



CENTRO DE INVESTIGACIÓN
Y DE ESTUDIOS AVANZADOS DEL
INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

UNIDAD ZACATENCO

DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA ELÉCTRICA
SECCIÓN DE MECATRÓNICA

Manipulación cooperativa en un sistema de robots manipuladores móviles con aplicación de fuerza.

Tesis que presenta:
Jorge Gustavo Pérez Fuentes.

Para obtener el grado de:
Maestro en Ciencias.

En la especialidad de:
Ingeniería Eléctrica.

Directores de Tesis:
Dra. América Berenice Morales Díaz
Dr. Alejandro Rodríguez Ángeles.

Agradecimientos

Ofrezco mi gratitud a los siguientes; pues naturalmente, sin ayuda, no habría podido llegar tan lejos.

A mi familia: Por soportar mi carácter y mis rarezas durante toda una pandemia mundial, no debió ser una tarea sencilla; y por todo el apoyo incondicional con el que sé que siempre cuento.

A mis amigos muertos: Pues es gracias a ustedes, que me he mantenido en el camino de la cordura y la sabiduría.

A mis asesores: Aprecio infinitamente la confianza, el apoyo que siempre estuvo presente y la libertad brindada para trabajar a mi manera. Sepan que siempre me sentí muy cómodo con su colaboración.

A mis compañeros y amigos del CINVESTAV: Que han hecho mi estadía en la maestría mucho más amena.

Al CONACYT: Por la solvencia económica que me permitió realizar mis estudios de maestría y su apoyo a través del proyecto SEP CONACYT CB2017-2018-A1-S-26123.

Resumen

En este trabajo de tesis se presenta un estudio riguroso sobre los robots manipuladores móviles (*RMM*) considerando una base móvil diferencial tipo $(2,0)$ y el problema general de manipulación cooperativa. Se inicia con un análisis completo del modelo cinemático y dinámico del *RMM*, abordando la problemática de considerar una base móvil con restricciones de movimiento.

Posteriormente, se diseña una ley de control para resolver el problema de seguimiento de trayectoria, tomando como base un controlador por par calculado, pero añadiendo términos de corrección para el error de posición y compensación de gravedad. Se hace el análisis de estabilidad usando el método de Lyapunov y se consigue una estabilización semiglobal, uniformemente y últimamente acotada (*UUB*) para la parte de la base móvil; por otro lado, se logra un desacoplamiento para la parte del manipulador y se concluye estabilidad asintótica. Esto se valida tanto en simulaciones numéricas como de forma experimental usando el modelo del robot KUKA youBot, un *RMM* de tipo industrial —pensado para fines de investigación— que cuenta con una plataforma móvil de tipo omnidireccional, pero que, en esta tesis, se opera como una base diferencial.

En aras de conseguir un sistema de robots cooperativos, es deseable que éstos estén sincronizados, de tal manera que, si algún robot recibe una perturbación, el sistema sea capaz de mantener la formación y la sujeción del objeto que se desea manipular; el objeto con el que se trabaja es una caja cúbica con cierta rigidez y de bajo peso. Con este fin, se consideran dos robots y se estudia el esquema de sincronización tipo maestro-esclavo añadiendo acoplamientos estáticos en la ley de control, de esta forma, cada robot recibe información de la posición del otro y se logra una relación cinemática entre ambos.

Como elemento final, se añade un control de fuerza/par en los efectores finales de los robots considerando acoplamientos —a nivel de fuerza— para mejorar el desempeño, con el fin de ser capaces de imprimir una fuerza deseada sobre el objeto y asegurar la sujeción. Así, se consigue un esquema de control híbrido de posición-fuerza/par en el que se aprovecha la plataforma móvil para la traslación del objeto en el espacio. Además, se incursiona en un esquema de control de fuerza extendido, tal que es posible generar una trayectoria extra para el objeto a manipular en el plano de los efectores finales.

Abstract

On this thesis work, a rigorous study about mobile manipulators robots (*RMM*) considering a differential robot type (2,0) and the general cooperative manipulation problem is presented. It begins with a complete analysis of the kinematic and dynamic model of the RMM, addressing the problem of considering a mobile base with movement restrictions.

Subsequently, a control law is designed to solve the trajectory tracking problem, based on a calculated torque controller, but adding correction terms for position error and gravity compensation. Stability analysis using the Lyapunov method is presented; semi-global, uniform and ultimate boundedness (*UUB*) stabilization is achieved for the part of the mobile base; on the other hand, a decoupling is achieved for the part of the manipulator and asymptotic stability is concluded. This is validated both in numerical simulations and experimentally using the KUKA youBot's model, an industrial-type RMM —intended for research purposes— that has an omnidirectional mobile platform, but which, in this thesis, operates as a differential mobile platform.

In order to achieve a system of cooperative robots, it is desirable that they are synchronized, in such a way that, if any robot is perturbed, the system is capable of maintaining the formation and holding of the object to be manipulated; the object is a cubic box with a certain rigidity and low weight. To this end, two robots are considered and the master-slave type synchronization scheme is studied by adding static couplings in the control law, in this way, each robot receives information on the position of the other and a kinematic relationship among them is achieved.

As a final element, a force/torque control is added on the end effectors of the robots considering couplings —at force level— to improve performance, in order to be able to print a desired force on the object and secure the hold. Thus, a hybrid position-force/torque control scheme is achieved in which the mobile platform is used to translate the object in space. In addition, an extended force control scheme is used, such that it is possible to generate an extra trajectory for the object in the plane of the end effectors.

Contenido

1. Introducción	1
1.1. Manipuladores móviles	1
1.2. Estado del arte	2
1.3. Redundancia	3
1.4. Manipulación cooperativa	4
1.5. Objetivos	4
1.6. Organización de la tesis	5
2. Modelado del RMM	6
2.1. Modelo cinemático	6
2.1.1. Cinemática directa	7
2.1.2. Cinemática inversa	9
2.1.3. Cinemática diferencial	9
2.1.4. Robot diferencial (2,0)	10
2.2. Modelo dinámico completo	10
2.3. Modelo reducido	13
2.4. RMM (2,0,2) espacial	15
2.4.1. Cinemática directa	16
2.4.2. Modelo dinámico completo	16
2.4.3. Modelo reducido	17
2.5. RMM: KUKA youBot	17
2.5.1. Cinemática directa	18
2.5.2. Modelo dinámico completo	19
2.5.3. Modelo reducido	19
3. El problema de seguimiento de trayectoria	20
3.1. Control por par calculado	20
3.2. Control por par calculado modificado	22
3.2.1. Errores relativos en el robot diferencial (2,0)	22
3.2.2. Ley de control	23
3.2.3. Estabilidad	24
3.3. Simulaciones: RMM (2,0,2) en el espacio	26
3.3.1. Trayectorias propuestas	27
3.3.2. Respuesta del sistema	28
3.4. Simulaciones: KUKA youBot	41
3.4.1. Trayectoria: circunferencia	41
3.4.2. Respuesta del sistema	42

4. Sincronización	48
4.1. Esquema maestro-esclavo	48
4.1.1. Simulación: circunferencia	49
4.1.2. Adición de perturbaciones	54
4.2. Sincronización con acoplamientos	60
4.2.1. Simulación: circunferencia	61
4.2.2. Adición de perturbaciones	65
4.3. Índice de desempeño	69
4.4. El KUKA youBot: Manipulación cooperativa	70
4.4.1. Trayectoria: circunferencia	70
4.4.2. Simulación	75
5. Etapa de fuerza	81
5.1. Interacción del robot con el ambiente	81
5.1.1. Consideraciones en el espacio	82
5.2. Modelo del objeto	85
5.3. Esquema de control híbrido posición-fuerza/par	86
5.3.1. Acoplamientos a nivel de fuerza	87
5.3.2. Simulaciones	87
5.4. Esquema de control híbrido posición-fuerza/par extendido	95
5.4.1. Acoplamientos para el control de fuerza extendido	98
6. Resultados experimentales	100
6.1. Seguimiento de trayectoria del KUKA youBot	100
6.1.1. Consideraciones Importantes	100
6.1.2. Resultados	104
7. Conclusiones y trabajo futuro	108
7.1. Conclusiones	108
7.2. Trabajo futuro	108
A. Modelos del RMM	110
A.1. RMM (2,0,2) en el espacio	110
A.1.1. Cinemática Directa	110
A.1.2. Cinemática inversa	112
A.1.3. Modelo completo	113
A.1.4. Modelo reducido	117
A.2. KUKA youBot	119
A.2.1. Cinemática Directa	120
A.2.2. Cinemática Inversa	122
A.2.3. Modelo completo	123
A.2.4. Modelo reducido	127
B. Dinámica del RMM	130
B.1. Dinámica en lazo cerrado	130
B.2. Dinámica de los errores	131

Capítulo 1

Introducción

1.1. Manipuladores móviles

Los robots manipuladores móviles (*RMM*) consisten en un brazo robotizado montado sobre un robot móvil, y son el siguiente paso tecnológico después de los manipuladores de base fija y los robots móviles colaborativos (*RMC*).

La base móvil del RMM permite expandir el espacio de trabajo del manipulador. Esto es extremadamente útil para aplicaciones industriales como pick and place, alimentación de piezas, metrología, control de calidad, atornillado de piezas grandes, embalaje, limpieza, pulido, taladrado, etc. —por hablar sólo del campo industrial—; además, es posible la implementación en el área de servicios, médica, agricultura, seguridad, etc.

En la Figura 1.1 se muestran dos ejemplos de RMM comerciales de la empresa europea Robotnik, ambos robots tienen variadas aplicaciones, una muy común es usar los RMM en almacenes, la mayoría de robots actualmente cuentan con una base móvil omnidireccional —las cuales no tienen restricciones de movimiento, pueden exhibir desplazamiento tanto longitudinal como traslacional—, como la mostrada en la Figura 1.1 (a) que cuenta con ruedas de tipo Mecanum; sin embargo, aún se usan robots con ruedas de goma que sólo pueden exhibir desplazamiento longitudinal, como el mostrado en la Figura 1.1 (b) (aunque a este modelo en particular, también se le pueden adaptar ruedas Mecanum), a este tipo de bases móviles las llamamos diferenciales.



(a) RB-KAIROS+



(b) XL-GEN

Figura 1.1: Manipuladores móviles Robotnik.

El modelo y plataforma experimental con el que se trabaja en el presente trabajo de tesis es el robot KUKA youBot, vea la Figura 1.2. Se trata de un robot manipulador de 5 grados de libertad montado sobre una plataforma móvil omnidireccional que, para fines de este trabajo, se opera como una base tipo diferencial con restricciones de movimiento. Esto repercute en la actuación y complejidad del sistema puesto que hablamos de un sistema subactuado; sin embargo, en términos de mantenimiento y costos en general, es más barato utilizar un RMM con una base móvil diferencial que uno con una base omnidireccional. Es por esta razón, y por el reto que implica su análisis y control, que se elige atacar el problema de usar una base diferencial.



Figura 1.2: RMM KUKA youBot.

Por lo general, los RMM suelen ser robots redundantes. Este tipo de robots superan a los robots convencionales (de base fija) en prestaciones y versatilidad, pudiendo realizar tareas que son imposibles para éstos.

Por otro lado, los robots subactuados, al carecer de algunos actuadores, aventajan a los convencionales al ser más compactos, ligeros y tener un menor consumo energético.

El principal problema es que, tanto los robots redundantes como los robots subactuados, tienen desventajas con respecto a los robots convencionales en la sencillez del control.

1.2. Estado del arte

La manipulación cooperativa de robots manipuladores es un tema relativamente nuevo, que ha sido estudiado desde los 90's hasta la actualidad, y se han propuesto varios enfoques para dar una solución al problema que nos acontece. En [1] se extiende la teoría del control híbrido de posición/fuerza al caso de robots cooperativos de múltiples brazos añadiendo restricciones de movimiento. En [2], resuelven tareas cooperativas introduciendo un sistema de coordenadas en el espacio de trabajo especialmente dispuesto para la coordinación de un robot de dos brazos; vea que en este tipo de enfoque no se considera de manera explícita la dinámica acoplada de los manipuladores en contacto con el objeto.

La manipulación de objetos normalmente requiere dos manos, no tanto por limitaciones de fuerza/torque, sino por la necesidad de realizar tareas complejas. Es en [3, 4] donde se presenta la dinámica de múltiples robots manipuladores cooperativos y se resuelve el problema de manipulación de un objeto mediante un control basado en la formulación del espacio operacional. En [5] se discute una teoría de fuerza y manipulabilidad dinámica para sistemas de múltiples robots manipuladores cooperativos, y en [6] además, se adiciona la condición de fricción en los contactos; esto es interesante porque se ve una similitud con la manipulación de objetos con manos y dedos humanos, donde ciertamente

existe fricción. También, es importante mencionar el enfoque de control de impedancia usado en [7, 8, 9, 10, 11, 12, 13] para poder controlar las fuerzas internas y la distribución de carga cuando se manipula un objeto con robots de base fija, y de base móvil en [14] donde se muestra además la colaboración de un robot con un humano para manipular un objeto. Hay trabajos más recientes que extrapolan la teoría de control de impedancia al caso en que la dinámica del robot es desconocida, esto es, que se tienen incertidumbres estructurales (paramétricas o dinámicas no modeladas) y/o no estructurales, tal como se muestra en [15] y [16] donde se usa un control adaptable de impedancia. Además, se ha visto, hablando de robustez, que la inteligencia artificial puede tomar partido en el área, tal es el caso de [17], donde se diseña un sistema de control backstepping difuso y adaptable. Sin embargo, una representación más completa de la dinámica de manipuladores cooperativos a lazo cerrado requiere una formulación físicamente consistente a nivel del control de las fuerzas internas/externas [18]. Con lo cual, en el presente trabajo de investigación de tesis se pretende incursionar en la manipulación cooperativa con robots manipuladores móviles utilizando el concepto de impedancia y la consistencia dinámica de posición junto con el control de las fuerzas entre los manipuladores y el objeto. Para esto se propone considerar, en el esquema de control, la sincronización de posición/fuerza.

1.3. Redundancia

Se dice que un robot redundante es aquel con más grados de libertad de los necesarios para realizar alguna tarea.

La mayor complicación que se tiene al trabajar con un robot redundante es resolver la cinemática inversa es una tarea particularmente complicada; sin embargo, también se tienen bondades, una de ellas es que, por lo general, se tiene más de una solución al querer resolver una tarea, de tal forma que es posible tomar posturas y resolver tareas que le serían imposibles a un robot no redundante. Por ejemplo, considere la Figura 1.3, vea que del lado izquierdo se tiene un manipulador de 2 grados de libertad intentando alcanzar un punto en el plano (marcado con una estrella) pero con un obstáculo de por medio, y del lado derecho se agrega un eslabón al manipulador, de tal forma que puede tomar la postura necesaria para evadir el obstáculo y alcanzar el punto en cuestión.

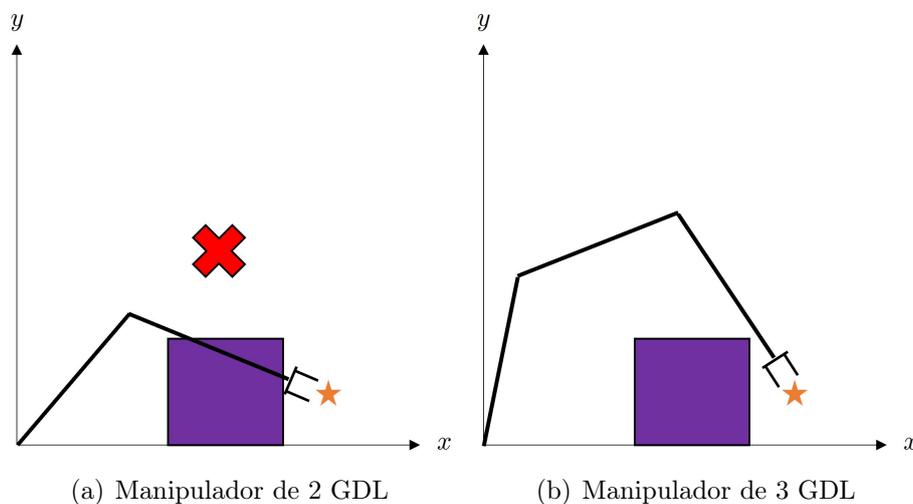


Figura 1.3: Redundancia.

Otra de las bondades cuando se cuenta con redundancia es que es posible definir más de una tarea a la vez. En este trabajo se explota esta característica al usar el RMM, puesto que se define una trayectoria en el plano para la plataforma móvil, y además se define una trayectoria distinta para el efector final. Esto será posible siempre y cuando ambas tareas compartan el espacio de trabajo.

1.4. Manipulación cooperativa

La manipulación robótica ha tomado un rol importante en el ramo industrial y de manufactura; sin embargo, la manipulación usando un simple robot no ha sido suficientemente práctica. Por ejemplo, considerando tareas de agarre y carga, un sólo robot no es capaz de manejar grandes y pesados objetos [19]. De aquí la necesidad de incorporar más robots al sistema cooperativo o incluso personas. La manipulación cooperativa contempla interacciones tanto de robot-robot como de robot-humano, en este trabajo se estudia el primer tipo de interacción.

Para conseguir un sistema cooperativo exitoso es necesario tener en cuenta algunas consideraciones, una de ellas es mantener una formación en el sistema tal que el objeto manipulado no se deje caer, de tal forma que es deseable que se comparta información entre los robots del sistema; además, también se debe asegurar que el objeto en cuestión no se rompa o se maltrate, por lo que añadir un control de fuerza es un requisito, cuando se hace esto, en adición con el control de posición que se tiene en cada robot, se dice que se tiene un control híbrido de posición-fuerza/par.

Existe, además, un esquema de control híbrido de posición-fuerza/par extendido, en el cual es posible definir una trayectoria para el objeto. De esta manera, es posible darle movimiento al objeto manipulado y no sólo sujeción.

1.5. Objetivos

El objetivo general de este trabajo de tesis es el desarrollo de una estrategia de control para la manipulación cooperativa de un objeto usando dos RMM KUKA youBot. Con este fin, se definen los siguientes objetivos específicos:

- Definir el modelo cinemático y dinámico del RMM usando una base móvil tipo diferencial (2,0) con restricciones de movimiento.
- Diseñar una ley de control para resolver el problema de seguimiento de trayectoria de un RMM y asegurar la estabilidad del sistema.
- Idear un esquema de sincronización tal que el sistema sea capaz de mantener su formación ante perturbaciones externas y, sobretodo, una distancia deseada entre los efectores finales.
- Lograr la manipulación cooperativa asegurando la sujeción del objeto con los manipuladores y aprovechando las plataformas móviles para su traslación en el espacio añadiendo un control de fuerza/par en los efectores finales
- Establecer una relación de fuerza entre los efectores finales sobre el objeto, mandando información a cada uno de los robots sobre la fuerza que ejerce el otro sobre el objeto mediante la adición de errores de sincronización en el control.

- Dar la pauta para la realización del esquema de control híbrido de posición-fuerza/par extendido en los RMM.

1.6. Organización de la tesis

Este trabajo se compone de siete capítulos, en el primero se da una introducción a los robots manipuladores móviles, se muestran antecedentes que sirven como panorama general en relación a la manipulación cooperativa, se describen algunas características importantes sobre los RMM y se explican los objetivos generales y específicos de esta tesis.

En el Capítulo 2, se da un procedimiento general para el modelado de un RMM y se presentan los modelos —cinemático y dinámico— a trabajar en el resto de este trabajo.

En el Capítulo 3, se presenta la problemática del seguimiento de trayectoria para un RMM considerando restricciones de movimiento, se propone una ley de control que resuelve el problema, se da un análisis de estabilidad y se presentan simulaciones que validan la teoría. Además, es aquí donde se presenta la simulación, usando el modelo del KUKA youBot, que se compara con la parte práctica que se muestra en el Capítulo 6.

En el Capítulo 4, se estudia la noción de sincronización para un sistema de RMM's considerando dos configuraciones: esquema maestro-esclavo y sincronización con acoplamientos. El estudio se hace usando el modelo del RMM (2,0,2) en su versión espacial, y luego se presenta una simulación usando el modelo del KUKA youBot con el objetivo de manipulación cooperativa entre dos robots.

En el Capítulo 5, se incorpora la parte del control de fuerza en los efectores finales; se presentan los esquemas de control híbrido de posición-fuerza y posición-fuerza extendido, y se muestran simulaciones considerando acoplamientos tanto a nivel de posición como de fuerza.

En el Capítulo 6, se dan resultados experimentales para la parte de seguimiento de trayectoria usando la plataforma experimental del KUKA youBot.

Finalmente, en el Capítulo 7, se presentan las conclusiones del presente trabajo y se propone el trabajo futuro.

Capítulo 2

Modelado del RMM

En este capítulo se presentan conceptos y generalidades necesarias para el modelado cinemático y dinámico de un RMM generalizado a n grados de libertad. Luego, se presentan de manera resumida, los modelos de los diferentes RMM trabajados en esta tesis: el RMM (2,0,2) espacial —denotado como (2,0,2) puesto que está conformado de una base móvil diferencial tipo (2,0) y un manipulador de 2 grados de libertad— y el modelo del KUKA youBot. En el Apéndice A se presentan los cálculos y las definiciones de los términos que intervienen en el modelado, de manera detallada.

El RMM (2,0,2) se usa para el diseño del control de posición en el problema de seguimiento de trayectoria y se pone a prueba ante distintas trayectorias paramétricas. Además, se usa también para adentrarse en el estudio de la sincronización entre dos robots, tal que sean capaces de mantener una relación cinemática entre ellos, incluso en presencia de perturbaciones externas al extender el control de posición mediante la adición de acoplamiento estáticos.

Finalmente, el modelo del KUKA youBot, se usa para la parte experimental en el problema de seguimiento de trayectoria, y se hacen simulaciones añadiendo la parte de sincronización y control híbrido de posición-fuerza para la manipulación de un objeto.

2.1. Modelo cinemático

La cinemática es la ciencia que trata el movimiento sin considerar las fuerzas que lo ocasionan [20].

En robótica, es de interés conocer la posición y orientación espacial de los objetos, articulaciones, y sobretodo, del efector final del manipulador, con respecto a un marco de referencia. El efector final del manipulador es el extremo libre de la cadena de articulaciones que conforman el manipulador. Existen dos tipos principales de articulaciones: *prismáticas*, que permiten el movimiento lineal o de traslación de los elementos adyacentes, y de *revoluta*, que permiten el movimiento rotacional.

Denotamos como n al número de grados de libertad en un manipulador; el número de grados de libertad es el número de variables de posición independientes que tendrían que especificarse para poder localizar todas las piezas del mecanismo.

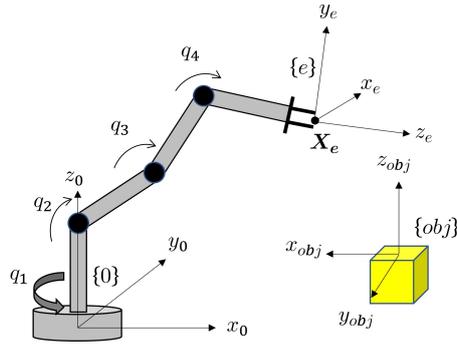


Figura 2.1: Manipulador de 4 GDL y sistemas de referencia.

2.1.1. Cinemática directa

Considere la Figura 2.1. La cinemática directa es el problema de encontrar la posición y orientación del marco $\{e\}$ del efector final \mathbf{X}_e con respecto a un marco base $\{0\}$ como una función de las variables articulares $\mathbf{q} = [q_1 \ q_2 \ \cdots \ q_n]^T$. Esto es

$$\mathbf{X}_e = f(\mathbf{q}) \quad (2.1)$$

Para lograr esto, se usa una metodología en donde se asignan marcos de referencia a cada articulación del robot y mediante matrices de transformación homogéneas se logra una propagación desde el marco base hasta el efector final.

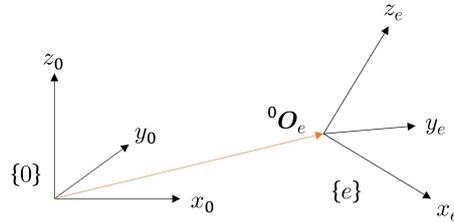


Figura 2.2: Posición y orientación de un marco respecto a otro.

Las matrices de transformación homogéneas describen la posición y orientación de un marco con respecto a otro y tienen la forma

$${}^0\mathbf{T}_e = \begin{bmatrix} {}^0\mathbf{R}_e & {}^0\mathbf{O}_e \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} = {}^0\mathbf{T}_1 \ {}^1\mathbf{T}_2 \ \cdots \ {}^{j-1}\mathbf{T}_j, \quad j = e \quad (2.2)$$

Donde ${}^0\mathbf{R}_e$ es la matriz de rotación que relaciona al marco $\{e\}$ respecto al marco $\{0\}$, ${}^0\mathbf{O}_e$ es el vector de posición del origen del marco $\{e\}$ respecto al marco $\{0\}$, vea la Figura 2.2, y $\mathbf{0} = [0 \ 0 \ 0]$.

La orientación de un marco respecto a otro puede tener varias representaciones, la que usamos en este trabajo son las matrices de rotación; sin embargo, existe también el uso de los ángulos de Euler, cuaterniones, ángulos fijos, etc., algunas más convenientes que otras dependiendo de la aplicación.

Las matrices de rotación están conformadas por 3 vectores ortonormales que representan a los vectores unitarios del marco $\{j\}$ escritos en $\{i\}$ [20].

$${}^i\mathbf{R}_j = [{}^i\hat{x}_j \quad {}^i\hat{y}_j \quad {}^i\hat{z}_j] = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

Algunas propiedades importantes son, [21]:

- ${}^i\mathbf{R}_j, {}^i\mathbf{R}_j^{-1} \in SO(3)$ (Special Orthogonal Group (3)).
- ${}^i\mathbf{R}_j^{-1} = {}^i\mathbf{R}_j^T = {}^j\mathbf{R}_i$
- $\det({}^i\mathbf{R}_j) = 1$.

De forma estandarizada, se definen las matrices que generan una rotación θ respecto a los ejes x , y y z a continuación:

$$\mathbf{R}_{x,\theta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R}_{y,\theta} = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R}_{z,\theta} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

Una metodología bastante conocida en la literatura y que usamos en este trabajo para la obtención de la cinemática directa en la parte del manipulador, es la convención Denavit-Hartenberg descrita en [21], que se basa en la generación de cada matriz homogénea \mathbf{T} como una composición de 4 transformaciones básicas: dos de traslación y dos de rotación. Vea la Figura 2.3.

$${}^{i-1}\mathbf{T}_i = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i \cos \alpha_i & \sin \theta_i \sin \alpha_i & a_i \cos \theta_i \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i \cos \alpha_i & -\cos \theta_i \sin \alpha_i & a_i \sin \theta_i \\ 0 & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

Donde:

- a_i : Distancia entre el eje z_{i-1} y z_i a lo largo de x_i .
- α_i : Ángulo entre los ejes z_{i-1} y z_i medido sobre x_i .
- d_i : Distancia del origen O_{i-1} a la intersección con el eje x_i medida a lo largo de z_{i-1} .
- θ_i : Ángulo de x_{i-1} a x_i medido sobre z_{i-1} .

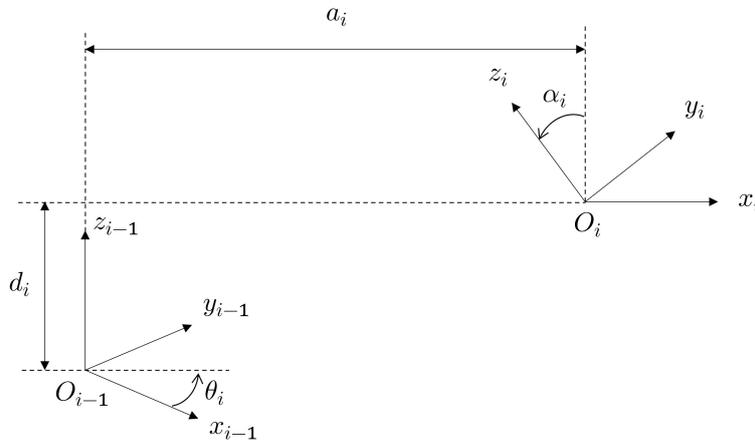


Figura 2.3: Transformación usando la convención D-H.

2.1.2. Cinemática inversa

El problema de la cinemática inversa, al contrario de la cinemática directa, se enfoca en encontrar el conjunto de posiciones articulares necesarias para alcanzar una posición y orientación deseadas en el espacio con el efector final, de tal forma que se tiene

$$\mathbf{q} = g(\mathbf{X}_e) \quad (2.6)$$

Las ecuaciones cinemáticas en la solución (si existe) de la cinemática inversa son no lineales, por lo que no siempre es sencillo obtenerlas; además, pueden existir múltiples soluciones, como en el caso de los robots redundantes.

El conjunto de soluciones cinemáticas definen el *espacio de trabajo* para un robot dado, si no existe una solución para un punto deseado en el espacio, significa que éste se encuentra fuera del espacio de trabajo del robot.

2.1.3. Cinemática diferencial

El objetivo en esta sección es relacionar las velocidades lineal y angular del efector final \mathbf{X}_e con el vector de velocidades articulares $\dot{\mathbf{q}}$. Esto se da a través de la matriz Jacobiana $\mathbf{J}_e(\mathbf{q})$ de la siguiente manera:

$$\dot{\mathbf{X}}_e = \mathbf{J}_e(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} \quad (2.7)$$

Si se considera tanto la posición como la orientación espacial del efector final ($\mathbf{X}_e \in \mathbb{R}^6$), entonces

$$\mathbf{J}_e(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_v \\ \mathbf{J}_\omega \end{bmatrix} = [J_1 \quad J_2 \quad \cdots \quad J_n] \quad (2.8)$$

$\mathbf{J}_e(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{6 \times n}$ se llama *Jacobiano geométrico* y está definida por la concatenación entre el Jacobiano que relaciona las velocidades lineales $\mathbf{J}_v = [J_{v_1} \quad J_{v_2} \quad \cdots \quad J_{v_n}]$ y las velocidades angulares $\mathbf{J}_\omega = [J_{\omega_1} \quad J_{\omega_2} \quad \cdots \quad J_{\omega_n}]$. El término J_i , $i = 1, \dots, n$, que ya combina los Jacobianos lineales y angulares por columnas, se puede definir dependiendo del tipo de articulación en cuestión, y considerando que se usa la convención Denavit-Hartenberg [21] en donde el eje de actuación es siempre el eje z .

$$J_i = \begin{bmatrix} J_{v_i} \\ J_{\omega_i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{z}_{i-1} \times (\mathbf{O}_e - \mathbf{O}_{i-1}) \\ \hat{z}_{i-1} \end{bmatrix}, \quad \text{si es de revoluta} \quad (2.9)$$

$$J_i = \begin{bmatrix} J_{v_i} \\ J_{\omega_i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{z}_{i-1} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \text{si es prismática} \quad (2.10)$$

Donde $\hat{z}_{i-1} = {}^0\mathbf{R}_{i-1} \hat{k}$, $\hat{k} = [0 \quad 0 \quad 1]^T$. \mathbf{O}_e es el vector de posición al origen del marco del efector final respecto al marco inercial —aunque para el cálculo del modelo dinámico, éste término corresponde al marco situado en el centro de masa de cada eslabón denotado por \mathbf{O}_{c_i} ; \mathbf{O}_{i-1} es el vector de posición al origen del marco $i - 1$ respecto al marco inercial.

Si se considera sólo la posición cartesiana del efector final ($\mathbf{X}_e = {}^0\mathbf{O}_e \in \mathbb{R}^3$), entonces $\mathbf{J}_e(\mathbf{q}) = \mathbf{J}_v \in \mathbb{R}^{3 \times n}$ y se puede obtener por el método diferencial de la siguiente manera:

$$\mathbf{J}_e(\mathbf{q}) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} {}^0\mathbf{O}_e \quad (2.11)$$

2.1.4. Robot diferencial (2,0)

Una de las motivaciones en este trabajo de tesis es la consideración de una base móvil con restricciones de movimiento, como es el caso del robot diferencial tipo (2,0). El vector de postura de esta plataforma móvil está dado por $(x \ y \ \theta)^T$, donde x, y son las coordenadas cartesianas en el plano horizontal y θ es su orientación (vea la Figura 2.4), luego, dadas las velocidades longitudinal v y angular ω , la base móvil está gobernada por el modelo cinemático (2.12), [22].

$$\begin{aligned}\dot{x} &= v \cos \theta \\ \dot{y} &= v \sin \theta \\ \dot{\theta} &= \omega\end{aligned}\tag{2.12}$$

Este tipo de plataforma móvil, también llamado robot *uniciclo*, no puede exhibir desplazamientos o velocidades laterales dado que sus ruedas no pueden ser orientadas. A este tipo de restricción cinemática de movimiento se le llama *restricción no holonómica* y, matemáticamente, se escribe como sigue:

$$\dot{x} \sin \theta - \dot{y} \cos \theta = 0\tag{2.13}$$

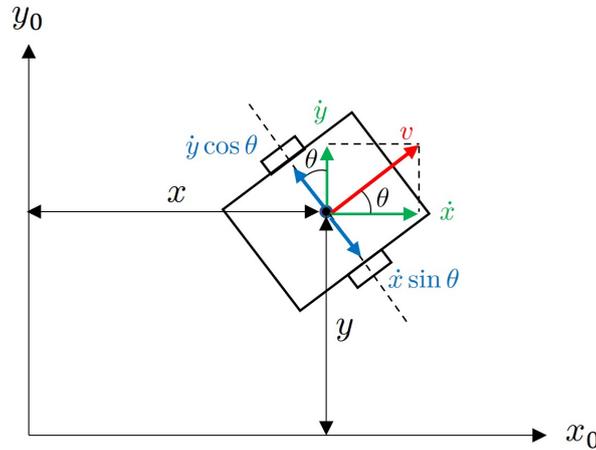


Figura 2.4: Robot diferencial (2,0).

2.2. Modelo dinámico completo

En esta sección se pretende dar un modelo generalizado para un RMM de $n = n_b + n_m$ grados de libertad, donde $n_b = 3$ son los grados de libertad de la base móvil y n_m los grados de libertad del manipulador, tal como se muestra en la Figura 2.5.

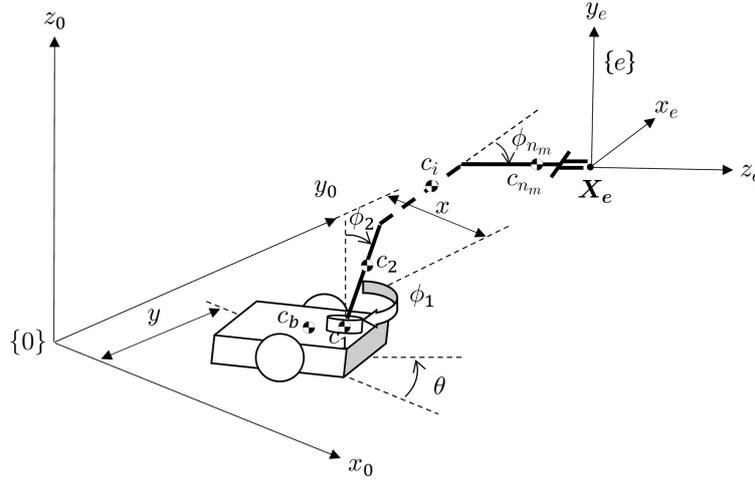


Figura 2.5: Configuración general del RMM.

De tal forma que definimos las coordenadas generalizadas del móvil como $\mathbf{q}_b = [x \ y \ \theta]^T$, y las del manipulador como $\mathbf{q}_m = [\phi_1 \ \phi_2 \ \dots \ \phi_{n_m}]^T$. Así, $\mathbf{q} = [\mathbf{q}_b^T \ \mathbf{q}_m^T]^T$, esto es

$$\mathbf{q}(t) = [q_1 \ q_2 \ \dots \ q_n]^T = [x \ y \ \theta \ \phi_1 \ \phi_2 \ \dots \ \phi_{n_m}]^T \quad (2.14)$$

Por lo general, el modelo dinámico de los robots se obtiene con el formalismo de Euler-Lagrange. Ésta metodología considera el Lagrangiano $\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ como la diferencia entre la energía cinética $\mathcal{K}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ y la energía potencial del sistema $\mathcal{V}(\mathbf{q})$, [23].

$$\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathcal{K}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - \mathcal{V}(\mathbf{q}) \quad (2.15)$$

Donde $\mathcal{V}(\mathbf{q})$ es debido a las fuerzas conservativas como la gravedad; $\mathcal{K}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{D}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}$, con $\mathbf{D}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ la matriz de inercia.

De forma general, para sistemas con restricciones de tipo holónomas (o geométricas) y no-holónomas (o cinemáticas) que generan fuerzas adicionales que afectan la dinámica del sistema, las ecuaciones de movimiento toman la siguiente forma:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \mathbf{q}} = \boldsymbol{\tau} + \mathbf{A}^T(\mathbf{q}) \boldsymbol{\lambda} - \mathbf{J}_e^T(\mathbf{q}) \mathbf{h}_r \quad (2.16)$$

Donde $\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{R}^n$ es el vector de fuerzas de control; $\mathbf{A}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{k \times n}$ es la matriz de restricciones no holonómicas con k siendo el número de restricciones independientes; $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^k$ representa las fuerzas debido a las restricciones no holonómicas; y $\mathbf{h}_r \in \mathbb{R}^6$ es el vector de fuerzas y pares que aparecen debido a la interacción del efector final del robot con el ambiente y se mapean a la dinámica del sistema a través del Jacobiano transpuesto.

Sustituyendo el Lagrangiano, ecuación (2.15), en (2.16), las ecuaciones de movimiento toman la forma siguiente:

$$\mathbf{D}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{F}_f(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{G}(\mathbf{q}) - \mathbf{A}^T(\mathbf{q}) \boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\tau} - \mathbf{J}_e^T(\mathbf{q}) \mathbf{h}_r \quad (2.17)$$

Donde $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la matriz de Coriolis; $\mathbf{F}_f(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \in \mathbb{R}^n$ es el vector de fuerzas de fricción; y $\mathbf{G}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^n$ es el vector de efectos gravitacionales.

La matriz de inercia se puede calcular como sigue:

$$\mathbf{D}(\mathbf{q}) = \sum_{i=b}^{n_m+1} \left\{ m_i \mathbf{J}_{\mathbf{v}_{c_i}}^T(\mathbf{q}) \mathbf{J}_{\mathbf{v}_{c_i}}(\mathbf{q}) + \mathbf{J}_{\omega_{c_i}}^T(\mathbf{q}) {}^0\mathbf{R}_i(\mathbf{q}) {}^i\mathbf{I}_i {}^0\mathbf{R}_i^T(\mathbf{q}) \mathbf{J}_{\omega_{c_i}}(\mathbf{q}) \right\} \quad (2.18)$$

Donde el sub-índice c_i hace referencia al centro de masa del i -ésimo eslabón; ${}^i\mathbf{I}_i \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ es el tensor de inercia del i -ésimo eslabón respecto al marco local y depende de su geometría, si se consideran eslabones simétricos, los elementos fuera de la diagonal de éste término son cero.

$${}^i\mathbf{I}_i = \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

Por otro lado, los elementos de la matriz de Coriolis se pueden calcular con ayuda de los Símbolos de Christoffel diferenciando los elementos de la matriz de inercia como sigue:

$$C_{kj} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial d_{kj}}{\partial q_i} + \frac{\partial d_{ki}}{\partial q_j} - \frac{\partial d_{ij}}{\partial q_k} \right\} \dot{q}_i \quad (2.20)$$

Luego, para el vector de fuerzas debido a la gravedad, se considera la energía potencial

$$\mathcal{V}(\mathbf{q}) = \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{g}^T {}^0\mathbf{O}_{c_i} \quad (2.21)$$

Siendo $\mathbf{g} = [0 \ 0 \ -g]^T$ con g la gravedad. Luego, el i -ésimo término del vector $\mathbf{G}(\mathbf{q})$ es:

$$G_i = -\frac{\partial \mathcal{V}(\mathbf{q})}{\partial q_i} \quad (2.22)$$

Note que para obtener el modelo (2.17) es necesario conocer las fuerzas de restricción λ ; sin embargo, para el caso del RMM, podemos prescindir de éste término considerando, en un principio, un modelo sin restricciones cinemáticas —el cuál sería suficiente para una plataforma móvil de tipo omnidireccional, pero no es así para la base diferencial—, e incorporando la restricción no holonómica (2.13) al modelo dinámico mediante la metodología que presenta [24]. Así, tómesese en cuenta el modelo dinámico:

$$\mathbf{D}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{F}_f(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{G}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau} - \mathbf{J}_e^T(\mathbf{q})\mathbf{h}_r \quad (2.23)$$

Hay que aclarar que cuando el efector final del robot no está en contacto con el ambiente, es decir, que no se tienen fuerzas externas, el término $\mathbf{J}_e^T(\mathbf{q})\mathbf{h}_r$ es nulo y se dice que el robot está en *movimiento libre*. Por el contrario, cuando el robot entra en contacto con el ambiente, se tienen fuerzas de reacción que afectan la dinámica del sistema y se dice que el robot está en *movimiento restringido*.

Además, definimos el vector de fuerzas y torques como

$$\boldsymbol{\tau} = [F_x \ F_y \ \tau_c \ \tau_1 \ \tau_2 \ \cdots \ \tau_{n_m}]^T \quad (2.24)$$

Donde F_x y F_y son las fuerzas lineales en la plataforma sobre el eje x_0 y y_0 respectivamente, τ_c es el par con el que gira la plataforma respecto a su centro y $\tau_i, i = 1, 2, \dots, n_m$ es el torque del i -ésimo eslabón.

2.3. Modelo reducido

Las restricciones cinemáticas del sistema pueden escribirse de la forma

$$\mathbf{A}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0} \quad (2.25)$$

Existe una matriz $\mathbf{S}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{n \times (n-k)}$ de rango completo e invertible que genera el espacio nulo de $\mathbf{A}(\mathbf{q})$ [23, 25], esto es,

$$\mathbf{S}^T(\mathbf{q})\mathbf{A}^T(\mathbf{q}) = \mathbf{0} \quad (2.26)$$

O bien, de manera equivalente, $\mathbf{A}(\mathbf{q})\mathbf{S}(\mathbf{q}) = \mathbf{0}$. Luego, es posible encontrar un vector $\eta(t) \in \mathbb{R}^{n-k}$, que satisface

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{S}(\mathbf{q})\eta(t) \quad (2.27)$$

Derivando la ecuación (2.27) respecto al tiempo, obtenemos

$$\ddot{\mathbf{q}} = \dot{\mathbf{S}}(\mathbf{q})\eta(t) + \mathbf{S}(\mathbf{q})\dot{\eta}(t) \quad (2.28)$$

Sustituyendo (2.27) y (2.28) en (2.23), multiplicando por la izquierda por $\mathbf{S}^T(\mathbf{q})$ y considerando un nuevo vector de pares de control $\tau_{red} \in \mathbb{R}^{n-k}$ tal que $\tau = \mathbf{B}(\mathbf{q})\tau_{red}$ con $\mathbf{B}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{n \times (n-k)}$ un término que permite el mapeo entre los torques del modelo reducido (restringido) y los torques del modelo completo (sin restricciones), se obtiene el modelo reducido del RMM, [24]:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{D}}(\mathbf{q})\dot{\eta} + \bar{\mathbf{C}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\eta + \bar{\mathbf{F}}_f(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \bar{\mathbf{G}}(\mathbf{q}) &= \bar{\tau}(\mathbf{q}) \\ \dot{\mathbf{q}} &= \mathbf{S}(\mathbf{q})\eta \end{aligned} \quad (2.29)$$

Donde

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{D}}(\mathbf{q}) &= \mathbf{S}^T(\mathbf{q})\mathbf{D}(\mathbf{q})\mathbf{S}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{(n-k) \times (n-k)} \\ \bar{\mathbf{C}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= \mathbf{S}^T(\mathbf{q})\mathbf{D}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{S}}(\mathbf{q}) + \mathbf{S}^T(\mathbf{q})\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\mathbf{S}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{(n-k) \times (n-k)} \\ \bar{\mathbf{F}}_f(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= \mathbf{S}^T(\mathbf{q})\mathbf{F}_f(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \in \mathbb{R}^{n-k} \\ \bar{\mathbf{G}}(\mathbf{q}) &= \mathbf{S}^T(\mathbf{q})\mathbf{G}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{n-k} \\ \bar{\tau}(\mathbf{q}) &= \mathbf{S}^T(\mathbf{q})\mathbf{B}(\mathbf{q})\tau_{red} - \mathbf{S}^T(\mathbf{q})\mathbf{J}_e^T(\mathbf{q})\mathbf{h}_r \in \mathbb{R}^{n-k} \end{aligned}$$

Para el RMM en cuestión, se tiene una sola restricción cinemática, entonces $k = 1$. Además, considerando que $\dot{\mathbf{q}} = [\dot{x} \ \dot{y} \ \dot{\theta} \ \dot{\phi}_1 \ \dot{\phi}_2 \ \cdots \ \dot{\phi}_{n_m}]^T$, de (2.25) se tiene

$$\mathbf{A}(\mathbf{q}) = [\sin \theta \quad -\cos \theta \quad 0 \quad \mathbf{0}_{1 \times n_m}] \quad (2.30)$$

Donde $\mathbf{0}_{1 \times n_m}$ es un vector fila de ceros de n_m elementos.

Se define el vector auxiliar

$$\eta(t) = [\eta_1 \ \eta_2 \ \cdots \ \eta_{n-1}]^T = [v \ \dot{\theta} \ \dot{\phi}_1 \ \dot{\phi}_2 \ \cdots \ \dot{\phi}_{n_m}]^T \quad (2.31)$$

De las ecuaciones (2.27) y (2.26), es fácil ver que

$$\mathbf{S}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \mathbf{0}_{1 \times n_m} \\ \sin \theta & 0 & \mathbf{0}_{1 \times n_m} \\ 0 & 1 & \mathbf{0}_{1 \times n_m} \\ \mathbf{0}_{n_m \times 1} & \mathbf{0}_{n_m \times 1} & \mathbf{1}_{n_m \times n_m} \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

Donde $\mathbf{1}_{n_m \times n_m}$ es la matriz identidad de dimensión $n_m \times n_m$ y $\mathbf{0}_{n_m \times 1}$ es un vector columna de ceros de dimensión n_m . Note que es en la relación mostrada en la ecuación (2.27) donde se encuentra el modelo cinemático (2.12) del robot diferencial.

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\phi}_1 \\ \dot{\phi}_2 \\ \vdots \\ \dot{\phi}_{n_m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \mathbf{0}_{1 \times n_m} \\ \sin \theta & 0 & \mathbf{0}_{1 \times n_m} \\ 0 & 1 & \mathbf{0}_{1 \times n_m} \\ \mathbf{0}_{n_m \times 1} & \mathbf{0}_{n_m \times 1} & \mathbf{1}_{n_m \times n_m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ \dot{\theta} \\ \dot{\phi}_1 \\ \dot{\phi}_2 \\ \vdots \\ \dot{\phi}_{n_m} \end{bmatrix} \quad (2.33)$$

Es por esta razón, que el modelo reducido (2.29) satisface la restricción no holonómica (2.13) de la base móvil de forma natural.

Ahora, considere la Figura 2.6.

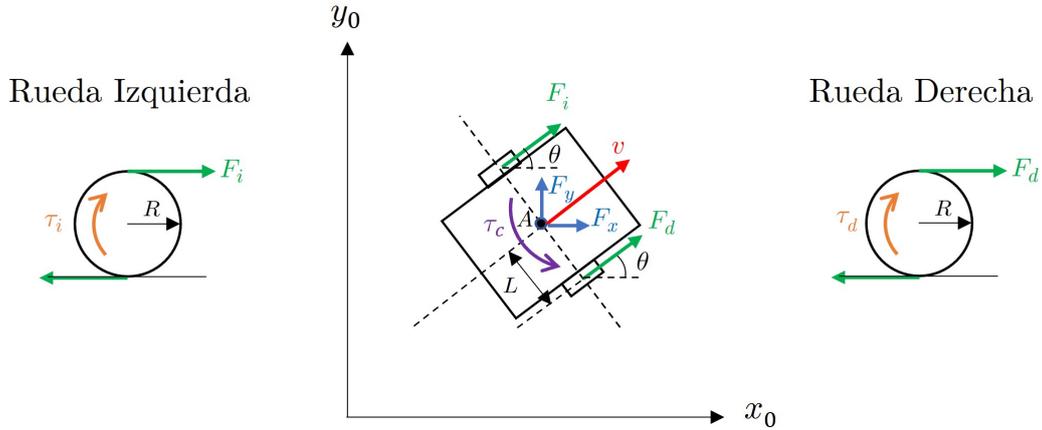


Figura 2.6: Descripción de fuerzas y torques en la base móvil.

Los torques a nivel de rueda de la base móvil se pueden expresar en términos de las fuerzas lineales como sigue

$$\tau_d = F_d R, \quad \tau_i = F_i R \quad (2.34)$$

Aplicando sumatoria de fuerzas en x_0 y en y_0 , se obtienen las fuerzas traslacionales del móvil en función de los torques en sus ruedas.

$$\begin{aligned} F_x &= (F_d + F_i) \cos \theta = \frac{1}{R} (\tau_d + \tau_i) \cos \theta \\ F_y &= (F_d + F_i) \sin \theta = \frac{1}{R} (\tau_d + \tau_i) \sin \theta \end{aligned} \quad (2.35)$$

Aplicando sumatoria de momentos en A, el punto donde pasa el eje de rotación de la base móvil, se obtiene

$$\tau_c = L(F_d - F_i) = \frac{L}{R}(\tau_d - \tau_i) \quad (2.36)$$

De tal forma que, considerando que el vector de torques del modelo reducido tiene la forma

$$\tau_{red} = [\tau_d \ \tau_i \ \tau_1 \ \tau_2 \ \cdots \ \tau_{n_m}]^T \quad (2.37)$$

Establecemos la relación $\tau = \mathbf{B}(\mathbf{q})\tau_{red}$ con

$$\mathbf{B}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \frac{1}{R} \cos \theta & \frac{1}{R} \cos \theta & \mathbf{0}_{1 \times n_m} \\ \frac{1}{R} \sin \theta & \frac{1}{R} \sin \theta & \mathbf{0}_{1 \times n_m} \\ \frac{L}{R} & -\frac{L}{R} & \mathbf{0}_{1 \times n_m} \\ \mathbf{0}_{n_m \times 1} & \mathbf{0}_{n_m \times 1} & \mathbf{1}_{n_m \times n_m} \end{bmatrix} \quad (2.38)$$

La matriz $\mathbf{B}(\mathbf{q})$ se llama *matriz de motorización* [24].

Hasta este punto, se han dado las generalidades y la teoría necesaria para el modelado cinemático y dinámico de los RMM trabajados en esta tesis. A continuación, se presentan, de manera resumida, los modelos como tal y la descripción tanto del RMM (2,0,2) espacial y el KUKA youBot.

2.4. RMM (2,0,2) espacial

Para el modelado del RMM (2,0,2) se considera la configuración mostrada en la Figura 2.7.

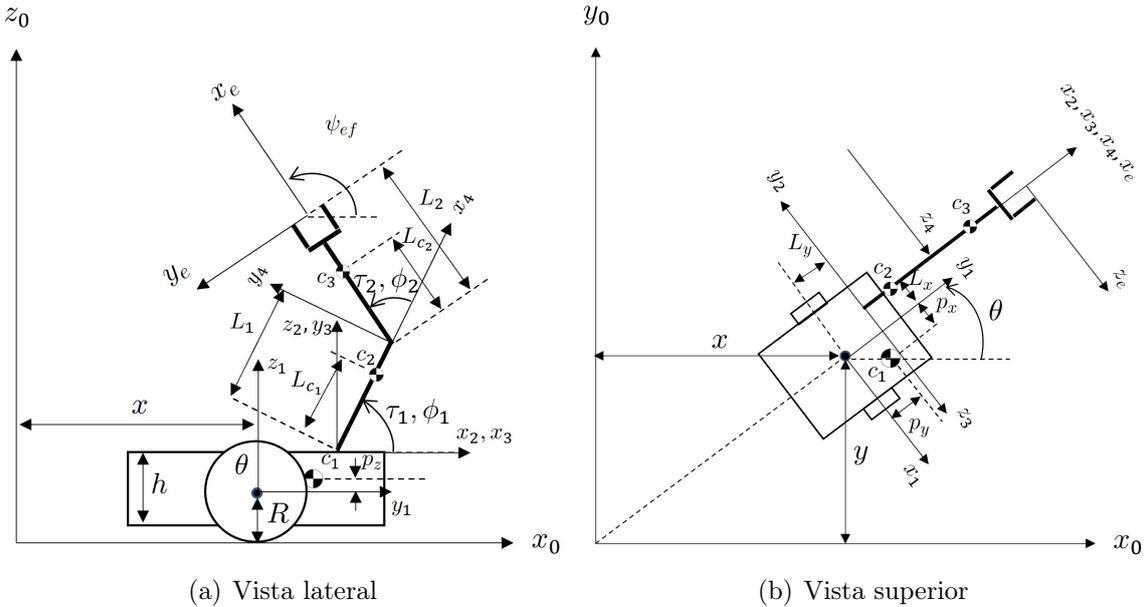


Figura 2.7: Configuración del RMM (2,0,2) en el espacio

El robot está conformado por una base móvil diferencial tipo (2,0), y un brazo manipulador de 2 grados de libertad.

El móvil y los eslabones se consideran simétricos, esto es, los tensores de inercia tendrán la forma ${}^i\mathbf{I}_i = \text{diag}(I_{ixx}, I_{iyy}, I_{izz})$, $i = 1, 2, 3$. Con esto, a continuación se describe la nomenclatura de los parámetros físicos.

- ${}^1\mathbf{I}_1, {}^2\mathbf{I}_2, {}^3\mathbf{I}_3$: Tensores de inercia del móvil, primer y segundo eslabón respectivamente.
- m_1, m_2, m_3 : Masas del móvil, primer y segundo eslabón respectivamente.
- h : Altura del móvil.
- R : Radio de las llantas del móvil.
- L : Distancia medida desde el eje longitudinal del móvil hasta una de sus llantas.
- L_x, L_y : Distancia desde el eje longitudinal y transversal del móvil hasta el anclaje con el primer eslabón respectivamente.
- p_x, p_y, p_z : Distancias al centro de masas c_1 del móvil.
- L_1, L_2 : Longitudes del primer y segundo eslabón respectivamente.
- L_{c_1}, L_{c_2} : Distancias al centro de masas c_2 y c_3 del primer y segundo eslabón respectivamente.

En este caso, el espacio de la tarea para el efector final se puede describir con $\mathbf{X}_e = [x_{ef} \ y_{ef} \ z_{ef} \ \psi_{ef}]^T$, los tres primeros términos son las coordenadas cartesianas del efector final y ψ_{ef} es la orientación medida desde el eje horizontal.

2.4.1. Cinemática directa

La matriz que relaciona el efector final con el marco inercial $\{0\}$ es

$${}^0\mathbf{T}_e = \begin{bmatrix} {}^0\mathbf{R}_e & {}^0\mathbf{O}_e \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \quad (2.39)$$

$${}^0\mathbf{R}_e = \begin{bmatrix} \cos(\phi_1 + \phi_2) \cos \theta & -\sin(\phi_1 + \phi_2) \cos \theta & \sin \theta \\ \cos(\phi_1 + \phi_2) \sin \theta & -\sin(\phi_1 + \phi_2) \sin \theta & -\cos \theta \\ \sin(\phi_1 + \phi_2) & \cos(\phi_1 + \phi_2) & 0 \end{bmatrix}$$

$${}^0\mathbf{O}_e = \begin{bmatrix} x + L_y \cos \theta - L_x \sin \theta + L_1 \cos \phi_1 \cos \theta + L_2 \cos(\phi_1 + \phi_2) \cos \theta \\ y + L_x \cos \theta + L_y \sin \theta + L_1 \cos \phi_1 \sin \theta + L_2 \cos(\phi_1 + \phi_2) \sin \theta \\ R + \frac{h}{2} + L_2 \sin(\phi_1 + \phi_2) + L_1 \sin \phi_1 \end{bmatrix}$$

2.4.2. Modelo dinámico completo

El modelo del sistema sin considerar efectos por fricción ni interacción del efector final con el ambiente, está dado por la ecuación dinámica

$$\mathbf{D}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{G}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau}, \quad \mathbf{q} = [x \ y \ \theta \ \phi_1 \ \phi_2]^T \quad (2.40)$$

Donde $\boldsymbol{\tau} = [F_x \ F_y \ \tau_c \ \tau_1 \ \tau_2]^T$.

2.4.3. Modelo reducido

El modelo reducido, con $\eta(t) = [v \ \dot{\theta} \ \dot{\phi}_1 \ \dot{\phi}_2]^T$, tiene la forma

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{D}}(\mathbf{q}) \dot{\eta} + \bar{\mathbf{C}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \eta + \bar{\mathbf{G}}(\mathbf{q}) &= \bar{\boldsymbol{\tau}}(\mathbf{q}) \\ \dot{\mathbf{q}} &= \mathbf{S}(\mathbf{q}) \eta \end{aligned} \quad (2.41)$$

Donde

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{D}}(\mathbf{q}) &= \mathbf{S}^T(\mathbf{q}) \mathbf{D}(\mathbf{q}) \mathbf{S}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{4 \times 4} \\ \bar{\mathbf{C}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= \mathbf{S}^T(\mathbf{q}) \mathbf{D}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{S}}(\mathbf{q}) + \mathbf{S}^T(\mathbf{q}) \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \mathbf{S}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{4 \times 4} \\ \bar{\mathbf{G}}(\mathbf{q}) &= \mathbf{S}^T(\mathbf{q}) \mathbf{G}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{4 \times 1} \\ \bar{\boldsymbol{\tau}}(\mathbf{q}) &= \mathbf{S}^T(\mathbf{q}) \mathbf{B}(\mathbf{q}) \boldsymbol{\tau}_{red} \in \mathbb{R}^{4 \times 1} \end{aligned}$$

Con

$$\mathbf{S}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & 0 & 0 \\ \sin \theta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \frac{1}{R} \cos \theta & \frac{1}{R} \cos \theta & 0 & 0 \\ \frac{1}{R} \sin \theta & \frac{1}{R} \sin \theta & 0 & 0 \\ \frac{L}{R} & -\frac{L}{R} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2.5. RMM: KUKA youBot

El modelado del KUKA youBot se obtiene considerando la configuración mostrada en la Figura 2.8.

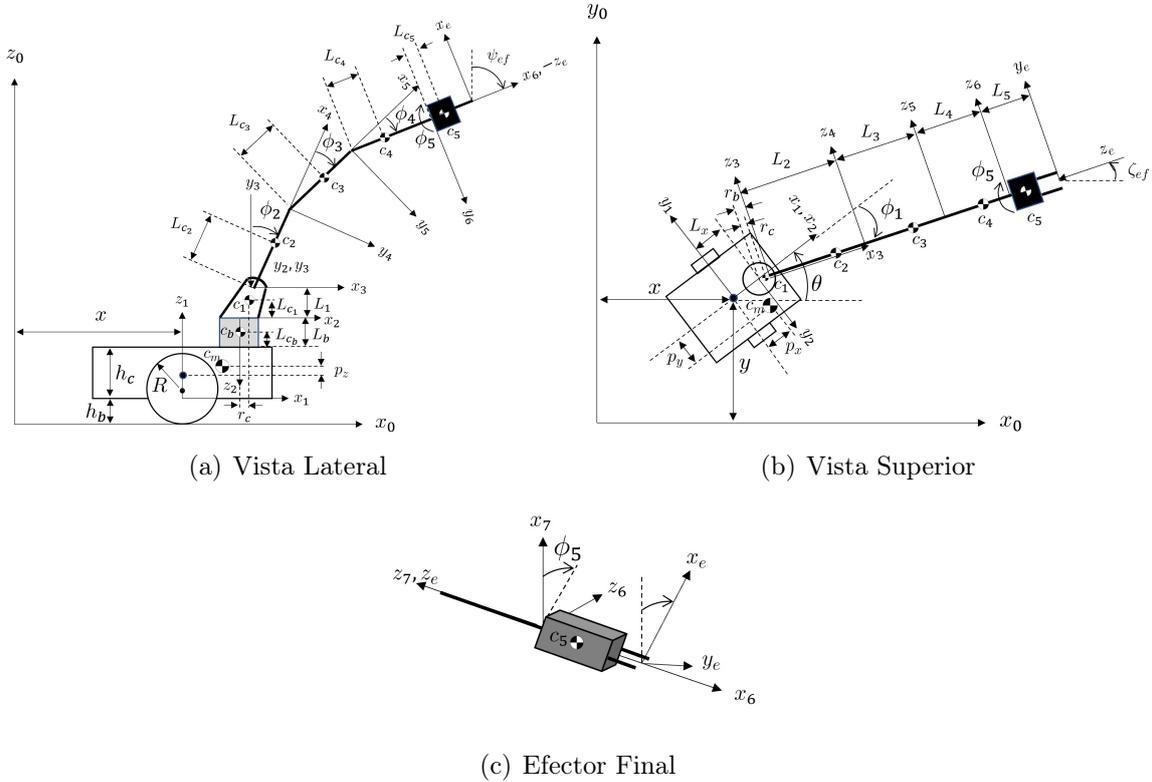


Figura 2.8: Configuración del robot KUKA youBot

Aunque el robot físico cuenta con una base omnidireccional, en este trabajo se controlará como una base diferencial y un brazo manipulador de cinco grados de libertad.

De igual forma que en el modelo del RMM (2,0,2), se considera que la base móvil y los eslabones son simétricos, por lo que los tensores de inercia serán matrices diagonales. Así, los parámetros se describen como sigue:

- $m_m, m_b, m_i, i = 1, \dots, 5$: Masas de la base móvil, del eslabón fijo, y del i -ésimo eslabón del manipulador.
- h_b, h_c : Distancia desde el piso hasta la base móvil, y altura del móvil.
- R : Radio de las ruedas.
- p_x, p_y, p_z : Distancia al centro de masa del móvil.
- L : Distancia medida desde el eje longitudinal del móvil hasta una de sus ruedas.
- $L_i, i = b, 1, \dots, 5$: Longitud del i -ésimo eslabón.
- $L_{c_i}, i = b, 1, \dots, 5$: Distancia al centro de masa del i -ésimo eslabón.
- r_b, r_c : Radio medido desde el centro del eslabón fijo a la base del segundo eslabón, y al centro de masa del primer eslabón, respectivamente.
- L_x : Distancia medida desde el centroide del móvil hasta el centroide del eslabón fijo.
- ${}^i\mathbf{I}_i = \text{diag}(I_{ixx}, I_{iyy}, I_{izz}), i = m, b, 1, \dots, 5$: Tensores de inercia del móvil y del i -ésimo eslabón.
- b_{q_i} : Coeficiente de fricción viscosa relacionada con la coordenada generalizada q_i .

El espacio de configuración para el efector final se puede escribir como

$$\mathbf{X}_e = [x_{ef} \quad y_{ef} \quad z_{ef} \quad \psi_{ef} \quad \zeta_{ef}]^T$$

Donde los tres primeros términos son las posiciones cartesianas sobre los ejes x_0, y_0 y z_0 respectivamente, ψ_{ef} es la orientación del efector final respecto del eje vertical, y ζ_{ef} es la orientación respecto al eje horizontal.

2.5.1. Cinemática directa

La matriz que relaciona el efector final con el marco inercial $\{0\}$ está dada por

$${}^0\mathbf{T}_e = \begin{bmatrix} {}^0\mathbf{R}_e & {}^0\mathbf{O}_e \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \quad (2.42)$$

$$\begin{aligned} {}^0\mathbf{R}_e &= \begin{bmatrix} \sin(\phi_1 - \theta) \sin \phi_5 - \cos(\phi_1 - \theta) \alpha_1 \cos \phi_5 & \sin(\phi_1 - \theta) \cos \phi_5 + \alpha_1 \cos(\phi_1 - \theta) \sin \phi_5 & -\alpha_2 \cos(\phi_1 - \theta) \\ \cos(\phi_1 - \theta) \sin \phi_5 + \alpha_1 \sin(\phi_1 - \theta) \cos \phi_5 & \cos(\phi_1 - \theta) \cos \phi_5 - \alpha_1 \sin(\phi_1 - \theta) \sin \phi_5 & \alpha_2 \sin(\phi_1 - \theta) \\ \alpha_2 \cos \phi_5 & -\alpha_2 \sin \phi_5 & -\alpha_1 \end{bmatrix} \\ {}^0\mathbf{O}_e &= \begin{bmatrix} x + L_x \cos \theta + [r_b + L_2 \sin \phi_2 + L_3 \sin(\phi_2 + \phi_3) + (L_4 + L_5) \sin(\phi_2 + \phi_3 + \phi_4)] \cos(\phi_1 - \theta) \\ y + L_x \sin \theta - [r_b + L_2 \sin \phi_2 + L_3 \sin(\phi_2 + \phi_3) + (L_4 + L_5) \sin(\phi_2 + \phi_3 + \phi_4)] \sin(\phi_1 - \theta) \\ h_b + h_c + L_1 + L_b + L_2 \cos \phi_2 + L_3 \cos(\phi_2 + \phi_3) + (L_4 + L_5) \cos(\phi_2 + \phi_3 + \phi_4) \end{bmatrix} \\ \alpha_1 &= \cos(\phi_2 + \phi_3 + \phi_4), \quad \alpha_2 = \sin(\phi_2 + \phi_3 + \phi_4) \end{aligned} \quad (2.43)$$

2.5.2. Modelo dinámico completo

En este modelo ya se consideran las fuerzas debido a la fricción (viscosa) y también la interacción del robot con el ambiente.

En este caso, el vector de coordenadas generalizadas es $\mathbf{q}(t) = [x \ y \ \theta \ \phi_1 \ \phi_2 \ \phi_3 \ \phi_4 \ \phi_5]^T$. Así, el modelo dinámico completo tiene la forma

$$\mathbf{D}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{F}_f(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{G}(\mathbf{q}) = \tau - \mathbf{J}_e^T(\mathbf{q})\mathbf{h}_r \quad (2.44)$$

Recuerde que si el robot está en movimiento libre, es decir, que el efector final no tiene contacto con el ambiente, entonces el término $\mathbf{J}_e^T(\mathbf{q})\mathbf{h}_r$ es nulo.

2.5.3. Modelo reducido

El modelo reducido, considerando el vector auxiliar $\eta(t) = [v \ \dot{\theta} \ \dot{\phi}_1 \ \dot{\phi}_2 \ \dot{\phi}_3 \ \dot{\phi}_4 \ \dot{\phi}_5]^T$, tiene la forma

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{D}}(\mathbf{q})\dot{\eta} + \bar{\mathbf{C}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\eta + \bar{\mathbf{F}}_f(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \bar{\mathbf{G}}(\mathbf{q}) &= \bar{\tau}(\mathbf{q}) \\ \dot{\mathbf{q}} &= \mathbf{S}(\mathbf{q})\eta \end{aligned} \quad (2.45)$$

Donde

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{D}}(\mathbf{q}) &= \mathbf{S}^T(\mathbf{q})\mathbf{D}(\mathbf{q})\mathbf{S}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{7 \times 7} \\ \bar{\mathbf{C}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= \mathbf{S}^T(\mathbf{q})\mathbf{D}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{S}}(\mathbf{q}) + \mathbf{S}^T(\mathbf{q})\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\mathbf{S}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{7 \times 7} \\ \bar{\mathbf{F}}_f(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= \mathbf{S}^T(\mathbf{q})\mathbf{F}_f(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \in \mathbb{R}^7 \\ \bar{\mathbf{G}}(\mathbf{q}) &= \mathbf{S}^T(\mathbf{q})\mathbf{G}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^7 \\ \bar{\tau}(\mathbf{q}) &= \mathbf{S}^T(\mathbf{q})\mathbf{B}(\mathbf{q})\tau_{red} - \mathbf{S}^T(\mathbf{q})\mathbf{J}_e^T(\mathbf{q})\mathbf{h}_r \in \mathbb{R}^7 \end{aligned}$$

En este caso, $\tau = \mathbf{B}(\mathbf{q})\tau_{red} \in \mathbb{R}^{8 \times 1}$ con $\tau = [F_x \ F_y \ \tau_c \ \tau_1 \ \tau_2 \ \tau_3 \ \tau_4 \ \tau_5]^T$, $\tau_{red} = [\tau_d \ \tau_i \ \tau_1 \ \tau_2 \ \tau_3 \ \tau_4 \ \tau_5]^T$. Además, se re-definen las matrices

$$\mathbf{S}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin \theta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \frac{1}{R} \cos \theta & \frac{1}{R} \cos \theta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{R} \sin \theta & \frac{1}{R} \sin \theta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{L}{R} & -\frac{L}{R} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

En este capítulo se han abordado las metodologías usadas para el modelado cinemático y dinámico de los RMM que se trabajan en esta tesis, incluyendo restricciones de movimiento. En particular, el modelo (2.29), que satisface la restricción no holonómica de la base móvil, es el que se trabaja de aquí en adelante y, sobre el cuál, se diseña la ley de control para resolver el problema de seguimiento de trayectoria que se da en el siguiente capítulo.

Capítulo 3

El problema de seguimiento de trayectoria

En este capítulo se aborda la problemática de seguir una trayectoria paramétrica definida. En particular, en este trabajo se aprovecha la propiedad de redundancia que suelen tener los RMM para asignar dos tareas a la vez, a saber, se define una trayectoria para la base móvil y una distinta para el efector final; esto es posible siempre y cuando se comparta el espacio de trabajo. Para ello, se parte de considerar un controlador basado en la técnica de par calculado, con el que se consigue una cancelación perfecta de la dinámica logrando una linealización en el estado; sin embargo, este controlador, presenta el problema de no ser capaz de corregir el error a nivel de posición. Por tanto, se modifica esta ley de control tal que satisfaga esta necesidad, se presenta el análisis de estabilidad usando el método de Lyapunov y se comprueban los resultados de forma numérica mediante simulaciones usando el modelo del RMM (2,0,2). Además, se muestra una simulación usando el modelo del KUKA youBot como comparación para la parte experimental que se presenta en el Capítulo 6.

3.1. Control por par calculado

Considérese la ley de control que presenta [24] y añádase el término de compensación de gravedad $\mathbf{G}^*(\mathbf{q})$ para el caso del RMM (2,0,2) en el espacio, tomando el modelo (A.6),

$$\tau_{red} = \mathbf{P}^{-1}(\mathbf{q})\mathbf{H}(\mathbf{q}) [\mathbf{I}^{-1}(\mathbf{q}, \eta) + \dot{\eta}_d + \mathbf{K}_p \mathbf{e}_\eta + \mathbf{G}^*(\mathbf{q})] \quad (3.1)$$

Donde $\tau_{red} = [\tau_d \ \tau_i \ \tau_1 \ \tau_2]^T$ son los torques del modelo reducido, $\mathbf{q} = [x \ y \ \theta \ \phi_1 \ \phi_2]^T$ son los estados de posición, $\eta = [v \ \dot{\theta} \ \dot{\phi}_1 \ \dot{\phi}_2]^T$ son los estados de velocidad, $\eta_d = [v_d \ \dot{\theta}_d \ \dot{\phi}_{1d} \ \dot{\phi}_{2d}]^T$ se refiere al vector de variables deseadas de velocidad y se construye a partir de referencias en posición $\mathbf{q}_d = [x_d \ y_d \ \theta_d \ \phi_{1d} \ \phi_{2d}]^T$, $\mathbf{K}_p = \text{diag}(k_{p1}, k_{p2}, k_{p3}, k_{p4}) \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ es una matriz diagonal de ganancias definida positiva y $\mathbf{e}_\eta = \eta_d - \eta$ es el error a nivel velocidad, de igual manera, definimos el error de nivel de posición $\mathbf{e}_q = \mathbf{q}_d - \mathbf{q}$. Se definen además,

$$\mathbf{P}(\mathbf{q}) = \mathbf{S}^T(\mathbf{q})\mathbf{B}(\mathbf{q}), \quad \mathbf{H}(\mathbf{q}) = \bar{\mathbf{D}}(\mathbf{q}), \quad \mathbf{I}^{-1}(\mathbf{q}, \eta) = \bar{\mathbf{D}}^{-1}(\mathbf{q})\bar{\mathbf{C}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\eta, \quad \mathbf{G}^*(\mathbf{q}) = \bar{\mathbf{D}}^{-1}(\mathbf{q})\bar{\mathbf{G}}(\mathbf{q})$$

Al sustituir el control (3.1) en el modelo (A.6) se obtiene la dinámica en lazo cerrado

$$\dot{\mathbf{e}}_\eta + \mathbf{K}_p \mathbf{e}_\eta = \mathbf{0} \quad (3.2)$$

El cual es asintóticamente estable para el vector de errores en velocidad \mathbf{e}_η siempre que $k_{p_i} > 0$, $i = 1, \dots, 4$. Sin embargo, no se asegura convergencia a nivel de posición. Este problema se muestra a continuación con una simulación numérica.

Considere las condiciones iniciales, fuera de la trayectoria deseada, tanto a nivel de posición como de velocidad para ver el comportamiento de convergencia.

$$\mathbf{q}(0) = \begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \\ \theta(0) \\ \phi_1(0) \\ \phi_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.6 \text{ [m]} \\ 2.9 \text{ [m]} \\ \frac{\pi}{2} \text{ [rad]} \\ 2.3 \text{ [rad]} \\ -2.3 \text{ [rad]} \end{bmatrix}, \quad \dot{\mathbf{q}}(0) = \begin{bmatrix} \dot{x}(0) \\ \dot{y}(0) \\ \dot{\theta}(0) \\ \dot{\phi}_1(0) \\ \dot{\phi}_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \text{ [m/s]} \\ 1.4 \text{ [m/s]} \\ 0.9 \text{ [rad/s]} \\ 0 \text{ [rad/s]} \\ 0.1 \text{ [rad/s]} \end{bmatrix}$$

Esto representa un punto inicial para el efector final de

$$[x_{ef}(0) \ y_{ef}(0) \ z_{ef}(0)]^T = [3.6 \ 3.0135 \ 0.3633]^T$$

Esto arroja una velocidad lineal inicial del móvil $v(0) = \sqrt{\dot{x}(0)^2 + \dot{y}(0)^2} = 1.4 \text{ m/s}$.

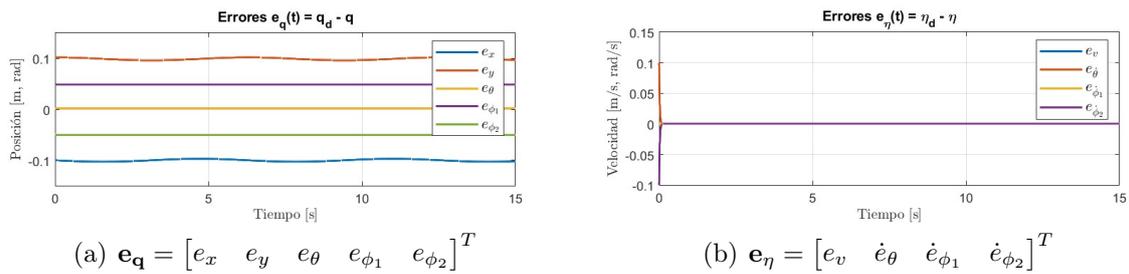


Figura 3.1: Errores de posición y velocidad.

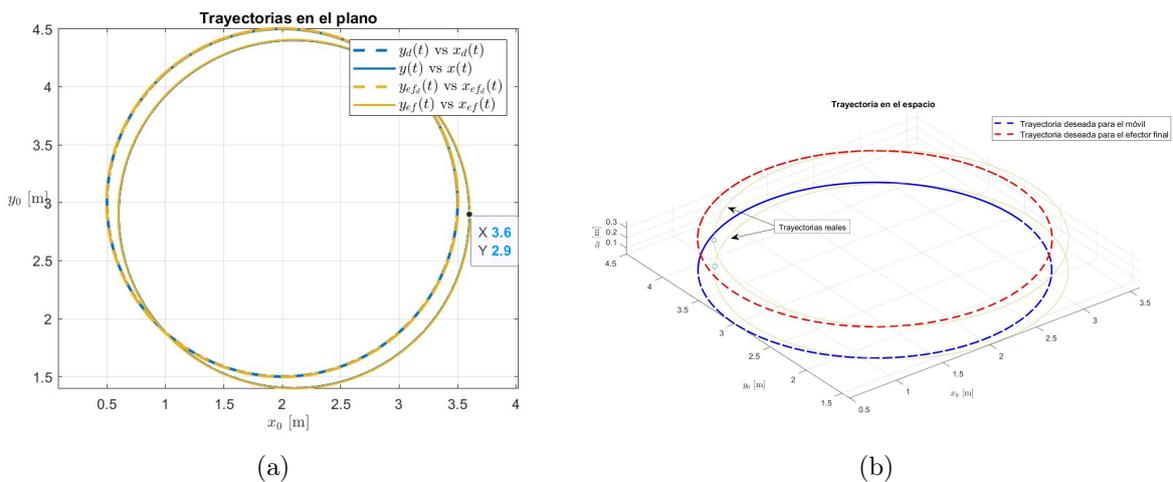


Figura 3.2: Trayectorias.

En la Figura 3.1 se puede ver una buena convergencia a nivel de velocidad $\eta(t)$ pero no a nivel de posición $\mathbf{q}(t)$, esto repercute en las trayectorias obtenidas del sistema, vea la

Figura 3.2 (a) donde la línea azul es la trayectoria de la base móvil y la amarilla del efector final, note que no se logra la convergencia cuando las condiciones iniciales se encuentran fuera de las trayectorias deseadas (líneas punteadas).

Esto se compara con las gráficas de desempeño que se obtienen en la Sección 3.3.2, en donde, tomando las mismas condiciones iniciales, ya se logra corregir el error a nivel de posición al implementar la ley de control que se diseña a continuación.

3.2. Control por par calculado modificado

En esta sección se pretende diseñar una ley de control generalizada a un RMM de n grados de libertad, considerando la base móvil diferencial tipo (2,0), y dar un análisis de estabilidad usando el método de Lyapunov.

Defínense formalmente los errores de posición y velocidad de forma generalizada como sigue

$$\begin{cases} \mathbf{e}_q &= \mathbf{q}_d - \mathbf{q} = [e_x \ e_y \ e_\theta \ e_{\phi_1} \ e_{\phi_2} \ \cdots \ e_{\phi_{nm}}]^T \\ \mathbf{e}_\eta &= \eta_d - \eta = [e_v \ \dot{e}_\theta \ \dot{e}_{\phi_1} \ \dot{e}_{\phi_2} \ \cdots \ \dot{e}_{\phi_{nm}}]^T \end{cases} \quad (3.3)$$

Donde \mathbf{q}_d y η_d Son las trayectorias de referencia para las posiciones y velocidades del sistema, respectivamente, y se definen como:

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_d &= [q_{1d} \ q_{2d} \ \cdots \ q_{nd}]^T = [x_d \ y_d \ \theta_d \ \phi_{1d} \ \phi_{2d} \ \cdots \ \phi_{nmd}]^T \\ \eta_d &= \mathbf{S}^T(\mathbf{q}_d)\dot{\mathbf{q}}_d = [\eta_{1d} \ \eta_{2d} \ \cdots \ \eta_{(n-1)d}]^T = [v_d \ \dot{\theta}_d \ \dot{\phi}_{1d} \ \dot{\phi}_{2d} \ \cdots \ \dot{\phi}_{nmd}]^T \end{aligned} \quad (3.4)$$

Para satisfacer la restricción no holonómica (2.13), en términos de valores deseados, se tiene

$$\theta_d = \tan^{-1} \left(\frac{\dot{y}_d}{\dot{x}_d} \right) \quad (3.5)$$

De tal forma que las referencias de velocidad para el móvil son

$$v_d = \sqrt{\dot{x}_d^2 + \dot{y}_d^2}, \quad \dot{\theta}_d = \frac{\dot{x}_d\ddot{y}_d - \ddot{x}_d\dot{y}_d}{v_d^2} \quad (3.6)$$

Por lo tanto, se considera que las trayectorias deseadas son funciones *suaves*, es decir, al menos dos veces diferenciables y considerando que $v_d \neq 0$.

3.2.1. Errores relativos en el robot diferencial (2,0)

El problema de seguimiento de trayectoria para un robot diferencial se puede resolver considerando un robot virtual en un esquema líder-seguidor [26, 27], vea la Figura 3.3.

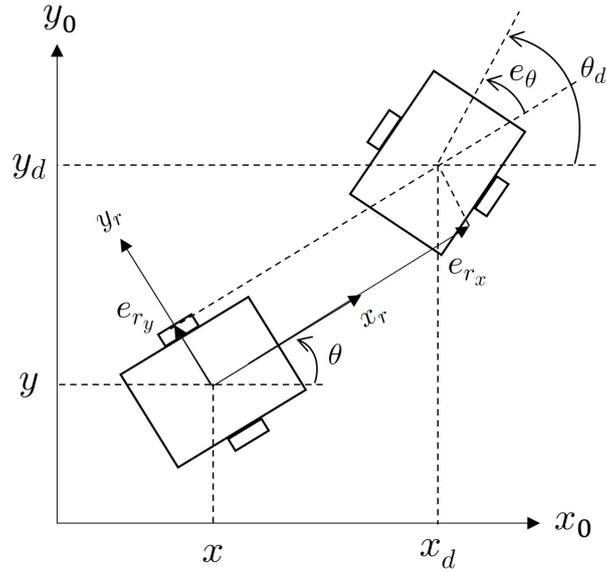


Figura 3.3: Errores del robot diferencial en esquema líder-seguidor.

Se definen los errores de seguimiento

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_d - x \\ y_d - y \\ \theta_d - \theta \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

En el marco local del robot se tiene, con respecto al robot virtual,

$$\mathbf{e}_r = \begin{bmatrix} e_{r_x} \\ e_{r_y} \\ e_\theta \end{bmatrix} = \mathbf{R}^T(\theta) \mathbf{e}, \quad \mathbf{R}(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

3.2.2. Ley de control

Para el modelo reducido de la ecuación (2.29), en movimiento libre ($\mathbf{S}^T(\mathbf{q})\mathbf{J}_e^T(\mathbf{q})\mathbf{h}_r = \mathbf{0}$), se propone la ley de control

$$\tau_{red} = \mathbf{P}^{-1}(\mathbf{q})\mathbf{H}(\mathbf{q}) \left[\mathbf{I}^{-1}(\mathbf{q}, \eta) + \dot{\eta}_d + \mathbf{K}_p \mathbf{e}_\eta + \mathbf{U}(\mathbf{q}, \mathbf{q}_d, \eta_d) + \mathbf{G}^*(\mathbf{q}) + \mathbf{F}_f^*(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \right] \in \mathbb{R}^{n-1} \quad (3.9)$$

Donde

$$\begin{aligned} \mathbf{U}(\mathbf{q}, \mathbf{q}_d, \eta_d) &= [u_1 \ u_2 \ \cdots \ u_{n-1}]^T \\ u_1 &= k_1 e_{r_x} \\ u_2 &= k_2 v_d \frac{\sin e_\theta}{e_\theta} e_{r_y} + k_3 e_\theta \\ u_3 &= k_4 e_{\phi_1} \\ &\vdots \\ u_{n-1} &= k_n e_{\phi_{nm}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\mathbf{q}) &= \mathbf{S}^T(\mathbf{q})\mathbf{B}(\mathbf{q}), \quad \mathbf{H}(\mathbf{q}) = \bar{\mathbf{D}}(\mathbf{q}), \quad \mathbf{I}^{-1}(\mathbf{q}, \eta) = \bar{\mathbf{D}}^{-1}(\mathbf{q})\bar{\mathbf{C}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\eta \\ \mathbf{G}^*(\mathbf{q}) &= \bar{\mathbf{D}}^{-1}(\mathbf{q})\bar{\mathbf{G}}(\mathbf{q}), \quad \mathbf{F}_f^*(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \bar{\mathbf{D}}^{-1}(\mathbf{q})\bar{\mathbf{F}}_f(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \end{aligned}$$

Considérese también la *dinámica de los errores* obtenida en el Apéndice B.2, esto es, el conjunto de ecuaciones (3.10), (3.11) y (3.15)

$$\begin{cases} \dot{e}_x &= \dot{x}_d + (e_v - v_d) \cos(\theta_d - e_\theta) \\ \dot{e}_y &= \dot{y}_d + (e_v - v_d) \sin(\theta_d - e_\theta) \\ \dot{e}_{r_x} &= v_d \cos(e_\theta) + (\dot{\theta}_d - \dot{e}_\theta) e_{r_y} + e_v - v_d \\ \dot{e}_{r_y} &= (\dot{e}_\theta - \dot{\theta}_d) e_{r_x} + v_d \sin(e_\theta) \\ \dot{e}_\theta &= e_{\eta_2} \\ \dot{e}_{\phi_i} &= e_{\eta_{i+2}}, \quad i = 1, \dots, 5. \end{cases} \quad (3.15)$$

Se observa que no es realmente necesario probar estabilidad para la parte del manipulador (\mathbf{e}_μ) debido a la linealización que se logra en el lazo cerrado. Así, para la parte de la base móvil, propóngase la función candidata de Lyapunov:

$$V(\mathbf{e}_\beta) \triangleq \frac{1}{2} k_1 (e_{r_x}^2 + e_{r_y}^2) + \frac{1}{2} (k_3 e_\theta^2 + \dot{e}_\theta^2 + e_v^2) \quad (3.16)$$

Derivando respecto al tiempo se tiene

$$\dot{V}(\mathbf{e}_\beta) = k_1 e_{r_x} \dot{e}_{r_x} + k_1 e_{r_y} \dot{e}_{r_y} + k_3 e_\theta \dot{e}_\theta + \dot{e}_\theta \ddot{e}_\theta + e_v \dot{e}_v$$

Usando (3.15), (3.10) y haciendo simplificaciones, se obtiene

$$\dot{V}(\mathbf{e}_\beta) = k_1 v_d e_{r_x} (\cos(e_\theta) - 1) + k_1 v_d e_{r_y} \sin(e_\theta) - k_2 v_d \frac{\sin(e_\theta)}{e_\theta} \dot{e}_\theta e_{r_y} - k_{p_2} \dot{e}_\theta^2 - k_{p_1} e_v^2 \quad (3.17)$$

Luego, se quiere demostrar

$$\dot{V}(\mathbf{e}_\beta) \leq \|k_1 v_d e_{r_x} (\cos(e_\theta) - 1)\| + \|k_1 v_d e_{r_y} \sin(e_\theta)\| + \left\| k_2 v_d \frac{\sin(e_\theta)}{e_\theta} \dot{e}_\theta e_{r_y} \right\| - k_{p_2} \|\dot{e}_\theta\|^2 - k_{p_1} \|e_v\|^2 \leq 0 \quad (3.18)$$

Considerando que

$$\|e_{r_x}\| \leq \|\mathbf{e}_\beta\|, \quad \|e_{r_y}\| \leq \|\mathbf{e}_\beta\|, \quad \|\dot{e}_\theta\| \leq \|\mathbf{e}_\beta\|, \quad \|e_v\| \leq \|\mathbf{e}_\beta\|$$

Se acota (3.18) término a término de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} k_1 \|v_d\| \|e_{r_x}\| \|\cos(e_\theta) - 1\| &\leq 2k_1 \|v_d\| \|\mathbf{e}_\beta\| \\ k_1 \|v_d\| \|e_{r_y}\| \|\sin(e_\theta)\| &\leq k_1 \|v_d\| \|\mathbf{e}_\beta\| \\ k_2 \left\| v_d \frac{\sin(e_\theta)}{e_\theta} \dot{e}_\theta e_{r_y} \right\| &\leq k_2 \|v_d\| \|\mathbf{e}_\beta\|^2 \\ k_{p_2} \|\dot{e}_\theta\|^2 &\leq k_{p_2} \|\mathbf{e}_\beta\|^2 \\ k_{p_1} \|e_v\|^2 &\leq k_{p_1} \|\mathbf{e}_\beta\|^2 \end{aligned}$$

De tal forma que (3.18) se puede re-escribir como sigue:

$$\dot{V}(\mathbf{e}_\beta) \leq 3k_1 \|v_d\| \|\mathbf{e}_\beta\| + (k_2 \|v_d\| - k_{p_2} - k_{p_1}) \|\mathbf{e}_\beta\|^2 \quad (3.19)$$

Se pueden establecer condiciones para asegurar que $\dot{V}(\mathbf{e}_\beta) \leq 0$.

Condición 1

Se pueden elegir ganancias tales que siempre se cumpla

$$k_2 \|v_d\| - k_{p_2} - k_{p_1} < 0 \quad (3.20)$$

Condición 2

Es necesario que el término de la derecha en (3.19) sea mayor que el término de la izquierda en magnitud, esto genera un intervalo para la norma del vector completo del error

$$\|e_\beta\| \leq \frac{3k_1 \|v_d\|}{k_{p_2} + k_{p_1} - k_2 \|v_d\|} \quad (3.21)$$

De tal forma que no se puede asegurar convergencia asintótica, sino que se tiene un error acotado por arriba por una cantidad positiva, esto se llama estabilidad *UUB* [28, p. 85].

Además, se tiene un conjunto compacto, que se puede hacer arbitrariamente grande al ajustar los valores de las ganancias, donde el sistema será estable, aunque de forma acotada. Así, se concluye un tipo de estabilización *semiglobal* [28, pp. 198-199].

3.3. Simulaciones: RMM (2,0,2) en el espacio

En esta sección se pone a prueba el controlador diseñado, ecuación (3.9), usando el modelo espacial del RMM (2,0,2), vea la ecuación (2.41), y los parámetros de la Tabla 3.1. Se prueban cuatro distintas trayectorias paramétricas, a saber: una circunferencia, una lemniscata de Bernoulli, una recta y una de las figuras de Lissajous.

Móvil		Eslabón 1		Eslabón 2	
Parámetro	Valor	Parámetro	Valor	Parámetro	Valor
m_1 [kg]	8.971	m_2 [kg]	1.308	m_3 [kg]	1.045
L_x [m]	0	L_1 [m]	0.4	L_2 [m]	0.3
L_y [m]	0.08	L_{c_1} [m]	0.2	L_{c_2} [m]	0.156532
p_x [m]	0	I_{2xx} [kg · m ²]	0.0003358	I_{3xx} [kg · m ²]	0.0006392
p_y [m]	0	I_{2yy} [kg · m ²]	0.016	I_{3yy} [kg · m ²]	0.007
p_z [m]	0.000785	I_{2zz} [kg · m ²]	0.017	I_{3zz} [kg · m ²]	0.008
L [m]	0.1125				
R [m]	0.040				
h [m]	0.050				
I_{1xx} [kg · m ²]	0.038				
I_{1yy} [kg · m ²]	0.065				
I_{1zz} [kg · m ²]	0.098				

Tabla 3.1: Tabla de parámetros del RMM (2,0,2)

3.3.1. Trayectorias propuestas

Circunferencia

Se considera la siguiente trayectoria paramétrica para la base móvil, que describe un círculo con centro en $(x_c, y_c) = (2, 3)$ y de radio $r_d = 1.5$ en el plano.

$$\begin{cases} x_d(t) = x_c + r_d \cos(t), & 0 \leq t \leq t_f \\ y_d(t) = y_c + r_d \sin(t) \end{cases}$$

De lo cual, se puede obtener

$$\theta_d = \tan^{-1} \left(\frac{\dot{y}_d(t)}{\dot{x}_d(t)} \right)$$

Y para las variables articulares $\phi_{1d}(t)$ y $\phi_{2d}(t)$ del manipulador, se puede resolver el sistema de ecuaciones no lineales

$$\begin{aligned} \phi_{1d}(t) + \phi_{2d}(t) &= \psi_{efd}(t) \\ R + \frac{h}{2} + L_2 \sin(\phi_{1d}(t) + \phi_{2d}(t)) + L_1 \sin(\phi_{1d}(t)) &= z_{efd}(t) \end{aligned}$$

Se define para el efector final, la coordenada en z_0 y la orientación respecto a la vertical como sigue

$$z_{efd}(t) = 0.35, \quad \psi_{efd}(t) = 0$$

Lemniscata

En este caso, se considera la siguiente trayectoria paramétrica para la base móvil, que describe una lemniscata de Bernoulli con centro en $(x_c, y_c) = (2, 3)$, $a = 2$.

$$\begin{cases} x_d(t) = x_c + \frac{a \sin(t)}{1 + \cos^2(t)}, & 0 \leq t \leq t_f \\ y_d(t) = y_c + \frac{a \sin(t) \cos(t)}{1 + \cos^2(t)} \\ \theta_d(t) = \tan^{-1} \left(\frac{\dot{y}_d}{\dot{x}_d} \right) \end{cases}$$

Para las variables articulares $\phi_{1d}(t)$ y $\phi_{2d}(t)$ del manipulador, se puede resolver el sistema de ecuaciones no lineales

$$\begin{aligned} \phi_{1d}(t) + \phi_{2d}(t) &= \psi_{efd}(t) \\ R + \frac{h}{2} + L_2 \sin(\phi_{1d}(t) + \phi_{2d}(t)) + L_1 \sin(\phi_{1d}(t)) &= z_{efd}(t) \end{aligned}$$

Para el efector final, se definen la coordenada en z_0 y la orientación respecto a la vertical

$$z_{efd}(t) = 0.35, \quad \psi_{efd}(t) = 0$$

Recta

Se considera también una tercer trayectoria paramétrica para la base móvil, que describe una recta sobre el plano x_0, y_0 ,

$$\begin{cases} x_d(t) = \frac{1}{2}t \\ y_d(t) = 1 \\ \theta_d(t) = \tan^{-1}\left(\frac{\dot{y}_d}{\dot{x}_d}\right) \end{cases}$$

Para el efector final, se define una trayectoria sobre el plano x_0, z_0 al definir

$$z_{ef_d}(t) = A_y \sin(t) + b, \quad \psi_{ef_d}(t) = 0$$

Con $b = 0.4$, $A_y = 0.04$. Luego, se calculan los valores articulares $\phi_{1d}(t)$ y $\phi_{2d}(t)$ resolviendo el sistema de ecuaciones no lineales

$$\begin{aligned} \phi_{1d}(t) + \phi_{2d}(t) &= \psi_{ef_d}(t) \\ R + \frac{h}{2} + L_2 \sin(\phi_{1d}(t) + \phi_{2d}(t)) + L_1 \sin(\phi_{1d}(t)) &= z_{ef_d}(t) \end{aligned}$$

Figura de Lissajous

Considere ahora la siguiente trayectoria para el móvil sobre el plano horizontal, con centro en $(x_c, y_c) = (2, 3)$,

$$\begin{cases} x_d(t) = x_c + A_x \sin(\omega_x t) \\ y_d(t) = y_c + A_y \sin(\omega_y t + \delta) \\ \theta_d(t) = \tan^{-1}\left(\frac{\dot{y}_d}{\dot{x}_d}\right) \end{cases}$$

Con $\omega_x = 2$, $\omega_y = 3$, $\delta = 0$, $A_x = 2$, $A_y = 1$.

Para el efector final, se define la trayectoria para su coordenada en z_0 y su orientación

$$z_{ef_d}(t) = A_z \sin(t) + b, \quad \psi_{ef_d}(t) = A_\psi \sin\left(t - \frac{\pi}{2}\right) + A_\psi$$

Con $b = 0.4$, $A_z = 0.04$, $A_\psi = 0.5$. Luego, se calculan los valores articulares $\phi_{1d}(t)$ y $\phi_{2d}(t)$ resolviendo el sistema de ecuaciones no lineales

$$\begin{aligned} \phi_{1d}(t) + \phi_{2d}(t) &= \psi_{ef_d}(t) \\ R + \frac{h}{2} + L_2 \sin(\phi_{1d}(t) + \phi_{2d}(t)) + L_1 \sin(\phi_{1d}(t)) &= z_{ef_d}(t) \end{aligned}$$

3.3.2. Respuesta del sistema

Circunferencia

Para el controlador, se usan las ganancias mostradas en la Tabla 3.2.

k_1	k_2	k_3	k_4	k_5	k_{p1}	k_{p2}	k_{p3}	k_{p4}
50	50	200	400	400	50	50	50	50

Tabla 3.2: Circunferencia: Ganancias de control

Considérense las mismas condiciones iniciales de la simulación presentada en la Sección 3.1, donde se considera la ley de control (3.1), pero ahora considerando la ley de control diseñada, ecuación (3.9).

$$\mathbf{q}(0) = \begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \\ \theta(0) \\ \phi_1(0) \\ \phi_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.6 \text{ [m]} \\ 2.9 \text{ [m]} \\ \frac{\pi}{2} \text{ [rad]} \\ 2.3 \text{ [rad]} \\ -2.3 \text{ [rad]} \end{bmatrix}, \quad \dot{\mathbf{q}}(0) = \begin{bmatrix} \dot{x}(0) \\ \dot{y}(0) \\ \dot{\theta}(0) \\ \dot{\phi}_1(0) \\ \dot{\phi}_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \text{ [m/s]} \\ 1.4 \text{ [m/s]} \\ 0.9 \text{ [rad/s]} \\ 0 \text{ [rad/s]} \\ 0.1 \text{ [rad/s]} \end{bmatrix}$$

Esto representa un punto inicial para el efector final de

$$[x_{ef}(0) \ y_{ef}(0) \ z_{ef}(0)]^T = [3.6 \ 3.0135 \ 0.3633]^T$$

Esto arroja una velocidad lineal inicial del móvil $v(0) = \sqrt{\dot{x}(0)^2 + \dot{y}(0)^2} = 1.4 \text{ m/s}$.

Con lo cual, se obtienen las gráficas de desempeño.

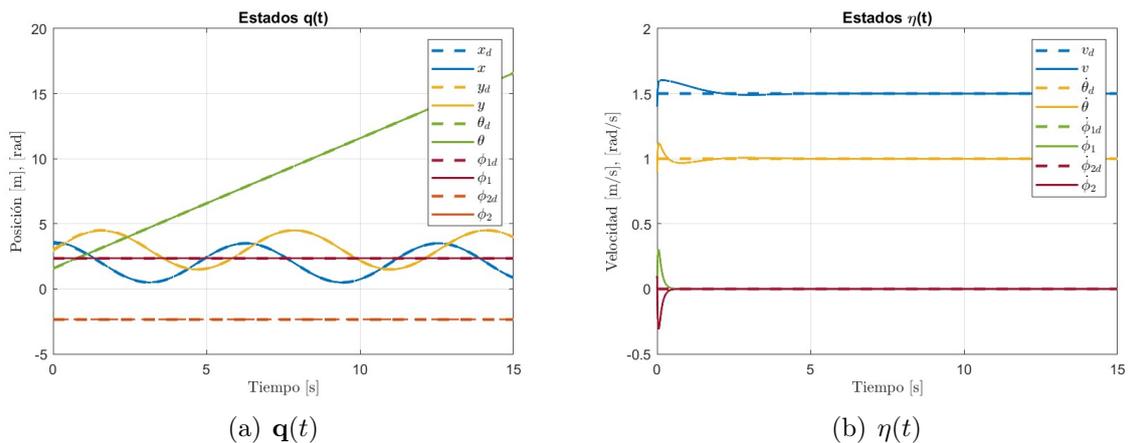


Figura 3.5: Estados.

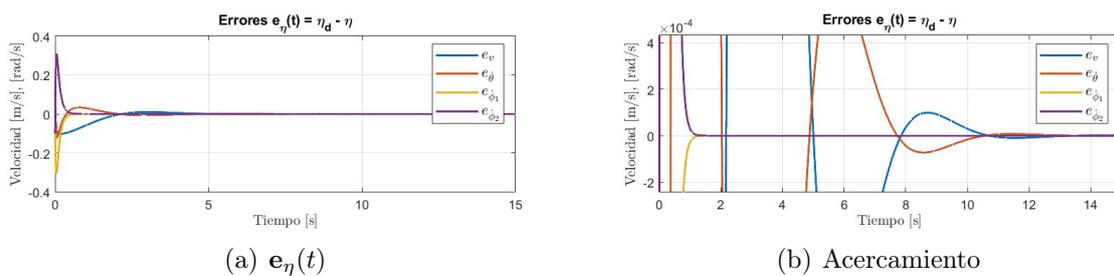


Figura 3.6: Errores en $\eta(t) = [v \ \dot{\theta} \ \dot{\phi}_1 \ \dot{\phi}_2]^T$.

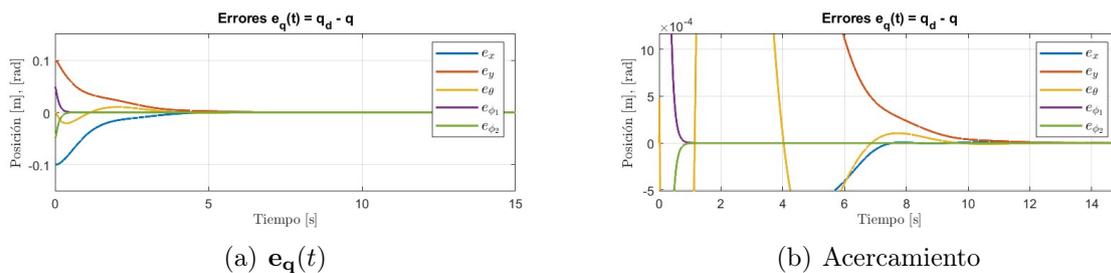


Figura 3.7: Errores en $\mathbf{q}(t) = [x \ y \ \theta \ \phi_1 \ \phi_2]^T$.

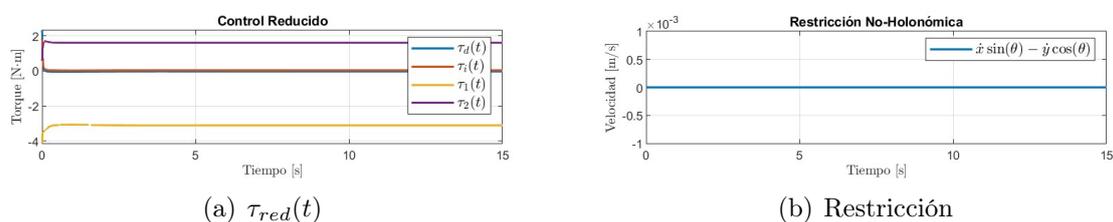


Figura 3.8: Control y restricción no holonómica.

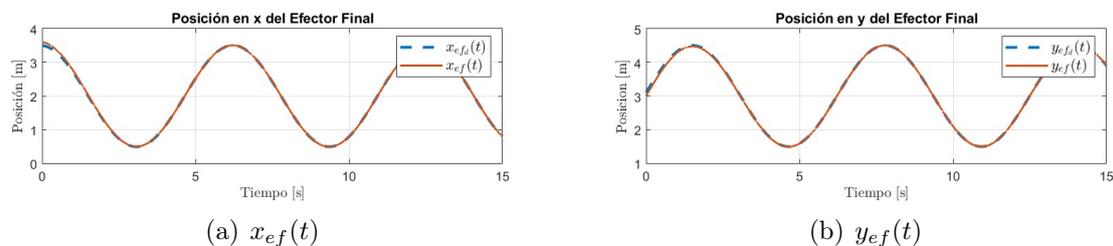


Figura 3.9: Posiciones en x_0 e y_0 del efector final.

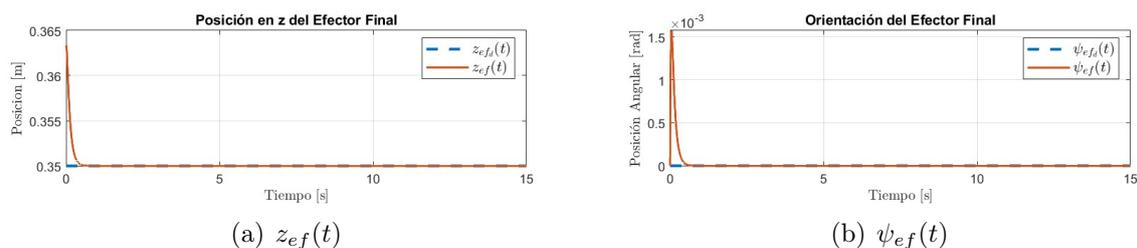


Figura 3.10: Coordenada en z_0 y orientación del efector final.

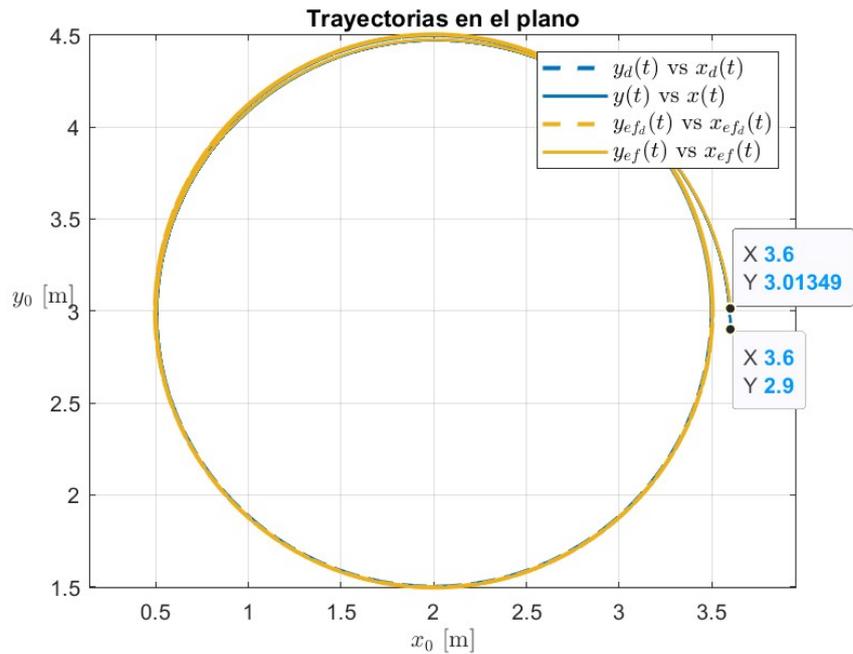


Figura 3.11: Trayectorias en el plano.

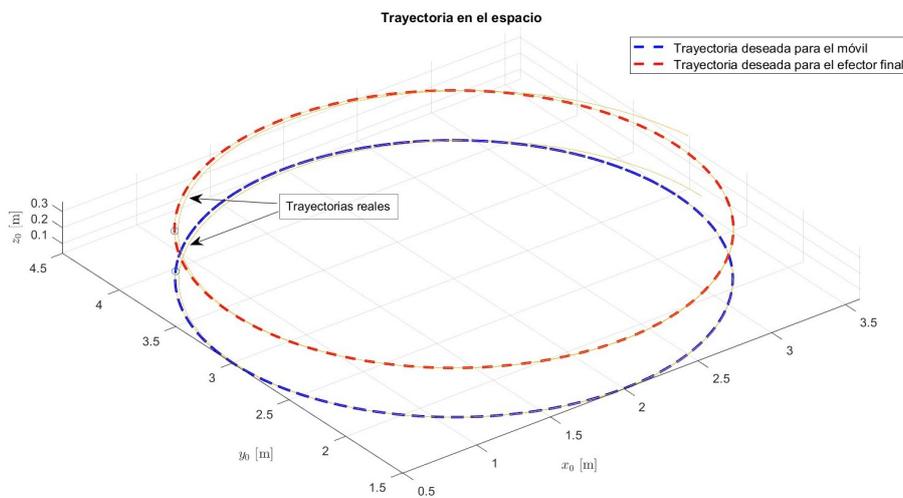
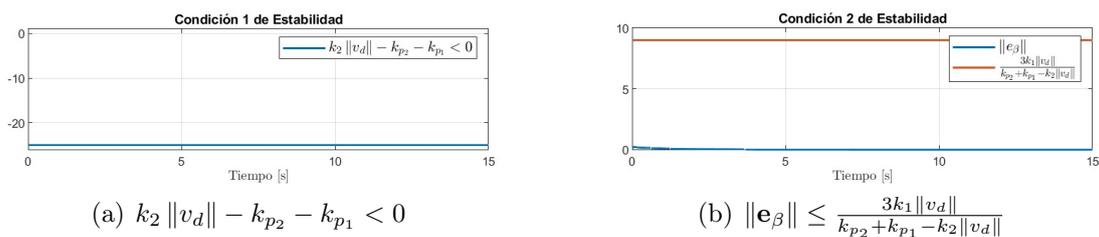


Figura 3.12: Trayectorias en el espacio.



(a) $k_2 \|v_d\| - k_{p2} - k_{p1} < 0$

(b) $\|e_\beta\| \leq \frac{3k_1 \|v_d\|}{k_{p2} + k_{p1} - k_2 \|v_d\|}$

Figura 3.13: Condiciones de estabilidad.

Note que, a diferencia de las gráficas mostradas al inicio del capítulo, Figuras 3.1 y 3.2, las trayectorias ya convergen a las trayectorias deseadas aún cuando el punto inicial está fuera de ellas, vea las Figuras 3.11 y 3.12, es decir, que se logra corregir el error a nivel de posición, vea la Figura 3.7, cumpliendo siempre con la restricción no holonómica, Figura 3.8 (b).

En la Figura 3.13 se puede ver la validación numérica de las condiciones de estabilidad obtenidas en el análisis, con lo cual se asegura la estabilidad de la base móvil.

Lemniscata

Considérense las ganancias de control mostradas en la Tabla 3.3.

k_1	k_2	k_3	k_4	k_5	k_{p1}	k_{p2}	k_{p3}	k_{p4}
50	50	200	700	700	70	70	70	70

Tabla 3.3: Lemniscata: Ganancias de control

Se usan las condiciones iniciales

$$\mathbf{q}(0) = \begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \\ \theta(0) \\ \phi_1(0) \\ \phi_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.9 \text{ [m]} \\ 3 \text{ [m]} \\ \frac{\pi}{4} \text{ [rad]} \\ 2.3 \text{ [rad]} \\ -2.3 \text{ [rad]} \end{bmatrix}, \quad \dot{\mathbf{q}}(0) = \begin{bmatrix} \dot{x}(0) \\ \dot{y}(0) \\ \dot{\theta}(0) \\ \dot{\phi}_1(0) \\ \dot{\phi}_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9 \text{ [m/s]} \\ 0.9 \text{ [m/s]} \\ 0 \text{ [rad/s]} \\ 0 \text{ [rad/s]} \\ 0.1 \text{ [rad/s]} \end{bmatrix}$$

Esto representa un punto inicial para el efector final de

$$[x_{ef}(0) \ y_{ef}(0) \ z_{ef}(0)]^T = [1.9802 \ 3.0802 \ 0.3633]^T$$

Lo cual resulta en una velocidad lineal inicial del móvil $v(0) = \sqrt{\dot{x}(0)^2 + \dot{y}(0)^2} = 1.2728$ m/s.

Así, se obtienen las gráficas de desempeño.

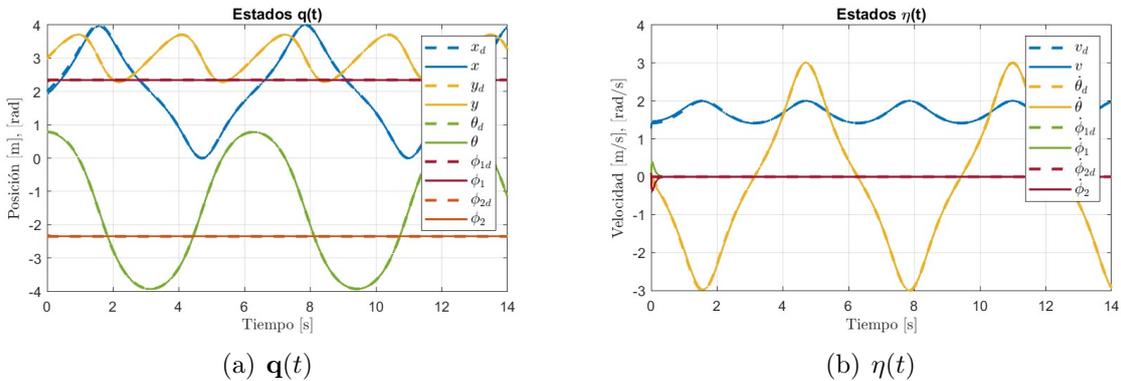


Figura 3.14: Estados.

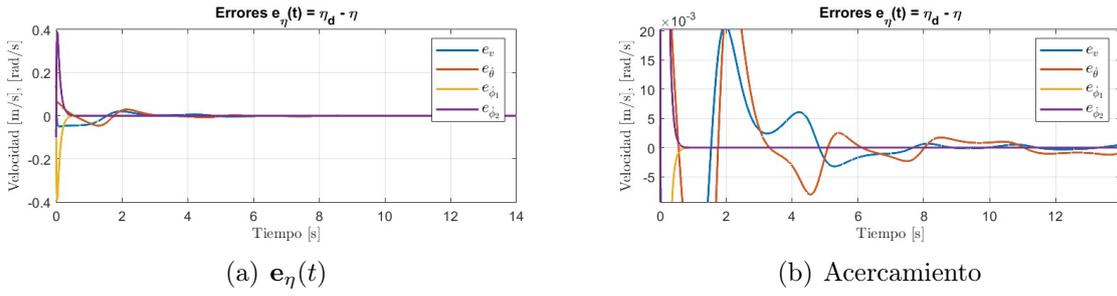


Figura 3.15: Errores en $\eta(t) = [v \ \dot{\theta} \ \dot{\phi}_1 \ \dot{\phi}_2]^T$.

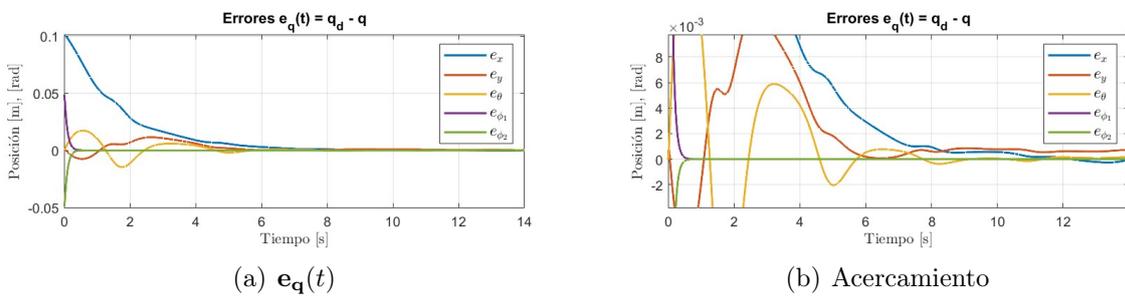


Figura 3.16: Errores en $q(t) = [x \ y \ \theta \ \phi_1 \ \phi_2]^T$.

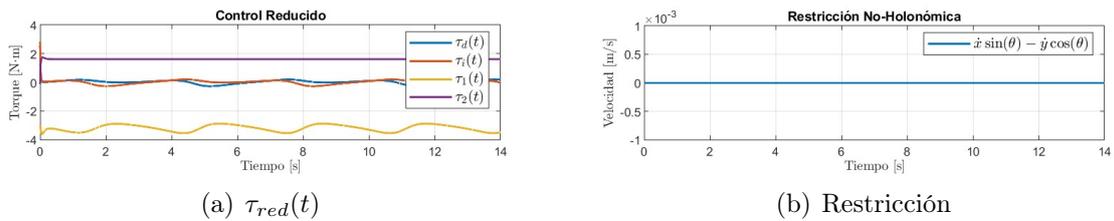


Figura 3.17: Control y restricción no holonómica.

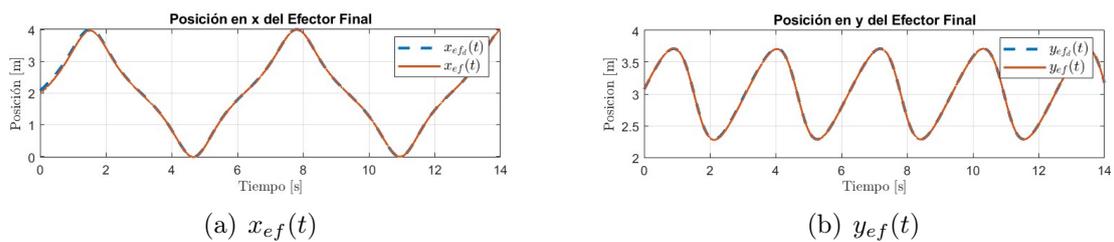


Figura 3.18: Posiciones en x_0 e y_0 del efector final.

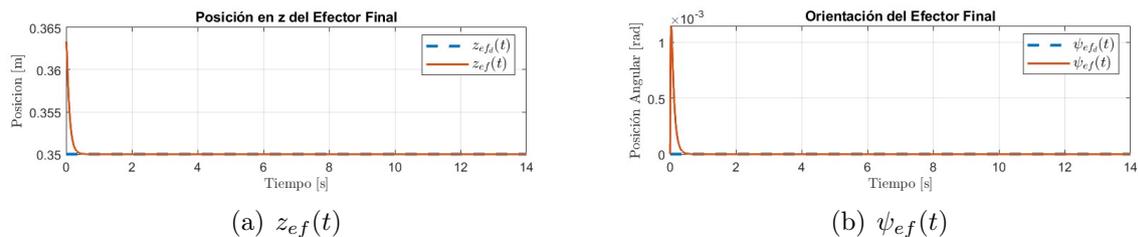


Figura 3.19: Coordenada en z_0 y orientación del efector final.

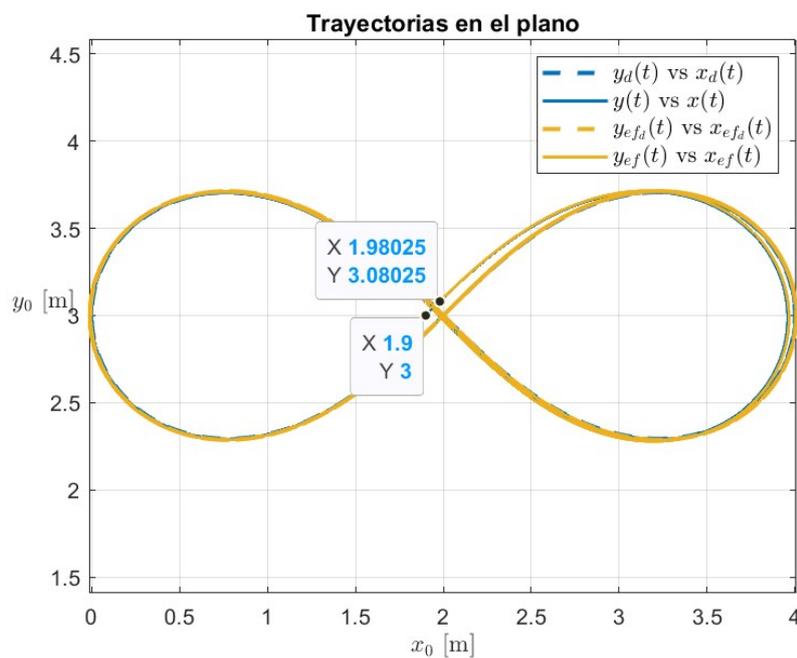


Figura 3.20: Trayectorias en el plano.

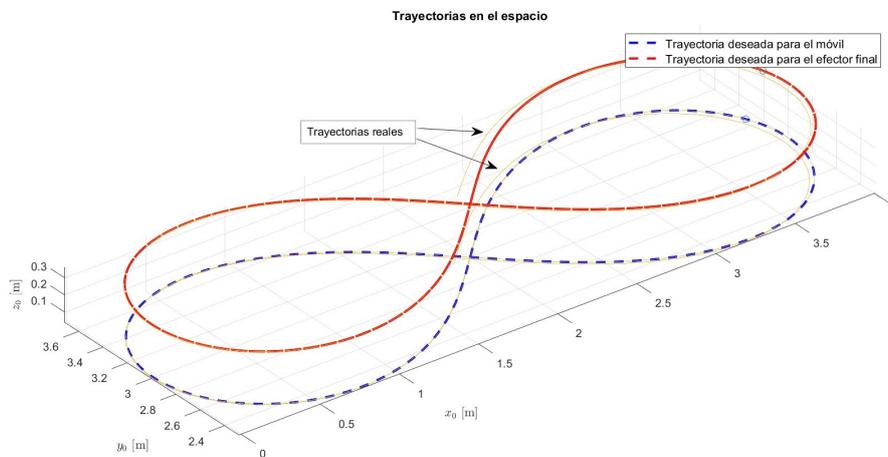


Figura 3.21: Trayectorias en el espacio.

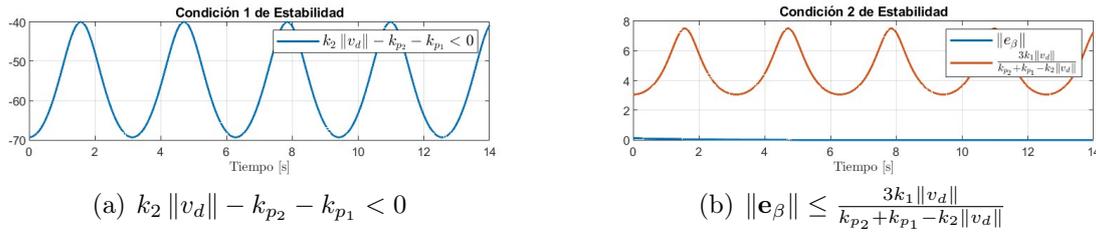


Figura 3.22: Condiciones de estabilidad.

De igual forma, en el caso de la lemniscata, se asegura el cumplimiento de las condiciones de estabilidad, vea la Figura 3.22 y se logra la convergencia a las trayectorias deseadas para el móvil y el efector final. Pero además, vea las Figuras 3.16 y 3.15 donde se presentan los errores de posición y velocidad respectivamente; en este caso, es más notorio el hecho de que los errores correspondientes a la base móvil quedan acotados alrededor del origen, como se dijo en el análisis de estabilidad, ¡y más aún!, que los errores correspondientes al manipulador convergen de manera asintótica.

Recta

Para el caso de la recta considérense las ganancias de control mostradas en la Tabla 3.4.

k_1	k_2	k_3	k_4	k_5	k_{p1}	k_{p2}	k_{p3}	k_{p4}
50	300	200	70	70	80	80	80	80

Tabla 3.4: Recta: Ganancias de control

Se usan las condiciones iniciales

$$\mathbf{q}(0) = \begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \\ \theta(0) \\ \phi_1(0) \\ \phi_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \text{ [m]} \\ 1.1 \text{ [m]} \\ 0 \text{ [rad]} \\ 2.2489 \text{ [rad]} \\ -2.2489 \text{ [rad]} \end{bmatrix}, \quad \dot{\mathbf{q}}(0) = \begin{bmatrix} \dot{x}(0) \\ \dot{y}(0) \\ \dot{\theta}(0) \\ \dot{\phi}_1(0) \\ \dot{\phi}_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.4 \text{ [m/s]} \\ 0 \text{ [m/s]} \\ 0 \text{ [rad/s]} \\ -0.0918 \text{ [rad/s]} \\ 0.0918 \text{ [rad/s]} \end{bmatrix}$$

Esto representa un punto inicial para el efector final de

$$[x_{ef}(0) \quad y_{ef}(0) \quad z_{ef}(0)]^T = [0.1291 \quad 1.1 \quad 0.3765]^T$$

De tal forma que se tiene una velocidad lineal inicial del móvil $v(0) = \sqrt{\dot{x}(0)^2 + \dot{y}(0)^2} = 0.4 \text{ m/s}$.

Se obtienen las gráficas de desempeño.

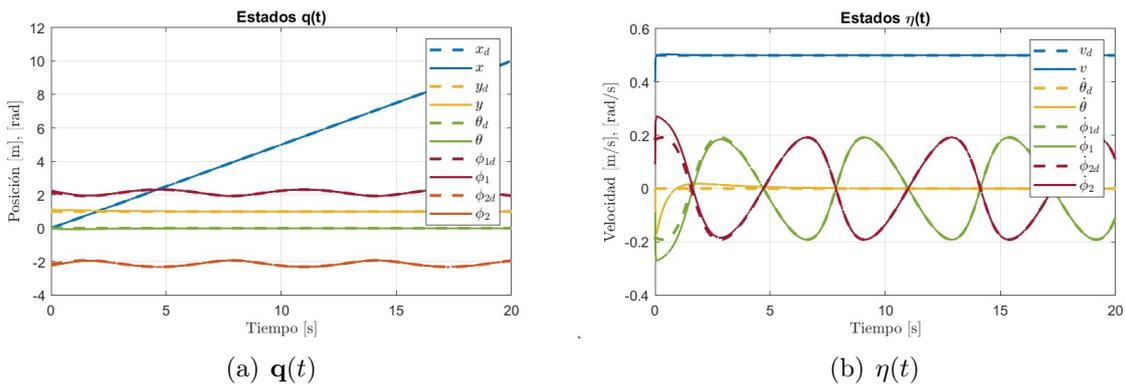


Figura 3.23: Estados.

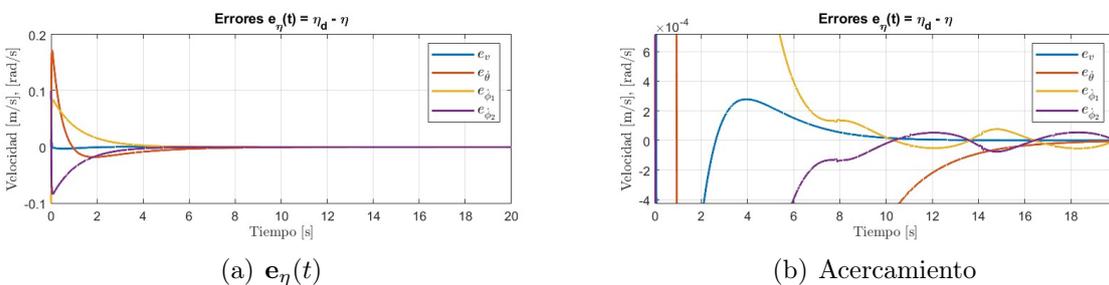


Figura 3.24: Errores en $\boldsymbol{\eta}(t) = [v \ \dot{\theta} \ \dot{\phi}_1 \ \dot{\phi}_2]^T$.

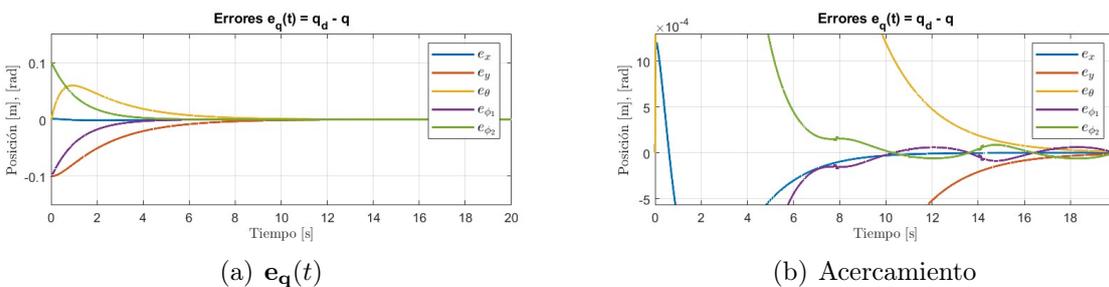


Figura 3.25: Errores en $\mathbf{q}(t) = [x \ y \ \theta \ \phi_1 \ \phi_2]^T$.

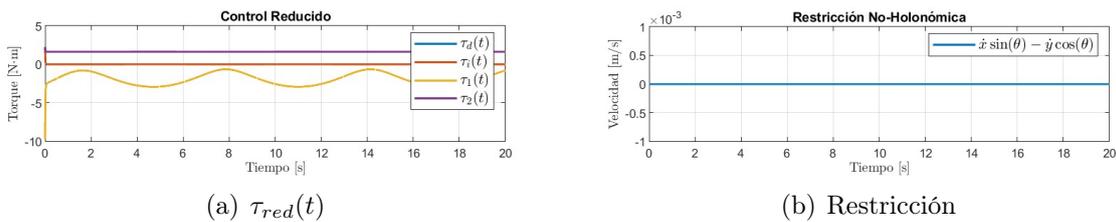


Figura 3.26: Control y restricción no holonómica.

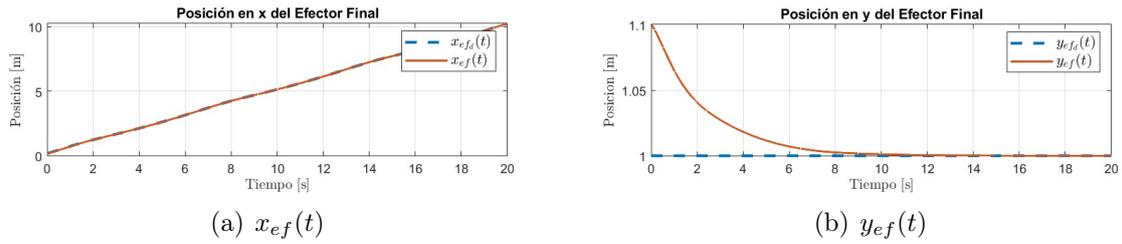


Figura 3.27: Posiciones en x_0 e y_0 del efector final.

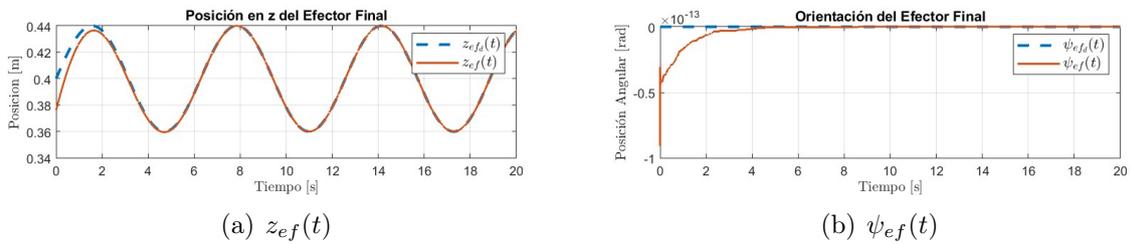


Figura 3.28: Coordenada en z_0 y orientación del efector final.

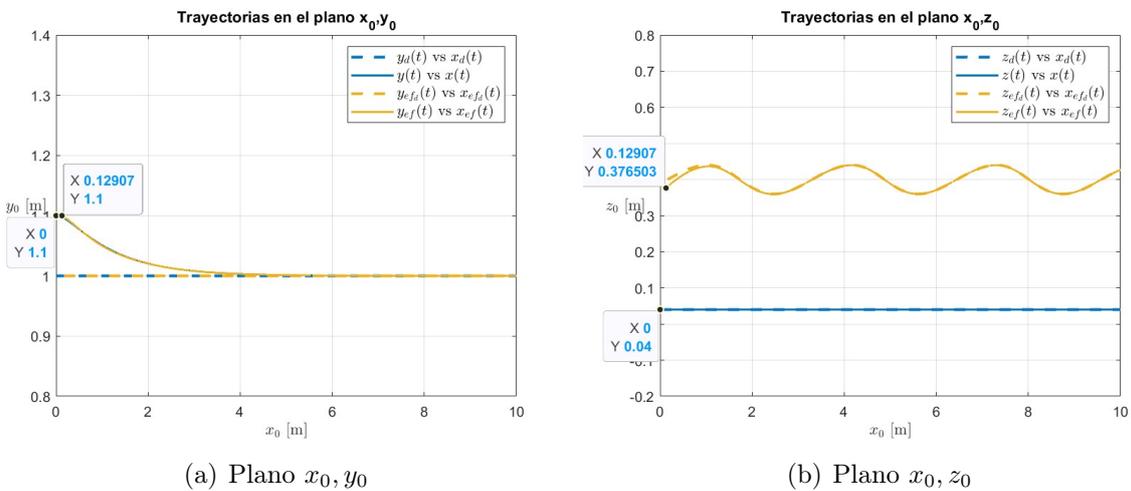


Figura 3.29: Trayectorias en los planos.

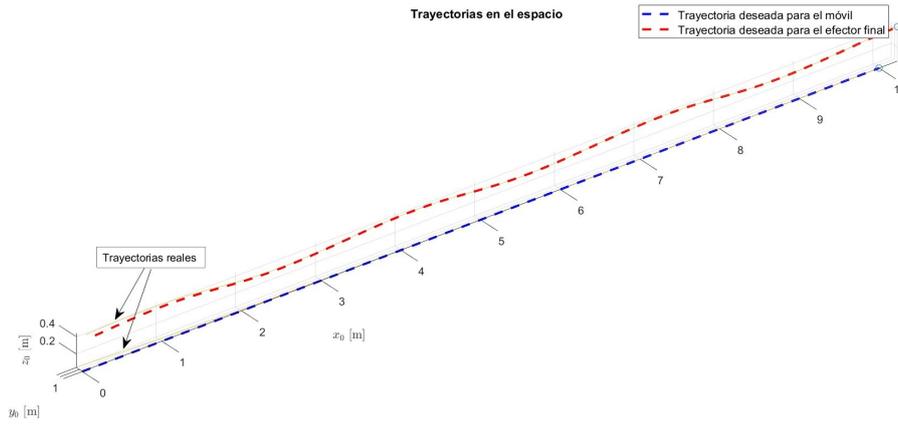


Figura 3.30: Trayectorias en el espacio.

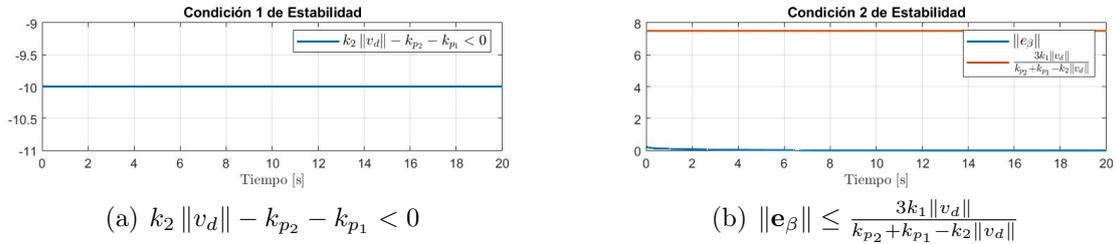


Figura 3.31: Condiciones de estabilidad.

Esta simulación resulta un poco más desafiante que las anteriores en el sentido de que ya se exige también una función variante en el tiempo para la posición en la coordenada z_0 del efector final. De igual forma, en las Figuras 3.25 y 3.24 se pueden ver que los errores de la base móvil quedan acotados alrededor del origen cumpliendo siempre con las condiciones de estabilidad que se muestran en la Figura 3.31.

Figura de Lissajous

Considérense las ganancias de control mostradas en la Tabla 3.5.

k_1	k_2	k_3	k_4	k_5	k_{p1}	k_{p2}	k_{p3}	k_{p4}
50	50	200	50	50	70	70	70	70

Tabla 3.5: Figura de Lissajous: Ganancias de control

Se usan las condiciones iniciales

$$\mathbf{q}(0) = \begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \\ \theta(0) \\ \phi_1(0) \\ \phi_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.9 \text{ [m]} \\ 3 \text{ [m]} \\ 0.4435 \text{ [rad]} \\ 2.2489 \text{ [rad]} \\ -2.2489 \text{ [rad]} \end{bmatrix}, \quad \dot{\mathbf{q}}(0) = \begin{bmatrix} \dot{x}(0) \\ \dot{y}(0) \\ \dot{\theta}(0) \\ \dot{\phi}_1(0) \\ \dot{\phi}_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.9 \text{ [m/s]} \\ 1.4 \text{ [m/s]} \\ 0.0988 \text{ [rad/s]} \\ -0.0915 \text{ [rad/s]} \\ 0.0917 \text{ [rad/s]} \end{bmatrix}$$

Esto representa un punto inicial para el efector final de

$$[x_{ef}(0) \ y_{ef}(0) \ z_{ef}(0)]^T = [2.0166 \ 3.0554 \ 0.3765]^T$$

Así, se tiene una velocidad lineal inicial del móvil $v(0) = \sqrt{\dot{x}(0)^2 + \dot{y}(0)^2} = 2.3601$ m/s.

Con lo cual, se obtienen las gráficas de desempeño.

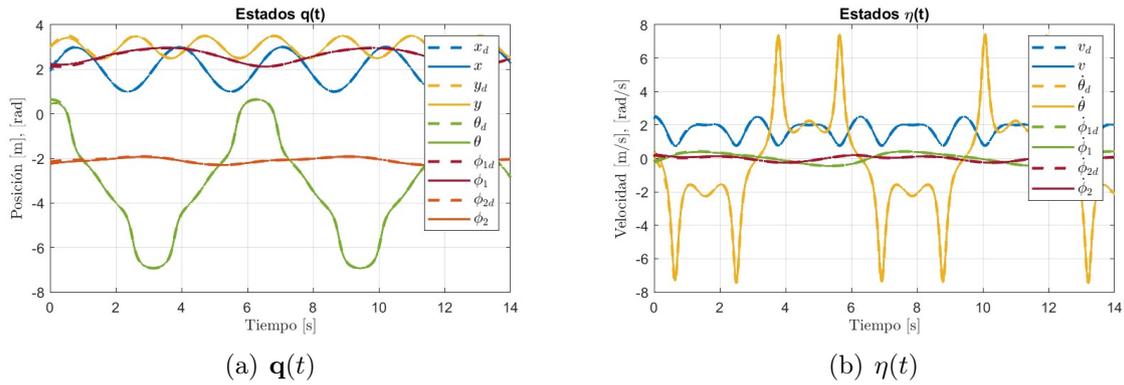


Figura 3.32: Estados.

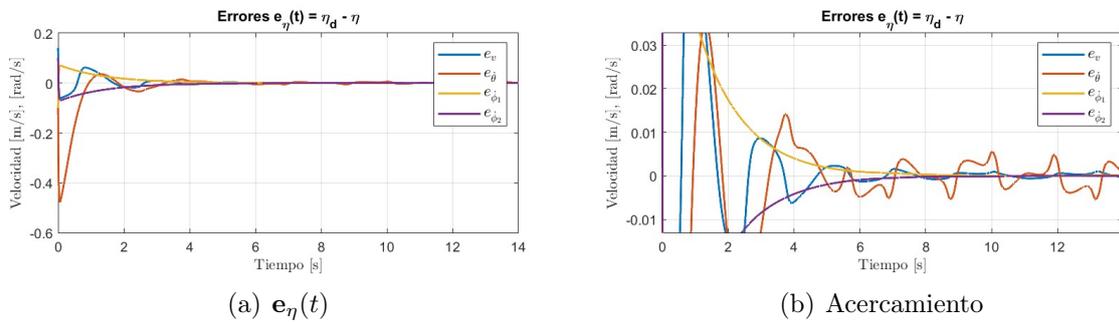


Figura 3.33: Errores en $\boldsymbol{\eta}(t) = [v \ \dot{\theta} \ \dot{\phi}_1 \ \dot{\phi}_2]^T$.

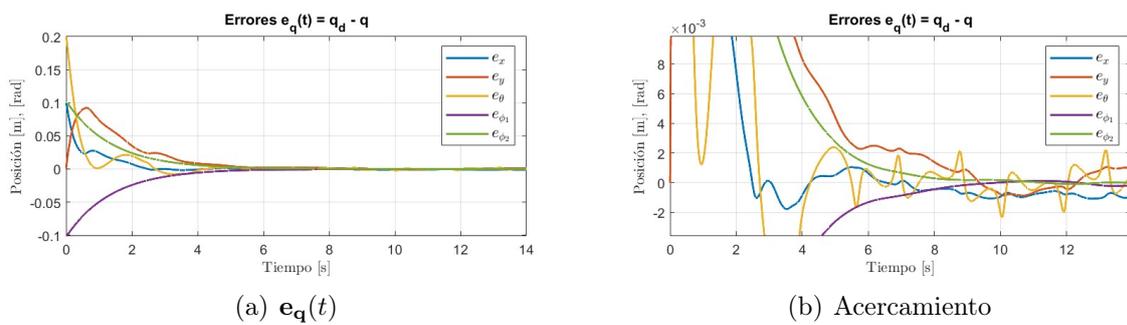


Figura 3.34: Errores en $\mathbf{q}(t) = [x \ y \ \theta \ \phi_1 \ \phi_2]^T$.

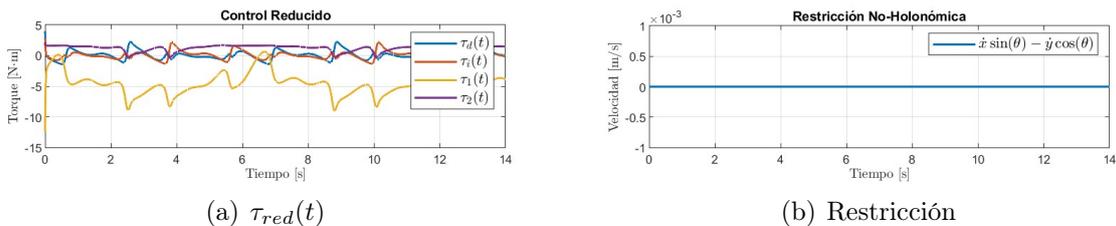


Figura 3.35: Control y restricción no holonómica.

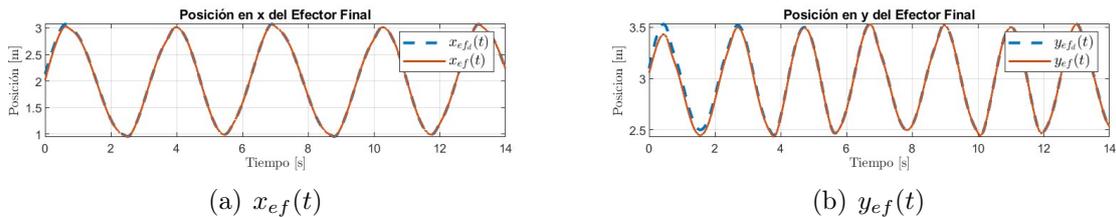


Figura 3.36: Posiciones en x_0 e y_0 del efector final.

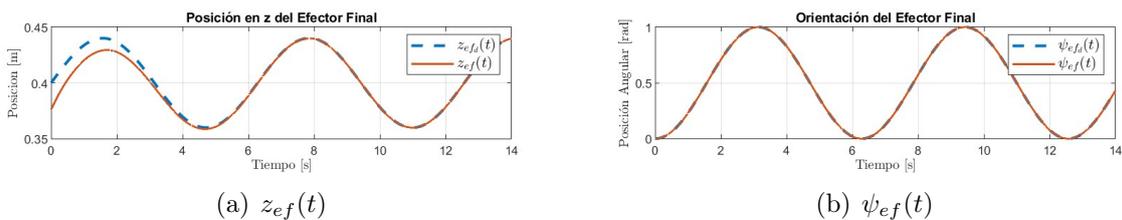


Figura 3.37: Coordenada en z_0 y orientación del efector final.

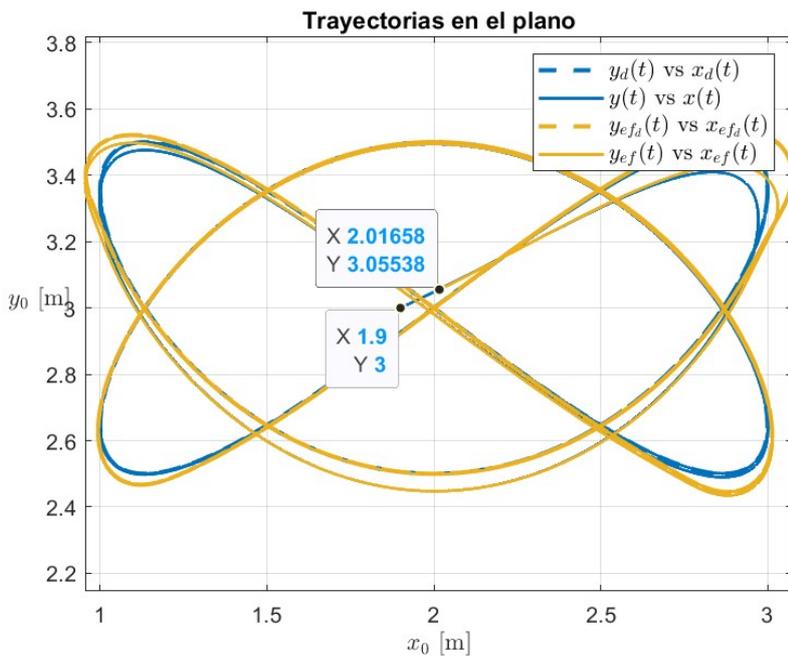


Figura 3.38: Trayectorias en el plano.

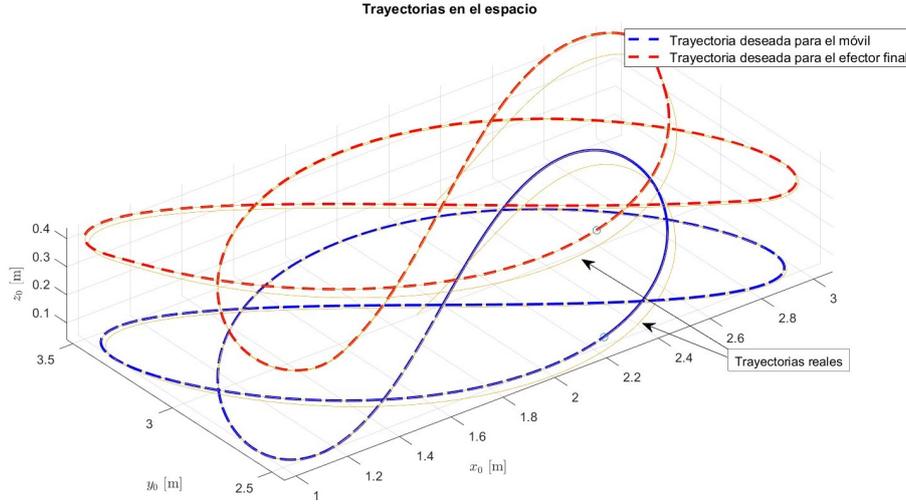
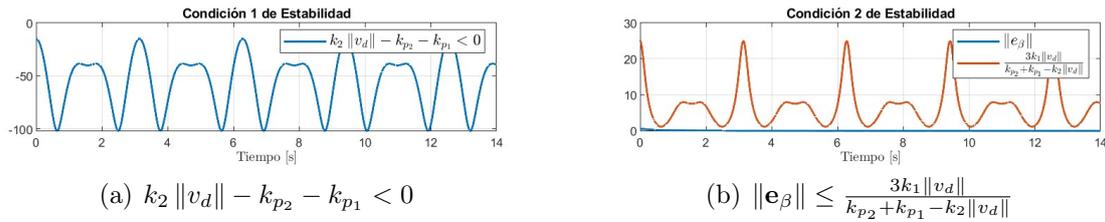


Figura 3.39: Trayectorias en el espacio.



(a) $k_2 \|v_d\| - k_{p2} - k_{p1} < 0$

(b) $\|e_\beta\| \leq \frac{3k_1 \|v_d\|}{k_{p2} + k_{p1} - k_2 \|v_d\|}$

Figura 3.40: Condiciones de estabilidad.

Ésta simulación resulta ser la más desafiante para el controlador, puesto que tanto la trayectoria del móvil como la del efector final (en posición y orientación) son funciones variantes en el tiempo, de esta forma, se explota la dinámica del sistema. Aún así, vea en las Figuras 3.39 y 3.38 la convergencia de las trayectorias en el espacio y en el plano respectivamente. En las Figuras 3.34 y 3.33 se muestran los errores acotados de la base móvil en posición y velocidad, siempre cumpliendo con las condiciones de estabilidad, que se muestran en 3.40.

3.4. Simulaciones: KUKA youBot

En esta sección se presenta una simulación que resulta relevante al compararlo con la versión experimental que se muestra en el capítulo 6, usando el modelo del KUKA youBot, vea el Apéndice A.2.

3.4.1. Trayectoria: circunferencia

Se considera una trayectoria paramétrica circular con centro en $(x_c, y_c) = (-1, 0)$ y radio $r_d = 1$, tal que la velocidad inicial y final del móvil son cero.

Aunque ya se dijo que la velocidad longitudinal deseada no puede ser cero, puesto que la velocidad angular deseada de la base móvil se indetermina, vea la ecuación (3.6); esto

se puede arreglar, de manera artificiosa, mediante programación, haciendo $\theta_d = 0$ cuando $v_d = 0$. Así,

$$\begin{cases} \delta(t) &= \frac{2\pi}{t_f}t - \sin\left(\frac{2\pi}{t_f}t\right) \\ x_d(t) &= x_c + r_d \cos(\delta(t)) \\ y_d(t) &= y_c + r_d \sin(\delta(t)) \\ \theta_d(t) &= \tan^{-1}\left(\frac{\dot{y}_d(t)}{\dot{x}_d(t)}\right) \end{cases}$$

Para el efector final se tiene una circunferencia con el mismo centro, pero con un radio $r_{ef} = 1.3$.

$$\begin{cases} \delta_{ef}(t) &= \delta(t) + \sin^{-1}\left(\frac{L_x}{r_{ef}}\right) \\ x_{efd}(t) &= x_c + r_{ef} \cos(\delta_{ef}(t)) \\ y_{efd}(t) &= y_c + r_{ef} \sin(\delta_{ef}(t)) \\ z_{efd}(t) &= 0.46 \end{cases}$$

Las orientaciones del efector final se definen como sigue

$$\psi_{efd}(t) = \frac{\pi}{2}, \quad \zeta_{efd}(t) = \theta_d - \frac{\pi}{2}$$

3.4.2. Respuesta del sistema

Considérense las ganancias de control mostradas en la Tabla 3.6.

k_1	k_2	k_3	k_4	k_5	k_6	k_7	k_8	k_{p1}	k_{p2}	k_{p3}	k_{p4}	k_{p5}	k_{p6}	k_{p7}
700	555	300	1000	1000	2000	2500	100	400	720	350	350	350	350	350

Tabla 3.6: KUKA youBot: Ganancias de control.

También se consideran los parámetros físicos mostrados en la Tabla 3.7.

Parámetro	Valor	Parámetro	Valor	Parámetro	Valor
m_m [kg]	19.803	L_{c_b} [m]	0.036	I_{2zz} [kg · m ²]	0.0031631
m_b [kg]	0.961	L_{c_1} [m]	0.058	I_{3xx} [kg · m ²]	0.00041967
m_1 [kg]	1.390	L_{c_2} [m]	0.11397	I_{3yy} [kg · m ²]	0.00172767
m_2 [kg]	1.318	L_{c_3} [m]	0.104	I_{3zz} [kg · m ²]	0.0018468
m_3 [kg]	0.821	L_{c_4} [m]	0.053	I_{4xx} [kg · m ²]	0.0006610
m_4 [kg]	0.769	L_{c_5} [m]	0.016	I_{4yy} [kg · m ²]	0.0006764
m_5 [kg]	0.906	r_b [m]	0.033	I_{4zz} [kg · m ²]	0.0010573
h_b [m]	0.030	r_c [m]	0.0255	I_{5xx} [kg · m ²]	0.0005563
h_c [m]	0.110	L_x [m]	0.151	I_{5yy} [kg · m ²]	0.0003926
R [m]	0.050	I_{mxx} [kg · m ²]	0.2657	I_{5zz} [kg · m ²]	0.0002756
p_x [m]	0	I_{myy} [kg · m ²]	0.5875	b_x [N s/m]	0.8
p_y [m]	0	I_{mzz} [kg · m ²]	0.5875	b_y [N s/m]	0.8
p_z [m]	-0.001	I_{bxx} [kg · m ²]	0.00041515	b_θ [N s/m]	0.7
L [m]	0.150	I_{byy} [kg · m ²]	0.003553778	b_{ϕ_1} [N s/m]	0.5
L_b [m]	0.072	I_{bzz} [kg · m ²]	0.00041515	b_{ϕ_2} [N s/m]	0.5
L_1 [m]	0.075	I_{1xx} [kg · m ²]	0.0058821	b_{ϕ_3} [N s/m]	0.5
L_2 [m]	0.155	I_{1yy} [kg · m ²]	0.0029525	b_{ϕ_4} [N s/m]	0.5
L_3 [m]	0.135	I_{1zz} [kg · m ²]	0.0060091	b_{ϕ_5} [N s/m]	0.5
L_4 [m]	0.081	I_{2xx} [kg · m ²]	0.0005843		
L_5 [m]	0.137	I_{2yy} [kg · m ²]	0.0031145		

Tabla 3.7: Parámetros para el modelo KUKA youBot

Las condiciones iniciales son

$$\mathbf{q}(0) = \begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \\ \theta(0) \\ \phi_1(0) \\ \phi_2(0) \\ \phi_3(0) \\ \phi_4(0) \\ \phi_5(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \text{ [m]} \\ 0 \text{ [m]} \\ \frac{\pi}{2} \text{ [rad]} \\ 0 \text{ [rad]} \end{bmatrix}, \quad \eta(0) = \begin{bmatrix} v(0) \\ \dot{\theta}(0) \\ \dot{\phi}_1(0) \\ \dot{\phi}_2(0) \\ \dot{\phi}_3(0) \\ \dot{\phi}_4(0) \\ \dot{\phi}_5(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \text{ [m/s]} \\ 0 \text{ [rad/s]} \end{bmatrix}$$

Así, la respuesta del sistema es la siguiente

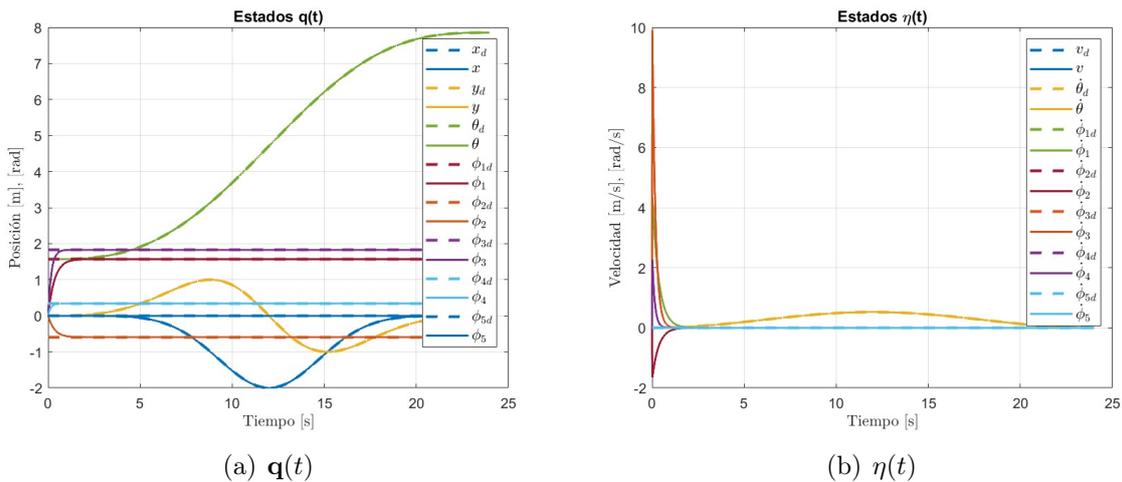


Figura 3.41: Estados del sistema

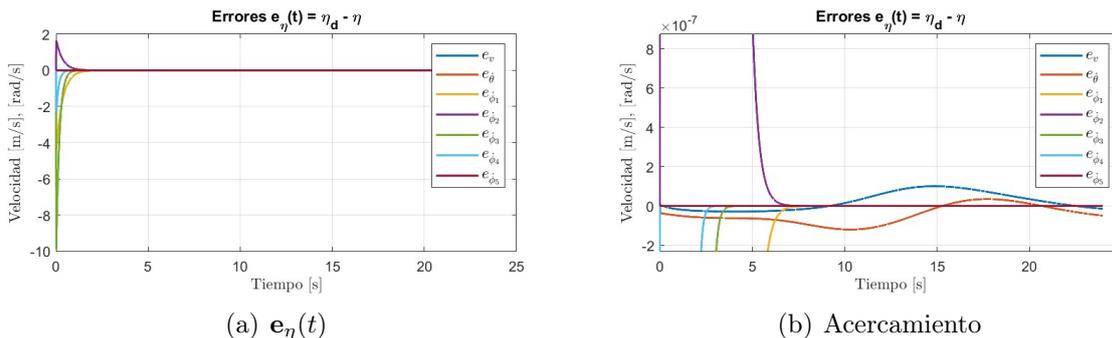


Figura 3.42: Errores en $\boldsymbol{\eta}(t) = [v \ \dot{\theta} \ \dot{\phi}_1 \ \dot{\phi}_2 \ \dot{\phi}_3 \ \dot{\phi}_4 \ \dot{\phi}_5]^T$

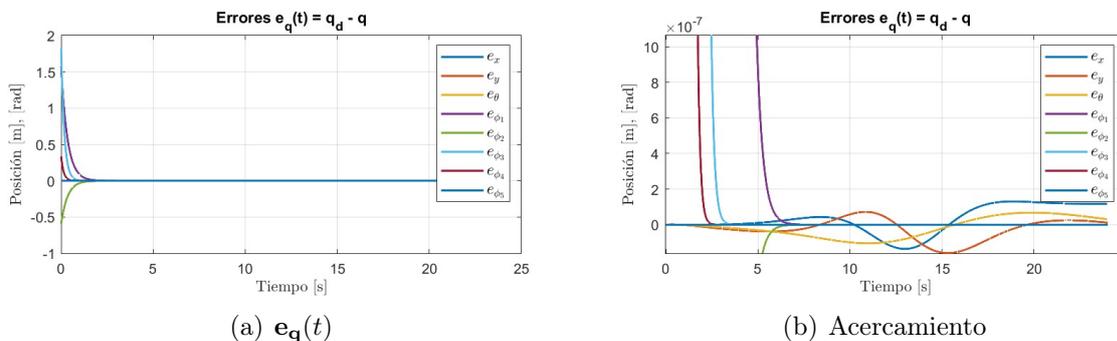


Figura 3.43: Errores en $\mathbf{q}(t) = [x \ y \ \theta \ \phi_1 \ \phi_2 \ \phi_3 \ \phi_4 \ \phi_5]^T$

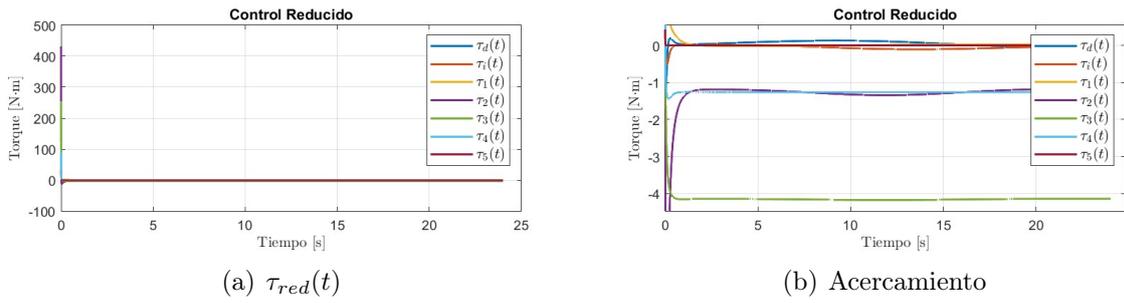


Figura 3.44: Control

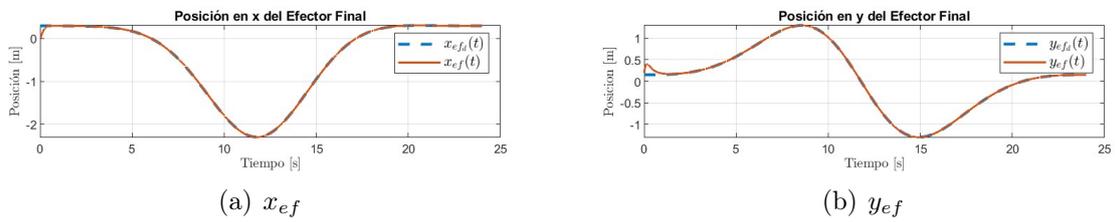


Figura 3.45: Coordenadas en x_0 e y_0 del efector final

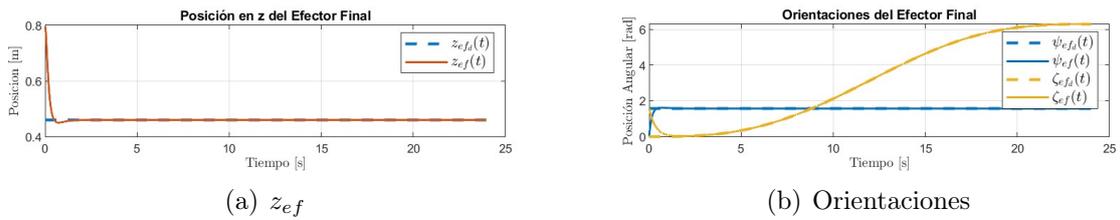


Figura 3.46: Coordenada en z_0 y orientaciones del efector final



Figura 3.47: Restricción no holonómica

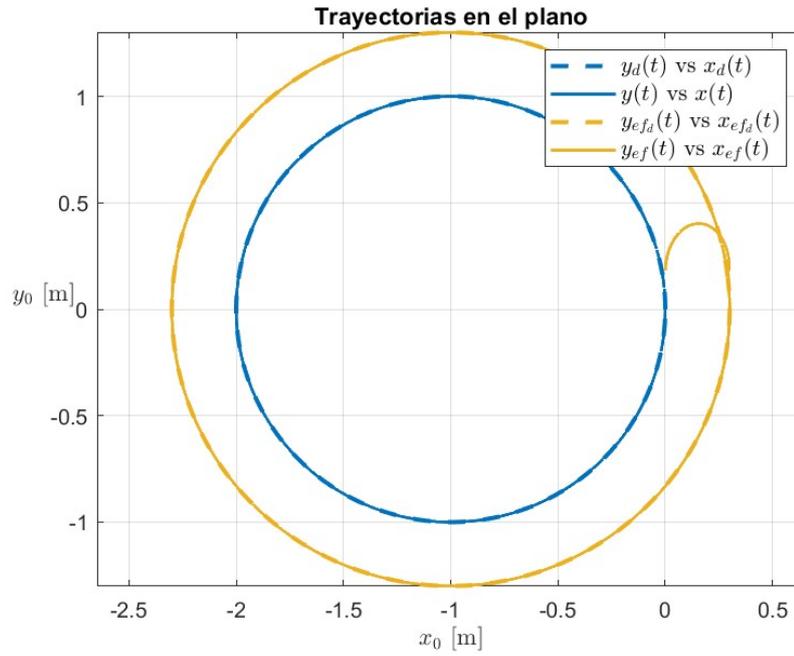


Figura 3.48: Trayectorias en el plano

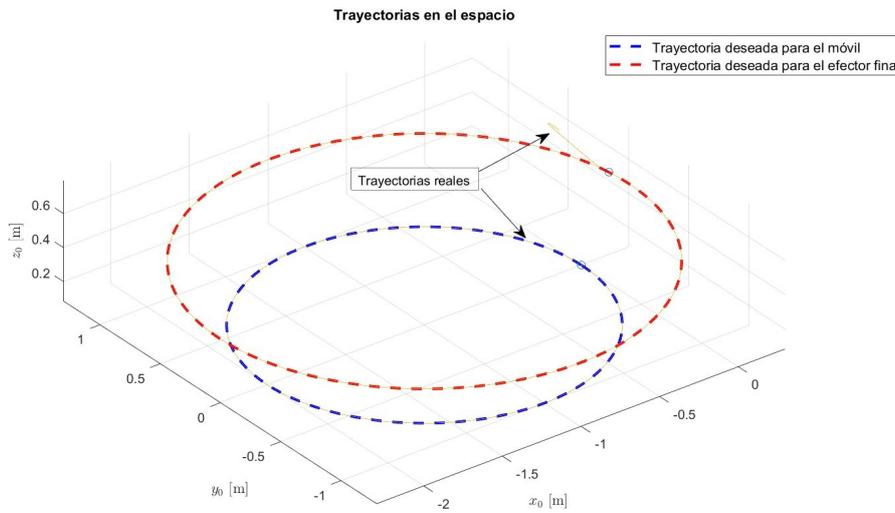
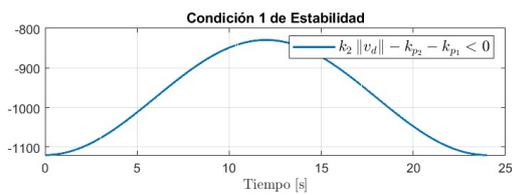


Figura 3.49: Trayectorias en el espacio



(a) $k_2 \|v_d\| - k_{p2} - k_{p1} < 0$



(b) $\|e_\beta\| \leq \frac{3k_1 \|v_d\|}{k_{p2} + k_{p1} - k_2 \|v_d\|}$

Figura 3.50: Condiciones de estabilidad

En este capítulo se diseñó una ley de control (partiendo de un controlador por par calculado) que asegura estabilidad semiglobal y *UUB* de los errores de posición, y no sólo de velocidad para la base móvil, y estabilidad asintótica para las variables del manipulador. Se presentaron simulaciones con trayectorias paramétricas cada vez mas demandantes (dinámicamente) para el controlador, que son congruentes con los resultados teóricos obtenidos del análisis de estabilidad.

En el siguiente capítulo se consideran dos robots RMM (2,0,2) y se pretende extender la ley de control (3.9) a la parte de sincronización, de tal forma que sean capaces de mantener una formación y se mejore el comportamiento dinámico general de ambos robots.

Capítulo 4

Sincronización

En este capítulo se estudia la noción de sincronización para un sistema de robots manipuladores móviles considerando dos RMM (2,0,2), de tal forma que, lo que se desea, es mantener una relación cinemática entre los robots mientras siguen una trayectoria dada, incluso ante perturbaciones; esto es, que si alguno de los robots es expulsado de la trayectoria deseada, ambos deben ser capaces de mantener la formación y regresar a la trayectoria de forma sincronizada.

Pensando en términos de manipulación cooperativa, esto es deseable puesto que el objetivo es asegurar un agarre sobre un objeto con los efectores finales de los robots.

Uno de las configuraciones para lograr la sincronización entre robots es el esquema maestro-esclavo, en donde las trayectorias de un robot B (esclavo) dependen directamente de las trayectorias de otro robot A (maestro). Este esquema se estudia de forma minuciosa, se analizan las desventajas que presenta y se da una solución mediante la adición de acoplamientos —estáticos. Ambos esquemas se comparan de forma cuantitativa, mediante un criterio de desempeño, y finalmente, se presentan los resultados extrapolando la parte de sincronización al modelo del KUKA youBot pensando ya en la tarea de la manipulación cooperativa.

4.1. Esquema maestro-esclavo

Considérense dos RMM, el robot A juega el rol de robot maestro y el robot B el del esclavo. Sea $\sigma_A(t)$ un vector de trayectorias ejecutadas por el robot A. El robot B toma como trayectorias deseadas una función de las trayectorias realizadas por el robot A, es decir, $\sigma_{d,B}(t) = f(\sigma_A(t))$, vea la Figura 4.1.

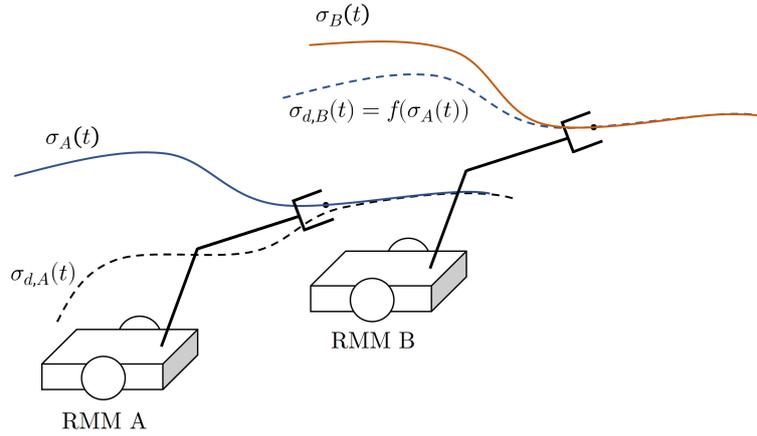


Figura 4.1: Sincronización en configuración maestro-esclavo.

Se definen

$$\sigma_A(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_A \\ \eta_A \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

$$\sigma_{d,B}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_{d,B} \\ \eta_{d,B} \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

Donde

$$\mathbf{q}_A = \begin{bmatrix} x_A \\ y_A \\ \theta_A \\ \phi_{1,A} \\ \phi_{2,A} \end{bmatrix}, \quad \eta_A = \begin{bmatrix} v_A \\ \dot{\theta}_A \\ \dot{\phi}_{1,A} \\ \dot{\phi}_{2,A} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}_{d,B} = \begin{bmatrix} x_{d,B} \\ y_{d,B} \\ \theta_{d,B} \\ \phi_{1d,B} \\ \phi_{2d,B} \end{bmatrix}, \quad \eta_{d,B} = \begin{bmatrix} v_{d,B} \\ \dot{\theta}_{d,B} \\ \dot{\phi}_{1d,B} \\ \dot{\phi}_{2d,B} \end{bmatrix}$$

4.1.1. Simulación: circunferencia

Considere la planeación de trayectoria usada en la sección 3.3.1 para la parte de la circunferencia, y re-definiendo: El robot A sigue una trayectoria circular con centro en $(x_{c,A}, y_{c,A}) = (2, 3)$ y radio $r_{d,A} = 1.5$ en el plano. Así, se define el centro para la circunferencia del robot B como $(x_{c,B}, y_{c,B}) = (2, 3)$ con radio $r_{d,B} = 2.5$. De tal forma que las trayectorias deseadas para el robot B son

$$\begin{aligned}
x_{d,B} &= x_{c,B} + \frac{r_{d,B}}{r_{d,A}} (x_A - x_{c,A}) \\
y_{d,B} &= y_{c,B} + \frac{r_{d,B}}{r_{d,A}} (y_A - y_{c,A}) \\
\theta_{d,B} &= \theta_A \\
\phi_{1d,B} &= \phi_{1,A} \\
\phi_{2d,B} &= \phi_{2,A} \\
v_{d,B} &= \frac{r_{d,B}}{r_{d,A}} v_A \\
\dot{\theta}_{d,B} &= \dot{\theta}_A \\
\dot{\phi}_{1d,B} &= \dot{\phi}_{1,A} \\
\dot{\phi}_{2d,B} &= \dot{\phi}_{2,A}
\end{aligned}$$

Esto es, de forma matricial:

$$\begin{aligned}
\mathbf{q}_{d,B} &= \begin{bmatrix} \frac{r_{d,B}}{r_{d,A}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{r_{d,B}}{r_{d,A}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} x_A \\ y_A \\ \theta_A \\ \phi_{1,A} \\ \phi_{2,A} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_{c,A} \\ y_{c,A} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} x_{c,B} \\ y_{c,B} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
\eta_{d,B} &= \begin{bmatrix} \frac{r_{d,B}}{r_{d,A}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_A \\ \dot{\theta}_A \\ \dot{\phi}_{1,A} \\ \dot{\phi}_{2,A} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Se usan las condiciones iniciales para el robot A ($\mathbf{q}_A(0), \eta_A(0)$) y el robot B ($\mathbf{q}_B(0), \eta_B(0)$) siguientes:

$$\begin{aligned}
\mathbf{q}_A(0) &= \begin{bmatrix} x_A(0) \\ y_A(0) \\ \theta_A(0) \\ \phi_{1,A}(0) \\ \phi_{2,A}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.6 \text{ [m]} \\ 2.9 \text{ [m]} \\ \frac{\pi}{2} \text{ [rad]} \\ 2.3 \text{ [rad]} \\ -2.3 \text{ [rad]} \end{bmatrix}, \quad \eta_A(0) = \begin{bmatrix} v_A(0) \\ \dot{\theta}_A(0) \\ \dot{\phi}_{1,A}(0) \\ \dot{\phi}_{2,A}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.4 \text{ [m/s]} \\ 0.9 \text{ [rad/s]} \\ 0 \text{ [rad/s]} \\ 0.1 \text{ [rad/s]} \end{bmatrix} \\
\mathbf{q}_B(0) &= \begin{bmatrix} x_B(0) \\ y_B(0) \\ \theta_B(0) \\ \phi_{1,B}(0) \\ \phi_{2,B}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.7 \text{ [m]} \\ 2.9 \text{ [m]} \\ 1.4708 \text{ [rad]} \\ 2.3 \text{ [rad]} \\ -2.3 \text{ [rad]} \end{bmatrix}, \quad \eta_B(0) = \begin{bmatrix} v_B(0) \\ \dot{\theta}_B(0) \\ \dot{\phi}_{1,B}(0) \\ \dot{\phi}_{2,B}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.5 \text{ [m/s]} \\ 0.8 \text{ [rad/s]} \\ 0 \text{ [rad/s]} \\ 0.2 \text{ [rad/s]} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Las ganancias que se usaron para ambos RMM se muestran en la Tabla 4.1.

k_1	k_2	k_3	k_4	k_5	k_{p1}	k_{p2}	k_{p3}	k_{p4}
50	50	200	400	400	50	50	50	50

Tabla 4.1: Ganancias de los controladores

Se presentan los resultados de la simulación numérica para el sistema sin perturbaciones:

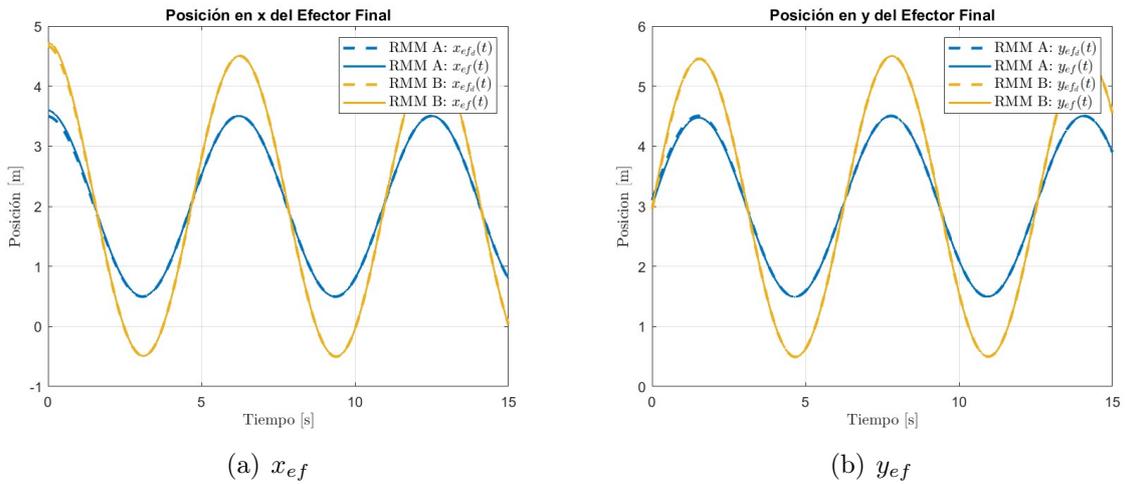


Figura 4.2: Coordenadas en x e y de los efectores finales de ambos robots

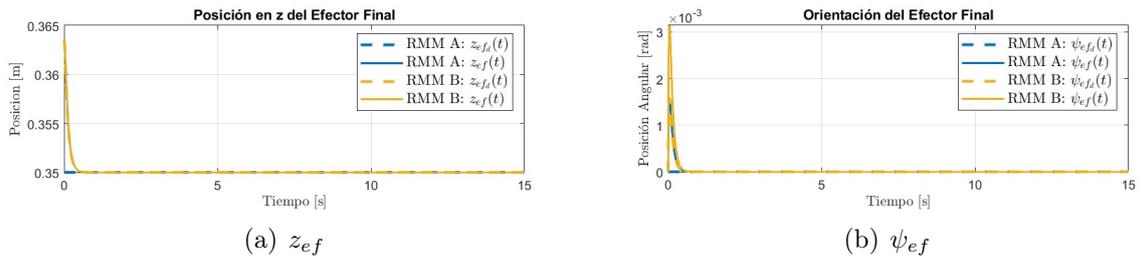


Figura 4.3: Coordenada en z y orientación de los efectores finales de ambos robots

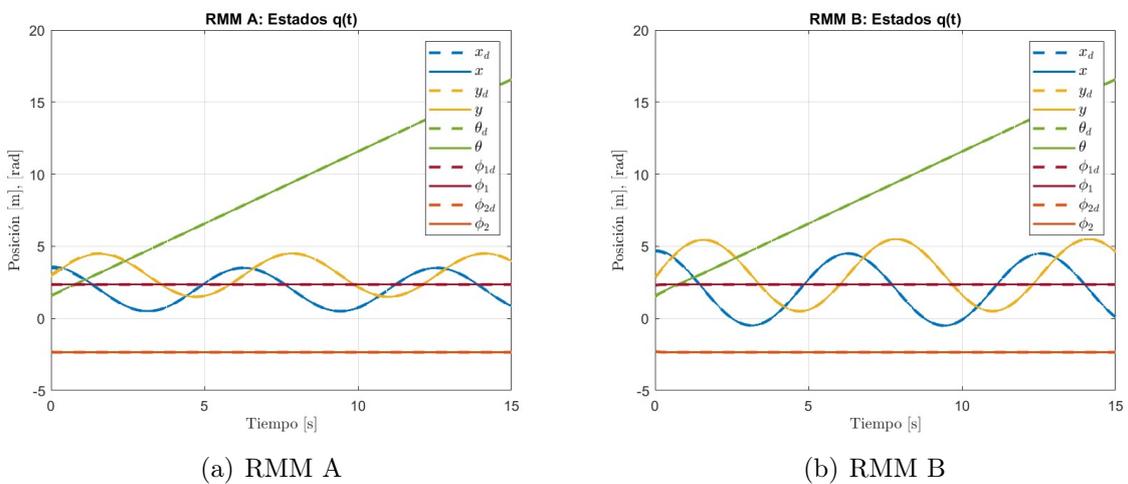
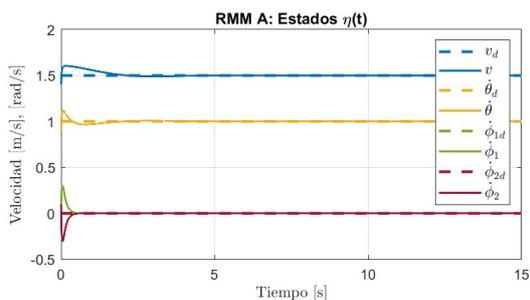
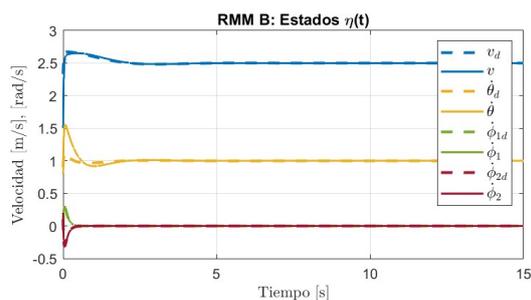


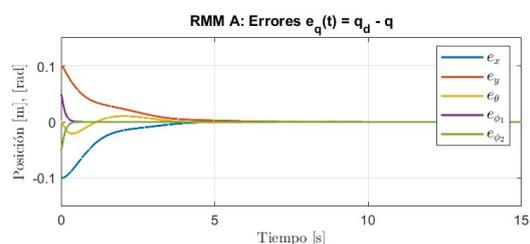
Figura 4.4: Estados $\mathbf{q}(t) = [x \ y \ \theta \ \phi_1 \ \phi_2]^T$



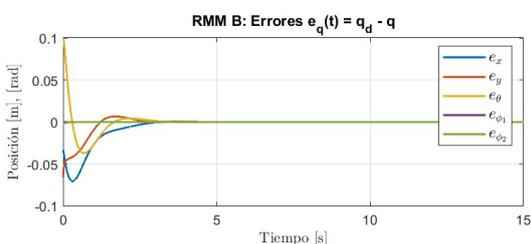
(a) RMM A



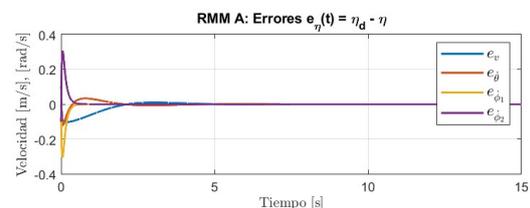
(b) RMM B

Figura 4.5: Estados $\eta(t) = [v \ \dot{\theta} \ \dot{\phi}_1 \ \dot{\phi}_2]^T$ 

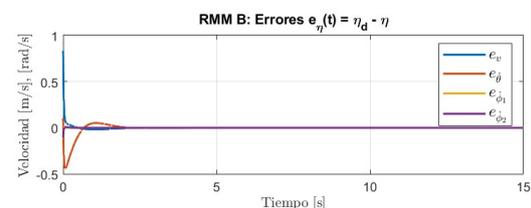
(a) RMM A



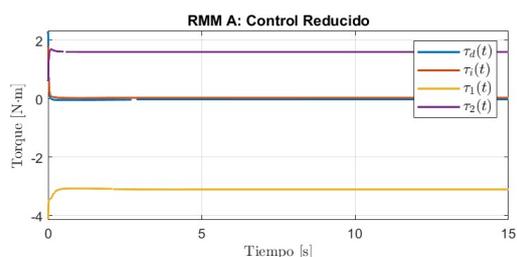
(b) RMM B

Figura 4.6: Errores en $\mathbf{q}(t) = [x \ y \ \theta \ \phi_1 \ \phi_2]^T$ 

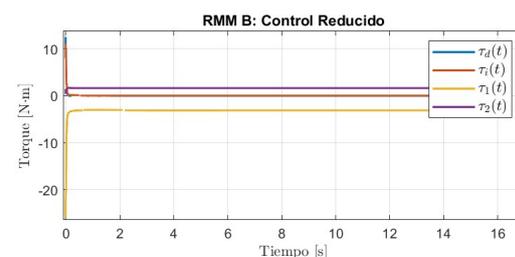
(a) RMM A



(b) RMM B

Figura 4.7: Errores en $\eta(t) = [v \ \dot{\theta} \ \dot{\phi}_1 \ \dot{\phi}_2]^T$ 

(a) RMM A



(b) RMM B

Figura 4.8: Controles reducidos de ambos robots

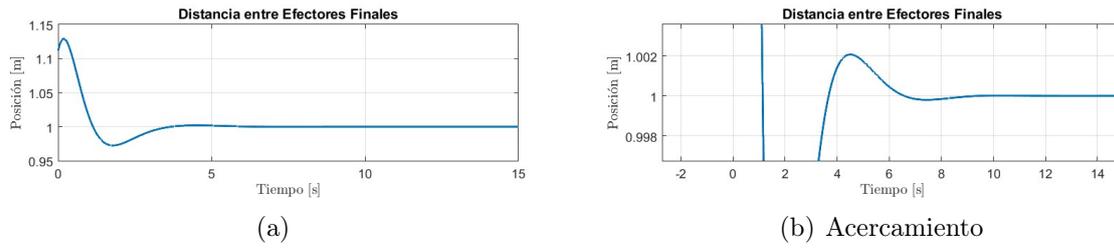


Figura 4.9: Distancia entre efectores finales

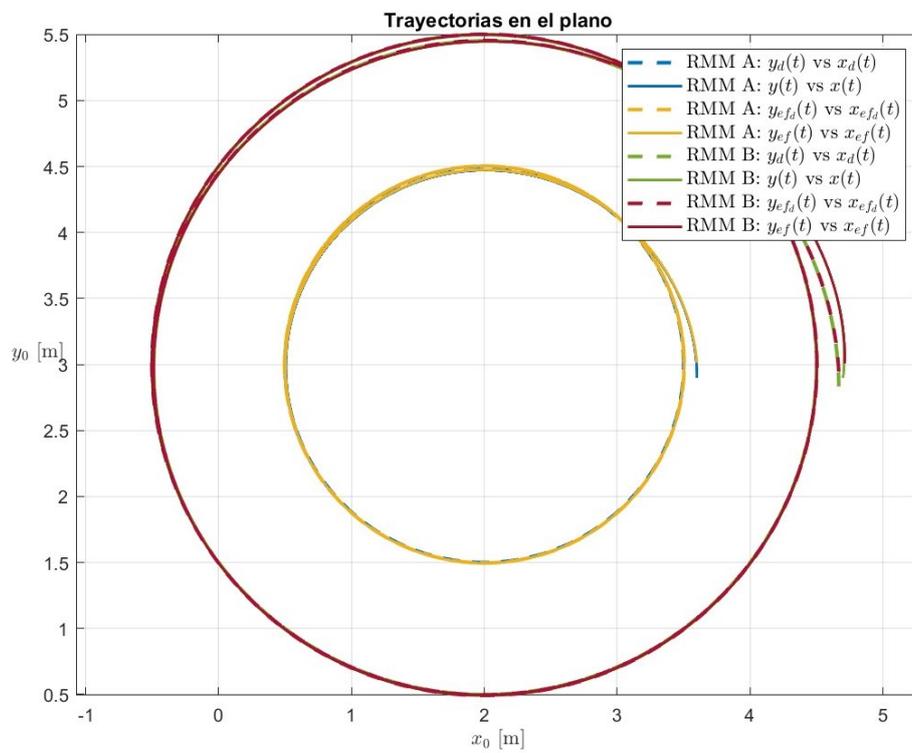


Figura 4.10: Trayectorias en el plano

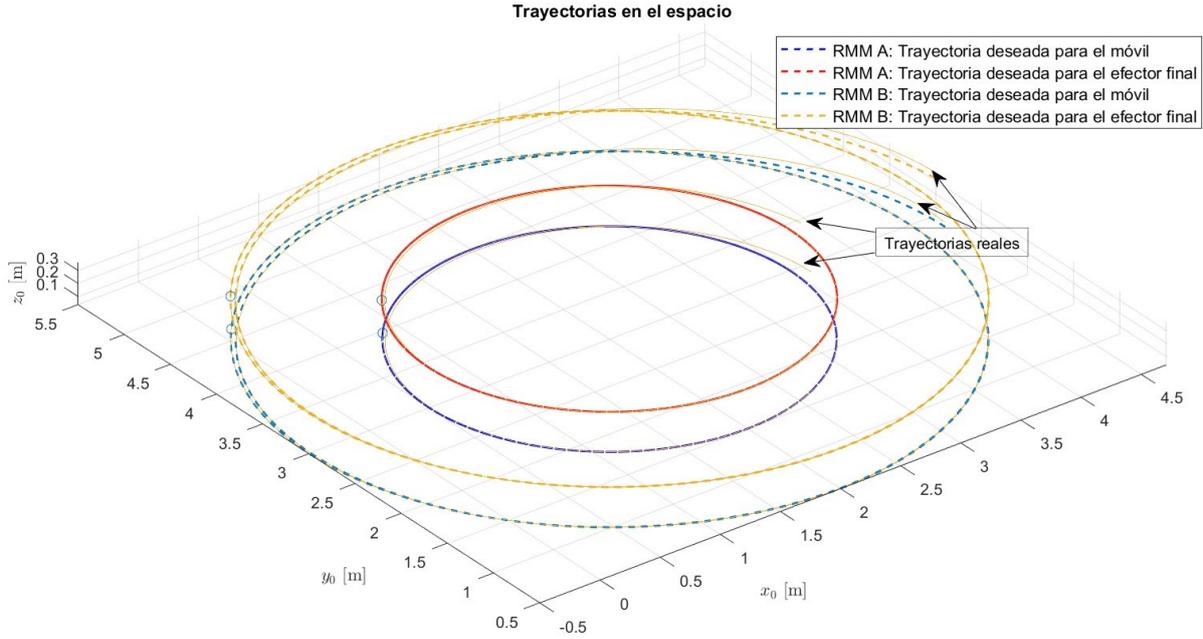
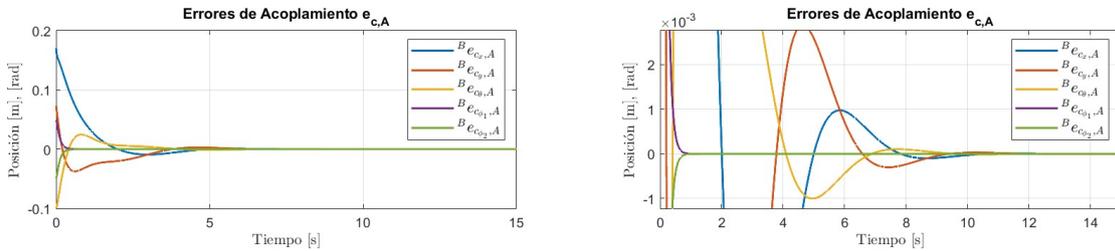


Figura 4.11: Trayectorias en el espacio de ambos robots

Aunque en esta configuración no se utilizan, es posible evaluar los errores de acoplamiento definidos en la ecuación (4.4) con fines ilustrativos; además, servirán mas adelante para hacer un cálculo cuantitativo del desempeño de control en esta configuración.



(a) $\mathbf{e}_{c,A} = [{}^B e_{c_x,A} \quad {}^B e_{c_y,A} \quad {}^B e_{c_\theta,A} \quad {}^B e_{c_{\phi_1},A} \quad {}^B e_{c_{\phi_2},A}]^T = -\mathbf{e}_{c,B}$ (b) Acercamiento

Figura 4.12: Errores de acoplamiento

El problema de la configuración maestro-esclavo es que se tiene un flujo de información unidireccional: el robot esclavo (RMM B) toma la información del robot maestro (RMM A) para la generación de su trayectoria, pero no existe retroalimentación al robot maestro. Esto puede desencadenar inconvenientes bajo la aparición de obstáculos o perturbaciones sobre el robot esclavo, la sincronización se perdería debido a que el robot maestro no tiene forma de saber lo que pasa con el robot esclavo.

4.1.2. Adición de perturbaciones

La perturbación que se pretende incorporar se fundamenta con el objetivo de sacar al RMM B lo suficiente de su trayectoria para ver el desempeño de los controles. Se

consideran las perturbaciones de la ecuación (4.3) sobre el estado η del robot B que inicia en un tiempo $T_i = 8$ seg. y finaliza en $T_f = 9$ seg., vea la Figura 4.13.

$$\xi_{\eta,B}(t) = \begin{bmatrix} \xi_v \\ \xi_{\dot{\theta}} \\ \xi_{\dot{\phi}_1} \\ \xi_{\dot{\phi}_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3e^{-\frac{\left(t - \frac{(T_i+T_f)}{2}\right)^2}{2(0.1)^2}} \\ 2 \\ 1 \\ -0.5 \end{bmatrix}, \quad T_i \leq t \leq T_f \quad (4.3)$$

Note que la perturbación sobre la velocidad lineal del móvil ξ_v es una función gaussiana, cuya integral es un valor constante (similar a lo que ocurre con una función delta de Dirac); es decir, a nivel de posición se tiene un escalón. Por esta razón, se puede interpretar como un impulso repentino y súbito sobre el móvil.

El resto de perturbaciones sobre las velocidades angulares se definen como escalones, cuya representación a nivel de posición es una rampa. De tal forma que se pueden interpretar como un cambio continuo sobre las posiciones angulares a velocidad constante.

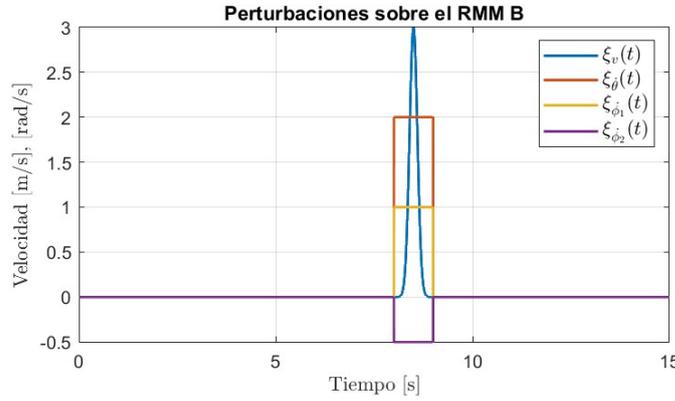


Figura 4.13: Perturbaciones $\xi_{\eta,B}(t)$.

Con esto, se obtiene la respuesta de los robots.

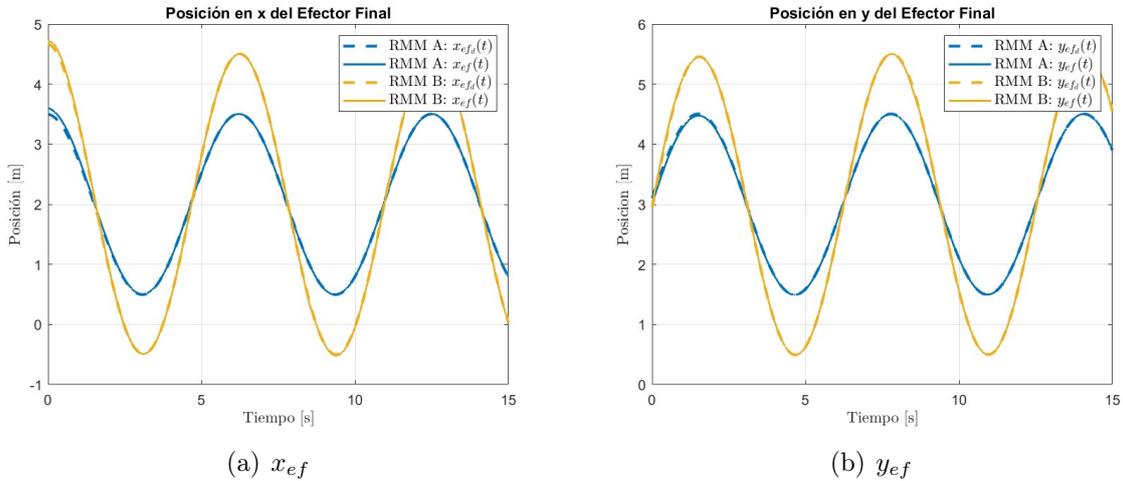


Figura 4.14: Coordenadas en x e y de los efectores finales de ambos robots con perturbación sobre el RMM B

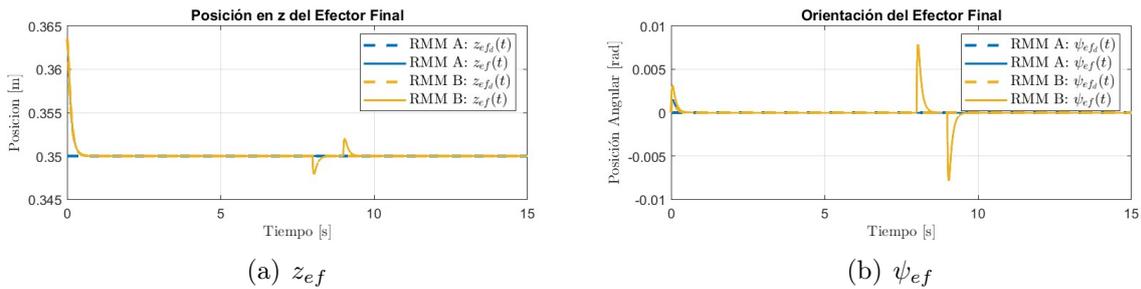


Figura 4.15: Coordenada en z y orientación de los efectores finales de ambos robots con perturbación sobre el RMM B

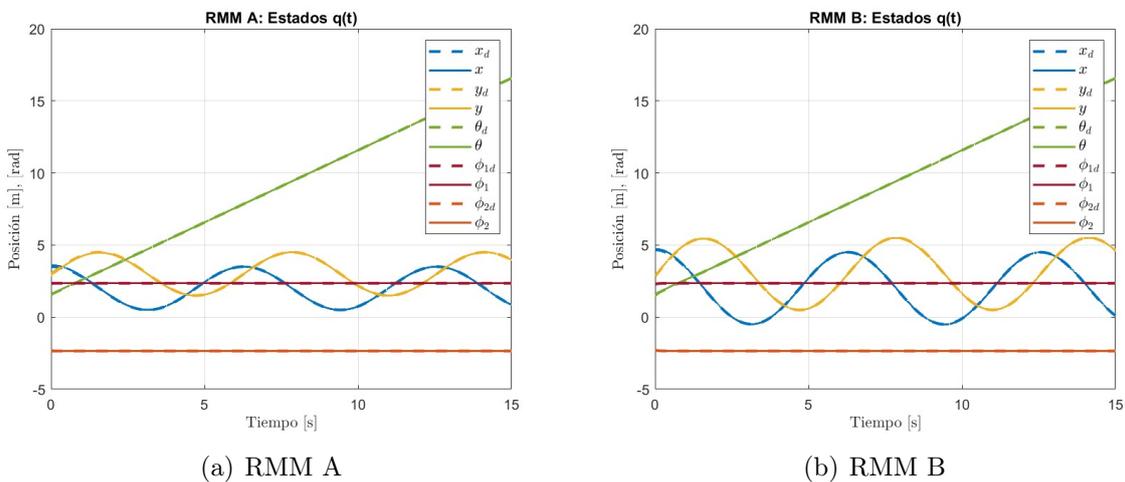


Figura 4.16: Estados $\mathbf{q}(t) = [x \ y \ \theta \ \phi_1 \ \phi_2]^T$ del sistema perturbado

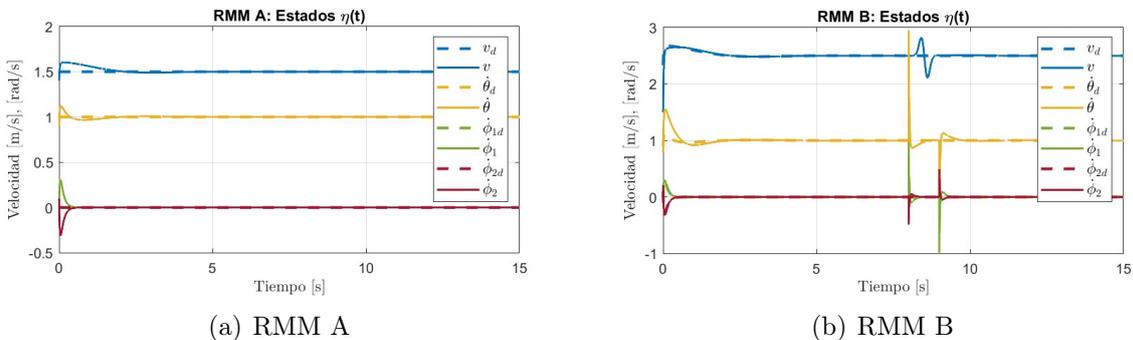


Figura 4.17: Estados $\boldsymbol{\eta}(t) = [v \ \dot{\theta} \ \dot{\phi}_1 \ \dot{\phi}_2]^T$ del sistema perturbado

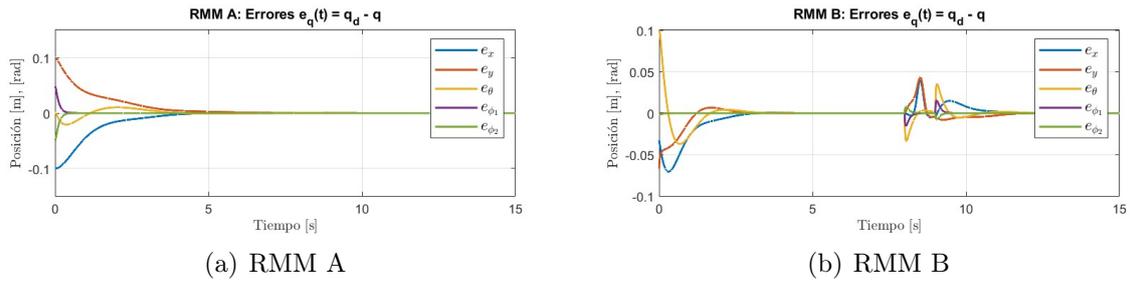


Figura 4.18: Errores en $\mathbf{q}(t) = [x \ y \ \theta \ \phi_1 \ \phi_2]^T$ del sistema perturbado

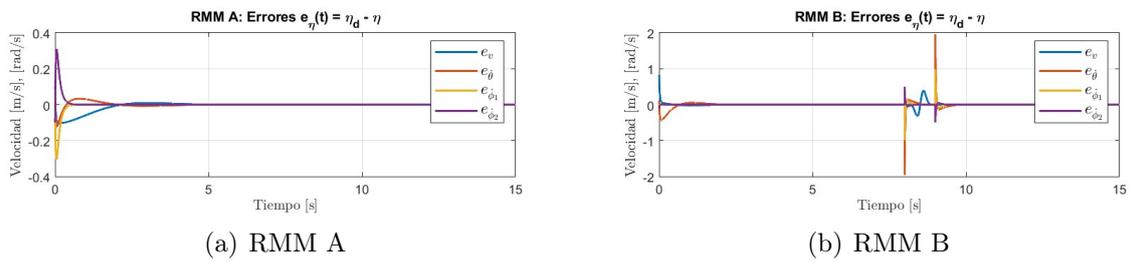


Figura 4.19: Errores en $\eta(t) = [v \ \dot{\theta} \ \dot{\phi}_1 \ \dot{\phi}_2]^T$ del sistema perturbado.

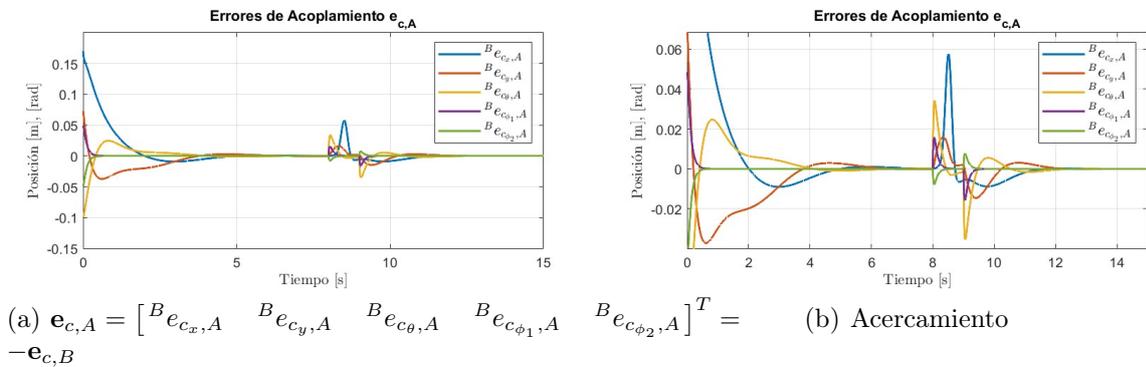


Figura 4.20: Errores de acoplamiento del sistema perturbado

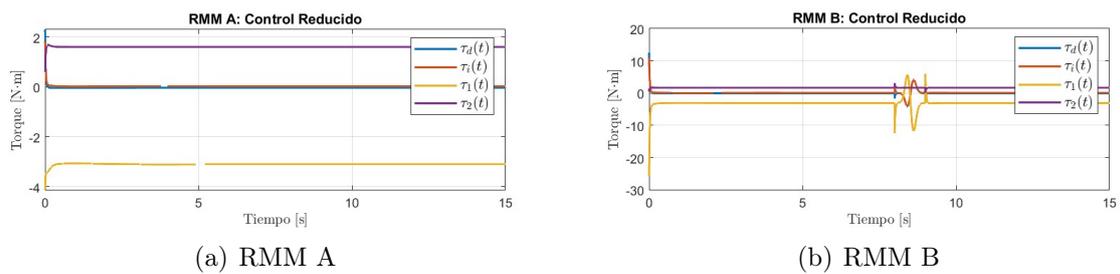


Figura 4.21: Control reducido de ambos robots con perturbación sobre el RMM B

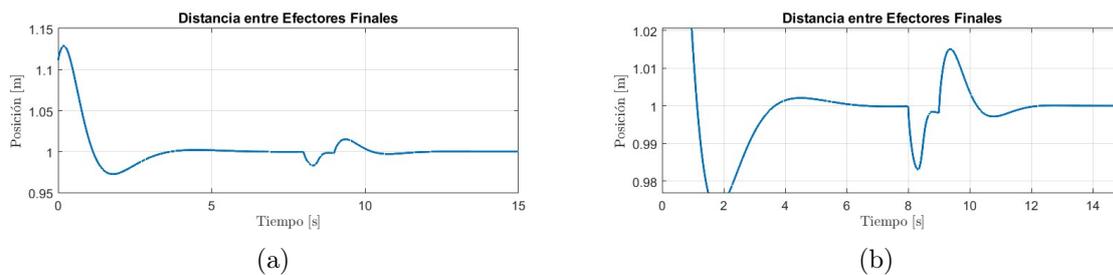


Figura 4.22: Distancia entre efectores finales del sistema perturbado.

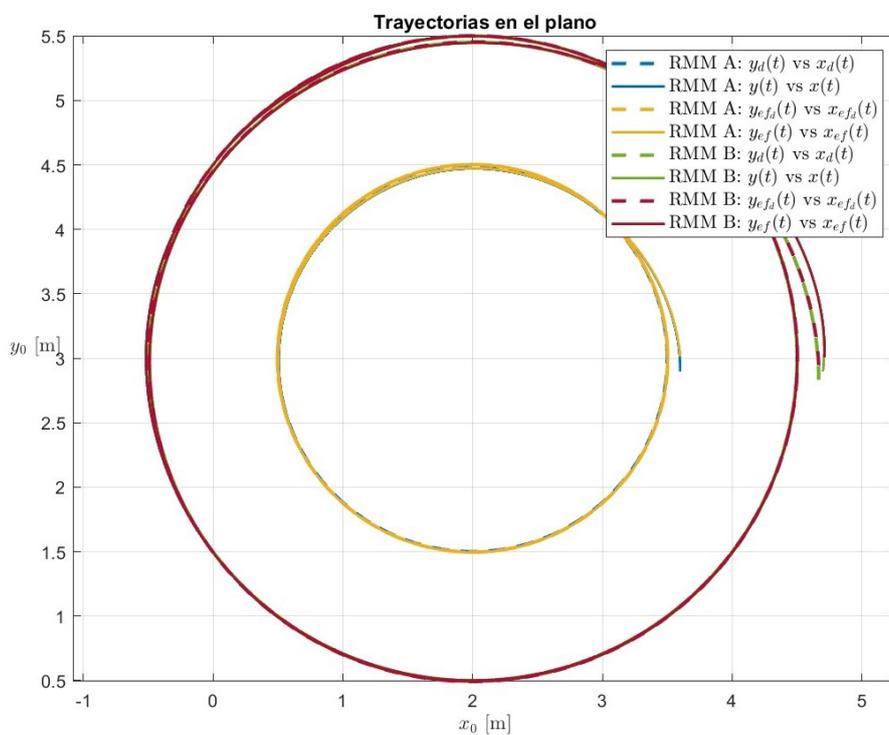


Figura 4.23: Trayectorias en el plano del sistema perturbado

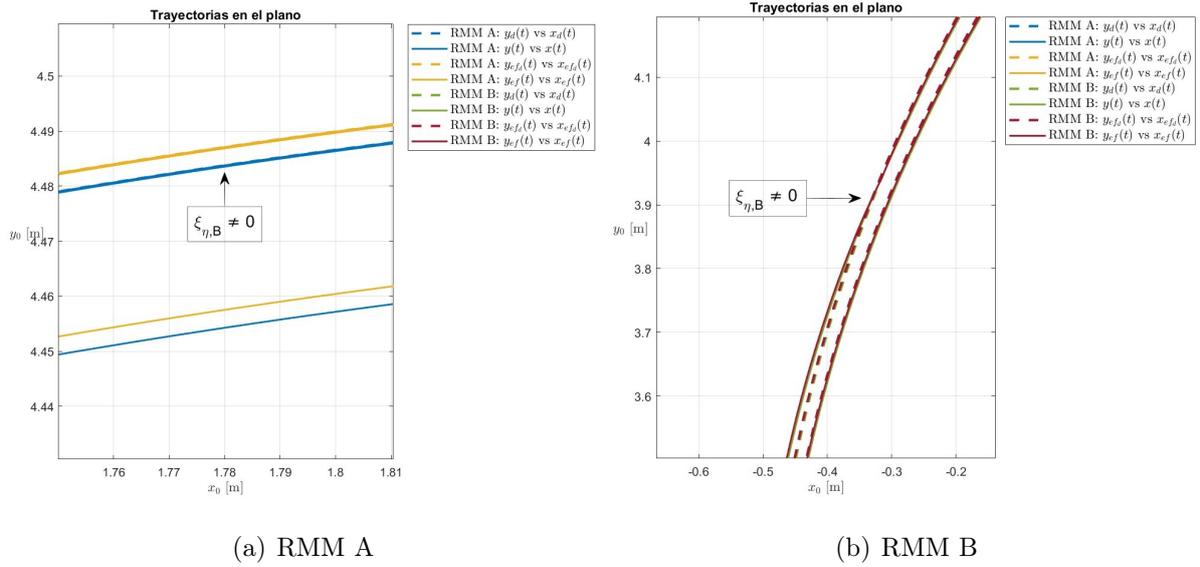


Figura 4.24: Acercamiento a trayectorias perturbadas sobre el plano

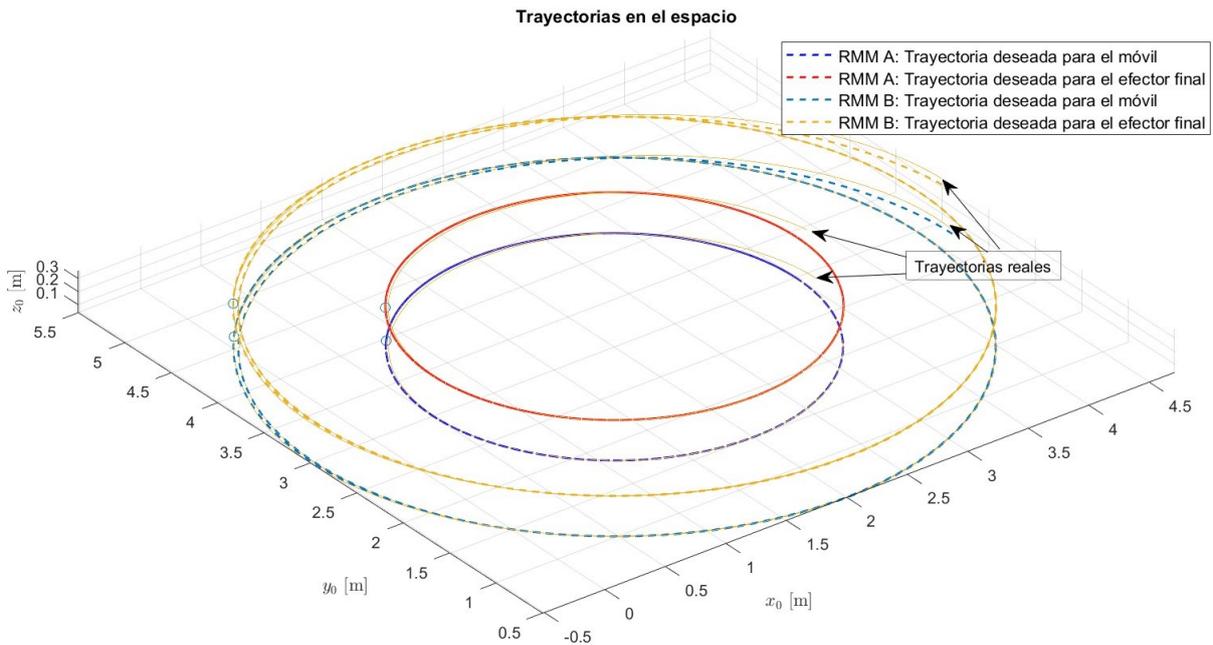


Figura 4.25: Trayectorias en el espacio de ambos robots con perturbación sobre el RMM B

Tal como se esperaba, las perturbaciones en el robot B lo sacan de su trayectoria y se pierde la sincronización con el robot A por un tiempo considerable hasta que el robot B se logra re-incorporar. Hablando en términos de manipulación, esto es un problema grave e indeseable, pues suponiendo que ambos robots llevan consigo un objeto, la sincronización es de vital importancia para que el objeto no se caiga o sufra daños.

Note además, en la Figura 4.22, que la distancia entre los efectores finales cuando se presenta la perturbación llega a tener un error hasta de 1.5 cm.

4.2. Sincronización con acoplamientos

En esta sección se propone usar un esquema de control, en el cual se tenga un flujo de información bidireccional y compense el error de sincronización. Así, defínanse los errores de acoplamiento de un robot i respecto a un robot j , considerando, de forma generalizada, $n = n_b + n_m$ grados de libertad, donde $n_b = 3$ son los grados de libertad de la base móvil y n_m los del manipulador:

$$\mathbf{e}_{c,i} = \begin{bmatrix} {}^j e_{c_x,i} \\ {}^j e_{c_y,i} \\ {}^j e_{c_\theta,i} \\ {}^j e_{c_{\phi_1},i} \\ {}^j e_{c_{\phi_2},i} \\ \vdots \\ {}^j e_{c_{\phi_{n_m}},i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_{r_x,i} - e_{r_x,j} \\ e_{r_y,i} - e_{r_y,j} \\ e_{\theta,i} - e_{\theta,j} \\ e_{\phi_1,i} - e_{\phi_1,j} \\ e_{\phi_2,i} - e_{\phi_2,j} \\ \vdots \\ e_{\phi_{n_m},i} - e_{\phi_{n_m},j} \end{bmatrix}, \quad i, j = A, B, \quad i \neq j \quad (4.4)$$

Luego, se propone la ley de control para el i -ésimo robot,

$$\tau_{red,i} = \mathbf{P}^{-1}(\mathbf{q}_i) \mathbf{H}(\mathbf{q}_i) \left[\mathbf{I}^{-1}(\mathbf{q}_i, \eta_i) + \dot{\eta}_{d,i} + \mathbf{K}_p \mathbf{e}_{\eta_i} + \mathbf{U}(\mathbf{q}_i, \mathbf{q}_{d,i}, \eta_{d,i}) + \mathbf{G}^*(\mathbf{q}_i) + \mathbf{F}_f^*(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i) \right] \quad (4.5)$$

Donde

$$\begin{aligned} \mathbf{U}(\mathbf{q}_i, \mathbf{q}_{d,i}, \eta_{d,i}) &= [u_1 \quad u_2 \quad \cdots \quad u_{n-1}]^T \\ u_1 &= k_1 e_{r_x,i} + C_{x,i} {}^j e_{c_x,i} \\ u_2 &= k_2 v_{d,i} \frac{\sin e_{\theta,i}}{e_{\theta,i}} e_{r_y,i} + k_3 e_{\theta,i} + C_{y,i} \frac{\sin e_{\theta,i}}{e_{\theta,i}} {}^j e_{c_y,i} + C_{\theta,i} {}^j e_{c_\theta,i} \\ u_3 &= k_4 e_{\phi_1,i} + C_{\phi_1,i} {}^j e_{c_{\phi_1},i} \\ &\vdots \\ u_{n-1} &= k_n e_{\phi_{n_m},i} + C_{\phi_{n_m},i} {}^j e_{c_{\phi_{n_m}},i} \end{aligned}$$

Con

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} e_{r_x,i} \\ e_{r_y,i} \\ e_{\theta,i} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i & 0 \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} x_{d,i} - x_i \\ y_{d,i} - y_i \\ \theta_{d,i} - \theta_i \end{bmatrix} \\ \mathbf{e}_{\mathbf{q}_i} &= \mathbf{q}_{d,i} - \mathbf{q}_i \\ \mathbf{e}_{\eta_i} &= \eta_{d,i} - \eta_i \end{aligned}$$

Se consideran las ganancias

$$\begin{aligned} k_1, k_2, \dots, k_n &> 0 \\ C_{x,i}, C_{y,i}, C_{\theta,i}, C_{\phi_1,i}, \dots, C_{\phi_{n_m},i} &> 0 \end{aligned}$$

También considere que $\mathbf{K}_p = \text{diag}(k_{p_1}, k_{p_2}, \dots, k_{p_{n-1}}) > 0 \in \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)}$ es una matriz diagonal definida positiva. Además, se definen

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\mathbf{q}_i) &= \mathbf{S}^T(\mathbf{q}_i) \mathbf{B}(\mathbf{q}_i), \quad \mathbf{H}(\mathbf{q}_i) = \bar{\mathbf{D}}(\mathbf{q}_i), \quad \mathbf{I}^{-1}(\mathbf{q}_i, \eta_i) = \bar{\mathbf{D}}^{-1}(\mathbf{q}_i) \bar{\mathbf{C}}(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i) \eta_i \\ \mathbf{G}^*(\mathbf{q}_i) &= \bar{\mathbf{D}}^{-1}(\mathbf{q}_i) \bar{\mathbf{G}}(\mathbf{q}_i), \quad \mathbf{F}_f^*(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i) = \bar{\mathbf{D}}^{-1}(\mathbf{q}_i) \bar{\mathbf{F}}_f(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i) \end{aligned}$$

4.2.1. Simulación: circunferencia

Con este nuevo enfoque, se realiza una simulación numérica usando el modelo del RMM (2,0,2) ($n = 5$) para la trayectoria circular antes propuesta, se usan las mismas ganancias y condiciones iniciales que en la sección anterior y se añaden las ganancias de acoplamiento mostradas en la Tabla 4.2 y 4.3 para los RMM A y B respectivamente.

$C_{x,A}$	$C_{y,A}$	$C_{\theta,A}$	$C_{\phi_{1,A}}$	$C_{\phi_{2,A}}$
200	200	200	200	200

Tabla 4.2: Ganancias de acoplamiento, RMM A.

$C_{x,B}$	$C_{y,B}$	$C_{\theta,B}$	$C_{\phi_{1,B}}$	$C_{\phi_{2,B}}$
800	800	800	800	800

Tabla 4.3: Ganancias de acoplamiento, RMM B.

Vea que las ganancias del robot B se definen más grandes que las del robot A, la razón es que, en virtud de la ecuación (4.4), el propósito es lograr la convergencia de los errores del robot j hacia los errores del robot i . En este caso, dado que se espera una perturbación sobre el robot B, al aumentar sus ganancias de acoplamiento, se le da prioridad a la convergencia de los errores del robot A sobre los del B, esto es, que el robot A se incorpore de mejor manera al robot B.

Ahora, se muestra el desempeño del sistema sincronizado sin perturbaciones:

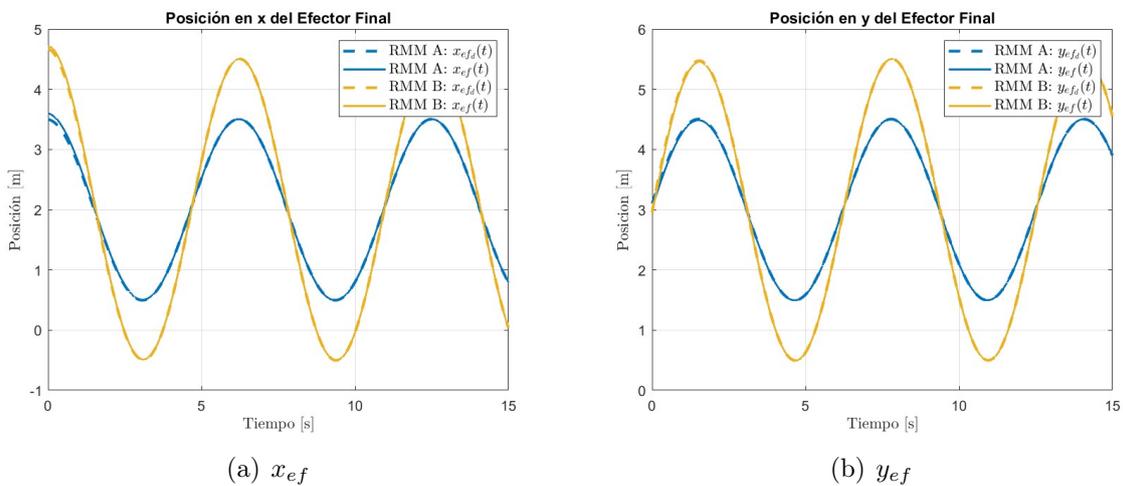


Figura 4.26: Coordenadas en x e y de los efectores finales de ambos robots

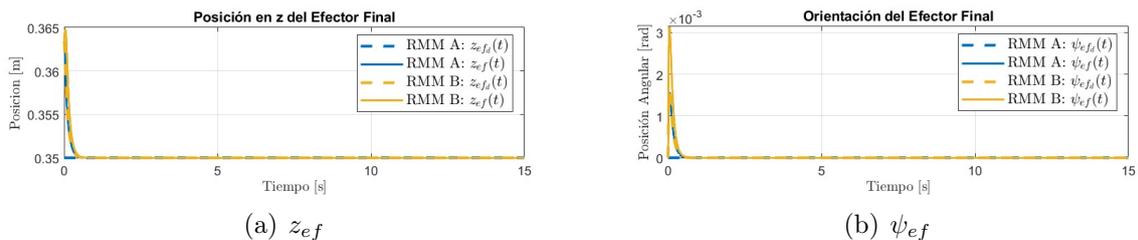


Figura 4.27: Coordenada en z y orientación de los efectores finales de ambos robots

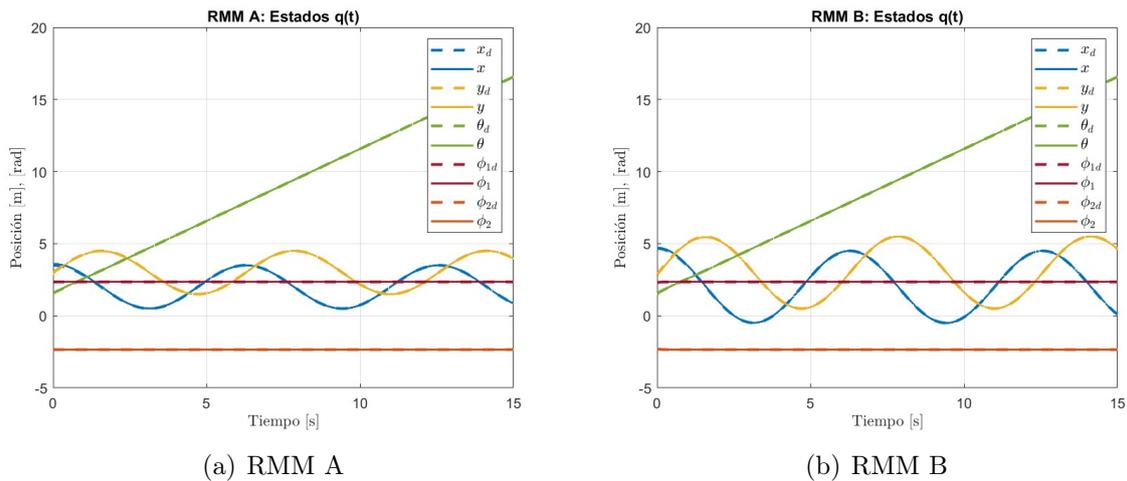


Figura 4.28: Estados $q(t) = [x \ y \ \theta \ \phi_1 \ \phi_2]^T$

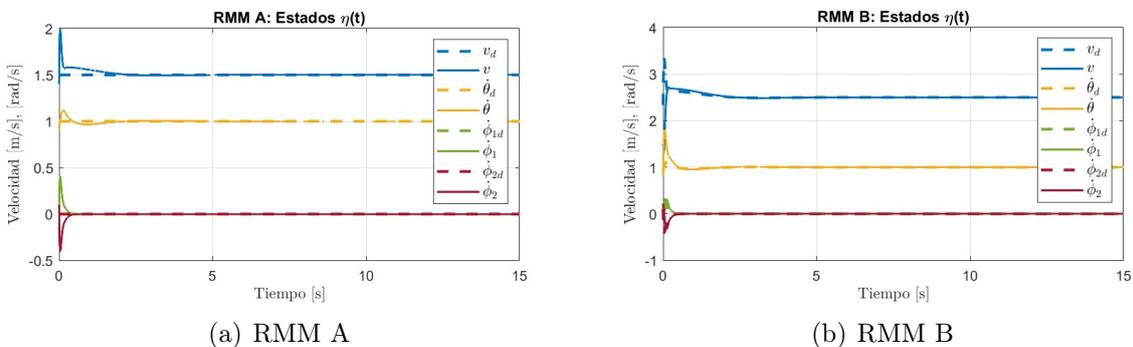


Figura 4.29: Estados $\eta(t) = [v \ \dot{\theta} \ \dot{\phi}_1 \ \dot{\phi}_2]^T$

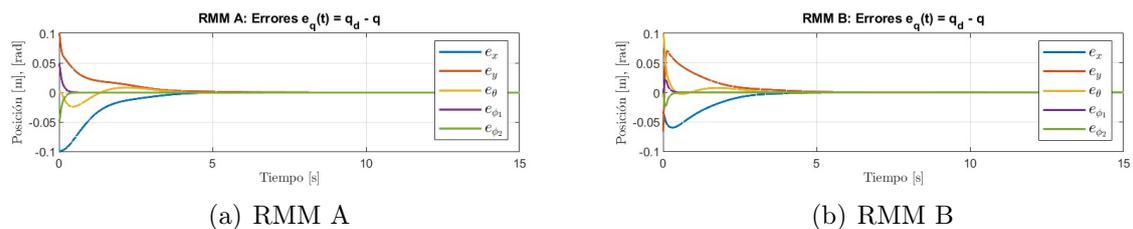


Figura 4.30: Errores en $q(t) = [x \ y \ \theta \ \phi_1 \ \phi_2]^T$

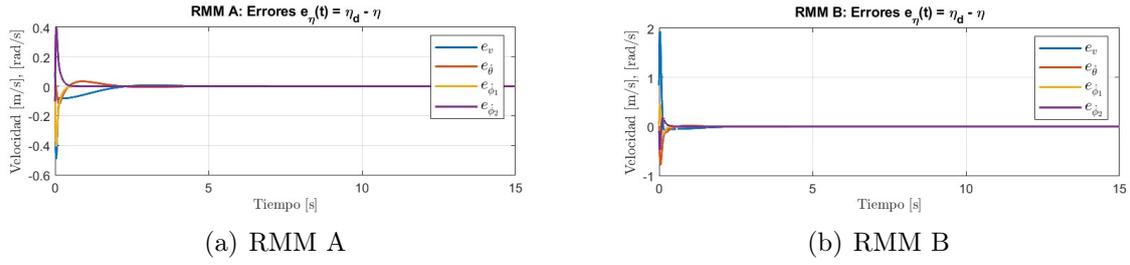


Figura 4.31: Errores en $\eta(t) = [v \ \dot{\theta} \ \dot{\phi}_1 \ \dot{\phi}_2]^T$

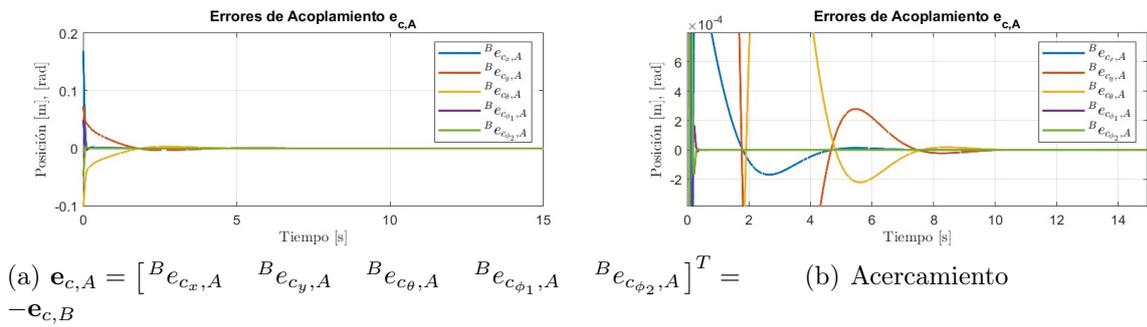


Figura 4.32: Errores de acoplamiento

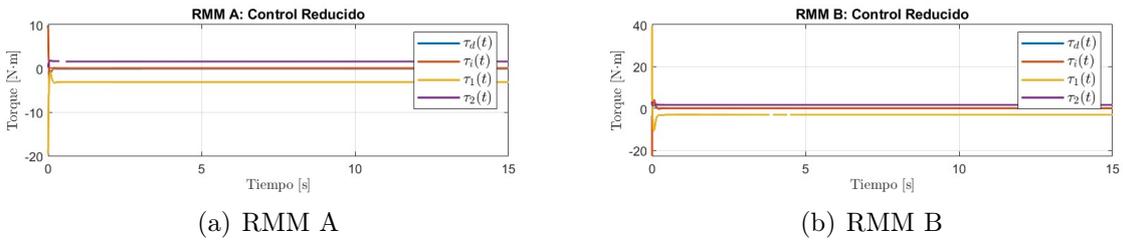


Figura 4.33: Controles reducidos de ambos robots

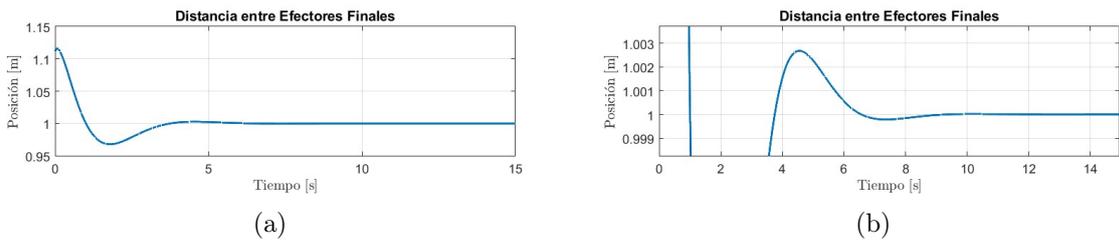


Figura 4.34: Distancia entre efectores finales

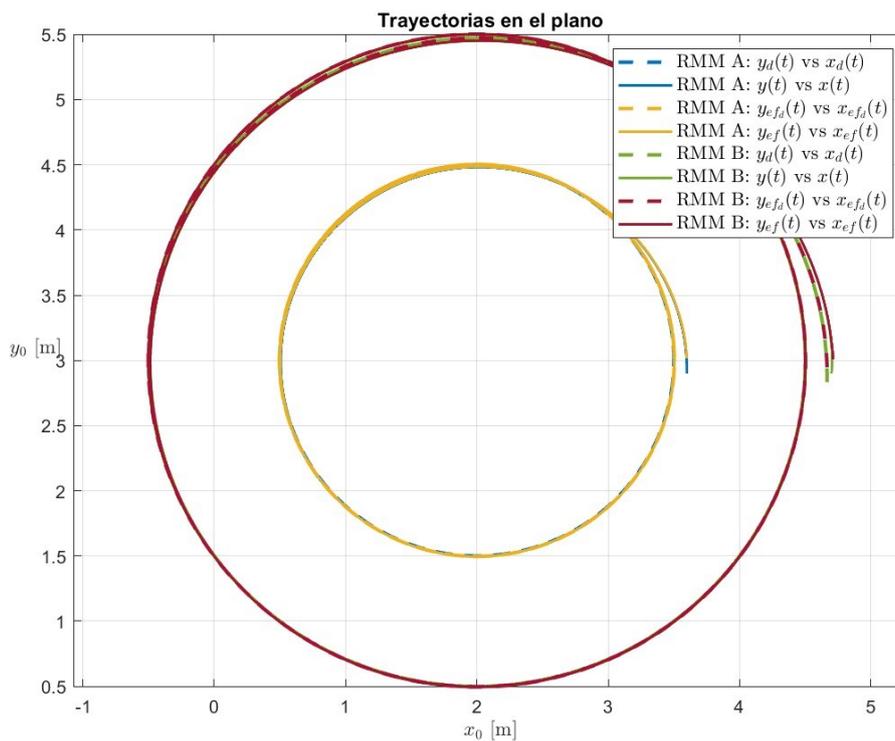


Figura 4.35: Trayectorias en el plano

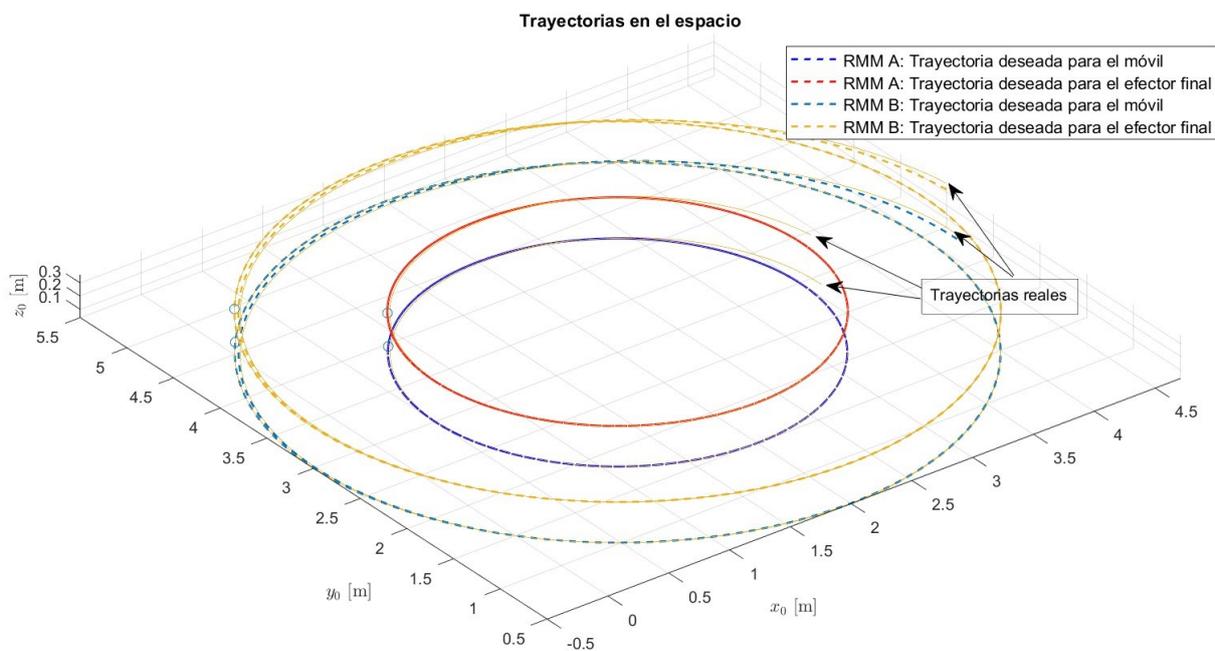


Figura 4.36: Trayectorias en el espacio de ambos robots

4.2.2. Adición de perturbaciones

Considerando las perturbaciones de la ecuación (4.3), vea la Figura 4.13, se obtiene la respuesta de los robots

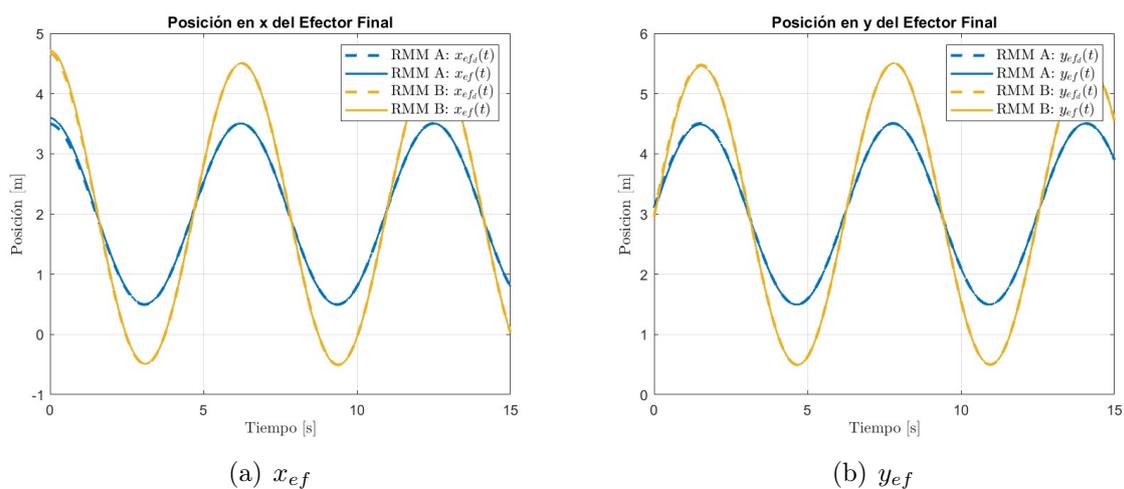


Figura 4.37: Coordenadas en x e y de los efectores finales de ambos robots con perturbación sobre el RMM B

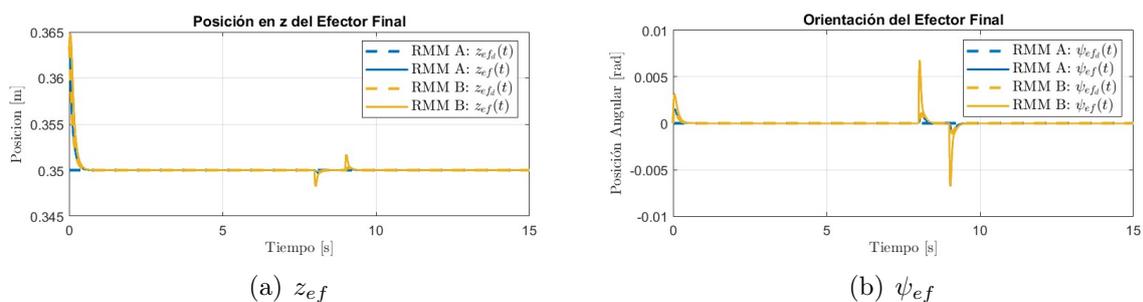


Figura 4.38: Coordenada en z y orientación de los efectores finales de ambos robots con perturbación sobre el RMM B

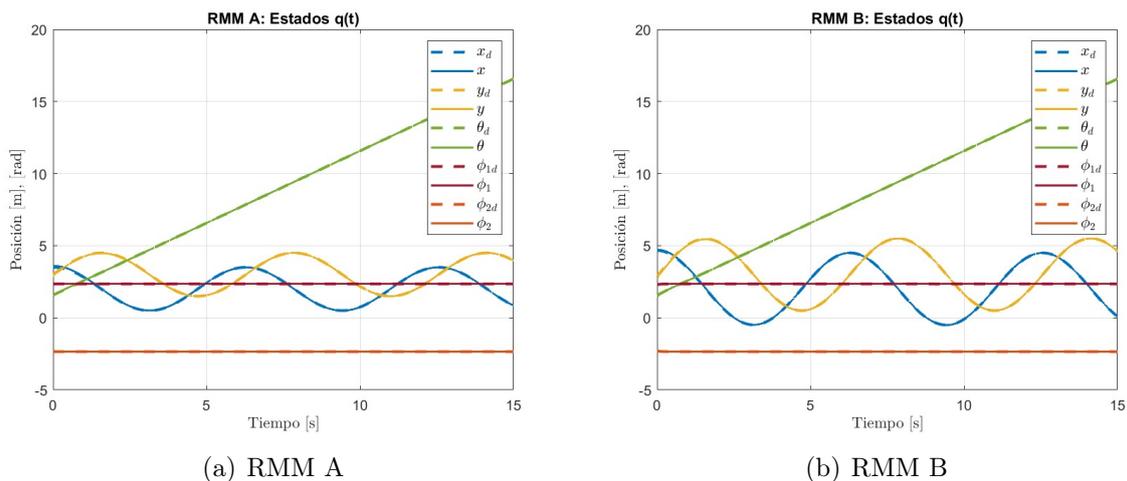


Figura 4.39: Estados $\mathbf{q}(t) = [x \ y \ \theta \ \phi_1 \ \phi_2]^T$ del sistema perturbado

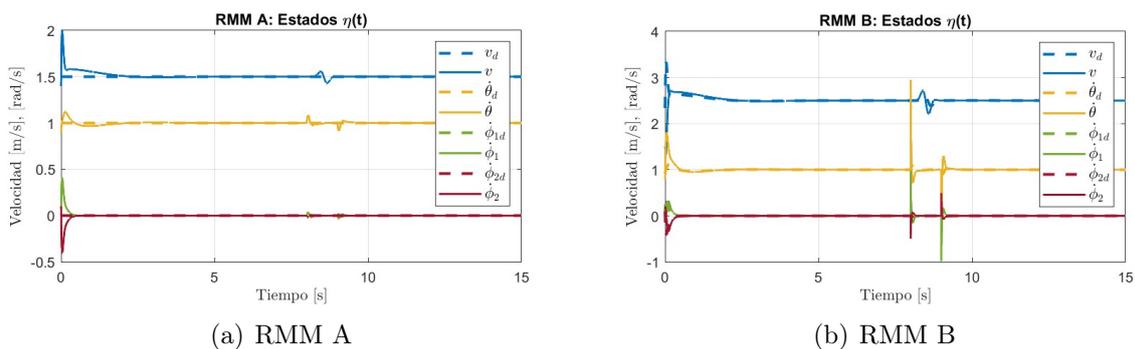


Figura 4.40: Estados $\boldsymbol{\eta}(t) = [v \ \dot{\theta} \ \dot{\phi}_1 \ \dot{\phi}_2]^T$ del sistema perturbado

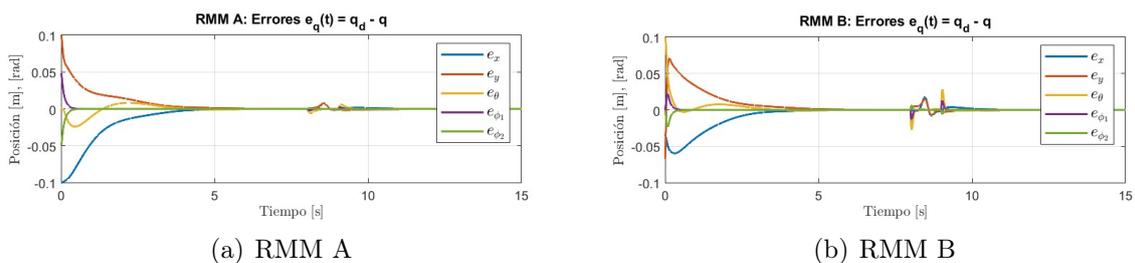


Figura 4.41: Errores en $\mathbf{q}(t) = [x \ y \ \theta \ \phi_1 \ \phi_2]^T$ del sistema perturbado

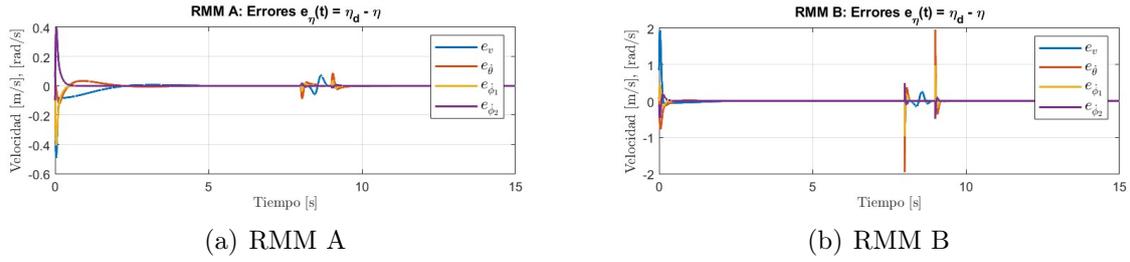


Figura 4.42: Errores en $\eta(t) = [v \ \dot{\theta} \ \dot{\phi}_1 \ \dot{\phi}_2]^T$ del sistema perturbado

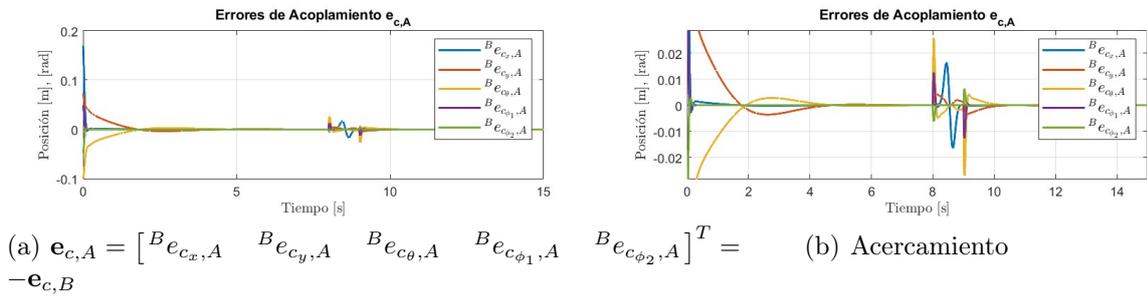


Figura 4.43: Errores de acoplamiento para el RMM A con perturbación sobre el RMM B

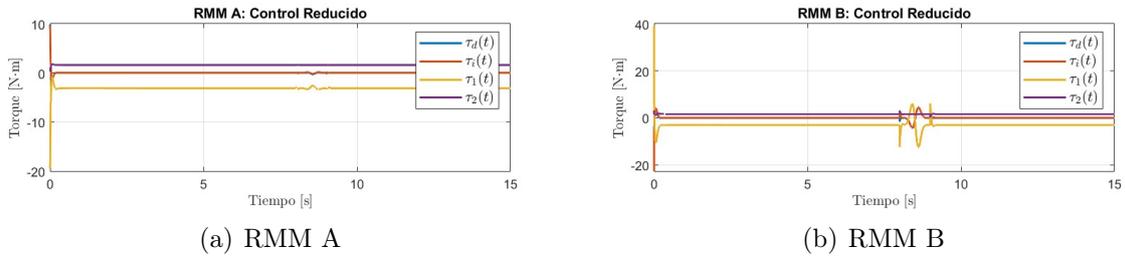


Figura 4.44: Controles reducidos de ambos robots con perturbación sobre el RMM B

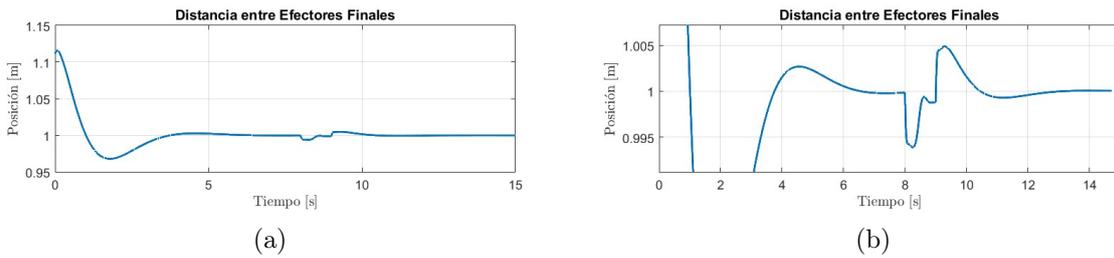


Figura 4.45: Distancia entre efectores finales del sistema perturbado

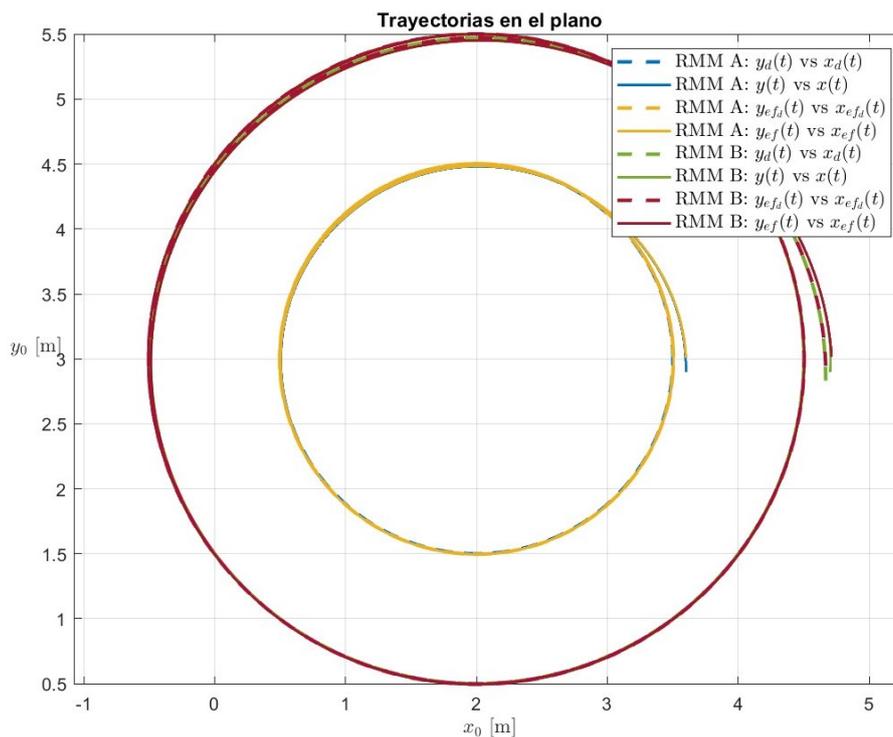


Figura 4.46: Trayectorias en el plano del sistema perturbado

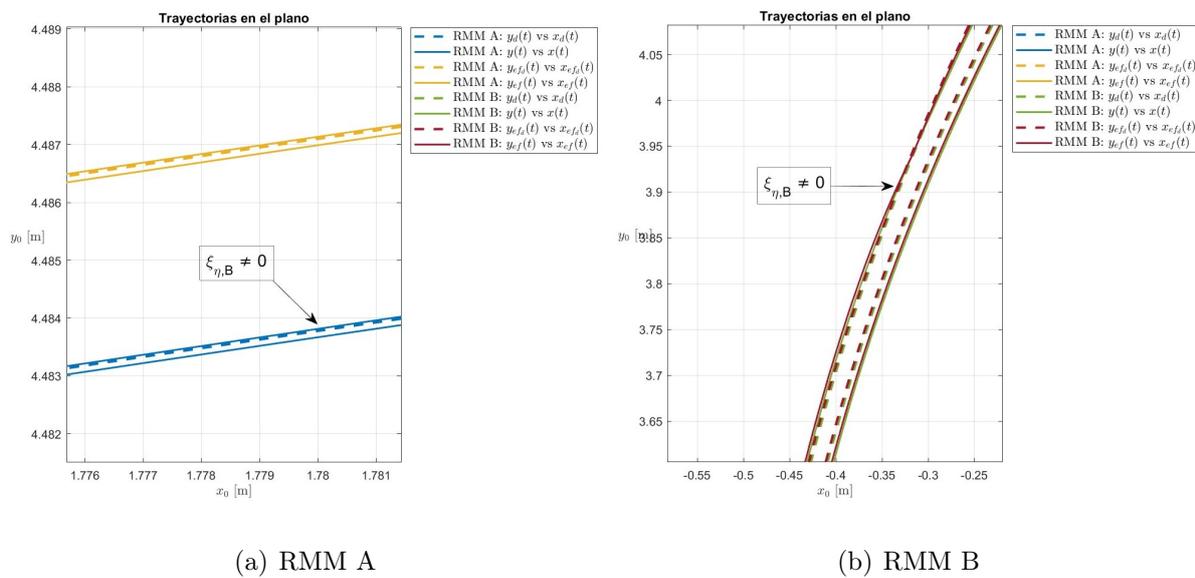


Figura 4.47: Acercamiento a trayectorias perturbadas sobre el plano

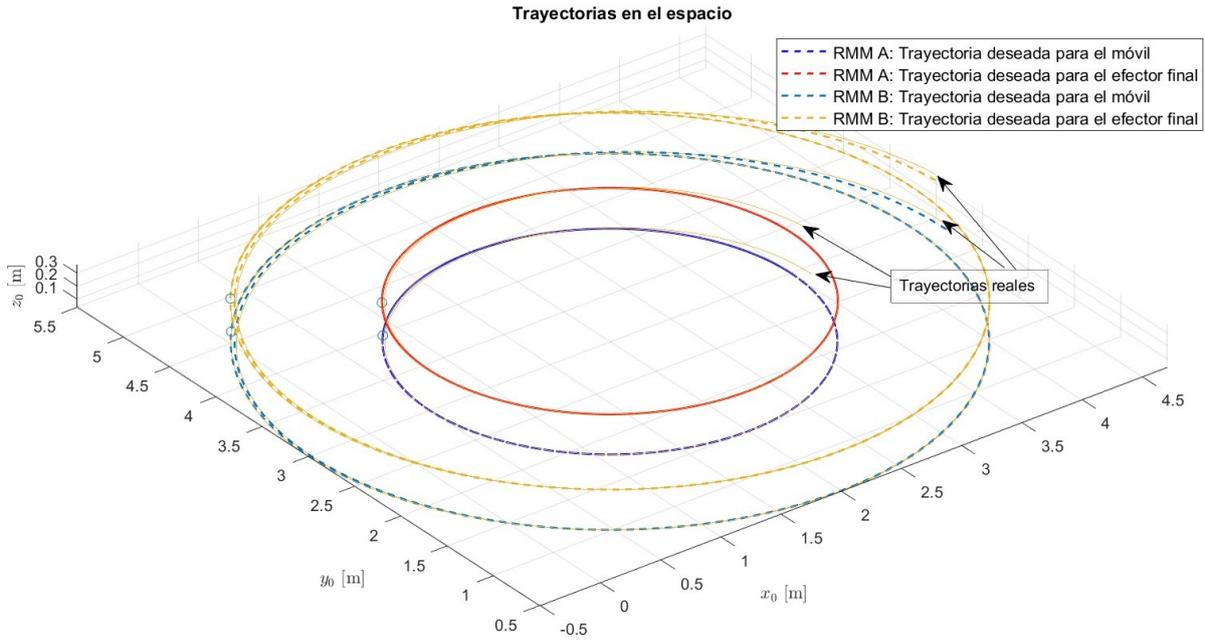


Figura 4.48: Trayectorias en el espacio de ambos robots con perturbación sobre el RMM B

Vea que con esta estrategia el RMM A ya muestra una respuesta ante las perturbaciones sobre el RMM B, de tal forma que trata de mantener la sincronización y los errores en el RMM B son menores comparados con los obtenidos en la sección anterior, por supuesto que esto exige un esfuerzo mayor de control, pero la mejoría en el desempeño es evidente.

Note, además, que la distancia entre los efectores finales disminuye una cantidad importante al incorporar las ganancias de acoplamiento (Figuras 4.22 y 4.45), en el caso acoplado se tiene un error en la distancia entre efectores finales alrededor de los 5 mm., esto puede ser la diferencia entre dejar caer o no un objeto en cuanto a manipulación.

4.3. Índice de desempeño

En esta sección se da, de forma cuantitativa, un criterio de desempeño para los controles usados en sincronización. Sea el índice de desempeño

$$Q = \int_0^t \|\mathbf{e}_c\|^2 d\tau \quad (4.6)$$

De la ecuación (4.4) note que $\mathbf{e}_{c,A} = -\mathbf{e}_{c,B}$, por lo que, para fines de cuantificación, simplemente tomamos el vector de errores de acoplamiento $\mathbf{e}_c = \mathbf{e}_{c,A}$.

Tomando en cuenta las simulaciones anteriores, en la Tabla 4.4 se recopilan los valores obtenidos para Q en ambos esquemas de sincronización: maestro-esclavo (M-S) y maestro-esclavo con acoplamientos (M-S acoplado), tanto para el caso perturbado ($\xi_{\eta,B} \neq \mathbf{0}$) como sin perturbación ($\xi_{\eta,B} = \mathbf{0}$).

Esquema de sincronización	Sin perturbación $\xi_{\eta,B} = \mathbf{0}$	Con perturbación $\xi_{\eta,B} \neq \mathbf{0}$
M-S	0.014527	0.015852
M-S acoplado	0.003092	0.003261

Tabla 4.4: Valor de Q en ambos esquemas de sincronización

De esta manera ya se puede ver, de manera cuantitativa, la supremacía del esquema de control con acoplamientos sobre la configuración maestro-esclavo en cuanto a sincronización.

4.4. El KUKA youBot: Manipulación cooperativa

Retomando el enfoque de sincronización con acoplamientos, en esta sección se busca que ambos robots KUKA puedan manipular un objeto siguiendo una trayectoria, en este caso, una circunferencia. El objeto en cuestión es una caja de 20 cm. de ancho. De tal forma que se consideran los errores de acoplamiento mostrados en la ecuación (4.4) y el control (4.5) para el i -ésimo robot, con $n = 8$.

4.4.1. Trayectoria: circunferencia

Definimos las trayectorias de los robots

$$\sigma_A(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_A \\ \eta_A \end{bmatrix}, \quad \sigma_{d,B}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_{d,B} \\ \eta_{d,B} \end{bmatrix}$$

Donde

$$\mathbf{q}_A = \begin{bmatrix} x_A \\ y_A \\ \theta_A \\ \phi_{1,A} \\ \phi_{2,A} \\ \phi_{3,A} \\ \phi_{4,A} \\ \phi_{5,A} \end{bmatrix}, \quad \eta_A = \begin{bmatrix} v_A \\ \dot{\theta}_A \\ \dot{\phi}_{1,A} \\ \dot{\phi}_{2,A} \\ \dot{\phi}_{3,A} \\ \dot{\phi}_{4,A} \\ \dot{\phi}_{5,A} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}_{d,B} = \begin{bmatrix} x_{d,B} \\ y_{d,B} \\ \theta_{d,B} \\ \phi_{1d,B} \\ \phi_{2d,B} \\ \phi_{3d,B} \\ \phi_{4d,B} \\ \phi_{5d,B} \end{bmatrix}, \quad \eta_{d,B} = \begin{bmatrix} v_{d,B} \\ \dot{\theta}_{d,B} \\ \dot{\phi}_{1d,B} \\ \dot{\phi}_{2d,B} \\ \dot{\phi}_{3d,B} \\ \dot{\phi}_{4d,B} \\ \dot{\phi}_{5d,B} \end{bmatrix}$$

Se planea una trayectoria suave en cuatro etapas teniendo en mente el propósito de manipulación de un objeto: en la primera etapa, se usa una trayectoria recta para que los robots lleguen a la posición del objeto a manipular; la segunda etapa funciona para entrar en contacto con el objeto; en la tercera etapa se mantiene la posición del efector final, el objetivo de ésta etapa es esperar a que pasen los efectos del golpeo que pueda haber entre el objeto y el efector final, y que el agarre llegue a un punto de estabilidad; finalmente, en la cuarta etapa los robots generan el círculo deseado.

Robot A

Primera etapa, $0 \leq t \leq 8$: Para el móvil se tiene

$$\begin{aligned}
p_1(t) &= -\frac{5t^7}{524288} + \frac{35t^6}{131072} - \frac{21t^5}{8192} + \frac{35t^4}{4096} \\
x_{d,A}(t) &= 4 \\
y_{d,A}(t) &= (2 - L_x)p_1(t) \\
\theta_{d,A}(t) &= \tan^{-1}\left(\frac{\dot{y}_{d,A}}{\dot{x}_{d,A}}\right)
\end{aligned}$$

Para el efector final, en dirección x_0 se quiere llegar desde 4 a 4.35 m. para posicionarse frente al objeto, y se definen las orientaciones de tal forma que el efector final quede perpendicular.

$$\begin{aligned}
x_{efd,A}(t=8) &= 4.35 \\
y_{efd,A}(t=8) &= y_{d,A}(t=8) + L_x \\
z_{efd,A}(t=8) &= 0.46 \\
\psi_{efd,A}(t=8) &= \frac{\pi}{2} \\
\zeta_{efd,A}(t=8) &= 0
\end{aligned}$$

Esto arroja un valor constante para las variables articulares.

$$\begin{aligned}
\phi_{1d,A}(t=8) &= \frac{\pi}{2}, & \phi_{2d,A}(t=8) &= -0.222635 \\
\phi_{3d,A}(t=8) &= 1.63105, & \phi_{4d,A}(t=8) &= 0.162383
\end{aligned}$$

Para no obtener controles tan abruptos al inicio, se genera una curva suave para cada variable articular, así

$$\begin{aligned}
\phi_{1d,A}(t) &= \frac{\pi}{2}p_1(t), & \phi_{2d,A}(t) &= -0.222635p_1(t) \\
\phi_{3d,A}(t) &= 1.63105p_1(t), & \phi_{4d,A}(t) &= 0.162383p_1(t)
\end{aligned}$$

Se define $\phi_{5d,A}(t) = 0$.

Segunda etapa, $8 < t \leq 12$:

$$\begin{aligned}
x_{d,A}(t) &= 4 \\
y_{d,A}(t) &= 2 - L_x \\
\theta_{d,A}(t) &= \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

Defínase la trayectoria para el efector final

$$\begin{aligned}
p_2(t) &= 35 \left(\frac{t}{4} - 2\right)^4 - 84 \left(\frac{t}{4} - 2\right)^5 + 70 \left(\frac{t}{4} - 2\right)^6 - 20 \left(\frac{t}{4} - 2\right)^7 \\
x_{ef_d,A}(t) &= (4.4 + \rho_d - 4.35)p_2(t) + 4.35 \\
y_{ef_d,A}(t) &= 2 \\
z_{ef_d,A}(t) &= 0.46 \\
\psi_{ef_d,A}(t) &= \frac{\pi}{2} \\
\zeta_{ef_d,A}(t) &= 0
\end{aligned}$$

Donde ρ_d es una penetración deseada sobre el objeto.

Con estos datos, se resuelven las ecuaciones no lineales para $\phi_{2d,A}$, $\phi_{3d,A}$, $\phi_{4d,A}$ del manipulador.

Tercera etapa, $12 < t \leq 20$: Se mantiene la posición del efector final y del móvil como sigue

$$\begin{aligned}
x_{d,A}(t) &= 4 \\
y_{d,A}(t) &= 2 - L_x \\
\theta_{d,A}(t) &= \frac{\pi}{2} \\
x_{ef_d,A}(t) &= 4.4 + \rho_d \\
y_{ef_d,A}(t) &= 2 \\
z_{ef_d,A}(t) &= 0.46 \\
\psi_{ef_d,A}(t) &= \frac{\pi}{2} \\
\zeta_{ef_d,A}(t) &= 0
\end{aligned}$$

Cuarta etapa, $20 < t \leq t_f = 60$: En esta etapa se genera una trayectoria circular con centro en $(x_c, y_c) = (3, 2 - L_x)$ y radio $r_{d,A} = 1$. De tal forma que

$$\begin{aligned}
\delta_A(t) &= \frac{2\pi}{(t_f - 20)}(t - 20) - \sin\left(\frac{2\pi}{(t_f - 20)}(t - 20)\right) \\
x_{d,A}(t) &= x_c + r_{d,A} \cos(\delta_A(t)) \\
y_{d,A}(t) &= y_c + r_{d,A} \sin(\delta_A(t)) \\
\theta_{d,A}(t) &= \tan^{-1}\left(\frac{\dot{y}_{d,A}}{\dot{x}_{d,A}}\right)
\end{aligned}$$

Para el efector final, se tiene una circunferencia con radio $r_{ef,A} = \sqrt{L_x^2 + (r_{d,A} + 0.4 + \rho_d)^2}$,

$$\begin{aligned}
\delta_{ef,A}(t) &= \delta_A(t) + \sin^{-1}\left(\frac{L_x}{r_{ef,A}}\right) \\
x_{efd,A}(t) &= x_c + r_{ef,A} \cos(\delta_{ef,A}(t)) \\
y_{efd,A}(t) &= y_c + r_{ef,A} \sin(\delta_{ef,A}(t)) \\
z_{efd,A}(t) &= 0.46 \\
\psi_{efd,A}(t) &= \frac{\pi}{2} \\
\zeta_{efd,A}(t) &= \theta_{d,A}(t) - \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

Robot B

Primera, segunda y tercera etapa; $0 \leq t \leq 20$: De manera explícita se muestran los estados del robot B en función de las trayectorias generadas por el robot A.

$$\begin{aligned}
x_{d,B}(t) &= x_A + 1 \\
y_{d,B}(t) &= y_A \\
\theta_{d,B}(t) &= \theta_A \\
\phi_{1d,B}(t) &= -\phi_{1,A} \\
\phi_{2d,B}(t) &= \phi_{2,A} \\
\phi_{3d,B}(t) &= \phi_{3,A} \\
\phi_{4d,B}(t) &= \phi_{4,A} \\
\phi_{5d,B}(t) &= \phi_{5,A} \\
v_{d,B}(t) &= v_A \\
\dot{\theta}_{d,B}(t) &= \dot{\theta}_A \\
\dot{\phi}_{1d,B}(t) &= -\dot{\phi}_{1,A} \\
\dot{\phi}_{2d,B}(t) &= \dot{\phi}_{2,A} \\
\dot{\phi}_{3d,B}(t) &= \dot{\phi}_{3,A} \\
\dot{\phi}_{4d,B}(t) &= \dot{\phi}_{4,A} \\
\dot{\phi}_{5d,B}(t) &= \dot{\phi}_{5,A}
\end{aligned}$$

De forma matricial, esto se puede escribir como sigue,

$$\begin{aligned}
\mathbf{q}_{d,B} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_A \\ y_A \\ \theta_A \\ \phi_{1,A} \\ \phi_{2,A} \\ \phi_{3,A} \\ \phi_{4,A} \\ \phi_{5,A} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
\eta_{d,B} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_A \\ \dot{\theta}_A \\ \dot{\phi}_{1,A} \\ \dot{\phi}_{2,A} \\ \dot{\phi}_{3,A} \\ \dot{\phi}_{4,A} \\ \dot{\phi}_{5,A} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Cuarta etapa; $20 < t \leq 60$: Se define un círculo para el móvil con el mismo centro $(x_c, y_c) = (3, 2 - L_x)$ y radio $r_{d,B} = r_{d,A} + 1$. Así

$$\begin{aligned}
x_{d,B}(t) &= x_c + \frac{r_{d,B}}{r_{d,A}} (x_A - x_c) \\
y_{d,B}(t) &= y_c + \frac{r_{d,B}}{r_{d,A}} (y_A - y_c) \\
\theta_{d,B}(t) &= \theta_A \\
\phi_{1d,B}(t) &= -\phi_{1,A} \\
\phi_{2d,B}(t) &= \phi_{2,A} \\
\phi_{3d,B}(t) &= \phi_{3,A} \\
\phi_{4d,B}(t) &= \phi_{4,A} \\
\phi_{5d,B}(t) &= \phi_{5,A} \\
v_{d,B}(t) &= \frac{r_{d,B}}{r_{d,A}} v_A \\
\dot{\theta}_{d,B}(t) &= \dot{\theta}_A \\
\dot{\phi}_{1d,B}(t) &= -\dot{\phi}_{1,A} \\
\dot{\phi}_{2d,B}(t) &= \dot{\phi}_{2,A} \\
\dot{\phi}_{3d,B}(t) &= \dot{\phi}_{3,A} \\
\dot{\phi}_{4d,B}(t) &= \dot{\phi}_{4,A} \\
\dot{\phi}_{5d,B}(t) &= \dot{\phi}_{5,A}
\end{aligned}$$

De forma matricial, esto es

$$\mathbf{q}_{d,B} = \begin{bmatrix} x_c \\ y_c \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{r_{d,B}}{r_{d,A}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{r_{d,B}}{r_{d,A}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} x_A \\ y_A \\ \theta_A \\ \phi_{1,A} \\ \phi_{2,A} \\ \phi_{3,A} \\ \phi_{4,A} \\ \phi_{5,A} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_c \\ y_c \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{pmatrix}$$

$$\eta_{d,B} = \begin{bmatrix} \frac{r_{d,B}}{r_{d,A}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_A \\ \dot{\theta}_A \\ \dot{\phi}_{1,A} \\ \dot{\phi}_{2,A} \\ \dot{\phi}_{3,A} \\ \dot{\phi}_{4,A} \\ \dot{\phi}_{5,A} \end{bmatrix}$$

4.4.2. Simulación

Se usan las condiciones iniciales para el robot A ($\mathbf{q}_A(0)$, $\eta_A(0)$) y el robot B ($\mathbf{q}_B(0)$, $\eta_B(0)$).

$$\mathbf{q}_A(0) = \begin{bmatrix} x_A(0) \\ y_A(0) \\ \theta_A(0) \\ \phi_{1,A}(0) \\ \phi_{2,A}(0) \\ \phi_{3,A}(0) \\ \phi_{4,A}(0) \\ \phi_{5,A}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \text{ [m]} \\ 0 \text{ [m]} \\ \frac{\pi}{2} \text{ [rad]} \\ 0 \text{ [rad]} \end{bmatrix}, \quad \eta_A(0) = \begin{bmatrix} v_A(0) \\ \dot{\theta}_A(0) \\ \dot{\phi}_{1,A}(0) \\ \dot{\phi}_{2,A}(0) \\ \dot{\phi}_{3,A}(0) \\ \dot{\phi}_{4,A}(0) \\ \dot{\phi}_{5,A}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \text{ [m/s]} \\ 0 \text{ [rad/s]} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{q}_B(0) = \begin{bmatrix} x_B(0) \\ y_B(0) \\ \theta_B(0) \\ \phi_{1,B}(0) \\ \phi_{2,B}(0) \\ \phi_{3,B}(0) \\ \phi_{4,B}(0) \\ \phi_{5,B}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \text{ [m]} \\ 0 \text{ [m]} \\ \frac{\pi}{2} \text{ [rad]} \\ 0 \text{ [rad]} \end{bmatrix}, \quad \eta_B(0) = \begin{bmatrix} v_B(0) \\ \dot{\theta}_B(0) \\ \dot{\phi}_{1,B}(0) \\ \dot{\phi}_{2,B}(0) \\ \dot{\phi}_{3,B}(0) \\ \dot{\phi}_{4,B}(0) \\ \dot{\phi}_{5,B}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \text{ [m/s]} \\ 0 \text{ [rad/s]} \end{bmatrix}$$

Las ganancias que se usaron para ambos RMM son

$$K_p = \text{diag}[50, 50, 50, 50, 50, 50, 50]$$

k_1	k_2	k_3	k_4	k_5	k_6	k_7	k_8
50	50	200	400	400	400	400	400

Tabla 4.5: Ganancias de control de ambos RMM

Se consideran las ganancias de acoplamiento de las Tablas 4.6 y 4.7 para el robot A y B, respectivamente.

$C_{x,A}$	$C_{y,A}$	$C_{\theta,A}$	$C_{\phi_{1,A}}$	$C_{\phi_{2,A}}$	$C_{\phi_{3,A}}$	$C_{\phi_{4,A}}$	$C_{\phi_{5,A}}$
200	200	200	200	200	200	200	200

Tabla 4.6: Ganancias de acoplamiento para el RMM A

$C_{x,B}$	$C_{y,B}$	$C_{\theta,B}$	$C_{\phi_{1,B}}$	$C_{\phi_{2,B}}$	$C_{\phi_{3,B}}$	$C_{\phi_{4,B}}$	$C_{\phi_{5,B}}$
800	800	800	800	800	800	800	800

Tabla 4.7: Ganancias de acoplamiento para el RMM B

Se considera una penetración sobre el objeto de $\rho_d = 0.002$ m. Así, se presentan las gráficas de desempeño:

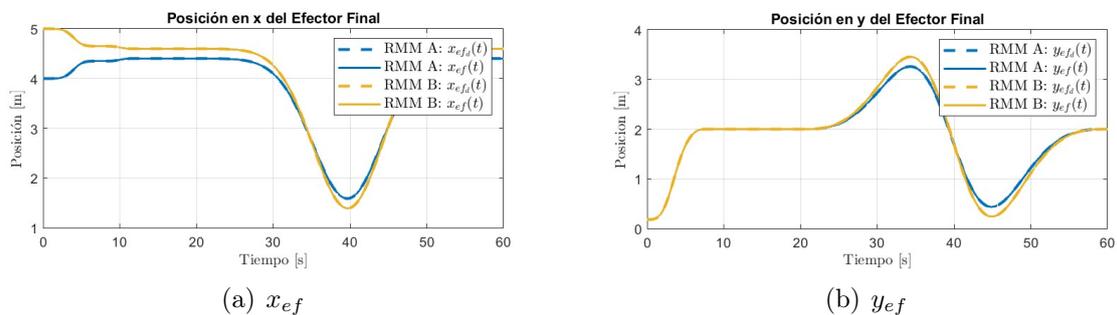


Figura 4.49: Coordenadas x, y del efector final

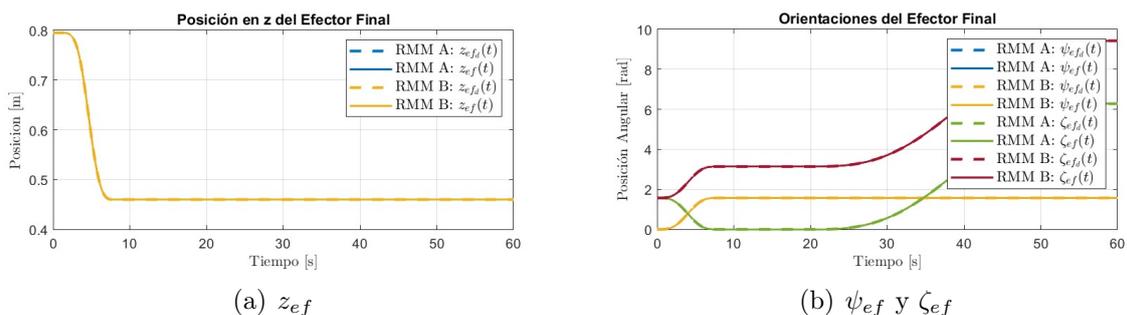


Figura 4.50: Coordenada z y orientaciones del efector final

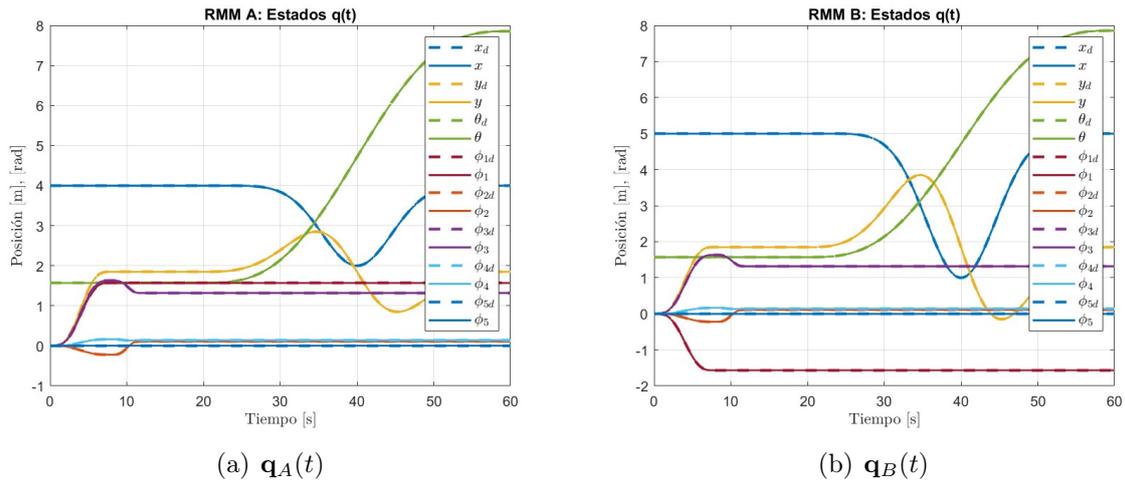


Figura 4.51: Estados $\mathbf{q}(t)$

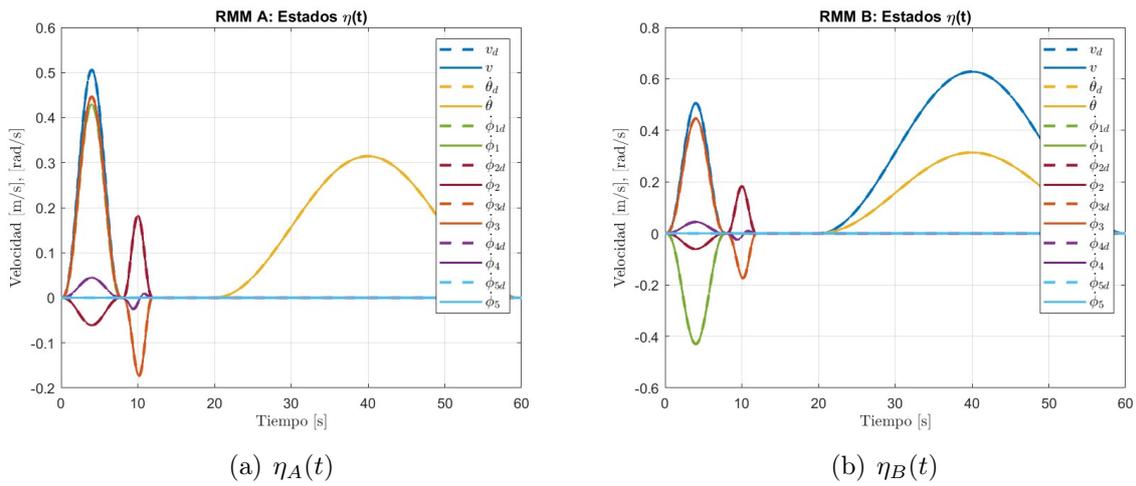


Figura 4.52: Estados $\eta(t)$

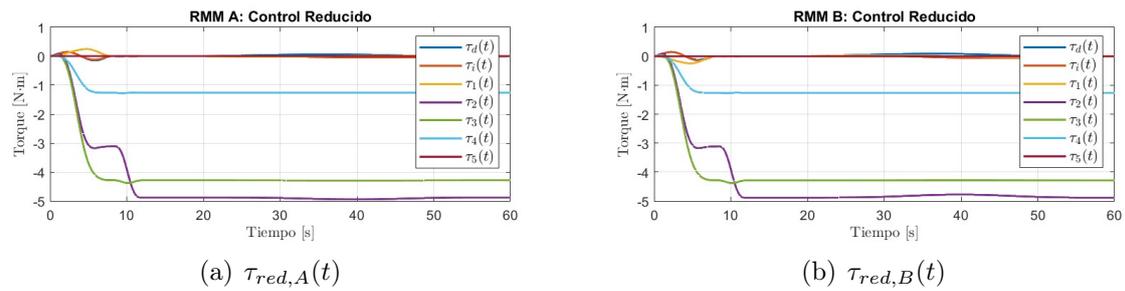


Figura 4.53: Acciones de control

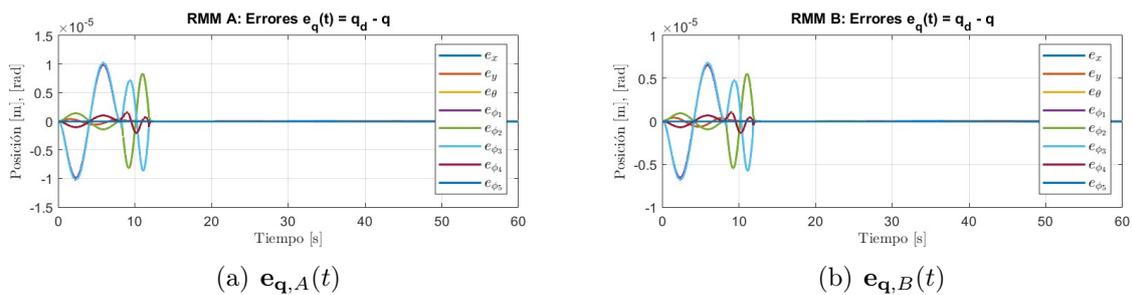


Figura 4.54: Errores en $q(t)$

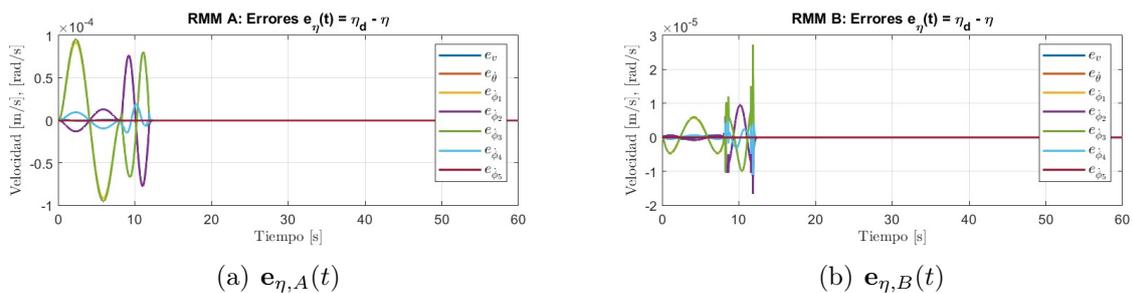


Figura 4.55: Errores en $\eta(t)$

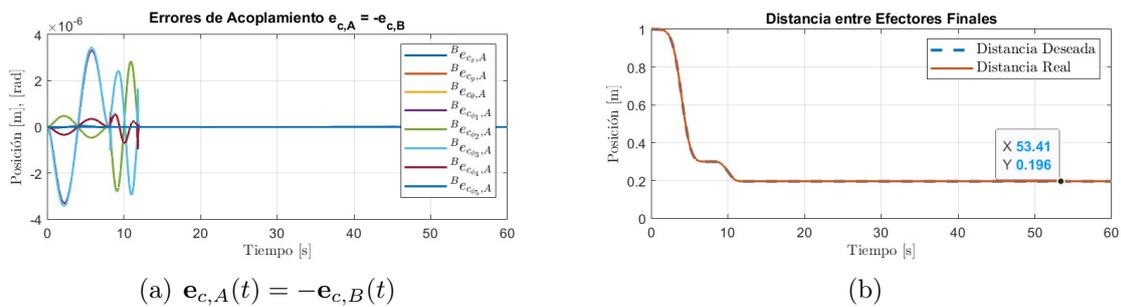


Figura 4.56: Errores de acoplamiento y distancia entre efectores finales

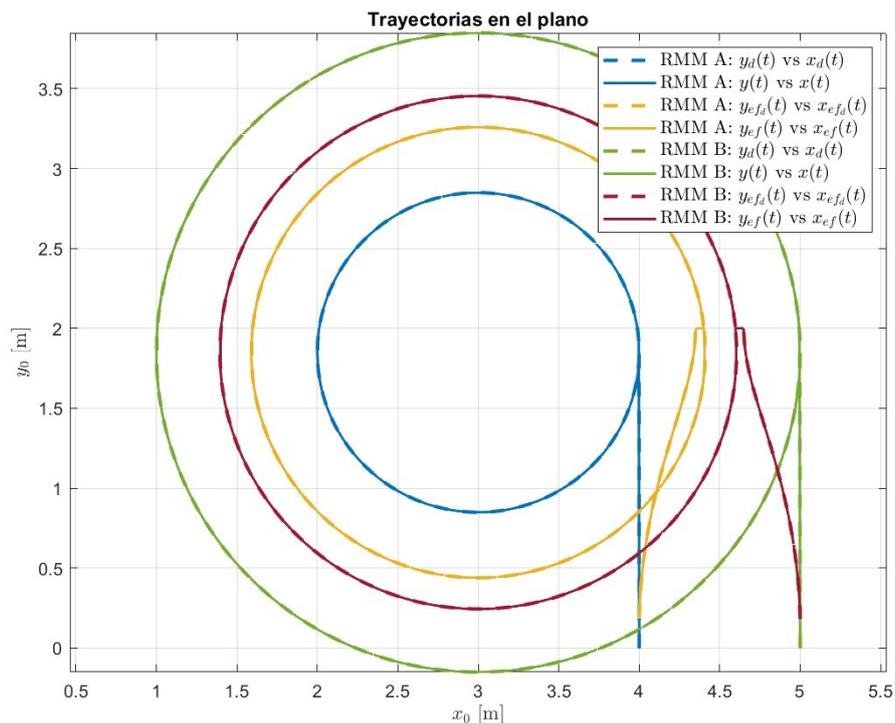


Figura 4.57: Trayectorias en el plano

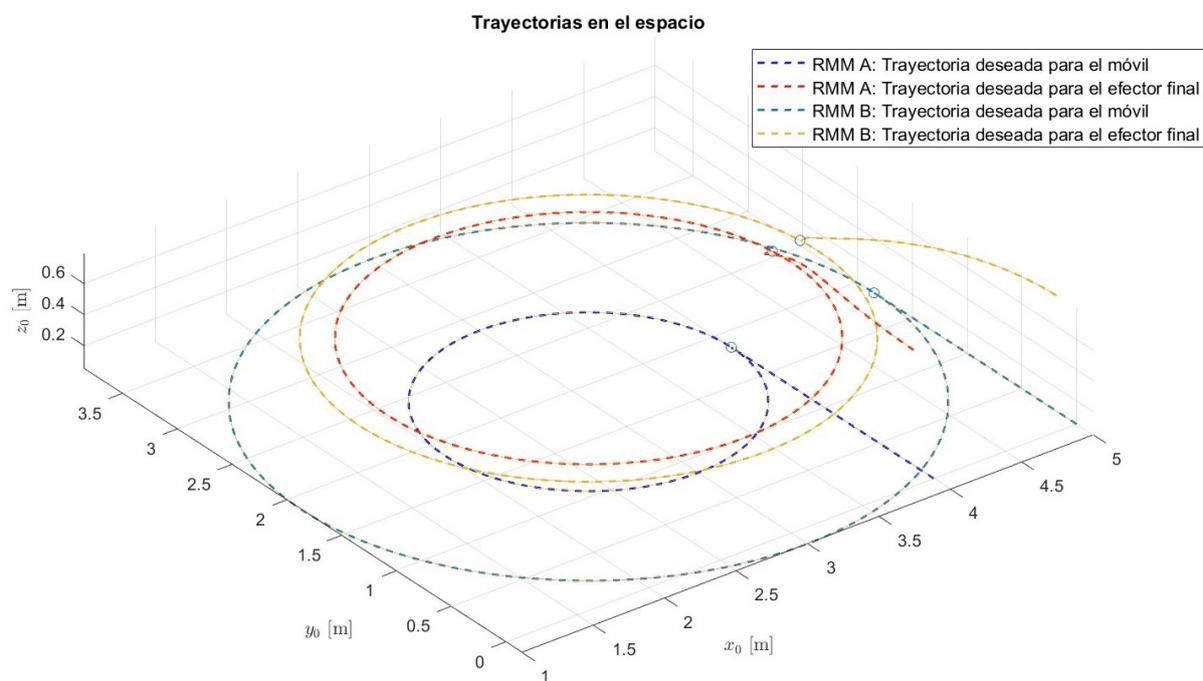


Figura 4.58: Trayectorias en el espacio

En las Figuras 4.51 y 4.52 se aprecia una buena convergencia en los estados de posición y velocidad, respectivamente. De la Figura 4.56 (b) se puede ver que el objetivo se cumple,

los robots hacen la sujeción de algún objeto de 20 cm. de ancho, con una penetración de 2 mm. por robot, es decir, se tiene una distancia entre efectores finales de 19.6 cm.

A continuación, se presenta una animación hecha en el ambiente virtual CoppeliaSim:
<https://drive.google.com/file/d/1pFOB1wBARuK5r6Gm6uP8iTBB6vMIViQi/view?usp=sharing>

Capítulo 5

Etapa de fuerza

En este capítulo se plantea la posibilidad de manipular un objeto con dos robots Kuka youBot añadiendo un control de fuerza al esquema de sincronización para cada robot. En particular, se trabaja con una caja rígida de 20 cm por lado.

El objetivo es mantener una fuerza deseada sobre el objeto, la suficiente para asegurar la sujeción y aprovechar las bases móviles para ejecutar una trayectoria, en este caso, un círculo.

5.1. Interacción del robot con el ambiente

Cuando el efector final de un manipulador entra en contacto con el ambiente, se generan fuerzas y momentos que afectan la dinámica del robot, y dependiendo de las restricciones del ambiente, pueden o no generar movimiento en el ambiente. Las fuerzas que ejerce un robot sobre su ambiente, se pueden escribir como en la siguiente ecuación, [7]:

$$\mathbf{h}_r = \mathbf{M}_a (\ddot{\mathbf{X}}_e - \ddot{\mathbf{X}}_s) + \mathbf{B}_a (\dot{\mathbf{X}}_e - \dot{\mathbf{X}}_s) + \mathbf{K}_a (\mathbf{X}_e - \mathbf{X}_s) \quad (5.1)$$

En donde, de forma general, $\mathbf{h}_r \in \mathbb{R}^6$ es un vector de fuerzas y momentos generalizados, $\mathbf{M}_a \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$ es la matriz de masas e inercias del ambiente, $\mathbf{B}_a \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$ es la matriz de amortiguamiento del ambiente, $\mathbf{K}_a \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$ es la matriz de rigidez, $\mathbf{X}_e \in \mathbb{R}^6$ es el vector de posición y orientación del efector final, y $\mathbf{X}_s \in \mathbb{R}^6$ es el vector de posición y orientación del punto de contacto entre el efector final y la superficie del ambiente. Sin embargo, en este trabajo de tesis se consideran solo la posición y fuerzas lineales, de tal forma que definimos

$$\mathbf{h}_r = \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X}_e = \begin{bmatrix} x_{ef} \\ y_{ef} \\ z_{ef} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X}_s = \begin{bmatrix} x_s \\ y_s \\ z_s \end{bmatrix}$$

Al modelo presentado en (5.1) se le conoce como *modelo de impedancia*, y surge de la idea de modelar el ambiente como un sistema masa-resorte-amortiguador. Ahora, para obtener una fuerza resultante basta con pequeños incrementos graduales en la penetración del efector final sobre el ambiente, por lo que las velocidades y aceleraciones serán suficientemente pequeñas. Así, la ecuación (5.1) se puede simplificar y considerar sólo la parte de rigidez, así

$$\mathbf{h}_r = \mathbf{K}_a (\mathbf{X}_e - \mathbf{X}_s) \quad (5.2)$$

Esto se reduce a tener el comportamiento de un resorte, en este escenario, se dice que el ambiente es de tipo *capacitivo*, vea la Figura 5.1.

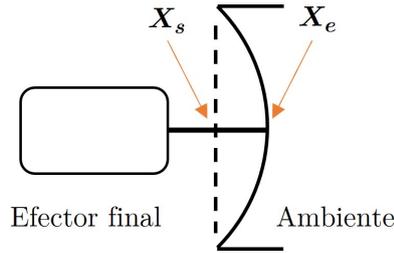


Figura 5.1: Ambiente capacitivo

La ecuación (5.2) se usa en este trabajo para obtener las lecturas de fuerza en simulación medidas desde el marco inercial y es el término que se mapea a la dinámica del robot a través del Jacobiano en el modelo (2.29), por su puesto que, en la práctica, estas lecturas se obtienen con sensores; sin embargo, en el caso de una trayectoria en el plano horizontal, las lecturas que podemos obtener con el uso de sensores en realidad son medidos desde un marco local. Esta situación se analiza en la siguiente sección.

Cabe resaltar que el punto de contacto que se considera es puntual y sin fricción, de tal forma que el agarre del objeto se dará ejerciendo una fuerza normal —lo suficientemente grande para contrarrestar los efectos gravitacionales— a la superficie del objeto; esta consideración, aunque no es muy práctica, es usada cuando se tiene una fricción despreciable o desconocida entre el efector final del robot y el ambiente.

5.1.1. Consideraciones en el espacio

Debido a que el control de posición diseñado en la Sección 3.2 no es perfecto, sino que, presenta un error acotado, es posible que el efector final no quede en perfecta perpendicularidad con la superficie del objeto que se quiere manipular, aunque nos podemos acercar tanto como sea posible hasta que el error sea prácticamente nulo mediante la selección de ganancias, de tal forma que existe la incertidumbre de obtener lecturas de fuerzas mal orientadas. Por esta razón, se opta por definir un marco ideal o deseado $\{ed, i\}$ para cada efector final del i -ésimo RMM, sobre el cuál se pueden obtener las lecturas de fuerza que se desean controlar, vea la Figura 5.2.

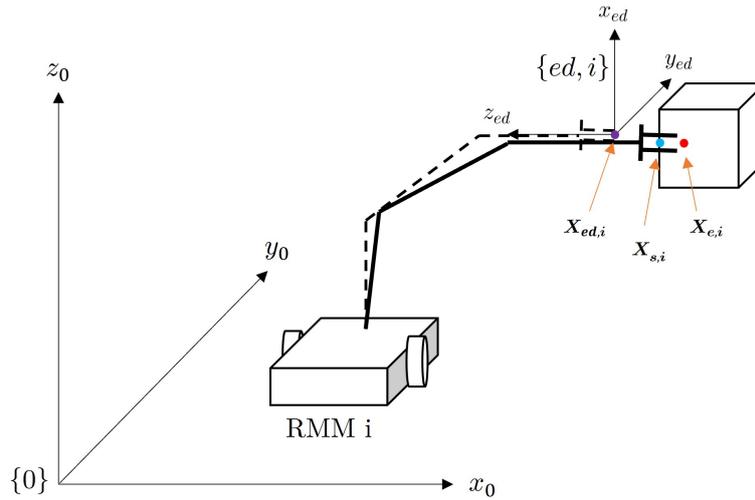


Figura 5.2: Consideración de un marco ideal

El marco deseado propuesto se define justo sobre la superficie del objeto, suponiendo que el objeto sigue perfectamente la trayectoria que se desea seguir; sin embargo, debido a su dinámica, el punto superficial del objeto puede presentar desplazamientos indeseados, esta situación se exagera un poco en la Figura 5.2 con el fin de realizar el siguiente análisis.

En virtud del modelo (5.2), se tiene la necesidad de describir la posición de los efectores finales $\mathbf{X}_{e,i}$ para el i -ésimo robot, y la posición de la superficie del objeto $\mathbf{X}_{s,i}$ en el marco ideal $\{ed, i\}$, de tal forma que se obtenga un vector de fuerzas ${}^{ed,i}\mathbf{h}_{r,i}$ medido siempre desde el marco idealizado.

Para esto, considere la siguiente relación que describe el vector de posición de la superficie del objeto que se considera para el i -ésimo robot $\mathbf{X}_{s,i}$ sobre el marco inercial:

$${}^0\mathbf{X}_{s,i} = {}^0\mathbf{R}_{ed,i} {}^{ed,i}\mathbf{X}_{s,i} + {}^0\mathbf{X}_{ed,i}$$

Despejando, se puede obtener

$${}^{ed,i}\mathbf{X}_{s,i} = {}^0\mathbf{R}_{ed,i}^T ({}^0\mathbf{X}_{s,i} - {}^0\mathbf{X}_{ed,i}) \quad (5.3)$$

La ecuación (5.3) describe la posición cartesiana de la superficie del objeto respecto al marco ideal. De forma análoga, escribimos la posición real del efector final para el i -ésimo robot

$${}^{ed,i}\mathbf{X}_{e,i} = {}^0\mathbf{R}_{ed,i}^T ({}^0\mathbf{X}_{e,i} - {}^0\mathbf{X}_{ed,i}) \quad (5.4)$$

Ahora, hace falta poder describir las coordenadas de la superficie del objeto para el i -ésimo robot respecto al marco inercial ${}^0\mathbf{X}_{s,i}$. Recuerde que en este trabajo se consideran dos robots, así $i = A, B$. Para ello, considere la Figura 5.3 que muestra una vista del plano horizontal con la trayectoria circular que se desea seguir.

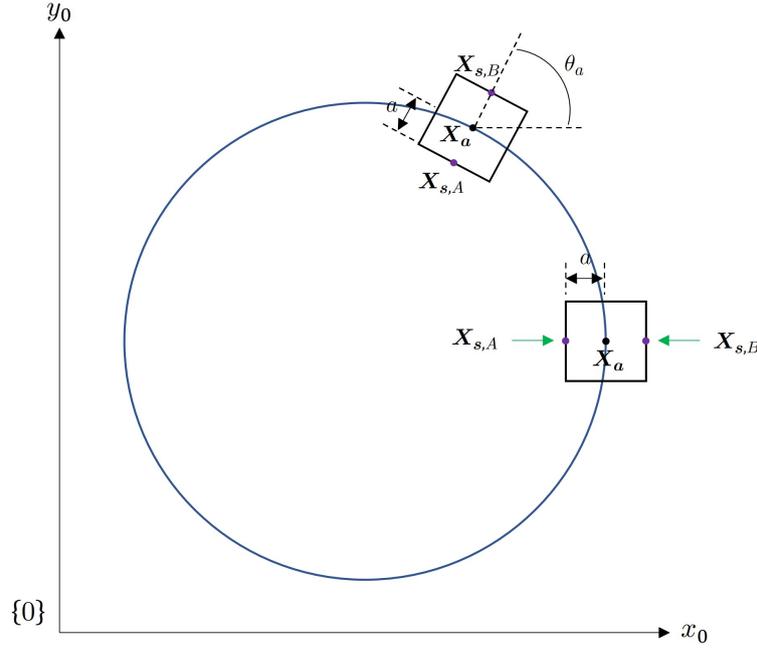


Figura 5.3: Descripción de la superficie del objeto en el marco inercial

Considerando una orientación θ_a del objeto sobre el plano, un grosor de la caja de $2a = 20$ cm. y que las coordenadas del centro de masa están descritas como ${}^0\mathbf{X}_a = [x_a \ y_a \ z_a]^T$ respecto al marco inercial, se puede escribir

$${}^0\mathbf{X}_{s,A} = {}^0\mathbf{X}_a - a \begin{bmatrix} \cos \theta_a \\ \sin \theta_a \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

$${}^0\mathbf{X}_{s,B} = {}^0\mathbf{X}_a + a \begin{bmatrix} \cos \theta_a \\ \sin \theta_a \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

Esto nos da lo necesario para poder describir un vector de fuerzas medido en el marco ideal que se propone para el i -ésimo robot, así

$${}^{ed,i}\mathbf{h}_{r,i} = \mathbf{K}_a ({}^{ed,i}\mathbf{X}_{e,i} - {}^{ed,i}\mathbf{X}_{s,i}) = [{}^{ed,i}f_{x,i} \quad {}^{ed,i}f_{y,i} \quad {}^{ed,i}f_{z,i}]^T, \quad i = A, B. \quad (5.7)$$

Por supuesto que siempre se puede hacer el mapeo de estas fuerzas al marco inercial.

$${}^0\mathbf{h}_{r,i} = {}^0\mathbf{R}_{ed,i} {}^{ed,i}\mathbf{h}_{r,i} = [{}^0f_{x,i} \quad {}^0f_{y,i} \quad {}^0f_{z,i}]^T, \quad i = A, B. \quad (5.8)$$

Dado que lo que se quiere es controlar la fuerza normal al objeto ${}^{ed,i}f_{z,i}$ en ambos robots, al calcular primero la ecuación (5.7) y luego hacer el mapeo al marco inercial, se tiene la ventaja de que la matriz de rigidez será constante todo el tiempo y tendrá la forma $\mathbf{K}_a = \text{diag}(0, 0, k_{obj})$, $k_{obj} = cte.$ donde k_{obj} es la constante de rigidez del objeto.

En caso contrario, de la Figura 5.3 note que cuando $\theta_a = 0$ solo se tiene rigidez sobre x_0 y no sobre y_0 visto desde el marco inercial, y cuando $\theta_a = \pi/2$ sólo se tiene rigidez sobre y_0 y no sobre x_0 , de tal forma que si se intenta calcular primero ${}^0\mathbf{h}_{r,i} = \mathbf{K}_a ({}^0\mathbf{X}_{e,i} - {}^0\mathbf{X}_{s,i})$ se tiene el problema de que los términos de la matriz de rigidez son variantes en el tiempo, es decir, en este caso tiene la forma $\mathbf{K}_a = \text{diag}(k_{obj}(t), k_{obj}(t), 0)$.

5.2. Modelo del objeto

El modelo dinámico del objeto se puede escribir, de manera general, como sigue [13]:

$$\mathbf{M}_a {}^a \dot{\mathbf{v}}_a + \mathbf{C}({}^a \mathbf{v}_a) {}^a \mathbf{v}_a + {}^a \mathbf{g}_a = {}^a \mathbf{h}_a \quad (5.9)$$

Donde:

$$\mathbf{M}_a = \begin{bmatrix} m_a \mathbf{1}_{3 \times 3} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & {}^a \mathbf{J}_a \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}({}^a \mathbf{v}_a) = \begin{bmatrix} m_a \mathbf{S}({}^a \boldsymbol{\omega}_a) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{S}({}^a \boldsymbol{\omega}_a) {}^a \mathbf{J}_a \end{bmatrix}, \quad {}^a \mathbf{g}_a = \begin{bmatrix} -m_a {}^a \mathbf{g}_0 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

\mathbf{M}_a es la matriz relacionada con los efectos inerciales, $\mathbf{C}({}^a \mathbf{v}_a)$ es el término relacionado con los efectos de Coriolis, ${}^a \mathbf{g}_a$ es el vector de fuerzas gravitacionales, $\mathbf{1}_{3 \times 3}$ es una matriz identidad de dimensión 3, ${}^a \mathbf{v}_a = [{}^a \dot{\mathbf{X}}_a^T \quad {}^a \boldsymbol{\omega}_a^T]^T$ es el vector de velocidades lineales y angulares, m_a es la masa del objeto, ${}^a \mathbf{J}_a$ es el tensor de inercia del objeto, ${}^a \mathbf{h}_a = [{}^a \mathbf{f}_a^T \quad {}^a \boldsymbol{\mu}_a^T]^T$ es el vector de fuerzas y momentos ejercidos por los manipuladores sobre el objeto. Todo lo anterior expresado en el marco $\{a\}$ del objeto, vea la Figura 5.4. $\mathbf{S}({}^a \boldsymbol{\omega}_a)$ es el operador matricial anti-simétrico que realiza el producto cruz, y se escribe como

$$\mathbf{S}({}^a \boldsymbol{\omega}_a) = \begin{bmatrix} 0 & -{}^a \omega_{z,a} & {}^a \omega_{y,a} \\ {}^a \omega_{z,a} & 0 & -{}^a \omega_{x,a} \\ -{}^a \omega_{y,a} & {}^a \omega_{x,a} & 0 \end{bmatrix}, \quad {}^a \boldsymbol{\omega}_a = \begin{bmatrix} {}^a \omega_{x,a} \\ {}^a \omega_{y,a} \\ {}^a \omega_{z,a} \end{bmatrix}$$

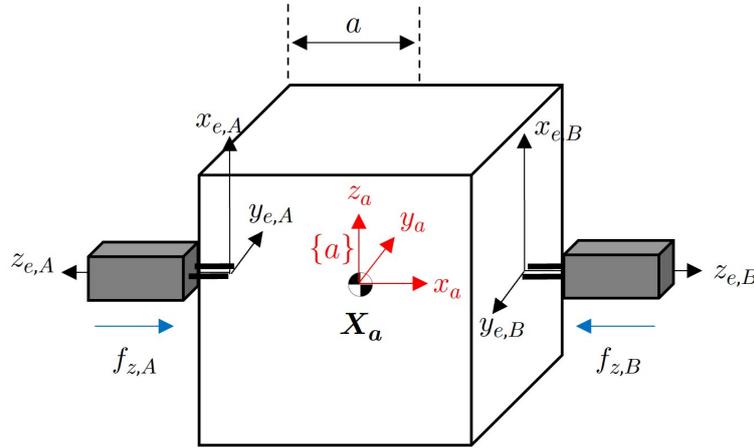


Figura 5.4: Agarre del objeto

Este modelo contempla tanto los efectos traslacionales como los rotacionales del objeto; sin embargo, por simplicidad, en este trabajo se considera sólo la parte traslacional y se mide respecto al marco inercial, es decir, se hace $\{a\} = \{0\}$. De esta manera, se tiene

$$\mathbf{M}_a {}^0 \dot{\mathbf{v}}_a + \mathbf{C}({}^0 \mathbf{v}_a) {}^0 \mathbf{v}_a + {}^0 \mathbf{g}_a = {}^0 \mathbf{h}_a \quad (5.10)$$

Donde:

necesaria (que se re-nombra como ${}^{ed}\mathbf{X}_p$) para lograr llegar a una fuerza deseada (${}^{ed}\mathbf{h}_d$). Luego, se retroalimenta la posición del efector final, que ahora será la suma de la posición de la superficie del objeto ($\mathbf{X}_{ed} = \mathbf{X}_s$) más la penetración (\mathbf{X}_p), a esto se le llama *posición comandada* y se define de la siguiente manera:

$$\mathbf{X}_c = \mathbf{X}_{ed} + \mathbf{X}_p \quad (5.11)$$

Así, el control de fuerza se escribe como:

$${}^{ed}\mathbf{X}_p = \mathbf{K}_{ph}\mathbf{e}_h + \mathbf{K}_{ih} \int \mathbf{e}_h dt \quad (5.12)$$

Donde $\mathbf{K}_{ph}, \mathbf{K}_{ih} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ son matrices diagonales definidas positivas de ganancias, y \mathbf{e}_h es el error de fuerza, que se define como sigue

$$\mathbf{e}_h = {}^{ed}\mathbf{h}_d - {}^{ed}\mathbf{h}_r \quad (5.13)$$

5.3.1. Acoplamiento a nivel de fuerza

De igual forma que en el caso de sincronización en cuanto a posición, sería interesante incorporar acoplamiento extra a nivel de fuerza, de tal forma que las fuerzas de sujeción ejercidas por los manipuladores sobre el objeto se sincronicen. Esto debería dar mejores resultados y la sujeción sería mas confiable.

Defínense los errores de fuerza para el i -ésimo robot:

$$\mathbf{e}_{h,i} = [e_{f_x,i} \quad e_{f_y,i} \quad e_{f_z,i}]^T = {}^{ed}\mathbf{h}_{d,i} - {}^{ed}\mathbf{h}_{r,i} \quad (5.14)$$

Se consideran los errores de acoplamiento para el i -ésimo robot:

$$\mathbf{e}_{ch,i} = [{}^j e_{ch_x,i} \quad {}^j e_{ch_y,i} \quad {}^j e_{ch_z,i}]^T = \mathbf{e}_{h,i} - \mathbf{e}_{h,j}, \quad i, j = A, B., \quad i \neq j \quad (5.15)$$

Así, el controlador PI de fuerza mostrado en la ecuación (5.12) se puede re-escribir como sigue para el i -ésimo robot:

$${}^{ed}\mathbf{X}_{p,i} := \mathbf{K}_{ph,i}\mathbf{e}_{h,i} + \mathbf{K}_{ih,i} \int \mathbf{e}_{h,i} dt + \mathbf{C}_{ph,i}\mathbf{e}_{ch,i} + \mathbf{C}_{ih,i} \int \mathbf{e}_{ch,i} dt, \quad i = A, B. \quad (5.16)$$

Donde $\mathbf{C}_{ph,i}$ y $\mathbf{C}_{ih,i}$ son matrices diagonales definidas positivas de ganancias de acoplamiento.

5.3.2. Simulaciones

Considérese la planeación de trayectoria para ambos robots mostrada en la Sección 4.4.1.

En la Tabla 5.1 se muestran los valores asignados a los parámetros del objeto, y se considera que la magnitud de la fuerza suficiente de sujeción es de 15 N.

Parámetro	Valor
m_a [kg]	2
a [m]	0.1
k_{obj} [N/m]	7000

Tabla 5.1: Parámetros físicos del objeto

El control de fuerza se activa en $t = 12$ seg., justo cuando los manipuladores entran en contacto con el objeto, y se define una trayectoria suave a nivel de fuerza del segundo 12 al 18, desde 0 hasta -15 N. Luego, del segundo 18 al 20, se deja la fuerza estática en -15 N. dándole al controlador un poco más de tiempo para llegar a su referencia. En $t = 20$ seg. comienza la trayectoria circular y la fuerza se mantiene estática mientras el robot se desplaza por obra de las bases móviles.

Se hace la suposición de que la fuerza planteada es suficiente para contrarrestar los efectos gravitacionales ${}^0\mathbf{g}_a$ del modelo (5.10), por tanto, no se considera en estas simulaciones. Por otro lado, esta simulación se divide en dos partes: en la primera parte se desprecian los efectos de Coriolis ($\mathbf{C}({}^0\mathbf{v}_a) {}^0\mathbf{v}_a$), y en la segunda parte estos efectos si se contemplan.

En ambas partes, considere las siguientes condiciones iniciales:

$$\mathbf{q}_A(0) = \begin{bmatrix} x_A(0) \\ y_A(0) \\ \theta_A(0) \\ \phi_{1,A}(0) \\ \phi_{2,A}(0) \\ \phi_{3,A}(0) \\ \phi_{4,A}(0) \\ \phi_{5,A}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \text{ [m]} \\ 0 \text{ [m]} \\ \frac{\pi}{2} \text{ [rad]} \\ 0 \text{ [rad]} \end{bmatrix}, \quad \eta_A(0) = \begin{bmatrix} v_A(0) \\ \dot{\theta}_A(0) \\ \dot{\phi}_{1,A}(0) \\ \dot{\phi}_{2,A}(0) \\ \dot{\phi}_{3,A}(0) \\ \dot{\phi}_{4,A}(0) \\ \dot{\phi}_{5,A}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \text{ [m/s]} \\ 0 \text{ [rad/s]} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{q}_B(0) = \begin{bmatrix} x_B(0) \\ y_B(0) \\ \theta_B(0) \\ \phi_{1,B}(0) \\ \phi_{2,B}(0) \\ \phi_{3,B}(0) \\ \phi_{4,B}(0) \\ \phi_{5,B}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \text{ [m]} \\ 0 \text{ [m]} \\ \frac{\pi}{2} \text{ [rad]} \\ 0 \text{ [rad]} \end{bmatrix}, \quad \eta_B(0) = \begin{bmatrix} v_B(0) \\ \dot{\theta}_B(0) \\ \dot{\phi}_{1,B}(0) \\ \dot{\phi}_{2,B}(0) \\ \dot{\phi}_{3,B}(0) \\ \dot{\phi}_{4,B}(0) \\ \dot{\phi}_{5,B}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \text{ [m/s]} \\ 0 \text{ [rad/s]} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{X}_a = \begin{bmatrix} x_a(0) \\ y_a(0) \\ z_a(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.5 \text{ [m]} \\ 2 \text{ [m]} \\ 0.46 \text{ [m]} \end{bmatrix}, \quad \dot{\mathbf{X}}_a = \begin{bmatrix} \dot{x}_a(0) \\ \dot{y}_a(0) \\ \dot{z}_a(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \text{ [m/s]} \\ 0 \text{ [m/s]} \\ 0 \text{ [m/s]} \end{bmatrix}$$

Las ganancias para la corrección del error de velocidad para ambos RMM se toman como

$$\mathbf{K}_p = \text{diag}[400, 720, 350, 350, 350, 350, 350]$$

Para la corrección del error de posición, se toman en cuenta las ganancias de la Tabla 5.2 para ambos robots.

k_1	k_2	k_3	k_4	k_5	k_6	k_7	k_8
700	555	300	2500	20000	20000	20000	100

Tabla 5.2: Ganancias de control de posición de ambos RMM

Se consideran las ganancias de acoplamiento articular de las Tablas 5.3 y 5.4 para el robot A y B, respectivamente.

$C_{x,A}$	$C_{y,A}$	$C_{\theta,A}$	$C_{\phi_1,A}$	$C_{\phi_2,A}$	$C_{\phi_3,A}$	$C_{\phi_4,A}$	$C_{\phi_5,A}$
200	200	200	200	200	200	200	200

Tabla 5.3: Ganancias de acoplamiento (articular) para el RMM A

$C_{x,B}$	$C_{y,B}$	$C_{\theta,B}$	$C_{\phi_1,B}$	$C_{\phi_2,B}$	$C_{\phi_3,B}$	$C_{\phi_4,B}$	$C_{\phi_5,B}$
800	800	800	800	800	800	800	800

Tabla 5.4: Ganancias de acoplamiento (articular) para el RMM B

Las ganancias de control de fuerza y de acoplamientos en fuerza para ambos robots se presentan a continuación:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{ph} &= \text{diag}[0, 0, 1 \times 10^{-4}], & \mathbf{K}_{ih} &= \text{diag}[0, 0, 1 \times 10^{-1}] \\ \mathbf{C}_{ph} &= \text{diag}[0, 0, 1 \times 10^{-6}], & \mathbf{C}_{ih} &= \text{diag}[0, 0, 1 \times 10^{-3}] \end{aligned}$$

Finalmente, la trayectoria de fuerza deseada que se usa para ambos robots es

$${}^{ed}f_{z_d,i} = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq 12 \\ -15p_f(t), & 12 < t \leq 18 \\ -15, & t > 18 \end{cases}, \quad i = A, B. \quad (5.17)$$

Donde

$$p_f(t) = 35 \left(\frac{t}{6} - 2 \right)^4 - 84 \left(\frac{t}{6} - 2 \right)^5 + 70 \left(\frac{t}{6} - 2 \right)^6 - 20 \left(\frac{t}{6} - 2 \right)^7$$

$-15p_f(t)$ es un polinomio suave que lleva la trayectoria de fuerza de 0 a -15 N. en 6 segundos.

Primera parte: $\mathbf{C}({}^0\mathbf{v}_a) {}^0\mathbf{v}_a = \mathbf{0}$

Al despreciar los efectos gravitacionales y de Coriolis en el objeto, la ecuación (5.10) se reduce a:

$$\mathbf{M}_a {}^0\ddot{\mathbf{X}}_a = {}^0\mathbf{h}_{r,A} + {}^0\mathbf{h}_{r,B} \quad (5.18)$$

La ecuación (5.18) solo considera los efectos inerciales del objeto. Así, la respuesta del sistema es la siguiente:

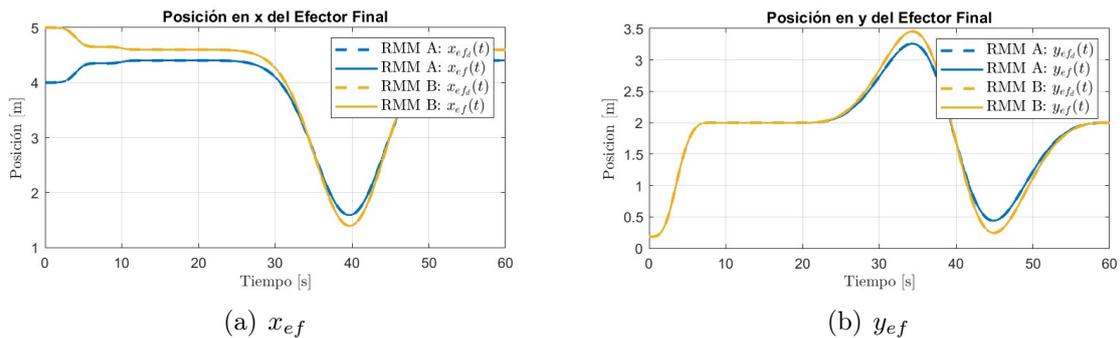


Figura 5.6: Coordenadas x, y del efector final

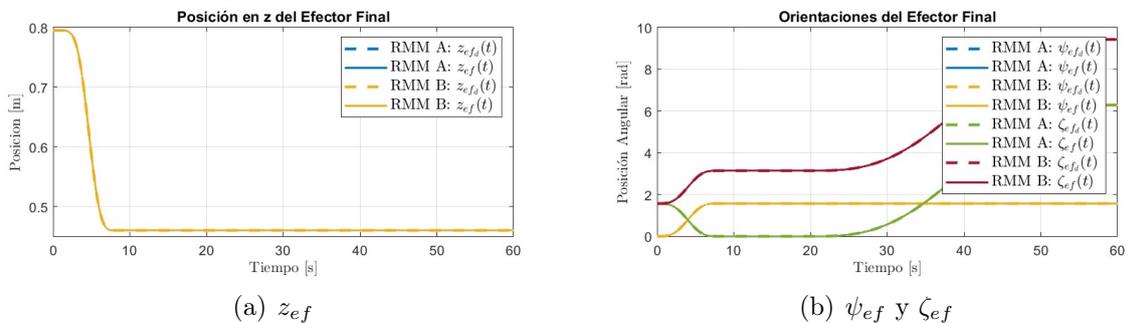


Figura 5.7: Coordenada z y orientaciones del efector final

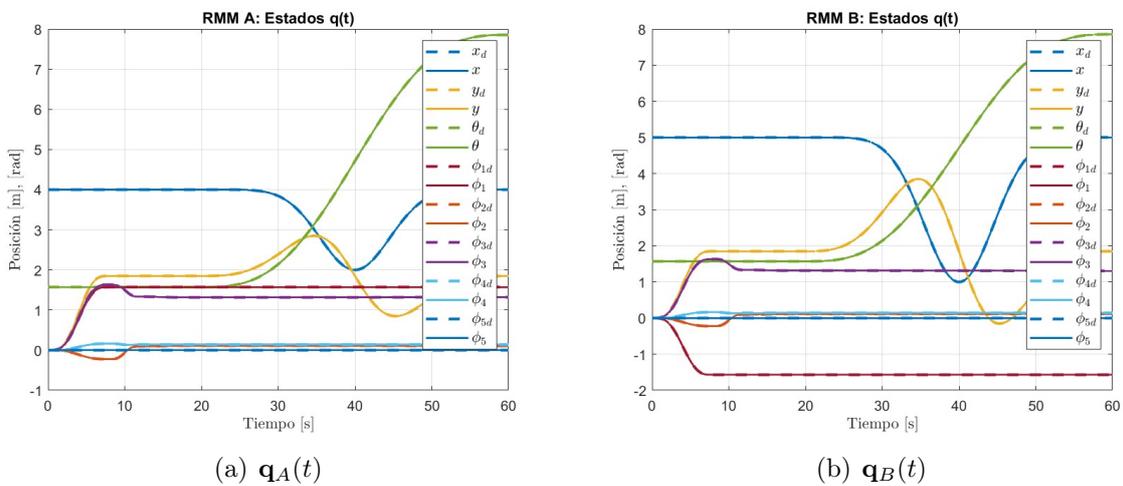


Figura 5.8: Estados $\mathbf{q}(t)$

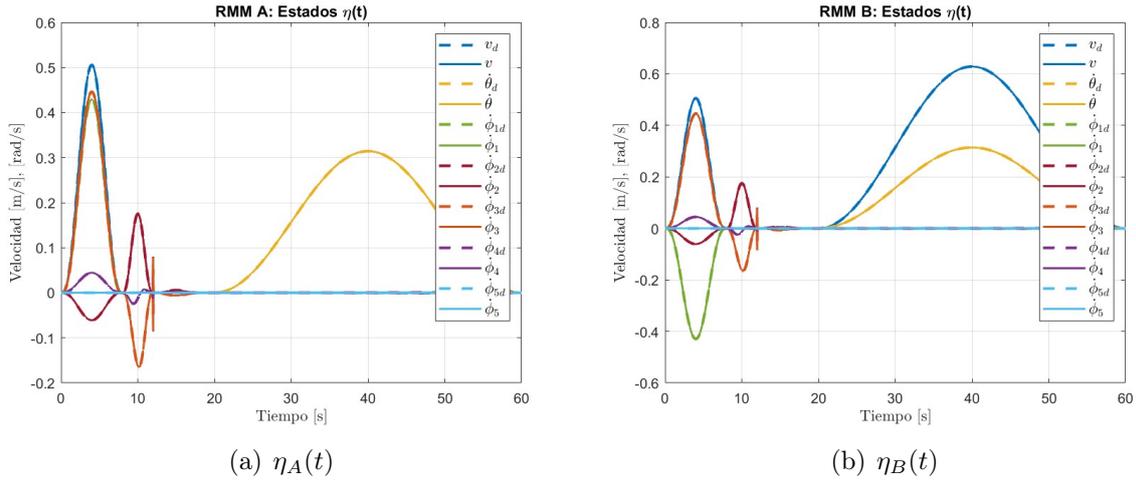


Figura 5.9: Estados $\eta(t)$

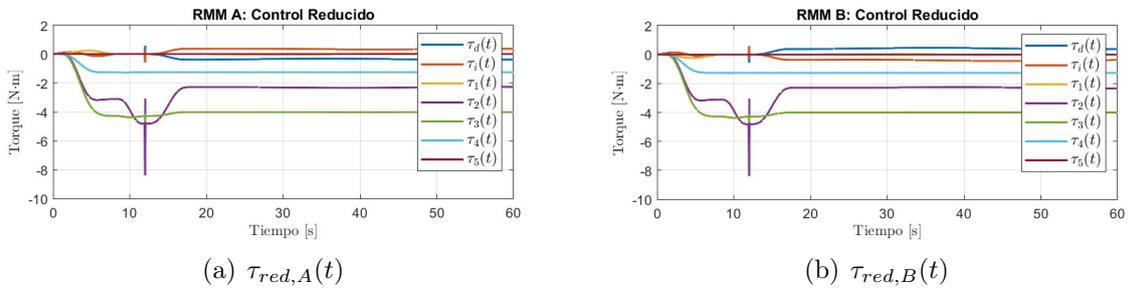


Figura 5.10: Acciones de control

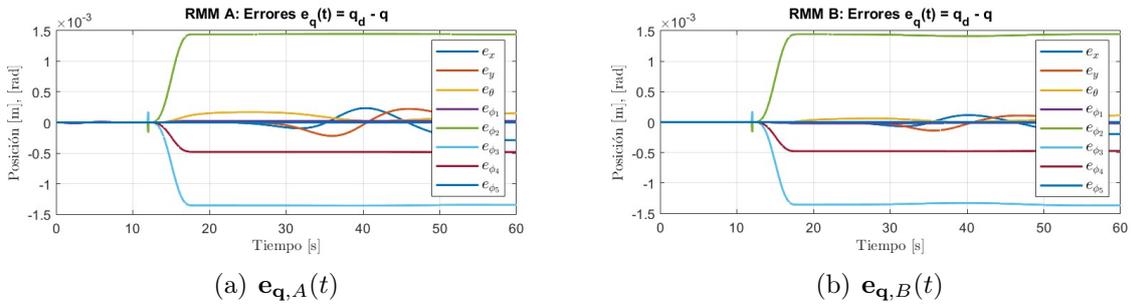


Figura 5.11: Errores en $\mathbf{q}(t)$

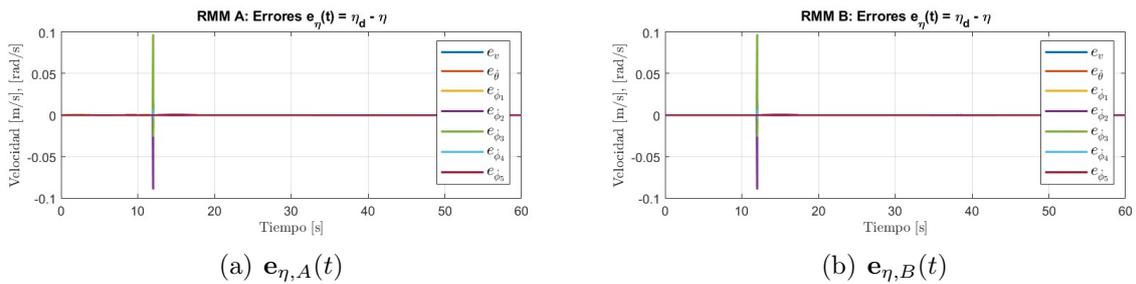


Figura 5.12: Errores en $\eta(t)$

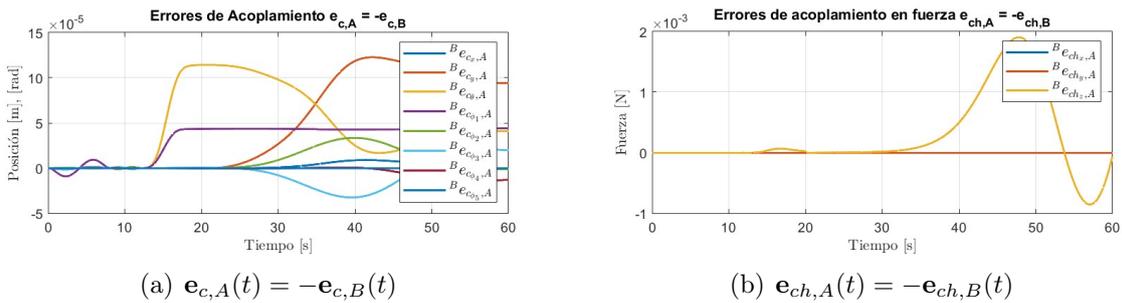


Figura 5.13: Errores de acoplamiento articular y de fuerza

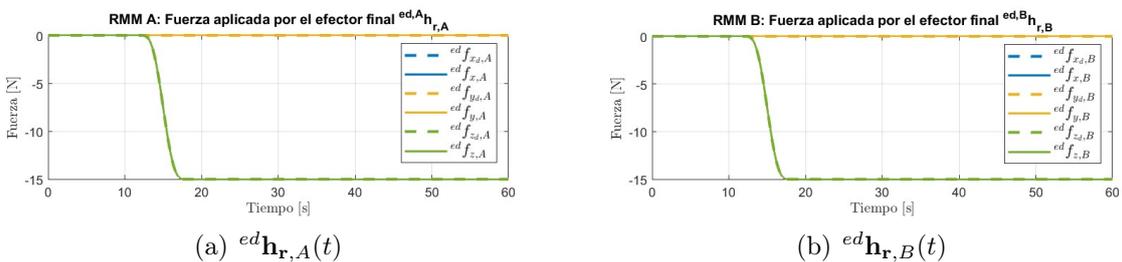


Figura 5.14: Fuerzas aplicadas por los robots sobre el objeto

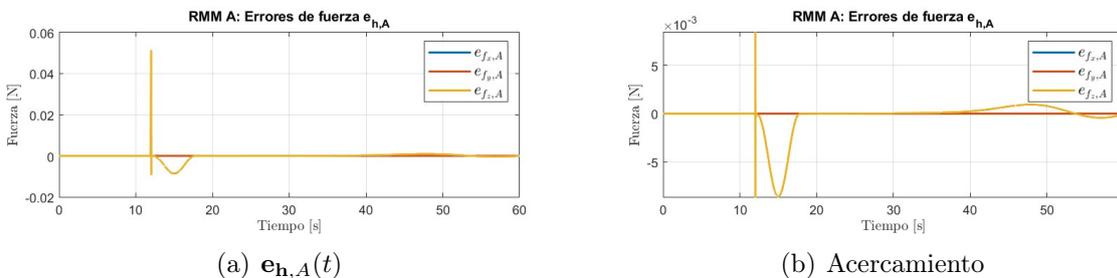


Figura 5.15: Errores de fuerza del robot A

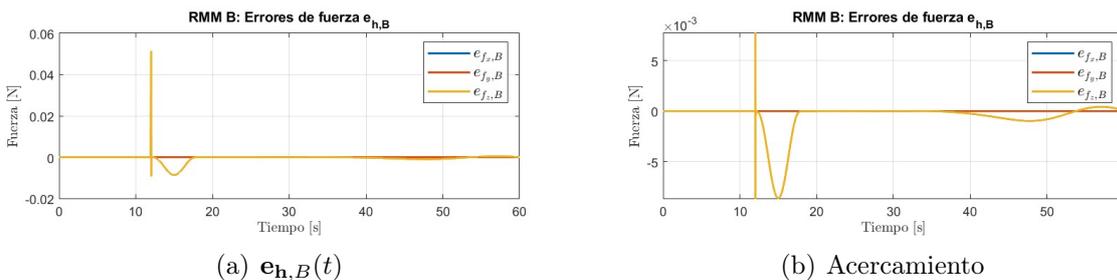


Figura 5.16: Errores de fuerza del robot B

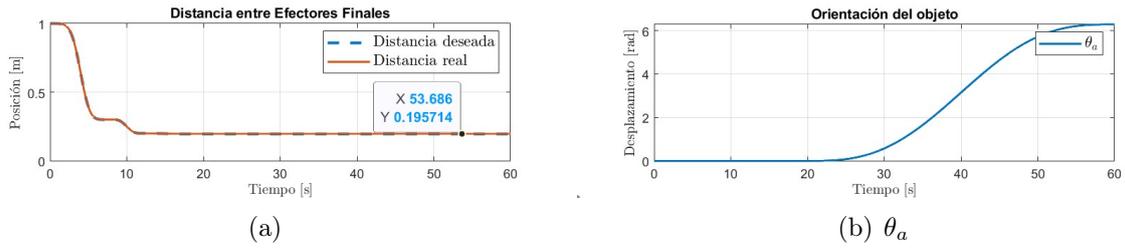


Figura 5.17: Distancia entre efectores finales y orientación del objeto

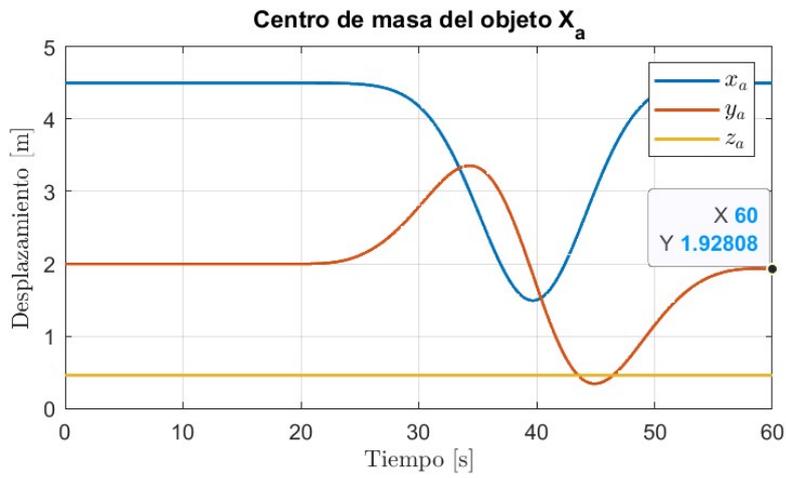


Figura 5.18: Posición cartesiana del objeto 0X_a

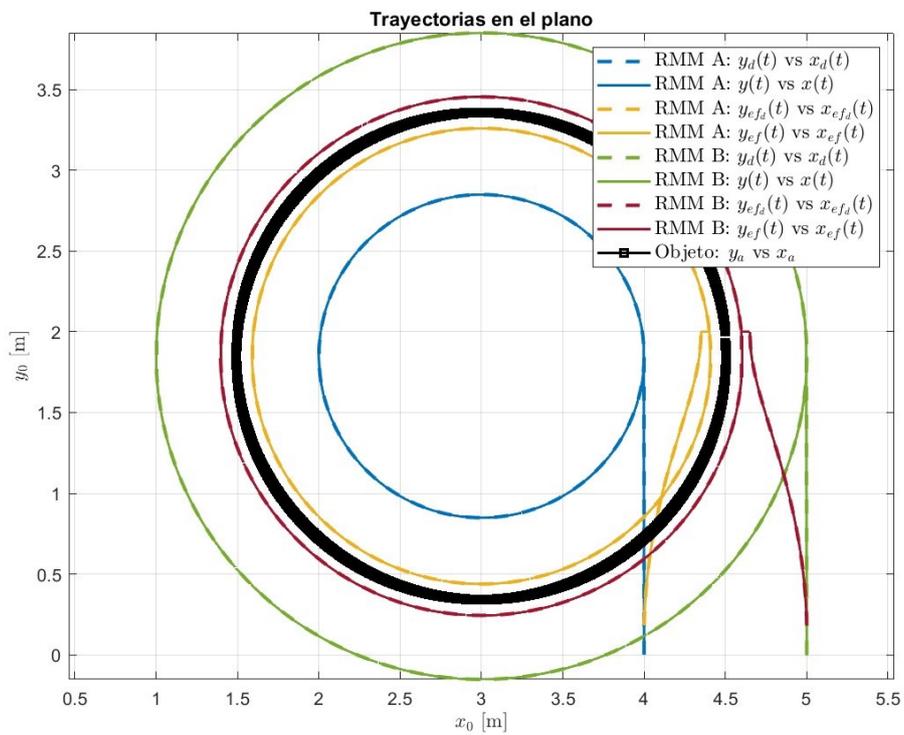


Figura 5.19: Trayectorias en el plano

Los robots parten desde un punto inicial alejado de la caja, llegan con una trayectoria recta y los efectores finales se posicionan de forma perpendicular a la superficie del objeto para realizar la sujeción, en cuanto los efectores finales tienen contacto con el objeto, en $t = 12$ seg., se puede notar un impulso sobretodo en las velocidades (Figura 5.12) y los controles tratan de corregir esos efectos dinámicos (Figura 5.10).

En cuanto al seguimiento de trayectoria a nivel de fuerza, el objetivo es alcanzar -15 N. de fuerza sobre el eje z_{ed} del marco idealizado $\{ed, i\}$ de manera suave, esto se logra y se puede ver en la Figura 5.14; sin embargo, la convergencia a nivel de fuerza no es asintótico, sino que presenta un comportamiento acotado, vea las Figuras 5.15 y 5.16. Esto repercute en la dinámica del objeto, ecuación (5.18), puesto que existen pequeñas diferencias de fuerza sobre el eje en el que actúan los robots, lo cual resulta en un desplazamiento indeseable del objeto sobre el eje inercial y_0 , se trata de un deslizamiento de 7.2 cm, esto se puede ver en la Figura 5.18. Para el final de la simulación, aún se tiene contacto entre los efectores finales y el objeto, recuerde que $a = 0.1$ m.

Por supuesto que en la práctica se tiene el factor de la fricción, por lo que el problema de deslizamiento se puede mitigar.

A continuación se muestra la animación del sistema cooperativo hecha en el ambiente virtual CoppeliaSim:

https://drive.google.com/file/d/1E7znen7B4S_C0kFMUd4orc1UfPhoy32/view?usp=sharing

Segunda parte: $C({}^0\mathbf{v}_a) {}^0\mathbf{v}_a \neq \mathbf{0}$

Dado que la trayectoria lo exige, debido a la naturaleza del círculo, se hace una simulación más añadiendo el término de efectos de Coriolis. Con esta consideración, la ecuación (5.10) toma la forma

$$\mathbf{M}_a {}^0\ddot{\mathbf{X}}_a + m_a \mathbf{S}({}^0\boldsymbol{\omega}_a) {}^0\dot{\mathbf{X}}_a = {}^0\mathbf{h}_{r,A} + {}^0\mathbf{h}_{r,B}, \quad {}^0\boldsymbol{\omega}_a = [0 \quad 0 \quad {}^0\omega_{z,a}]^T \quad (5.19)$$

Así, se obtienen las siguientes gráficas:

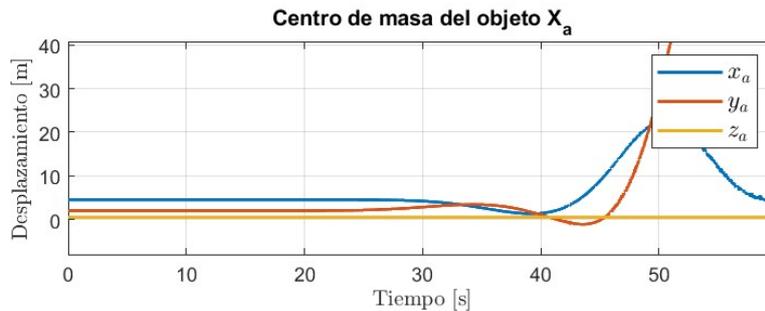


Figura 5.20: Posición cartesiana del objeto ${}^0\mathbf{X}_a$

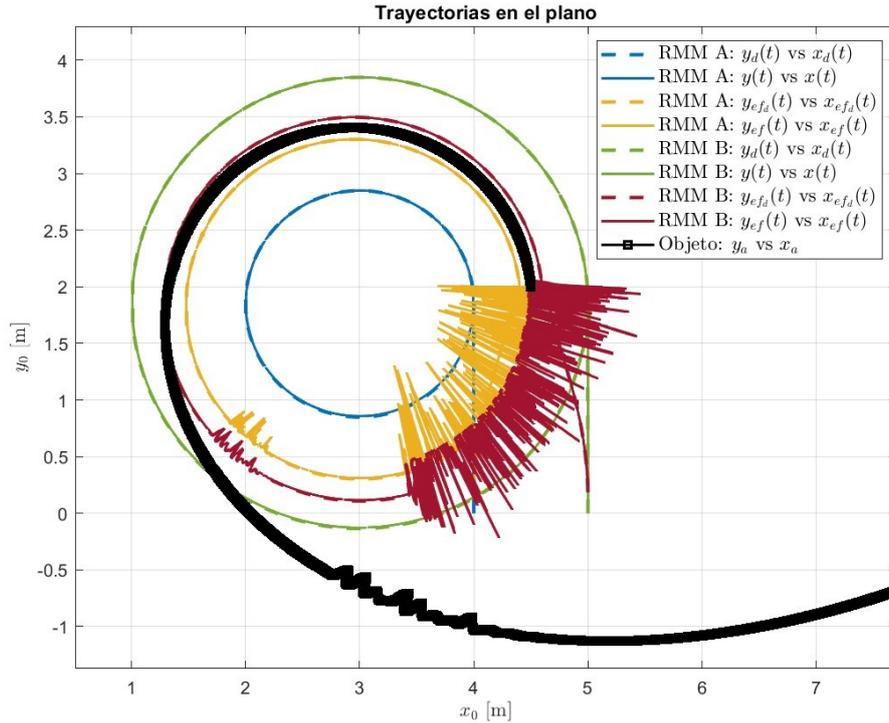


Figura 5.21: Trayectorias en el plano

Es aquí donde se puede ver la influencia de las fuerzas de Coriolis en trayectorias de naturaleza rotatoria.

En la Figura 5.21 se puede notar que el objeto escapa de la trayectoria, de tal forma que el control híbrido de posición-fuerza/par no es capaz de contrarrestar los efectos de Coriolis que se generan con la trayectoria circular en el objeto. Esto tiene sentido, el control en cuestión se usa para hacer la sujeción del objeto manteniendo una fuerza constante sobre él —y sería suficiente para trayectorias rectas o de muy baja velocidad angular—, pero conforme se recorre la trayectoria circular, el robot B que se encuentra en la periferia, necesitará ejercer cada vez más fuerza sobre el objeto para mantenerlo en su curso y contrarrestar la fuerza centrífuga. Además, sería necesario considerar un modelo de agarre con fricción para poder ejercer un control sobre el eje tangencial al círculo y compensar la fuerza generada sobre ese eje.

Esto quiere decir, que es necesario calcular la fuerza necesaria que los robots deben ejercer sobre el objeto en todo momento para que siga la trayectoria. De aquí la necesidad de extender el esquema de control.

5.4. Esquema de control híbrido posición-fuerza/par extendido

Aunque ya no es del alcance de este trabajo, a continuación se incursiona en una posible solución para el problema encontrado en la Sección 5.3.2.

En el esquema de control extendido (Figura 5.22), se propone añadir un control PID de posición para el centro de masa del objeto ${}^{ed}\mathbf{X}_a$, al cual se le asigna una trayectoria deseada ${}^{ed}\tilde{\mathbf{X}}_a$ para generar un error de posición $\mathbf{e}_{P_{ext}}$, y nos arroja un diferencial de fuerza

${}^{ed}\Delta\mathbf{h}_d$ que se suma a la fuerza deseada de sujeción antes considerada ${}^{ed}\mathbf{h}_d$, es decir, con esto podemos agregar la variación necesaria de fuerza que deben ejercer los efectores finales al objeto tal que éste siga la trayectoria deseada [29].

Con este nuevo panorama, y regresando al problema de la manipulación cooperativa usando dos robots, la idea es usar el control híbrido de posición-fuerza/par extendido que se presenta en esta sección en uno de los robots (piénsese en el robot B), y el control presentado en la Sección 5.3 en el que resta. De esta manera, se puede pensar como un esquema maestro-esclavo a nivel de fuerza, en el cual, el robot B funge como maestro debido a que es el encargado de mantener el objeto sobre la trayectoria deseada aplicando la fuerza que sea necesaria, y el robot A tiene la función de esclavo —en el contexto de fuerza—, debido a que su función se limita a mantener una fuerza constante sobre el objeto para asegurar el agarre, en este sentido, se dice que el robot A está en reacción.

Una consideración importante en el control híbrido de posición-fuerza/par extendido, es la aparición de la problemática respecto a los acoplamientos antes considerados.

Por un lado se tienen los acoplamientos a nivel de posición que se usaron antes para mantener la sincronización articular (\mathbf{e}_c), en este caso resultaría contraproducente añadirlos, al menos para la parte del manipulador, puesto que lo que se quiere es darle la libertad al manipulador B, que tiene el rol de maestro, para moverse según lo requiera la trayectoria deseada del objeto. Piénsese en una trayectoria senoidal (o cualquier otra que no sea constante) para el objeto en el plano de los efectores finales; el control de sincronización articular trataría de mantener los manipuladores en formación de espejo (tal como se definió en la Sección 4.4.1), lo cual ya no es deseable. Sin embargo, la formación que se planteó para las bases móviles (círculos concéntricos) si que interesan, por esta razón sería natural mantener el control de sincronización articular solo para la parte de la base.

Por otro lado, los acoplamientos a nivel de fuerza (\mathbf{e}_{ch}) también resultan contraproducentes debido a que la fuerza que ejerce el robot B (maestro) sobre el objeto es variante en el tiempo, mientras que el robot A (esclavo) solo se mantiene en reacción al mantener una fuerza constante sobre el objeto. En este escenario, el control de sincronización a nivel de fuerza, se opondría a las variaciones de fuerza que necesita ejercer el robot B sobre el objeto. Así, se propone deshechar por completo la adición de los acoplamientos a nivel de fuerza. Y en su lugar, se añade un nuevo término de acoplamiento pero a nivel de posición $\mathbf{e}_{c_{ext}}$, en donde se considera la distancia entre los efectores finales después de asegurar la sujeción del objeto, y su función será mantener esa distancia durante la manipulación.

$$\mathbf{e}_{P_{ext}} = {}^{ed,B}\tilde{\mathbf{X}}_a - {}^{ed,B}\mathbf{X}_a \quad (5.21)$$

De esta manera, se propone un control PID que nos arroja el diferencial de fuerza necesario que se desea para que el efector final del robot B mueva el objeto en el plano de los efectores.

$${}^{ed}\Delta\mathbf{h}_d = \mathbf{K}_{p_{ext}}\mathbf{e}_{P_{ext}} + \mathbf{K}_{i_{ext}} \int \mathbf{e}_{P_{ext}} dt + \mathbf{K}_{d_{ext}} \frac{d}{dt}\mathbf{e}_{P_{ext}} \quad (5.22)$$

De tal forma que el error de fuerza para el robot B se re-define como

$$\mathbf{e}_h := \mathbf{h}_T - \mathbf{h}_r, \quad \mathbf{h}_T = \mathbf{h}_d + \Delta\mathbf{h}_d \quad (5.23)$$

Luego, para el robot A, se re-define la posición del efector final deseada como una función de la posición del efector final actual del robot B, así

$$\mathbf{X}_{ed,A} = f(\mathbf{X}_{e,B}) \quad (5.24)$$

5.4.1. Acoplamiento para el control de fuerza extendido

El enfoque ahora es tratar de mejorar el comportamiento del control de fuerza extendido mediante la inserción de un nuevo control por acoplamiento pero a nivel de posición, en particular, de los efectores finales.

Es posible calcular, de manera nominal, la penetración necesaria (ρ_n) sobre el objeto para obtener la fuerza necesaria de sujeción. Por ejemplo, en el caso que nos acontece, se tiene

$$\rho_n = \frac{f_d}{k_{obj}} = \frac{15 \text{ [N]}}{7000 \text{ [N/m]}} = 2.1429 \text{ mm.} \quad (5.25)$$

Así, sea $\mathbf{e}_{c_{ext}}$ el error de acoplamiento para el control de fuerza extendido con $2a$ el grosor del objeto. Se tiene

$$\mathbf{e}_{c_{ext}} = 2a - 2\rho_n - |\mathbf{X}_{e,B} - \mathbf{X}_{e,A}| \quad (5.26)$$

Note que $e_{c_{ext}}$ es un escalar, el control se define sobre el eje z_{ed} del marco ideal como sigue

$$\mathbf{K}_{ext} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ k_{p_{c_{ext}}} & k_{i_{c_{ext}}} & k_{d_{c_{ext}}} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{PID}_{ext} = \begin{bmatrix} e_{c_{ext}} \\ \int e_{c_{ext}} dt \\ \frac{d}{dt}e_{c_{ext}} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{ext}\mathbf{PID}_{ext} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ k_{p_{c_{ext}}}e_{c_{ext}} + k_{i_{c_{ext}}} \int e_{c_{ext}} dt + k_{d_{c_{ext}}} \frac{d}{dt}e_{c_{ext}} \end{bmatrix} \quad (5.27)$$

De tal forma que el control de fuerza de la ecuación (5.22) para el robot B se re-define como

$${}^{ed,B}\Delta\mathbf{h}_{d,B} := \mathbf{K}_{p_{ext}}\mathbf{e}_{P_{ext}} + \mathbf{K}_{i_{ext}} \int \mathbf{e}_{P_{ext}} dt + \mathbf{K}_{d_{ext}} \frac{d}{dt}\mathbf{e}_{P_{ext}} + \mathbf{K}_{ext}\mathbf{PID}_{ext} \quad (5.28)$$

Por otro lado, para el robot A, se tiene el control por acoplamiento

$${}^{ed,A}\Delta\mathbf{h}_{d,A} = \mathbf{K}_{ext}\mathbf{PID}_{ext} \quad (5.29)$$

Con lo cual se crea un diferencial de fuerza que se suma a la fuerza deseada ${}^{ed,A}\mathbf{h}_{d,A}$ del control estándar (Figura 5.5). Modificando así, el esquema a bloques del robot A para la parte de la referencia en fuerza, tal como se muestra en la Figura 5.23.

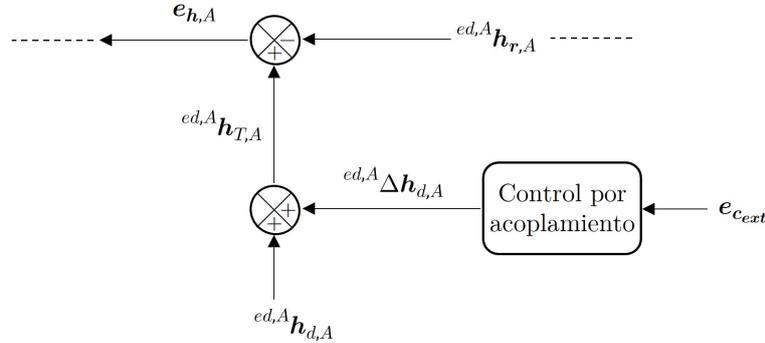


Figura 5.23: Expansión de la fuerza deseada en el robot A (esclavo) con control por acoplamiento

En donde, la nueva referencia de fuerza para el robot A es

$${}^{ed,A}\mathbf{h}_T = {}^{ed,A}\mathbf{h}_{d,A} + {}^{ed,A}\Delta\mathbf{h}_{d,A} \quad (5.30)$$

En este capítulo, se ha dado un esquema de control, a nivel de fuerza, que funciona para fines de manipulación cooperativa usando un sistema de RMM's considerando que la trayectoria deseada es tal que no se generan fuerzas rotatorias, o bien, que las velocidades angulares en el objeto manipulado son mínimas, y se ha probado a nivel de simulación de manera exitosa. También, se ha dado la pauta a un esquema de control extendido que, en conjunto con la consideración de un modelo de agarre con fricción, corrige el problema de compensación en los efectos de Coriolis sobre el objeto y, además, se puede agregar una trayectoria deseada en el objeto en el plano de los manipuladores.

Capítulo 6

Resultados experimentales

En este capítulo se presentan los resultados usando la plataforma experimental del KUKA youBot.

Se muestra el problema de seguimiento usando una trayectoria circular y se comparan los resultados con lo obtenido en la Sección 3.4.

6.1. Seguimiento de trayectoria del KUKA youBot

El KUKA youBot usa Ubuntu 12.04 LTS como sistema operativo, y se comunica con una computadora externa mediante *sockets*, esto permite una comunicación activa entre un servidor (la computadora externa) y un cliente (el robot), vea la Figura 6.1; de tal forma que podemos enviar y recibir información al robot. El lenguaje de programación en la computadora externa es C++.

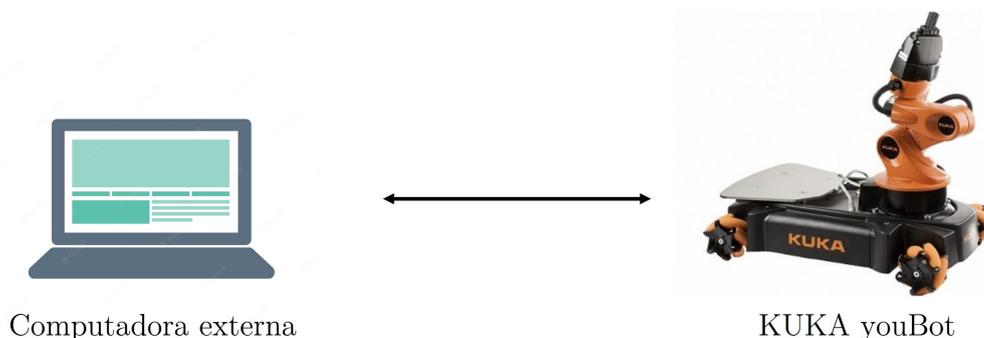


Figura 6.1: Esquema de comunicación experimental

6.1.1. Consideraciones Importantes

Físicamente, fue necesario tomar en cuenta algunas consideraciones importantes que se presentan en esta sección.

El robot Kuka youbot es un robot de base móvil de tipo omnidireccional, y el control que se propone en este trabajo está pensado para un diferencial tal que cumple con la restricción no holonómica. De tal forma que una de las consideraciones que se hacen es que los torques de las llantas a un costado de la base tengan la misma magnitud y el mismo sentido, de esta manera la base omnidireccional se comporta como un diferencial, esto es

válido dado que las ruedas del KUKA youBot sólo se mueven sobre el eje longitudinal pero no tienen libertad de orientación.

Otro detalle que se encontró fueron las retroalimentaciones y el marco inercial que define el robot. Por medio de los encoders, el robot nos arroja mediciones de posición y velocidad, medidos respecto a su marco inercial, que denotaremos como $\{m\}$. Además, las velocidades que la computadora del robot mide y nos retroalimenta son la velocidad longitudinal y transversal del vehículo pero respecto a su marco local, de tal forma que la velocidad longitudinal que nos arroja es directamente la velocidad lineal $v = \eta_1$ que necesitamos. Por estas razones, se tuvo la necesidad de hacer las transformaciones pertinentes para poder retroalimentar los estados de posición y velocidad respecto al marco inercial $\{0\}$ definido por nosotros a placer.

En general, las retroalimentaciones a nivel de velocidad que miden los encoders resultan muy ruidosas, por lo que se optó por usar un filtro recursivo de primer orden.

Mapeo de coordenadas para el móvil

Considere la Figura 6.2.

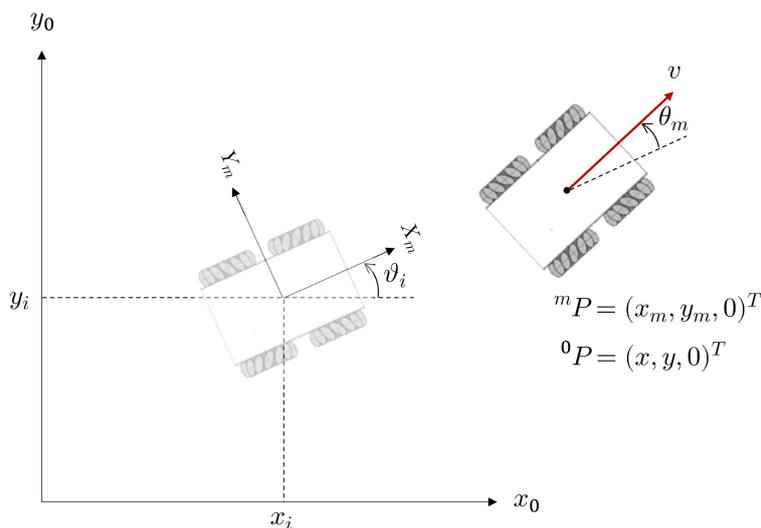


Figura 6.2: Relación entre marcos inerciales y coordenadas

El KUKA youBot nos retroalimenta las variables (x_m, y_m, θ_m) medidas desde el marco $\{m\}$, velocidad longitudinal v y las variables de posición y velocidad articulares del manipulador $(\phi_i, \dot{\phi}_i)$, $i = 1, \dots, 5$. Luego, se formulan las ecuaciones para nuestras coordenadas generalizadas del móvil (x, y, θ) y sus velocidades $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{\theta})$ medidas desde el marco inercial $\{0\}$.

Sean (x_i, y_i) las coordenadas del punto inicial del móvil respecto al marco inercial, y ϑ_i el ángulo inicial respecto a la horizontal. La matriz de transformación homogénea que relaciona al marco del robot $\{m\}$ al marco inercial $\{0\}$ es

$${}^0\mathbf{T}_m = \begin{bmatrix} \cos \vartheta_i & -\sin \vartheta_i & 0 & x_i \\ \sin \vartheta_i & \cos \vartheta_i & 0 & y_i \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.1)$$

Se pueden obtener las coordenadas (x, y) respecto al marco inercial de cualquier punto (x_m, y_m) en el plano medido desde el marco $\{m\}$ con la siguiente ecuación

$${}^0\mathbf{P} = {}^0\mathbf{R}_m {}^m\mathbf{P} + {}^0\mathbf{O}_m \quad (6.2)$$

Donde

$${}^0\mathbf{P} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix}, \quad {}^0\mathbf{R}_m = \begin{bmatrix} \cos \vartheta_i & -\sin \vartheta_i & 0 \\ \sin \vartheta_i & \cos \vartheta_i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad {}^m\mathbf{P} = \begin{bmatrix} x_m \\ y_m \\ 0 \end{bmatrix}, \quad {}^0\mathbf{O}_m = \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ 0 \end{bmatrix}$$

Esto es

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \vartheta_i & -\sin \vartheta_i & 0 \\ \sin \vartheta_i & \cos \vartheta_i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_m \\ y_m \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_i + x_m \cos \vartheta_i - y_m \sin \vartheta_i \\ y_i + y_m \cos \vartheta_i + x_m \sin \vartheta_i \\ 0 \end{bmatrix}$$

Derivando, se obtienen las velocidades

$${}^0\dot{\mathbf{P}} = {}^0\dot{\mathbf{R}}_m {}^m\mathbf{P} + {}^0\mathbf{R}_m {}^m\dot{\mathbf{P}} \quad (6.3)$$

Explícitamente se tiene

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -\dot{\vartheta}_i \sin \vartheta_i & -\dot{\vartheta}_i \cos \vartheta_i & 0 \\ \dot{\vartheta}_i \cos \vartheta_i & -\dot{\vartheta}_i \sin \vartheta_i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_m \\ y_m \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos \vartheta_i & -\sin \vartheta_i & 0 \\ \sin \vartheta_i & \cos \vartheta_i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_m \\ \dot{y}_m \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \dot{x}_m \cos \vartheta_i - \dot{y}_m \sin \vartheta_i \\ \dot{y}_m \cos \vartheta_i + \dot{x}_m \sin \vartheta_i \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Donde

$$\dot{x}_m = v \cos \theta_m, \quad \dot{y}_m = v \sin \theta_m$$

Para la orientación de la base móvil se puede escribir

$$\theta = \vartheta_i + \theta_m, \quad \dot{\theta} = \dot{\theta}_m$$

Relación de torques

El comportamiento omnidireccional del KUKA youBot se logra gracias a que cuenta con ruedas tipo Mecanum. Éstas consisten en ruedas convencionales que disponen de una serie de rodillos en su circunferencia. Los rodillos presentan una configuración de 45° respecto al plano de la rueda y tienen una forma curvada de forma que, vista desde el lateral, la rueda mantiene un perfil circular, vea la Figura 6.3 (a). Así, el KUKA youBot no necesita orientar sus ruedas para lograr un desplazamiento lateral, sino que al girar sus ruedas de forma encontrada, los rodillos producen ese movimiento, vea la Figura 6.3 (b).

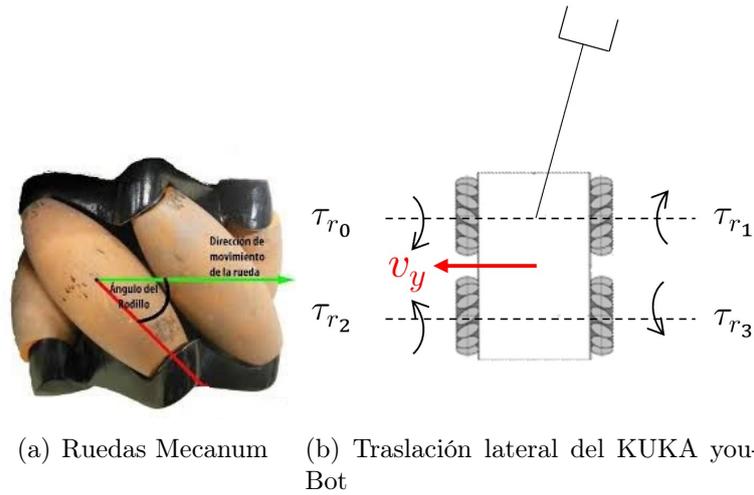


Figura 6.3: Comportamiento omnidireccional del KUKA youBot

Para el robot diferencial vea que sólo se consideran dos ruedas colocadas justo en el centro de cada costado del móvil, coincidentes con el eje transversal, de tal forma que para emular esa situación con la base omnidireccional de cuatro ruedas simplemente se hace la relación

$$\begin{aligned} \tau_{r_0} &= \tau_{r_2} = -\frac{\tau_d}{2} \\ \tau_{r_1} &= \tau_{r_3} = \frac{\tau_d}{2} \end{aligned} \quad (6.4)$$

En donde τ_{r_i} , $i = 0, \dots, 3$ son los torques a nivel de rueda de la base omnidireccional, y giran en el sentido que se muestra en la Figura 6.4.

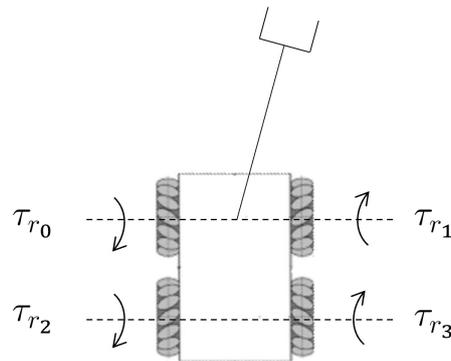


Figura 6.4: Sentido positivo de los torques en la base móvil del Kuka youBot

Un aspecto importante a considerar es el acotamiento de los torques para no quemar los actuadores del robot. En este caso, se acotaron de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} -10 \text{ [N} \cdot \text{m]} &\leq \tau_d, \tau_i, \tau_5 \leq 10 \text{ [N} \cdot \text{m]} \\ -15 \text{ [N} \cdot \text{m]} &\leq \tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4 \leq 15 \text{ [N} \cdot \text{m]} \end{aligned}$$

Filtro recursivo de primer orden

El filtro implementado en código para atenuar el ruido de las retroalimentaciones a nivel de velocidad es un filtro recursivo como se muestra en la siguiente ecuación

$$\begin{aligned} y(k) &= \alpha x(k) + (1 - \alpha) y(k - 1), \quad \alpha = 0.01 \\ y(0) &= 0 \end{aligned} \quad (6.5)$$

Siendo $y(k)$ la salida del filtro y $x(k)$ la entrada del filtro en la k -ésima muestra.

6.1.2. Resultados

Se considera la trayectoria circular propuesta en la Sección 3.4.1, las ganancias de la Tabla 3.6 y los parámetros mostrados en la Tabla 3.7. También, se usan las mismas condiciones iniciales mostradas en la Sección 3.4.2, es decir,

$$\mathbf{q}(0) = \begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \\ \theta(0) \\ \phi_1(0) \\ \phi_2(0) \\ \phi_3(0) \\ \phi_4(0) \\ \phi_5(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \text{ [m]} \\ 0 \text{ [m]} \\ \frac{\pi}{2} \text{ [rad]} \\ 0 \text{ [rad]} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\eta}(0) = \begin{bmatrix} v(0) \\ \dot{\theta}(0) \\ \dot{\phi}_1(0) \\ \dot{\phi}_2(0) \\ \dot{\phi}_3(0) \\ \dot{\phi}_4(0) \\ \dot{\phi}_5(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \text{ [m/s]} \\ 0 \text{ [rad/s]} \end{bmatrix}$$

Así, a continuación se muestran las gráficas de los resultados obtenidos en la práctica.

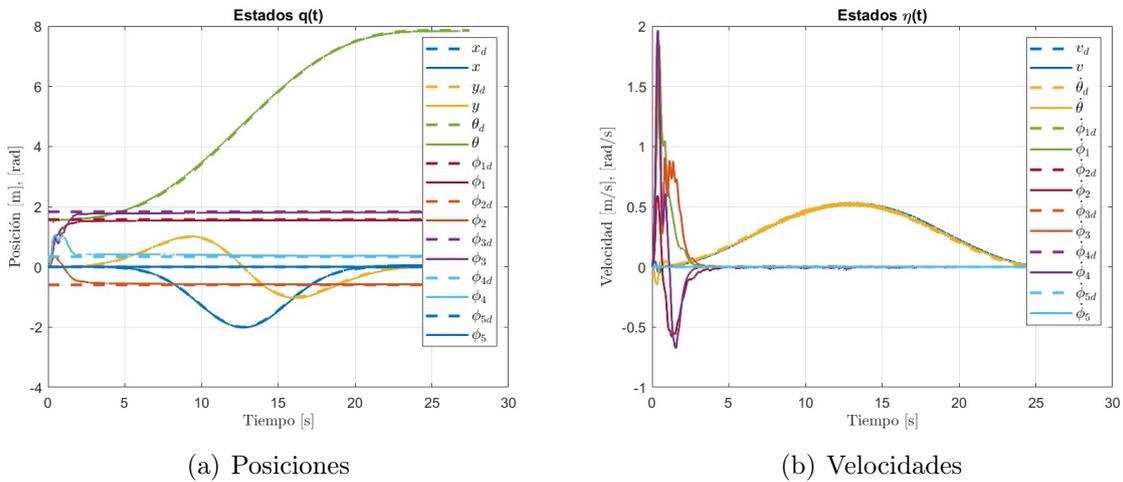


Figura 6.5: Estados del sistema

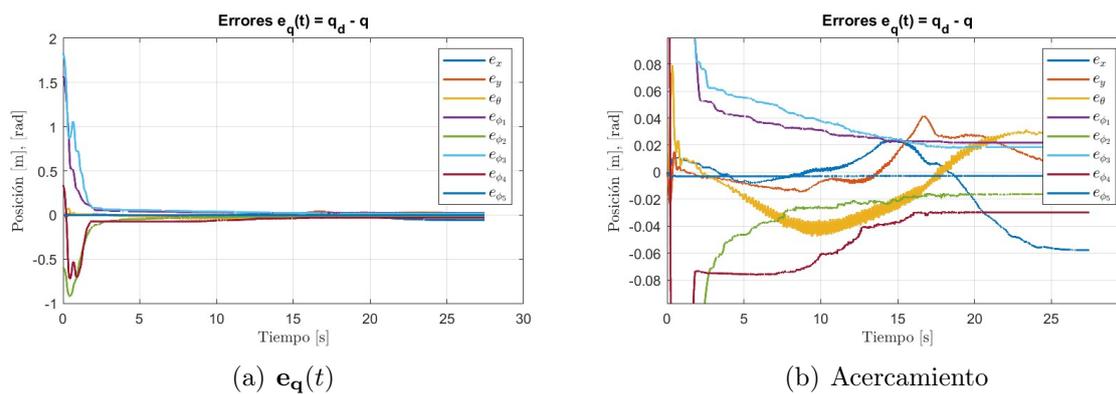
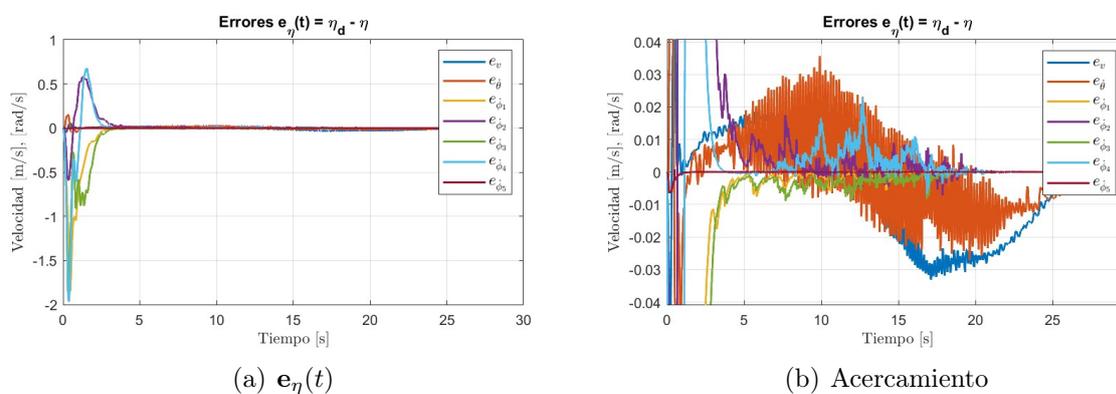
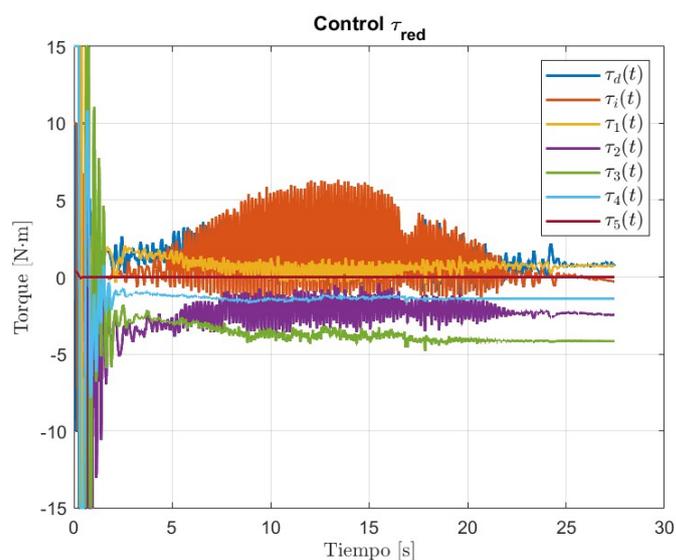
Figura 6.6: Errores en $q(t)$ Figura 6.7: Errores en $\eta(t)$ 

Figura 6.8: Control

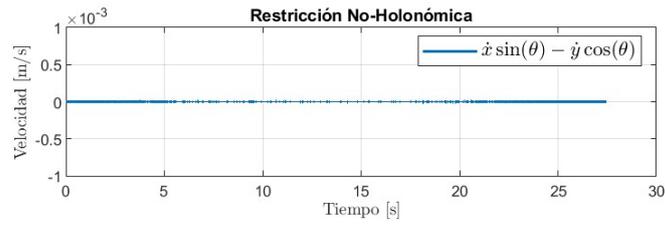
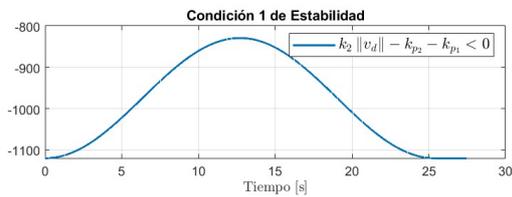


Figura 6.9: Restricción no holonómica



(a) $k_2 \|v_d\| - k_{p2} - k_{p1} < 0$



(b) $\|e_\beta\| \leq \frac{3k_1 \|v_d\|}{k_{p2} + k_{p1} - k_2 \|v_d\|}$

Figura 6.10: Condiciones de estabilidad

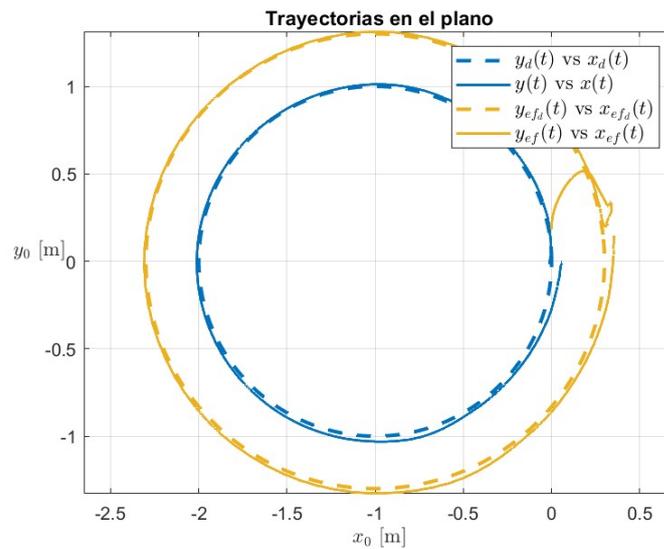


Figura 6.11: Trayectorias en el plano

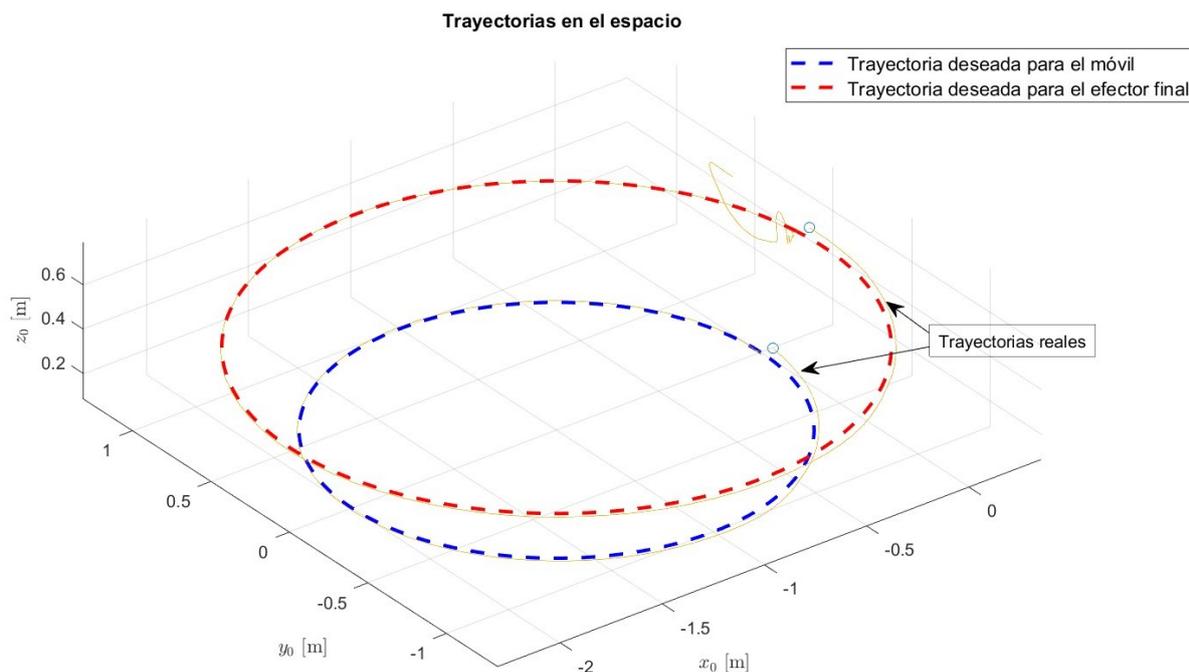


Figura 6.12: Trayectorias en el espacio

En la Figura 6.5 se puede ver un buen seguimiento de trayectoria tanto a nivel de posición como de velocidad; en la Figura 6.6 se puede ver un error en estado estacionario máximo de 6 cm. sobre el eje x_0 , en general, parece un error aceptable dado que se tienen incertidumbres paramétricas; en la Figura 6.9 se puede ver el cumplimiento de la restricción no holonómica, por lo que, la relación de torques que se define en (6.4) para tratar la base omnidireccional como una base de tipo diferencial, es válida; finalmente, en la Figura 6.10 se muestra la validación numérica de las condiciones de estabilidad para el caso práctico, específicamente de la Figura 6.10 (b) vea que la condición solo se llega a violar cuando $v_d = 0$ (al inicio y al final de la trayectoria), debido a la indeterminación que existe en la velocidad angular de la base móvil, vea la ecuación (3.6).

En el siguiente link se muestra el video del experimento: <https://drive.google.com/file/d/1We9XsklA2-GLTUxg973DUmGcWTJm1zAz/view?usp=sharing>.

Capítulo 7

Conclusiones y trabajo futuro

7.1. Conclusiones

Se dió una metodología general para el modelo de un RMM de n grados de libertad, y se diseñó una ley de control basada en la técnica de par calculado que logra compensar los errores a nivel de posición y velocidad. Se hizo un análisis de estabilidad y se logró demostrar estabilidad semiglobal y UUB para la parte de la base móvil, y estabilidad asintótica para la parte del manipulador; además, el problema de seguimiento de trayectoria se abordó de manera práctica obteniendo un error máximo de 6 cm. y validando los resultados del análisis de estabilidad, aún con incertidumbres paramétricas.

Se logró extender el control de posición a términos de sincronización y se compararon dos esquemas: maestro-esclavo y maestro-esclavo acoplado. En el segundo, se añaden términos de acoplamiento al primero para lograr un esquema con un flujo de información bi-direccional, y se pone a prueba mediante simulaciones numéricas para mostrar su supremacía, en cuanto a sincronización. También, se da la planeación de trayectoria usando dos robots KUKA youBot pensando en el problema de manipulación cooperativa.

Se añadió un lazo externo de control, a nivel de fuerza, logrando un esquema de control híbrido de posición-fuerza/par con el que se aborda el problema de manipulación cooperativa considerando un objeto rígido, dos robots KUKA youBot y un agarre puntual de los efectores finales. Con este enfoque, y añadiendo términos de acoplamiento pero ahora a nivel de fuerza, se logra hacer la sujeción del objeto con una fuerza deseada (y se supone suficiente para contrarrestar los efectos gravitacionales) y se aprovechan las bases móviles para realizar alguna trayectoria en el espacio; sin embargo, se encuentra que este esquema de control sólo es válido y suficiente para trayectorias que no sean de naturaleza rotatoria, y se muestra mediante simulaciones numéricas. Como propuesta de solución ante el problema anterior, se plantea el uso de un modelo de agarre con fricción en conjunto con un esquema de control híbrido de posición-fuerza/par extendido, en el cual se propone directamente una trayectoria para el objeto a manipular y se añaden términos de acoplamiento considerando la distancia entre los efectores finales necesaria para no perder la sujeción del objeto.

7.2. Trabajo futuro

A partir del trabajo desarrollado y las conclusiones dadas, se mencionan las propuestas de trabajo futuro que permitan dar continuidad a la línea de investigación planteada en

esta tesis.

- Considerar un modelo de agarre más realista entre los efectores finales y el objeto manipulado. Sería interesante un agarre con fricción, en el sentido de agregar la compensación de los efectos gravitacionales del objeto en el control de fuerza, o bien, un agarre tipo *soft-finger* para mejorar, de forma general, la manipulabilidad.
- Agregar el control de par al sistema cooperativo.
- Implementar el esquema de control híbrido de posición-fuerza/par extendido con acoplamiento en conjunto con un modelo de agarre con fricción considerando la dinámica completa del objeto.
- En este trabajo se han usado acoplamientos de tipo estáticos. Se propone cambiar el enfoque al uso de acoplamientos dinámicos.
- Validar la parte de sincronización y control de fuerza de forma experimental.

$$\begin{aligned}
{}^0\mathbf{T}_1 &= \left\{ T \begin{pmatrix} x \\ y \\ R \end{pmatrix}, R \left(z_0, \theta - \frac{\pi}{2} \right) \right\} = \begin{bmatrix} \cos \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right) & -\sin \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right) & 0 & x \\ \sin \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right) & \cos \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right) & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & R \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
{}^1\mathbf{T}_2 &= \left\{ T \begin{pmatrix} -L_x \\ L_y \\ \frac{h}{2} \end{pmatrix}, R \left(z_1, \frac{\pi}{2} \right) \right\} = \begin{bmatrix} \cos \left(\frac{\pi}{2} \right) & -\sin \left(\frac{\pi}{2} \right) & 0 & -L_x \\ \sin \left(\frac{\pi}{2} \right) & \cos \left(\frac{\pi}{2} \right) & 0 & L_y \\ 0 & 0 & 1 & \frac{h}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & -L_x \\ 1 & 0 & 0 & L_y \\ 0 & 0 & 1 & \frac{h}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
{}^2\mathbf{T}_3 &= \left\{ T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, R \left(x_2, \frac{\pi}{2} \right) \right\} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \left(\frac{\pi}{2} \right) & -\sin \left(\frac{\pi}{2} \right) & 0 \\ 0 & \sin \left(\frac{\pi}{2} \right) & \cos \left(\frac{\pi}{2} \right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Luego, para el manipulador se usa la convención D-H, tal que

i	\mathbf{a}_i	α_i	\mathbf{d}_i	θ_i
4	L_1	0	0	ϕ_1
e	L_2	0	0	ϕ_2

Tabla A.1: Parámetros D-H para manipulador del RMM (2,0,2) en el espacio.

Así, se obtienen las matrices de transformación restantes

$$\begin{aligned}
{}^3\mathbf{T}_4 &= \begin{bmatrix} \cos \phi_1 & -\sin \phi_1 & 0 & L_1 \cos \phi_1 \\ \sin \phi_1 & \cos \phi_1 & 0 & L_1 \sin \phi_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad {}^4\mathbf{T}_e = \begin{bmatrix} \cos \phi_2 & -\sin \phi_2 & 0 & L_2 \cos \phi_2 \\ \sin \phi_2 & \cos \phi_2 & 0 & L_2 \sin \phi_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
{}^0\mathbf{T}_2 &= \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 & x + L_y \cos \theta - L_x \sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 & y + L_x \cos \theta + L_y \sin \theta \\ 0 & 0 & 1 & R + \frac{h}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^0\mathbf{R}_2 & {}^0\mathbf{O}_2 \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \\
{}^0\mathbf{T}_3 &= \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta & x + L_y \cos \theta - L_x \sin \theta \\ \sin \theta & 0 & -\cos \theta & y + L_x \cos \theta + L_y \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 & R + \frac{h}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^0\mathbf{R}_3 & {}^0\mathbf{O}_3 \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \\
{}^0\mathbf{T}_4 &= \begin{bmatrix} \cos \phi_1 \cos \theta & -\cos \theta \sin \phi_1 & \sin \theta & x + L_y \cos \theta - L_x \sin \theta + L_1 \cos \phi_1 \cos \theta \\ \cos \phi_1 \sin \theta & -\sin \phi_1 \sin \theta & -\cos \theta & y + L_x \cos \theta + L_y \sin \theta + L_1 \cos \phi_1 \sin \theta \\ \sin \phi_1 & \cos \phi_1 & 0 & R + \frac{h}{2} + L_1 \sin \phi_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} {}^0\mathbf{R}_4 & {}^0\mathbf{O}_4 \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

La matriz que relaciona el efector final con el marco inercial $\{0\}$

$${}^0\mathbf{T}_e = \begin{bmatrix} {}^0\mathbf{R}_e & {}^0\mathbf{O}_e \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.1})$$

$${}^0\mathbf{R}_e = \begin{bmatrix} \cos(\phi_1 + \phi_2) \cos \theta & -\sin(\phi_1 + \phi_2) \cos \theta & \sin \theta \\ \cos(\phi_1 + \phi_2) \sin \theta & -\sin(\phi_1 + \phi_2) \sin \theta & -\cos \theta \\ \sin(\phi_1 + \phi_2) & \cos(\phi_1 + \phi_2) & 0 \end{bmatrix}$$

$${}^0\mathbf{O}_e = \begin{bmatrix} x + L_y \cos \theta - L_x \sin \theta + L_1 \cos \phi_1 \cos \theta + L_2 \cos(\phi_1 + \phi_2) \cos \theta \\ y + L_x \cos \theta + L_y \sin \theta + L_1 \cos \phi_1 \sin \theta + L_2 \cos(\phi_1 + \phi_2) \sin \theta \\ R + \frac{h}{2} + L_2 \sin(\phi_1 + \phi_2) + L_1 \sin \phi_1 \end{bmatrix}$$

A.1.2. Cinemática inversa

De la Figura A.1 es fácil ver que

$$\phi_1 + \phi_2 = \psi_{ef} \quad (\text{A.2})$$

Además, dado que θ es la orientación de la base móvil, ha de ser determinada por el vector de velocidad longitudinal que se desea generar, por tanto, se puede escribir

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}} \right)$$

Definiendo un vector de posición deseado e igualando al vector obtenido en la cinemática directa

$${}^0\mathbf{O}_e = \begin{bmatrix} x_{efd} \\ y_{efd} \\ z_{efd} \end{bmatrix}$$

Se tiene la posición cartesiana de la base móvil

$$\begin{aligned} x &= x_{efd} - L_y \cos \theta + L_x \sin \theta - L_1 \cos \phi_1 \cos \theta - L_2 \cos(\phi_1 + \phi_2) \cos \theta \\ y &= y_{efd} - L_x \cos \theta - L_y \sin \theta - L_1 \cos \phi_1 \sin \theta - L_2 \cos(\phi_1 + \phi_2) \sin \theta \end{aligned}$$

Además

$$R + \frac{h}{2} + L_2 \sin(\phi_1 + \phi_2) + L_1 \sin \phi_1 = z_{efd} \quad (\text{A.3})$$

Vea que es posible resolver el sistema de ecuaciones no lineales (A.2) y (A.3) para obtener ϕ_1 y ϕ_2 . Una posible solución es

$$\begin{cases} \phi_1 &= \sin^{-1} \left[\frac{1}{L_1} \left(z_{efd} - R - \frac{h}{2} - L_2 \sin \psi_{ef} \right) \right] \\ \phi_2 &= \psi_{ef} - \phi_1 \end{cases} \quad (\text{A.4})$$

A.1.3. Modelo completo

El modelo del sistema sin considerar efectos por fricción ni interacción del efector final con el ambiente, está dado por la ecuación dinámica

$$\mathbf{D}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{G}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau}, \quad \mathbf{q} = [x \ y \ \theta \ \phi_1 \ \phi_2]^T \quad (\text{A.5})$$

Donde $\boldsymbol{\tau} = [F_x \ F_y \ \tau_c \ \tau_1 \ \tau_2]^T$.

Los Jacobianos en el i -ésimo centro de masa tienen la forma

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_{c_1} &= \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{v_{c_1}} \\ \mathbf{J}_{\omega_{c_1}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{x}_0 & \hat{y}_0 & \hat{z}_1 \times (\mathbf{O}_{c_1} - \mathbf{O}_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \hat{z}_1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{J}_{c_2} &= \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{v_{c_2}} \\ \mathbf{J}_{\omega_{c_2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{x}_0 & \hat{y}_0 & \hat{z}_1 \times (\mathbf{O}_{c_2} - \mathbf{O}_1) & \hat{z}_3 \times (\mathbf{O}_{c_2} - \mathbf{O}_3) & 0 \\ 0 & 0 & \hat{z}_1 & \hat{z}_3 & 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{J}_{c_3} &= \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{v_{c_3}} \\ \mathbf{J}_{\omega_{c_3}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{x}_0 & \hat{y}_0 & \hat{z}_1 \times (\mathbf{O}_{c_3} - \mathbf{O}_1) & \hat{z}_3 \times (\mathbf{O}_{c_3} - \mathbf{O}_3) & \hat{z}_4 \times (\mathbf{O}_{c_3} - \mathbf{O}_4) \\ 0 & 0 & \hat{z}_1 & \hat{z}_3 & \hat{z}_4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Donde

$$\begin{aligned} \hat{x}_0 &= \hat{i} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{y}_0 = \hat{j} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{z}_1 = {}^0\mathbf{R}_1 \hat{k} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \hat{z}_3 = {}^0\mathbf{R}_3 \hat{k} = \begin{bmatrix} \sin \theta \\ -\cos \theta \\ 0 \end{bmatrix} \\ \hat{z}_4 &= {}^0\mathbf{R}_4 \hat{k} = \begin{bmatrix} \sin \theta \\ -\cos \theta \\ 0 \end{bmatrix}, \quad {}^1\mathbf{O}_{c_1} = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix}, \quad {}^3\mathbf{O}_{c_2} = \begin{bmatrix} L_{c_1} \cos \phi_1 \\ L_{c_1} \sin \phi_1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ {}^4\mathbf{O}_{c_3} &= \begin{bmatrix} L_{c_2} \cos \phi_2 \\ L_{c_2} \sin \phi_2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{O}_{c_1} = {}^0\mathbf{O}_1 + {}^0\mathbf{R}_1 {}^1\mathbf{O}_{c_1} = \begin{bmatrix} x + p_y \cos \theta + p_x \sin \theta \\ y - p_x \cos \theta + p_y \sin \theta \\ R + p_z \end{bmatrix} \\ \mathbf{O}_{c_2} &= {}^0\mathbf{O}_3 + {}^0\mathbf{R}_3 {}^3\mathbf{O}_{c_2} = \begin{bmatrix} x + L_y \cos \theta - L_x \sin \theta + L_{c_1} \cos \phi_1 \cos \theta \\ y + L_x \cos \theta + L_y \sin \theta + L_{c_1} \cos \phi_1 \sin \theta \\ R + \frac{h}{2} + L_{c_1} \sin \phi_1 \end{bmatrix} \\ \mathbf{O}_{c_3} &= {}^0\mathbf{O}_4 + {}^0\mathbf{R}_4 {}^4\mathbf{O}_{c_3} = \begin{bmatrix} x + L_y \cos \theta - L_x \sin \theta + L_1 \cos \phi_1 \cos \theta + L_{c_2} \cos(\phi_1 + \phi_2) \cos \theta \\ y + L_x \cos \theta + L_y \sin \theta + L_1 \cos \phi_1 \sin \theta + L_{c_2} \cos(\phi_1 + \phi_2) \sin \theta \\ R + \frac{h}{2} + L_{c_2} \sin(\phi_1 + \phi_2) + L_1 \sin \phi_1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

De tal forma que

$$\begin{aligned}
\mathbf{J}_{\mathbf{v}_{c_1}} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & p_x \cos \theta - p_y \sin \theta & 0 & 0 \\ 0 & 1 & p_y \cos \theta + p_x \sin \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
\mathbf{J}_{\mathbf{v}_{c_2}} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -L_x \cos \theta - L_y \sin \theta - L_{c_1} \cos \phi_1 \sin \theta & -L_{c_1} \sin \phi_1 \cos \theta & 0 \\ 0 & 1 & L_y \cos \theta - L_x \sin \theta + L_{c_1} \cos \phi_1 \cos \theta & -L_{c_1} \sin \phi_1 \sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L_{c_1} \cos \phi_1 & 0 \end{bmatrix} \\
\mathbf{J}_{\mathbf{v}_{c_3}} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & \sigma_3 & -\sigma_1 \cos \theta & -L_{c_2} \sin(\phi_1 + \phi_2) \cos \theta \\ 0 & 1 & \sigma_4 & -\sigma_1 \sin \theta & -L_{c_2} \sin(\phi_1 + \phi_2) \sin \theta \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_2 + L_1 \cos \phi_1 & \sigma_2 \end{bmatrix} \\
\mathbf{J}_{\omega_{c_1}} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{J}_{\omega_{c_2}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
\mathbf{J}_{\omega_{c_3}} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \sin \theta & \sin \theta \\ 0 & 0 & 0 & -\cos \theta & -\cos \theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
\sigma_1 &= L_{c_2} \sin(\phi_1 + \phi_2) + L_1 \sin \phi_1, \quad \sigma_2 = L_{c_2} \cos(\phi_1 + \phi_2) \\
\sigma_3 &= -L_y \sin \theta - L_x \cos \theta - L_1 \cos \phi_1 \sin \theta - L_{c_2} \cos(\phi_1 + \phi_2) \sin \theta \\
\sigma_4 &= L_y \cos \theta - L_x \sin \theta + L_1 \cos \phi_1 \cos \theta + L_{c_2} \cos(\phi_1 + \phi_2) \cos \theta
\end{aligned}$$

Se consideran eslabones simétricos, por tanto

$${}^i \mathbf{I}_i = \begin{bmatrix} I_{ixx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{iyy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{izz} \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Son los tensores de inercia del móvil y los dos eslabones respectivamente, medidos en el marco local.

Luego, la matriz de inercia se obtiene de la ecuación

$$\mathbf{D}(\mathbf{q}) = \sum_{i=1}^3 \left\{ m_i \mathbf{J}_{\mathbf{v}_{c_i}}^T(\mathbf{q}) \mathbf{J}_{\mathbf{v}_{c_i}}(\mathbf{q}) + \mathbf{J}_{\omega_{c_i}}^T(\mathbf{q}) {}^0 \mathbf{R}_i(\mathbf{q}) {}^i \mathbf{I}_i {}^0 \mathbf{R}_i^T(\mathbf{q}) \mathbf{J}_{\omega_{c_i}}(\mathbf{q}) \right\}$$

Siendo ${}^0 \mathbf{R}_i(\mathbf{q})$ la matriz de rotación que relaciona el marco de referencia del i -ésimo centro de masa al marco inercial $\{0\}$. Así

$$\begin{aligned}
\mathbf{D}(\mathbf{q}) &= m_1 \mathbf{J}_{\mathbf{v}_{c_1}}^T \mathbf{J}_{\mathbf{v}_{c_1}} + \mathbf{J}_{\omega_{c_1}}^T {}^0 \mathbf{R}_2 {}^1 \mathbf{I}_1 {}^0 \mathbf{R}_2^T \mathbf{J}_{\omega_{c_1}} + m_2 \mathbf{J}_{\mathbf{v}_{c_2}}^T \mathbf{J}_{\mathbf{v}_{c_2}} + \mathbf{J}_{\omega_{c_2}}^T {}^0 \mathbf{R}_4 {}^2 \mathbf{I}_2 {}^0 \mathbf{R}_4^T \mathbf{J}_{\omega_{c_2}} \\
&\quad + m_3 \mathbf{J}_{\mathbf{v}_{c_3}}^T \mathbf{J}_{\mathbf{v}_{c_3}} + \mathbf{J}_{\omega_{c_3}}^T {}^0 \mathbf{R}_e {}^3 \mathbf{I}_3 {}^0 \mathbf{R}_e^T \mathbf{J}_{\omega_{c_3}} \\
&= \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & d_{14} & d_{15} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} & d_{24} & d_{25} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & d_{34} & d_{35} \\ d_{41} & d_{42} & d_{43} & d_{44} & d_{45} \\ d_{51} & d_{52} & d_{53} & d_{54} & d_{55} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d_{11} &= m_1 + m_2 + m_3 \\
d_{12} &= d_{21} = 0 \\
d_{13} &= d_{31} = [m_1 p_x - L_x (m_2 + m_3)] \cos \theta - [m_1 p_y + L_y (m_2 + m_3)] \sin \theta \\
&\quad - [m_2 L_{c_1} + m_3 L_1] \cos \phi_1 \sin \theta - m_3 L_{c_2} \sin \theta \cos (\phi_1 + \phi_2) \\
d_{14} &= d_{41} = -m_3 L_{c_2} \sin (\phi_1 + \phi_2) \cos \theta - (m_2 L_{c_1} + m_3 L_1) \cos \theta \sin \phi_1 \\
d_{15} &= d_{51} = -m_3 L_{c_2} \sin (\phi_1 + \phi_2) \cos \theta \\
d_{22} &= m_1 + m_2 + m_3 \\
d_{23} &= d_{32} = [m_1 p_y + L_y (m_2 + m_3)] \cos \theta + [m_1 p_x - L_x (m_2 + m_3)] \sin \theta \\
&\quad + (m_2 L_{c_1} + m_3 L_1) \cos \phi_1 \cos \theta + m_3 L_{c_2} \cos (\phi_1 + \phi_2) \cos \theta \\
d_{24} &= d_{42} = -m_3 L_{c_2} \sin (\phi_1 + \phi_2) \sin \theta - (m_2 L_{c_1} + m_3 L_1) \sin \phi_1 \sin \theta \\
d_{25} &= d_{52} = -m_3 L_{c_2} \sin (\phi_1 + \phi_2) \sin \theta \\
d_{33} &= I_{1zz} + I_{2xx} \sin^2 \phi_1 + I_{3xx} \sin^2 (\phi_1 + \phi_2) + I_{2yy} \cos^2 \phi_1 + I_{3yy} \cos^2 (\phi_1 + \phi_2) \\
&\quad + m_2 L_{c_1}^2 \cos^2 \phi_1 + m_3 L_{c_2}^2 \cos^2 (\phi_1 + \phi_2) + 2L_y (m_2 L_{c_1} + m_3 L_1) \cos \phi_1 + m_1 (p_x^2 + p_y^2) \\
&\quad + 2m_3 L_{c_2} L_y \cos (\phi_1 + \phi_2) + m_3 L_1 L_{c_2} \cos \phi_2 + m_3 L_1 L_{c_2} \cos (2\phi_1 + \phi_2) + m_3 L_1^2 \cos^2 \phi_1 \\
&\quad + (m_2 + m_3) (L_x^2 + L_y^2) \\
d_{34} &= d_{43} = L_x [m_3 L_{c_2} \sin (\phi_1 + \phi_2) + (m_2 L_{c_1} + m_3 L_1) \sin \phi_1] \\
d_{35} &= d_{53} = m_3 L_{c_2} L_x \sin (\phi_1 + \phi_2) \\
d_{44} &= m_3 L_1^2 + 2m_3 L_1 L_{c_2} \cos \phi_2 + m_2 L_{c_1}^2 + m_3 L_{c_2}^2 + I_{2zz} + I_{3zz} \\
d_{45} &= d_{54} = m_3 (L_{c_2}^2 + L_1 L_{c_2} \cos \phi_2) + I_{3zz} \\
d_{55} &= m_3 L_{c_2}^2 + I_{3zz}
\end{aligned}$$

La matriz de Coriolis

$$\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} \end{bmatrix}$$

Se obtiene con ayuda de los símbolos de Christoffel, como sigue

$$C_{kj} = \sum_{i=1}^5 \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial d_{kj}}{\partial q_i} + \frac{\partial d_{ki}}{\partial q_j} - \frac{\partial d_{ij}}{\partial q_k} \right\} \dot{q}_i$$

De tal forma que

$$\begin{aligned}
C_{11} &= C_{12} = C_{21} = C_{22} = C_{31} = C_{32} = C_{41} = C_{42} = C_{51} = C_{52} = C_{55} = 0 \\
C_{13} &= \dot{\theta} [-m_1 p_x + (m_2 + m_3) L_x] \sin \theta - \dot{\theta} (m_1 p_y + (m_2 + m_3) L_y) \cos \theta - L_{c_2} m_3 \dot{\theta} \cos (\phi_1 + \phi_2) \cos \theta \\
&\quad + m_3 L_{c_2} (\dot{\phi}_1 + \dot{\phi}_2) \sin (\phi_1 + \phi_2) \sin \theta + (m_2 L_{c_1} + m_3 L_1) (\dot{\phi}_1 \sin \phi_1 \sin \theta - \dot{\theta} \cos \phi_1 \cos \theta) \\
C_{14} &= \dot{\theta} [m_3 L_{c_2} \sin (\phi_1 + \phi_2) \sin \theta + (m_2 L_{c_1} + m_3 L_1) \sin \phi_1 \sin \theta] \\
&\quad - \dot{\phi}_1 (m_3 L_{c_2} \cos (\phi_1 + \phi_2) \cos \theta + (m_3 L_1 + m_2 L_{c_1}) \cos \phi_1 \cos \theta) - m_3 L_{c_2} \dot{\phi}_2 \cos (\phi_1 + \phi_2) \cos \theta \\
C_{15} &= \dot{\theta} m_3 L_{c_2} \sin (\phi_1 + \phi_2) \sin \theta - m_3 L_{c_2} (\dot{\phi}_1 + \dot{\phi}_2) \cos (\phi_1 + \phi_2) \cos \theta \\
C_{23} &= \dot{\theta} (m_1 p_x - (m_2 + m_3) L_x) \cos \theta - \dot{\theta} (m_1 p_y + (m_2 + m_3) L_y) \sin \theta \\
&\quad - (m_2 L_{c_1} + m_3 L_1) (\dot{\phi}_1 \cos \theta \sin \phi_1 + \dot{\theta} \cos \phi_1 \sin \theta) \\
&\quad - m_3 L_{c_2} (\dot{\phi}_1 + \dot{\phi}_2) \sin (\phi_1 + \phi_2) \cos \theta - m_3 L_{c_2} \dot{\theta} \cos (\phi_1 + \phi_2) \sin \theta \\
C_{24} &= -\dot{\theta} [m_3 L_{c_2} \sin (\phi_1 + \phi_2) \cos \theta + (m_2 L_{c_1} + m_3 L_1) \sin \phi_1 \cos \theta] \\
&\quad - m_3 L_{c_2} (\dot{\phi}_1 + \dot{\phi}_2) \cos (\phi_1 + \phi_2) \sin \theta - \dot{\phi}_1 (m_3 L_1 + m_2 L_{c_1}) \cos \phi_1 \sin \theta \\
C_{25} &= -\dot{\theta} (m_3 L_{c_2} \sin (\phi_1 + \phi_2) \cos \theta) - m_3 L_{c_2} (\dot{\phi}_1 + \dot{\phi}_2) \cos (\phi_1 + \phi_2) \sin \theta \\
C_{33} &= (\dot{\phi}_1 + \dot{\phi}_2) (I_{3xx} - I_{3yy} - m_3 L_{c_2}^2) \frac{\sin (2\phi_1 + 2\phi_2)}{2} + \dot{\phi}_1 (I_{2xx} - I_{2yy} - m_3 L_1^2 - m_2 L_{c_1}^2) \frac{\sin (2\phi_1)}{2} \\
&\quad - \dot{\phi}_2 m_3 L_1 L_{c_2} \frac{\sin \phi_2}{2} - m_3 L_1 L_{c_2} \left(\dot{\phi}_1 + \frac{1}{2} \dot{\phi}_2 \right) \sin (2\phi_1 + \phi_2) - \dot{\phi}_1 L_y (m_2 L_{c_1} + m_3 L_1) \sin \phi_1 \\
&\quad - m_3 L_{c_2} L_y (\dot{\phi}_1 + \dot{\phi}_2) \sin (\phi_1 + \phi_2) \\
C_{34} &= \dot{\theta} (I_{2xx} - I_{2yy} - m_2 L_{c_1}^2 - m_3 L_1^2) \frac{\sin (2\phi_1)}{2} + \dot{\theta} (I_{3xx} - I_{3yy} - m_3 L_{c_2}^2) \frac{\sin (2\phi_1 + 2\phi_2)}{2} \\
&\quad + m_3 L_{c_2} L_x (\dot{\phi}_1 + \dot{\phi}_2) \cos (\phi_1 + \phi_2) - m_3 L_{c_2} L_y \dot{\theta} \sin (\phi_1 + \phi_2) + L_x (m_2 L_{c_1} + m_3 L_1) \dot{\phi}_1 \cos \phi_1 \\
&\quad - L_y \dot{\theta} (m_2 L_{c_1} + m_3 L_1) \sin \phi_1 - m_3 L_1 L_{c_2} \dot{\theta} \sin (2\phi_1 + \phi_2) \\
C_{35} &= \dot{\theta} (I_{3xx} - I_{3yy} - m_3 L_{c_2}^2) \frac{\sin (2\phi_1 + 2\phi_2)}{2} + m_3 L_{c_2} L_x (\dot{\phi}_1 + \dot{\phi}_2) \cos (\phi_1 + \phi_2) \\
&\quad - m_3 L_{c_2} L_y \dot{\theta} \sin (\phi_1 + \phi_2) - m_3 L_1 L_{c_2} \dot{\theta} \frac{\sin \phi_2}{2} - m_3 L_1 L_{c_2} \dot{\theta} \frac{\sin (2\phi_1 + \phi_2)}{2} \\
C_{43} &= \frac{1}{2} \dot{\theta} [2m_3 L_y L_{c_2} \sin (\phi_1 + \phi_2) + 2m_3 L_1 L_{c_2} \sin (2\phi_1 + \phi_2) + 2L_y (m_2 L_{c_1} + m_3 L_1) \sin \phi_1] \\
&\quad + \frac{1}{2} \dot{\theta} [(m_3 L_1^2 + m_2 L_{c_1}^2 - I_{2xx} + I_{2yy}) \sin (2\phi_1) + (m_3 L_{c_2}^2 - I_{3xx} + I_{3yy}) \sin (2\phi_1 + 2\phi_2)] \\
C_{44} &= -m_3 L_1 L_{c_2} \dot{\phi}_2 \sin \phi_2 \\
C_{45} &= -m_3 L_1 L_{c_2} (\dot{\phi}_1 + \dot{\phi}_2) \sin \phi_2 \\
C_{53} &= \frac{1}{2} \dot{\theta} [(I_{3yy} - I_{3xx} + m_3 L_{c_2}^2) \sin (2\phi_1 + 2\phi_2) + 2m_3 L_{c_2} L_y \sin (\phi_1 + \phi_2)] \\
&\quad + \frac{1}{2} m_3 L_1 L_{c_2} \dot{\theta} [\sin \phi_2 + \sin (2\phi_1 + \phi_2)] \\
C_{54} &= m_3 L_1 L_{c_2} \dot{\phi}_1 \sin \phi_2
\end{aligned}$$

La energía potencial del sistema está dada por

$$\mathcal{V} = \sum_{i=1}^3 m_i \mathbf{g}^T \mathbf{O}_{c_i} = m_1 \mathbf{g}^T \mathbf{O}_{c_1} + m_2 \mathbf{g}^T \mathbf{O}_{c_2} + m_3 \mathbf{g}^T \mathbf{O}_{c_3}$$

Con $\mathbf{g}^T = [0 \ 0 \ -g]$ siendo g la gravedad. Esto es

$$\mathcal{V} = -gm_2 \left(R + \frac{h}{2} + L_{c_1} \sin \phi_1 \right) - gm_1(R + p_z) - gm_3 \left(R + \frac{h}{2} + L_{c_2} \sin (\phi_1 + \phi_2) + L_1 \sin \phi_1 \right)$$

Luego, el vector de fuerzas gravitacionales

$$\begin{aligned} \mathbf{G}(\mathbf{q}) &= - \left[\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial q_1} \quad \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial q_2} \quad \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial q_3} \quad \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial q_4} \quad \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial q_5} \right]^T \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ m_3 g (L_{c_2} \cos (\phi_1 + \phi_2) + L_1 \cos \phi_1) + m_2 g L_{c_1} \cos \phi_1 \\ m_3 g L_{c_2} \cos (\phi_1 + \phi_2) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

A.1.4. Modelo reducido

El modelo reducido, con $\eta(t) = [v \ \dot{\theta} \ \dot{\phi}_1 \ \dot{\phi}_2]^T$, tiene la forma

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{D}}(\mathbf{q}) \dot{\eta} + \bar{\mathbf{C}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \eta + \bar{\mathbf{G}}(\mathbf{q}) &= \bar{\tau}(\mathbf{q}) \\ \dot{\mathbf{q}} &= \mathbf{S}(\mathbf{q}) \eta \end{aligned} \tag{A.6}$$

Donde

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{D}}(\mathbf{q}) &= \mathbf{S}^T(\mathbf{q}) \mathbf{D}(\mathbf{q}) \mathbf{S}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{4 \times 4} \\ \bar{\mathbf{C}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= \mathbf{S}^T(\mathbf{q}) \mathbf{D}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{S}}(\mathbf{q}) + \mathbf{S}^T(\mathbf{q}) \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \mathbf{S}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{4 \times 4} \\ \bar{\mathbf{G}}(\mathbf{q}) &= \mathbf{S}^T(\mathbf{q}) \mathbf{G}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{4 \times 1} \\ \bar{\tau}(\mathbf{q}) &= \mathbf{S}^T(\mathbf{q}) \mathbf{B}(\mathbf{q}) \tau_{red} \in \mathbb{R}^{4 \times 1} \end{aligned}$$

$$\bar{\mathbf{D}}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \bar{d}_{11} & \bar{d}_{12} & \bar{d}_{13} & \bar{d}_{14} \\ \bar{d}_{21} & \bar{d}_{22} & \bar{d}_{23} & \bar{d}_{24} \\ \bar{d}_{31} & \bar{d}_{32} & \bar{d}_{33} & \bar{d}_{34} \\ \bar{d}_{41} & \bar{d}_{42} & \bar{d}_{43} & \bar{d}_{44} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \bar{d}_{11} &= m_1 + m_2 + m_3 \\ \bar{d}_{12} &= \bar{d}_{21} = m_1 p_x - L_x m_3 - L_x m_2 \\ \bar{d}_{13} &= \bar{d}_{31} = -L_{c_2} m_3 \sin (\phi_1 + \phi_2) - (L_1 m_3 + L_{c_1} m_2) \sin \phi_1 \\ \bar{d}_{14} &= \bar{d}_{41} = -L_{c_2} m_3 \sin (\phi_1 + \phi_2) \\ \bar{d}_{22} &= I_{1zz} + I_{3xx} \sin^2 (\phi_1 + \phi_2) + L_x^2 m_2 + L_x^2 m_3 + L_y^2 m_2 + L_y^2 m_3 + m_1 p_x^2 + m_1 p_y^2 \\ &\quad + I_{2xx} \sin^2 \phi_1 + (I_{2yy} + L_1^2 m_3 + L_{c_1}^2 m_2) \cos^2 \phi_1 + L_1 L_{c_2} m_3 \cos \phi_2 \\ &\quad + 2L_{c_2} L_y m_3 \cos (\phi_1 + \phi_2) + L_1 L_{c_2} m_3 \cos (2\phi_1 + \phi_2) + (I_{3yy} + L_{c_2}^2 m_3) \cos^2 (\phi_1 + \phi_2) \\ &\quad + 2L_y (L_1 m_3 + L_{c_1} m_2) \cos \phi_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{d}_{23} &= \bar{d}_{32} = L_x (L_{c_2} m_3 \sin(\phi_1 + \phi_2) + (L_1 m_3 + L_{c_1} m_2) \sin \phi_1) \\
\bar{d}_{24} &= \bar{d}_{42} = L_{c_2} L_x m_3 \sin(\phi_1 + \phi_2) \\
\bar{d}_{33} &= m_3 (L_1^2 + L_{c_2}^2) + 2m_3 L_1 L_{c_2} \cos \phi_2 + m_2 L_{c_1}^2 + I_{2zz} + I_{3zz} \\
\bar{d}_{34} &= \bar{d}_{43} = m_3 L_{c_2}^2 + L_1 L_{c_2} m_3 \cos \phi_2 + I_{3zz} \\
\bar{d}_{44} &= m_3 L_{c_2}^2 + I_{3zz}
\end{aligned}$$

$$\bar{\mathbf{C}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} \bar{C}_{11} & \bar{C}_{12} & \bar{C}_{13} & \bar{C}_{14} \\ \bar{C}_{21} & \bar{C}_{22} & \bar{C}_{23} & \bar{C}_{24} \\ \bar{C}_{31} & \bar{C}_{32} & \bar{C}_{33} & \bar{C}_{34} \\ \bar{C}_{41} & \bar{C}_{42} & \bar{C}_{43} & \bar{C}_{44} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\bar{C}_{11} &= 0 \\
\bar{C}_{12} &= -\dot{\theta} (L_y m_2 + L_y m_3 + m_1 p_y + L_{c_2} m_3 \cos(\phi_1 + \phi_2) + (L_1 m_3 + L_{c_1} m_2) \cos \phi_1) \\
\bar{C}_{13} &= -L_{c_2} m_3 (\dot{\phi}_1 + \dot{\phi}_2) \cos(\phi_1 + \phi_2) - \dot{\phi}_1 (L_1 m_3 + L_{c_1} m_2) \cos \phi_1 \\
\bar{C}_{14} &= -L_{c_2} m_3 (\dot{\phi}_1 + \dot{\phi}_2) \cos(\phi_1 + \phi_2) \\
\bar{C}_{21} &= \dot{\theta} (L_y m_2 + L_y m_3 + m_1 p_y + L_{c_2} m_3 \cos(\phi_1 + \phi_2) + (L_1 m_3 + L_{c_1} m_2) \cos \phi_1) \\
\bar{C}_{22} &= -\dot{\phi}_2 \left(\frac{L_1 L_{c_2} m_3 \sin \phi_2}{2} \right) - L_1 L_{c_2} m_3 (\dot{\phi}_2 + 2\dot{\phi}_1) \frac{\sin(2\phi_1 + \phi_2)}{2} \\
&\quad - \dot{\phi}_1 \left((m_3 L_1^2 + m_2 L_{c_1}^2 - I_{2xx} + I_{2yy}) \frac{\sin(2\phi_1)}{2} + L_y (L_1 m_3 + L_{c_1} m_2) \sin \phi_1 \right) \\
&\quad - (\dot{\phi}_2 + \dot{\phi}_1) \left[(I_{3yy} - I_{3xx} + L_{c_2}^2 m_3) \frac{\sin(2\phi_1 + 2\phi_2)}{2} + L_{c_2} L_y m_3 \sin(\phi_1 + \phi_2) \right] \\
\bar{C}_{23} &= (I_{2xx} - I_{2yy} - L_1^2 m_3 - L_{c_1}^2 m_2) \dot{\theta} \frac{\sin(2\phi_1)}{2} + (I_{3xx} - I_{3yy} - L_{c_2}^2 m_3) \dot{\theta} \frac{\sin(2\phi_1 + 2\phi_2)}{2} \\
&\quad + L_{c_2} L_x m_3 (\dot{\phi}_1 + \dot{\phi}_2) \cos(\phi_1 + \phi_2) - L_{c_2} L_y m_3 \dot{\theta} \sin(\phi_1 + \phi_2) + L_x (L_1 m_3 + L_{c_1} m_2) \dot{\phi}_1 \cos \phi_1 \\
&\quad - L_y (L_{c_1} m_2 + L_1 m_3) \dot{\theta} \sin \phi_1 - L_1 L_{c_2} m_3 \dot{\theta} \sin(2\phi_1 + \phi_2) \\
\bar{C}_{24} &= (I_{3xx} - I_{3yy} - L_{c_2}^2 m_3) \dot{\theta} \frac{\sin(2\phi_1 + 2\phi_2)}{2} + L_{c_2} L_x m_3 (\dot{\phi}_1 + \dot{\phi}_2) \cos(\phi_1 + \phi_2) \\
&\quad - L_1 L_{c_2} m_3 \dot{\theta} \frac{\sin(\phi_2)}{2} - L_1 L_{c_2} m_3 \dot{\theta} \frac{\sin(2\phi_1 + \phi_2)}{2} - L_{c_2} L_y m_3 \dot{\theta} \sin(\phi_1 + \phi_2) \\
\bar{C}_{31} &= 0 \\
\bar{C}_{32} &= \frac{\dot{\theta}}{2} [2m_3 L_1 L_{c_2} \sin(2\phi_1 + \phi_2) + 2L_y (L_1 m_3 + L_{c_1} m_2) \sin \phi_1] \\
&\quad + \frac{\dot{\theta}}{2} [(m_3 L_{c_2}^2 - I_{3xx} + I_{3yy}) \sin(2\phi_1 + 2\phi_2) + 2L_{c_2} L_y m_3 \sin(\phi_1 + \phi_2)] \\
&\quad + \frac{\dot{\theta}}{2} (m_3 L_1^2 + m_2 L_{c_1}^2 - I_{2xx} + I_{2yy}) \sin(2\phi_1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{C}_{33} &= -L_1 L_{c_2} m_3 \dot{\phi}_2 \sin \phi_2 \\
\bar{C}_{34} &= -L_1 L_{c_2} m_3 (\dot{\phi}_1 + \dot{\phi}_2) \sin \phi_2 \\
\bar{C}_{41} &= 0 \\
\bar{C}_{42} &= \frac{\dot{\theta}}{2} [(I_{3yy} - I_{3xx} + L_{c_2}^2 m_3) \sin(2\phi_1 + 2\phi_2) + 2L_{c_2} L_y m_3 \sin(\phi_1 + \phi_2)] \\
&\quad + \frac{\dot{\theta}}{2} [L_1 L_{c_2} m_3 \sin(2\phi_1 + \phi_2) + L_1 L_{c_2} m_3 \sin \phi_2] \\
\bar{C}_{43} &= L_1 L_{c_2} m_3 \dot{\phi}_1 \sin \phi_2 \\
\bar{C}_{44} &= 0
\end{aligned}$$

$$\bar{\mathbf{G}}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ gm_3 L_{c_2} \cos(\phi_1 + \phi_2) + g(L_1 m_3 + L_{c_1} m_2) \cos \phi_1 \\ L_{c_2} g m_3 \cos(\phi_1 + \phi_2) \end{bmatrix}$$

$$\bar{\boldsymbol{\tau}}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \frac{1}{R}(\tau_d + \tau_i) \\ \frac{L}{R}(\tau_d - \tau_i) \\ \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix}$$

Se definen las matrices $\mathbf{S}(\mathbf{q})$ y $\mathbf{B}(\mathbf{q})$ como sigue

$$\mathbf{S}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & 0 & 0 \\ \sin \theta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \frac{1}{R} \cos \theta & \frac{1}{R} \cos \theta & 0 & 0 \\ \frac{1}{R} \sin \theta & \frac{1}{R} \sin \theta & 0 & 0 \\ \frac{L}{R} & -\frac{L}{R} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A.2. KUKA youBot

En la Figura A.2 se muestra la configuración usada para la obtención del modelo del robot

i	a_i	α_i	d_i	θ_i
3	r_b	$\frac{\pi}{2}$	$-L_1$	ϕ_1
4	L_2	0	0	$\phi_2 - \frac{\pi}{2}$
5	L_3	0	0	ϕ_3
6	L_4	0	0	ϕ_4
7	0	$\frac{\pi}{2}$	0	$-\frac{\pi}{2}$
e	0	0	$-L_5$	ϕ_5

Tabla A.2: Parámetros D-H para el manipulador del KUKA youBot.

Se obtienen las matrices de transformación restantes

$$\begin{aligned}
{}^2\mathbf{T}_3 &= \begin{bmatrix} \cos \phi_1 & 0 & \sin \phi_1 & r_b \cos \phi_1 \\ \sin \phi_1 & 0 & -\cos \phi_1 & r_b \sin \phi_1 \\ 0 & 1 & 0 & -L_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
{}^3\mathbf{T}_4 &= \begin{bmatrix} \cos(\phi_2 - \frac{\pi}{2}) & -\sin(\phi_2 - \frac{\pi}{2}) & 0 & L_2 \cos(\phi_2 - \frac{\pi}{2}) \\ \sin(\phi_2 - \frac{\pi}{2}) & \cos(\phi_2 - \frac{\pi}{2}) & 0 & L_2 \sin(\phi_2 - \frac{\pi}{2}) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
{}^4\mathbf{T}_5 &= \begin{bmatrix} \cos \phi_3 & -\sin \phi_3 & 0 & L_3 \cos \phi_3 \\ \sin \phi_3 & \cos \phi_3 & 0 & L_3 \sin \phi_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad {}^5\mathbf{T}_6 = \begin{bmatrix} \cos \phi_4 & -\sin \phi_4 & 0 & L_4 \cos \phi_4 \\ \sin \phi_4 & \cos \phi_4 & 0 & L_4 \sin \phi_4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
{}^6\mathbf{T}_7 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad {}^7\mathbf{T}_e = \begin{bmatrix} \cos \phi_5 & -\sin \phi_5 & 0 & 0 \\ \sin \phi_5 & \cos \phi_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -L_5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
{}^0\mathbf{T}_2 &= \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 & x + L_x \cos \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta & 0 & y + L_x \sin \theta \\ 0 & 0 & -1 & L_b + h_b + h_c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^0\mathbf{R}_2 & {}^0\mathbf{O}_2 \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \\
{}^0\mathbf{T}_3 &= \begin{bmatrix} \cos(\phi_1 - \theta) & 0 & \sin(\phi_1 - \theta) & x + L_x \cos \theta + r_b \cos(\phi_1 - \theta) \\ -\sin(\phi_1 - \theta) & 0 & \cos(\phi_1 - \theta) & y + L_x \sin \theta - r_b \sin(\phi_1 - \theta) \\ 0 & -1 & 0 & L_1 + L_b + h_b + h_c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^0\mathbf{R}_3 & {}^0\mathbf{O}_3 \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \\
{}^0\mathbf{T}_4 &= \begin{bmatrix} {}^0\mathbf{R}_4 & {}^0\mathbf{O}_4 \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}, \quad {}^0\mathbf{O}_4 = \begin{bmatrix} x + L_x \cos \theta + (r_b + L_2 \sin \phi_2) \cos(\phi_1 - \theta) \\ y + L_x \sin \theta - (r_b + L_2 \sin \phi_2) \sin(\phi_1 - \theta) \\ L_1 + L_b + h_b + h_c + L_2 \cos \phi_2 \end{bmatrix} \\
{}^0\mathbf{R}_4 &= \begin{bmatrix} \cos(\phi_1 - \theta) \sin \phi_2 & \cos(\phi_1 - \theta) \cos \phi_2 & \sin(\phi_1 - \theta) \\ -\sin(\phi_1 - \theta) \sin \phi_2 & -\sin(\phi_1 - \theta) \cos \phi_2 & \cos(\phi_1 - \theta) \\ \cos \phi_2 & -\sin \phi_2 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
{}^0\mathbf{T}_5 &= \begin{bmatrix} {}^0\mathbf{R}_5 & {}^0\mathbf{O}_5 \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \\
{}^0\mathbf{R}_5 &= \begin{bmatrix} \cos(\phi_1 - \theta) \sin(\phi_2 + \phi_3) & \cos(\phi_1 - \theta) \cos(\phi_2 + \phi_3) & \sin(\phi_1 - \theta) \\ -\sin(\phi_1 - \theta) \sin(\phi_2 + \phi_3) & -\sin(\phi_1 - \theta) \cos(\phi_2 + \phi_3) & \cos(\phi_1 - \theta) \\ \cos(\phi_2 + \phi_3) & -\sin(\phi_2 + \phi_3) & 0 \end{bmatrix} \\
{}^0\mathbf{O}_5 &= \begin{bmatrix} x + L_x \cos \theta + r_b \cos(\phi_1 - \theta) + L_2 \cos(\phi_1 - \theta) \sin \phi_2 + L_3 \sin(\phi_2 + \phi_3) \cos(\phi_1 - \theta) \\ y + L_x \sin \theta - r_b \sin(\phi_1 - \theta) - L_2 \sin(\phi_1 - \theta) \sin \phi_2 - L_3 \sin(\phi_2 + \phi_3) \sin(\phi_1 - \theta) \\ L_1 + L_b + h_b + h_c + L_3 \cos(\phi_2 + \phi_3) + L_2 \cos \phi_2 \end{bmatrix} \\
{}^0\mathbf{T}_6 &= \begin{bmatrix} {}^0\mathbf{R}_6 & {}^0\mathbf{O}_6 \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \\
{}^0\mathbf{R}_6 &= \begin{bmatrix} \cos(\phi_1 - \theta) \sin(\phi_2 + \phi_3 + \phi_4) & \cos(\phi_1 - \theta) \cos(\phi_2 + \phi_3 + \phi_4) & \sin(\phi_1 - \theta) \\ -\sin(\phi_1 - \theta) \sin(\phi_2 + \phi_3 + \phi_4) & -\cos(\phi_2 + \phi_3 + \phi_4) \sin(\phi_1 - \theta) & \cos(\phi_1 - \theta) \\ \cos(\phi_2 + \phi_3 + \phi_4) & -\sin(\phi_2 + \phi_3 + \phi_4) & 0 \end{bmatrix} \\
{}^0\mathbf{O}_6 &= \begin{bmatrix} x + L_x \cos \theta + [r_b + L_2 \sin \phi_2 + L_3 \sin(\phi_2 + \phi_3) + L_4 \sin(\phi_2 + \phi_3 + \phi_4)] \cos(\phi_1 - \theta) \\ y + L_x \sin \theta - [r_b + L_2 \sin \phi_2 + L_3 \sin(\phi_2 + \phi_3) + L_4 \sin(\phi_2 + \phi_3 + \phi_4)] \sin(\phi_1 - \theta) \\ h_b + h_c + L_1 + L_b + L_2 \cos \phi_2 + L_3 \cos(\phi_2 + \phi_3) + L_4 \cos(\phi_2 + \phi_3 + \phi_4) \end{bmatrix} \\
{}^0\mathbf{T}_7 &= \begin{bmatrix} {}^0\mathbf{R}_7 & {}^0\mathbf{O}_7 \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \\
{}^0\mathbf{R}_7 &= \begin{bmatrix} -\cos(\phi_1 - \theta) \cos(\phi_2 + \phi_3 + \phi_4) & \sin(\phi_1 - \theta) & -\cos(\phi_1 - \theta) \sin(\phi_2 + \phi_3 + \phi_4) \\ \cos(\phi_2 + \phi_3 + \phi_4) \sin(\phi_1 - \theta) & \cos(\phi_1 - \theta) & \sin(\phi_1 - \theta) \sin(\phi_2 + \phi_3 + \phi_4) \\ \sin(\phi_2 + \phi_3 + \phi_4) & 0 & -\cos(\phi_2 + \phi_3 + \phi_4) \end{bmatrix} \\
{}^0\mathbf{O}_7 &= \begin{bmatrix} x + L_x \cos \theta + [r_b + L_2 \sin \phi_2 + L_3 \sin(\phi_2 + \phi_3) + L_4 \sin(\phi_2 + \phi_3 + \phi_4)] \cos(\phi_1 - \theta) \\ y + L_x \sin \theta - [r_b + L_2 \sin \phi_2 + L_3 \sin(\phi_2 + \phi_3) + L_4 \sin(\phi_2 + \phi_3 + \phi_4)] \sin(\phi_1 - \theta) \\ h_b + h_c + L_1 + L_b + L_2 \cos \phi_2 + L_3 \cos(\phi_2 + \phi_3) + L_4 \cos(\phi_2 + \phi_3 + \phi_4) \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

La matriz que relaciona el efector final con el marco inercial $\{0\}$

$${}^0\mathbf{T}_e = \begin{bmatrix} {}^0\mathbf{R}_e & {}^0\mathbf{O}_e \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.7})$$

$$\begin{aligned}
{}^0\mathbf{R}_e &= \begin{bmatrix} \sin(\phi_1 - \theta) \sin \phi_5 - \cos(\phi_1 - \theta) \alpha_1 \cos \phi_5 & \sin(\phi_1 - \theta) \cos \phi_5 + \alpha_1 \cos(\phi_1 - \theta) \sin \phi_5 & -\alpha_2 \cos(\phi_1 - \theta) \\ \cos(\phi_1 - \theta) \sin \phi_5 + \alpha_1 \sin(\phi_1 - \theta) \cos \phi_5 & \cos(\phi_1 - \theta) \cos \phi_5 - \alpha_1 \sin(\phi_1 - \theta) \sin \phi_5 & \alpha_2 \sin(\phi_1 - \theta) \\ \alpha_2 \cos \phi_5 & -\alpha_2 \sin \phi_5 & -\alpha_1 \end{bmatrix} \\
{}^0\mathbf{O}_e &= \begin{bmatrix} x + L_x \cos \theta + [r_b + L_2 \sin \phi_2 + L_3 \sin(\phi_2 + \phi_3) + (L_4 + L_5) \sin(\phi_2 + \phi_3 + \phi_4)] \cos(\phi_1 - \theta) \\ y + L_x \sin \theta - [r_b + L_2 \sin \phi_2 + L_3 \sin(\phi_2 + \phi_3) + (L_4 + L_5) \sin(\phi_2 + \phi_3 + \phi_4)] \sin(\phi_1 - \theta) \\ h_b + h_c + L_1 + L_b + L_2 \cos \phi_2 + L_3 \cos(\phi_2 + \phi_3) + (L_4 + L_5) \cos(\phi_2 + \phi_3 + \phi_4) \end{bmatrix} \\
\alpha_1 &= \cos(\phi_2 + \phi_3 + \phi_4), \quad \alpha_2 = \sin(\phi_2 + \phi_3 + \phi_4)
\end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

A.2.2. Cinemática Inversa

De la Figura A.2 se puede ver fácilmente que las orientaciones son

$$\begin{aligned}
\theta - \phi_1 &= \zeta_{ef} \\
\phi_2 + \phi_3 + \phi_4 &= \psi_{ef}
\end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

Con

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}} \right)$$

Luego, igualando la ecuación (A.8) a un vector de coordenadas deseadas para el efector final, se tiene

$$\begin{bmatrix} x + L_x \cos \theta + [r_b + L_2 \sin \phi_2 + L_3 \sin(\phi_2 + \phi_3) + (L_4 + L_5) \sin(\phi_2 + \phi_3 + \phi_4)] \cos(\phi_1 - \theta) \\ y + L_x \sin \theta - [r_b + L_2 \sin \phi_2 + L_3 \sin(\phi_2 + \phi_3) + (L_4 + L_5) \sin(\phi_2 + \phi_3 + \phi_4)] \sin(\phi_1 - \theta) \\ h_b + h_c + L_1 + L_b + L_2 \cos \phi_2 + L_3 \cos(\phi_2 + \phi_3) + (L_4 + L_5) \cos(\phi_2 + \phi_3 + \phi_4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{efd} \\ y_{efd} \\ z_{efd} \end{bmatrix} \quad (\text{A.10})$$

Las coordenadas $\phi_i, i = 2, 3, 4$, se obtienen a partir de resolver el sistema de ecuaciones no lineales (A.9) y (A.10). La variable ϕ_5 que hace el movimiento de muñeca, no afecta en nada a la posición del efector final ni a las orientaciones ψ_{ef}, ζ_{ef} . Definimos $\phi_5 = \text{cte}$.

A.2.3. Modelo completo

En este modelo ya se consideran las fuerzas debido a la fricción (viscosa) y también la interacción del robot con el ambiente.

En este caso, el vector de coordenadas generalizadas es $\mathbf{q}(t) = [x \ y \ \theta \ \phi_1 \ \phi_2 \ \phi_3 \ \phi_4 \ \phi_5]^T$. Así, el modelo dinámico completo tiene la forma

$$\mathbf{D}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{F}_f(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{G}(\mathbf{q}) = \tau - \mathbf{J}_e^T(\mathbf{q}) \mathbf{h}_r \quad (\text{A.11})$$

Recuerde que si el robot está en movimiento libre, es decir, que el efector final no tiene contacto con el ambiente, entonces el término $\mathbf{J}_e^T(\mathbf{q}) \mathbf{h}_r$ es nulo.

Se formulan los Jacobianos para cada centro de masa como sigue

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_{c_m} &= \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{\mathbf{v}_{c_m}} \\ \mathbf{J}_{\omega_{c_m}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{x}_0 & \hat{y}_0 & \hat{z}_1 \times (\mathbf{O}_{c_m} - \mathbf{O}_1) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \hat{z}_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{J}_{c_b} &= \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{\mathbf{v}_{c_b}} \\ \mathbf{J}_{\omega_{c_b}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{x}_0 & \hat{y}_0 & \hat{z}_1 \times (\mathbf{O}_{c_b} - \mathbf{O}_1) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \hat{z}_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{J}_{c_1} &= \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{\mathbf{v}_{c_1}} \\ \mathbf{J}_{\omega_{c_1}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{x}_0 & \hat{y}_0 & \hat{z}_1 \times (\mathbf{O}_{c_1} - \mathbf{O}_1) & \hat{z}_2 \times (\mathbf{O}_{c_1} - \mathbf{O}_2) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \hat{z}_1 & \hat{z}_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{J}_{c_2} &= \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{\mathbf{v}_{c_2}} \\ \mathbf{J}_{\omega_{c_2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{x}_0 & \hat{y}_0 & \hat{z}_1 \times (\mathbf{O}_{c_2} - \mathbf{O}_1) & \hat{z}_2 \times (\mathbf{O}_{c_2} - \mathbf{O}_2) & \hat{z}_3 \times (\mathbf{O}_{c_2} - \mathbf{O}_3) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \hat{z}_1 & \hat{z}_2 & \hat{z}_3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{J}_{c_3} &= \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{\mathbf{v}_{c_3}} \\ \mathbf{J}_{\omega_{c_3}} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \hat{x}_0 & \hat{y}_0 & \hat{z}_1 \times (\mathbf{O}_{c_3} - \mathbf{O}_1) & \hat{z}_2 \times (\mathbf{O}_{c_3} - \mathbf{O}_2) & \hat{z}_3 \times (\mathbf{O}_{c_3} - \mathbf{O}_3) & \hat{z}_4 \times (\mathbf{O}_{c_3} - \mathbf{O}_4) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \hat{z}_1 & \hat{z}_2 & \hat{z}_3 & \hat{z}_4 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{J}_{c_4} &= \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{\mathbf{v}_{c_4}} \\ \mathbf{J}_{\omega_{c_4}} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \hat{x}_0 & \hat{y}_0 & \hat{z}_1 \times (\mathbf{O}_{c_4} - \mathbf{O}_1) & \hat{z}_2 \times (\mathbf{O}_{c_4} - \mathbf{O}_2) & \hat{z}_3 \times (\mathbf{O}_{c_4} - \mathbf{O}_3) & \hat{z}_4 \times (\mathbf{O}_{c_4} - \mathbf{O}_4) & \hat{z}_5 \times (\mathbf{O}_{c_4} - \mathbf{O}_5) & 0 \\ 0 & 0 & \hat{z}_1 & \hat{z}_2 & \hat{z}_3 & \hat{z}_4 & \hat{z}_5 & 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{J}_{c_5} &= \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{\mathbf{v}_{c_5}} \\ \mathbf{J}_{\omega_{c_5}} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \hat{x}_0 & \hat{y}_0 & \hat{z}_1 \times (\mathbf{O}_{c_5} - \mathbf{O}_1) & \hat{z}_2 \times (\mathbf{O}_{c_5} - \mathbf{O}_2) & \hat{z}_3 \times (\mathbf{O}_{c_5} - \mathbf{O}_3) & \hat{z}_4 \times (\mathbf{O}_{c_5} - \mathbf{O}_4) & \hat{z}_5 \times (\mathbf{O}_{c_5} - \mathbf{O}_5) & \hat{z}_7 \times (\mathbf{O}_{c_5} - \mathbf{O}_7) \\ 0 & 0 & \hat{z}_1 & \hat{z}_2 & \hat{z}_3 & \hat{z}_4 & \hat{z}_5 & \hat{z}_7 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Así, se obtienen primero

$$\begin{aligned}
\hat{x}_0 &= \hat{i} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{y}_0 = \hat{j} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{z}_i = {}^0\mathbf{R}_i \hat{k}, \quad \hat{z}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \hat{z}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \\
\hat{z}_3 &= \hat{z}_4 = \hat{z}_5 = \begin{bmatrix} \sin(\phi_1 - \theta) \\ \cos(\phi_1 - \theta) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{z}_7 = \begin{bmatrix} -\cos(\phi_1 - \theta) \sin(\phi_2 + \phi_3 + \phi_4) \\ \sin(\phi_1 - \theta) \sin(\phi_2 + \phi_3 + \phi_4) \\ -\cos(\phi_2 + \phi_3 + \phi_4) \end{bmatrix} \\
{}^1\mathbf{O}_{c_m} &= \begin{bmatrix} p_x \\ -p_y \\ \frac{h_c}{2} + p_z \end{bmatrix}, \quad {}^2\mathbf{O}_{c_1} = \begin{bmatrix} r_c \cos \phi_1 \\ r_c \sin \phi_1 \\ -L_{c_1} \end{bmatrix}, \quad {}^3\mathbf{O}_{c_2} = \begin{bmatrix} L_{c_2} \sin \phi_2 \\ -L_{c_2} \cos \phi_2 \\ 0 \end{bmatrix} \\
{}^4\mathbf{O}_{c_3} &= \begin{bmatrix} L_{c_3} \cos \phi_3 \\ L_{c_3} \sin \phi_3 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad {}^5\mathbf{O}_{c_4} = \begin{bmatrix} L_{c_4} \cos \phi_4 \\ L_{c_4} \sin \phi_4 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad {}^7\mathbf{O}_{c_5} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -L_{c_5} \end{bmatrix} \\
{}^i\mathbf{O}_j &= {}^i\mathbf{O}_{j-1} + {}^i\mathbf{R}_{j-1} {}^{j-1}\mathbf{O}_j, \quad {}^1\mathbf{O}_{c_b} = \begin{bmatrix} L_x \\ 0 \\ h_c + L_{c_b} \end{bmatrix} \\
\mathbf{O}_{c_m} &= {}^0\mathbf{O}_1 + {}^0\mathbf{R}_1 {}^1\mathbf{O}_{c_m} = \begin{bmatrix} x + p_x \cos \theta + p_y \sin \theta \\ y - p_y \cos \theta + p_x \sin \theta \\ h_b + \frac{h_c}{2} + p_z \end{bmatrix} \\
\mathbf{O}_{c_b} &= {}^0\mathbf{O}_1 + {}^0\mathbf{R}_1 {}^1\mathbf{O}_{c_b} = \begin{bmatrix} x + L_x \cos \theta \\ y + L_x \sin \theta \\ L_{c_b} + h_b + h_c \end{bmatrix} \\
\mathbf{O}_{c_1} &= {}^0\mathbf{O}_2 + {}^0\mathbf{R}_2 {}^2\mathbf{O}_{c_1} = \begin{bmatrix} x + L_x \cos \theta + r_c \cos(\phi_1 - \theta) \\ y + L_x \sin \theta - r_c \sin(\phi_1 - \theta) \\ L_b + L_{c_1} + h_b + h_c \end{bmatrix} \\
\mathbf{O}_{c_2} &= {}^0\mathbf{O}_3 + {}^0\mathbf{R}_3 {}^3\mathbf{O}_{c_2} = \begin{bmatrix} x + L_x \cos \theta + (r_b + L_{c_2} \sin \phi_2) \cos(\phi_1 - \theta) \\ y + L_x \sin \theta - (r_b + L_{c_2} \sin \phi_2) \sin(\phi_1 - \theta) \\ L_1 + L_b + h_b + h_c + L_{c_2} \cos \phi_2 \end{bmatrix} \\
\mathbf{O}_{c_3} &= {}^0\mathbf{O}_4 + {}^0\mathbf{R}_4 {}^4\mathbf{O}_{c_3} = \begin{bmatrix} x + L_x \cos \theta + [r_b + L_2 \sin \phi_2 + L_{c_3} \sin(\phi_2 + \phi_3)] \cos(\phi_1 - \theta) \\ y + L_x \sin \theta - [r_b + L_2 \sin \phi_2 + L_{c_3} \sin(\phi_2 + \phi_3)] \sin(\phi_1 - \theta) \\ L_b + h_b + h_c + L_1 + L_2 \cos \phi_2 + L_{c_3} \cos(\phi_2 + \phi_3) \end{bmatrix} \\
\mathbf{O}_{c_4} &= {}^0\mathbf{O}_5 + {}^0\mathbf{R}_5 {}^5\mathbf{O}_{c_4} \\
&= \begin{bmatrix} x + L_x \cos \theta + [r_b + L_2 \sin \phi_2 + L_{c_4} \sin(\phi_2 + \phi_3 + \phi_4) + L_3 \sin(\phi_2 + \phi_3)] \cos(\phi_1 - \theta) \\ y + L_x \sin \theta - [r_b + L_2 \sin \phi_2 + L_{c_4} \sin(\phi_2 + \phi_3 + \phi_4) + L_3 \sin(\phi_2 + \phi_3)] \sin(\phi_1 - \theta) \\ L_1 + L_b + h_b + h_c + L_3 \cos(\phi_2 + \phi_3) + L_2 \cos \phi_2 + L_{c_4} \cos(\phi_2 + \phi_3 + \phi_4) \end{bmatrix} \\
\mathbf{O}_{c_5} &= {}^0\mathbf{O}_7 + {}^0\mathbf{R}_7 {}^7\mathbf{O}_{c_5} \\
&= \begin{bmatrix} x + L_x \cos \theta + [r_b + L_2 \sin \phi_2 + L_3 \sin(\phi_2 + \phi_3) + (L_4 + L_{c_5}) \sin(\phi_2 + \phi_3 + \phi_4)] \cos(\phi_1 - \theta) \\ y + L_x \sin \theta - [r_b + L_2 \sin \phi_2 + L_3 \sin(\phi_2 + \phi_3) + (L_4 + L_{c_5}) \sin(\phi_2 + \phi_3 + \phi_4)] \sin(\phi_1 - \theta) \\ h_b + h_c + L_1 + L_b + L_2 \cos \phi_2 + L_3 \cos(\phi_2 + \phi_3) + L_4 \cos(\phi_2 + \phi_3 + \phi_4) + L_{c_5} \cos(\phi_2 + \phi_3 + \phi_4) \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

De tal forma que

$$\begin{aligned}
\mathbf{J}_{\mathbf{v}_{cm}} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & p_y \cos \theta - p_x \sin \theta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & p_x \cos \theta + p_y \sin \theta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
\mathbf{J}_{\mathbf{v}_{cb}} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -L_x \sin \theta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & L_x \cos \theta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
\mathbf{J}_{\mathbf{v}_{c1}} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & r_c \sin(\phi_1 - \theta) - L_x \sin \theta & -r_c \sin(\phi_1 - \theta) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & L_x \cos \theta + r_c \cos(\phi_1 - \theta) & -r_c \cos(\phi_1 - \theta) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
\mathbf{J}_{\mathbf{v}_{c2}} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -L_x \sin \theta + \beta_1 \sin(\phi_1 - \theta) & -\beta_1 \sin(\phi_1 - \theta) & L_{c2} \cos(\phi_1 - \theta) \cos \phi_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & L_x \cos \theta + \beta_1 \cos(\phi_1 - \theta) & -\beta_1 \cos(\phi_1 - \theta) & -L_{c2} \sin(\phi_1 - \theta) \cos \phi_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -L_{c2} \sin \phi_2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
\mathbf{J}_{\mathbf{v}_{c3}} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -L_x \sin \theta + \beta_2 \sin(\phi_1 - \theta) & -\beta_2 \sin(\phi_1 - \theta) & \beta_4 \cos(\phi_1 - \theta) & \beta_5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & L_x \cos \theta + \beta_2 \cos(\phi_1 - \theta) & -\beta_2 \cos(\phi_1 - \theta) & -\beta_4 \sin(\phi_1 - \theta) & -\beta_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\beta_3 & -L_{c3} \sin(\phi_2 + \phi_3) & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
\mathbf{J}_{\mathbf{v}_{c4}} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \beta_{14} & -\beta_7 \sin(\phi_1 - \theta) & \beta_8 \cos(\phi_1 - \theta) & \beta_{10} \cos(\phi_1 - \theta) & \beta_{12} \cos(\phi_1 - \theta) & 0 \\ 0 & 1 & \beta_{15} & -\beta_7 \cos(\phi_1 - \theta) & -\beta_8 \sin(\phi_1 - \theta) & -\beta_{10} \sin(\phi_1 - \theta) & -\beta_{12} \sin(\phi_1 - \theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\beta_9 & -\beta_{11} & -\beta_{13} & 0 \end{pmatrix} \\
\mathbf{J}_{\mathbf{v}_{c5}} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \beta_{23} & -\beta_{16} \sin(\phi_1 - \theta) & \beta_{17} \cos(\phi_1 - \theta) & \beta_{19} \cos(\phi_1 - \theta) & \beta_{21} \cos(\phi_1 - \theta) & 0 \\ 0 & 1 & \beta_{24} & -\beta_{16} \cos(\phi_1 - \theta) & -\beta_{17} \sin(\phi_1 - \theta) & -\beta_{19} \sin(\phi_1 - \theta) & -\beta_{21} \sin(\phi_1 - \theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\beta_{18} & -\beta_{20} & -\beta_{22} & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{J}_{\omega_{cm}} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{J}_{\omega_{cb}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
\mathbf{J}_{\omega_{c1}} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{J}_{\omega_{c2}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \sin(\phi_1 - \theta) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cos(\phi_1 - \theta) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
\mathbf{J}_{\omega_{c3}} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \sin(\phi_1 - \theta) & \sin(\phi_1 - \theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cos(\phi_1 - \theta) & \cos(\phi_1 - \theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
\mathbf{J}_{\omega_{c4}} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \sin(\phi_1 - \theta) & \sin(\phi_1 - \theta) & \sin(\phi_1 - \theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cos(\phi_1 - \theta) & \cos(\phi_1 - \theta) & \cos(\phi_1 - \theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
\mathbf{J}_{\omega_{c5}} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \sin(\phi_1 - \theta) & \sin(\phi_1 - \theta) & \sin(\phi_1 - \theta) & -\cos(\phi_1 - \theta) \sin(\phi_2 + \phi_3 + \phi_4) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cos(\phi_1 - \theta) & \cos(\phi_1 - \theta) & \cos(\phi_1 - \theta) & \sin(\phi_1 - \theta) \sin(\phi_2 + \phi_3 + \phi_4) \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -\cos(\phi_2 + \phi_3 + \phi_4) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Donde

$$\begin{aligned}
\beta_1 &= r_b + L_{c2} \sin \phi_2, \quad \beta_2 = r_b + L_2 \sin \phi_2 + L_{c3} \sin(\phi_2 + \phi_3) \\
\beta_3 &= \beta_2 - r_b, \quad \beta_4 = L_2 \cos \phi_2 + L_{c3} \cos(\phi_2 + \phi_3) \\
\beta_5 &= L_{c3} \cos(\phi_1 - \theta) \cos(\phi_2 + \phi_3), \quad \beta_6 = L_{c3} \sin(\phi_1 - \theta) \cos(\phi_2 + \phi_3) \\
\beta_7 &= r_b + L_2 \sin \phi_2 + L_3 \sin(\phi_2 + \phi_3) + L_{c4} \sin(\phi_2 + \phi_3 + \phi_4) \\
\beta_8 &= L_2 \cos \phi_2 + L_3 \cos(\phi_2 + \phi_3) + L_{c4} \cos(\phi_2 + \phi_3 + \phi_4) \\
\beta_9 &= \beta_7 - r_b, \quad \beta_{10} = \beta_8 - L_2 \cos \phi_2, \quad \beta_{11} = \beta_9 - L_2 \sin \phi_2 \\
\beta_{12} &= L_{c4} \cos(\phi_2 + \phi_3 + \phi_4), \quad \beta_{13} = L_{c4} \sin(\phi_2 + \phi_3 + \phi_4) \\
\beta_{14} &= -L_x \sin \theta + \beta_7 \sin(\phi_1 - \theta), \quad \beta_{15} = L_x \cos \theta + \beta_7 \cos(\phi_1 - \theta)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\beta_{16} &= r_b + L_2 \sin \phi_2 + L_3 \sin (\phi_2 + \phi_3) + (L_4 + L_{c_5}) \sin (\phi_2 + \phi_3 + \phi_4) \\
\beta_{17} &= L_2 \cos \phi_2 + L_3 \cos (\phi_2 + \phi_3) + (L_4 + L_{c_5}) \cos (\phi_2 + \phi_3 + \phi_4) \\
\beta_{18} &= \beta_{16} - r_b, \quad \beta_{19} = \beta_{17} - L_2 \cos \phi_2, \quad \beta_{20} = \beta_{18} - L_2 \sin \phi_2 \\
\beta_{21} &= (L_4 + L_{c_5}) \cos (\phi_2 + \phi_3 + \phi_4), \quad \beta_{22} = (L_4 + L_{c_5}) \sin (\phi_2 + \phi_3 + \phi_4) \\
\beta_{23} &= -L_x \sin \theta + \beta_{16} \sin (\phi_1 - \theta), \quad \beta_{24} = L_x \cos \theta + \beta_{16} \cos (\phi_1 - \theta)
\end{aligned}$$

Se considera que el móvil y los eslabones son simétricos, por tanto

$${}^i \mathbf{I}_i = \begin{bmatrix} I_{ixx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{iyy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{izz} \end{bmatrix}, \quad i = m, b, 1, \dots, 5.$$

La matriz de inercia se obtiene de la ecuación

$$\mathbf{D}(\mathbf{q}) = \sum_{i=m}^5 \left\{ m_i \mathbf{J}_{\mathbf{v}_{c_i}}^T(\mathbf{q}) \mathbf{J}_{\mathbf{v}_{c_i}}(\mathbf{q}) + \mathbf{J}_{\omega_{c_i}}^T(\mathbf{q}) {}^0 \mathbf{R}_i(\mathbf{q}) {}^i \mathbf{I}_i {}^0 \mathbf{R}_i^T(\mathbf{q}) \mathbf{J}_{\omega_{c_i}}(\mathbf{q}) \right\}$$

Siendo ${}^0 \mathbf{R}_i(\mathbf{q})$ la matriz de rotación que relaciona el marco de referencia del i -ésimo centro de masa al marco inercial $\{0\}$. Así

$$\begin{aligned}
\mathbf{D}(\mathbf{q}) &= m_m \mathbf{J}_{\mathbf{v}_{c_m}}^T \mathbf{J}_{\mathbf{v}_{c_m}} + \mathbf{J}_{\omega_{c_m}}^T {}^0 \mathbf{R}_2 {}^m \mathbf{I}_m {}^0 \mathbf{R}_2^T \mathbf{J}_{\omega_{c_m}} + m_b \mathbf{J}_{\mathbf{v}_{c_b}}^T \mathbf{J}_{\mathbf{v}_{c_b}} + \mathbf{J}_{\omega_{c_b}}^T {}^0 \mathbf{R}_2 {}^b \mathbf{I}_b {}^0 \mathbf{R}_2^T \mathbf{J}_{\omega_{c_b}} \\
&+ m_1 \mathbf{J}_{\mathbf{v}_{c_1}}^T \mathbf{J}_{\mathbf{v}_{c_1}} + \mathbf{J}_{\omega_{c_1}}^T {}^0 \mathbf{R}_3 {}^1 \mathbf{I}_1 {}^0 \mathbf{R}_3^T \mathbf{J}_{\omega_{c_1}} + m_2 \mathbf{J}_{\mathbf{v}_{c_2}}^T \mathbf{J}_{\mathbf{v}_{c_2}} + \mathbf{J}_{\omega_{c_2}}^T {}^0 \mathbf{R}_4 {}^2 \mathbf{I}_2 {}^0 \mathbf{R}_4^T \mathbf{J}_{\omega_{c_2}} \\
&+ m_3 \mathbf{J}_{\mathbf{v}_{c_3}}^T \mathbf{J}_{\mathbf{v}_{c_3}} + \mathbf{J}_{\omega_{c_3}}^T {}^0 \mathbf{R}_5 {}^3 \mathbf{I}_3 {}^0 \mathbf{R}_5^T \mathbf{J}_{\omega_{c_3}} + m_4 \mathbf{J}_{\mathbf{v}_{c_4}}^T \mathbf{J}_{\mathbf{v}_{c_4}} + \mathbf{J}_{\omega_{c_4}}^T {}^0 \mathbf{R}_6 {}^4 \mathbf{I}_4 {}^0 \mathbf{R}_6^T \mathbf{J}_{\omega_{c_4}} \\
&+ m_5 \mathbf{J}_{\mathbf{v}_{c_5}}^T \mathbf{J}_{\mathbf{v}_{c_5}} + \mathbf{J}_{\omega_{c_5}}^T {}^0 \mathbf{R}_e {}^5 \mathbf{I}_5 {}^0 \mathbf{R}_e^T \mathbf{J}_{\omega_{c_5}}
\end{aligned}$$

$$\mathbf{D}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & d_{14} & d_{15} & d_{16} & d_{17} & d_{18} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} & d_{24} & d_{25} & d_{26} & d_{27} & d_{28} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & d_{34} & d_{35} & d_{36} & d_{37} & d_{38} \\ d_{41} & d_{42} & d_{43} & d_{44} & d_{45} & d_{46} & d_{47} & d_{48} \\ d_{51} & d_{52} & d_{53} & d_{54} & d_{55} & d_{56} & d_{57} & d_{58} \\ d_{61} & d_{62} & d_{63} & d_{64} & d_{65} & d_{66} & d_{67} & d_{68} \\ d_{71} & d_{72} & d_{73} & d_{74} & d_{75} & d_{76} & d_{77} & d_{78} \\ d_{81} & d_{82} & d_{83} & d_{84} & d_{85} & d_{86} & d_{87} & d_{88} \end{bmatrix} \quad (\text{A.12})$$

La matriz de Coriolis

$$\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} & C_{17} & C_{18} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} & C_{27} & C_{28} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} & C_{37} & C_{38} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} & C_{47} & C_{48} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} & C_{57} & C_{58} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} & C_{67} & C_{68} \\ C_{71} & C_{72} & C_{73} & C_{74} & C_{75} & C_{76} & C_{77} & C_{78} \\ C_{81} & C_{82} & C_{83} & C_{84} & C_{85} & C_{86} & C_{87} & C_{88} \end{bmatrix} \quad (\text{A.13})$$

La definición de los términos de la matriz de inercia ($\mathbf{D}(\mathbf{q})$) y la matriz de Coriolis ($\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$) se muestran en [30] debido al tamaño de las ecuaciones.

Por otro lado, la energía potencial del sistema está dada por

$$\mathcal{V} = \sum_{i=m}^5 m_i \mathbf{g}^T \mathbf{O}_{c_i}$$

Donde $\mathbf{g}^T = [0 \ 0 \ -g]$ con g la gravedad. Esto es

$$\begin{aligned} \mathcal{V} = & -gm_m \left(h_b + \frac{h_c}{2} + p_z \right) - gm_5 (L_1 + L_b + h_b + h_c + L_3 \cos(\phi_2 + \phi_3)) \\ & - gm_5 (L_2 \cos \phi_2 + L_4 \cos(\phi_2 + \phi_3 + \phi_4) + L_{c_5} \cos(\phi_2 + \phi_3 + \phi_4)) \\ & - gm_2 (L_1 + L_b + h_b + h_c + L_{c_2} \cos \phi_2) \\ & - gm_4 (L_1 + L_b + h_b + h_c + L_3 \cos(\phi_2 + \phi_3) + L_2 \cos \phi_2 + L_{c_4} \cos(\phi_2 + \phi_3 + \phi_4)) \\ & - gm_b (L_{c_b} + h_b + h_c) \\ & - gm_3 (L_1 + L_b + h_b + h_c + L_{c_3} \cos(\phi_2 + \phi_3) + L_2 \cos \phi_2) - gm_1 (L_b + L_{c_1} + h_b + h_c) \end{aligned}$$

Luego, el vector de fuerzas gravitacionales

$$\begin{aligned} \mathbf{G}(\mathbf{q}) &= - \left[\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial q_1} \quad \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial q_2} \quad \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial q_3} \quad \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial q_4} \quad \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial q_5} \quad \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial q_6} \quad \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial q_7} \quad \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial q_8} \right]^T \\ \mathbf{G}(\mathbf{q}) &= [G_1 \ G_2 \ G_3 \ G_4 \ G_5 \ G_6 \ G_7 \ G_8]^T \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

$$\begin{aligned} G_1 &= G_2 = G_3 = G_4 = G_8 = 0 \\ G_5 &= -gm_5 (L_3 \sin(\phi_2 + \phi_3) + L_2 \sin \phi_2 + L_4 \sin(\phi_2 + \phi_3 + \phi_4) + L_{c_5} \sin(\phi_2 + \phi_3 + \phi_4)) \\ & \quad - gm_4 (L_3 \sin(\phi_2 + \phi_3) + L_2 \sin \phi_2 + L_{c_4} \sin(\phi_2 + \phi_3 + \phi_4)) \\ & \quad - gm_3 (L_{c_3} \sin(\phi_2 + \phi_3) + L_2 \sin \phi_2) - L_{c_2} gm_2 \sin \phi_2 \\ G_6 &= -gm_5 (L_3 \sin(\phi_2 + \phi_3) + L_4 \sin(\phi_2 + \phi_3 + \phi_4) + L_{c_5} \sin(\phi_2 + \phi_3 + \phi_4)) \\ & \quad - gm_4 (L_3 \sin(\phi_2 + \phi_3) + L_{c_4} \sin(\phi_2 + \phi_3 + \phi_4)) - L_{c_3} gm_3 \sin(\phi_2 + \phi_3) \\ G_7 &= -g (L_4 m_5 + L_{c_4} m_4 + L_{c_5} m_5) \sin(\phi_2 + \phi_3 + \phi_4) \end{aligned}$$

Considerando sólo fricción viscosa, se tiene

$$\mathbf{F}_f(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = [b_x \dot{x} \quad b_y \dot{y} \quad b_\theta \dot{\theta} \quad b_{\phi_1} \dot{\phi}_1 \quad b_{\phi_2} \dot{\phi}_2 \quad b_{\phi_3} \dot{\phi}_3 \quad b_{\phi_4} \dot{\phi}_4 \quad b_{\phi_5} \dot{\phi}_5]^T \quad (\text{A.15})$$

A.2.4. Modelo reducido

El modelo reducido, considerando el vector auxiliar $\eta(t) = [v \ \dot{\theta} \ \dot{\phi}_1 \ \dot{\phi}_2 \ \dot{\phi}_3 \ \dot{\phi}_4 \ \dot{\phi}_5]^T$, tiene la forma

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{D}}(\mathbf{q})\dot{\eta} + \bar{\mathbf{C}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\eta + \bar{\mathbf{F}}_f(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \bar{\mathbf{G}}(\mathbf{q}) &= \bar{\boldsymbol{\tau}}(\mathbf{q}) \\ \dot{\mathbf{q}} &= \mathbf{S}(\mathbf{q})\eta \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

Donde

$$\begin{aligned}
\bar{\mathbf{D}}(\mathbf{q}) &= \mathbf{S}^T(\mathbf{q})\mathbf{D}(\mathbf{q})\mathbf{S}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{7 \times 7} \\
\bar{\mathbf{C}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= \mathbf{S}^T(\mathbf{q})\mathbf{D}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{S}}(\mathbf{q}) + \mathbf{S}^T(\mathbf{q})\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\mathbf{S}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{7 \times 7} \\
\bar{\mathbf{F}}_f(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= \mathbf{S}^T(\mathbf{q})\mathbf{F}_f(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \in \mathbb{R}^7 \\
\bar{\mathbf{G}}(\mathbf{q}) &= \mathbf{S}^T(\mathbf{q})\mathbf{G}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^7 \\
\bar{\boldsymbol{\tau}}(\mathbf{q}) &= \mathbf{S}^T(\mathbf{q})\mathbf{B}(\mathbf{q})\boldsymbol{\tau}_{red} - \mathbf{S}^T(\mathbf{q})\mathbf{J}_e^T(\mathbf{q})\mathbf{h}_r \in \mathbb{R}^7
\end{aligned}$$

En este caso, $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{B}(\mathbf{q})\boldsymbol{\tau}_{red} \in \mathbb{R}^{8 \times 1}$ con $\boldsymbol{\tau} = [F_x \ F_y \ \tau_c \ \tau_1 \ \tau_2 \ \tau_3 \ \tau_4 \ \tau_5]^T$, $\boldsymbol{\tau}_{red} = [\tau_d \ \tau_i \ \tau_1 \ \tau_2 \ \tau_3 \ \tau_4 \ \tau_5]^T$. Además, se re-definen las matrices

$$\mathbf{S}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin \theta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \frac{1}{R} \cos \theta & \frac{1}{R} \cos \theta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{R} \sin \theta & \frac{1}{R} \sin \theta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{L}{R} & -\frac{L}{R} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La definición de los términos de la matriz de inercia y de Coriolis del sistema reducido se muestran en [30].

$$\bar{\mathbf{D}}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \bar{d}_{11} & \bar{d}_{12} & \bar{d}_{13} & \bar{d}_{14} & \bar{d}_{15} & \bar{d}_{16} & \bar{d}_{17} \\ \bar{d}_{21} & \bar{d}_{22} & \bar{d}_{23} & \bar{d}_{24} & \bar{d}_{25} & \bar{d}_{26} & \bar{d}_{27} \\ \bar{d}_{31} & \bar{d}_{32} & \bar{d}_{33} & \bar{d}_{34} & \bar{d}_{35} & \bar{d}_{36} & \bar{d}_{37} \\ \bar{d}_{41} & \bar{d}_{42} & \bar{d}_{43} & \bar{d}_{44} & \bar{d}_{45} & \bar{d}_{46} & \bar{d}_{47} \\ \bar{d}_{51} & \bar{d}_{52} & \bar{d}_{53} & \bar{d}_{54} & \bar{d}_{55} & \bar{d}_{56} & \bar{d}_{57} \\ \bar{d}_{61} & \bar{d}_{62} & \bar{d}_{63} & \bar{d}_{64} & \bar{d}_{65} & \bar{d}_{66} & \bar{d}_{67} \\ \bar{d}_{71} & \bar{d}_{72} & \bar{d}_{73} & \bar{d}_{74} & \bar{d}_{75} & \bar{d}_{76} & \bar{d}_{77} \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{C}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} \bar{C}_{11} & \bar{C}_{12} & \bar{C}_{13} & \bar{C}_{14} & \bar{C}_{15} & \bar{C}_{16} & \bar{C}_{17} \\ \bar{C}_{21} & \bar{C}_{22} & \bar{C}_{23} & \bar{C}_{24} & \bar{C}_{25} & \bar{C}_{26} & \bar{C}_{27} \\ \bar{C}_{31} & \bar{C}_{32} & \bar{C}_{33} & \bar{C}_{34} & \bar{C}_{35} & \bar{C}_{36} & \bar{C}_{37} \\ \bar{C}_{41} & \bar{C}_{42} & \bar{C}_{43} & \bar{C}_{44} & \bar{C}_{45} & \bar{C}_{46} & \bar{C}_{47} \\ \bar{C}_{51} & \bar{C}_{52} & \bar{C}_{53} & \bar{C}_{54} & \bar{C}_{55} & \bar{C}_{56} & \bar{C}_{57} \\ \bar{C}_{61} & \bar{C}_{62} & \bar{C}_{63} & \bar{C}_{64} & \bar{C}_{65} & \bar{C}_{66} & \bar{C}_{67} \\ \bar{C}_{71} & \bar{C}_{72} & \bar{C}_{73} & \bar{C}_{74} & \bar{C}_{75} & \bar{C}_{76} & \bar{C}_{77} \end{bmatrix}$$

También se tienen

$$\bar{\mathbf{G}}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \bar{G}_1 \\ \bar{G}_2 \\ \bar{G}_3 \\ \bar{G}_4 \\ \bar{G}_5 \\ \bar{G}_6 \\ \bar{G}_7 \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{F}}_f(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} b_x \dot{x} \cos \theta + b_y \dot{y} \sin \theta \\ b_\theta \dot{\theta} \\ b_{\phi_1} \dot{\phi}_1 \\ b_{\phi_2} \dot{\phi}_2 \\ b_{\phi_3} \dot{\phi}_3 \\ b_{\phi_4} \dot{\phi}_4 \\ b_{\phi_5} \dot{\phi}_5 \end{bmatrix}, \quad \bar{\boldsymbol{\tau}}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \frac{1}{R}(\tau_d + \tau_i) \\ \frac{L}{R}(\tau_d - \tau_i) \\ \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \\ \tau_4 \\ \tau_5 \end{bmatrix}$$

$$\bar{G}_1 = \bar{G}_2 = \bar{G}_3 = \bar{G}_7 = 0$$

$$\begin{aligned}
\bar{G}_4 &= -gm_5 (L_3 \sin(\phi_2 + \phi_3) + L_2 \sin \phi_2 + L_4 \sin(\phi_2 + \phi_3 + \phi_4) + L_{c_5} \sin(\phi_2 + \phi_3 + \phi_4)) \\
&\quad -gm_4 (L_3 \sin(\phi_2 + \phi_3) + L_2 \sin \phi_2 + L_{c_4} \sin(\phi_2 + \phi_3 + \phi_4)) \\
&\quad -gm_3 (L_{c_3} \sin(\phi_2 + \phi_3) + L_2 \sin \phi_2) - L_{c_2} gm_2 \sin \phi_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{G}_5 &= -gm_5 (L_3 \sin(\phi_2 + \phi_3) + L_4 \sin(\phi_2 + \phi_3 + \phi_4) + L_{c_5} \sin(\phi_2 + \phi_3 + \phi_4)) \\
&\quad -gm_4 (L_3 \sin(\phi_2 + \phi_3) + L_{c_4} \sin(\phi_2 + \phi_3 + \phi_4)) - L_{c_3} gm_3 \sin(\phi_2 + \phi_3)
\end{aligned}$$

$$\bar{G}_6 = -g(L_4 m_5 + L_{c_4} m_4 + L_{c_5} m_5) \sin(\phi_2 + \phi_3 + \phi_4)$$

Finalmente, cuando el robot está en movimiento restringido, es decir, que el efector final entra en contacto con el ambiente, se toma en cuenta el Jacobiano del sistema situado en el marco del efector $\{e\}$ considerando sólo la posición cartesiana, esto es $\mathbf{J}_e(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{3 \times n}$, $n = 8$.

$$\mathbf{J}_e(\mathbf{q}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \sigma_1 & -\sigma_3 \sin(\phi_1 - \theta) & \sigma_4 \cos(\phi_1 - \theta) & \sigma_6 \cos(\phi_1 - \theta) & \sigma_8 \cos(\phi_1 - \theta) & 0 \\ 0 & 1 & \sigma_2 & -\sigma_3 \cos(\phi_1 - \theta) & -\sigma_4 \sin(\phi_1 - \theta) & -\sigma_6 \sin(\phi_1 - \theta) & -\sigma_8 \sin(\phi_1 - \theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_5 & \sigma_7 & \sigma_9 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.17})$$

Donde

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= -L_x \sin \theta + r_b \sin(\phi_1 - \theta) + L_2 \sin(\phi_1 - \theta) \sin \phi_2 + L_3 \sin(\phi_2 + \phi_3) \sin(\phi_1 - \theta) \\ &\quad + L_4 \sin(\phi_2 + \phi_3 + \phi_4) \sin(\phi_1 - \theta) + L_5 \sin(\phi_1 - \theta) \sin(\phi_2 + \phi_3 + \phi_4) \\ \sigma_2 &= L_x \cos \theta + r_b \cos(\phi_1 - \theta) + L_2 \cos(\phi_1 - \theta) \sin \phi_2 + L_3 \sin(\phi_2 + \phi_3) \cos(\phi_1 - \theta) \\ &\quad + L_4 \sin(\phi_2 + \phi_3 + \phi_4) \cos(\phi_1 - \theta) + L_5 \cos(\phi_1 - \theta) \sin(\phi_2 + \phi_3 + \phi_4) \\ \sigma_3 &= r_b + L_2 \sin \phi_2 + L_3 \sin(\phi_2 + \phi_3) + (L_4 + L_5) \sin(\phi_2 + \phi_3 + \phi_4) \\ \sigma_4 &= L_2 \cos \phi_2 + L_3 \cos(\phi_2 + \phi_3) + (L_4 + L_5) \cos(\phi_2 + \phi_3 + \phi_4) \\ \sigma_5 &= -L_2 \sin \phi_2 - L_3 \sin(\phi_2 + \phi_3) - (L_4 + L_5) \sin(\phi_2 + \phi_3 + \phi_4) \\ \sigma_6 &= L_3 \cos(\phi_2 + \phi_3) + (L_4 + L_5) \cos(\phi_2 + \phi_3 + \phi_4) \\ \sigma_7 &= -L_3 \sin(\phi_2 + \phi_3) - (L_4 + L_5) \sin(\phi_2 + \phi_3 + \phi_4) \\ \sigma_8 &= (L_4 + L_5) \cos(\phi_2 + \phi_3 + \phi_4) \\ \sigma_9 &= -(L_4 + L_5) \sin(\phi_2 + \phi_3 + \phi_4) \end{aligned}$$

Apéndice B

Dinámica del RMM

B.1. Dinámica en lazo cerrado

Considérese el modelo (2.29) en movimiento libre, es decir, $\mathbf{S}^T(\mathbf{q})\mathbf{J}_e^T(\mathbf{q})\mathbf{h}_r = \mathbf{0}$, y el control (3.9) diseñado en la Sección 3.2.2. Así, sustituyendo el control en el modelo se obtiene

$$\bar{\mathbf{D}}(\mathbf{q})\dot{\eta} + \bar{\mathbf{C}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\eta + \bar{\mathbf{G}}(\mathbf{q}) = \mathbf{S}^T(\mathbf{q})\mathbf{B}(\mathbf{q}) [\mathbf{P}^{-1}(\mathbf{q})\mathbf{H}(\mathbf{q}) [\mathbf{I}^{-1}(\mathbf{q}, \eta) + \dot{\eta}_d + \mathbf{K}_p\mathbf{e}_\eta + \mathbf{U}(\mathbf{q}, \mathbf{q}_d, \eta_d) + \mathbf{G}^*(\mathbf{q}) + \mathbf{F}_f^*(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})]]$$

Usando que $\mathbf{P}(\mathbf{q}) = \mathbf{S}^T(\mathbf{q})\mathbf{B}(\mathbf{q})$, $\mathbf{I}^{-1}(\mathbf{q}, \eta) = \bar{\mathbf{D}}^{-1}(\mathbf{q})\bar{\mathbf{C}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\eta$ y $\mathbf{H}(\mathbf{q}) = \bar{\mathbf{D}}(\mathbf{q})$, se llega a

$$\bar{\mathbf{D}}(\mathbf{q})\dot{\eta} + \bar{\mathbf{C}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\eta + \bar{\mathbf{G}}(\mathbf{q}) = \bar{\mathbf{D}}(\mathbf{q}) [\bar{\mathbf{D}}^{-1}(\mathbf{q})\bar{\mathbf{C}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\eta + \dot{\eta}_d + \mathbf{K}_p\mathbf{e}_\eta + \mathbf{U}(\mathbf{q}, \mathbf{q}_d, \eta_d) + \mathbf{G}^*(\mathbf{q}) + \mathbf{F}_f^*(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})]$$

Multiplicando por la izquierda por $\bar{\mathbf{D}}^{-1}(\mathbf{q})$, y dados $\mathbf{G}^*(\mathbf{q}) = \bar{\mathbf{D}}^{-1}(\mathbf{q})\bar{\mathbf{G}}(\mathbf{q})$, $\mathbf{F}_f^*(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \bar{\mathbf{D}}^{-1}(\mathbf{q})\bar{\mathbf{F}}_f(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ se tiene

$$\dot{\eta} = \dot{\eta}_d + \mathbf{K}_p\mathbf{e}_\eta + \mathbf{U}(\mathbf{q}, \mathbf{q}_d, \eta_d)$$

Siendo $\dot{\mathbf{e}}_\eta = \dot{\eta}_d - \dot{\eta}$, entonces

$$\dot{\mathbf{e}}_\eta + \mathbf{K}_p\mathbf{e}_\eta + \mathbf{U}(\mathbf{q}, \mathbf{q}_d, \eta_d) = \mathbf{0}$$

Esto es, de manera general, para un RMM de n_m grados de libertad en el manipulador,

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{e}_v + k_{p1}e_v + k_1e_{r_x} = 0 \\ \ddot{e}_\theta + k_{p2}\dot{e}_\theta + k_2v_d \frac{\sin(e_\theta)}{e_\theta} e_{r_y} + k_3e_\theta = 0 \\ \ddot{e}_{\phi_1} + k_{p3}\dot{e}_{\phi_1} + k_4e_{\phi_1} = 0 \\ \ddot{e}_{\phi_2} + k_{p4}\dot{e}_{\phi_2} + k_5e_{\phi_2} = 0 \\ \vdots \\ \ddot{e}_{\phi_{n_m}} + k_{p_{n-1}}\dot{e}_{\phi_{n_m}} + k_n e_{\phi_{n_m}} = 0 \end{array} \right. \quad (\text{B.1})$$

B.2. Dinámica de los errores

Derivando las componentes de la ecuación (3.7) y considerando el modelo cinemático (2.12), se tiene

$$\dot{e}_x = \dot{x}_d - \dot{x} = \dot{x}_d - v \cos \theta$$

Dado que $e_v = v_d - v$, entonces

$$\dot{e}_x = \dot{x}_d - (v_d - e_v) \cos(\theta_d - e_\theta) \quad (\text{B.2})$$

De la misma forma, para \dot{e}_y se tiene

$$\dot{e}_y = \dot{y}_d - (v_d - e_v) \sin(\theta_d - e_\theta) \quad (\text{B.3})$$

Derivando el error de orientación

$$\dot{e}_\theta = e_{\eta_2} \quad (\text{B.4})$$

Ahora, considere los errores relativos de la base móvil, ecuación (3.8). Esto es

$$\begin{aligned} e_{r_x} &= e_x \cos \theta + e_y \sin \theta = e_x \cos(\theta_d - e_\theta) + e_y \sin(\theta_d - e_\theta) \\ e_{r_y} &= -e_x \sin \theta + e_y \cos \theta = -e_x \sin(\theta_d - e_\theta) + e_y \cos(\theta_d - e_\theta) \end{aligned}$$

Derivando respecto al tiempo y haciendo simplificaciones, se tiene

$$\dot{e}_{r_x} = v_d \cos(e_\theta) + \dot{\theta} e_{r_y} - v = v_d \cos(e_\theta) + (\dot{\theta}_d - \dot{e}_\theta) e_{r_y} + e_v - v_d \quad (\text{B.5})$$

$$\dot{e}_{r_y} = -\dot{\theta} e_{r_x} + v_d \sin(e_\theta) = (\dot{e}_\theta - \dot{\theta}_d) e_{r_x} + v_d \sin(e_\theta) \quad (\text{B.6})$$

Para la parte del manipulador se tiene

$$\dot{e}_{\phi_i} = e_{\eta_{i+2}}, \quad i = 1, \dots, n_m. \quad (\text{B.7})$$

Así, las ecuaciones (B.2), (B.3), (B.4), (B.5), (B.6), (B.7) y (B.1) conforman la dinámica de los errores del sistema.

Bibliografía

- [1] S. Hayati, “Hybrid position/force control of multi-arm cooperating robots,” in *Proceedings. 1986 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, vol. 3, 1986, pp. 82–89.
- [2] M. Uchiyama, N. Iwasawa, and K. Hakomori, “Hybrid position/force control for coordination of a two-arm robot,” in *Proceedings. 1987 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, vol. 4, 1987, pp. 1242–1247.
- [3] S. Hayati, “Position and force control of coordinated multiple arms,” *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, vol. 24, no. 5, pp. 584–590, 1988.
- [4] O. Khatib, “Object level manipulation,” in *Proceedings of the IEEE International Workshop on Intelligent Motion Control*, vol. 2, 1990, pp. 497–502.
- [5] A. Bicchi, D. Prattichizzo, and C. Melchiorri, “Force and dynamic manipulability for cooperating robot systems,” in *Proceedings of the 1997 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robot and Systems. Innovative Robotics for Real-World Applications. IROS '97*, vol. 3, 1997, pp. 1479–1484 vol.3.
- [6] J. Byun and J. Lee, “Dynamic manipulability for cooperating multiple robot systems with frictional contacts,” in *2006 SICE-ICASE International Joint Conference*, 2006, pp. 5899–5904.
- [7] S. Schneider and R. Cannon, “Object impedance control for cooperative manipulation: theory and experimental results,” *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, vol. 8, no. 3, pp. 383–394, 1992.
- [8] F. Caccavale and L. Villani, “An impedance control strategy for cooperative manipulation,” in *2001 IEEE/ASME International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics. Proceedings (Cat. No.01TH8556)*, vol. 1, 2001, pp. 343–348 vol.1.
- [9] R. Bonitz and T. Hsia, “Internal force-based impedance control for cooperating manipulators,” in *[1993] Proceedings IEEE International Conference on Robotics and Automation*, 1993, pp. 944–949 vol.3.
- [10] R. Rastegari and S. A. A. Moosavian, “Multiple impedance control of cooperative manipulators using virtual object grasp,” in *2006 IEEE Conference on Computer Aided Control System Design, 2006 IEEE International Conference on Control Applications, 2006 IEEE International Symposium on Intelligent Control*, 2006, pp. 2872–2877.

- [11] S. Moosavian and E. Papadopoulos, “Multiple impedance control for object manipulation,” in *Proceedings. 1998 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems. Innovations in Theory, Practice and Applications (Cat. No.98CH36190)*, vol. 1, 1998, pp. 461–466 vol.1.
- [12] K. Kosuge, H. Yoshida, T. Fukuda, M. Sakai, K. Kanitani, and K. Hariki, “Unified control for dynamic cooperative manipulation,” in *Proceedings of IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS'94)*, vol. 2, 1994, pp. 1042–1047 vol.2.
- [13] F. Caccavale, P. Chiacchio, A. Marino, and L. Villani, “Six-dof impedance control of dual-arm cooperative manipulators,” *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, vol. 13, no. 5, pp. 576–586, 2008.
- [14] T. Takubo, H. Arai, and K. Tanie, “Control of mobile manipulator using a virtual impedance wall,” in *Proceedings 2002 IEEE International Conference on Robotics and Automation (Cat. No.02CH37292)*, vol. 4, 2002, pp. 3571–3576 vol.4.
- [15] M. Hosseinzadeh, P. Aghabalaie, H. A. Talebi, and M. Shafie, “Adaptive hybrid impedance control of robotic manipulators,” in *IECON 2010 - 36th Annual Conference on IEEE Industrial Electronics Society*, 2010, pp. 1442–1446.
- [16] G. Nazmara, M. M. Fateh, and S. Mohammad Ahmadi, “A robust adaptive impedance control of robots,” in *2018 6th RSI International Conference on Robotics and Mechatronics (IcRoM)*, 2018, pp. 40–45.
- [17] B. Baigzadehnoe, Z. Rahmani, A. Khosravi, and B. Rezaie, “On position/force tracking control problem of cooperative robot manipulators using adaptive fuzzy backstepping approach,” *ISA Transactions*, vol. 70, pp. 432–446, 2017. [Online]. Available: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0019057817305141>
- [18] S. Erhart and S. Hirche, “Internal force analysis and load distribution for cooperative multi-robot manipulation,” *IEEE Transactions on Robotics*, vol. 31, no. 5, pp. 1238–1243, 2015.
- [19] H. Xu, Y. Hou, J.-W. Luo, T. Wu, Y. Wu, S. Chen, X. Li, and H.-T. Zhang, “Cooperative manipulation in unknown environment with distributed control,” in *2021 40th Chinese Control Conference (CCC)*, 2021, pp. 4073–4078.
- [20] J. J. Craig, *Introduction to robotics: mechanics and control*. Upper Saddle River, NJ 07458: Pearson Education, 2005.
- [21] M. W. Spong and M. Vidyasagar, *Robot Dynamics and Control*. United States of America: John Wiley & Sons, Inc., 1989, pp. 140–143.
- [22] C. de Wit, B. Siciliano, G. Bastin, and T. Zodiaco, *Theory of Robot Control*, ser. Communications and Control Engineering. Springer London, 1996.
- [23] B. Siciliano, L. Sciavicco, L. Villani, and G. Oriolo, *Robotics: Modelling, Planning and Control*, ser. Advanced Textbooks in Control and Signal Processing. Springer London, 2010.

- [24] R. d. J. Portillo Vélez, *Control Multilateral de Agarre para Robots Cooperativos Maestro/Multi-Eslavo*. Tesis de doctorado, CINVESTAV Unidad Zacatenco, 2013.
- [25] R. Fierro and F. Lewis, “Control of a nonholonomic mobile robot: backstepping kinematics into dynamics,” in *Proceedings of 1995 34th IEEE Conference on Decision and Control*, vol. 4, 1995, pp. 3805–3810 vol.4.
- [26] M. Infante, R. Cruz Morales, M. Velasco-Villa, and A. Rodríguez Ángeles, “Formación líder-seguidor para robots diferenciales con parámetros de seguimiento variables,” in *Memorias del Congreso Nacional de Control Automático*. AMCA, 10 2019.
- [27] H. Gutiérrez, A. Morales, and H. Nijmeijer, “Synchronization control for a swarm of unicycle robots: Analysis of different controller topologies,” *Asian Journal of Control*, vol. 19, no. 5, pp. 1822–1833, 2017.
- [28] H. K. Khalil, *Nonlinear Control*. Upper Saddle River, NJ 07458: Pearson Education, 2015.
- [29] M. Acevedo Velázquez, *Teleoperación háptica de sistema de robots industriales cooperativos*. Tesis de maestría, CINVESTAV Unidad Zacatenco, 2020.
- [30] G. Fuentesvilla. (2022) Definiciones del modelo kuka youbot. [Online]. Available: https://drive.google.com/file/d/1O_iH2lNSz0y-z2rv-nDqPhUTe0-oBxVb/view?usp=sharing