores proporcionales y que se describa la relación a la luz de dichas comparaciones.

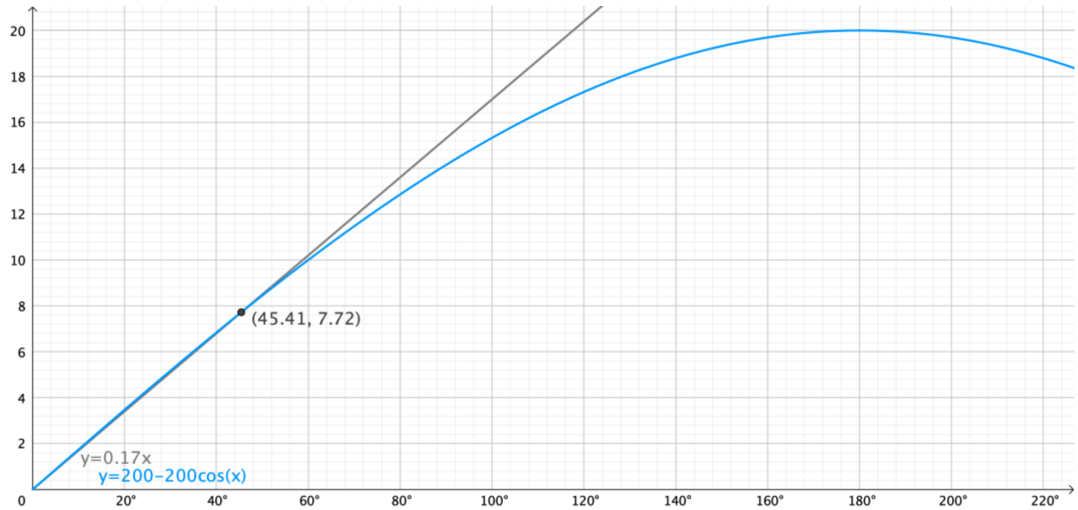
> Se espera que los/as participantes completen la tabla sin mayor problema; que se percaten de que los casos a comparar no son la mitad ni el triple de la longitud original –respectivamente–, pero que no puedan dar respuestas amplias sobre el porqué sucede esto; y que describan la relación como extraña, no proporcional, no lineal, etc. (Anexo 2)

Adicionalmente, hay tres observaciones que nos parecen relevantes. Primero, la detallada descripción del comportamiento matemático en cuestión que los/as participantes lograron hasta este punto. Por ejemplo, en esta actividad Santiago mencionó que –a diferencia del caso de 10º y 40º–, cuando el ángulo de referencia es 60º, el valor proporcional es mayor que la longitud de BC; mientras que Candy observó que a partir de 43º el valor proporcional comienza a ser significativamente mayor que el valor de BC.

Si graficamos ambos comportamientos –el proporcional y el trigonométrico– (Figura 30), podemos observar que la intercepción de ambas funciones se da cuando el ángulo de referencia mide aproximadamente 45º, así que, en efecto, previo a este punto los valores de BC dados por el applet son apenas mayores que los valores encontrados mediante el ángulo-lado proporción; mientras que después de la intercepción las diferencias entre ambos valores son cada vez mayores. Los/as participantes notaron estas características comparando únicamente los registros numéricos-tabulares.

Figura 30

Gráfica de la relación ángulo-lado y la proporcional usada por los participantes



Una segunda observación relevante en esta parte de la situación de aprendizaje es que –nuevamente– se observan diferencias entre el trabajo realizado por Candy y Santiago y el llevado a cabo por Mercedes. En particular, los primeros dos parecen querer asegurarse de que la relación es o no proporcional, y con este fin realizan cálculos, comparaciones y descripciones adicionales, mientras que Mercedes parece limitarse a hacer lo solicitado y responder las cuestiones planteadas en la actividad –cita siguiente–.

> […] Y::: pues yo no más, no le di tanta vuelta al::: al::: ¿cómo se llama lo que puso? <investigador-profesor: ¿al applet?> ¿Al qué? <investigador-profesor: ¿al applet?> ¡Ajá! Si lo (*pude*), pero no tanto, no más me ubiqué, la verdad, me ubiqué en los… más bien me ubiqué en los… en los estos que dio, en los puntos que dio. […] (Mercedes, 5:31 2h 3m 27s en S2. Problematización)

La última observación es acerca de los fenómenos didácticos, y es que, particularmente en las respuestas de Mercedes –al referirse de forma oral y escrita al ángulo de referencia como ángulo ABC, por ejemplo–, se observa nuevamente imprecisión en el uso de la nomenclatura de las nociones geométricas.

7.1.3. Actividad 3: más casos aún

La tercera actividad de la situación de aprendizaje (GeoGebra) proporciona a los/as participantes una tabla de longitudes del lado opuesto para distintos valores del ángulo de referencia, que van de 10º a 180º, con un intermedio de 10º, y les pide caracterizar la relación ángulo-lado a la luz de la nueva información disponible.

En la siguiente tabla se muestran los valores aproximados del lado BC para una amplia variedad de valores del ángulo BAC.

N.	Ángulo BAC	Lado BC
1	10°	1.74 u
2	20°	3.47 u
3	30°	5.18 u
4	40°	6.84 u
5	50°	8.45 u
6	60°	10 u
7	70°	11.47 u
8	80°	12.86 u
9	90°	14.14 u
10	100°	15.32 u
11	110°	16.38 u
12	120°	17.32 u
13	130°	18.13 u
14	140°	18.79 u
15	150°	19.32 u
16	160°	19.7 u
17	170°	19.92 u
18	180°	20 u

– Ahora que cuentas con más información, ¿cómo describirías la relación que se establece entre el ángulo de referencia y el lado opuesto a este?, ¿por qué?

Por participante

Candy

Al atender la actividad 3 de la situación de aprendizaje, Candy analiza los valores de BC para los ángulos de referencia entre 10º y 180º –con un intermedio de 10º– proporcionados en la tabla y, con base en ello, describe y denomina la relación ángulo-lado como ‘medio proporcionalidad directa’, dado que cumple con la mitad de la definición: ambas (de)crecen a la vez, pero no lo hacen en la misma proporción –cita siguiente–.

> Cuando tuve que encontrar una relación… ¡Ajá!, cuando establecer una relación como tal, me acordé del concepto de relación y función, que relación solamente tiene uno para cada uno y la función, pues, puede tener varios, ¿no? Y luego dije 'no, necesito algo más profundo', y me acordé que, este::: ambas variables aumentan… progresivamente, no en la misma proporción, pero ambas aumentan y también, sí, pues, si disminuyen ambas disminuyen. Basándome en esto, yo llegué a la conclusión de que son *medio proporcionalidad directa*, solo la mitad, porque, allí está el final de mi… de mi conclusión [*lee su respuesta en la pantalla compartida*], porque solo cumplen con la mitad del concepto. (Candy, 6:1 17m 40s en S3. Problematización)

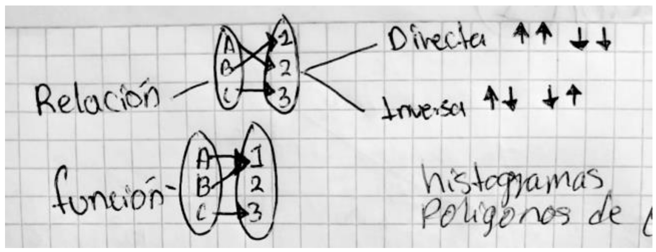
Además, concuerda con Santiago en que el comportamiento de la relación ángulo-lado les recordó a las funciones logarítmicas, pero menciona que –a diferencia de la primera– las segundas sí crecen igual, porque son base 10 –cita siguiente–.

> A mí me parece súper interesante [la intervención de Santiago], sobre todo cuando mencionó que llegó a pensar en los logaritmos, porque yo también pensé en los logaritmos, porque dije 'crece, pero no crece de manera igual', pero, pues, los logaritmos sí crecen igual porque, pues, base 10, ¿no? (Candy, 6:33 27m 33s en S3. Problematización)

Así, la *actividad* realizada por Candy en esta tercera parte de la situación de aprendizaje fue caracterizar y denominar la relación ángulo-lado. Esto, partiendo de un contexto numérico-tabular, a través de *acciones* como analizar y describir, en los cuales intervinieron *nociones matemáticas* como la proporcionalidad directa y las funciones logarítmicas.

Tres observaciones adicionales nos parecen importantes. Primero, que 'partiendo' su definición de proporcionalidad directa, Candy vuelve a denominar la relación ángulo-lado como proporcional, lo que asociamos a la persistencia del modelo proporcional al estudiar esta relación. Segundo, que descarta el comportamiento logarítmico dada su consideración de que, al ser 'base 10', los logaritmos decimales 'sí crecen igual'. Y, tercero, por las figuras de su libreta (Figura 31) y lo mencionado al respecto, la conceptualización de Candy de una relación parece ser cercana a la de una función biyectiva; mientras que su definición de relación proporcional directa parece corresponderse con el 'tradicional': "cuando uno (de)crece el otro también (de)crece".

Figura 31
Actividad 3 – Candy



Mercedes

Por su parte, al resolver la actividad 3 de la situación de aprendizaje, Mercedes analiza los valores de BC para los ángulos de referencia entre 10º y 180º –con un intermedio de 10º– proporcionados en la tabla y describe la relación ángulo-lado, reiterando que cumple con que, cuando el ángulo de referencia aumenta, el lado BC también aumenta, aunque no exactamente el doble o el triple –cita siguiente–.

> Que a media que el ángulo crece el lado opuesto también, pero si el ángulo aumenta el doble o el triple, el lado opuesto sigue aumentado, pero ya *no es considerado el doble; puesto que no es exacto*. (Mercedes, 14:7 634.32 × 80.253 en Actividades – Mercedes)

Además, menciona que, aunque no lo hizo, de forma similar a Santiago, ella pensó en restar pares consecutivos de lados BC –cita siguiente–.

> Y::: Yo también lo pensé… sí pensé en restar, pero me enfoqué… no me enfoqué tanto sacar… pues no lo resté, pero sí lo pensé. De una vez me enfoqué en… pues en redactar. (Mercedes, 6:5 28m 49s en S3. Problematización)

En suma, la *actividad* realizada por Mercedes en esta tercera parte de la situación de aprendizaje fue caracterizar la relación ángulo-lado. Esto, partiendo de un contexto numérico-tabular, a través de *acciones* como analizar los pares ángulo-lado proporcionados y describir la relación.

Santiago

Por último, al atender la actividad 3 de la situación de aprendizaje, Santiago analiza los valores de BC para los ángulos de referencia entre 10º y 180º –con un intermedio de 10º– proporcionados en la tabla, calcula y compara las primeras diferencias del lado BC, y, con base en ello, describe la relación ángulo-lado.

Reitera la característica observada previamente, cuando el ángulo de referencia aumenta, el lado BC también aumenta y –producto del análisis de las diferencias– agrega que este aumento, a medida nos acercamos a 180º, es cada vez menor –cita siguiente–.

> Fui restando cada valor de la tabla con el anterior, para conocer la diferencia entre uno y otro. La primera diferencia es 1.73, y la siguiente es 1.71, luego 1.66, y así sucesivamente va disminuyendo la distancia entre estos dos valores hasta que la diferencia en el último caso es de 0.08. Al igual que en los casos anteriores, diría que la relación ente el ángulo de referencia y el lado opuesto a este sería que, *mientras uno aumenta, el otro también aumenta*. Conforme el valor del ángulo se acerca a 180, *el aumento en el lado opuesto será menor*. (Santiago, 12:8 638.672 × 117.276 en Actividades – Santiago)

Además, como adelantamos, Santiago comenta que los aumentos en las diferencias se van acumulando, y compara esta característica de la relación ángulo-lado con el funcionamiento de los exponenciales y logaritmos –cita siguiente–.

> Ahorita, conversando, escuchando y pensando en esto… que::: ya lo habíamos comentado ayer, ¿no? […] Que pues la diferencia como, el ejemplo mismo que yo di, que de 90 a 180, este, ya se notaba muchísimo, pero esa… ahora lo noto porqué se nota tanto, porque, aunque del 90 al 100 no se nota tanto, pero como del 100 al 110, o sea, o sea, *se van acumulando*. Entonces, esto me hizo pensar, no… no… no le

hallé relación, porque lo pensé ya aquí en el desarrollo, ¿no?, *algo así funcionan también los exponentes, los logaritmos*, ¿no?, que de pronto se empieza a notar mucho, ¿no?, de poco en poco. (Santiago, 6:3 25m 44s en S3. Problematización)

Así, la *actividad* llevada a cabo por Santiago en esta tercera parte de la situación de aprendizaje fue caracterizar la relación ángulo-lado. Esto, partiendo de un contexto numérico-tabular, a través de *acciones* como analizar, calcular, comparar y describir, realizadas por medio de *nociones matemáticas* como la resta.

De grupo

De forma general, durante esta tercera actividad de la situación de aprendizaje, los/as profesores/as en formación inicial analizaron los valores de BC dados, calcularon y compararon las primeras diferencias de dichas longitudes y, con base en dichos cálculos y análisis, caracterizaron y denominaron la relación ángulo-lado.

Advirtieron, además, una nueva característica de la relación ángulo-lado –cuando el ángulo de referencia crece, el lado BC crece, pero sus crecimientos son cada vez menores–; asociaron el comportamiento general de la relación ángulo-lado con el de las funciones logarítmicas y exponenciales; y denominaron dicha relación como medio proporcionalidad directa, dado que al (de)crecer el ángulo de referencia también (de)crece el lado opuesto, aunque no lo hacen en la misma proporción.

Como dijimos, esta vuelta a la proporcionalidad podría estar vinculada a la persistencia del modelo proporcional al estudiar la relación ángulo-lado. Mientras que el continuo refinamiento de las características de la relación ángulo-lado –hasta el punto de equipararlas con otras funciones trascendentes– constituyen momentos de resignificación de la relación ángulo-lado.

Entre las nociones y procedimientos matemáticos involucrados por los/as participantes en esta actividad de la situación de aprendizaje encontramos la proporcionalidad, las funciones exponenciales y logarítmicas, y la resta.

De nueva cuenta, estos resultados respecto a la actividad matemática de los/as profesores/as en formación inicial concuerdan con el propósito general e hipótesis de diseño declarados para esta actividad:

> Esta tercera actividad apunta a que los/as participantes comiencen a analizar la naturaleza de la relación ángulo-lado. Con esto en mente, se le presenta un conjunto de 18 pares ángulo-lado opuesto y se le pide que, con base en dichos casos, describan la relación.
>
> Se espera que los/as participantes utilicen estrategias numéricas (como el cálculo de diferencias) y algebraicas (como sustituir valores en una formula general) para corroborar que no es una relación lineal e intentar descifrar qué tipo de relación es la puesta en juego. Además, se espera que, de forma similar a la actividad anterior, describan la relación como extraña, no proporcional, no lineal, etc. (Anexo 2)

Una observación adicional relevante es la diferencia entre el trabajo realizado por los/as participantes; Candy y Santiago –a diferencia de Mercedes– realizan nuevamente cálculos, comparaciones y denominaciones más allá de lo solicitado.

7.1.4. Actividad 4: ¿y las diferencias?

La cuarta actividad de la situación de aprendizaje (GeoGebra) muestra a los/as participantes los valores de BC y de sus primeras, segundas, terceras y cuartas diferencias, para ángulos de referencia que van de 0º a 180º, con un intermedio de 10º, y les pide interpretar algunos niveles de diferenciación y denominar la relación ángulo-lado.

En la siguiente tabla se muestran los valores aproximados del lado BC para una amplia variedad de valores del ángulo BAC. Cambia el valor del deslizador 'Nivel de diferencia' para observar varios niveles de diferencias entre las longitudes de BC.

Nivel de diferencia

Ángulo BAC	Lado BC (u)	1ra diferencia	2da diferencia	3ra diferencia	4ta diferencia
0°	0	1.74			
10°	1.74	1.73	-0.01	-0.01	
20°	3.47	1.7	-0.03	-0.01	0
30°	5.18	1.66	-0.04	-0.01	0
40°	6.84	1.61	-0.05	-0.01	0
50°	8.45	1.55	-0.06	-0.01	0
60°	10	1.47	-0.08	-0.01	0
70°	11.47	1.38	-0.09	-0.01	0
80°	12.86	1.29	-0.1	-0.01	0
90°	14.14	1.18	-0.11	-0.01	0
100°	15.32	1.06	-0.12	-0.01	0
110°	16.38	0.94	-0.12	-0.01	0
120°	17.32	0.81	-0.13	-0.01	0
130°	18.13	0.67	-0.14	-0.01	0
140°	18.79	0.52	-0.14	0	0
150°	19.32	0.38	-0.15	0	0
160°	19.7	0.23	-0.15	0	0
170°	19.92	0.08	-0.15		
180°	20				

- En términos de la situación-problema original, ¿qué significan la primera y segunda diferencia de las longitudes de BC?
- Con base en lo observado hasta el momento, ¿consideras que la relación entre el ángulo BAC y el lado BC podría ser lineal?, ¿por qué?
- Con base en lo observado, ¿consideras que dicha relación podría ser cuadrática o cúbica?, ¿por qué?

Por participante

Candy

Al resolver la actividad 4 de la situación de aprendizaje, Candy analiza los distintos niveles de diferenciación dados –mostrando solo dos unidades decimales– y las describe: van de mayor a menor, cada vez son números más pequeños, y al final –en la cuarta diferencia– llegan al cero absoluto.

Al aumentar la cantidad de cifras decimales cambia su descripción, observando que aún no logran llegar al cero –aunque no explicita qué significaría llegar al cero en las diferencias–, que se necesitarían algunos niveles más y quien sabe si aun así llegarían –cita siguiente–.

> Estoy viendo que::: donde creí… efectivamente, así como mencionan ambos de mis compañeros, donde creíamos que no había una diferencia, donde realmente (*ya*) no… no la mirábamos, decíamos '¡ah, ya!, <u>bien hecho</u>, cero, lo logramos', no existe. Bueno… ajá, no, no existe, todavía no. Quizá *ocuparíamos… algunas restas más para poder llegar, y quien sabe si lo lograríamos*. (Candy, 6:9 50m 47s en S3. Problematización)

Luego, alude a que ahora comprende por qué se usa la ley de coseno para calcular BC, por qué no hay una fórmula fácil para realizar el cálculo –cita siguiente–.

> Pero entiendo, o bueno, al menos… creo yo, que entiendo porque no puedes encontrar una… una medida exacta de qué tanto va subiendo o qué tanto va bajando, ¿no? Ahora entiendo porque se calcula con ley de…de cosenos, ¿era ley de cosenos?, ¿qué usaste [Santiago]? Bueno, aquí lo tengo apuntado [*revisa sus apuntes*], ¿no lo tengo apuntado? ¡Ah, sí!, <u>ley de cosenos</u>. Sí, *por eso se hace con ley de cosenos, ¿no?, por eso no se hace simplemente una fórmula mágica que te diga '¡ah, sí!, sumas este y multiplicas por este y ya, tan tan'*. Pero::: pues… es algo más complicado, algo más… mmm::: necesito un análisis más profundo para darte cuenta que no hay como que una fórmula mágica, <u>fácil</u>, que no involucre…eh::: estas cosas, las… (*incomprensible*) trigonométricas… ¿las identidades trigonométricas? ¡ajá! (Candy, 6:9 50m 47s en S3. Problematización)

No obstante, hacia el final de la actividad, Candy denomina a la relación ángulo-lado como lineal, dado que recuerda de sus prácticas profesionales que hay gráficas lineales que no incluyen todos los puntos –cita siguiente–; por lo mencionado y algunos bosquejos en su libreta (Figura 32), entendemos que se refiere a un diagrama de dispersión.

> Respecto ser lineal, yo difiero con ellos, porque yo digo '*sí, sí es lineal'* [*mientras se ríe*]. Hace poquito… pero esto, esto, supongo que es por lo mismo de que cada uno vive cosas diferentes, ¿no?... hace poquito… eh::: tuve::: clases, o bueno, di clases…

prácticas, sobre los tipos de gráficas, ¿no? Vimos histogramas, polígonos de frecuencia y los otros tipos de gráficas, <u>entonces resulta</u> que hay un tipo de gráfica que *sí es lineal, pero no es como estrictamente una línea, sino como que es la línea y tiene como que puntitos dispersos* [*simula la recta y puntos con sus manos*], pero sigue siendo lineal; o en mi cabeza sí lo sigue siendo. Entonces yo puse que sí es lineal, a pesar de que no tiene… ¡ah!, pues allí está escrito [*lee sus respuestas en la pantalla compartida*], ¿no?... eh::: *no tiene la misma proporción ni la misma medida, pero sí la consideré lineal* [*simula una recta con sus manos*]. (Candy, 6:9 50m 47s en S3. Problematización)

Figura 32
Actividad 4 – Candy

Por último, Candy descarta que sea una función cuadrática, por ser una relación lineal –cita siguiente–.

No, al considerarla como una relación lineal, no se permite o no tendría lógica (para mí) cambiarla a una función, por el concepto de relación. (Candy, 13:12 634.352 × 66.042 en Actividades – Candy)

Así, la *actividad* llevada a cabo por Candy en esta cuarta parte de la situación de aprendizaje fue caracterizar y denominar la relación ángulo-lado. Esto, partiendo de un contexto numérico-tabular, a través de *acciones* como analizar, describir y denominar, realizadas por medio de *nociones matemáticas* como la resta, relaciones y funciones, y representaciones gráficas de datos.

Además, subrayamos cuatro observaciones adicionales importantes. Primero, la aludida ‘separación’ que los/as participantes manifiestan entre cómo se calcula la longitud de BC dado un valor del ángulo de referencia y la naturaleza de la relación ángulo-lado; en este caso, por ejemplo, Candy manifiesta entender el por qué se calcula BC con la ley de cosenos, pero etiqueta la relación como lineal. Segundo, la indistinción de las nociones trigonométricas, denominadas –en este caso, cita 6:9– identidades trigonométricas. Tercero, la asociación que Candy establece entre el comportamiento de la relación ángulo-lado y los diagramas de dispersión, que menciona haber enseñado recientemente en sus prácticas profesionales. Y cuarto, que se descarte el que la relación ángulo-lado sea una 'función' cuadrática o cúbica dado que se denomina una 'relación' lineal, radica la atención nuevamente en la conceptualización de Candy respecto a las nociones de relación y función matemática.

Mercedes

Por otro lado, al atender la actividad 4 de la situación de aprendizaje, Mercedes analiza los distintos niveles de diferenciación dados –mostrando solo dos unidades decimales– y caracteriza la relación ángulo-lado. Menciona que, observando los valores de la tabla, no es una ecuación lineal; que imaginó que podría ser una ecuación cuadrática, pues los valores de BC subían y bajaban –cita siguiente–.

> Coincido con él [con Santiago] en que… no::: que no es una… una::: que no es una… que no es una… que *no es una ecuación lineal*, que no es lineal. Pero yo puse, profe, en la parte de abajo, en el tercero, […] que… es que yo, no grafiqué nada, yo… mi imaginación… *yo imaginé que podría ser una ecuación cuadrática*, porque… haz de cuenta que yo me guie con… yo le puse acá en los, en la gráfica, digo, en la tabla… ¡ah, sí!, porque veo que los números… bueno… a lo mejor no estoy… yo me puse creo que en la cuarta potencia, y en esa… me guie por esa… en la cuarta o a la quinta… miré que estaban, los números iban de mayor a menor y luego otra vez subía, creo que subía. Entonces, la cuadrática creo que tiene forma de una… de sube baja y luego sube, entonces yo imaginé eso. (Mercedes, 6:15 1h 16m 54s en S3. Problematización)

Así, denomina la relación como no lineal, porque no tiene una secuencia, 'no es constante'; y como cuadrática, basándose en que parece tener un punto máximo, aunque evidencia dudas de este último argumento –citas siguientes–.

Cuadrática, porque los valores incrementan y disminuyen. (Mercedes, 14:10 638.382 × 71.282 en Actividades – Mercedes)

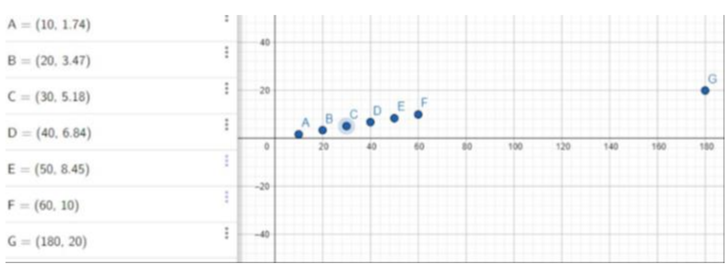
¿Verdad que la cuadrática llega a un punto… que ya no puede ser menor y ya…? <investigador-profesor: tiene un máximo o un mínimo, dependiendo si la concavidad es hacia abajo tiene un máximo, que es único, un valor único, y si es hacia el otro lado, tiene un mínimo> Ajá, entonces no creo que sea… ¿eso no tiene un valor máximo o mínimo?... ¿o sí tiene un valor máximo o mínimo? (Mercedes, 6:16 1h 20m 27s en S3. Problematización)

En suma, la *actividad* realizada por Mercedes en esta cuarta parte de la situación de aprendizaje fue caracterizar y denominar la relación ángulo-lado. Esto, partiendo de un contexto numérico-tabular, a través de *acciones* como analizar, describir y denominar, en las que se involucraron *nociones matemáticas* como función lineal, función cuadrática y punto máximo.

Santiago

Al atender la actividad 4 de la situación de aprendizaje, Santiago grafica algunos pares ángulo-lado con ayuda de GeoGebra (Figura 33) y observa que los puntos no son colineales, aunque explicita no estar seguro si eso implica que la relación no es lineal –cita siguiente–.

Figura 33
Actividad 4 – Santiago



Mmm::: Pues dije ‘bueno, pues, podemos tabular’ [refiriéndose a graficar], ¿no?, tabular, este::: considerando dos variables, una variable es el ángulo y otra variable es la longitud del lado opuesto… y::: y dije ‘bueno, tabulo’, pero pues no lo hice en el cuaderno, ¿no?, dije ‘bueno, pues lo hago en GeoGebra’, entonces… empecé a poner coordenadas, eh::: considerando *x* el ángulo y como variable dependiente, pues, el lado opuesto. Puse las coordenadas y parece, parece que sí es como una especie de línea, pero no es una línea recta, es decir, no son… colineales, ¿no?, los puntos, si no me equivoco, es el término. Entonces, no están en la misma línea recta… mmm:::: aunque no sé si a eso se refiere con 'lineal' la pregunta, ¿no?, porque no dice si son de una línea recta, pero así lo entiendo yo, ¿no? (Santiago, 6:12 1h 14m 16s en S3. Problematización)

Luego, analiza los distintos niveles de diferenciación dados y comenta que previamente pensó en calcular las diferencias de las diferencias, pero que no lo hizo. Al aumentar la cantidad de cifras decimales, observa que esto de llegar al cero con las diferencias parece algo de nunca acabar –aunque tampoco alude a qué significaría llegar al cero en las diferencias–, y que le hace pensar en que quizá las diferencias tengan infinitos decimales, que sean números irracionales –citas siguientes–.

Sí, sobre todo… la cuarta columna, ¿no?, donde pensábamos que ya no había diferencia, pero, pues, allí está, ¿no?, sigue habiendo diferencia. Entonces… pues, es algo de::: *de no acabar*, ¿no? (Santiago, 6:7 47m 15s en S3. Problematización)

Bueno, al ver tantos decimales, este, no sé, pienso… *no sé si serán infinitos*, este… esos serían pues *números irracionales*, entonces, ahí hay… está más interesante la cosa, pero… pero pues por lo menos ya está claro que::: que no hay nada claro, ¿no?, o sea, que no es un número… eh::: pues sí, constante, como habíamos pensado al inicio, ¿no? Sino que, pues,… si va disminuyendo como ya… visto en lo anterior ejercicio y la diferencia es cada vez menor, y menor, y menor, pero *parecen números irracionales*, ¿no?, todos, no sé. (Santiago, 6:8 49m 55s en S3. Problematización)

Por último, denomina la relación ángulo-lado. Descarta que sea lineal, con base en la no-colinealidad de los puntos observada en su gráfica y con el no poder representar la relación mediante una ecuación lineal –cita siguiente–.

Eh::: también pues no podríamos sacar… o sea, dije 'bueno, a ver, ¿podría escribirse esto en una ecuación?' *Pues no en una ecuación lineal por lo menos*, porque…eh::: la pendiente pues no exis… o sea, la pendiente se obtendría con y_2 menos y_1, entre

> x_2 menos x_1, porque tenemos varios puntos, pero la pendiente variaría de un punto a otro, ¿no?, o sea, *no hay una pendiente que se man… que permanezca para todos los puntos*. (Santiago, 12:11 636.988 × 66.607 en Actividades – Santiago)

También descarta que sea cuadrática o cúbica, con base en dicha gráfica –cita siguiente–.

> Y::: y tampoco me parece cuadrática ni cúbica… ya viendo la figura que obtuve en GeoGebra, que allí les mandé la foto, les decía que más bien me parece una especie de…de línea que va cayendo, como una especie de línea curveada, ¿no? Entonces… no me parece que tenga una… que se pueda representar con una ecuación *x*, digo, *y* igual a *x* al cuadrado o *y* igual a *x* cúbica o *y* igual a *x* más algo, ¿no? Por lo menos con lo que vi. (Santiago, 6:14 1h 15m 45s en S3. Problematización)

Así, la *actividad* realizada por Santiago en esta cuarta parte de la situación de aprendizaje fue caracterizar y denominar la relación ángulo-lado. Esto, partiendo de un contexto numérico-tabular, a través de *acciones* como graficar, analizar, describir y denominar, realizadas por medio de *nociones matemáticas* como las funciones algebraicas y los números irracionales.

Consideramos importantes dos anotaciones adicionales respecto al trabajo de Santiago en esta actividad. Primero, pese a que agrega elementos gráficos y algebraicos al análisis de la relación ángulo-lado, explicita no estar seguro si estos son suficientes para garantizar que esta relación no es lineal; asociamos esto a la conceptualización de las funciones lineales y a la persistencia del significado lineal asociado a dicha relación. Segundo, la observación de que el cálculo de niveles de diferenciación parece algo de ‘nunca acabar’, la posible infinita cantidad de decimales, y la naturaleza irracional de los valores de BC y sus diferencias son características inéditas en el proceso de resignificación de la relación ángulo-lado de los/as participantes.

De grupo

De forma general, durante esta cuarta actividad de la situación de aprendizaje, los/as participantes graficaron, analizaron y describieron los valores de BC y sus sucesivas diferencias, y, con base en ello, caracterizaron y denominaron la relación ángulo-lado.

Fruto de estas acciones y actividades los/as profesores/as introdujeron la posibilidad de que se requieran infinitos niveles de diferenciación para 'llegar al cero absoluto', aunque ninguno explicó qué implicaría encontrar ceros en las diferencias de los valores de BC; describieron la 'apariencia' de los valores de BC, una línea curva, con una concavidad negativa; plantearon también la posibilidad de que los cálculo de BC y sus diferencias tuvieran infinitas cifras decimales y que fueran números irracionales; y denominaron, a la vez, la relación ángulo-lado como lineal –con puntos fuera–, cuadrática y no-lineal ni cuadrática ni cúbica.

Como adelantamos, entendemos el denominar la relación como lineal –con puntos fuera– o la inseguridad respecto a su no linealidad, pese a los argumentos numéricos, algebraicos y gráficos vertidos hasta este punto, como indicios de la persistencia del significado lineal durante la confrontación y resignificación de la relación ángulo-lado.

Por otro lado, entre las nociones y procedimientos matemáticos involucrados por los/as profesores/as en formación inicial en el transcurso de esta actividad encontramos la resta, relaciones y funciones, representaciones gráficas de datos, punto máximo, números irracionales.

Estos resultados respecto a la actividad matemática de los/as participantes cumplen con el propósito general y parcialmente con las hipótesis de diseño declarados para esta actividad:

> Esta cuarta actividad pretende que los/as participantes analicen la posibilidad de que la relación ángulo-lado BC sea cuadrática o cúbica. Para ello, se presenta un applet GeoGebra que permite observar las primeras, segundas, terceras y cuartas diferencias entre las longitudes del lado opuesto para una amplia variedad de valores

del ángulo BAC. Además, este applet también permite variar la cantidad de cifras decimales que muestran los valores del lado opuesto, así como sus diferencias.

Se espera que los/as participantes observen que las primeras diferencias entre los valores del lado BC aluden a si la longitud del segmento crece o decrece –a medida el ángulo crece de 0º a 180º–, mientras que las segundas diferencias nos indican si crece o decrece en mayor o menor medida durante los cambios del ángulo. Además, se espera que los/as participantes coincidan en que la relación ángulo-lado opuesto no es lineal dado que no tiene un patrón, sus primeras diferencias no son constantes, etc.; y que no es de naturaleza cuadrática o cúbica pues su segunda y tercer nivel de diferenciación no es constante. (Anexo 2)

Lo dicho respecto a las hipótesis se debe a que, aunque Mercedes menciona que la relación no es lineal 'porque no tiene una secuencia, no es constante', sus colegas la denominan lineal –con puntos fuera– o no-lineal, con base en argumentos algebraicos y gráficos, y no fruto de lo observado en las diferencias sucesivas del valor de BC. Algo similar sucede con la denominación de no-cuadrática o no-cúbica, no se utilizan para ello las referencias a los niveles de diferenciación ni los argumentos analíticos que se esperaban.

Dos observaciones adicionales nos parecen importantes acerca de esta actividad. Primero, que los/as profesores/as en formación inicial se anticipan nuevamente a la actividad siguiente, graficando o 'imaginando la forma' de la relación ángulo-lado como estrategia para atender las actividades. Segundo, la aludida 'distancia' entre cómo se calculan los valores de BC y la naturaleza de la relación ángulo-lado.

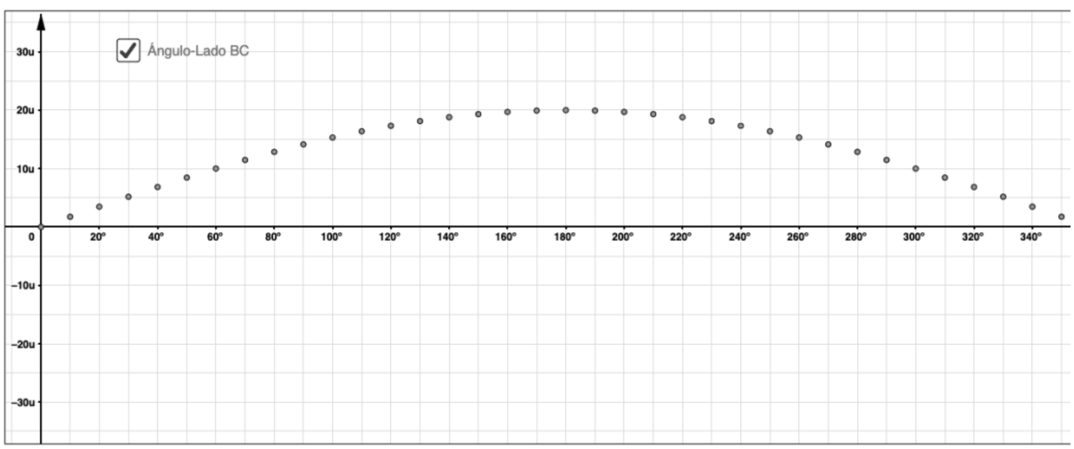
7.1.5. Actividad 5: un contexto gráfico

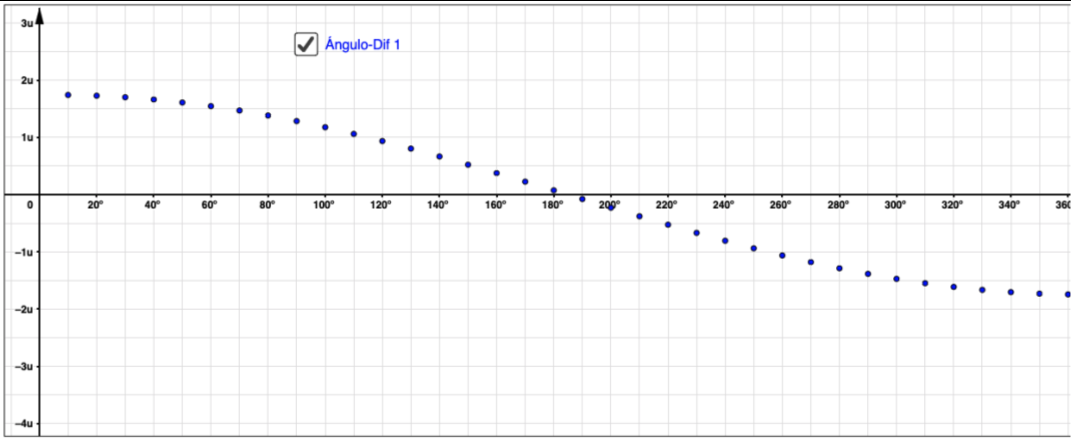
La quinta y última actividad de la situación de aprendizaje (GeoGebra) muestra a los/as participantes las gráficas de las longitudes de BC y de sus primeras, segundas y terceras diferencias, para valores del ángulo de referencia entre 0º y 360º, con un intermedio de 10º, y les pide interpretar algunas de las gráficas y caracterizar nuevamente la relación ángulo-lado.

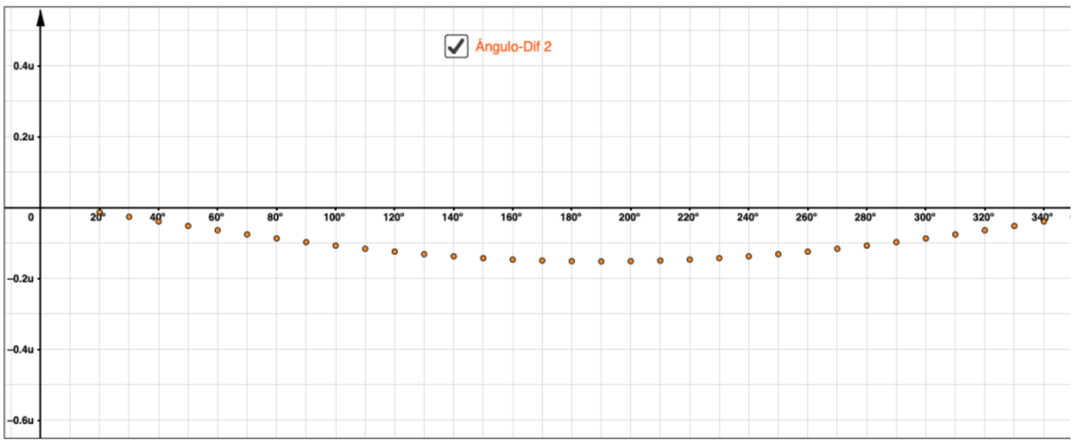
En la siguiente tabla se muestran los valores aproximados del lado BC para una amplia variedad de valores del ángulo BAC. Además, se presenta una representación gráfica de los valores del lado BC y varios niveles de diferencias entre estos valores.

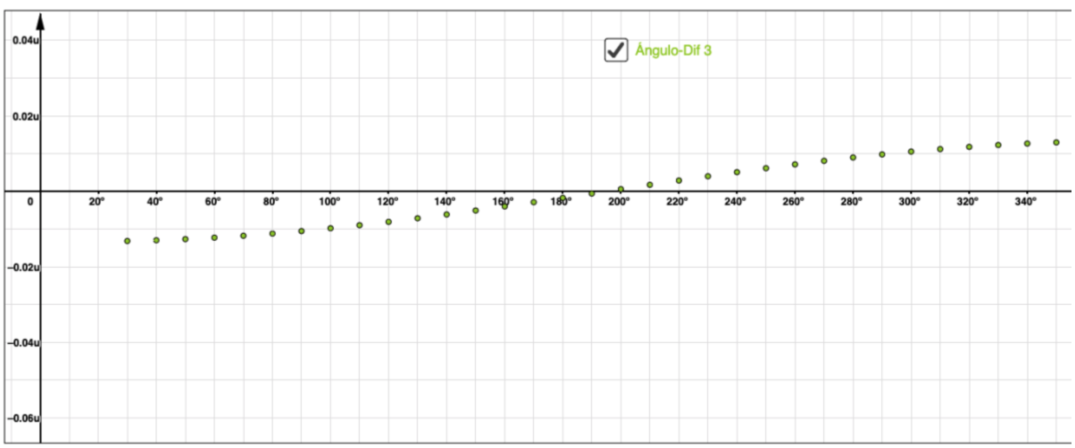
Ángulo BAC	Lado BC	Diferencia 1	Diferencia 2	Diferencia 3
0°	0.00000000000000			
10°	1.74311485495317	1.74311485495317		
20°	3.47296355333861	1.72984869838544	-0.0132661565677257	
30°	5.17638090205042	1.70341734871181	-0.0264313496736319	-0.0131651931059063
40°	6.84040286651338	1.66402196446296	-0.0393953842488469	-0.0129640345752149
50°	8.45236523481400	1.61196236830062	-0.0520595961623478	-0.0126642119135010
60°	10.0000000000000	1.54763476518601	-0.0643276031146024	-0.0122680069522545
70°	11.4715287270209	1.47152872702092	-0.0761060381650883	-0.0117784350504859
80°	12.8557521937308	1.38422346670987	-0.0873052603110570	-0.0111992221459687
90°	14.1421356237310	1.28638343000017	-0.0978400367097018	-0.0105347763986448
100°	15.3208888623796	1.17875323864861	-0.107630191351556	-0.00979015464185374
110°	16.3830408857799	1.06215202340028	-0.116601215248334	-0.00897102389677863
120°	17.3205080756888	0.937467189908937	-0.124684833491339	-0.00808361824300442
130°	18.1261557407330	0.805647665044231	-0.131819524864707	-0.00713469137336809
140°	18.7938524157182	0.667696674985167	-0.137950990059064	-0.00613146519435760
150°	19.3185165257814	0.524664110063200	-0.143032564921967	-0.00508157486290273
160°	19.6961550602442	0.377638534462794	-0.147025575600406	-0.00399301067843894
170°	19.9238939618349	0.227738901590751	-0.149899632872042	-0.00287405727163659
180°	20.0000000000000	0.0761060381650901	-0.151632863425661	-0.00173323055361863
190°	19.9238939618349	-0.0761060381650901	-0.152212076330180	-0.000579212904519012

Ángulo BAC	Lado BC	Diferencia 1	Diferencia 2	Diferencia 3
200°	19.6961550602442	-0.227738901590748	-0.151632863425658	0.000579212904522564
210°	19.3185165257814	-0.377638534462797	-0.149899632872050	0.00173323055360797
220°	18.7938524157182	-0.524664110063200	-0.147025575600402	0.00287405727164725
230°	18.1261557407330	-0.667696674985167	-0.143032564921967	0.00399301067843539
240°	17.3205080756888	-0.805647665044227	-0.137950990059061	0.00508157486290629
250°	16.3830408857799	-0.937467189908941	-0.131819524864714	0.00613146519434694
260°	15.3208888623796	-1.06215202340027	-0.124684833491333	0.00713469137338053
270°	14.1421356237310	-1.17875323864861	-0.116601215248338	0.00808361824299554
280°	12.8557521937308	-1.28638343000016	-0.107630191351550	0.00897102389678751
290°	11.4715287270209	-1.38422346670987	-0.0978400367097106	0.00979015464183953
300°	10.0000000000000	-1.47152872702092	-0.0873052603110499	0.0105347763986608
310°	8.45236523481400	-1.54763476518601	-0.0761060381650883	0.0111992221459616
320°	6.84040286651339	-1.61196236830061	-0.0643276031146015	0.0117784350504868
330°	5.17638090205043	-1.66402196446296	-0.0520595961623470	0.0122680069522545
340°	3.47296355333861	-1.70341734871182	-0.0393953842488584	0.0126642119134886
350°	1.74311485495317	-1.72984869838544	-0.0264313496736240	0.0129640345752344
360°	0.00000000000000	-1.74311485495317	-0.0132661565677257	0.0131651931058983









– En términos de la situación-problema original, ¿qué observas en la gráfica de la relación ángulo-lado BC –la primera gráfica–?

– En términos de la situación-problema original, ¿qué observas en la gráfica de la relación ángulo-primeras diferencias –la segunda gráfica–?

– Con base en observado hasta el momento, ¿qué tipo de relación crees que es la que se establece entre el ángulo BAC y el lado BC?, ¿por qué?

Por participante

Candy

Al resolver la actividad 5 de la situación de aprendizaje, Candy analiza las gráficas ángulo-lado y ángulo-diferencia proporcionadas, describe la gráfica ángulo-lado como una parábola y menciona que, siguiendo ese razonamiento –si pasáramos de los 180º–, podríamos construir una fórmula con funciones trigonométricas –cita siguiente–.

> Que es una *parábola*, y a través de este razonamiento se puede construir una formula con *funciones trigonométricas*. (Candy, 13:15 636.906 × 67.645 en Actividades – Candy)

Con relación a la gráfica ángulo-primera diferencia, menciona que cambia de ser una función cuadrática a ser una cúbica –cita siguiente–.

> Que la función cambia de ser x^2 a x^3. Que justo como se había platicado en el taller, las diferencias entre cada unidad van disminuyendo conforme aumentan los grados y por esta razón no se puede predecir de manera "sencilla". (Candy, 13:16 636.995 × 84.368 en Actividades – Candy)

Luego, caracteriza la relación ángulo-lado. En particular, menciona que, aunque en la actividad solo se muestran ángulos hasta 180º –pues es el triángulo más grande que se puede construir–, ella se percató de que era cíclico y que en su mente el deslizador ya estaba dando la vuelta completa –cita siguiente–.

> Pero sí, bueno, sí me di cuenta que era <u>cíclico</u>, por así decirlo. Y dije ‘ah, pues tiene mucho sentido porque, pues, es… es triángulo’. Nada más llegamos hasta 180 porque pues es la mitad de un círculo, o sea, lo más grande que se puede hacer un triángulo, pero pues también existen los ángulos negativos. Y ya en mi mente el… el… el, este,

> el deslizador que nos dieron en GeoGebra *ya estaba dando la vuelta completa* así del triángulo, ya. (Candy, 6:23 1h 58m 1s en S3. Problematización)

Por último, Candy denomina la relación ángulo-lado como una función trigonométrica, dado el comportamiento de la gráfica y las unidades sobre las que opera –citas siguientes–.

> Una función trigonométrica, dos razones
>
> 1-. El comportamiento de las gráficas (diferencias de unidades 1,2,3). 2-. Las unidades de medida, es decir los ° también se utilizan para graficar las funciones trigonométricas. (Candy, 13:17 637.504 × 81.641 en Actividades – Candy)

> Pues::: con la primera pregunta yo escribí que, ah, pues con razón, ya entendí, ya sé porque sí *se hace con trigonométricas*, tiene mucho sentido porque si graficas la diferencia, ya ves que es una cuadrada y una parábola, y así mismo, en la parte final, también más o menos escribí que tienen en común… de porqué el razonamiento, ¿no?, de porqué se calcula con… ley de cosenos, porque pues, estamos hablando de grados, y las identidades trigonométricas también se grafican en (*grados*), en grados. También puse que, bueno, las unidades de medida son iguales y el comportamiento de las gráficas pues también tienen algo que ver con la… con la… con seno, coseno. (Candy, 6:24 1h 58m 46s en S3. Problematización)

Esta breve descripción nos permite advertir que la *actividad* realizada por Candy en esta quinta parte de la situación de aprendizaje fue caracterizar y denominar la relación ángulo-lado. Esto, partiendo de un contexto tabular-gráfico, a través de *acciones* como analizar, describir y denominar, en las que se involucraron *nociones matemáticas* como la función cuadrática, función cúbica y función trigonométrica.

Además, nos permite plantear algunas observaciones adicionales importantes. Primero, la adición del carácter cíclico de la relación ángulo-lado, asociada al contexto geométrico inicial de la situación-problema. Segundo, la indistinción de las nociones trigonométricas, al referirse nuevamente a la misma noción como función e identidad trigonométrica –citas 13:17 y 6:24–. Y tercero, la denominación –por primera vez en la experiencia de problematización– de la relación ángulo-lado como una función trigonométrica, la que se liga con el hecho de que el lado BC se calcule con la ley de cosenos, con la forma de su gráfica y las unidades de medida sobre las que opera.

Mercedes

Por su parte, al afrontar la actividad 5 de la situación de aprendizaje, Mercedes analiza las gráficas ángulo-lado y ángulo-diferencia proporcionadas, y las describe. De la primera gráfica destaca que parece tener un punto máximo y de la segunda una disminución de los valores hacia el punto medio de los valores del ángulo de referencia –citas siguientes–.

> A media que los grados van aumentando las unidades aumentan, llegando a un *punto máximo*, donde las unidades comienzan a disminuir, sin importar que los grados sigan aumentando. (Mercedes, 14:12 636.347 × 68.942 en Actividades – Mercedes)

> Entre más chico sea el ángulo las unidades son mayores, pero llegando al punto medio de los grados, las unidades comienzan a disminuir. (Mercedes, 14:13 636.904 × 69.484 en Actividades – Mercedes)

Posteriormente, describe la relación ángulo-lado. En particular, advierte que, en ambas gráficas, llegado al punto máximo –la mitad de los valores del ángulo BAC–, los valores de BC 'bajan, así como fueron subiendo', aludiendo a la aparente simetría de las gráficas –citas siguientes–.

> Así como… así como el… bueno, así como fue subiendo, llega al punto [máximo], ¿no?, un ejemplo, baja, pero de la misma manera. (Mercedes, 6:39 1h 54m 24s en S3. Problematización)

> También en la gráfica de abajo, llega al 180 y hace como lo mismo. (Mercedes, 6:21 1h 54m 56s en S3. Problematización)

Por último, con base en el punto máximo y la simetría observada, Mercedes denomina nuevamente –también de forma dubitativa– la relación ángulo-lado como cuadrática.

Así, la *actividad* realizada por Mercedes en esta quinta parte de la situación de aprendizaje fue caracterizar y denominar la relación ángulo-lado. Esto, partiendo de un contexto tabular-gráfico, a través de *acciones* como analizar, describir y denominar, realizadas por medio de *nociones matemáticas* como funciones cuadráticas, punto máximo y simetría.

Consideramos importantes dos anotaciones adicionales respecto al trabajo de Mercedes en esta actividad. Primero, las dos nuevas características que agrega al estudio de la relación ángulo-lado: su simetría y su carácter acotado. Segundo, la dificultad e imprecisión evidenciada por Mercedes al expresar algunas ideas matemáticas.

Santiago

Por último, al atender la actividad 5 de la situación de aprendizaje, Santiago analiza las gráficas ángulo-lado y ángulo-diferencia proporcionadas, y describe la primera de ellas como parecida a una parábola, mientras que de la segunda comenta que le recordó mucho a la función trigonométrica, aunque no lo es –cita siguiente–.

> Al principio la gráfica… la gráfica de la dos me recordó mucho a una *función trigonométrica*, no es una función trigonométrica, pero se parece. Creo que vendría a ser como… no es, no es seno ni coseno, talvez tangente, no me acuerdo… la que tiene, así como caídas, ¿no? (Santiago, 6:29 2h 3m 18s en S3. Problematización)

Santiago también describe la relación ángulo-lado. Particularmente, destaca la apariencia simétrica de las gráficas y comenta que es algo que él ya se había imaginado –cita siguiente–.

> Que también ya lo había imaginado, ¿no?, también me planteé ‘bueno, y si aumenta más de 180, ¿qué pasaría?’ Pero pues, miré que era es que decía, ¿no?, *que pasaría lo mismo, pero al sentido inverso*. (Santiago, 6:28 2h 3m 6s en S3. Problematización)

Finalmente, respecto a la relación ángulo-lado, comenta que lo convencieron de que es una función cuadrática, aunque reconoce que también podría ser una función trigonométrica, pues también tienen punto máximo, pero no las domina tanto como las cuadráticas –citas siguientes–.

> Sí, de /Candy/, yo iba a decir que yo en la tercera iba a… no estaba seguro, también iba a poner… bueno, yo *puse que era una parábola*, al final me convencieron, ¿no?, que era una *función cuadrática*, pero::: también pensé en *función trigonométrica*. Solo que no las… pues no las domino tanto como las cuadráticas, entonces, este, no… no supe… me pareció más una cuadrática, pero… pues también pensé en la trigonométrica, por eso me llamó la atención. (Santiago, 6:25 2h 57s en S3. Problematización)

> Yo puse ahí al final, como le digo, que me convencieron, *parece una función cuadrática* porque también… ya ahí sí se ve muy claro un *punto máximo*, que es lo que decía /Mercedes/, que sería la coordenada 180 coma 20, pero bueno, la *función trigonométrica* también tiene punto máximo así que también podría ser lo que dice /Candy/, ¿no? (Santiago, 6:30 2h 3m 41s en S3. Problematización)

Así, la *actividad* realizada por Santiago en esta quinta parte de la situación de aprendizaje fue caracterizar y denominar la relación ángulo-lado. Esto, partiendo de un contexto tabular-gráfico, a través de *acciones* como analizar, describir y denominar, realizadas por medio de *nociones matemáticas* como funciones cuadráticas, parábola, funciones trigonométricas, simetría y punto máximo.

De grupo

De forma general, durante esta quinta y última actividad de la situación de aprendizaje, los/as participantes analizaron y describieron las gráficas de los valores de BC y sus diferencias sucesivas, así como la relación ángulo-lado, y, con base en estas acciones, caracterizaron y denominaron la misma.

Más específicamente, en el transcurso de esta actividad, se observó el carácter cíclico de la relación ángulo-lado. También se advirtió que la gráfica de la relación ángulo-lado parece alcanzar su punto máximo cuando el ángulo de referencia mide 180º y BC mide 20 unidades, y que las gráficas analizadas aparentan cierta simetría antes y después de alcanzar dichos valores. Considerando esto, así como las unidades de trabajo y el uso de la ley de cosenos para el cálculo del lado BC, los/as profesores/as en formación inicial denominaron la relación ángulo-lado como cuadrática y trigonométrica.

A diferencia de las anteriores, en esta actividad no se aludió a la relación ángulo-lado como proporcional o lineal. Más aún, se adicionaron nuevas características acerca de esta, como su carácter cíclico, acotado y simétrico, y se denominó, con base en ellas, por primera vez durante la resolución de la situación de aprendizaje, como una función trigonométrica; los que constituyen nuevos momentos de resignificación de la relación ángulo-lado.

Entre las nociones matemáticas involucradas por los/as profesores/as en formación inicial en el transcurso de esta última actividad encontramos las funciones cuadrática y trigonométrica, parábola, punto máximo y simetría.

Estos resultados respecto a la actividad matemática de los/as participantes cumplen con el propósito general y con las hipótesis de diseño declarados para esta actividad:

> Esta quinta actividad apunta a que los/as participantes, después de confrontar sus posibles concepciones lineales y polinómicas, evalúen las características de la relación ángulo-lado BC. Así, se presenta una tabla con ángulos entre 0º y 360º –con un intermedio de diez grados–, los valores de BC correspondientes, y sus primeras, segundas y terceras diferencias. Además, se muestran cuatro conjuntos de puntos, relativos a: ‘ángulos de referencia-lado opuesto’, ‘ángulos de referencia-primera diferencia’, ‘ángulo de referencia-segunda diferencia’, y ‘ángulo de referencia-tercera diferencia’.

> Se espera que los/as participantes mencionen que la primera gráfica –de la relación ángulo-lado BC– se corresponde con la situación-problema original, en este sentido, parece ser que el lado BC crece y decrece continuamente a medida crece el ángulo, que nunca BC medirá más de 20 unidades y menos de 0 unidades, etc.; que las gráficas –la segunda, tercera y cuarta– parecen tener forma sinusoidal; y que describan la relación como extraña, no proporcional, etc. (Anexo 2)

Una observación adicional que nos parece importante es la ausencia de interpretaciones geométricas y analíticas sobre la tabla y los gráficos proporcionados; por ejemplo, no se discute ampliamente respecto a qué significa en la situación-problema tener un ángulo de más de 180º. Más bien, las descripciones, reflexiones y denominaciones se basan en las características visibles de las gráficas proporcionadas, en su carácter 'aparentemente' cíclico, acotado y simétrico.

7.2. Epílogo

Como explicitamos en el análisis de grupo respecto a cada parte de la situación de aprendizaje, el análisis de la actividad matemática de los/as participantes durante la experiencia de problematización muestra que, de forma general, se cumplieron los propósitos e hipótesis de diseño.

No obstante, existen algunas respuestas y comportamientos inesperados, que podrían ser motivo de consideración en futuras experiencias de problematización de la trigonometría escolar en las que se utilice esta situación de aprendizaje. En la primera actividad, por ejemplo, los/as participantes no responden de forma inmediata a la cuestión "¿Cuánto crees que mide ahora el lado BC?, ¿por qué?", sino que toman un tiempo considerable para hacer cálculos y aproximaciones, así como para plantear sus justificaciones. Además, en esta misma actividad, los/as profesores/as en formación inicial –en particular Candy y Santiago– se dan a la tarea de, además de responder lo solicitado, comenzar a caracterizar la relación ángulo-lado.

El primero de estos hechos podrían estar asociado al contexto de la experiencia de problematización, ya que es la segunda sesión del curso, la primera en que los/as participantes enfrentan una tarea matemática delante del resto de las personas involucradas; la incertidumbre e inseguridad que podría generar esta situación pudo ser una de las causas de que realizaran procedimientos y reflexiones matemáticas no solicitadas de forma expresa.

El segundo hecho aludido, por su parte, podría estar relacionado con cierta persistencia del modelo proporcional vinculado a la relación ángulo-lado. Pues, después de presentar una medida para el lado BC –que es lo que se pedía–, los/as participantes se percatan de que no es exactamente el doble de la longitud inicial, que la relación no parece ser proporcional –como esperaban–; lo que, como mencionamos, además de evidenciar un primer momento de confrontación con el significado lineal, centra la discusión en la diferencia entre el valor calculado y el esperado, la posible procedencia de esta diferencia y las características de la relación ángulo-lado.

En la segunda actividad de la situación de aprendizaje, por su parte, de forma inesperada, Candy y Santiago construyen una tabla alternativa a la solicitada, con base en el uso de un par ángulo-lado como proporción. Al igual que el anterior, este hecho podría estar vinculado al momento de confrontación del significado lineal que viven dichos participantes; así, la tabla alternativa y la comparación con los valores de la tabla solicitada se vuelve una estrategia para explorar por qué la relación no es proporcional –como ellos esperaban–. En este sentido, este suceso se liga tanto con un momento de confrontación del significado lineal asociado a la relación ángulo-lado como con la aludida persistencia de este.

Por último, en la cuarta y quinta actividad de la situación de aprendizaje, destaca la imprevista ausencia de reflexiones y argumentos geométricos y analíticos, así como la preeminencia de argumentos visuales. Este hecho podría ser un factor determinante para que los/as profesores/as en formación inicial no cuenten con elementos suficientes para denominar con soltura la relación ángulo-lado como de naturaleza trigonométrica.

En este sentido, cuestiones adicionales como ¿qué implica, para la naturaleza de la relación, que las primeras y segundas diferencias no sean ceros?, ¿qué significa, para la naturaleza de la relación, que necesitemos 'infinitos' niveles de diferenciación para llegar a 'ceros absolutos'?, o ¿qué implica en términos geométricos –de la situación-problema inicial– el punto máximo o la simetría de la gráfica ángulo-lado?, podrían ser importantes en futuras experiencias de problematización en la que se haga uso de esta situación de aprendizaje.

Ahora bien, respecto a los momentos de confrontación y resignificación vivenciados por los/as participantes al atender la situación de aprendizaje –aspecto clave para nuestros objetivos de investigación–, producto del análisis de la actividad matemática, dimos evidencia de diversos momentos de confrontación con el significado lineal asociado a la relación ángulo-lado. En particular, en la primera, segunda, tercera y cuarta actividad de la situación de aprendizaje los/as profesores/as denominaron a la relación ángulo-lado como lineal o proporcional; compararon los pares ángulo-lado dados u obtenidos con los pares proporcionales –aunque esto no se solicitó en ninguna de las tareas–; y discutieron sobre las razones de que estos valores no coincidieran.

Esta recurrencia del significado lineal en el trabajo de los/as participantes la denominamos persistencia del significado lineal asociado a la relación ángulo-lado. Este no es un fenómeno inédito, por ejemplo, Scholz (2020), en un estudio sobre el desarrollo del pensamiento trigonométrico con estudiantes de nivel medio superior en México, concluye que el significado lineal asociado a la relación ángulo-distancia aparece en múltiples tareas de las situaciones-problema trabajadas, pese a que –al igual que en este caso– el diseño mismo favorece su continua confrontación.

No obstante, resulta importante notar que los momentos de persistencia observados en la segunda, tercera y cuarta actividad de la situación de aprendizaje provienen del trabajo de Candy y Santiago, que son estudiantes de octavo/último semestre y quienes se espera tengan una formación matemática más sólida –que Mercedes, que cursa su quinto semestre–. Este hecho es consistente con nuestras experiencias previas, pues, como mencionamos, al trabajar experiencias de problematización de la trigonometría escolar con profesores/as notamos que estas suelen generar mayor confrontación y resistencia en quienes cuentan con una mayor trayectoria docente o con una formación matemática más sólida.

También resulta importante advertir que esta persistencia del significado lineal muestra tener distintas fuentes y formas en los datos analizados. Por ejemplo, se argumentó no estar seguro de si ‘relación lineal’ implicaba que, al graficarlos, todos los puntos deberían ser una línea; se propuso el término ‘medio proporcionalidad directa’ para explicar la relación; incluso se utilizó una experiencia de aula –acerca de la representación gráfica de datos– para sostener la linealidad de la relación ángulo-lado. El estudio en detalle de estos dos fenómenos –la relación entre la confrontación matemática y la formación/experiencia previa de los/as docentes, y el tipo y procedencia de los argumentos vertidos para sostener el significado lineal– podrían constituir el centro de futuras investigaciones en esta línea.

Por otro lado, acerca de los momentos de resignificación, como quedó en evidencia, a lo largo de todas las actividades de la situación de aprendizaje los/as profesores/as caracterizan con sumo detalle la relación ángulo-lado, primero con base en su comportamiento numérico-tabular, luego fruto del análisis de distintos niveles de diferenciación, y por último centrándose en sus gráficas. Esta minuciosa caracterización matemática, junto con su final denominación como de naturaleza trigonométrica por parte de Candy y –de forma dubitativa– Santiago, constituyen nuestros principales momentos de resignificación de la relación ángulo-lado.

En conclusión, los resultados expuestos dan evidencia de que, efectivamente, la experiencia de problematización implementada en la primera etapa de nuestro experimento de desarrollo del profesorado provocó los momentos de confrontación y resignificación de las nociones trigonométricas que se esperaban. Con esto, además de constatar las hipótesis generales de investigación asociadas a la etapa, atendemos nuestro tercer objetivo específico: involucrar a los/as profesores/as de matemáticas en formación inicial participantes en experiencias de problematización de la trigonometría escolar.

Un elemento adicional que nos parece pertinente subrayar, después de comentar el funcionamiento general de la situación de aprendizaje y los momentos de confrontación y resignificación provocados, es acerca de los fenómenos didácticos observados en el trabajo de los/as profesores/as en formación inicial participantes. Entre estos, en el transcurso del análisis, mencionamos el predominio del uso del triángulo rectángulo y el teorema de Pitágoras como estrategias de resolución, los errores al plantear y realizar los cálculos, la inexactitud de la nomenclatura de las nociones geométricas, las dificultades en el uso de la calculadora, y la predominancia de los argumentos visuales en la resolución de las tareas.

Estos fenómenos, como evidencia nuestra revisión bibliográfica, no son inusuales al trabajar este tipo de actividades con el profesorado en formación inicial. Jones y Tzekaki (2016) e Iglesias y Ortiz (2019), por ejemplo, aluden a la imprecisión en el uso del lenguaje del profesorado en formación inicial al trabajar con nociones geométricas y trigonométricas; mientras que Cruz y Mantica (2017) y Etcheverry et al. (2013) refieren a que los/as profesores/as en formación tienden a dejarse llevar por la percepción visual de los objetos geométricos, por encima de sus propiedades y relaciones matemáticas.

8.
Resultados del análisis de los saberes docentes

¿Me contradigo?
Sí, me contradigo. Y ¿qué?
Soy inmenso… y contengo multitudes.
— Walt Whitman

En este capítulo exponemos los resultados de la segunda parte del análisis retrospectivo: los saberes docentes construidos y manifestados por los/as participantes durante la intervención de nuestro experimento de desarrollo del profesorado. Utilizamos para ello dos secciones. En la primera describimos los saberes docentes, propósitos, voces sociales y demás elementos identificados en el trabajo de los/as profesores/as en formación inicial participantes. Mientras que en la segunda ofrecemos una síntesis general de dichos resultados, con el fin de atender el primer y segundo objetivo específico de nuestra investigación, asociados a este análisis, y realizar algunos apuntes finales importantes.

8.1. Saberes docentes

De acuerdo con el método utilizado, describimos los saberes docentes de los/as profesores/as en formación inicial de acuerdo con las cuatro etapas del curso optativo que fungió como intervención de nuestro experimento de desarrollo del profesorado y, en su interior, –dadas las fases de análisis– por participante y luego por grupo.

Además, de acuerdo con los objetivos de investigación planteados, realizamos comparaciones y observaciones adicionales en cuatro momentos específicos, asociados a las cuatro prácticas parciales en las que dividimos el trabajo de los/as profesores/as en formación inicial participantes: la resolución de situaciones matemáticas –que incluye la etapa I del cuso–, el diseño de actividades –que abarca las etapas II, III y la primera parte de la IV–, la implementación –segunda parte de la etapa IV–, y el análisis de la clase –tercera parte de la etapa IV–.

8.1.1. Etapa I: introducción y problematización

La primera etapa de nuestro curso optativo se compone de tres sesiones de tipo todo el grupo, en las que se incluye, además de la presentación personal y la introducción al curso, la experiencia de problematización de las nociones trigonométricas. En este sentido, como dijimos, la práctica parcial que analizamos en esta sección es la resolución de situaciones matemáticas por parte de los/as profesores/as en formación inicial participantes.

Por participante

Candy

Durante la primera etapa del curso optativo, entre los *propósitos* de su actuar, Candy alude a su necesidad por dar respuesta a las actividades planteadas por el investigador-profesor –cita siguiente–.

> Y luego dije ‘okey, no nos está dando, *pero necesitamos dar una respuesta*’, entonces, lo dibujé. (Candy, 5:10 45m 30s en S2. Problematización)

En el trabajo de Candy en esta primera etapa, además, identificamos un *saber docente* de carácter procedimental: saber emplear herramientas trigonométricas, aritméticas, algebraicas y gráficas. Entre dichas herramientas destacan el teorema de Pitágoras, ley de senos, bosquejos, diagramas de dispersión, propiedades de los triángulos y comportamientos de las gráficas.

Adicionalmente, reconocemos en el trabajo realizado por Candy referencias a una asociación y a un potencial saber. La *asociación* se establece con tareas similares a la búsqueda de patrones –cita siguiente–. Identificamos esta como una asociación –no como un saber docente– en cuanto no se especifica una instancia particular en la que haya trabajado este tipo de tareas ni detalla cuál es la similitud o funcionalidad de una tarea en la otra.

> No se me había ocurrido, eh::: *la diferencia*. Yo pensé en multiplicarlo a partir de… del primer ángulo y a partir de allí ver, o sea, por ejemplo, cuánto cambiaba o cuánto variaba y todo, pero esto de…/ creo que es algo que no se te ocurre a menos que tengas una tabla como tal, como *cuando te ponen esta clase de… de problemas* en el que 'encuentra la variable que es…', este…/ 'encuentra la proporción de la tabla', ¿no?, y ya te pones así como que sumas el primero con el segundo, luego lo restas, luego ves la diferencia de las sumas y… o sea, sí, sí, súper interesante. (Candy, 6:4 27m 49s en S3. Problematización)

El *potencial saber*, por su parte, refiere a cuando Candy menciona que, gracias a la experiencia de problematización, recordará que situaciones matemáticas similares se resuelven 'con coseno' –cita siguiente–. Reconocemos este como un potencial saber –no como un saber docente– pues en sentido estricto no es un conocimiento que está siendo efectivo en la práctica parcial de la profesora; sin embargo, por su expresión, lo consideramos potencialmente útil ante futuras situaciones similares de su práctica cotidiana.

> En cuanto a lo que dice /Mercedes/, creo que también tiene mucha razón, creo que jamás en la vida se me va a olvidar que *se resuelve con… con… con coseno*. (Candy, 6:40 2h 5m 7s en S3. Problematización)

Finalmente, en estos propósitos, saberes docentes y demás elementos del trabajo de Candy identificamos referencias a tres *voces sociales* –ordenadas de mayor a menor frecuencia–: experiencia docente, actividad del curso, y experiencia estudiantil. De estas, nos parece particularmente interesante la primera –cita siguiente–; apoyada en ella, Candy justifica realizar un bosquejo, pues al no funcionar su estrategia inicial de cálculo 'sintió' algo similar a lo que sienten los alumnos al enfrentar una situación geométrica en el aula de clase.

> A veces es algo complicado… por ejemplo, cuando::: *cuando estás en un aula de clase* y les dices a los alumnos 'no, que, este::: tenemos que encontrar cuánto mide este lado del triángulo' y de repente ves que un alumno está usando la/ una regla y midiendo el triángulo que está allí dibujado y es como que 'no, es que no puedes hacer eso porque ese no es el triángulo real', *algo así sentí yo* [*entre risas*] cuando *tuve que dibujar el triángulo*; sentí que el que estaba yo viendo en la pantalla no era el real y que tenía que… que hacer algo como para… para identificar más o menos qué era lo que tenía que hacer […]. (Candy, 5:20 1h 5m 31s en S2. Problematización)

También refiriendo a su experiencia docente –cita siguiente–, Candy justifica el denominar la relación ángulo-lado como lineal –contrario a los/as demás participantes– por haber dado una clase en la que enseñó un tipo de gráfico que es lineal, pero que no necesariamente incluye todos los puntos que representa.

> Respecto ser lineal, yo difiero con ellos, porque yo digo '*sí, sí es lineal*' [*entre risas*]. Hace poquito…/ pero esto, esto, es… supongo que es por lo mismo de que cada uno vive cosas diferentes, ¿no?... hace poquito… eh::: tuve::: clases, o bueno, *di clases…/ prácticas, sobre* <u>los tipos de gráficas</u>, ¿no? Vimos histogramas y polígonos de frecuencia y los otros tipos de gráficas, <u>entonces resulta</u> que *hay un tipo de gráfica que sí es lineal, pero no es como estrictamente una línea*, sino como que es la línea y tiene como que puntitos dispersos [*simula la recta y puntos con sus manos*], pero sigue siendo… lineal; o en mi cabeza sí lo sigue siendo [*entre risas*]. Entonces yo puse que sí es lineal, a pesar de que no tiene…/ ¡ah!, pues allí está escrito [*lee sus respuestas en la pantalla compartida*], ¿no?... eh::: 'no tiene la misma proporción ni la misma medida, pero sí la consideré lineal' [*simula una recta con sus manos*]. (Candy, 6:17 1h 22m 31s en S3. Problematización)

Mercedes

Por su parte, en el trabajo de Mercedes durante la primera etapa del curso, identificamos referencias a un *saber docente* de carácter procedimental: saber emplear herramientas geométricas, trigonométricas y gráficas. Entre estas herramientas se ubican el triángulo rectángulo, razón seno y el comportamiento de gráficas. Acerca de la razón seno además especifica que pensó en usarla pues es lo que está estudiando en su curso de Trigonometría –cita siguiente–.

> ¡Ah!, es como… yo estoy viendo ahorita eso [en su curso de Trigonometría], lo del seno y coseno [entre risas]… de buscar lados que faltan, pero no…/ entonces, pues, yo me guie por eso. (Mercedes, 5:5 40m 44s en S2. Problematización)

Adicionalmente, reconocemos en el trabajo realizado por Mercedes referencias a una asociación y a un potencial saber. La *asociación* se establece con una estrategia matemática particular, el descarte de cifras decimales –cita siguiente–; la cual, además, explicita retomó de experiencias estudiantiles previas.

> Haz de cuenta que… *hay clase*, que dicen *los maestros* que no importan los decimales, entonces yo, pues… yo me quedé con eso de que '¡ah!, pues, *como::: no importan*, los voy a tomar como que sí es el doble'. <Investigador-profesor: uno los redondea usualmente, ¡eh! [*entre risas*]> Porque si pasa del doble digo '¡ah!, pues sí marca el doble'; y por eso esa fue mi conclusión. (Mercedes, 5:32 2h 4m 6s en S2. Problematización)

Respecto al *potencial saber*, Mercedes también expresa el probable uso de la ley de cosenos para la resolución de futuras situaciones matemáticas similares –cita siguiente–.

> ¡Ah! Y… y::: se me va a grabar mucho que [*entre risas*]… que *se hace con la ley del coseno*. (Mercedes, 6:26 2h 1m 57s en S3. Problematización)

Finalmente, en estos saberes docentes y demás elementos del trabajo de Mercedes reconocemos referencias a cuatro *voces sociales* –ordenadas de mayor a menor frecuencia–: experiencia estudiantil, otro docente, actividad del curso y otro participante.

Santiago

Por último, en el trabajo de Santiago en esta primera etapa del curso, identificamos referencias a un *saber docente* de carácter procedimental: saber emplear herramientas trigonométricas, aritméticas, algebraicas y gráficas. Entre dichas herramientas se encuentran la ley de coseno, operaciones aritméticas, graficación e interpretación de gráficos lineales y cuadráticos, y las ecuaciones lineales.

Adicionalmente, identificamos en el trabajo de Santiago referencias a tres *asociaciones*; las cuales se establecen con: análisis paramétrico de funciones, conferencia sobre la proporcionalidad, y trabajo de otros participantes y sus conocimientos previos. De estas, nos parece particularmente interesante la última –cita siguiente–, en la cual Santiago reconoce que para su denominación final de la relación ángulo-lado como cuadrática jugaron un papel los argumentos de sus compañeras y sus conocimientos previos sobre las nociones trigonométricas.

> Sí, de /Candy/, yo iba a decir que yo en la tercera iba a…/ no estaba seguro, también iba a poner…/ bueno, yo puse que era una parábola, al final me convencieron, ¿no?, que era una función cuadrática, pero::: también pensé en función trigonométrica. Solo que::: no las… pues, no las domino tanto como las cuadráticas, entonces, este::: no… no supe…/ me pareció más una cuadrática… mmm… pero, pues, también pensé en la trigonométrica, por eso me llamó la atención. (Santiago, 6:25 2h 57s en S3. Problematización)

Finalmente, en los saberes docentes y asociaciones del trabajo de Santiago identificamos referencias a cuatro *voces sociales* –ordenadas de mayor a menor frecuencia–: experiencia estudiantil, internet, experiencia personal y otra participante. La primera es la base de asociaciones como el análisis paramétrico de funciones, proveniente de cursos previos de geometría analítica –cita siguiente–.

> A mí… a mí me recordó::: cuando se analiza, por ejemplo, una… no sé, $y=x^2$, ¿no?, que te arroja una gráfica… una parábola, y que luego, pues, *empiezas a ponerle números, ¿no?, como '¿y qué pasa si le ponemos coeficiente 2?*, ¿cómo se va a ver afectada la gráfica?', ¿no? Entonces, nunca había visto algo así con… con un problema… eh::: prácticamente… eh::: duplicado, <u>pero</u> que varía un dato, ¿no? Entonces, ver qué va a afectar eso en los lados, bueno, de un triángulo, ¿no?... en un… en un… ¡Ajá!, no lo había visto en una figura geométrica, ¿no?, como '¿qué pasa si variamos poquito un ángulo?' Eso lo he visto, le digo, mucho en… en *geometría analítica*, ¿no?, de que '¿y si le pongo::: le sumo uno o si le cambio aquí el coeficiente o si lo divido?, y vemos cómo va cambiado la gráfica', pero en este caso, este problema que varía uno de los datos y los demás los mantiene igual, en un triángulo, no había visto cómo afecta […]. (Santiago, 5:18 1h 2m 52s en S2. Problematización)

Mientras que el uso de internet –cita siguiente–, por su parte, se refiere como una voz que le permite decidir entre dos herramientas matemáticas que a priori considera podrían atender la situación-problema.

> Pues lo primero que… que pensé también al verlo, eh::: yo también estaba indeciso entre si era ley de senos o ley de cosenos. Eh::: ya ve que dependiendo los::: los datos que se tengan se puede utilizar una u otra. Entonces, pues, ya *googleé, eh::: ley de coseno*, que fue la que tenía más…/ mmm… de la más sospechaba y pues sí, ¿no?, era… era justo ese, donde tienes un ángulo/ bueno, en este caso que tenemos el ángulo entre el valor de dos lados… y queremos obtener el otro lado. Entonces, pues lo que hice fue *aplicar la ley de cosenos*, primero definí, pues, las variables, ahí como está en la foto, eh::: y dibujé el triángulo otra vez para… para tomarlo como referencia. (Santiago, 5:13 55m 45s en S2. Problematización)

De grupo

De forma general, durante esta primera etapa del curso optativo, los/as participantes expresaron únicamente una referencia a los *propósitos* que guían su actuar en la práctica parcial de atender situaciones matemáticas concretas: dar respuesta a las actividades planteadas por el investigador-profesor. Esta ‘necesidad’ por responder a las situaciones matemáticas, externada por Candy, podríamos entenderla como consecuencia de que el trabajo realizado esté inmerso en un curso regular, así, podría quedar explicado por el contrato didáctico implícito en la interacción entre profesor-estudiante: el profesor propone tareas que se espera el estudiante responda satisfactoriamente.

Acerca de los saberes docentes manifestados, los/as participantes coinciden en el empleo de herramientas trigonométricas –razones y leyes– y gráficas –graficación e interpretación de gráficos lineales, cuadráticos y trigonométricos–. Adicionalmente, Candy emplea nociones y procedimientos geométricos, aritméticos y estadísticos, Mercedes herramientas geométricas, y Santiago estrategias aritméticas y algebraicas. Esto coincide con la naturaleza de la práctica parcial que compone esta etapa, así como con los contextos matemáticos en los que se propusieron las actividades matemáticas.

Adicionalmente, en esta primera etapa del curso reconocimos cinco *asociaciones*; las cuales podemos organizar en dos grupos. El primero incluye las establecidas con situaciones y estrategias matemáticas particulares, como, por ejemplo, el descarte de cifras decimales, la búsqueda de patrones y el análisis paramétrico de funciones. Mientras que el segundo abarca las asociaciones con otras experiencias, como la conferencia sobre proporcionalidad, el trabajo de otros participantes y la experiencia propia.

Como dijimos, estas asociaciones son relevantes pues, aunque no se tiene evidencia de su afección puntual sobre la práctica parcial del profesorado –por lo que no constituyen saberes docentes *stricto sensu*–, reúnen situaciones y objetos que los/as participantes van ligando al trabajo realizado, así, nos hablan de su interpretación de la actividad matemática propuesta y del amplio abanico de experiencias/herramientas del que disponen para atenderlas.

Entre los *potenciales saberes* ubicamos el uso de la ley de coseno como herramienta para la resolución de situaciones matemáticas similares en la práctica futura. Como mencionamos, los saberes potenciales son conocimientos hipotéticamente útiles, no efectivos –por lo que no constituye saberes docentes–; no obstante, nos ofrecen una referencia de los conocimientos construidos por los/as profesores/as en el desarrollo del curso que podrían determinar su práctica parcial futura. En este caso, fruto de la experiencia de problematización, las profesoras en formación inicial –quienes no llegaron a la resolución matemáticamente correcta de la primera actividad– expresan su convencimiento de usar la ley de coseno ante situaciones matemáticas similares posteriores.

Por último, en el trabajo de los/as participantes en esta primera etapa del curso optativo identificamos la referencia a siete *voces sociales* –ordenada de mayor a menor número de referencias–: experiencia estudiantil, experiencia docente, actividad del curso, otro docente, otro participante, experiencia personal e internet.

Dada la práctica parcial que compone esta etapa –la resolución de situaciones matemáticas–, no resulta extraño encontrar referencias a experiencias estudiantiles previas, al trabajo de otros/as participantes en la actividad, a las experiencias personales con el tópico e incluso a internet, ya que no había restricción sobre esta herramienta. No obstante, nos parece importante subrayar las menciones al trabajo de otros docentes y a la propia experiencia docente. La injerencia de esta última voz, en particular, coincide con nuestras experiencias previas al trabajar situaciones de aprendizaje similares con el profesorado en formación inicial que cursan sus últimos semestres de la carrera.

De forma global, el trabajo de los/as participantes en esta primera etapa –de acuerdo con el marco utilizado– es bastante homogéneo, la cantidad y variedad de saberes docentes y demás elementos reconocidos es similar. Las diferencias se ubican al interior de estas categorías, por ejemplo, en el tipo y variedad de herramientas matemáticas puestas en juego por Candy y Santiago, frente a las utilizadas por Mercedes. Estas diferencias en la resolución de situaciones matemáticas se consideran naturales dadas las distintas instancias de formación en las que se encuentran estos/as participantes.

8.1.2. Etapa II: preparación

La segunda etapa de nuestro curso optativo incluye cinco sesiones –tres de todo el grupo y dos individuales– y está destinada a la preparación teórico-metodológica y la preparación matemática y didáctico-pedagógica. En consecuencia, la práctica parcial que analizamos es el diseño de actividades, que comienza en esta etapa con la lectura, comprensión y discusión de referentes bibliográficos (productos de investigación, libros texto, planes de estudio y otras fuentes documentales –físicas o virtuales–), así como en el bosquejo de las primeras ideas para sus clases simuladas.

Por participante

Candy

Durante la segunda etapa del curso, dentro de sus *propósitos*, Candy externa su preocupación habitual por construir actividades memorables para los estudiantes, así como su interés específico por diseñar actividades no-típicamente escolares para su clase simulada –cita siguiente–. Esto último, aclara, es algo que comprendió dadas las actividades del curso, no es algo que se le dijo explícitamente.

> Bueno, lo que yo más o menos entendí es que la actividad que nosotros tenemos que hacer *no tiene que ser como la normal o actual* que te ponen en el libro de texto, sino explicar un por qué, de dónde viene o más… o intentar que ellos lo intenten/ o intentar que ellos la desarrollen por sí mismos, <u>según</u> lo que *hemos hablado* y también *lo que viene en las lecturas*, ¿no? (Candy, 22:8 9m 32s en S6b. Reunión 1 – Candy)

También identificamos en el trabajo de Candy alusiones a cuatro *saberes docentes*, todos ellos de carácter discursivo: saber que la matemática se enseña-aprende a través de construcciones sucesivas, saber que SOHCAHTOA es útil para afianzar las definiciones de las razones trigonométricas, saber que el uso de diálogos es útil como guía del trabajo de los estudiantes, y saber que los factores sociales son determinantes en los procesos de enseñanza y aprendizaje –cita siguiente–. El primero de estos es más cercano a la visión de Candy sobre la enseñanza y aprendizaje de la matemática, el segundo a sus experiencias estudiantiles previas, y los últimos dos a su experiencia como docente.

> Ya retomando lo que dijo /Mercedes/ sobre lo de la enseñanza-aprendizaje, del maestro y el alumno, yo creo que… ¡Ay:::! *es* <u>muchísimo</u> más complicado que solamente enseñar, *tal cual como dice la lectura*, porque eh::: qué calidad tienen tus alumnos y hablo… no como la carne de calidad, sino en general, ¿no?, si tienen problemas en su casa, si ya desayunaron, si son las 6 de la mañana y están en clase, o sea, si terminaron con su novio o novia, yo qué sé… este::: si tiene problemas de aprendizaje, que no está detectado… es::: es algo… es como una… sopa que le metes… como un curry, porque tiene muchas especias, o sea, *tiene un montón de… de variables* y de cosas diferentes que puede salir bien, que puede salir mal, y simplemente… evaluarlo como un 'si tu chico saca 10 significa que eres un buen profesor' creo que es algo completamente fuera del lugar, pero *es algo que te das cuenta ya que estás aquí adentro*, *o sea, ya que te subiste al barco*; si tú estás allá fuera, madre, padre de familia, amigo, … tío, primo, no te das cuenta de todo lo que implica, de todo lo que es, de *todos los factores que intervienen*, también, ¿no?, de… ya sea (*demográficos*), o sea, tu… tu lugar, donde estés, donde estés viviendo y todo eso… y es algo, pues es como un curry, completamente diferente ya para cada uno. (Candy, 15:14 36m 54s en S4. Lectura 1)

Adicionalmente, reconocemos en el trabajo realizado por Candy en esta segunda etapa, referencias a ocho asociaciones y a una descripción del contexto. Las *asociaciones* se establecen con: comportamiento de los estudiantes, experiencias previas de planificación, otros profesores, actividades del curso, condiciones de aula, programa de estudio, regularidad en la enseñanza de la trigonometría y diferencia de las nociones trigonométricas.

Dos observaciones nos parecen relevantes a este respecto. Primero, los vínculos que realiza Candy en esta etapa con el estudiantado, el aula de clase y las actividades del curso. Entre ellas, por ejemplo, el cotejar su experiencia acerca del comportamiento de los/as estudiantes con lo vivido en la experiencia de problematización y lo dicho en las lecturas del curso –cita siguiente–.

> Y también, sobre todo que::: las::: bueno, en general, las ejemplificaciones me ayudaron a comprender, más o menos…/ lo vinculé, lo de esta lectura, con *lo que pasamos la última semana, lo que nosotros vivimos*, y sobre la razón que tiene de que *los alumnos*, si tú les preguntas, sin necesidad de darles un tema, a veces ellos mismos tienen las respuestas y saben cómo hacerlo, solo que no está tan pulido como un procedimiento ya establecido. (Candy, 15:8 26m 17s en S4. Lectura 1)

Y segundo, la advertencia sobre la regularidad en la enseñanza de las nociones trigonométricas construida por Candy en esta etapa a través de la búsqueda en planes de estudio y libros de texto de preparatoria –cita siguiente–.

> Pero, en sí, la esencia, todos eran exactamente lo mismo, era el *triángulo rectángulo, las identidades trigonométricas [razones trigonométricas] y 8-10 ejercicios*, y resuélvelo, … y ya, siguiente tema. Tomando esto porque, bueno, mi teoría es que, pues, solamente son de apoyo, no es como que el libro te vaya a enseñar por sí solo cómo se hace. (Candy, 27:7 18m 56s en S7a. Reunión 2 – Candy)

La descripción del *contexto* ubicada, por otro lado, refiere a cuando Candy explicita nunca haber dado una clase regular de matemáticas de forma presencial –cita siguiente–. Estas descripciones del contexto de la práctica del profesorado en formación inicial no se incluyen en el marco inicial propuesto por Mercado, no obstante, decidimos incorporarlas pues resultan importantes para poder interpretar la práctica misma, la toma de decisiones e intervenciones de los/as profesores/as a lo largo del curso.

> […] Lo que nunca he hecho en realidad, porque realmente *nunca he ido a un campo, nunca he estado frente a un salón de clases dando una clase*, literal, es como que… posibles respuestas que me vaya a dar el alumno, si tengo algunas, pero pues no más de mi mente, así de que ‘a lo mejor me pregunta esto’ y así. (Candy, 18:1 7m 30s en S5. Lectura 2)

Finalmente, en estos propósitos, saberes docentes y demás elementos reconocimos referencias a diez *voces sociales* –ordenadas de mayor a menor frecuencia–: producto de investigación, experiencia docente, libro de texto, experiencia estudiantil, actividad del curso, experiencia personal, internet, estudiante, programa de estudio y otro docente. Algunas de estas voces, las referencias a los productos de investigación y libros de texto, por ejemplo, resultan naturales dada la actividad propuesta en esta etapa. Luego, algunas otras resultan más singulares, entre ellas, las múltiples referencias que Candy hace a sus experiencias docentes pasadas y al trabajo de los/as estudiantes –citas previas, 15:14 y 15:8–.

Mercedes

Por su parte, durante la segunda etapa del curso, Mercedes alude a uno de los *propósitos* habituales que guían su práctica: la preocupación por construir actividades que capten y sostengan la atención de los estudiantes –cita siguiente–. En sus comentarios al respecto, parece que este propósito es consistente con una visión 'tradicional' de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas –descrita en una de las lecturas–.

> Pues sí tiene que ver mucho que el *alumno, pues, preste atención*… ah::: para comprender, porque si no::: *presta atención desde un principio pues se pierde* porque las matemáticas…/ yo veo que sí son…/ si tienen:::/ es como:::/ sí, sí cuando es:::/ pues sí *es por pasos, te explican algo para llegar a otro*, pero también tiene que ver del maestro que tenga… *dominio sobre el tema y que sepa llamar la atención del alumno*, que tenga la habilidad de… pues, de que si mirar que no están… que no tiene la atención como lo está explicando, pues que busque otra forma para poder llamar la atención y despertarlos y que estén… con él y que los ponga a participar. (Mercedes, 15:11 29m 24s en S4. Lectura 1)

Además, identificamos referencias a cuatro *saberes docentes*; uno de carácter procedimental y tres discursivos. El procedimental es saber retomar actividades y recursos didácticos, y alude a cuando Mercedes agrega a su bosquejo inicial de clase una selección de recursos y actividades matemática facilitadas por otros docentes –cita siguiente–, en particular su profesor tutor y su maestra del curso de Trigonometría.

> De hecho me mandó *también unos ejemplos*, profe, también los voy a… los voy a::: pues, lo voy a transcribir a::: al documento. Todo lo que mandó, yo, pues, *yo agarré lo que más entendí y lo que me quedó así como más claro*, pero sí me mandó varios ejemplos […]. (Mercedes, 28:8 19m 52s en S7b. Reunión 2 – Mercedes)

Los saberes discursivos son: saber que las leyes trigonométricas tienen usos diferenciados, saber que los/as profesores/as guían su enseñanza en los estudiantes, no siempre en los libros de texto y planes de estudio –cita siguiente–, y saber que el uso de ejemplos cotidianos es importante para lograr la comprensión de los/as estudiantes. De estos nos llamó particularmente la atención el segundo, en el que Mercedes coincide con uno de los referentes bibliográficos en que los/as profesores/as, al tomar decisiones sobre la enseñanza, no siempre se basan en los libros de texto o planes de estudio, sino en las necesidades de sus estudiantes, en su aprendizaje.

> Se me hizo importante porque es muy cierto, no…/ pues, los maestros no siempre… no::: no se basan con lo que proponen los libros o… o lo que ya está… con… el programa educativo lo que tiene; buscan, ellos, los maestros se adaptan a lo que el estu… *las necesidades que tiene el estudiante* y::: buscan la forma en la que el… el… se pueda…/ *ellos puedan aprender más*. (Mercedes, 31:2 11m 54s en S8. Presentación)

También identificamos en el trabajo realizado por Mercedes en esta etapa la alusión a tres *asociaciones*. Estas se establecen con: su profesor tutor, su clase de Trigonometría y la organización de la trigonometría escolar. Las primeras dos refieren a las consultas e interacciones de Mercedes con su profesor tutor y su profesora del curso de Trigonometría, que le proporcionaron elementos matemáticos, pero también recurso y herramientas didácticas –cita previa, 28:8–; mientras que el tercero alude a las observaciones sobre la organización de la trigonometría escolar construidas por Mercedes en el trabajo de esta etapa –cita siguiente–.

> El::: *primer libro*, pues, es el 'Desarrollo del pensamiento trigonométrico', y a mí se me hizo importante, bueno, yo::: el punto este en el que dice que… menciona pues que… el sistema educativo mexicano, el primer acercamiento del estudiante con la trígono…/ de la:::/ con la trigonometría se ubica, pues, entre los 15… entre los 14 y 15 años de edad y es en la secundaria. Por::: yo, o sea, yo… a se me hizo importante porque *cuando yo iba a la secundaria* pues yo no… no… yo no sabía que allí era el… yo no sabía que, bueno, yo en lo personal *no sabía que allí comenzaba con la… con la trigonometría*. Y::: *para mí es un dato importante*, ya voy a tener el conocimiento, pues, de que allí empieza. Y::: pues *en la secundaria* no recuerdo, la verdad, que empezara pues con la trigonometría y que em… pues, empezaba con la introducción. (Mercedes, 31:1 10m 39s en S8. Presentación)

Finalmente, en estos propósitos, saberes docentes y asociaciones identificamos referencias a cuatro *voces sociales* –ordenadas de mayor a menor frecuencia–: otro docente, experiencia estudiantil, experiencia personal y experiencia docente. Comentamos la mayoría de estas previamente; solo nos resta destacar, entre las experiencias estudiantiles, la mirada crítica de Mercedes sobre su curso de Trigonometría –cita siguiente–.

> Entonces, pues le comenté [a su profesor tutor usual] sobre el seno y, … como apenas estamos empezando en Tri… *en Trigonometría* [su curso en la Facultad], o sea, ya lo miramos… pero, pues, no, o sea, no… es como que no tan a fondo, es por encimita, no más la profe da la fórmula y hagan esto, y esto, y ya… así como está la fórmula y es todo. (Mercedes, 28:2 3m 56s en S7b. Reunión 2 – Mercedes)

Santiago

Por último, durante esta segunda etapa del curso optativo, dentro de sus *propósitos*, Santiago refiere a la construcción de un interés específico por diseñar actividades para su clase simulada que subrayen el uso diferenciado de las razones trigonométricas –cita siguiente–.

Creo que/ y bueno, yo también, en mi experiencia estos días… como este semestre acá es, bueno, es par, o sea, en prepa [preparatoria] están llevando segundo, cuarto y sexto semestre, ¿no?... eso quiere decir que ahorita se está viendo geometría y trigonometría en las preparatorias, entonces a mí me…/ *las asesorías que me ha tocado dar*, eh::: han sido *la mayoría de estos temas*, de trigonometría, eh::: entonces, <u>yo inclusive</u> cuando he dado asesorías de estos temas, he *presentado también las razones trigonométricas así, de jalón*, ¿no?... Y, entonces, cuando les presento ejercicios para resolver triángulos con razones trigonométricas, eh::: surge el problema de que *no saben cuál utilizar*, si seno, coseno o tangente, o no saben identificar cuál usar, ¿no?... Y, entonces, creo que razono que esto es porque al *enseñar las seis juntas* ellos no… no cavilan porqué hay seis o porque se requieren, bueno, por lo menos tres, eh::: en el sentido de que si tú les muestras seno y coseno… primero, eh::: y luego les pones…/ seno y coseno tienen hipotenusa las dos, tienes el dato de la hipotenusa… y si luego les pones un triángulo rectángulo, sin el dato de la hipotenusa, entonces allí… no podría resolverlo con seno y coseno… y, entonces, entra la tangente, ¿no?... Y creo que, como ese por eso no se hace así, escalonado, de primero seno, luego coseno, sino que se ponen así las seis y ni saben qué es, ¿no?, al inicio; creo que ese…/ eso podría ser una razón por las cuales no… no las usan como herramienta y no saben cuándo utilizar una u otra… Entonces::: creo que… lo… como parte de…/ ya, *ya voy perfilando más o menos lo que… lo que quiero ir haciendo*… todavía no lo… lo plasmo en el…/ en la trayectoria hipotética. (Santiago, 26:3 3m 20s en S7c. Reunión 2 – Santiago)

En el trabajo de Santiago identificamos, además, referencias a seis *saberes docentes*, todos ellos de carácter discursivo: saber que se confunde la acreditación con el aprendizaje, saber que no se utilizan dibujos a escala, saber que la enseñanza conjunta de las razones trigonométricas no permite su diferenciación, saber que existe una diferencia conceptual entre razón y función trigonométrica, saber que las nociones trigonométricas no tienen aplicaciones prácticas en tareas cotidianas, y saber que la naturaleza de la relación ángulo-lado no es lineal.

De estos es especialmente trascendental el tercero –cita siguiente–, que Santiago construye en el diálogo de su experiencia –estudiantil y docente– y el trabajo realizado en esta etapa del curso, y que está asociado al propósito principal de las actividades de su clase –descrito más arriba–.

> Pero por lo menos, hasta ahorita, en lo <u>tradicional</u> [*hace comillas con sus manos*] que he visto, en los… en el *libro o en los libros*, en *mi experiencia* y en *los vídeos*… *no hay un/ una definición para <u>tangente</u> específicamente*, tal cual, sino que se presenta la definición de razones trigonométricas, *volvemos a lo mismo*, ¿no?, como conjunto… pero no se le da el tratado específico a…/ para… para la tangente. (Santiago, 26:5 6m 46s en S7c. Reunión 2 – Santiago)

Para efectos de nuestro estudio, también cabe resaltar el último de los saberes mencionados, ya que, con base en la experiencia de problematización vivida, Santiago comenta que la relación ángulo-lado no es lineal, aunque los/as profesores/as de uno de los productos de investigación analizado sí tenían dicha concepción –cita siguiente–.

> Pero que esto, pues, sabemos, lo… *lo vimos que no era así*, no es tan… tan ordenado como… como pensábamos… *sigue otro orden no lineal*, … pero pues en… en este estudio los… los profes… eh::: de bachillerato sí… sí tenían esta noción. (Santiago, 31:30 1h 19m 27s en S8. Presentación)

Adicionalmente, identificamos en el trabajo realizado por Santiago referencias a seis asociaciones, un potencial saber y un momento de prueba. Las *asociaciones* se establecen con: experiencias educativas y sus conocimientos previos, experiencias de planificación, experiencia de problematización, estudiantes, canales de YouTube y el círculo unitario.

El *potencial saber* identificado, por su parte, alude a la mención de Santiago sobre su interés por usar actividades empíricas, con lápiz y papel, y con algún software de geometría dinámica –de forma similar a como se hace en uno de los productos de investigación–. Aclara que esto no será posible en su clase simulada por las condiciones en las que se realizará –cita siguiente–.

> Eh::: usar activi…/ mmm::: al igual que *las propuestas de las lecturas que leímos*, me gustaría utilizar alguna actividad empírica, fuera del aula, si se diera la…/ el caso…

que ahorita pues, en este ambien…/ *en este::: tiempo no se va a poder*, pero pues… eh::: sería lo ideal. Utilizar software GeoGebra también, eso sí se podría utilizar. (Santiago, 31:33 1h 29m 46s en S8. Presentación)

Mientras que el momento de *prueba* identificado refiere a la decisión de Santiago de ensayar las actividades matemáticas a utilizar, con el objetivo de probar su funcionalidad para introducir las razones trigonométricas como herramientas específicas –cita siguiente–. Aunque estos momentos de prueba no forman parte del marco inicial propuesto por Mercado, decidimos incluirlos en el análisis dado el importante rol que mostraron jugar en la toma de decisión sobre si incorporar o no una actividad, en realizar modificaciones o no al plan, en cambiar o no los tiempos y recursos, etcétera.

A mí lo que se me ocurrió como actividad, eh::: *que haría previamente a ponerla*, para ver si… si… si enriquecería, sería, con un mismo triángulo, digamos con datos estáticos, decirles que apliquen tanto tangente como cotangente o que se resuelvan con ambas, *para ver esas diferencias*, ¿no?, y.../ Bueno, *voy a hacer yo primero la prueba* a ver qué puedo sacar de ahí, para ver si conviene que lo hagan ellos y saber qué podemos encontrar. (Santiago, 26:11 18m 42s en S7c. Reunión 2 – Santiago)

Finalmente, en estos propósitos, saberes docentes y demás elementos reconocimos referencias a nueve *voces sociales* –ordenadas de mayor a menor frecuencia–: actividad del curso, experiencia estudiantil, internet, experiencia personal, experiencia docente, libro de texto, estudiante, producto de investigación y condición material. De estas cabe subrayar las múltiples referencias a la experiencia de problematización y demás actividades del curso que realiza Santiago al discutir los productos de investigación –cita previa, 31:30–, así como al bosquejar las primeras ideas de su clase simulada. También conviene enfatizar sus alusiones a las experiencias estudiantiles, dada su frecuencia y su percepción no siempre positiva –cita siguiente–.

Esto de::: esto que está negritas, de hecho, ‘*se confunde más la acreditación con el aprendizaje*’ [*mientras lee*], *eso es cierto*, ¿no?, este::: esta acreditación que llamamos ‘¡ah!, pues, para que el alumno pase’, ¿no?, para que pase la materia, pero::: de ahí a que tenga las competencias realmente que se proponen, pues hay… hay una gran diferencia, ¿no? Y es lo que::: lo que en la… por lo menos en lo que *la escuela tradicional se… se mira mucho*, ¿no?, como… <u>esto</u>, <u>justo esto que estamos comentando</u>, ¿no?, si alguien pasa el curso de trigonometría o… yo, *en mi caso personal*, ¿no?, este::: que no comprendo a fondo todavía de las nociones trigonométricas, eh::: pero acredité la materia con cien, ¿no?, entonces [*entre risas*] hay una gran diferencia entre la acreditación y… y el aprendizaje real, ¿no?, este::: ahí… ahí sería un primer comentario que podría hacer al respecto de la lectura. (Santiago, 15:7 24m 54s en S4. Lectura 1)

De grupo

De forma general, durante esta segunda etapa del curso optativo, los/as participantes expresaron dos *propósitos* de carácter general: el construir actividades memorables y el construir actividades que capten la atención. Estos propósitos parecen estar anclados a la visión de las profesoras sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, más que en la composición específica de las actividades de las clases simuladas –aunque, de forma natural, permean estas últimas–.

También se expresaron dos *propósitos* específicos para las actividades: la centración en el uso diferenciado de las razones trigonométricas y el construir actividades no típicamente escolares. Estos, a diferencia de los primeros, sí parecen estar vinculados a las actividades de las clases simuladas y ser construidos en el desarrollo de las actividades del curso, a través del diálogo de saberes provenientes de diversas voces sociales, al margen de las condiciones instruccionales específicas.

Identificamos, además, catorce *saberes docentes*; trece de ellos de carácter discursivo y uno procedimental. Los primeros los organizamos en tres subgrupos. El primero de los cuales está asociado con la visión general que los/as profesores/as en formación inicial expresan sobre la enseñanza y aprendizaje de la matemática. Entre estos caben, por ejemplo, el saber que los factores sociales son determinantes en los procesos de enseñanza y aprendizaje, saber que los/as profesores/as guían su enseñanza en sus estudiantes, y saber que se confunde la acreditación con el aprendizaje.

Otro subgrupo alude a aspectos específicos de la enseñanza de la matemática y la trigonometría. Entre ellos, saber que el uso de ejemplos cotidianos es importante para la comprensión, saber que SOHCAHTOA es útil para afianzar las definiciones de las razones trigonométricas, y saber que el uso de diálogos es útil como guía del trabajo de los estudiantes.

Un último subgrupo de saberes discursivos alude a las nociones trigonométricas y su tratamiento escolar. Por ejemplo, saber que existe una diferencia conceptual entre razón y función trigonométrica, saber que las nociones trigonométricas no tienen aplicaciones prácticas en tareas cotidianas, saber que la naturaleza de la relación ángulo-lado no es lineal, y saber que la enseñanza conjunta de las razones trigonométricas no permite su diferenciación.

Mientras que el saber procedimental identificado en esta etapa es saber retomar actividades y recursos didácticos, y refiere a la decisión de Mercedes de utilizar, en su clase simulada, algunos ejercicios que su profesor tutor le facilitó, así como un libro de texto proporcionado por su profesora de Trigonometría.

Adicionalmente, en esta segunda etapa del curso reconocimos dieciséis asociaciones, un potencial saber, un momento de prueba y una referencia al contexto de la práctica docente. Las *asociaciones* podemos organizarlas en seis subgrupos, las establecidas con: los/as estudiantes y las condiciones de aula, las actividades del curso, con el trabajo de otros/as docentes, experiencias educativas previas, sitios webs, y otras fuentes documentales institucionales.

De estas asociaciones conviene destacar los primeros dos subgrupos. El primero muestra que, desde la discusión previa y el bosquejo inicial de actividades, los/as profesores/as en formación inicial comienzan a tener en mente a los/as hipotéticos/as estudiantes de la clase simulada. Mientras que el segundo señala el rol de la experiencia de problematización y las discusiones posteriores en el análisis de los referentes bibliográficos y en el bosquejo inicial de las clases simuladas.

También es pertinente mencionar un subgrupo especial de asociaciones, que concierne a observaciones construidas por los/as profesores/as en formación inicial en el diálogo de sus experiencias previas –estudiantiles y docentes– y el trabajo realizado en esta etapa; todas ellas refieren a las nociones trigonométricas y su tratamiento escolar. Por ejemplo, el uso del círculo unitario en la enseñanza de las funciones, la organización de la trigonometría escolar, la regularidad en la enseñanza de la trigonometría, y la diferencia de las nociones trigonométricas.

Acerca del resto de elementos identificados, el *potencial saber* refiere al uso de diferentes soportes al enseñar trigonometría, retomado de uno de los productos de investigación; la descripción del *contexto* de la práctica alude a nunca haber dado una clase regular –de forma presencial y con un grupo completo–; y el momento de *prueba* remite a la decisión de ensayar algunas tareas matemáticas concretas previo a su inclusión entre las actividades de la clase.

Por último, los propósitos, saberes docentes, asociaciones y demás momentos de interés refieren a once *voces sociales* distintas –ordenadas de mayor a menor frecuencia–: experiencia estudiantil, actividad del curso, otro/a docente, experiencia docente, experiencia personal, internet, libro de texto, producto de investigación, estudiante, condición material y programa de estudio. Una observación relevante a este respecto es que, en esta segunda etapa, la mayor cantidad de referencias en el trabajo de los/as participantes provienen de las experiencias estudiantiles –en particular las asociadas a la FPIE–, las actividades del curso –en especial a la experiencia de problematización– y las experiencias docentes –ante todo las prácticas profesionales–.

De forma global, el comportamiento de los/as participantes en esta etapa –de acuerdo con el marco utilizado– es un tanto dispar, dada la mayor cantidad y diversidad de elementos reconocidos en el trabajo e interacción de Candy y Santiago. Por ejemplo, ambos participantes mencionados expresan al menos el doble de asociaciones y voces sociales que Mercedes. Esto podría estar influido por el tipo de actividad propuesta y los diferentes niveles de formación en los que estos/as se encuentran –octavo/último y quinto semestre, respectivamente–.

Por otro lado, con relación a las diferencias/similitudes entre etapas del curso, algunas diferencias resultan naturales fruto del cambio en la práctica parcial analizada. Por ejemplo, en esta etapa predominan los saberes discursivos y demás elementos vinculados a la enseñanza y aprendizaje de la matemática y de la trigonometría, más que los saberes procedimentales y aspectos asociados a la matemática misma –como fue en la etapa previa–. No obstante, al igual en la primera etapa del curso, en esta primera parte del diseño de las actividades, las voces sociales que informan los propósitos, saberes docentes, asociaciones y potenciales saberes de los/as profesores/as en formación inicial provienen principalmente de sus experiencias estudiantiles, las actividades del curso, el trabajo de otros/as docentes y sus experiencias docentes previas.

8.1.3. Etapa III: trayectoria hipotética de aprendizaje

La tercera etapa del curso optativo que fungió como intervención en nuestro experimento de desarrollo del profesorado se compone de cinco sesiones –dos de todo el grupo y tres individuales– y está destinada a la construcción de una trayectoria hipotética de aprendizaje. Así, el trabajo de los/as profesores/as en formación inicial en esta etapa se centra en la determinación de un objetivo de aprendizaje –relativo al tópico matemático asignado–, y del proceso hipotético y las actividades matemáticas que permitan alcanzarlo; esto con base en el trabajo y discusiones de las etapas previas.

Como dijimos, junto con la etapa anterior y la primera parte de la etapa siguiente, las actividades de esta tercera etapa se incluyen en la práctica parcial de diseño de las actividades por parte de los/as profesores/as en formación inicial.

Por participante

Candy

Durante la tercera etapa del curso optativo Candy alude a cinco *propósitos*. En primera instancia reitera su interés general por construir actividades memorables para sus estudiantes –cita siguiente–.

> ¡Ah:::!, okey, okey, ah:: eso salió a partir de la *actividad que nos pusieron ustedes*, porque nos pusieron un triángulo… y me súper saqué de onda porque no tenía ni idea de qué hacer… y luego, en *las reflexiones de este mismo trabajo* empezaste a decir, tú o Melvin, probablemente tú [el investigador-profesor] porque Melvin no es descriptivo cuando habla, ¿verdad?, este::: empezaste a decir sobre la importancia, sobre que *casi no se ven los libros de texto* [figuras en posición no estándar] y a hacer como que referente… o puntos importantes sobre cómo debería ser. Y lo que sea de cada quien, pero cuando alguien me dice 'es que cuando vas a dar clases esto es importante' a mí como que se me graba en la cabeza, ¿saben?, entonces, *siempre estoy buscando o siempre estoy viendo maneras de cómo::: de cómo hacer una clase memorable*, y yo recuerdo que dijiste 'es que si tú ves esto en un libro de texto'… ¡no!, 'es que si tú pones esto en tu aula de clases, el niño lo va a buscar en su libro de texto y no lo va a encontrar, porque no es, es algo que no hay, que no existe y que se debe hacer conciencia de ello', entonces, básicamente de allí, desde allí, ¡ujum! (Candy, 54:7 38m 54s en S12b. Reunión 2 – Candy)

Además, refiere a cuatro propósitos específicos de su clase simulada: construir actividades no típicamente escolares, ir de los general a lo particular, usar figuras no prototípicas –cita previa–, y subrayar la aplicabilidad de las razones trigonométricas. Todos estos propósitos fueron construidos en el curso. El primero de ellos también fue referido en la etapa anterior; el segundo de estos propósitos fue construido por Candy al observar que en los libros de texto se introducen todas las razones trigonométricas juntas y luego se trabaja sobre cada una de ellas, y decidir hacerlo de esta forma en su clase simulada –contraria a la decisión de Santiago después de realizar la misma observación–; y el tercer y cuarto propósito específico son construidos retomando la experiencia de problematización y su transparentación.

Por otro lado, en el trabajo de Candy en esta etapa, identificamos referencias a catorce *saberes docentes*; cinco de carácter procedimental y nueve discursivos. Entre los primeros ubicamos: saber construir hipótesis respecto a su experiencia estudiantil, saber estructurar objetivos de aprendizaje, saber detallar las actividades en su THA, saber retomar actividades y recursos didácticos, y saber adecuar los recursos y actividades a los/as estudiantes.

Los primeros tres de estos están relacionados con la construcción de la trayectoria hipotética de aprendizaje, y los dos restantes con el contenido de esta. Más específicamente, de estos dos últimos, el saber retomar actividades y recursos didácticos está vinculado a la búsqueda bibliográfica realizada en la etapa anterior; mientras que el saber el adecuar los recursos y actividades a sus estudiantes está asociado a las experiencias docentes previas de Candy –cita siguiente–.

> Hay una cosa, normalmente mis…/ los diseños de Canvas son muy bonitos y todo, pero, por ejemplo, si yo me pusiera a *trabajar con los… con los… chicos*, lo *haría en blanco y negro* porque no sé cuál es la disponibilidad de que tiene cada uno. Cuando me toca hacer a mí trabajos en secundaria… (*no, les digo*) porque no es algo que '¡uy!, completamente lejos' y así, pero yo no trabajaría en algo que tiene tanto color con unos muchachos porque luego alguno quiere imprimirlo o simplemente quiere copiarlo, etcétera y… y es más fácil trabajar cuando es en blanco y negro. (Candy, 49:14 41m 37s en S11a. Reunión 1 – Candy)

Entre los saberes docentes discursivos encontramos: saber que el uso del pizarrón es útil para dirigir/acompañar la resolución de las actividades matemáticas, saber que las actividades de "reflexión" requieren mayor cantidad de tiempo, saber que los problemas "cotidianos" con muchos supuestos podrían ser distractores, saber que las razones trigonométricas se introducen como constantes, saber que las razones trigonométricas se introducen 'todas' juntas, saber que las figuras deben respetar las proporciones declaradas en los datos, saber que el uso exclusivo de figuras prototípicas dificulta el análisis de sus propiedades matemáticas, saber que en el tratamiento escolar no se discute la aplicabilidad de las razones, saber que en el tratamiento escolar no se discute el cambio del ángulo de referencia y la variación de la posición/proporción de las figuras.

Algunos de estos saberes –como los tres primeros– son retomados por Candy directamente de su experiencia docente. Otros son construidos fruto de su experiencia estudiantil y la revisión bibliográfica realizada en la etapa previa –por ejemplo, el cuarto y el quinto–. Mientras que el resto son elaborados producto del diálogo de sus saberes, en la interacción con las personas involucradas y con las actividades mismas del curso. Por ejemplo, el saber que las figuras deben respetar las proporciones declaradas en los datos es evidenciado por Candy al retomar la recomendación del investigador-profesor de adaptar las figuras de sus ejercicios a los datos, dada su consistencia con la experiencia docente propia –cita siguiente–.

> No, no, es cierto, *me ha pasado* que hay actividades en los que dice ‘profe, es que *miden lo mismo’*, por ejemplo, entonces deben de (*de medir lo mismo*) o que tratan *de llegar a la solución midiéndolo con una regla* y haciendo las proporciones y así, entonces, sí pasa. <Investigador-profesor: son detalles, pero son cosas que pasan. Son cosas que pasan.> Sí pasa, ujum, sí pasa. (Candy, 54:6 29m 55s en S12b. Reunión 2 – Candy)

Adicionalmente, reconocemos en el trabajo realizado por Candy en esta etapa, referencias a siete asociaciones y a una descripción del contexto. Las *asociaciones* se establecen con: fuentes bibliográficas, ubicación geográfica, cotidianidad, documentos educativos institucionales, comentarios de Santiago y el investigador-profesor, curso de Didáctica general, e internet. De estos resulta particularmente interesante las menciones de Candy al contexto geográfico en el diseño de las actividades de su trayectoria hipotética de aprendizaje, en particular, dado su interés por incluir problemas ‘cotidianos’ –cita siguiente–.

> Lo que pasa es que… no me pareció cotidiano encontrar el largo de un lago, ¿sabes?, no es como que… bueno, *yo vivo en un desierto*, entonces no es como…/ geográficamente no es posible que ‘¡ah!, sí, chicos vamos a salir aquí al parque donde hay un lago a medir cuando mide su hipotenusa’, o sea, no, no… en mi cabeza no cabe, entonces por eso *estoy en duda de lo cotidiano*, no estoy tan segura… ah::: no

estoy segura de qué tan real lo puedo volver… lo puedo hacer o ejemplificar. (Candy, 38:5 24m 11s en S9c. Reunión 1 – Candy)

La mención al *contexto* de la práctica docente, por otro lado, alude al señalamiento de Candy de nunca haber planificado a detalle una clase que fuera a implementar.

Finalmente, en estos propósitos, saberes docentes y otros elementos del trabajo de Candy identificamos referencias a once *voces sociales* –ordenadas de mayor a menor frecuencia–: experiencia docente, libro de texto, actividad del curso, experiencia estudiantil, equipo de investigación, otro participante, condición material, experiencia personal, programa de estudio, internet y producto de investigación. De estas llama particularmente la atención la constante alusión de Candy a su experiencia docente, a las actividades del curso y su experiencia estudiantil; subrayadas y ejemplificadas en las citas previas.

Mercedes

Por otro lado, durante la tercera etapa del curso optativo, Mercedes alude a cinco *propósitos*. En primer lugar, refiere a la necesidad por entregar los productos del curso, pese a la carga académica y otras dificultades personales que atraviesa –cita siguiente–.

Investigador-profesor: ¿por qué lo cambiaste?> Porque… pues miré muchas cosas que no, que no…/ después de la:::/ pues ayer tuvimos la:::/ ¿cómo se dice?... la reunión…/ pues la clase… entonces, pues, me puse ya.../ es que días anteriores, profe, tenía *muchos trabajos*, tenía la cabeza así, toda::: así::: así, frustrada, como dice /Candy/, *tenía el examen*, no sabía por dónde empezar, me sentía… no sé, no razonaba, no, no sabía lo que hacía, bueno sí sabía, pero pues lo hacía así como…/ cuando…/ si miró el… su miró el trabajo, profe, no estaba bien hecho, el que le… el que le mostré ayer; tenía no más la información, pero ni lo tenía con referencias, nada… *pero yo lo que quería era entregarlo*, entonces, ya ayer que hice el examen, dije ‘pues me voy a poner a hacer el trabajo otra vez, de cero’. No borré nada, dejé, pero dije ‘pues esto no va aquí, porque estaba’… todavía tenía unos pedazos que

> hablaba de las funciones y no de las razones… o de la ley, tenía todavía en un… en un… en un párrafo tenía de la ley, y yo dije ‘pues no estamos hablando de la ley’… y ya me puse…/ terminé como a la una de la mañana, pero ya estaba más… como más tranquila y ya. (Mercedes, 42:1 9m 30s en S10. Presentación)

También ubicamos referencias a su propósito general de incluir actividades que capten y mantengan la atención de los estudiantes –referido en la etapa anterior–. Por ejemplo, al hablar del uso de Kahoot, una aplicación en línea de resolución de preguntas tipo selección única –cita siguiente–.

> Pero también se puede, o sea, en esa actividad que quiero hacer también tienen que resolver, también, hay resolución de triángulos rectángulos, pero se me hace como que más… *va a estar más… dinámica*, no va a estar tan… como el Word, que pues tienen…/ se me hace que es más como::: ¿cómo lo puedo explicar?... la otra es más dinámica, aunque sea lo mismo de resolver, *creo que les va a llamar más la atención que el Word*. (Mercedes, 58:2 8m 42s en S13. Presentación)

Además, Mercedes refiere a tres propósitos específicos de su clase simulada: uso de la razón seno al resolver ejercicios –no problemas–, enfatizar el uso diferenciado de las razones trigonométricas, y subrayar la aplicabilidad de las razones trigonométricas. El primero está asociado a una intervención de Santiago, en la que explicita una definición de ‘problemas’ y de ‘ejercicios’; mientras que los últimos dos, Mercedes los construye producto del trabajo con su profesor tutor –quien le enseñó cuándo puede usar ‘seno’ y cuándo ‘coseno’– y en la transparentación de la experiencia de problematización –cita siguiente–, respectivamente.

> Yo lo retomé… de las (*exposiciones*) anteriores, que *usted mencionaba* que teníamos que ser específicos… de::: pues, de que *tiene que ser en un triángulo rectángulo*. Entonces, cuando recién empecé, ¿si se acuerda que yo… *yo me confundía con los triángulos*? ¡Ah!, entonces yo dije ‘pues, lo voy a dejar’, para mí se me hace importante que les quede, a lo mejor… *hay por ahí uno que otro… así como yo, que confunde los triángulos* o pues que les quede claro qué es un triángulo rectángulo… y cómo

> saber identificarlo, pues es el que tiene 90 grados. (Mercedes, 55:10 45m 16s en S12a. Reunión 2 – Mercedes)

Por otro lado, en el trabajo de Mercedes en esta etapa, identificamos referencias a seis *saberes docentes*; dos de carácter procedimental y cuatro discursivos. Entre los primeros ubicamos: saber retomar actividades y recursos didácticos, y saber estructurar objetivos de aprendizaje. El primero de ellos también fue identificado en la etapa anterior, mientras que el segundo está relacionado con la construcción misma de la trayectoria hipotética de aprendizaje.

Entre los saberes docentes discursivos encontramos: saber que existe una diferencia entre ejercicio y problema, saber que existe una diferencia conceptual y de uso entre razón y función trigonométrica, saber que en el tratamiento escolar no se discute la aplicabilidad de las razones, y saber que las razones trigonométricas tienen diferencias de uso. Estos saberes son la base de los objetivos específicos descritos más arriba. El primero de ellos es construido por Mercedes fruto de la aludida explicación de Santiago y su consideración de que será 'más fácil' incluir ejercicios que problemas en su clase –cita siguiente–; mientras que los tres restantes son retomados por Mercedes principalmente de la experiencia de problematización y su transparentación –cita previa–.

> Porque el otro decía, bueno… ¡ay, profe!... ya::: es que ahora *cambié en vez de 'problemas', 'ejercicios'* [*entre risas*], más fácil. <Investigador-profesor: ¿eres consciente… estás haciendo este cambio por lo que::: la diferencia que *comentó /Santiago/*?, ¿te acuerdas?> ¡Ajá, sí!... sí, aparte que yo creo que *va a ser más fácil para explicarlo y para que me entiendan*. (Mercedes, 50:2 2m 9s en S11c. Reunión 1 – Mercedes)

Adicionalmente, reconocemos en el trabajo de Mercedes, referencias a tres asociaciones y a una descripción del contexto. Las *asociaciones* se establecen con: estudiantes, clase de Trigonometría y equipo de investigación. De estos resulta particularmente interesante el último, en el que Mercedes solicita –por primera vez– de forma explícita una sugerencia al investigador-profesor respecto al diseño de su clase simulada –cita siguiente–.

Profe, ¿y usted qué recomienda… de *cuántos ejercicios hago*?, ¿cuántos recomienda que haga?, ¿cuántos ejercicios? (Mercedes, 55:6 37m 59s en S12a. Reunión 2 – Mercedes)

La mención al *contexto* de la práctica docente, por otro lado, refiere a la aludida carga académica de Mercedes –cita previa, 42:1–, que en algunas ocasiones le dificulta realizar las asignaciones con el detalle y cuidado que desea.

Finalmente, en estos propósitos, saberes docentes y otros elementos del trabajo de Mercedes identificamos referencias a siete *voces sociales* –ordenadas de mayor a menor frecuencia–: actividad del curso, experiencia personal, otro/a docente, otro/a participante, experiencia estudiantil, equipo de investigación y estudiante. Al igual que con el resto de los/as participantes, las actividades del curso suelen ser muy referidas por Mercedes en esta etapa; no así otras voces, como las experiencias docentes.

Santiago

Por último, durante la tercera etapa del curso optativo, Santiago refiere a un *propósito* de su clase simulada, identificado también en la etapa anterior: subrayar el uso diferenciado de las razones trigonométricas –cita siguiente–.

Y… también *como mencionaba /Candy/*, me…/ observo que los objetivos *generalizan… eh::: el aprendizaje de las seis razones trigonométricas o de las tres*, a veces, dependiendo si se usan… las tres o las seis… sin detenerse::: eh::: de una por una, ¿no?, que es… lo mismo que mencionaba /Candy/, ¿no?, también que… eh::: *se presentan las, así de jalón, las seis razones trigonométricas*. Eh::: esto me lleva a mí a mi primer borrador de objetivo aprendizaje que *me interesa que se haga esta distinción de las… de las diferentes razones trigonométricas*. (Santiago, 42:22 1h 3m 13s en S10. Presentación)

En el trabajo de Santiago, identificamos también referencias a ocho *saberes docentes*; dos de carácter procedimental y cuatro discursivos. Entre los primeros ubicamos: saber retomar actividades y recursos didácticos, y saber adecuar los recursos y actividades a sus estudiantes –cita siguiente–. El primero de ellos es propio de la actividad propuesta, la construcción de una trayectoria hipotética de aprendizaje con base en la búsqueda y discusión previa; mientras que el segundo está vinculado con la experiencia docente de Santiago –cita siguiente–.

> Estuvimos hablando la sesión anterior sobre si iba a utilizar, a lo mejor… mejor un software o algo así para que me dieran ahí sus respuestas, pero lo estuve pensando y dije ‘bueno, mmm::: a lo mejor *no todos tienen a la mano el software* en ese momento, *muchos toman la clases de celular*’. Eh::: *me pasó en mis prácticas* que ahorita *algunos alumnos* me dijeron ‘no, es que yo *no tengo computadora* y GeoGebra no lo puedo abrir en el celular porque se (*me traba*)’, ¿no?, entonces dije ‘bueno, bueno, bueno, para dejarnos de cosas mejor hacemos la hoja así, tradicional, que… se las mandó y que ellos la pongan en su cuaderno, ¿no? (Santiago, 53:2 8m 31s en S12c. Reunión 2 – Santiago)

Entre los saberes docentes discursivos encontramos: saber que las razones trigonométricas se introducen ‘todas’ juntas, saber que en la escuela la trigonometría se enseña ‘algorítmicamente’, saber que en la escuela se hacen primero ejercicios y después problemas, saber que los/as estudiantes aprenden fruto de superar un conflicto cognitivo, saber que existe una diferencia entre ejercicio y problema, y saber que las razones trigonométricas tienen diferencias de uso.

Algunos de estos saberes –como los tres primeros– fueron construidos por Santiago fruto de su experiencia estudiantil y docente, y de la revisión bibliográfica realizada en la etapa previa. Otros fueron reconstruidos por él desde la formación inicial docente en la FPIE, por ejemplo, el cuarto –cita siguiente– y el quinto saber mencionado.

> Después, introduzco la tangente… eh::: Aquí [*señalando la actividad 2 en su pantalla*] menciono que en este momento se busca *generar un ‘conflicto cognitivo’*. Esto lo decía mucho una maestra de la carrera… ¡ah!, pues, *la maestra /nombre/*, yo creo que la conocen. ¿Sí? [*el investigador-profesor asiente con la cabeza*] Entonces::: ella siempre decía esto de generar conflicto cognitivo en el estudiante… para::: digamos…

> *generar un conocimiento nuevo, ¿no?, después de… de la estabilización de ese conflicto*. (Santiago, 48:4 6m 12s en S11b. Reunión 1 – Santiago)

Mientras que el último saber docente discursivo aludido es la base del objetivo específico para la clase simulada de Santiago y fue construido en el curso –cita siguiente–, fruto del diálogo de diversas experiencias.

> Creo que…/ y yo apenas recién *con este curso*… fue cuando…/ es que justo pasó algo curioso porque este curso… pasó al mismo tiempo de que yo tuve que dar algunas *asesorías de trigonometría*, entonces, bueno, en mi caso a veces uno profundiza más cuando va a dar una clase que cuando le tocó recibirla, ¿no?, entonces… ya cuando me tocaba dar este tema de las razones, me puse a investigar, me puse a ver *los vídeos* del…/ que le comenté, de este *youtuber*, eh::: *fue cuando empecé a ver esta… distinción*… y la reforcé todavía también cuando en el libro, bueno, y en *la investigación* de la maestra lo menciona, ¿no?, que los maestros la usan sin distinción también, los de prepa, eh::: en el estudio que se hizo. Entonces apenas recién fue cuando, *este semestre, fui haciendo esta separación*, pero realmente::: no era algo que me haya detenido a plantearme en… *en mi vida académica tampoco*, ni siquiera en quinto semestre que llevé la materia [refiriéndose a Trigonometría]. (Santiago, 48:4 6m 12s en S11b. Reunión 1 – Santiago)

Adicionalmente, reconocemos en el trabajo de Santiago en esta etapa, referencias a ocho *asociaciones*; estas se establecen con: otros espacios de formación, naturaleza de la relación ángulo-lado, etimología, música, equipo de investigación, indistinción de las nociones trigonométricas, centración en ejercicios –no en problemas–, y potencial de las hipótesis. De ellas, nos parece importante destacar dos; primero, las menciones de Santiago respecto al estudio de la naturaleza de la relación ángulo-lado –planteado en uno de los productos de investigación–, como un objetivo más interesante y profundo que los propuestos en los libros de texto –cita siguiente–.

> Eh::: estos… estos objetivos, de estas últimas dos se *me hacen interesante, se me hacen adecuados*, porque… personalmente yo… yo tampoco… había hecho este::: este análisis, esta reflexión, hasta que… hasta *este curso*, ¿no? Entonces… eh::: se

> me hace interesante también… se me hace *más profundo* que el de resolver problemas *de los primeros libros* [de texto]. (Santiago, 37:3 5m 13s en S9a. Reunión 1 – Santiago)

Y segundo, la primera solicitud explicita de Santiago por una recomendación de parte del equipo de investigación sobre los recursos a utilizar en su clase simulada –cita siguiente–.

> ¿Hago la hoja, se las pasó en formato PDF en el momento, y que ellos… resuelvan en el… en el… cuaderno y me manden fotografía o algo así como evidencia? o ¿cree que haya… *creen que haya otra… herramienta* que se puede utilizar para… para esto? (Santiago, 48:8 31m 35s en S11b. Reunión 1 – Santiago)

Finalmente, en estos propósitos, saberes docentes y asociaciones del trabajo de Santiago en la etapa identificamos referencias a once *voces sociales* –ordenadas de mayor a menor frecuencia–: experiencia docente, experiencia estudiantil, libro de texto, actividad del curso, estudiante, equipo de investigación, otro/a docente, experiencia personal, internet, producto de investigación y otro/a participante. Cabe subrayar que, como mencionamos y ejemplificamos previamente, las experiencias docentes y estudiantiles constituyen las voces más recurrentes en el trabajo de Santiago, seguidas por los libros de texto consultados y las actividades del curso optativo.

De grupo

De forma general, durante la tercera etapa del curso optativo de nuestro experimento de desarrollo del profesorado, identificamos referencias a nueve *propósitos* que guían el actuar de los/as participantes. El primero de ellos alude a la necesidad de los/as profesores/as por dar respuesta a las actividades planteadas; como comentamos en etapas previas, podríamos explicar esta intención como consecuencia natural de que el trabajo realizado esté inmerso en un curso con valor curricular.

Identificamos, además, dos propósitos de carácter general: el construir actividades memorables y el construir actividades que capten la atención. Estos propósitos también fueron reconocidos en la etapa anterior y –como mencionamos entonces– parecen estar anclados a la visión de las profesoras sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, más que en la composición específica de las actividades de las clases simuladas.

Por último, reconocimos seis propósitos específicos para las actividades: enfatizar el uso diferenciado de las razones trigonométricas, subrayar la aplicabilidad de las razones trigonométricas, usar figuras no prototípicas, construir actividades no típicamente escolares, ir de lo general a lo particular, y el uso de la razón seno al resolver ejercicios, no problemas. Estos, como dijimos, –a diferencia de los anteriores– están asociados específicamente con las actividades de la trayectoria hipotética de aprendizaje y fueron construidos principalmente durante las actividades del curso.

Por otro lado, en el trabajo de los/as participantes en esta tercera etapa del curso, reconocimos veinte *saberes docentes*; cinco procedimentales y quince discursivos. Entre los primeros encontramos: saber estructurar objetivos de aprendizaje, saber construir hipótesis respecto a su experiencia estudiantil, saber detallar las actividades en su THA, saber retomar actividades y recursos didácticos, y saber adecuar los recursos y actividades a sus estudiantes. Los primeros tres están asociados a la construcción misma de la trayectoria hipotética de aprendizaje; mientras que los dos restantes aluden al contenido de esta.

De estos nos resulta particularmente interesante el último, por estar vinculado al comportamiento hipotético de los/as estudiantes de las clases simuladas, usualmente con base en la reacción del estudiantado en experiencias docentes similares. En consecuencia, este saber solo es expresado por Candy y Santiago –estudiantes del octavo/último semestre–, que son quienes cuentan con experiencia docente previa.

Por otro lado, los saberes docentes de carácter discursivo identificados los organizamos –de forma similar al capítulo anterior– en tres subgrupos. El primero está asociado con la visión general que los/as profesores/as en formación inicial expresan sobre la enseñanza y aprendizaje de la matemática. En este cabe, por ejemplo, saber que los/as estudiantes aprenden fruto de superar un conflicto cognitivo.

El segundo subgrupo refiere a aspectos específicos de la enseñanza de la matemática y la trigonometría. Entre estos ubicamos, por ejemplo, saber que el uso exclusivo de figuras prototípicas dificulta el análisis de sus propiedades matemáticas, saber que las actividades de "reflexión" requieren mayor cantidad de tiempo, saber que el uso del pizarrón es útil para dirigir/acompañar la resolución de las actividades matemáticas y saber que las figuras deben respetar las proporciones declaradas en los datos.

Algunos de estos, como es el caso del primer saber aludido, son construidos por los/as participantes dadas las actividades y discusiones sucedidas en el curso. No obstante, la mayor parte, como los restantes saberes mencionados, son retomados por los/as profesores/as en formación inicial desde experiencias docentes previas.

El último subgrupo de saberes refiere a las nociones trigonométricas y su tratamiento escolar. Por ejemplo, saber que en el tratamiento escolar no se discute la aplicabilidad de las razones, saber que las razones trigonométricas tienen diferencias de uso, saber que existe una diferencia conceptual y de uso entre razón y función trigonométrica, y saber que en el tratamiento escolar no se discute el cambio del ángulo de referencia y la variación de la posición/proporción de las figuras.

A diferencia de los anteriores, este subgrupo de saberes parece construirse principalmente durante las actividades del curso, en referencia al diálogo de saberes provocado y a la interacción con el resto de las personas involucradas. Además, constituyen la base de varios de los propósitos específicos declarados por los/as participantes para sus clases simuladas.

Adicionalmente, en esta tercera etapa del curso reconocimos diecisiete asociaciones y dos referencias al contexto de la práctica de los/as profesores/as en formación inicial. Las *asociaciones* podemos organizarlas en seis subgrupos, las establecidas con: experiencias de formación docente, las personas involucradas, internet y fuentes bibliográficas institucionales, espacios personales, los/as estudiantes, y la naturaleza de las nociones en juego.

De estas nos conviene destacar dos subgrupos; el segundo y el último. Las asociaciones con las personas involucradas, en particular con el equipo de investigación, evidencia que, en esta etapa, los/as participantes consultan/retoman la opinión de los investigadores y demás participantes respecto al diseño de las actividades de sus clases simuladas.

En cuanto al último subgrupo, cabe subrayar que solo Santiago hace alusión a la naturaleza de la relación ángulo-lado durante esta etapa. Esto, como dijimos, al construir su objetivo de aprendizaje y comentar que los objetivos que incluyen esta reflexión –presentes en los productos de investigación– le parecen más interesantes y profundos que los encontrados por él en libros de texto.

Al igual que en la etapa anterior, destacamos un conjunto particular de asociaciones que aluden a observaciones construidas por los/as participantes en el diálogo de sus experiencias previas –estudiantiles y docentes– y el trabajo realizado en esta etapa. Entre ellas, el potencial de las hipótesis, la centración en ejercicios, no en problemas, y la indistinción de las nociones trigonométricas.

Por otro lado, las descripciones del *contexto* de la práctica de los/as profesores/as en formación inicial identificadas aluden a nunca haber planificado a detalle una clase que fueran a aplicar y a la carga universitaria que dificulta el cumplimiento de las asignaciones en tiempo y forma.

Finalmente, los propósitos, saberes docentes, asociaciones y demás elementos reconocidos en el trabajo de los/as participantes en esta etapa refieren a trece *voces sociales* distintas –ordenadas de mayor a menor frecuencia–: experiencia docente, actividad del curso, experiencia estudiantil, libro de texto, equipo de investigación, experiencia personal, otro/a participante, otro/a docente, estudiante, internet, condición material, producto de investigación, y programa de estudio.

Un par de observaciones son relevantes a este respecto. Primero que, pese a que –como dijimos– solo Santiago y Candy aluden a experiencias docentes previas, esta es la voz social más referida en esta etapa de diseño de actividades propias; y segundo, que las actividades del curso son mencionadas con frecuencia en la construcción de las trayectorias hipotéticas de aprendizaje por parte de los/as participantes, en particular en lo que refiere a los objetivos específicos de la clase y los saberes docentes asociados a estos.

De forma global, el comportamiento de los/as participantes –de acuerdo con el marco utilizado– es un tanto ambivalente en esta etapa. Por un lado, como mencionamos, los/as profesores/as coinciden en algunos de los propósitos específicos que guían el diseño de sus actividades y en los saberes docentes que los fundamentan. Estos elementos coincidentes se construyeron durante la clase, en el trabajo realizado y las discusiones sostenidas; lo que es consistente, por ejemplo, con que las actividades del curso sea una de las voces sociales frecuentemente aludidas por los/as participantes.

No obstante, de forma similar a lo ocurrido en la etapa anterior, observamos una mayor cantidad y diversidad de elementos en el trabajo e interacción de Santiago y Candy –en particular en el de esta última–. Quizá el componente más destacado de esta diferencia es la alta frecuencia e injerencia de las experiencias docentes previas de Candy y Santiago en los propósitos, saberes docentes y asociaciones manifestadas durante la construcción de sus trayectorias hipotéticas de aprendizaje.

Por otro lado, acerca de las diferencias/similitudes entre etapas del curso, al incluir actividades semejantes, la cantidad y naturaleza de los elementos identificados en el trabajo de los/as participantes en esta etapa es similar a los reconocidos en la etapa anterior. Dos diferencias sutiles encontradas son: en la tercera etapa los saberes discursivos ubicados están vinculados en mayor medida con los aspectos específicos de la enseñanza de la matemática/trigonometría y con las nociones trigonométricas y su tratamiento escolar, que con la visión general de los/as participantes sobre la enseñanza y aprendizaje de la matemática; y que en esta etapa de diseño de actividades, mientras otras voces sociales como las actividades del curso y las experiencias docentes mantienen o incrementan su frecuencia, las experiencias estudiantiles dejan de ser la principal referencia del trabajo de los/as profesores/as en formación inicial.

8.1.4. Etapa IV: clase

La cuarta y última etapa de nuestro curso optativo incluye siete sesiones –dos de todo el grupo y cinco individuales– y está destinada a la planificación, implementación y análisis de las clases simuladas. En consecuencia, el trabajo de los/as profesores/as en formación inicial en esta etapa se centra en construir, con base en las trayectorias hipotéticas de aprendizaje elaboradas, planes de clases para condiciones de instrucción concretas, implementar estas planificaciones en clases simuladas, y analizar los resultados obtenidos.

Dada la variedad de prácticas parciales que incluye y nuestros objetivos de investigación, seccionamos el análisis –tanto por participantes como de grupo– de esta etapa en tres partes: la planificación, que da continuidad a la etapa anterior y cierra el proceso de diseño de las actividades por parte de los/as profesores/as; la puesta en escena, que se centra exclusivamente en la implementación de las clases simuladas; y el análisis, dedicado al estudio de los resultados obtenidos.

Por participante

Candy

Durante la primera parte de esta cuarta etapa del curso optativo, Candy refiere a dos nuevos *propósitos* específicos de su clase simulada: lograr que sus estudiantes reflexionen producto de las actividades, y usar la mnemotecnia SOHCAHTOA como estrategia para afianzar las definiciones/fórmulas de las razones trigonométricas –cita siguiente–. Estos fueron construidos en el transcurso de las sesiones; el primero de ellos asociado al deseo de elaborar actividades no típicamente escolares, y el segundo a experiencias personales y estudiantiles previas.

> Si llegáramos… llevar…/ *si se llevará más de ocho minutos, o sea, 20 minutos*, suprimirían la segunda parte que sería::: lo de las::: ¿qué?... la lluvia de ideas en el pizarrón y todo eso, no lo haría, y::: me saltaría hasta lo del triángulo rectángulo y explicaría lo de::: seno, coseno *y SOHCAHTOA, porque eso es algo a lo que no voy a renunciar*; y yo creo que allí terminaría la actividad, porque nos llevamos tiempo haciéndolo, ¡ajá! (Candy, 70:4 20m 19s en S15c. Reunión 2 – Candy)

En el trabajo de Candy en esta parte de la etapa, además, identificamos referencias a siete *saberes docentes*; cuatro de carácter procedimental y tres más discursivos. Entre los primeros ubicamos: saber detallar las actividades en su plan de clase, saber adecuar los recursos y actividades a sus estudiantes, saber adecuar los recursos y actividades al tiempo, y saber adaptar las actividades de libros de texto.

El primero de ellos está relacionado con la construcción misma del plan de clase; mientras que los tres restantes están vinculados a las decisiones sobre las actividades, sus tiempos, recursos, etcétera. El saber adecuar los recursos y actividades a sus estudiantes, por ejemplo, se muestra –al igual que en la etapa anterior– acompañado de múltiples referencias a las experiencias docentes de Candy –cita siguiente–.

> Utilizo *dos dispositivos*, ya les había dicho, ¿no?, que grabo con mi cámara y tengo::: mi micrófono en la computadora porque también ahí puedo ver el chat y todas esas

> cosas, entonces es más complicado… *no es tan complicado* porque yo sé que les digo ‘chicos, tienen que poner fija mi pantalla’ para que lo hagan y así, pero, pues, siempre me pasa de… literal, *he dado 15 clases*, y *siempre pasa de ‘profe, nada más la escucho, no la puedo ver’*, entonces, ¡ujum! (Candy, 65:12 14m 16s en S14c. Reunión 1 – Candy)

Entre los saberes docentes discursivos encontramos: saber que las actividades de “reflexión” requieren mayor cantidad de tiempo, saber que las actividades “en línea” requieren mayor cantidad de tiempo –cita siguiente–, y saber que los/as estudiantes avanzan a distintos ritmos. Estos también parecen estar asociados a experiencias docentes y estudiantiles.

> Sin tomar en cuenta, (*por supuesto*), *los primeros 30 segundos de silencio* que hay después de cada pregunta, ¿saben?, porque siempre preguntas algo y 30 segundos de silencio y luego alguien dice ‘¡ah!, ¿me repite la pregunta?’, y ya es como que empiezan a participar, así, más o menos. (Candy, 65:5 4m 15s en S14c. Reunión 1 – Candy)

Adicionalmente, reconocemos en el trabajo realizado por Candy en esta primera parte de la etapa, referencias a una asociación y a un momento de prueba. La *asociación* se establece con las fuentes bibliográficas. Mientras que el momento de *prueba* alude a la necesidad expresa por Candy de realizar ensayos con su conexión a internet y dispositivos electrónicos previo a incluirlos en su plan –cita siguiente–.

> No lo he colocado porque *primero tengo que hacer pruebas, de ver si sí va a funcionar o no va a funcionar*, porque tengo ese pequeño problema en el que las sesiones *en Meet* me agarran bien y yo puedo hacerlo perfecto, pero *en Zoom* hasta me congelo a veces o…/ bueno, ahorita no tengo problemas, pero este no es *mi internet* así que pues [*gesto de incertidumbre con sus manos*]… ¡Ajá!, ¡ajá!, tengo que ver también cómo funciona con Zoom y… ajá, porque es otra plataforma y es otro estilo y así, no sé si lo voy a poder correr, etcétera, entonces… ¡ajá!, tengo que hacer pruebas primero, y ya que vea que *si funciona, pues ya lo agrego*, entonces. (Candy, 70:3 15m 19s en S15c. Reunión 2 – Candy)

Finalmente, en estos propósitos, saberes docentes y demás elementos del trabajo de Candy identificamos referencias a once *voces sociales* –ordenadas de mayor a menor frecuencia–: condición material, experiencia docente, otro/a participante, experiencia personal, experiencia estudiantil, actividad del curso, modalidad, producto de investigación, estudiante, libro de texto y equipo de investigación. En esta última instancia de diseño, llama la atención las múltiples alusiones que Candy hace de las condiciones materiales (los tiempos, materiales y recursos de clase) –citas previas, 65:12 y 70:3–, una voz apenas perceptible en la etapa anterior e inexistente en las previas a esa. También destaca la permanencia de las experiencias docentes como una de las voces sociales más frecuentes en el trabajo de Candy a través de todas las etapas analizadas hasta ahora.

Por otro lado, durante la implementación –segunda parte de esta cuarta etapa del curso–, identificamos en el trabajo de Candy referencias tres de los *propósitos* específicos de su clase referidos previamente: usar figuras no prototípicas, el uso de la mnemotecnia SOHCAHTOA, y enfatizar la aplicabilidad de las razones trigonométricas –cita siguiente–.

> Como nuestro cateto opuesto y nuestra hipotenusa… fue constante, o sea, fue… semejante [*parece leer algo en su escritorio al corregir*], siempre fue creciendo en la misma proporción, el ángulo siempre va a ser el mismo, ¿okey?; es por eso que nuestra razón es similar… y esto pasa *únicamente con los triángulos rectángulos*, porque son los únicos que tienen… catetos y son los únicos que tienen hipotenusa, si vemos un equilátero, pues los equiláteros no tienen catetos ni tienen hipotenusa. (Candy, 80:10 30m 42s en S17a. Clase simulada – Candy)

Además, reconocimos referencias a tres *saberes docentes*, todos ellos de carácter procedimental: saber confrontar fenómenos didácticos, saber usar SOHCAHTOA para afianzar las definiciones de las razones trigonométricas, y saber dirigir el ritmo de trabajo. Estos son saberes ya observados o vinculados con propósitos previos, por ejemplo, el saber dirigir el ritmo de trabajo parece estar asociado con el saber que los/as estudiantes avanzan a distintos ritmos, advertido en la parte anterior de esta misma etapa –cita siguiente–.

> Okey, /nombre de una estudiante/ también. ¿Alguien más?, ¿alguien que diga que necesita más tiempo? También se vale, *no todos estamos al mismo ritmo*. (Candy, 80:3 12m 7s en S17a. Clase simulada – Candy)

Adicionalmente, identificamos en el trabajo realizado por Candy en la implementación, referencias a un momento de *improvisación*, relacionado con la estrategia de esperar a que al menos la mitad de los/as estudiantes universitarios/as declare haber terminado la actividad antes de avanzar –cita siguiente–.

> Entonces, bueno, como ya son cuatro, … mmm::: *es un número más o menos considerable*, vamos a ver… cuánto son las respuestas. (Candy, 80:27 12m 29s en S17a. Clase simulada – Candy)

Finalmente, en estos propósitos, saberes docentes y momentos de improvisación encontramos referencias a cuatro *voces sociales* –ordenadas de mayor a menor frecuencia–: actividad del curso, estudiante, experiencia estudiantil, y otro/a docente. Algunas de estas voces son explícitas en la implementación –cita siguiente–, pero la mayoría son implícitas al actuar de Candy, sabemos de ellas por las etapas previas de trabajo.

> ¡Ah, okey, /una estudiante/!, ¡ah, sí!, <u>¡qué bueno que lo mencionas, /una estudiante/!</u> Efectivamente, SOHCAHTOA, el nombre de…/ cuando yo estuve…/ cuando estuve hace algunos ayeres *en ingeniería*, tenía un profesor que nos habló específicamente sobre eso. Hay algo que es como un recurso mnemotécnico, que se utiliza para recordar las funciones trigonométricas, en este caso, lo que escribió /una estudiante/, que es… SOH… CAH… TOA… [*mientras escribe en la pizarra digital*] […]. (Candy, 80:11 31m 48s en S17a. Clase simulada – Candy)

Por último, durante el análisis de la clase simulada –última parte de esta cuarta etapa del curso optativo–, Candy refiere a tres *propósitos* específicos de su clase: lograr la comprensión de sus estudiantes, usar la mnemotecnia SOHCAHTOA como estrategia para afianzar las definiciones/fórmulas de las razones trigonométricas, y usar figuras no prototípicas –cita siguiente–. A excepción del primero, estos propósitos ya habían sido referidos en esta etapa e incluso en etapas previas.

> Creo que lo que iba a dibujar era muy parecido al triángulo de mi primer problema, que es uno que parece como que equilátero, si no le pones atención, ¿no? Luego, iba a dibujar un triángulo rectángulo, pero *lo iba a dibujar de manera estándar, lo cual no va de la mano con lo que yo tenía pensado hacer*, entonces por eso lo *cambié de lugar y de forma* […]. (Candy, 86:7 19m 17s en S17d. Clausura)

En el trabajo de Candy en esta parte de la etapa, además, identificamos referencias a once *saberes docentes*; cuatro de carácter procedimental, seis más discursivos y uno aptitudinal. Entre los primeros ubicamos: saber adecuar los recursos a sus experiencias previas y habilidades, saber dirigir el ritmo de trabajo, saber evaluar y adecuar las actividades respecto a sus estudiantes, y saber retomar las respuestas de sus estudiantes –cita siguiente–. En casi todos estos saberes juega un rol central el estudiante y suelen referir a experiencias docentes.

> Pues no había notado todas esas cosas que había hecho, como mencionar que… el… cateto adyacente era el que tocaba el ángulo, porque lo dijo /una estudiante/… y *lo seguí explicando de esa manera* porque dije '*si /la estudiante/ lo entiende así, es más fácil que los demás lo entiendan así*'. (Candy, 90:4 18m 55s en S18c. Reunión 1 – Candy)

Entre los saberes docentes discursivos encontramos: saber que "el profesor es el que debe saber", saber que las clases requieren secciones de discusión, pero también de institucionalización, saber que las clases no salen como se planean, saber que la modalidad en línea afecta las dinámicas de clase, saber que los estudiantes anotan lo que el/la profesor/a escribe en la pizarra, y saber que las clases mejorar con la ejecución reiterada y su análisis –cita siguiente–. Los primeros dos parecen estar asociados a la visión de Candy sobre la enseñanza y a algunas experiencias estudiantiles previas; el resto, nuevamente, están anclados a sus experiencias docentes.

> Cuando me tocó…/ cuando *daba asesorías*, que me aventaron los cuatro grupos… pues yo… yo me di cuenta que, cuando daba mi primera clase, porque eran los cuatro grupos, la misma clase, a los…/ pues la misma clase, así como maestro real, ¿no?, que como <u>idealmente</u> [*hace comillas con sus dedos*] que todos tus grupos van en el mismo tiempo, ¿no?, pero pues… como no más era una clase a la semana … pero sí, sí me pasó esto, me daba cuenta que, por ejemplo, siempre… pobrecitos los del segundo A tenían… como que, básicamente una clase experimental, que sí planeaba y sí hacía con detalle, bueno, con el detalle que ya me conocen, ¿no?, o sea, sí tenían las respuestas y sabían más o menos a dónde iba, pero, por ejemplo, con el segundo… bueno, *ya que terminaba la clase, me di cuenta…/ me daba cuenta qué funcionaba, qué no funcionaba, qué podía hacer, qué podía mejorar* y ya pues para los siguientes grupos, *así van mejorando, siempre*. Entonces, las que tenían…/ las que les iba mejor, ya al final [*entre risas*], eran los del segundo… segundo C, me parece, ¡ajá!, que eran los últimos, porque, pues, *ya había dado la clase varias veces, ya sabía de qué forma les podía preguntar para que le entendieran y de qué forma no podían, o sea, como que no captaban o tenían problemas*. (Candy, 90:7 25m 5s en S18c. Reunión 1 – Candy)

El saber docente de carácter aptitudinal identificado refiere a la alusión de Candy sobre su comodidad para hablar e improvisar en público. Habilidad que, agrega, desarrolló en gran parte por sus estudios de teatro y que es consciente es determinante en su seguridad y forma de trabajo en el aula –cita siguiente–.

> Te voy a contar mi secreto… de cómo le hago para que todo… para que todo vaya bien y no perder los estribos. Una de las personas, bueno, una… una de las… tres personas que estamos aquí conectados hoy, que es mujer, pues no vaya siendo que uno de ustedes también, ah::: *estudió teatro por tres años*; entonces *estoy acostumbrada a la improvisación, a hablar en público* y definitivamente… yo sé… <u>jamás</u>, ninguna, ninguna, ninguna, ninguna de las obras que he presentado, jamás, jamás, jamás, sale tal cual como está en el libreto. Nunca sucede. <u>Jamás</u>. Entonces, cada vez *que dices* como que ‘chicos, *es que su trayectoria hipotética no va a salir tal cual como parece*’ y yo de ‘*lo sé, lo sé, te entiendo*. Te entiendo, te entiendo’. Entonces

> yo creo… eso me ha ayudado mucho porque *tengo mucha seguridad* y… me ha pasado de todo. (Candy, 90:6 22m 9s en S18c. Reunión 1 – Candy)

Adicionalmente, reconocemos en el trabajo realizado por Candy en esta última parte de la etapa, referencias a cuatro asociaciones, tres potenciales saberes, tres momentos de improvisación y dos referencias al contexto de la práctica. Las *asociaciones* se establecen con: gustos personales, discusiones previas, prácticas profesionales y referentes de investigación. Mientras que los *potenciales saberes*, por su parte, refieren a adaptar las actividades dados los resultados obtenidos, detallar sus futuras planificaciones y al uso de los pasos de resolución introducidos por Mercedes como una receta de cocina –cita siguiente–.

> Okey, yo pensé::: que *podría…/* <u>*yo*</u> *utilizar esa misma estrategia* y decir como '¡chicos!, el día de hoy vamos a hacer una receta, pero nada un pastel sino de cómo identificar las identidades trigonométricas', ¿sabes? Entonces sería como que, cuando estoy resolviendo los triángulos, es como que 'a ver, saquen su recetario, ¿qué paso sigue? Entonces eso me gustó mucho, la verdad me gustó mucho… y::: *te lo voy a robar* [*entre risas*], o sea, no es tal cual lo mismo, ¿no?, pero pues… te lo voy a robar. (Candy, 99:5 11m 46s en S20. Presentación)

Los momentos de *improvisación* apuntan, como dijimos, a cambios espontáneos realizados en la implementación de la clase simulada. Los tres identificados en el trabajo de Candy son: manejo del tiempo, uso de respuestas de sus estudiantes y rehacer figuras. El primero está relacionado con las estrategias para controlar el ritmo de trabajo utilizadas por Candy –cita previa, 80:27–; el segundo al uso de las palabras de los/as estudiantes universitarios/as en lugar de las planificadas en pro de lograr su comprensión –cita previa, 90:4–; y el último a la necesidad de rehacer algunas de las figuras dado que las iniciales eran prototípicas, lo que no iba de acuerdo con uno de sus propósitos específicos para la clase simulada –cita previa, 86:7–.

Las referencias al *contexto*, por otro lado, aluden a momentos de interés en los que Candy expresa algunas circunstancias que fueron determinantes en la implementación y sus resultados; en particular, el nunca haber dado una clase regular previamente –algo que también mencionó en la etapa dos–, y algunas situaciones personales y condiciones materiales que no le permitieron dar su clase como ella hubiera deseado –cita siguiente–.

> Resulta… ¿te acuerdas… te acuerdas que te dije '¡ah!, no pude imprimirlo'?, porque a mí *me gusta tener todo impreso*, allí, viéndolo detalladamente… y pues yo estaba hecha un manojo de nervios…/ no un manojo de nervios, yo estaba… con la cabeza volteada, así, completamente de cabeza, porque había tenido un día terrible, *una semana terrible* [*entre risas*]… una semana terrible, que terminó todavía más feo, pero eso es otra historia, ¿no? Y, cuando hice mi::: aquí está [*muestra en la pantalla su libreta de anotaciones*], cuando hice *mi mapa* de lo que iba a hacer, así, según yo, detalladamente y todo, *no puse la lluvia de ideas, me lo salté*. (Candy, 90:1 2m 32s en S18c. Reunión 1 – Candy)

Finalmente, en estos propósitos, saberes docentes y otros elementos del trabajo de Candy reconocimos referencias a once *voces sociales* –ordenadas de mayor a menor frecuencia–: experiencia docente, estudiante, experiencia personal, otro/a participante, modalidad, equipo de investigación, actividad del curso, otro/a docente, condición material, experiencia estudiantil y producto de investigación. Cabe notar que las experiencias docentes son, de nueva cuenta, la fuente más frecuente en las intervenciones de Candy; las condiciones materiales se refieren mucho menos que en la parte previa de esta etapa; y que los estudiantes pasan a ser una voz social significativa, algo que no había sucedido en ninguna etapa previa en el trabajo de Candy.

Mercedes

En el trabajo de Mercedes durante la primera parte de esta cuarta etapa del curso, identificamos referencias a tres *saberes docentes*; uno de carácter procedimental, uno discursivo y uno aptitudinal. El primero es saber adecuar los recursos y actividades a sus estudiantes –cita siguiente–, que Mercedes muestra, por ejemplo, al preparar las actividades de su clase simulada no solo en Kahoot, sino también en un documento Word, por si un/a estudiante tiene problemas con su dispositivo o su conexión a internet –retomando una recomendación de Candy–.

> En el cierre… sigo, profe, sigo con la actividad de Kahoot, pero voy a hacer las dos, voy a hacer…/ sí voy a hacer las dos… o sea, yo *voy a hacer el Kahoot, si a alguien se le atora* pues le voy a mandar ya…/ voy a…/ si alguien dice 'pues no tengo… estoy en datos [móviles]… no me alcanza para eso', *yo le voy a mandar el documento Word*, pero van a ser las mismas preguntas… para que::: para que, pues, esté en lo mismo. (Mercedes, 66:6 23m 54s en S14b. Reunión 1 – Mercedes)

El saber docente discursivo identificado es saber que los datos de los problemas trigonométricos se introducen al azar –cita siguiente–, que Mercedes muestra al construir ejercicios trigonométricos con longitudes aleatorias –que en ocasiones no constituyen triángulos o no triángulos rectángulos–; este está vinculado con su creencia sobre cómo los/as profesores/as construyen sus ejercicios y problemas.

> Yo pensé, fíjese, que… lo de los triángulos…/ yo siempre creí eso de que *los maestros daban no más un número al azar*, no sabía que sí tenían… que sí tenía que ser un triángulo [*entre risas*], por eso lo hice yo así, a lo... (Mercedes, 66:1 35s en S14b. Reunión 1 – Mercedes)

Y el saber aptitudinal reconocido es saber diseñar imágenes para sus actividades –cita siguiente–, que Mercedes manifiesta al construir, después de una reunión de trabajo con Santiago, las imágenes de los ejercicios trigonométricos que usará en su clase simulada; esto, pese al básico manejo del computador que previamente expresó tener.

> <Investigador-profesor: ¿trabajaste *con /Santiago/* al final?> Sí, el domingo. *Sí, sí me explicó*. <Investigador-profesor: ¿y sí entendiste más o menos cómo hacer… trabajar con GeoGebra?> *Sí pues, yo hice los… yo hice los triángulos* [*entre risas*]. (Mercedes, 71:1 1m 11s en S15a. Reunión 2 – Mercedes)

Adicionalmente, reconocemos en el trabajo realizado por Mercedes en esta primera parte de la etapa, referencias a dos asociaciones, un momento de prueba y dos descripciones del contexto. Las *asociaciones* se establecen con la reunión adicional con Santiago y con el trabajo presentado por este. El momento de *prueba* refiere a la decisión de Mercedes de probar su clase simulada, con el objetivo de ensayar su explicación, sus actividades, tiempos y recursos –cita siguiente–. Además, especifica su interés de llevar a cabo esta prueba con su hermana, a quien se le dificultan las matemáticas y no recibe clases de esta área hace un tiempo, así, si ella le entiende, pues lo entenderán los estudiantes universitarios.

> Voy a poner a mi hermana que haga los ejercicios, o sea, *le voy a dar una clase a ella*. Si veo que…/ es que ella no…/ sí se le complica mucho la matemática, *si veo que sí lo entendió ella*::: que (*de verdad*) no ha ido a la escuela ya en tiempo… *lo van a entender los de… matemáticas* [estudiantes de la Licenciatura en Docencia de la Matemática]. (Mercedes, 71:5 28m 23s en S15a. Reunión 2 – Mercedes)

Finalmente, en estos saberes docentes y demás elementos del trabajo de Mercedes identificamos referencias a tres *voces sociales* –ordenadas de mayor a menor frecuencia–: otro/a participante, experiencia estudiantil, y otro/a docente. La primera se vincula con las ayudas y sugerencias que Mercedes retoma de Candy –al preparar sus ejercicios en un documento Word– y de Santiago –en el diseño de imágenes–; y las restantes a la creencia de Mercedes en que los/as profesores/as construyen sus ejercicios y problemas con datos aleatorios –también mencionada más arriba–.

Por otro lado, durante la segunda parte de esta cuarta etapa del curso –la implementación–, reconocimos en el trabajo de Mercedes referencias a un *propósito* específico de su clase simulada, también aludido previamente: enfatizar la aplicabilidad de las razones trigonométricas –cita siguiente–.

> El primero… con el que tenemos que… identificar, es, pues, que la figura con la que se está trabajando sea un triángulo rectángulo, puesto que *si no es un triángulo rectángulo pues no se puede::: trabajar… pues ninguna::: razón, ni seno ni ninguna*. (Mercedes, 84:6 20m 48s en S17c. Clase simulada – Mercedes)

Además, identificamos referencias a dos *saberes docentes*; uno de carácter procedimental y otro discursivo. El saber procedimental es saber confrontar fenómenos didácticos, y está asociado a cuando –como en la cita anterior– Mercedes atiende fenómenos didácticos respecto a la enseñanza de la trigonometría que se discutieron en el curso. Mientras que el saber discursivo es saber que existe una diferencia conceptual y de uso entre razón y función trigonométrica –cita siguiente–, algo que fue tema de discusión constante en las sesiones previas y que Mercedes manifiesta al corregir una pregunta durante su clase.

> "¿Cuáles serían los valores que sustituye en esta… en esta *función… en esta razón, perdón*? (Mercedes, 84:5 16m 52s en S17c. Clase simulada – Mercedes)

Adicionalmente, reconocemos en el trabajo realizado por Mercedes en la implementación referencias a un momento de *improvisación*, vinculado con la solicitud de ayuda que hace a Santiago para que este le lea el chat de Zoom –donde los/as estudiantes universitarios/as escriben–, pues ella no sabe cómo hacerlo.

Finalmente, en estos propósitos, saberes docentes y momentos de improvisación reconocimos referencias a dos *voces sociales* –ordenadas de mayor a menor frecuencia–: actividad del curso y otro/a participante. La primera está relacionada con la confrontación de los fenómenos didácticos y la diferencia conceptual entre razón y función trigonométricas, discutidos en clase; y la segunda a la aludida intervención de Santiago.

Por último, en el trabajo de Mercedes en el análisis de la clase simulada –última parte de esta cuarta etapa del curso–, identificamos referencias a seis *saberes docentes*; dos de carácter procedimental, tres discursivos y uno aptitudinal. Entre los primeros ubicamos: saber detallar las actividades en su plan de clase, y saber adecuar las actividades a sus estudiantes –cita siguiente–. El primero de estos alude a la construcción de la planificación, y el segundo a las modificaciones sugeridas por Mercedes para el plan inicial, considerando la reacción de los/as estudiantes universitarios/as –a quienes denomina compañeros–.

> Yo considero que sí fueron adecuadas, pero no fueron, a lo mejor, bien elaboradas. No cambiaría el con… no sé si aquí lo dije bien, profe, o sea, *no cambiaría lo que quiere decir la pregunta, pero sí la reestructuraría de otra forma*. <Investigador-profesor: ¡ah, ya!, la escritura te refieres.> Mmm::: <Investigador-profesor: o sea, la idea te gusta pero no te gusta cómo está dicha.> ¡Ajá!, porque, aja, porque *eso fue lo que causaba a lo mejor confli… conflictos con los… con los compañeros presentes*. (Mercedes, 96:3 10m 33s en S19a. Reunión 2 – Mercedes)

Entre los saberes docentes discursivos encontramos: saber que la matemática se enseña de lo más simple a lo más complejo, saber que las razones trigonométricas no aplican en ángulos de 90 grados en el triángulo rectángulo, y saber que en esta modalidad los/as estudiantes participan poco. El primero de estos parece estar vinculado a la visión de Mercedes sobre la enseñanza; el segundo a una pregunta hecha en la práctica de su clase simulada que luego se repitió en su clase como tal –sobre calcular el seno del ángulo recto del triángulo rectángulo–; y el tercero a su experiencia en la clase simulada y como estudiante durante en la modalidad en línea –cita siguiente–.

> Sí *es muy desesperante que no res…/ los alumnos no:::/ que no tengan micrófono, que no participen*… *Ya los entiendo*, nosotros…/ yo nunca… yo no::: *nunca participo en la clase*. Nadie. Y los maestros dicen ‘el silencio lo tomaré como un sí’… y siguen, mejor siguen. (Mercedes, 84:10 54m 31s en S17c. Clase simulada – Mercedes)

El saber docente de carácter aptitudinal identificado refiere al manejo básico del computador declarado por Mercedes, que por un lado limita las actividades que le gustaría hacer en clase, ir resolviendo los ejercicios en la pizarra digital, por ejemplo; pero que se amplía con la ayuda de los/as demás participantes, en particular de Santiago quien la asesoró respecto a Zoom y a la construcción de imágenes con GeoGebra.

Adicionalmente, reconocemos en el trabajo realizado por Mercedes en esta última parte de la etapa, referencias a una asociación, un potencial saber, un momento de improvisación y uno de prueba, y una referencia al contexto de su práctica. La *asociación* se establece con la modalidad presencial, al intentar conjeturar cómo funcionaría su clase en dicho formato. Mientras que el *potencial saber* refiere a los cambios que Mercedes propone de cara a futuras aplicaciones de su clase: agregar figuras al hablar del cambio del ángulo de referencia, modificar algunas figuras de su actividad final y agregar dispositivas para retroalimentar las resoluciones de los/as estudiantes –cita siguiente–.

> Pero sí *modificaría algunos triángulos que presenté, ya que no era muy fácil de visualizar la información presentada* y el finalizar cada pregunta, en caso de [*mientras lee de la pantalla*] … ahí también no sé qué puse… obtuviera alguna… ¡Ah!, en caso de que obtuviera una respuesta mal, *explicarla, pero no solo verbalmente sino también::: también con un apoyo visual*. (Mercedes, 96:4 13m 52s en S19a. Reunión 2 – Mercedes)

El momento de *improvisación* alude a decisiones y estrategias espontáneas que Mercedes tomó durante la clase, ante la tardada respuesta de los/as estudiantes, en pro de hacer cumplir los tiempos de la clase; entre ellas: responder ella misma algunas preguntas, saltarse la explicación del teorema de Pitágoras –ya que no era su tema– y ‘apurarse un poquito’ cuando veía que iba justa con el tiempo planificado. Mientras que el momento de *prueba* refiere a los ensayos de la clase realizados por Mercedes, que le permitieron practicar su explicación y sus tiempos –cita siguiente–, sentirse más tranquila y segura, y estar lista para situaciones específicas de la clase simulada –como el cálculo del seno del ángulo recto del triángulo por parte de una estudiante universitaria, por ejemplo–.

> Primero pues tenía… bueno, primero, había hecho *una prueba* con dos compañeras, una que sabía… porque estudia matemáticas, y otra que no, tiene mucho tiempo que no; y ya allí yo calculé que se iba a cumplir [el tiempo], y a parte pues yo tenía un *cronómetro* en mi teléfono. Y::: pues iba tomando *el tiempo*, si miraba que::: ya se me

estaba… ah::: que no iba a alcanzar, yo *me apuraba un poquito* más. (Mercedes, 99:28 4m 57s en S20. Presentación)

La referencia al *contexto* de la implementación, por otro lado, alude a las menciones de Mercedes acerca del uso del cronómetro para administrar el tiempo de su clase –cita previa, 99:28–, así como el tener su cuaderno del curso a la mano, y el haber comunicado a su familia que tenía la clase –para que no hicieran demasiado ruido durante ese tiempo–.

Finalmente, en estos saberes docentes y demás elementos del trabajo de Mercedes reconocimos referencias a ocho *voces sociales* –ordenadas de mayor a menor frecuencia–: otro/a participante, experiencia estudiantil, equipo de investigación, condición material, experiencia personal, estudiante, otro/a docente y modalidad. De estos llama la atención que otro/a participante y experiencia estudiantil se encuentran en las voces más frecuentes, al igual que en las etapas previas; mientras que otro/a docente –que había sido muy usual– pasa a ser apenas perceptible en el trabajo de Mercedes en esta parte final del curso.

Santiago

Por su cuenta, durante la primera parte de esta cuarta etapa del curso, Santiago alude a un *propósito* específico de su clase: enfatizar el uso diferenciados de las razones trigonométricas –también referido en las dos etapas anteriores–.

Además, en su trabajo en esta parte de la etapa, identificamos referencias a ocho *saberes docentes*; dos de carácter procedimental y seis discursivos. Entre los primeros ubicamos: saber adaptar las actividades a sus estudiantes –cita siguiente–, y saber adecuar los recursos y actividades al tiempo. Estos saberes están asociados a las decisiones sobre las actividades de la clase, sus tiempos y recursos, y suelen estar acompañados con referencias al comportamiento de los/as estudiantes y a experiencias docentes previas de Santiago.

Aunque se tarden en la… en la hoja 2, que es la de la tangente, pero se tardan porque están… digamos avanzando… no creo tener problemas con… con… con no

> intervenir, pero si… si están estancados, entonces es cuando digo ‘bueno, ya no tiene chiste seguir aquí’, ¿no? *Entonces va a depender mucho, tanto del tiempo como de qué estén haciendo*, porque si veo que sí están… viendo métodos, viendo vías o si están totalmente…/ no saben qué hacer, perdidos… eh::: allí intervendría. Más que nada, sería en…/ para la actividad uno sí me voy a basar *en el tiempo*, pero para la actividad dos, ya que lo comenta, eh::: me bastaría más en… en su…/ *si están o no avanzando, progresando*. (Santiago, 74:9 53m 35s en S16. Presentación)

Entre los saberes docentes discursivos expresados por Santiago encontramos: saber que las referencias etimológicas pueden ser útiles para diversos fines, saber que en la escuela no se discute la aplicabilidad de las razones trigonométricas, saber que en la modalidad en línea las respuestas son más escasas y/o tardadas –cita siguiente–, saber que en la modalidad en línea es más difícil monitorear el trabajo de los/as estudiantes, saber que las preguntas finales de reflexión son útiles para diversos fines, y saber que los/as estudiantes prefieren usar el teorema de Pitágoras que las razones trigonométricas. El primero está relacionado con su experiencia como estudiante; el segundo está vinculado con el objetivo específico declarado para su clase, y –como dijimos– fue construido en las actividades y discusiones del curso; y el resto están asociados a los/as estudiantes y la experiencia docentes de Santiago.

> Y entiendo que sea una característica casi inherente a… a::: a *trabajar en línea*, porque… cuando uno está con la cámara prendida y el micrófono, y el resto de los chicos están con el micrófono y la cámara apagada, y les lanzas una pregunta es…/ siento que siempre hay como una barrera a ‘¡uy!, ¿y contesto yo?, ¿abro micrófono yo?, ¿o alguien más va a hablar?’, o sea, de parte los estudiantes, ¿no? Y *tardan muchísimo, eh::: en darte una respuesta*, más que… más que en presencial me refiero, ¿no? Y::: y tampoco es…/ bueno, yo lo *veo complicado como seleccionar* ‘oye, *Juan*, ¿cuál es esta respuesta?’ porque… pues no sabes a veces si tiene disposición del micrófono o si… si no está en la clase inclusive, ¿no?, porque [*entre risas*] pues *muchos alumnos* ahí dejan la clase conectada y se van. (Santiago, 64:6 12m 41s en S14a. Reunión 1 – Santiago)

Adicionalmente, reconocemos en el trabajo realizado por Santiago en esta primera parte de la etapa, referencias a tres *asociaciones*. Estas se establecen con: yo como profesor, yo como estudiante y la experiencia docente del equipo de investigación. Las primeras dos aluden a cuando Santiago –al comentar la planificación de sus compañeras– menciona cuál sería su decisión/comportamiento en caso de ser el profesor o el alumno, ante una tarea matemática concreta; mientras que la última está vinculada a cuando Santiago, de forma similar a las demás participantes, solicita expresamente la opinión de los investigadores en el diseño de su plan de clase –cita siguiente–.

> Voy a hacer un… repaso de lo…/ cómo distribuí los *tiempos*, también para ver… ver *qué opinan*. (Santiago, 64:4 11m 37s en S14a. Reunión 1 – Santiago)

Finalmente, en estos propósitos, saberes docentes y asociaciones del trabajo de Santiago identificamos referencias a nueve *voces sociales* –ordenadas de mayor a menor frecuencia–: experiencia docente, equipo de investigación, estudiante, condición material, experiencia personal, modalidad, experiencia estudiantil, otro/a docente y libro de texto. En relación con las dos etapas previas –también parte del diseño de las actividades–, aumentan las referencias a la experiencia docentes, disminuyen las referencias a la experiencia estudiantil y a las actividades del curso, e incrementan las alusiones al equipo de investigación, los/as estudiantes y las condiciones materiales de clase –tiempo, recursos, materiales, etcétera–.

Por otro lado, durante la implementación –segunda parte de esta cuarta etapa del curso–, identificamos en el trabajo de Santiago referencias a tres de los *propósitos* específicos de su clase simulada: usar figuras no prototípicas, subrayar la aplicabilidad de las razones trigonométricas y enfatizar el uso diferenciado de las razones trigonométricas –cita siguiente–, también reconocido en las etapas anteriores.

> Eso es importante porque, en muchas ocasiones, *cuando nos presentan las… tres o las seis razones trigonométricas juntas… eh::: después no sabemos cuándo*

> *implementar cada una de ellas*. *Es importante conocer las características tanto de seno, coseno como de tangente*… y saber cuándo nos conviene utilizar una u otra, para no tener que hacer estas… estos dobles procedimientos, ¿no? (Santiago, 82:10 47m 19s en S17b. Clase simulada – Santiago)

Además, reconocimos dos *saberes docentes* de carácter procedimental: saber retomar las respuestas de sus estudiantes, y saber confrontar fenómenos didácticos –cita siguiente–. El primero alude a cuando Santiago usa las palabras de los/as estudiantes universitarios/as, en lugar de las planificadas, para construir las explicaciones de la clase; y el segundo a cuando atiende fenómenos didácticos asociados a la enseñanza de la trigonometría que se discutieron en el curso.

> Podríamos… entender, más a fondo, que una razón trigonométrica es una proporción o una razón, eh::: o sea, *una relación como dijo::: era /una estudiante/* creo, ajá, este::: 'que se establece entre los lados de un triángulo <u>rectángulo</u>' [*mientras lee de la pantalla*] específicamente, ¿no? *Esto es clave… la razón trigonométrica, eh… eh::: digamos que aplica únicamente en un triángulo rectángulo*, ¿bien? (Santiago, 82:1 13m 33s en S17b. Clase simulada – Santiago)

Por último, en estos propósitos y saberes docentes reconocimos referencias a una *voz social*: actividad del curso. Esta voz es implícita al actuar de Santiago, en particular al atender fenómenos didácticos discutidos en el curso, como la ausencia de discusión en la trigonometría escolar acerca de la aplicabilidad de las razones trigonométricas –cita previa– o la indistinción de las nociones trigonométricas –cita siguiente–.

> Estas, *recuerden, son razones trigonométricas*, ¿no? Lo comento porque la *tangente también se usa en otros lados*, ¿no?, como… este::: la tangente de un círculo o algo así. Entonces, recuerden, razón coseno, razón tangente. … Muy bien, aquí usaríamos entonces la tangente [*mientras agrega la palabra razón a 'coseno' y 'tangente' escritas previamente*]. (Santiago, 82:11 51m 54s en S17b. Clase simulada – Santiago)

Finalmente, durante el análisis de la clase simulada –última parte de esta cuarta etapa del curso–, Santiago alude a dos *propósitos* específicos de su clase: usar figuras no prototípicas y enfatizar el uso diferenciado de las razones trigonométricas –cita siguiente–. El primero fue identificado también en la implementación; y el segundo fue un propósito referido por Santiago desde la segunda etapa del curso.

> Ella utilizó coseno primero para encontrar la hipotenusa, aquí [*señala los apuntes de la estudiante en la pizarra*], porque les había dado este… este lado… y una vez que encontró la hipotenusa, utilizó seno con la hipotenusa y el cateto opuesto de este ángulo para poder encontrar, este::: el lado c, que era el lado que les pedía. Mmm::: aunque, aquí también pone… la tangente, es decir, ella fue la que dijo 'es que yo también pensé en la tangente, pero no la utilicé', entonces sí se ve aquí que había considerado la tangente, eh::: que dice que es la forma más fácil; esto está interesante porque señala que es la forma más sencilla, que era el objetivo, ¿no?, *el objetivo que yo tenía, que se dieran cuenta que había un camino más fácil*, … más… más práctico, más suficiente. (Santiago, 99:29 1h 59s en S20. Presentación)

En el trabajo de Santiago en esta última parte de la etapa, además, reconocimos referencias a ocho *saberes docentes*; tres de carácter procedimental y cinco discursivos. Entre los primeros ubicamos: saber detallar las actividades en su plan de clase, saber adecuar las actividades a sus estudiantes, y saber dirigir el ritmo de trabajo –cita siguiente–. El primero está asociado a la construcción misma del plan de clase, y los dos restantes con la planificación y la aplicación de técnicas para el desarrollo de la clase.

> Y::: ya en la actividad 1, pues, estuvieron a…/ resolviendo los ejercicios, ¿no? Sí, a la mitad *del tiempo*, más o menos, fue cuando… cuando pregunté, como miré que sí lo habían resuelto, pero se habían equivocado, tuvieron un error ahí, pero ya sabían que se habían equivocado y::: y *estaban trabajando pues… entonces igual las dejé que… que terminaran*. Creo que sí me tardé ahí más o menos los ocho minutos, creo, a lo que iba yo tanteando. (Santiago, 86:10 30m 22s en S17d. Clausura)

Entre los saberes docentes discursivos encontramos: saber que las clases requieren secciones de discusión, pero también de institucionalización, saber que –como profesor/a– su preparación para una clase está limitada por su conocimiento, saber que los conocimientos previos son una 'lista de materiales', saber que las dificultades y confusiones de un/a estudiante pueden ser compartidas, y saber que en la modalidad en línea las respuestas son más tardadas –cita siguiente–. El primero está vinculado con experiencias estudiantiles propias; el segundo y el tercero a observaciones sobre la implementación; y los últimos dos a experiencias docentes previas de Santiago.

> Pero la mire muy tranquila, ¿no?, a pesar de que, como le digo, tardaban en responder, ella… se esperaba su… su… su tiempo para/ eso es muy bueno, *porque pasa mucho*, ¿no?, este::: digo, yo… yo di pocas clases en *las prácticas* de Vasconcelos [preparatoria asignada a sus prácticas], pero… pasaba eso, ¿no?, *uno tenía que lanzar la pregunta y contar hasta diez segundos en silencio [entre risas] para ver si… si cae la respuesta*, ¿no? (Santiago, 86:15 1h 1m 27s en S17d. Clausura)

Adicionalmente, reconocemos en el trabajo realizado por Santiago en esta última parte de la etapa, referencias a dos asociaciones, cuatro potenciales saberes y dos referencias al contexto de la práctica. Las *asociaciones* se establecen con: estrategias de las asesorías –cita siguiente–, y experiencias estudiantiles y docentes. Ambas refieren a vínculos que Santiago establece entre lo visto en su clase simulada, lo vivido en las asesorías privadas que brinda, sus clases previas de trigonometría y sus prácticas profesionales.

> Yo estoy… estoy dando… dando unas, también, *asesorías* de de:::/ eh::: y pues me tocó dar el tema este de… de… fun/ razones trigonométricas. Y cuando estaba explicando esto del… del ángulo::: de referencia, eh::: no sé si ya lo habían pensado, pero [*entre risas*] yo lo miré como '¡ah!, pues *es como la izquierda y la derecha*', eh::: o sea, cuando estás parado viendo hacia una dirección, tu derecha pues es… […] [*enciende su cámara*] Yo decía 'si estoy viendo hacia allá, mi derecha es esta [*alza su mano derecha*] y mi izquierda en esta [*alza su mano izquierda*], pero ya si me volteo [*gira en su silla*] mi lado derecho cambia y mi lado izquierdo cambia', entonces, así… así expliqué… más o menos quedó claro que, *dependiendo de dónde estás*

> *parado o hacia dónde estes viendo, pues va a cambiar el nombre de la dirección* [*Candy reacciona con asombro y parece tomar nota*], o sea, que *no es un lado constante, la derecha no es como el Norte*, ¿no?, que el Norte siempre es el Norte […]. (Santiago, 99:16 45m 26s en S20. Presentación)

Los *potenciales saberes* identificados refieren a los ajustes propuestos por Santiago de cara a hipotéticas aplicaciones de su clase simulada: adaptar las actividades a un grupo regular –presencial y completo de estudiantes–, adaptar las actividades con base en los resultados obtenidos en la simulación, uso de la trayectoria hipotética de aprendizaje, y uso de algunas ideas adicionales vistas en clase. Nos conviene destacar estos últimos dos; respecto al uso de la trayectoria hipotética de aprendizaje –cita siguiente–, Santiago alude a que considerará su funcionalidad para complementar sus planificaciones futuras, en particular en cuanto al planteamiento de hipótesis y posibles estrategias didácticas refiere.

> Y::: en general, eso, creo que *me ayudó mucho para… para reforzar los contenidos matemáticos*… mmm::: la parte del…/ de la trayectoria hipotética, o sea, pues también la voy a considerar, eh::: ya no nada más el plan de clases, sino también el empezar a cuestionarme el qué podría pasar y tener esos planes b, c y d. (Santiago, 99:25 1h 37m 54s en S20. Presentación)

Con relación al potencial uso de ideas vistas en el curso –cita siguiente–, Santiago menciona que, ante otras circunstancias, le gustaría retomar algunas ideas y estrategias vistas, como el estudio de la naturaleza no-proporcional de la relación ángulo-lado, y el uso de diversos soportes para las tareas matemáticas –actividades empíricas, en lápiz-papel, y herramientas digitales–.

> Pero si se tuviera [condiciones para el uso de GeoGebra], pues, se podría utilizar, creo yo, más que nada para la demostración, al inicio, o como para::: muy parecido a lo que…/ a *la actividad que realizamos al inicio del curso*, ¿no?, donde *tratábamos de ver esa relación que había entre el ángulo y el… y el lado* [*mientras simula estos elementos del triángulo con sus manos*]. Eh::: por lo menos a mí sí me sirvió, creo, pues, para ampliar mi::: eso que… que *decían las lecturas*, ¿no?, el *pensamiento trigonométrico*, que no es un pensamiento lineal; entonces… que no va a ser

proporcional así::: como… perfecto, como uno esperaría de… si… si aumento aquí va a aumentar acá así, sino que es pues trigonométrico. (Santiago, 94:2 17m 5s en S19b. Reunión 2 – Santiago)

Por otro lado, las alusiones al *contexto* de la implementación hechas por Santiago refieren a los materiales y recursos con los que contó para su clase simulada: su plan digital, su *setup* regular (escritorio, lámpara, dos pantallas, etcétera), su calculadora y una botella con agua; así como al no haber dado nunca una clase de matemáticas con un grupo regular, sino solo asesorías –con grupos reducidos– y clases en línea.

Finalmente, en estos propósitos, saberes docentes y otros elementos del trabajo de Santiago identificamos referencias a diez *voces sociales* –ordenadas de mayor a menor frecuencia–: experiencia docente, modalidad, experiencia estudiantil, otro/a docente, actividad del curso, producto de investigación, estudiante, experiencia personal, condición material y equipo de investigación. De nueva cuenta, las experiencias docentes son la fuente más frecuente en las intervenciones de Santiago; modalidad vuelve a ser una voz recurrente –al igual que lo fue hacia el final de la planificación–; mientras que experiencias estudiantiles –que disminuyeron su aparición hacia el final de la planificación– recuperan la cantidad de referencias obtenidas en la segunda y tercera etapa del curso.

De grupo

De forma general, durante la primera parte de la cuarta etapa del curso –dedicada a la planificación de las clases simuladas–, identificamos referencias a tres *propósitos* que guían el diseño de las actividades por parte de los/as profesores/as: lograr que sus estudiantes reflexionen, usar la mnemotecnia SOHCAHTOA para afianzar las definiciones/fórmulas de las razones trigonométricas y enfatizar el uso diferenciado de las razones trigonométricas. Como mencionamos, algunos de estos propósitos también fueron advertidos en etapas previas –por ejemplo, el último de ellos– o parecen estar vinculados a propósitos expresados previamente –por ejemplo, el primero, asociado al deseo de construir actividades no típicamente escolares–.

En el trabajo de los/as participantes reconocimos, además, catorce *saberes docentes*; cuatro procedimentales, nueve discursivos y uno aptitudinal. Entre los primeros encontramos: saber detallar las actividades en su plan de clase, saber adaptar las actividades de libros de texto, saber adecuar los recursos y actividades a sus estudiantes, y saber adecuar los recursos y actividades al tiempo. De estos nos parece pertinente subrayar los últimos dos; el primero de estos por fijar –al igual que en la etapa previa– el comportamiento hipotético de los/as estudiantes como una variable definitoria en la construcción de los planes de clase, y el segundo por introducir las condiciones materiales de clase como un nuevo foco de atención en el diseño de las actividades.

Por otro lado, organizamos en dos subgrupos los saberes docentes de carácter discursivo identificados –a diferencia de las dos etapas previas, en esta no encontramos saberes discursivos que refieran a la visión de los/as participantes sobre la enseñanza y aprendizaje de la matemática–. En el primer subgrupo, que incluye los saberes que refieren a aspectos específicos de la enseñanza de la matemática y la trigonometría, ubicamos, por ejemplo, saber que en la modalidad en línea las respuestas son más escasas y/o tardadas, saber que las actividades de "reflexión" requieren mayor cantidad de tiempo, saber que en la modalidad en línea es más difícil monitorear el trabajo de los/as estudiantes y saber que los/as estudiantes avanzan a distintos ritmos. Como observamos, estos saberes son retomados por los/as profesores/as en formación inicial principalmente desde sus experiencias docentes previas.

Mientras que, en el segundo subgrupo de saberes docentes discursivos, que alude a las nociones trigonométricas y su tratamiento escolar, incluimos, por ejemplo, saber que los datos de los problemas trigonométricos se introducen al azar, saber que los/as estudiantes prefieren usar el teorema de Pitágoras que las razones trigonométricas y saber que en la escuela no se discute la aplicabilidad de las razones trigonométricas.

Por último, el saber docente de carácter aptitudinal reconocido en esta primera parte de la etapa está vinculado con el manejo básico del computador declarado por Mercedes, que –como dijimos– se ve ampliado en el transcurso de las sesiones, gracias al acompañamiento del resto de personas involucradas.

Adicionalmente, en la planificación de las clases simuladas identificamos seis asociaciones, dos momentos de prueba y una referencia al contexto de la práctica. Las *asociaciones* podemos organizarlas en tres subgrupos, las establecidas con: las personas involucradas, lo que yo haría, y artículos de investigación. De estos nos parece pertinente subrayar el primer subgrupo, las asociaciones con las personas involucradas, en particular con el equipo de investigación, que muestra –al igual que en la etapa anterior– la creciente consideración de la opinión y experiencia docente de los investigadores.

Por otro lado, en cuanto a los momentos de *prueba* reconocidos, los/as profesores/as en formación inicial declaran el tener que realizar ensayos tanto de las actividades diseñadas, como de los recursos y dispositivos, como una condición importante para su inclusión en el plan de clase. Mientras que la descripción del *contexto* de la práctica de los/as profesores/as en formación inicial identificada refiere a nunca haber planificado ni implementado una clase regular –con un grupo completo en formato presencial–.

Finalmente, los propósitos, saberes docentes y otros elementos reconocidos en el trabajo de los/as participantes en esta primera parte de la etapa aluden a doce *voces sociales* distintas –ordenadas de mayor a menor frecuencia–: experiencia docente, condición material, otro/a participante, equipo de investigación, estudiante, experiencia personal, experiencia estudiantil, modalidad, libro de texto, otro/a docente, actividad del curso, y producto de investigación.

Algunas observaciones relevantes a este respecto son: en esta primera parte de la etapa cuatro –al igual que en la etapa anterior, también dedicada al diseño de las actividades– las experiencias docentes fueron la voz social más frecuente en el actuar de los/as participantes; otras voces, como la condición material, modalidad, equipo de investigación y estudiante, aumentan significativamente sus menciones en esta última instancia de diseño; y voces sociales como experiencia estudiantil y actividades del curso –que fueron las más referidas en las primeras tres etapas– son apenas perceptibles.

Globalmente, y de forma similar a lo advertido en la etapa anterior, el comportamiento de los/as participantes –de acuerdo con el marco utilizado– no es homogéneo en esta primera parte de la etapa. De nueva cuenta observamos una mayor cantidad y diversidad de elementos en el trabajo e interacción de Santiago y Candy. Más específicamente, ambos participantes duplican la cantidad de saberes docentes y triplican el número de voces sociales reconocidas en el trabajo de Mercedes. En cuanto al contenido de estos elementos, al igual que como se observó en la etapa anterior, una de las principales diferencias reside en la alta referencia e injerencia de las experiencias docentes previas de Candy y Santiago en los propósitos, saberes docentes y asociaciones manifestadas por estos en el diseño de sus actividades.

Por otro lado, acerca de las diferencias/similitudes entre etapas del curso, al ser esta una continuación del diseño de las actividades por parte de los/as profesores/as, es natural encontrar similitudes e incluso reiteraciones entre los propósitos, saberes docentes y otros elementos de esta etapa con los reconocidos en la etapa anterior. Tres diferencias sutiles identificadas son: menor cantidad de elementos, lo cual podría deberse a que la cantidad de sesiones de la etapa anterior es considerablemente mayor a las incluidas en la primera parte de esta cuarta etapa; los elementos reconocidos en esta parte del curso parecen más ‘concretos’ que los identificados en las etapas previas de diseño, por ejemplo, no se ubicaron saberes discursivos vinculados a la visión general de los/as participantes sobre la enseñanza y aprendizaje de la matemática, sino solo a aspectos específicos de la enseñanza de la matemática/trigonometría y a las nociones trigonométricas y su tratamiento escolar; y a las experiencias docentes se suman, entre las voces sociales más referidas, las condiciones materiales y los/as estudiantes, mientras que otras voces sociales, como la experiencia estudiantil y las actividades del curso, parecen perder influencia a medida concluye esta etapa de diseño.

Por otro lado, durante la segunda parte de esta cuarta etapa del curso –destinada a la implementación de las clases simuladas–, ubicamos referencias a cuatro *propósitos* específicos de las clases: usar la mnemotecnia SOHCAHTOA para afianzar las definiciones/fórmulas de las razones trigonométricas, enfatizar el uso diferenciado de las razones trigonométricas, usar figuras no prototípicas y subrayar la aplicabilidad de las razones trigonométricas. Todos estos propósitos fueron observados en etapas previas y fueron construidos principalmente en el transcurso de las sesiones, producto de las actividades y de las discusiones entre los/as participantes.

Además, en el trabajo de los/as profesores/as en esta parte del curso identificamos cinco *saberes docentes*; cuatro procedimentales y uno discursivo. Entre los primeros encontramos: saber usar SOHCAHTOA para afianzar las definiciones de las razones trigonométricas, saber dirigir el ritmo de trabajo, saber retomar las respuestas de sus estudiantes, y saber confrontar fenómenos didácticos. Estos saberes parecen ser la base de algunos de los propósitos aludidos. Algunos, como el primero de ellos, responden principalmente a experiencias estudiantiles previas; otros parecen estar vinculados a experiencias docentes, como el segundo y el tercero; y el resto está asociado al trabajo realizado en el curso, como el confrontar los fenómenos didácticos discutidos.

Por otro lado, el saber discursivo identificado fue: saber que existe una diferencia conceptual y de uso entre razón y función trigonométrica, observado en la clase de Mercedes al corregir el uso de un término por el otro. También asociamos este saber con las actividades desarrolladas en el curso.

Adicionalmente, en las implementaciones de las clases simuladas reconocimos dos momentos de *improvisación*. Estos refieren a solicitar ayuda con la plataforma a través de la que se realizaron las clases simuladas y a esperar a que al menos la mitad de los/as estudiantes universitarios/as confirme haber terminado la tarea antes de avanzar.

Finalmente, estos propósitos, saberes docentes y momentos de improvisación identificados en la implementación de las clases simuladas refieren a cinco *voces sociales* distintas –ordenadas de mayor a menor frecuencia–: actividad del curso, estudiante, experiencia estudiantil, otro/a docente y otro/a participante. Reconocimos la mayoría de estas voces producto del trabajo previo realizado con los/as participantes, por ejemplo, las discusiones acerca de los fenómenos didácticos presentes en la trigonometría escolar, no obstante, como vimos, algunas de estas voces sociales son explícitas en la clase.

De forma global, aunque existen, como es natural, diferencias en las clases simuladas, estas provienen principalmente de los tópicos matemáticos, propósitos específicos, actividades, estudiantes universitarios, recursos, tiempos, experiencia docente, personalidad de los/as participantes y otros elementos que escapan a los intereses y alcances de este análisis. En términos del marco utilizado, el comportamiento de los/as participantes es considerablemente homogéneo en esta parte de la cuarta etapa, en cuanto a cantidad y variedad de elementos identificados. Muestra de esto último es el reconocimiento de propósitos, saberes y voces sociales referidos por los tres participantes.

Por último, durante la tercera parte de esta última etapa del curso –empleada para el análisis de las clases simuladas–, ubicamos referencias a cuatro *propósitos* específicos: usar figuras no prototípicas, lograr la comprensión de sus estudiantes, usar la mnemotecnia SOHCAHTOA para afianzar las definiciones/fórmulas de las razones trigonométricas y enfatizar uso diferenciado de las razones trigonométricas. De nueva cuenta, estos propósitos respecto a las actividades diseñadas fueron aludidos ya en etapas previas y, como dijimos, en su mayoría fueron construidos en el transcurso de las sesiones.

En el trabajo de los/as participantes reconocimos, además, veinte *saberes docentes*; cinco procedimentales, trece discursivos y dos aptitudinales. Entre los primeros encontramos: saber detallar las actividades en su plan de clase, saber adecuar los recursos a sus experiencias previas y habilidades, saber evaluar y adecuar las actividades respecto a sus estudiantes, saber dirigir el ritmo de trabajo y saber retomar las respuestas de sus estudiantes. Casi todos los saberes procedimentales de esta parte fueron observados en etapas previas; el primero de ellos está vinculado a la construcción de las planificaciones y el resto al desarrollo de las clases simuladas en sí.

Por otro lado, organizamos los saberes docentes de carácter discursivo en los tres subgrupos habituales. En el primero, que reúne los saberes relativos a la visión de los/as participantes sobre la enseñanza y aprendizaje de la matemática, ubicamos, por ejemplo, saber que la matemática se enseña de los más simple a los más complejo, saber que "el profesor es el que debe saber", y saber que, como profesor/a, su preparación para una clase está limitada por su conocimiento. En general, estos saberes discusivos antecedes el trabajo del curso, es usual que estén vinculados a experiencias estudiantiles y docentes.

En el segundo subgrupo, dedicado a los saberes que refieren a aspectos específicos de la enseñanza de la matemática y la trigonometría, ubicamos, por ejemplo, saber que las clases requieren secciones de discusión, pero también de institucionalización, saber que las clases no salen como se planean, saber que los/as estudiantes anotan lo que el/la profesor/a escribe en la pizarra –no lo que dice–, saber que las clases mejoran con la ejecución reiterada y su análisis, y saber que la modalidad en línea afecta las dinámicas de clase. Como advertimos previamente, aunque algunos de estos saberes fueron construidos también fruto de experiencias estudiantiles –por ejemplo, el primero de los recién mencionados–, en su mayoría fueron retomados por los/as profesores/as en formación inicial desde sus experiencias docentes.

Finalmente, en el tercer subgrupo de saberes docentes discursivos, que alude a las nociones trigonométricas y su tratamiento escolar, encontramos solo uno: saber que las razones trigonométricas no aplican en ángulos de 90 grados. Mercedes declara haber construido este saber producto de las prácticas previas de su clase simulada y de la clase simulada misma, donde la consulta acerca de si es posible calcular las razones trigonométricas para el ángulo recto en el triángulo rectángulo también fue planteada por una estudiante universitaria.

Por otro lado, los saberes docentes de carácter aptitudinal reconocidos refieren al manejo básico del computador, y la comodidad para hablar e improvisar en público. Estos saberes mostraron ser determinantes en la implementación y el diseño de las clases simuladas; y, aunque son construidos por los/as participantes en experiencias ajenas a la clase e incluso de su formación escolar, parecen ser desarrolladas durante las actividades del curso.

Adicionalmente, en esta tercera parte de la etapa identificamos siete asociaciones, seis potenciales saberes, un momento de prueba y tres de improvisación, y tres referencias al contexto de la práctica de los/as profesores/as. Organizamos las *asociaciones* en cuatro subgrupos, las establecidas con: curso, volitivo, contingentes y experiencias previas. De estos nos parece pertinente subrayar el primer subgrupo, las asociaciones con las actividades del curso, en particular, la referencia a las discusiones previas reconocida en el discurso de Candy, al corregir el término identidades por razones trigonométricas.

Por otro lado, en cuanto a los *potenciales saberes* identificados, un subgrupo de estos reúne las modificaciones propuestas por los/as participantes para las actividades implementadas, entre ellas, adaptar las actividades a un grupo regular –presencial y completo de estudiantes–, adaptar las actividades dados los resultados obtenidos y adecuar una estrategia didáctica que presente los pasos de resolución de triángulos como una receta de cocina. El resto de los potenciales saberes reconocidos aluden al empleo de algunos aspectos del curso en su práctica: detallar las planificaciones construidas, uso de la trayectoria hipotética de aprendizaje, y uso de ideas vistas en clase.

También por ser elementos construidos en el desarrollo del curso, nos parece particularmente interesante este último grupo de potenciales saberes; en especial, la mención de Santiago a su interés por, en caso de tener las condiciones, –de forma similar a la experiencia de problematización– hacer uso de la tecnología para estudiar la relación ángulo-lado con sus estudiantes.

El momento de *prueba* identificado alude al ensayo de la clase simulada realizado por Mercedes, que explicita fue útil para testear sus actividades, explicaciones y tiempos. Mientras que los momentos de improvisación refieren a las estrategias espontaneas de manejo del tiempo, el uso de las respuestas de los/as estudiantes, y el rehacer figuras –en pro de que no fueran prototípicas–.

Por último, las descripciones del *contexto* de la práctica de los/as profesores/as en formación inicial reconocidas en esta parte de la etapa refieren a nunca haber implementado una clase regular –con un grupo completo en formato presencial–, a situaciones personales y condiciones materiales que afectaron la implementación, y al entorno y herramientas utilizadas en la clase simulada.

Finalmente, los propósitos, saberes docentes y demás elementos identificados en el trabajo de los/as participantes en esta última parte de la etapa refieren a once *voces sociales* distintas –ordenadas de mayor a menor frecuencia–: experiencia, experiencia estudiantil, modalidad, experiencia personal, otro/a participante, estudiante, otro/a docente, equipo de investigación, actividad del curso, condición material y producto de investigación.

Algunas observaciones relevantes a este respecto son: la experiencia docente vuelve a ser la voz social más referida, pese a solo ser identificada en el trabajo de Candy y Santiago; otras voces, como experiencia estudiantil y modalidad, incrementan considerablemente su aparición durante esta fase de análisis de las clases simuladas; y otro grupo de voces, entre ellas las actividades del curso y los productos de investigación, se mantienen apenas perceptibles.

De forma global, el comportamiento de los/as participantes –de acuerdo con el marco utilizado– en esta última parte de la etapa es considerablemente homogéneo, en cuanto a cantidad y diversidad de elementos identificados se refiere. Además, los/as participantes coinciden en diversos saberes docentes y voces sociales –al igual que se observó en la parte anterior de esta misma etapa–; una de las diferencias persistentes en el trabajo de los/as profesores/as reside en la alta frecuencia con la que Candy y Santiago refieren a sus experiencias docentes previas, así como a la injerencia estas menciones en el análisis de la implementación y el planteamiento de modificaciones respecto a las actividades diseñadas.

8.2. Epílogo

En el análisis de la primera practica parcial del trabajo de los/as profesores/as en formación inicial, la resolución se situaciones matemáticas –que comprende la primera etapa del curso–, reconocimos el *propósito* de los/as participantes por dar respuesta a las actividades planteadas por el investigador-profesor. Esta pretensión establece una relación estudiante-profesor entre las personas involucradas, que, como dijimos, puede entenderse como natural al ser la experiencia de problematización parte de un curso con valor curricular.

Respecto a esta primera etapa también mencionamos la identificación de saberes docentes de carácter procedimental y vinculados al uso de nociones matemáticas, asociaciones establecidas con experiencias previas y estrategias matemáticas concretas, y el uso de la ley de coseno al atender futuras situaciones matemáticas similares como un potencial saber. A la luz de estos elementos, y a excepción de las sutiles diferencias en las nociones y procedimientos matemáticos involucrados por cada participante, consideramos que los/as profesores/as en formación inicial muestran un comportamiento bastante homogéneo y acorde con lo esperado, dada la práctica parcial analizada.

Por un lado, las aludidas diferencias entre la variedad y cantidad de nociones y procedimientos matemáticos usados por Candy y Santiago, y las puestas en juego por Mercedes, las entendemos como naturales dadas las distintas etapas de formación en las que estos/as se encuentran –que hace que unos/as dispongan de más o menos herramientas que otros/as–. Luego, la similitud general en el comportamiento de los/as participantes durante la experiencia de problematización la asociamos a la naturaleza de la actividad matemática propuesta, una actividad no escolar y diseñada con el propósito de confrontar y enriquecer los significados que habitan la escuela.

Finalmente, en los propósitos, saberes docentes y otros elementos del trabajo de los/as profesores/as en esta etapa identificamos referencias a siete *voces sociales* distintas. Entre estas destacamos la alusión a la experiencia docente para sostener estrategias matemáticas durante la resolución de las situaciones propuestas. Este resultado, como dijimos, coincide con nuestras experiencias previas y con nuestra revisión bibliográfica (v. g. Zazkis y Leikin, 2008), y parece caracterizar el trabajo del profesorado en formación inicial –al menos de los que cursan sus últimos semestres de formación– al atender situaciones matemáticas de este tipo.

Relacionado con este último punto, una observación final relevante es que, entre nuestras hipótesis generales de investigación, dijimos que esperábamos que el actuar de los/as participantes al atender la experiencia de problematización refiriera a 'otras esferas' de conocimiento. En particular, aludimos a que estimábamos que externarían reflexiones, preguntas y comentarios asociados a sus clases de trigonometría previas (dinámicas, libros de texto, profesorado, etcétera), pero las intervenciones que remiten a experiencias estudiantiles en esta etapa no tratan estos temas, sino que –como vimos– versan exclusivamente acerca de las experiencias y estrategias matemáticas aprendidas en ellas. Esto robustece nuestra hipótesis ante futuras experiencias similares.

Por otro lado, durante el diseño de actividades por parte de los/as profesores/as en formación inicial –que incluye la segunda y tercera etapa, así como la primera parte de la cuarta etapa del curso–, identificamos tres tipos de *propósitos* que guían el trabajo de los/as profesores/as. El primero, al igual que en la resolución de situaciones matemáticas, alude a la intención de los/as participantes por dar respuesta a las actividades planteadas. De nuevo, esta determinación puede explicarse por el contrato didáctico que se establece entre las personas involucradas, al ser este un curso con valor curricular.

El segundo tipo de propósito externado por los/as participantes –que incluye, por ejemplo, construir actividades memorables para sus estudiantes– está vinculado a su visión acerca de la matemática, su enseñanza y aprendizaje, más que con el curso. De acuerdo con esto, y según el análisis de las etapas comprendidas en esta práctica parcial, parecen ser propósitos muy constantes para cada participante y que influyen de forma indirecta en el diseño de las actividades.

El último tipo de propósito observado –que abarca, por ejemplo, usar figuras no prototípicas– está relacionado con la construcción y ejecución misma de las actividades de clase; funcionan como objetivos de enseñanza. En este sentido, muestran ser más susceptibles de ser compartidos y modificados –añadirse, desaparecer, refinarse– en el transcurso del ejercicio de diseño, fruto de las actividades del curso, las condiciones de instrucción dadas y las discusiones entre las personas involucradas.

En el análisis de esta práctica parcial, además, identificamos *saberes docentes* procedimentales, discusivos y aptitudinales. Los saberes procedimentales ubicados están asociados a la construcción misma de la trayectoria hipotética de aprendizaje y la planificación de clase –por ejemplo, saber detallar las actividades en el plan de clase–, así como al contenido de estos productos –por ejemplo, saber adecuar los recursos y actividades a sus estudiantes–. Este tipo de saberes docentes parece haber sido construido por los/as profesores/as en su práctica previa; en el análisis encontramos solo una excepción: el saber estructurar objetivos de aprendizaje, mostrado inicialmente por Candy al comentar la trayectoria hipotética de aprendizaje de Mercedes y, posteriormente, identificado también en el trabajo de esta última al reconstruir su objetivo de aprendizaje, retomando las recomendaciones y explicaciones de Candy.

Por su parte, organizamos los saberes discursivos reconocidos en tres tipos, los vinculados con: la visión general que los/as profesores/as en formación inicial expresan sobre la enseñanza y aprendizaje de la matemática, aspectos específicos de la enseñanza de la matemática y la trigonometría, y las nociones trigonométricas y su tratamiento escolar. El primero –que incluye, por ejemplo, saber que la matemática se enseña-aprende a través de construcciones sucesivas– está vinculado a las creencias generales de los/as profesores/as sobre la matemática, su enseñanza y aprendizaje; en este sentido, tienen una estrecha relación con el segundo tipo de propósitos aludidos.

El segundo tipo de saberes discursivos identificado –que incorpora, por ejemplo, saber que los/as estudiantes avanzan a diferentes ritmos– hace referencia a observaciones y estrategias sobre la enseñanza de la matemática y la trigonometría construidas por los/as participantes. Así, este tipo de saberes demostraron referir constantemente a las experiencias docentes y estudiantiles previas de los/as profesores/as en formación inicial, y tener una alta incidencia en el diseño de las actividades de las clases simuladas, en particular en las estrategias didácticas incluidas y la determinación de tiempos y recursos.

Por último, el tercer tipo de saberes docentes discursivos reconocido –en el que cabe, por ejemplo, saber que las razones trigonométricas tienen diferencias de uso– refiere a observaciones de los/as participantes acerca de las nociones trigonométricas y su tratamiento al interior de los sistemas escolares. Este tipo de saberes probaron estar vinculados a los propósitos específicos de las clases simuladas –que fungen como objetivos de enseñanza–, y el ser construidos –en gran medida– fruto de las actividades y discusiones sostenidas en el curso.

Una anotación importante acerca de los saberes discursivos identificados en el análisis de esta práctica parcial es que, en el transcurso de las sesiones, la cantidad de saberes discursivos del primer tipo, asociados a la visión general de los/as profesores/as sobre la matemática, su enseñanza y aprendizaje, disminuyó hasta desaparecer; mientras que la de los otros dos tipos de saberes discursivos aumentó o se mantuvo. Este hecho podría estar relacionado con las actividades propuestas en el curso, por ejemplo, en la segunda etapa se planteaba la lectura y discusión sobre distintas perspectivas de la enseñanza de las matemáticas –que permite la manifestación del primer tipo de saber discursivo aludido–; también podría estar influido por la práctica parcial misma: a medida se avanza en el diseño de las actividades, las discusiones y decisiones de los/as profesores/as en formación inicial requieren ser más concretas, más cercanas a las condiciones instruccionales específicas.

Adicionalmente, reconocimos en el diseño de las actividades por parte de los/as profesores/as en formación inicial referencia a asociaciones, potenciales saberes, momentos de prueba y descripciones del contexto de la práctica. Las *asociaciones* refieren a vínculos establecidos por los/as participantes entre las actividades del curso con otras experiencias y observaciones –previas o construidas en el curso–. Entre estas, nos parecen particularmente interesantes las establecidas con: los/as estudiantes y las condiciones de aula –encontradas desde la segunda etapa del curso–; las experiencias estudiantiles en cursos de Trigonometría previos –presentes en la segunda y tercera etapa del curso–, que hipotetizamos encontrar fruto de la experiencia de problematización; el trabajo y opinión de los investigadores –ubicadas en la tercera y cuarta etapa–; y la naturaleza de la relación ángulo-lado –halladas en la tercera etapa–.

El *potencial saber* identificado alude al uso de distintos soportes –lápiz y papel, ambientes digitales y empíricos– para la instrucción en trigonometría; retomado de uno de los productos de investigación discutidos. Los tres momentos de *prueba* reconocidos en esta práctica parcial refieren a la necesidad de los/as profesores/as por ensayar sus actividades, recursos, materiales y tiempos previo a las clases simuladas. Mientras que las descripciones del *contexto* versan sobre el nunca haber dado una clase regular –con un grupo completo en formato presencial– y a la carga académica, que afecta el desarrollo de las actividades del curso.

Por último, en los propósitos, saberes docentes y demás elementos del trabajo de los/as profesores/as en las etapas que incluye el diseño de las actividades identificamos referencias a múltiples *voces sociales* –un promedio de doce por etapa–. La observación más relevante a este respecto es que la cantidad de referencias a las experiencias estudiantiles y las actividades del curso, que son las voces más citadas en la segunda etapa del curso –al igual que lo fueron en la primera–, disminuyen considerablemente durante la etapa tres y la primera parte de la etapa cuatro; mientras que otras voces, como experiencia docente, condición material, equipo de investigación y estudiantes, aumentan considerablemente su presencia en este mismo intervalo.

Este hecho va de la mano con que, como dijimos, las acciones –decisiones, opiniones y explicaciones– de los/as profesores/as en formación inicial, a medida se acerca la implementación de la clase simulada, se vuelven más específicas; ya no se discute y decide sobre el propósito de la clase o sobre fenómenos didácticos generales, sino sobre problemas y ejercicios matemáticos concretos, sobre los recursos y tiempos necesarios para su implementación, sobre las condiciones adecuadas para que sean efectivos ante un grupo de estudiantes y en condiciones instruccionales específicas. En este proceso, según indica el análisis, las experiencias estudiantiles, productos de investigación y actividades del curso se diluyen paulatinamente, mientras que las experiencias docentes –propias o de otras personas involucradas–, junto con la consideración de las condiciones materiales y de los/as estudiantes, se vuelven cruciales.

Más adelante, en la implementación de las clases simuladas –segunda parte de la cuarta etapa del curso–, identificamos referencias a cuatro *propósitos*, todos ellos relativos al diseño de las actividades –objetivos de enseñanza–. Como podría ser natural de la práctica parcial analizada, estos propósitos son los aludidos durante el diseño de las actividades y las referencias a ellos son implícitas en el actuar de los/as profesores/as en formación inicial. Al respecto solo nos parece pertinente subrayar que tres de estos cuatro propósitos refieren específicamente a los fenómenos didácticos reportados alrededor de la enseñanza y aprendizaje de la trigonometría, y fueron construidos fruto de las actividades y discusiones del curso.

En la implementación de las clases simuladas también reconocimos cinco *saberes docentes*, cuatro de carácter procedimental y uno discursivo. Los primeros cuatro –entre los que se incluye, por ejemplo, saber dirigir el ritmo de trabajo–, parecen haber sido construidos por los/as profesores/as en su práctica previa, al igual que se observó respecto a la práctica parcial anterior. Mientras que el saber discursivo identificado –saber que existe una diferencia conceptual y de uso entre razón y función trigonométrica–, por su parte, versa sobre las nociones trigonométricas y su tratamiento escolar –tercer tipo mencionado previamente–, y fue construido fruto de las actividades y discusiones del curso.

Adicionalmente, en esta parte de la etapa cuatro, ubicamos referencias a dos momentos de *improvisación*. Estos aluden al ejercicio de estrategias específicas de manejo del grupo y a la solicitud de apoyo ante problemas técnicos con las herramientas destinadas para la clase.

Finalmente, en los propósitos, saberes docentes y momentos de improvisación del trabajo de los/as profesores/as en esta práctica parcial identificamos referencias a cinco *voces sociales*: actividad del curso, estudiante, experiencia estudiantil, otro/a docente y otro/a participante. Salvo una excepción –la mención a otro/a docente y una experiencia estudiantil previa–, todas estas referencias son implícitas al actuar de los/as profesores/as en formación inicial.

Por último, durante el análisis de las clases simuladas –tercera parte de la cuarta etapa del curso–, identificamos referencias a cuatro de los *propósitos* de los/as participantes –entre ellos, por ejemplo, uso diferenciado de las razones trigonométricas–. Al igual que en la práctica parcial previa, todos estos propósitos refieren a objetivos de enseñanza de los/as profesores/as y ya habían sido identificados en etapas previas. Este hecho nos resulta comprensible: durante el diseño de las actividades se construyen, retoman y adaptan objetivos de enseñanza; mientras que el trabajo en la implementación y el análisis se limitan a su ejecución y revisión.

En el análisis de esta última práctica parcial, además, identificamos *saberes docentes* procedimentales, discusivos y aptitudinales. Los saberes procedimentales ubicados están asociados a la construcción de la planificación de la clase simulada –por ejemplo, saber detallar las actividades en el plan– y a la implementación de esta –por ejemplo, saber retomar las respuestas de sus estudiantes–. De forma similar a lo mencionado respecto a las prácticas parciales previas, los saberes procedimentales observados en esta parte de la etapa parecen haber sido construidos por los/as profesores/as casi completamente durante su práctica previa.

Por su parte, organizamos los saberes discursivos en tres subgrupos, vinculados con: la visión general que los/as profesores/as en formación inicial expresan sobre la enseñanza y aprendizaje de la matemática, aspectos específicos de la enseñanza de la matemática y la trigonometría, y las nociones trigonométricas y su tratamiento escolar. Cabe mencionar que la menor cantidad de saberes discursivos identificados fueron del primer tipo, predominaron –como también fue en el diseño de las actividades– los pertenecientes al segundo y tercer subgrupo; que son, como dijimos, principalmente construidos en la experiencia estudiantil y docente, y fruto de las actividades y discusiones del curso, respectivamente.

Los saberes docentes de carácter aptitudinal reconocidos refieren al manejo básico del computador, y la comodidad para hablar e improvisar en público. Los saberes de este tipo identificados fueron construidos en espacios externos al curso –al igual que sucede con los procedimentales– y algunos incluso fuera de la formación escolar. No obstante, además de ser manifestados en las actividades del curso, parecen poder ser desarrollados a través de estas últimas –tal es el caso del manejo del computador declarado por Mercedes, por ejemplo–.

Adicionalmente, identificamos en el análisis de las clases simuladas referencias a múltiples asociaciones, potenciales saberes, momentos de improvisación y prueba, y descripciones del contexto de la práctica docente. En este caso las *asociaciones* se establecieron con aspectos del curso, elementos volitivos, contingentes y experiencias previas. Mientras que los *potenciales saberes* identificados refieren a las modificaciones propuestas por los/as participantes para las actividades implementadas y al empleo de aspectos del curso en su práctica.

Como dijimos, dados nuestros objetivos de investigación, de estas asociaciones y potenciales saberes nos son particularmente interesantes los que refieren a las actividades del curso. Entre ellas, la corrección del término identidades trigonométricas por razones trigonométricas en el discurso de Candy y el interés de Santiago por, en caso de contar con otras condiciones instruccionales, hacer uso de la tecnología para estudiar la relación ángulo-lado con sus estudiantes, de forma similar a lo vivido en la experiencia de problematización.

Por otro lado, el momento de *prueba* identificado está asociado a la aludida funcionalidad que los/as profesores/as en formación inicial conceden al ensayo de las actividades para la ejecución de la clase simulada. Mientras que los momentos de *improvisación* están vinculados a los cambios y decisiones tomadas por los/as participantes en su clase, relacionados con el control del tiempo, el uso de figuras no prototípicas y el uso de las respuestas de sus estudiantes.

Las descripciones del *contexto* de la práctica de los/as profesores/as en formación inicial reconocidas refieren a nunca haber implementado una clase regular –también mencionada durante el diseño de las actividades–, a situaciones personales y condiciones materiales que afectaron la implementación, y al entorno y herramientas utilizadas en la clase simulada.

Finalmente, los propósitos, saberes docentes y demás elementos identificados en el trabajo de los/as participantes en esta última parte de la etapa refieren a once *voces sociales* distintas. De estas cabe destacar que, al igual que la parte final del diseño de actividades, las experiencias docentes son la voz más frecuente en las acciones de los/as profesores/as; mientras que voces como la experiencia estudiantil y modalidad aumentan su aparición, con relación a dicha práctica parcial; y otras voces, como condición material y actividades del curso, bajan su frecuencia o se mantienen apenas perceptibles.

En conclusión, los resultados expuestos describen, con base en las acciones –decisiones, opiniones y explicaciones– de los/as profesores/as en formación inicial, los propósitos que dan sentido a dichas acciones, los saberes docentes que las fundamentan y las voces sociales de donde provienen estos saberes. A estos elementos iniciales de la perspectiva de los saberes docentes agregamos las asociaciones, potenciales saberes, descripciones del contexto, y los momentos de improvisación y prueba manifestados, que resultaron trascendentales para interpretar la práctica de los/as participantes.

Para lograr esta descripción en el marco del curso optativo diseñado, desagregamos la práctica del profesorado en formación inicial en cuatro prácticas parciales: la resolución de la situación matemática propuesta –ubicada en la primera etapa del curso–, el diseño de las actividades –situada en la segunda, tercera y parte de la cuarta etapa–, la implementación de dichas actividades –hallada en la segunda parte de la cuarta etapa– y su posterior análisis –concentrado en la parte final de la cuarta etapa el curso optativo–.

Con esta descripción atendemos nuestro primer y tercer objetivo específico de investigación, que aluden a la identificación y descripción los saberes docentes construidos y manifestados por los/as participantes al vivenciar experiencias de problematización de la trigonometría escolar, así como al diseñar, implementar y analizar actividades en el área de trigonometría. Al mismo tiempo, cotejamos y enriquecemos las hipótesis generales de investigación asociadas a la segunda, tercera y cuarta etapa del curso; en las que mencionamos esperábamos que los/as profesores/as en formación inicial refirieran a sus experiencias previas como estudiantes de Trigonometría y a su rol como profesores/as en esta área.

A lo largo de esta descripción procuramos también subrayar y ejemplificar los elementos del trabajo de los/as profesores/as en formación inicial participantes que refieren a las actividades del curso, en particular a la experiencia de problematización y su transparentación. Con ello nos ocupamos del cuarto y último objetivo específico de nuestra investigación, que alude a la descripción del diálogo de la experiencia de problematización vivida por los/as participantes con sus saberes docentes. La descripción y ejemplos ofrecidos a este último respecto coincide, de forma general con lo dicho en nuestras hipótesis generales de investigación; en las que conjeturamos que solo algunas ideas generales –como el uso de problemas matemáticos no escolares– introducidas en la experiencia de problematización y su transparentación, se mantendrían en los diseños construidos por los/as profesores/as en formación inicial, que predominarían sus experiencias estudiantiles previas y su visión acerca de la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas.

9.

Síntesis y conclusión

Quizás no se trate del final feliz,
quizás se trate de la historia.
— Anónimo

El estudio aquí reportado parte de nuestro interés por comprender el proceso de integración de los resultados de la investigación en matemática educativa, y en particular de nuestra línea y corriente teórica, en la práctica del profesorado de matemáticas en formación inicial.

Más específicamente, fruto de nuestro trabajo en la formación del profesorado –diseñando e impartiendo clases, talleres, diplomados, etcétera–, nos percatamos de que, asociados a las experiencias de problematización de las nociones trigonométricas en las que involucrábamos a los/as profesores/as participantes, emergían comentarios y cuestionamientos relativos a otras esferas de su conocimiento. Así, comenzamos bosquejando un estudio centrado en el conocimiento que los/as profesores/as en formación inicial construyen y usan al vivenciar experiencias de problematización de la trigonometría escolar y al diseñar, implementar y analizar actividades de aula en el área de trigonometría.

También producto de nuestro trabajo en la formación docente, así como de lo reportado en algunos estudios previos a este respecto (v. g. Lezama y Mariscal, 2008), advertimos que para atender nuestros propósitos requeríamos de un acercamiento sistemático y descriptivo a la formación inicial docente, uno que tuviera en cuenta el carácter situado y la complejidad de esta.

Para informar el bosquejo inicial y condensarlo en objetivos de investigación concretos, realizamos una revisión bibliográfica sistematizada (Cruz-Márquez y Montiel-Espinosa, en prensa-a). En ella, aunamos un estudio terciario de literatura sobre la formación docente y el conocimiento del profesorado de matemáticas, con uno secundario acerca del conocimiento del profesorado de matemáticas en formación inicial en las áreas de geometría y trigonometría.

Además del aporte que significa *per se* y de la visión inicial del campo que nos ofreció, dicha síntesis bibliográfica nos posibilitó el identificar otras investigaciones que –de forma similar a nuestra experiencia previa– reportaban la emergencia de reflexiones y consideraciones pedagógicas en el trabajo de los/as profesores/as en formación inicial al enfrentar una tarea matemática concreta (v. g. Zazkis y Leikin, 2008).

Esta revisión también nos permitió reconocer que, tanto en las investigaciones incluidas acerca del conocimiento del profesorado de matemáticas en general (v. g. Ponte y Chapman, 2006) como en las relativas a áreas temáticas específicas (v. g. Sinclair et al., 2017), persistía cierta visión prescriptiva –sobre lo que ‘debe saber’– y deficitaria –sobre lo que ‘no sabe’– el profesorado de matemáticas. Este hecho, aunado a la escasa cantidad de estudios acerca de los conocimientos de esta población en el área de trigonometría, reforzó nuestro interés por acercarnos a la formación inicial docente en matemáticas desde una óptica descriptiva, centrada en detallar los conocimientos que los/as profesores/as construyen y manifiestan en su práctica concreta –no los que no tienen–, sin un modelo teórico o institucional de referencia –no los que deberían tener–.

Requeríamos entonces de un encuadre teórico que nos permitiera hacer efectiva esta visión descriptiva de los conocimientos del profesorado; un encuadre que además fuera consistente con la postura social, constructivista y pragmática del saber matemático que ostenta la teoría socioepistemológica, base teórica de nuestras investigaciones de partida y de las experiencias de problematización en cuestión. Optamos por la perspectiva de los saberes docentes (v. g. Mercado, 2002).

Desde sus estudios fundacionales (v. g. Rockwell y Mercado, 1988) hasta los más recientes (v. g. Barradas, 2022), las investigaciones realizadas desde esta perspectiva se centraron en identificar y describir, desde un acercamiento etnográfico, los saberes que los/as docentes de educación primaria manifiestan en su práctica en aula. En consecuencia, para lograr que resultara funcional a nuestros propósitos, necesitamos realizarle un conjunto de adaptaciones. En primera instancia, requerimos ampliar la práctica docente o práctica cotidiana de la que habla el marco inicial hacia la formación inicial docente, incluyendo –además de la práctica en aula– prácticas parciales como la resolución de situaciones matemáticas, el diseño propio de actividades, la implementación en clases simuladas, y el análisis de estas últimas. Que son componentes habituales del trabajo del profesorado de matemáticas en formación inicial, del espacio en el que estos construyen y manifiestan sus saberes.

Esta ampliación de la práctica docente hizo necesaria también la extensión de los saberes docentes a tratar, pues, de forma natural, la expresión y contenido de los saberes identificados en prácticas procedimentales –como las implementaciones de clases– difieren de los reconocidos en prácticas más discusivas –como el diseño o análisis de dichas clases–. Así, fruto de nuestra necesidad por trasladar la discusión sobre la práctica cotidiana del profesorado de matemáticas hacia la formación inicial, extendimos también el carácter de los saberes docentes que esperamos que se construyan y manifiesten; incluyendo saberes procedimentales, discursivos, aptitudinales e incluso actitudinales, “lo que se ha llamado muchas veces saber, saber hacer y saber ser” (Tardif, 2014, p. 46).

Establecida la coordinación teórica, nos propusimos como objetivos generales de investigación: 1) identificar los saberes docentes que el profesorado de matemáticas en formación inicial construye y manifiesta al vivenciar experiencias de problematización de la trigonometría escolar y al diseñar, implementar y analizar actividades de aula en el área de trigonometría; y 2) describir el rol que juegan las experiencias de problematización de la trigonometría escolar al diseñar, implementar y analizar actividades de aula en el área de trigonometría.

Objetivos generales que se desglosaron en los siguientes objetivos específicos: 1) identificar y describir los saberes docentes que el profesorado de matemáticas en formación inicial construye y manifiesta al vivenciar experiencias de problematización de la trigonometría escolar; 2) identificar y describir los saberes docentes que el profesorado de matemáticas en formación inicial construye y manifiesta al diseñar, implementar y analizar actividades en el área de trigonometría; 3) involucrar a los/as profesores/as de matemáticas en formación inicial participantes en experiencias de problematización de la trigonometría escolar; y 4) describir cómo estas experiencias de problematización dialogan con los saberes docentes al diseñar, implementar y analizar actividades de aula en el área de trigonometría.

Como dijimos, de forma general, las investigaciones realizadas desde la perspectiva de los saberes docentes utilizaron métodos etnográficos para la identificación y descripción de los saberes docentes del profesorado. No obstante, para atender los objetivos aludidos, esta no resultó ser la estrategia más adecuada, pues requeríamos intervenir –no solo observar– la práctica cotidiana del profesorado en formación inicial. Optamos por los experimentos de desarrollo del profesorado (v. g. Simon, 2000).

En cuanto investigación basada en el diseño, este tipo de experimentos pretende promover –de manera recursiva y controlada, en un ambiente natural concreto– cierto desarrollo en los conocimientos del profesorado, con el afán de explicarlo teóricamente. En consecuencia, el experimento diseñado a causa del estudio (Cruz-Márquez y Montiel-Espinosa, 2024) se compone de cuatro fases: la enseñanza exploratoria, la preparación de la intervención, la intervención y el análisis continuo, y el análisis retrospectivo.

En la primera examinamos las experiencias previas del equipo de investigación al trabajar con la población y temática de interés, con la intención de retomar los aprendizajes adquiridos en ellas. En la segunda planificamos las sesiones del curso optativo y elaboramos los documentos solicitados por la institución educativa para ofertarlo, así como las herramientas docentes e instrumentos de investigación necesarias para su funcionamiento. Durante la tercera implementamos las sesiones de trabajo y analizamos, sesión tras sesión, el cumplimiento de los objetivos instruccionales. Mientras que en la cuarta etapa analizamos la información recabada, en pro de atender los objetivos de investigación establecidos.

Además del aporte que significa para el grupo de investigación en cuanto propuesta para el estudio de los saberes docentes en espacios de formación del profesorado que incluyen experiencias de problematización de la matemática escolar, esta coordinación teórica y configuración metodológica nos permitieron producir y analizar los datos necesarios para atender nuestros objetivos de diseño y de investigación.

Organizamos los resultados del estudio en tres secciones. En la primera resumimos los resultados del análisis continuo. Este no requirió del uso de herramientas teóricas, sino solo de la síntesis de las observaciones de las personas involucradas acerca del cumplimiento de los objetivos instruccionales y del funcionamiento del curso, en este sentido, fue útil para evaluar el diseño inicial del curso optativo –para cumplir el objetivo de diseño de este tipo de investigaciones–.

Entre los principales resultados de esta primera parte se encuentran el cumplimiento de los objetivos instruccionales del curso optativo, así como la advertencia tanto de aspectos que fueron claves para la consecución de dichos objetivos como de decisiones de diseño que quedan abiertas. Entre los primeros destacamos: la enseñanza exploratoria y el diseño minucioso del curso, el ambiente de respeto y confianza generado entre las personas involucradas, y la metodología, estrategias, recursos y herramientas de enseñanza dispuestas. Entre los segundos subrayamos: la cantidad de sesiones dedicadas a la experiencia de problematización, el uso de los grupos GeoGebra, el propósito y disposición de la transparentación de la situación de aprendizaje y de la preparación teórico-metodológica, y la gestión de las clases simuladas.

En la segunda parte de los resultados del estudio incluimos los concernientes al análisis de la actividad matemática de los/as docentes en formación inicial durante la experiencia de problematización de la trigonometría escolar. Este requirió del uso de las herramientas analíticas que nos ofrece la teoría socioepistemológica, en consecuencia, fue útil para evidenciar los momentos de confrontación y resignificación que viven los participantes.

Entre los principales resultados de esta segunda etapa enfatizamos el cumplimiento general de los propósitos e hipótesis vinculadas a cada una de las actividades que componen la situación de aprendizaje diseñada a causa del estudio. En particular, la generación de momentos de confrontación del significado lineal asociado a la relación-ángulo lado –en la primera, segunda, tercera y cuarta actividad–, así como momentos de resignificación de esta por parte de los/as profesores/as en formación inicial –a lo largo de toda la experiencia–. Con esto atendimos nuestro tercer objetivo específico de investigación: involucrar a los/as profesores/as de matemáticas en formación inicial participantes en experiencias de problematización de la trigonometría escolar.

Dos observaciones adicionales son importantes a este respecto. Primero, con relación a la situación de aprendizaje, durante la cuarta y quinta actividad de la experiencia de problematización desarrollada, advertimos la ausencia de reflexiones y argumentos geométricos y analíticos, y la preeminencia de argumentos visuales en la actividad matemática de los/as participantes. Como mostramos, este hecho desafió nuestras hipótesis al respecto y afectó las respuestas finales de los/as profesores/as, en consecuencia, constituye un prometedor punto de reflexión y rediseño para experiencias de problematización futuras, así como de consideración para próximas investigaciones en la línea.

La segunda observación es acerca de las diferencias y similitudes en el trabajo realizado por los/as participantes. En términos generales, percibimos un comportamiento bastante homogéneo de los/as profesores/as en formación inicial. Las únicas diferencias significativas fueron: mayor cantidad y variedad de nociones y procedimientos usados por Candy y Santiago –estudiantes del octavo/último semestre de la carrera–, y también mayor cantidad de momentos de persistencia del significado lineal asociados al trabajo de estos.

Ambos hechos coinciden con nuestra experiencia previa: las experiencias de problematización suelen generar mayor confrontación en los/as docentes con más experiencia profesional o con una formación matemática más sólida. No resulta extraño entonces que, como mostramos, una parte considerable de las nociones y procedimientos matemáticos puestos en juego por Candy y Santiago se dediquen a confirmar/refutar que la relación ángulo-lado es proporcional. En este sentido, consideramos que tanto el fenómeno de persistencia del significado lineal como su relación con la formación y experiencia docente constituyen también posibles focos de interés para investigaciones futuras en la línea.

Por último, la tercera parte de los resultados del estudio comprende los relativos al análisis de los saberes docentes de los/as profesores/as en formación inicial participantes. Este precisó del uso de las herramientas analíticas que nos proporciona la perspectiva de los saberes docentes, en este sentido, fue útil para identificar y describir los saberes docentes construidos y manifestados por los/as profesores/as en las distintas prácticas parciales que abarca el curso optativo implementado.

Entre los principales resultados de esta tercera parte identificamos, durante la resolución de actividades matemáticas –ubicada en la primera etapa del curso–, saberes docentes de carácter procedimental, asociados al uso de diversas nociones y procedimientos matemáticos, y retomados de experiencias previas. Reconocimos, además, la determinación de los/as participantes por atender la situación de aprendizaje propuesta, el potencial uso de la ley de cosenos en futuras situaciones matemáticas simulares, y asociaciones y referencias a voces sociales como las experiencias estudiantiles, experiencias docentes, a las actividades del curso, entre otras.

Estos resultados se condicen con la práctica parcial y el contexto de esta. Así, por ejemplo, dada la actividad propuesta y que esta se enmarca en un curso con valor curricular, es de esperarse que los/as profesores/as manifiesten y construyan saberes docentes procedimentales asociados al trabajo matemático, y que su interés esté puesto en atender las tareas matemáticas de forma efectiva y eficiente. También es habitual, de acuerdo con nuestras experiencias previas, que –como sucedió– al atender una situación de aprendizaje los/as profesores/as en formación inicial refieran al trabajo de otros/as participantes, a experiencias personales y estudiantiles pasadas, y a lo aprendido en estas.

Quizá el resultado más notable en el análisis de esta primera práctica parcial fue la observación de referencias a experiencias docentes como justificación para estrategias y resoluciones matemáticas. Este hecho, como dijimos, coincide con nuestras experiencias previas y con nuestra revisión bibliográfica (v. g. Zazkis y Leikin, 2008), y parece ser una característica importante del trabajo de los/as profesores/as que cursan los últimos semestres de su formación inicial al resolver situaciones matemáticas.

Con esta descripción de los saberes docentes y demás elementos reconocidos en el trabajo de los/as participantes durante la resolución de situaciones matemáticas atendemos nuestro primer objetivo específico de investigación: identificar y describir los saberes docentes que el profesorado de matemáticas en formación inicial construye y manifiesta al vivenciar experiencias de problematización de la trigonometría escolar.

Por su parte, en el diseño de las actividades propias –ubicada en segunda, tercera y parte de la cuarta etapa del curso–, reconocimos saberes docentes procedimentales, discursivos y aptitudinales. Los primeros vinculados a la construcción de la trayectoria hipotética de aprendizaje y de la planificación de la clase simulada, y al contenido de estas. Los saberes discursivos reconocidos versan sobre la visión general de los/as participantes acerca de la enseñanza y aprendizaje de la matemática, aspectos específicos de la enseñanza de la matemática y la trigonometría, y las nociones trigonométricas y su tratamiento escolar. El saber aptitudinal concierne al manejo de recursos digitales.

Los propósitos del actuar de los/as participantes en esta práctica parcial también se dividen en tres: sobre el curso, sobre de la matemática y su enseñanza-aprendizaje, y sobre la clase simulada. En los primeros se reitera la intención de los/as profesores/as por atender de forma efectiva y eficiente las actividades propuestas por los investigadores, los segundos reflejan intereses de los/as docentes al construir actividades didácticas en general, y los terceros a finalidades específicas que los/as participantes se trazan para sus clases simuladas.

De forma transversal, podemos organizar estos elementos en tres subgrupos, según estén principalmente asociados a: el contexto en el que se desarrolla la práctica del profesorado –un curso optativo universitario con valor curricular–, la práctica previa de los/as participantes o las actividades realizadas en el curso optativo. En el primer grupo podemos ubicar los objetivos del curso optativo; en el segundo los saberes procedimentales, los saberes discursivos acerca de la visión de la enseñanza y aprendizaje de la matemática, los saberes discursivos sobre aspectos específicos de la enseñanza de la matemática y la trigonometría, y los propósitos sobre de la matemática y su enseñanza-aprendizaje; y en el tercero los saberes discursivos acerca de las nociones trigonométricas y su tratamiento escolar, y los propósitos sobre las actividades de la clase simulada.

A este respecto también es importante mencionar que, exceptuando los saberes procedimentales –que se mantuvieron–, en el transcurso de las sesiones que conforman el diseño de las actividades por parte de los/as profesores/as registramos la preeminencia de los saberes y propósitos asociados con las actividades del curso –por sobre los relacionados al contexto de la práctica y los retomados de experiencias previas–. Esto podría caracterizar la práctica parcial de los/as profesores/as en formación inicial: a medida se acerca la implementación de las clases, las acciones –decisiones, explicaciones y opiniones– de los/as docentes giran en torno a cuestiones más concretas y específicas, como tiempos, actividades, recursos, etcétera.

Adicionalmente, reconocimos que las asociaciones y voces sociales aludidas refieren a experiencias docentes, experiencias estudiantiles, actividades del curso, condiciones materiales, equipo de investigación, entre otras. También se alude el potencial uso de diferentes soportes en el diseño de actividades trigonométricas en la práctica futura; la importancia concedida al ensayo de las actividades matemáticas, tiempos y recursos previo a su incorporación en el diseño; y la reiterada inexperiencia en la planificación detallada e implementación de clases regulares, y la carga académica con la que convive el desarrollo del curso.

De estos elementos nos parecen particularmente relevantes tres puntos. Primero, que la experiencia docente se convierta en la voz social más frecuente a medida avanza el diseño de las actividades, en especial porque solo Candy y Santiago aluden a ella. Segundo, la persistencia de los momentos de prueba como trascendentes en la toma de decisiones respecto a las actividades diseñadas. Y tercero, la emergencia del equipo de investigación entre las voces sociales más referidas, que apunta a una evolución en el rol de los investigadores, de profesores –en la resolución de situaciones matemáticas– a codiseñadores.

El primero de estos tres elementos es característico de la práctica parcial de los/as profesores/as en formación inicial que cursan sus últimos semestres –por ser quienes usualmente cuentan con experiencia docente–; el segundo parece más un recurso de los/as profesores/as que no cuentan con dicha experiencia docente, o con el dominio de un instrumento o herramienta didáctica específica; y el tercero parece estar asociado a la dinámica y organización propia del curso de formación inicial docente propuesto.

Por otro lado, durante la implementación de las clases simuladas –situadas en la segunda parte de la cuarta etapa–, identificamos saberes docentes procedimentales y discursivos. Los primeros son, en su mayoría, retomados por los/as participantes de su práctica previa y refieren al desarrollo mismo de la clase.

El segundo refiere a las nociones trigonométricas y su tratamiento escolar, y fue construido durante el desarrollo del curso.

Entre los propósitos que guían el actuar de los/as profesores/as reconocimos cuatro propósitos específicos de la clase simulada, todos ellos construidos en el curso. Adicionalmente, reconocimos momentos de improvisación vinculados con estrategias didácticas específicas y con el manejo de los recursos digitales a través de los cuales se llevó a cabo la clase; así como referencias a voces sociales como las actividades del curso, los/as estudiantes, la experiencia estudiantil, entre otros.

A este respecto son pertinentes dos observaciones. Primero, prácticamente todos los elementos identificados en esta etapa son implícitos al trabajo de los participantes, en este sentido, están estrechamente relacionados al trabajo previo realizado en el curso. Y segundo, la ocurrencia de situaciones inesperadas en el diseño de las actividades, que obliga a los/as docentes en formación inicial a improvisar estrategias y recursos, a modificar su planificación de forma espontánea. Ambas características, lo tácito e impredecible, están vinculadas a la naturaleza misma de la práctica parcial en cuestión.

Por último, durante el análisis de las clases simuladas –ubicada en la tercera/última parte de la cuarta etapa del curso–, identificamos saberes docentes procedimentales, discursivos y aptitudinales. Los procedimentales aluden a la construcción de la planificación de la clase y al trabajo durante la implementación de esta. Los discursivos están vinculados principalmente a aspectos concretos de la enseñanza de la matemática y la trigonometría, y las nociones trigonométricas y su tratamiento escolar. Y los aptitudinales conciernen al manejo de recursos digitales y a la habilidad de improvisar en público. Mientras que los propósitos del actuar de los/as profesores/as en formación inicial reconocidos en esta práctica parcial refieren únicamente a sus pretensiones en la clase simulada.

De forma general, los saberes procedimentales y los propósitos observados en esta práctica parcial habían sido también reconocidos previamente. Esto mismo sucedió en la implementación de las clases simuladas, no obstante, en aquel caso podría haber estado influido por el hecho de que los saberes y propósitos podían ser reconocidos casi exclusivamente implícitos en el actuar de los/as profesores/as, teniendo como referencia las actividades y discusiones del curso.

Otra observación relevante es que, de forma similar a como sucedió hacia el final del diseño de las actividades, en esta práctica parcial predominan los saberes discursivos vinculados con aspectos específicos de la enseñanza de la matemática y la trigonometría, y los propósitos sobre las actividades de la clase simulada; ligados, respectivamente, a las experiencias docentes y estudiantiles previas, y a las actividades y discusiones del curso.

Estas dos observaciones sugieren que en esta práctica parcial la discusión se mantiene en el campo de los elementos concretos y específicos aludidos hacia el final del diseño de las actividades por parte de los/as participantes. Además, como podría parecer natural, en el análisis de las clases simuladas parece que no se introducen propósitos nuevos, sino que se refieren únicamente los construidos en el diseño y ejecutados en las clases simuladas.

Adicionalmente, reconocimos que las asociaciones y voces sociales aludidas en esta práctica parcial refieren a experiencias docentes, experiencias estudiantiles, modalidad, entre otras. También se menciona el potencial uso de aspectos del curso –entre ellas el estudio de la relación ángulo-lado– en la práctica futura y las posibles adaptaciones de las actividades de la clase simulada; la improvisación de figuras, y de estrategias para el manejo del tiempo y las respuestas de los estudiantes; la importancia de los momentos de prueba para los resultados obtenidos en las clases simuladas; y la inexperiencia en la implementación de clases regulares, así como las situaciones personales, condiciones materiales y herramientas concretas que determinaron las implementaciones.

De estos elementos cabe recalcar tres puntos: que las experiencias docentes fueron la voz social más referidas por los/as profesores/as en formación inicial, la incidencia concedida a los momentos de práctica y de improvisación en las últimas dos prácticas parciales, y la mención al estudio de la relación ángulo-lado entre los potenciales saberes de los participantes. El primero, como dijimos, parece caracterizar el trabajo de los/as profesores/as que cursan sus últimos semestres de formación, los momentos de práctica parecen estar asociados al trabajo de los/as participantes que no cuentan con dicha experiencia docente, mientras que los momentos de improvisación se presentan indiferentemente.

La descripción de los saberes docentes y demás elementos reconocidos en el trabajo de los/as profesores/as en formación inicial durante las tres prácticas parciales previas nos son útiles para atender nuestro segundo objetivo específico de investigación: identificar y describir los saberes docentes que el profesorado de matemáticas en formación inicial construye y manifiesta al diseñar, implementar y analizar actividades en el área de trigonometría.

Ahora bien, de forma transversal a las prácticas parciales, en los saberes docentes, propósitos, voces sociales y demás elementos reconocidos en el trabajo de los/as profesores/as en formación inicial, ubicamos múltiples referencias a las actividades del curso. Estas se reparten entre el trabajo realizado en la experiencia de problematización, las lecturas y discusiones de la etapa de preparación, y las herramientas y recursos específicos introducidos en el curso. No obstante, la gran mayoría de estas referencias se concentran en la construcción de los propósitos específicos de las clases simuladas y en los saberes discursivos vinculados a las nociones trigonométricas y su tratamiento escolar, y versan sobre los fenómenos didácticos reportados alrededor de la enseñanza y aprendizaje de la trigonometría –discutidos durante la transparentación y en la etapa de preparación–.

Si bien estos fenómenos didácticos fueron base para el diseño de la situación de aprendizaje y resultaron siendo advertidos *a posteriori* por los/as participantes en la experiencia de problematización, no son el centro de esta última. En sentido estricto, solo ubicamos tres referencias al estudio de la relación ángulo-lado en el resto del curso: como un saber discursivo –al comentar uno de los productos de investigación proporcionados– y una asociación –al construir el objetivo de aprendizaje– durante el diseño de las actividades, y como un potencial saber en el análisis de las clases simuladas. Todas estas menciones se encuentran en el trabajo de Santiago.

Este hecho coincide con nuestras hipótesis de investigación al respecto, donde estimamos que algunas ideas generales introducidas en el curso podrían mantenerse en las clases diseñadas por los/as participantes, pero que sus experiencias anteriores como estudiantes de trigonometría y su visión acerca de la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas predominarían en el diseño e implementación de las clases.

En sus intervenciones sobre este punto, Santiago explicita que, aunque el estudio de la relación ángulo-lado fue algo nuevo para él –que no había hecho ni en sus clases de trigonometría–, lo considera importante para el desarrollo del pensamiento trigonométrico; que bajo otras condiciones le gustaría incluirlo en el diseño de sus clases.

Con esto en mente, consideramos que algunos de los factores que determinaron que las experiencias de problematización, en especial el análisis de la relación ángulo-lado, no se convirtiera en un saber central en la práctica de los/as participantes fue la organización del curso y la temática de nuestra experiencia de problematización. Con relación a lo primero, para futuras intervenciones y experiencias de investigación podría considerarse la utilización de situaciones de aprendizaje más amplias –en tiempo y contenido–, que provean de mayor cantidad de elementos matemáticos a los/as profesores/as. Lo cual podría complementarse con la planificación, implementación y análisis de mayor número de clases, que permitan a los/as profesores/as diseñar para un abanico más amplio de tópicos matemáticos.

Respecto a lo segundo, valdría la pena sopesar el uso de situaciones de aprendizaje centradas en tópicos matemáticos más cercanos a los objetos matemáticos escolares o, en su defecto, diseñar, implementar y analizar clases dirigidas a los tópicos sobre los que versan las experiencias de problematización, aunque estos no pertenezcan en sentido estricto al currículo de matemáticas del nivel medio y medio superior.

Estas últimas observaciones atienden nuestro cuatro y último objetivo específico de investigación: describir cómo las experiencias de problematización dialogan con los saberes docentes al diseñar, implementar y analizar actividades de aula en el área de trigonometría.

10.
Limitaciones y prospectivas

(...) parecía que habíamos llegado al final del camino y resulta que era sólo una curva abierta a otro paisaje y a nuevas curiosidades.
— José Saramago

Todos los ejercicios de investigación están limitados a condiciones específicas de distinta índole, de allí que siempre se requieran otros proyectos y otras condiciones para atender las interrogantes que los primeros descubren o dejan abiertas.

En nuestro caso, creemos que futuras investigaciones podrían realizar revisiones bibliográficas sobre la formación docente y los conocimientos del profesorado en áreas temáticas específicas que sean más amplias, esto es, que incluyan mayor número de revistas, formatos e idiomas que la aquí presentada; que sean más actuales, que incorporen especialmente estudios publicados durante los últimos cuatro años; y que sean más sistemáticas, que sigan marcos metodológicos sólidos para la recolección y análisis de los resultados.

Consideramos que se requiere también robustecer, a la luz de nuevos datos y análisis empíricos, así como de la revisión y debate teórico, las ampliaciones/adaptaciones realizadas a la perspectiva de los saberes docentes y la coordinación entre esta y la teoría socioepistemológica, en cuanto marco para el estudio de los espacios de formación docente en los que se promueve la problematización de la matemática escolar.

Creemos también de interés reflexionar y bosquejar posibles modificaciones al experimento de desarrollo del profesorado diseñado e implementado en este estudio. Esto, de cara a futuras réplicas o adaptaciones, que hagan necesario considerar otros objetivos, modalidad, registros de información, población de interés, cantidad de participantes, etcétera.

Ahora bien, en aspectos más cercanos a los resultados del estudio que a su metodología, consideramos de interés examinar algunos fenómenos advertidos durante el análisis de la actividad matemática de los/as participantes, como la preeminencia de la percepción visual y la ausencia de implicaciones variacionales y algebraicas en las actividades finales de la situación de aprendizaje.

Vinculado también a la experiencia de problematización, nos parece importante el estudio de los momentos de confrontación y resignificación de una noción matemática específica en relación con la formación matemática y la experiencia profesional de los/as profesores/as que los viven. ¿Se confrontan y resignifican de igual manera poblaciones de docentes con diferentes niveles de formación y de experiencia docente?, ¿qué caracteriza cada caso? A este respecto también nos parece necesario el examen de la persistencia de los significados confrontados fruto de las experiencias de problematización. ¿Qué factores inciden en la persistencia de un significado matemático?

Por último, destacamos la pertinencia de más investigaciones que describan los procesos de integración de las experiencias de problematización de la matemática escolar en la formación inicial y continua del profesorado. ¿Qué características deben tener las experiencias de problematización para convertirse en un saber determinante en la práctica del profesorado?, ¿qué condiciones coadyuvan este proceso?

Referencias

Adler, J., Ball, D., Krainer, K., Lin, F. L. y Novotna, J. (2005). Reflections on an emerging field: Researching mathematics teacher education. *Educational studies in mathematics*, *60*(3), 359–381. https://doi.org/10.1007/s10649-005-5072-6

Andréu, J. (2000). *Las técnicas de análisis de contenido: una revisión actualizada*. Centro de Estudios Andaluces, Universidad de Granada. Recuperado de https://abacoenred.com/wp-content/uploads/2019/02/Las-t%C3%A9cnicas-de-an%C3%A1lisis-de-contenido-una-revisi%C3%B3n-actualizada.pdf

Ball, D. L., Thames, M. y Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching: What Makes It Special? *Journal of Teacher Education*, *59*(5), 389–407. https://doi.org/10.1177/0022487108324554

Barradas, R. L. M. (2022). Interacciones y saberes docentes de una educadora. Percepciones desde un contexto rural en pandemia. *Revista Latinoamericana de Estudios Educativos*, *52*(1), 177–214. https://doi.org/10.48102/rlee.2022.52.1.480

Bassi, J. (2015). El código de transcripción de Gail Jefferson: adaptación para las ciencias sociales. *Quaderns de Psicología*, *17*(1), 39–62. https://doi.org/10.5565/rev/qpsicologia.1252

Blanton, M. L. (2002). Using an undergraduate geometry course to challenge pre-service teachers' notions of discourse. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *5*, 117–152. https://doi.org/10.1023/A:1015813514009

Bromme, R. (1994). Beyond subject matter: A psychological topology of teachers' profesional knowledge. In R. Biehler, R. Sholz, R. Strässer y B. Winkelman (Eds.), *Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline* (pp. 73–88). Kluwer Academic Publisher. https://doi.org/10.1007/0-306-47204-X_7

Cabañas-Sánchez, G. y Cantoral, R. (2012). El papel de la noción de conservación del área en la resignificación de la integral definida. En R. Flores (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 25* (pp. 1031–1040). Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Cáceres, P. (2003). Análisis cualitativo de contenido: una alternativa metodológica alcanzable. *Psicoperspectivas. Individuo y Sociedad*, *2*(1), 53–82. https://dx.doi.org/10.5027/psicoperspectivas-Vol2-Issue1-fulltext-3

Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento*. Gedisa.

Cantoral, R. (2020). Socioepistemology in Mathematics Education. En S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0_100041

Cantoral, R., Montiel, G. y Reyes-Gasperini, D. (2015). El programa socioepistemológico de investigación en Matemática Educativa: el caso de Latinoamérica. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *18*(1), 5–17. https://www.doi.org/10.12802/relime.13.1810

Carrillo-Yañez, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, Á., Ribeiro, M. y Muñoz-Catalán, M. C. (2018). The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model, *Research in Mathematics Education*, *20*(3), 236–253. https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981

Cavey, L. O. y Berenson, S. B. (2005). Learning to teach high school mathematics: Patterns of growth in understanding right triangle trigonometry during lesson plan study. *The Journal of Mathematical Behavior*, *24*(2), 171–190. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2005.03.001

Chalmers, A. (1990). *¿Qué es esa cosa llamada ciencia?* (E. Pérez Sedeño y P. López Máñez, Trads.). Siglo Veintiuno Editores. (Trabajo original publicado en 1976)

Chevallard, Y. (1998). *La transposición didáctica: del saber sabio al saber enseñado*. Aique.

Chevallard, Y., Bosch, M. y Gascón, J. (2009). *Estudiar matemáticas: el eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje*. Lukambanda. (Trabajo original publicado en 1997)

Cobb, P., Confrey, J., DiSessa, A., Lehrer, R. y Schauble, L. (2003). Design experiment in Educational Research. *Educational Researcher*, *32*(1), 9–13. https://doi.org/10.3102/0013189X032001009

Codina, L. (2018). *Revisiones bibliográficas sistematizadas: procedimientos generales y framework para ciencias humanas y sociales* [Tesis de maestría no publicada]. Universitat Pompeu Fabra. http://hdl.handle.net/10230/34497

Collins, A., Joseph, D. y Bielaczyc, K. (2004). Design research: Theoretical and methodological issues. *Journal of the Learning Sciences*, *13*(1), 15-42. https://doi.org/10.1207/s15327809jls1301_2

Cruz-Márquez, G. (2018). *De Sirio a Ptolomeo: una problematización de las nociones trigonométricas* [Tesis de maestría no publicada]. Cinvestav. https://doi.org/10.13140/RG.2.2.18095.64166

Cruz-Márquez, G. y Montiel-Espinosa, G. (2022). Medición indirecta de distancias y el trabajo geométrico en la construcción de las nociones trigonométricas. *Acta Scientiae*, *24*(4), 81–108. https://doi.org/10.17648/acta.scientiae.6911

Cruz-Márquez, G. y Montiel-Espinosa, G. (2024). Diseño de un experimento de desarrollo del profesorado para estudiar la formación inicial docente en matemáticas. *Revista Investigación e Innovación en Matemática Educativa (IIME)*, *9*, 1–26. https://doi.org/10.46618/iime.206

Cruz-Márquez, G. y Montiel-Espinosa, G. (en prensa-a). Conocimientos del profesorado de matemáticas en formación inicial: una revisión bibliográfica sistematizada. *Revista Perspectiva educacional. Formación de Profesores*.

Cruz-Márquez, G. y Montiel-Espinosa, G. (en prensa-b). Medición indirecta de distancias y los significados de las nociones trigonométricas del profesorado de matemáticas en formación inicial. *Revista Interuniversitaria de Formación del Profesorado (RIFOP)*.

Cruz, M. F. y Mantica, A. M. (2017). El uso del software de geometría dinámica en la formulación y validación de conjeturas. *Unión: Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, *13*(51), 69–72. Recuperado de https://www.union.fespm.es/index.php/UNION/article/view/386

Davis, B. y Simmt, E. (2006). Mathematics-for-Teaching: An Ongoing Investigation of the Mathematics That Teachers (Need to) Know. *Educational Studies in Mathematics*, *61*, 293–319. https://doi.org/10.1007/s10649-006-2372-4

Etcheverry, N., Reid, M. y Gioda, R. B. (2013). Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC): las competencias matemáticas a partir de una estrategia didáctica en un ambiente de geometría dinámica. *Unión: Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, *9*(36), 131–144. Recuperado de https://www.union.fespm.es/index.php/UNION/article/view/763

Freyre, M. L. y Mántica, A. M. (2019). Una nueva mirada a los poliedros regulares. Construcciones que generan sorpresas. *Unión: Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, *15*(55), 144–158. Recuperado de https://www.union.fespm.es/index.php/UNION/article/view/298

Gómez, M. (2005). La transposición didáctica: historia de un concepto. *Revista Latinoamericana de Estudios Educativos (Colombia)*, *1*(1), 83–115. Recuperado de https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=134116845006

Gómez, P. y Lupiáñez, J. L. (2007). Trayectorias hipotéticas de aprendizaje en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. *PNA*, *1*(2), 79–98. https://doi.org/10.30827/pna.v1i2.6214

González, F. (2018). Historia de la educación matemática en Latinoamérica: 10 claves para su comprensión. *Unión: Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, *14*(52), 279–305. Recuperado de https://union.fespm.es/index.php/UNION/article/view/360

Grant, M. y Booth, A. (2009). A typology of reviews: an analysis of 14 review types and associated methodologies. *Health Information and Libraries Journal*, *26*(2), 91–108. https://doi.org/10.1111/j.1471-1842.2009.00848.x

Grover, B. W. y Connor, J. (2000). Characteristics of the college geometry course for preservice secondary teachers. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *3*, 47–67. https://doi.org/10.1023/A:1009921628065

Herbst, P., Fujita, T., Halverscheid, S. y Weiss, M. (2017). Teaching practice and teacher knowledge in geometry instruction. In P. Herbst, T. Fujita, S. Halverscheid y M. Weiss. (Eds.), *The learning and teaching of geometry in secondary schools: A modeling perspective* (pp. 114–155). Routledge.

Hollebrands, K. F. y Lee, H. S. (2016). Characterizing questions and their focus when pre-service teachers implement dynamic geometry tasks. *The Journal of Mathematical Behavior*, *43*, 148–164. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2016.07.004

Iglesias, M. y Ortiz, J. (2019). La demostración en geometría desde una perspectiva didáctica. *Unión: Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, *15*(55), 159–183. Recuperado de https://www.union.fespm.es/index.php/UNION/article/view/297

Jones, K. y Tzekaki, M. (2016). Research on the teaching and learning of geometry. In A. Gutiérrez, G., C. Leder y P. Boero (Eds.), *The second handbook of research on the psychology of mathematics education* (pp. 109–149). Sense Publishers. https://doi.org/10.1007/978-94-6300-561-6_4

Kitchenham, B. y Charters, S. M. (2007). Guidelines for performing systematic literature reviews in software engineering (EBSE Technical Report, ver. 2.3.). *Keele University and University of Durham*. Recuperado de https://www.elsevier.com/__data/promis_misc/525444systematicreviewsguide.pdf

Lerman, S. (2001). A review of research perspectives on mathematics teacher education. In Lin F. L., Cooney T. J. (Eds.), *Making sense of mathematics teacher education*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-010-0828-0_2

Lezama, J. y Mariscal, E. (2008). Docencia en matemáticas: hacia un modelo del profesor desde la perspectiva de la socioepistemología. En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 21* (pp. 889–900). Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Liljedahl, P., Durand-Guerrier, V., Winsløw, C., Bloch, I., Huckstep, P., Rowland, T., Thwaites, A., Grevholm, B., Bergsten, C., Adler, J., Davis, Z., Garcia, M., Sánchez, V., Proulx, J., Flowers, J., Rubenstein, R., Grant, T., Kline, K., … y Chapman, O. (2009). Components of mathematics teacher training. In R. Even y D. L. Ball (Eds.), *The Professional Education and Development of Teachers of Mathematics* (pp. 25–33). Springer. https://doi.org/10.1007/978-0-387-09601-8_4

Llinares, S. y Krainer, K. (2006). Mathematics (student) teachers and teacher educators as learners. In A. Gutiérrez y P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education: past, present and future* (pp. 429–459). Brill. https://doi.org/10.1163/9789087901127_016

Mamolo, A y Pali, R. (2014). Factors influencing prospective teachers' recommendations to students: horizons, hexagons, and heed. *Mathematical Thinking and Learning*, *16*(1), 32–50. https://doi.org/10.1080/10986065.2014.857804

Mayring, P. (2015). Qualitative content analysis: Theoretical background and procedures. In A. Bikner-Ahsbahs, C. Knipping y N. Presmeg, (Eds.), *Approaches to Qualitative Research in Mathematics Education. Examples of Methodology and Methods* (pp. 365–380). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-017-9181-6_13

McNaughton, M. J. (2009). Closing in on the Picture: Analyzing Interactions in Video Recordings. *International Journal of Qualitative Methods*, *8*(4), 27–48. https://doi.org/10.1177/160940690900800405

Mercado, R. (1991). Los saberes docentes en el trabajo cotidiano de los maestros. *Infancia y aprendizaje*, *14*(55), 59–72.

Mercado, R. (1994). Saberes and social voices in teaching. *Education as cultural construction*, 61–70.

Mercado, R. (2002). *Los saberes docentes como construcción social. La enseñanza centrada en los niños*. Fondo de Cultura Económica.

Molina, M., Castro, E., Molina, J. L. y Castro, E. (2011). Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza. *Enseñanza de las Ciencias*, *29*(1), 75–88. https://doi.org/10.5565/rev/ec/v29n1.435

Montiel, G. (2005). Estudio socioepistemológico de la función trigonométrica [Tesis de doctorado no publicada]. CICATA. Recuperada de https://repositoriodigital.ipn.mx/bitstream/123456789/11653/1/montiel_2005.pdf

Montiel, G. (2011). *Construcción de conocimiento trigonométrico. Un estudio Socioepistemológico*. Ediciones Díaz de Santos.

Montiel, G. y Buendía, G. (2013). Un esquema metodológico para la investigación socioepistemológica: ejemplos e ilustraciones. En A. Rosas y A. Romo (Eds.), *Metodología en matemática educativa: visiones y reflexiones* (pp. 61–88). Lectorum.

Montiel, G. y Jácome, G. (2014). Significados trigonométricos en el profesor. *Boletim de Educação Matemática*, *28*(50), 1193–1216. http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v28n50a10

Moore, K.C., LaForest, K.R. y Kim, H.J. (2016). Putting the unit in pre-service secondary teachers' unit circle. *Educational Studies in Mathematics*, *92*, 221–241. https://doi.org/10.1007/s10649-015-9671-6

Morales, H. (2018). Influencia de un proceso de formación de profesores en el sistema de enseñanza del concepto de área en estudiantes de pedagogía en matemáticas, un estudio de caso. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, *32*(62), 1050–1067. https://doi.org/10.1590/1980-4415v32n62a15

Muñoz Rojas, H. A. (2016). *La investigación cualitativa práctica desde Atlas.ti*. Ediciones USTA.

Muñoz-Justicia, J. y Sahagún-Padilla, M. (2017). *Hacer análisis cualitativo con Atlas.ti 7. Manual de uso*. Recuperado de https://manualatlas.psicologiasocial.eu/atlasti7.pdf

Ossenbach, G. (1993). Estado y Educación en América Latina a partir de su independencia (siglos XIX y XX). *Revista Iberoamericana de Educación*, *1*(1). Recuperado de http://rieoei.org/oeivirt/rie01a04.htm

Ponte, J. P. y Chapman, O. (2006). Mathematics teachers' knowledge and practices. En A. Gutiérrez y P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education: past, present and future* (pp. 461–494). Leiden: Brill. https://doi.org/10.1163/9789087901127_017

Real Academia Española. (s.f.). Problematizar. En Diccionario de la lengua española. Recuperado de https://dle.rae.es/problematizar?m=form

Reyes-Gasperini, D. (2016). *Empoderamiento docente desde una visión socioepistemológica: una alternativa de intervención para la transformación y la mejora educativa* [Tesis de doctorado no publicada]. Cinvestav. https://www.doi.org/10.13140/RG.2.2.26128.40968

Reyes-Gasperini, D. (2017). *Empoderamiento Docente y Socioepistemología*. Gedisa.

Reyes, A. M. y Sosa, L. (2019). Conocimiento especializado del profesor de primaria en formación: un estudio de caso de la enseñanza de la noción de razón. *Quadrante*, *28*(2), 100–124. https://doi.org/10.48489/quadrante.23029

Rockwell, E. y Mercado R. (1988). La práctica docente y la formación de maestros. *Revista Investigación en la Escuela*, *4*, 65–78. Recuperado de http://hdl.handle.net/11441/59114

Rowland, T., Turner, F., Thwaites, A. y Huckstep, P. (2009). *Developing Primary Mathematics Teaching: reflecting on practice with the Knowledge Quartet*. SAGE. https://doi.org/10.4135/9781446279571

Sabariego-Puig, M., Vilà-Baños, R. y Sandín-Esteban, M. P. (2014). El análisis cualitativo de datos con ATLAS.ti. *REIRE, Revista d'Innovació i Recerca en Educació*, *7*(2), 119–133. http://doi.org/10.1344/reire2014.7.2728

Saiz, L. (2003). *El Capítulo IX del Libro I del Almagesto de Claudio Ptolomeo: "Sobre la medida de las líneas rectas que se trazan en el círculo"*. Maxtor.

Sánchez, M. (2011). A review of research trends in mathematics teacher education. *PNA*, *5*(4), 129–145. https://doi.org/10.30827/pna.v5i4.6151

Santana, M. L. y Espinosa, E. (2017). El conocimiento sobre los alumnos en la organización y desarrollo de la enseñanza en la telesecundaria. algunos saberes docentes. *Memoria Electrónica del XIV Congreso Nacional de Investigación Educativa*. COMIE. Recuperado de https://www.comie.org.mx/congreso/memoriaelectronica/v14/doc/2103.pdf

Schütte, M., Friesen, RA. y Jung, J. (2019). Interactional Analysis: A Method for Analysing Mathematical Learning Processes in Interactions. In Kaiser, G. y Presmeg, N. (Eds.) *Compendium for Early Career Researchers in Mathematics Education. ICME-13 Monographs*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-15636-7_5

Shriki, A. (2010). Working like real mathematicians: developing prospective teachers' awareness of mathematical creativity through generating new concepts. *Educational Studies in Mathematics*, *73*, 159–179. https://doi.org/10.1007/s10649-009-9212-2

Shulman, L. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of new reform. *Harvard Educational Review*, *57*, 1–22.

Simon, M. A. (2000). Research on the development of mathematics teacher: The teacher development experiment. En A. E. Kelly y R. A. Lesh (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 335–359). Lawrence Erlbaum Associates.

Simon, M. A. y Tzur, R. (2004). Explicating the role of mathematical tasks inconceptual learning: an elaboration of thehypothetical learning trajectory. *Mathematical Thinking and Learning*, *6*(2), 91–104. https://doi.org/10.1207/s15327833mtl0602_2

Sinclair, N., Cirillo, M. y de Villiers, M. (2017). The learning and teaching of geometry. In J. Cai (Ed.), *Compendium for Research in Mathematics Education* (pp. 457–489). National Council of Teachers of Mathematics.

Soto, D. (2010). El discurso matemático escolar y la exclusión. Una visión socioepistemológica [Tesis de maestría no publicada]. Cinvestav.

Steele, M. D. (2013). Exploring the mathematical knowledge for teaching geometry and measurement through the design and use of rich assessment tasks. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *16*, 245–268. https://doi.org/10.1007/s10857-012-9230-3

Steffe, L. y Thompson, P. (2000). Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements. En A. E. Kelly y R. A. Lesh (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 267–306). Lawrence Erlbaum Associates.

Strutchens, M., Huang, R., Losano, L., Potari, D., Cyrino, M. C. D. C. T., da Ponte, J. P. y Zbiek, R. M. (2017). *The mathematics education of prospective secondary teachers around the world*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-38965-3

Tardif, M. (2014). *Los saberes del docente y su desarrollo profesional*. Narcea ediciones.

Tatto, M. T., Lerman, S. y Novotna, J. (2010). The organization of the mathematics preparation and development of teachers: A report from the ICMI Study 15. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *13*(4), 313–324. https://doi.org/10.1007/s10857-009-9139-7

Tsamir, P. (2007). When intuition beats logic: prospective teachers' awareness of their same sides – same angles solutions. *Educational Studies in Mathematics*, *65*, 255–279. https://doi.org/10.1007/s10649-006-9053-1

Valverde, G. (2012). *Competencias matemáticas promovidas desde la razón y la proporcionalidad en la formación inicial de maestros* [Tesis de doctorado no publicada]. Universidad de Granada. http://hdl.handle.net/10481/23890

Valverde, G. (2014). Experimentos de enseñanza: una alternativa metodológica para investigar en el contexto de la formación inicial de docentes. *Revista Electrónica Actualidades Investigativas en Educación*, *14*(3). https://doi.org/10.15517/AIE.V14I3.16095

Weber, K., Mejía-Ramos, J. P., Fukawa-Connelly, T. y Wasserman, N. (2020). Connecting the learning of advanced mathematics with the teaching of secondary mathematics: Inverse functions, domain restrictions, and the arcsine function. *The Journal of Mathematical Behavior*, *57*, 100752. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2019.100752

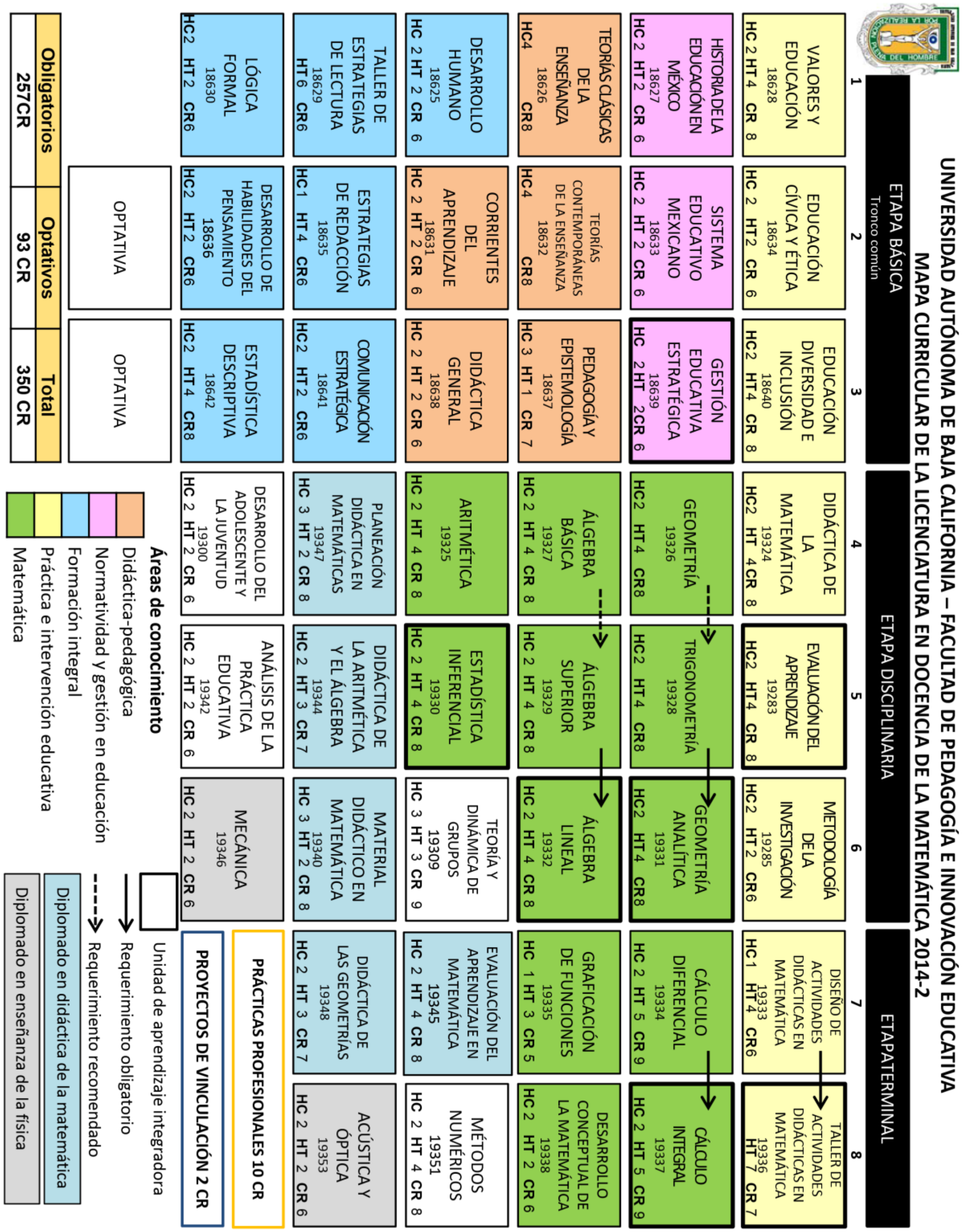
Xiang, H. (2008). Hacia una imagen contextualista de la racionalidad. *Revista Praxis*, (62), 103–135. Recuperado de https://www.revistas.una.ac.cr/index.php/praxis/article/view/4134

Yanik, H. B. (2011). Prospective middle school mathematics teachers' preconceptions of geometric translations. *Educational Studies in Mathematics*, *78*, 231–260. https://doi.org/10.1007/s10649-011-9324-3

Zazkis, R. y Leikin, R. (2008). Exemplifying definitions: a case of a square. *Educational Studies in Mathematics*, *69*, 131–148. https://doi.org/10.1007/s10649-008-9131-7

Anexos

Anexo 1: Flujograma



Anexo 2: Situación de aprendizaje

SITUACIÓN-PROBLEMA

Consideremos el triángulo ABC, cuyo ángulo BAC mide 20º y los lados AB y AC miden 10 unidades cada uno (Figura 1).

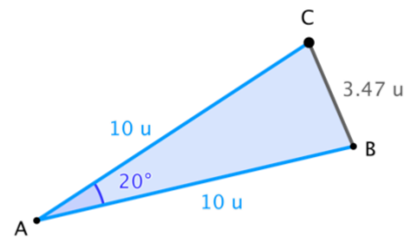


Figura 1. Situación-problema

Propósito e hipótesis

La literatura especializada en el área señala los limitados usos y significados que la trigonometría escolar permite y promueve respecto de las nociones trigonométricas. En particular, advierte que, bajo la configuración actual de la trigonometría escolar, se permite la construcción de un significado lineal respecto a la relación ángulo-lado en el triángulo y un significado aritmético para las nociones trigonométricas –en particular la razón–.

Ante esta problemática, el estudio reportado en Cruz-Márquez (2018) da evidencia empírica de que la introducción de otros usos para las nociones trigonométricas en la escuela, en particular la medición indirecta de distancias en el contexto del círculo permite confrontar y enriquecer los significados aludidos.

Ahora bien, consecuencia de diversas experiencias de aula llevadas a cabo con profesores/as en formación inicial y continua, advertimos que al llevar actividades matemáticas que apuntan a confrontar el significado lineal de la relación ángulo-lado en el triángulo se genera, además, cierto cuestionamiento y duda respecto a si esta relación es cuadrática, cúbica o polinómica de un orden superior; la naturaleza trascendente y trigonométrica de esta relación no resulta ser inmediata para los participantes.

Con esto en mente, diseñamos la presente situación de aprendizaje, en la cual partimos de un triángulo isósceles del que se conoce la medida del ángulo con vértice en A y de sus tres lados.

La intención es, con base en cinco actividades planteadas en contextos numéricos, geométricos y gráficos, analizar cómo cambia la longitud del lado BC ante las variaciones del ángulo BAC –manteniendo las longitudes de los lados iguales del triángulo isósceles–. Esto permitirá confrontar el significado lineal y polinómico asociado a la relación ángulo-lado opuesto en el triángulo, y comenzar a asumir su naturaleza trascendente (trigonométrica).

I. MANTENGAMOS DOS LADOS FIJOS

Si mantenemos las longitudes de los lados AB y AC como fijas, y duplicamos el ángulo BAC (Figura 2).

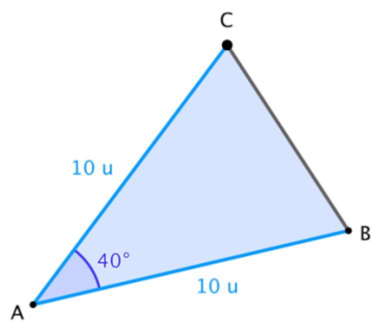


Figura 2. Dos lados fijos

- ¿Cuánto crees que mide ahora el lado BC?, ¿por qué?

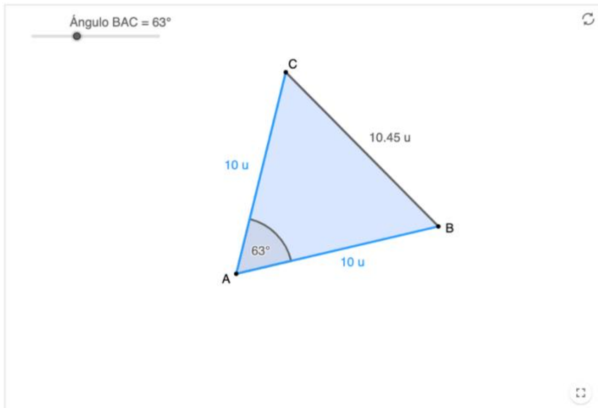
Propósito e hipótesis

Esta primera actividad está dedicada específicamente a la confrontación del significado lineal asociado a la relación ángulo-lado en el triángulo. En este sentido, se plantea el caso en el que se duplica la medida del ángulo comprendido entre los lados conocidos y se solicita determinar la longitud del lado opuesto a dicho ángulo y explicar –con uso o no de nociones o procedimientos matemáticos– el porqué de dicho resultado.

Se espera que los/as participantes, en primera instancia, consideren que la longitud de BC pudiera ser el doble de la distancia inicial dada y, a medida incluyan herramientas matemáticas –especialmente geométricas y trigonométricas–, descubran que no es el doble de la longitud inicial.

II. MÁS CASOS

Mueve el deslizador 'Ángulo BAC' para conocer la longitud del lado BC para diversos valores del ángulo BAC, bajo las mismas condiciones del caso anterior –manteniendo las longitudes de los lados AB y AC como fijas–.



Con los datos obtenido, completa la siguiente tabla:

Nº	Ángulo BAC	Lado BC
1	10°	
2	20°	
3	30°	
4	40°	
5	50°	
6	60°	

- En el primer caso de la tabla, cuando el valor del ángulo BAC es la mitad del valor inicial, ¿qué sucede con la medida del lado opuesto a dicho ángulo?, ¿BC también es la mitad?, ¿a qué crees que se debe este hecho?

- En el sexto caso de la tabla, cuando el valor del ángulo BAC es el triple del valor inicial, ¿qué sucede con la medida del lado opuesto a dicho ángulo?, ¿BC también es el triple?, ¿a qué crees que se debe este hecho?

- A la luz de los casos analizados, ¿cómo describirías la relación que se establece entre el ángulo de referencia y el lado opuesto a este?, ¿por qué?

Propósito e hipótesis

Esta segunda actividad también está dedicada a la confrontación del significado lineal asociado a la relación ángulo-lado en el triángulo. Así, presenta seis valores del ángulo BAC y solicita se encuentre –con el uso de un applet– la longitud del lado opuesto correspondiente cada uno de ellos. Además, se pide explícitamente que se compare dos de los valores obtenidos con los valores proporcionales y que se describa la relación a la luz de dichas comparaciones.

Se espera que los/as participantes completen la tabla sin mayor problema; que se percaten de que los casos a comparar no son la mitad ni el triple de la longitud original –respectivamente–, pero que no puedan dar respuestas amplias sobre el porqué sucede esto; y que describan la relación como extraña, no proporcional, no lineal, etc.

III. MÁS CASOS AÚN

En la siguiente tabla se muestran los valores aproximados del lado BC para una amplia variedad de valores del ángulo BAC.

N.	Ángulo BAC	Lado BC
1	10°	1.74 u
2	20°	3.47 u
3	30°	5.18 u
4	40°	6.84 u
5	50°	8.45 u
6	60°	10 u
7	70°	11.47 u
8	80°	12.86 u
9	90°	14.14 u
10	100°	15.32 u
11	110°	16.38 u
12	120°	17.32 u
13	130°	18.13 u
14	140°	18.79 u
15	150°	19.32 u
16	160°	19.7 u
17	170°	19.92 u
18	180°	20 u

- Ahora que cuentas con más información, ¿cómo describirías la relación que se establece entre el ángulo de referencia y el lado opuesto a este?, ¿por qué?

Propósito e hipótesis

Esta tercera actividad apunta a que los/as participantes comiencen a analizar la naturaleza de la relación ángulo-lado. Con esto en mente, se le presenta un conjunto de 18 pares ángulo-lado opuesto y se le pide que, con base en dichos casos, describan la relación.

Se espera que los/as participantes utilicen estrategias numéricas (como el cálculo de diferencias) y algebraicas (como sustituir valores en una formula general) para corroborar que no es una relación lineal e intentar descifrar qué tipo de relación es la puesta en juego. Además, se espera que, de forma similar a la actividad anterior, describan la relación como extraña, no proporcional, no lineal, etc.

IV. ¿Y LAS DIFERENCIAS?

En la siguiente tabla se muestran los valores aproximados del lado BC para una amplia variedad de valores del ángulo BAC. Cambia el valor del deslizador 'Nivel de diferencia' para observar varios niveles de diferencias entre las longitudes de BC.

Nivel de diferencia

Ángulo BAC	Lado BC (u)	1ra diferencia	2da diferencia	3ra diferencia	4ta diferencia
0°	0	1.74	-0.01	-0.01	0
10°	1.74	1.73	-0.03	-0.01	0
20°	3.47	1.7	-0.04	-0.01	0
30°	5.18	1.66	-0.05	-0.01	0
40°	6.84	1.61	-0.06	-0.01	0
50°	8.45	1.55	-0.08	-0.01	0
60°	10	1.47	-0.09	-0.01	0
70°	11.47	1.38	-0.1	-0.01	0
80°	12.86	1.29	-0.11	-0.01	0
90°	14.14	1.18	-0.12	-0.01	0
100°	15.32	1.06	-0.12	-0.01	0
110°	16.38	0.94	-0.13	-0.01	0
120°	17.32	0.81	-0.14	-0.01	0
130°	18.13	0.67	-0.14	0	0
140°	18.79	0.52	-0.15	0	0
150°	19.32	0.38	-0.15	0	
160°	19.7	0.23	-0.15		
170°	19.92	0.08			
180°	20				

- En términos de la situación-problema original, ¿qué significan la primera y segunda diferencia de las longitudes de BC?

- Con base en lo observado hasta el momento, ¿consideras que la relación entre el ángulo BAC y el lado BC podría ser lineal?, ¿por qué?

- Con base en lo observado, ¿consideras que dicha relación podría ser cuadrática o cúbica?, ¿por qué?

Propósito e hipótesis

Esta cuarta actividad pretende que los/as participantes analicen la posibilidad de que la relación ángulo-lado BC sea cuadrática o cúbica. Para ello, se presenta un applet GeoGebra que permite observar las primeras, segundas, terceras y cuartas diferencias entre las longitudes del lado opuesto para una amplia variedad de valores del ángulo BAC. Además, este applet también permite variar la cantidad de cifras decimales que muestran los valores del lado opuesto, así como sus diferencias.

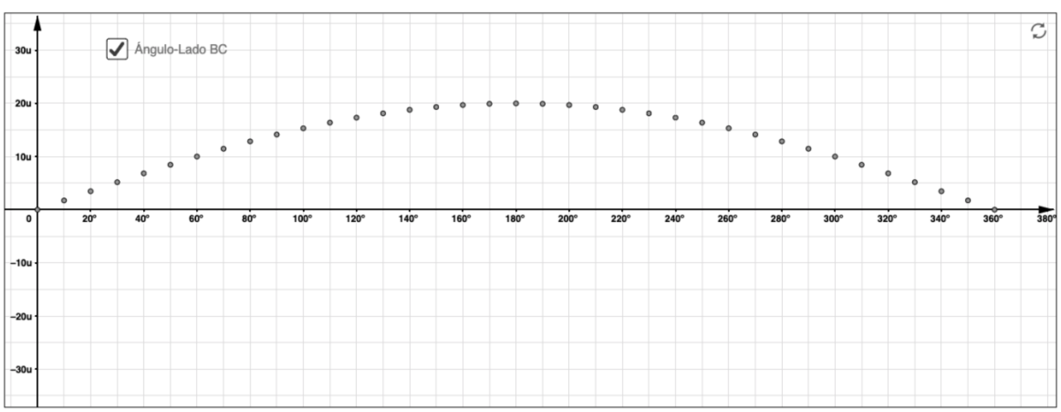
Se espera que los/as participantes observen que las primeras diferencias entre los valores del lado BC aluden a si la longitud del segmento crece o decrece –a medida el ángulo crece de 0º a 180º–, mientras que las segundas diferencias nos indican si crece o decrece en mayor o menor medida durante los cambios del ángulo. Además, se espera que los/as participantes coincidan en que la relación ángulo-lado opuesto no es lineal dado que no tiene un patrón, sus primeras diferencias no son constantes, etc.; y que no es de naturaleza cuadrática o cúbica pues su segunda y tercer nivel de diferenciación no es constante.

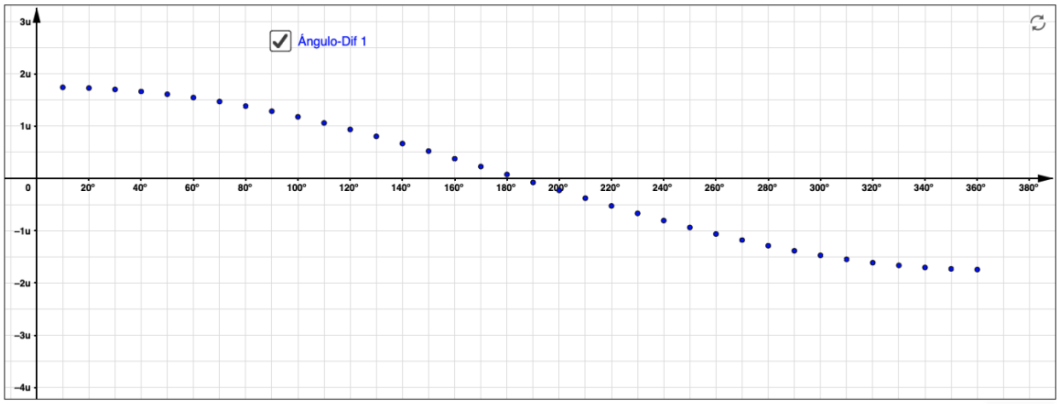
V. UN CONTEXTO GRÁFICO

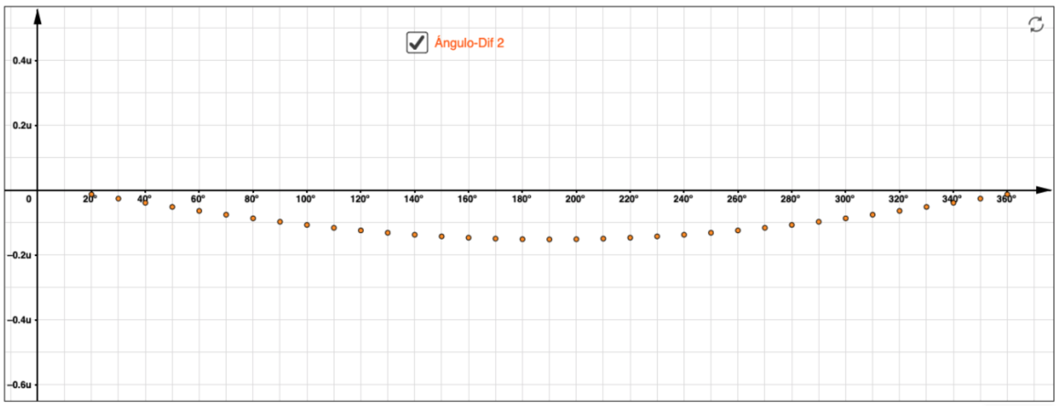
En la siguiente tabla se muestran los valores aproximados del lado BC para una amplia variedad de valores del ángulo BAC. Además, se presenta una representación gráfica de los valores del lado BC y varios niveles de diferencias entre estos valores.

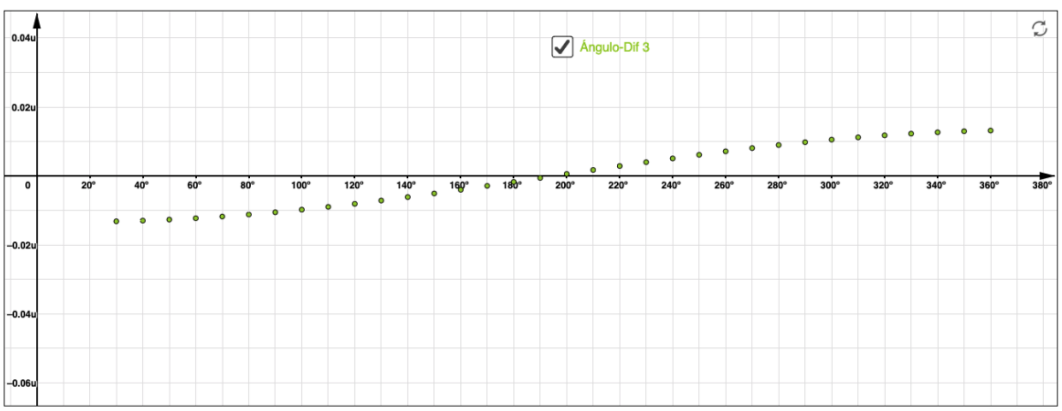
Ángulo BAC	Lado BC	Diferencia 1	Diferencia 2	Diferencia 3
0°	0.00000000000000			
10°	1.74311485495317	1.74311485495317		
20°	3.47296355333861	1.72984869838544	-0.0132661565677257	
30°	5.17638090205042	1.70341734871181	-0.0264313496736319	-0.0131651931059063
40°	6.84040286651338	1.66402196446296	-0.0393953842488469	-0.0129640345752149
50°	8.45236523481400	1.61196236830062	-0.0520595961623478	-0.0126642119135010
60°	10.0000000000000	1.54763476518601	-0.0643276031146024	-0.0122680069522545
70°	11.4715287270209	1.47152872702092	-0.0761060381650883	-0.0117784350504859
80°	12.8557521937308	1.38422346670987	-0.0873052603110570	-0.0111992221459687
90°	14.1421356237310	1.28638343000017	-0.0978400367097018	-0.0105347763986448
100°	15.3208888623796	1.17875323864861	-0.107630191351556	-0.00979015464185374
110°	16.3830408857799	1.06215202340028	-0.116601215248334	-0.00897102389677863
120°	17.3205080756888	0.937467189908937	-0.124684833491339	-0.00808361824300442
130°	18.1261557407330	0.805647665044231	-0.131819524864707	-0.00713469137336809
140°	18.7938524157182	0.667696674985167	-0.137950990059064	-0.00613146519435760
150°	19.3185165257814	0.524664110063200	-0.143032564921967	-0.00508157486290273
160°	19.6961550602442	0.377638534462794	-0.147025575600406	-0.00399301067843894
170°	19.9238939618349	0.227738901590751	-0.149899632872042	-0.00287405727163659
180°	20.0000000000000	0.0761060381650901	-0.151632863425661	-0.00173323055361863
190°	19.9238939618349	-0.0761060381650901	-0.152212076330180	-0.000579212904519012

Ángulo BAC	Lado BC	Diferencia 1	Diferencia 2	Diferencia 3
200°	19.6961550602442	-0.227738901590748	-0.151632863425658	0.000579212904522564
210°	19.3185165257814	-0.377638534462797	-0.149899632872050	0.00173323055360797
220°	18.7938524157182	-0.524664110063200	-0.147025575600402	0.00287405727164725
230°	18.1261557407330	-0.667696674985167	-0.143032564921967	0.00399301067843539
240°	17.3205080756888	-0.805647665044227	-0.137950990059061	0.00508157486290629
250°	16.3830408857799	-0.937467189908941	-0.131819524864714	0.00613146519434694
260°	15.3208888623796	-1.06215202340027	-0.124684833491333	0.00713469137338053
270°	14.1421356237310	-1.17875323864861	-0.116601215248338	0.00808361824299554
280°	12.8557521937308	-1.28638343000016	-0.107630191351550	0.00897102389678751
290°	11.4715287270209	-1.38422346670987	-0.0978400367097106	0.00979015464183953
300°	10.0000000000000	-1.47152872702092	-0.0873052603110499	0.0105347763986608
310°	8.45236523481400	-1.54763476518601	-0.0761060381650883	0.0111992221459616
320°	6.84040286651339	-1.61196236830061	-0.0643276031146015	0.0117784350504868
330°	5.17638090205043	-1.66402196446296	-0.0520595961623470	0.0122680069522545
340°	3.47296355333861	-1.70341734871182	-0.0393953842488584	0.0126642119134886
350°	1.74311485495317	-1.72984869838544	-0.0264313496736240	0.0129640345752344
360°	0.00000000000000	-1.74311485495317	-0.0132661565677257	0.0131651931058983









- En términos de la situación-problema original, ¿qué observas en la gráfica de la relación ángulo-lado BC –la primera gráfica–?

- En términos de la situación-problema original, ¿qué observas en la gráfica de la relación ángulo-primeras diferencias –la segunda gráfica–?

– Con base en observado hasta el momento, ¿qué tipo de relación crees que es la que se establece entre el ángulo BAC y el lado BC?, ¿por qué?

Propósito e hipótesis

Esta quinta actividad apunta a que los/as participantes, después de confrontar sus posibles concepciones lineales y polinómicas– evalúen las características de la relación ángulo-lado BC. Así, se presenta una tabla con ángulos entre 0º y 360º –con un intermedio de diez grados–, los valores de BC correspondientes, y sus primeras, segundas y terceras diferencias. Además, se muestran cuatro conjuntos de puntos, relativos a: ‘ángulos de referencia-lado opuesto’, ‘ángulos de referencia-primera diferencia’, ‘ángulo de referencia-segunda diferencia’, y ‘ángulo de referencia-tercera diferencia’.

Se espera que los/as participantes mencionen que la primera gráfica –de la relación ángulo-lado BC– se corresponde con la situación-problema original, en este sentido, parece ser que el lado BC crece y decrece continuamente a medida crece el ángulo, que nunca BC medirá más de 20 unidades y menos de 0 unidades, etc.; que las gráficas –la segunda, tercera y cuarta– parecen tener forma sinusoidal; y que describan la relación como extraña, no proporcional, etc.