CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

Unidad Zacatenco

Departamento de Matemática Educativa

Uso de la matemática de secundaria para la gestión del agua-lluvia: estudiantes de tercero de secundaria (de 14 a 15 años)

Tesis que presenta:

Stheven Lehi Rodríguez Amador

Para obtener el grado de:

Maestro en Ciencias

en la especialidad de

Matemática Educativa

Director de la tesis:

Dr. Francisco Cordero Osorio

Ciudad de México Febrero, 2024

Agradezco al Consejo Nacional de Humanidades Ciencia y Tecnología (Conahcyt) el apoyo financiero para realizar mis estudios de maestría.

Stheven Lehi Rodríguez Amador

Becario No. 1163520

Dedicatoria

La culminación de este proyecto se la debo a ustedes dos:

Javier Flores Servellón y ***Gerardo Piña Aguirre*** quienes han estado para mí cuando más lo he necesitado durante la elaboración de este trabajo.

Agradecimientos

A ***Helen Maribel Pérez*** por motivarme a aplicar al programa de maestría de Matemática Educativa de Cinvestav.

Al ***Dr. Francisco Cordero*** por hacerme parte de su programa de investigación, por su constante orientación y apoyo para que este trabajo llegará a buen puerto. Gracias también por compartir su pasión hacia la matemática educativa y motivación para pensar fuera de la caja.

A la ***Dra. Gisela Montiel*** por escucharme y ser una fuente más de luz en la construcción de este proyecto.

A ***Adriana Parra*** por su apoyo y dedicación para que nosotros, los estudiantes del departamento, no tengamos ningún inconveniente antes, durante, ni después de todo este proceso formativo.

A las maestras que tuve durante mi formación, ***Dra. Rosa María Farfán*** y a la ***Dra. Margarita Acuña***.

A las amistades que forjé durante estos dos últimos años ***Anna***, ***Mariela***, ***Luis Miguel*** y en especial a ***Avenilde*** por todos esos momentos gratos de reflexión, risas, y pan.

A mis compañeros del programa de investigación, Soltsa, en especial a: ***Henry Chávez*** que compartió su espacio para que yo tuviera un lugar donde vivir en Ciudad de México;.A ***Eleani Barrios*** por sus reflexiones y orientación brindada. A ***Sindi Marcia*** y ***Falconeri Gieacoleti*** por decir *sí, ahí estaremos* cuando necesitaba de su apoyo. A ***Atennea de la Cruz***, ***Evelyn Soto*** y ***Carlos González*** por brindarme su amistad.

A mis compañeros del departamento ***Ana Gámez, Ana Arceo***, ***Paco Sepúlveda***, ***Maleni Pérez***, por bridarme su amistad y apoyo.

Al grupo de catrachos del departamento de matemática educativa de Cinvestav, en especial a ***Sharon***, ***Rodil***, ***Noé***, ***Gerardo*** y ***Melvin*** por el recibimiento ameno y sugerencias dadas al lo largo de este proceso formativo.

Termino agradeciendo al personal administrativo, docente y estudiantado de la Secundaria Tomás Alva Edison de la Ciudad de México que abrieron sus puertas para que esta investigación se lograra, en especial a la ***Subdirectora Jail.***

Índice

Resumen

Los resultados principales que se muestran en este reporte de investigación son:

- El saber matemático, respecto al uso de la gráfica, que le es propio al estudiantado de tercero de secundaria para la gestión del agua lluvia.
- Una síntesis del conocimiento matemático correspondiente al uso de la gráfica de la Comunidad de Conocimiento de Estudiantes de Tercero de Secundaria.
- Un diálogo entre la pluralidad epistemológica que permite el cotidiano del que aprende y la epistemología de la matemática escolar.

Para la obtención de esos resultados se siguió la línea de trabajo propuesta por el programa socioepistemológico Sujeto Olvidado y Transversalidad de Saberes, por lo que se construyó un *Diseño de Situación Escolar de Socialización* cuya base epistemológica fueron tres categorías de modelación*: Predicción, Comportamiento tendencial y Optimización*. Tales categorías de modelación son parte del estudio de los usos del conocimiento matemático que dicho programa ha identificado en distintas comunidades de conocimiento; tanto en escenarios laborales y escolares del nivel superior al enfrentar situaciones específicas.

Metodológicamente la aplicación del diseño tiene un corte cualitativo que se distingue al tener aspectos etnográficos. Se buscó que los resultados emerjan del estudiantado de tercero de secundaria, por lo que se hace una inmersión en el seno de esta comunidad por medio de observaciones de clases, aplicación del diseño y entrevistas a sus miembros. Además, los resultados también están sujetos a las condiciones que establece el estudio de caso, es decir, los usos de las gráficas y el diálogo entre las epistemologías que emergió en la comunidad de estudiantes de tercero de secundaria son propios de esa comunidad en particular.

A través de estos resultados se logra dar respuesta a la pregunta de investigación: ¿Cuáles son los usos y significados de las gráficas de los estudiantes de tercero de Educación Secundaria en la *Predicción, Comportamiento tendencial y Optimización?* Esta pregunta nace del hecho que la educación matemática y su campo de investigación, la Matemática Educativa, actualmente tienen un fuerte interés en acercar la matemática escolar a la realidad del que aprende, particularmente en este estudio, aquella relacionada con la gestión del agua lluvia para el cuidado del agua potable. Desde la teoría Socioepistemológica se afirma que para alcanzar dicha relación es necesario un cambio epistemológico de la matemática escolar, donde la ciencia y el conocimiento que vive en el cotidiano de la gente estén en un mismo plano horizontal. Tal postura se contrapone con la visión predominante en la educación matemática,

en general, de considerar al conocimiento científico matemático como el único con valor sociocultural de ser enseñado y tratar al cotidiano únicamente como un andamio para dar significados a tales objetos matemáticos.

Abstract

The main results presented in this research report are:

- Mathematical knowledge regarding the use of graphs, inherent to third-grade secondary students for rainwater management.
- A synthesis of mathematical knowledge related to the use of graphs within a Community of Knowledge of Third-grade Secondary Students.
- A dialogue between epistemological plurality, which is found in the everyday experiences of the learner, and the epistemology of school mathematics.

To obtain these results, the research followed the proposed line of work by the Socioepistemological program "Sujeto Olvidado y Transversalidad de Saberes." This involved constructing a *Design of a Socialisation School Situation* with an epistemological foundation based on three modelling categories: *Prediction, Trend behavior,* and *Optimization.* These modelling categories are part of the study of the uses of mathematical knowledge identified by the program in various communities of knowledge in both workplace and school scenarios at the higher education level when facing specific situations.

Methodologically, the application of the design has a qualitative approach with ethnographic aspects. It was sought that the results emerge from the third-grade secondary students; that is why there is an immersion within this community through class observations, application of the design, and interviews with its members. Additionally, the results are subject to the conditions set by the case study, meaning that the uses of graphs and the dialogue between epistemologies that emerged in the community of third-grade secondary students are specific to that community.

Through these results, the research addresses the research question: What are the uses and meanings of the graphs of third-year Secondary Education students in *Prediction*, *Trend Behavior* and *Optimization*? This question arises from the strong interest in current mathematical education and its research field, Mathematics Education, to bring school mathematics closer to the learner's reality, particularly in this study, that one concerning rainwater management for the conservation of drinking water. From the Socioepistemological Theory, it is asserted that achieving this relationship requires an epistemological shift in school mathematics, where science and knowledge that exist in people's everyday lives are on the same horizontal plane. This stance contrasts with the predominant view, both in mathematics education and Mathematics Education, which sees mathematical scientific knowledge as the

only one with sociocultural value to be taught, considering everyday life solely as scaffolding to give meaning to such mathematical objects.

Introducción

Esta investigación es producto de uno de los planteamientos de la Teoría Socioepistemológica que afirma que para lograr una relación recíproca entre la *matemática escolar* y la *realidad* del estudiantado, la epistemología de la matemática escolar debe de *cambiar*. Este planteamiento se concibe desde la cosmovisión del programa socioepistemológico Sujeto Olvidado y Transversalidad de Saberes (SOLTSA).

La razón por la cual se propone un *cambio epistemológico* de la matemática escolar es porque su epistemología actual privilegia a la ciencia y a un conjunto de competencias científicas que el estudiantado debe desarrollar para cubrir con las demandas del mercado laboral de una nación (Irwin, 2022). El énfasis de la ciencia en la matemática escolar ha desarrollado un carácter hegemónico en el conocimiento matemático donde solo importa un tipo de argumentación, significados y procedimientos. Este tipo de argumentación es la que lleva a la adquisición y manejo de los objetos matemáticos – promoviendo la justificación *razonada* para la universalización del conocimiento matemático – dejando de lado u opacando a aquellas argumentaciones que emergen del cotidiano de los estudiantes. Al considerar el saber científico como único con valor social para ser enseñado, se opacan los saberes técnico y popular donde se construye conocimiento matemático de manera *funcional* (Cordero et al. 2019).

Entonces, el *cambio epistemológico* que se propone desde el seno del programa es una *epistemología de usos*, es decir, una matemática funcional conformada por "los usos del conocimiento matemático y sus resignificaciones en las comunidades de conocimiento matemático de la gente: en la escuela, en el trabajo o la profesión y en sus realidades" (Cordero, 2016, p.25). La afirmación anterior no significa que ahora se deben de privilegiar el conocimiento de las personas sobre la ciencia, sino que estos deben estar en un mismo plano horizontal de importancia. Es por ello que dentro del programa se habla sobre el proceso de socialización del conocimiento matemático que caracteriza el conocimiento construyéndose en comunidad en donde emergerá un diálogo entre la epistemología dominante de la matemática escolar con las epistemologías del conocimiento matemático que la gente forma en su cotidiano.

En aras de mostrar evidencia empírica del diálogo entre la epistemología dominante y la pluralidad epistemológica del cotidiano en este estudio se construye un *Diseño de Situación Escolar de Socialización* (DSES) que se propone rescatar los significados, procedimientos e instrumentos que construyen los estudiantes de tercero de secundaria ante una situación de captación de agua-lluvia y se escribe este reporte con los siguientes capítulos:

Capítulo I. Se expone la problemática general que este estudio pretende abordar. Además, se hace una revisión bibliográfica de investigaciones en el campo de la matemática educativa que buscan relacionar la matemática con la realidad del que aprende. Sin embargo, el marco de referencia para hacer ese acercamiento sigue siendo el científico. Por lo que se expone cómo la centración en los objetos matemáticos (cientificidad) ha opacado otras epistemologías que viven en las realidades del que aprende, en particular en la protección de los recursos naturales del planeta.

Capítulo II. Se muestra los constructos teóricos que sostienen a este estudio. Principalmente se consideran aquellos constructos que explican los resultados de esta investigación. Entre estos constructos esta la *construcción social del conocimiento matemático* y su insoslayable relación con los *usos del conocimiento* y sus *resignificaciones*. También se explican los dos ejes principales que constituyen la construcción del DSES, base epistemológica del diseño y la perspectiva de tratamiento. El primer eje trata de la categoría de modelación que viene a ser el resultado del estudio de los usos del conocimiento matemático en distintas comunidades. El segundo eje trata sobre los multifactores con los que se buscan mejorar la educación matemática, para este estudio se escogió el proceso de socialización del conocimiento que permite develar la pluralidad epistemológica del conocimiento matemático en el cotidiano.

Capítulo III. La ruta de investigación. En este apartado se expone el marco metodológico del estudio como cada una de las fases en que dicho marco se expresa. Entre esas fases se encuentran, la selección de los estudiantes de tercero de secundaria, la construcción del DSES y su aplicación. Además, se explican aquellas técnicas de recolección de datos y se hace una pequeña aproximación de cómo se analizaron dichos datos en el estudio a través del modelo de *Comunidad de Conocimiento*.

Capítulo IV. Análisis y resultados. Son tres los principales resultados que se muestra en este reporte de investigación. El primero de ellos responde al conocimiento matemático, respecto al uso de la gráfica, que le es propio al estudiantado de tercero de secundaria. El segundo es la síntesis del conocimiento matemático correspondiente al uso de la gráfica de la Comunidad de Conocimiento de Estudiantes de Tercero de Secundaria. Y el tercer resultado es el diálogo que se formó entre la pluralidad epistemológica y la epistemología de la matemática escolar.

Capítulo V. Conclusiones del estudio. Finalmente se muestra la respuesta a la pregunta de investigación. También se aprovecha en este capítulo para describir las limitaciones que tuvo este estudio y las posibles investigaciones que se pueden generar a partir del mismo.

Capítulo I

Problemática: Opacidad de la Matemática de Secundaria en la gestión de los Recursos Naturales

1.1. Un interés casi universal

Hoy en día en el ámbito de la educación matemática hay un fuerte interés de que los estudiantes sean capaces de usar las matemáticas tanto en contextos escolares como en contextos que estén fuera de la escuela. English y Kirshner (2016) afirman que la meta de capacitar a los estudiantes para usar el conocimiento matemático aprendido en la escuela en contextos variados y más allá de su vida escolar se ha convertido en una meta casi universal. Según los autores, esto es porque dicha meta está presente en los currículos matemáticos de muchos países y documentos de organizaciones mundiales.

Smith y Morgan (2016) llevan a cabo un estudio donde examinan cómo la relación entre las matemáticas y "el mundo real" es una característica fundamental en los currículos de once jurisdicciones. Mencionan que a pesar de que hay un acuerdo de que los estudiantes usen las matemáticas en contextos reales, existen diferentes enfoques que cada jurisdicción da a esta meta. Señalan tres enfoques principales:

Los estudiantes usan la matemática como una herramienta en su vida diaria: observaron que algunos currículos hacen un fuerte hincapié en que los estudiantes deben ser capaces de usar la matemática para resolver problemas extraídos de su vida personal, posible trabajo futuro, contextos tecnológicos y científicos.

El mundo real como un vehículo para el aprendizaje de la matemática: otros tratan al mundo real como el origen de los conceptos matemáticos. La aplicación de las matemáticas a problemas del mundo real es presentada como un vehículo para desarrollar el pensamiento matemático y conceptos. También, el mundo real es tratado como un medio para inspirar y fomentar el aprendizaje independiente en lugar de ser un fin en sí mismo.

El mundo real como un motivador para el aprendizaje de las matemáticas: los investigadores afirman que la aplicación de la matemática en la vida real no es presentada como una meta de aprendizaje ni como una parte necesaria de éste. Usan los contextos porque de lo contrario la matemática usada podría ser completamente simbólica. Por lo que el uso de la matemática en situaciones de la vida real es para estimular los intereses de los estudiantes y desarrollar actitudes positivas hacia las matemáticas en ellos. Consideran que el disfrute hacia la matemática es porque los estudiantes aprecian que esta es parte de la cultura humana y la relacionan a su vida diaria y el desarrollo social y cultural. Otra forma de motivación es que consideran a la matemática como necesaria para competir económicamente en un mundo tecnológico. Es decir, para formar parte de ese mundo y tener éxito deberán aprender matemáticas.

Relacionar la matemática escolar y la realidad del que aprende es un trabajo complejo. Por lo que no es casualidad la existencia de diferentes líneas de investigación en el campo de la Matemática Educativa que se han dado la tarea de estudiar dicha relación. A continuación, se mencionan algunas de estas líneas de investigación:

La Matemática Realista usa contextos no matemáticos como medio para que los conceptos matemáticos cobren sentido. Además, ven los contextos como un medio de motivación para los estudiantes ya que reducen las abstracciones, los relacionan con sus intereses, y muestran que la matemática es útil en el mundo que está afuera de la escuela y tiene relevancia en su actuales y futuras vidas (Smith y Morgan, 2016). Desde esta perspectiva el proceso de aprendizaje de las matemáticas es entendido como una reinvención dinámica del conocimiento matemático por parte del estudiante cuando este matematiza. El proceso inicia cuando el estudiante experimenta realidades en diferentes contextos. Esto permite un fundamento para adquirir los significados teóricos de los conceptos y procesos usados (Blomhøj, 2019).

Para English y Gainsburg (2015) algunas de las razones por las que el enfoque de Resolución de Problemas usa contextos reales es porque ofrecen un punto de vista más realista de la solución de problemas del mundo real, que suele ser interdisciplinaria y dependiente de contextos específicos. Este punto de vista podría preparar mejor a los estudiantes para la solución de tales problemas. Puede revelar la naturaleza de varios lugares de trabajo, por lo que se construiría un sentido de conciencia sobre la carrera y un entendimiento general sobre lo que se requerirá en su futuro trabajo. La solución de problemas reales puede construir una disposición positiva hacia el uso de la matemática, convenciendo a los estudiantes que las herramientas matemáticas son útiles, con esto también se espera desarrollar una eficacia propia en el uso de tales herramientas.

La Teoría Antropológica de lo Didáctico afirma que el conocimiento matemático es desarrollado con el objetivo de contribuir a contestar una pregunta específica. Sugieren que la enseñanza de la matemática parta de preguntas que generen el conocimiento matemático en el currículo escolar. Las preguntas deben atender a situaciones extra matemáticas y contextos (Chevallard y Bosch, 2020; Blomhøj, 2019).

En la Perspectiva de Modelación y Modelos, Blomhøj (2019) asegura que la investigación a menudo se enfoca en qué significa entender conceptos y métodos matemáticos en diferentes situaciones y contextos y en cómo diseñar actividades de modelación donde los estudiantes puedan activar aspectos señalados de los conceptos en sus actividades de modelación. El punto de partida es tomado de contextos de la vida real, de aplicaciones auténticas de otras disciplinas o profesiones o contextos significativos. El énfasis está en las construcciones de significados en el proceso de modelación y a través de reflexiones relacionadas al apoyo del aprendizaje de las matemáticas de los estudiantes. También hay un interés en que los estudiantes desarrollen competencias de resolución de problemas y la modelación matemática.

Los párrafos anteriores dan una idea de cómo la Matemática Educativa y la educación matemática de diferentes países se han ocupado de que los estudiantes aprendan una matemática con significado, que les permita ponerla en uso tanto en las aulas de clases como fuera de estas (en el presente como en su futuro trabajo) valiéndose del planteamiento de problemas que encierran contextos reales, es decir, tratando de establecer una relación entre la matemática y la realidad del que aprende.

Sin embargo, autores como Cordero et al. (2022) han identificado una problemática general que impide alcanzar la meta de relacionar la matemática con la realidad del que aprende. A dicha problemática, estos autores la han denominado *discurso Matemático Escolar* (dME). El dME privilegia la adquisición y el dominio de los objetos matemáticos (cientificidad) dejando de lado el conocimiento matemático funcional que las personas usan en situaciones específicas de sus realidades actuales. Es por esta razón que los autores afirman que, si la matemática escolar continúa priorizando la adquisición de los objectos matemáticos sobre el conocimiento funcional, la separación entre la matemática escolar y la realidad del estudiante permanecerá (Cordero et al., 2015).

1.2. El discurso matemático escolar: centración en los objetos y la cientificidad

La centración en los objetos matemáticos y el interés de que los estudiantes desarrollen competencias parecidas a las de un “matemático” en el sistema educativo – partiendo desde un escenario, como al nivel de secundaria, donde la matemática no es el principal tema de estudio

– han generado un dME “que ha olvidado los contextos, comunidades y las situaciones específicas donde emerge el [los usos del] conocimiento matemático, lo que se ha traducido en considerar una epistemología dominante del conocimiento que ha impuesto argumentaciones, significados y procedimiento” (p. 62) en la matemática escolar (Cordero et al. 2015).

La epistemología dominante no permite ver las argumentaciones, significados y procedimientos que emergen con la puesta en uso de la matemática en realidades del que aprende. A este hecho se le conoce como el fenómeno de *opacidad*, es decir, la omisión de los usos del conocimiento matemático en la realidad del que aprende. Dicha omisión a la vez provoca la invisibilidad de la pluralidad epistemológica del conocimiento matemático que se rescata de la realidad del estudiante, es decir, aquellas argumentaciones, significados y procesos que no forman parte de la epistemología dominante, pero que emergen por la puesta en uso del conocimiento en situaciones específicas enmarcadas en una realidad (Cordero et al., 2015).

Entonces, ¿cuáles podrían ser aquellos usos del conocimiento matemático que permanecen opacados al no considerarse las realidades del que aprende? Para dar una posible respuesta a esta pregunta conviene contextualizar quién es el que “aprende” y su “realidad” en este proyecto de investigación, es decir, quién es la población de este estudio y a qué se le estará llamando realidad.

1.2.1. La Educación Básica en México

Debido a que la investigación se hizo en el territorio mexicano interesa hacer un acercamiento, grosso modo, de cómo la matemática escolar, la realidad del que aprende, y el dME aparecen en su sistema educativo. Para ello se escogió al estudiantado de tercero de secundaria correspondiente a la Educación Básica (estudiantes de 14 a 15 años). El interés a hacia esta población es porque:

- La educación básica es el nivel académico más alto al que llegan la mayoría de los mexicanos – el resultado corresponde a personas de 15 años o más (INEGI, 2022). Además, el Plan Nacional para la Evaluación de los Aprendizajes (PLANEA) muestra que solo el 5% de los estudiantes de tercero de secundaria –los estudiantes que fueron evaluados en dicho reporte – son capaces de operar expresiones algebraicas, modelar gráficamente fenómenos que involucran funciones lineales y cuadráticas; resolver problemas que implican transformaciones de figuras, propiedades de bisectrices y mediatrices, razones trigonométricas; abstraer información de tablas y gráficas, entre otros contenidos que corresponde a los planes y programas de estudio 2011.

- La Secretaría de Educación Pública (SEP, 2017), en Aprendizajes Claves para un Educación Integral, menciona que entre los propósitos generales de la educación básica de matemática en México es concebir a esta área de conocimiento como una construcción social en donde se formulan argumentos y procedimientos matemáticos; donde los estudiantes desarrollan habilidades que les permitan enfrentar situaciones y le ayuden a la toma de decisiones en su vida diaria, usando a la matemática como una herramienta.

Desde este pequeño panorama, se reconoce la importancia de investigar los usos del conocimiento matemático opacados en este nivel académico debido a que es la base para los estudios posteriores (media superior y superior). Un gran grupo de jóvenes dejan sus estudios en este nivel y posiblemente ocuparán puestos de trabajos donde necesitarán a la matemática como una herramienta y dado los resultados de PLANEA difícilmente se puede decir que, al término de ese nivel académico, los jóvenes estén satisfechos de la matemática que aprendieron en sus institutos.

Si bien es cierto que los resultados de las pruebas estandarizadas pueden ser cuestionados y difícilmente se puede afirmar que sus ítems tienen la intención de que el estudiantado use la matemática como herramienta, a partir de estos se puede vislumbrar que el interés sigue estando en el dominio de objetos y procedimiento matemáticos que han sido impuestos socialmente y que buscan encajar con competencias científicas. Por lo que cabe preguntarse ¿no sería este enfoque el causante de tan bajos índices en el rendimiento del estudiantado en matemáticas? Según Aguilar y Castaneda (2021) la currícula actual de la Educación Básica tiene como meta final el desarrollo de competencias en los estudiantes y por tal razón los estudiantes son sometidos a pruebas estandarizadas, como PISA o PLANEA, que buscan medir las competencias del estudiantado en áreas como lectura, ciencias y matemáticas.

La SEP (2022) apunta que tal enfoque ha sido determinado por organismos internacionales como la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE) quien ha priorizado un conjunto de conocimientos que el estudiantado debe aprender, aquellos relacionados con: compresión lectora, pensamiento lógico-matemático y habilidades científicas (INEE, 2019).

Además, la SEP (2022) asegura que haber seguido ese enfoque ha traído ciertas consecuencias tales como:

- Que se ignore la diversidad como elemento instituyente del currículo nacional.
- No se dé prioridad a aquellos contenidos que sean verdaderamente significativos para el estudiantado.
- Se mantenga una estructura curricular que favorece la fragmentación del conocimiento.

Lo anterior ha llevado a las autoridades educativas mexicanas a proponer una nueva reforma en la educación llamada la Nueva Escuela Mexicana. Con esta reforma pretenden subsanar los resultados de un enfoque que se ha preocupado más por buscar "la satisfacción de la demanda de capacidades vinculada a la formación de capital humano" (SEP, 2022, p. 59).

Entre los elementos fundamentales de la nueva reforma se destacan:

La comunidad como núcleo de los procesos educativos. Afirman que los conocimientos y saberes que construye el estudiantado solo puede ser integrado a su cotidiano en el marco de su comunidad. Donde el conocimiento no solo tendrá sentido en el aula, sino también en otros espacios de su vida escolar y comunitaria. Esto permitirá que problematicen su realidad y construir nuevos significados.

El aprendizaje como experiencia formativa. Los contenidos de las diferentes disciplinas estarán articulados con ejes que vincularán el saber y el conocimiento en situaciones de la realidad. Tales situaciones involucrarán conocimientos comunitarios y escolares.

Los contenidos estarán organizados por campos formativos. Aseguran que estos no son la suma de contenidos que lo conforman, sino la pluralidad de saberes y conocimientos con los que se acercará a la realidad a estudiar. A manera de ejemplo y en este caso porque nos atañe, está el campo formativo llamado Saberes y Pensamiento Científico. Se menciona que su objetivo es la compresión y explicación de los fenómenos y procesos naturales en contextos socioculturales desde una perspectiva epistemológica pluralista. Se pretende vincular a las ciencias naturales, la matemática, la tecnología y los conocimientos de diferentes pueblos y culturas. La SEP (2022) afirma que esa forma de trabajar los contenidos desplaza a la fragmentación del conocimiento, abriendo paso a un modelo con una perspectiva interdisciplinaria y en donde diferentes saberes de los miembros de la comunidad se integren.

Aunque las reformas educativas atañen a la enseñanza y aprendizaje del conocimiento en general, las descripciones anteriores permiten hacerse una idea de cómo el conocimiento matemático es presentado y cuál es la nueva manera que las autoridades educativas buscan que sea estudiado en el nivel básico. En ambas reformas se logra apreciar el interés de vincular las matemáticas con la realidad, es decir, que el estudiantado la ponga en uso en diferentes contextos. Lo que vendría a cambiar son las perspectivas de ambas reformas.

En la reforma actual el interés está en el desarrollo de competencias científicas, para satisfacer las demandas del mercado laboral mientras que desde la Nueva Escuela Mexicana es la comunidad del que aprende el centro del proceso de aprendizaje donde no solo será considerado el conocimiento científico, sino el conocimiento proveniente de otros saberes (pluralidad epistemológica) que viven en dicha comunidad. La descripción hecha por la SEP del currículo actual permite identificar ciertas características del dME, como la hegemonía de ciertos conocimientos considerados como importantes por ciertas organizaciones y el carácter utilitario que dicta la organización de la matemática escolar de manera que prioriza la utilidad del conocimiento en lugar de su funcionalidad.

1.2.2. Objetivos de desarrollo sostenible: una parte de la realidad del que aprende.

Para terminar de describir a nuestra población de estudio, es importante destacar que el gobierno de México formó parte de la reunión, celebrada del 25 al 27 de septiembre de 2015, en la Sede de las Naciones Unidas, donde se acordaron los Objetivos de Desarrollo Sostenible (ODS). Los participantes en esta reunión afirman que tales objetivos buscan transformar al mundo atendiendo tres dimensiones: económica, social y ambiental. Referente a la dimensión social destacamos que se pretende que todos los seres humanos estén libres de la pobreza y el hambre y que estos puedan alcanzar su potencial con dignidad e igualdad. En la dimensión ambiental se pretende proteger al planeta contra la degradación, mediante el consumo y producción sostenible, la gestión de recursos naturales y medidas para hacer frente al cambio climático, teniendo presente las necesidades de las generaciones actuales y futuras (ONU, 2017). A su vez la UNESCO (2017) afirma que la educación es un medio para alcanzar todos los ODS por ser parte del desarrollo y facilitador de este. Esta organización define a la educación como estrategia esencial para el logro de tales objetivos, por lo que exhorta a los sistemas educativos a que los objetivos y contenidos de aprendizaje respondan a principios de sostenibilidad.

Bakker et al. (2021) desarrollan una encuesta internacional en la cual le preguntaban a investigadores de Matemática Educativa sobre qué temas de investigación en este campo se debería de enfocar en la década siguiente (2020-2030). Entre los futuros temas se encuentran aquellos relacionadas a el desarrollo de los estudiantes como seres humanos que aprendan a ver a la matemática en el mundo y a desarrollar una relación con el mundo. Hablan sobre empoderar a los estudiantes para combatir el cambio climático, la construcción de un futuro sostenible, divisan una urgencia de orientar a la educación matemática (y su campo de investigación) hacia el rescate de nuestro planeta.

Como se ha expuesto a lo largo de los párrafos anteriores, la población objeto de estudio en este proyecto de investigación fueron estudiantes de educación básica, específicamente de tercer año de secundaria. Además, dichos párrafos sugieren que los estudiantes de secundaria se encuentran inmersos en un mundo complejo, donde desafíos como el cambio climático y la búsqueda de un entorno sostenible deberían desempeñar un papel crucial en la configuración de sus experiencias educativas y su comprensión del entorno que los rodea. Se espera que asuman un papel activo en la confrontación de estos desafíos. Desde la perspectiva de la Nueva Escuela Mexicana, las experiencias educativas no solo deben centrarse en el desarrollo de competencias científicas, sino que también deben considerar los conocimientos provenientes de otros saberes (pluralidad epistemológica) presentes en la comunidad de dichos estudiantes.

1.3. Hacia la problemática con una postura teórica: matemática y la protección del planeta

Lo anterior indujo a hacer una revisión bibliográfica para conocer cómo la relación entre matemática y realidad; y el papel que juega la protección del planeta en esas realidades, están siendo atendidas en el campo de investigación de la Matemática Educativa. Para ello se revisaron las revistas científicas más importantes según los autores Williams y Leatham (2017) y Andrade-Molina et al. (2020). Las palabras claves (y sus traducciones al inglés) para la búsqueda fueron: sostenibilidad, realidad, objetivos de desarrollo sostenible, matemática y realidad, secundaria.

En los resultados de esta búsqueda se logró visualizar lo que resalta Diego-Mantecón et al. (2021) al mencionar que hay dos perspectivas al analizar la relación matemática-realidad: **una utilitaria y otra situacional**. La principal preocupación desde la perspectiva utilitaria es si se cuentan con las habilidades necesarias para lidiar con situaciones de la vida real o profesional. Según Diego-Mantecón esto se corresponde con la idea de la educación como una transferencia de conocimiento desde problemas escolares a problemas fuera de la escuela. Y que programas como PISA evalúan dicha transferencia de conocimiento.

La perspectiva situacional aparece como una reacción opuesta a la transferencia de conocimiento y responde a la cognición situada (Diego-Mantecón et al., 2021). La perspectiva situacional se basa en la idea de que el conocimiento, razonamiento y aprendizaje dependen de la situación donde estos emergen. Esto implica que el conocimiento de los individuos es específico a cada contexto o práctica. Postulan que la matemática escolar es distinta de la matemática de la vida real, establecer una relación requiere considerar la lógica contextual, diferente de aquella en la escuela, la cual hace adaptaciones forzadas en el conocimiento matemático para operar. Por lo que se hace necesario analizar contextos de la vida real y cómo la matemática es usada para resolver las tareas de tales contextos.

Los estudios con una perspectiva utilitaria se caracterizan por enmarcar las habilidades que se desean en la formación STEM (por las siglas en inglés de ciencia, tecnología, ingeniería y matemáticas). Estos estudios se enfocan en la elaboración de problemas de modelación, las dificultades que los estudiantes se enfrentan al resolver tareas de modelación y la formación docente en el desarrollo, planteamiento y ejecución de actividades de modelación. Entre los estudios encontrados se muestran:

Kohen y Orenstien (2021) quienes destacan la creciente demanda de profesiones de las áreas de STEM y la necesidad del sistema educativo de preparar a los estudiantes para esos campos. Enfatizan la importancia de usar problemas auténticos que demuestren la aplicabilidad de la matemática en varios contextos. Los objetivos de su investigación son identificar problemas de la vida real relacionados con la tecnología, la simplificación de esos problemas, según la instrucción de ingenieros y la compatibilidad de esos problemas con la matemática escolar del nivel medio superior. Recalcan que su estudio deja el aporte de 169 problemas reales y auténticos que pueden ser resueltos a través de la modelación matemática el nivel medio superior.

Baioa y Carreira (2021) destacan el interés de que el currículo escolar actual responda a enfoques interdisciplinares y se conforme de problemas del “mundo real”; que estén en línea con el enfoque STEM. Su estudio se centra en cómo el pensamiento matemático se activa y nutre en un problema de modelación vinculado al diseño de un sistema o parte de él. Para ello, proponen a estudiantes de tercero de secundaria construir un sistema de reconocimiento biométrico de la mano. Los resultados revelan un patrón global en el razonamiento de los estudiantes mientras diseñan el sistema, y destacan que a medida los estudiantes diseñan los sistemas de reconocimiento, recorren el ciclo ideal de modelación matemática propuesta por Blum y colaboradores. Lo anterior los hace afirmar que hay una relación sólida entre el modelo y el prototipo y que este tipo de tareas vendrán a favorecer las habilidades de modelación de los estudiantes.

Stillman y Brown (2021) estudian cómo los estudiantes trabajan en tareas de modelación basadas en datos. Observan que muchos estudiantes se enfocan en modelar un conjunto de datos específico en lugar de capturar el fenómeno completo al cual pertenecen los datos. Los resultados muestran que la mayoría de los estudiantes modelaron una instancia del fenómeno, pero no siempre de manera consciente. También mencionan que las actividades cognitivas en el proceso de modelación no fueron las ideales.

Sevinc y Lesh (2018) presentan un estudio de caso que consiste en profesores en formación que tomaron un curso de modelación basados en la Perspectiva de Modelos y Modelación. Los autores ven necesario que los maestros de matemáticas desarrollen la habilidad de identificar, escribir y evaluar problemas matemáticos de la vida real. Resaltan que las consideraciones que los maestros tomaban para hacer sus problemas son: entender la situación problema, pensar matemáticamente en el contexto real, evaluar las soluciones, considerar maneras de aplicar la soluciones a otros contextos similares y crear un prototipo de conocimiento ganado a través la resolución de problemas. Mencionan que tales consideraciones empatan con los principios del MEAs (Model-Eliciting Activities), respectivamente: significados personales o desde la realidad, construcción de modelos, documentación del constructo, autoevaluación, compatibilidad y reutilización del constructo, prototipo efectivo.

Dede (2019) examina las argumentaciones de profesores de matemáticas en formación durante una actividad de modelación. Destaca que los argumentos construidos en el ciclo de modelación presentan características de las transiciones que ocurren al modelar. Por ejemplo, en la transición de simplificación, los participantes hacen suposiciones basadas en experiencias previas o el contexto del problema para construir un modelo más simple. Sin embargo, estas suposiciones pueden llevar a ignorar situaciones donde el problema no se puede resolver, lo que emerge como refutaciones en el proceso de argumentación. Según la autora las refutaciones emergen a razón de que los participantes no pudieron justificar cómo una variable afectaba el resultado encontrado, muy probable por la falta de conocimiento matemático o físico, o a las normas sociales sobre lo que cuenta como una solución matemáticamente efectiva.

Slavit et al. (2021) estudian las maneras de pensar de los estudiantes en “contextos STEM” y que el enfoque estará en las afirmaciones y razonamiento de los estudiantes. Para ello utilizan una actividad de diseño de una lonchera. Comentan que la manera de pensar de los estudiantes involucra prácticas disciplinarias que cambian a través de contextos de STEM. El razonamiento de aquellos estudiantes expuestos a problemas del mundo real y que no se apoyan en afirmaciones probadas con un razonamiento disciplinario formal, pueden poseer tal fluidez (el cambio de prácticas disciplinarias).

Ponen el ejemplo de las afirmaciones de los estudiantes de tercer grado relacionadas al diseño inicial de la lonchera, sus afirmaciones cruzaron los límites matemáticos, científicos y de ingeniería, pero fue hecho usando lenguaje y significados informales. Sin embargo, cuando el contenido disciplinario y las prácticas se hicieron más explícitas y las afirmaciones y razonamientos se hicieron más centrados a un contenido de área específica, las diferentes herramientas, prácticas, representaciones y epistemologías de cada disciplina STEM se convirtieron en barreras para el pensamiento interdisciplinar. Mencionan que su actividad de aprendizaje muestra que las maneras de pensar de los estudiantes son pluralistas.

Bostic et al. (2020) se proponen determinar cuáles son aquellas características importantes que debe de contar un diseño que desarrolla Actividades de Obtención de Modelos (MEAs por sus siglas en inglés) centrado en la ciencia de la vida agrícola y que implican el desarrollo de tales actividades. Según los autores el resultado principal de su estudio es un proceso para diseñar este tipo de tareas. El proceso que resultó de la investigación cuenta con seis etapas: determinar el modelo que los participantes podrían construir. Discusión sobre el contenido del problema; los participantes cuentan con la preparación para resolver el problema. Identificar el potencial del desarrollo del MEAs en los participantes. La consideración de herramientas pedagógicas para apoyar el desarrollo del diseño. La etapa final consiste en la difusión del uso potencial del diseño en el aula de clases. Afirman que los contenidos de agricultura son importantes y están conectados con la ciencia, matemática y tecnología (contenido STEM).

La búsqueda en estas revistas también arrojó estudios donde la actividad matemática está relacionada con la justicia social. Uno de ellos el de Mamolo (2018). Este estudio analiza la percepción de los profesores de secundaria en formación sobre el aprendizaje y la enseñanza de la matemática a través de la resolución de problemas contextualizados en la justicia social. De forma general, las tareas en las que los participantes fueron involucrados se basaban en el análisis de datos, modelación de tendencias, análisis de relaciones matemáticas, justificación del alcance e inferencias de sus análisis para luego aplicar los resultados a la crítica de los datos, el debate de problema sociales y el entendimiento de perspectivas sociales. Entre los resultados se destaca que el estudio hace una contribución específica al atender a los problemas sociales como un contexto particular de las tareas matemáticas. La contextualización de las matemáticas en los problemas sociales permitió ver el por qué es importante aprender matemáticas e invitó a los participantes a desafiar sobre lo que ellos creían saber acerca de la matemática escolar.

Jung y Magier (2021) investigan cómo ciertos profesores de educación básica en formación hacen conexiones entre las características de la modelación y justicia social cuando estos plantean problemas matemáticos. Es importante resaltar que la conexión que las autoras proponen está ligada con las características principales de los problemas de modelación y lo que se concibe como justicia social. Los resultados del estudio indican que los profesores ponen especial atención en conectar la vida de los estudiantes con el aprendizaje de las matemáticas al proponer problemas relevantes o que beneficien sus vidas. En contraste, fueron pocos los problemas que permitieron a los estudiantes usar su conocimiento matemático para resolver un problema y tomar acciones en la comunidad. Se muestra que algunos profesores al abordar las problemáticas referentes a la justicia social estos escogieron aquellas con poca amplitud por la preocupación del tiempo y espacio que se tiene en la mayoría de las escuelas para la clase de matemáticas.

No se encontraron estudios en secundaria que abrazaran una perspectiva situacional. Rosa y Orey (2015) mencionan que la perspectiva que coincide con el enfoque por competencia (perspectiva utilitaria) propuesto por la OECD donde se enfatiza la idea de equipar a los estudiantes con herramientas con el fin de desarrollar competencias y habilidades matemáticas académicas, es la que domina y es la que ha sido adoptada por muchos sistemas educativos internacionales.

A pesar de que los estudios anteriores toman como punto de partida contextos de la vida real, con el fin de que se construyan significados a través del proceso de modelación, el fin que estos trabajos persiguen es el desarrollo de habilidades científicas. Esto sigue respondiendo a un discurso Matemático Escolar que establece como conocimiento verdadero a aquel creado por la ciencia. Desde el marco Socioepistemológico, Cordero et al., (2019), señalan que en el escenario escolar “participan seres humanos que aprenden en la escuela y en la vida y que, a priori, no son científicos; sus actitudes para conocer son distintas y por ende derivan en justificaciones también distintas: una razonada y otra funcional.” (p. 19). Lo que nos lleva a preguntarnos qué pasa con el carácter funcional del conocimiento matemático que usan los estudiantes en las situaciones de modelación que estos enfrentan; tal aspecto no es considerado por los estudios mostrados hasta el momento.

Durante la búsqueda en las revistas, fueron escasos los trabajos donde la situación real estuviera relacionada con la sostenibilidad en especial sobre el cuidado de los recursos de nuestro planeta. Entre los encontrados está el de Barwell et al. (2022) donde mencionan que ha sido poco la atención dada a los problemas ambientales, ecológicos o sostenibles en el campo de la educación matemática y afirma que la educación matemática (la enseñanza, su aprendizaje, currículo, evaluación, y otros aspectos) necesita ser completamente repensada para que responda a la creciente crisis, no simplemente en términos de contenido sino también basado en nuevas epistemologías, ontologías, marcos éticos y pedagógico.

Li y Tsai (2022) hablan sobre la Educación para el Desarrollo Sostenible (ESD) como una respuesta para abordar los problemas de sostenibilidad ambiental. De acuerdo con los autores, este enfoque es interdisciplinar y desarrolla en el conocimiento de los estudiantes de maneras colaborativas con el objetivo de empoderarlos para que ellos logren ver la relación entre sus acciones y el mundo. Reconocen que incorporar la ESD en la educación matemática requiere de una reconfiguración de la filosofía tradicional de la matemática.

Las afirmaciones de Diego-Mantecón et al. (2021), Barwell et al. (2022) y Li y Tsai (2022) son compatibles con el enfoque de este estudio. Primero, que la matemática escolar es diferente a la matemática que se pone en uso en situaciones no escolares por lo que es necesario analizar contextos de la vida real y cómo la matemática es usada para resolver las tareas de tales escenarios. Segundo, la actual matemática escolar necesita ser transformada desde su base epistemológica y ontológica. Tercero, los Objetivos de Desarrollo Sostenible proveen de realidades que necesitan ser consideradas para cambiar la forma actual de enseñar y aprender matemáticas y ofrecen realidades que no son consideradas en la matemática escolar actual y escenarios donde los usos del conocimiento matemático se pueden desarrollar.

Entonces, dado el interés actual del sistema educativo básico de México de alejarse del enfoque por competencias y acercar a la comunidad del estudiantado en los procesos de aprendizaje y de su interés de rescatar la pluralidad epistemológica del conocimiento. Dada la falta de estudios de la relación matemática-realidad con perspectiva no solo situacional, sino que incluya una matemática funcional, no centrada en la ciencia sino en la sabiduría del estudiante (síntesis del conocimiento científico, técnico y popular). Dado que el desarrollo sostenible propone una vía para acercar ciertas realidades y las matemáticas y una transformación de su base epistemológica; este proyecto de investigación se propone la búsqueda de una matemática funcional en el estudiantado de educación básica, que valore los diferentes saberes desde un plano horizontal, donde sus usos estén orientados a la conservación del planeta y el desarrollo sostenible de la comunidad estudiantil. Se plantea entonces la siguiente pregunta de investigación:

¿Cuáles son los usos y significados de las gráficas de los estudiantes de tercero de Educación Secundaria en la *Predicción, Comportamiento tendencial* y *Optimización*?

Para responder a la pregunta se plantean los siguientes objetivos:

Objetivo general:

Indagar la emergencia de la categoría de modelación, relativa a la predicción, comportamiento tendencial y optimización, en estudiantes de tercero de secundaria cuando estos se enfrentan situaciones variación, transformación y selección que atienen a la captación de agua-lluvia.

Objetivo específico:

Caracterizar el uso del conocimiento matemático de las y los estudiantes de tercero de secundaria mediante un Diseño de Situación Escolar de Socialización.

Capítulo II

Marco teórico

2.1. Matemática funcional

Dada la problemática planteada en el primer capítulo, el *discurso Matemático Escolar* conserva la brecha que existe entre la matemática escolar y la realidad, al opacar las justificaciones funcionales del que aprende y al privilegiar al conocimiento científico (justificaciones razonadas) en dicha relación. Los autores de este proyecto de investigación reconocen que es de suma importancia tomar el enfoque de la Teoría Socioepistemológica, especialmente el propuesto por el programa socioepistemológico *Sujeto Olvidado y Transversalidad de Saberes*, debido a que este programa ha dedicado años de investigación al estudio de la matemática en relación con las realidades de aquellos que lo ponen en uso, es decir al estudio de una matemática que le es funcional a cierta comunidad.

La matemática funcional es una síntesis de la matemática que las personas construyen en la escuela, trabajo y en la vida; y se ve expresada en aquellos usos del conocimiento matemático que emergen en comunidades para atender a situaciones específicas. Lo que implica una relación recíproca entre la matemática y la realidad del que la usa. Desde esta perspectiva el conocimiento científico, técnico y popular están a un mismo nivel de importancia, es decir, en un plano horizontal (Cordero et al. 2015; Cordero et al. 2022b)

Entre los elementos teóricos-metodológicos que permitirán rescatar la matemática funcional de los estudiantes de tercero de secundaria, están: construcción social del conocimiento, *usos* del conocimiento matemático, *resignificación*, *categoría de modelación*, diseño de situación escolar de socialización (DSES), *comunidad de conocimiento*. A continuación, se muestra cómo estos elementos teóricos entran en juego en esta investigación.

2.2. Construcción social del conocimiento

La Teoría Socioepistemológica afirma que las personas construyen conocimiento matemático a medida que lo ponen **en uso** según las **situaciones** que estas enfrentan; dicho uso se **resignifica** a medida que se emplea en otras situaciones (Cantoral et al., 2014). Entonces, la construcción del conocimiento matemático implica tres aspectos fundamentales: una situación, el uso del conocimiento matemático en esa situación y la resignificación de ese uso. Un ejemplo de la construcción social del conocimiento matemático lo encontramos en el trabajo doctoral de Gómez (2015). En este trabajo se analiza el conocimiento matemático del cotidiano de una comunidad de ingenieros agrónomos. Para el análisis, una de las problemáticas que examina Gómez es el control de plagas. Dada esta problemática, Gómez identifica tres usos (U) de la gráfica del ingeniero agrónomo determinados por tres situaciones específicas (S), grosso modo, se muestra en la figura 1:

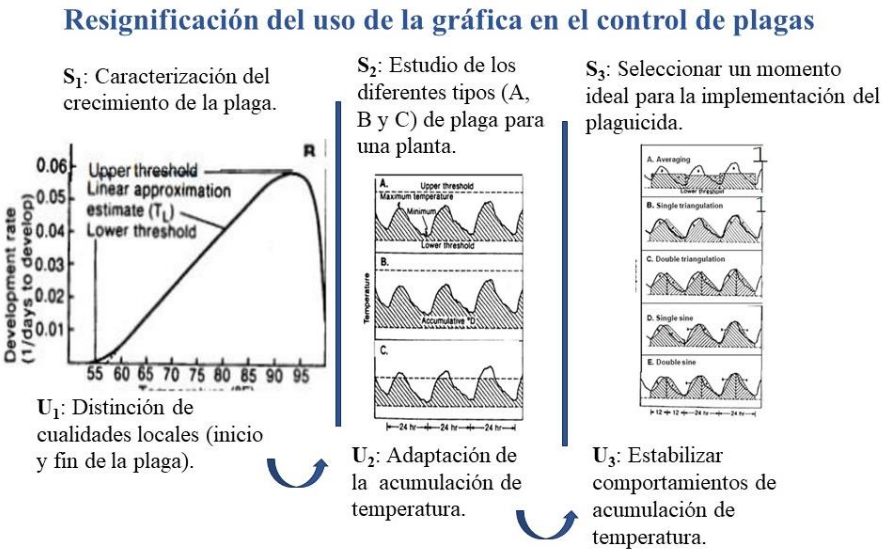


Figura 1. Resignificación del uso de las gráficas en una situación de control de plagas. Adaptado de Gómez (2015).

Ahora, para profundizar en la construcción social del conocimiento matemático es oportuno delimitar, bajo este enfoque teórico, aspectos importantes como situación específica, el *uso* del conocimiento matemático, *resignificación*, el *cotidiano* entre otros.

2.2.1. Situación específica

Como se menciona anteriormente, el trabajo de Gómez (2015) analiza la puesta de uso del conocimiento matemático en una comunidad de ingenieros. Esto se debe a que las comunidades en escenarios de índole científico, profesional o del cotidiano, ofrecen entornos que a su vez delimitan situaciones específicas que permiten el establecimiento de relaciones recíprocas de usos y significados entre la matemática, otras disciplinas y el cotidiano de la gente. Probablemente, en la mayoría de esas situaciones el objeto de estudio no es la matemática, sino que interesa su uso y la transversalidad de este para dar sentido a tales situaciones que enfrenta la comunidad (Cordero y Solís 2022).

2.2.2. Usos del conocimiento matemático.

El *uso* es caracterizado por dos elementos: el *funcionamiento* (Fu) y la *forma* (Fo). El funcionamiento es la **función orgánica de las situaciones específicas**, es decir, *qué es lo que* *hace* o *para qué lo hace* y se manifiesta en las “tareas” que componen la situación. La forma del uso es la manera cómo se presenta tal funcionamiento (clases de tareas), es decir, *como lo hace*. En resumen, el uso del conocimiento matemático expresa explicaciones de *qué y cómo hacen* las personas en sus procedimientos y argumentos dados en una situación. Las tareas pueden ser actividades, acciones, ejecuciones y alternancias de dominios propias del organismo de la situación (Cordero y Flores, 2007; Zaldivar-Rojas y Cordero, 2021).

Gómez en su análisis de los usos del conocimiento matemático del cotidiano de los ingenieros delimita los funcionamientos y formas de los usos de las gráficas, por ejemplo (ver figura 2):

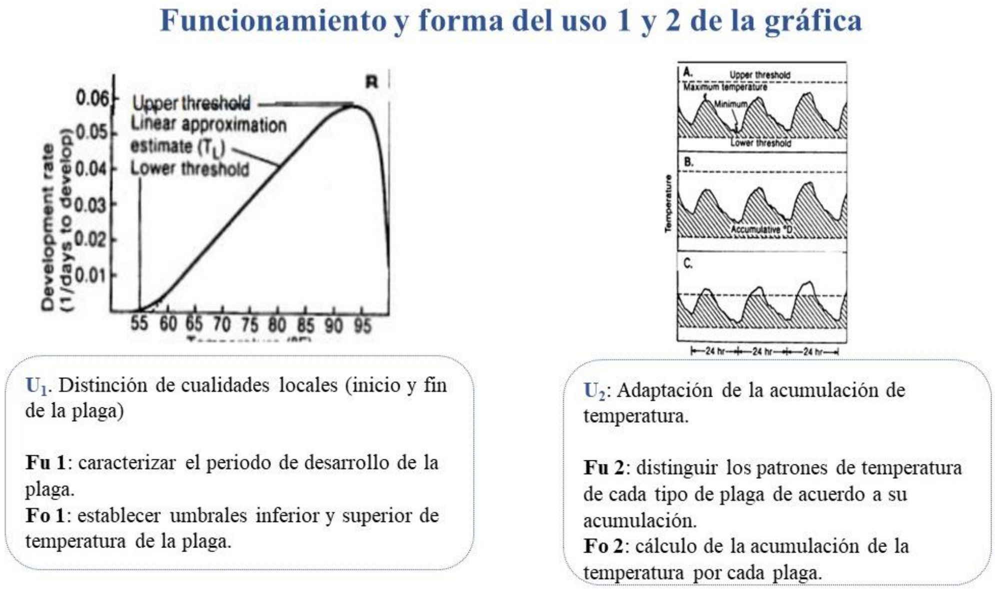


Figura 2. Funcionamiento y forma del uso 1 y 2 de la gráfica. Adaptado de Gómez (2015).

Como se puede observar en la Figura 2, el U_1 de la gráfica es la distinción de cualidades locales, es decir, cuando inicia y finaliza la plaga. El Fu_1 de este uso es caracterizar el periodo de desarrollo la plaga y la Fo_1 es el establecimiento de umbrales de temperatura máxima y mínima. Luego el U_2 de la gráfica es la adaptación de la acumulación de temperatura. Donde el Fu_2 es la distinción de los patrones de temperatura de cada tipo de plaga de acuerdo con su acumulación. La Fo_2 de este uso es el cálculo de la acumulación de la temperatura de cada plaga.

2.2.3. Resignificación

Los usos del conocimiento matemático se resignifican en cada S y cuando suceden transversalidades (T) entre escenarios o dominios de conocimiento (D). Es importante aclarar que en las situaciones y transversalidades suceden momentos (Mo) y entre ellos también los usos se resignifican. Los Mo son fases del proceso situacional (Cordero et al., 2022b). Entonces, la resignificación ocurre en la alternancia de tareas que están en las situaciones o momentos, dicha alternancia genera una nueva función orgánica en la situación que se debate con las formas del uso, generando así una nueva forma y por ende un nuevo uso. (Cordero y Flores, 2007).

En síntesis, resignificar es construir conocimiento matemático a medida que las personas hacen uso de él. Desde esta postura teórica resignificar no es darle otro significado a un concepto en otro contexto (Codero et al., 2015).

Siguiendo con el trabajo de Gómez (2015) es posible observar cómo esta resignificación ocurre (ver Figura 3).

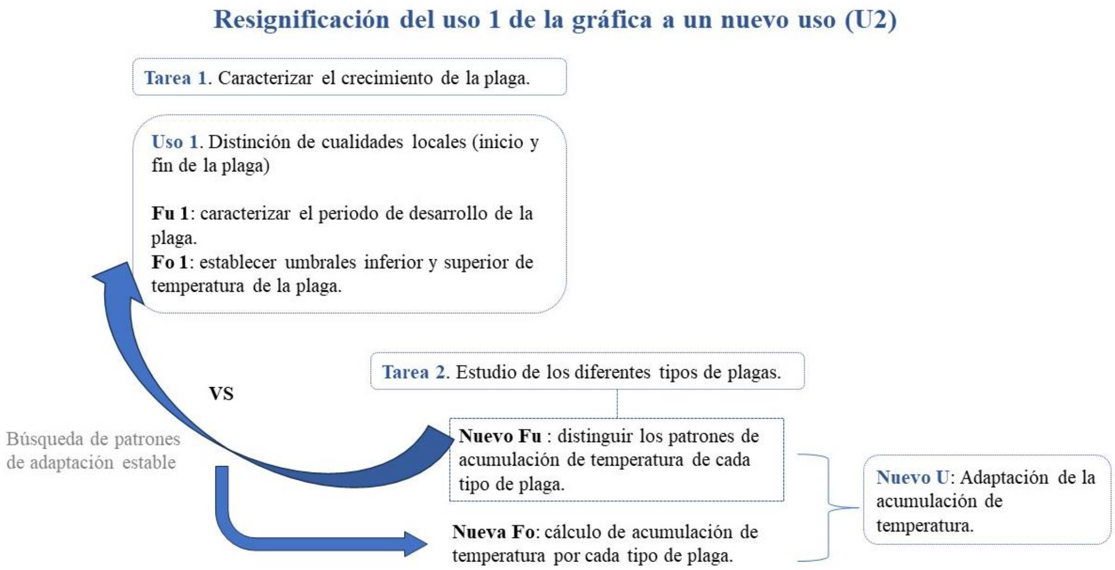


Figura 3. Resignificación del U_1 y U_2 de la gráfica. Adaptado de Gómez (2015).

Como se observó, la primera forma del uso de la gráfica es el establecimiento de umbrales máximos y mínimos de temperatura de la plaga. Esta forma se debate con el **nuevo Fu** (dado por la tarea 2) que es la distinción de patrones de temperatura de cada tipo de plaga de acuerdo con su acumulación. Esta búsqueda de patrones estables lleva a que los umbrales establecidos en la tarea 1 sean adaptados para el cálculo de acumulación de temperatura por cada tipo de plaga, generando así una **nueva Fo** y consigo un **nuevo uso** de la gráfica que es la adaptar la acumulación de la temperatura. Como se puede observar en la Figura 2, este nuevo uso permite conjeturar que la plaga C es la que menos temperatura acumula en comparación a la plaga A y B, debido a que el umbral superior de C es menor que el de A y B.

Es importante hacer notar que la transversalidad de saberes es cuando los usos del conocimiento matemático se resignifican entre escenarios o dominios de conocimiento. Por ejemplo, entre escuela y el trabajo o entre la matemática y la ingeniería.

2.2.4. Cotidiano

Cordero (2023) menciona que llevar "la realidad" al aula de clases de matemáticas es una consigna que aún no se logra ejecutar cabalmente y una de las razones que da es porque "la matemática escolar, en su tradición, no ha sido orientada para tal fin" (p.127).

Cordero propone restringir a eso que se le llama "realidad" para poder ajustarlo a la educación de la matemática. En tal restricción se consideran todos los niveles educativos, la diversidad de disciplinas, así como el trabajo y la vida de la gente. Entonces la interpretación de la realidad sería "aquello que es habitual de todos estos escenarios, donde se expresan los usos rutinarios; es decir, los cotidianos del especialista disciplinario, del trabajador y de la gente". Será a estos cotidianos a los que se refiera este proyecto al hablar de realidades.

Bajo esta concepción de realidad se puede decir que la matemática funcional

> es un conocimiento útil de las personas en situaciones de la vida mundana, del trabajo y la profesión[...] En ese sentido vamos a decir que el conocimiento funcional es el resultado de la transversalidad del uso del conocimiento de la gente en las diferentes situaciones" … (Cordero, 2023, p. 129)

2.3. Discurso matemático escolar

Los investigadores desde la Socioepistemología aseguran que la construcción social del conocimiento matemático difícilmente aparece en la enseñanza y aprendizaje de la matemática escolar; debido a que, en la escuela, el conocimiento matemático es reducido a aspectos instrumentales y formales de manera que la enseñanza de objetos y procedimientos matemáticos sea más fácil. Esta manera de presentar la matemática escolar ha generado un *discurso Matemático Escolar* (dME) el cual es la problemática general que afecta la enseñanza y aprendizaje de la matemática de la mayor parte de los niveles educativos, si no todos. Dicho discurso enfatiza la adquisición de procedimientos y objetos matemáticos dejando de lado el carácter funcional de dichos objetos (Cantoral et al., 2014; Cantoral et al., 2018).

Cordero et al. (2015) mencionan que son tres los principales fenómenos que emergen del dME: *la adherencia*, *la exclusión* y *la opacidad*. La adherencia está relacionada con el rol que asumen las personas ante la matemática escolar, normalmente, la aceptan tal cual es, no cuestionan lo que se enseña ni aprende. La exclusión se observa en el hecho de la existencia de una epistemología hegemónica que ha impuesto argumentos, significados y procedimientos que los estudiantes (y todos aquellos involucrados en la enseñanza y aprendizaje de la matemática) deben de entender, memorizar y reproducir, entonces, estos son excluidos de la construcción de su propio conocimiento. La opacidad se da debido a que esta epistemología hegemónica no permite que **otras epistemologías** se tomen en consideración en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, por lo que permanecen opacas.

2.4. Diseños de Situación Escolar de Socialización (DSES)

Para contrarrestar el dME, la Socioepistemología, especialmente desde el programa Sujeto Olvidado y Transversalidad de Saberes (Soltsa), ha creado los Diseños de Situación Escolar de Socialización. Estos diseños tienen la intención de transformar al dME debido a que su base epistemológica es el uso de la matemática que ha emergido de situaciones específicas de comunidades, donde el centro es su funcionalidad y no la adquisición de conceptos y definiciones de objetos matemáticos (Cordero y Solís, 2022).

Los DSES juegan un papel importante en este proyecto de investigación debido a que es a través de ellos que se logra valorar los usos y resignificaciones del conocimiento matemático de comunidades estudiantes y profesores, ya que capturan situaciones específicas de comunidades en donde tales resignificaciones del uso del conocimiento han emergido.

Son dos los elementos necesarios para construir un DSES: una base epistemológica y una perspectiva de tratamiento. La base epistemológica serán los usos del conocimiento matemático que han emergido en comunidades. La perspectiva de tratamiento serán uno o unos de los multifactores que contribuyen a la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y que se oponen al dME (Cordero, 2023).

2.4.1. Base epistemológica: Categoría de Modelación

Los estudios del uso de la matemática en distintas comunidades de conocimiento han resultado en la formulación de categorías de modelación. Cordero et al. (2022a) afirman que la categoría responde a lo que es útil al humano en una situación específica. Va más allá de una aplicación de la matemática en una situación real, es una práctica específica de una comunidad en sus escenarios: escuela, trabajo y ciudad. La situación específica está compuesta por significaciones y resignificaciones con sus respectivos procedimientos, regulados por un instrumento, los cuales son construidos de acuerdo con las operaciones, condiciones y conceptos que los participantes tengan e identifiquen en ese momento.

Entonces, la estructura epistemológica de la categoría de modelación es: que esta emerge del uso de la matemática en una situación específica de una comunidad de conocimiento. Tal situación específica encierra *significaciones* que generan *procedimientos* y un *instrumento* (o a partir del instrumento se pueden generar significaciones y procedimientos, estos elementos no son necesariamente secuenciales); todos estos elementos permiten construir argumentaciones que reflejan la construcción del conocimiento matemático. Por estos elementos se entiende lo siguiente:

- **Significaciones**: son los elementos que le dan sentido a la situación específica (Del Valle, 2015). Las significaciones pueden basarse en definiciones y propiedades según la interpretación personal que pueden ir acompañadas de imágenes y metáforas (Bishop 1999 citado en Buendía & Cordero, 2005).
- **Procedimientos**: son las operaciones inducidas por las significaciones (Buendía y Cordero 2005).
- **Instrumento**: es un sistema de recursos para construir significados o procedimientos. De igual manera los significados y procedimientos pueden influir en los instrumentos (Buendía y Cordero 2005). Del Valle (2015) menciona que es la experiencia sobre la cual se trabaja, lo que es útil al humano.
- **Argumentación**: se refiere a la resignificación de usos que expresan la modelación de la situación. Es el resultado de poner en juego los elementos anteriores (Cordero, 2023).

Como se mostró en el primer capítulo de este proyecto, hay una modelación matemática predominante en el campo de la Matemática Educativa en la que la mayoría de los estudios se han basado para crear una relación entre la matemática escolar y la realidad. Este tipo de modelación deja de lado lo situacional y lo funcional del conocimiento matemático; es por ello por lo que Cordero (2023) explica que la razón por la cual se le llama **categoría de modelación**, C(Mod), se debe a que difiere de la concepción predominante de la **modelación matemática**.

Para hacer dicha distinción Cordero supone que hay un principio (P) que rige la modelación matemática, entonces P representa "*el ciclo que conecta el mundo real y la matemática*. [La categoría de modelación] estará basada en el principio P'[que vendría a ser derivado, en cierto sentido de P]... Sin embargo… P'es *lo funcional de la relación recíproca entre la matemática* *y el cotidiano*." P'genera la categoría de modelación, o sea, la resignificación de usos del conocimiento matemático de la gente (Cordero, 2023, p. 161).

Tabla 1. Modelación matemática vs categoría de modelación. Elaboración propia a partir de Cordero (2023).

Modelación Matemática	**Categoría de Modelación, C(Mod)**
a. El principio P asume la existencia de un conocimiento matemático (M) y de una existencia de la realidad (R). Dado R existe un conocimiento matemático específico M´que matemátiza a R. M´(R)=R´, donde R´es una interpretación de R. b. M´(R) es un objeto matemático: es el conocimiento que genera la modelación matemática.	a. P'es funcional, entonces no preexisten R ni M. Lo funcional son los usos de la matemática de la gente, U(CM). Dado que la gente vive entre situaciones diversas, S_k. b. Cuando sucede un tránsito entre S_k y S_m los U(CM) se resignifican resultando así la categoría de modelación. Este es el conocimiento que se genera desde esta perspectiva. *En el tránsito entre S_k, suceden epistemologías E_j (pluralidad epistemológica) y transversalidades T_n. *Las S_k podrían estar sobre dominios de conocimiento D_m y en las alternancias entre los D_m. *La resignificación también se da en alternancia de dominios.

Cordero et al. (2022b) reconocen que el conocimiento generado en la resignificación de los usos de la matemática hay dos saberes que están en juego, uno de ellos es el institucional (el saber externo) y el otro es la transversalidad de saberes (interno de la comunidad). Estos dos tipos de saberes vendrán a ser dos ejes que componen a la C(Mod). La Figura 4 representa una síntesis de esta categoría bajo el nombre de *Marco del saber Matemático de C(Mod)*.

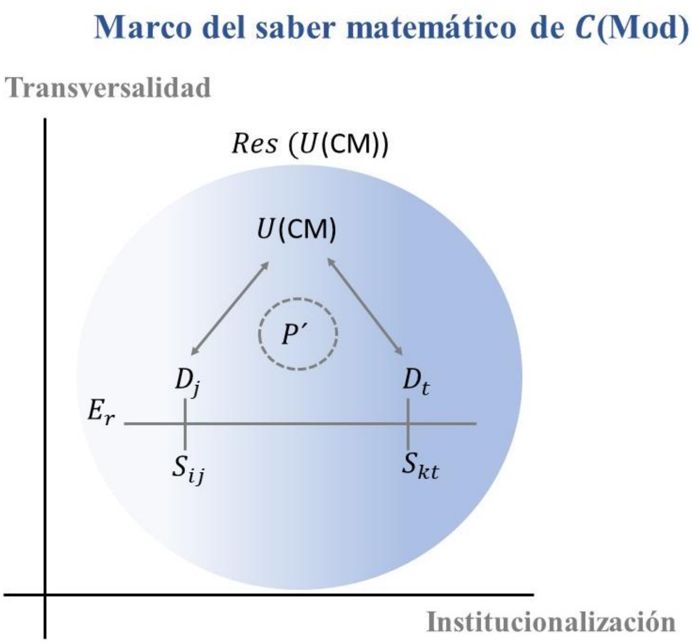


Figura 4. Marco del saber matemático de C(Mod). Tomado de Cordero, (2023).

Entre las categorías identificadas por el programa Soltsa se encuentran: *Predicción*, *Comportamiento Tendencial* y *Optimización*. A continuación, se muestran algunos trabajos que con base a esta epistemología diseñaron tareas.

2.4.1.1.**Predicción**

Un ejemplo de la categoría de Predicción se puede encontrar en el trabajo de Torres (2013). En este trabajo la autora construye una epistemología de la puesta en uso del conocimiento matemático de una comunidad de ingenieros químicos industriales. Los ingenieros tienen como tarea principal hacer un diagnóstico del funcionamiento de transformadores eléctricos. Esto lo hacen a través de un Método de Diagnóstico Gráfico elaborado por la misma comunidad.

El método de diagnóstico lleva un registro, a lo largo del tiempo, de la concentración de ciertos gases en los transformadores, es aquí donde la autora identifica una *Situación de Variación*. Se analiza la variación en el comportamiento de las concentraciones de los gases, lo que vendría hacer el *instrumento*. El buen funcionamiento de los transformadores se ve cuando las concentraciones permanecen estables, es decir, la concentración de los gases se incrementa de forma lenta y constante, este estado de permanencia son las *significaciones*. Entonces, los *procedimientos* se ven en la evaluación de la variación al comparar los estados de las concentraciones en intervalos de tiempo, determinando incrementos o decrementos en la gráfica. Esto permite generar *argumentos* de predicción sobre el funcionamiento del transformador (Torres, 2013; Pérez-Oxté y Cordero 2022).

Cabe mencionar que el trabajo de Torres (2013) permitió la configuración de DSES, entre ellos se resalta el de Pérez -Oxté (2015). En su diseño Pérez-Oxté muestra como el uso de las gráficas se resignifica por momentos. Un ejemplo de las tareas presentados en el diseño se muestra en la Figura 5.

Figura 5. Predecir el estado de un transformador partiendo del comportamiento de gráfico de gases. Adaptado de Torres (2013), Pérez-Oxté (2015), Pérez-Oxté y Cordero (2022).

2.4.1.2.**Comportamiento tendencial**

Igualmente, en el trabajo de Torres (2013) encontramos un ejemplo sobre la emergencia de argumentos de comportamiento tendencial dado que estos surgen gracias a los *significados* que encierran el comportamiento gráfico de los gases. Tal comportamiento marca la tendencia de los gases a través del tiempo la cual permitirá dar un diagnóstico de los transformadores. Es así como la gráfica pasa a ser una instrucción que organiza comportamientos: *instrumento*. Los *procedimientos* que permiten hacer un diagnóstico al transformador es la observación a la variación de parámetros en la gráfica, entre menos variaciones hayan (es decir, estos son similares en todas las gráficas) se considera que el transformador se encuentra en estado estable o normal. Por tal razón la autora determina que otra situación involucrada en el diagnóstico de transformadores es una *Situación de Transformación.*

Otro ejemplo de tareas de DSES que el estudio de Torres permitió configurar es el Pérez -Oxté (2021) donde se les pide a los participantes trazar una gráfica que exprese la variación mostrada por dos elementos químicos presentes en el transformador; permitiéndole a los participantes establecer tendencias respecto a la estabilidad en el comportamiento de los gases.

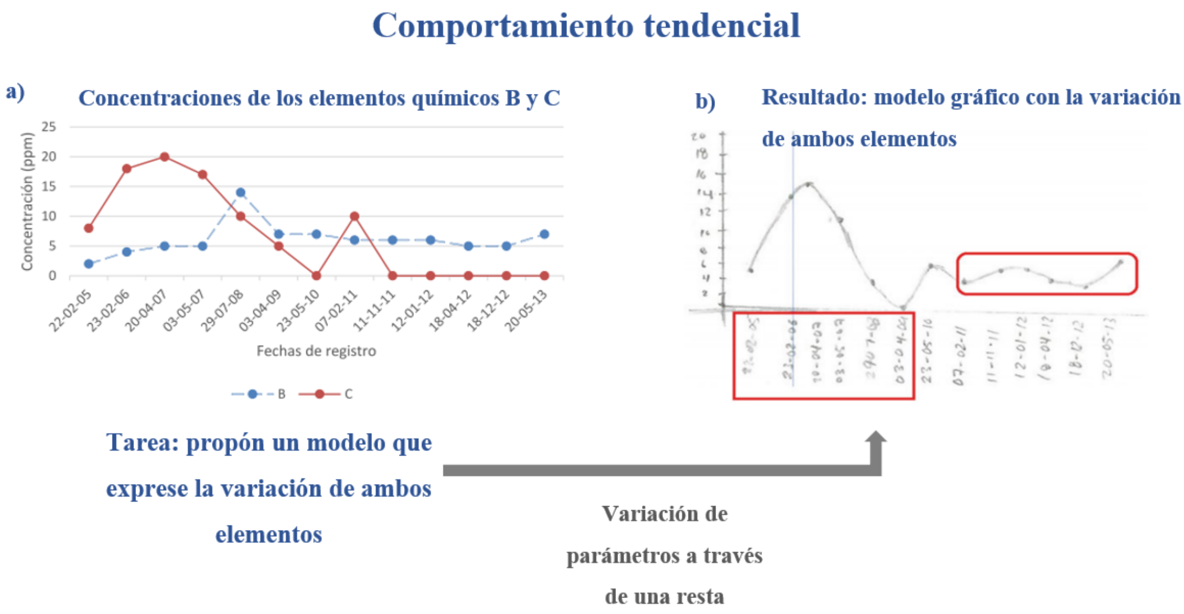


Figura 6. Modelo de gráfico de comparación de las concentraciones de dos gases. Adaptado de Pérez-Oxté (2021), Pérez-Oxté y Cordero (2022).

2.4.1.3.Optimización

El trabajo Del Valle (2015) es un ejemplo de esta categoría. Muestra un análisis de la resignificación del uso del conocimiento matemático en una comunidad de ingenieros mecatrónicos en la interpretación de datos sísmicos. Estos buscan incorporar un algoritmo genético que les permita seleccionar un filtro que los lleve a encontrar una imagen deseada (la imagen deseada es conocida por los ingenieros, pero no así su filtro) tal búsqueda determina una *Situación de Selección*. La imagen deseada vendría a ser un patrón ideal (*significaciones*) volviendo la selección menos compleja. Antes de seleccionar el filtro deseado se aplican diferentes filtros a la imagen original hasta que las diferencias entre la imagen original y la deseada sean mínimas. Esto conlleva a distinguir cualidades (*procedimientos*) a las imágenes que se les haya aplicado un filtro. Entonces, lo que hace que la selección no sea azarosa es que dado el prototipo ideal provoca una tendencia hacia lo estable, siendo este el *instrumento* en esta situación.

Con base en el análisis de esta epistemología de usos Del Valle (2015) propone actividades que rescatan la situación de selección para generar argumentos de optimización. El siguiente ejemplo es una de esas actividades:

Actividad: De las botellas entregadas, ¿cuál contiene una cantidad de líquido similar a la botella de color rojo? Describe el procedimiento que te permite realizar tu elección.

Figura 7. Botellas con distinta forma. Recuperado de Del Valle (2015)

Del Valle (2015) explica que la selección de las botellas (etiquetadas desde la A hasta la E) no es azarosa porque deben elegir aquella que tenga una cantidad de líquido que más se aproxime a la cantidad de líquido que hay en la botella de color rojo, por lo que esa cantidad se convierte en el patrón ideal, es decir lo estable, el *instrumento* que permite ver cuál de esas botellas es la que tiende más a la cantidad de líquido que hay en la botella de color rojo. Se espera que se genere un *patrón de adaptación* (un patrón podría ser usar una botella estándar para apreciar mejor las alturas del líquido de las botellas) esto permitirá generar *procedimientos* de distinción de cualidades (comparar alturas y seleccionar la más próxima a la dada) del contenido de las botellas.

La estructura epistemológica de las categorías de *predicción*, *comportamiento tendencial* y *optimización* se ve resumida en la Tabla 2 que el programa Soltsa ha llamado *Socioepistemología del cálculo y análisis.*

Tabla 2. Socioepistemología del cálculo y análisis. Recuperado de Cordero y Solís (2022).

Construcción de lo Matemático	Situaciones						
	Variación	**Cambio**	**Transformación**	**Aproximación**	**Selección**	**Ponderación**	**Periodización**
Significaciones	Flujo Movimiento Acumulación Estado Permanente	Área bajo la curva Posición de un móvil Movimiento de un fluido	Patrones de comportamiento gráficos y analíticos	Limite Derivada Integración Convergencia	Patrón de adaptación	Distribución de comportamientos	Reproducción de Comportamientos
Procedimientos	Comparación de dos estados	Comparación de dos estados	Variación de parámetros	Operaciones lógico formales (cociente)	Distinción de cualidades	Equiparación	Comparación de Periodos
Instrumentos	Cantidad de variación continua $f(x+h)-f(x)=ah$ $a=f'(x)$	Cantidad de variación continua $\int_a^b F' = F(b)-F(a)$	Instrucción que organiza comportamientos	Formas analíticas $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x)$	Lo estable	Punto de Equilibrio $\sum_1^n (x_i-\bar{x})=0$	Interpolación
Argumentaciones/ Resignificación	**Predicción** $E_0+variación=E_f$	**Acumulación** $E_f - E_i$	**Comportamiento tendencial**	**Analiticidad de las funciones** $f(x+h)=f(x)+f'(x)h+f''(x)\frac{h^2}{2!}+\cdots$	**Optimación**	**Compensación**	**Anticipación**

2.4.2. Perspectiva de tratamiento: socialización del conocimiento

Entre los multifactores por los que puede estar compuesta la perspectiva de tratamiento en el diseño se destacan: la *identidad*, la *inclusión* y la *socialización del conocimiento*. Estos multifactores contribuyen en la enseñanza de las matemáticas al contrarrestar los fenómenos provocados por el dME.

Para este proyecto de investigación conviene hablar sobre la perspectiva de *socialización del conocimiento*, dado que uno de los intereses que se persigue es el rescate del uso del conocimiento matemático en el cotidiano del que aprende, particularmente, el rescate de las epistemologías de uso de la matemática que se encuentra en el aprovechamiento de las aguas lluvias para el ahorro del agua potable. Desde esta perspectiva se hacen visible las realidades actuales (el cotidiano de la gente) que son opacadas por el dME y se afirma que de estas realidades emergen epistemologías del conocimiento matemático las cuales se resignifican al ponerlo en uso. Por lo que los diseños bajo esta perspectiva buscan *crear un diálogo entre las epistemologías de esas realidades y la epistemología normada por el dME* y así lograr el Rediseño del discurso Matemático Escolar (RdME) donde el cotidiano forme parte de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (Gómez, 2015; Cordero, et al., 2015).

La perspectiva de socialización tiene como núcleo la relación que existe entre el conocimiento y el cotidiano de la comunidad que lo produce. Según Cordero et al. (2015) lo anterior implica que el conocimiento matemático debe estar configurado a partir de tres características del proceso de socialización: lo orgánico, lo situacional y lo intencional. Lo orgánico es lo que le es funcional a la comunidad. Lo situacional es la situación que propicia el desarrollo de usos del conocimiento. Lo intencional es el conocimiento de la comunidad que se desea que perdure organizándolo en categorías de modelación.

Según Cordero et al. (2015), conviene desarrollar estas características por procesos continuos; lo que es orgánico a través de proceso funcional, lo que es situacional en un proceso historial y lo que es intencional en un proceso institucional. Estos procesos se verán expresados de la siguiente forma:

- **Proceso Funcional**: es expresado en el uso del conocimiento.
- **Proceso Historial**: es expresado en las situaciones donde la comunidad usa y resignifica el conocimiento matemático.

- **Proceso Institucional**: se ve en la necesidad de los grupos humanos en construir un cuerpo de conocimiento que se mantiene en continuidad con el tiempo. En este caso, el cuerpo de conocimiento serían las categorías de modelación.

Es a través de estos procesos continuos que se logrará la sistematización de los usos del conocimiento matemático en el cotidiano de las comunidades de conocimiento para que luego sean incorporados en el aula de clases de matemáticas (Cordero et al., 2015).

2.5. Modelo de Comunidad de Conocimiento Matemático

El modelo de *Comunidad de Conocimiento Matemático* (CCM) permite analizar los usos del conocimiento matemático propios de una comunidad de conocimiento. Hasta este punto se ha podido notar el papel imprescindible que juega una comunidad en la construcción social del conocimiento matemático y es por esta razón que desde el programa Soltsa se ha configurado un modelo de comunidad de conocimiento. Este modelo está compuesto por 3 elementos: *reciprocidad*, *intimidad* y *localidad* (ver Figura 8).

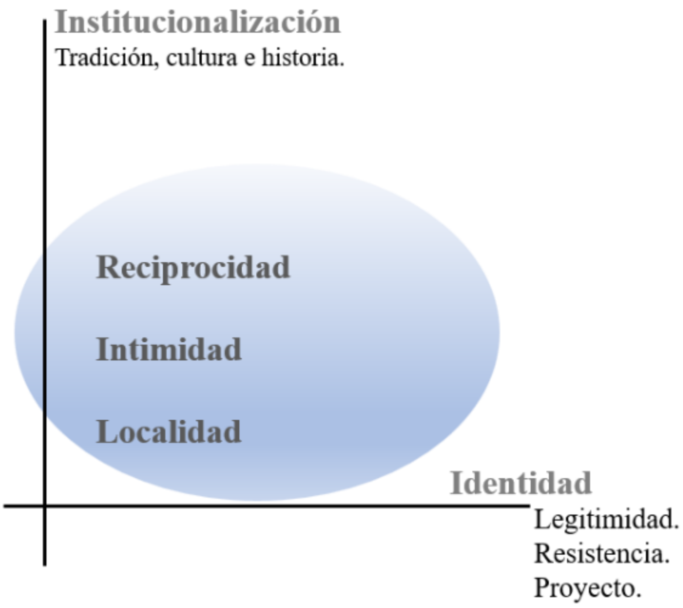


Figura 8. Modelo de comunidad de conocimiento. Adaptado de Cordero et al. (2022b).

- **La reciprocidad** se observa en el conocimiento que se genera por la existencia de un compromiso mutuo. Situación específica.
- **La intimidad** se observa en aquel conocimiento que es propio y privado.
- **La localidad** se encuentra el conocimiento local que se compone de una jerga disciplinar, del trabajo u oficio, intereses, entre otros.

Estos elementos permiten distinguir lo propio de la comunidad de aquello que es universal. Además de estos tres elementos, el modelo se delimita por dos ejes transversales: la *institucionalización* y la *identidad*. La *institucionalización* es el referente de la tradición, cultura, historia de la comunidad (el conocimiento que deseamos que se enseñe y sea aprendido). La *identidad* de una comunidad de conocimiento se señala en tres momentos: *legitimidad*, *resistencia* y *proyecto*, es decir, lo que hace diferente una comunidad de otra (Cordero et al., 2022b). Los momentos anteriores se interpretarán según lo señalado por Giacoleti-Castillo (2020) como:

Legitimidad: es la manera que construyen sus argumentos para atender una situación específica. Tales maneras de construir responden a usos del conocimiento matemático ligados a significados y procedimientos que la comunidad ha experimentado en la situación y no algoritmos memorizados.

Resistencia: es la construcción de conocimiento, es decir, su puesta en uso es un reflejo de resistencia debido a que la puesta en uso del conocimiento matemático no responde a lo aprendido en la matemática escolar, sino en la emergencia de lo funcional. Esto quiere decir resistencia al dME porque el conocimiento matemático puesto en juego les es útil ante una situación específica y no es invocado para atender a una malla curricular asociada a un objeto matemático.

Proyecto: es la proyección de los elementos de legitimidad y resistencia en las tareas que componen la situación específica. La construcción de argumentos autónomos y funcionales por parte de la comunidad se ven proyectados en dichas tareas.

Una forma panorámica de ver cómo los constructos teóricos, mostrados a lo largo de este capítulo, entran en juego en este proyecto de investigación es a través del corpus del marco teórico-metodológico del programa Soltsa (ver Figura 9).

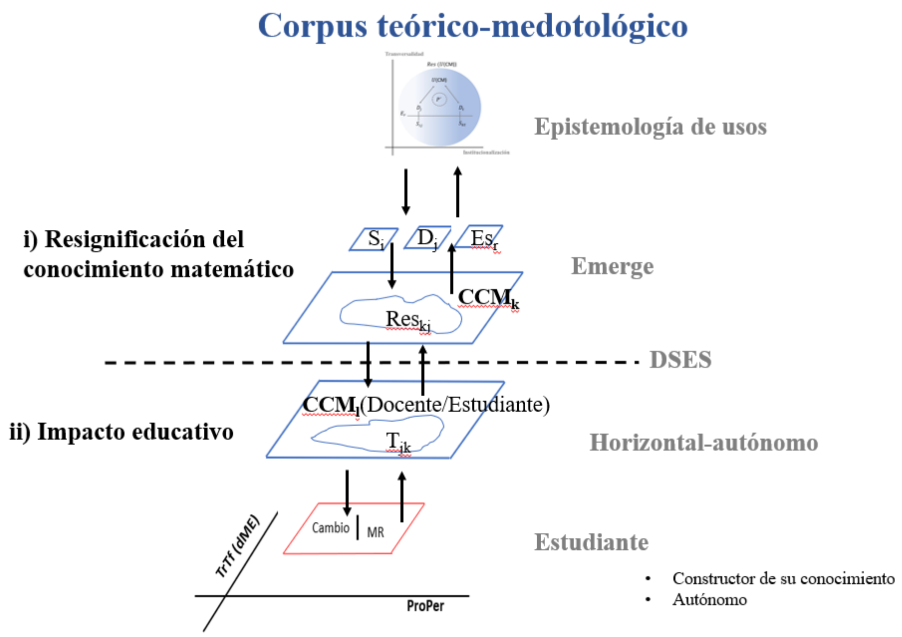


Figura 9. Marco del cuerpo teórico-metodológico del programa Soltsa. Adaptado de Cordero et al. (2022b).

En el cuerpo teórico se distinguen las dos líneas de trabajo del programa Soltsa. La primera es la **Resignificación del conocimiento matemático** que corresponde a la parte superior de la Figura 9. Los constructos teóricos permiten revelar los usos del conocimiento matemático que emerge en las comunidades. El estudio de los usos del conocimiento matemático permite la formulación de las categorías de modelación conformando así una epistemología de usos. Se espera que esta epistemología sea llevada a los distintos niveles educativos (comunidades de docentes y estudiantes) para conseguir una transformación del dME. El medio para llevar esa epistemología serán los DSES y es en la segunda línea de trabajo, **Impacto Educativo**, donde se desarrollan tales esfuerzos (parte inferior de la Figura 9).

Este proyecto se ubica en la segunda línea de trabajo. En el siguiente capítulo se expondrá la base epistemológica compuesta por las categorías de Predicción, Comportamiento Tendencial y Optimización para la construcción del DSES con una perspectiva de *socialización del conocimiento*.

Si bien es cierto, por las limitaciones de este proyecto, difícilmente se puede hablar de una transformación del dME o un impacto educativo en los distintos niveles escolares. Sin embargo, la conformación y aplicación de este diseño permitirá caracterizar el uso del conocimiento matemático de las y los estudiantes de tercero de secundaria desde un enfoque centrado en una matemática funcional, que como se vio en el primer capítulo, son pocos los estudios que hay alrededor de este aspecto, y el cual, según Cordero (2023) es de vital importancia si se quiere lograr una relación recíproca entre la matemática y las realidades del que aprende.

Capítulo III

Metodología

3.1. Aspectos metodológicos generales y ruta de investigación

El objetivo principal de este trabajo es caracterizar los usos del conocimiento matemático de una comunidad de conocimiento matemático (CCM) de tercero de secundaria con el fin de mostrar una forma de acercar la matemática escolar a la realidad de los miembros de dicha comunidad. Dicha caracterización se hará desde un enfoque que considera que tales usos dependen de las situaciones y el cotidiano donde los estudiantes estén inmersos. Entonces, esta investigación se propone capturar parte del conocimiento matemático que es propio de dicha comunidad.

Dado que se propone explicar la actividad matemática *propia* de la CCM partiendo desde su cotidiano, este tipo de investigación es de corte cualitativo (Martínez, 2004). Las investigaciones con este enfoque buscan recoger información desde los puntos de vistas y experiencias propias de las personas que forman parte del estudio (Hernández-Sampieri et al., 2014).

La naturaleza de este proyecto de investigación llevó a considerar aspectos etnográficos debido a que este enfoque permite el estudio de las personas en sus realidades y revela cómo las personas crean significados a partir de sus vidas (Anderson-Levitt, 2006, citado en Shon, 2015). Desde este enfoque interesa estudiar a las personas en relación con su comunidad más que a la comunidad y a la persona por separado, para ello, es de suma importancia que el investigador haga inmersión en las comunidades de las personas en estudio (Torres-Corrales, 2019).

Este aspecto etnográfico, las personas construyendo significados en su comunidad, es rescatado en el modelo de Comunidad de Conocimiento Matemático (CCM), por lo que la CCM de estudiantes de tercero de secundaria (a partir de ahora se le llamara CCM_{ETS}) será la *unidad análisis* de este proyecto; "el conocimiento que ahí sucede es la síntesis de la puesta en uso del conocimiento matemático con sus resignificaciones, al hacer transversalidades entre escenarios" (Cordero et al. 2022b, p.81).

Entre las técnicas etnográficas que permitirán revelar la construcción del conocimiento matemático están: la entrevista, la revisión documental y la observación participante (Torres-Corrales, 2019).

Además de considerar estos aspectos etnográficos, este trabajo es un estudio de caso. Como método, el estudio de caso permite examinar en profundidad un "caso" en su contexto real. Un caso puede ser una persona, una comunidad, un evento, procesos, que son explorados para aprender, construir conocimiento y ganar un mayor entendimiento sobre lo que está siendo estudiado (Shon, 2015).

En particular, el estudio de caso de esta investigación se basó en el análisis de los usos de las gráficas que emergieron en un curso de estudiantes de tercero de secundaria para la gestión de agua lluvia a través de DSES. Esto a su vez permitió dar una prueba empírica sobre algunos de los constructos teóricos que componen esta investigación (los desarrollados en el Capítulo II). Entonces, los aspectos etnográficos permitieron capturar las experiencias desde el cotidiano de la CCM_{ETS} mientras que el estudio de caso permitió hacer una examinación cercana a los usos de las gráficas que emergen en una comunidad específica de estudio.

La ruta de investigación que sigue este estudio es la propuesta por Cordero (2023). Como se puede apreciar hasta el momento, el proceso de investigación inicia con la identificación de un fenómeno, en este caso la opacidad de los usos del conocimiento matemático en la conservación y cuidado de nuestro planeta en la clase de matemáticas (véase Capítulo I). Tal fenómeno fue llevado a una interpretación epistemológica que atiende a la función social del conocimiento matemático y a la conservación de los recursos del planeta, específicamente la captación de agua lluvias. Esa epistemología sirvió como base para la formulación de un Diseño de Situación Escolar de Socialización para luego ser puesto en escena.

La ruta de investigación se desarrolla a través de las siguientes fases:

- Fase 1°: Selección de una comunidad de conocimiento e inmersión inicial.
- Fase 2°: Análisis de epistemologías.
- Fase 3°: Construcción del diseño.
- Fase 4°: Puesta en escena.
- Fase 5: Análisis de datos.

3.1.1 Fase 1°: Selección de una comunidad e inmersión inicial

La selección de la comunidad de conocimiento para este estudio son estudiantes de tercer año de secundaria de la Escuela Secundaria "Técnica Tomas Alva Edison". Las principales razones por la que se seleccionó esta comunidad consisten en: a) la importancia que tiene la educación básica en la formación de los ciudadanos de una sociedad, en particular de la sociedad mexicana al ser el nivel educativo que la mayoría de sus miembros alcanza (ver el Capítulo I), y b) contribuir al programa de investigación donde este estudio se lleva a cabo. La mayoría de los estudios del programa Soltsa giran en comunidades de conocimiento cercanos al nivel superior (formación de ingenieros, formación de maestros de matemáticas, entre otros) y al campo profesional de la ingeniería. Ha sido en esas comunidades donde mayormente las categorías de modelación se han configurado. Como ya se mencionó, dentro del programa se hipotetiza que tales categorías son transversales en distintos niveles educativos y que debería de llevarse a estos, por lo que este estudio estaría aportando evidencia empírica de tales categorías en el nivel secundario.

La inmersión inicial a la CCM_{ETS} consistió en la revisión bibliográfica de los planes de estudios y libros de textos con el fin de encontrar aspectos tradicionales y culturales para tener un referente de la institucionalización del conocimiento de esta comunidad. Para saber qué libro de texto revisar se hicieron visitas al centro educativo antes mencionado. La subdirectora de la secundaria proveyó del enlace donde se encontraban los libros que se usan en el centro educativo, particularmente se revisó el libro de tercero de secundaria de matemáticas.

Antes de mostrar la revisión es necesario aclarar que en el Capítulo I de este trabajo se menciona que la SEP (2017) busca que el conocimiento matemático sea concebido como una construcción social donde el estudiantado formule argumentos y procedimientos que le permitan enfrentar situaciones. De manera más específica, se espera que modelen situaciones de variación lineal, cuadrática y de proporcionalidad inversa, definir patrones mediante expresiones algebraicas. Elegir la forma de organizar y presentar información matemática para que esta sea comunicada.

La SEP (2017) menciona que la matemática que se aprende en secundaria está organizada por tres ejes temáticos:

- Número, algebra y variación: incluye contenidos básicos de aritmética, algebra y situaciones de variación. Hay una profundización con el trabajo de números racionales. Las herramientas aritméticas se robustecen con herramientas algebraicas esperando que sean usados para la modelación de situaciones problemáticas ya sean matemáticas o extra-matemáticas. Es decir, **se busca el aprendizaje del algebra a través de la representación simbólica y gráfica de expresiones en situaciones de variación**.

- Forma, espacio y medida: los contenidos considerados en este eje son los relacionados con el estudio de formas geométricas, el espacio y medición. En secundaria se espera que los estudiantes validen sus argumentaciones a partir del establecimiento de conjeturas lógicas en lugar que sean únicamente empíricas.

• Análisis de datos: se propicia el pensamiento estadístico y probabilístico para comprender la información que rodea al estudiantado. Se espera que usen distribuciones y su representación en tablas y gráficas, uso de medidas de tendencia central y el uso de la probabilidad para tratar la incertidumbre.

Un ejemplo de la organización anterior se observa en la Tabla 3. La tabla se construyó con base a la información que aparece en la sección del índice de contenidos del libro de matemáticas que fue proveído por la subdirectora de la secundaria:

Tabla 3. Contenidos matemáticos de tercero de secundaria. Tomado de García et al. (2021).

Módulo 1 Agosto – Noviembre	Módulo 2 Diciembre – Marzo	Módulo 3 Abril – Julio
Eje: Número, álgebra y variación Tema: Número Lección 1: Múltiplo y divisores comunes. Lección 2: Criterios de divisibilidad. Lección 3: Números primos y compuestos. Lección 4: Mínimo común múltiplo Lección 5: Máximo común divisor. Tema: Patrones, figuras geométricas y expresiones equivalentes Lección 6: Expresiones cuadráticas con modelos geométricos. Lección 7 Factorización y área de figuras geométricas. Tema: Ecuaciones Lección 8: Solución de ecuaciones de segundo grado.	**Eje: Número, algebra y variación** Tema: Funciones Lección 11: Gráficas de movimiento y de llenado de recipientes. Lección 12: La expresión algebraica de una función cuadrática Lección 13: Graficas con diferente variación. Tema: Ecuaciones Lección 14: Solución gráfica de ecuaciones de segundo grado. Lección 15: Factorización de ecuaciones cuadráticas. **Eje: Forma, espacio y medida** Tema: Figuras y Cuerpos geométricos Lección 16: Ángulos de triángulos rectángulos. Lección 17: Razones trigonométricas.	**Eje: Número, algebra y variación** Tema: Ecuaciones Lección 21: Fórmula general Lección 22: El discriminante Tema: Funciones Lección 23: Interpretación de gráficas Lección 24: Construcción de gráficas a partir de valores de las funciones dados en tablas. Tema: Patrones, figuras y expresiones equivalentes Lección: 25 Expresiones algebraicas, funciones y ecuaciones **Eje: Forma, espacio y medida** Tema: Magnitudes y Medidas Lección 26: Medida de los lados de triángulos rectángulos. Lección 27: Teorema de Pitágoras. **Eje: Análisis de datos** Tema: Probabilidad

Eje: Forma, espacio y medida Tema: Figuras cuerpos geométrico Lección 9: Construcción de polígonos semejantes Lección 10: Semejanza de triángulos.	Lección 18: Medición de distancias inaccesibles. **Eje: Análisis de datos.** Tema: Estadística Lección 19: Medidas de tendencia central y de dispersión Lección 20: Análisis de desviación media	Lección 28: La probabilidad y los juegos de azar. Lección 29: Probabilidad de eventos mutuamente excluyentes.

Por el papel que juegan las gráficas en la modelación en situaciones de variación (Suárez y Cordero, 2010) y en vista que uno de los objetivos generales de la educación básica es que los estudiantes modelen en situaciones de variación, la revisión del libro se centra únicamente en las lecciones 11, 13 (del módulo 2), 23 y 24 (del módulo 3) del eje Número, algebra y variación bajo el tema de funciones. La revisión tenía como foco la identificación de la clase de tareas planteadas y los objetivos que perseguían esas tareas.

En la lección 11, como su nombre lo indica, son gráficas que representan el movimiento y el llenado de recipiente, por lo que se rescatan contextos alusivos a esos dos aspectos. La mayoría de las tareas se presenta de la siguiente manera:

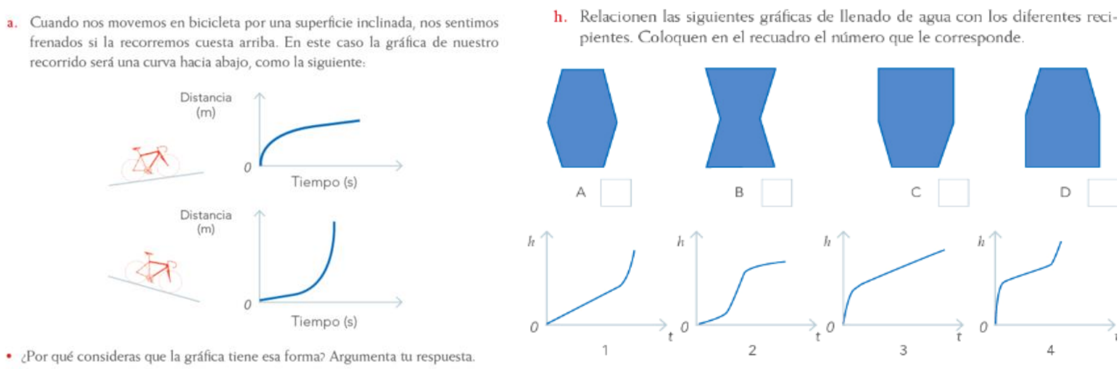


Figura 10. Ejemplo de los ejercicios que aparecen la lección 11. Tomado de García et al. (2021).

Las tareas se centran en un análisis visual con un hincapié en la relación de la pendiente de la recta y la gráfica que representa el movimiento de la bicicleta. La otra relación es la forma del tanque y su gráfica de llenado en términos de altura y tiempo. 5 de las 8 páginas de la lección evocan el llenado de recipiente y las otras al movimiento de móviles.

En la lección 13 la mayoría de los ejercicios se presentan bajo un contexto “real”, una tabla elaborada según los datos del contexto y el plano cartesiano (véase la Figura 11). El énfasis de los ejercicios está en completar la tabla y trazar la gráfica de los puntos en la tabla. Además, se espera que reconozcan la curva y el tipo de expresión algebraica de dicha curva.

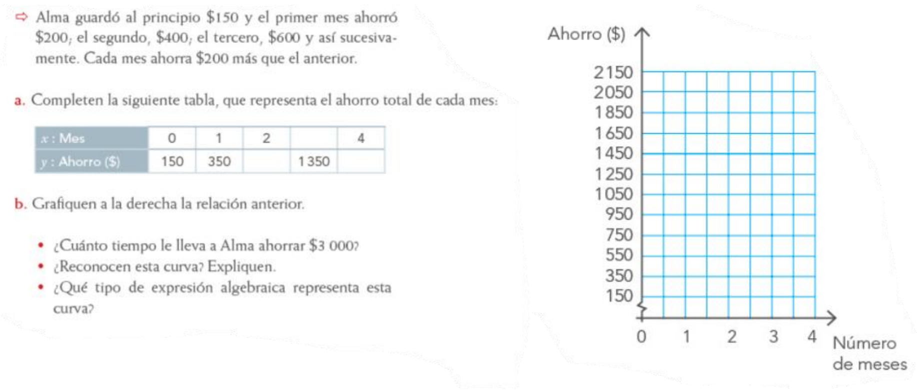


Figura 11. Ejemplo de los ejercicios que aparecen la lección 13. Tomado de García et al. (2021).

En la lección 23 las actividades propuestas constan de contexto, una gráfica y de preguntas que permiten identificar valores máximos, valores mínimos, intervalos de crecimiento y decrecimiento (Figura 12).

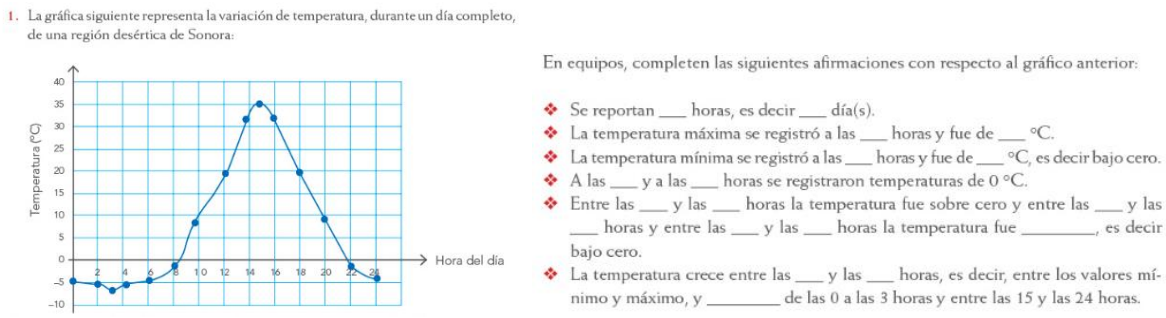
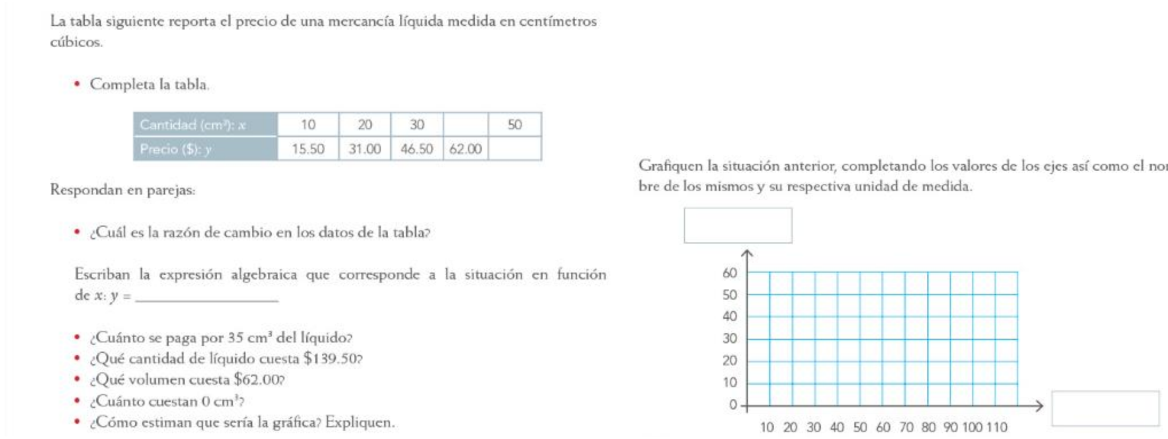


Figura 12. Ejemplo de los ejercicios que aparecen la lección 23. Tomado de García et al. (2021).

En la lección 24 los ejercicios enfatizan en la construcción de gráficas partiendo de una tabulación (ver Figura 13). También forma parte de la tarea determinar la razón de cambio y la expresión analítica de la relación funcional en la tabla.



La tabla siguiente reporta el precio de una mercancía líquida medida en centímetros cúbicos.

- Completa la tabla.

Cantidad (cm^3): x	10	20	30		50
Precio ($): y	15.50	31.00	46.50	62.00	

Respondan en parejas:

- ¿Cuál es la razón de cambio en los datos de la tabla?

Escriban la expresión algebraica que corresponde a la situación en función de x: y = ________________

- ¿Cuánto se paga por 35 cm^3 del líquido?
- ¿Qué cantidad de líquido cuesta $139.50?
- ¿Qué volumen cuesta $62.00?
- ¿Cuánto cuestan 0 cm^3?
- ¿Cómo estiman que sería la gráfica? Expliquen.

Grafiquen la situación anterior, completando los valores de los ejes así como el nombre de los mismos y su respectiva unidad de medida.

Figura 13. Ejemplo de los ejercicios que aparecen la lección 24. Tomado de (García et al., 2021)

En el reporte de INEE (2019) sobre la prueba PLANEA referente a la gráfica menciona

Reactivos que componen la prueba relacionados con la gráfica:

- Identificar la gráfica que corresponde a una relación proporcional directa.
- Identificar las representaciones (gráfica, tabla y expresión algebraica) que corresponde a una misma situación de proporcionalidad directa.
- Identifican la representación gráfica formada por segmentos de rectas y curvas que corresponden a un fenómeno o la representación algebraica de una función lineal o cuadrática.

Desde estos referentes institucionales (programas de estudios, pruebas estandarizadas y libros de textos) se puede apreciar que el uso de las gráficas forma parte del conocimiento matemático de la CCM de estudiantes de tercero de secundaria. Cabe destacar que Cordero y Flores (2007) establecieron un estatus epistemológico del uso de gráficas como conocimiento institucional en los libros de texto de matemáticas para la educación básica. El estatus comprende tres momentos: *el uso del síntoma de la gráfica*, *el uso de la gráfica de la función* y *el uso de la curva*. El momento que le atañe a esta comunidad es el tercero debido a que en este momento curricularmente el concepto de función ha sido declarado.

En el tercer momento, *el uso de la curva*, entre los funcionamientos que acompañan al uso de la gráfica están aquellos centrados en la discusión del comportamiento de cantidades discretas y continuas presentes en situaciones o fenómenos interpretados por tablas y gráficas. La variación se discute con la estrategia de comparación: estableciendo diferencias entre los estados en términos de: decrecimiento y crecimiento o máximos y mínimos. Otra estrategia es la estimación a partir de conocer cantidades cambiantes e intuir nuevos estados. También se buscan argumentos de predicción, al buscar estados posteriores o anteriores partiendo del establecimiento de un patrón de variación que cumplan estados conocidos.

A través de las tareas del libro de texto descritas anteriormente se aprecia que el estatus epistemológico institucional del uso de la gráfica planteado por Cordero y Flores (2007) sigue latente en la CCM_{ETS}. Por ende, ese estatus epistemológico será el que caracterice el uso de la gráfica de la CCM_{ETS} de forma institucional. La Figura 14 muestra ese estatus con relación a la CCM_{ETS}.

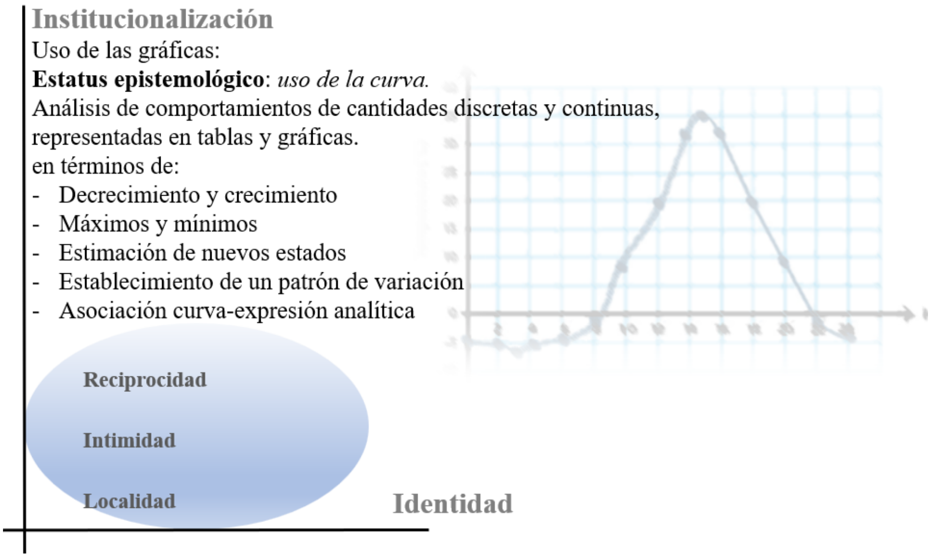


Figura 14. Estatus epistemológico de la institucionalización del uso de la curva en la CCM de estudiantes de 3° de secundaria.

3.1.2 Fase 2°: Análisis de epistemologías.

Base epistemológica.

Para la construcción de la base epistemológica del DSES se consideró el trabajo de Tennakoon et al., (2018) donde se proponen desarrollar un modelo de captación de agua-lluvia doméstico en algunos hogares de Sri Lanka – el modelo en cual se basan es el de Rainwater TANK de Vieritz et al. (2015) desarrollado para hogares urbanos en Australia. Por tal razón, Tennakoon y compañeros mencionan que conviene buscar información sobre el consumo de agua de esos hogares, datos del clima, características de los techos y las características únicas de los sistemas de captación ya instalados en algunos distritos de Sri Lanka. A continuación, se muestra cómo el comportamiento de las lluvias y modelo de captación de lluvias fueron aspectos importantes que Tennakoon et al., (2018) consideraron para la instalación del sistema de captación de agua lluvia.

En su estudio Tennakoon y colegas describen el clima de Sri Lanka el cual tiene un promedio de lluvia anual que varía de desde menos de **1000 mm a 5000 mm**. Afirman que el patrón de lluvia es dominado por dos periodos monzónicos: mayo-septiembre y diciembre-febrero por lo que sigue un patrón bimodal típico, es decir, que hay dos periodos donde la intensidad de la lluvia es alta, separados por un periodo de menos lluvia. Tennakoon et al., (2018) mencionan que la lluvia promedio anual varía menos que 1000 mm de lluvia sobre aquellas regiones áridas del Noroeste y Sureste de Sri Lanka. El promedio de lluvia de 5000 mm es recibido en las laderas occidentales de los cerros centrales. De mayo a septiembre, la lluvia anual puede traspasar los 3000 mm en algunas áreas mientras que la mitad oriental de la isla puede recibir 200 mm a 1200 mm de lluvia. Terminan la descripción del clima de Sri Lanka mostrando el comportamiento anual de las lluvias en los distritos que serán considerados en su estudio

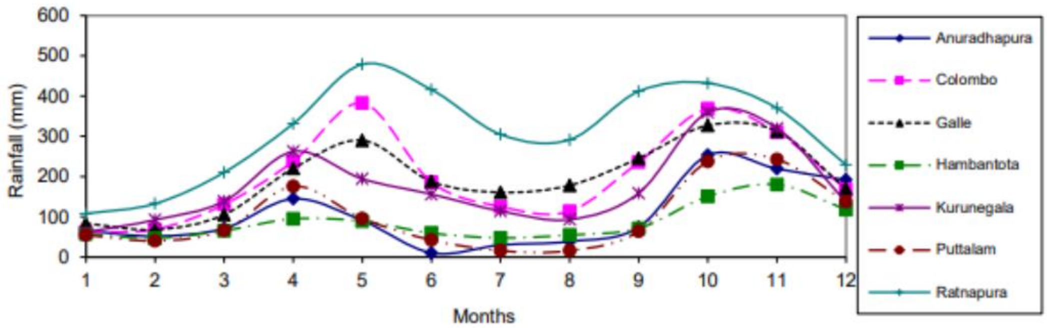


Figura 15. Régimen de lluvia mensual promedio de Sri Lanka tomado de estaciones correspondiente a las regiones escogidas durante 1961 a 1990. Tomado de Tennakoon et al., (2018).

Tennakoon et al., (2018) mencionan que dicho patrón bimodal y las cantidades de lluvia recibida en esos dos picos podría ser suficientes para llenar completamente el tanque de almacenamiento después de vaciarlo. Esto permitirá que el tanque sea lavado antes de los periodos de lluvia.

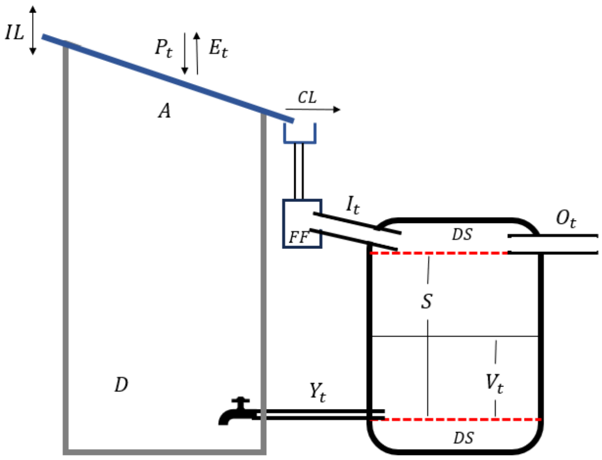


Figura 16. Representación esquemática del modelo para captar agua-lluvia. Adaptado de Vieritz et al. (2015).

La Figura 12 es el esquema del modelo Rainwater TANK que usa Tennakoon y compañeros para la instalación del sistema de captación de agua lluvia; donde P_t es cantidad de lluvia (mm) durante un intervalo de tiempo, $t. A$ es el área del techo (m^2). $IL\ (mm)$, E_t y $CL\ (m^3)$ representan las primeras pérdidas de agua en el sistema, cantidad de agua para humedecer el techo, cantidad de agua evaporada y cantidad de agua que sale del canal, respectivamente. $FF(m^3)$ es el primer flujo de agua que se separa del sistema. $I_t(m^3)$ es la cantidad de agua que entra al tanque durante un intervalo de tiempo, t. S, es la capacidad de almacenamiento (m^3). V_t es el volumen de agua almacenada en un intervalo de tiempo, t. O_t es el desbordamiento en un intervalo t. DS "dead storage" representan aquellos espacios que no se consideran en el volumen del agua. Y_t es el rendimiento del agua almacenada durante un intervalo de tiempo, t. D_t es la demanda de agua que se espera satisfacer con el sistema en un tiempo t. La duración del intervalo t puede ser en horas, a diario o mensual. El modelo de Tennakoon et al., (2018) considera $t = un\ día$ (diario).

En general el modelo de Rainwater TANK es una simulación del comportamiento de un sistema de captación de agua lluvia que permite calcular el balance del agua del techo, del tanque y rendimiento del agua almacenada en el hogar (Vieritz et al. 2015). Es decir, el modelo puede ser descrito en tres partes: el *balance del agua en el techo, el balance del agua en el tanque* y *la demanda del agua.*

Balance de la cantidad de lluvia en el techo.

Antes que el agua-lluvia llegue al tanque, esta es captada por el techo que está conectado a un sistema de canales que colectan y transportan el agua. El volumen de la lluvia que es captado por el área del techo conectada al sistema (representado como GRC) se obtiene mediante:

$$GRC\ (m^3) = Cantidad\ de\ lluvia \times Area\ del\ techo\ \times 0.001 = P \times A \times 0.001$$

En la práctica, no todo el techo está conectado al sistema de colección y no toda la lluvia que cae en el área del techo conectada al sistema llega al tanque debido a:

- Es necesario humedecer el área del techo. El agua que se pierde para humedecer el techo se representa como IL . La capacidad de colectar lluvia del techo dependerá del material e inclinación de este.

$$IL = AD \times A \times 0.001$$

La profundidad de la lluvia que se requiere para humedecer, AD (mm), el techo antes que la lluvia empiece a correr depende del tipo de techo e inclinación. Una manera en que puede ser determinado es midiendo la lluvia y la captura de agua del techo, empezando con el techo seco, en periodos cortos durante lluvias ligeras.

- La lluvia que se pierde al salpicar y resbalarse del techo o de canales. A esta pérdida en el modelo se le llama CL. Se da durante está lloviendo y se representa como una proporción del total de lluvia interceptada por el techo.

$$CL = \left(1 - \frac{100 - \%CL}{100}\right) \times GRC$$

El porcentaje de CL depende del diseño del techo, dirección y velocidad del viento, intensidad de la lluvia. Puede ser determinado midiendo la lluvia y lo que se capta del techo durante llueve después que el techo ya esté humedecido. Entonces la lluvia que se pierde se expresa como un porcentaje de la GRC.

- Dispositivo de primera descarga, en el modelo es FF. También si el sistema cuenta con un dispositivo para desviar hojas hay una cantidad de agua que se pierde.

$$FF = FFD\ \times A \times 0.001$$

La cantidad de lluvia que se necesita para limpiar el techo, $FFD(mm)$, es un dato necesario para determinar el volumen del dispositivo de primera descarga. La primera lluvia que cae en el techo está potencialmente contaminada con polvo y materia orgánica. El dispositivo de primera descarga intercepta ese primer volumen de lluvia para prevenir que contamine el agua que está en el tanque. Esta pérdida solo se aplica una vez en el modelo, cualquier día en el que llueva, debido a que este modelo es de tiempo diario, es decir, se asume que toda la lluvia registrada en un día cae en un solo evento.

- La evaporación, E, del agua en el techo es según la evaporación potencial del día con base a datos estadísticos.

Entonces, el balance del agua en el techo por cada día es:

$$I = GRC - IL - CL - FF - E$$

Balance de la cantidad de agua en el tanque

Para el cálculo del volumen Tennakoon et al. (2018) considera un “top dead storage” que es el área de la tubería para cuando hay desbordamiento agua y en un “bottom dead storage” que es el área debajo de la tubería de suministro de agua del tanque a la casa como se muestra en la Figura 12.

Entonces, la capacidad de almacenamiento, S, será

$$S = volumen\ del\ tanque - TopDS - BottomDS$$

El modelo considera que el tanque estará cerrado para evitar las pérdidas de agua por evaporación o ganancia de lluvia que no sea a través de los canales conectado al tanque.

Entonces el agua almacenada por día será:

$$V = V_{día\ anteriror} + I - O - Y$$

Para hacer este balance es necesario calcular el desbordamiento y el rendimiento por cada intervalo t, en este caso, por cada día. Sin embargo, el agua que entra al tanque, el rendimiento y los desbordamientos pueden ocurrir en cualquier orden inclusive simultáneamente, pero para que el modelo funcione, se necesita asumir un orden para cada uno de estos procesos. Si se asume que el rendimiento ocurre antes del desbordamiento, el modelo es llama YBS (por las siglas en inglés de Yield Before Spill) y si se asume que el rendimiento ocurre después del desbordamiento, el modelo se denomina YAS (por las siglas en inglés de Yield After Spill) (Vieritz et al., 2015; Fewkes, 2000).

Entonces si el modelo sigue la regla YBS, el rendimiento Y para en un día es dado por:

$$Y = \min[D, V_{día\ anterior} + I]$$

$$V = \min[S, V_{día\ anteriror} + I - Y]$$

Si el modelo sigue la regla YAS, el rendimiento Y_t para un tiempo t es dado por:

$$Y = \min[D, V_{día\ aneriror}\ ]$$

$$V = \min[S - Y, V_{día\ anterior} + I - Y]$$

Dado que las ecuaciones de V limitan el volumen del agua en el tanque a su volumen máximo, al final del tiempo t, el desbordamiento se calcula como (Vieritz et al. 2015; Tennakoon et al., 2018):

De forma general

$$O_t = \max[\ Volumen\ de\ agua\ en\ el\ tanque - Volumen\ de\ agua\ máximo, 0]$$

Para la regla YBS es:

$$O_t = \max[\ (V_{día\ anteriror} + I - Y) - S, 0]$$

Para la regla YAS es:

$$O_t = \max[\ (V_{día\ anterior} + I - Y) - (S - Y), 0] = [\ (V_{día\ anterior} + I) - S, 0]$$

De acuerdo con Vieritz et al. (2015), el modelo se utiliza principalmente para determinar si la lluvia recolectada cumple con las demandas de agua. La estimación de este rendimiento se puede expresar de varias formas, como el cálculo de volúmenes de agua que el tanque puede proporcionar, el porcentaje de demanda de agua que satisface la lluvia, entre otros. Por lo general, los datos de las simulaciones del modelo se representan en un *conjunto de curvas* (gráficas) que ayudan a evaluar la selección del área y la capacidad de almacenamiento óptimas. Un ejemplo de los datos generados del modelo y el uso de curvas se muestra a continuación.

En la Figura 17a se observa que, inicialmente, a medida que el área del techo crece, el rendimiento del agua del tanque también crece, pero después de un cierto tamaño del área del techo, el incremento del rendimiento disminuye. Entonces, más incrementos en el área del techo llevarán a mínimas mejoras en el rendimiento (Vieritz et al., 2015).

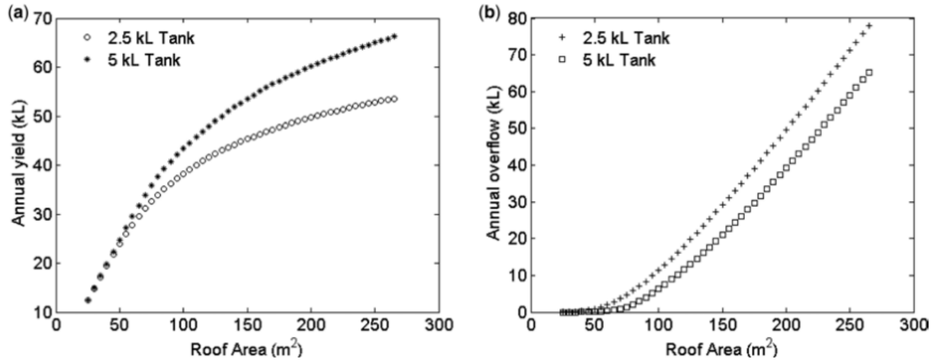


Figura 17. Rendimiento anual (a) y desbordamiento anual (b) para tanques de 2.5 and 5 kL para diferentes áreas de techo conectadas al sistema. Tomado de Vieritz et al. (2015)

En contraste al rendimiento, el desbordamiento (Figura 17b) del tanque conectado a techos con áreas pequeñas es casi cero en la mayoría. Sin embargo, a medida que el área del techo incrementa, los desbordamientos también incrementan. Se puede decir entonces que áreas de techo más grandes llevan a incrementar los desbordamientos (Vieritz et al., 2015).

La Figura18 muestra el rendimiento estimado de tanques de diferentes tamaños y se observa un incremento en el rendimiento con el tamaño del tanque, hasta un punto donde incrementar el volumen del tanque lleva a pequeños incrementos en el rendimiento (Figura 18a). Los desbordamientos muestran un comportamiento diferente (Figura 18b). El volumen del desbordamiento es inversamente proporcional al tamaño del tanque, el incremento el volumen lleva a incrementar la capacidad de almacenamiento, entonces los desbordamientos disminuyen (Vieritz et al., 2015).

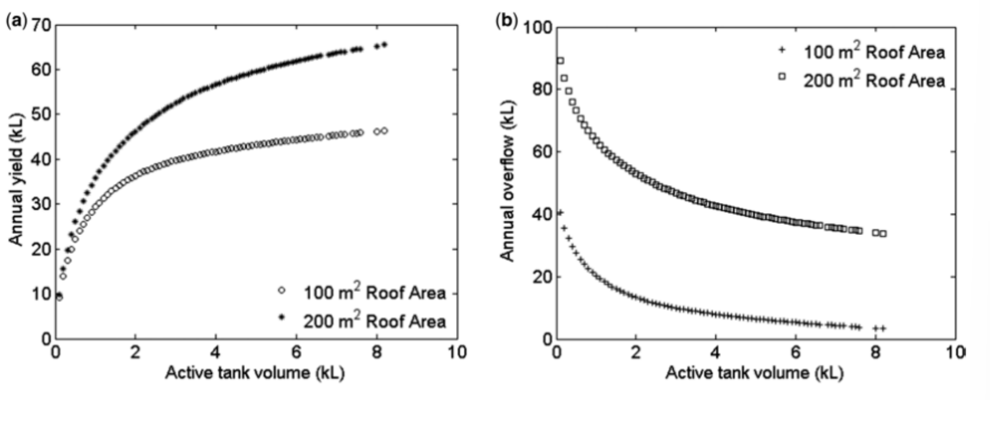


Figura 18. Rendimiento anual (a) y desbordamiento anual (b) para tanques de diferente tamaño (conectados a áreas de techo de 100 y 200 m^3). Tomado de Vieritz et al. (2015)

En los ejemplos anteriores se logra apreciar un uso de la gráfica en esta situación de captación de agua lluvia; desde la explicación del régimen local de lluvia hasta la construcción de argumentos de optimización. El uso de la gráfica en esta situación de captación de lluvia empata con el estatus epistemológico que establecen Suárez y Cordero (2010). Los autores delimitan el estatus epistemológico del uso de la gráfica en tres aspectos: La gráfica *antecede a la función*, es decir conforma elementos de construcción para el desarrollo de ideas variacionales independientes al aspecto analítico del concepto de función; las gráficas no son necesariamente representaciones de una función. La gráfica como *argumento*, es decir son un medio para explicar y construir conocimiento. El uso de la gráfica presenta un *desarrollo*, es decir, el uso de la gráfica se resignifica a medida que sus funcionamiento y formas se debaten en alternancia de tareas.

Como se plantea en la problemática de este trabajo, dada la opacidad que enfrentan los usos del conocimiento matemático en el cuidado del agua potable, se vio una oportunidad en los sistemas de captación de agua lluvia domésticos para recuperar dichos usos y hacer visible su relación con la protección de los recursos del planeta. Es por ello por lo que se buscó identificar las categorías de *Predicción*, *Comportamiento Tendencial* y *Optimización* (véase el capítulo II) en una situación específica de captación de agua lluvia.

En la búsqueda de las categorías de *Predicción*, *Comportamiento Tendencial* y *Optimización*, se determinan dos momentos principales que suceden en la captación de agua lluvia: el régimen local de lluvias y el establecimiento de un modelo para captar la lluvia (Vieritz et al., 2015, Fewkes, 2000; Tennakoon et al., 2018). Así como lo ilustra la Figura 19.

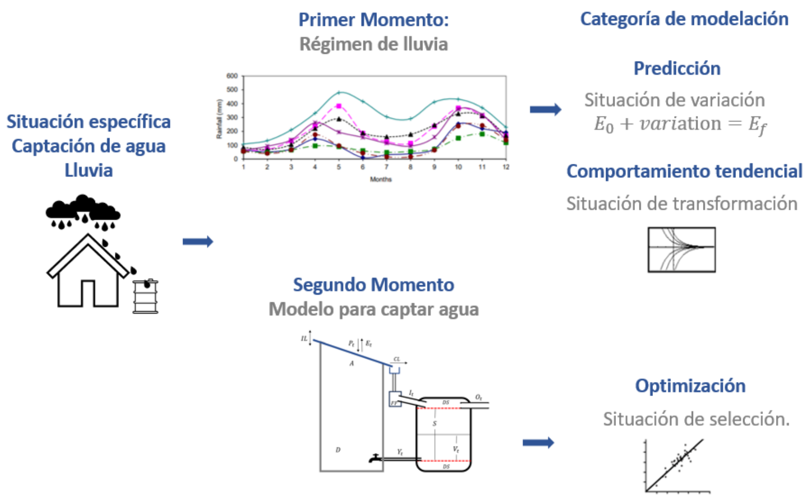


Figura 19. Categorías de modelación en una situación de captación de agua-lluvia.

En el primer momento, el régimen local de lluvia, se logra identificar las categorías de predicción y comportamiento tendencial. En el caso de la predicción, el régimen de lluvia delimita una situación de variación, la cual muestra significados de acumulación al determinar cuánta agua cae en una temporada. Los procedimientos de comparación emergen al determinar que tanto varía la cantidad de lluvia en las regiones del país. Terminando con argumentos de predicción al mencionar los meses en cuales será mejor llenar el tanque y aquellos meses donde será mejor lavarlo. La categoría de comportamiento tendencial fue identificada en la manera que el régimen de lluvia es presentado a través de patrones gráficos de comportamiento, haciendo de la gráfica una instrucción que organiza comportamientos, en este caso el comportamiento de las lluvias.

Una vez se han identificado el comportamiento local de la lluvia, se procede a escoger un modelo para calcular la cantidad de agua-lluvia que se logrará captar. En ese modelo se considera el área del techo, la capacidad del tanque que se usará para captar el agua lluvia y el uso diario del agua en el hogar. Según lo descrito anteriormente sobre el modelo de captación, de acuerdo con el área del techo, la capacidad del tanque, el uso del agua en el hogar y los datos sobre el régimen del agua les permitiría saber si la demanda total del agua será cubierta con el agua lluvia captada. "If the model indicates that spillage is excessive, the user can increase the capacity of the tank store and rerun the model, and so iteratively arrive at a suitable design" (Tennakoon et al., 2018 p. 6). Es en esta parte donde la categoría de optimización es identificada. El *instrumento* (lo estable en la situación) que permite proponer un modelo de captación es la cantidad de lluvia o el patrón de las lluvias que determinada región tiene; con esta información se desarrollan *procedimientos* como la distinción de cualidades; se debe de pensar en el material y el área del techo, el volumen del tanque, la cantidad de agua que se desea cubrir. Los significados en esta situación es el patrón de adaptación que se genera para captar el agua lluvia y que esta permita cubrir cierta demanda de agua, es decir, el modelo que los ingenieros usan para establecer un sistema de captación de agua lluvia.

Por lo tanto, la descripción anterior – las categorías de modelación de *Predicción Comportamiento Tendencial* y *Optimización* y el *uso de la gráfica* desde lo que señalan Suárez y Cordero (2010) – vendrá hacer la base epistemológica del diseño de situación escolar. Es importante mencionar que no se espera que los estudiantes sigan el modelo de los sistemas de captación de agua lluvia descrito anteriormente porque esto iría en contra de la categoría de modelación (véase capítulo II) la cual establece que los significados, procedimientos e instrumentos son construidos de acuerdo con el desempeño de los participantes. Lo que sí se espera de esta base es que permita la construcción de un diseño de situación escolar que rescate los usos del conocimiento matemático en la conservación del agua potable.

Perspectiva de tratamiento: proceso de socialización

Como se mencionó en el Capítulo II, se socializa el conocimiento cuando se construye en comunidad. Esta condición caracteriza el conocimiento como orgánico, situacional e intencional. Lo anterior llevó a pensar en que la disponibilidad y el manejo sostenible del agua potable enmarcado en el ODS6 (UNESCO, 2017) es una realidad que forma parte del cotidiano de la CCM_{ETS} – según Gispert et al. (2018) en la Ciudad de México más de 310,000 hogares no tienen acceso al agua potable y la captación de agua es un medio viable para hacer frente al problema – que se pudiera poner en juego en el DSES propuesto en este proyecto.

Entonces, desde la perspectiva del proceso de socialización del conocimiento matemático como eje de construcción del diseño, se buscó hacer emerger de la CCM_{ETS} los usos de la gráfica como aquel conocimiento orgánico puesto en juego por la comunidad ante una situación de captación de agua-lluvia. Además, se buscó que tales usos se resignificaran en la alternancia de situaciones propuestas en el diseño todo esto con la intensión que las categorías de *Predicción*, *Reproducción de Comportamiento* y *Optimización* emergieran.

Por lo que esta perspectiva de socialización del conocimiento permitirá hacer visible los usos de las gráficas que son opacados en la conservación de los recursos naturales del planeta por el dME. Esto será posible al reconocer la epistemología que norma el uso de la gráfica en la matemática escolar, en contraste con las epistemologías de uso de la gráfica que aparecen en la situación de captación de agua-lluvia a saber: la *Predicción*, *Comportamiento Tendencial* y *Optimización.* Por lo que la perspectiva como uno de los ejes principales del diseño, permitirá la creación de un diálogo entre las epistemologías inferidas en la situación de captación de agua-lluvia y la epistemología del uso de las gráficas privilegiada por el dME.

El desarrollo de las características del conocimiento orgánico, situacional e intencional se hará a través de tres procesos: funcional, historial e institucional (Cordero et al., 2015). Por lo tanto, los usos del comportamiento gráfico que hagan la CCM_{ETS} será lo orgánico del conocimiento y serán expresados por un proceso funcional. Las situaciones que propician dichos usos y sus resignificaciones serán lo situacional y se verán en un proceso historial. Las categorías de *Predicción, Reproducción de Comportamiento* y *Optimización* será lo intencional visto en un proceso de institucionalización. La Tabla 4 resume lo anterior.

Tabla 4. Articulación de los procesos de socialización con la base epistemológica. Adaptado de Chávez-Martínez (2022).

Procesos	**Elementos epistemológicos**
Funcional	Usos de la gráfica del comportamiento de lluvias
Historial	La situación específica de captación doméstica de agua lluvia: Situación de variación Situación de transformación Situación de selección.
Institucional	Las categorías predicción, comportamiento tendencial y selección

Con base en la perspectiva de socialización, este diseño descentraliza la atención de la gráfica como un objeto matemático y se concentra en los usos de las gráficas y cómo esos usos se resignifican.

3.1.3 Fase 3°: Construcción del Diseño de Situación Escolar de Socialización

Antes de mostrar la estructura final del diseño, es conveniente relatar cómo se llegó a ese punto. Por tal razón se hablará de: diseño preliminar, validación del diseño a partir del juicio de expertos y el diseño final.

Diseño preliminar

Anteriormente se determinó que la situación específica sobre la captación de lluvias en los hogares se desarrolla en dos momentos. El primero de esos momentos es un análisis del régimen de las lluvias local y el segundo consiste en el establecimiento del sistema para captar lluvias. Estos momentos identificados en la situación específica permitieron proponer tres momentos para el diseño: el comportamiento de las lluvias (Mo 1), la tendencia de las lluvias: posibles inundaciones o sequías (Mo 2) y la captación de agua lluvias (Mo 3) como se ilustra en la Figura 20.

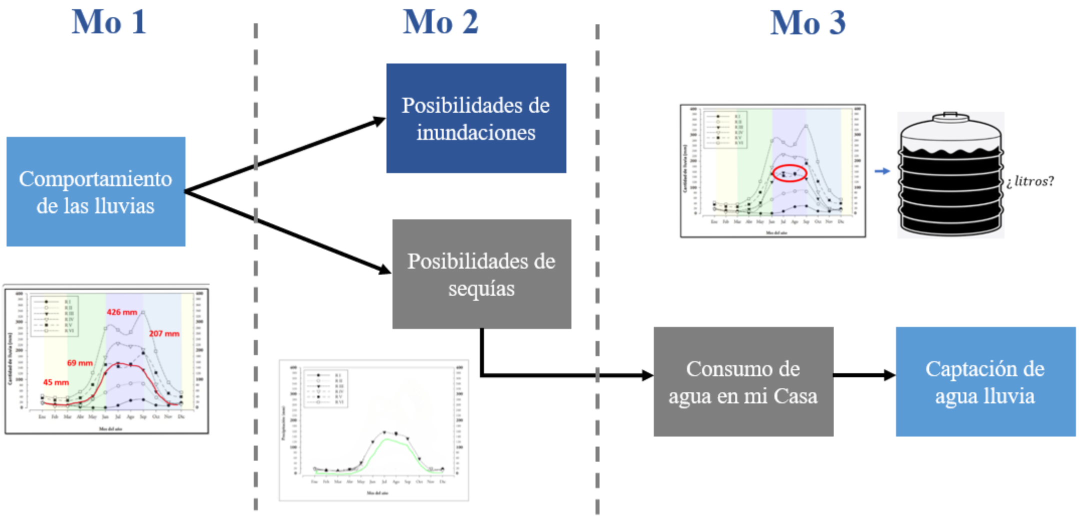


Figura 20. Estructura del *Diseño de Situación Escolar de Socialización*.

En resumen, lo que guía de forma general al diseño es la perspectiva de tratamiento del *proceso de socialización* tal y como se muestra en la Tabla 4. Y de forma más específica lo que guía la estructura del diseño es:

- **La base epistemológica**
- Régimen de lluvia: Mo 1 y Mo 2
- Captación de agua lluvia: Mo 3.
- **La resignificación del uso de la gráfica:**
- Mo 1: La gráfica genera argumentos de predicción.
- Mo 2: La grafica como instrucción que organiza comportamientos.
- Mo 3: La gráfica como lo estable en una situación de selección.

La actividad del Mo 1 se configuró partiendo del comportamiento de las lluvias en la región mexicana según los resultados de un estudio hecho por Méndez et al. (2008). Los autores establecen las tendencias de precipitación en México desde 1920 hasta 2004. Parte de esos resultados es la Figura 21. La Figura 21 a) indica las regiones de México que reciben la misma cantidad de lluvia anual y la Figura 21 b) es la gráfica que muestra la cantidad de promedio de lluvia mensual de esas regiones. Es en este momento que se espera que los estudiantes usen la gráfica para caracterizar el comportamiento de las lluvias de su región y la emergencia de argumentos de predicción.

Para las actividades del Mo 2 se toma en cuenta los resultados del mismo estudio de Méndez y compañeros, donde señalan una tendencia de incrementos hasta de 30 mm por década en precipitaciones de las regiones áridas y semiáridas de México; y decrementos de aproximadamente 30 mm por década en las regiones centro y las costas del Golfo de México. Se espera que los estudiantes usen argumentaciones gráficas para representar estás posibles tendencias.

Las actividades para el Mo 3 responden a los estudios de Vieritz et al. (2015), Fewkes (2000) y Tennakoon et al. (2018). En la lectura de tales estudios se identificaron los significados y procesos involucrados a una situación de selección permitiendo distinguir la categoría de Optimización en este tipo de tareas.

Bajo este marco se formularon preguntas que provocaría la emergencia de dichas categorías de modelación. Más adelante se precisará el porqué de las preguntas en cada uno de los momentos.

Validación del diseño: juicio de expertos

Debido a la complejidad de hacer un pilotaje del diseño con miembros de la población a la que va dirigido se decidió hacer la validación a través del juicio de expertos. Según Escobar-Pérez y Cuervo-Martínez (2008) el juicio de expertos "se define como una opinión informada de personas con trayectoria en el tema, que son reconocidas por otros como expertos cualificados en éste, y que pueden dar información, evidencia, juicios y valoraciones."

Por las características de la población a la que va dirigido el diseño y los constructos que se pusieron en juego en él, se escogieron como expertos a tres maestros en ciencias con la especialidad en Matemática Educativa y a un licenciado en educación con orientación en matemáticas, en donde tres de ellos contaban con trayectorias con los constructos que el diseño pretendía desarrollar y todos con carreras respecto a la elaboración de tareas para estudiantes de secundaria.

Para hacer sus valoraciones, se les explicó a los expertos los objetivos del diseño y se les invitó a resolverlo para que según su conocimiento emitieran juicios sobre (Escobar-Pérez y Cuervo-Martínez, 2008):

- Si las tareas permitían la emergencia de los constructos a analizar en el diseño.
- La complejidad de las tareas.
- Si hay ambigüedad en el contenido de las tareas
- La presentación de las tareas en el diseño.

Esto con el fin de disminuir el sesgo y aumentar la confiabilidad y congruencia del diseño con los objetivos de investigación.

Diseño final

A continuación, se presenta el DSES conformado por 3 momentos. El Mo 1 está conformado por una actividad, el Mo 2 consiste en dos actividades y el Mo 3 por una sola actividad. Después de cada momento se describe el objetivo de las preguntas. Además de las significaciones en la situación, los procedimientos, instrumentos y las argumentaciones esperadas.

Mo 1: Comportamiento de las lluvias.

Actividad 1.

La Figura 21 es el resultado de una investigación hecha en México. En el lado izquierdo de la figura se muestra números romanos que indican las regiones geográficas de México que reciben una determinada cantidad promedio de lluvia mensual. En el lado derecho se muestra la cantidad de lluvia media mensual para el 2004, de las zonas geográficas que señalan al lado izquierdo.

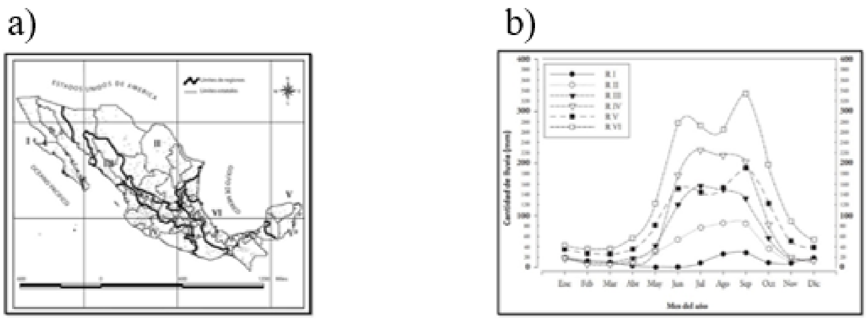


Figura 21. Régimen de lluvias de México. Tomado de Méndez et al. (2008).

Haciendo uso de las figuras anteriores, contesta:

a) ¿En qué estación del año hay más lluvias?
b) ¿Cuál es la estación del año con menos lluvias?
c) ¿Cuál es la estación del año en donde podrías decir que la cantidad de lluvia es uniforme? Justifica tu respuesta
d) ¿Qué podrías decir del comportamiento de las lluvias de la región geográfica en la que vives con respecto a las demás regiones? Justifica tu respuesta.
e) ¿Qué cantidad de lluvia esperarías para este 2023 en tu región geográfica? ¿Por qué?

f) ¿De qué manera crees que te sería útil conocer el comportamiento de las lluvias de tu región geográfica?

Explicación y justificación de la actividad del Mo 1

Objetivos:

1. Hacer uso de la gráfica para predecir el comportamiento de las lluvias en mi región.

2. Evidenciar la emergencia de la categoría de predicción.

Para poner en juego el uso de la gráfica se plantean 6 preguntas. Esta actividad enmarca una situación de *variación* para hacer que argumentos alrededor de la predicción emerjan. Se espera que el estudiantado vea como la cantidad de lluvia varía en su región, es decir, se tiene la intención que la cantidad de variación de la lluvia sea el instrumento que usen los estudiantes para encontrar los significados y construir procedimientos. Los significados en la situación es la cantidad de agua que se acumula por tal razón son planteadas las preguntas a), b) y c). Los procedimientos esperados son la comparación de la cantidad de agua que se acumula ya sea por años, meses, región o temporada por tal razón se formula la pregunta d). Todo lo anterior se espera que coadyuve para generar argumentos de predicción en la pregunta e). La pregunta de f) tiene por objetivo que los estudiantes valoren los usos del conocimiento matemático para la toma de decisiones. En resumen, la emergencia de la categoría de predicción será develada en la identificación de los siguientes elementos mostradas en la Tabla 5.

Tabla 5. Epistemología de uso de la gráfica en el Momento 1 del diseño.

Situación / **Núcleo** / **Elementos de construcción**	**Variación**	Comportamiento de las lluvias.
Significados	Acumulación	Cantidad de lluvia acumulada por periodos
Procedimientos	Comparación de dos estados	Comparación de la cantidad de lluvia por mes, región, estación del año.
Instrumento	Cantidad de variación continua	Gráfica de lluvia mensual
Argumentación/Resignificación	Predicción	Cantidad de lluvia que se espera en un determinado periodo de tiempo (años, estación del año)

Momento 2: Tendencia de las lluvias: posibles inundaciones o sequías.

Actividad 1.

La misma investigación del Momento 1 menciona que existe una tendencia de incrementos hasta de 30 mm por década en precipitaciones de las regiones áridas y semiáridas de México, de igual manera se reportan decrementos de aproximadamente 30 mm por década en las regiones centro y las costas del Golfo de México. Ilustra cómo está tendencia podría afectar al comportamiento de las lluvias de tu región en la actualidad ¿Qué fenómenos podrían desatar esa tendencia de continuar de la misma manera para el año 2030?

Actividad 2.

Haz una ilustración del siguiente caso: si en determinado año en la región geográfica que vives, se espera que llueva 50% menos de la cantidad normal por un periodo de 3 meses o más ¿Cuáles son los problemas que los hogares de tu región enfrentarían por dicho fenómeno?

Explicación y justificación de las actividades del Mo 2

Objetivos:

1. Hacer uso de la gráfica para reproducir la tendencia del comportamiento de las lluvias en una determinada región geográfica.

2. Evidenciar la emergencia de la categoría de comportamiento tendencial.

Las actividades 1 y 2 enmarcan una situación de *transformación* para hacer que argumentos de reproducción de comportamientos emerjan. Se espera que los estudiantes usen la gráfica dada en el Mo 1 como una instrucción que organiza comportamientos, esto será el instrumento. Se asume que lo anterior permitirá que el estudiantado signifique los patrones de comportamiento de las lluvias de su región y desarrolle procedimientos relacionados a la variación de parámetros de los puntos de la gráfica del Mo 1. Por lo tanto, se espera que el estudiantado reproduzca un nuevo comportamiento gráfico de las lluvias de su región.

La diferencia entre las actividades 1 y 2 es que la actividad 1 tiene como base el estudio del Mo 1 y tiene 2 posibles respuestas, una relacionada a inundaciones y otra relacionada a sequías. En cambio, la actividad 2 responde al reconocimiento de posibles sequías cuando hay reducciones significantes de lluvias en los niveles registrados, entonces la región atraviesa un periodo de sequía. Por lo tanto, la Actividad 2 también tiene la intención de hacer que el estudiantado reconozca el potencial de posibles sequías de su región.

Tabla 6. Epistemología de uso de la gráfica en el Momento 2 del diseño.

Situación Núcleo / Elementos de construcción	Transformación	Tendencias del comportamiento de las lluvias
Significados	Patrones de comportamiento gráficos y analíticos	Gráficas de comportamiento de las lluvias
Procedimientos	Parámetros de variación	Variación de parámetros de los puntos en la gráfica
Instrumento	Instrucción que organiza comportamientos	La gráfica como instrucción que organiza comportamientos
Argumentación/Resignificación	Comportamiento tendencial	Modelar un nuevo comportamiento de la gráfica.

Mo 3: Captación de agua lluvias

Actividad 1.

Usa el recibo del agua de tu domicilio para saber cuál es el consumo mensual de agua potable y determina la cantidad de agua que se usa en cada tarea según la información de abajo.

Ciertos estudios afirman que el consumo normal de agua potable en un hogar es de 30% en los excusados; un 30% en las regaderas, 11% en las lavadoras de ropa, 7% en el riego de jardín, 2% en limpieza y lavado del coche, 2% en cocinar, 6% lavado de platos, 6% higiene personal y 5% en otros. Hacer frente a estas demandas en periodos secos es muy difícil por la restricción de agua. En la Ciudad de México se han desarrollado diferentes programas de captación de lluvias para hacer frente a los problemas de agua que provocan los periodos secos. Las siguientes preguntas te ayudaran a reflexionar en cómo puedes usar el agua de las lluvias en tu hogar:

a) ¿Qué actividades domésticas que usan agua potable en tu hogar podrías llevarlas a cabo con el agua de las lluvias?
b) ¿Cuánta agua potable se estaría ahorrando si para atender a esas tareas del hogar usaras el agua de la lluvia?
c) Ilustra de qué manera captarías el agua lluvia que cae en tu hogar.
d) Haz un cálculo aproximado de la cantidad de lluvia que esperas captar.
e) ¿La cantidad de agua lluvia que se recogerá satisface las demandas del consumo de agua para las tareas que has descrito en la pregunta b)?
f) Si la cantidad de agua lluvia que esperas captar no satisface el consumo de agua de las tareas que has escrito, ¿qué cambiarías en tu respuesta de la pregunta c) para satisfacer

esas tareas? Es importante que no borres nada de tu primera idea. Además, trata de contestar nuevamente las preguntas d) y e) si haces alguna modificación.

Explicación y justificación de la actividad del Mo 3

1. Hacer uso de la gráfica para saber la cantidad de lluvia que se espera almacenar.

2. Evidenciar la emergencia de la categoría optimización.

La primera parte de la Actividad 3 tiene el objetivo de acercar a los estudiantes a su realidad al pedirles que calculen el consumo de agua potable de sus hogares. Para ello pueden usar el recibo de agua de sus casas o el consumo promedio diario de una persona que vive en la Ciudad de México. Otro objetivo de esta primera parte es hacer pensar a los estudiantes acerca de los posibles problemas de sequías que podrían enfrentar y cómo la captación de agua-lluvia podría ayudar a enfrentar tales problemas. Esta es la razón del planteamiento de las preguntas a) y b).

Se espera que las preguntas c)-f) revelen la emergencia de la categoría de Optimización. La captación de agua-lluvia enmarca una situación de *selección* que se puede ver en diferentes partes del proceso: cómo los estudiantes colectarán, transportarán y almacenarán el agua-lluvia. Para contestar a estas preguntas se espera que el estudiantado determine la cantidad de agua lluvia que espera recibir de acuerdo con su región, esto será el *instrumento*, es decir, lo estable de la situación, es por ello por lo que se plantea la pregunta d). Las significaciones será los modelos (los patrones de adaptación) que los estudiantes sugieran para la captación de agua lluvia, por tal razón es la pregunta c). Conociendo lo estable y los patrones de adaptación, se espera que desarrollen procesos de distinción de cualidades de los recursos para la captación de agua-lluvia; desde que la lluvia cae en el hogar hasta el recipiente donde se almacenará (un recipiente ni muy grande y ni muy pequeño). Esto podría involucrar procedimientos para identificar el tamaño optimo del recipiente de almacenamiento. Lo anterior podría hacer pensar acerca del mejor lugar para poner el recipiente de almacenamiento y en la mejor forma de transportar y almacenar el agua-lluvia, por tal razón son las preguntas e) y f).

Tabla 7. Epistemología de uso de la gráfica en el Momento 3 del diseño

Situación / **Núcleo** **Elementos de construcción**	**Selección**	Captación de agua lluvia
Significados	Patrón de adaptación	Estrategias para captar, transportar y almacenar el agua lluvia.
Procedimientos	Distinción de cualidades	Capacidad de almacenamiento del tinaco.

Instrumento	Lo estable	Cantidad de lluvia que espero según mi región geográfica.
Argumentación/Resignificación	Optimización	Cantidad de agua lluvia que permita el ahorro de agua potable.

3.1.4 Fase 4°: Puesta en escena e inmersión profunda

Fue hasta la puesta en escena, es decir, la implementación del diseño con la CCM_{ETS} que se llevó a cabo una inmersión profunda en la comunidad. Para hacer dicha inmersión se solicitó permiso al director y subdirectora de la secundaria. Luego, fue necesario hacer la solicitud a la Subsecretaría de Escuelas Técnicas de la Secretaría de Educación Pública.

Dicha inmersión se llevó en tres momentos: observación de la CCM_{ETS} en sus clases de matemáticas, implementación del diseño y entrevistas a algunos miembros de la comunidad. Es importante mencionar que una semana previa a las observaciones de clases el investigador fue presentado al maestro del curso por la subdirectora del centro. En esa semana se le explicó al docente sobre los propósitos de la investigación y se le pidió su colaboración para poder trabajar con el estudiantado las siguientes tres semanas. Además, al docente se le brindó una copia del DSES por sí él deseaba hacer alguna observación al respecto.

Observación de las clases: se observó a la CCM_{ETS} en su clase de matemáticas por dos razones principales. La primera fue establecer un vínculo previo a la implementación del diseño. La segunda fue para hacer un acercamiento de cómo el estudiantado construye sus argumentos en las tareas desarrolladas en la clase.

Las observaciones se hicieron durante la clase de matemáticas con una duración de 50 minutos cada una. La técnica para la observación de clases fue la observación participante de acuerdo con Torres-Corrales (2019), se sugiere este tipo de observación cuando el objeto de estudio es un grupo y no un individuo y la intensión está centrada más en la compresión del fenómeno en su contexto natural de emergencia.

El resultado de las observaciones fue la escritura de notas breves para luego ser complementadas con notas mentales que el investigador recordaba. Los resultados de estas observaciones son mostrados en el capítulo de resultados.

Implementación del DSES. La implementación se desarrolló en el aula de matemática de la CCM_{ETS}, durante la hora de dicha clase (50 min). La implementación del diseño fue llevada a cabo por el investigador (el docente estaba presente durante la resolución del diseño). El diseño fue desarrollado en grupos de trabajo conformados por tres estudiantes debido a que esa era la manera que ya trabajaban en la clase de matemática, además, esa forma de trabajar convenía a la investigación.

Terminar por completo el diseño tomó 3 horas clases, es decir, el estudiantado resolvía un momento del diseño por hora clase al día. Durante la resolución del diseño, había un diálogo entre estudiante-estudiante e investigador-estudiante. En la sección de análisis de resultados se detalla el producto de estos diálogos. Generalmente los días de implementación se empezaban por preguntas o discusiones motivadas por el investigador que atendieran a las tareas que el momento pretendía desarrollar. Durante la implementación fue un poco difícil hacer observaciones respecto a los diálogos estudiante-estudiante debido por la cantidad de grupos que había en el curso.

Entrevistas. Una vez que se terminó con el momento 3 del diseño, se revisaron las respuestas dadas por el estudiantado y se procedió a escoger a aquellos participantes cuyas respuestas se acercaran más a los objetivos de la investigación. Mientras se revisaban las respuestas se iban creando las preguntas que se le harían a los participantes escogidos. Al final de la revisión se optó por escoger a un representante por equipo de trabajo. La manera que se llevaron a cabo las entrevistas responde a lo que apunta Torres-Corrales (2019) respecto a las *entrevistas individuales*.

Es importante mencionar que previo a las entrevistas se habló con la subdirectora de la secundaria para solicitar un espacio dentro de la institución donde se pudieran realizar dicha actividad con los representantes de cada equipo. Las entrevistas con cada representante no fueron mayor a 12 minutos dado que se realizaron dentro de la institución y en el mismo horario de la clase de matemáticas para no afectar el desempeño de los estudiantes en sus otras clases.

3.1.5 Fase 5: Análisis de datos y resultados.

Unidad de análisis.

Como se especifica al inicio de este capítulo, para dar respuesta a la pregunta de investigación se pretende capturar los usos del conocimiento matemático que le son propios a la CCM_{ETS}, por lo que esta comunidad de conocimiento vendría a ser la *unidad de análisis*. En el Capítulo II se afirmó que los elementos que componen a la comunidad de conocimiento son: *reciprocidad*, *intimidad* y *localidad*. Entonces, fueron estos los elementos que se tomaron en cuenta para analizar los usos del conocimiento de la CCM_{ETS}.

Desde la *reciprocidad* se analiza el conocimiento que surge por el compromiso mutuo entre los de la comunidad por resolver el DSES y de las interacciones de dichos miembros al resolver el DSES.

Desde la *intimidad* se analiza el conocimiento que es privado de la comunidad. En este apartado se analiza la mayor parte del trabajo que hizo la comunidad en el diseño porque se esperan que desde la intimidad de la comunidad emerjan los usos del conocimiento matemático. Es por ello por lo que también en este apartado se consideran los procesos de socialización propuesto por Gómez (2015).

Para atender a tales procesos se formularon las siguientes preguntas:

- **Proceso funcional**: ¿Cuáles son los usos de la gráfica en cada momento del diseño, según su *funcionamiento* y su *forma*?
- **Proceso historial**: ¿De qué manera los estudiantes resignifican el uso de la gráfica entre los momentos 1 y 2; y los momentos 2 y 3 según el debate entre el funcionamiento y forma de cada uso?
- **Proceso institucional**: para evidenciar la emergencia de la categoría de predicción, comportamiento tendencial y optimización se busca contestar: ¿qué argumentaciones generan los estudiantes en las actividades?, ¿qué significan los estudiantes según sus argumentaciones?, ¿qué procedimientos construyen para llegar a esas argumentaciones?, ¿qué instrumentos usan en sus argumentaciones?

Desde la *localidad* se busca identificar los aspectos regionales y expresiones que forman parte de la jerga "disciplinar" que permean las argumentaciones de la CCM_{ETS}.

Al considerar estos tres elementos se develó los usos de la gráfica que son propias de la CCM_{ETS} así como la resignificación de tales usos y la epistemología que rigió dicha resignificación. Fue hasta este momento que se procedió a exponer el *eje identidad* de la comunidad de este estudio. Los momentos de *legitimidad*, *resistencia* y *proyecto*, que conforman este eje, fueron robustecidos desde lo propio de la CCM_{ETS}.

El *eje institucional* referente al uso de las gráficas desde la tradición del conocimiento de la comunidad fue configurado en la Sección 3.1 Entonces, al finalizar este análisis se muestra por completo el modelo de la CCM_{ETS} que sintetiza el conocimiento matemático de la comunidad referente al uso de la gráfica.

Triangulación de datos

Según Hernández-Sampieri et al. (2014) para dar mayor validez a los resultados mostrados en una investigación conviene acudir a varias fuentes de información para luego hacer una triangulación de esta. Por lo que, para dar más confiabilidad sobre lo que se afirma que le es propio a la comunidad se hace una triangulación rescatando la revisión de los libros de textos de tercero de secundaria, la revisión de los estudios sobre la captación de agua, las respuestas obtenidas en el diseño por parte de la comunidad y las entrevistas realizadas a los representantes de los equipos de trabajo de la comunidad.

En el siguiente capítulo se presenta a detalle sobre el análisis y los resultados del estudio.

Capítulo IV

Análisis de datos y resultados: lo propio de CCM_{ETS}

Para el análisis de los datos se consideraron únicamente el trabajo de 8 de los 15 grupos que conformaban a la CCM_{ETS} . Esto a razón que después de hacer una revisión se escogieron a aquellos grupos que se acercaron más a los objetivos de la investigación y que presentaron un trabajo completo (terminaron cada una de las tareas en el diseño). Los grupos analizados fueron:

Tabla 8. Grupos de trabajo de la CCM_{ETS}

Grupo	Integrantes
1	2 mujeres, 1 hombre
2	3 mujeres
3	2 mujeres, 1 hombre
4	2 mujeres, 1 hombre
5	1 mujer, 2 hombres
6	1 mujer, 2 hombres
7	3 mujeres
8	2 mujeres, 1 hombre

El análisis mostrado en este capítulo sigue el orden dado en la Figura 22.

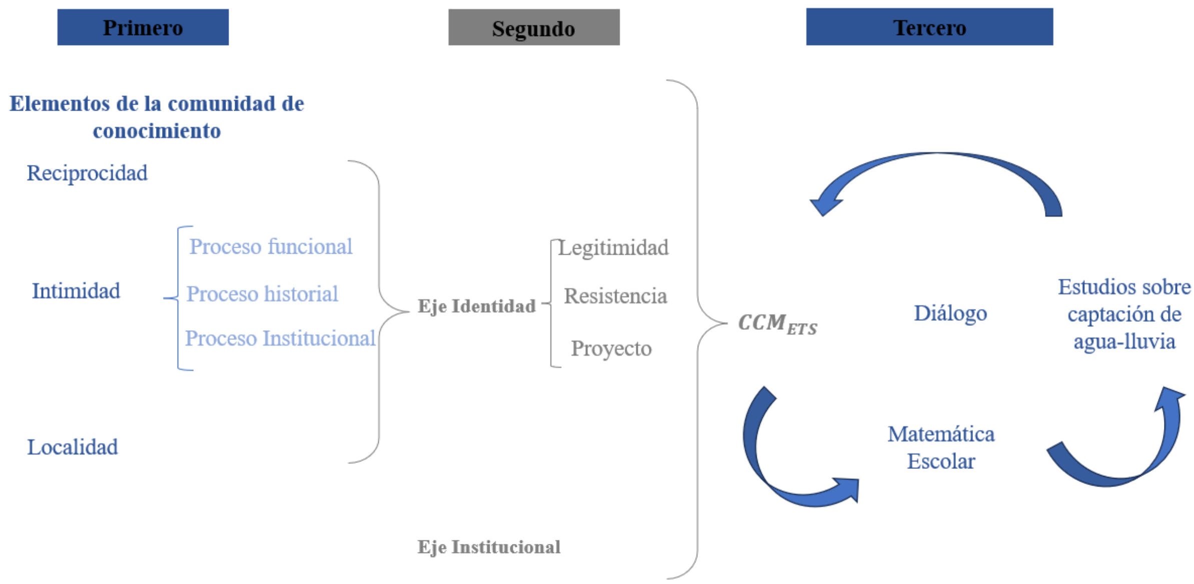


Figura 22. Orden del análisis de los datos

Para el análisis primero se delimitaron los datos correspondientes a los elementos que conforman a la comunidad de conocimiento: reciprocidad, intimidad y localidad. Los resultados obtenidos en este primer momento, *lo propio de la comunidad*, contribuyeron a la segunda parte del análisis. En esta segunda parte se conformó al eje de *identidad*, que junto con el eje de *institucionalización* (configurado en el Capítulo III), permiten completar el modelo de CCM_{ETS}, es decir, permite sintetizar "*la puesta en uso del conocimiento matemático con sus resignificaciones"* (Cordero et al. 2022b, p.81). El análisis concluye con una tercera parte ubicada en el capítulo de reflexiones y conclusiones de este proyecto.

4.1. Reciprocidad en CCM_{ETS} brindada por el DSES

La *reciprocidad* en el modelo de CCM se ve expresada en el conocimiento que emerge en el compromiso mutuo de la comunidad en una situación específica. En este caso, la resolución del DSES vendrá a ser el generador de ese compromiso. Además, las condiciones del entorno hicieron más fuerte el compromiso (véase Capítulo IV de la sección de implementación) de atender a la situación específica de la captación de agua lluvia contenida en el DSES. Ese compromiso fue establecido entre estudiante-estudiante e investigador-estudiante.

El compromiso estudiante-estudiante se vio expresado al momento de plantear sus argumentaciones en el DSES, al estar en equipos de trabajo y en las discusiones que se desarrollaban al abordar las tareas del diseño. Un ejemplo de ese planteamiento se muestra en la Figura 23.

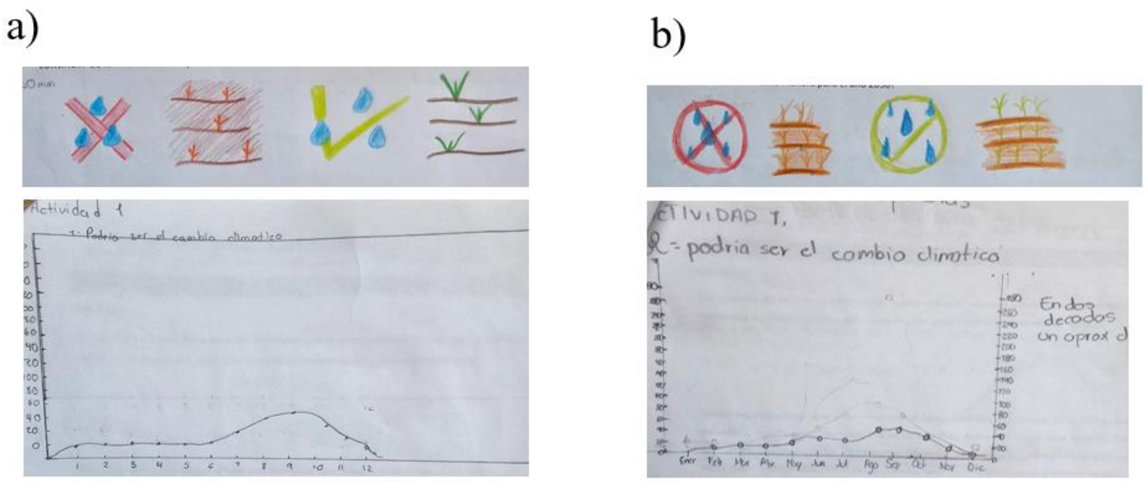


Figura 23. Argumentación mostrada por dos integrantes del equipo 1 en la actividad 1 del Mo 2.

La similitud de las respuestas en el trabajo en equipo es un aspecto que se rescata de la reciprocidad de la comunidad. Como se logra apreciar en la imagen (Figura 23) los miembros de la comunidad llegaban a acuerdos para unificar sus respuestas como equipo (este hecho apareció en todos los trabajos de la comunidad). Para alcanzar dicho acuerdo la comunidad pasaba por momentos de discusiones respecto a qué argumentación debía ser plasmada. Se logra apreciar que una parte del equipo había pensado en ilustrar las tendencias de decrecimiento de las lluvias mediante figuras alusivas a los efectos de esta, pero otra parte del equipo pensó en realizar una argumentación gráfica, al final ambas respuestas quedaron expresadas en el DSES. Además, esta reciprocidad de ideas permitía superar algunas dudas que emergían en el desarrollo del diseño. Por ejemplo, el representante del Grupo 4 mencionó en la entrevista que *compartir la propuesta de lo que hice con mi equipo* sirvió para superar esos momentos de incertidumbres.

Dentro de esas discusiones que sostenían cuando respondían la pregunta e) del Mo 1, algunos grupos (Grupos 5 y 8) afirmaron que no era posible predecir la cantidad de lluvia con la gráfica dada, el segundo de estos lo mencionó también de forma escrita (véase la Figura 24).

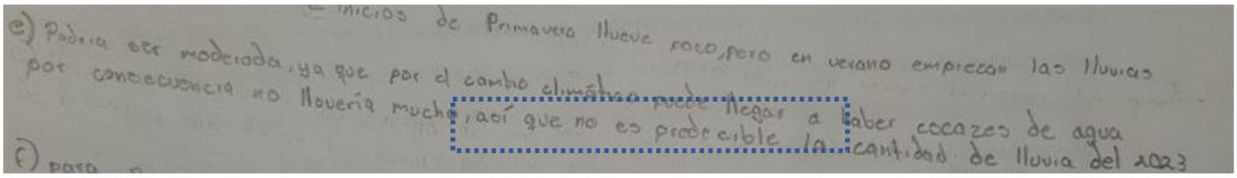


Figura 24. Respuesta de un integrante del Grupo 8 ante la pregunta e).

Transcripción de la respuesta del integrante del Grupo 8: "*Podría ser moderada, ya que por el* ***cambio climático*** *puede llegar a* ***haber escasez de agua*** *por consecuencia no llovería mucho, así que* ***no es predecible la cantidad*** *de lluvia del 2023*".

En contraste, el grupo 5 afirmó que partir de datos del 2004 para predecir la cantidad de lluvia en el 2023 no se podría hacer debido a que los datos tenían casi dos décadas de antigüedad.

El conocimiento acerca del clima y cambio climático de la CCM_{ETS} en cierta manera influía en la actividad matemática de la comunidad. También lo podemos ver en la respuesta escrita del Grupo 3.

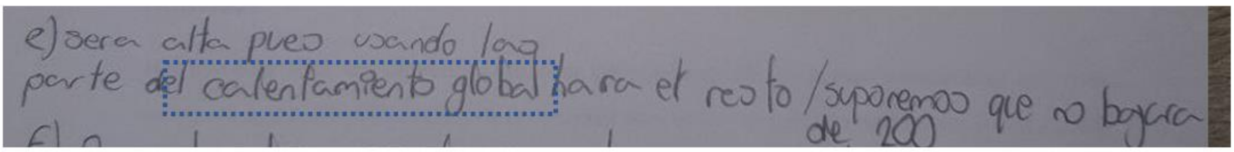


Figura 25. Respuesta de una integrante del Grupo 3 ante la pregunta e).

Cabe destacar como las ideas de cambio climático o calentamiento global hace pensar a los participantes tanto es escasez de lluvia o aumento en las lluvias.

El compromiso de investigador-estudiante se vio expresado en las intervenciones antes y durante el desarrollo del diseño al hacer preguntas guías a la CCM_{ETS}. Por ejemplo, ante respuestas dadas usando adjetivos indefinidos como “mucha lluvia”, “poca lluvia”, el investigador hacia énfasis en la palabra cantidad, preguntándoles, ¿cuánto es mucho?, ¿cuánto es poco?

Ante las afirmaciones sobre que no era posible predecir la cantidad de lluvia para el 2023, el investigador mencionó de nuevo la descripción de la tarea donde se menciona que la gráfica es el resultado de una investigación en México donde se analizaron casi 800 estaciones climáticas que habían registrado lluvias por más de 80 años para establecer el comportamiento promedio de las lluvias en México. Aun así, los estudiantes sostuvieron sus respuestas.

Fue hasta el Mo 2 del diseño que la idea de predecir la cantidad de lluvia les hizo más sentido a los grupos que se oponían a la tarea de predecir: la cantidad de lluvia para el 2023 partiendo del comportamiento promedio de las lluvias mostrado en el 2004. Lo que permitió darle ese sentido fue la situación de transformación que enmarcaba tendencias de crecimiento y decrecimiento del comportamiento de las lluvias a través del tiempo.

Entonces, este compromiso mutuo expresado en las interacciones por parte de los miembros de la CCM_{ETS} y delimitado por el DSES en la atención de la captación de agua-lluvia apoyó la emergencia de un conocimiento que nace en la intimidad de la comunidad y es el que a continuación se muestra.

4.2. Intimidad: los usos del conocimiento matemático de CCM_{ETS}

El modelo de CCM señala que la intimidad es el uso del conocimiento matemático propio de la comunidad, el cual no es público. Por tal razón la mayor parte del trabajo matemático desarrollado por los participantes de la CCM_{ETS} en está en esta sección.

Para caracterizar el conocimiento privado de la CCM se siguieron los procesos de socialización del conocimiento. Las preguntas que guiaron dicha caracterización se enmarcan de la siguiente manera:

Proceso funcional: ¿Cuáles son los usos de la gráfica en cada momento del diseño, según su funcionamiento y su forma? Para dar cuenta del funcionamiento se preguntó *¿qué es lo que o para qué lo hace?* Para dar cuenta de la forma se preguntó *¿cómo lo hace?*

Proceso historial: ¿De qué manera los estudiantes resignifican el uso de la gráfica entre los momentos 1 y 2; y los momentos 2 y 3 según el debate entre el funcionamiento y forma de cada uso?

Proceso institucional: Evidenciar la emergencia de la categoría de predicción, comportamiento tendencial y optimización al contestar: ¿qué argumentaciones generan los estudiantes en las actividades?, ¿qué significan los estudiantes según sus argumentaciones? ¿qué procedimientos construyen para llegar a esas argumentaciones?, ¿qué instrumentos usan en sus argumentaciones?

4.2.1 Proceso funcional: usos de la gráfica por parte de CCM_{ETS}

Usos de la gráfica en el Momento 1:

7 de los 8 grupos analizados presentan el siguiente uso de la gráfica en el Mo 1:

Tabla 9. Uso de la gráfica mostrado por los Grupos 2-8 en el Mo 1 del diseño.

Funcionamiento	**Forma**
Predecir la cantidad máxima/mínima de lluvia para la región III en el 2023.	Establecer periodos de tiempo donde la gráfica alcanza un "máximo" y cuando la gráfica llega a un "mínimo".
Uso: la gráfica como modelo de predicción a través de máximos y mínimos.	

Nota: durante la implementación, ante la pregunta e) del diseño, dos de los grupos afirmaron que no es posible predecir la cantidad de lluvia por el cambio climático, pero de igual manera describieron el comportamiento de las lluvias para el 2023.

La Figura 26 da evidencia del uso de la Tabla 9.

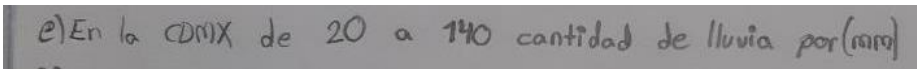


Figura 26. Uso de la gráfica por parte del representante del Grupo 6.

Cuando se le preguntó cómo encontró los valores 20 y 140 mm el estudiante contestó:

"Primero observé que la cantidad se mide en milímetros. Para que no fuera tan al azar me apoye con una regla para ver la altura máxima y la altura mínima."

El uso que emergió en el grupo restante (Grupo 1) fue el siguiente

Tabla 10. Uso de la gráfica mostrado por el Grupo 1 en el Mo 1 del diseño.

Funcionamiento	Forma
Predecir la cantidad total de lluvia de toda la República Mexicana en el año 2023.	A través de la acumulación mensual de lluvia presente en la gráfica.
Uso: la gráfica como modelo de predicción según la acumulación total	

Es importante hacer notar que la pregunta del diseño solo pedía la cantidad de lluvia de la región en la que las estudiantes vivían.

La Figura 27 da evidencia del uso de la Tabla 10.

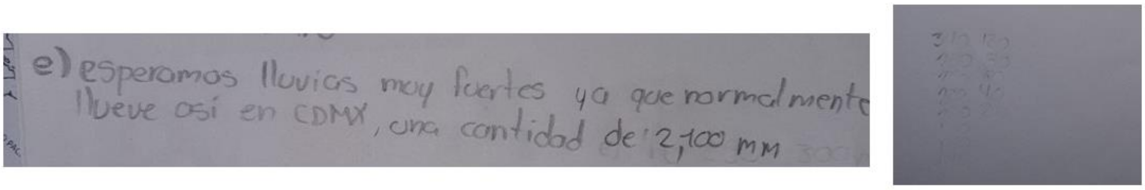


Figura 27. Uso de la gráfica por parte de la representante del Grupo 1.

Ante la pregunta de cómo encontró el valor de 2, 100 mm de lluvia la representante del Grupo 1 menciona:

"Porque empezamos a sumar las cantidades en las gráficas, aquí se puede ver 340, después sumamos 280, y así lo fuimos sumando hasta llegar a un aproximado."

Usos de la gráfica en el Momento 2:

7 de los 8 grupos analizados presentan el siguiente uso en el Mo 2

Tabla 11. Uso de la gráfica mostrado por el Grupo 1 y Grupos 3-8 en el Mo 1 del diseño.

Funcionamiento	Forma
Reproducir el comportamiento con tendencia de las lluvias de su región para el año 2023.	Graficar, a través de la variación de parámetros, el comportamiento tendencial que presentan las lluvias de la región geográfica del estudiante.".
Uso: la gráfica como instrucción que organiza comportamientos	

La Figura 28 y 29 da evidencia del uso de la Tabla 10.

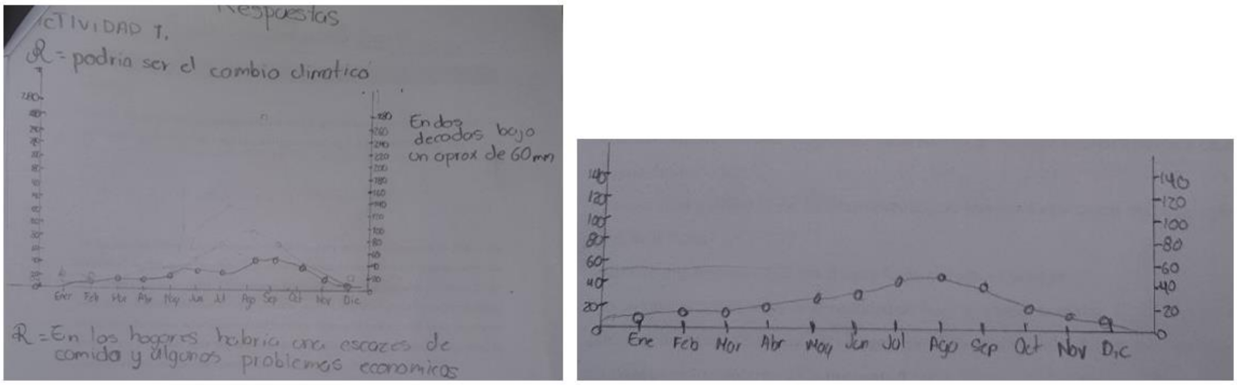


Figura 28. Uso de la gráfica por parte de la representante del Grupo 1.

Ante la pregunta: ¿qué le permito a usted construir esa gráfica? La representante del Grupo 1 menciona:

"En la parte del momento 2 nos dice que por cada década se disminuía un 30 ¿mililitros?, milímetros. Entonces, del 2004 al 2023 son aproximadamente 2 décadas, entonces llegamos a la conclusión de que fueron 60, si el punto máximo de nuestra región creo que se encontraba por 80 más o menos, no, no fue por 80, fue por 100 más o menos, en el que nuestra región se encontraba la lluvia máxima, ***entonces solo le restamos el 60 y ya llegamos que el punto máximo para el 2023 podría llegar a 40."***

A lo que el entrevistador pregunta: ¿solo al punto máximo le resto?, la estudiante responde

"Bueno, intentamos restar igual a los puntos mínimos, pero como está un poco complicado, hicimos un aproximado."

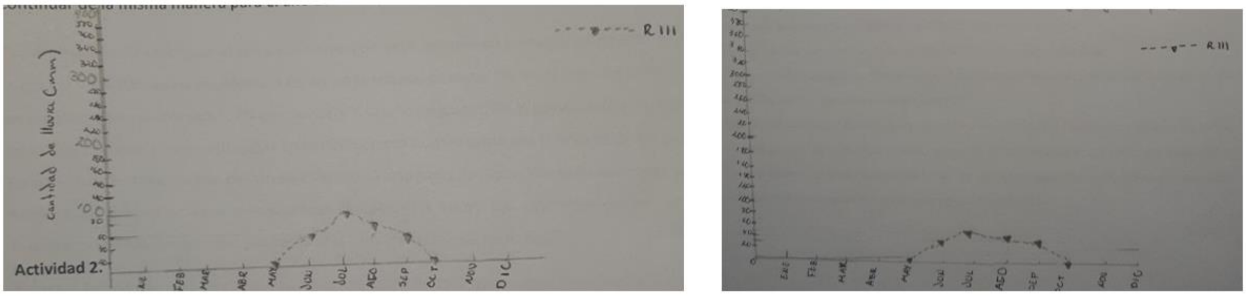


Figura 29. Uso de la gráfica por parte del representante del Grupo 8.

Cuando se le pregunta al estudiante, ¿cómo la hizo?, ¿en qué se apoyó para hacerla?

En la primera (se refiere a la gráfica del Mo 1) *y por* ***los 30 mililitros le fui quitando a cada mes****, por la región donde está el Distrito Federal.*

A lo que el entrevistador le pregunta ¿a qué le fue quitando?

*"**le fui restando** lo que era de lluvia en el 2004, le fui restando 30* ***mililitros*** *al agua que era de lluvia en la región 3. A la cantidad de lluvia que había en cada mes"*

El uso del grupo restante se muestra en la Tabla 11.

Tabla 11. Uso de la gráfica mostrado por el Grupo 2 en el Mo 2 del diseño.

Funcionamiento	Forma
Representar los máximos de lluvias para las décadas subsecuentes al 2004.	Graficar a través de los valores máximos de lluvia en correspondencia a las décadas subsecuentes al 2004
Uso: la gráfica como una correspondencia de puntos.	

La Figura 30 da evidencia del uso mostrado en la Tabla 11.

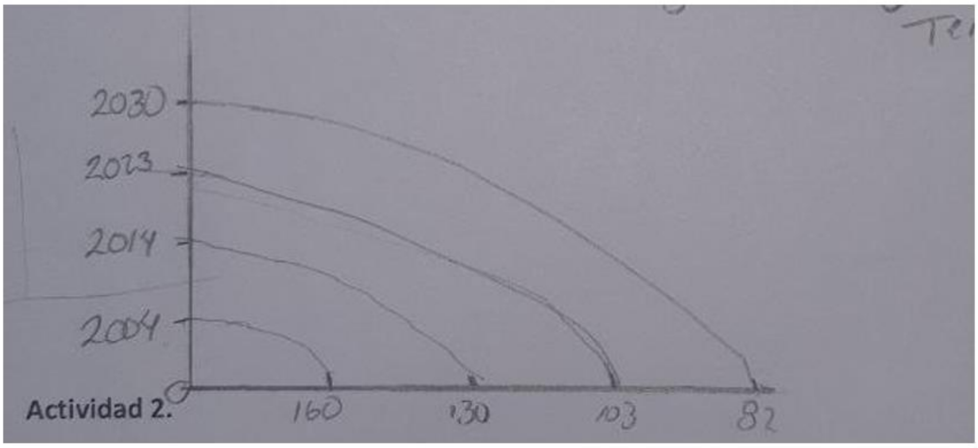


Figura 30. Uso de la gráfica por parte de la representante del Grupo 2.

Ante la pregunta cómo hicieron esa gráfica, la estudiante responde:

[risas] *"fue porque ya no nos dio tiempo de graficar"*

Usos de la gráfica en el Momento 3:

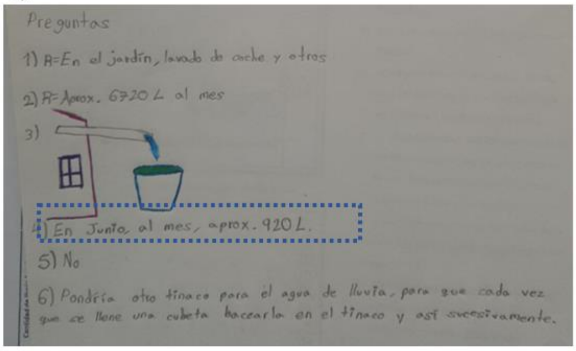
2 de los grupos analizados presentaron el siguiente uso de la gráfica.

Tabla 12. Uso de la gráfica mostrado por los Grupos 1 y 6 en el Mo 3 del diseño.

Funcionamiento	Forma
Determinar el mejor momento para la captación de agua-lluvia.	Establecer el inicio de temporadas lluviosas y secas.
Uso: distinguir de cualidades locales	

La Figura 31 da evidencia del uso mostrado en la Tabla 12

a)



b)

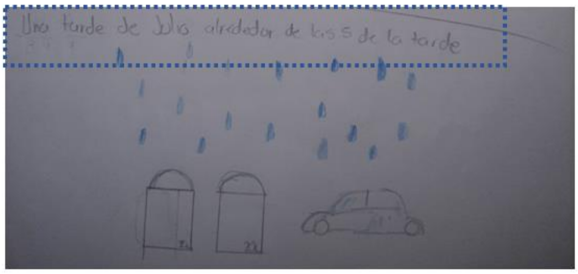


Figura 31. Uso de la gráfica por parte del representante del Grupo 6 (a) y la representante del Grupo 1 (b).

Ante la pregunta cómo captaría el agua en su hogar de acuerdo con lo que realizó en las actividades, el estudiante respondió (Véase Figura 31a):

"*De hecho en mi familia así le hacemos, pero nada más lo hacemos cuando es temporada de lluvia, cuando llueve así de repente no lo hacemos...*"

Cuando se le pregunta si la gráfica del Mo 1 jugó algún papel para contestar las preguntas sobre la captación de agua el estudiante responde:

"Sí, porque así pudimos intuir cuáles son los meses en los que va a llover para preparar el sistema y sacar la tina en esos meses."

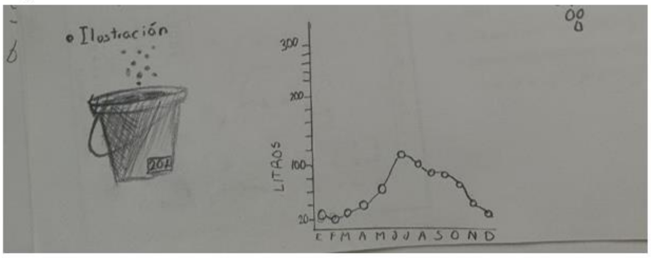
Los Grupos 2, 5 y 8 mostraron el siguiente uso:

Tabla 11. Uso de la gráfica mostrado por el Grupo 2, 5 y 8 en el Mo 3 del diseño.

Funcionamiento	Forma
Determinar la cantidad de agua-lluvia a captar.	Construir un modelo gráfico.
Uso: modelar el patrón de acumulación de la cantidad de lluvia	

La Figura 32 da evidencia del uso mostrado en la Tabla 11.

a)



b)

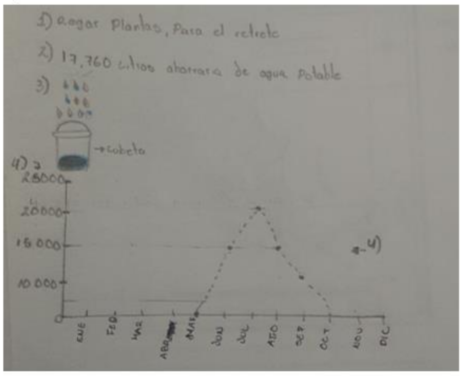


Figura 32. Uso de la gráfica por parte del representante del Grupo 5 (a) y el representante del Grupo 8 (b).

El entrevistador le pregunta al representante del Grupo 5 (Figura 32 a) por qué hace una gráfica ante la pregunta de cuánta agua espera captar en el diseño. El estudiante responde:

Este, fue cómo que de por día unos, como no llueve a diario, 20 litros por día. Un ***promedio*** *del mes seria como unos 20 litros, como por ejemplo marque la cubeta. También esta varía con las cubetas que pongas porque no va a hacer la misma cantidad de que pongas 2 cubetas a que pongas más.*

El entrevistador le pregunta de qué manera le ayudó hacer una gráfica, a lo que el estudiante responde:

"Como, por ejemplo, guiarme, sobre cuanto podía recolectar aproximadamente"

El entrevistador le pregunta al representante del Grupo 8 (Figura 32 b), ¿qué papel tiene la gráfica en la captación de agua-lluvia? El estudiante responde:

"Es un poco con base a la pregunta 2, que me preguntan cuántos litros de agua ahorraría, esto ya lo gráfique y lo puse hasta 25,000 para saber y como sé que tal vez no ocupe esta cantidad, lo que quise hacer, fue ponerle más cantidad para poder tener un aproximado ***y en los meses que más llueve****, pues fui subiendo lo del agua como yo pensaría captarlo."*

El entrevistador junto con el estudiante hace lectura de la gráfica y el entrevistador pregunta ¿en julio, usted cuánto estaría captando? Y el estudiante responde: *"20, 000 litros de agua*."

El entrevistador pregunta cómo construyo esa gráfica, a lo que el estudiante responde: *"**De la primera también,** solo que los datos los cambios"*

A lo que el entrevistador le pregunta ¿cómo hizo ese cambio?

"Dejé los meses y cambié la cantidad por los litros que yo estaría ahorrando de agua."

Y la información de la primera gráfica, de qué manera le ayudó para poner esos litros aquí.

De la cantidad que ahorraría lo fui subiendo.

Los Grupos 3, 4 y 7 no presentan un uso evidente de la gráfica en el Mo 3, véase la figura.

a) b)

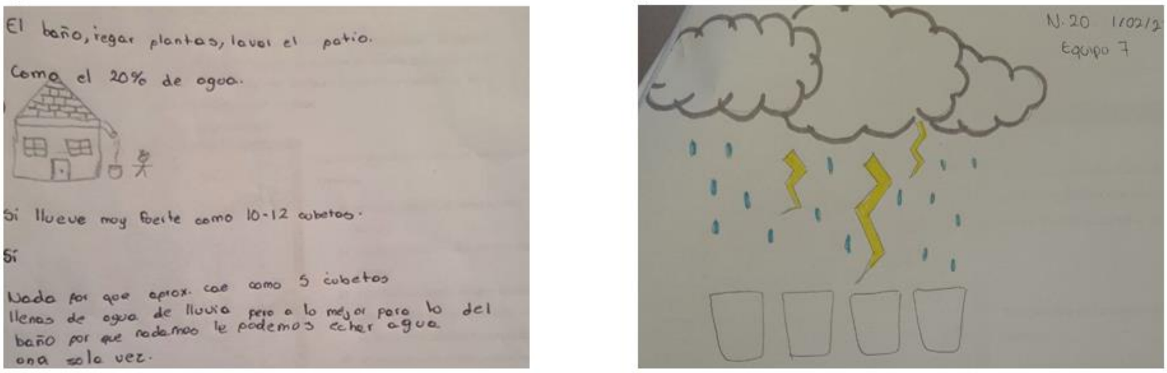


Figura 33. Parte del trabajo presentado por el representante del Grupo 4 (a) y la representante del Grupo 3 (b) en el Mo 3.

4.2.2 Proceso historial: resignificación del uso de la gráfica

Como se menciona en la Sección 2.2.3 de este trabajo, la resignificación ocurre en la alternancia de tareas o en la alternancia de los momentos en una situación, dicha alternancia genera una nueva función orgánica en la situación que se debate con las formas del uso. Es por esa razón que para dar cuenta de la manera que los estudiantes resignifican el uso de la gráfica se expondrá el debate entre los *funcionamientos* (Fu) y *formas* (Fo) de los usos que emergieron entre los momentos 1 y 2 y los momentos 2 y 3.

Resignificación entre los Mo 1 y 2.

Para los Grupos 1, 3-8, la tarea del **Mo 1** generó una primera Fo_1 del uso de la gráfica en la mayoría de los grupos de trabajo, *identificar los máximos y los mínimos locales de la gráfica*. La Fu_1 de la gráfica para este momento fue *predecir la cantidad máxima y mínima de lluvia que esperan los estudiantes para el año 2023*, emergiendo así el primer uso (U_1) de la gráfica que se ha denominado *la gráfica como modelo de predicción*. La **nueva tarea** que se encuentra en el **Momento 2** genera la nueva función orgánica, Fu_2, de *reproducir el comportamiento con tendencia de las lluvias de su región para el año 2023*. Esta nueva función orgánica se debate con Fo_1 del uso de la gráfica del **Momento 1** generando una nueva forma la cual es *graficar el comportamiento tendencial que presentan las lluvias*, Fo_2, obtenido así un nuevo uso (U_2) de la gráfica como una *instrucción que organiza comportamientos*, en este caso, organiza el comportamiento de las lluvias de la región de los estudiantes en las próximas dos décadas.

Como se plantea en la Sección 3.1.3 de este trabajo, las tareas del Momento 2 responden a una situación de transformación, y desde la postura teórica de este proyecto sobre el carácter situado del conocimiento, se reconoce entonces que aquello que permite la resignificación entre los U_1 y U_2, es decir, el paso de la gráfica como modelo de predicción de máximos y mínimos de lluvias a la organización de nuevos comportamientos de lluvia, se logra gracias a elementos presentes en dicha situación, a saber: la identificación de patrones comportamiento gráficos y la necesidad de reproducir un comportamiento. Es decir, el debate entre los Fu y Fo del Momento 1 y 2 se suscita gracias a esos dos elementos presentes en la situación de transformación.

Estos elementos se pueden ver en cada uno de los grupos que presentaron este mismo uso, tal es el caso del Grupo 5 (véase la Figura 34).

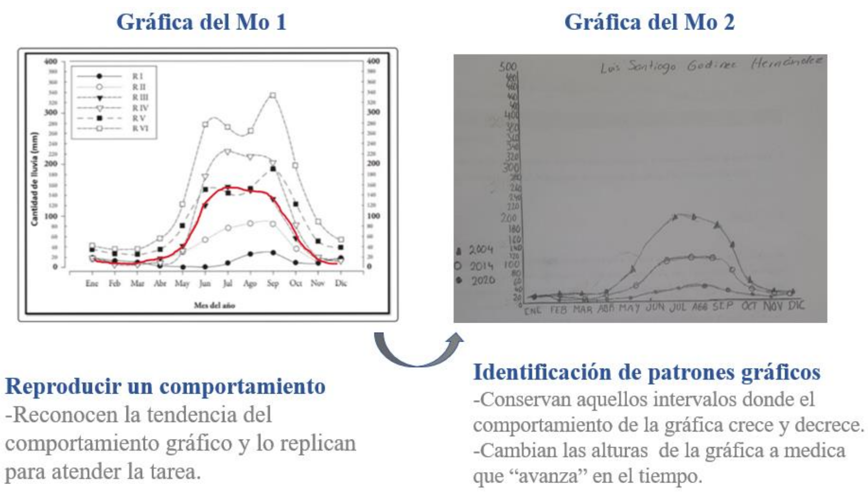


Figura 34. Elementos de la situación del Mo 2 que permiten el debate entre el Fu y Fo.

Es importante hacer las siguientes aclaraciones:

- Durante la aplicación del Mo 1, los Grupos 5 y 8 habían afirmado que no era posible predecir, pero al atender la situación del Mo 2 su idea hacia la predicción cambió. Y expresaron que ahora tenía más sentido hablar de predicción en la situación de transformación.

- Como se mencionó anteriormente, el Grupo 2 fue el único que presentó un uso diferente en este momento. Donde la idea de máximos y mínimos fue más fuerte que los elementos que conformaban al Momento 2, haciendo corresponder cada año con sus máximos de lluvias. La Figura 35 muestra este resultado.

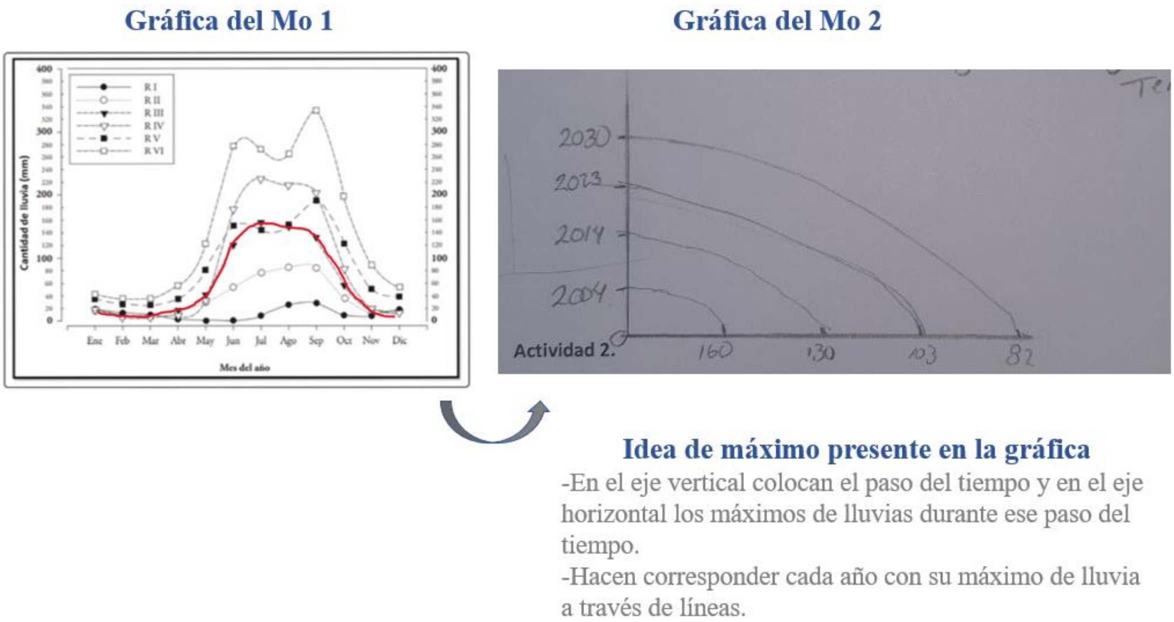


Figura 35. Los significados de máximos y mínimos en la situación del Mo 2.

Resignificación entre los Mo 2 y 3

Dado que en el Mo 3 los usos de las gráficas presentados por la comunidad fueron más diversos, se agruparon de acuerdo con quienes presenta el mismo uso.

Como ya se mencionó las tareas del **Mo 2** generaron el U_2 de la gráfica como una *instrucción que organiza comportamientos*, donde el Fu_2, es *reproducir el comportamiento con tendencia de las lluvias de su región para el año 2023* y la Fo_2 del uso es la de *graficar del comportamiento tendencial que presentan las lluvias.* La nueva tarea del **Mo 3** genera nuevas funciones orgánicas como el Fu_{3a}, *determinar el mejor momento para la captación de agua lluvia* (grupos 1 y 6) y Fu_{3b}, *determinar la cantidad captación de agua lluvia* (para los grupos 2, 5 y 8). Estos nuevos Fu se debatieron con la Fo_2 del uso de la gráfica del **Mo 2**, generando así nuevas Fo correspondientes a los Fu_{3a} y Fu_{3b}, estas fueron: (Fo_{3a}) *establecer el inicio de temporadas lluviosas y secas* y la (Fo_{3b}) *construir un modelo gráfico,* respectivamente, generando con ello nuevos usos de la gráfica, U_3. Entonces, el Fu_{3a} y Fo_{3a} generan el U_{3a} de la gráfica para distinguir de cualidades locales (para los grupos 1 y 6) y Fu_{3b} y Fo_{3b} conforman al U_{3b} para modelar el patrón de acumulación de la cantidad de lluvia.

De manera similar en lo que ocurre entre el Mo 1 y Mo 2, las tareas del Mo 3 responden a una situación de selección, entonces, aquello que permite la resignificación entre los U_2 y U_3, es decir el paso de la gráfica como una instrucción que organiza comportamientos a distinguir cualidades o modelar un patrón de acumulación, se logra gracias a elementos presentes en dicha situación a saber: **la búsqueda patrones de adaptación estables**. Es decir, el debate entre los Fu y Fo del Momento 1 y 2 se suscita gracias a que este elemento está presente en la situación de selección**.**

Este elemento se puede ver en cada uno de los grupos que presentaron los usos U_{3a} y U_{3b} tal es el caso de los Grupos 1 y 8, respectivamente.

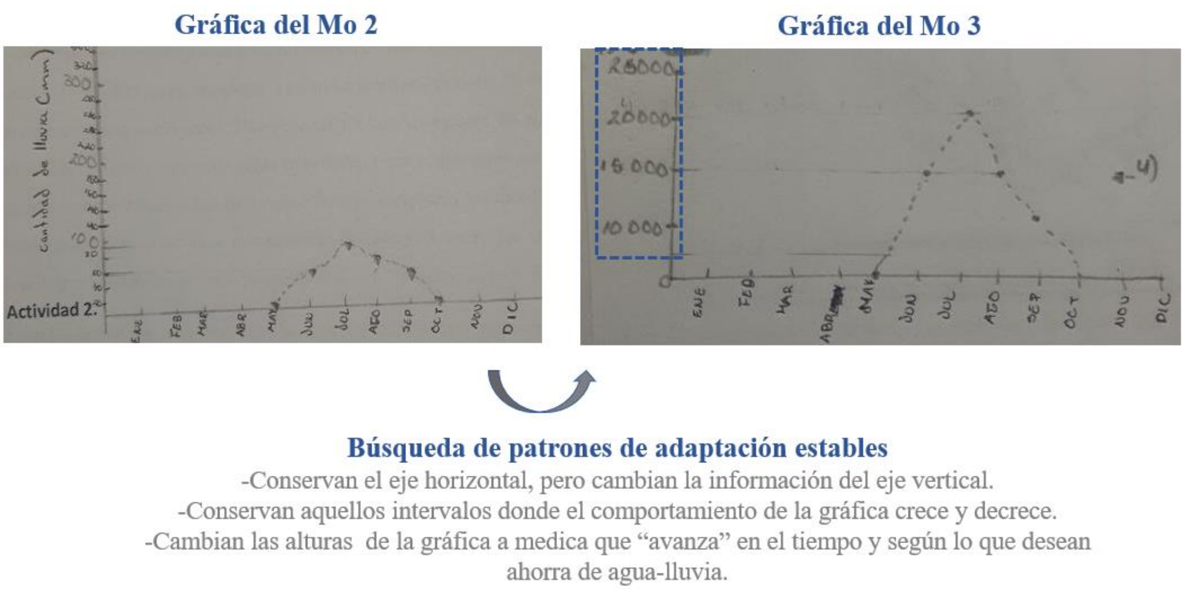


Figura 36. Búsqueda de patrones estables del representante del Grupo 8 en el del Mo 3.

La búsqueda de patrones de adaptación en el Grupo 1 se rescata de lo que la representante expresa de manera escrita y durante la entrevista (véase la Figura 31 b):

Al referirse sobre la gráfica del Mo 1 menciona que "*en verano había más lluvia*" y que el "*verano empieza en los meses junio, julio, y parte de septiembre* y que "*la lluvia se mantiene constante durante esos meses*". Entonces, este **patrón de adaptación estable** se ve expresado en el reconocimiento de temporadas secas y lluviosas que la llevan a la toma de decisiones sobre cuándo sería el momento más apropiado para la captación de agua lluvia.

A continuación, se muestra un resumen de la resignificación del uso de la gráfica que emergió en los Grupos 1 y 5.

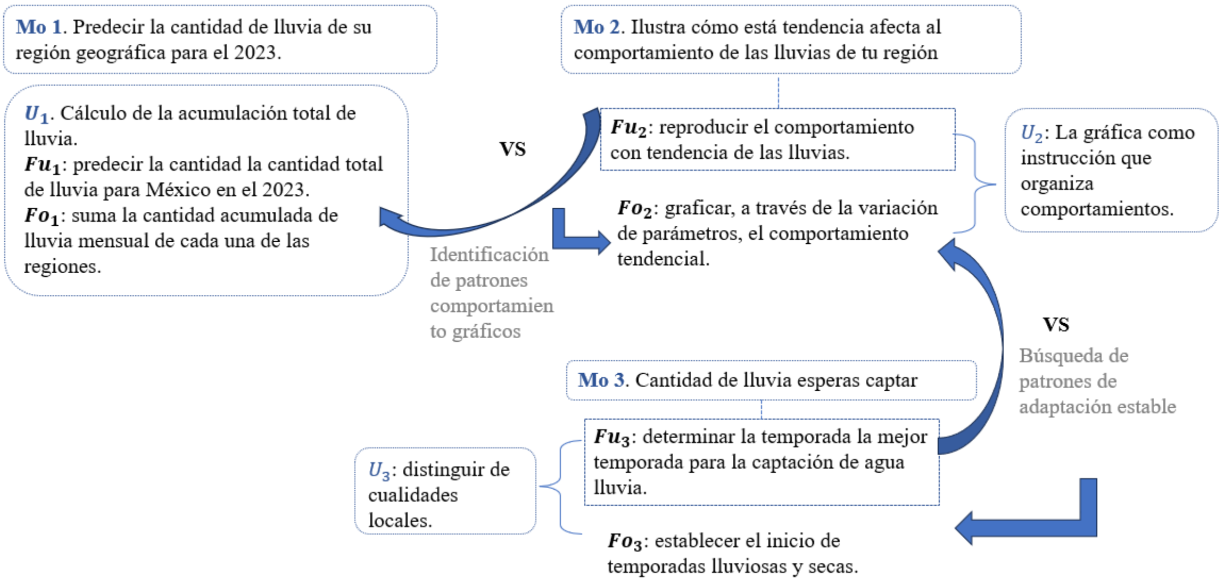


Figura 37. Resignificación del uso de la gráfica del Grupo 1.

Es importante hacer notar las dos diferencias que presentan los esquemas de las Figuras 37 y 38. Como se observa, el uso que hace el Grupo 1 de la gráfica en el Mo 1 y Mo 3 es distinto al uso de las gráficas del Grupo 5 en dichos momentos.

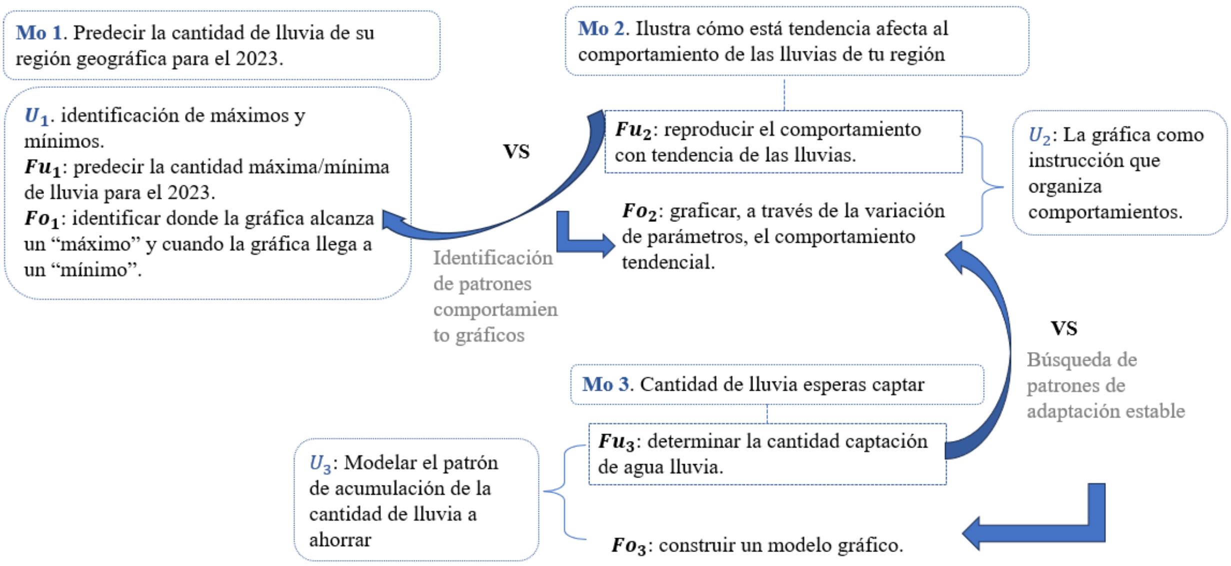


Figura 38. Resignificación del uso de la gráfica del Grupo 5.

4.2.3 Proceso Institucional: preservar el conocimiento construido

Para distinguir las epistemologías que se generaron a partir de los usos de las gráficas de la CCM_{ETS} se hicieron las siguientes preguntas: ¿qué argumentaciones generan los estudiantes en las actividades?, ¿qué significan los estudiantes en las situaciones?, ¿qué procedimientos desarrollaron para en esas situaciones?, ¿qué instrumentos construyeron? y ¿qué argumentaciones generan los estudiantes en las actividades?

Situación de variación - Mo 1

Significaciones: a lo que le da sentido la mayor parte de la CCM_{ETS} es a los valores máximos y mínimos y a los intervalos de crecimiento y decrecimiento en la gráfica.

La evidencia a lo anterior se puede ver en los diferentes extractos de las entrevistas y soluciones del DSES mostradas hasta el momento o en las siguientes afirmaciones provenientes de igual manera de las entrevistas.

Al preguntarles por qué en cierta temporada había más o menos lluvias las respuestas apuntaban a máximos y mínimos en la gráfica. Por ejemplo, el representante del Grupo 5 menciona *"**fue por el pico de cantidad de lluvia** que caía pues. **Y puse otoño** refiriéndome a esta parte de la gráfica* [señala donde según la gráfica las regiones alcanzan sus máximos en lluvias] ***por ser la más alta se podría decir"***. El representante del Grupo 6 dice *"**Los puntos más altos** en la gráfica representan más lluvias y los puntos más altos **están aquí en el periodo del verano**."*

*A excepción del Grupo 1 que significó las acumulaciones presentes en la gráfica (véase Tabla 10).

Procedimientos: se distingue la comparación entre dos estados como procedimiento, el que conocían (la cantidad de lluvia de su región geográfica en el 2004) y el que debían de predecir (la cantidad de lluvia de su región geográfica en el 2023). Lo hicieron en términos de las significaciones de máximos y mínimos o mencionando intervalos de crecimiento y decrecimiento de acuerdo con la variación que mostraba la gráfica.

La Figura 39 ilustra lo anterior, donde la representante escribe como respuesta lo siguiente

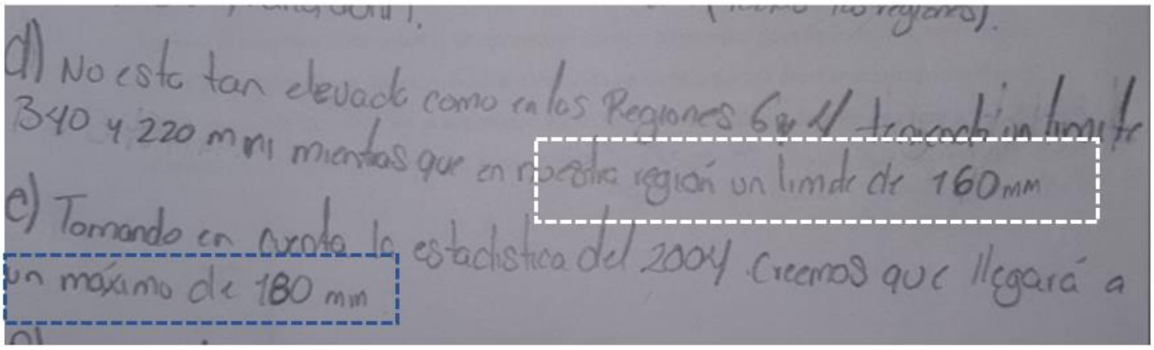


Figura 39. Procedimientos comparación de dos estados de la participante del Grupo 2.

Instrumento: lo que le permite al estudiantado construir las significaciones y procesos anteriores es la ***cantidad de lluvia que varía mes a mes mostrada en la gráfica***.

Lo que da evidencia del instrumento son las respuestas que se recibieron al preguntarles qué de las gráficas le permitieron contestar a las preguntas del diseño algunos estudiantes contestaron que *"los meses"*, *"nos fuimos viendo los puntos de nuestra región y cómo iba cambiando el estado del agua* [se supone que se refiere a la cantidad]*"*, *"saber cuánto lloverá"*. Igualmente, en sus respuestas escriben haciendo referencia a los meses: *"en septiembre y agosto las lluvias son más fuertes"*.

¿Cuál es el argumento que construyó la CCM_{ETS} en el Mo 1?

Se concluye entonces que la argumentación de la CCM_{ETS} ante la situación de variación presentada es que predicen máximos y mínimos de lluvias, el comportamiento de las lluvias y la cantidad de lluvia total; al comparar dos estados en términos de máximos y mínimos o intervalos de crecimiento o decrecimiento o en la acumulación periódica, siendo la gráfica de la variación mensual de lluvia el instrumento que les permite desarrollar los procedimientos y las significaciones anteriores.

Tabla 11. Epistemología de uso de la gráfica de la CCM_{ETS} en el Mo 1.

Situación / Elementos de construcción	Variación: Comportamiento de las lluvias
Significaciones	Máximos y mínimos de lluvias Intervalos de crecimiento y decrecimiento en el comportamiento de las lluvias. Acumulación.
Procedimientos	Comparación de dos estados
Instrumento	Cantidad de variación continua.
Argumentación/Resignificación	Predicción de máximos y mínimos de luvias

	Predicción en el comportamiento de las lluvias. Predicción de la cantidad de lluvia.

Situación de transformación - Mo 2

Significaciones: lo que el estudiantado da sentido en esa actividad son los patrones de comportamiento gráfico presentes en el Mo 1. De tal manera que tales patrones se siguen conservando en la construcción de un nuevo modelo gráfico que tiene como fin mostrar las tendencias de decrecimiento de las cantidades de lluvias.

*A excepción del Grupo 2 que usó los máximos y mínimos para graficar.

Procedimientos: los procedimientos que se distinguen son la variación de parámetros.

Instrumento: lo que le permite al estudiante construir las significaciones y procesos anteriores es la gráfica del Mo 1, haciendo de la gráfica una instrucción que organiza comportamientos.

¿Cuál es el argumento que construyó la CCM_{ETS} en el Mo 2?

Se concluye entonces que las significaciones desarrolladas por la CCM_{ETS} en la situación de transformación presente en el DSES fueron patrones de comportamiento gráfico sujetos a procedimientos de variación de parámetros, generados por la resignificación de la gráfica como una instrucción que organiza comportamientos.

Tabla 11. Epistemología de uso de la gráfica de la CCM_{ETS} en el Mo 2.

Situación / Elementos de construcción	Transformación Tendencias del comportamiento de las lluvias
Significados	Patrones de comportamiento de las lluvias
Procedimientos	Variación de parámetros de los puntos en la gráfica
Instrumento	La gráfica como instrucción que organiza comportamientos
Argumentación/Resignificación	Modelar un nuevo comportamiento de la gráfica.

Situación de selección - Mo 3

Significados: Los patrones de adaptación identificados en las respuestas de los estudiantes son:

1) El uso de cubetas o tinacos ubicándolos en espacios abiertos hasta que se llenen de agua-lluvia para luego utilizar el agua. El volumen de lluvia captado se adapta al volumen de una cubeta.

2) El uso de cubetas en espacios abiertos para luego vaciarlas en un recipiente más grande (tinaco). Igualmente, el volumen de lluvia captado es adaptado al volumen de una cubeta, pero se añade un elemento de almacenamiento más grande, es decir, permite un proceso de vaciar y llenar la cubeta el número de veces que el volumen del tinaco lo permita.
3) Captar el agua desde el techo del hogar para luego recogerla en una cubeta y almacenarla finalmente en un tinaco. Aunque de igual manera el volumen de la lluvia captada es adaptado al volumen de una cubeta, en esta estrategia de captación la CCM_{ETS} ve en el techo un medio para conseguir que la cubeta se llene más rápido.

Procedimientos: la distinción de cualidades se observa a lo largo del proceso de captación de agua lluvia.

En el modelo 1) la captación, el transporte y el almacenamiento del agua-lluvia se pensó en la utilización de cubetas de 20 litros. Se distinguen volúmenes de fácil manejo.

En el modelo 2) la captación y el transporte del agua-lluvia corresponde al uso de cubetas de 20 litros y el almacenamiento del agua a un tinaco (solo un grupo especificó la capacidad del tinaco 2500 litros). Se distinguen aquellos volúmenes que permitan captar mayor cantidad de lluvia.

En el modelo 3) la captación del agua-lluvia corresponde al techo del hogar, el transporte a través de canaletas y cubetas y el almacenamiento en un tinaco. Se distinguen medios que permitan lograr una captación más rápida y una mayor cantidad de volumen de lluvia.

Instrumento: lo estable identificado en la respuesta de los estudiantes se puede ver de dos maneras:

1) Los modelos de captación y la distinción de cualidades tienden a la cantidad de agua que ellos deseaban ahorrar.

En la pregunta 2 del diseño se les pidió que calcularan cuánta agua potable ahorrarían si en su lugar usaran agua-lluvia, entonces con base a eso, modificaban sus estrategias por ejemplo una estudiante relata "*lo primero que pensé fue podemos recolectar el agua en un bote, pero después de terminar de contestar, en la pregunta 6 lo volvimos a pensar y dije un bote no va alcanzar para toda la cantidad de agua, entonces nos apoyamos un poco del celular e investigamos donde podríamos almacenar más agua, que fuera algo grande, entonces vimos que en un tinaco podíamos recolectar muchísima más agua.*"

2) En otros grupos los modelos de captación y distinción de cualidades no tendían a la cantidad de agua que podían o que deseaban ahorrar sino al hecho de la tarea de captar agua.

¿Cuál es el argumento que construyó la CCM_{ETS} en el Mo 3?

Las significaciones de la adaptación de los volúmenes de agua captados al volumen de una cubeta y los procedimientos de distinción del volumen de esa cubeta a una cubeta de 20 litros y a tinacos con capacidades de más de 2000 litros, de algunos grupos de la CCM_{ETS}, son desarrollados gracias a lo estable, a la cantidad de agua que la comunidad desea captar o por la distinción de estaciones lluviosas y secas, es decir a la resignificación de la gráfica para distinguir cualidades locales o modelar patrones de acumulación de lluvia a ahorrar.

Tabla 11. Epistemología de uso de la gráfica de la CCM_{ETS} en el Mo 3.

Situación / Elementos de construcción	Selección Captación de agua lluvia
Significados	Modelo de captación de agua lluvia. Adaptación del volumen captado de lluvia al volumen de una cubeta.
Procedimientos	Capacidad de almacenamiento de la cubeta y tinaco.
Instrumento	Cantidad de lluvia que espero ahorrar
Argumentación/Resignificación	Cantidad de agua lluvia que permita el ahorro de agua potable.

4.3. Localidad de la CCM_{ETS}

Para terminar de distinguir lo propio de la CCM_{ETS} a continuación se presenta lo local del conocimiento de la comunidad. Como se mencionó anteriormente, la localidad considera: lo regional, la jerga disciplinar, el trabajo u oficio entre otros aspectos. Dadas las características de la CCM_{ETS} se considerarán lo regional y la jerga disciplinar (tomando como disciplina la clase de matemáticas), cómo estos aspectos permearon lo íntimo de la comunidad. Entonces, para lo regional se pensó en la pregunta ¿qué aspectos del espacio geográfico que ocupa la CCM_{ETS} están presentes en sus argumentaciones? Para la jerga disciplinar ¿cuáles fueron aquellas expresiones orales o escritas usadas para plantear sus argumentaciones?

4.3.1 Lo regional

La CCM_{ETS} estaba ubicada en escuela secundaria de la Ciudad de México. Este dato es importante debido a que ayuda a comprender la mayoría de los modelos de captación propuestos por la comunidad. La forma que tienen la mayoría de las viviendas urbanas cerca de esa área es la que se muestra en la Figura 40.

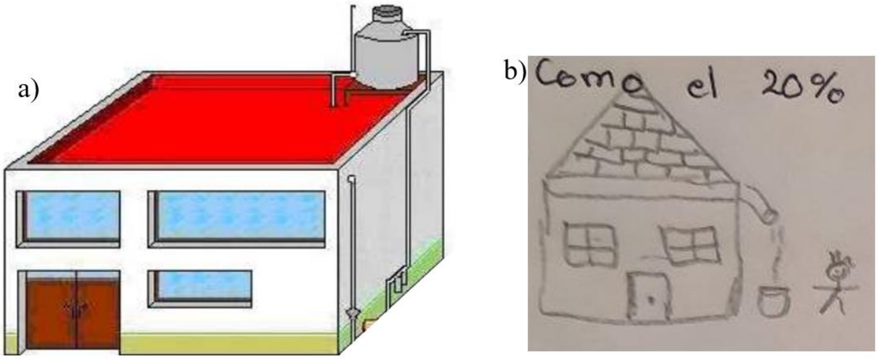


Figura 40. Representación de la vivienda de los estudiantes.

Por lo que el patrón de adaptación de volúmenes que responde a colocar cubetas en espacios abiertos se debe a la infraestructura de sus viviendas. Debido que desde la Figura 40 a) es más difícil imaginar el agua escurriendo desde el techo y siendo captada por una cubeta, a esto se le suma que en la mayoría de los hogares la tubería instalada en los techos tiene la función de conducir el agua lluvia a los sistemas de alcantarillado de la ciudad. Fueron únicamente dos grupos que propusieron modelos donde el agua era captada a través del techo.

La Figura 40 a) es solo una representación general de la vivienda de los estudiantes según las características de la zona en que se encuentra su institución educativa.

4.3.2 La jerga disciplinar.

Durante el desarrollo de las tareas y la entrevista, las argumentaciones de la CCM_{ETS} alrededor de la predicción fueron plasmadas a través de expresiones como *sube* y *baja* para indicar intervalos de crecimiento y decrecimiento. *Se mantiene estable* para indicar que la variación no cambia. *Constante* para referirse a la frecuencia de un evento.

En sus argumentaciones alrededor del comportamiento tendencial a la variación de parámetros la expresan en términos de *aproximar* y *restar*. En sus argumentaciones alrededor de la optimización usaban el término de *capacidad* para referirse a la cantidad de agua que puede contener un recipiente. También forma parte de este conocimiento las relaciones que plantearon para el cálculo de volúmenes. Por ejemplo, el Grupo 6 determinó el volumen a captar como:

$$capacidad\ de\ la\ cubeta \times número\ de\ veces\ que\ se\ llena\ al\ día \\ \times cantidad\ de\ días\ en\ el\ verano.$$

La relación establecida por el Grupo 1 para encontrar el volumen fue

$$capacidad\ de\ la\ cubeta \times número\ de\ veces\ que\ vacía\ en\ el\ tinaco$$

4.4. Comunidad de conocimiento matemático de estudiantes de tercero de secundaria

Hasta el momento se ha logrado configurar el eje institucional y lo propio de la CCM_{ETS} y se ha dejado este apartado con la intención de configurar el eje *identidad* de la CCM_{ETS}. La configuración final de este eje permitirá dar respuesta con mayor precisión a la pregunta de investigación sobre los usos y significados propios de esta comunidad, dado que el eje identidad permite distinguir una comunidad de otras. Esta distinción se logra a partir de tres momentos: *legitimidad*, *resistencia* y *proyecto*. Para distinguir estos elementos en lo propio de la comunidad, en esta investigación se preguntó: ¿qué es lo legítimo de la comunidad?, ¿a qué se resiste?, y ¿cuál es el proyecto de la comunidad en este caso y cómo se proyecta lo legítimo en dicho proyecto?

Lo legítimo de la comunidad se ve expresado en la emergencia de los usos de la gráfica, sus resignificaciones, así como la emergencia de las categorías de modelación. Es decir, en la construcción de conocimiento; debido a que los *significados*, *procedimientos* e *instrumentos* desarrollados por CCM_{ETS} están ligados a justificaciones funcionales y a su cotidiano y no únicamente a algoritmos aprendidos o memorizados.

En el **Mo 1** se logró apreciar que los usos de las gráficas desencadenaron la emergencia de la categoría de predicción que respondía tanto significados que han sido institucionalizados por la matemática escolar – máximos y mínimos, intervalos de crecimiento y decrecimiento – como a significados de acumulación de una cantidad que varía de forma continua – estos últimos difícilmente aparecen en la matemática escolar. Generando procedimientos de comparación de dos estados en la cantidad de lluvia en el 2004 con las cantidades del 2023, teniendo por instrumento a la gráfica. Por lo que se concluye que tales argumentaciones son legítimas de la comunidad porque en ese momento fue lo que estudiantado usó para justificar su actividad matemática.

En el **Mo 2** la resignificación de la gráfica genera argumentos que no aparecen en el conocimiento tradicional de esta comunidad como lo es la reproducción de comportamientos a través de la variación de parámetros. Normalmente lo que guía las construcciones de gráficas desde la matemática escolar es la tabulación y la ubicación de puntos según dicha tabulación (véase la Sección 3.1.1). Pero en este segundo momento los elementos proveídos por la situación de transformación permitieron la resignificación de la gráfica como una instrucción que organiza comportamientos, proveyéndole a la comunidad otra forma de graficar diferente a la tradicional.

El **Mo 3** contiene una situación de selección que lleva a la comunidad la necesidad de la adaptación de patrones estables, lo que hace que la gráfica se resignifique como un modelo que permite distinguir cualidades locales o modelar un patrón de acumulación. Las significaciones y procedimientos expresados aquí son los que más están ligados al cotidiano de la comunidad y a su localidad. El modelo de captación de agua-lluvia propuesto por la comunidad y la distinción de cubetas de 20 litros y las relaciones que establecieron respecto al cálculo de volúmenes son el resultado de lo que la comunidad ha experimentado en su cotidiano.

La resistencia de la comunidad. En lo legitimo encontramos momentos de resistencia. Por ejemplo, uno de los grupos en el Mo 1 significa la acumulación mensual de la lluvia para predecir la cantidad de lluvia en el 2023, resistiendo a aquellos significados de máximos y mínimo con los que ha analizado la variación durante su formación escolar. Otro momento de resistencia se encuentra en el Mo 2, donde la mayoría de la CCM_{ETS} deja las tablas y recurre a la significación de patrones gráficos y la variación de parámetros para graficar el comportamiento tendencial de las gráficas. La mayor parte del trabajo en el Mo 3, el cálculo a de volúmenes y la distinción de cualidades de esos volúmenes, provinieron de su experiencia con el cotidiano más que del conocimiento que por tradición que aprenden en sus clases de matemáticas.

El *proyecto* de la comunidad. Particularmente para este estudio el proyecto de la comunidad se enmarcó en la situación específica que fue abordada y cómo la funcionalidad del conocimiento matemático se proyecta en dicha situación, es decir, cómo las categorías de modelación construidas desde lo íntimo de la CCM_{ETS} fueron expresadas en la captación de agua lluvia.

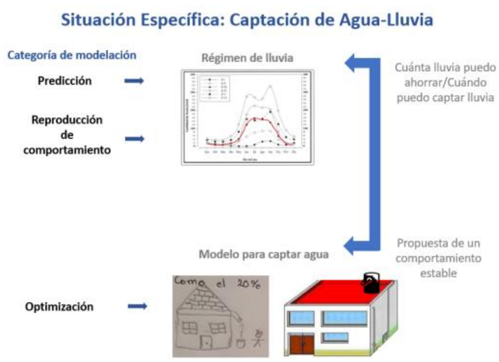


Figura 41. Proyección de la funcionalidad del conocimiento en la captación de agua lluvia.

Conocer el régimen de las lluvias de manera tal que les permitieran hacer predicciones y reproducir tendencia fueron momentos claves para que la CCM_{ETS} pudiera explicar cómo captarían el agua lluvia en sus hogares. Por ejemplo, las significaciones y procedimientos de comparación de estados (Mo 1) respecto a periodos de máximos de lluvias guío a la CCM_{ETS} en la decisión de cuándo colectar agua para obtener un almacenamiento de lluvia mayor. Las significaciones y procedimientos respecto a la reproducción de comportamientos (Mo 2) guiaron a la CCM_{ETS} a establecer modelos gráficos de acumulación para conocer la cantidad de lluvia a ahorrar. Lo anterior desencadenó una propuesta de comportamiento estable compuesto por un patrón de adaptación de volúmenes y distinción de cualidades entre volúmenes menores y mayores.

Entonces, la síntesis del conocimiento matemático respecto al uso de la gráfica de esta comunidad se ve expresada en la Figura 42.

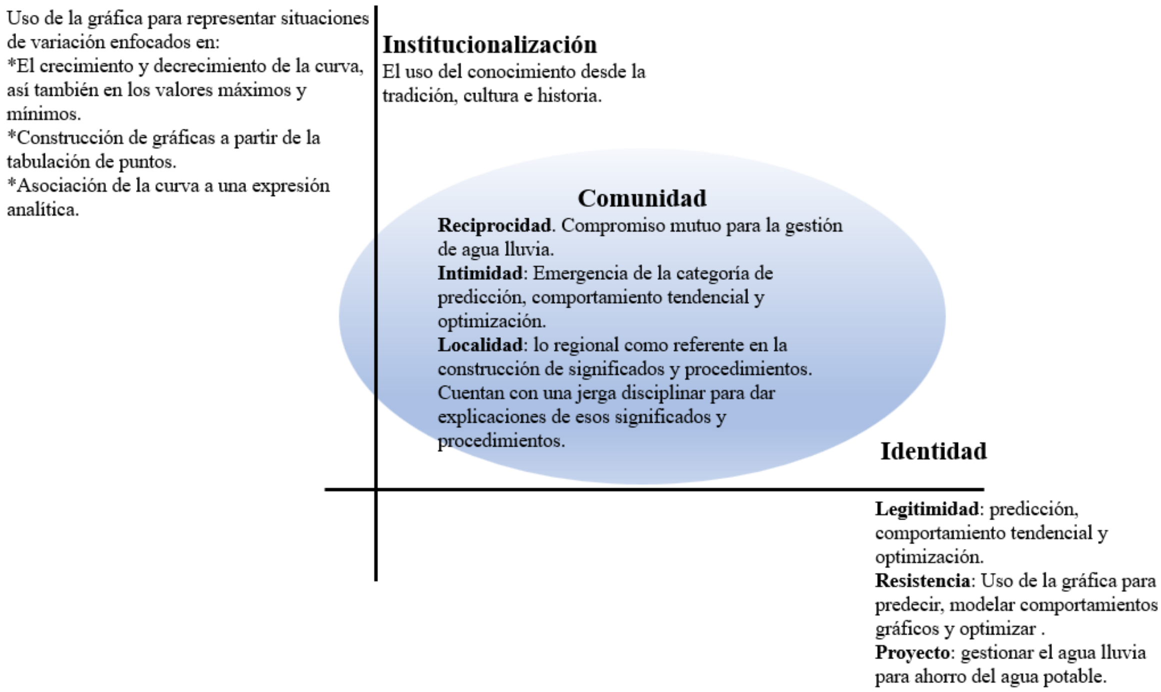


Figura 42. Modelo de CCM_{ETS}

4.5. Diálogo entre epistemologías

Antes de pasar a las conclusiones que los resultados de este estudio permiten plasmar, es conveniente mostrar cómo la epistemología de la matemática escolar y las epistemologías del cotidiano de la CCM_{ETS} referente al uso de las gráficas, dialogan en este reporte de investigación. Para ello se considera lo que la comunidad debe saber de la gráfica según la matematica escolar, por lo que conviene poner en este apartado los resultados de las observaciones de clases de la comunidad como evidencia empírica del estatus epistemológico configurado en la Sección 3.1.1. Parte del diálogo también será la epistemología de uso inferida a través de los estudios sobre captación de agua-lluvia. Finalizando con los usos de las gráficas que el estudiantado mostró en la captación de lluvia.

El uso de la gráfica en la matemática escolar

Las observaciones de clases iniciaron cuando la CCM_{ETS} estaba finalizando los temas sobre resolución de ecuaciones cuadráticas e iniciando el de graficación de funciones cuadráticas. Para introducir el tema de graficación de funciones, el docente inicia con un repaso sobre la ubicación de puntos en el plano cartesiano. Utiliza el ejemplo del libro de texto para introducir dicho tema.

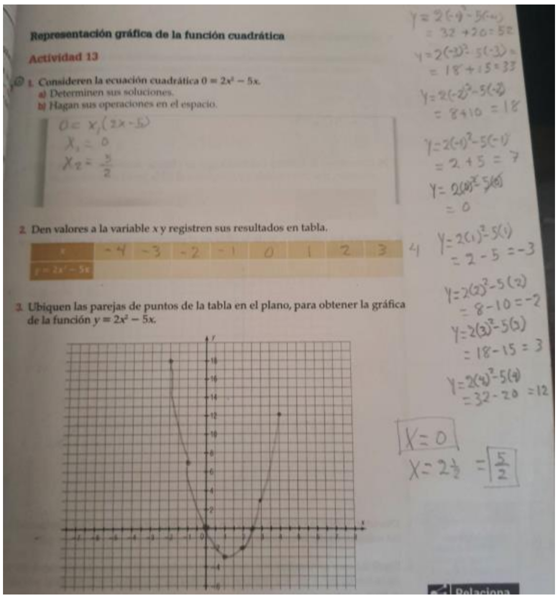


Figura 43. Introducción de la graficación de funciones cuadráticas en la CCM_{ETS}

Los procedimientos establecidos por el maestro para encontrar la gráfica de la función $y = 2x^2 - 5x$ fueron la elaboración de una tabla (como la que se muestra en la Figura 43), dar valores a x para encontrar los valores de y. Una vez la tabla estuviera llena procedían a ubicar los puntos encontrados en el plano para luego unirlos.

En la siguiente clase el docente les pide a los estudiantes que observen un conjunto de gráficas de funciones cuadráticas para determinar ciertas características como: son simétricas, tienen dos “alas”, tienen un punto medio. Este último le permitió al docente añadir un procedimiento más para la graficación de funciones cuadráticas y fue el de encontrar el “punto medio” de la parábola (conocido en otros contextos como el vértice de la parábola). Para ello escribió en el pizarrón la expresión $ax^2 - bx + c$ y luego la fórmula de “punto medio”$P.M. = -\frac{b}{2a}$, añadiendo que ese punto medio lo debía de considerar al centro de la tabla de valores y luego escoger valores de x que fueran mayores y menores que el valor del punto medio. Luego de la explicación los dejó trabajar en equipos para graficar la expresión $y = 2x^2 - 5x - 4$. Durante este momento el investigador se acercó a aquellos estudiantes y les preguntó lo siguientes:

- ¿Cómo graficaste?
- R: *ubiqué los puntos de la tabla en el plano y luego los uní con una línea.*
- ¿Dónde está el punto medio en tu gráfica?
- R: (No responde).
- Después de esperar un tiempo el investigador cambia la pregunta a ¿De qué manera te ayudó el punto medio al graficar?
- R: (No responde).
- A lo que el investigador vuelve a cambiar la pregunta a ¿Por qué no continuaste hacía abajo? (señalando su gráfica donde se supone que está el punto medio)
- R: (Encuentran la pregunta extraña y dudan de lo que hicieron, queriendo saber si podían continuar). Después de pensarlo menciona que: *fue porque no hay puntos que vayan más debajo de ese punto*.

Haciendo ejercicios parecidos a los mostrados con anterioridad, continuaron el resto de la semana antes de la implementación del diseño.

Desde la matemática escolar, visto en el libro de texto usado por los estudiantes y las observaciones de clases, el estudio de las gráficas se limita a situaciones de variación enfocados en:

- El crecimiento y decrecimiento de la curva, así también en los valores máximos y mínimos.
- Construcción de gráficas a partir de la tabulación de puntos.
- Asociación de la curva a una expresión analítica

Lo anterior tiene la intención de que las futuras lecciones el análisis de funciones sea más compresible para los estudiantes. Si bien es cierto que las tareas que se muestran en contextos de la vida real, estos contextos tienen la intención de encajar de alguna manera con algún concepto matemático y poco interesa el conocimiento matemático que se generó a partir de ese cotidiano. Tal como ya lo señalaba Buendía (2012) al mencionar que las gráficas son vistas como objetos matemáticos que ilustran problemas contextualizados, por lo que se vuelve necesario aprender la correcta articulación de sus elementos semióticos para su construcción e interpretación.

El uso de la gráfica en una situación específica: captación de agua-lluvia

En el Capítulo 3 de este proyecto se infirió – a través de las categorías de modelación – la captación de agua-lluvia como una situación específica compuesta por tres situaciones núcleo: *variación*, *transformación* y *selección*. Es importante mencionar que la captación de agua lluvia mostrada aquí responde a un modelo llamado Rainwater TANK cuyo uso principal es determinar si la lluvia colectada satisfará cierta demanda de agua en un hogar (Vieritz et al., 2015).

Se observó que las situaciones de *variación* y *transformación* permiten a los usuarios del modelo predecir la cantidad de lluvia que determinada región obtendrá. Tales argumentos parten del comportamiento gráfico del régimen de lluvia de dicha región.

Una vez que se conoce el comportamiento y la cantidad de lluvia que se espera, se plantea el modelo para la colección de lluvia – es aquí donde entra en juego la situación de *selección*. Dicho modelo es el patrón de adaptación que determina el área del techo a ser conectada en el sistema y con ello el tamaño del tanque (tinaco) donde el agua-lluvia será almacenada para así suplir la demanda del agua en el hogar. En el modelo se destacan tres ecuaciones para sus usuarios:

- $volumen\ en\ el\ techo = cantidad\ de\ lluvia\ \times \acute{a}rea\ del\ techo$
- $volumen\ almacenado = volumen\ del\ tanque - "dead\ store"$
- $volumen\ del\ tanque = volumen\ anterior + volumen\ del\ techo - desbordamientos - rendimiento$

Además, algunos estudios que usan este modelo lo hacen con la intención de simular de forma reiterada el posible comportamiento del almacenamiento del agua en el tanque para luego plasmar los datos recogidos en un conjunto de curvas y así evaluar la selección del área y la capacidad de almacenamiento más optima (véase el Capítulo 3 de este proyecto).

Entonces, el uso de las gráficas en una situación de captación de agua lluvia no se limita únicamente a situaciones de variación, sino también a situaciones de transformación y selección generando con ello argumentos de *predicción*, *reproducción de comportamientos* y *optimización* respectivamente.

La captación de agua-lluvia en la CCM_{ETS}

Como se mostró en la Sección 4.4, los usos del conocimiento de la CCM_{ETS} lograron proyectarse en la captación de agua-lluvia. Aunque hay ciertas similitudes en la forma de dicha proyección con la manera identificada en los estudios de captación de lluvia, también hay diferencias que son importantes resaltar.

Entre las similitudes se destacan los usos de las gráficas en los Mo 1 y Mo 2 que generaron argumentos alrededor de la predicción y reproducción de comportamiento y que fueron proyectados en *cuánta agua-lluvia ahorrar* y *cuándo es el mejor momento para la colección*. Para los grupos de trabajo de la CCM_{ETS} la articulación de ambas categorías les permitió darle sentido a la situación de captación de agua lluvia. Dicha articulación es la que se muestra al describir la epistemología que se configura de los estudios de captación de agua lluvia donde los argumentos respecto a cuánta lluvia esperar parten del comportamiento gráfico de las lluvias en una determinada región.

Las principales diferencias entre la epistemología propuesta desde los estudios de captación y lo que hacen la CCM_{ETS} se observa en Mo 3, es: el patrón de adaptación del volumen. En los estudios se observó que este patrón de adaptación ocurre en dos partes importantes, en el techo del hogar y en el tanque de almacenamiento donde se destacan las ecuaciones de $volumen\ en\ el\ techo, volumen\ almacenad\ y\ volumen\ del\ tanque$.

En cambio, el patrón de adaptación del volumen almacenado que siguió la CCM_{ETS} fue a través del volumen de cubetas de 20 litros que en ocasiones se acompañó por otro recipiente más grande (tinaco). A este patrón de adaptación lo acompañó las siguientes ecuaciones construidas por CCM_{ETS}, el volumen almacenado sería igual a:

- $capacidad\ de\ la\ cubeta \times número\ de\ veces\ que\ se\ llena\ al\ día \times cantidad\ de\ días\ en\ el\ verano.$
- $capacidad\ de\ la\ cubeta \times número\ de\ veces\ que\ vacía\ en\ el\ tinaco.$

Los resultados de este estudio al final revelan un diálogo entra la epistemología de usos de la gráfica puesta en juego por el DSES y la epistemología que norma los usos de la gráfica desde la matemática escolar. Se observó que las categorías de modelación que emergieron en CCM_{ETS} permeadas tanto de las epistemologías de usos identificadas en la situación de captación de agua-lluvia como también de la epistemología que se encuentra en la matemática escolar, es decir, las categorías de modelación emergieron desde lo propio de la comunidad. Desde los significados de máximos y mínimos en la categoría de predicción (en la mayoría de los grupos) como la presencia de esos mismos significados en la situación de transformación por parte del Grupo 2, hasta el establecimiento de comportamientos estables vistos en la identificación de cualidades locales y modelos de acumulación en la situación de transformación propuesta.

Este diálogo permite una ampliación de los usos de la gráfica en la matemática escolar ya que tales usos no se limitan a situaciones de variación, sino también a situaciones de transformación y selección, trayendo a la luz aquellas epistemologías que permanecían opacas en el cuidado del agua potable. Tal ampliación es producto de la perspectiva de socialización del conocimiento donde se postula “que el proceso de socialización permitirá rescatar aquellas matemáticas opacadas, aquellas que se oscurecieron ante el totalitarismo y la hegemonía que provoca el actual dME” (Cordero et al. 2015, pp. 103). Debido que desde esta perspectiva el cotidiano no es el de emulador de objetos matemáticos, sino también es conocimiento matemático capaz de ser caracterizado (Cordero et al. 2022b).

Se debe hacer énfasis que la base epistemológica del DSES estaba compuesta únicamente por epistemologías de usos identificadas en otras comunidades de conocimiento, pero tales epistemologías también emergieron en la comunidad de estudio cumpliéndose así la hipótesis de que son transversales independientemente de la comunidad donde emerjan. La Figura 44 resumen todo lo anterior.

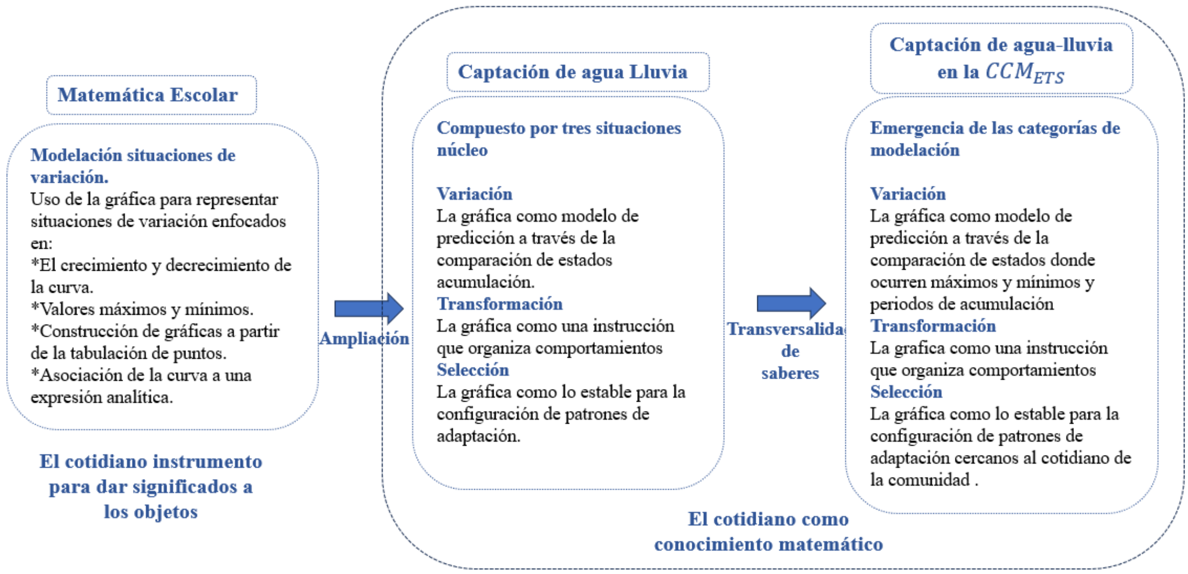


Figura 44. Diálogo entre las epistemologías del cotidiano y la matemática escolar en la CCM_{ETS}

Capítulo V

Conclusiones

5.1. Conocimiento construyéndose en la comunidad

El problema central que le atañe a este proyecto de investigación es la opacidad generada por el dME a **los usos del conocimiento** matemático en la protección de los recursos naturales del planeta dentro de la matemática escolar, en este caso particular el agua potable. Lo anterior llevó a la formulación de la pregunta de investigación sobre: ¿Cuáles son los usos y significados de las gráficas de los estudiantes de tercero de Educación Secundaria en la *Predicción, Comportamiento tendencial* y *Optimización*?

Los resultados que aquí se muestran apuntan que los significados, procedimiento e instrumentos que la CCM_{ETS} construyó, son elementos que responden a epistemologías que fueron dibujadas por el desarrollo de usos de la gráfica en la alternancia de situaciones. La Figura 45 brinda un panorama de los elementos construidos por la comunidad.

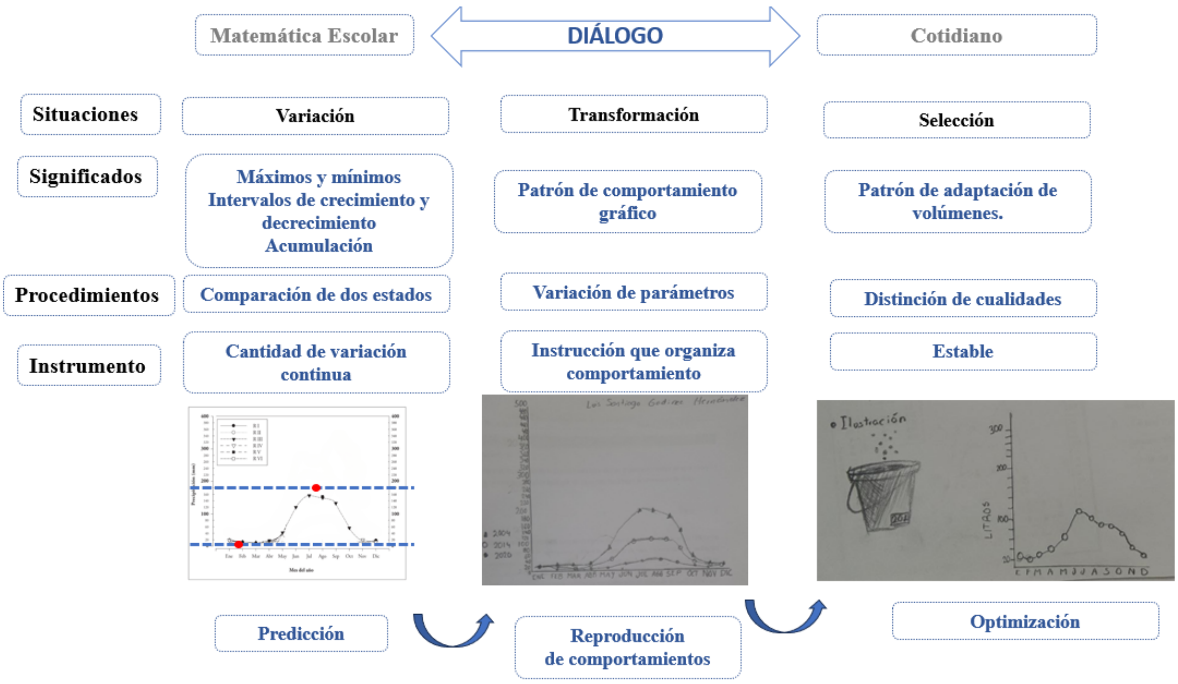


Figura 45. Significados, procedimientos e instrumentos de la CCM_{ETS}

El orden que aparecen los significados, procedimientos e instrumento en la figura es intencional. A medida que la actividad matemática del estudiantado fue analizada a través del modelo de Comunidad de Conocimiento se develó cuáles de estos elementos provenían desde la matemática escolar, es decir, aquel conocimiento que forma parte del eje de institucionalización de la comunidad y cuales elementos emergían desde su interacción en el cotidiano.

Los significados y procedimiento que emergieron mayormente en el estudiantado en la situación de variación fueron la comparación de máximos y mínimos, intervalos de crecimiento. Tales significados y procedimientos son desarrollados en el seno del conocimiento institucional de la comunidad. En cambio, las significaciones y procedimientos en la situación de transformación como la identificación de patrones de comportamiento gráficos para luego hacer variar sus parámetros conforman una argumentación vinculada a la construcción social del conocimiento matemático debido a que parten de la resignificación de la gráfica como una instrucción que organiza comportamientos. Los significados y procedimientos provenientes del cotidiano se hacen más notorios en la situación de selección. El modelo propuesto para captar lluvia en donde la comunidad adaptó patrones de volúmenes a cubetas de 20 litros y tinacos de 2,000 litros responde a su interacción con el cotidiano.

En conclusión, el proceso de socialización del conocimiento provocó un diálogo recíproco entre la pluralidad epistemológica del cotidiano y la epistemología que norma a la matemática escolar como ya lo señalaba Gómez (2015).

5.2. Realidad y la matemática escolar: implica un cambio epistemológico

Como ya lo señalaban Barwell et al. (2022), Li y Tsai (2022) y la SEP (2022) (con su propuesta de la Nueva Escuela Mexicana), la matemática escolar necesita un cambio epistemológico para ser relacionada con la realidad del que aprende. Una propuesta a ese cambio epistemológico se refleja en el Diseño de Situación Escolar construido en este proyecto, debido a que este atiende al desarrollo de los usos del conocimiento matemático desde la comunidad que los construye y en las realidades en donde esos usos emergen y se resignifican. A pesar de las limitantes como el alcance del estudio y el tiempo de la implementación del diseño, los resultados muestran la conformación de un diálogo entre la matemática escolar y el cotidiano del estudiantado.

La propuesta de atender al desarrollo del uso del conocimiento nace en el seno del programa Socioepistemológico, Soltsa, donde distingue entre la matemática en la ciencia y a la matemática en la gente. Como se explicó anteriormente, la matemática escolar responde a un dME que privilegia a las formas en que las matemáticas se comunican científicamente dejando opacados el uso del conocimiento matemático que emergen en cada uno en los escenarios de carácter científico, profesional o del cotidiano.

Como se observó en la parte metodológica de este trabajo, el diseño puso en juego una epistemología de uso de la matemática, llamadas categorías de modelación, que han sido identificadas en comunidades que usan las matemáticas para entender situaciones que les son propias. La parte de resultados de esta investigación permite que afirmar que tales categorías también emergieron en la CCM_{ETS} que forma parte de este estudio, pero, en una forma que le es propia a dicha comunidad. Esta forma propia de emergencia se caracteriza por elementos de reciprocidad donde la comunidad discutía y acordaba argumentos para ser plasmados en el diseño; elementos de intimidad donde los usos de la gráfica de la comunidad permitieron identificar las categorías de *Predicción*, *Reproducción de comportamientos* y *Optimización*; y elementos de localidad que permearon las categorías anteriores desde lo regional y la jerga disciplinar de la comunidad, permitiendo así un diálogo recíproco con la matemática escolar y el cotidiano del estudiantado.

Las categorías de *Predicción*, *Reproducción de Comportamiento* y *Optimización* conforman una matemática que es peculiar. Esto lleva a una pluralidad epistemológica como se observó en las Figuras 37 y 38, la resignificación de los usos de la gráfica no fue única en la comunidad.

Los anterior establece un nuevo enfoque para relacionar el conocimiento matemático con la realidad, conocido como funcionalidad del conocimiento matemático, donde la matemática de la ciencia se encuentra en un plano horizontal con la matemática de la gente.

Limitaciones del estudio:

1) Las categorías de modelación identificadas en la situación específica de captación de lluvia están a un nivel de hipótesis.

2) En la inmersión profunda en la comunidad el investigador estaba solo. Por lo que hubo elementos de reciprocidad expresados de forma oral que se pudieron haber perdido. Fue difícil prestar atención a lo que decía y hacía cada grupo al momento de la aplicación.

3) Por la naturaleza de la implementación, el tiempo de esta fue adecuado a las horas clases del estudiantado. Este factor intervino de forma desfavorable en el desarrollo de la reflexión grupal que se había dejado como último punto al término de cada momento del diseño.

Prospectivas:

1) La combinación de la sostenibilidad (desde la perspectiva de socialización del conocimiento) y las categorías de modelación jugaron un papel determinante para la construcción del DSES en este estudio. Por lo que futuras investigaciones podrían seguir examinando la articulación de estos elementos con el fin de obtener situaciones específicas donde el estudiantado tenga la oportunidad de poner en uso su conocimiento matemático. Esto serviría como un Marco de Referencia para aquellas autoridades educativas, que igual a lo que actualmente está pasando con la educación básica de México, desean alejarse de un enfoque por competencias y se interesen por la pluralidad del conocimiento matemático.

2) Como las categorías de modelación están a un nivel de hipótesis en la situación de captación de agua-lluvia, se puede desarrollar un estudio desde la primera línea de trabajo del programa Soltsa para dar evidencia empírica de los usos del conocimiento de la comunidad de ingenieros que se encarga de dicha construcción de sistemas. Este se podría acompañar con el supuesto de que la categoría que condensa dichos usos es la de *Anticipación*. Dicha categoría fue reportada por Pérez-Oxte (2021), como una categoría compuesta por las categorías: Predicción, Comportamiento Tendencial y Optimización. Estas son las argumentaciones que emergieron en la comunidad de conocimiento de este estudio.

3) Otra investigación que puede resultar de este estudio es el papel epistemológico de las unidades de medición en los usos del conocimiento matemático. Si bien es cierto, que no se reporta de manera directa en los resultados de esta investigación, algunos estudiantes presentaron inconvenientes al momento de dimensionar la cantidad de agua, por ejemplo, pensar en cuánta agua sería 100 litros. Steffensen (2023) reporta como la modelación socio-crítica y el cotidiano facilitaron que estudiantes de 5° grado de primaria dimensionaran las cantidades que entran en juego cuando se habla de problemas relacionados a la sostenibilidad.

Referencias

Aguilar, M. y Castaneda, A. (2021). What mathematical competencies does a citizen needs to interpret Mexico's official information about the COVID-19 pandemic? *Educational Studies in Mathematics,108*(1), 227-248.

Andrade-Molina, M., Montecino, A., y Aguilar, M. S. (2020). Beyond quality metrics: defying journal rankings as the philosopher's stone of mathematics education research. *Educational Studies in Mathematics, 103*(3), 359-374.

Baioa, A. M., & Carreira, S. (2021). Mathematical thinking about systems–students modeling a biometrics identity verification system. *Mathematical Thinking and Learning*, *25*(3), 335-360.

Barwell, R., Boylan, M. y Coles, A. (2022). Mathematics education and the living world: A dialogic response to a global crisis. *The Journal of Mathematical Behavior,* 68, Article 101013. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2022.101013

Bakker, A., Cai, J., y Zenger, L. (2021). Future themes of mathematics education research: An international survey before and during the pandemic. *Educational Studies in Mathematics*, *107*(1), 1-24.

Bostic, J., Clark, Q., Vo, T., Esters, L., y Knoblach, N. (2021). A design process for developing agricultural life science-focused model eliciting activities. *School Science and Mathematics*, *121*(1), 13-24

Blomhøj, M. (2019). Towards Integration of Modelling in Secondary Mathematics Teaching. En A. Stillman y J. Brown (Eds), *Lines of inquiry in mathematical modelling research in education*. (pp. 259). Springer Nature.

Buendía, G. y Cordero, F. (2005). Prediction and the periodical aspect as generators of knowledge in a social practice framework. *Educational Studies in Mathematics*, *58*, 299– 333.

Buendía, G. (2012). El uso de las gráficas cartesianas: Un estudio con profesores. *Educación matemática*, *24*(2), 9-36.

Chevallard, Y., Bosch, M. (2020). Anthropological Theory of the Didactic (ATD). In: Lerman, S. (eds) Encyclopedia of Mathematics Education. Springer, Cham. https://doi-org.access.biblioteca.cinvestav.mx/10.1007/978-3-030-15789-0_100034

Cantoral, R., Moreno-Durazo, A., y Caballero-Pérez, M. (2018). Socio-epistemological research on mathematical modelling: an empirical approach to teaching and learning. *ZDM*, *50*, 77-89.

Cantoral, R., Reyes-Gasperini, D., y Montiel, G. (2014). Socioepistemología, Matemáticas y Realidad. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, *7*(3), 91-116

Cordero, F. (2023). *Matemáticas, sus usos y significados. Un programa socioepistemológico de la Matemática Educativa*. Gedisa.

Cordero, F., Carranza, P., Rosa, M., y Orey, D. (2022b). *La modelación en la vida de la gente: un programa alternativo para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas*. Gedisa

Cordero, F., Del Valle, T. y Morales, A. (2019). Usos de la optimización de ingenieros en formación: el rol de la ingeniería mecatrónica y de la obra de Lagrange. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 22*(2): 185 - 212. DOI: 10.12802/relime.19.2223

Cordero F. y Flores, R. (2007). El uso de las gráficas en el discurso matemático escolar. Un estudio socioepistemológico en el nivel básico a través de los libros de texto. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *10*(1), 7-38.

Cordero, F., Gómez, K., Silva-Crocci, H., y Soto, D. (2015). *El discurso matemático escolar: la adherencia, la exclusión y la opacidad*. Gedisa.

Cordero, F., Medina, D., Mendoza, J., Mota, C., Opazo, C., Pérez-Oxté, I., Peréz, R.,y Yerbes, J. (2019). ¿Por qué se dice que enseñar y aprender matemáticas es difícil?. Orinoquía, Ciencia y Sociedad.

Cordero, F., Mendoza-Higuera, J., Pérez-Oxté, I., Huincahue, J., y Mena-Lorca, J. (2022a). A Category of Modelling: The Uses of Mathematical Knowledge in Different Scenarios and the Learning of Mathematics. En M. Rosa, F. Cordero, D. Clark, y P. Carranza (Eds), *Mathematical Modelling Programs in Latin America*. (pp. 247-267). Springer

Cordero, F. y Solís, M. (2022). Un cambio educativo: ¿Matemáticas para la ingeniería? o ¿Matemática de la ingeniería?. En F. Cordero, M. Solís y C. Opazo (Eds.), *La matemática en la ingeniería. Modelación y la transversalidad de saberes. Situaciones de aprendizaje*. (pp. 27-44). Gedisa

Dede, A. T. (2019). Arguments constructed within the mathematical modelling cycle. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*. *50*(2), 292-314.

Del Valle, T. (2015). *Los Usos de la Optimización: un Marco de Referencia y la Teoría Socioepistemológica*. (Tesis de Doctorado no publicada), Instituto de Matemáticas, PUCV. Chile.

Diego-Mantecón, J. M., Haro, E., Blanco, T. F., & Romo-Vázquez, A. (2021). The chimera of the competency-based approach to teaching mathematics: a study of carpentry purchases for home projects. *Educational Studies in Mathematics*, *107*(2), 339-357.

English, L. y Gainsburg, J. (2015). Problem Solving in a 21st-Century Mathematics Curriculum. En L. English y D. Kirshner (Eds.), *Handbook of International Research in Mathematics Education*. (pp. 313-335). Routledge

English, L. y Kirshner, D. (2016) *Handbook of International Research in Mathematics Education*. Routledge

Escobar-Pérez, J. y Cuervo-Martínez, Á. (2008). Validez de contenido y juicio de expertos: una aproximación a su utilización. *Avances en medición*, *6*(1), 27-36.

Fewkes, A. (2000). Modelling the performance of rainwater collection systems: towards a generalised approach. *Urban water*, *1*(4), 323–333. https://doi.org/10.1016/S1462-0758(00)00026-1

García, J., Brito, E. y Cañas, M. (2021). *Matemáticas 3: tercer grado*. Correo del Maestro. https://libros.conaliteg.gob.mx/2021/secundaria/S02007.htm?#page/1

Gómez, K. (2015). El fenómeno de opacidad y la socialización del conocimiento. Lo matemático de la Ingeniería Agrónoma. (Tesis doctoral no publicada). Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN.

Hernández-Sampieri, R., Fernández, C. y Baptista, P. (2014). *Metodología de la investigación*. Mc Graw-Hill.

INEGI (2022). Características educativas de la población. https://www.inegi.org.mx/temas/educacion/

INEE (2019). Informe de resultados PLANEA: el aprendizaje de los alumnos de tercero de secundaria en México. Lenguaje y comunicación y matemáticas. https://historico.mejoredu.gob.mx/wp-content/uploads/2019/08/P1D321.pdf

Irwin, R. (2023). Can education outgrow the rhetoric of ‘development’embedded in the UN Sustainability Goals?. *New Zealand Journal of Educational Studies*, *58*(1), 47-57.

Jung, H., & Magiera, M. T. (2023). Connecting mathematical modeling and social justice through problem posing. *Mathematical thinking and learning*, *25*(2), 232-251.

Kohen, Z., & Orenstein, D. (2021). Mathematical modeling of tech-related real-world problems for secondary school-level mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *107*, 71-91.

Li, H. y Tsai, T. (2022). Education for sustainable development in mathematics education: what could it look like?. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *53*(9), 2532–2542. https://doi.org/10.1080/0020739X.2021.1941361

Mamolo, A. (2018). Perceptions of social issues as contexts for secondary mathematics. *The Journal of Mathematical Behavior*, *51*, 28-40.

Martínez, M. (2004). *Ciencia y arte en la metodología cualitativa*. Trillas.

Méndez, J., Návar, J. D., & González, V. (2008). Análisis de tendencias de precipitación (1920-2004) en México. *Investigaciones Geográficas*, (65), 38–55.

ONU (2017). Transformar nuestro mundo: la Agenda 2030 para el Desarrollo Sostenible. https://www.gob.mx/agenda2030/documentos/resolucion-de-las-naciones-unidas-para-la-adopcion-de-la-agenda-2030-para-el-desarrollo-sostenible?state=published

Pérez-Oxte, I. (2015). *Los usos de la gráfica en una Comunidad de Ingenieros Químicos Industriales en Formación. Una base para el diseño de una situación de aprendizaje*. Tesis de maestría no publicada. CINVESTAV-IPN, México, D.F.

Pérez-Oxté, I. (2021). *Anticipar-periodizar: una socialización de saberes matemáticos entre la Ingeniería y la docencia*. Tesis de doctorado no publicada. CINVESTAV-IPN, Ciudad de México, México.

Pérez-Oxté, I. y Cordero, F. (2022). Modelling and Anticipation of Graphical Behaviors in Industrial Chemical Engineering: The Role of Transversality of Knowledge in Learning

Mathematics. En M. Rosa, F. Cordero, D. Clark, y P. Carranza (Eds), *Mathematical Modelling Programs in Latin America* (pp. 269–289). Springer

Rosa, M., & Orey, D. C. (2015). A trivium curriculum for mathematics based on literacy, matheracy, and technoracy: an ethnomathematics perspective. ZDM, 47, 587-598.

SEP (2017). Aprendizajes Claves para un Educación Integral. Plan y programas de estudio para la educación básica. https://www.sep.gob.mx/work/models/sep1/Resource/10933/1/images/Aprendizajes_clave_para_la_educacion_integral.pdf

SEP (2022). Plan de Estudios de la educación básica 2022.https://info-basica.seslp.gob.mx/programas/departamentos-educativos-programas/plan-de-estudios-de-la-educacion-basica-2022/

Sevinc, S., & Lesh, R. (2018). Training mathematics teachers for realistic math problems: a case of modeling-based teacher education courses. *ZDM*, 50, 301-314.

Sohn, L. N. (2015). Ethnographic case study of a high school science classroom: strategies in STEM education. Tesis Doctoral, Texas A&M University-Corpus Christi. https://www.proquest.com/openview/670d211d805f869e0c656f287b37d858/1?pq-origsite=gscholar&cbl=18750

Slavit, D., Grace, E., & Lesseig, K. (2021). Student ways of thinking in STEM contexts: A focus on claim making and reasoning. *School Science and Mathematics*, *121*(8), 466-480.

Smith, C. & Morgan, C. (2016). Curricular orientations to real-world contexts in mathematics. *The Curriculum Journal*, *27*(1), 24–45.

Steffensen, L. (2023). Sustainability and mathematical modelling in 5th grade. *Prometeica-Revista de Filosofía y Ciencias*, (27), 241-251.

Stillman, G. A., & Brown, J. P. (2021). Modeling the phenomenon versus modeling the data set. *Mathematical Thinking and Learning*, 1-26.

Suárez, L., y Cordero, F. (2010). Modelación Graficación, una categoría para la matemática escolar. Resultados de un estudio socioepistemológico. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, *13*(4), 319-333.

Tennakoon, S., Vieritz, A. & Seneweera, S. (2018, November). *A Mathematical model for rain harvesting systems to optimise storage tank volumes and roof areas to achieve uninterrupted water supplies into households* [Paper presentation]. International conference on water security through rainwater harvesting 2018, Colombo, Sri Lanka.

Torres-Corrales, D. (2019). Usos y significados de nociones trigonométricas en transformaciones lineales. El problema cinemático de robots industriales. Tesis de Doctorado, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. México.

Torres, L. (2013). *Usos del Conocimiento Matemático. La Simultaneidad y Estabilidad en una Comunidad de Conocimiento de la Ingeniería Química en un Escenario de Trabajo*. Tesis de Maestría no publicada. CINVESTAV-IPN. México, D.F.

UNESCO (2017). Educación para los Objetivos de Desarrollo Sostenible: objetivos de aprendizaje. UNESCO Publishing. Recuperado en: https://unesdoc.unesco.org/ark:/48223/pf0000252423

Vieritz, A., Neumann, L., y Cook, S. (2015). Rainwater tank modelling. En A. Sharma, D. Begbie y T. Gardner (Eds), *Rainwater tank systems for urban water: supply design, yield, energy, health risks, economics and social perceptions* (pp. 19-42). IWA Publishing

Williams, S. y Leatham, K. (2017). Journal quality in mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education, 48*(4), 369-396.

Zaldívar-Rojas, J. y Cordero, F. (2021). An Analysis of the Use of Graphs in People's Daily Life. *Revista Colombiana de Educación, 1*(83), 1-22. https://doi.org/10.17227/rce.num83-10608.