



**Centro de Investigación y de Estudios  
Avanzados del Instituto Politécnico Nacional**

**UNIDAD ZACATENCO**

**DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA ELÉCTRICA**

**SECCIÓN DE MECATRÓNICA**

**"Control de un Vehículo Aéreo Transportando  
una carga con Cable de Longitud Variable"**

**T E S I S**

Que presenta

**Ing. Jesús Ramón Amparán Estrada**

Para obtener el grado de

**Maestro en Ciencias de la Ingeniería Eléctrica**

Directores de Tesis:

**Dr. Rafael Castro Linares**

**Dr. Hugo Rodríguez Cortés**

Ciudad de México

Febrero, 2024

## **Agradecimientos**

A mi madre, por mostrarme lo que es la vida y a como sobrellevar la misma.

A la Sección de Mecatrónica del CINVESTAV, por la formación profesional y el conocimiento adquirido.

A mis asesores de Tesis, el Dr. Hugo Rodríguez Cortés y el Dr. Rafael Castro Linares, por la guía durante el trabajo.

Se agradece al Dr. Ante Salcedo González, Director de Ingeniería del Instituto Tecnológico Autónomo de México (ITAM) las facilidades otorgadas para el uso del Laboratorio de Drones

Al Consejo Nacional de Humanidades, Ciencias y Tecnologías (CONAHCyT), por haberme otorgado el sustento económico para realizar mis estudios de maestría.

---

## **Resumen**

El siguiente trabajo de tesis realizado presenta un controlador no lineal para la dinámica de un cuadrotor con carga suspendida. Para dicho controlador se toma en cuenta dos enfoques, tanto la posición de la carga como la orientación de la misma, para así generar dos algoritmos de control que logren minimizar el error de orientación de la carga. A su vez, se busca que el controlador sea completo, tomando en cuenta las diferentes dinámicas presentes en el sistema.

## **Abstract**

The following thesis presents a non-linear controller for the dynamics of a quadrotor with suspended load. For this controller, two approaches are taken into account, both the position of the load and its orientation, in order to generate two control algorithms that manage to minimize the load orientation error. At the same time, the controller is intended to be complete, taking into account the different dynamics present in the system.

# Índice general

<b>1</b>	<b>Introducción</b>	<b>5</b>
1.1	Estado del Arte	6
1.2	Planteamiento del Problema	8
1.2.1	Despegue del cuadrotor	8
1.2.2	Vuelo del cuadrotor	8
1.3	Objetivos	9
1.3.1	Objetivo General	9
1.4	Estructura de la Tesis	10
<b>2</b>	<b>Modelado Matemático</b>	<b>11</b>
2.1	Modelado del cuadrotor sin Carga	12
2.2	Modelado de la Carga	16
2.2.1	Ecuaciones de Euler-Lagrange para los términos de $(q, \dot{q})$	18
2.2.2	Ecuaciones de Euler-Lagrange para los términos de $(q, w)$	19
2.3	Modelado del cuadrotor con Carga Suspendida	20
<b>3</b>	<b>Diseño de la Estrategia de Control</b>	<b>25</b>
3.1	Conceptos Preliminares	26
3.1.1	Pasividad	26
3.1.2	Backstepping	31
3.1.3	Regímenes Deslizantes	34
3.2	Controlador No Lineal	36
3.2.1	Control de Posición de la carga	36
3.2.2	Control de Orientación de la Carga	40
3.2.3	Control de Orientación del cuadrotor	48
3.3	Resultado de las simulaciones	49
3.3.1	Implementando el controlador de posición para la carga	51
3.3.2	Implementando el controlador basado en la carga	52

<b>4</b>	<b>Resultados Experimentales</b>	<b>55</b>
4.1	Descripción de la plataforma experimental . . . . .	56
4.2	Sintonización del controlador . . . . .	58
4.2.1	Despegue . . . . .	59
4.2.2	Seguimiento de Trayectoria . . . . .	61
<b>5</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>65</b>
<b>6</b>	<b>Referencias</b>	<b>67</b>

# Capítulo 1

## Introducción

La idea clave de este trabajo consiste en el estudio del sistema de cuadrotor con carga suspendida, desde su punto de vista no lineal, para que desde la dinámica conocida se pueda plantear un algoritmo de control lo suficientemente robusto, tal que en un vuelo pueda compensar perturbaciones exógenas al sistema sin alterar su dinámica. De igual forma, y a diferencia de la extensa línea de controladores encontrados en la literatura, cuya metodología consiste en dividir las dinámicas y dejar un controlador ya establecido, en este trabajo se busca un modelo, por medio del backstepping, tal que se inicie desde las posiciones de las cargas hasta la orientación del cuadrotor.

La finalidad de esto radica en que, la retroalimentación por medio del proceso de backstepping, aunado a su corroboración por medio de funciones de Lyapunov, brinda mayor robustez al sistema estudiado, al igual que resulta con mayor visibilidad la interconexión de los sistemas que integran al cuadrotor.

## 1.1 Estado del Arte

No resulta nuevo el uso de vehículos aéreos no tripulados (VANT) en nuestro día a día, sean estos usos desde recreativos: como la fotografía o vídeo, hasta situaciones más especializadas y con fines de investigación y desarrollo tecnológico tales como monitorizar la calidad del aire [4], traslado de cargas en áreas urbanas[3], agricultura de precisión [5], entre otros más.

Existen diferentes tipos de VANT que van desde vehículos de gran tamaño y peso, hasta microvehículos, como ejemplo los de 1.1. También es posible clasificarlos por vehículos de ala fija o de ala rotatoria, siendo los de ala rotatoria el de mayor enfoque, ya que este posee ventajas sobre los de ala fija, como mejor maniobrabilidad, despeje y aterrizaje de forma vertical, capacidad de girar sobre su propio eje, bajo costo y tamaño pequeño.



(a)



(b)

Figura 1.1: Diferencias entre un VANT de gran tamaño utilizado en operaciones militares como el 1.1a el cual es un MQ-9A Reaper y un VANT de uso recreativo como el DJI Mini 3 Pro 1.1b

La búsqueda de soluciones para estas tareas ha logrado el desarrollo de sistemas más robustos con la integración de sistemas de visión abordo, mejoras en el consumo energético para mayor tiempo de vuelo, mejoras en los sensores que posee, así como una mejor relación de empuje-peso. Sin embargo, estas herramientas no logran disipar el hecho de que se sigue teniendo que trabajar con un sistema no lineal, subactuado y de naturaleza inherentemente inestable.

Desde la perspectiva académica se tiene que, al momento de hablar del transporte de carga utilizando VANTS como el cuadrotor, se encuentra en la literatura la solución de este problema desde puntos de vista lineales o no lineales, a la par que diferentes técnicas de control se implementan, aunque dentro de esto se encuentran dos consideraciones importantes, las cuales parten de que la velocidad del cuadrotor a la cual se hace el recorrido y las oscilaciones de la carga son metas opuestas [1].

Por lo tanto se tienen dos estrategias de control a seguir, siendo estas

- Técnicas de control basadas en el seguimiento de la trayectoria deseada para la carga.
- Diseño de trayectorias óptimas, donde se atenúe las oscilaciones de la carga

Donde se pueden ver que trabajos como [3][18] donde se enfocan en que la posición de la carga cumpla con la trayectoria deseada. A su vez, trabajos como [15][14] realizan un proceso denominado como **programación dinámica**, donde para mitigar las oscilaciones de la carga se optimiza la trayectoria a seguir de la carga, siendo estas libres de oscilación, también trabajos como el de [17][19] se enfocan en métodos de optimización para diseñar la trayectoria a seguir. De igual forma se tienen enfoques como en [6] donde suprimen las oscilaciones de la carga durante el vuelo, dada una trayectoria predeterminada

También se puede tomar trabajos como [8] donde si bien no se trata explícitamente de VANT con carga suspendida, si se divide las dinámicas es posible tomar el posicionamiento de la carga con el cuadrotor a una analogía de una grúa. De igual forma se tiene el trabajo de [7], donde el objetivo de control es mantener el péndulo inverso por encima del cuadrotor, mientras se sigue una trayectoria, también trabajos como [2] que presentan el clásico problema del carro con péndulo, donde se puede tomar como analogía el objetivo de control, añadiendo una variable de control que sería la altura del cuadrotor.

## 1.2 Planteamiento del Problema

Tras revisar la literatura que se tomo como antesala para este trabajo, se vuelve notorio los diferentes aspectos que los autores toman para la resolución del mismo. A pesar de ya existir varios trabajos que toman la no linealidad del mismo para su resolución, la mayoría de estos trabajos toman la acción de control cuando ya existe una tensión en el cuadrotor, ya sea que omiten o tienen un control aparte para el despeje.

El enfoque para este trabajo, inspirado en el de [3], se basará en que el modelo maneja diferentes dinámicas durante el vuelo. Desde su despeje, el vuelo con la carga, la subida y bajada de la carga durante la trayectoria y el descenso del cuadrotor con la carga.

### 1.2.1 Despegue del cuadrotor

Siendo el primer enfoque del problema presente, este se define de acuerdo a la figura, que mientras el cuadrotor no se encuentre a una altura mayor a la distancia del cable  $L$ , la dinámica de la carga no afectará a la dinámica del cuadrotor. Matemáticamente, esto se define como

$$\|X_{Q_0} - X_{L_0}\| \leq L \quad (1.1)$$

En este punto, es fácil ver que la tensión del cable  $T_L = 0$ .

### 1.2.2 Vuelo del cuadrotor

El vuelo del cuadrotor se define cuando la condición (1.1) pasa a

$$\|X_{Q_0} - X_{L_0}\| = L \quad (1.2)$$

Es en este momento cuando la tensión del cable  $T_L > 0$  afecta la dinámica de la carga, al igual que la dinámica del cuadrotor.

## 1.3 Objetivos

### 1.3.1 Objetivo General

El objetivo del trabajo de tesis es el de diseñar y realizar un esquema de control para el problema de transporte de una carga suspendida por un cuadrirrotor considerando una longitud de cable variante.

#### Metodología

Se plantea diseñar, realizar y evaluar experimentalmente un esquema para el problema de transporte de una carga suspendida por un cuadrirrotor considerando una longitud de cable variante. El trabajo de tesis se realizará siguiendo las siguientes etapas

- Familiarización con la operación del cuadrirrotor que se usará
- Obtención y validación del modelo cuatrirrotor con carga suspendida y cable variante
- Diseño del esquema de control para el problema de transporte considerado y evaluación del mismo por medio de simulaciones numéricas
- Incorporación del sistema de transportación de carga en el cuadrirrotor con longitud de cable variante.
- Realización del esquema de control y evaluación del mismo en la plataforma experimental.

## 1.4 Estructura de la Tesis

En el capítulo 2 se presenta primero, cada una de las dinámicas que interfieren dentro del sistema. Desde el cuadrotor y la carga, hasta las dos dinámicas acopladas

En el capítulo 3 se presentan conceptos claves en el diseño del controlador, como la pasividad, el backstepping y los regímenes deslizantes. Esto da paso al diseño del controlador para diferentes opciones de vuelo, así como dos perspectivas para solución del problema, uno con la dinámica de la posición y otro con la dinámica de la orientación de la carga.

En el capítulo 4 se presentan los resultados de las simulaciones numéricas del sistema de control.

En el capítulo 5 se da una breve descripción de la plataforma experimental utilizada, así como la aplicación de los esquemas de control en la misma.

En el capítulo 6 se dan conclusiones con respecto al tema, así como posibles trabajos futuros.

# Capítulo 2

## Modelado Matemático

Para comprender el problema a tratar en este trabajo, es importante dividir las diferentes dinámicas que actúan en el sistema. Esto permite un verdadero entendimiento del problema y ayuda a tener una idea clara y concisa de la solución.

## 2.1 Modelado del cuadrotor sin Carga

Se empieza el modelado del sistema por el punto más importante; el cuadrotor. Los cuadrotores son generalmente modelados como cuerpos rígidos con seis grados de libertad, tres para describir la posición en el espacio y tres para describir la orientación del cuadrotor. Supóngase que de acuerdo a la figura 2.1, se tiene definido el marco  $X_i Y_i Z_i$ , orientado de acuerdo a la convención Norte-Este-Abajo (NED, por sus siglas en inglés), como el marco de referencia inercial. A su vez, pegado al centro de masa del cuadrotor se tiene al marco de referencia  $X_b Y_b Z_b$ , el cual describe el movimiento relativo al marco de referencia inercial.

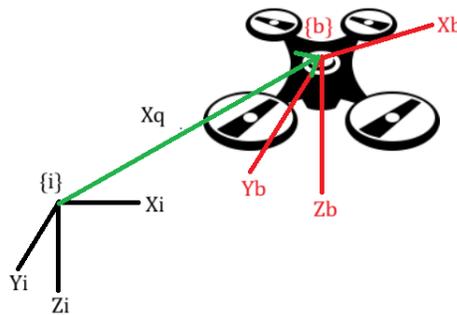


Figura 2.1: Descripción de los marcos de referencia presentes en el modelo del cuadrotor

Esta relación de marcos se describe como un elemento del grupo especial Euclidiano ( $SE(3)$ ), que consiste en el par  $(R, \mathbf{X}_q) \in SE(3)$ , donde  $R \in SO(3)$  es la matriz de rotación que describe la orientación del cuerpo rígido y  $\mathbf{X}_q \in \mathbb{R}^3$  es un vector que describe la posición del cuerpo.

Bajo este esquema, es fácil expresar la matriz de rotación  $R$ , a través de los ángulos de Euler en la secuencia de rotación  $Z - Y - X$  como

$$\mathbf{R}(\Theta) = \begin{bmatrix} c_\psi c_\theta & c_\psi s_\theta s_\phi - s_\psi c_\phi & c_\psi s_\theta c_\phi + s_\psi s_\phi \\ s_\psi c_\theta & s_\psi s_\theta s_\phi - c_\psi c_\phi & s_\psi s_\theta c_\phi - c_\psi s_\phi \\ -s_\theta & c_\theta s_\phi & c_\theta c_\phi \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

Con la notación definida de la siguiente forma  $s_\psi = \sin(\psi)$ ,  $s_\phi = \sin(\phi)$ ,  $s_\theta = \sin(\theta)$ ,  $c_\psi = \cos(\psi)$ ,  $c_\phi = \cos(\phi)$ ,  $c_\theta = \cos(\theta)$  y  $\Theta = \begin{bmatrix} \phi & \theta & \psi \end{bmatrix}^T$  y corresponde a los ángulos de alabeo, cabeceo y guiñada, respectivamente.

La velocidad lineal del cuadrotor  $v^{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} v_x & v_y & v_z \end{bmatrix}^T$  expresada en el marco  $M_b$  se puede también expresar en términos del marco  $M_i$  de la siguiente forma

$$\dot{X}_Q = \mathbf{R}(\phi, \theta, \psi) v^{\mathbf{b}} \quad (2.2)$$

De igual forma, es posible expresar las velocidades angulares del cuadrotor  $\omega^{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} p & q & r \end{bmatrix}^T$  del marco  $M_b$  en el marco  $M_i$  con la siguiente transformación

$$\begin{aligned} \dot{\Theta} &= \begin{bmatrix} 1 & \sin \phi \tan \theta & \cos \phi \tan \theta \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \frac{\sin \phi}{\cos \theta} & \frac{\cos \phi}{\cos \theta} \end{bmatrix} \omega^{\mathbf{b}} \\ &= \mathbf{W}(\phi, \theta) \omega^{\mathbf{b}} \end{aligned} \quad (2.3)$$

Es posible entonces describir las velocidades del cuadrotor con el siguiente esquema, denominado como la matriz jacobiana, dada por

$$\begin{bmatrix} \dot{X}_Q \\ \dot{\Theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}(\phi, \theta, \psi) & 0 \\ 0 & \mathbf{W}(\phi, \theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v^{\mathbf{b}} \\ \omega^{\mathbf{b}} \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

Las ecuaciones dinámicas del cuadrotor se pueden obtener utilizando la segunda ley de Newton o el formalismo de Euler-Lagrange, en el caso del cuadrotor sin carga resulta más sencillo el primer método. Las ecuaciones de movimiento que describen la dinámica del cuadrotor en el marco  $M_b$  se presentan como

$$\begin{bmatrix} m_Q \mathbf{I}_{3 \times 3} & 0 \\ 0 & \mathcal{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{v}^{\mathbf{b}} \\ \dot{\omega}^{\mathbf{b}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega^{\mathbf{b}} \times m_Q v^{\mathbf{b}} \\ \omega^{\mathbf{b}} \times \mathcal{I} \omega^{\mathbf{b}} \end{bmatrix} = \mathbf{f}^{\mathbf{b}} \quad (2.5)$$

Donde la matriz  $\mathcal{I} = \text{diag}(\mathcal{I}_{xx}, \mathcal{I}_{yy}, \mathcal{I}_{zz})$  es la matriz de inercia rotacional y  $m_Q$  representa la masa del cuadrotor.  $\mathbf{f}^{\mathbf{b}}$  representa las fuerzas externas aplicadas al cuadrotor en el marco  $M_b$ . Debido a que la posición y velocidad del cuadrotor se obtienen dentro del marco  $M_i$  resulta de mayor utilidad una ecuación dinámica representada desde este marco, ya que resulta más sencilla, como se muestra en la ecuación (2.6), sin embargo, al momento de hablar de la dinámica rotacional del cuadrotor resulta más sencilla expresarlas desde el marco  $M_b$  como se muestra también en el conjunto de ecuaciones de (2.6)

$$\begin{aligned}
 m_Q \ddot{X}_Q - m_Q g \mathbf{z}_i &= \mathbf{f}^i \\
 \mathcal{I} \dot{\omega}^b + \omega^b \times \mathcal{I} \omega^b &= \boldsymbol{\tau}^b
 \end{aligned}
 \tag{2.6}$$

Resulta importante aclarar la relación que existe entre las fuerzas de entrada del modelo y las velocidades rotacionales de los motores del cuadrotor. Los motores de un cuadrotor rotan con una velocidad angular  $\omega_i$  que provoca un empuje vertical denominado  $T_i$  donde  $i = \{1, \dots, 4\}$ .

El empuje de cada uno de los rotores del cuadrotor se relaciona con la velocidad angular como  $T_i = b\omega_i^2$ , donde  $b$  es conocido como el factor de empuje. La suma de estos cuatro empujes en dirección contraria con el eje  $z$  del marco  $M_b$  determinan la fuerza de entrada del cuadrotor como  $f = \sum_{i=1}^4 T_i$ . Las fuerzas externas y torques que actúan en el cuadrotor en el marco  $M_b$  se pueden expresar como

$$\begin{aligned}
 \mathbf{f}^b &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -f \end{bmatrix}^\top \\
 \boldsymbol{\tau}^b &= \begin{bmatrix} \tau_x & \tau_y & \tau_z \end{bmatrix}^\top
 \end{aligned}
 \tag{2.7}$$

El empuje total y los torques se relacionan con las velocidades angulares de cada rotor de la siguiente forma

$$\begin{bmatrix} f \\ \tau_x \\ \tau_y \\ \tau_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b & b & b & b \\ Lb & -Lb & -Lb & Lb \\ Lb & Lb & -Lb & -Lb \\ -d & d & -d & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1^2 \\ \omega_2^2 \\ \omega_3^2 \\ \omega_4^2 \end{bmatrix}
 \tag{2.8}$$

Donde  $d$  es el factor de arrastre y  $L$  es la distancia del rotor hacia el centro de masa del cuadrotor. Para obtener las fuerzas en el marco  $M_i$  que actúan sobre el cuadrotor es fácil expresarlas de la siguiente forma

$$\mathbf{f}^i = \mathbf{R}(\phi, \theta, \psi) \mathbf{f}^b
 \tag{2.9}$$

Sustituyendo entonces (2.9) en (2.5) es posible reescribir el sistema como

$$\begin{aligned}
 m_Q \ddot{X}_Q - m_Q g e_3 &= \mathbf{R}(\phi, \theta, \psi) \mathbf{f}^b \\
 \mathcal{I} \dot{\omega}^b + \omega^b \times \mathcal{I} \omega^b &= \tau^b
 \end{aligned}
 \tag{2.10}$$

Y despejando la dinámica de la misma se obtiene lo siguiente

$$\begin{aligned}
 \ddot{x}_Q &= -\frac{f}{m_Q} (\cos \psi \sin \theta \cos \phi + \sin \psi \sin \phi) \\
 \ddot{y}_Q &= -\frac{f}{m_Q} (\sin \psi \sin \theta \cos \phi - \cos \psi \sin \phi) \\
 \ddot{z}_Q &= g - \frac{f}{m_Q} (\cos \theta \cos \phi) \\
 \dot{p} &= \frac{I_{yy} - I_{zz}}{I_{xx}} q r + \frac{1}{I_{xx}} \tau_x \\
 \dot{q} &= \frac{I_{zz} - I_{xx}}{I_{yy}} p r + \frac{1}{I_{yy}} \tau_y \\
 \dot{r} &= \frac{I_{xx} - I_{yy}}{I_{zz}} p q + \frac{1}{I_{zz}} \tau_z
 \end{aligned}
 \tag{2.11}$$

Estas ecuaciones describen la dinámica traslacional y rotacional del cuadrotor dentro de sus respectivos marcos de referencia. A la par, se puede ver que el sistema para su estabilización requiere primero de los ángulos de orientación, antes que la posición.

## 2.2 Modelado de la Carga

El péndulo esférico es una unión rígida que puede rotar desde un punto inercial fijo en la unión, conocido como pivote. Normalmente, el origen del marco euclidiano es en el lugar del punto inercial fijo. Dado esto, cada punto material del péndulo se encuentra restringido a moverse en una esfera centrada en el punto inercial fijo.

El vector de dirección  $q \in S^2$  denota el espacio de configuración del péndulo. Dado que el espacio de configuración es dos, se expresa que los grados de libertad de las rotaciones del péndulo son dos. La figura 2.2 denota un esquema de la configuración del péndulo.

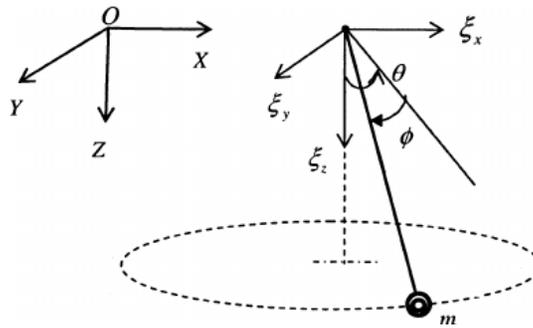


Figura 2.2: Esquema de configuración del péndulo esférico

Se supone entonces una función del tiempo tal que  $t \rightarrow q \in S^2$  que representa el movimiento rotacional del péndulo esférico. Dado que  $q \in S^2$  se sabe que la derivada  $\dot{q} \in \mathbf{T}_q S^2$  es un vector tangente de  $S^2$  en  $q \in S^2$ , por lo tanto  $\dot{q}$  es ortogonal a  $q$ , implicando que  $(\dot{q} \cdot q) = 0$ . Entonces, existe una función dependiente del tiempo  $t \rightarrow w \in \mathbb{R}^3$  de la forma

$$\dot{q} = w \times q \quad (2.12)$$

O también escrita como

$$\dot{q} = S(w) q \quad (2.13)$$

Cabe recalcar que, al igual que  $(\dot{q} \cdot q) = 0$ ,  $(w \cdot q) = 0$ . Esto es debido a que  $w \in \mathbb{R}^3$  puede ser descompuesto en la suma de dos vectores, uno con dirección a  $q$  y otro que es ortogonal.

Se tiene entonces que la ecuación (2.12) describe el cambio que tiene  $\dot{q} \in \mathbf{T}_q S^2$  en términos de la función vectorial  $w \in \mathbb{R}^3$ , el cual se refiere a la velocidad angular del péndulo esférico.

Entonces, la dinámica del péndulo se puede ver como la evolución de  $(q, \dot{q}) \in \mathbf{TS}^2$  o como  $(q, w) \in S^2 \times \mathbb{R}^3$ . Si se supone que la longitud del péndulo esférico, denotada como  $L$ , define la posición del péndulo en  $Lq \in \mathbb{R}^3$  y el vector de velocidad de traslación como  $L\dot{q} \in \mathbb{R}^3$ .

Si bien esta descripción resulta útil para ver desde un punto de vista más general la dinámica del sistema dentro de un espacio de configuración dado, el enfoque tratado en este trabajo se dará por los ángulos de orientación de la carga suspendida, modelada como el péndulo esférico, para esto se toma a consideración lo siguiente.

Sease  $q$  un vector parametrizado, como se puede ver en [13][14][16][15] de la siguiente forma

$$q = \mathbf{R}_x(\gamma_x) \mathbf{R}_y(\gamma_y) e_3$$

Donde

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_y(\gamma_y) &= \begin{bmatrix} \cos \gamma_y & 0 & \sin \gamma_y \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \gamma_y & 0 & \cos \gamma_y \end{bmatrix} \\ \mathbf{R}_x(\gamma_x) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \gamma_x & -\sin \gamma_x \\ 0 & \sin \gamma_x & \cos \gamma_x \end{bmatrix} \\ e_3 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^\top \end{aligned} \tag{2.14}$$

quedando esta como

$$q = \begin{bmatrix} \sin(\gamma_y) \\ -\cos(\gamma_y) \sin(\gamma_x) \\ \cos(\gamma_x) \cos(\gamma_y) \end{bmatrix} \tag{2.15}$$

La dinámica del péndulo está dada como

$$\dot{q} = S(w) q \tag{2.16}$$

Donde

$$S(w) = \begin{bmatrix} 0 & -w_3 & w_2 \\ w_3 & 0 & -w_1 \\ -w_2 & w_1 & 0 \end{bmatrix}$$

Pero de igual forma se tiene que

$$\dot{q} = \frac{\partial q}{\partial (\gamma_x, \gamma_y)} \begin{bmatrix} \dot{\gamma}_x \\ \dot{\gamma}_y \end{bmatrix}$$

donde

$$\frac{\partial q}{\partial (\gamma_x, \gamma_y)} = \begin{bmatrix} 0 & \cos(\gamma_y) \\ -\cos(\gamma_x) \cos(\gamma_y) & \sin(\gamma_x) \sin(\gamma_y) \\ -\cos(\gamma_y) \sin(\gamma_x) & -\cos(\gamma_x) \sin(\gamma_y) \end{bmatrix}$$

Pero como no se encuentra una matriz de rango completo se procede a utilizar el siguiente razonamiento

$$\begin{aligned} S(w)q &= \frac{\partial q}{\partial (\gamma_y, \gamma_x)} \begin{bmatrix} \dot{\gamma}_y \\ \dot{\gamma}_x \end{bmatrix} \\ \frac{\partial q}{\partial (\gamma_y, \gamma_x)}^T S(w)q &= \frac{\partial q}{\partial (\gamma_y, \gamma_x)}^T \frac{\partial q}{\partial (\gamma_y, \gamma_x)} \begin{bmatrix} \dot{\gamma}_y \\ \dot{\gamma}_x \end{bmatrix} \\ \left( \frac{\partial q}{\partial (\gamma_y, \gamma_x)}^T \frac{\partial q}{\partial (\gamma_y, \gamma_x)} \right)^{-1} \frac{\partial q}{\partial (\gamma_y, \gamma_x)}^T S(w)q &= \begin{bmatrix} \dot{\gamma}_y \\ \dot{\gamma}_x \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \dot{\gamma}_y \\ \dot{\gamma}_x \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & \sin(\gamma_x) \tan(\gamma_y) & \cos(\gamma_x) \tan(\gamma_y) \\ 0 & \cos(\gamma_x) & \sin(\gamma_x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.17)$$

Con este procedimiento es posible definir la dinámica de los ángulos de oscilación de la carga, para el desarrollo de la estrategia de control.

Durante la descripción de la dinámica de la carga, se han utilizado  $\dot{q}$  y  $w$  como las velocidades angulares de la misma, sin embargo, estas describen diferentes espacios de configuración para el sistema, razón por la cual es posible definir con el modelado por Euler Lagrange dos sistemas dinámicos válidos para el sistema.

### 2.2.1 Ecuaciones de Euler-Lagrange para los términos de $(q, \dot{q})$

Sea la función del Lagrangiano  $L : \mathbf{TS}^2 \rightarrow \mathbb{R}^1$  que describe las diferencias entre la energía cinética y la energía potencial como

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} m_L L^2 (\dot{q}^\top \dot{q}) - m_L g L e_3^\top q \quad (2.18)$$

Y siguiendo el formalismo se tiene entonces que la dinámica que describe al péndulo esférico se

obtiene como

$$m_L L^2 \ddot{q} + m_L L^2 (\dot{q}^\top \dot{q}) q + m_L g L (I_{3 \times 3} - q q^\top) e_3 = 0 \quad (2.19)$$

Estas ecuaciones describe el Lagrangiano para la dinámica del sistema en términos de  $(q, \dot{q}) \in TS^2$

### 2.2.2 Ecuaciones de Euler-Lagrange para los términos de $(q, w)$

De igual forma, es posible obtener las ecuaciones del modelo dinámico en términos de la velocidad angular del péndulo esférico  $w \in \mathbf{T}_q S^2$  en el formalismo de Euler-Lagrange, las cuales satisfacen (2.16), siendo el lagrangiano expresado como

$$L(q, w) = \frac{1}{2} m_L L^2 (w^\top w) - m_L g L e_3^\top q \quad (2.20)$$

y el modelo dinámico obtenido como

$$m_L L^2 \dot{w} + m_L g L S(q) e_3 = 0 \quad (2.21)$$

Este conjunto de ecuaciones describe la dinámica del péndulo esférico en términos de  $(q, w) \in \mathbf{T}S^2$ . De igual forma se presenta que tomando las ecuaciones (2.17) es posible definir la dinámica de los ángulos como

$$\begin{aligned} \ddot{\gamma}_y &= \dot{w}_{L_y} c(\gamma_x) + \dot{w}_{L_z} s(\gamma_x) + (w_{L_z} c(\gamma_x) - w_{L_y} s(\gamma_x)) \dot{\gamma}_x \\ \ddot{\gamma}_x &= \dot{w}_{L_x} + ((-w_{L_z} c(\gamma_x) + w_{L_y} s(\gamma_x)) (1 + \tan(\gamma_y)^2)) \dot{\gamma}_y + (-\dot{w}_{L_z} c(\gamma_x) + \dot{w}_{L_y} s(\gamma_x) + \dot{\gamma}_y \dot{\gamma}_x) \tan(\gamma_y) \end{aligned} \quad (2.22)$$

## 2.3 Modelado del cuadrotor con Carga Suspendida

Antes de empezar con el análisis cinemático y dinámico del sistema debe de aclararse ciertas suposiciones para el modelo, las cuales se alistan a continuación

- El cable que conecta la carga con el cuadrotor es rígido y su masa es despreciable.
- La masa conectada al cable se modela como una masa puntual.
- El punto de conexión entre el cable y el cuadrotor coincide con el centro de masa del cuadrotor.

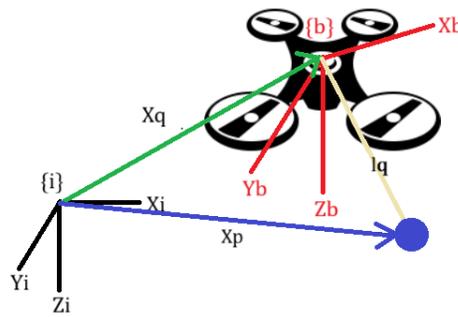


Figura 2.3: Descripción de los marcos de referencia presentes en el modelo del cuadrotor con carga suspendida

Al igual que con los ejemplos anteriores y de acuerdo a la figura 2.3, las posiciones del cuadrotor y de la carga se dan desde el marco  $M_i$  y existen  $X_Q \in \mathbb{R}^3$  y  $X_P \in \mathbb{R}^3$ , siendo este el vector de posición de la carga, definido como  $X_P = \begin{bmatrix} x_P & y_P & z_P \end{bmatrix}^T$ .

La orientación de la carga suspendida se puede representar a través de dos ángulos de oscilación  $\gamma_x$  y  $\gamma_y$ , como se presenta en la figura 2.2, para esto, se adjunta un marco de referencia  $M_s$  con respecto al punto de unión del cable con el cuadrotor, en el marco  $M_b$  del mismo. Estos ángulos de oscilación se describen como matrices de rotación en el marco  $M_s$  a través del eje  $y$  ( $R_y(\gamma_y)$ ) y el eje  $x$  ( $R_x(\gamma_x)$ )

Existe una relación cinemática entre  $X_Q$  y  $X_P$  dada por la ecuación

$$\begin{aligned}
 X_Q &= X_Q \\
 X_P &= X_Q + l \mathbf{R}_S^B \mathbf{R}_x(\gamma_x) \mathbf{R}_y(\gamma_y) e_3
 \end{aligned}
 \tag{2.23}$$

Donde

$$\mathbf{R}_S^B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

representa la orientación del marco  $M_s$  con respecto al marco  $M_b$ .

Es posible determinar la cinemática inversa de esta relación, no tanto para alguna validación del sistema, sino para la validación experimental más adelante, tanto de los ángulos de oscilación del sistema como de la longitud del cable. La posición de la masa suspendida entonces se encuentra dada por

$$\begin{aligned} x_P &= x_Q + l \sin(\gamma_y) \\ y_P &= y_Q - l \sin(\gamma_x) \cos(\gamma_y) \\ z_P &= z_Q + l \cos(\gamma_x) \cos(\gamma_y) \end{aligned} \tag{2.24}$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones se sabe entonces que

$$\begin{aligned} \gamma_y &= \tan^{-1} \left( \frac{x_P - x_Q}{z_P - z_Q} \right) \\ \gamma_x &= \sin^{-1} \left( \frac{y_P - y_Q}{l} \right) \end{aligned} \tag{2.25}$$

Donde

$$l = \sqrt{(x_P - x_Q)^2 + (z_P - z_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2} \tag{2.26}$$

Es fácil ahora agrupar las variables del sistema en coordenadas generalizadas, ya que las ecuaciones (2.23) muestran un mapeo de la forma  $g : \zeta \rightarrow \mathbb{R}^9$  y el vector de estados queda representado como

$$\zeta = \left[ x_Q \ y_Q \ z_Q \ \gamma_y \ \gamma_x \ \phi \ \theta \ \psi \right]^\top$$

Y su derivada queda como

$$\dot{\zeta} = \left[ \dot{x}_Q \ \dot{y}_Q \ \dot{z}_Q \ \dot{\gamma}_y \ \dot{\gamma}_x \ \dot{\phi} \ \dot{\theta} \ \dot{\psi} \right]^\top$$

Es posible entonces obtener la cinemática de velocidad diferenciando el mapeo  $g$  de (2.23) con respecto a  $\zeta$  quedando la siguiente expresión, separada en la dinámica de traslación y rotacional

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_Q \\ \dot{y}_Q \\ \dot{z}_Q \\ \dot{x}_P \\ \dot{y}_P \\ \dot{z}_P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & l \cos(\gamma_y) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -l \cos(\gamma_x) \cos(\gamma_y) & l \sin(\gamma_x) \sin(\gamma_y) & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -l \cos(\gamma_y) \sin(\gamma_x) & -l \cos(\gamma_x) \sin(\gamma_y) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_Q \\ \dot{y}_Q \\ \dot{z}_Q \\ \dot{\gamma}_x \\ \dot{\gamma}_y \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

Donde

$$J_1(\zeta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & l \cos(\gamma_y) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -l \cos(\gamma_x) \cos(\gamma_y) & l \sin(\gamma_x) \sin(\gamma_y) & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -l \cos(\gamma_y) \sin(\gamma_x) & -l \cos(\gamma_x) \sin(\gamma_y) & 0 \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

Y la dinámica rotacional queda como

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \sin \phi \tan \theta & \cos \phi \tan \theta \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \frac{\sin \phi}{\cos \theta} & \frac{\cos \phi}{\cos \theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

Donde

$$J_2(\zeta) = \begin{bmatrix} 1 & \sin \phi \tan \theta & \cos \phi \tan \theta \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \frac{\sin \phi}{\cos \theta} & \frac{\cos \phi}{\cos \theta} \end{bmatrix}$$

quedando entonces la matriz Jacobiana como

$$J(\zeta) = \begin{bmatrix} J_1(\zeta) & 0 \\ 0 & J_2(\zeta) \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

Esta matriz sirve como mapeo de las posiciones  $X_Q$  y  $X_P$  a las variables presentadas en  $\zeta$ .

Se utiliza el principio de Euler-Lagrange para derivar las ecuaciones dinámicas del sistema, primero

se determinan las energías cinéticas y potenciales del sistema. La energía cinética del sistema puede ser dividido en dos componentes, uno de traslación ( $T_{tras}$ ) y otro de rotación ( $T_{rot}$ ).

$$T_{tras} = \frac{1}{2}m_Q\dot{x}_Q^2 + \frac{1}{2}m_Q\dot{y}_Q^2 + \frac{1}{2}m_Q\dot{z}_Q^2 + \frac{1}{2}m_P\dot{x}_P^2 + \frac{1}{2}m_P\dot{y}_P^2 + \frac{1}{2}m_P\dot{z}_P^2$$

$$T_{rot} = \frac{1}{2}(\omega^b)^T \mathcal{I}\omega^b$$

De forma más compacta se tiene entonces que

$$T = \frac{1}{2}\dot{X}_Q^T M_Q \dot{X}_Q + \frac{1}{2}\dot{X}_P^T M_P \dot{X}_P + \frac{1}{2}\omega_Q^T \mathcal{I}\omega_Q$$

Usando la matriz jacobiana mostrada en (2.30), es posible reescribir la energía cinética del sistema como

$$T(\dot{\zeta}, \zeta) = \frac{1}{2}\dot{\zeta}^T J(\zeta)^T M J(\zeta) \dot{\zeta} \quad (2.31)$$

Y la energía potencial  $V(\mathbf{q})$  del sistema queda como

$$V(\zeta) = m_Q g z_Q + m_P g (z_Q + l \cos \gamma_y \cos \gamma_x) \quad (2.32)$$

Con las expresiones para la energía cinética y potencial del sistema es fácil escribir el Lagrangiano como  $\mathcal{L}(\zeta, \dot{\zeta}) = T(\zeta, \dot{\zeta}) - V(\zeta)$  y resolviendo la formulación de Euler-Lagrange de (2.33) se pueden obtener las ecuaciones para el sistema en la forma de (2.34)

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\zeta}} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \zeta} = \mathbf{f}_{ext} \quad (2.33)$$

$$M(\zeta) \ddot{\zeta} + C(\zeta, \dot{\zeta}) \dot{\zeta} + g(\zeta) = \mathbf{f}_{ext} \quad (2.34)$$

De la ecuación presentada en (2.34) resulta fácil desprender las ecuaciones dinámicas del sistema como

$$\begin{aligned} \ddot{\zeta} &= M^{-1}(\zeta) \left( \mathbf{f}_{ext} - C(\zeta, \dot{\zeta}) \dot{\zeta} - g(\zeta) \right) \\ &= h(\zeta, \dot{\zeta}, \mathbf{f}_{ext}) \end{aligned} \quad (2.35)$$

Donde se tiene que

$$\ddot{\zeta} = \begin{bmatrix} -\frac{f}{m_Q} (c\psi s\theta c\phi + s\psi s\phi) + \frac{T_L}{m_Q} s(\gamma_y) \\ -\frac{f}{m_Q} (s\psi s\theta c\phi - c\psi s\phi) - \frac{T_L}{m_Q} s(\gamma_x) c(\gamma_y) \\ -\frac{f}{m_Q} c(\phi) c(\theta) + \frac{T_L}{m_Q} c(\gamma_x) c(\gamma_y) + g \\ \dot{w}_{L_y} c(\gamma_x) + \dot{w}_{L_z} s(\gamma_x) + (w_{L_z} c(\gamma_x) - w_{L_y} s(\gamma_x)) \dot{\gamma}_x \\ \dot{w}_{L_x} + ((-w_{L_z} c(\gamma_x) + w_{L_y} s(\gamma_x)) (1 + \tan(\gamma_y)^2)) \dot{\gamma}_y + (-\dot{w}_{L_z} c(\gamma_x) + \dot{w}_{L_y} s(\gamma_x) + \dot{\gamma}_y \dot{\gamma}_x) \tan(\gamma_y) \\ \frac{I_{yy} - I_{zz}}{I_{xx}} q r + \frac{1}{I_{xx}} \tau_x \\ \frac{I_{zz} - I_{xx}}{I_{yy}} p r + \frac{1}{I_{yy}} \tau_y \\ \frac{I_{xx} - I_{yy}}{I_{zz}} p q + \frac{1}{I_{zz}} \tau_z \end{bmatrix} \quad (2.36)$$

Existe un término de interconexión entre la dinámica de la carga y la dinámica del cuadrotor con el cual se pueden realizar las simplificaciones como en [18][17], quedando el sistema dinámico visto desde la perspectiva de la carga.

## Capítulo 3

# Diseño de la Estrategia de Control

## 3.1 Conceptos Preliminares

### 3.1.1 Pasividad

Los sistemas pasivos, son aquellos que se caracterizan por almacenar menos energía que la que se les suministra. Un sistema pasivo disipa toda la energía adquirida.

#### Sistemas Pasivos

Se empieza por mostrar conceptos básicos de disipación y pasividad. Se empieza considerando el siguiente sistema no lineal descrito por

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x) + g(x)u \\ y &= h(x)\end{aligned}\tag{3.1}$$

Y la función de suministro

$$w : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}\tag{3.2}$$

donde  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $u, y \in \mathbb{R}^m$  y  $w$  es una función real denominada como razón de suministro, siendo un homólogo del concepto de potencia de entrada y la cual, para cualquier  $u \in \mathbb{R}^m$  y para toda  $x^0 = x(0) \in \mathbb{R}^n$ , se tiene una salida  $y(t) = h(\Phi(t, x^0, u))$  para la cual se tiene que  $w(t) = w(u(t), y(t))$  cumple con

$$\int_0^t |w(t)| dt < \infty \quad \forall t \geq 0$$

entonces existe una función  $S(x)$  donde  $S(0) = 0$  y que cumple con

$$S(x) \geq 0 \quad S(x(T)) - S(x(0)) \leq \int_0^t |w(t)| dt$$

siendo entonces  $S(x)$  denominada como función de almacenamiento. Esta desigualdad expresa que la energía almacenada en el sistema en un tiempo  $t$  es a lo mucho igual a la suma de la energía administrada junto con la energía almacenada en un tiempo  $t = 0$ , o mejor dicho, no existe creación de energía dentro del sistema dentro de un intervalo de tiempo  $[0, t]$ .

Esto indica que el sistema tiene un almacenamiento disponible que se puede describir como

$$S_a(x) = \sup_{u, T \geq 0} \left( - \int_0^T |w(t)| dt \right)$$

Siendo este la mayor cantidad de energía que el sistema puede extraer dadas ciertas condiciones iniciales. Ya que esta también es una función de almacenamiento, resulta obvio que  $S_a(x) \leq S(x)$

Ahora si se tiene que el sistema cuenta con una razón de suministro dada por  $w(u, y) = u^\top y$  se puede afirmar que este es pasivo si tiene una función de almacenamiento que cumpla con  $S_a(0) = 0$  al igual que  $S_a(x) \geq 0$

Los conceptos de pasividad y disipación no requieren que la función de almacenamiento sea definida positiva, en realidad basta con que sean semi-definidas positivas. Como resultado puede pasar que estados del sistema que no sean observables generen que  $x = 0$  sea un punto de inestabilidad. Para que las funciones de disipación impliquen estabilidad en el sentido de Lyapunov es necesario deshacerse de estas condiciones.

**Teorema 1 (Estabilidad con funciones de Lyapunov semi definidas positivas)** *Sea  $x = 0$  un punto de equilibrio para  $\dot{x} = f(x)$  y  $V(x)$  sea una función semidefinida positiva  $C^1$  tal que  $\dot{V}(x) \leq 0$ . Sea  $Z$  el mayor conjunto positivo e invariable dentro de  $\{x | V(x) = 0\}$ . Entonces, si  $x = 0$  es una condición de estabilidad asintótica para  $Z$ , resulta que  $x$  es estable.*

**Definición 1 (Observabilidad y Detectabilidad del estado cero)** *Considérese el sistema (3.1) con  $\dot{x} = f(x, 0)$ ,  $y = h(x, 0)$  y con  $Z \in \mathbb{R}^n$  siendo el conjunto invariante más grande dentro de  $\{x \in \mathbb{R}^n | y = h(x, 0) = 0\}$ . Se tiene entonces que (3.1) es estado cero detectable (ZSD, por sus siglas en inglés) si  $x = 0$  resulta en un punto condicional y asintótica-mente estable para  $Z$ . Si  $Z = \{0\}$  se dice que (3.1) es estado cero observable (ZSO, por sus siglas en inglés).*

La definición previa resulta en la conexión entre la pasividad y la estabilidad, a pesar de que la función de almacenamiento sea solo semi definida positiva. La demostración de la definición anterior queda si

$$S(x) = 0 \longrightarrow h(x, 0) = 0 \quad (3.3)$$

Como  $S(x) \geq 0$  para cualquier  $x$ ,  $\dot{S}(x) \leq u^\top y = u^\top h(x, u)$  y también debe ser positiva para toda  $u$  cuando  $S(x) = 0$ . Como  $h(u, x)$  es  $C^1$  en  $u$  es posible descomponer a  $y$  como  $y = h(x, u) = h(x, 0) + j(x, u) u$  obteniendo que  $\forall x \in \{x | S(x) = 0\}$

$$0 \leq \dot{S}(x) \leq u^\top h(x, 0) + u^\top j^\top(x, u) u \quad (3.4)$$

Para que (3.4) se cumpla para cualquier  $u$ ,  $h(x, 0) = 0$  cuando  $S(x) = 0$ . Esto da como resultado que el conjunto invariante más largo posible en  $Z$  de  $\dot{x} = f(x, 0)$  inmerso en  $\{x|S(x) = 0\}$  está también en  $\{x|h(x, 0) = 0\}$ . Dado el teorema y la definición previa, es posible ver que  $x = 0$  es un punto estable para el sistema.

## Sistemas en cascada

Como parte del estudio de los sistemas pasivos se tienen los sistemas en cascada, los cuales reflejan subsistemas con estructuras dinámicas que en conjunto describen la dinámica general del sistema. En los sistemas en cascada no solo es necesario identificar los subsistemas que los comprenden, si no también como existe la conexión entre ellos.

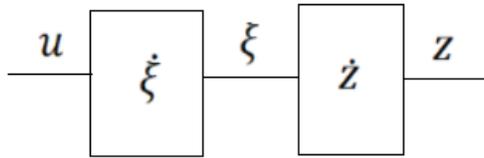


Figura 3.1: Diagrama a bloques de un sistema en cascada

Para un sistema en cascada simple 3.1 se tiene el siguiente conjunto de ecuaciones

$$\begin{aligned} \dot{z} &= \tilde{f}(z, \xi), \quad z \in \mathbb{R}^{n_z} \\ \dot{\xi} &= A\xi + Bu, \quad \xi \in \mathbb{R}^{n_\xi} \end{aligned} \tag{3.5}$$

donde  $\tilde{f}(z, \xi)$  es  $C^1$  y  $\tilde{f}(0, 0) = 0$  donde el equilibrio se encuentra en  $(z, \xi) = (0, 0)$  y a su vez, solo se encuentra una señal de entrada en ellos, en el subsistema  $\xi$ . El término de interconexión se propone como

$$\psi(z, \xi) := \tilde{f}(z, \xi) - \tilde{f}(z, 0)$$

donde

$$\dot{z} = \tilde{f}(z, 0)$$

se supone globalmente estable o globalmente asintóticamente estable y el subsistema  $\xi$  se asume que se puede estabilizar. Con esto, el sistema en cascada se pueda reescribir como

$$\begin{aligned} \dot{z} &= f(z) + \psi(z, \xi), \quad f(z) = \tilde{f}(z, 0) \\ \dot{\xi} &= A\xi + Bu \end{aligned} \tag{3.6}$$

Donde se tiene una salida de la forma  $y = C\xi$ . Esta configuración resulta bastante útil, siempre y cuando se mantenga, ya que de un lado la estabilidad del subsistema en  $z$  debe ser uniforme en el subsistema  $\xi$ . De igual forma, para el subsistema  $\xi$  es necesario que exista una ley de control que alcance una estabilidad asintótica en  $\xi = 0$ , y que sea uniforme en  $z$ . Esto es porque si  $\dot{z}$  es asintóticamente estable y la tasa de crecimiento del término de interconexión es lineal, esta no afectará como entre la dinámica de  $\xi$  en dicho término, sin embargo, si el término de interconexión aumenta más rápido que la convergencia de la dinámica de  $z$  es posible que esta afecte a la última.

**Proposición 1 (Estabilidad Asintótica)** *Si  $z = 0$  resulta en un punto de equilibrio estable para  $\dot{z}$ , entonces, el control de realimentación dado por  $u = k(\xi)$ , el cual logra que  $\xi = 0$  sea un punto de equilibrio estable para  $\dot{\xi}$  de igual manera -logra también estabilidad asintótica para  $(z, \xi) = (0, 0)$*

La estabilización del sistema 3.6 requiere de asumir ciertas suposiciones sobre estabilidad y estabilización en los subsistemas que lo constituyen a la par que imponer restricciones al momento de ver el crecimiento del término de interconexión.

**Proposición 2 (Restricción de crecimiento del término de interconexión)** *El término de interconexión  $\psi(z, \xi)$  tiene un crecimiento lineal en  $z$  ya que existen dos funciones  $\epsilon_1(*)$ ,  $\epsilon_2(*)$  derivables en  $\xi = 0$  tal que*

$$\|\psi(z, \xi)\| \leq \epsilon_1(\|\xi\|)\|z\| + \epsilon_2(\xi) \quad (3.7)$$

### 3.1.2 Backstepping

El Backstepping consiste en una metodología de control recursiva, la cual liga una función de control por Lyapunov con el diseño de un control por realimentación y garantiza una estabilidad globalmente asintótica.

Para el diseño e implementación de esta técnica, se considera el siguiente sistema de control como

$$\dot{\sigma} = F(\sigma) + g(\sigma)\eta \quad (3.8)$$

$$\dot{\eta} = v \quad (3.9)$$

Donde  $X = (\sigma, \eta) \in \mathbf{R}^{n+1}$  es el vector de estados y  $v \in \mathbf{R}$  es la señal de control con la cual  $X(t) \rightarrow 0$  mientras  $t \rightarrow \infty$ . A su vez, se asume el conocimiento de  $F$  y  $g$  y que estas son funciones suaves en  $\mathbf{R}^n$ .

Se asume que  $\eta$  cumple como una entrada de control virtual suave tal que  $\eta = \Psi(\sigma)$ , la cual cumple con  $\Psi(0) = 0$  y es asintóticamente estable para el sistema

$$\dot{\sigma} = F(\sigma) + g(\sigma)\Psi(\sigma) \quad (3.10)$$

Supóngase el conocimiento de una función de Lyapunov  $V_1(\sigma)$  tal que la siguiente desigualdad se cumpla

$$\frac{\partial V_1}{\partial \sigma} [F(\sigma) + g(\sigma)\Psi(\sigma)] \leq -W(\sigma) \quad (3.11)$$

Donde  $W(\sigma)$  es definida positiva en  $\mathbf{R}^n$ .

$$\dot{\sigma} = F(\sigma) + g(\sigma)\Psi(\sigma) + g(\sigma)[\eta - \Psi(\sigma)] \quad (3.12)$$

$$\dot{\eta} = v \quad (3.13)$$

Sea ahora, con un cambio de variable

$$y = \eta - \Psi(\sigma) \quad (3.14)$$

La salida  $y$  se muestra como el error entre el estado  $\eta$  y el control auxiliar  $\Psi(\sigma)$ . Ahora la función de diseño en el esquema de backstepping es encontrar  $v$  tal que  $y(t) \rightarrow 0$  mientras  $t \rightarrow \infty$

Reescribiendo el sistema en coordenadas del error se tiene entonces que

$$\dot{\sigma} = F(\sigma) + g(\sigma)\Psi(\sigma) + g(\sigma)y \quad (3.15)$$

$$\dot{y} = v - \dot{\Psi}(\sigma) \quad (3.16)$$

Como  $F, g$  y  $\Psi$  son conocidas y se puede expresar  $\dot{\Psi}$  como

$$\dot{\Psi}(\sigma) = \frac{\partial \Psi}{\partial \sigma} [F(\sigma) + g(\sigma)\eta] \quad (3.17)$$

En donde

$$u = v - \dot{\Psi}(\sigma) \quad (3.18)$$

Quedando el sistema como

$$\dot{\sigma} = F(\sigma) + g(\sigma)\Psi(\sigma) + g(\sigma)y \quad (3.19)$$

$$\dot{y} = u \quad (3.20)$$

Este conjunto de ecuaciones muestra una ventaja en comparación con el mostrado en las ecuaciones (3.8),(3.9) y es que, si la entrada es cero, para (3.15) este es asintóticamente estable.

Ahora, se define una función de Lyapunov para todo el sistema, incluyendo la dinámica del error. Sea entonces

$$V(\sigma, \eta) = V_1(\sigma) + \frac{1}{2}y^2 \quad (3.21)$$

En donde  $V(\sigma, \eta)$  es una función definida positiva en  $\mathbf{R}^{n+1}$ , ya que  $V_1(\sigma) \geq 0$  para todo  $\sigma \in \mathbf{R}^n$  y  $V_1(\sigma) = 0 \iff \sigma = 0$  Si se calcula la derivada de  $V$  tomando (3.19) y (3.20) se tiene que la desigualdad (3.11) se cumple, añadiendo de ambos lados el término  $\frac{\partial V_1}{\partial y}g(\sigma)y$

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \frac{\partial V_1}{\partial \sigma} [F(\sigma) + g(\sigma)\Psi(\sigma)] + \frac{\partial V_1}{\partial y}g(\sigma)y + y(v - \dot{\Psi}(\sigma)) \\ &\leq -W(\sigma) + \frac{\partial V_1}{\partial y}g(\sigma)y + yu \end{aligned} \quad (3.22)$$

Donde  $u$  queda definida como

$$u = \frac{\partial V_1}{\partial y}g(\sigma) - ky \quad (k > 0) \quad (3.23)$$

Y sustituyendola en la función de Lyapunov previa se tiene que

$$\dot{V} \leq -W(\sigma) - ky^2 \quad (3.24)$$

Y con las sustituciones adecuadas se tiene entonces que la ley de control por Backstepping queda definida como

$$v = u + \dot{\sigma} = \frac{\partial \Psi}{\partial \sigma} [F(\sigma) + g(\sigma) \eta] - \frac{\partial V_1}{\partial y} g(\sigma) - k [\sigma - \Psi(\sigma)] \quad (k > 0) \quad (3.25)$$

Lo último puede ser resumido en el siguiente teorema

**Teorema 2 (Teorema de Backstepping)** *Considérese el sistema de control (3.8) definido en  $\mathbf{R}^{n+1}$ , con funciones vectoriales suaves  $F$  y  $g$  con  $F(0) = 0$  y  $g(0) = 0$ . Sea  $\eta = \Psi(\sigma)$  una ley de realimentación estabilizante para el sistema (3.9), donde  $\Psi(0) = 0$ . Supóngase la función de Lyapunov  $V_1(\sigma)$  tal que*

$$\frac{\partial V_1}{\partial \sigma} [F(\sigma) + g(\sigma) \Psi(\sigma)] \leq -W(\sigma)$$

donde  $W(\sigma)$  es definida positiva en  $\mathbf{R}$ . Entonces, la ley control

$$v = u + \dot{\sigma} = \frac{\partial \Psi}{\partial \sigma} [F(\sigma) + g(\sigma) \eta] - \frac{\partial V_1}{\partial y} g(\sigma) - k [\sigma - \Psi(\sigma)] \quad (k > 0)$$

logra estabilizar el equilibrio  $(\sigma, \eta) = (0, 0)$  del sistema (3.8) con la función de Lyapunov

$$V(\sigma, \eta) = V_1(\sigma) + \frac{1}{2} [\eta - \Psi(\sigma)]^2$$

### 3.1.3 Regímenes Deslizantes

Dentro del control moderno se han desarrollado diferentes técnicas para la regulación y estabilidad de sistemas dinámicos no lineales, siendo una de las más estudiadas y de mayor elección: los regímenes deslizantes. Más cuando se requiere lidiar con dinámicas no modeladas o incertidumbres exógenas. Para este trabajo, se empezara con una explicación de los regímenes deslizantes de forma normal, para después saltar a los de orden superior, mostrando las diferencias de estos.

Para empezar, se considera el sistema dinámico en variables de estado de la forma (3.1), donde  $h(x)$  y  $g(x)$  son funciones no lineales caracterizadas por los estados del sistema y  $g(x) \geq g_0 > 0 \quad \forall x$ . La finalidad de esta metodología de control radica en diseñar una señal de realimentación basada en los mismos estados del sistema, en específico la salida  $h(x)$  en comparación con una señal deseada  $y_d$ , con la consigna de estabilizar al origen de los mismos.

Para esto, supóngase que se puede restringir el movimiento de las variables de estado, definidas por el error como  $\tilde{x}_{i-1} = h(x) - y_d$  a una superficie de deslizamiento definida como

$$S = \sigma(x, t) = a_1 \tilde{x}_{(i-1)} + \tilde{x}_i = 0 \quad (3.26)$$

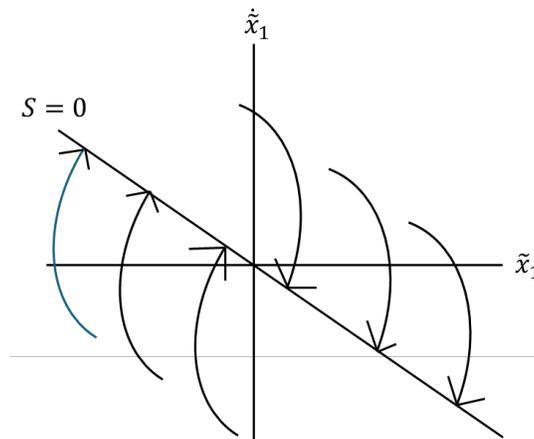


Figura 3.2: Diagrama típico de la superficie de deslizamiento

donde  $i = r - 1$  siendo  $r$  el grado realtivo del sistema. La dinámica de esta superficie está dada por  $\dot{\tilde{x}}_i = a_1 \tilde{x}_i$ , donde si  $a_1 > 0$ , garantiza que  $x_i(t)$  tienda a cero mientras  $t$  tiende al infinito. Es fácil ver que para  $S$  los parámetros de  $h(x)$  y  $g(x)$  son externos.

Si derivamos la superficie de deslizamiento del sistema tenemos como resultado lo siguiente

$$\dot{S} = a_1 \dot{\tilde{x}}_{(i-1)} + \dot{\tilde{x}}_i = a_1 \tilde{x}_i - y_d^r + h(x) + g(x) u$$

Se propone entonces una función de Lyapunov para  $\dot{S}$  con la cual se satisface la estabilidad de la

superficie de deslizamiento, siendo esta

$$V = \frac{1}{2}S^2$$

con su derivada como

$$\dot{V} = S\dot{S} = S(a_1 \dot{x}_{i-1} + \dot{x}_i) = S(a_1 x_i + h(x) + g(x)u)$$

Para la señal de control, resulta útil dividir esta misma en dos partes, definidas como

$$u = u_{eq} + u_n \quad (3.27)$$

donde

- $u_{eq}$  : resulta el control equivalente, el cual se define la resolver la función de Lyapunov, quedando este como

$$u_{eq} = -\frac{h(x) + a_i x_i}{g(x)}$$

- $u_n$  : es la señal de control discontinuo, la cual fuerza al sistema a mantenerse dentro de la superficie de deslizamiento, siendo esta señal definida como

$$u_n = -\kappa \operatorname{sgn}(S)$$

Al aplicar esta metodología se tiene que la trayectoria definida converge a la superficie  $S = 0$  en un tiempo finito y una vez que llega a esta, se mantiene o se desliza sobre la superficie y la dinámica del sistema queda confinada al modelo reducido por  $\ddot{x}_{(i-1)} = a_1 \tilde{x}_{(i-1)}$ , como se puede ver en 3.2

Este método resulta eficaz, sin embargo, está sujeto a que el sistema sea como máximo  $C^1$  y presenta defectos en cuestión con su implementación física debido a las posibles imperfecciones en los dispositivos de conmutación (*chattering*). Para eliminar este problema se puede reemplazar la función signo con una función de saturación, quedando la señal de control discontinua reescrita como

$$u_n = -\kappa \operatorname{sat}\left(\frac{S}{\epsilon}\right)$$

donde

$$\operatorname{sat}(y) = \begin{cases} y, & |y| \leq 1 \\ \operatorname{sgn}(y), & |y| > 1 \end{cases}$$

## 3.2 Controlador No Lineal

### 3.2.1 Control de Posición de la carga

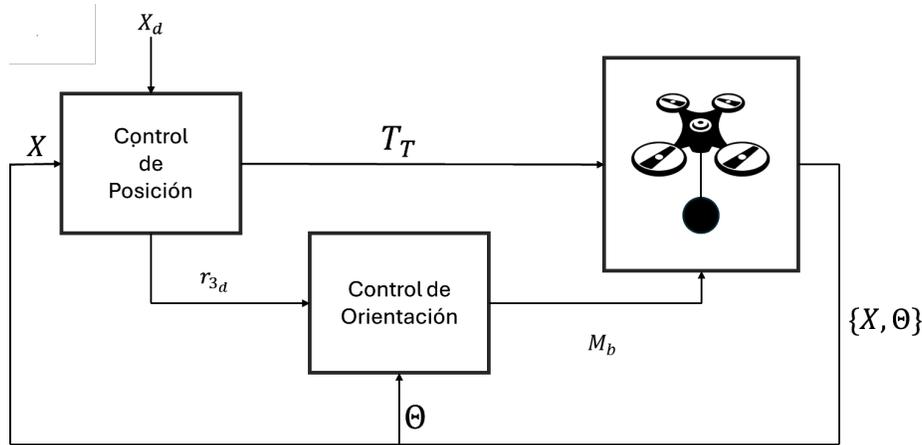


Figura 3.3: Diagrama a bloques para el control de posición y orientación del cuadrotor

#### Control de Altura

Se empieza por mostrar el sistema basado en errores del control de altura.

$$\tilde{z}_1 = z_L - p_{L_d}^z$$

$$\tilde{z}_2 = \dot{z}_L - \dot{p}_{L_d}^z$$

$$\dot{\tilde{z}}_1 = \tilde{z}_2$$

$$\dot{\tilde{z}}_2 = \ddot{z}_L - \ddot{p}_{L_d}^z = -\frac{f}{m_T} q^\top r_3 q_3 - \frac{m_Q l}{m_T} \|w_L\|^2 q_3 + g - \ddot{p}_{L_d}^z$$

Se define ahora la superficie de deslizamiento como

$$s_z = \tilde{z}_2 + c_1 \tilde{z}_1 + c_2 \int \tilde{z}_1$$

Se deriva la superficie de deslizamiento, dando como resultado

$$\dot{s}_z = \dot{\tilde{z}}_2 + c_1 \tilde{z}_2 + c_2 \tilde{z}_1$$

Y sustituyendo  $\dot{\tilde{z}}_2$  tenemos

$$\dot{s}_z = \dot{\tilde{z}}_2 + c_1 \tilde{z}_2 + c_2 \tilde{z}_1 = -\frac{f}{m_T} q^\top r_3 q_3 - \frac{m_Q l}{m_T} \|w_L\|^2 q_3 + g - \ddot{p}_{L_d}^z + c_1 \tilde{z}_2 + c_2 \tilde{z}_1$$

Ahora, aplicando la función de Lyapunov se tiene

$$V_z = \frac{1}{2} s_z^2$$

Donde su derivada es

$$\dot{V}_z = \dot{s}_z s_z = s_z (\dot{\tilde{z}}_2 + c_1 \tilde{z}_2 + c_2 \tilde{z}_1) = \left( -\frac{f}{m_T} q^\top r_3 q_3 - \frac{m_Q l}{m_T} \|w_L\|^2 q_3 + g - \ddot{p}_{L_d}^z + c_1 \tilde{z}_2 + c_2 \tilde{z}_1 \right)$$

Donde  $f$  queda definida como

$$f = \frac{m_T}{q^\top r_3 q_3} \left( -\frac{m_Q l}{m_T} \|w_L\|^2 q_3 + g - \ddot{p}_{L_d}^z + c_1 \tilde{z}_2 + c_2 \tilde{z}_1 - \kappa_z \text{sign}(\dot{s}_z) \right)$$

Quedando entonces la función de Lyapunov como

$$\dot{V}_z = -\kappa_z \text{sign}(s_z) \leq 0$$

Y ahora, sustituyendo  $f$  al sistema dinámico basado en los errores tenemos que

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{z}}_1 &= \tilde{z}_2 \\ \dot{\tilde{z}}_2 &= -c_1 \tilde{z}_2 - c_2 \tilde{z}_1 - \kappa_z \text{sgn}(s_z) \end{aligned}$$

## Control en $X$ y $Y$

Ahora, para el control del sistema en las posiciones  $X$  y  $Y$  se tiene el siguiente sistema, en coordenadas del error como

$$\begin{aligned} \tilde{x}_1 &= x_L - p_{L_d}^x \\ \tilde{x}_2 &= \dot{\tilde{x}}_1 = \dot{x}_L - \dot{p}_{L_d}^x \\ \dot{\tilde{x}}_2 &= \ddot{\tilde{x}}_1 = \ddot{x}_L - \ddot{p}_{L_d}^x = -\frac{f}{m_T} q^\top r_3 q_1 - \frac{m_Q l}{m_T} \|w_L\|^2 q_1 - \ddot{p}_{L_d}^x \\ \tilde{y}_1 &= y_L - p_{L_d}^y \\ \tilde{y}_2 &= \dot{\tilde{y}}_1 = \dot{y}_L - \dot{p}_{L_d}^y \\ \dot{\tilde{y}}_2 &= \ddot{\tilde{y}}_1 = \ddot{y}_L - \ddot{p}_{L_d}^y = -\frac{f}{m_T} q^\top r_3 q_2 - \frac{m_Q l}{m_T} \|w_L\|^2 q_2 - \ddot{p}_{L_d}^y \end{aligned}$$

(3.28)

Donde se puede tomar como nuestra señal auxiliar el parámetro de  $q^\top r_3 q_i$ , ya que  $f$  se encuentra definido, siendo este ahora la entrada de control para  $X$  y  $Y$ , teniendo entonces

$$\dot{\tilde{x}}_2 = \ddot{\tilde{x}}_1 = \ddot{x}_L - \ddot{p}_{L_d}^x = -\frac{f}{m_T} u_x - \frac{m_Q l}{m_T} \|w_L\|^2 q_1 - \ddot{p}_{L_d}^x$$

$$\dot{\tilde{y}}_2 = \ddot{\tilde{y}}_1 = \ddot{y}_L - \ddot{p}_{L_d}^y = -\frac{f}{m_T} u_y - \frac{m_Q l}{m_T} \|w_L\|^2 q_2 - \ddot{p}_{L_d}^y$$

Definiendo las superficies de deslizamiento como

$$s_x = \tilde{x}_2 + c_3 \tilde{x}_1 + c_4 \int \tilde{x}_1$$

$$s_y = \tilde{y}_2 + c_5 \tilde{y}_1 + c_6 \int \tilde{y}_1$$

Y derivándolas

$$\dot{s}_x = \dot{\tilde{x}}_2 + c_3 \tilde{x}_2 + c_4 \tilde{x}_1 - k_1 \dot{s}_x = -\frac{f}{m_T} u_x - \frac{m_Q l}{m_T} \|w_L\|^2 q_1 - \ddot{p}_{L_d}^x + c_3 \tilde{x}_2 + c_4 \tilde{x}_1$$

$$\dot{s}_y = \dot{\tilde{y}}_2 + c_5 \tilde{y}_2 + c_6 \tilde{y}_1 - k_2 \dot{s}_y = -\frac{f}{m_T} u_y - \frac{m_Q l}{m_T} \|w_L\|^2 q_2 - \ddot{p}_{L_d}^y + c_5 \tilde{y}_2 + c_6 \tilde{y}_1$$

Se proponen las funciones de Lyapunov para el sistema como

$$V_x = \frac{1}{2} s_x^2$$

$$V_y = \frac{1}{2} s_y^2$$

quedando sus derivadas como

$$\dot{V}_x = s_x \dot{s}_x$$

$$\dot{V}_x = s_x \left( -\frac{f}{m_T} u_x - \frac{m_Q l}{m_T} \|w_L\|^2 q_1 - \ddot{p}_{L_d}^x + c_3 \tilde{x}_2 + c_4 \tilde{x}_1 \right)$$

$$\dot{V}_y = s_y \dot{s}_y$$

$$\dot{V}_y = s_y \left( -\frac{f}{m_T} u_y - \frac{m_Q l}{m_T} \|w_L\|^2 q_2 - \ddot{p}_{L_d}^y + c_5 \tilde{y}_2 + c_6 \tilde{y}_1 \right)$$

De donde se pueden definir las señales de control virtual  $u_x$  y  $u_y$  como

$$u_x = \frac{m_T}{f} \left( c_3 \tilde{x}_2 + c_4 \tilde{x}_1 - \frac{m_Q l}{m_T} \|w_L\|^2 q_1 - \ddot{p}_{L_d}^x - \kappa_x \operatorname{sign}(s_x) \right)$$

$$u_y = \frac{m_T}{f} \left( c_5 \tilde{y}_2 + c_6 \tilde{y}_1 - \frac{m_Q l}{m_T} \|w_L\|^2 q_2 + \ddot{p}_{L_d}^y - \kappa_y \operatorname{sign}(s_y) \right)$$

Y realimentando las señales de control  $u_x$  y  $u_y$  nos queda los sistemas dinámicos en función del error como

$$\begin{aligned} \tilde{x}_1 &= x_L - p_{L_d}^x \\ \tilde{x}_2 &= \dot{\tilde{x}}_1 = \dot{x}_L - \dot{p}_{L_d}^x \\ \dot{\tilde{x}}_2 &= \ddot{\tilde{x}}_1 = \ddot{x}_L - \ddot{p}_{L_d}^x = -c_3 \tilde{x}_2 - c_4 \tilde{x}_1 - \kappa_x \operatorname{sign}(s_x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{y}_1 &= y_L - p_{L_d}^y \\ \tilde{y}_2 &= \dot{\tilde{y}}_1 = \dot{y}_L - \dot{p}_{L_d}^y \\ \dot{\tilde{y}}_2 &= \ddot{\tilde{y}}_1 = \ddot{y}_L - \ddot{p}_{L_d}^y = -c_5 \tilde{y}_2 - c_6 \tilde{y}_1 - \kappa_y \operatorname{sign}(s_y) \end{aligned} \tag{3.29}$$

Teniendo ahora las señales de control  $u_x$ ,  $u_y$ ,  $u_z$  y siguiendo entonces la metodología en [9] se tiene que las señales  $u_x$  y  $u_y$  obtenidas pueden determinar los ángulos de orientación del cuadrotor si se define lo siguiente como

$$u_x = \frac{u_z}{m_T} (c_\phi s_\theta c_\psi + s_\phi s_\psi)$$

$$u_y = \frac{u_z}{m_T} (c_\phi s_\theta s_\psi - s_\phi c_\psi) \tag{3.30}$$

Y despejando los ángulos de  $\phi$  y  $\theta$  se tiene que

$$\phi_d = \sin^{-1} \left( \frac{m_T}{u_z} (c_\psi u_y - s_\psi u_x) \right) \tag{3.31}$$

$$\theta_d = \sin^{-1} \left( \frac{m_T}{u_z c_\phi} (c_\psi u_x + s_\psi u_y) \right) \tag{3.32}$$

### 3.2.2 Control de Orientación de la Carga

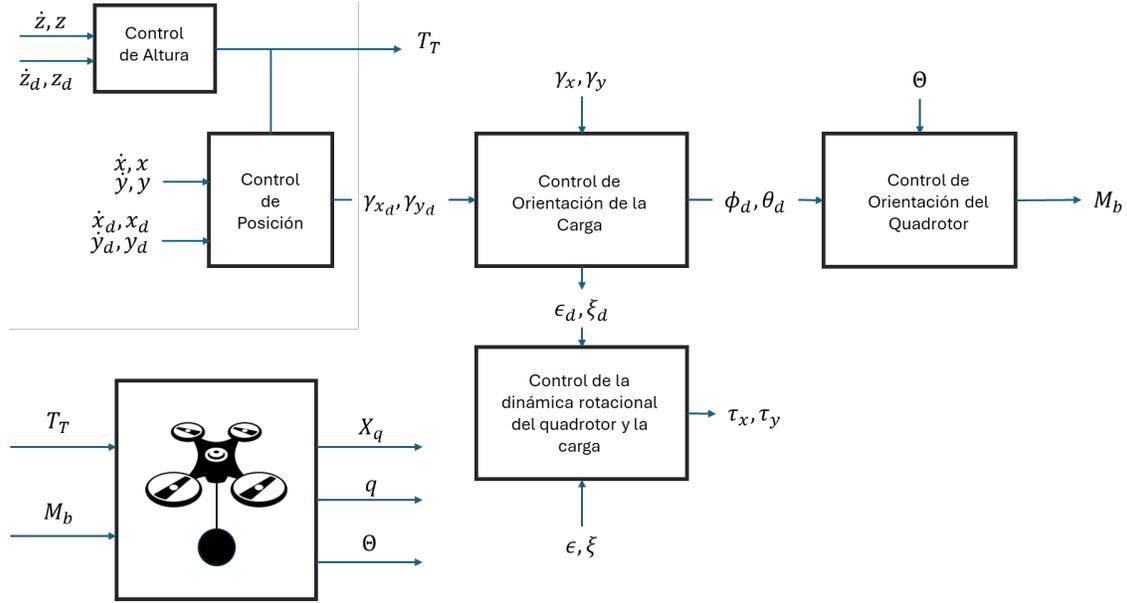


Figura 3.4: Diagrama a bloques para el control de posición y orientación del quadrotor, basado en la orientación de la carga

Ahora se considera la orientación de la carga con respecto al quadrotor. Las ecuaciones anteriores siguen siendo validas, sin embargo, ahora se verá el modelo del error de la siguiente forma.

Si se realimenta la señal de control  $f$  al sistema, se tiene que este, adopta la forma de

$$\begin{aligned}\tilde{x}_1 &= x_L - p_{L_d}^x \\ \tilde{x}_2 &= \dot{\tilde{x}}_1 = \dot{x}_L - \dot{p}_{L_d}^x \\ \ddot{\tilde{x}}_2 &= \ddot{\tilde{x}}_1 = - (c_1 \dot{\tilde{z}}_2 + c_2 \tilde{z}_1 + g - \ddot{p}_{L_d}^z + \kappa_z \text{sign}(s_z)) \tan(\gamma_y) - \ddot{x}_{L_d}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{y}_1 &= y_L - p_{L_d}^y \\ \tilde{y}_2 &= \dot{\tilde{y}}_1 = \dot{y}_L - \dot{p}_{L_d}^y \\ \ddot{\tilde{y}}_2 &= \ddot{\tilde{y}}_1 = (c_1 \dot{\tilde{z}}_2 + c_2 \tilde{z}_1 + g - \ddot{p}_{L_d}^z + \kappa_z \text{sign}(s_z)) \tan(\gamma_x) - \ddot{x}_{L_d}\end{aligned}$$

(3.33)

Donde  $\alpha_z$  se definirá como la siguiente función auxiliar

$$\alpha_z = (c_1 \dot{\tilde{z}}_2 + c_2 \tilde{z}_1 + g - \ddot{p}_{L_d}^z + \kappa_z \text{sign}(s_z))$$

Se proponen las siguientes funciones de Lyapunov como

$$V_{\tilde{x}} = \frac{c_4}{2} \tilde{x}_1^2 + \frac{1}{2} \tilde{x}_2^2$$

$$V_{\tilde{y}} = \frac{c_6}{2} \tilde{y}_1^2 + \frac{1}{2} \tilde{y}_2^2$$

Y sus derivadas como

$$\begin{aligned} \dot{V}_{\tilde{x}} &= c_4 \tilde{x}_1 \dot{\tilde{x}}_1 + \tilde{x}_2 \dot{\tilde{x}}_2 \\ \dot{V}_{\tilde{x}} &= \tilde{x}_2 (\dot{\tilde{x}}_2 + c_4 \tilde{x}_1) \\ &= \tilde{x}_2 (-\alpha_z \tan(\gamma_y) - \ddot{x}_{L_d} + c_4 \tilde{x}_1) \end{aligned}$$

donde podemos tomar en cuenta como entrada de control virtual a  $\gamma_y$  quedando entonces

$$\tan(\gamma_{y_d}) = \frac{-\ddot{x}_{L_d} + c_3 \tilde{x}_2 + c_4 \tilde{x}_1}{\alpha_z}$$

con lo cual la función de Lyapunov queda de la siguiente forma

$$\dot{V}_{\tilde{x}} = -c_3 \tilde{x}_2^2 \leq 0$$

Y la dinámica del sistema se describe de la siguiente manera como

$$\dot{\tilde{x}}_2 = -\alpha_z \tan(\gamma_{y_d}) - \ddot{x}_{L_d} + \alpha_z (\tan(\gamma_{y_d}) - \tan(\gamma_y))$$

y el error de orientación de la carga como

$$\tilde{\gamma}_y = \tan(\gamma_{y_d}) - \tan(\gamma_y)$$

quedando el sistema en el plano  $XZ$  como

$$\dot{\tilde{x}}_2 = -\alpha_z \tan(\gamma_{y_d}) - \ddot{x}_{L_d} + \alpha_z \tilde{\gamma}_y$$

y con la señal de control virtual, queda este como

$$\dot{\tilde{x}}_2 = -c_3 \tilde{x}_2 - c_4 \tilde{x}_1 + \alpha_z \tilde{\gamma}_y$$

De la misma forma se realiza el análisis en  $YZ$  teniendo que la derivada de la función de Lyapunov queda como

$$\dot{V}_{\tilde{y}} = c_6 \tilde{y}_1 \dot{\tilde{y}}_1 + \tilde{y}_2 \dot{\tilde{y}}_2$$

$$\begin{aligned}\dot{V}_{\tilde{y}} &= \tilde{y}_2 (\dot{\tilde{y}}_2 + c_6 \tilde{y}_1) \\ &= \tilde{y}_2 (\alpha_z \tan(\gamma_x) - \ddot{y}_{L_d} + c_6 \tilde{y}_1)\end{aligned}$$

donde se toma en cuenta como salida de control virtual a  $\gamma_x$  y se define esta como

$$\tan(\gamma_{x_d}) = \frac{\ddot{y}_{L_d} - c_5 \tilde{y}_2 - c_6 \tilde{y}_1}{\alpha_z}$$

Con lo cual la función de Lyapunov nos queda como

$$\dot{V}_{\tilde{y}} = -c_5 \tilde{y}_2^2 \leq 0$$

Y la dinámica del sistema que queda se describe de la siguiente manera como

$$\dot{\tilde{y}}_2 = \alpha_z \tan(\gamma_{x_d}) - \ddot{y}_{L_d} + \alpha_z (\tan(\gamma_x) - \tan(\gamma_{x_d}))$$

y el error de orientación de la carga como

$$\tilde{\gamma}_x = \tan(\gamma_x) - \tan(\gamma_{x_d})$$

quedando el sistema en el plano  $YZ$  como

$$\dot{\tilde{y}}_2 = -c_5 \tilde{y}_2 - c_6 \tilde{y}_1 + \alpha_z \tilde{\gamma}_x$$

Ahora se toman los errores en los ángulos, para realizar el control del sistema.

$$\tilde{\gamma}_y = \tan(\gamma_{y_d}) - \tan(\gamma_y)$$

$$\tilde{\gamma}_x = \tan(\gamma_x) - \tan(\gamma_{x_d})$$

Donde las derivadas de los errores se presentan como

$$\dot{\tilde{\gamma}}_y = \dot{\gamma}_{y_d} (1 + \tan^2(\gamma_{y_d})) - \dot{\gamma}_y (1 + \tan^2(\gamma_y))$$

$$\dot{\tilde{\gamma}}_x = \dot{\gamma}_{x_d} (1 + \tan^2(\gamma_x)) - \dot{\gamma}_x (1 + \tan^2(\gamma_{x_d}))$$

En donde  $\dot{\gamma}_y$  y  $\dot{\gamma}_x$  se definen como

$$\dot{\gamma}_y = w_{L_y} \cos(\gamma_x) + w_{L_z} \sin(\gamma_x)$$

$$\dot{\gamma}_x = w_{L_x} + (-w_{L_z} \cos(\gamma_x) + w_{L_y} \sin(\gamma_x)) \tan(\gamma_y)$$

Con las segundas derivadas de los ángulos de oscilación de la carga quedando como

$$\ddot{\gamma}_y = \dot{w}_{L_y} \cos(\gamma_x) + \dot{w}_{L_z} \sin(\gamma_x) + (w_{L_z} \cos(\gamma_x) - w_{L_y} \sin(\gamma_x)) \dot{\gamma}_x$$

$$\begin{aligned} \ddot{\gamma}_x = & \dot{w}_{L_x} + ((-w_{L_z} \cos(\gamma_x) + w_{L_y} \sin(\gamma_x)) (1 + \tan(\gamma_y)^2)) \dot{\gamma}_y \\ & + (-\dot{w}_{L_z} \cos(\gamma_x) + \dot{w}_{L_y} \sin(\gamma_x) + \dot{\gamma}_y \dot{\gamma}_x) \tan(\gamma_y) \end{aligned}$$

Y donde la dinámica de orientación de la carga se presenta como

$$\begin{aligned} \dot{w}_{L_y} = & \left( m_T \alpha_z - m_Q l w_{L_y}^2 \cos(\gamma_y) \right) \frac{\tan(\epsilon)}{m_Q l \cos(\gamma_y)} \\ \dot{w}_{L_x} = & \left( m_T \alpha_z - m_Q l w_{L_x}^2 \cos(\gamma_x) \right) \frac{\tan(\xi)}{m_Q l \cos(\gamma_x)} \end{aligned}$$

Y entran las funciones auxiliares como

$$\tan(\epsilon) = \tan(\gamma_y - \theta)$$

$$\tan(\xi) = \tan(\gamma_x - \phi)$$

Y al igual que con el control de posición se definen las funciones de Lyapunov y sus derivadas como

$$V_{\gamma_y} = \frac{1}{2} \kappa_{\gamma_y} \tilde{\gamma}_y^2 + \frac{1}{2} \dot{\tilde{\gamma}}_y^2$$

$$\dot{V}_{\gamma_y} = \kappa_{\gamma_y} \tilde{\gamma}_y \dot{\tilde{\gamma}}_y + \dot{\tilde{\gamma}}_y \ddot{\tilde{\gamma}}_y$$

$$\dot{V}_{\gamma_y} = \dot{\tilde{\gamma}}_y (\ddot{\tilde{\gamma}}_y + \kappa_{\gamma_y} \tilde{\gamma}_y)$$

$$\dot{V}_{\gamma_y} = \dot{\tilde{\gamma}}_y (\dot{w}_{L_y} \cos(\gamma_x) + \dot{w}_{L_z} \sin(\gamma_x) + (w_{L_z} \cos(\gamma_x) - w_{L_y} \sin(\gamma_x)) \dot{\gamma}_x + \kappa_{\gamma_y} \tilde{\gamma}_y)$$

Donde nuestra señal de control quedara a cargo de  $\epsilon$ , quedando esta como

$$\tan(\epsilon_d) = \frac{-m_Q l \cos(\gamma_y) (\dot{w}_{L_z} \sin(\gamma_x) + (w_{L_z} \cos(\gamma_x) - w_{L_y} \sin(\gamma_x)) \dot{\gamma}_x + \kappa_{\gamma_y} \tilde{\gamma}_y + \kappa_{\dot{\gamma}_y} \dot{\tilde{\gamma}}_y)}{\cos(\gamma_x) (m_T \alpha_z - m_Q l w_{L_y}^2 \cos(\gamma_y))}$$

quedando ahora la función de Lyapunov como

$$\dot{V}_{s_{\gamma_y}} = -\kappa_{\tilde{\gamma}_y} \tilde{\dot{\gamma}}_y^2$$

De igual caso para la superficie de deslizamiento de  $\gamma_x$  se tiene que

$$V_{\gamma_x} = \frac{1}{2} \kappa_{\tilde{\gamma}_x} \tilde{\gamma}_x^2 + \frac{1}{2} \tilde{\dot{\gamma}}_x^2$$

$$\dot{V}_{\gamma_x} = \kappa_{\tilde{\gamma}_x} \tilde{\gamma}_x \tilde{\dot{\gamma}}_x + \tilde{\dot{\gamma}}_x \ddot{\tilde{\gamma}}_x$$

$$\dot{V}_{\gamma_x} = \tilde{\dot{\gamma}}_x (\ddot{\tilde{\gamma}}_x + \kappa_{\tilde{\gamma}_x} \tilde{\gamma}_x + \kappa_{\tilde{\dot{\gamma}}_x} \tilde{\dot{\gamma}}_x)$$

Y con la señal de control como

$$\tan(\xi_d) = \frac{-m_Q l \cos(\gamma_x) (*)}{(m_T \alpha_z - m_Q l w_{L_x}^2 \cos(\gamma_x))}$$

siendo en este caso (\*) definida como

$$\begin{aligned} (*) &= ((-w_{L_z} \cos(\gamma_x) + w_{L_y} \sin(\gamma_x)) (1 + \tan(\gamma_y)^2)) \dot{\gamma}_y \\ &+ (-\dot{w}_{L_z} \cos(\gamma_x) + \dot{w}_{L_y} \sin(\gamma_x) + \dot{\gamma}_y \dot{\gamma}_x) \tan(\gamma_y) + \kappa_{\tilde{\gamma}_x} \tilde{\gamma}_x + \kappa_{\tilde{\dot{\gamma}}_x} \tilde{\dot{\gamma}}_x \end{aligned}$$

Con lo cual la función de Lyapunov queda de la forma

$$\dot{V}_{\tilde{\gamma}_x} = -\kappa_{\tilde{\gamma}_x} \tilde{\dot{\gamma}}_x^2$$

De este paso en adelante existen dos vertientes, obtener el ángulo deseado para el control de orientación que a continuación se explica. Teniendo la siguiente función como

$$\tan(\epsilon) = \tan(\gamma_y - \theta)$$

De donde, con respecto a la dinámica de la carga, se puede escoger  $\theta_d$  como

$$\theta_d = \gamma_y + \arctan \left( \frac{m_Q l \cos(\gamma_y) (\dot{w}_{L_y} + \kappa_{\tilde{\gamma}_y} \tilde{\gamma}_y + \kappa_{\tilde{\dot{\gamma}}_y} \tilde{\dot{\gamma}}_y)}{(m_T \alpha_z - m_Q l w_{L_y}^2 \cos(\gamma_y))} \right)$$

Y de igual forma se puede realizar el despeje para encontrar el valor de  $\phi_d$  como

$$\tan(\xi) = \tan(\gamma_x - \phi)$$

$$\phi_d = \gamma_x + \arctan \left( \frac{m_Q l \cos(\gamma_x) (\dot{w}_{L_{x_d}} + \kappa_{\gamma_x} \tilde{\gamma}_x + \kappa_{\dot{\gamma}_x} \dot{\tilde{\gamma}}_x)}{(m_T \alpha_z - m_Q l w_{L_x}^2 \cos(\gamma_x))} \right)$$

También es posible seguir con el backstepping y encontrar los momentos a los cuales el cuadrotor debe ser sometido para su estabilización.

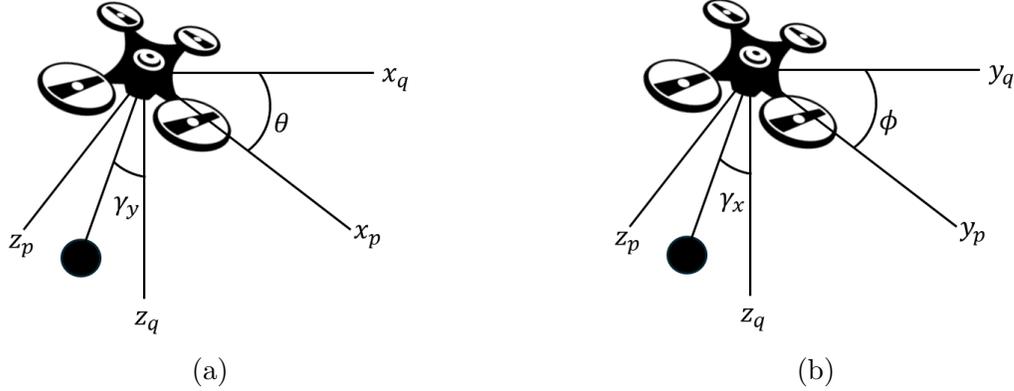


Figura 3.5: Vista de los ángulos auxiliares para el control, donde 3.5a representa a  $\epsilon$  y 3.5b representa  $\xi$

Para esto tomaremos los ángulos  $\epsilon$  y  $\xi$  de las ecuaciones dinámicas de la velocidad angular de la carga, generando entonces un error como:

$$\dot{w}_{L_y} = \left( m_T \alpha_z - m_Q l w_{L_y}^2 \cos(\gamma_y) \right) \frac{\tan(\epsilon)}{m_Q l \cos(\gamma_y)} \pm \left( m_T \alpha_z - m_Q l w_{L_y}^2 \cos(\gamma_y) \right) \frac{\tan(\epsilon_d)}{m_Q l \cos(\gamma_y)}$$

$$\dot{w}_{L_x} = \left( m_T \alpha_z - m_Q l w_{L_x}^2 \cos(\gamma_x) \right) \frac{\tan(\xi)}{m_Q l \cos(\gamma_x)} \pm \left( m_T \alpha_z - m_Q l w_{L_x}^2 \cos(\gamma_x) \right) \frac{\tan(\xi_d)}{m_Q l \cos(\gamma_x)}$$

donde es posible obtener los siguientes errores:

$$\tilde{\epsilon} = \tan(\epsilon) + \tan(\epsilon_d)$$

$$\tilde{\xi} = \tan(\xi) + \tan(\xi_d)$$

Donde sus derivadas quedan como

$$\dot{\tilde{\epsilon}} = \dot{\epsilon} (1 + \tan^2(\epsilon)) + \dot{\epsilon}_d (1 + \tan^2(\epsilon_d))$$

$$\dot{\tilde{\xi}} = \dot{\xi} (1 + \tan^2(\xi)) + \dot{\xi}_d (1 + \tan^2(\xi_d))$$

$$\ddot{\epsilon} = \ddot{\epsilon} (1 + \tan^2(\epsilon)) + 2\dot{\epsilon}^2 \tan(\epsilon) (1 + \tan^2(\epsilon)) + \ddot{\epsilon}_d (1 + \tan^2(\epsilon_d)) + 2\dot{\epsilon}_d^2 \tan(\epsilon_d) (1 + \tan^2(\epsilon_d))$$

$$\dot{\xi} = \dot{\xi} (1 + \tan^2(\xi)) + \dot{\xi}_d (1 + \tan^2(\xi_d))$$

$$\ddot{\xi} = \ddot{\xi} (1 + \tan^2(\xi)) + 2\dot{\xi}^2 \tan(\xi) (1 + \tan^2(\xi)) + \ddot{\xi}_d (1 + \tan^2(\xi_d)) + 2\dot{\xi}_d^2 \tan(\xi_d) (1 + \tan^2(\xi_d))$$

Y sabemos que la dinámica de  $\epsilon$  y  $\xi$  se pueden representar de la siguiente manera.

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon} &= \dot{\gamma}_y - \dot{\theta} = \dot{\gamma}_y - q \\ \ddot{\epsilon} &= \ddot{\gamma}_y - \ddot{\theta} = \ddot{\gamma}_y - \dot{q} = \ddot{\gamma}_y - \frac{1}{\mathcal{I}_{yy}} \tau_y \\ \dot{\xi} &= \dot{\gamma}_x - \dot{\phi} = \dot{\gamma}_x - p \\ \ddot{\xi} &= \ddot{\gamma}_x - \ddot{\phi} = \ddot{\gamma}_x - \dot{p} = \ddot{\gamma}_x - \frac{1}{\mathcal{I}_{xx}} \tau_x \end{aligned}$$

De donde se pueden reescribir las señales  $\tau_y$  y  $\tau_x$  para lograr la estabilidad del sistema como

$$\tau_y = \frac{\mathcal{I}_{yy} (\ddot{\gamma}_y + \beta_\epsilon + \kappa_\epsilon \tilde{\epsilon} + \kappa_{\dot{\epsilon}} \dot{\tilde{\epsilon}})}{(1 + \tan^2(\epsilon))}$$

Donde

$$\beta_\epsilon = 2\dot{\epsilon}^2 \tan(\epsilon) (1 + \tan^2(\epsilon)) + \ddot{\epsilon}_d (1 + \tan^2(\epsilon_d)) + 2\dot{\epsilon}_d^2 \tan(\epsilon_d) (1 + \tan^2(\epsilon_d))$$

Y de igual forma se tiene que

$$\tau_x = \frac{\mathcal{I}_{xx} (\ddot{\gamma}_x + \beta_\xi + \kappa_\xi \tilde{\xi} + \kappa_{\dot{\xi}} \dot{\tilde{\xi}})}{(1 + \tan^2(\xi))}$$

Donde

$$\beta_\xi = 2\dot{\xi}^2 \tan(\xi) (1 + \tan^2(\xi)) + \ddot{\xi}_d (1 + \tan^2(\xi_d)) + 2\dot{\xi}_d^2 \tan(\xi_d) (1 + \tan^2(\xi_d))$$

Y se puede ver que la dinámica de los sistemas queda como

$$\ddot{\tilde{\epsilon}} = -\kappa_\epsilon \tilde{\epsilon} - \kappa_{\dot{\epsilon}} \dot{\tilde{\epsilon}} \quad (3.34)$$

$$\ddot{\xi} = -\kappa_{\xi}\tilde{\xi} - \kappa_{\dot{\xi}}\dot{\tilde{\xi}} \quad (3.35)$$

### 3.2.3 Control de Orientación del cuadrotor

La base de este esquema de control se encuentra presente en el trabajo de [12][11][10]. El uso de este recae en que respeta el espacio de configuración del cuadrotor  $SO(3)$ , aparte de que se ha probado que, si se plantea un esquema de control para la posición del sistema, es posible extrapolar para obtener una orientación deseada, así como proponer los ángulos de orientación deseados para generar una orientación deseada.

Supóngase que existe una trayectoria  $R_d(t) \in SO(3)$  dada mediante el control de dinámica traslacional, y donde las ecuaciones cinemáticas de orientación se expresan como  $\dot{\Omega}_d = R_d^\top \dot{R}_d$ .

Esta matriz de rotación se puede determinar desde el control de posición diseñado en la sección 3.2.1 o desde el control de orientación de la carga definido en la sección 3.2.2. Independiente del esquema de control, la matriz de rotación deseada queda como

$$\mathbf{R}(\Theta_d) = \begin{bmatrix} c_{\psi_d} c_{\theta_d} & c_{\psi_d} s_{\theta_d} s_{\phi_d} - s_{\psi_d} c_{\phi_d} & c_{\psi_d} s_{\theta_d} c_{\phi_d} + s_{\psi_d} s_{\phi_d} \\ s_{\psi_d} c_{\theta_d} & s_{\psi_d} s_{\theta_d} s_{\phi_d} - c_{\psi_d} c_{\phi_d} & s_{\psi_d} s_{\theta_d} c_{\phi_d} - c_{\psi_d} s_{\phi_d} \\ -s_{\theta_d} & c_{\theta_d} s_{\phi_d} & c_{\theta_d} c_{\phi_d} \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

Se define primero una función de error para la orientación del cuadrotor de la forma que

$$\Gamma : SO(3) \times SO(3) \longrightarrow \mathbb{R} \quad (3.37)$$

Siendo esta

$$\tilde{R} = R_d^\top R \quad (3.38)$$

$$\Gamma(R, R_d) = \frac{1}{2} \text{traza} [I - R_d^\top R] \quad (3.39)$$

La función de navegación propuesta en (3.39) se encuentra definida positiva cuando  $R = R_d$ , donde el ángulo de rotación entre matrices es menor que  $180^\circ$ . A su vez se define un error de orientación dado como  $\tilde{R} \in \mathbb{R}^3$  de la siguiente forma

$$\tilde{R} = \frac{1}{2} (R_d^\top R - R^\top R_d)^\vee \quad (3.40)$$

Siendo  $\cdot^\vee : \text{so}(3) \longrightarrow \mathbb{R}^3$  el mapeo inverso de  $\cdot^\wedge$  y un error en la velocidad angular como  $\tilde{\Omega} \in \mathbb{R}^3$ , dadas dos trayectorias  $(R, \Omega)$  y  $(R_d, \Omega_d)$ , se define la diferencia entre estas como

$$\tilde{\Omega} = \Omega - R^\top R_d \Omega_d = \Omega - \tilde{R}^\top \Omega_d \quad (3.41)$$

Con

$$\Omega_d = (R_d^\top \dot{R}_d)^\vee \quad (3.42)$$

Y teniendo la dinámica basada en errores para el control como

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{R}} &= \tilde{R}\tilde{\Omega} \\ \dot{\tilde{\Omega}} &= J^{-1} \left[ -\tilde{\Omega}J\Omega + \tau_b \right] - \tilde{R}^\top \dot{\Omega}_d + \tilde{\Omega}R^\top \Omega_d\end{aligned}\tag{3.43}$$

Donde la finalidad es encontrar una ley de control  $\tau_b$  tal que cumpla con

$$\tau_b = \tilde{\Omega}J\Omega + J \left[ \tilde{R}^\top \dot{\Omega}_d - \tilde{\Omega}R^\top \Omega_d - k_R \tilde{R} - k_\Omega \tilde{\Omega} \right]\tag{3.44}$$

### 3.3 Resultado de las simulaciones

Para verificar el comportamiento de las estrategias de control no lineal presentadas, se realizaron las simulaciones con el seguimiento de trayectoria. A continuación se presentan los parámetros utilizados para la simulación, basado en el modelo utilizado en la plataforma experimental.

Constante	Valor	Unidad
$m_Q$	1	kg
$m_p$	0.146	kg
$\mathcal{I}_{xx}$	0.04352	$kg \cdot m^2$
$\mathcal{I}_{yy}$	0.04352	$kg \cdot m^2$
$\mathcal{I}_{zz}$	0.06777	$kg \cdot m^2$
l	0.6	m
g	9.81	$m/s^2$

Cuadro 3.1: Parametros del sistema

Teniendo los parámetros definidos, de igual forma se dan de alta las condiciones iniciales del sistema

como

$$\begin{aligned}
 z_q(0) &= -0.6 & z_p(0) &= -0.0490 \\
 x_q(0) & & x_p(0) &= 0.1042 \\
 y_q(0) & & y_p(0) &= -0.2135 \\
 \gamma_x &= \frac{2\pi}{17} & \gamma_y &= \frac{\pi}{18} \\
 \phi &= 0 & \theta &= 0 & \psi &= 0
 \end{aligned}$$

Y a la par se define la trayectoria deseada como

$$X_d = \begin{cases} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1.2 \end{bmatrix}^\top & t > 0 \\ \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1.4 \end{bmatrix}^\top & t \geq 50 \\ \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}^\top & t \geq 150 \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1.1 \end{bmatrix}^\top & t \geq 250 \end{cases} \quad (3.45)$$

donde para todo tiempo  $t \in [t_i, t_f]$  se tiene que  $\psi_d = 0$

### 3.3.1 Implementando el controlador de posición para la carga

Se tiene para el control basado solo en la posición de la carga las siguientes ganancias

Constante	Valor	Constante	Valor
$c_1$	6.33	$c_2$	10.0278
$c_3$	0.62960	$c_4$	0.0991
$c_5$	0.62960	$c_6$	0.0991
$k_R$	1.68	$k_\Omega$	0.48
$\kappa_z$	3.3529	$\kappa_x$	20
$\kappa_y$	20		

Cuadro 3.2: Parámetros del Controlador basado en el cuatrirotor

Estas ganancias generan como resultado las siguientes gráficas, donde tras varias simulaciones se llega a que, proponer la superficie de deslizamiento como un polinomio de Hurwitz ayuda al sistema a una mejor convergencia y a reducir la ganancia para la función discontinua.

El método de elección para las ganancias fue presentado de la siguiente forma, teniendo en cuenta la superficie de deslizamiento como

$$s_i = \dot{\tilde{x}} + c_i \tilde{x} + c_{i+1} \int \tilde{x} \quad (3.46)$$

Donde si aplicamos la Transformada de Laplace, se tiene que

$$S_i = s^2 \tilde{X} + c_i s \tilde{X} + c_{i+1} \tilde{X} \quad (3.47)$$

Donde las ganancias  $c_i$  y  $c_{i+1}$  pueden ser igualadas a

$$S_i = s^2 + 2\zeta \omega_n s + \omega_n^2 \quad (3.48)$$

y obtenemos la siguiente equivalencia si tomamos  $\zeta = 1$

$$\begin{aligned} c_1 &= 2\omega_n \\ c_{i+1} &= \omega_n^2 \end{aligned} \quad (3.49)$$

Así definiendo las constantes  $c_i$  podemos ver los polos del sistema, obtenemos que

$$s_i = \frac{1}{2} \left( \pm \sqrt{c_i^2 - 4c_{i+1}} - c_i \right) \quad (3.50)$$

Con lo cual nos cercioramos que los polos del sistema se encuentran en el semiplano izquierdo del plano complejo, asegurando que el sistema es estable.

### 3.3.2 Implementando el controlador basado en la carga

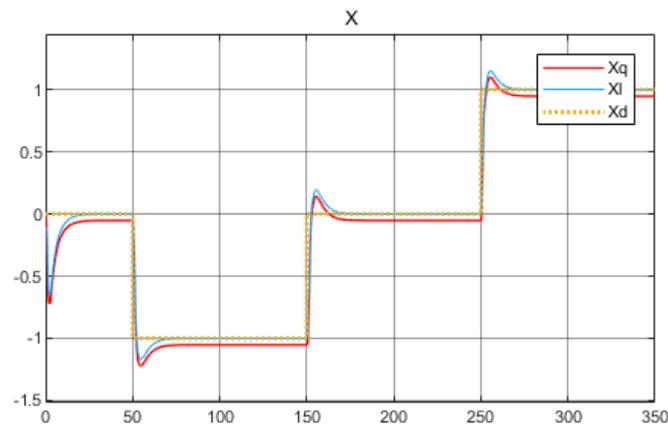


Figura 3.6: Seguimiento de la trayectoria en el eje  $X$  con el control basado en la posición de la carga

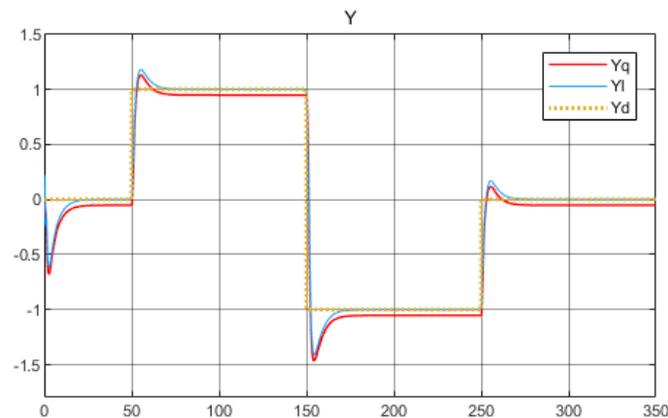


Figura 3.7: Seguimiento de la trayectoria en el eje  $Y$  con el control basado en la posición de la carga

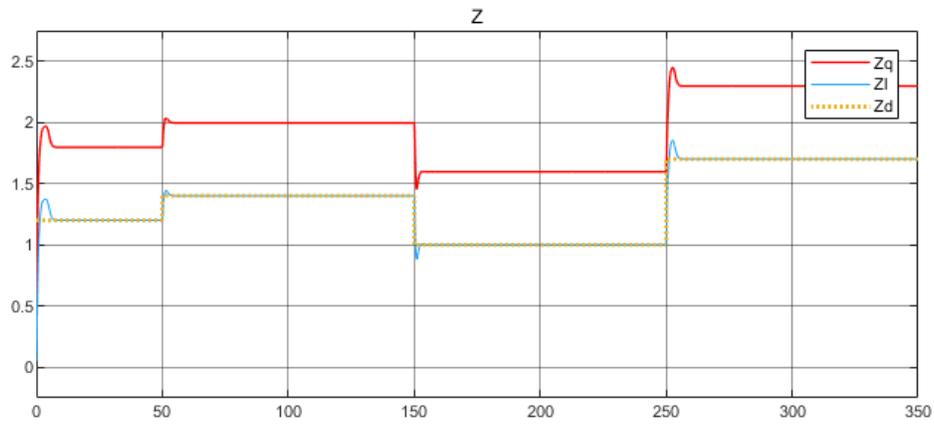


Figura 3.8: Seguimiento de la trayectoria en el eje  $Z$  con el control basado en la posición de la carga

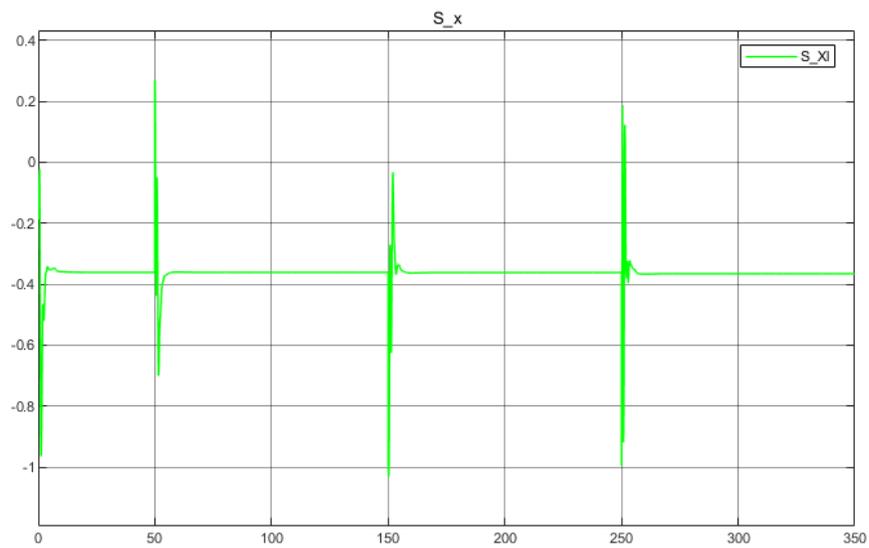


Figura 3.9: Convergencia de la superficie de deslizamiento para  $X$

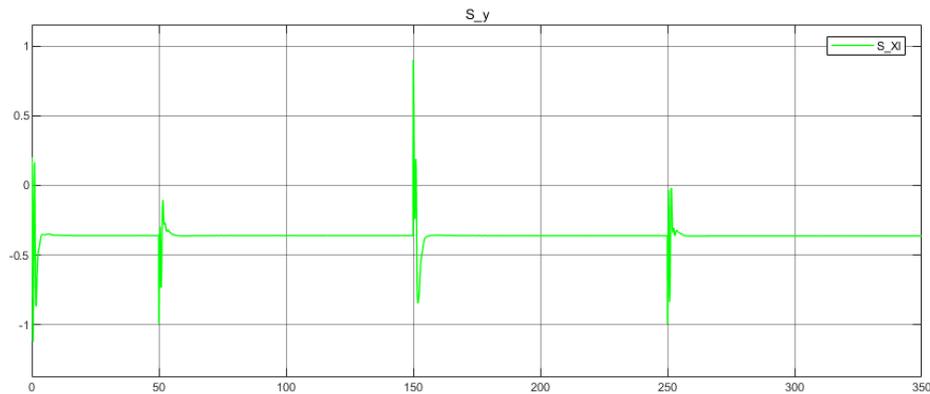


Figura 3.10: Convergencia de la superficie de deslizamiento para  $Y$

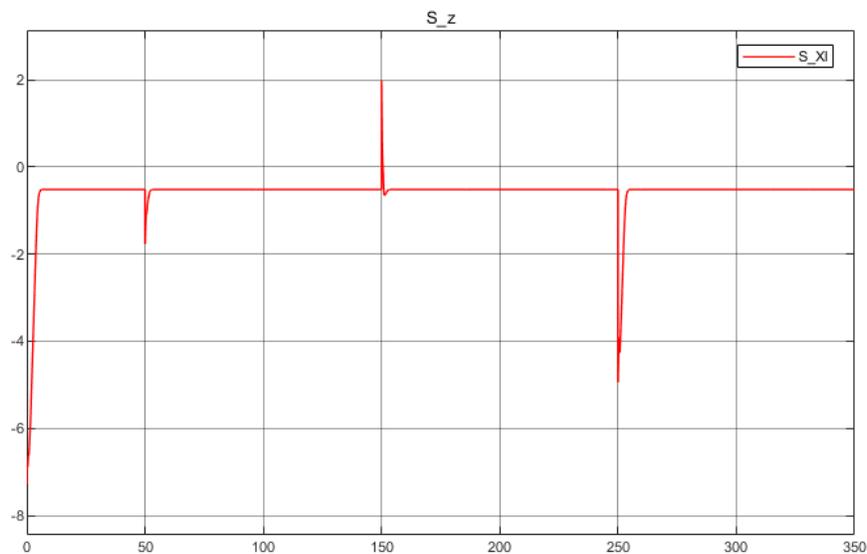


Figura 3.11: Convergencia de la superficie de deslizamiento para  $Z$

Los resultados de las simulaciones demuestran que desde el controlador basado en la posición de la carga se tiene una buena convergencia del sistema a la trayectoria deseada. Al igual, tras varios ajustes para las ganancias de los regímenes deslizantes concluimos en que la realimentación es buena, tiene que ir a la mano de la ganancia de la función discontinua. Entre más grandes eran las ganancias de la señal discontinua, más se podía relajar la retroalimentación, sin embargo se debe de tomar en cuenta que los polos no se acerquen a cero, ya que esto genera inestabilidad. Para el control de Orientación, se hace un homologo a un controlador PD, donde  $K_R$  y  $k_\Omega$  son equivalentes a las ganancias proporcionales y derivativas. De esta forma se dieron ajustes primero a la proporcional para lograr el punto de equilibrio deseado, después las derivativas fueron ajustadas después para que el la estabilización sea suave

## Capítulo 4

# Resultados Experimentales

## 4.1 Descripción de la plataforma experimental

La plataforma de experimentación utilizada para este trabajo cuenta con un sistema de visión Optitrak, el cual proporciona la posición del cuadrotor y el ángulo de guiñada. Este envía los datos por medio de USB a la computadora en tierra, donde es a través del software Motive que se obtiene el estimado de las posiciones y se envían estos por medio de una aplicación desarrollada en Visual C++ a través de un enrutador inalámbrico por WiFi. El sistema montado en el cuadrotor recibe este paquete de datos por medio de los módulos Wi-Fly, los cuáles transmiten por medio del protocolo de comunicación serial UART la información recibida al Procesador Digital de Señales (DSP). Con la información que recibe el sistema del Optitrack como de la IMU, el DSP calcula el control de posición y orientación del vehículo, de ahí se calcula el empuje necesario para cada uno de los rotores y estos se convierten en señales PWM que son enviados a cada uno de los controladores electrónicos de velocidad (ESC), los cuales accionan cada uno de los motores sin escobillas del cuadrotor. Se tiene un segundo módulo WiFly montado en el cuadrotor, el cual se encarga de enviar los datos medidos por los sensores del cuadrotor al enrutador inalámbrico, en donde con una aplicación desarrollada en Visual C++ es posible ilustrar, analizar e interpretar los datos de cada experimento.

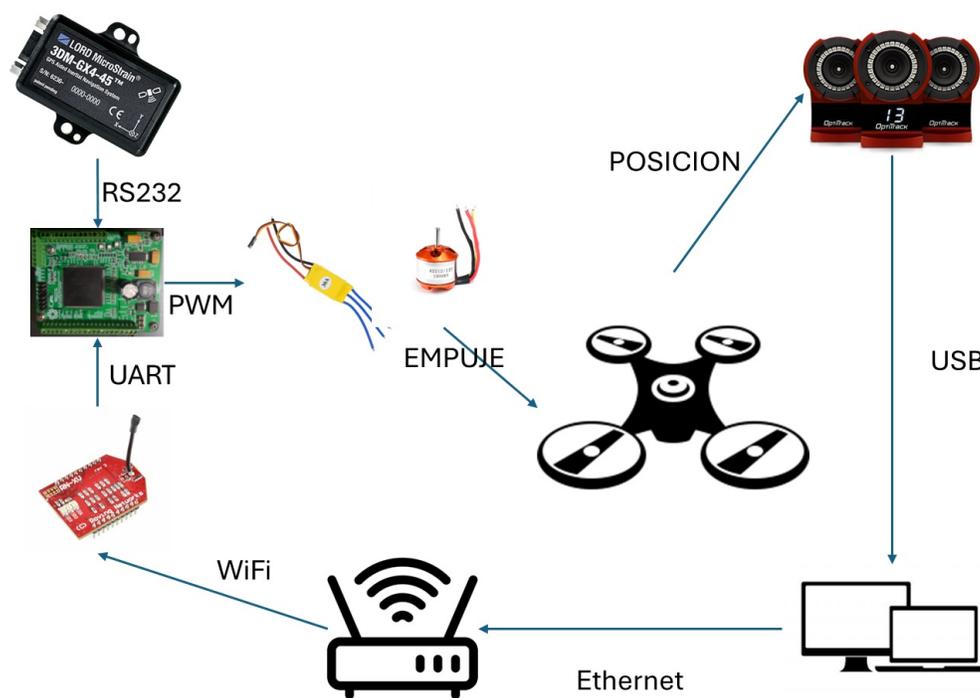


Figura 4.1: Esquema para la implementación de vuelo del cuadrotor

El cuadrotor utilizado para la experimentación en este trabajo fue desarrollado en el departamento de Ingeniería Eléctrica en la Sección de Mecatrónica. La estructura mecánica del mismo está basada en el DJI Flame Wheel ARF Kit F450, el cual cuenta con una robustez en el material así

como con un marco de PCB útil para la conexión de ESC y las baterías. El sistema de cámaras Optitrak que se utilizó para la experimentación del sistema fue tanto el ubicado en el laboratorio de Ingeniería Eléctrica de la Sección de Mecatrónica, así como en el Laboratorio de Drones ubicado en el Instituto Tecnológico Autónomo de México. La diferencia de estos dos laboratorios fue la cantidad de cámaras utilizadas, siendo en el primero un total de doce y en el segundo un total de cuatro. Los detalles de los componentes eléctricos y electrónicos utilizados en el cuadrotor, así como del Optitrak se encuentran en las siguientes tablas.

Dispositivo	Características
DSP Texas Instruments TMMS320F28335	Alimentación: 1.3V-3.3V CPU: 32bits en Arquitectura Harvard RAM: 4Mbytes ROM: 128Kbytes PWM: 12 canales ADC: 16 canales
3DM-GX4-25	Sistema de referencia para el direccionamiento de la orientación Alimentación: 3.2V a 36V Comunicación: USB 2.0 y RS232 (desde 9600bps a 921600 bps).
WiFly RN-XV	Interfase de comunicación entre WiFi y UART
EMAX MT2213	Motor sin escobillas para cuadrotor KV: 935 RPM/V

Cuadro 4.1: Dispositivos eléctricos montados en el cuadrotor.

Dispositivo	Características
Flex 13	Sensor de imagen con una resolución de 1280x1024 y una frecuencia de 120Hz con conexión USB 2.0
OptiHub v2	Cuenta con 6 puertos USB, alimentación de 12V a 3.8A y tasa de transferencias de 480Mbps

Cuadro 4.2: Sistema de visión Optitrak

## 4.2 Sintonización del controlador

Al momento de realizar las pruebas con el cuadrotor y la carga, se empezó probando el controlador sin tomar en cuenta la carga, pero sí con la misma metodología descrita en este trabajo de investigación, esto para considerar la parte en la que la dinámica de la carga no afecta al cuadrotor y para verificar si los regímenes deslizantes quedaron propuestos de una manera en la que puedan suprimir los efectos de la carga en el dron.

Para esto, se propusieron las ganancias del controlador de forma que mostraran un polinomio de Hurwitz, tal como en las simulaciones. Sin embargo, tras varias pruebas donde se lograba un despeje, más no una estabilidad en la orientación del cuadrotor se toma la decisión de desconectar el control de posición  $XY$  así como la parte discontinua del controlador para poder acomodar las ganancias del sistema.

Es aquí donde el sistema queda simplemente con el control de altura y el de orientación, y se deja de lado la idea de dejar el polinomio de Hurwitz. Se empieza con el control para la orientación, donde este es posible pensarlo como un PD no lineal, donde las ganancias  $k_R$  y  $k_\Omega$  son homologas a las ganancias PD, Primero se aproxima  $k_R$  a un valor con el cual el sistema se mantenga en una orientación deseada, llegando a este se realiza un ajuste a  $k_\Omega$ , para evitar oscilaciones del sistema mientras se mantiene la orientación deseada.

Ya teniendo una orientación deseada con las ganancias propuestas se procede a darle un ajuste fino al control de altura, ya que si bien este lograba el despeje del cuadrotor, no era posible llegar a la altura deseada, razón por la cual se añadió un termino integral al control de altura, con el cual se logra la altura deseada.

Ya que las ganancias del control de altura, también corresponden a la superficie de deslizamiento propuesta para el sistema, se procede a conectar los regímenes deslizantes al control, con la consigna de que si estos se encuentran presentes, es posible disminuir los valores de la realimentación de estados y dejar que quién determine la convergencia del sistema sea el termino discontinuo.

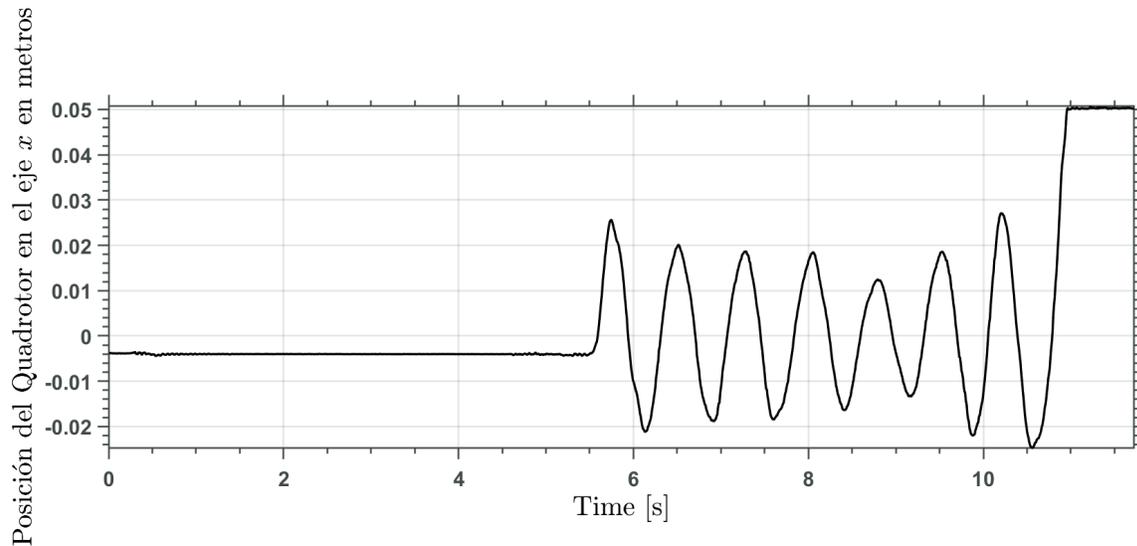
Ya teniendo el control de altura y el de orientación listo, se procede a conectar el control de posición  $XY$ , que si bien, este alterará la dinámica del control de orientación, se prueba con ganancias mínimas. De igual forma que con el control de altura, el sistema logra mantenerse en un punto fijo, sin embargo comienza a divergir, motivo por el cual se decide añadir, al igual que en el control de altura, una acción integral que ayude a la dinámica del sistema a llegar a la señal de referencia.

A continuación se presentan las gráficas del último vuelo donde se logra que el sistema despegue solo al igual que se mantengan sin intervención alguna, en una orientación deseada.

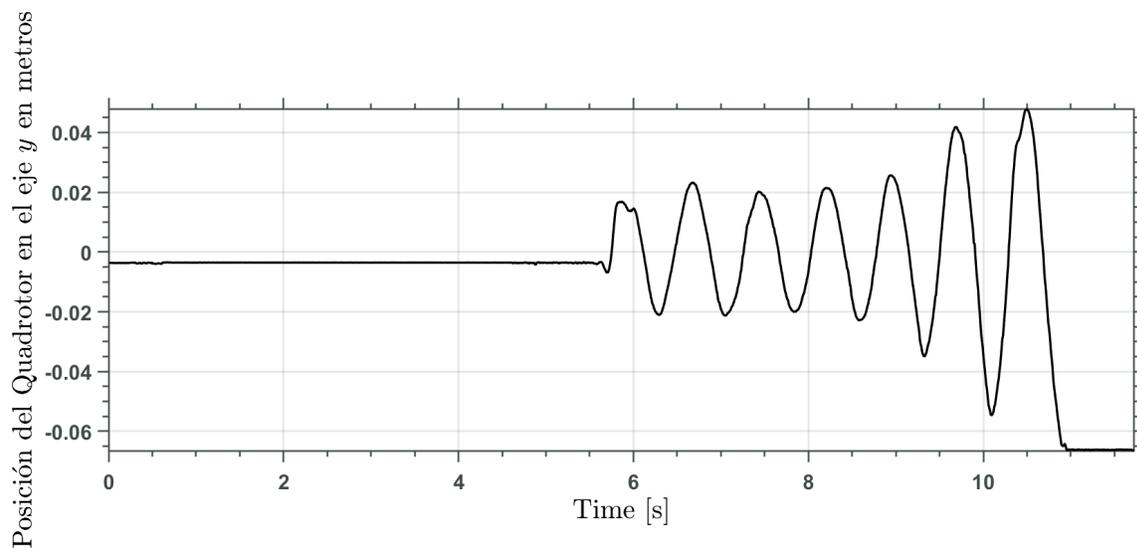
$k_R = 2.5$	$c_2 = 20$	$c_5 = 3$	$\kappa_x = 0.12$
$k_\Omega = 0.19$	$c_3 = 3$	$c_6 = 2$	$\kappa_y = 0.12$
$c_1 = 3.5$	$c_4 = 2$	$\kappa_z = 2.7$	$\omega_\kappa = 50$

Cuadro 4.3: Ganancias del sistema sin tomar en cuenta la carga

### 4.2.1 Despegue

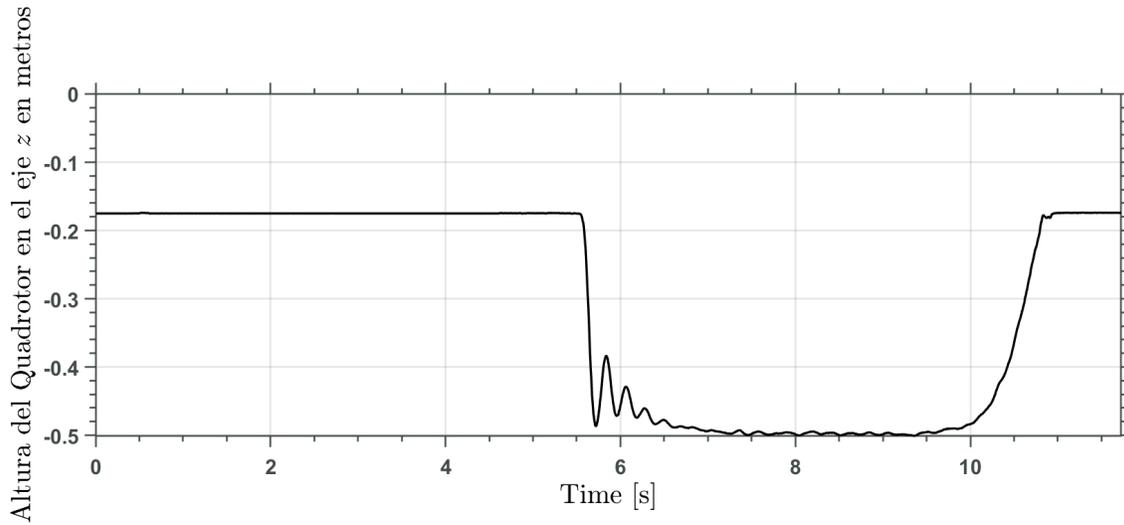


(a)

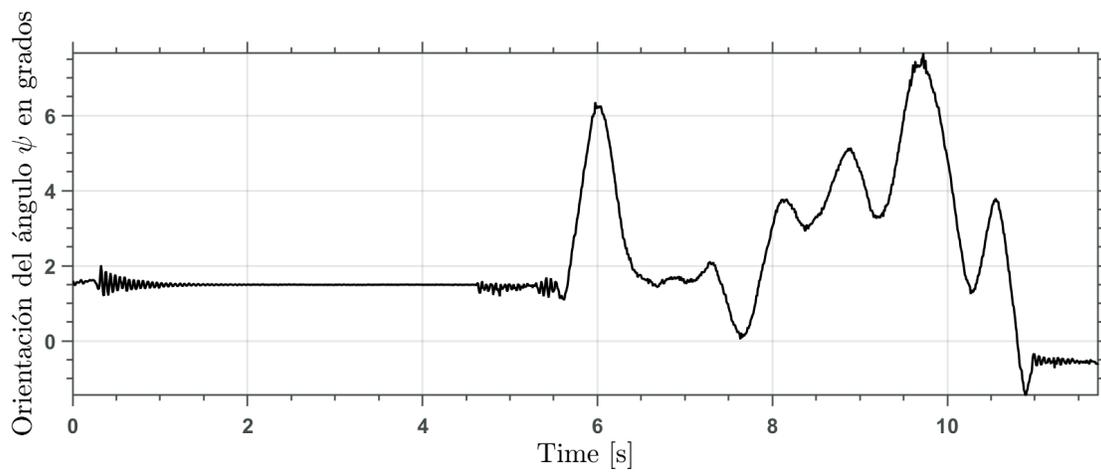


(b)

Figura 4.2: Desplazamiento del quadrotor en los ejes  $XY$

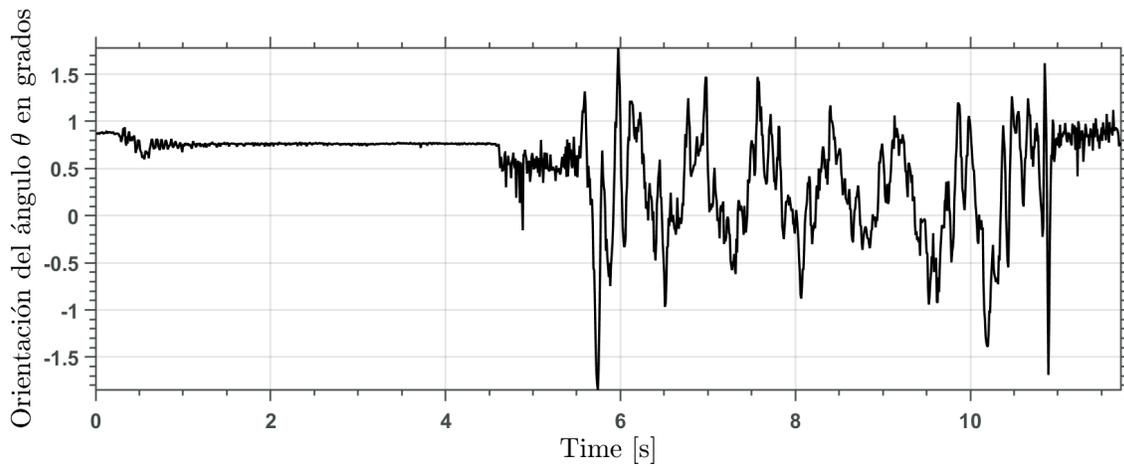


(a)

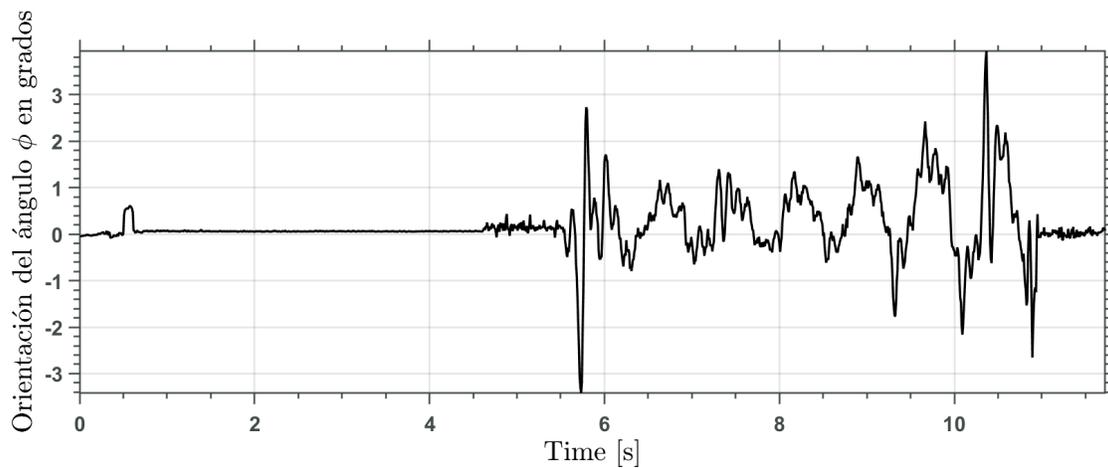


(b)

Figura 4.3: Desplazamiento del quadrotor en el eje  $Z$  en 4.3a y ángulo de guiñada del quadrotor en (4.3b)



(a)



(b)

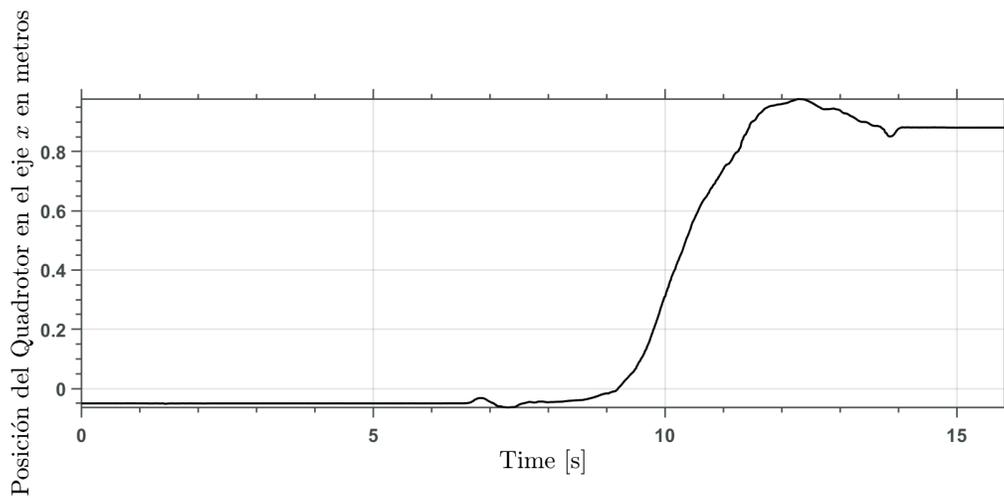
Figura 4.4: Orientación de los ángulos  $\phi$  y  $\theta$  medido en grados, durante el vuelo

## 4.2.2 Seguimiento de Trayectoria

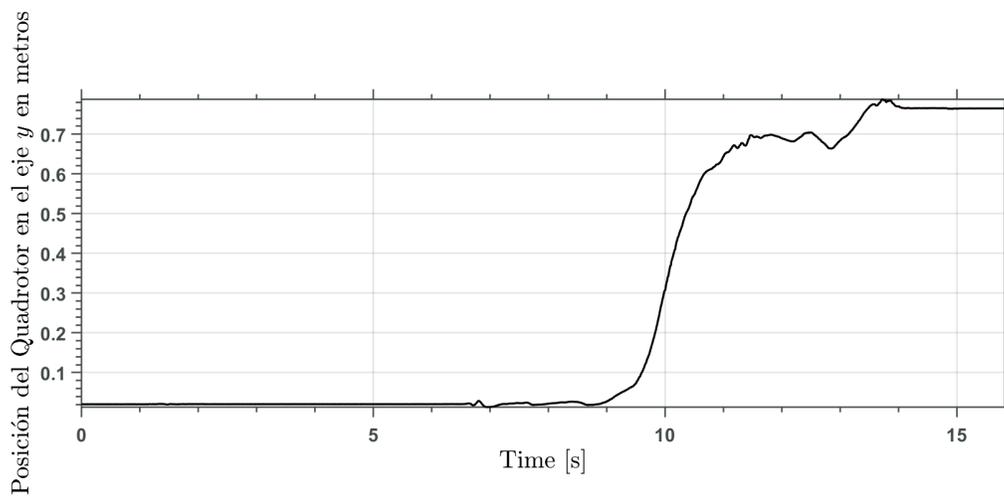
A continuación se muestran las gráficas correspondientes al vuelo del sistema con dirección a un punto fijo. Se decide por el uso de funciones suaves, para, de igual forma evaluar que el sistema pueda seguir una trayectoria suave. La trayectoria suave con la que contamos se define como

$$\begin{aligned}x_d &= \frac{0.7 (\tanh (0.25(t - 4)) + 1)}{2} \\y_d &= \frac{0.7 (\tanh (0.25(t - 4)) + 1)}{2}\end{aligned}$$

(4.1)

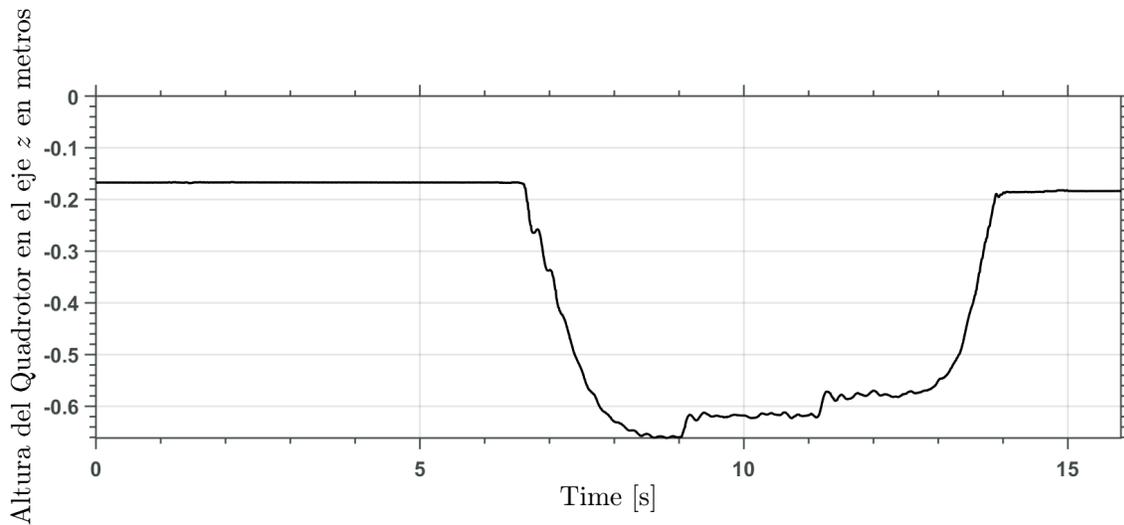


(a)

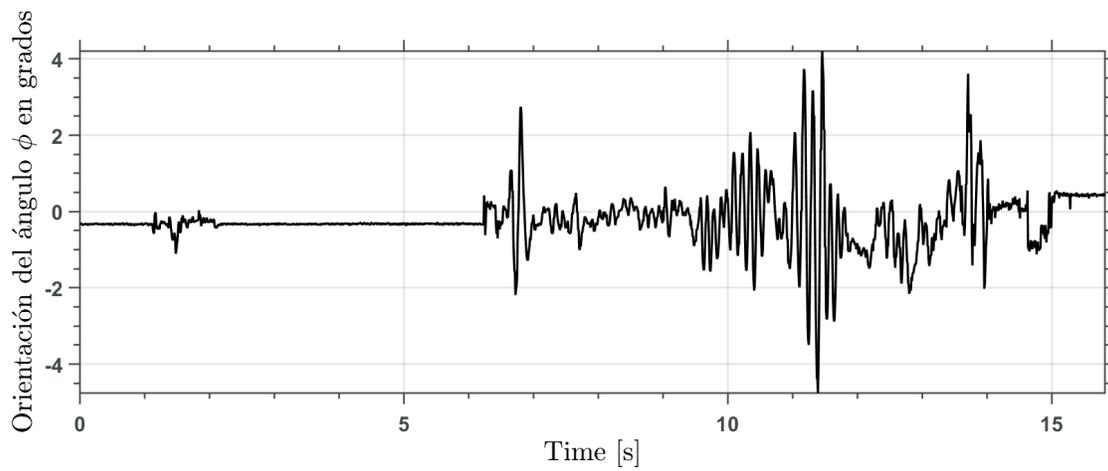


(b)

Figura 4.5: Desplazamiento del quadrotor en los ejes  $XY$

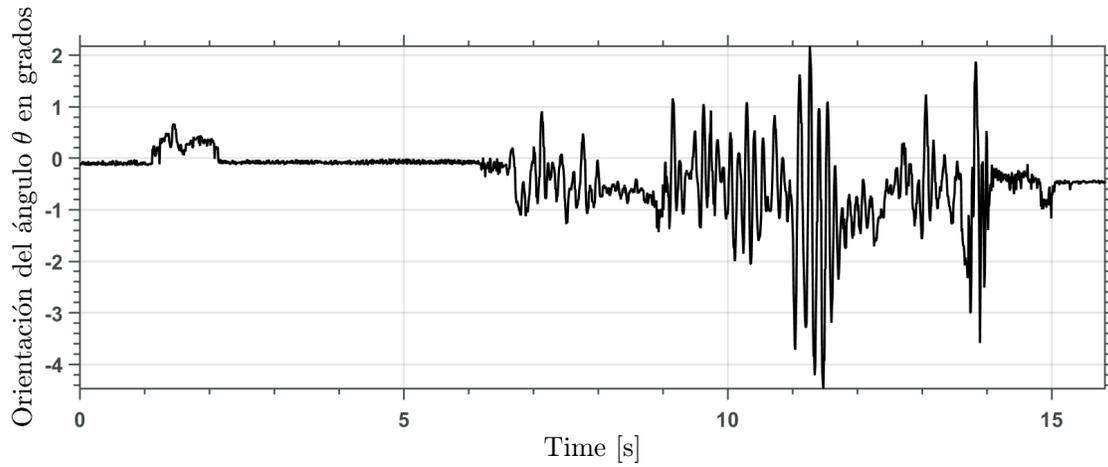


(a)

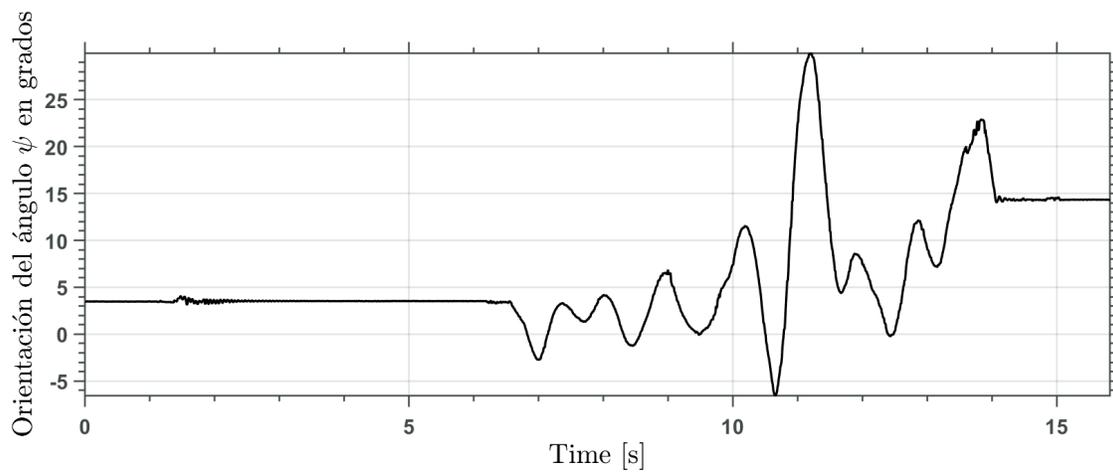


(b)

Figura 4.6: Desplazamiento del cuadrotor en el eje  $Z$  en 4.6a y ángulo de guiñada del cuadrotor en (4.6b)



(a)



(b)

Figura 4.7: Orientación de los ángulos  $\phi$  y  $\theta$  medido en grados, durante el vuelo

# Capítulo 5

## Conclusiones

El algoritmo de control aquí buscado sufrió varios cambios durante su desarrollo, desde la búsqueda de un sistema basado en regímenes deslizantes de orden superior para lograr la estabilización asintótica del sistema dinámico, así como la posibilidad de extender por medio de la pasividad y el backstepping la técnica de control tomando como punto inicial la posición de la carga, hasta llegar a la orientación del cuadrotor.

Problemas como las diferencias en la convergencia de las dinámicas debido al hecho de probar el sistema de control dentro de un simulador que maneja la dinámica de forma discreta, hasta haber logrado la estabilización en uno de los planos, sin embargo tener la divergencia del sistema en el otro plano, fueron áreas de oportunidad que prolongaron la culminación de este proyecto de forma correcta y completa. De igual forma, se deja planteado el esquema para la resolución de este como

una coyuntura para su revisión y corrección, para después probar su efectividad en un sistema dinámico real. De igual forma, el estudio de este tema da como conclusiones que:

- El sistema dinámico puede tener de igual forma una solución si se considera que el desacoplamiento de dinámicas genera que la del cuadrotor sea tan suave que no genere perturbaciones a la carga o viceversa, ya que mediante las simulaciones y las pruebas experimentales se logra ver que, la orientación del cuadrotor poco afecta a la posición de la carga, salvo que existan desplazamientos abruptos es notorio que existe perturbaciones a la carga.
- Así como se pueden desacoplar las dinámicas, sería de gran utilidad un sistema de control que considere las salidas planas del sistema para realizar, durante un vuelo, una alternancia en los controladores, dependiendo de la tarea que se realice.
- Se presenta una forma diferente de ver el problema, sin recurrir a descomponer fuerzas y a que, las señales de control del sistema, a pesar de extenderse dos grados de libertad, se mantengan como las de un cuadrotor normal.

Como trabajo a futuro se puede retomar el esquema de control para buscar su error al momento de la implementación, corregirlo y lograr hacer pruebas con él. De ser exitoso, podría implementarse este controlador a sistemas con visión, siendo este el instrumento que mida la posición de la carga con respecto al cuadrotor.

# Capítulo 6

## Referencias

# Bibliografía

- [1] «A Hybrid Control Approach for the Swing Free Transportation of a Double Pendulum with a Quadrotor». En: *Applied Sciences* 11.12 (2021). ISSN: 2076-3417. DOI: [10.3390/app11125487](https://doi.org/10.3390/app11125487). URL: <https://www.mdpi.com/2076-3417/11/12/5487>.
- [2] Nabanita Adhikary y Chitralekha Mahanta. «Integral backstepping sliding mode control for underactuated systems: Swing-up and stabilization of the Cart-Pendulum System». En: *ISA Transactions* 52 (6 2013), págs. 870-880. ISSN: 00190578. DOI: [10.1016/j.isatra.2013.07.012](https://doi.org/10.1016/j.isatra.2013.07.012).
- [3] David Cabecinhas, Rita Cunha y Carlos Silvestre. «A trajectory tracking control law for a quadrotor with slung load». En: *Automatica* 106 (ago. de 2019), págs. 384-389. ISSN: 00051098. DOI: [10.1016/j.automatica.2019.04.030](https://doi.org/10.1016/j.automatica.2019.04.030).
- [4] Rosa M Camarillo-Escobedo et al. «Remote sensing system to monitoring of quality air using unmanned aerial vehicles and LoRa communication». En: ed. por Marija Strojnik. Vol. 11830. SPIE, 2021, pág. 118300M. DOI: [10.1117/12.2595060](https://doi.org/10.1117/12.2595060). URL: <https://doi.org/10.1117/12.2595060>.
- [5] Taha Elmokadem. «Distributed Coverage Control of Quadrotor Multi-UAV Systems for Precision Agriculture This work was supported by the Australian Research Council. Also, this work received funding from the Australian Government, via grant AUSMURIB000001 associated with ONR MURI grant N00014-19-1-2571.» En: *IFAC-PapersOnLine* 52.30 (2019). 6th IFAC Conference on Sensing, Control and Automation Technologies for Agriculture AGRI-CONTROL 2019, págs. 251-256. ISSN: 2405-8963. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2019.12.530>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2405896319324498>.
- [6] M. Eusebia Guerrero-Sánchez et al. «Swing-attenuation for a quadrotor transporting a cable-suspended payload». En: *ISA Transactions* 68 (mayo de 2017), págs. 433-449. ISSN: 00190578. DOI: [10.1016/j.isatra.2017.01.027](https://doi.org/10.1016/j.isatra.2017.01.027).
- [7] Markus Hehn y Raffaello D'Andrea. «A Flying Inverted Pendulum». En: IEEE, 2011, págs. 763-770. ISBN: 9781612843858. DOI: [10.1109/ICRA.2011.5980244](https://doi.org/10.1109/ICRA.2011.5980244).

- [8] Arash Khatamianfar y Andrey V. Savkin. «Real-time robust and optimized control of a 3D overhead crane system». En: *Sensors (Switzerland)* 19 (15 ago. de 2019). ISSN: 14248220. DOI: [10.3390/s19153429](https://doi.org/10.3390/s19153429).
- [9] Y I Kui et al. *Sliding Mode Control for a Quadrotor Slung Load System*. 2017.
- [10] Taeyoung Lee, Melvin Leok y N Harris McClamroch. *Global Formulations of Lagrangian and Hamiltonian Dynamics on Manifolds A Geometric Approach to Modeling and Analysis Interaction of Mechanics and Mathematics*. 2018. DOI: [10.1007/978-3-319-56953-6](https://doi.org/10.1007/978-3-319-56953-6). URL: <http://www.springer.com/series/5395>.
- [11] Taeyoung Lee, Melvin Leok y McClamroch N. Harris. «Geometric Tracking Control of a Quadrotor UAV on SE(3)». En: IEEE, 2010, págs. 5420-5425. ISBN: 9781424477463. DOI: <https://doi.org/10.1109/CDC.2010.5717652>.
- [12] Taeyoung Lee, Koushil Sreenath y Vijay Kumar. «Geometric control of cooperating multiple quadrotor uavs with a suspended payload». En: Institute of Electrical y Electronics Engineers Inc., 2013, págs. 5510-5515. ISBN: 9781467357173. DOI: [10.1109/CDC.2013.6760757](https://doi.org/10.1109/CDC.2013.6760757).
- [13] Ivana Palunko y Rafael Fierro. «Adaptive control of a quadrotor with dynamic changes in the center of gravity». En: vol. 44. IFAC Secretariat, 2011, págs. 2626-2631. ISBN: 9783902661937. DOI: [10.3182/20110828-6-IT-1002.02564](https://doi.org/10.3182/20110828-6-IT-1002.02564).
- [14] Ivana Palunko, Rafael Fierro y Patricio Cruz. «Trajectory generation for swing-free maneuvers of a quadrotor with suspended payload: A dynamic programming approach». En: Institute of Electrical y Electronics Engineers Inc., 2012, págs. 2691-2697. ISBN: 9781467314039. DOI: [10.1109/ICRA.2012.6225213](https://doi.org/10.1109/ICRA.2012.6225213).
- [15] Bin Xian, Shizhang Wang y Sen Yang. «An Online Trajectory Planning Approach for a Quadrotor UAV with a Slung Payload». En: *IEEE Transactions on Industrial Electronics* 67 (8 ago. de 2020), págs. 6669-6678. ISSN: 15579948. DOI: [10.1109/TIE.2019.2938493](https://doi.org/10.1109/TIE.2019.2938493).
- [16] Sen Yang y Bin Xian. «Energy-Based Nonlinear Adaptive Control Design for the Quadrotor UAV System with a Suspended Payload». En: *IEEE Transactions on Industrial Electronics* 67 (3 mar. de 2020), págs. 2054-2064. ISSN: 15579948. DOI: [10.1109/TIE.2019.2902834](https://doi.org/10.1109/TIE.2019.2902834).
- [17] Gan Yu et al. «Aggressive maneuvers for a quadrotor-slung-load system through fast trajectory generation and tracking». En: *Autonomous Robots* 46 (4 abr. de 2022), págs. 499-513. ISSN: 15737527. DOI: [10.1007/s10514-022-10035-y](https://doi.org/10.1007/s10514-022-10035-y).
- [18] Gan Yu et al. «Nonlinear Backstepping Control of a Quadrotor-Slung Load System». En: *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics* 24 (5 oct. de 2019), págs. 2304-2315. ISSN: 1941014X. DOI: [10.1109/TMECH.2019.2930211](https://doi.org/10.1109/TMECH.2019.2930211).

- [19] Gan Yu et al. «Quadrotor trajectory generation and tracking for aggressive maneuvers with attitude constraints». En: vol. 52. Elsevier B.V., oct. de 2019, págs. 55-60. DOI: [10.1016/j.ifacol.2019.11.069](https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2019.11.069).