CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

Unidad Zacatenco

Departamento de Matemática Educativa

Integrando un Sistema de Geometría Dinámica para el aprendizaje del Cálculo:

La bitácora digital como una herramienta que favorece el desarrollo de procesos de resolución de problemas

T E S I S

que presenta:

Daniel José Ortiz May

Para obtener el grado de:

Doctor en Ciencias

En la especialidad de:

Matemática Educativa

Director de la tesis: **Dr. Luz Manuel Santos Trigo**

Ciudad de México Marzo, 2024

CONAHCYT

CONSEJO NACIONAL DE HUMANIDADES
CIENCIAS Y TECNOLOGÍAS

Se extiende un agradecimiento especial al Consejo Nacional de Humanidades, Ciencias y Tecnologías (CONAHCYT) por el apoyo brindado al otorgarme la beca para la realización de mis estudios de Doctorado en Ciencias en el Departamento de Matemática Educativa del CINVESTAV-IPN

Número de becario: 863106

Agradecimientos

Al Dr. Manuel Santos Trigo por su asesoría en el desarrollo de esta investigación. A través de su disciplina y conocimientos, adquirí herramientas invaluables en mi integridad profesional y académica.

A mis sinodales, los doctores Armando Solares Rojas, Ulises Xolocotzin Eligio, Fernando Barrera Mora y José Alberto Monzoy Vázquez, por la labor que desempeñaron en la revisión y refinamiento de esta investigación.

A mis profesores del departamento de matemática educativa. Particularmente, a la Dra. Olimpia Figueras por su apoyo, sus consejos y su guía personal y académica; y al Dr. Luis Moreno por el apoyo brindado a través de enseñanzas y materiales esenciales para mi tránsito por el doctorado.

Al cuerpo administrativo del departamento de Matemática Educativa, especialmente a Adriana Parra y Norma Cruz, por su incansable paciencia y amabilidad. No me caben las palabras para poder expresar mi gratitud por su apoyo en el proceso de mis estudios.

A mi familia, quienes me motivaron con su cariño y confianza en mis capacidades para llevar a buen término esta increíble y ardua labor. Este trabajo se lo dedico a ustedes.

Resumen

Las experiencias y trabajo desarrollado durante la pandemia apuntan a una restructuración de los ambientes de enseñanza y aprendizaje que incorpore de manera coordinada tanto el trabajo remoto de los estudiantes como las actividades presenciales en los escenarios de aprendizaje. Se propone el concepto de bitácora digital como una forma de estructurar y registrar el trabajo de estudiantes de un curso de Cálculo de bachillerato bajo un enfoque de aprendizaje basado en actividades de resolución de problemas matemáticos que involucran el uso sistemático de un Sistema de Geometría Dinámica. La bitácora digital consiste en un repositorio que combina aspectos multimedia para reflejar la manera en que los estudiantes dan sentido a nociones del cálculo a través de evidencias escritas o gráficas que se trabajaron a lo largo del curso. Al definir la construcción de una bitácora digital como el principio organizativo que guía el desarrollo de las actividades, se establecen los sustentos teóricos en los cuales se desarrolla el concepto de la bitácora digita tales como la influencia de elementos como una visión inquisitiva de resolución de problemas en el aprendizaje de las matemáticas, la incorporación de elementos tecnológicos en los recursos cognitivos de los estudiantes y la presencia de soporte técnico para dar seguimiento y retroalimentación al trabajo de los estudiantes.

Los resultados muestran que existen distintos niveles de apropiación de la bitácora como una herramienta que favorece elementos metacognitivos y de autorregulación en el aprendizaje de los estudiantes. Se argumenta que elementos propios de una visión inquisitiva de resolución de problemas matemáticos promueven el desarrollo de hábitos metacognitivos y de introspección en el aprendizaje de los estudiantes, los cuales son clave para la apropiación de una bitácora digital. En este sentido, la bitácora digital se posiciona como una forma de guiar el trabajo que integra el trabajo presencial y asíncrono en futuros escenarios postpandemia.

Abstract

In the face of the health emergency that arose due to the COVID-19 pandemic, it became evident the need to explore learning environments where digital technologies could be incorporated in a way that enhances students' learning organically. That is, learning environments should foster a sense of learning autonomy in students while also taking advantage of the affordances that digital technologies provide. The concept of a digital wall is proposed to structure and record the work of high school students in a Calculus course under an approach based on the development of mathematical problem-solving competencies that systematically involve the coordinated use of digital technologies, mainly a Dynamic Geometry System. The digital wall consists of a registry in which students employ multimedia aspects aimed to display how they make sense of calculus concepts through written or graphical evidence throughout the course. When stablishing the work on the digital wall as the organizing principle that guides the development of activities, it is necessary to define the theoretical foundations on which the concept of the digital wall is based. These foundations include the influence of elements such as an inquiry problem-solving approach for learning mathematics, the incorporation of technological elements into students' cognitive resources, and the presence of technical support to monitor and provide feedback on students' work.

Results indicate the existence of different levels of appropriation for the digital wall as a tool that promotes metacognitive and self-regulation elements in students' learning. It is argued that elements inherent to an inquiry approach to mathematical problem solving promotes the development of metacognitive and introspective habits in students' learning, which are key to the adoption of a digital logbook. In this sense, the digital wall is positioned to guide work that integrates both in-person and asynchronous work in future post-pandemic scenarios.

CONTENIDO

Contenido vii

Capítulo 1 Problema de investigación y estado del arte 1

1.1. Los nuevos escenarios de aprendizaje *postpandemia* 1

1.2. La resolución de problemas matemáticos 4

1.3. El rol de los Sistemas de Geometría Dinámica en el aprendizaje matemático 7

1.4. La pregunta de investigación 9

Capítulo 2 Marco conceptual 12

2.1. El rol del uso coordinado de tecnologías digitales en la resolución de problemas matemáticos 12

2.2. Un enfoque inquisitivo de resolución de problemas matemáticos 16

2.3. Modelo conceptual de la bitácora digital 17

Capítulo 3 Metodología 23

3.1. Diseño de la investigación 23

3.2. Participantes y aspectos generales 25

3.3. Estructura y organización de las tareas 26

3.4. Implementación y conducción del curso 29

3.5. Análisis de los datos 33

Capítulo 4 análisis y resultados 38

4.1. Panorama general sobre la implementación de las actividades 39

4.1.1. Sesión introductoria al uso de GeoGebra para resolver problemas 41

4.1.2. Registros de los estudiantes en la bitácora digital 43

4.1.3. Elementos de soporte 45

4.2 Perfiles de trabajo en la bitácora digital 48

4.2.1. PERFIL PROCEDIMENTAL 50

4.2.2. PERFIL INQUISITIVO 57

4.2.4. PERFIL ANALÍTICO 66

4.3. Evaluación de los estudiantes sobre la bitácora 76

Capítulo 5 Conclusiones 80

5.1. Caracterizando la bitácora digital y la pregunta de investigación 81

5.2. Discusión 86

5.3. Limitaciones y contribuciones 88

Referencias 92

Capítulo 1 Problema de investigación y estado del arte

En este capítulo, se enfatizan los antecedentes sobre la resolución de problemas y el uso de tecnologías digitales que resultan en la incorporación de una bitácora digital como una herramienta de registro sobre las experiencias de aprendizaje de los estudiantes. En la bitácora digital, se organizan y monitorean las formas de razonamiento que emergen durante el desarrollo de competencias o habilidades de resolución de problemas matemáticos. Adicionalmente, se argumenta que la bitácora digital permite establecer un puente que integra formas del trabajo presencial y remoto de los estudiantes, con miras hacia la estructuración de escenarios de aprendizaje postpandemia.

1.1. Los nuevos escenarios de aprendizaje *postpandemia*

Durante las medidas de contención derivadas de la pandemia por COVID-19, se presentaron múltiples dificultades de adaptación a los espacios de aprendizaje remotos en las instituciones educativas de todo el mundo. Foster et al. (2022) argumentan que estas dificultades podían estar asociadas principalmente a la falta de entendimiento que existe acerca del potencial de las herramientas digitales para promover el desarrollo de ideas clave en los estudiantes de matemáticas. Entre dichas dificultades, se destacan las siguientes:

- La ausencia de herramientas para monitorear de forma sistemática el trabajo de los estudiantes. En ambientes presenciales, los profesores ofrecen un seguimiento formal e informal acerca de la comprensión de los estudiantes en tiempo real, principalmente a través de la observación de momentos *eureka* o de *insight*. En ambientes remotos, se encontraron dificultades para ofrecer retroalimentación y orientación oportunas a los estudiantes (Mullen, et al., 2021; Ruthven. 2022).
- Una visión superficial sobre el potencial de las tecnologías digitales para transformar los ambientes de aprendizaje. La falta de enfoques en pedagogías relacionadas con la educación remota y la implementación de tecnologías digitales conllevó a los profesores a depender de enfoques ‘tradicionales’, orientados a cubrir contenidos curriculares, para la organización de sus actividades (Atweh et al., 2023; Foster et al., 2022). En este sentido, los esfuerzos de las instituciones educativas se enfocaron en llevar de manera idéntica las dinámicas y métodos de enseñanza de los ambientes presenciales hacia los espacios remotos (Aguilar et al., 2022; Foster et al., 2022).

- Un conocimiento limitado por parte de los profesores sobre los aspectos vinculados al desarrollo de recursos tecnológicos en ambientes en línea. Al momento en que ocurrió el confinamiento por la pandemia, muchos profesores no contaban con los medios adecuados para poder emplear e implementar recursos para orientar a los estudiantes en la búsqueda de información en medios digitales o que promovieran interacciones sociales espontáneas entre los participantes. Es decir, sistemas de soporte para estructurar las dinámicas relacionadas con la discusión de ideas fundamentales en las matemáticas, la evaluación entre pares y la retroalimentación (Johns & Mills, 2021; Martin et al., 2020; Trenholm et al., 2015);

En este sentido, el confinamiento derivado de la pandemia sirve como un punto de partida para reflexionar sobre futuras direcciones del aprendizaje de las matemáticas con el uso de tecnologías digitales. En palabras de Santos-Trigo (2023; p. 29):

> *La crisis de la pandemia trajo consigo una oportunidad para re-examinar y actualizar las prácticas educativas basadas en el conocimiento acumulado de los resultados en la investigación de resolución de problemas y las formas de enmarcar ambientes emergentes de aprendizaje que incluyan el trabajo tanto remoto como presencial de las actividades de aprendizaje de los estudiantes.*

Esto deriva en la necesidad de caracterizar los nuevos *escenarios de aprendizaje postpandemia,* que Foster et al. (2022) denominan escenarios *listos-para-la-crisis.* Estos escenarios postpandemia involucran la incorporación de formas de enseñanza centradas en los aprendices y con apoyo de tecnologías digitales; complementariamente, el trabajo de los estudiantes debe estar orientado a la identificación de ideas clave para la apropiación de sus propios procesos de aprendizaje. De este modo, cobra importancia plantearse preguntas que han existido en el ámbito de la investigación en la enseñanza de las matemáticas*:* ¿qué tipo de desarrollos digitales son clave para desarrollar el aprendizaje matemático de los estudiantes a través de la resolución de problemas? ¿qué características de estos escenarios ofrecerán oportunidades a los estudiantes para combinar un trabajo en línea y presencial? ¿cómo estos escenarios permitirán aprovechar las permisibilidades de los desarrollos en línea para complementar las actividades de los estudiantes en los salones de clase, de modo que promuevan el desarrollo conceptual del contenido matemático? Se argumenta que las actividades de aprendizaje de los estudiantes no necesariamente están limitadas a los confines físicos de las aulas y resulta importante plantear formas alternativas de estructurar la enseñanza de modo que puedan traerse a discusión los procesos que llevan a cabo los estudiantes dentro y fuera del aula cuando reflexionan sobre los conceptos matemáticos. Esto, a su vez, requiere de la activación de sistemas de comunicación y plataformas de trabajo que, a su vez, demanda el replanteamiento del rol de los profesores y estudiantes en las pedagogías basadas en el uso de tecnologías digitales (Atweh et al., 2023).

Diseñar e implementar modelos de enseñanza remotos o híbridos implica reconocer que el uso de tecnologías digitales en el aula de matemáticas tiene el potencial de ampliar la forma en que los estudiantes interactúan tanto entre ellos como con el profesor y los materiales disponibles de los cursos (Camacho-Machín, et al., 2018), sin perder de vista la necesidad de hacer explícitas dichas relaciones tanto para profesores como para los estudiantes (Dereshiwsky, 2015; Laborde, 2002). En este sentido, emplear tecnologías digitales en los escenarios de aprendizaje demanda por parte de los profesores el desarrollo de recursos y la apropiación de las herramientas que permitan caracterizar las formas de razonamiento que exhiben los estudiantes y establecer formas de evaluar sus acercamientos individuales o en grupo (Camacho-Machín et al., 2018).

Un elemento característico de los nuevos escenarios de aprendizaje postpandemia es la inclusión del trabajo de los estudiantes que ocurre fuera del salón de clases, es decir, de manera remota: ¿qué tipo de materiales consultan? ¿cómo revisan o extienden la comprensión de conceptos y resolución de problemas? Este tipo de información permite dar cuenta sobre los diversos procesos que atraviesan los estudiantes al dar sentido a las ideas matemáticas. Así, se argumenta que la articulación de los procesos de razonamiento y resolución de tareas dentro y fuera del salón de clases se ve beneficiada mediante el uso de herramientas de registro, como una bitácora, portafolio o diario de clase. La estructuración de estos registros ofrece a los estudiantes la oportunidad de revisar el material del curso, de realizar conexiones entre conceptos y de reflexionar sobre su propio progreso y autoevaluación (Hanusch, 2020); además, tienen el potencial de promover el desarrollo de habilidades metacognitivas, pues implica registrar, estructurar y explicitar los razonamientos que surgen durante el proceso de resolver problemas matemáticos (Hancock & Karakok, 2020). El trabajo remoto de los estudiantes incluye el uso de diferentes aplicaciones y sitios web para la búsqueda y procesamiento de información en diversas fuentes, sin embargo. Complementariamente, es importante considerar que el diseño de escenarios de aprendizaje postpandemia demanda analizar y discutir formas de incorporar de forma significativa el uso de diversas herramientas digitales para involucrar a los estudiantes en discusiones matemáticas y para representar, explorar y resolver problemas o tareas matemáticas. Por lo tanto, Santos-Trigo et al. (2022) destacan que una *bitácora digital* emerge como una herramienta que permite a los estudiantes registrar, comunicar y reflexionar sobre sus aproximaciones en la resolución de problemas matemáticos a través de explotar el potencial de las tecnologías digitales para dar sentido a las ideas matemáticas. Esto contribuyendo a la documentación individual y colectiva de las experiencias de aprendizaje de los estudiantes.

1.2. La resolución de problemas matemáticos

La resolución de problemas es una actividad fundamental de la naturaleza humana que destaca las formas en que los seres humanos interactúan y se relacionan con sus alrededores y como desarrollan conocimiento científico (Santos-Trigo, 2020). Tomando como punto de partida trabajos seminales como los de Polya (1945), Hadamard (1945) y Schoenfeld (1985), la resolución de problemas se ha consolidado como una actividad relevante que sustenta las propuestas curriculares y los escenarios de aprendizaje. De manera general, el aprendizaje basado en la resolución de problemas se concibe como una forma que prioriza que los estudiantes desarrollen estrategias y recursos cognitivos necesarios para comprender conceptos y aplicarlos al enfrentarse en situaciones problemáticas, así como hábitos como el pensamiento flexible e innovativo, o la comunicación y presentación de ideas entre sus pares (English y Kirshner, 2016; Gros, Kinshuk & Maina, 2016). La resolución de problemas implica el desarrollo de habilidades fundamentales para la formación integral de los estudiantes, tales como la persistencia, flexibilidad, creatividad, perseverancia y curiosidad; adicionalmente, un enfoque de resolución de problemas coloca la autoridad del aprendizaje sobre los estudiantes, favoreciendo un sentido de apropiación y agencia sobre el estudio de la disciplina (NTCM, 2014; 2020). Santos-Trigo, (2014) argumenta que, en la medida que los estudiantes se enfrentan a problemas matemáticos, estos enlazan diversas ideas respecto a los conceptos que surgen en sus soluciones o exploraciones que constituyen la base del aprendizaje matemático (Santos-Trigo, 2014), es decir, los conceptos matemáticos emergen como herramientas clave que permite el desarrollo de estrategias y actitudes de la resolución de problemas. En este sentido, la resolución de problemas constituye una actividad importante tanto para desarrollar conocimiento matemático y para adquirir estrategias generales para enfrentar situaciones problemáticas.

La resolución de problemas destaca el interés en los procesos de aprendizaje relacionados con el trabajo de los estudiantes en tareas matemáticas no rutinarias (Santos-Trigo, 2020). Los desarrollos de investigación de resolución de problemas enfatizan la importancia de la adquisición de recursos y estrategias que permitan a los estudiantes pensar matemáticamente (Santos-trigo & Barrera-mora, 2007). En términos generales, Liljedahl et al. (2016) hacen una distinción entre lo que incluye la agenda de resolución de problemas como área de investigación y como un enfoque de aprendizaje (**Tabla** 1.1.).

Agenda de investigación	Enfoque de aprendizaje
Análisis de aspectos cognitivos, sociales o afectivos que influyen y dan forma al desarrollo de competencias de resolución de problemas de estudiantes	Diseño e implementación de propuestas curriculares y materiales correspondientes que promuevan el aprendizaje vía la resolución de problemas
Elementos clave en ambos aspectos	
Caracterización de los problemas y las formas de razonamiento involucradas en los procesos de resolución de problemas de los estudiantes	

Tabla 1.1. La resolución de problemas como agenda investigativa

Es importante destacar que la resolución de problemas como paradigma de investigación centrado en procesos, es decir, se concibe el estudio de contenidos matemáticos como un medio para el desarrollo de competencias vinculados a procesos cognitivos propios de la resolución de problemas tales como conjeturar, comprobar, refutar, plantear problemas, implementar cierto tipo de estrategias, etcétera. Santos-Trigo y Barrera-Mora (2007) plantearon algunos de los paradigmas más representativos en la agenda de investigación matemática que ilustra el tipo de preguntas que generalmente se exploran en la resolución de problemas (ver **Tabla 1.2**).

Perspectiva	Resolución de problemas	Representaciones
¿Cuál es la postura de la matemática como disciplina?	La matemática es una ciencia de patrones. Existen relaciones directas entre la práctica matemática *real* y el aprendizaje de los estudiantes;	Los objetos matemáticos se conocen en tanto sus representaciones semióticas. Existe una distinción entre los objetos matemáticos (abstractos) y sus representaciones (registros).
¿Cómo se constituye el razonamiento matemático?	Formulación de preguntas, conjeturas, relaciones y el uso de diversas formas de argumentación.	El pensamiento matemático se expresa a través de sistemas de representaciones semióticas y sus relaciones.

¿Cómo es el tipo de tareas?	Tareas no-rutinarias y/o proyectos que deben ser resueltas tanto en el aula como en casa. Se dan transformaciones de ejercicios en problemas no rutinarios a través de la formulación de preguntas inquisitivas.	Tareas que promuevan el tránsito entre diferentes representaciones de un mismo objeto/concepto.
¿Qué procesos de aprendizaje son relevantes?	Dimensiones de resolución de problemas: recursos básicos, cognitivos y metacognitivos (monitoreo y control), estrategias o heurísticas y sistemas de creencias (dimensión afectiva)	Coordinaciones de diferentes representaciones; transitar entre una representación y otra (significado), operaciones dentro de un mismo tipo de registro o conversiones entre diferentes registros; selección/discriminación de diversos registros de representación.
¿Cómo se conciben los ambientes de aprendizaje?	El *aula* como un microcosmo similar a los espacios de comunidades matemáticas. Trabajo grupal y participación en plenaria. El instructor procura el *andamiaje.*	Ambientes de resolución de problemas que promuevan la construcción de representaciones de ideas matemáticas y sus conexiones.
¿Cuál es la información relevante?	Los procesos de resolución de problemas que pueden involucrar: competencias relevantes que exhiban los estudiantes en la representación, comunicación, monitoreo y formulación de preguntas, conjeturas y argumentos.	Evidencia que muestre las conexiones (o falta de ellas) entre múltiples registros de un concepto. Reconocimiento del mismo objeto en diversas representaciones.

Tabla 1.2. Perspectivas y representaciones en la resolución de problemas matemáticos

Amado. et. al. (2018) sintetizan tres vertientes generales de la investigación en materia de resolución de problemas matemáticas:

- **Creatividad.** ¿Cuál es la relación entre actividades de resolución de problemas y la creatividad? ¿cómo se promueve la creatividad dentro y fuera del aula de matemáticas? ¿cómo analizar lo creativo y lo inventivo en las soluciones de problemas matemáticos?
- **Afecto y atractivo.** ¿Cuáles son las actitudes, emociones y apreciaciones de los estudiantes, padres y profesores relacionados con el aprendizaje matemático? ¿cuál es la influencia de la afectividad y las emociones en actividades de resolución de problemas? ¿En qué medida los estudiantes consideran el quehacer matemático como una actividad atractiva y guiada por la creatividad?
- **Tecnologías digitales.** ¿Qué estrategias y representaciones emergen durante la resolución de problemas cuando los estudiantes se apoyan de manera sistemática en el uso coordinado de tecnologías digitales? ¿Cuál es el rol que juega la tecnología en la relación entre estrategias, representaciones visuales y la expresión de resultados de resolución de problemas matemáticos? ¿cuáles son los marcos conceptuales que permiten explicar y

desarrollar métodos para estudiar procesos matemáticos que constituyen el trabajo de los estudiantes al resolver problemas matemáticos con tecnologías digitales?

La problemática general de esta investigación se enmarca entonces en la profundización de los aspectos relacionados con el uso de tecnologías digitales para la comprensión de conceptos matemáticos bajo un enfoque de resolución de problemas, esto a través del concepto de una bitácora digital.

1.3. El rol de los Sistemas de Geometría Dinámica en el aprendizaje matemático

La incorporación de tecnologías digitales en la educación no es simplemente un cambio de formato o canal de comunicación, sino que implica alteraciones y ajustes en los sistemas de enseñanza y aprendizaje constituidos a través de las relaciones entre el profesor, los estudiantes, el contenido matemático y las herramientas disponibles (Ruthven, 2022). Las tecnologías digitales tienen el potencial de transformar la manera en que los estudiantes reflexionan e interrelacionan los conceptos matemáticos y, además, implican una transformación de las dinámicas de aprendizaje cuando estas se enfocan alrededor de la resolución de problemas (Santos-Trigo & Moreno-Armella, 2016; Santos-Trigo, et. Al., 2019; Kuzle, 2017; Hollebrands & Okumus, 2017; Hollebrands, 2007; Jacinto & Carreira, 2016). Esta interrelación se destaca al considerar el potencial de aplicaciones como los Sistemas de Geometría Dinámica (SGD), puesto que transforman la forma en que los estudiantes aprenden conceptos matemáticos al permitirles interactuar con objetivos en la pantalla en términos de la representación y exploración de sus atributos, por ejemplo, a través del arrastre y el análisis de invariantes (Trocki & Hollebrands, 2018; Moreno-Armella & Hedegus, 2009). En este sentido, con la ayuda de un SGD la actividad de los estudiantes puede centrarse en la formulación de hipótesis y conjeturas que resultan de la experimentación, la exploración, la comprobación empírica y la exploración guiada, de modo que el estudio de las matemáticas es similar al de ciencias experimentales como la física, la química o la biología (Ortiz-May, 2019). Así, el éxito de los estudiantes en resolver problemas matemáticos mediante el uso coordinado de tecnologías digitales no depende exclusivamente del uso de recursos y estrategias cognitivas, sino que entran en juego competencias que involucran el manejo de dichas herramientas digitales como un soporte que les permite analizar problemas de modo que confronten sus concepciones débiles acerca de ideas o conceptos matemáticos (Santos-Trigo, 2019).

Cuando los estudiantes resuelven tareas matemáticas con medios tecnológicos también se promueve la exploración de diferentes formas de representar los conceptos involucrados y se desarrollan competencias relacionadas con la interpretación de imágenes conceptuales en sistemas representacionales de naturaleza dinámica (Højsted & Mariotti, 2022), distintos a los que pueden acceder en ambientes estáticos (de lápiz y papel). Así, el uso de tecnologías digitales no constituye un elemento epistemológicamente neutro cuando se introducen en los salones de clases: la experiencia de los sujetos en el uso de herramientas digitales moldea y permea el cómo se utiliza en la resolución de problemas. Dicho de otra forma, el uso de tecnologías demanda que tanto profesores como estudiantes analicen qué estrategias de resolución de problemas, conceptos, recursos y formas de razonamiento parecen importantes durante la construcción y exploración de modelos dinámicos (Santos-Trigo, 2019).

La forma en que las estrategias de resolución de problemas se implementan pueden cambiar sustancialmente cuando se hace a través de SGD, solamente la capacidad de arrastrar objetos implica un abanico de opciones en las que los estudiantes pueden explorar relaciones matemáticas desde diversas perspectivas (Arzarello, 2002; Hollebrands, 2007). Un SGD como GeoGebra se destaca por permitir a los estudiantes estudiar múltiples interpretaciones de los objetos matemáticos involucrados en las tareas matemáticas (Leung, 2017), estos objetos no aparentan ser exclusivamente abstractos para los estudiantes, sino que se *materializan* (Moreno-Armella & Hegedus, 2009) siendo así sujetos a la experimentación.

Esta materialización, o capacidad de interactuar en tiempo real con los objetos matemáticos a través de la interfaz de un SGD hace que los estudiantes se adentren en un *ambiente dinámico,* contrapuesto a uno estático (con lápiz y papel). Dentro de un ambiente dinámico, emergen también formas alternativas de justificar relaciones matemáticas; por ejemplo, el arrastre de objetos para verificar si una figura mantiene una propiedad geométrica en tanto que permanezcan invariables ciertas condiciones (Baccaglini-Frank, 2019). Por ejemplo, ¿qué significa estudiar una familia de triángulos isósceles dentro de un SGD en contraste con un medio estático? En la Figura 1.1 se muestra cómo un conjunto triángulos isósceles particulares puede ser representados y explorados de manera dinámica a través de una construcción en GeoGebra: el punto A es el centro de una circunferencia de radio AB, y el punto C se mueve sobre la circunferencia. A través del movimiento del punto C, es posible visualizar una infinidad de triángulos isósceles, en términos de la variación del ángulo BAC.

Figura 1.1. Una familia de triángulos isósceles representada en un medio estático y uno dinámico.

Es decir, la activación de diversas tecnologías digitales tiene el potencial transformar los significados de los conceptos matemáticos, así como de extender los caminos por los que los estudiantes pueden interactuar con los objetos matemáticos, entre ellos y con sus profesores (Santos-trigo & Moreno-armella, 2016; Camacho-Machín et al., 2018) profesor (Camacho-Machín et al., 2018).

1.4. La pregunta de investigación

A manera de síntesis de los apartados anteriores, los escenarios de aprendizaje de matemáticas *post-pandemia* demandan la integración del trabajo dentro y fuera del aula de los estudiantes como un elemento esencial que constituye la retroalimentación del profesor. Santos-Trigo (2023) argumenta que las actividades de profesores y estudiantes en escenarios post-pandemia se extienden más allá del salón de clases físico, pues las discusiones entre profesores y estudiantes ocurren tanto a través de interacciones sincrónicas como asíncronas.

En este sentido, el término de *ambientes de aprendizaje* hace referencia al conjunto de actividades dentro y fuera del salón de clases orientadas a la reflexión, exploración y discusión de ideas matemáticas promovidas tanto por profesores como estudiantes, cuyo objetivo es la apropiación de conceptos. En estos ambientes de aprendizaje, resulta importante promover en los estudiantes hábitos de autorregulación y autorreflexión sobre cómo se enfrentan a los problemas y conceptos matemáticos. Así, la bitácora digital se plantea como una herramienta que permite establecer un puente que interrelacione el trabajo de los estudiantes tanto dentro como fuera del salón de clases.

Como se ha discutido con anterioridad, diseñar, organizar e implementar actividades de aprendizaje caracterizadas por la resolución de problemas implica considerar que el proceso de reflexión sobre las experiencias de aprendizaje de los estudiantes involucre la activación de diversas herramientas tecnológicas. Una bitácora digital consiste en un registro multimedia donde los estudiantes incorporan textos, imágenes, enlaces a sitios web, videos, modelos dinámicos, etc., de modo que refleje la forma en que dan sentido a las actividades de resolución de problemas y de búsqueda y construcción de significados de ideas matemáticas. Santos-Trigo et al. (2022) recalcan la relevancia de situar la bitácora digital como una herramienta que permita a los estudiantes registrar sus ideas, acercamientos y constantemente reflexionar sobre su propio aprendizaje.

Una bitácora digital se destaca por la incorporación de recursos dinámicos y la retroalimentación continua por parte del profesor, de modo que el trabajo de los estudiantes pueda ser guiado a partir de lo que se reporta en ella. Engelbrecht et al. (2020) argumentan que el trabajo remoto de los estudiantes contribuye a la construcción de conocimiento matemático cuando está orientada en compartir y comunicar el empleo de recursos, herramientas e información relacionadas con el desarrollo de sus actividades. Es decir, la bitácora digital tiene el potencial de plantear una alternativa para organizar el aprendizaje matemático bajo un enfoque de resolución de problemas con apoyo en el uso coordinado de las tecnologías digitales, contribuyendo así a la necesidad de orquestar modos de aprendizaje en los que se extiendan los espacios donde se lleva a cabo el trabajo de los estudiantes.

Así, se pretende caracterizar los fundamentos didácticos alrededor de un ambiente de aprendizaje que promueve el uso coordinado de tecnologías digitales en escenarios de resolución de problemas que combinan el trabajo presencial y remoto de los estudiantes. Se argumenta entonces que enmarcar el trabajo de la bitácora digital bajo una perspectiva inquisitiva de la resolución de problemas, ofrece a los estudiantes la oportunidad de desarrollar recursos y estrategias de resolución de problemas. La pregunta de investigación entonces es la siguiente:

> ¿En qué medida el registro sistemático de las experiencias de aprendizaje que los estudiantes de un curso de cálculo integral reportan en una bitácora digital contribuye al desarrollo de competencias de resolución de problemas?

Dar respuesta a la pregunta de investigación implica definir un marco conceptual apropiado que defina lo que se entiende por aprender matemáticas bajo un enfoque de resolución de problemas y definir las características del trabajo de la bitácora digital que pueden favorecer el trabajo de los estudiantes en escenarios de aprendizaje remotos, presenciales o mixtos. Se analizará a partir de lo que los estudiantes incluyen en sus bitácoras los razonamientos explícitos relacionados con su entendimiento conceptual de los objetos matemáticos involucrados que, en el caso de este trabajo de investigación, corresponden al cálculo diferencial e integral.

Capítulo 2 Marco conceptual

El uso de una bitácora digital como un instrumento de reflexión para que los estudiantes registren y construyan conocimientos matemáticos y competencias de resolución de problemas se sustenta en tres principios fundamentales:

1) **La activación de tecnologías digitales en la resolución de problemas.** En la bitácora digital, las experiencias de aprendizaje de los estudiantes están definidas por las formas de razonamiento que emergen en la resolución de problemas con el uso de tecnologías digitales.
2) **Problematización de la disciplina.** Con la bitácora digital, los estudiantes registran evidencias de una práctica inquisitiva, al resolver problemas, mediante la formulación de preguntas y búsqueda de respuestas.
3) **Vinculación de elementos.** La bitácora digital establece un vínculo entre la activación de tecnologías digitales y la problematización de la disciplina mediante registros que permitan evaluar y monitorear el desarrollo ambas prácticas.

En las siguientes secciones, se amplía la discusión sobre los principios del marco conceptual.

2.1. El rol del uso coordinado de tecnologías digitales en la resolución de problemas matemáticos

Schoenfeld (1985; 2015) describió cuatro dimensiones que intervienen en el desempeño de los estudiantes al resolver problemas: recursos, heurísticas, metacognición y creencias. ¿Cómo el uso de tecnologías digitales incide en las formas de desarrollar e implementar estas dimensiones en la resolución de problemas? Se argumenta que los estudiantes comprenden, interactúan, dan sentido y se apropian de los conceptos matemáticos, de modo que los recursos, estrategias, métodos de control y creencias de las matemáticas en los estudiantes adquieren una naturaleza *dinámica* cuando el trabajo se hace con el apoyo de herramientas digitales como SGD, hojas de cálculo, wikis, plataformas educativas, en comparación con ambientes *estáticos* donde se emplea solamente lápiz y papel (ver **Tabla** 2.1).

Elemento	Descripción	Ejemplos	
		Ambientes estáticos	Ambientes dinámicos
Recursos	Conocimiento matemático que posee el individuo y puede ser ejercido en el problema Intuiciones y conocimiento informal	¿Cómo resolver una ecuación? ¿qué definiciones conozco sobre funciones? ¿qué entiendo por *equidistancia*?	¿Cómo construir la figura en un SGD? ¿Qué información obtengo de la función al graficarla?
Estrategias	Técnicas para progresar en problemas no-estándar o poco familiares. Reglas de oro para resolver problemas eficientemente	Prueba y error, resolver casos similares, hacer múltiples cálculos por aproximación, dibujar figuras alusivas	¿Cómo emplear los lugares geométricos para visualizar el comportamiento variacional o geométrico de los atributos de un objeto?
Metacognición	Decisiones globales relacionadas con la selección e implementación de recursos y estrategias.	¿El procedimiento que sigo me llevará a la respuesta? ¿qué significa el resultado que obtendré? ¿existe una estrategia que requiera menos tiempo/recursos?	¿Lo que observo en el SGD me dice algo sobre la solución? ¿puedo pensar en otra solución?
Creencias	Visión personal del "mundo matemático". Es el conjunto de factores determinantes del comportamiento de un individuo.	¿Conozco lo suficiente sobre el tema como para poder resolver este problema? ¿estaré obteniendo la solución correcta si generalmente no resuelvo bien los problemas?	¿Es la solución visual aceptable? ¿necesitaré una solución *formal* para que sea correcta?

Tabla 2.1. Elementos del marco de resolución de problemas de Schoenfeld (1985) en ambientes dinámicos

Goldenberg y Cuoco (1998) definieron el término de geometría *dinámica* como un ambiente generado por el empleo de tecnologías que permiten la construcción y transformación en tiempo real de objetos matemáticos (como puntos y rectas) mediante el arrastre. Es decir, se distingue el estudio de la geometría dentro de los SGD por poseer su propia naturaleza, donde los razonamientos involucrados en la resolución de tareas matemáticas están necesariamente mediados por las características y funcionalidades del SGD. Así, su incidencia en el dominio de conocimiento geométrico va más allá de las ventajas computacionales que poseen por encima del lápiz y papel: poseen el potencial de cambiar la manera en la que uno interactúa con los objetos geométricos (Trocki & Hollebrands, 2018**)** y, por lo tanto, abre la puerta a nuevas rutas de aprendizaje matemático. Al resolver tareas matemáticas en términos de modelos dinámicos, el conocimiento de los estudiantes se constituye principalmente a través de acciones mediadas por la herramienta que involucra el movimiento, la percepción visual, las nociones de permanencia y variación que representa la experiencia que los sujetos perciben ante lo que ocurre en la interfaz del SGD como producto de sus acciones y definen la forma en que las ideas matemáticas son interpretadas por ellos (Pinheiro et al., 2020).

En la Figura 2.1 se muestra el dibujo de un rectángulo ABCD, esta representación posee una carga semiótica, pues el dibujo no es estrictamente un rectángulo, sino que alude a una figura geométrica ideal: Lo que hace al dibujo un rectángulo es el *simbolismo de los ángulos rectos marcados* y no las propiedades métricas que puedan comprobarse en él (i.e., que sus lados opuestos midan lo mismo al medirlos con una regla).

Figura 2.1. Representación en lápiz y papel de un rectángulo ABCD

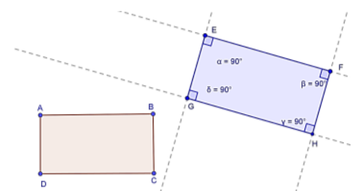


Figura 2.2. Un rectángulo en un SGD se define por sus propiedades estructurales

Con el uso de SGD las propiedades geométricas se convierten en los elementos invariantes de objetos que pueden modificarse. El movimiento producido por el arrastre es la forma de externalizar las relaciones que definen una figura (Mariotti & Baccaglini-Frank, 2018). En un SGD, como GeoGebra, los estudiantes no *dibujan* con sus manos como lo harían en lápiz y papel, sino que utilizan las funcionalidades y comandos que existen en la herramienta para expresar sus ideas. En la Figura 2.2, por ejemplo, se observan dos cuadriláteros ABCD y EFGH de diferente naturaleza: el primero está definido por cuatro puntos en el plano y el segundo, está constituido por la intersección de dos pares de rectas paralelas. Si bien ABCD *parece ser* un rectángulo, es posible modificar cualquiera de sus vértices y notar que se *pierde* dicha propiedad. En contraste, los vértices del rectángulo EFGH no son todos libres, y al modificar aquellos que sí lo sean, no es posible que EFGH *deje de ser* un rectángulo.

Las exploraciones, conjeturas y razonamientos que surgen de estos objetos son propensos a la reacción del estudiante con respecto a su medio (Moreno-Armella & Hegedus, 2009). En este sentido, es posible formular, representar, explorar y transformar las tareas desde diversos ángulos y perspectivas cuando se trabajan a través de un SGD como GeoGebra (Santos-trigo & Moreno-armella, 2016) de modo que el dominio de conocimientos que los estudiantes ponen en juego al resolver problemas de geometría dinámica es intrínsecamente diferente que en un contexto estático (de lápiz y papel).

La idea de trabajar problemas que correspondan a un dominio específico de las matemáticas dentro de un SGD pierde sentido, pues las herramientas a disposición de los usuarios permiten integrar los distintos aspectos conceptuales de los objetos matemáticos: es posible formular, representar, explorar y transformar las tareas desde diversos ángulos y perspectivas cuando se trabajan a través de un SGD como GeoGebra (Santos-trigo & Moreno-armella, 2016) de modo que los estudiantes pueden transitar entre diferentes formas de representación y activar recursos de diversas áreas de las matemáticas. Santos-Trigo (2019) destaca que, al considerar el uso de tecnologías digitales, tareas matemáticas aparentemente simples, similares a los ejercicios encontrados en libros de textos, pueden convertirse en auténticos problemas cuando surgen preguntas que pueden transformar el sentido y la dirección del problema: ¿cómo reconstruir una figura geométrica en un SGD? ¿Qué propiedades o relaciones pueden identificarse en el modelo dinámico que modela un problema? ¿cómo se representa de manera dinámica la variación de dos magnitudes? Santos-Trigo y Camacho (2013) describen la resolución de problemas con el uso de tecnologías digitales, particularmente con el uso de un SGD, como una actividad que se estructura alrededor de cuatro fases, en donde ejemplifican el uso de dichas tecnologías en el desarrollo de procesos de razonamiento matemático en los estudiantes:

- Comprensión del problema. Se explora el enunciado del problema en función de las posibilidades que ofrece un SGD. Esto implica identificar elementos invariantes (o aquellos que deben variar) mediante los comandos dispuestos por el SGD para poder obtener un modelo dinámico del problema.

- Episodio de exploración. Se generan conjeturas cuya validez puede concretarse o refutarse de manera inmediata con ayuda de los comandos de la herramienta.

- Búsqueda de múltiples soluciones. Con ayuda del SGD, es posible encontrar una solución empírica al problema. Se utiliza la información recabada para plantear argumentos numéricos, algebraicos, geométricos, etcétera.

- Integración y extensión. En este proceso, se identifican conceptos matemáticos que fueron importantes en la resolución del problema. Se plantean extensiones o modificaciones del problema.

Las fases anteriores sirven como una forma de clarificar cómo el uso de tecnologías digitales moldea la forma en que los estudiantes enfrentan tareas matemáticas a lo largo de todas las fases de resolución de problemas, Santos-Trigo et. Al (2022, p. 5) lo sintetiza de la siguiente manera:

> *Durante la comprensión del enunciado de un problema, los estudiantes podrían dirigir su atención a la reconstrucción de figuras y este proceso conlleva actividades de planteamiento de problemas […] Similarmente, representar y explorar de manera dinámica los elementos de un modelo dinámico asociado al problema se vuelve importante para identificar relaciones matemáticas que dirigen a los estudiantes hacia la solución del problema […] Más aún, los modelos dinámicos se convierten en puntos de partida que permiten a los estudiantes extender y generalizar las condiciones iniciales y soluciones del problema.*

2.2. Un enfoque inquisitivo de resolución de problemas matemáticos

La introducción de tecnologías digitales en el trabajo de los estudiantes demanda el plantear alternativas de implementación de actividades donde se tome en cuenta su rol como agentes de transformación del conocimiento matemático. Un enfoque de aprendizaje basado en la resolución de problemas matemáticos está centrado en procesos, sus fines principales son los de desarrollar el pensamiento matemático por encima de aprender contenidos, el cual se sitúa en una posición incidental; es un enfoque investigativo, caracterizado por una instrucción significativa del uso de las matemáticas a través de prácticas intencionadas (Baroody et al., 2004).

Un principio común que permea en un enfoque de resolución de problemas matemáticos es que los estudiantes y profesores elaboran ideas matemáticas cuando se involucran en tareas matemáticas a través de situaciones que demandan la formulación y búsqueda de preguntas, de tal modo que el proceso de aprender matemáticas sea concebido como un conjunto de dilemas que necesitan ser representados, explorados y conciliados en términos de recursos matemáticos (Santos-Trigo y Reyes-Martínez, 2019; Santos-Trigo, 2023), esto es, cuando *problematizan* el contenido matemático. Un enfoque inquisitivo de resolución de problemas matemáticos involucra el desarrollo de prácticas *investigativas*, entre las que se destaca el establecimiento de hipótesis, identificar datos, validar hipótesis, planear, simplificar condiciones de un problema u observar patrones (Schwarz et al., 2015; Santos-Trigo & Reyes-Martínez, 2019). En este sentido, un enfoque inquisitivo del aprendizaje suele ser común en el estudio de las ciencias, donde se promueven comportamientos en los estudiantes similares a los de los expertos, tales como la obtención, evaluación, interpretación y crítica de evidencia que soporta o refuta hipótesis (Laursen & Rasmussen, 2019), sin embargo, se argumenta que con el uso de tecnologías digitales, estos comportamientos pueden llevarse a cabo en el estudio de relaciones matemáticas, donde las permisibilidades de los SGD permiten a los estudiantes explorar los objetos matemáticos en escenarios dinámicos.

Bajo esta perspectiva, la actividad matemática está orientada al planteamiento y resolución de dilemas importantes que necesitan ser cuestionados, explorados e interpretados mediante conceptos matemáticos y sus relaciones, de una manera similar a la que lo hacen aquellos que desarrollan la matemática como disciplina (Santos-Trigo, 2019; Schoenfeld, 2015). En la medida que los estudiantes reflexionen de manera explícita sobre las relaciones de los conceptos matemáticos involucrados en la solución de problemas, se convierten en protagonistas de su aprendizaje. Esto es problematizar la disciplina, significa vincular el razonamiento matemático a través del desarrollo de procesos como la justificación de conjeturas, validación de hipótesis, comunicación y conexión entre conceptos y sus representaciones; es decir, llevar a cabo la resolución de problemas de una forma propia de la disciplina (Santos-Trigo & Barrera-Mora, 2007): ¿qué tipo de preguntas plantean y persiguen durante el entendimiento de conceptos matemáticos? Los estudiantes se involucran en la problematización de los contenidos matemáticos de la disciplina a medida que se enganchan en procesos de entendimiento y representación de conceptos al momento de trabajar en tareas matemáticas, así como en el proceso de generar formas de comunicar y validar sus resultados tanto de forma empírica como analítica.

2.3. Modelo conceptual de la bitácora digital

Una bitácora digital como herramienta para organizar y estructurar actividades de resolución de problemas se fundamenta sobre tres elementos interconectados: un enfoque inquisitivo de resolución de problemas, el uso de tecnologías digitales y el rol de las tareas para involucrar a los estudiantes en discusiones matemáticas (Santos-Trigo et al., 2022). Dado que los SGD ofrecen herramientas y funcionalidades que permiten a los estudiantes pensar a través de múltiples representaciones de conceptos matemáticos (Leung, 2017), los estudiantes pueden emplear los SGD para analizar e investigar conexiones entre problemas similares, plantear nuevos problemas o pensar cómo diferentes conceptos matemáticos pueden ser utilizados para representar, explorar y resolver problemas de diversas maneras. Si bien el tipo de tareas y la forma en que son implementadas en escenarios de aprendizaje son cruciales para el entendimiento de conceptos y el desarrollo del pensamiento matemático, es importante que la forma de reflexionar sobre las tareas sea a través de preguntas relacionadas con la elaboración de conjeturas, el planteamiento de subproblemas y la búsqueda de generalizaciones, pues conllevan a los estudiantes a profundizar en prácticas matemáticas centrales (Schoenfeld, 2020).

Santos-Trigo, et al. (2022) proponen una versión ajustada del marco RASE de diseño de aprendizaje en escenarios remotos (Churchill et al., 2016), que integra una visión inquisitiva de resolución de problemas como elemento central en la estructuración de la bitácora digital de los estudiantes como herramienta reflexiva para registrar y monitorear sus procesos de aprendizaje. Este marco de diseño de aprendizaje se constituye por cuatro elementos: Recursos, Actividad, Soporte y Evaluación (marco RASE). Cabe destacar, que el marco de diseño RASE está orientado a la estructuración de ambientes de aprendizaje completamente remotos, por lo que conviene señalar la forma en que los cuatro elementos de dicho marco se consideraron para la organización de un marco conceptual para el trabajo de la bitácora digital en ambientes de aprendizaje que combinan tanto el trabajo remoto como el trabajo presencial de los estudiantes (sintetizado en la Figura 2.3).

La dimensión de *recursos* del marco RASE se refiere al tipo de materiales y contenidos que se espera que los estudiantes puedan tener a su disposición. Es importante destacar que estos (GeoGebra, YouTube, KhanAcademy, foros de matemáticas, etc.) serán parte esencial en la descripción del proceso de resolución de problemas: ¿Qué tipo de información se consulta y con qué propósito? ¿cómo se usan las herramientas de GeoGebra para encontrar conjeturas o soluciones? Por lo tanto, para enmarcar el trabajo de la bitácora digital, se plantea una conciliación de la noción de recursos del marco de Schoenfeld con la idea de recursos del marco RASE.

Figura 2.3. Elementos de diseño RASE para la bitácora digital

En cuanto al elemento de Actividad, es necesario definir un enfoque conceptual que permita estructurar el tipo de tareas que los participantes deben desarrollar. En este sentido, el contenido y la visión de aprendizaje que enmarcará el curso están definidos por un enfoque de resolución de problemas que promueve actividades de formulación (y reformulación) de problemas y la búsqueda de diferentes formas de representar, explorar y resolver esos problemas (Santos-Trigo & Reyes-Martínez, 2019). La dimensión de Soporte está relacionada con la guía, orientación y retroalimentación que reciben los participantes durante sus actividades de resolución de problemas. El tipo de plataformas que sirva como medio de comunicación entre los participantes dentro y fuera de la clase define la naturaleza del soporte que puede ofrecerse. Así, cobra gran relevancia la incorporación de elementos digitales como videos, textos, vínculos a sitios webs, imágenes y archivos de GeoGebra que sustenten observaciones o reformulaciones de los problemas a los que los estudiantes se enfrentan.

Finalmente, en la dimensión de Evaluación, el uso de una bitácora digital implica un monitoreo continuo del profesor y de los estudiantes sobre los registros de las experiencias de los estudiantes elaborados durante el desarrollo de las actividades del curso. La retroalimentación no debe solamente provenir del profesor, sino también por medio de los propios estudiantes y sus compañeros. Los elementos descritos por el marco RASE son agrupados en tres elementos que interconectados enmarcan y movilizan el trabajo de la bitácora digital: El enfoque de resolución de problemas, recursos y soporte (resumidas en la **Figura** 2.4).

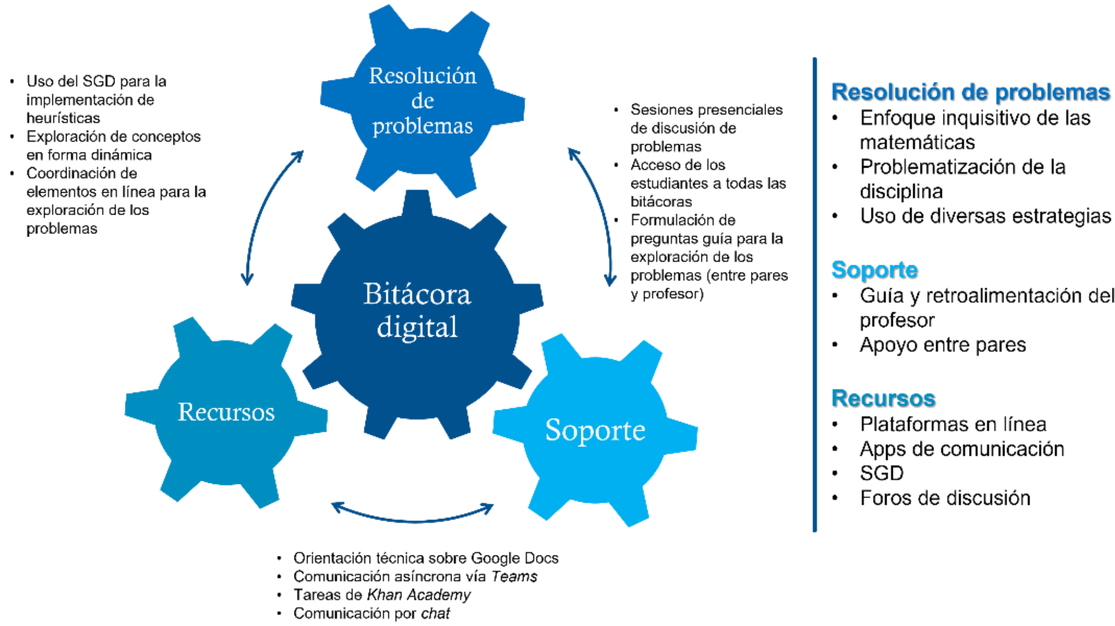


Figura 2.4. Un marco conceptual para estructurar la bitácora digital dentro de un enfoque de resolución de problemas

A continuación, se describen entonces los tres elementos que componen el marco conceptual de la bitácora digital.

Enfoque de resolución de problemas. La bitácora digital permite describir un modo de organizar la forma en que los estudiantes registran y comunican las ideas matemáticas que presentan a medida que se enfrentan a actividades de resolución de problemas con apoyo de herramientas digitales, haciendo explícito el proceso de generación de heurísticas y el manejo de los recursos que tienen a su disposición. El enfoque de resolución de problemas que permea el trabajo de la bitácora se basa en un enfoque inquisitivo, es decir, en la conceptualización de la disciplina como un conjunto de dilemas que los estudiantes deben reconocer y conciliar mediante el uso de conceptos matemáticos, recursos y estrategias. Las tareas son el vehículo para que los estudiantes se involucren en actividades de resolución de problemas que incluya la búsqueda de diferentes formas de resolverlas y se vuelve una actividad importante para desarrollar su pensamiento matemático (Santos et al, 2022). Santos-Trigo y Camacho (2013) mencionan que para caracterizar las formas de razonamiento de resolución de problemas matemáticos de los estudiantes cuando emplean tecnologías digitales es importante considerar cuatro principales fases que componen el proceso de resolución de problemas: comprensión del enunciado, representación, exploración e integración.

A lo largo de estas fases, se mantiene un principio inquisitivo en el cuál profesores y estudiantes realizan preguntas que guíen sus exploraciones y que modelen el discurso empleado para la resolución de las tareas. Bajo un enfoque inquisitivo de la resolución de problemas, la elaboración de la bitácora digital sirve como un instrumento para explicitar la organización de las ideas matemáticas de los estudiantes por medio de la selección de elementos tecnológicos que sirven para desarrollar habilidades de resolución de problemas (Santos-Trigo et al, 2021).

Una concepción ampliada de los recursos de los estudiantes. En la bitácora digital se considera tanto la noción de recursos que describe Schoenfeld (1985; 2011) como los definidos en el marco RASE, es decir, tanto los recursos cognitivos y de naturaleza simbólica como las herramientas digitales que emplean los estudiantes como apoyo para el desarrollo de ideas matemáticas. Se argumenta que los *recursos* involucrados en el proceso de resolución de problemas comprenden todo aquello que el individuo conoce y que permite la construcción de metas y submetas para resolver problemas. La activación de elementos digitales en la resolución de problemas difumina la línea entre lo que los estudiantes conocen *a priori* y el conocimiento al que tienen acceso. En este sentido, los recursos no están limitados a los contenidos conceptuales y procedimentales con los que los estudiantes cuentan, sino que también es relevante incluir el uso coordinado de tecnologías digitales (GeoGebra, WolframAlpha) y desarrollos en línea (Khan Academy, YouTube, etc.) que pueden utilizar para explorar, representar y resolver problemas matemáticos.

Es decir, el empleo de herramientas, materiales o semióticas moldea la forma en que los problemas son formulados y el tipo de razonamientos involucrados para obtener las soluciones a los problemas; estas herramientas pueden incluir artefactos materiales u objetos abstractos tales como el plano cartesiano, métodos de resolución de ecuaciones o incluso aplicaciones digitales como GeoGebra (Santos-Trigo, 2023). Estas herramientas son fundamentales para la construcción de representaciones y soluciones a problemas matemáticos de los estudiantes por lo que son fundamentales para el desarrollo de las actividades de los estudiantes.

Soporte en línea. Extender los salones de clases post-confinamiento implica incluir el trabajo de los estudiantes de manera remota como presencial. Las tareas que los estudiantes desarrollan no están limitadas al trabajo en clase, sino también incluyen los procesos de búsqueda de información en sitios web y aplicaciones educativas para su realización (Santos-Trigo, 2023). En este sentido, el elemento de soporte del marco conceptual de la bitácora digital incluye la forma en que el profesor retroalimenta a los estudiantes, tanto de manera sincrónica (chats, videoconferencias, llamadas, etc.) o asincrónica (email, foros) así como el conjunto de aplicaciones o desarrollos digitales que ponen a disposición de los estudiantes para llevar a cabo su aprendizaje. La interacción que los estudiantes puedan tener entre ellos o con los profesores no se limita a las reuniones sincrónicas o vía email, sino que adquieren elementos atemporales: en contexto en línea, los horarios de trabajo son únicos para cada individuo y no necesariamente universales. Los estudiantes y profesores pueden plantear o resolver consultas en el momento que consideren apropiados para ellos, de modo que los procesos de aprendizaje se integran a la vida cotidiana.

Capítulo 3 METODOLOGÍA

El objetivo principal de la investigación incluye el análisis y caracterización de las maneras en que los estudiantes desarrollan y exhiben habilidades de resolución de problemas mediante el uso de una bitácora digital, por lo que este estudio es de naturaleza cualitativa. Los razonamientos que muestran los participantes se constituyen a partir de estrategias de resolución de problemas apoyadas en el empleo de un SGD (GeoGebra) y de la forma en que integran reflexiones introspectivas y documentan sus acercamientos y experiencias en sus bitácoras digitales. En este apartado se discutirán las intencionalidades del estudio y el proceso de diseño para la toma de datos.

3.1. Diseño de la investigación

El trabajo con una bitácora digital en escenarios de aprendizaje basados en la resolución de problemas ha sido explorado en investigaciones previas a diferentes niveles educativos que comprenden seminarios de profesores de matemáticas y futuros profesores estudiando programas de posgrado (Santos-Trigo et al., 2021; Santos-Trigo et al., 2022; Santos-Trigo, *en prensa;* Ortiz, *en prensa*) y, aunque se han establecido formulaciones de lo que estudiantes de bachillerato podrían mostrar en el trabajo de una bitácora (Santos-Trigo et al., 2022), aún no se cuenta con evidencia empírica sobre el grado en que estudiantes de bachillerato podrían apropiarse de la bitácora digital como una herramienta autorreflexiva. Es decir, la toma de datos con estudiantes de bachillerato tiene por principal motivación contribuir al desarrollo de la investigación del uso de una bitácora digital bajo un enfoque de resolución de problemas matemáticos a nivel medio-superior.

A partir de lo planteado en la pregunta de investigación, se intenta analizar el desarrollo de habilidades de resolución de problemas a través del trabajo que registran los estudiantes en una bitácora digital. Interesa explicar modos de acción de los estudiantes en términos de sus características y procesos de resolución de tareas, por lo que es ideal enmarcarla en una naturaleza cualitativa (Freitas et al., 2017). Para la implementación de esta investigación, se realizó un ciclo de iteraciones como plantean Bakker y van Eerde (2015): una fase de preparación y diseño; una fase de implementación del experimento de enseñanza; y, finalmente, una fase de análisis retrospectivo. La fase de preparación y diseño involucró la implementación de un estudio piloto que tuvo una duración de ocho semanas con cinco estudiantes de un programa de maestría en ciencias en matemática educativa durante un curso de resolución de problemas en un escenario remoto. La implementación del piloto se llevó a cabo de forma totalmente remota, en donde se solicitó a los participantes llevar una bitácora donde redactaran todos los procesos relevantes al resolver problemas matemáticos. El estudio piloto se encuentra descrito con mayor detalle en Ortiz (2023). De los resultados de la implementación piloto, se establecieron las siguientes consideraciones adicionales para la investigación:

Observaciones del piloto con estudiantes de posgrado	Consideraciones para la implementación con estudiantes de bachillerato
Los estudiantes de posgrado mostraron una apropiación relativamente satisfactoria durante el curso de ocho semanas, con sesiones semanales de 3 horas.	La duración del curso debería tener una mayor duración, preferentemente, de 16 semanas (un semestre escolar).
Los estudiantes exhibieron el uso de diversas estrategias de resolución de problemas mediadas por el uso de GeoGebra	Se mantuvo la idea de emplear GeoGebra para explorar y resolver problemas de libros de texto Se estableció la necesidad de poder ofrecer a cada estudiante un equipo de cómputo durante el desarrollo de las sesiones.
GeoGebra books como un formato para el registro de la bitácora resultó ser muy complejo para los estudiantes	*Google Docs* ofrece una forma familiar y flexible como formato de la bitácora, pues permite dar seguimiento a las entradas y comentarios. Se debe complementar *Google Docs* con el uso de *GeoGebra Tube* para que los estudiantes almacenen en la nube sus modelos dinámicos
Cada sesión se exploró un problema distinto, por lo que los participantes no tuvieron suficiente tiempo para comprender y discutir las actividades	Se consideró un tiempo mínimo de una semana por actividad, espaciando el tiempo necesario para discutir las soluciones de las actividades
Los participantes no contaron con una guía sobre el tipo de consultas que podían realizar para complementar su bitácora	Se generó una lista de cuestionarios de Khan Academy para que los estudiantes contaran con un soporte para realizar consultas sobre los contenidos matemáticos estudiados
Se observó que el uso de canales de comunicación por medio de *Microsoft Teams* ofreció un medio eficiente para la interacción entre estudiantes y el profesor.	Se mantuvo el uso de la plataforma *Teams* como principal medio de comunicación remota
Los participantes decidían cada cuando trabajar en la bitácora y recibir retroalimentación, lo que causó algunas complicaciones en la estructura de las revisiones y el seguimiento organizado del trabajo de los participantes.	Se mantuvo la idea de revisiones continuas, sin embargo, se establecieron cuatro momentos de revisión obligatorios para los estudiantes (3 semanas de diferencia entre cada revisión) además de la revisión final de la bitácora para garantizar una periodicidad mínima de seguimiento.

Tabla 3.1. Elementos de la implementación obtenidas del piloto

Los criterios de rigor, fiabilidad y validez serán atendidos en las diferentes fases del desarrollo del estudio del siguiente modo: El rigor se manifiesta en tanto a qué tan sistemático y bajo control son los parámetros que afectan los resultados de la investigación; la fiabilidad, es la medida en que existe consistencia y capacidad de replicación de la investigación; y, por último, la validez es la medida en que la investigación responde a la pregunta de investigación

(Jackson, 2022). El rigor se garantizó en las iteraciones de implementación, pues a partir de la primera implementación se observaron las variables no deseadas que pudieran intervenir en la segunda implementación, principalmente las relacionadas con el uso de formatos complejos para la elaboración de la bitácora y la falta de orientación y retroalimentación para los estudiantes. Las nociones de fiabilidad y validez también se establecen en la medida en que se ofrecen descripciones detalladas sobre la implementación del curso, la forma en que el diseño y el método de análisis de los datos, así como los mecanismos de evaluación entre pares a los que se sometieron los procedimientos anteriores (Cypress, 2017). Así, el proceso de implementación piloto fue sometido a un proceso de arbitraje entre pares cuyos resultados se publicaron en Ortiz (2023); por otra parte, durante la segunda implementación de la investigación, se presentaban periódicamente los resultados preliminares en un seminario con otros investigadores, con la intención de contribuir al rigor de este trabajo.

3.2. Participantes y aspectos generales

Se trabajó con un grupo de bachillerato, de la asignatura de Cálculo Diferencial e Integral II, con 37 estudiantes cuyas edades oscilaron entre los 17 y los 19 años. Cálculo Diferencial e Integral II se ubica en el sexto semestre del programa de estudios del Colegio de Ciencias y Humanidades de la Universidad Autónoma de México (CCH-UNAM). Cabe destacar que la asignatura de Cálculo Diferencial e Integral II es parte de un conjunto de asignaturas opcionales que los estudiantes seleccionan de acuerdo con su interés principal de desarrollo profesional, por lo que la gran mayoría de los estudiantes continuará sus estudios en carreras relacionadas con las matemáticas, la ingeniería o, en general, las ciencias. En este sentido, los estudiantes contaban con un nivel de interés sobre las matemáticas ligeramente superior al promedio. Adicionalmente, cabe destacar que, en el semestre inmediato anterior, concluyeron satisfactoriamente un curso de Cálculo Diferencial e Integral bajo un enfoque de resolución de problemas (sin la implementación de una bitácora digital).

El curso tuvo una duración de 15 semanas, organizadas en dos sesiones por semana, cada una con una duración de 2 horas. Vale la pena destacar que la intervención y actividades de la investigación se enmarcan de acuerdo con el modelo educativo del CCH-UNAM (DGCCH, 2006) pues establece que "*el planteamiento y solución de problemas debe ser el hilo conductor para organizar la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas*", a la vez que se especifica que el uso de computadoras y calculadoras para estudiar conceptos y procedimientos de la Matemática, especialmente mediante el uso de "*Geometrías dinámicas*" de modo que se promueva la exploración, observación y manipulación de objetos.

La investigación, al ser de naturaleza intervencionista, se hizo de modo que se adaptara a los requerimientos de estudiantes de bachillerato que están a punto de entrar a la universidad y, además, considerando que presentaban a nivel general diversas deficiencias conceptuales (reportadas por los propios estudiantes), mayormente atribuidas a que los primeros cuatro semestres de estos estudiantes se llevaron en línea, como producto de la pandemia COVID-19.. Así, además de profundizar en los conocimientos de la derivada y la integral y las relaciones entre ambos conceptos a través del Teorema Fundamental del Cálculo, se planteó como un propósito esencial revisar con los estudiantes conceptos base como la función, el uso del plano coordenado, el enfoque algebraico del cálculo integral, lugares geométricos, etc.

3.3. Estructura y organización de las tareas

Santos-Trigo (2019) propone el estudio de problemas donde la representación de algún fenómeno de variación a través de un modelo gráfico permite acceder a ideas relevantes del cálculo sin la necesidad de emplear recursos algebraicos. En este sentido, los alumnos deben realizar conexiones conceptuales a través de las permisibilidades dinámicas de un SGD como GeoGebra. Para el desarrollo de un curso de Cálculo Diferencial e Integral II bajo un enfoque inquisitivo de la resolución de problemas, se considera que las actividades deben estar dirigidas a problematizar la disciplina, en este sentido, a ser concebida a través de dilemas que permitan un desarrollo conceptual de las ideas fundamentales del Cálculo.

Thurston (1994) plantea una lista que resume las formas en que se concibe la derivada en los estudiantes: como una razón de cambio infinitesimal, como una relación simbólica entre expresiones algebraicas (derivación), como una relación lógica (definición épsilon-delta), como un objeto geométrico (la pendiente de una recta tangente), como una aproximación (aproximación linear local) y como una idea microscópica. Estas ideas corresponden al desafío de "*digerir y reconciliar*" cada una de estas nociones entre sí y, a su vez, dan cuenta de las ideas clave que corresponden al estudio del Cálculo Diferencial respecto a la derivada.

En cuanto al estudio de la integral, Kouropatov y Dreyfus (2014) plantean dos ideas fundamentales que promueven la construcción del conocimiento conceptual de los estudiantes sobre la integral: la acumulación y la aproximación. Por un lado, la integral se puede entender como un procedimiento del *acumulado* de una cantidad a medida que transcurre el tiempo, y por otro, un proceso de refinación que permite el cálculo de una magnitud, a medida que se *agregan* elementos adicionales (referente al método de exhaución de los griegos). En este sentido, en tanto los estudiantes se enfrenten a tareas que involucren el análisis de fenómenos de variación, acumulación y aproximación, se estará promoviendo un aprendizaje conceptual sobre la integral.

De manera general, el curso se organizó alrededor de cuatro temáticas: Derivadas de funciones trascendentales, Área bajo una curva, Teorema Fundamental del Cálculo y Estudio de la integral. La Tabla 3.2 sintetiza la organización del curso.

Tema		Contenido matemático	Exploraciones en sala de cómputo
1)	**Derivadas de funciones trascendentales**	Derivadas de funciones exponenciales y logarítmicas Problemas que involucran derivadas de funciones transcendentales y logarítmicas	Comandos básicos en GeoGebra Modelos de ajuste exponencial y logarítmico
2)	**Integral definida**	Área bajo la curva Sumatorias y sumas de Riemann Áreas entre dos funciones Definición y propiedades de la Integral definida	Comando de integral definida Intersecciones de rectas Problemas de áreas entre funciones
3)	**Teorema Fundamental del Cálculo**	Antiderivadas directas Cálculo de la integral definida Problemas que involucran antiderivadas	La función de acumulación La tasa de cambio instantánea del área bajo la curva Dada la gráfica de f', ¿qué propiedades se pueden inferir de f?
4)	**Aplicaciones de la integral**	Técnicas de integración: cambio de variable Técnicas de integración: integración por partes Sólidos de revolución	Problemas que involucran integrales y/o derivadas Teorema del Valor Medio para Integrales Problemas de cálculo de promedios Problemas de aproximación de volúmenes

Tabla 3.2. Estructura de los temas del curso

Se mantuvo el contenido matemático establecido en el programa del Colegio de Ciencias y Humanidades[1], no obstante, el enfoque inquisitivo se reflejó en la manera en que se

[1] Disponible en línea en el siguiente enlace:
https://www.cch.unam.mx/sites/default/files/programas2016/CALCULO_I_II.pdf

realizaron exploraciones complementarias del contenido matemático durante las sesiones en la sala de cómputo. Así, en el Tema 1, se utilizaron problemas de libro de texto para explorar los comandos y la interfaz básica de GeoGebra junto con los estudiantes: usar la barra de entrada, ambas vistas gráficas, colocar puntos y la escritura de algunos comandos textuales. También se aprovechó para explorar con los estudiantes la idea de modelar un fenómeno a través de un conjunto de datos y obtener una función con los modelos de ajuste exponencial y logarítmico. En el Tema 2, se aprovechó el comando de integral para abordar problemas de área bajo la curva con los estudiantes sin la necesidad de usar técnicas o fórmulas de integración. Las exploraciones del Tema 3 se organizan en torno a la noción de una *función acumulación,* conectando la idea de la integración como un proceso inverso a la derivada a través de problemas de velocidades. Finalmente, en el Tema 4 se realizan problemas que atienden a la noción de la integral como una *aproximación,* pues complementario al proceso de refinación del área bajo la curva compuesta por una cantidad infinita de rectángulos, problemas que involucran calcular promedios y volúmenes de formas irregulares promueven la idea de realizar aproximaciones a través de la integral.

Para la selección de los problemas, se utilizaron principalmente los libros de texto de Stewart (2012) y Larson y Edwards (2010). La selección de las actividades para las sesiones presenciales se hizo de manera próxima a lo recomendado por la Dirección General del CCH y es esencial destacar que la intención de este trabajo no está enfocada en el rediseño del currículo de Cálculo, pues esto demanda un estudio profundo sobre la epistemología de las ideas del cálculo y de los obstáculos cognitivos que pueden presentar los estudiantes. Santos-Trigo (2019) sugiere que no existen tareas necesariamente idóneas para la solución de problemas, sino que tareas tradicionales en los libros de texto pueden ser un punto de partida que, al ser exploradas en medios dinámicos, favorecen la emergencia de diversas formas de razonamiento y competencias de resolución de problemas; esta idea es sintetizada por Cai & Hwang (2023) a través de la expresión "*mientras que un problema pueda promover en los estudiantes el aprendizaje de matemáticas importantes, es un problema valioso".* Así, los únicos criterios que se consideraron para la selección de las tareas fue que tuvieran el potencial para ser representadas en GeoGebra.

Dada la extensión y cantidad de las actividades empleadas, se recomienda consultar el **Apéndice 1** donde se encuentran todas las actividades del salón de cómputo. Se enunciará la tarea correspondiente cuando se discuta en el análisis de resultados.

3.4. Implementación y conducción del curso

Si bien el curso se llevó a cabo de manera presencial, se empleó la plataforma *Microsoft Teams* para la comunicación de actividades e interacciones extractase. Además, a través de esta aplicación se compartieron videos complementarios de las sesiones, los archivos con las actividades del curso y cuestionarios para reforzar sus conocimientos. Por otra parte, se manejó una carpeta de *Google Drive* donde los estudiantes incluyeron sus bitácoras, en forma de archivos de *Google Docs.* Finalmente, para complementar el soporte que los estudiantes tuvieron, se incluyó trabajo de *Khan Academy*, plataforma a través de la cual se asignaron cuestionarios de opción múltiple semanalmente. Se llevaron a cabo dos formas de trabajo presencial, que se describen a continuación:

- **Trabajo en el aula tradicional.** Se hará referencia a un *aula tradicional* en el sentido en que se llevaron a cabo en un salón de clases equipado únicamente con sillas, mesas y el pizarrón, de modo que no existía un acceso evidente a herramientas digitales proporcionados por el colegio. En ella, se abordaban los temas importantes del curso desde perspectivas teóricas, que posteriormente se complementaban en la sala de cómputo.
- **Trabajo en una sala de cómputo.** En estas sesiones, el profesor planteaba a los estudiantes situaciones problema que se exploraban con ayuda de GeoGebra en un aula donde los estudiantes contaban cada uno con una computadora y acceso a internet. Primero se daba un espacio para discutir junto con los estudiantes la comprensión de los enunciados de las tareas o bien, la resolución de una tarea en conjunto. Posteriormente, los estudiantes debían trabajar en sus propias situaciones en equipos, individualmente o de manera grupal entre varios equipos. Las Actividades consistieron en un conjunto de ejercicios o problemas que los estudiantes tenían la libertad de seleccionar para trabajar en equipos. Antes de finalizar la sesión, se discutían de manera grupal las aproximaciones de los problemas planteados.

La principal fuente de datos se obtuvo del trabajo de los estudiantes en la sala de cómputo, debido a que en el aula tradicional no se podía garantizar que todos los estudiantes tuvieran acceso al uso de herramientas digitales tales como GeoGebra o internet. Cabe destacar que en todo momento, se presentó una continuación en las actividades en ambas modalidades, pues durante las sesiones de clases en el aula tradicional se abordaron principalmente aspectos teóricos del curso, mientras que en la sesión en la sala de cómputo los estudiantes se enfocaban en explorar conceptos matemáticos con apoyo de tecnologías digitales. El enfoque de resolución de problemas permeó en ambos tipos de sesiones, sin embargo, el énfasis inquisitivo con el apoyo de tecnologías digitales se dio prioritariamente en las sesiones en la sala de cómputo. El desarrollo de las actividades estuvo guiado a través de lo que Laursen y Rasmusen (2019) denominan como los cuatro pilares del aprendizaje matemático inquisitivo (*Inquiry-based mathematics education*):

1) los estudiantes se involucran profundamente con tareas matemáticas significativas y coherentes,
2) los estudiantes procesan ideas matemáticas colaborativamente,
3) el profesor indaga sobre el pensamiento de los estudiantes; y,
4) el profesor promueve la equidad en el diseño de aprendizaje y las dinámicas de clase

Al inicio del curso, se planteó que el criterio central de la evaluación del curso se llevaría a cabo por medio del trabajo de una bitácora digital. Los estudiantes se organizaron en grupos de hasta 3 integrantes, con la posibilidad de trabajar de manera individual. Así, la fuente de los datos provino del total de 21 bitácoras, distribuidas de la siguiente manera:

- 8 bitácoras individuales
- 10 bitácoras por parejas
- 3 bitácoras por ternas

Para la elaboración de las bitácoras, se comunicó a los estudiantes que la intención sería construir una serie de reportes donde, de manera general, exhibirían el grado de apropiación de las ideas clave del Cálculo diferencial e integral. Se exhortó a los estudiantes a incluir registros relevantes sobre el desarrollo de sus competencias matemáticas que a su vez permitiría al profesor monitorear sus formas de razonamiento (Santos-Trigo, 2023), es decir:

i. El tipo de preguntas que planteen y persigan para dar sentido a los enunciados de los problemas
ii. Todo tipo de aproximaciones para resolver problemas: exitosas o no
iii. Los modelos dinámicos construidos, las estrategias y formas de validación de sus aproximaciones
iv. Notas de clase: definiciones, ejercicios, ejemplos; tanto en forma de texto como de imágenes o fotografías de su cuaderno o de la clase.
v. Recursos en línea y aplicaciones utilizadas para trabajar en las tareas. Incluyendo videos, sitios web, plataformas educativas, etc.
vi. Inquietudes o reflexiones sobre los temas vistos en clases
vii. Dudas u obstáculos que pudieran identificar en la comprensión de conceptos
viii. Formas en las que el trabajo de otros influyó en el entendimiento de conceptos y la solución de problemas

La creación de las bitácoras se llevó a cabo en la primera sesión de cómputo, los estudiantes se organizaron en equipos y crearon archivos de *Google Docs* compartidos para el profesor y para sus compañeros. Los enlaces a todas las bitácoras se compartieron en un canal de comunicación de *Microsoft Teams*. Si bien, se hizo énfasis en la necesidad de trabajar de manera continua en la bitácora, no todos los estudiantes contaron con dispositivos adecuados para trabajar en su bitácora fuera del salón de clases. En este sentido, se mantuvo cierta libertad en la frecuencia en la que los estudiantes podían trabajar en sus bitácoras, sin embargo, se acordó con los estudiantes una revisión obligatoria cada vez que transcurrieran 4 sesiones de la sala de cómputo, en total se presentaron 4 de estas revisiones, las cuales se emplearon como puntos de avance clave en los estudiantes.

La **Tabla** 3.3 resume los aspectos que se evaluaron en cada una de estas revisiones. Cabe mencionar que la forma de evaluación se realizó de manera formativa: una vez realizada una revisión, los estudiantes tenían la oportunidad de modificar el contenido de su bitácora y ser evaluados nuevamente. Cabe mencionar que la Tabla 3.3 es una adaptación sintetizada de las rúbricas compartidas para los estudiantes en cada una de las cuatro revisiones programadas, con la finalidad de ilustrar las ideas matemáticas importantes que se trataba de identificar en el trabajo de los estudiantes.

Temas de revisión	Preguntas de evaluación	Niveles esperados
Primera revisión		
Tema 1 Derivadas de funciones trascendentales	• ¿Cómo se definen las funciones logarítmicas y exponenciales? • ¿Qué conceptos matemáticos son nuevos para ustedes? • ¿Cómo entienden esos nuevos conceptos?	**Deficiente.** Incluyen texto copiado de fuentes externas, sin profundizar en las explicaciones. Incluyen solamente fotos/notas de la clase. **Esperado.** Complementan las consultas externas con comentarios y reflexiones propias. Incrustan imágenes de lo visto en clase y las dudas que surgieron, o muestran cómo extender sus ideas. **Sobresaliente.** Realizan exploraciones complementarias a las vistas en clase, consultan e incluyen ejercicios o problemas propios sobre los temas de clase.
Segunda revisión		
Tema 1 Derivadas de funciones trascendentales **Tema 2** Integral definida	• ¿Qué significa hacer un ajuste logarítmico o exponencial para una situación problema? • Si se tiene información gráfica sobre la función de crecimiento/velocidad de una cantidad, ¿cómo se obtiene información sobre esa cantidad? • ¿Cómo se explica el proceso de integración a partir de aproximaciones del área de rectángulos? ¿Cómo se refina esta aproximación?	**Deficiente.** Solo se incluyen notas de lo visto en clase, sin agregar el trabajo realizado por los estudiantes. **Esperado.** Desarrollan justificaciones breves de las respuestas a su trabajo y las acompañan de los modelos dinámicos construidos. **Sobresaliente.** Explican el proceso de aproximación de rectángulos para el área bajo la curva de una función; Incluyen exploraciones algebraicas o gráficas sobre la idea de una suma de Riemann;
Tercera revisión		
Tema 2 Integral definida **Tema 3** Teorema Fundamental del Cálculo	¿Cómo se resuelven problemas de áreas bajo la curva entre dos funciones? ¿Qué tipo de propiedades tiene la Integral Definida? ¿De qué trata el Teorema Fundamental del Cálculo? ¿cuál es su relevancia con la integral y la derivada?	**Deficiente.** Solo se incluyen notas de lo visto en clase, sin agregar el trabajo realizado por los estudiantes. **Esperado.** Describen el procedimiento de descomposición de figuras para obtener áreas bajo la curva o la comprobación de las propiedades de la integral. El TFC es asociado a una relación inversa entre la derivación e integración. **Sobresaliente.** Desarrollan expresiones generales de las propiedades de la integral. Explican con sus propias palabras la relación entre la derivada y la integral a través del TFC, en términos de la derivada de una función de área.
Cuarta revisión		
Tema 3 Teorema Fundamental del Cálculo **Tema 4** Aplicaciones de la integral	¿Por qué es importante el TFC para resolver problemas donde solamente se tiene información de la derivada de una función? ¿Cómo entienden el Teorema del Valor Medio para las Integrales? ¿Cómo usar la Integración para aproximar el volumen de objetos irregulares?	**Deficiente.** Solo se incluyen notas de lo visto en clase, sin agregar el trabajo realizado por los estudiantes. **Esperado.** Describen el TFC, el TVM y el método de discos a través de la resolución de problemas, explicando sus soluciones e incluyendo modelos dinámicos. **Sobresaliente.** Incluyen ideas complementarias para comprender los conceptos: soluciones

	algebraicas, nuevos problemas, aplicaciones en la vida real, etc.

Tabla 3.3. Revisiones y criterios de revisión de la bitácora

La evaluación se llevó a cabo en la medida en que las preguntas eran respondidas de acuerdo con cada nivel, dependiendo de las revisiones, se asignó un porcentaje equitativo a cada pregunta. Esto tuvo finalidades sumativas de la evaluación, primordialmente para la asignación de la calificación de los estudiantes y para proporcionar retroalimentación.

En la Tabla 3.4 se muestran las Actividades que se exploraron a lo largo del curso, agrupadas por Temas. Esto pretende ofrecer una visión global sobre la forma en que se implementaron las actividades en torno a los temas clave de un curso de Cálculo Diferencial e Integral. Las actividades (A1, A2, …, A10) se describen de manera resumida, para una versión extendida de las actividades, se puede consultar el **Apéndice 1.**

Tema 1. Derivadas de funciones trascendentales		
A1. Modelar la relación entre altura y presión con apoyo en el ajuste polinomial		
Tema 2. Integral definida		
A2. Calcular el área bajo la curva con integrales positivas o negativas	**A3.** Calcular el área comprendida entre dos funciones	**A4.** Analizar los límites de integración tal que el área bajo la curva de una función satisfaga ciertas condiciones
Tema 3. Teorema Fundamental del Cálculo		
A5. Modelar una función de velocidad para generar inferencias acerca de la posición de un móvil	**A6.** A partir de la curva f', obtener información acerca de f tomando en cuenta una condición inicial.	**A7.** Obtener información sobre el cambio neto y cambio total a partir de información sobre el cambio de una cantidad.
Tema 4. Aplicaciones de la integral		
A8. Calcular volúmenes en revolución, empleando modelos polinomiales y método de discos	**A9.** Determinar el promedio de cantidades continuas (Teorema del Valor Medio para integrales)	**A10.** Interpretar geométricamente el TVM para integrales en contextos fenomenológicos o matemáticos.
Evaluación final		
AF. Conjunto de problemas que abarcaron los temas más relevantes del curso		

Tabla 3.4. Actividades trabajadas a lo largo de del curso en la sala de cómputo

3.5. Análisis de los datos

Los principales datos de la investigación se obtuvieron a través de dos fuentes: notas de campo del investigador, sobre los aspectos importantes que ocurrieron en la clase; y, principalmente, las 21 bitácoras de los estudiantes que asistieron de manera consistente al curso. En el **Apéndice 7** se pueden consultar los enlaces a todas las bitácoras. El análisis de esta implementación se llevó a cabo a la par que se desarrollaban las actividades y, posteriormente, de forma retrospectiva al finalizar el curso: un análisis en curso a medida que se desarrollaron las sesiones, y un análisis retrospectivo, que se llevó a cabo al finalizar el curso. Las notas de campo se emplearon para identificar y registrar aspectos tales como el seguimiento de las ideas de clase, participación, sugerencias de aproximaciones no reportadas en sus bitácoras, preguntas de profundización, etcétera; esto fue con la intención de analizar material derivado de cualquier forma de comunicación, no solamente sobre el contenido de las bitácoras sino cualquier tipo de manifestación no-textual que pueda contener significados estructurales subyacentes sobre los modos de razonamiento de los estudiantes (Mayring, 2014). Un proceso fue la creación de categorías a partir de la observación y análisis de los datos que se resumen en tres principales formas de desarrollar: categorías deductivas, u obtenidas por los conceptos; categorías inductivas, obtenidas directamente de los datos y la combinación de estas (Mayring, 2014; Kuckartz, 2019). Simon (2019) plantea un flujo de trabajo de análisis cualitativo organizado en tres niveles de generalización, los cuales se siguieron para la estructuración de los datos obtenidos de las bitácoras, el cual se resume en la Figura 3.1.

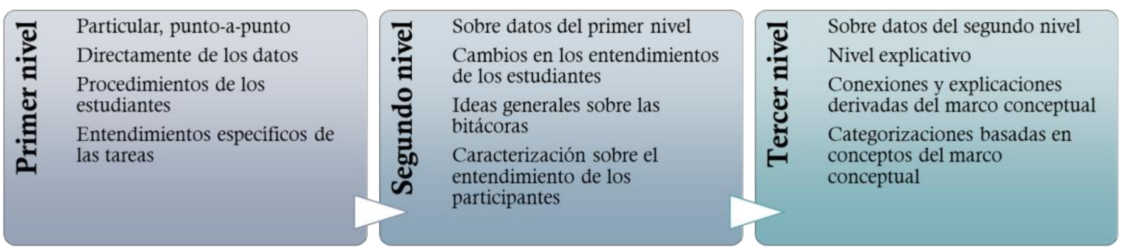


Figura 3.1. Niveles de análisis del contenido de las bitácoras, basado en Simon (2019).

El análisis de tercer nivel demanda establecer un conjunto de descriptores que permitan caracterizar los niveles de apropiación de los estudiantes sobre la bitácora digital como una herramienta para registrar y reflexionar sobre sus experiencias de aprendizaje. Para ello, se consideró la noción de un ambiente poderoso de aprendizaje, o *Teaching for Robust Understanding* (TRU) que se constituyen a través de cinco dimensiones (Li & Schoenfeld, 2019):

a) Las matemáticas, desarrollar y exhibir hábitos de mente productivos a través de enfoques de resolución de problemas que conectan lo que saben con *grandes ideas*

b) Demanda cognitiva, trabajar con tareas en niveles de dificultad crecientes, y recibir retroalimentación cuando se atoren

c) Acceso equitativo, todos los estudiantes tienen la oportunidad de participar en discusiones matemáticas para aprender conceptos y resolver problemas

d) Agencia, apropiación e identidad, la voluntad de participar en conversaciones matemáticas, de compartir y valorar sus resultados y contribuciones a las soluciones de los problemas; y,

e) Evaluación formativa, brindar a los estudiantes oportunidades de profundizar en su propio entendimiento sobre sus enfoques de resolución de problemas.

Al respecto, Schoenfeld (2019) destaca que el marco TRU consiste en un cambio de perspectiva de los ambientes de aprendizaje de centrar la atención en los profesores hacia los estudiantes, de modo que los aspectos de las cinco dimensiones mencionadas se deben interpretar desde la visión del estudiante, en la **Figura** 3.2 se identifican preguntas que los estudiantes pueden plantearse sobre el ambiente de aprendizaje.

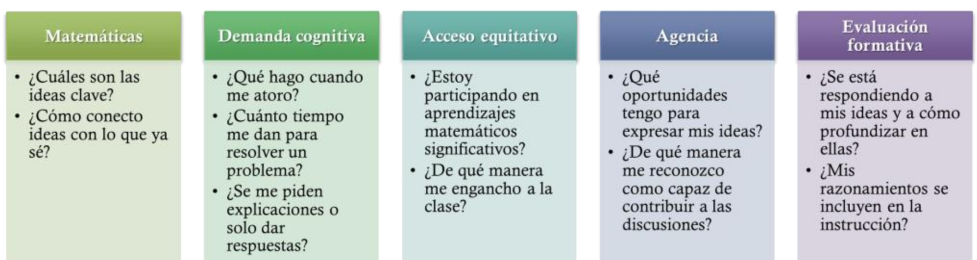


Figura 3.2 Observando la clase desde los ojos del estudiante (Schoenfeld, 2019)

Si bien estas dimensiones se refieren a lo que Schoenfeld define como un ambiente *poderoso* de aprendizaje, desde la perspectiva de esta investigación se considerará que estos mismos aspectos generales permitan describir la manera en que los estudiantes utilizan su bitácora digital como un medio de reflexión sobre su aprendizaje y sobre la problematización de la disciplina:

Descriptor	Formas de identificar en la bitácora
Conexión de ideas matemáticas (Matemáticas) Cómo dan cuenta los estudiantes de las relaciones que existen en el contenido matemático en términos de exploraciones, complementación de ideas,	• Destacan ideas centrales a través de identificar su relevancia • Identifican los recursos matemáticos involucrados en las tareas

identificación de vínculos entre conceptos o su relación en la resolución de problemas.	• Complementan soluciones a problemas de forma algebraica, numérica o gráfica
Prioridad en las explicaciones (Demanda cognitiva) ¿Cómo justifican sus ideas? ¿En qué sentido consideran relevante plantear argumentos o explicaciones a las respuestas a problemas? ¿cuál es el énfasis que le dan a la estructuración de ideas conceptuales?	• Justificaciones de soluciones a problemas • Explicaciones de sus acercamientos • Comprobación de sus soluciones • Modelos de GeoGebra acompañados de comentarios • Agregan síntesis o conclusiones
Involucramiento (Acceso equitativo) Incluyen muestras de sus aportes a la clase o bien, de su propio entendimiento sobre el curso de una manera acorde a sus necesidades individuales.	• Incluyen descripciones de lo que hicieron en clases • Profundizan mediante consultas en otras fuentes o con problemas nuevos • Expresan inquietudes y dudas sobre conceptos o problemas
Agencia del aprendizaje (Agencia) Esta *agencia* se entenderá como el reconocimiento de sentirse responsables o dueños de lo que están aprendiendo. ¿Exhiben un interés inquisitivo por el contenido matemático? ¿Perciben relevancia en su trabajo en clases, incluso si sus ideas no constituyeron una solución?	• Exploran formas alternativas de estudiar el tema • Complementan su bitácora con problemas adicionales • Vinculan el contenido del curso con conocimientos de su interés • Extienden exploraciones de las herramientas de GeoGebra
Continuidad (evaluación formativa) ¿Toman en cuenta aspectos de la retroalimentación? ¿Qué importancia perciben los estudiantes en el trabajo constante de la bitácora? ¿Cómo mantienen una estructura coherente a lo largo del trabajo en la bitácora?	• Frecuencia de los cambios en *Google Docs* • Retoman ideas, conceptos o procedimientos previos en la elaboración de nuevos • Existe una estructura global y coherencia a lo largo de la bitácora

Tabla 3.5. Descriptores del trabajo en una bitácora digital

Con estos elementos, en la Figura 3.3 se sintetizan las tres fases de análisis que se llevaron a cabo. La primera fase del análisis tuvo como principal objetivo obtener una visión panorámica sobre los resultados de la implementación de las actividades; en la segunda fase, tuvo como finalidad dar una visión global sobre cómo fue el desempeño de los estudiantes en la resolución de las actividades y en la tercera fase se integraron elementos relacionados con la identificación de perfiles sobre la estructura del trabajo en la bitácora digital. Como resultado del análisis, se generó un conjunto de perfiles de bitácoras cuya caracterización tuvo la intención de dar respuesta a la pregunta de investigación. En este sentido, se discutirán los resultados a partir de lo obtenido de la segunda y tercera fase del análisis.

Figura 3.3. Síntesis de las tres fases del análisis cuyo resultado es la generación de perfiles de trabajo sobre la apropiación de la bitácora digital

Capítulo 4 ANÁLISIS Y RESULTADOS

La unidad de análisis involucra el trabajo registro de los estudiantes en cada una de las 21 bitácoras, las cuales contienen evidencias de las actividades desarrolladas a lo largo de todo el curso. Las bitácoras contienen el registro de uno, dos o tres estudiantes. En este sentido, una bitácora constituye una unidad de análisis. En la Tabla 4.1, se identifica el número de estudiantes que reportaron las tareas y actividades del curso.

Código de bitácora	Tipo de equipo	Integrantes (Nombres)	Código de bitácora	Tipo de equipo	Integrantes (Nombres)
Bitácora 1	Bina	Padme y Alejandra	**Bitácora 12**	Individual	Ferrán
Bitácora 2	Terna	Dante, Ian y Ariadna	**Bitácora 13**	Bina	Arturo y Johana
Bitácora 3	Bina	Daniela y Susana	**Bitácora 14**	Individual	Eric
Bitácora 4	Bina	Fernando y Danna	**Bitácora 15**	Bina	José y Jorge
Bitácora 5	Bina	Percy y Ángel	**Bitácora 16**	Terna	Víctor, Josué y Ana
Bitácora 6	Individual	Atziry	**Bitácora 17**	Bina	Andrés y América
Bitácora 7	Individual	Kaori	**Bitácora 18**	Individual	Carlos
Bitácora 8	Bina	Manuel y Jonathan	**Bitácora 19**	Individual	Mauricio
Bitácora 9	Terna	Abraham, Alex y Fernando	**Bitácora 20**	Individual	Hugo
Bitácora 10	Bina	Samuel y Ricardo	**Bitácora 21**	Individual	Ashley
Bitácora 11	Bina	Kevin y Valeria			

Tabla 4.1. Composición de las bitácoras del curso

El análisis de los datos se enfoca inicialmente hacia las diferentes aproximaciones registradas en cada una de las 21 bitácoras sobre las formas en la que los estudiantes abordaron las actividades; posteriormente, se realizó un análisis enfocado en las bitácoras, identificando el desempeño transversal de los participantes a lo largo del curso con la intención de generar perfiles del desempeño que destacan características similares en los acercamientos de resolución de las actividades.

En síntesis, primera fase del análisis permite identificar distintos modos de aproximarse a cada una de las actividades, mientras que la segunda tuvo como objetivo dar cuenta del avance reportado en las bitácoras a lo largo del curso y así elaborar categorías o perfiles de desempeño de los participantes. En una primera sección de este capítulo, se describen algunos elementos que resultaron de la implementación de las actividades. En la segunda sección, se categorizan los perfiles de desempeño de los estudiantes y se ilustran las formas en que resuelven y registran sus acercamientos a las actividades. Finalmente, en la tercera sección de este capítulo, se presenta una discusión sobre las percepciones de los estudiantes acerca de las ventajas y desventajas del trabajo de la bitácora.

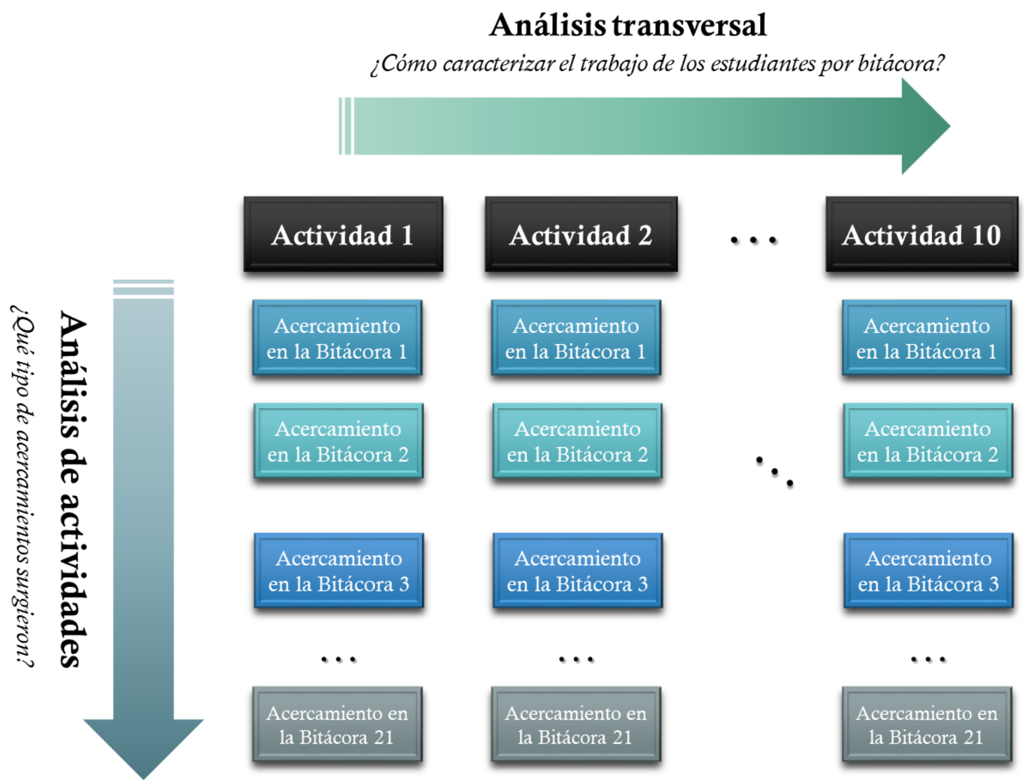


Figura 4.1. Análisis transversal y por actividades de los datos

4.1. Panorama general sobre la implementación de las actividades

De acuerdo con LeCompte (2000), es fundamental brindar información sobre el contexto de la investigación para dar sustento a los elementos de validez y confiabilidad de la investigación. Por lo tanto, en esta sección se incluye información que permita dar un panorama general sobre el desarrollo de la implementación de las actividades.

Tal como se mencionó en la sección de métodos, las sesiones se desarrollaron en dos modalidades: sesiones en el aula tradicional y sesiones en la sala de cómputo. En las sesiones en el aula tradicional, se estudiaron los temas del curso principalmente de manera analítica, debido a que no se contaba con el acceso a herramientas digitales; en las sesiones de la sala de cómputo, todos los estudiantes contaban con una computadora con acceso a internet y con GeoGebra instalado, de modo que las sesiones en la sala de cómputo permitían explorar de manera dinámica los problemas y conceptos que se trabajaban durante las sesiones en el aula tradicional. La Tabla 4.2 muestra de manera general la forma en que se implementaron las actividades del curso durante las sesiones en la sala de cómputo (trabajo presencial) y la dinámica de trabajo de los estudiantes de manera remota, enfocada principalmente en el registro de su bitácora.

En cada sesión en la sala de cómputo, se planteaba un problema seleccionado de los libros de texto sugeridos por el programa curricular y el profesor invitaba a los estudiantes a plantearse preguntas clave para guiar sus exploraciones: ¿cómo explorar el problema? ¿qué tipo de variables intervienen? ¿qué comandos deberán emplear? a medida que el curso avanzó, estas preguntas se delegaron hacia los estudiantes. Durante las sesiones, los estudiantes trabajaban en equipos y el profesor monitoreaba el trabajo de los estudiantes, atendiendo preguntas, inquietudes y planteando preguntas adicionales a los estudiantes. Durante esta dinámica de trabajo, los estudiantes realizaban breves anotaciones en sus bitácoras que posteriormente complementaban en casa.

Trabajo presencial	Trabajo remoto
El profesor:	
• presentaba un problema ante el grupo, invitando a los estudiantes a explorarlo con GeoGebra • monitoreaba el trabajo de los estudiantes, aclarando dudas conceptuales o técnicas • planteaba preguntas guía (e.g., ¿cómo usar el modelo para resolver las actividades? ¿qué argumentos pueden construirse de manera adicional?); y • exhortaba a los estudiantes a presentar sus resultados ante el resto del grupo, que mostrara aproximaciones que pudieran enriquecer el trabajo de los demás	• Asignaba cuestionarios, videos y artículos interactivos por medio de la plataforma *Khan Academy* para que los estudiantes revisaran extra-clase • facilitaba materiales textuales, videos y presentaciones en el canal general de *Teams* para que los estudiantes consultaran; y, • Diseñaba cuestionarios de opción múltiple por medio de *Teams* para complementar el trabajo matemático de las sesiones presenciales.
Los estudiantes:	
• Trabajaban en grupos pequeños (de 1 a 3 integrantes) en representar los problemas en GeoGebra • resolvían los problemas con ayuda de modelos dinámicos en GeoGebra; y • realizaban un registro inicial en su bitácora (*Google Docs*)	• Complementaban sus bitácoras con reflexiones retrospectivas sobre su trabajo en las sesiones presenciales • trabajaban en tareas asignadas por el profesor en *Khan Academy* y *Teams;* y • buscaban y seleccionaban contenido que consideraran importante de incluir como complemento del trabajo matemático en las sesiones presenciales

Tabla 4.2. Directrices del trabajo presencial y remoto del curso

Un aspecto que es importante de enfatizar es la forma de organización para el registro de las bitácoras a cargo de dos o tres estudiantes, ¿qué significa el registro en la bitácora de una pareja o terna de estudiantes? En este sentido, resultó importante incorporar medidas que garantizaran que los registros de las bitácoras elaboradas por parejas o ternas de estudiantes constituyeran un reflejo del trabajo colaborativo y que las aportaciones de sus integrantes fueran lo más equitativas posibles. Este conjunto de medidas se implementó a través de un sistema de monitoreo activo por parte del profesor que consistió esencialmente en lo siguiente:

i. Durante el desarrollo de las sesiones, el profesor realizaba preguntas dirigidas hacia cada uno de los integrantes de los equipos de trabajo en binas y ternas, con la intención de evaluar su comprensión individual sobre el proceso de resolución de las actividades.

ii. El profesor también seleccionaba a diferentes miembros de los equipos para que expusieran ante el resto de sus compañeros cómo habían obtenido las soluciones a las actividades, asegurándose de que las participaciones no estuvieran centradas en un grupo reducido de estudiantes.

En este sentido, a través de este monitoreo activo, los registros en bitácoras digitales elaboradas por dos o tres estudiantes reflejan el resultado de exploraciones realizadas de manera colaborativa entre sus integrantes, producto de interacciones y discusiones entre pares.

4.1.1. Sesión introductoria al uso de GeoGebra para resolver problemas

Durante la primera sesión, se crearon los archivos en *Google Docs* que correspondieron con cada bitácora, se presentó la interfaz de GeoGebra y se exploró el concepto de la función exponencial y la relación proporcional que existe con las derivadas exponenciales (**Apéndice 2**). Durante la segunda sesión, se utilizó el siguiente problema para desarrollar la introducción al uso de GeoGebra. a los estudiantes durante la resolución del problema.

Para estimar la cantidad de defoliación causada por la polilla gitana durante un año, un guardabosques midió la masa de huevecillos en $\frac{1}{40}$ de acres del otoño pasado. El porcentaje y de defoliación se aproxima mediante la expresión:

$$y = \frac{300}{3 + 17e^{-0.06255x}}$$

Donde x es la masa de huevecillos en miles (si $x = 1$, se lee como "1000 masas de huevecillos).

a) Usando la gráfica de la función, estima el porcentaje de defoliación si 2000 masas de huevecillos son contadas
b) Estimar el número de masas de huevecillos existentes, si se observa que aproximadamente 2/3 del bosque está defoliado.
c) Estima la rapidez a la que aumenta la defoliación si hay 1500 masas de huevecillos.
d) Estima el valor de x para el cuál el porcentaje de defoliación incremente con mayor rapidez

La Tabla 4.3 sintetiza la manera en que se implementó el uso inicial de Geogebra, destacando la función de los comandos que se presentaron a los estudiantes en la resolución del problema de introducción.

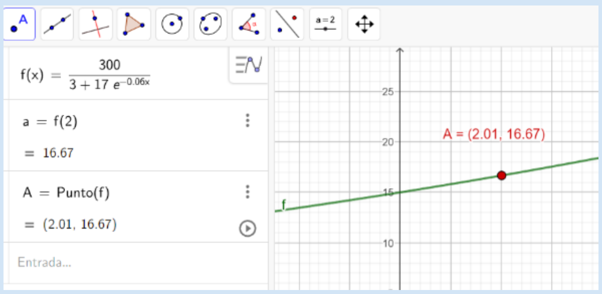
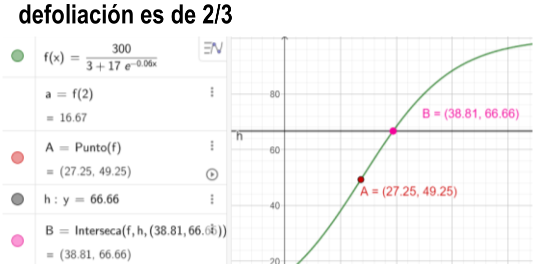
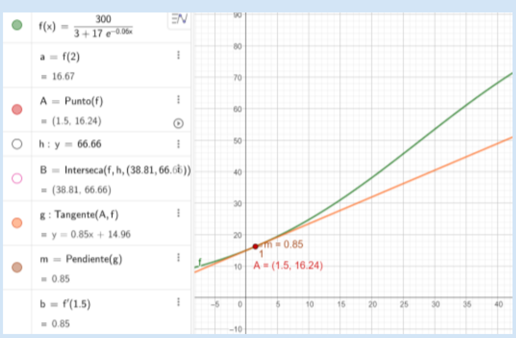
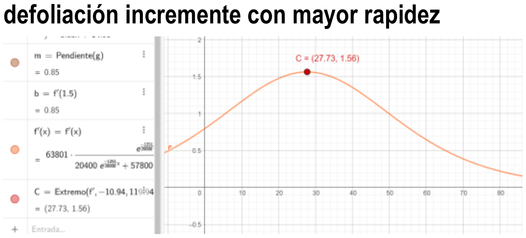
Inciso	Descripción
a) Estimar el porcentaje de defoliación para $x = 2$ 	Se usó la barra de entrada para definir la función $f(x) = \frac{300}{3+17e^{-0.0625x}}$; Se hizo énfasis en la Vista Algebraica (barra lateral de la izquierda, cálculo simbólico de GeoGebra) y su representación en la Vista Gráfica (plano coordenado) Alternativa 1. Se usó el comando *punto en objeto* para situar un punto A sobre la curva de f en la Vista Gráfica. Se mueve el punto A hasta que su abscisa sea aproximadamente 2. Se usó la barra de entrada para calcular valores concretos de la función introduciendo $f(2)$
b) Estimar el número de masas de huevecillos si la defoliación es de 2/3 	Se define la recta horizontal empleando la barra de entrada $y = 66.66$ (este porcentaje representa una defoliación de 2/3) Se usa el comando *intersección* para encontrar el punto de corte entre la función f y la recta horizontal anterior Se interpreta la abscisa del punto de intersección en términos del problema: Se requieren 27.25 mil masas de huevecillos para alcanzar 2/3 de defoliación
c) Estimar la rapidez a la que aumenta la defoliación cuando $x = 1.5$ 	Se emplea el comando *tangente* para obtener la recta tangente a f en el punto A; se mueve manualmente A hasta que su abscisa sea igual a 1.5. Se usa la herramienta de *pendiente* para medir la pendiente de la recta tangente, que es igual a 0.85. Se escribe en la barra de entrada $f'(1.5)$ que devuelve 0.85. Se interpreta esto como que la tasa de defoliación aumenta a una tasa de 0.85 puntos porcentuales (pp) por cada mil masas de huevecillos
d) Estima el valor de x para el cual el porcentaje de defoliación incremente con mayor rapidez 	Se mueve el punto A con la recta tangente a la función f hasta que, visualmente, se encuentre la recta con la mayor pendiente Se define en la barra de entrada f', obteniendo así la función derivada; se usa el comando de *extremos* para encontrar el máximo en $(27.73, 1.56)$. La rapidez máxima es de 1.56 pp por cada mil masas de huevecillos, encontrada a las 27.73 mil masas,

Tabla 4.3. Resolviendo un problema con comandos de GeoGebra

A lo largo del desarrollo de esta sesión, se plantearon preguntas que ayudaron a orientar la exploración: ¿Qué significa en términos porcentuales que la defoliación sea de 2/3?¿Cómo emplearían GeoGebra para encontrar la cantidad de huevecillos necesarios que causa una defoliación de $1/3$? ¿Existe algún valor máximo de defoliación según la gráfica? ¿Qué ocurre con la tasa de defoliación a medida que la cantidad de huevecillos aumenta? En general, el énfasis en esta sesión se ubicó sobre el uso de la interfaz básica de GeoGebra y su relevancia en la exploración de los conceptos matemáticos involucrados al resolver un problema.

4.1.2. Registros de los estudiantes en la bitácora digital

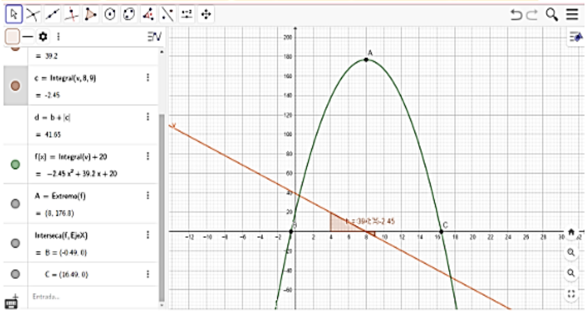
Los estudiantes organizaron su trabajo alrededor de los temas, incluyendo actividades y complementándola con diversos recursos. Este contenido se puede categorizar en cuatro distintos tipos de *registros:*

- Actividades del curso. Respuestas y acercamientos a las Actividades del curso, constituyeron el principal elemento para el análisis. Se incluyen modelos dinámicos, argumentos y exploraciones sobre el proceso de resolución.
- Consultas externas. Contenido textual enfocado a explicar, ilustrar y complementar definiciones o relaciones matemáticas sobre los temas involucrados en las actividades. Generalmente obtenidos de sitios web, acompañados de enlaces a videos o mediante recortes de pantallas.
- Notas de la clase. Observaciones y anotaciones relacionadas con las sesiones. Frecuentemente incluyen comentarios sobre lo que los estudiantes entendieron y se acompañan de escaneos o fotografías de sus cuadernos físicos.
- Registros procedimentales. Tareas matemáticas tomadas de sitios web, videos o plataformas educativas que se incrustan en la bitácora. Principalmente, tareas resueltas en Khan Academy.

Si bien el foco del análisis lo constituyeron los registros sobre las Actividades del curso, los otros tipos de registros ofrecen una idea sobre cómo los participantes dan sentido a los contenidos matemáticos involucrados en el desarrollo de las actividades. La Tabla 4.4 incluyen un ejemplo de cada uno de los tipos de registros identificados en las bitácoras.

<table>
<tr><th>Actividades del curso</th><th>Consultas externas</th></tr>
<tr><td>

Problema 3. Un móvil a una altura de 20m es disparado hacia arriba. La velocidad del móvil (en m/s) a lo largo del tiempo (en segundos) está dada por la función $v(t)$=39.2−4.9t



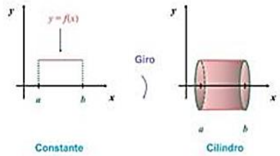
a) ¿Cuál fue el desplazamiento que experimentó en el intervalo $4 \leq t \leq 9$?
=36.75m
utilizamos el comando Integral, para poder localizar el desplazamiento colocamos Integral(v,4,9) que eso nos dará el desplazamiento que se hizo en esos intervalos, solo que aquí no contempla áreas negativas.

b) ¿Cuál fue el recorrido TOTAL que experimentó el móvil en el intervalo $4 \leq t \leq 9$?
=41.65m
De igual manera utilizamos el comando integral, primero de 4 a 8 (Integral(v,4,8)) y luego de 8 a 9 (integral(v,8,9)) para despues sumarlas, la unica diferencia que habra sera que el intervalo de 8 a 9 aun asi este de negativo, deberá sumarse como valor positivo, así se realmente nos dará un desplazamiento TOTAL.

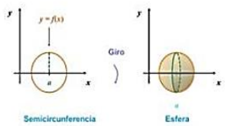
</td><td>

1. Volúmenes en revolución

Si una función gira con respecto a un eje del plano, se genera un volumen.Como en la siguiente imagen:



"En general, una función puede girarse libremente, por lo que la forma del sólido que se genera depende, tanto de la naturaleza de la función, como del eje de revolución."



Un volumen del sólido de revolución se conforma de la suma infinita de franjas unitarias de volumen y si se genera haciendo girar a una función $f(x)$ alrededor del eje x se puede calcular por medio de:

$$V = \sum_{i=1}^{n} A(xi) = \Delta x$$

$$V = \int_a^b A(x)dx$$

</td></tr>
<tr><td>En este ejemplo, se muestra la descripción de cómo se resuelve una actividad usando las herramientas de GeoGebra (Bitácora 15).</td><td>En este ejemplo, los estudiantes tomaron una explicación sobre la noción de sólidos en revolución de un sitio web y se incluyó en la bitácora digital (Bitácora 16).</td></tr>
<tr><th>Notas de clase</th><th>Procedimentales</th></tr>
<tr><td>

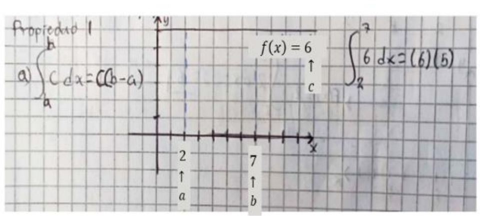
La integral definida. Propiedades

Durante esta clase vimos varias propiedades que se aplican dependiendo de la integral. Algo que me pareció interesante que se mencionó en la clase es que la integral se podría describir como el límite de una sumatoria.

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x)\Delta x = \int_a^b f(x)\,dx$$

Para saber más sobre las propiedades de la integral definida vimos las fórmulas junto un ejemplo:
Sean a, b, c ϵR y f(x) una función real

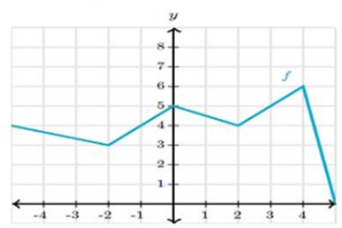
Propiedad 1



a)

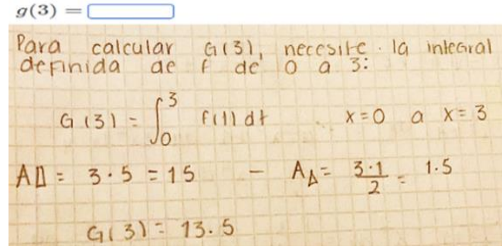
</td><td>

A continuación se muestra la gráfica de la función f. Sea $g(x) = \int_0^x f(t)\,dt$.



Evalúa $g(3)$.

$g(3) =$



</td></tr>
<tr><td>En este ejemplo, un estudiante (Bitácora 12) describe de manera general las ideas de la clase sobre propiedades de la integral y anexa una foto de su cuaderno, ilustrando la propiedad $\int_a^b c\,dx = c(b-a)$</td><td>En este registro se observa cómo dos estudiantes (Bitácora 3) incluyen en su bitácora uno de los ejercicios que resolvieron en Khan Academy y adjuntan una foto de su cuaderno del procedimiento que siguieron.</td></tr>
</table>

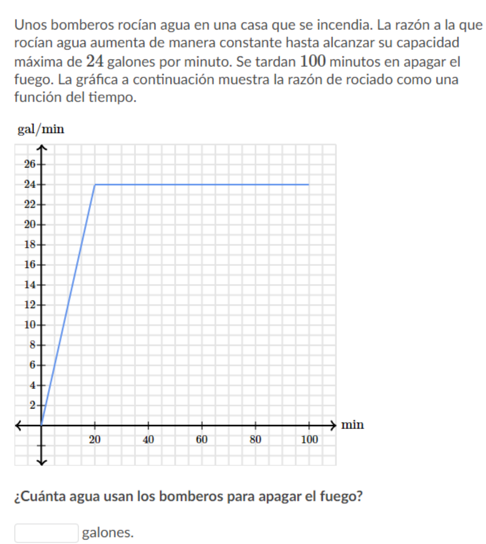
Tabla 4.4. Ejemplos sobre los diferentes tipos de registros en las bitácoras

4.1.3. Elementos de soporte

En este apartado, se hará una descripción sobre los medios de soporte que los estudiantes activaron durante el desarrollo de las actividades. Estos incluyen los materiales de *Khan Academy* dispuestos a los estudiantes por parte del profesor, el uso de canales de comunicación por medio de *Teams* y la retroalimentación ofrecida a través de *Google Docs.*

Khan Academy. La plataforma de Khan Academy se empleó para asignar cuestionarios, videos y algunos artículos informativos a los estudiantes, de modo que ofreció un contenido adicional que los estudiantes podían consultar. De manera semanal, los estudiantes recibían contenido de la plataforma relacionado con los temas de estudio, de modo que podían acceder a ellos desde su cuenta de Khan Academy. La Tabla 4.5 muestra algunos ejemplos de materiales asignados a los estudiantes sobre la introducción a la integral.

La principal utilidad de Khan Academy fue la de relegar el trabajo algorítmico de las matemáticas al trabajo fuera del aula de los estudiantes, y dedicando así tiempo a la resolución y discusión de problemas en clase.

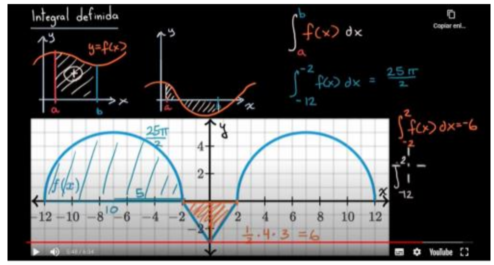
Descripción	Ejemplo
Cuestionarios. Conjuntos de 4-7 preguntas respuesta breve o de opción múltiple (se estima que los estudiantes se tomen unos 15 minutos por cuestionario) Los estudiantes podían responder estos cuestionarios tantas veces como ellos desearan, generando nuevas preguntas en cada nuevo intento. En caso de cometer errores, Khan Academy ofrece videos de ayuda o artículos de consulta, así como el desglose de la solución paso por paso.	

<table>
<tr>
<td>

Videos

Explicaciones sobre cómo responder algunos tipos de ejercicios, o sobre nociones conceptuales del Cálculo. En el ejemplo, se muestra una introducción a las integrales definidas.

</td>
<td>



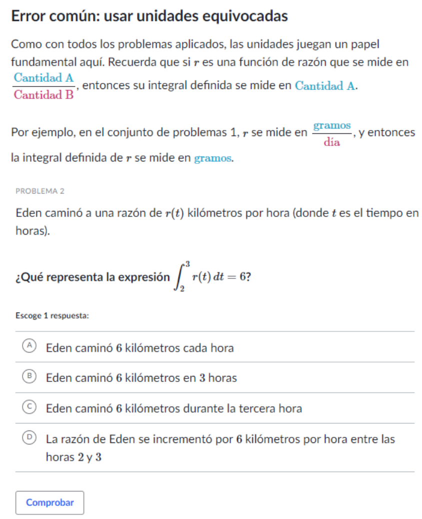
</td>
</tr>
<tr>
<td>

Artículos interactivos

Contenido textual que trata sobre conceptos o procedimientos del Cálculo. Adicionalmente, a lo largo de estos textos, se incluyen incrustadas preguntas que los estudiantes pueden contestar, con la finalidad de comprobar su comprensión sobre lo que se está leyendo.

Estos artículos, a diferencia de los cuestionarios, siempre muestran las mismas preguntas y solo usan estas preguntas para mantener el enganchamiento de los estudiantes.

</td>
<td>



</td>
</tr>
</table>

Tabla 4.5. Elementos de Khan Academy para el soporte

Microsoft Teams. La plataforma *Teams* se empleó como el principal medio de comunicación remota entre los estudiantes y el profesor durante el desarrollo del curso a través de canales de comunicación general (Figura 4.2).

Figura 4.2. Canales de comunicación en *Teams*

En esta plataforma, se puso a disposición de los estudiantes archivos de texto, libros digitalizados, la lista completa de Actividades del curso y los enlaces a las bitácoras de sus compañeros. A través de *Teams*, el profesor elaboró y asignó algunos cuestionarios similares a los cuestionarios de Khan Academy. En la Figura 4.3 se observan algunas preguntas de uno de los cuestionarios, cuyo principal objetivo fue ofrecer a los estudiantes tareas simples donde necesitaban utilizar los comandos y herramientas de GeoGebra. En este sentido, estos *quizzes* sirvieron como espacios de trabajo que permitieran a los estudiantes continuar familiarizándose con las herramientas de GeoGebra que se exploraban durante las sesiones. En este sentido, los estudiantes y el profesor contaron con un medio que les permitió mantener comunicación y llevar registro de las tareas que los estudiantes realizaron durante el curso, así como la posibilidad de poder compartir sus bitácoras con el resto de sus compañeros.

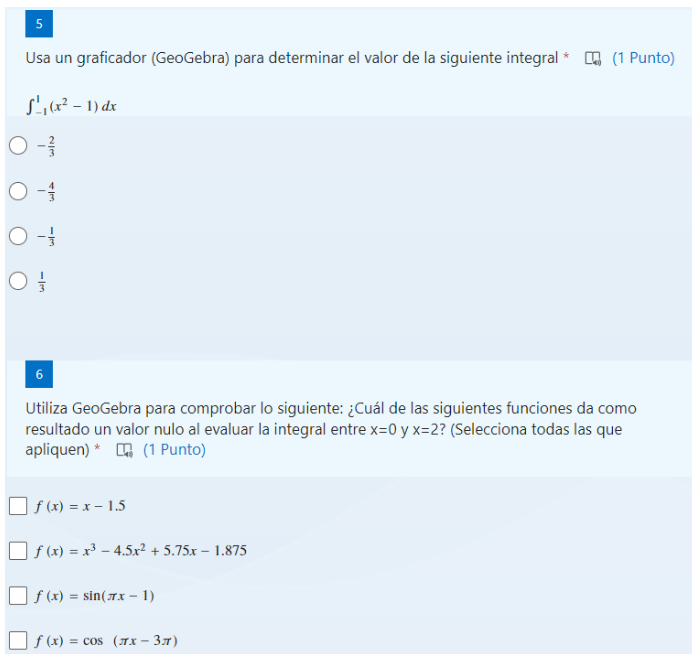


Figura 4.3. *Cuestionario* sobre el área bajo la curva

Orientación del profesor. El rol del profesor fue principalmente de orientador y guía, planteando preguntas que permitieran a los estudiantes profundizar en sus exploraciones. El profesor también construyó modelos dinámicos que ofrecieran a los estudiantes ayudas visuales para comprender o dar sentido a las relaciones matemáticas involucradas en el estudio de las integrales. Un aspecto central del rol del profesor fue la retroalimentación dentro y fuera del salón de clases.

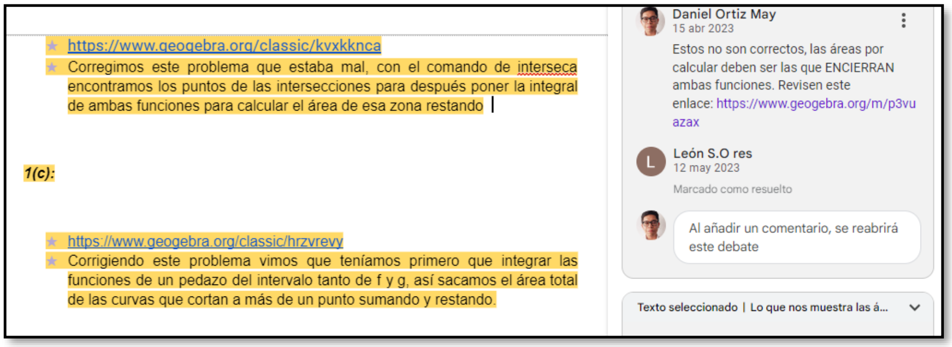


Figura 4.4. Ejemplo de retroalimentación de una bitácora

Durante las sesiones presenciales, el profesor planteaba preguntas que reorientaran o complementaran el trabajo de los estudiantes al momento de desarrollar las actividades; no obstante, una vez que los estudiantes incluyeran información en su bitácora, se empleó la sección de comentarios para realizar una retroalimentación más específica sobre entradas de las bitácoras. En la **Figura** 4.4 se ilustra un ejemplo donde se hizo un comentario acerca de la forma en que dos estudiantes abordaron un problema sobre áreas bajo la curva. En este ejemplo, los estudiantes tomaron en cuenta la observación y mencionan la corrección, de modo que incluyen respuestas acordes a lo solicitado en la tarea.

4.2 Perfiles de trabajo en la bitácora digital

Para cada una de las actividades, se realizó un análisis con la finalidad de diferenciar el trabajo particular reportado en las bitácoras para cada actividad. Estas se realizaron a través de identificar en el trabajo reportado en las bitácoras aspectos como los siguientes: ¿De qué manera realizaban exploraciones con GeoGebra para dar sentido a las ideas o conceptos matemáticos involucrados en la actividad? ¿Qué tipo de registros emplean los estudiantes para complementar su trabajo sobre las actividades? ¿De qué manera registran sus acercamientos a los problemas en su bitácora? En la Tabla 4.6 se resumen los diferentes modos de desempeño detectados para cada uno de los aspectos diferenciadores.

Aspecto diferenciador	Formas identificadas en las actividades
¿De qué manera realizan exploraciones con GeoGebra para dar sentido a las matemáticas involucradas en la actividad?	A. Dan respuesta a las actividades en términos de las herramientas de GeoGebra y finalizan sus exploraciones. B. Emplean GeoGebra para representar aproximaciones analíticas en lápiz y papel, o bien, para desarrollar procesos analíticos que son demasiado complejos en lápiz y papel (por ejemplo, relegar a GeoGebra el proceso de derivar o integrar una función difícil) C. Emplean GeoGebra para identificar relaciones matemáticas y las emplean para generar explicaciones o argumentaciones.

	D. Emplean GeoGebra para representar y explorar problemas de diversas maneras, o bien, emplean GeoGebra para extender las exploraciones y hacer explícitas otras relaciones matemáticas de naturaleza analítica o geométrica.
¿Qué tipo de registros emplean los estudiantes para complementar su trabajo sobre las actividades?	A. Textos explicativos y definiciones obtenidas en internet B. Transcripciones o fotografías de sus cuadernos sobre ejercicios o notas tomadas en clase. C. Construcciones dinámicas generadas para explorar conceptos relacionados con las actividades
¿De qué manera registran sus aproximaciones al resolver problemas?	A. Incluyen resultados numéricos o breves, respondiendo las preguntas de las actividades B. Complementan sus respuestas explicando qué procesos o comandos utilizaron para llegar a las respuestas C. Incluyen en sus respuestas explicaciones sobre por qué sus respuestas son correctas, ya sea en forma de formas de comprobar sus resultados o bien, de argumentarlos D. Incluyen argumentos analíticos o gráficos sobre sus respuestas, o bien, desarrollan textos coherentes sobre la forma en que abordan una actividad y los obstáculos que encuentran.

Tabla 4.6. Indicadores por actividad del trabajo en las bitácoras

Esto se realizó con la finalidad de obtener códigos asociados a la aproximación particular reflejada en cada bitácora por cada una de las actividades. Una vez que se realizó este proceso, se analizaron los distintos códigos asociados a lo largo de todas las actividades para cada bitácora, con la finalidad de describir el trabajo a lo largo de la implementación de las actividades reflejado por bitácoras. En este sentido, lo que se persiguió en el análisis fue desarrollar perfiles de desempeño globales, a través de identificar conjuntos de bitácoras donde se exhibieran formas similares de desarrollar los registros correspondientes a las actividades. Estos perfiles permiten identificar formas características de identificar relaciones matemáticas, explicar procesos de resolución de las actividades y las formas en que daban seguimiento (o no) a la retroalimentación del profesor dentro y fuera de las sesiones. A partir de este proceso, se identificaron 3 perfiles de desempeño en relación con la apropiación de la bitácora digital, resumidos en la Tabla 4.7.

Perfil de trabajo en la bitácora	Características generales
Procedimental	Los estudiantes realizan registros que no reflejan todos sus procesos. Emplean GeoGebra como un apoyo que les permite superar deficiencias o lagunas conceptuales y algorítmicas al resolver tareas.
Inquisitivo	Estudiantes enfocados en generar descripciones explicativas (¿qué justifica lo que hicieron? ¿cómo comprueban sus resultados?) a través de emplear GeoGebra para interpretar, comprender y comprobar sus resultados. En este sentido, extienden ligeramente sus indagaciones con ayuda de GeoGebra.

Analítico	Los estudiantes emplean GeoGebra como un soporte para profundizar en conceptos y relaciones matemáticas al explorar modelos dinámicos asociados a los problemas. Adicionalmente, tratan de incluir en la medida de lo posible respuestas de naturaleza analítica y en lenguaje matemático.

Tabla 4.7. Niveles de apropiación de la bitácora

4.2.1. Perfil procedimental

Las formas en que los estudiantes registran sus experiencias de aprendizaje en la bitácora digital dentro de este perfil muestran las siguientes características:

a) Reportan sus resultados sin incluir los procesos que siguieron para obtenerlos
b) No exhiben estrategias sistemáticas para resolver problemas con las herramientas de GeoGebra, de modo que sus aproximaciones son inconsistentes o intuitivas.
c) Muestran un camino lineal al perseguir respuestas ante los problemas: una vez que obtienen un resultado, concluyen su proceso de solución.
d) Muestran preocupación por la forma de utilizar las herramientas y la interfaz de GeoGebra, sus interacciones en clase se centraron en cuestiones acerca de cómo realizar ciertos procedimientos concretos (¿cómo trazar una perpendicular? ¿una recta tangente? ¿cómo ocultar una función? Etc.)
e) A lo largo de su bitácora, predominan registros de tipo procedimental, e.g., fotografías de ejercicios hechos en el salón de clase, videos sobre cómo derivar o integrar ciertas funciones, reglas sobre métodos de integración, etc.

Es importante destacar todas las bitácoras exhibieron características similares a las descritas en este perfil durante las primeras sesiones del curso. En este sentido, un perfil procedimental permite caracterizar formas de trabajo de los estudiantes cuando emplean por primera vez una bitácora digital como una herramienta para registrar sus experiencias de aprendizaje. Si bien, los estudiantes desarrollaron otras formas de trabajo en la bitácora digital a lo largo del curso, algunos estudiantes mantuvieron un perfil procedimental sobre la forma de registrar sus procesos de solución de problemas en su bitácora digital durante todo el curso, los cuales se presentan en la Tabla 4.8.

Código de bitácora	Tipo de equipo	Integrantes (Nombres)
Bitácora 1	Bina	Padme y Alejandra
Bitácora 5	Bina	Percy y Ángel
Bitácora 11	Bina	Kevin y Valeria

Bitácora 18	Individual	Carlos
Bitácora 19	Individual	Mauricio

Tabla 4.8. Conjunto de estudiantes que se mantuvieron en un perfil procedimental

A. Aproximación de un perfil procedimental a la solución de actividades. Con el fin de ejemplificar los acercamientos que los estudiantes de un perfil procedimental registran en sus bitácoras, se tomará como ejemplo el trabajo de las estudiantes Padme y Alejandra (Bitácora 1) sobre la Actividad 1 y la Actividad 10. Esta selección se llevó a cabo porque permite ilustrar las características del perfil procedimental. Cabe destacar, que el resto de los estudiantes agrupados en este perfil, exhibieron formas de registro similares. El **Apéndice 7** muestra los enlaces a las bitácoras categorizadas bajo un perfil procedimental, en caso de que se desee consultar las bitácoras en su totalidad. A continuación, se muestra la transcripción del registro de las estudiantes Padme y Alejandra sobre su trabajo en la Actividad 1:

Actividades 1

La presión atmosférica disminuye a medida que incrementa la altura. A nivel del mar, la presión promedio de aire es una atmósfera (1atm=1.033227 kg/cm^2). La siguiente tabla muestra los valores de presión (en atmósferas) ante alturas seleccionadas (en kilómetros).

$\boldsymbol{h}$	0	5	10	15	20	25
$\boldsymbol{p}$	1	0.55	0.25	0.12	0.06	0.02

a) Discutan la posibilidad de aproximar un modelo $p(h) = a + b \ln h$ para los datos, o bien $h(p) = a + b \ln p$.
b) Usa el modelo aproximado para estimar la altura cuando $p = 0.75$
c) Usa el modelo aproximado para estimar la presión cuando $h = 13$
d) ¿Cuál es la tasa de cambio instantánea cuando $h = 5$? ¿Cuándo $h = 20$?

Cuando hacemos un ajuste logarítmico al tener un conjunto de datos para modelar un problema lo que realizamos es un modelo que se aproxime a los datos que tengamos y se creará un modelo de función el cual como ya lo dijimos se aproximará a casi todos los puntos o datos que nos den […] en un graficador como GeoGebra tenemos una gran ayuda dónde colocaremos ajuste logarítmico () o ajuste exponencial () en dónde colocaremos los puntos o datos que necesitamos modelar.

a) Aproxima un modelo logarítmico para los datos ¿puede hacerse?

https://www.geogebra.org/m/gdh8kuak

b) Usa el modelo aproximado para estimar la altura cuando p=0.75? la altura es igual a 2.73

c) Usa el modelo aproximado para estimar la presión cuando h=13? la presión es igual a 0.15

d) ¿Cuál es la tasa de cambio instantánea cuando h=5? ¿Cuando h=20? cuando la altura es 5, la tasa de cambio es -11.72, es decir, que su tasa de crecimiento o cambio es más lento y cuando la altura es igual a 20, la tasa de cambio es -107.46, su tasa de crecimiento es más decreciente que el anterior

Entre los rasgos que se destacan los estudiantes de un perfil de desempeño procedimental es la búsqueda de resultados numéricos, con escasa o nula atención a procesos de justificación, argumentación o validación de sus respuestas. Se puede observar, además, que al principio de la actividad, esta pareja de estudiantes mencionan lo que significa para ellas encontrar un ajuste logarítmico con especial énfasis en describir el procedimiento en GeoGebra para obtener un modelo de ajuste a partir de una lista de puntos.

¿Cómo respondieron a las preguntas las estudiantes utilizando las herramientas de GeoGebra? Las estudiantes se apoyan en el enlace que comparten de su modelo dinámico como única fuente de información acerca de los procedimientos que siguieron para responder a la actividad, por lo que fue resulta importante considerar el tipo de orientación que recibieron por parte del profesor durante las sesiones presenciales para la construcción del modelo. Algunas de las preguntas que el profesor planteó a los estudiantes incluyeron: ¿dónde es más conveniente ubicar los datos de la altura, en el Eje X o en el Eje Y? ¿cómo emplear el modelo y las herramientas de GeoGebra para resolver los siguientes incisos? ¿cómo interpretan en términos de las relaciones del problema los resultados obtenidos? Padme y Alejandra construyeron su modelo ubicando los valores de la altura sobre el Eje Y y los valores de la presión sobre el Eje X; con el comando de *Ajuste Logarítmico*, obtuvieron una función de la forma $f(x) = a + b\ln x$ (Figura 4.5).

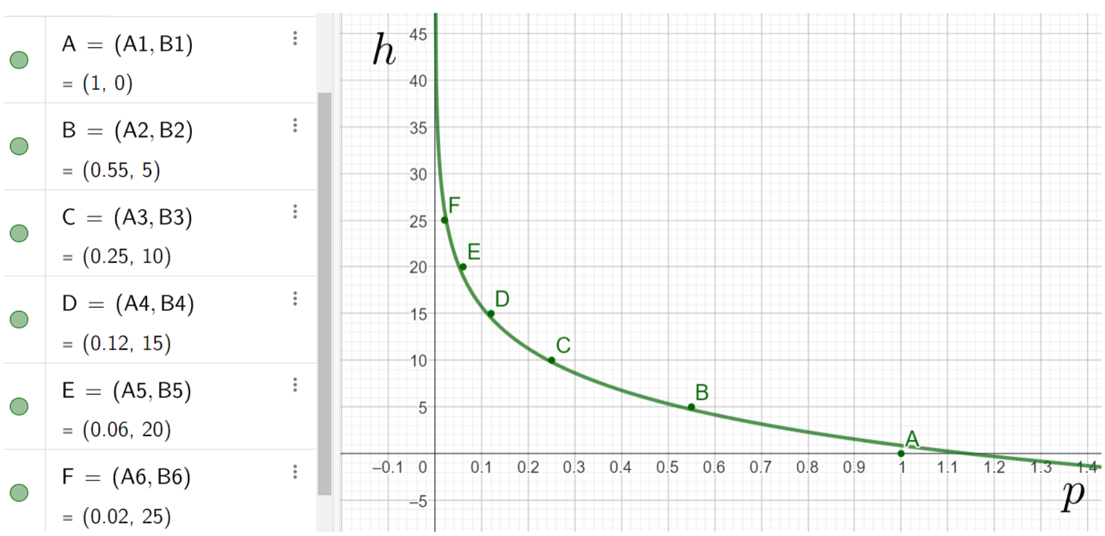


Figura 4.5. Modelo logarítmico de las estudiantes Padme y Alejandra

. Para determinar la altura a la que la presión es de 0.75 atm del inciso b), las estudiantes colocaron un punto G sobre la curva $h(p)$ y lo arrastraron hasta obtener la coordenada

$(0.75, 2.73)$, lo que significa que para alcanzar las 0.75 atm de presión se requiere una altura de 2.73km.

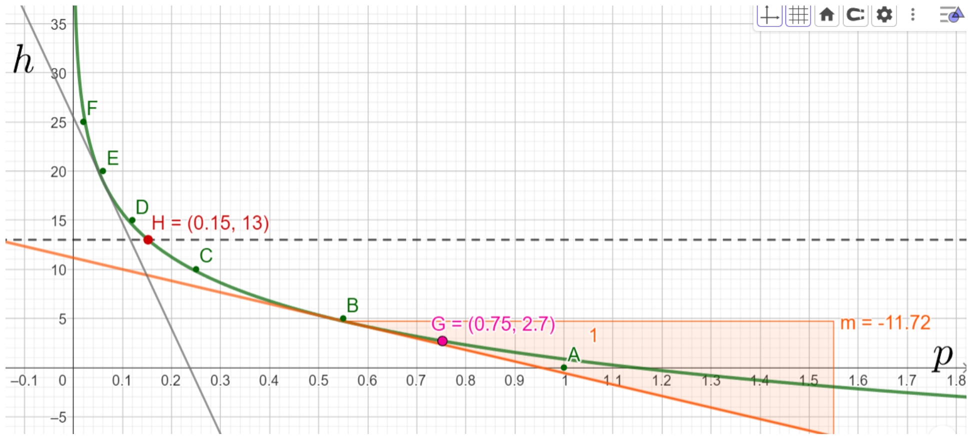


Figura 4.6. Uso de las herramientas de GeoGebra para responder a la Actividad 1

En el inciso c), para encontrar la presión que corresponde a una altura de 13km, las estudiantes trazaron la recta $y = 13$ (recta punteada en la Figura 4.6) y encontraron el punto de intersección con la curva $h(p)$, el punto $H = (0.15, 13)$, tal como se muestra en la **Figura** 4.6. En cuanto al último inciso, las estudiantes determinaron la pendiente de la recta tangente en el punto $B = (0.55, 5)$ a la curva $h(p)$ y, similarmente, la recta tangente en el punto $E = (0.06, 20)$. Posteriormente, obtuvieron las pendientes de ambas rectas y tomaron esos valores como sus resultados.

Discusión. En este ejemplo, se destacan las exploraciones que dos estudiantes (Padme y Alejandra) realizan para dar solución a las preguntas planteadas en la Actividad 1 y lo que registraron en su bitácora. Al enfocarse en el reporte de sus resultados en forma de valores numéricos, no hacen explícitos los procesos de comprensión y exploración del problema. Tampoco reflexionan sobre cómo emplearon las herramientas de GeoGebra para dar respuesta a los incisos de las actividades y cómo emplearlas para validar o comprobar sus soluciones; por ejemplo, para el inciso b) de la actividad, las estudiantes usaron un punto de arrastre para aproximar la solución, mientras que en el inciso c) emplearon un punto de intersección para obtener una solución robusta. Una vez que las estudiantes encontraron una respuesta, no exploran otros caminos de solución, siendo esta otra caracteriza que describe la forma de trabajar en la bitácora digital de los estudiantes con un perfil procedimental.

B. Caracterización del desempeño de los estudiantes de un perfil procedimental. Los estudiantes agrupados en el perfil procedimental mantuvieron una forma de trabajo constante a lo largo del curso. Para ejemplificar esta característica, se ilustra nuevamente el trabajo de las estudiantes Padme y Alejandra (Bitácora 1) acerca de la Actividad 10, que se presentó durante la última semana del curso. El enunciado de la Actividad 10 se describe a continuación:

> **Actividad 10.** La temperatura (en C°) de una taza de café que se deja sobre una mesa en un cuarto a temperatura ambiente se modela mediante la Ley de Enfriamiento de Newton en términos del tiempo (en minutos) como sigue:
>
> $$T(t) = 20 + 75e^{-0.02t}$$
>
> a) ¿Cuál fue la temperatura inicial de la tasa de café?
>
> b) ¿Cuánto tiempo transcurrió para que la tasa estuviera a 61°C?
>
> c) ¿Cuál fue el promedio de la temperatura de la tasa durante los primeros 30 minutos?
>
> d) Encuentra un valor c tal que $f(c)$ es igual al promedio encontrado en el inciso anterior. ¿Qué significa este valor c en términos del problema?

En la Tabla 4.9, se muestra cómo las estudiantes mantuvieron la misma forma de registrar sus aproximaciones al problema, incluyeron únicamente resultados numéricos en su bitácora sin ninguna información adicional sobre cómo obtuvieron esos resultados, o cómo dieron sentido al enunciado del problema. En su bitácora, se incluye el modelo dinámico que construyeron, que se muestra en la Figura 4.7.

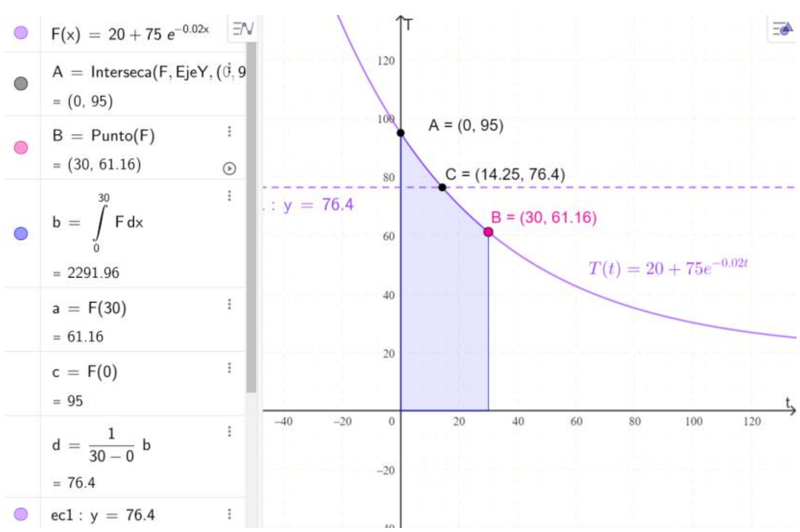


Figura 4.7. Modelo dinámico www.geogebra.org/m/fpn85an6

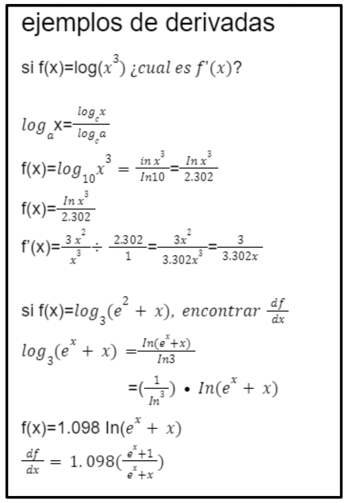
Inciso	Registro en la Bitácora 1	Procedimiento inferido en el modelo

A	¿Cuál fue la temperatura inicial de la tasa? =la temperatura inicial fue de 95°C	Definen la función $T(t) = 20 + 75e^{-0.02t}$ en la barra de entrada y encuentran la intersección de T con el eje de las ordenadas (Punto A en la Figura 4.7)
B	¿Cuánto tiempo transcurrió para que la tasa estuviera a 61°C? = 30 minutos	Definen un punto B sobre T que arrastran hasta que su ordenada sea aproximadamente 61. En la Figura 4.7, se nota que cuando $B = (30, 61.16)$ las estudiantes encontraron la solución.
C	¿Cuál fue el promedio de la temperatura de la tasa durante los primeros 30 minutos? = fue de 76.4 C	Usando la barra de entrada, emplean el comando *integral(TA,0,30)* y obtienen el resultado 2291.96; posteriormente, realizan la operación $\frac{1}{30-0}(2291.96)$ para obtener 76.4, la cual toman como respuesta.
D	= es 14.2,	Definen la recta horizontal $y = 76.4$ y encuentran su intersección con la curva T (punto C en la Figura 4.7). Toman la abscisa de ese punto como respuesta.

Tabla 4.9. Transcripción e interpretación de la solución de la Actividad 10 de Padme y Alejandra

Discusión. Se presentó el trabajo de una pareja de estudiantes dentro del perfil procedimental sobre la Actividad 1 y la Actividad 10, con la intención de ilustrar las características principales de este tipo de perfil de trabajo. La forma en que las estudiantes emplean las herramientas es de forma intuitiva para obtener soluciones, es decir, no incluyen reflexiones o cuestionamientos que les permitan acceder a un uso sistemático de estrategias para resolver problemas utilizando las herramientas de GeoGebra. Además, una vez que obtienen una respuesta a las preguntas, no exhiben cuestionamientos acerca de la validez de las soluciones, de los argumentos que la sustentan o bien, de cómo extender o refinar el proceso de llegar a la solución. Se puede notar que en ambas actividades se presenta una forma inconsistente de encontrar soluciones, puesto que en los incisos a) y d) las estudiantes emplearon puntos de intersección para determinar soluciones robustas mientras que en el inciso b) emplean un punto sujeto a la función f y lo arrastran hasta encontrar una solución aproximada.

Conviene destacar el énfasis en el tipo de registros con los que los estudiantes, dentro de este perfil, complementan la bitácora. Además de registrar las soluciones a las actividades, suelen incluir evidencias sobre su trabajo en el salón de clase con ejercicios en lápiz y papel sobre los temas que identifican dentro de las actividades. En la Figura 4.7 se muestra uno de los registros que un estudiante dentro del perfil procedimental (Mauricio, Bitácora 19) incluyó en su bitácora posteriormente al desarrollo de la Actividad 1. Es decir, identificó que en la Actividad 1 intervienen los temas de derivadas y función logarítmica, de modo que al registrar cómo resolvió la Actividad 1, incluyó como complemento a su trabajo algunos ejercicios que implican derivar funciones logarítmicas. No obstante, no menciona de manera explícita la intención de incluir este tipo de ejercicios en relación con sus exploraciones de la Actividad 1.


ejemplos de derivadas

si f(x)=log(x^3) $¿cual\ es\ f'(x)$?

log_ax=$\frac{log_c x}{log_c a}$

f(x)=$log_{10} x^3 = \frac{in\, x^3}{In10} = \frac{In\, x^3}{2.302}$

f(x)=$\frac{In\, x^3}{2.302}$

f'(x)=$\frac{3\, x^2}{x^3} \div \frac{2.302}{1} = \frac{3x^2}{3.302x^3} = \frac{3}{3.302x}$

si f(x)=$log_3(e^2 + x),\ encontrar\ \frac{df}{dx}$

$log_3(e^x + x) = \frac{In(e^x+x)}{In3}$

$=(\frac{1}{In^3}) \bullet In(e^x + x)$

f(x)=1.098 ln($e^x + x$)

$\frac{df}{dx} = 1.098(\frac{e^x+1}{e^x+x})$

Figura 4.8. Ejemplo de registros procedimentales

Este tipo de registros procedimentales relacionados con los temas involucrados en las actividades fue frecuente en las bitácoras elaboradas por los estudiantes del perfil procedimental. Así, podría inferirse que intentan evidenciar cierto dominio acerca de los procedimientos que consideran parte de las ideas seminales del Cálculo Diferencial e Integral; en este sentido, se argumenta que los aprendices con un perfil de trabajo procedimental conciben el estudio de las matemáticas a través de la apropiación de un conjunto de procedimientos y algoritmos que sirven para resolver problemas. La Tabla 4.10 resume las características del perfil procedimental.

Descriptor	Perfil procedimental
Conexión de ideas matemáticas	Asocian las actividades con los temas del curso que involucran los temas o conceptos identificados (por ejemplo, la Actividad 1 con el tema de funciones logarítmicas y derivadas de funciones logarítmicas). Las principales formas de conectar ideas matemáticas son a través de procedimientos asociados con comandos de GeoGebra.
Prioridad en las explicaciones	Se centran en reportar sus resultados o los pasos llevados a cabo para obtenerlos, con poca o nula profundidad en la explicación y argumentación de los resultados.
Involucramiento	Realizan búsquedas complementarias de conceptos o definiciones sobre los temas del curso. Se centran en comprender la parte técnica del uso de la herramienta y relegan la comprensión de ideas conceptuales refinadas a un segundo plano.

Agencia	Perciben al profesor como el principal agente del proceso de aprendizaje, la bitácora en general es una antología que demuestra su trabajo, pero que tiene poca utilidad para los propios estudiantes como una forma de reflexionar sobre sus ideas propias.
Continuidad	Trabajan en la bitácora de manera irregular, con periodos largos sin modificar la bitácora, sin atención a conectores entre una entrada u otra de la bitácora.

Tabla 4.10. Caracterización de bitácoras con un perfil procedimental

4.2.2. Perfil Inquisitivo

Este perfil reúne al conjunto de estudiantes cuyos registros involucran la exploración de relaciones, la búsqueda de información complementaria, la comunicación y la justificación de ideas como formas de extender las soluciones a los problemas. Este perfil da cuenta de una apropiación progresiva de la bitácora digital como una herramienta que promueve la reflexión sobre el desarrollo de habilidades de resolución de problemas. En este sentido, la forma en que se llevan a cabo los registros en la bitácora digital dentro de un perfil inquisitivo se caracteriza por lo siguiente:

a) Incluyen respuestas breves donde describen los procesos que llevaron a cabo para obtener sus resultados
b) En la medida de lo posible, buscan soluciones robustas, en términos de las herramientas de GeoGebra
c) Validan y justifican sus resultados en términos de las exploraciones realizadas dentro de los modelos dinámicos
d) Exhiben diferentes tipos de registros, entre los que incluyen paráfrasis sobre lo que comprenden de los conceptos involucrados en las actividades
e) Atienden a las retroalimentaciones durante y posteriormente a las sesiones presenciales

La Tabla 4.11 enlista el grupo de estudiantes que desarrollaron un perfil inquisitivo a medida que se desarrollaron las actividades del curso.

Código de bitácora	Tipo de equipo	Integrantes (Nombres)	Código de bitácora	Tipo de equipo	Integrantes (Nombres)
Bitácora 2	Terna	Dante, Ian y Ariadna	**Bitácora 9**	Terna	Abraham, Alex y Fernando
Bitácora 3	Bina	Daniela y Susana	**Bitácora 14**	Individual	Eric
Bitácora 4	Bina	Fernando y Danna	**Bitácora 16**	Terna	Víctor, Josué y Ana
Bitácora 6	Individual	Atziry	**Bitácora 17**	Bina	Andrés y América
Bitácora 7	Individual	Kaori	**Bitácora 20**	Individual	Hugo

Bitácora 8	Terna	Manuel y Jonathan	**Bitácora 21**	Individual	Ashley

Tabla 4.11. Participantes que desarrollaron un perfil argumental de trabajo

Se observó que a partir de la Actividad 4 comenzaron a apreciarse la emergencia de características asociados con el perfil inquisitivo en los registros de los estudiantes, las cuales se consolidaron a partir de la Actividad 6 o 7.

A. Registro de las soluciones de un perfil inquisitivo a las actividades. Tres aspectos se destacan en la forma en que los estudiantes de un perfil inquisitivo llevan a cabo sus registros al enfrentarse a las actividades en contraste con los estudiantes de un perfil procedimental:

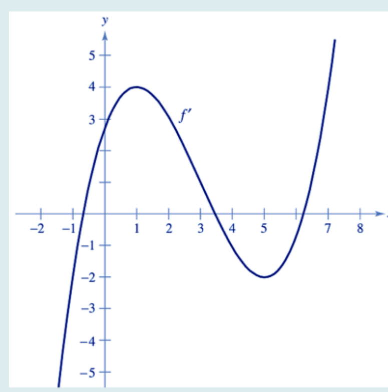
i. Sus registros contienen descripciones con información sobre sus procesos de solución
ii. Realizan procesos de justificación y validación de soluciones
iii. Incluyen explicaciones sobre lo que entienden acerca de los temas involucrados en las actividades

Si bien, todas las bitácoras del perfil inquisitivo reúnen características similares, los registros en la bitácora 2 (elaborados por Dante, Ian y Ariadna) sobre la Actividad 6 permiten ilustrar cómo se presentan los aspectos principales del trabajo de los estudiantes bajo este perfil. La Actividad 6 se implementó aproximadamente durante la décima semana del curso.

Actividad 6

La figura de la derecha muestra la gráfica de f'. Si se sabe que $f(0) = -4$, responde:

a) ¿Cuál es el valor de la pendiente de la recta tangente a f cuando $x = 4$?
b) ¿Es posible que $f(2) = -1$? ¿Por qué sí o por qué no?
c) ¿Se cumple que $f(5) - f(4) > 0$?
d) Aproxima el valor de x donde f alcanza un máximo
e) Bosqueja la gráfica de f



A continuación, se muestra el registro de la terna de estudiantes Dante, Ian y Ariadna, donde se observa un cambio significativo respecto a la forma de reportar sus aproximaciones a la actividad en contraste con el perfil procedimental, pues incluyen descripciones sobre sus razonamientos para obtener sus soluciones:

Actividad 6

a) ¿Cuál es el valor de la pendiente de la recta tangente a f cuando x=4?

Como tenemos la función derivada sabemos que el valor en la pendiente en f da el valor (y) de la derivada, así que aproximadamente el valor de la pendiente en x=4 es de -1

b) ¿Es posible que $f(2) = -1$?¿Por qué sí o por qué no?

De la derivada de una función nos devuelve la función original. Al observar el punto 0 de la función, notamos que tiene un valor de -4 y la derivada es positiva, lo que indica que la función está creciendo. Si calculamos numéricamente una parte de la integral de la derivada de 0 a 2, obtenemos un valor de 7.41 que al sumar no equivale a -1.

c) ¿Se cumple que $f(5) - f(4) > 0$? No se cumplirá, ya que la función f´ durante el intervalo de 4 a 5 está debajo del eje x, por lo que su área es negativa, o sea que la integral es negativa. Lo anterior se comprobó, ya que al sacar $\int_4^5 f'(x)dx$ (qué es lo mismo que $f(5) - f(4)$) da -1.617.

d)Aproxima el valor de x donde f alcanza un máximo.

Al analizar la función en su conjunto, identificamos que el punto de [intersección] con el eje x antes de que la función vuelva a ser negativa corresponde a aproximadamente x = 3.45. Además, la tendencia de crecimiento de la derivada nos indica que la función f se aproxima al infinito a medida que x se incrementa.

d) Incluyan un bosquejo de la gráfica de f.

https://www.geogebra.org/m/amqrwvb2

No obstante, los registros escritos no reflejan exactamente cómo estos de estudiantes utilizaron las herramientas de GeoGebra para resolver la actividad, sin embargo, es posible identificar la manera en que activaron recursos matemáticos por medio de las herramientas de GeoGebra al examinar su modelo dinámico por medio del protocolo de construcción<<. En este sentido, primero se discutirá la forma en que esta terna de estudiantes construyó el modelo dinámico durante la sesión y, posteriormente, se interpretarán las respuestas registradas en su bitácora en términos de lo que se observa en su modelo dinámico.

Construcción del modelo dinámico. Algunas preguntas planteadas por el profesor con la intención de orientar a los estudiantes incluyen: ¿cómo se puede replicar o construir la curva f' con el uso de GeoGebra? ¿Qué información se puede identificar y extraer de la gráfica que permita la construcción de f'? ¿Se pueden identificar algunos puntos de f' en el plano cartesiano? ¿pueden argumentar de varias formas sus respuestas? Con base en estas preguntas, los estudiantes construyeron el modelo dinámico que se encuentra en la siguiente liga: https://www.geogebra.org/m/amqrwvb2.

La Figura 4.9 ilustra el proceso que los estudiantes siguieron para realizar la construcción del modelo dinámico. Inicialmente, a partir de la curva dada en el enunciado del problema, introdujeron algunas coordenadas en la Hoja de Cálculo de GeoGebra. Esta herramienta permite introducir valores tabulares que luego pueden ser convertidos en una lista de puntos. En la Figura 4.9, se muestra cómo los valores de la tabla de la derecha se emplearon para generar una lista de puntos (A, B, C, D, E, F) que los estudiantes identificaron como puntos por donde la curva f' debía pasar.

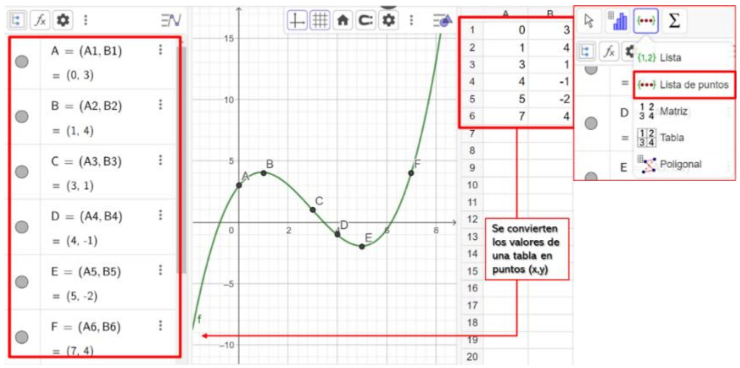


Figura 4.9. Representación de la curva f' en GeoGebra

Posteriormente, usaron un comando llamado *Ajuste polinómico,* que genera una función polinomial de algún grado específico cuya curva se aproxime a los puntos dados. La función obtenida es entonces la representación de la curva f' dada en el problema. Para encontrar f los estudiantes encontraron la antiderivada de f' y le restaron 4, debido a las condiciones establecidas por el enunciado del problema. La Figura 4.10 ilustra este proceso de construcción en GeoGebra.

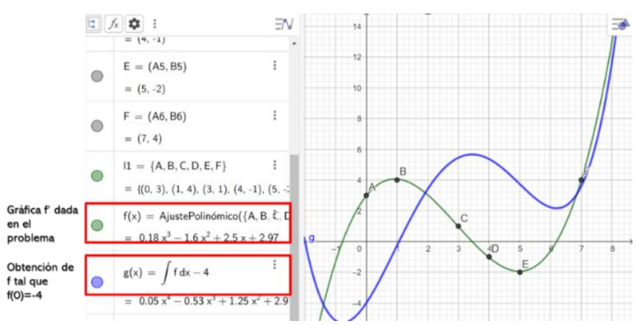
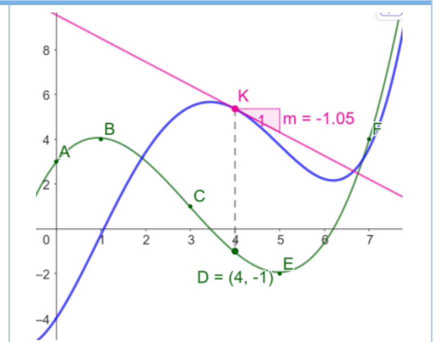
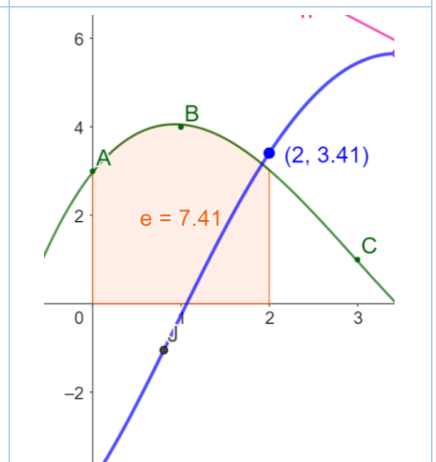
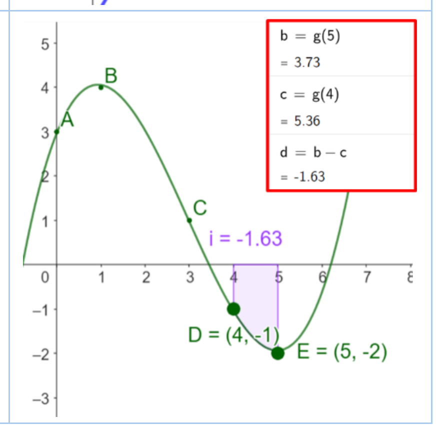


Figura 4.10. Construcción de la curva f' dada en el problema dentro de GeoGebra

El uso de un polinomio de grado 3 coincide con la intención de hacer que la figura no posea más "crestas" aunque esto también pudo haber ocurrido por medio de un proceso de prueba y error: elegir otro grado que no sea 3, permite ver a los estudiantes qué tanto coincide la curva obtenida con la figura asociada a la Actividad 6.

Comentarios sobre el registro de los estudiantes en la Bitácora 2. En la Tabla 4.12 se interpretan los registros de la terna de estudiantes Dante, Ian y Ariadna sobre la actividad 6:

Segmento de registro	Interpretación	Ilustración
¿Cuál es el valor de la pendiente de la recta tangente a $\boldsymbol{f}$ en $\boldsymbol{x} = \mathbf{4}$? Como tenemos la función derivada sabemos que el valor en la pendiente en f da el valor (y) de la derivada, así que aproximadamente el valor de la pendiente en x=4 es de -1	Ofrecen una respuesta analítica, pues visualmente se observa que $f'(4) = -1$ según la gráfica dada en el problema. En su modelo dinámico, trazan la recta tangente a f en $x = 4$ y miden la pendiente de la recta tangente, comprobando que este valor es aproximadamente -1.	
¿Es posible que $\boldsymbol{f(2) = -1}$? De la derivada de una función nos devuelve la función original. Al observar el punto $\mathbf{0}$ de la función, notamos que tiene un valor de $\boldsymbol{-4}$ y la derivada es positiva, lo que indica que la función está creciendo. Si calculamos numéricamente una parte de la integral de la derivada de 0 a 2, obtenemos un valor de 7.41 que al sumar no equivale a -1.	Calculan la integral bajo la curva f' en el intervalo de 0 a 2 e interpretan el resultado como el crecimiento de la función f en ese intervalo. Al sumar este valor a -4 el resultado es mayor a -1. Es decir, utilizan el hecho de que $$\int_0^4 f'(x)dx = f(4) - f(0)$$ Adicionalmente, dado que cuentan con la gráfica de f, calculan la imagen en 2 para comprobar su conjetura.	
¿Se cumple que $\boldsymbol{f(5) - f(4) > 0}$? No se cumplirá, ya que la función $\boldsymbol{f}$´ durante el intervalo de 4 a 5 está debajo del eje x, por lo que su área es negativa, o sea que la integral es negativa. Lo anterior se comprobó, ya que al sacar $\int_4^5 \boldsymbol{f'(x)dx}$ (qué es lo mismo que $\boldsymbol{f(5) - f(4)}$) da $\mathbf{-1.617}$.	Similar al inciso anterior, interpretan que $$\int_4^5 f'(x)dx = f(5) - f(4)$$ El área negativa que se obtiene la interpretan como una dismiinución en el intervalo (4,5). Adicionalmente, comprueban esta idea al calcular los valores $f(5)$ y $f(4)$ para restarlos (la antiderivada f se denota por g en la Vista Algebraica de GeoGebra).	

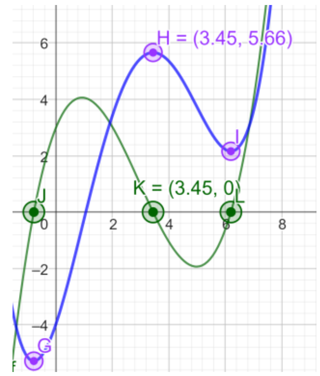
Encuentra el máximo de f. *Al analizar la función en su conjunto, identificamos que el punto de [intersección] con el eje x antes de que la función vuelva a ser negativa corresponde a aproximadamente x = 3.45.*	Encuentran las raíces de la función derivada f'. Además, se fijan en la raíz $x = 3.45$ ya que para $x < 3.45$ la curva f' es positiva y para $x > 3.45$ la curva es negativa (usan la frase 'antes de que la función vuelva a ser negativa'). En su modelo dinámico, comprueban usando el comando "*extremos*" para encontrar los máximos y mínimos locales de f.	

Tabla 4.12. Análisis de la solución de la terna Dante, Ian y Ariadna de la Actividad 6

Mediante este ejemplo, las soluciones reportadas en las bitácoras de los estudiantes con un perfil inquisitivo ofrecen más información sobre los procesos de justificación y exploración en el camino de resolución de problemas en comparación con los estudiantes de un perfil procedimental. Además, se argumenta que este tipo de estudiantes se embarcan en tareas de robustecimiento de soluciones y de conexión de ideas matemáticas. Por ejemplo, determinar si es posible que $f(2) = -1$ o que si $f(5) - f(4) > 0$ consiste en una tarea que no necesariamente involucra activar recursos del cálculo al obtener la gráfica de f, de hecho, en la Tabla 4.12 se mostró como los participantes obtuvieron $f(2) = 3.41$ y $f(5) - f(4) = -1.63$ en la Vista Algebraica de GeoGebra, lo cual responde inmediatamente a las preguntas del inciso (b) y (c). No obstante, una vez que obtuvieron respuestas, los estudiantes generaron formas alternativas de dar solución a estos incisos, involucrando el Teorema Fundamental del Cálculo a través de encontrar el área bajo la curva de f'. En este sentido, explorar el problema con GeoGebra ofrece a los estudiantes la oportunidad de generar argumentos en términos de conectar ideas matemáticas con ayuda de exploraciones llevadas a cabo mediante las herramientas de GeoGebra.

B. Caracterización del desempeño de los estudiantes de un perfil inquisitivo. En la descripción de esta actividad, se puede observar la presencia de evidencias sobre cómo los estudiantes no se limitan a responder los incisos de la actividad, sino que buscan formas alternativas de comprobar y complementar sus soluciones. Para complementar la caracterización del trabajo en la bitácora en un perfil inquisitivo, conviene mencionar que suelen incluir registros acerca de los temas matemáticos que identifican en las actividades y describen con sus propias palabras lo que entienden. Continuando con el ejemplo de los registros en la Bitácora 2 mencionados en el apartado anterior, los estudiantes incluyeron lo siguiente después de las descripciones sobre sus aproximaciones a la Actividad 6:

> El teorema fundamental del Cálculo establece una relación entre la integración y la derivación de una función. Nos permite calcular la integral definida de una función de manera más sencilla. Para no tener que sumar infinitas áreas bajo la curva de la función, podemos simplemente encontrar una función F(x) cuya derivada es la función original f(x), luego calcular F(b)- F(a) para obtener el valor de la integral definida entre los límites a y b [...] Esto significa que, si conocemos la antiderivada de una función, podemos encontrar su integral definida simplemente evaluando la antiderivada en los límites de integración. En resumen, el TFC establece una relación fundamental entre la integración y la diferenciación, permitiendo la evaluación de integrales definidas y el cálculo de derivadas a partir de funciones antiderivadas.

La transcripción anterior da cuenta de la forma en que la terna de estudiantes Dante, Ian y Ariadna dan sentido al Teorema Fundamental del Cálculo como un vínculo entre la integral y la derivada de una función, en términos de procesos inversos. Adicionalmente, vinculan el concepto de integral como una síntesis del proceso de aproximar el área bajo la curva de una función a través de la suma de una cantidad de rectángulos que tiende a infinito. La relevancia de este tipo de registros complementarios radica principalmente en que exhiben un uso de la bitácora digital que involucra reflexiones que los participantes incluyen acerca de los conceptos que se estudian durante el curso. En este sentido, no se limitan a transcribir textos obtenidos por medio de consultas en sitios web o plataformas en línea, sino que identifican y documentan las ideas intuitivas asociadas a los recursos matemáticos clave que activan en la solución de problemas.

Finalmente, cabe destacar que los participantes dentro de este perfil toman en cuenta los comentarios del profesor dentro de la clase para complementar sus soluciones y también destacan la forma en que atienden a las correcciones durante el trabajo remoto de la bitácora. Para ilustrar este rasgo, se presentará la Actividad 8B:

Problema B. Un fabricante debe calcular la cantidad de material requerida para una pieza de maquinaria cuya forma se muestra en la Figura a; Para ello, se mide el diámetro en centímetros del corte transversal a diferentes longitudes a lo largo del objeto, medidas presentes en la siguiente tabla (Figura b):

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
d	4.2	3.8	4.2	4.7	5.2	5.7	5.8	5.4	4.9	4.4	4.6

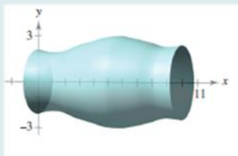


Figura a. Forma de la pieza

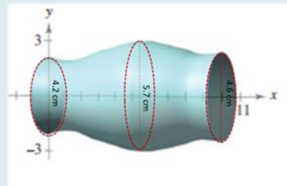


Figura b. Ejemplo de los cortes transversales

a) Usen un polinomio de grado 4 que pase por los puntos dados, tal que simule la curva que al rotar alrededor del Eje x, forme la pieza mostrada.
b) Con base en el inciso anterior, aproximen el volumen de la pieza para saber el material requerido.

Para esta actividad, debía emplearse un polinomio de grado 4 tal que al rotarlo alrededor del Eje X generara el sólido mostrado en el enunciado del problema. El enunciado del problema incluye una relación entre las medidas del diámetro de los cortes transversales del sólido a diferentes distancias sobre el eje de rotación. No obstante, para modelar la función que genera el sólido en revolución, debían emplearse puntos (x, r), donde a una distancia de x sobre el eje de rotación, r es la medida del radio del corte transversal. A manera de ejemplo, se considerará el caso de la terna de estudiantes Victor, Josué y Ana (Bitácora 16) quienes construyeron su modelo dinámico de la siguiente manera: introdujeron una serie de puntos cuyas coordenadas fueron (x, d) según la tabla dada en el problema y generaron un modelo polinomial que se ajustara a esa lista de puntos, tal como se muestra en la Figura 4.11.

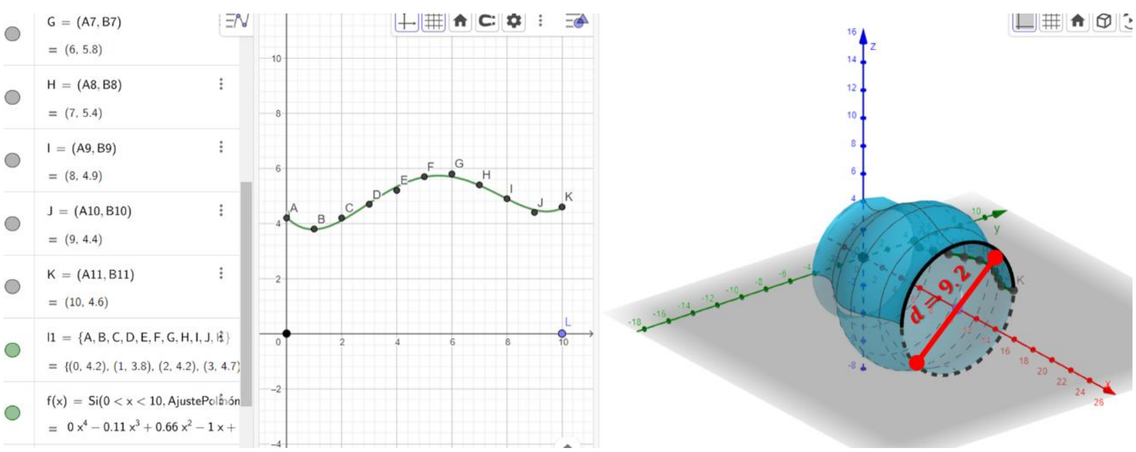


Figura 4.11. Aproximación errónea al modelo de la Actividad 8B

Posteriormente, calcularon el volumen del sólido en revolución con base en el método de discos, introduciendo la siguiente expresión: $\int_0^{10} \pi[f(x)]^2\, dx$. El profesor solicitó a los participantes comprobar que el sólido en revolución obtenido utilizando la vista 3D fuera tal que cumpliera con las condiciones del problema. Así, notaron que los cortes transversales tenían el doble del diámetro, por ejemplo, el diámetro del corte transversal para $x = 10$ debía ser de 4.6 según el enunciado del problema, mientras que el modelo dinámico de los estudiantes tenía un diámetro de 9.2 (ilustrado en la Figura 4.11).

Para corregir sus resultados, los estudiantes notaron que debían dividir todos los valores de las alturas de los puntos entre dos e identificaron que este proceso era similar a dividir la función $f(x)$ entre dos, o bien, definir $g(x) = \frac{f(x)}{2}$ y obtener $\int_0^{10} \pi g^2$. Entre sus registros sobre la actividad, puede apreciarse que los estudiantes no solamente incluyeron la versión final de su aproximación a la actividad, sino que además incluyeron una nota explicando de forma sintetizada el proceso de corrección (Figura 4.12).

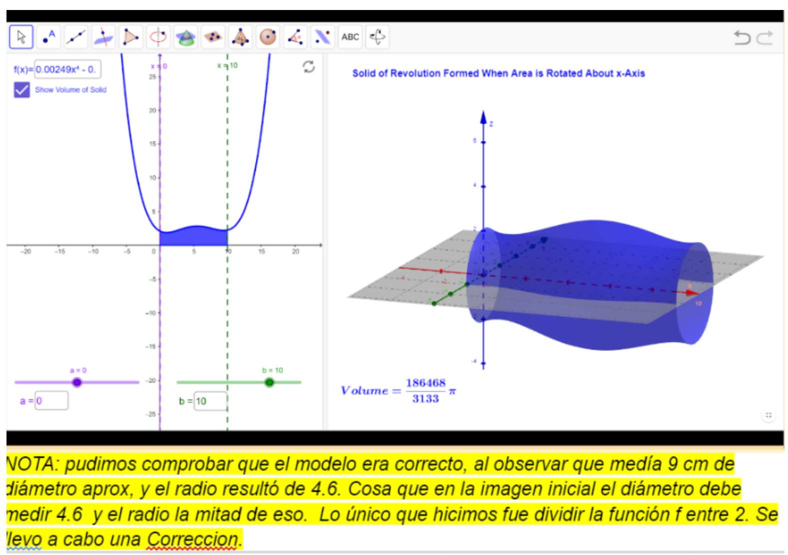


Figura 4.12. Ejemplo de notas sobre correcciones en la Bitácora 16

En este sentido, se señala que las bitácoras asociadas con este perfil se destacan porque los registros incluidos en ellas incluyen evidencias que muestran que los participantes toman en cuenta la retroalimentación que reciben dentro y fuera del salón de clases.

Para concluir con el análisis de este perfil de trabajo en la bitácora digital, se incluye una síntesis sobre las características que muestran los registros de los estudiantes:

Descriptor	Perfil inquisitivo
Conexión de ideas matemáticas	Aprovechan las herramientas de GeoGebra para explorar conexiones entre diferentes conceptos matemáticos o representaciones de un mismo concepto. Activan diversos recursos matemáticos al resolver problemas con herramientas digitales.
Prioridad en las explicaciones	Ofrecen respuestas generalmente detalladas y enfatizan aspectos explicativos acerca de sus motivaciones sobre el tipo de procesos que llevan a cabo. Las descripciones procedimentales aún están presentes, pero ya no son el centro de atención de los estudiantes al momento de registrar su trabajo.
Involucramiento	Realizan diversas exploraciones y discusiones en clases respecto a las matemáticas relacionadas con los problemas, sin embargo, no suelen incluir estas interacciones en su bitácora. Complementan sus actividades con consultas en línea, problemas de clase o problemas adicionales de Khan Academy u otros sitios web.
Agencia	Adquieren un rol más protagónico en su propio aprendizaje, pues se responsabilizan en la construcción de la bitácora como una herramienta que es útil para los propios estudiantes. Recurren a sus propias bitácoras para retomar ideas e incluyen inquietudes en sus bitácoras.
Continuidad	Modifican continuamente la bitácora, le dan una estructura y tratan de mantener cierto grado de estructura a lo largo de ella. Las bitácoras tienen un estilo narrativo y trabajan en las retroalimentaciones ofrecidas por el profesor.

Tabla 4.13. Categorización del trabajo en la bitácora digital bajo un perfil inquisitivo

4.2.4. Perfil analítico

En este perfil de registro de trabajo con la bitácora digital, se destacaron formas características del acercamiento de los estudiantes a las actividades relacionadas que incluyen la argumentación analítica de sus soluciones, la búsqueda de representaciones dinámicas de los problemas dentro de GeoGebra y la identificación de relaciones matemáticas en los modelos dinámicos a través de exploraciones similares a la extensión de problemas. Esta forma de trabajo constituye el tercer nivel de apropiación de la bitácora digital como una herramienta para registrar y reflexionar las experiencias de aprendizaje de los estudiantes. Sus características son las siguientes:

a) La presentación de argumentos analíticos para sustentar sus soluciones empíricas a los problemas
b) La forma de registrar sus soluciones tiene un carácter algebraico o analítico, dejando de lado los aspectos procedimentales vinculados a la construcción de sus modelos
c) La identificación de propiedades y relaciones geométricas en sus modelos dinámicos con la finalidad de comprender y extender los problemas
d) La incorporación de diversos tipos de registros en el trabajo remoto de naturaleza procedimental y conceptual, incluyendo construcciones en GeoGebra como apoyo para la comprensión de relaciones matemáticas

e) El seguimiento y atención a la retroalimentación ofrecida por el profesor.

La Tabla 4.14 muestra a los estudiantes que desarrollaron una forma de llevar explorar y registrar sus actividades en la bitácora bajo un perfil analítico. Al igual que se mencionó sobre el perfil inquisitivo, cada uno de los estudiantes mostró diferentes formas de desarrollo durante el curso y de manera paulatina a lo largo de la implementación de las actividades.

Código de bitácora	Tipo de equipo	Integrantes (Nombres)	Código de bitácora	Tipo de equipo	Integrantes (Nombres)
Bitácora 10	Bina	Samuel y Ricardo	**Bitácora 13**	Bina	Arturo y Johana
Bitácora 12	Individual	Ferrán	**Bitácora 15**	Bina	Jorge y José

Tabla 4.14. Bitácoras y participantes bajo un perfil analítico

Cabe destacar que, si bien este perfil de estudiantes exhibe características relacionadas con la argumentación y extensión de habilidades de resolución de problemas, la forma en que redactan sus aproximaciones a los problemas es sumamente similar a la del perfil inquisitivo, en el sentido en que sus descripciones no reflejan completamente el proceso de resolución que realizaron. Es decir, no suelen poner el foco de atención en los procesos relacionados con la construcción y exploración empírica a través de los modelos dinámicos, sino que registran directamente las respuestas argumentadas en forma analítica-algebraica.

A. Caracterizando el trabajo en las actividades de un perfil analítico. Además de las características mencionadas, es importante considerar que las formas de realizar las actividades de un perfil analítico involucran la comprensión y exploración de los problemas con apoyo de las herramientas de GeoGebra. En este sentido, los participantes planteaban preguntas durante las sesiones hacia el profesor sobre cómo entender los enunciados de los problemas y los fenómenos involucrados. Para ilustrar estas aproximaciones, se ejemplificará el trabajo de los estudiantes Samuel y Ricardo (Bitácora 10) sobre la Actividad 10[2]:

Actividad 10. La velocidad v del flujo sanguíneo a una distancia d (en mm) del eje central de una arteria de radio 0.85mm está dado por la expresión siguiente:

$$v(d) = k(0.85^2 - d^2)$$

Donde k es una constante de proporcionalidad.

a) ¿Cuál es la velocidad promedio del flujo sanguíneo a lo largo del radio de la arteria?

b) Si el radio de la arteria es R, ¿cuál es la velocidad promedio entre $d = 0$ y $d = R$?

[2] *Obtenido de Larson y Edwards (2010; p. 294)*

Para ilustrar el desempeño de los estudiantes de un perfil analítico, es importante describir tanto las aproximaciones desarrolladas en las sesiones presenciales como el trabajo que realizaron de manera remota. En este sentido, se discutirá el proceso de comprensión del problema, la construcción de su modelo dinámico, la obtención de soluciones y el proceso de extensión registrado en su bitácora digital durante su trabajo fuera del salón de clases, destacando las características principales del perfil de trabajo analítico.

Comprensión del enunciado. En un primer momento, Samuel y Ricardo le plantearon al profesor algunas preguntas sobre lo que significaba resolver el problema: ¿qué significa el flujo sanguíneo? ¿por qué está en función de una distancia? ¿qué mide la función dada? Es decir, trataron de dar sentido a la idea del flujo sanguíneo (laminar) como la cantidad de sangre que circula por un cilindro que representa la arteria. En síntesis, junto con ayuda del profesor y con búsquedas en internet, concluyeron que, dentro de una sección transversal dada de una arteria, la sangre no circula uniformemente, sino que lo hace a diferentes velocidades dependiendo de su distancia al eje central de la arteria. La Figura 4.13 muestra una imagen que los estudiantes consultaron para dar sentido al enunciado del problema.

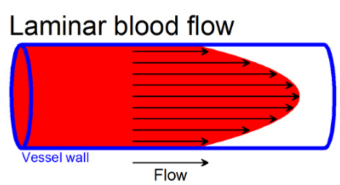


Figura 4.13. Diagrama que ilustra el flujo laminar de la sangre (www.physiology.web.com)

Ahora bien, Samuel y Ricardo también consideraron como un elemento importante de la comprensión del problema interpretar el significado de la constante k en la expresión dada en el problema. Nuevamente, con apoyo del profesor y una breve indagación en internet, se determinó que el valor de k suele depender de elementos como la presión arterial de un adulto en cierto rango de edad, la viscosidad de la sangre y un parámetro médico en el estudio de la sangre denominado *perfil de velocidad de flujo* (Ley de Poiseuille[3]). Comprender a fondo estos conceptos se consideró fuera del alcance o pertinencia del curso, pero fungió como un referente clave que permitió a los estudiantes entender que el valor de k es una constante y que, para fines de resolver el problema, se acordó que sus valores pueden ser entre 0 y 1.

[3] Consultado del sitio web: https://ocw.unican.es/mod/page/view.php?id=509

Construcción y exploración del modelo dinámico. Los estudiantes se apoyaron en la representación gráfica de la relación entre la velocidad del flujo sanguíneo dentro de la arteria y la distancia del eje central de la arteria. Samuel y Ricardo graficaron una función en términos de un deslizador k cuyos valores definieron entre 0 y 1, es decir, definieron la función de la velocidad de flujo como $f(x) = k(0.85^2 - x^2)$ tal como se muestra en la Figura 4.14.

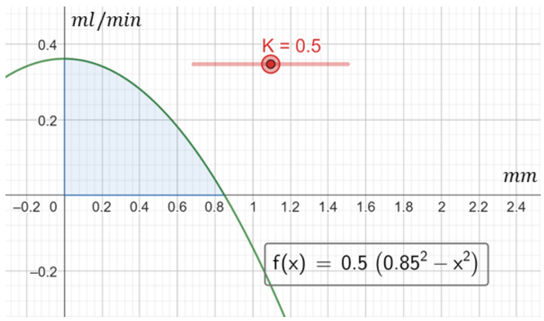


Figura 4.14. https://www.GeoGebra.org/m/dmguryys

Con esta gráfica, los estudiantes pudieron interpretar que el flujo sanguíneo se mueve a máxima velocidad a lo largo del eje de la arteria (cuando $d = 0$) y se hace más lento cerca de las paredes de la arteria ($d = 0.85$). Para encontrar el promedio de la velocidad de flujo a lo largo de toda la arteria, Samuel y Ricardo consideraron el Teorema del Valor Medio para Integrales[4] (TVMI), por lo que calcularon en GeoGebra lo siguiente:

$$\frac{1}{0.85}\int_0^{0.85} f\,(x)dx$$

Durante el desarrollo de las actividades, se estudió el TVMI como una forma de aproximar el valor promedio de una magnitud que varía de manera continua a lo largo de un intervalo. En este sentido, dado que la velocidad del flujo sanguíneo varía dependiendo de la distancia al eje central de la arteria, se puede emplear el enunciado del TVMI para obtener un valor que representa la velocidad promedio del flujo sanguíneo. Samuel y Ricardo pudieron identificar que la función del primer inciso describe la velocidad del flujo sanguíneo a lo largo de una arteria con 0.85 mm de radio, por lo que para una arteria de R milímetros, consideraron una nueva función $h(x) = k(R^2 - x^2)$, en términos de un nuevo deslizador R. El deslizador

[4] Si f es continua en $[a, b]$, entonces existe un número c en $[a, b]$ tal que:

$$f(c) = \bar{f} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

inicialmente admitía los valores que GeoGebra define por defecto para cualquier deslizador, entre [-5,5]. Así, el profesor les planteó la pregunta, ¿estos valores resultan coherentes para el estudio del problema? Nuevamente, Samuel y Ricardo realizaron una búsqueda en internet para descubrir que el radio de una arteria puede ser de hasta 1.5mm como máximo, por lo que, con esta información, restringieron el valor de R al intervalo $[0{,}1.5]$. En este sentido, los estudiantes obtuvieron dos funciones en términos de k, sin embargo, una describe una relación entre el flujo sanguíneo en términos de la distancia del eje de la arteria para el caso particular de una arteria cuyo radio es de 0.85mm, y la otra representa la relación para cualquier valor del radio de la arteria entre 0 y 1.5 mm (Figura 4.15)

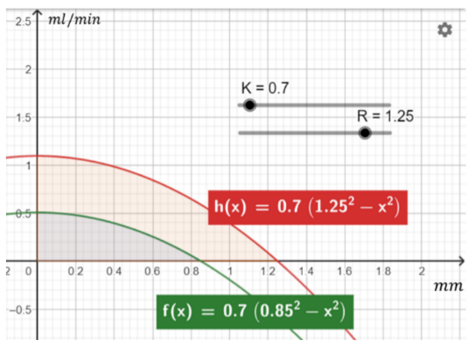
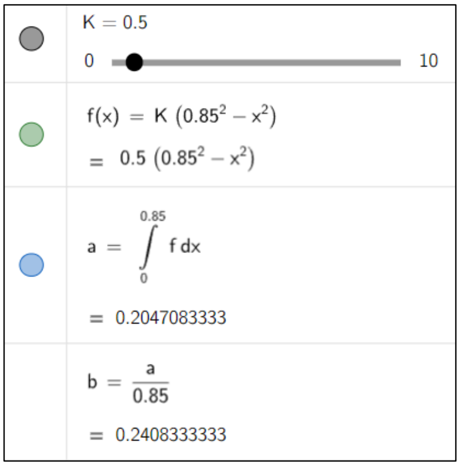
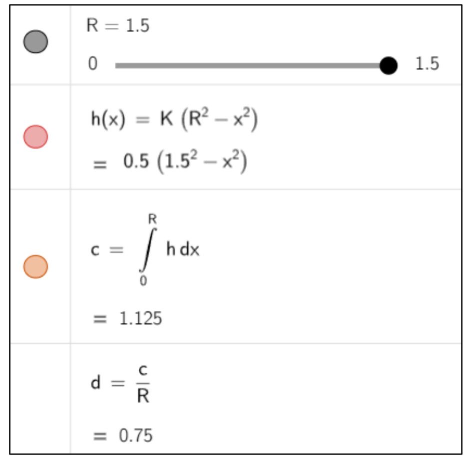


Figura 4.15. Comparación de las funciones en los incisos a y b de la Actividad 10

Una vez definidos estos parámetros, calcularon el promedio de la velocidad de flujo en el intervalo $[0, R]$, a través de la expresión en GeoGebra $\frac{1}{R}\int_0^R h\,dx$. Cabe destacar que los estudiantes realizaron los cálculos con ayuda de la Vista Gráfica de GeoGebra de manera estructural, en términos de los elementos del modelo. En la Figura 4.16 (a y b) se muestran los cálculos realizados para ambos incisos del problema, de modo que al modificar los deslizadores k y R, se obtienen los valores del promedio del flujo sanguíneo en el intervalo correspondiente de manera dinámica.



(a)



(b)

Figura 4.16. Operaciones en el modelo de Samuel y Ricardo sobre la Actividad 10

Solución analítica. Lo anterior permitió a este par de estudiantes notar que la respuesta del promedio depende de los valores de k y de R, de modo que la solución no es única. La noción de una respuesta dinámica constituyó una base para la formulación de una solución dinámica, de modo que Samuel y Ricardo se dieron a la tarea de responder analíticamente los incisos de esta actividad, considerando que el valor promedio debía ser una expresión en términos de k y R. En este sentido, reportaron lo siguiente en su bitácora digital para el inciso (a) de la Actividad 10:

¿Cuál es la velocidad promedio del flujo sanguíneo a lo largo del radio de la arteria?
Usaremos la fórmula de valor medio de la integral

$$\frac{1}{0.85-0}\int_0^{0.85} k(0.85^2-x^2)dx$$

Primero resolvemos la integral

$$\int_0^{0.85} k(0.85^2-x^2)dx = \left[0.85^2kx-\frac{x^3}{3}\right]_0^{0.85} = \left[0.85^2kx-\frac{x^3}{3}\right]_0^{0.85} = k\left(0.85^3-\frac{0.85^3}{3}\right)$$

Retomamos la fórmula inicial y acomodamos la [expresión] para que quede en términos de k

$$\bar{y} = \frac{1}{0.85}k\left(0.85^3-\frac{0.85^3}{3}\right) = \frac{k\left(0.85^3-\frac{0.85^3}{3}\right)}{0.85} = k\cdot 48166\ldots$$

En este registro se observa que la solución analítica al problema, utilizando un proceso de integración de polinomios, considerando a k como una constante. Se apoyan del TVMI para obtener la representación del promedio de la velocidad de flujo a lo largo de la arteria. En su modelo dinámico, se puede observar que los estudiantes contrastaron ambas soluciones, pues definieron el valor $k \cdot 0.4816$ para comprobar que coincidiera con el promedio de la función (ver Figura 4.17).

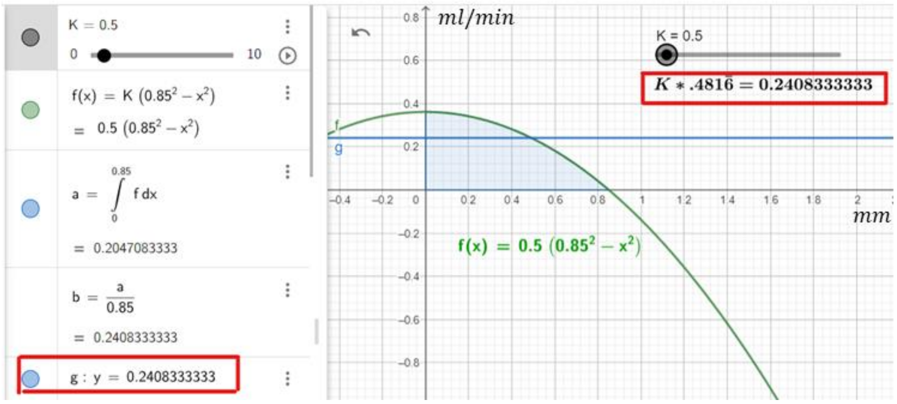


Figura 4.17. Comparación del resultado analítico y empírico del primer inciso de la Actividad 10

También realizaron el mismo procedimiento para el siguiente inciso, resumido en la Tabla 4.15.

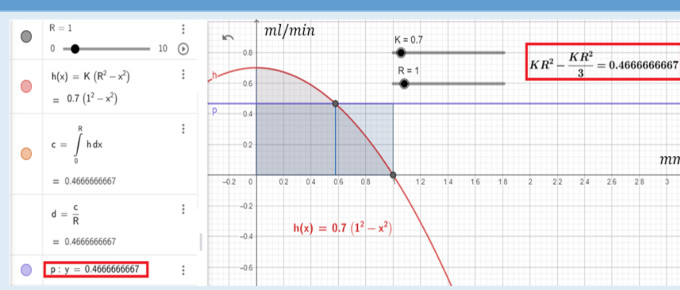
Registro de Samuel y Ricardo para el inciso a de la Actividad 10	
Si el radio de la arteria es R, ¿cuál es la velocidad promedio entre d=0 y d=R? *Haremos lo mismo, pero sustituyendo R, modificando la función original* $$\frac{1}{R-0}\int_0^R k(R^2-d^2)dd$$ *Primero resolvemos la integral* $$\int_0^R k(R^2-d^2)dd = k\left[R^2 d - \frac{d^3}{3}\right]_0^R = k\left(R^3 - \frac{R^3}{3}\right)$$ *Retomamos la función y simplificamos* $$\bar{y} = \frac{1}{R}k\left(R^3 - \frac{R^3}{3}\right) = kR^2 - \frac{kR^3}{3}$$	
Interpretación	**Ilustración**
Obtienen el promedio de la función de velocidad sobre el intervalo $[0, R]$ a partir de considerar R y k como constantes. En su modelo dinámico, definen el valor $kR^2 - \frac{kR^3}{3}$, donde k y R son los valores de los deslizadores correspondientes k y R. Comrpueban que el resultado obtenido analíticamente y el que obtuvieron con las herramientas de GeoGebra.	

Tabla 4.15. Contraste del resultado analítico y empírico para el segundo inciso

Conviene destacar que los estudiantes realizaron una comprobación basada en la idea geométrica del promedio de una función sobre un intervalo, para ello, definieron la recta $p\colon y = d$, donde $d = \frac{1}{R}\int_0^R k(R^2 - x^2)dx$ y encontraron el área bajo dicha recta en el intervalo $[0, R]$, de este modo, se observa que $\int_0^R p\, dx = \int_0^R k(R^2 - x^2)dx$, ilustrado en la Figura 4.18.

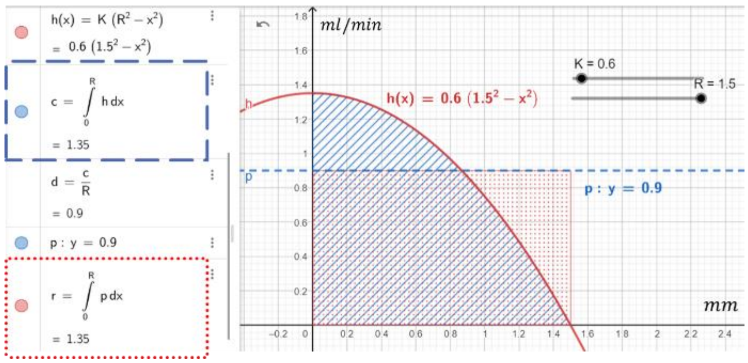


Figura 4.18. Comprobación gráfica del promedio de la función h sobre el intervalo [0,R]

En este sentido, Samuel y Ricardo formularon dos tipos de soluciones: soluciones empíricas con las herramientas de GeoGebra; y soluciones analíticas, empleando la integración de polinomios para encontrar el promedio de una función sobre un intervalo. Ambos tipos de soluciones fueron contrastadas mediante la Vista Algebraica de GeoGebra, para dar evidencia que su solución analítica coincide con la solución empírica.

Exploración adicional. En el modelo dinámico de los estudiantes, se puede encontrar una serie de exploraciones gráficas que no reportan en la bitácora digital. En estas exploraciones, se observa que Samuel y Ricardo identificaron una relación de igualdad entre las áreas que están por encima y por debajo de la recta $y = \frac{1}{R}\int_0^R h\, dx$ (señaladas en la Figura 4.19). Estas áreas se forman entre la función $h(x) = K(R^2 - x^2)$ y la recta $g\colon y = \frac{1}{R}\int_0^R hdx$.

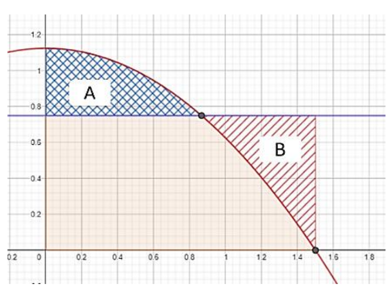


Figura 4.19. Conjetura: las áreas A y B son iguales

Los procesos de indagación de los estudiantes se pueden inferir a través las construcciones en su modelo dinámico. La Tabla 4.16 muestra una interpretación del proceso de los estudiantes para explorar esta conjetura, ilustrando los pasos que siguieron en la Vista Algebraica de GeoGebra. Con el trabajo de Samuel y Ricardo, se observan diferentes representaciones de ideas matemáticas que se construyen con apoyo en el uso dinámico de exploraciones en GeoGebra.

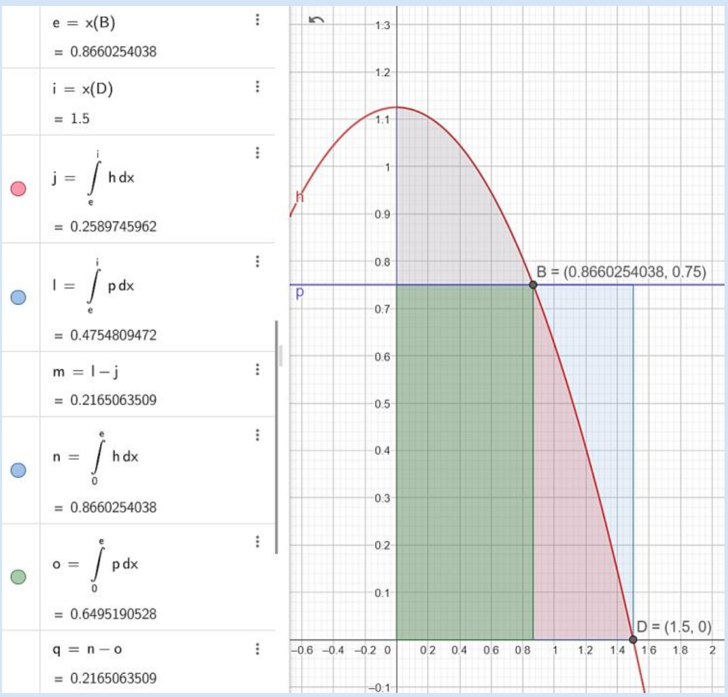
Acercamiento en GeoGebra	Interpretación
	1) Encuentran el punto de intersección B de la función h con la recta g 2) Encuentran la intersección D de la función h con el Eje X. Los valores e, i representan las abscisas de los puntos B y D respectivamente. 3) Calculan el área (B_1) bajo la curva h en el intervalo $[e, i]$ 4) Calculan el área (B_2) bajo la curva g en el mismo intervalo 5) Restan ambas áreas para obtener el área rayada en la Figura 4.19, $B = B_2 - B_1$ 6) Similarmente, realizan lo mismo para el intervalo $[0, e]$: Calculan el área (A_1) bajo la curva h y el área (A_2) bajo la recta g, así obtienen el valor del área A: $A = A_1 - A_2$ 7) Ambas áreas (valores m y q en la Vista Algebraica) muestran el mismo valor a medida que se mueven los deslizadores de los parámetros k, R.

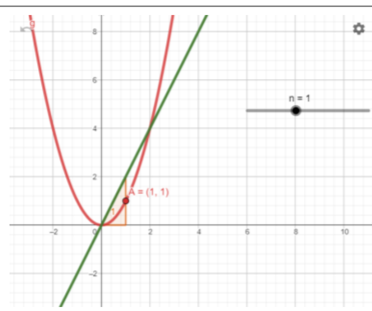
Tabla 4.16. Exploración en GeoGebra de la conjetura de Samuel y Ricardo

B. Caracterizando el perfil analítico. Los estudiantes de un perfil analítico emplean la representación de los problemas en GeoGebra como una oportunidad para profundizar en su entendimiento relacionado con las nociones del cálculo. Tal como se ilustró con los registros de Ricardo y Samuel, llevan a cabo procesos de comprensión de la disciplina a través de la búsqueda de argumentos analíticos y la exploración de conjeturas que surgen de identificar relaciones matemáticas entre los objetos de los modelos dinámicos.

Una característica que se presentó en las bitácoras con perfil analítico fue la incorporación de construcciones propias para ilustrar la forma en que entendían algunas ideas clave del Cálculo. A continuación, se muestra un registro en la bitácora de Samuel y Ricardo acerca del Teorema Fundamental del Cálculo. Lo destacado en este registro es que no corresponde a una actividad en concreta, sino que muestra cómo los estudiantes de este perfil construyen algunos modelos dinámicos como un apoyo para conectar relaciones matemáticas en términos de herramientas digitales:

> Teorema Fundamental del Cálculo TFC
>
> El primer teorema nos dice que la derivada de una función equivalente a la integral desde 0 a otro valor(x) es igual a la función que se está derivando. La función equivalente G(x) da como resultado la integral desde 0 hasta x, también se puede interpretar como la antiderivada de la función que se deriva.
>
> El punto del teorema es relacionar la derivada y la integral siendo estas opuestas.
>
> $$G(x) = \int_0^x f(t)dt\,, \qquad G'(x) = f(x)$$
>
> https://www.geogebra.org/m/kz3uzqre
>
> El segundo teorema nos dice que teniendo esta función equivalente F(x), la función antiderivada de la función a integrar, podemos calcular la integral de un punto (a) a (b) si obtenemos los valores de F(a) y F(b) y a la función del límite superior (b) le restamos la del límite inferior (a).
>
> $$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$$
>
> https://www.geogebra.org/m/yu7tb7yk

En este registro, los estudiantes describen las dos partes del TFC e incluyen los enlaces a los modelos. Gracias al protocolo de construcción de GeoGebra, es posible analizar el orden de construcción de los elementos del modelo. La Tabla 4.17 resume el contenido de estos modelos.

Modelo dinámico	**Descripción**
 https://www.geogebra.org/m/kz3uzqre	Definen una función $f(x) = x$ y un deslizador n; a partir de ello, calculan el área bajo la curva de f en el intervalo $[0, n]$. Obtienen la antiderivada $F(x) = x^2$ y definen el punto $A = \big(n, F(n)\big)$. El punto A siempre está sobre gráfica de la antiderivada al mover el deslizador. Es decir, F se define como una función que asocia el límite superior de integración de la integral definida $\int_0^n f(x)dx$ con el área bajo la curva.

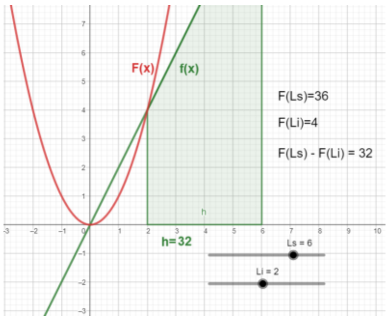
 https://www.geogebra.org/m/yu7tb7yk	Definen la función $f(x) = x$ y obtienen su antiderivada $F(x) = x^2$. Crean dos deslizadores L_s y L_i, los cuales son los límites superior e inferior del área bajo la curva de la función f. Por otro lado, calculan $F(L_s) - F(L_i)$. Al modificar los valores de los deslizadores, el área bajo la curva de f en el intervalo $[L_i, L_s]$ siempre es igual a la diferencia $F(L_s) - F(L_i)$.

Tabla 4.17. Modelos exploratorios sobre el TFC en la Bitácora 10

El trabajo de Samuel y Ricardo se ha utilizado para ejemplificar algunas de las características más relevantes que destacan la forma de explorar y registrar los procesos de razonamiento de los participantes cuando emplean herramientas digitales para resolver las actividades del curso. Los estudiantes de un perfil analítico exploran problemas, formulan soluciones analíticas y empíricas, y proponen formas alternativas de profundizar su conocimiento sobre las relaciones matemáticas clave del estudio del Cálculo. La Tabla 4.18 resume las características de los registros de estudiantes bajo un perfil analítico.

Descriptor	Perfil analítico
Conexión de ideas matemáticas	Manifiestan la conexión de ideas a través de consultas externas y de incorporar notas sobre lo hecho en clases. Estos estudiantes se destacan por mostrar ideas matemáticas refinadas y realizar conexiones entre formas de representación algebraicas y gráficas. Exhiben hábitos relacionados con la extensión y problematización de las tareas.
Prioridad en las explicaciones	Ofrecen respuestas generalmente detalladas y enfatizan aspectos explicativos acerca de sus motivaciones sobre el tipo de procesos que llevan a cabo.
Involucramiento	Participan activamente en clases, incluyen sus exploraciones en las bitácoras y se involucran en la refinación de sus ideas matemáticas a través de identificar propiedades y relaciones al momento de resolver problemas.
Agencia	Muestran formas personalizadas de complementarse al elegir el tipo de contenido que desean incluir, la relevancia que encuentran en el contenido y la forma en que profundizan en cierto tipo de tareas o emplean la bitácora para extender sus ideas sobre diversos temas. Es decir, los estudiantes exhiben formas de interpretar la importancia de su propia comprensión.
Continuidad	Trabajan en su bitácora de manera continua, con una intermitencia no mayor a 3 días. Además, se presenta atención constante a la retroalimentación o bien, su intencionalidad fue la misma durante el desarrollo del curso.

Tabla 4.18. Caracterización de bitácoras bajo un perfil analítico

4.3. Evaluación de los estudiantes sobre la bitácora

Para cerrar con el análisis, se incluye la evaluación que los estudiantes realizaron respecto al uso de la bitácora digital como principal herramienta para el aprendizaje del Cálculo

Integral. En términos generales, se llevó a cabo una reflexión grupal en la que se pidió a los estudiantes que plasmaran sus ideas al final de su bitácora respondiendo las siguientes preguntas: 1) ¿Habían trabajado con formatos similares antes? 2) ¿Cuáles fueron las principales ventajas y desventajas que encontraron al trabajar con una bitácora digital?

De manera global, la Tabla 4.19 resume las ventajas y desventajas que fueron percibidas en mayor cantidad por parte de los estudiantes durante todo el curso.

Ventajas	Desventajas
La bitácora digital es una buena estrategia de aprendizaje. Los estudiantes perciben la bitácora digital como una forma de organizar, dar orden y recordar sus propias ideas después de la clase, así como de identificar y resolver dificultades conceptuales.	**Resulta complejo expresarse en un formato digital.** Más de un tercio de los estudiantes consideraron como un gran desafío poder plantear sus ideas de forma estructurada (textualmente, en audios o videos). Consideraron que muchas veces sus ideas no se veían reflejadas como ellos deseaban en sus reportes escritos acerca de cómo resolvían las actividades.
La bitácora digital permite generar una idea global del curso. Los participantes manifestaron que la bitácora permitió tener una noción estructurada de los objetivos del curso y de relacionar los diferentes temas estudiados y actividades trabajadas.	**Es necesario un mejor formato para la bitácora digital.** Aproximadamente un tercio de los participantes mencionaron que se sentían incómodos trabajando con *Google Docs* como el principal formato de la bitácora digital en términos del uso de notación matemática, las dificultades de sincronización cuando varios participantes deseaban trabajar en una misma bitácora y la pérdida de calidad de imágenes cuando se incluían en su documento de *Google Docs*.
Promueve la investigación de conceptos. Se percibió como un beneficio que los estudiantes pudieran incluir lo que consultaban en Khan Academy y otros sitios web sobre ejercicios adicionales, definiciones y videos.	**No se puede registrar todo lo que ocurre en la clase.** Algunos estudiantes mencionaron que no sabían cómo discriminar el tipo de información que era valiosa para incluir en la bitácora digital. Algunos estudiantes mencionan que les era difícil narrar la forma en que habían trabajado durante la sesión presencial y organizar el orden de cómo se habían presentado las diferentes soluciones de las actividades.
El uso de GeoGebra facilita el aprendizaje. Los estudiantes asociaron el trabajo en la bitácora digital con el uso de construcciones dinámicas para explorar y resolver problemas. Consideraron que el uso de GeoGebra les ayudó a entender diversos temas.	**Implica una reorganización de las logísticas de trabajo.** Se reportaron algunos aspectos que los participantes consideraron como problemáticos en este formato de trabajo, incluyendo: falta de tiempo para realizar los registros en la bitácora, una mayor carga de trabajo comparada con formatos tradicionales; dificultades para coordinar el trabajo en equipo; y, falta de disciplina para poder trabajar continuamente en la bitácora.

Tabla 4.19. Principales ventajas y desventajas del uso de una bitácora digital percibidas por los estudiantes a nivel global

En general, lo más próximo a una bitácora digital reportado por los estudiantes fueron portafolios de evidencias o diarios de laboratorios en otras asignaturas, ninguna en matemáticas. En los Apéndices 4 y 5 se encuentran tablas con la lista de códigos que resumen las diferentes ventajas y desventajas que los estudiantes percibieron, así como la lista completa de estas características listada por cada bitácora que fue incluida en el análisis.

Perfil	Ventajas percibidas	Desventajas percibidas
Procedimental	• Es una buena estrategia de aprendizaje • Es una forma innovadora de trabajo • Es un repositorio que servirá a futuro • Es una buena manera de dar orden a las ideas • Favorece la búsqueda externa de información	• Es difícil expresar las ideas en forma no oral • Implica una carga de trabajo mayor a un escenario tradicional • Es difícil registrar todo lo que ocurrió en clases • No contaban con el tiempo suficiente para trabajar • Es difícil dar una estructura propia
Inquisitivo	• Es una buena estrategia de aprendizaje • Favorece estrategias metacognitivas • Favorece la búsqueda externa de información • Promueve la experimentación y exploración a través de GeoGebra • Es una forma práctica y flexible de trabajo • Es una buena manera de dar orden a las ideas	• *Google Docs* no es un formato idóneo • Es difícil expresar las ideas en forma no verbal • Es difícil registrar todo lo que ocurrió en clases • Es difícil construir una bitácora en equipo
Analítico	• Es una buena estrategia de aprendizaje • Favorece estrategias metacognitivas • Promueve la experimentación y exploración a través de GeoGebra • Es una gran manera de recibir y atender a la retroalimentación	• *Google Docs* no es un formato idóneo

Tabla 4.20. Síntesis de ventajas y desventajas percibidas del trabajo en la bitácora

. El proceso de obtención de los códigos se basó en una agrupación sobre lo que los estudiantes reportaron en sus reflexiones retrospectivas sobre el curso y en las interacciones espontáneas con el profesor a lo largo del curso. La **Tabla 4.20** muestra un agrupamiento de las principales ventajas y desventajas percibidas por los estudiantes agrupados por perfiles de desempeño.

A partir de las reflexiones de los estudiantes, se observa la presencia dificultades para expresar sus ideas de manera estructurada, diferente al discurso informal al que están habituados en el salón de clases. En la medida que los estudiantes se apropian de la bitácora, abandonan una visión superficial sobre el uso de la bitácora y comienzan a identificar su importancia como una herramienta para el desarrollo de estrategias de aprendizaje y su rol en el aprendizaje. Por ejemplo, las ventajas del uso de la bitácora digital que reportan los estudiantes de un perfil procedimental se enfocan en lo “innovador” o lo “útil” que puede ser tener un repositorio ordenado de ideas; en contraste, los estudiantes de un perfil analítico identifican ventajas del uso de la bitácora digital en términos de lo que ofrece como una herramienta para realizar reflexiones introspectivas, de autoevaluación y que invita a trasladarse hacia una postura más activa en sus procesos de aprendizaje.

Capítulo 5 CONCLUSIONES

En esta investigación, se propuso el de la bitácora digital como una herramienta que permite a los estudiantes organizar y estructurar los procesos involucrados en el trabajo remoto y presencial de su aprendizaje. A la vez, se explotan las oportunidades que ofrecen las tecnologías digitales en el aprendizaje matemático de los estudiantes. Un modelo conceptual de la bitácora digital sustenta el uso de recursos y elementos de soporte que los estudiantes tienen a su disposición bajo una perspectiva inquisitiva de la disciplina, a través de la resolución de problemas. En esta dirección, los estudiantes se involucran en el registro y reflexión sobre el uso de diversas herramientas tecnológicas y semióticas para dar sentido, explorar y extender sus entendimientos acerca de los contenidos disciplinares relacionados con las actividades de sus cursos de matemáticas. Se presentaron los resultados que generó el uso de una bitácora digital en el desarrollo de un curso de Cálculo Diferencial e Integral a través de la problematización de las actividades mediante el uso de GeoGebra, la generación de diversos recursos de soporte para ayudar a los estudiantes y la coordinación del trabajo presencial y remoto de los estudiantes.

En la medida en que los estudiantes interactúan con los problemas bajo la idea de problematizar y registrar sus acercamientos, intervienen diversos elementos entre los que se incluyen las experiencias previas de los estudiantes con las matemáticas, los recursos con los que cuentan y la percepción que tienen acerca de la disciplina (Schoenfeld, 2023); de este modo, la forma en que los estudiantes se apropiaron de la bitácora digital como una herramienta donde registrar y monitorear su aprendizaje no resultó homogénea, sino que se manifiestan diversos modos de reflexionar sobre sus exploraciones y soluciones a los problemas. El análisis de la investigación estuvo centrado alrededor de la caracterización de tres diferentes perfiles sobre la manera en que se llevó a cabo el registro en la bitácora digital por parte de los estudiantes. En cada uno de los perfiles, se reflejan diferentes modos de abordar tareas matemáticas, así como de aprovechar los recursos y elementos de soporte para robustecer su comprensión sobre la asignatura en términos de cómo resuelven y discuten sobre problemas. La intención de dicho análisis fue responder a la pregunta de investigación:

¿En qué medida el registro sistemático de las experiencias de aprendizaje que los estudiantes de un curso de cálculo integral reportan en una bitácora digital contribuye al desarrollo de competencias de resolución de problemas?

5.1. Caracterizando la bitácora digital y la pregunta de investigación

Se realizó una caracterización de las bitácoras en términos de cinco descriptores que dan cuenta de lo que significa emplear la bitácora como herramienta reflexiva de su aprendizaje matemático. La Tabla 5.1 incluye una síntesis de las caracterizaciones de la bitácora digital en términos de los cinco descriptores.

	Perfil procedimental	Perfil inquisitivo	Perfil analítico
Conexión de ideas matemáticas	Asocian las ideas matemáticas con procesos algorítmicos y el uso de comandos de GeoGebra	Exploran ideas matemáticas de diferentes maneras a través de las herramientas de GeoGebra	Representan relaciones matemáticas con ayuda de GeoGebra, que usan para argumentar y extender sus soluciones.
Prioridad de las explicaciones	Reportan resultados o, en el mejor de los casos, los pasos para obtener esos resultados.	Sustentan sus resultados con explicaciones empíricas	Sustentan sus resultados con explicaciones empíricas y argumentos analíticos.
Involucramiento	Se enfocan en comprender lo procedimental de los procesos matemáticos.	Articulan lo procedimental y lo conceptual mediante diversos tipos de entradas en su bitácora	Complementan lo procedimental con aspectos conceptuales de las matemáticas, construyendo modelos dinámicos.
Agencia	El profesor como responsable del aprendizaje	Mayor énfasis al rol del estudiante en el aprendizaje	El estudiante como responsable del aprendizaje
Continuidad	Trabajo irregular, sin una estructura aparente. Poca atención a la retroalimentación.	Estructura narrativa coherente, con cierta atención a la retroalimentación.	Estructura narrativa a lo largo de la bitácora; trabajan en la coherencia de la bitácora y atienden a la retroalimentación.

Tabla 5.1. Caracterización de los perfiles de apropiación de la bitácora digital

La categorización permite dar cuenta de las diferencias generales entre los perfiles que emergen durante el trabajo con la bitácora digital, no obstante, responder la pregunta de investigación implica analizar las formas en que los estudiantes exploran, modelan y resuelven los problemas en los diferentes perfiles identificados. Adicionalmente, se incluyó una indagación sobre las percepciones de los estudiantes acerca de cómo que experimentaron el trabajo con la bitácora digital. Esto dio cuenta de las ventajas y obstáculos que los estudiantes identifican en términos de sus propios intereses de aprendizaje.

Perfil procedimental. Este tipo de bitácoras exhibe cómo los estudiantes comienzan a comprender la resolución de problemas mediante el uso de tecnologías digitales. Durante las primeras semanas, todas las bitácoras se encontraban dentro de este perfil lo que permite dar cuenta de las concepciones iniciales sobre lo que significa registrar las experiencias de aprendizaje para los alumnos: las entradas predominantes son de tipo procedimental (ejercicios de clase, Khan Academy o tomados de sitios web) con algunas entradas textuales sobre definiciones de los conceptos matemáticos identificados. En el análisis se presentó el acercamiento registrado en la Bitácora 1 sobre la Actividad 1:

i. Usaron un *ajuste logarítmico* para modelizar la relación entre los datos de altura y presión que el problema describe
ii. Usaron un punto de movimiento controlado para determinar el valor de $h(0.75)$, observando la ordenada de dicho punto cuando su abscisa es igual a 0.75.
iii. Usaron la intersección de la recta $y = 13$ con la gráfica de la función $h(p)$, que es analítcamente equivalente a resolver la ecuación $h(p) = 13$, la solución fue la abscisa de dicha intersección
iv. Trazaron *rectas tangentes* para encontrar el valor de $\frac{dh}{dp}$ cuando $h = 5$ y $h = 20$.

En este sentido, traducen sus procedimientos en lápiz y papel a través de las herramientas que ofrece GeoGebra, de modo que sustituyen estos procesos y disminuyen la demanda cognitiva o algorítmica que implica trabajar en ellos en lápiz y papel. En estos perfiles, el uso de las tecnologías digitales simplifica el proceso de resolver problemas y permite a los estudiantes superar cualquier brecha que pudiera implicar el trabajo analítico de dar respuesta a las preguntas de las actividades. Por ejemplo, las estudiantes fueron capaces de responder al tercer inciso, que analíticamente implica resolver la ecuación logarítmica $a + b\ln x = 13$ mediante un acercamiento gráfico (intersección de dos curvas).

Los estudiantes de un perfil procedimental exhiben un acercamiento lineal a la resolución de problemas, ilustrado en la Figura 5.1: parten de las preguntas planteadas en un problema o tarea y obtienen respuestas con apoyo en las herramientas de GeoGebra.

Figura 5.1. Acercamiento lineal a la resolución de problemas

El registro de sus experiencias de aprendizaje mediante la bitácora digital permite a los estudiantes trazar caminos de solución claros, reduciendo los obstáculos asociados a los aspectos analíticos.

Perfil inquisitivo. En este perfil de bitácoras, se reúne el trabajo de estudiantes que indagan sobre sus procesos de resolver problemas una vez que obtienen una solución, en términos de encontrar diferentes maneras de comprobar o justificar sus resultados, o bien, en encontrar alternativas similares para dar solución a las preguntas de las actividades (Figura 5.2)

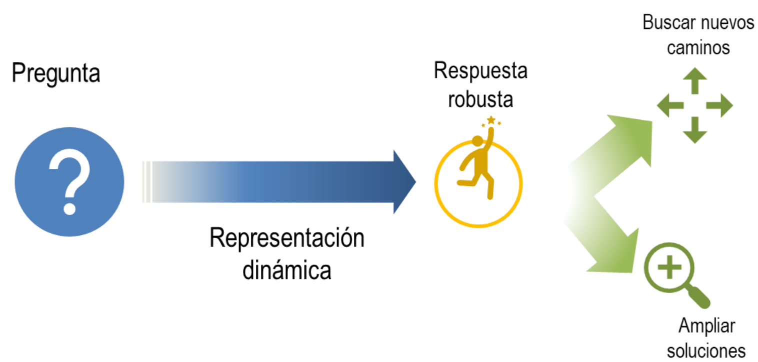


Figura 5.2. Perfil inquisitivo en la solución de problemas

En la sección del análisis se ejemplificó este perfil de bitácoras a través de lo registrado en la Bitácora 2 por una terna de estudiantes (Dante, Ian y Ariadna) en relación con la Actividad 6, que consistía en obtener información acerca de una función f, dada la gráfica de su derivada f' y la condición de que $f(0) = -4$. Para explorar este problema, los estudiantes emplearon un *ajuste polinomial* a partir de identificar algunos puntos clave en la gráfica de f' con la intención de plasmar dicha curva dentro de GeoGebra. Una vez obtenida la curva, los estudiantes pudieron generar la antiderivada de f' y, tomando en cuenta la condición inicial, obtuvieron la gráfica de f. En este sentido, el resto de las preguntas pueden ser respondidas rápidamente con la gráfica de f, por ejemplo, una de las preguntas de la actividad fue investigar si $f(5) -$

$f(4) > 0$; al contar con la gráfica de f, es posible calcular dicha operación con las herramientas de cálculo simbólico de GeoGebra. No obstante, los estudiantes del perfil inquisitivo se engancharon en exploraciones que pudieran sustentar o extender la solución a dicha pregunta, por ejemplo, en la Bitácora 2 se emplea el cálculo de áreas bajo la curva de f' para poder dar una respuesta que no involucra calcular directamente $f(5)$ y $f(4)$, sino que a través del TFC, argumentan que obtener la integral definida de f' en el intervalo $[4{,}5]$ es equivalente a realizar la resta directamente sobre la función f. El uso de las integrales se activó como una forma alternativa de complementar la respuesta ofrecida por GeoGebra a través de vincular el contenido matemático que se estudiaba en el curso, es decir, el TFC.

La forma en que estos estudiantes complementan su bitácora es mediante todo tipo de entradas, incluyendo problemas adicionales obtenidos de Khan Academy y otras plataformas educativas en la red. Los participantes emplean la bitácora como una herramienta que les permita retomar ideas e identificar ciertos errores y obstáculos que se enfrentaron durante el desarrollo de las actividades, al incluir un registro de estos. Cabe mencionar que, en este perfil de bitácoras, se identificaron ventajas sobre el uso de la bitácora relacionadas con la estructuración de ideas y con la posibilidad de activar recursos matemáticos y digitales al finalizar el curso. Esto sugiere que se encuentran en proceso de internalizar la bitácora digital como una herramienta asociada a la reflexión y apropiación de estrategias que permiten dar sentido a las relaciones matemáticas que emergen al momento de enfrentarse a problemas matemáticos.

Perfil analítico. Los estudiantes de este perfil exhiben una apropiación considerable en cuanto al uso de la bitácora como una herramienta de aprendizaje, a través de la cual identifican recursos y conexiones entre ideas matemáticas mediante la exploración de problemas, del uso de múltiples representaciones y de la extensión de problemas. Los recursos matemáticos y tecnológicos se interrelacionan mediante la forma en que estos estudiantes presentan sus razonamientos, enfatizando en procesos como la justificación y argumentación de ideas. En el análisis se ejemplifica el trabajo de los estudiantes Samuel y Ricardo en relación con la Actividad 10. Esta pareja de estudiantes empleó GeoGebra para analizar el efecto de los parámetros R y d de la función de flujo sanguíneo (función $v(t)$), esto con la intención de comprender el enunciado del problema. Los estudiantes también se involucraron en un proceso de búsqueda y construcción de significados sobre el fenómeno del flujo laminar como parte del proceso de comprensión. Una vez que resolvieron analíticamente la Actividad 10, estos participantes graficaron una recta a la altura del promedio obtenido y notaron que el exceso del área debajo de la función v respecto al área debajo de la recta horizontal parecía ser igual al exceso del área debajo de la recta horizontal respecto al área debajo de la función v (ilustrado en la Figura 4.19 de la Sección 4).

	Bitácora 10 *Determinar la velocidad promedio de flujo sanguíneo de una arteria de radio R a una distancia d*
Elementos de la solución	i. Se engancharon en un proceso de búsqueda de información para dar sentido al problema ii. Usaron deslizadores para representar una familia de funciones de la velocidad del flujo cuando varían los parámetros de la función de velocidad. iii. Resolvieron el problema analítica y empíricamente, contrastando ambos resultados con su modelo dinámico iv. Emplearon su modelo dinámico para identificar una relación entre las áreas bajo la curva de la velocidad del flujo y la intersección de una recta, relacionada con el TVM para integrales

Tabla 5.2. Síntesis del trabajo del análisis de lo registrado en la Bitácora 10

En este sentido, los estudiantes se engancharon en explorar una relación matemática asociada al TVM para integrales, y muestran su exploración en términos de los cálculos realizados en la Vista Algebraica de GeoGebra. El trabajo de Samuel y Ricardo ejemplifica cómo en el perfil de bitácoras inquisitivas se emplean las herramientas de GeoGebra para extender sus exploraciones a los problemas (Figura 5.3).

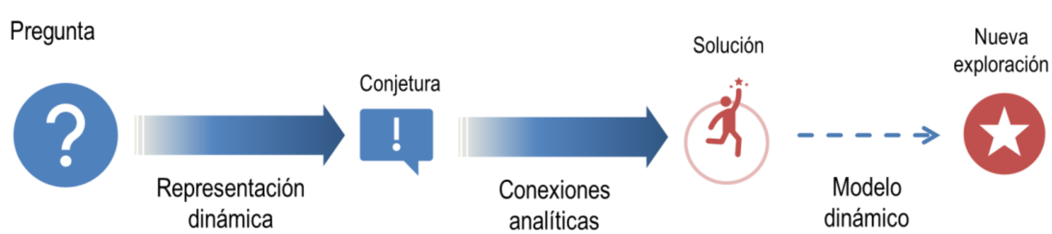


Figura 5.3. Aproximación de las analíticas a los problemas

Este conjunto de bitácoras se destaca por incluir evidencias sobre el uso de modelos dinámicos generados por los estudiantes en el proceso de dar sentido a los conceptos matemáticos del cálculo. Eso sugiere que los estudiantes se apoyan en la naturaleza dinámica de GeoGebra para identificar, comprender y ejemplificar las relaciones de variación en el cálculo. En esta dirección, se argumenta que este grupo de estudiantes manifiestan un rol activo en su aprendizaje, toman agencia de lo que significa reflexionar sobre las ideas matemáticas pues toman actitudes proactivas en la búsqueda de nuevas relaciones entre los objetos que observan en los modelos dinámicos. Es decir, se cuestionan sobre lo que significa resolver un problema y plantean rutas adicionales de exploración con la finalidad de pulir sus entendimientos sobre los conceptos matemáticos o bien, las estrategias que emplean para representar y resolver los problemas.

Conviene destacar que los estudiantes dentro de este perfil no exhiben formas estándar de acercarse al estudio de la matemática; sino que se trata de estudiantes con antecedentes académicos sólidos. En este sentido, lo exhibido por los estudiantes Samuel y Ricardo constituye una muestra del tipo de exploraciones y análisis que pueden llegar a explotarse con el uso coordinado de las tecnologías digitales en el proceso de elaboración de la bitácora digital. Si bien, no necesariamente constituye un ejemplar sobre lo que la mayoría de los estudiantes puede alcanzar, permite dar cuenta de cómo la incorporación de herramientas digitales y la problematización del contenido disciplinar favorecen el involucramiento de estos estudiantes en la exploración y profundización de las relaciones matemáticas identificadas en la resolución de problemas.

5.2. Discusión

Conforme los estudiantes se apropian de la bitácora digital como una forma de plasmar el proceso de dar sentido al estudio del Cálculo, también emergen competencias de resolución de problemas como la extensión de problemas, la búsqueda de diversas soluciones, la argumentación de ideas y el uso de diversas formas de representación de conceptos matemáticos para resolver problemas. La categorización de los perfiles de la bitácora digital da cuenta de las formas en que los estudiantes desarrollan competencias asociadas a la resolución de problemas matemáticos bajo una visión inquisitiva de la disciplina. Algunas estrategias basadas en las herramientas de GeoGebra que los estudiantes emplearon a lo largo de la implementación de las actividades incluyen el ajuste de curvas para representar funciones, el uso de deslizadores para explorar casos particulares, y la exploración de conjeturas a través de representaciones gráficas. Por otro lado, también se detectaron competencias mediadas a través de GeoGebra y el registro de experiencias de aprendizaje, tales como la extensión de problemas, resolver problemas de diferentes maneras, la argumentación y la comunicación de ideas. Estas competencias no se manifiestan de manera homogénea entre todos los estudiantes, sino que se observaron diferentes modos en que se activaron recursos y estrategias en el proceso de registrar sus experiencias de aprendizaje. ¿Cómo se relaciona el uso de la bitácora digital como herramienta de registro y reflexión del aprendizaje en el desarrollo de competencias de resolución de problemas a través de los diferentes perfiles identificados en el análisis? Se argumenta que los perfiles caracterizados en esta investigación sirven como pauta para esbozar la forma en que los estudiantes transitan desde una postura tradicionalista de las matemáticas hacia una postura inquisitiva basada en la solución de problemas. Es decir, ¿cómo es el tránsito de los estudiantes al pasar de concebir el estudio de las matemáticas como una actividad principalmente mecánica, orientada a la solución de largas listas de tareas, hacia una forma orientada a explorar, reflexionar, registrar y comunicar las ideas y razonamientos que surgen durante la resolución de problemas?

La Figura 5.4 ilustra la forma en que se interconectan los enfoques del aprendizaje de las matemáticas basada en la resolución de problemas en términos de las características de los perfiles identificados en el análisis de la investigación. Es decir, a partir de las concepciones que los estudiantes de cada perfil evidencian sobre el aprendizaje de las matemáticas, se plantean ciertas acciones que se proponen como posibles alternativas que desarrollen el desempeño de los estudiantes para moverse de un tipo de trabajo hacia a otro.

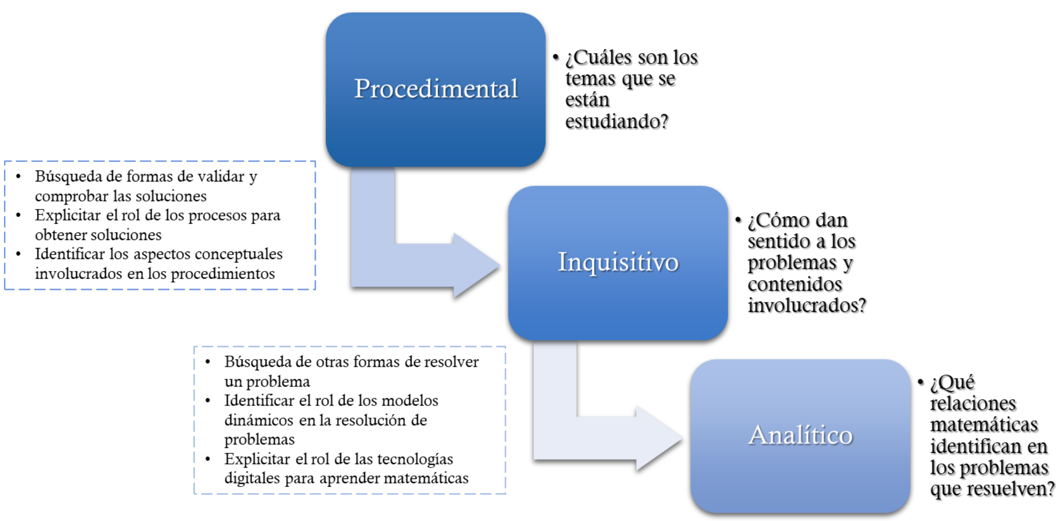


Figura 5.4. Desarrollo de competencias de resolución de problemas en el trabajo de la bitácora digital

Un elemento crucial que caracteriza el tránsito de un perfil de trabajo hacia el siguiente, son los hábitos de dar sentido a las situaciones matemáticas con las que se trabaja. Este elemento trae consigo importantes implicaciones en el desempeño de los estudiantes en la exploración, comprensión y solución de problemas. Mientras que los estudiantes de un perfil procedimental se enganchan en procesos algorítmicos con la finalidad de obtener resultados, la forma de trabajar de un estudiante bajo un perfil inquisitivo o analítico se concentra en procesos espontáneos (o próximos a ser sistemáticos) de comprender la situación de los problemas que resuelven, o al menos de construir significados sobre la coherencia de las representaciones matemáticas de los problemas. Tener información sobre las ventajas y desventajas percibidas de los estudiantes también sustenta la relevancia de los elementos de enganchamiento y agencia en la apropiación de la bitácora. En términos generales, los estudiantes que prestaron más atención a la utilidad metacognitiva de la bitácora se mostraron más inclinados a apropiarse de esta como una herramienta reflexiva mediante discursos introspectivos que revelaban interés por los conceptos involucrados en los problemas.

5.3. Limitaciones y contribuciones

Las caracterizaciones realizadas en esta investigación se encuentran en un nivel global o generalizado y apuntan a la generación de esquemas sobre las posibles rutas que los estudiantes pueden seguir en el proceso de registrar sus experiencias de aprendizaje en una bitácora digital acerca de un curso con un enfoque analítico de resolución de problemas. Si bien se pudieron analizar las bitácoras con cierto grado de especificidad, el análisis particular de cada bitácora a lo largo del curso es una tarea exhaustiva que demanda un estudio por su cuenta. En esta investigación, prevaleció el trabajo grupal ya que la mayor parte de las discusiones se llevó a cabo en plenaria, y los estudiantes pudieron intercambiar información entre ellos para complementar sus bitácoras. En este sentido, los procesos de apropiación de la bitácora plasmados en los resultados tienen cabida cuando se trabaja en grupos grandes de estudiantes. Así, aún es necesario continuar con investigaciones que den cuenta de los fenómenos que surgen a nivel individual cuando un grupo reducido de estudiantes trabajan con la bitácora digital, ¿cómo se desarrollan a niveles más específicos las competencias de resolución de problemas en estudiantes de bachillerato? ¿cómo lucen esos descriptores conforme cambia el tiempo? ¿los niveles de apropiación encontrados en esta investigación también emergen en grupos reducidos de estudiantes? Estas preguntas permitirían construir conocimiento teórico sobre la bitácora digital como una herramienta metodológica para la modificación de propuestas curriculares que busquen centrar al estudiante como principal agente del aprendizaje.

Es importante destacar también el trabajo que exhiben los estudiantes en las bitácoras no es unidimensional, las bitácoras de un perfil inquisitivo no muestran una forma de acercarse a los problemas idéntica en cada una de las actividades. Incluso dentro de un mismo grupo de bitácoras existen diferentes subniveles de desempeño. En términos generales, a través de las bitácoras de los estudiantes, se observan niveles de apropiación sobre las formas de los estudiantes de entender los conceptos matemáticos que estudian. Finalmente, una limitante importante es la cantidad de tiempo que requieren los estudiantes para comenzar a emplear las herramientas digitales como auténticos medios de aprendizaje: si bien los estudiantes exhibieron diversas competencias de resolución de problemas, estas no fueron activadas por los estudiantes de manera estructurada o controlada, lo que indica que al finalizar el curso, los estudiantes apenas se encontraban en un proceso de asimilación de lo que significa aprender matemáticas a través de la resolución de problemas. En este sentido, se argumenta que se requiere una continuidad considerable (superior a un semestre) para que un enfoque basado en el registro del trabajo de los estudiantes en una bitácora digital revele cambios importantes en sus hábitos de resolución de problemas.

La contribución principal de este trabajo es la de ampliar el conocimiento sobre el desempeño de estudiantes de bachillerato en escenarios de aprendizaje cuyo foco principal es la problematización de los contenidos matemáticos a través de la resolución de problemas con el uso coordinado de tecnologías digitales; esto es, el desarrollo de competencias matemáticas como prioridad, de la cual resulta el desarrollo de conceptos matemáticos y la construcción de puentes cognitivos entre dichos conceptos. El trabajo en la bitácora promueve el desarrollo de hábitos metacognitivos que paulatinamente hacen explícita la necesidad de adquirir consciencia sobre la importancia de la autorregulación y el aprendizaje autónomo en los estudiantes. Adicionalmente, se deja evidencia de la relevancia en promover hábitos de construcción de significados en los estudiantes que contribuyan al ejercicio de actividades de comprensión de problemas. Esto incluye el cuestionamiento de los estudiantes acerca de la pertinencia, validez o sentido de las soluciones que construyen con el apoyo de modelos dinámicos; o bien, mediante el planteamiento de inquietudes acerca de lo que significan las relaciones descritas en situaciones problemáticas que resulta en actividades breves de indagación de conceptos y búsqueda de información.

El empleo de la bitácora consistió, de manera general, en una oportunidad para adaptar el trabajo asíncrono al que los estudiantes estaban habituados, dado que dos terceras partes de su educación media-superior fue en contextos virtuales derivados de la pandemia. Esto causó que los estudiantes mostraran una gran disparidad en cuanto al tipo de recursos cognitivos y habilidades de resolución de problemas en el curso. Puesto que la capacidad de adaptación de los profesores a las aulas virtuales fue sumamente errática, algunos profesores fueron capaces de aprovechar las bondades tecnológicas, pero la gran mayoría encontró dificultades en incorporar estrategias apropiadas ante esta modalidad. A pesar de las severas deficiencias en el aprendizaje matemático causadas por estas formas inconsistentes de adaptación a los modelos remotos de aprendizaje, la mayoría de los estudiantes fueron capaces de participar en las discusiones grupales sobre los significados asociados a las ideas claves del Cálculo. Algo importante por destacar es que a medida que se desarrollaron las sesiones del curso, los estudiantes se enfocaban en las formas de argumentar y validar sus resultados. Es decir, con el uso de herramientas digitales, como GeoGebra, es posible encontrar la solución a problemas de los libros de texto, removiendo los sentimientos de incertidumbre en los estudiantes sobre si obtuvieron la solución correcta o no, enfocando las discusiones realizadas durante las sesiones presenciales a examinar los procesos y razonamientos detrás de las soluciones.

Orientar los cursos de matemáticas en términos de un enfoque de resolución de problemas mediante el empleo de bitácoras digitales implica una serie de cambios curriculares sustanciales. No obstante, con base en los resultados obtenidos de esta investigación a partir de lo observado en el desempeño de los estudiantes, se proponen lineamientos en términos de cinco descriptores cuya intención es ofrecer directrices para el trabajo de los profesores que busquen promover en los estudiantes el desarrollo de habilidades de resolución de problemas orientadas en el registro y reflexión de sus propios procesos de aprendizaje:

Descriptor	Directrices	Preguntas guía	Competencias de resolución de problemas
Conexión de ideas matemáticas	Invitar a los estudiantes a reconocer los conceptos clave en la resolución de problemas y profundizar en ellos a través del uso de recursos y soporte	¿qué tipo de representaciones conceptuales resultaron relevantes en los problemas? ¿es posible resolver otro tipo de problemas donde este mismo concepto sea crucial para su solución? ¿qué tipo de recursos o plataformas permitieron superar obstáculos conceptuales?	Visión retrospectiva sobre su trabajo Identificar estrategias y heurísticas Búsqueda de múltiples soluciones Extensión de problemas

Prioridad en las explicaciones	Promover la identificación de procesos clave en la solución de problemas y la activación de recursos al momento de realizar los registros en su bitácora	¿Cómo fue el proceso de enfrentarse al problema? ¿qué observaron al construir un modelo dinámico? ¿cómo llegaron a las soluciones? ¿qué explica sus soluciones? ¿cuáles fueron las dificultades que encontraron y cómo las sobrellevaron?	Identificación de recursos débiles y estrategias clave Comunicación de ideas entre pares Trazar y seguir un plan para resolver problemas Herramientas metacognitivas
Involucramiento	Garantizar que los estudiantes identifiquen sus aportes a las discusiones en clases, o bien, la forma en que ellos dan sentido a los aportes de otros compañeros	¿Qué aportaciones hice a la clase? ¿cuáles son los temas o conceptos que me causaron mayor interés y por qué? ¿qué puedo encontrar al respecto sobre estos temas o conceptos? ¿Puedo emplear algún recurso digital para profundizar en mi entendimiento sobre estos temas?	Identificar estrategias y heurísticas Contrastar diferentes formas de resolver y explorar problemas Comunicación y validación de ideas entre pares
Agencia	Promover en los estudiantes una actitud activa en el aprendizaje de las matemáticas a través de la forma de estructurar su bitácora	¿Cómo se están explorando los problemas matemáticos? ¿qué tipo de preguntas son frecuentemente planteadas en el salón de clases? ¿cómo esas preguntas condujeron a la exploración y a complementar conceptos matemáticos? ¿cómo puedo hacer esas exploraciones por mi cuenta? ¿cómo el uso de recursos digitales me ayuda a entender y extender las relaciones entre ideas matemáticas?	Construcción de modelos dinámicos Búsqueda y selección e información Planteamiento de problemas
Continuidad	Apoyar a los estudiantes a desarrollar hábitos reflexivos sobre su aprendizaje a través de la bitácora	¿Cuáles son algunos objetivos de trabajo que puedo plantearme? ¿qué me gustaría obtener del trabajo de la bitácora? ¿qué me gustaría aprender? ¿qué tan seguido es conveniente para mí trabajar en la bitácora? ¿estoy cumpliendo con los objetivos de aprendizaje planteados?	Estrategias de metacognición Identificar estrategias y heurísticas clave Búsqueda y selección de información

Tabla 5.3. Recomendaciones para fomentar hábitos autorreflexivos de aprendizaje

En síntesis, se espera que los resultados de esta investigación tengan el potencial de contribuir al desarrollo e implementación de metodologías didácticas orientadas a promover en los estudiantes hábitos de introspección, expresión y comunicación de sus procesos de resolución de problemas. La idea de una bitácora digital sirve como una forma de manifestar evidencias de los estudiantes en tanto a cómo conciben el trabajo de aprendizaje de las matemáticas con apoyo del uso coordinado de tecnologías digitales; en este sentido, esta noción de organizar el trabajo de los estudiantes se propone como un marco conceptual de referencia para la incorporación de una forma sistemática de conducir actividades de aprendizaje matemático orientadas a la problematización de los contenidos, promoviendo actitudes inquisitivas y autónomas que caracterizan los enfoques de resolución de problemas.

Referencias

Amado, N., Carreira, S., Jones, K. (2018). Broadening Research on Mathematical Problem-Solving: An Introduction. En: Amado, N., Carreira, S., Jones, K. (eds) *Broadening the Scope of Research on Mathematical Problem Solving*. (pp. 1-12). Research in Mathematics Education. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-319-99861-9_1

Aguilar-Magallón, D. (2018*). La formulación y resolución de problemas en un ambiente que promueve el uso de tecnologías digitales*. Tesis de maestría no publicada, CINVESTAV-IPN

Aguilar, M.S., Esparza Puga, D.S., Lezama, J. (2022). The Abrupt Transition to Online Mathematics Teaching Due to the COVID-19 Pandemic: Listening to Latin American Teachers' Voices. En: Clark-Wilson, A., Robutti, O., Sinclair, N. (eds) *The Mathematics Teacher in the Digital Era. Mathematics Education in the Digital Era*, vol 16. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-031-05254-5_13

Arzarello, F., Olivero, F., Paola, D., & Robutti, O. (2002). A cognitive analysis of dragging practices in Cabri environments. *ZDM–The International Journal on Mathematics Education, 34*(3), 66–72. https://doi.org/10.1007/BF02655708

Atweh, B., Kaur, B., Nivera, G., Abadi, A. & Thinwiangthong, S. (2023). Futures for Post-Pandemic Mathematics Teacher Education: responsiveness and responsibility in the Face of a Crisis. *ZDM Mathematics Education* **55**, 65–77 https://doi.org/10.1007/s11858-022-01394-y

Baccaglini-Frank, A. (2019). Dragging, instrumented abduction and evidence, in processes of conjecture generation in a dynamic geometry environment. *ZDM - Mathematics Education, 51*(5), 779–791. https://doi.org/10.1007/s11858-019-01046-8.

Bakker, A., & van Eerde, D. (2015). An Introduction to Design-Based Research with an Example from Statistics Education. En A. Bikner-Ahsbahs, C. Knipping, & N. Presmeg (Eds.), *Approaches to Qualitative Research in Mathematics Education: Examples of Methodology and Methods* (pp. 429–466). Springer Netherlands. https://doi.org/10.1007/978-94-017-9181-6_16

Baroody, A., Cibulskis, M., Lai, M. & Li, X. (2004). Comments on the use of learning trajectories in curriculum development and research. *Mathematical Thinking and Learning 6*(2), 227-260.

Camacho-Machín, M., Santos-Trigo, M., Martínez-Artero, R., (2018). Resolución de problemas matemáticos: Tecnologías digitales, procesos cognitivos y metacognitivos y formación de profesores de matemáticas. *Educatio Siglo XXI, 36* (3), 13-20.

Cai, J., Hwang, S. (2023). Making Mathematics Challenging Through Problem Posing in the Classroom. En: Leikin, R. (eds) *Mathematical Challenges for All*. Research in Mathematics Education. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-031-18868-8_7

Churchill, D., Fox, B., & King, M. (2016). Framework for Designing Mobile Learning Environments. En D. Churchill, J. Lu, T. K. F. Chiu, & B. Fox (Eds.), *Mobile Learning Design: Theories and Application* (pp. 3–25). Springer Singapore. https://doi.org/10.1007/978-981-10-0027-0_1

Colin, F., Burkhardt, H. & Schoenfeld, A. (2022). Crisis-ready educational design: The case of mathematics. *The Curriculum Journal, 33* (4), 519-535.

Cypress, B.S. (2017) Rigor or Reliability and Validity in Qualitative Research. *Dimensions of Critical Care Nursing, 36*, 253-263. https://doi.org/10.1097/DCC.0000000000000025

Dereshiwsky, M. I. (2015). *Media Rich Instruction* (R. Papa (ed.)). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-319-00152-4

DGCCH. (2006). *Orientación y Sentido de las Áreas del Plan de Estudios Actualizado*. México: Dirección General del Colegio de Ciencias y Humanidades de la UNAM.

Engelbrecht, J., Llinares, S., & Borba, M. C. (2020). Transformation of the mathematics classroom with the internet. *ZDM - Mathematics Education,* 52, 825-841. https://doi.org/10.1007/s11858-020-01176-4

English, L. & Kirshner, D. (2016). Changing agendas in international research in mathematics education. En L. English & D. Kirshner (Eds.). *Handbook of international research in mathematics education, third edition*, 3-18. NY: Routledge, Taylor & Francis.

Foster, C., Burkhardt, H. & Schoenfeld, A. (2022). Crisis-ready education design: the case of mathematics. *The Curriculum Journal,* 33, 519-535. DOI: 10.1002/curj.159.

Freitas, E., Lerman, S., & Parks, A. (2017). Qualitative Methods. En J. Cai (Ed.), *Compendium for Research in Mathematics Education* (pp. 159–183). NCTM.

Goldenberg, E., & Cuoco, A. (1998). What is dynamic geometry? En R. Lehrer & D. Chazan (Eds.), *Designing Learning Environments for Developing Understanding of Geometry and Space* (1st ed., pp. 351–369). Routledge.

Gros, B., Kinshuk, & Maina, M. (2016). *The future of ubiquitous learning. Learning Design for Emerging Pedagogies*. New York: Springer.

Hancock E. & Karakok G. (2020). Supporting The Development Of Process-Focused Metacognition During Problem Solving. *PRIMUS, 31* (8). https://doi.org/10.1080/10511970.2020.1772914

Hadamard J. (1945) *An essay on the psychology of invention in the mathematical field*. Dover Publications, Nueva York.

Hanusch, S. (2020) Summative Portfolios in Undergraduate Mathematics Courses. *PRIMUS, 30* (3), 274-284, https://doi.org/10.1080/10511970.2019.1566185

Hollebrands, K. (2007). The role of a dynamic software program for geometry in the strategies high school mathematics students employ. *Journal for Research in Mathematics Education, 38*(2), 164–192.

Hollebrands, K. & Okumus, S. (2017). Prospective mathematics teachers' processes for solving optimization problems using cabri 3D. *Digital Experiences in Mathematics Education, 3*(3), 206-232. https://doi.org/10.1007/s40751-017-0033-0

Højsted, I.H., Mariotti, M.A. (2022). Mathematical Representation Competency in the Era of Digital Representations of Mathematical Objects. En: Jankvist, U.T., Geraniou, E. (eds) *Mathematical Competencies in the Digital Era. Mathematics Education in the Digital Era*, vol 20. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-031-10141-0_8

Jacinto, H., Carreira, S. (2017). Mathematical Problem Solving with Technology: The Techno-Mathematical Fluency of a Student-with-GeoGebra. *International Journal of Science and Mathematics Education, 15*, 1115–1136. https://doi.org/10.1007/s10763-016-9728-8

Jackson, C. (2022). Methodological and Method Considerations. En: *All-Attainment Teaching in Secondary Mathematics.* Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-92361-7_5

Johns, C., & Mills, M. (2021). Online Mathematics Tutoring During the COVID-19 Pandemic: Recommendations for Best Practices. *PRIMUS, 31*(1), 99–117. https://doi.org/10.1080/10511970.2020.1818336

Kouropatov, A. & Dreyfus, T. (2014). Learning the integral concept by constructing knowledge about accumulation. *ZDM Mathematics Education, 46,* 533-548. https://doi.org/10.1007/s11858-014-0571-5

Kuckartz, U. (2019). Qualitative Text Analysis: A Systematic Approach. En: Kaiser, G., Presmeg, N. (eds) *Compendium for Early Career Researchers in Mathematics Education.* ICME-13 Monographs. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-15636-7_8

Kuzle, A. (2017). Delving into the nature of problem-solving processes in a dynamic geometry environment: different technological effects on cognitive processing. *Technology, Knowledge, and Learning, 22(*1), 37-64. https://doi.org/10.1007/s10758-016-9284-x

Laborde, C. (2002). Integration of Technology in the Design of Geometry Tasks with Cabri-Geometry. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 6*(3), 283–317. https://doi.org/10.1023/A:1013309728825

Laursen, S. & Rasmussen, C. (2019). I on the Prize: Inquiry Approaches in Undergraduate Mathematics. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education, 5*, 129-146. https://doi.org/10.1007/s40753-019-00085-6

Larson, R. & Edwards. B. (2010). *Calculus of a single variable* (9th edition). Books/Cole CENGAGE Learning. Belmont, USA.

LeCompte, M. D. (2000). Analyzing Qualitative Data. *Theory Into Practice, 39* (3), 146-154.

Leung, A. (2017). Exploring Techno-Pedagogic Task Design in the Mathematics Classroom. In A. Leung & A. Baccaglini-Frank (Eds.), *Digital Technologies in Designing Mathematics Education Tasks: Potential and Pitfalls* (pp. 3–16). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-319-43423-0_1

Li, Y., Schoenfeld, A.H. (2019). Problematizing teaching and learning mathematics as "given" in STEM education. *International Journal of STEM Education, 6* (44), https://doi.org/10.1186/s40594-019-0197-9

Liljedahl, P., Santos-Trigo, M., Malaspina, U., Bruder, R. (2016). Problem Solving in Mathematics Education. En: *Problem Solving in Mathematics Education*. ICME-13 Topical Surveys. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-319-40730-2_1

Mariotti, M.A., Baccaglini-Frank, A. (2018). Developing the Mathematical Eye Through Problem-Solving in a Dynamic Geometry Environment. En: Amado, N., Carreira, S., Jones, K. (eds) *Broadening the Scope of Research on Mathematical Problem Solving. Research in Mathematics Education*. (pp. 153-176). Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-319-99861-9_7

Mayring, P. (2015). Qualitative Content Analysis: Theoretical Background and Procedures. En: Bikner-Ahsbahs, A., Knipping, C., Presmeg, N. (eds) *Approaches to Qualitative Research in Mathematics Education. Advances in Mathematics*. Education. Springer, Dordrecht. https://doi.org/10.1007/978-94-017-9181-6_13

Moreno-Armella, L., & Hegedus, S. J. (2009). Co-action with digital technologies. *ZDM - International Journal on Mathematics Education, 41(*4), 505–519. https://doi.org/10.1007/s11858-009-0200-x

National Council of Teachers of Mathematics (2014). *Principles to Actions: Ensuring Mathematical Success for All*. Reston, VA: NCTM.

National Council of Teachers of Mathematics (2020). *Catalyzing Change in Middle School Mathematics: Initiating Critical Conversations*. Reston, VA: NCTM.

Ortiz, D. (2019). *Análisis dinámico de relaciones: una estrategia de resolución de problemas de optimización con el uso de un sistema de geometría dinámica*. CINVESTAV-IPN.

Ortiz, D. (2023). Bitácora digital como herramienta para el desarrollo de escenarios de aprendizaje basados en una visión inquisitiva de resolución de problemas matemáticos. En P. Scott, Y. Morales & A. Ruíz (eds.) *Educación Matemática en las Américas 202. Uso de Tecnologías digitales*, 50-58. Memorias de la XVI CIAEM. Lima, Perú.

Pinheiro, J. M. L., Bicudo, M. A. V., & Detoni, A. R. (2020). Understanding Phenomenologically the Constitution of Knowledge When Working with Dynamic Geometry. En M. A. Viggiani Bicudo (Ed.), *Constitution and Production of Mathematics in the Cyberspace: A Phenomenological Approach* (pp. 49–65). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-030-42242-4_4

Polya G. (1945) *How to solve it*. Princeton University Press, Princeton.

Ruthven, K. (2022). Ergonomic, epistemological, and existential challenges of integrating digital tools into school mathematics. *Asian Journal for Mathematics Education, 1(*1), 7–18. https://doi.org/10.1177/27527263221077314

Santos-Trigo, M. (2014). *La Resolución de Problemas Matemáticos. Fundamentos Cognitivos*. Trillas, México.

Santos-Trigo, M. (2019). Mathematical Problem Solving and the Use of Digital Technologies. En P. Liljedahl & M. Santos-Trigo (Eds.), *Mathematical Problem Solving: Current Themes, Trends, and Research* (pp. 63–89). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-030-10472-6_4

Santos-Trigo, M. (2020). Problem-Solving in Mathematics Education. En: Lerman, S. (eds) *Encyclopedia of Mathematics Education*. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0_129

Santos-Trigo, M. (2023). Trends and Developments of Mathematical Problem-Solving Research to Update and Support Post-confinement Learning Spaces. En T. L. Toh, M. Santos-Trigo, P. H. Chua, N. A Abdullah, and D. Zhan (Eds.), *Problem posing and problem solving in mathematics education -Research trend from Topical Study Group 17 of ICME14*. Springer.

Santos-Trigo, M., Aguilar-Magallón, D., Reyes-Martínez, I. (2019). A Mathematical Problem-Solving Approach Based on Digital Technology Affordances to Represent, Explore, and Solve problems via Geometric Reasoning. En: Felmer, P., Liljedahl, P., Koichu, B. (eds) *Problem Solving in Mathematics Instruction and Teacher Professional Development.* Research in Mathematics Education. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-29215-7_8

Santos-Trigo, M., & Barrera-Mora, F. (2007). Contrasting and Looking into Some Mathematics Education Frameworks. *The Mathematics Educator, 10*, 81–106.

Santos-Trigo, M., Barrera-Mora, F., & Camacho-Machín, M. (2021). Teachers' Use of Technology Affordances to Contextualize and Dynamically Enrich and Extend Mathematical Problem-Solving Strategies. *Mathematics*, *9*(8). https://doi.org/10.3390/math9080793

Santos-Trigo, M., & Camacho, M. (2013). Framing the use of computational technology in problem solving approaches. *Mathematics Enthusiast*, 10, 279–302.

Santos-trigo, M., & Moreno-armella, L. (2016). The Use of Digital Technology to Frame and Foster Learners' Problem-Solving Experiences. En P. Felmer, E. Pehkonen, & J. Kilpatrick (Eds.), *Posing and Solving Mathematical Problems* (Springer, pp. 189–207). https://doi.org/10.1007/978-3-319-28023-3

Santos-Trigo, M., Moreno-Armella, L., & Camacho-Machín, M. (2016). Problem solving and the use of digital technologies within the Mathematical Working Space framework. *ZDM - Mathematics Education*, *48*(6), 827–842. https://doi.org/10.1007/s11858-016-0757-0

Santos-Trigo, M. & Liljedahl, P. (2019). *Mathematical Problem Solving: Current Themes, Trends and Research*. ICME-13 Monographs, Springer Nature Switzerland.

Santos-Trigo, M., & Reyes-Martínez, I. (2019). High school prospective teachers' problem-solving reasoning that involves the coordinated use of digital technologies. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *50*(2), 182–201. https://doi.org/10.1080/0020739X.2018.1489075

Santos-Trigo, M., Reyes-Martínez, I., & Gómez-Arciga, A. (2022). A conceptual framework to structure remote learning scenarios: a digital wall as a reflective tool for students to develop mathematics problem-solving competencies. *International Journal for Learning Technology*, *17*(1), 27-52. https://doi.org/10.1504/IJLT.2022.123686

Schoenfeld, A. (1985). Mathematical Problem Solving. Academic, New York.

Schoenfeld, A. (2011). *How We Think: A Theory of Goal-Oriented Decision Making and its Educational Applications*. https://doi.org/10.4324/9780203843000

Schoenfeld, A. H. (2015). How We Think: A Theory of Human Decision-Making, with a Focus on Teaching. En S. J. Cho (Ed.), *The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education* (pp. 229–243). Springer International Publishing.

Schoenfeld, A. (2020). Mathematical practices, in theory and practice. *ZDM - Mathematics Education* 52. https://doi.org/10.1007/s11858-020-01162-w

Schoenfeld, A.H. (2023). A Theory of Teaching. En: Praetorius, AK., Charalambous, C.Y. (eds) *Theorizing Teaching*, 59-187. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-031-25613-4_6

Schwarz, B.B., de Groot, R., Mavrikis, M. & Dragon, T. (2015) Learning to learn together with CSCL tools. *International Journal of Computer-Supported Collaborative Learning 10* (3), 239–271.

Stewart, J. (2012). *Calculus: Early Trascendentals* (7th edition). Brooks/Cole. CENGAGE Learning. Belmont, USA.

Simon, M.A. (2019). Analyzing Qualitative Data in Mathematics Education. En: Leatham, K.R. (eds) Designing, Conducting, and Publishing Quality Research in Mathematics Education. *Research in Mathematics Education*. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-23505-5_8

Thurston, W. (1994). On proof and progress in mathematics. *Bulletin of the American Mathematical Society*, *30*(2), 161-177

Trenholm, S., Alcock, L., & Robinson, C. (2015). An investigation of assessment and feedback practices in fully asynchronous online undergraduate mathematics courses. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *46*(8), 1197–1221. https://doi.org/10.1080/0020739X.2015.1036946

Trocki, A., & Hollebrands, K. (2018). The Development of a Framework for Assessing Dynamic Geometry Task Quality. *Digital Experiences in Mathematics Education*, *4*(2–3), 110–138. https://doi.org/10.1007/s40751-018-0041-8

APÉNDICE 1. LISTA DE ACTIVIDADES

Actividad Introductoria

Para estimar la cantidad de defoliación causada por la polilla gitana durante un año, un guardabosques midió la masa de huevecillos en $\frac{1}{40}$ de acres del otoño pasado. El porcentaje y de defoliación se aproxima mediante la expresión:

$$y = \frac{300}{3 + 17e^{-0.06255x}}$$

Donde x es la masa de huevecillos en miles (si $x = 1$, se lee como “1000 masas de huevecillos).

a) Usando la gráfica de la función, estima el porcentaje de defoliación si 2000 masas de huevecillos son contadas
b) Estimar el número de masas de huevecillos existentes, si se observa que aproximadamente 2/3 del bosque está defoliado.
c) Estima la rapidez a la que aumenta la defoliación si hay 1500 masas de huevecillos.
d) Estima el valor de x para el cuál el porcentaje de defoliación incremente con mayor rapidez

Actividad 1

Ejercicio 1

La presión atmosférica disminuye a medida que incrementa la altura. A nivel del mar, la presión promedio de aire es una atmósfera (1atm=1.033227 kg/cm^2). La siguiente tabla muestra los valores de presión (en atmósferas) ante alturas seleccionadas (en kilómetros).

h	0	5	10	15	20	25
p	1	0.55	0.25	0.12	0.06	0.02

a) Aproxima un modelo de la forma $p(h) = a + b \ln h$ para los datos. ¿Puede hacerse?
b) ¿Cómo usar un graficador para obtener un modelo de la forma $h(p) = a + b \ln p$?
c) Usa el modelo aproximado para estimar la altura cuando $p = 0.75$
d) Usa el modelo aproximado para estimar la presión cuando $h = 13$
e) ¿Cuál es la tasa de cambio instantánea cuando $h = 5$? ¿Cuándo $h = 20$? Interpreta los resultados

Actividad 2. Integral definida

1. Usa la función Integral para aproximar el área total entre las siguientes funciones y el Eje X.

   a) $f(x) = \sin(3x)$, entre $x = 0$ y $x = \pi$

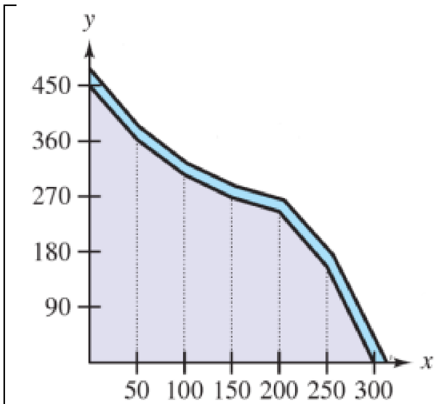
   b) $g(x) = x^3 - 2x^2 - 11x + 12$, entre $x = -3$ y $x = 4$

   c) $h(x) = 2\cos(\pi x)$, entre $x = -2.5$ y $x = 1.5$

Problemas adicionales

3. Un terreno está limitado por dos carreteras perpendiculares y un rio. El río pasa por algunas coordenadas (x, y), medidas en metros, que son las siguientes:

x	0	50	100	150	200	250	300
y	450	362	305	268	245	156	0



a) Usa la función AjustePolinómico() de GeoGebra para obtener un polinomio de grado 3 que modele la forma del río, a partir de las coordenadas dadas.

b) A partir del modelo, estima el área del terreno usando Integral()

Actividad 3. Área entre dos funciones

Comentario: El primer inciso fue una tarea previa para los estudiantes, el inciso 2 se trabajó en clases.

Actividades

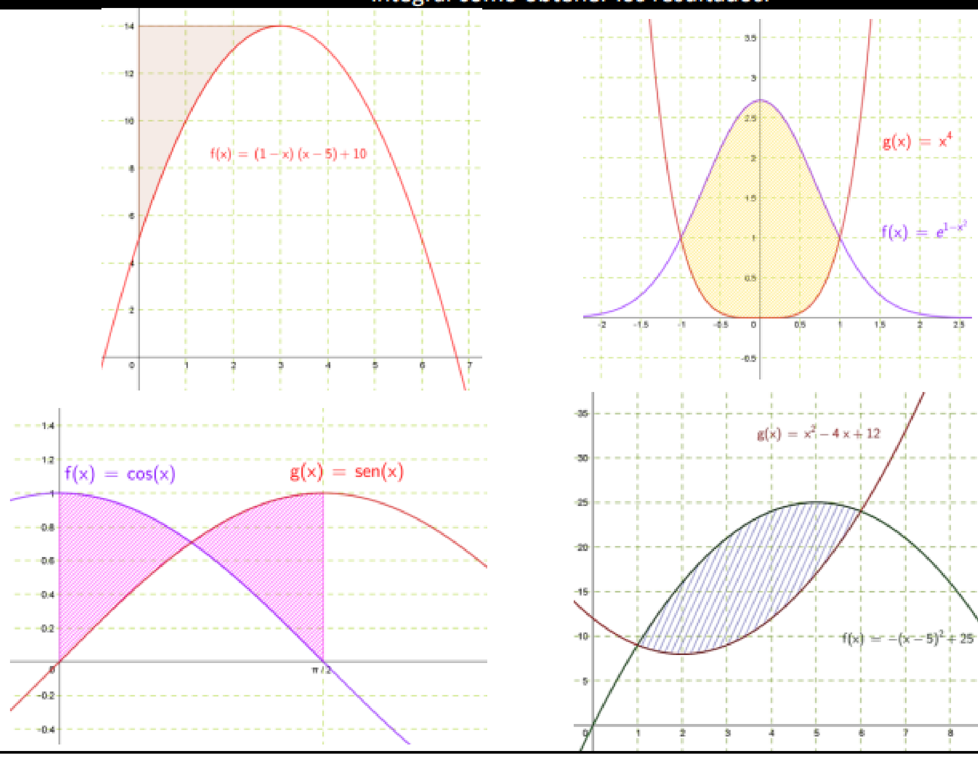
1. Usa GeoGebra para obtener el valor de la región descrita en cada inciso

a) $f(x) = 5x - x^2$, $g(x) = x$, entre $x = 0$ y $x = 4$

b) $f(x) = x\sin(x^2)$, $g(x) = x^4$

c) $f(x) = x^4 - 4x^2$, $g(x) = x^3 - 4x$

2. Determina el valor del área sombreada usando GeoGebra. Incluye en notación de integral cómo obtener los resultados.



Problema adicional:

3. Determina los valores a y b que maximicen y minimicen el área de las siguientes integrales (si es posible hacerlo):

$$\int_a^b (1 - x^2)\, dx$$

$$\int_a^b (-8\, x^4 + 24\, x^3 - 22\, x^2 + 6\, x) dx$$

Actividad 4. Límites de integración

Conjunto de Problemas 1. Para cada inciso, encuentren posibles valores para a y b tales que cumplan lo establecido. Las soluciones no son únicas, de modo que pueden dar valores particulares o bien, una generalización sobre lo que deben satisfacer los valores a y b. Recuerden usar GeoGebra para comprobar sus resultados.

a)	$\int_{-2}^{2} f(x)dx + \int_{2}^{4} f(x)dx = \int_{a}^{b} f(x)dx$
b)	$\int_{-3}^{3} f(x)dx + \int_{3}^{6} f(x)dx - \int_{-1}^{6} f(x)dx = \int_{a}^{b} f(x)dx$
c)	$\int_{-1}^{4} f(x)dx - \int_{a}^{b} f(x)dx = \int_{3}^{4} f(x)dx$
d)	$\int_{a}^{b} \sin x\, dx < 0$
e)	$\int_{a}^{b} \cos x\, dx = 0$

Problemas adicionales:

Conjunto de problemas 2. Considera los números reales $a, r \in \mathbb{R}$ positivos y obtén una generalización del resultado de las siguientes integrales

a)	$\int_{0}^{a} 2x dx =$
b)	$\int_{0}^{a\pi} \sin x\, dx =$ (considera a entero)
b)	$\int_{-a}^{a} (a - \lvert x \rvert)dx =$
c)	$\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2} dx =$

Actividad 5. Explorando el Teorema Fundamental del Cálculo

Comentario: *Explorando el TFC* es una actividad introductoria cuyo propósito fue el de discutir la integral como una función antiderivada, se realizó junto con los estudiantes. *Aplicando el TFC* fue la actividad que los estudiantes desarrollaron.

Explorando el TFC. Considera la función $f(t) = \sin^2 t$, y la función $F(x) = \int_0^x f(t)dt$.

a) Obtén los valores que hacen falta en la siguiente tabla usando GeoGebra:

$\boldsymbol{x}$	$\mathbf{0}$	$\boldsymbol{\frac{\pi}{3}}$	$\boldsymbol{\frac{\pi}{2}}$	$\boldsymbol{\frac{2\pi}{3}}$	$\boldsymbol{\frac{5\pi}{6}}$	$\boldsymbol{\pi}$
$\boldsymbol{F(x)}$						

b) Grafica los puntos $(x, F(x))$ obtenidos de la tabla anterior.
c) Introduce la función $f(x) = \sin^2 x$ y obtén la integral indefinida de f (Es decir, $g(x) = Integral(f)$) . Describan brevemente qué relación encuentran entre la función integral de f y los puntos graficados del inciso a.
d) De la función obtenida en el inciso anterior, obtengan su derivada (si su función se llama g, escriban g'). Describan brevemente qué es lo que observaron.

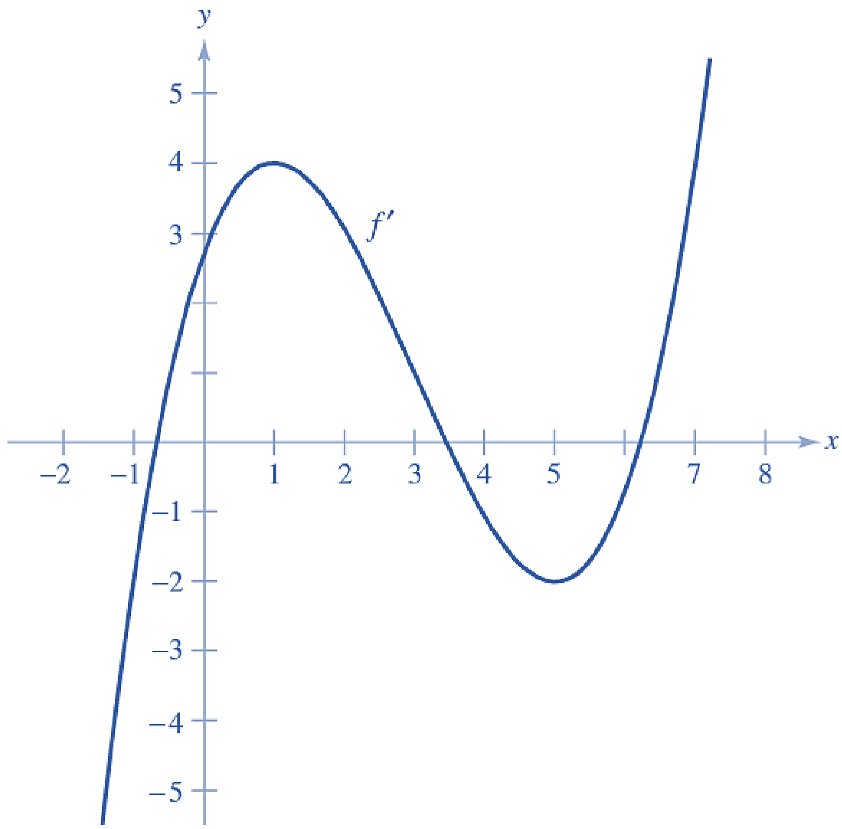
Aplicando el TFC. Desde una altura de 10 metros, un objeto fue lanzado hacia arriba. Un medidor especial registró la velocidad que llevaba el objeto en cada segundo.

$\boldsymbol{t\ (s)}$	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5
$\boldsymbol{v\ \left(\frac{m}{s}\right)}$	19.9	17.55	15.33	12.72	10.38	7.89	5.6	2.89	0.47
$\boldsymbol{h\ (m)}$									

a) Revisa el siguiente modelo dinámico: https://www.geogebra.org/m/pkqsbgrc. En términos del problema, ¿qué sentido tiene el área de cada uno de los rectángulos que se observan?
b) Con base en lo anterior, completa la fila h, con información sobre la altura del objeto en los instantes de tiempo mencionados.
c) Grafica los puntos (t, h), de la altura del objeto a diferentes momentos de tiempo. Con esos puntos, Modela la función $h(t)$ de la altura del objeto a los t segundos con ayuda de un Ajuste Polinomial. Recuerda que esta herramienta en GeoGebra requiere de seleccionar el grado del polinomio, discutan y expliquen el por qué de la selección del grado que elijan más conveniente.
d) Con base en su ajuste, ¿pueden aproximar después de cuánto tiempo el objeto cayó al piso? ¿cuándo alcanzó su altura máxima?

Actividad 6.

Descripción. Consideren una función f tal que la gráfica de su derivada es tal como se muestra en la figura, y además cumple que $f(0) = -4$. Realicen lo que se indica, apoyándose en GeoGebra (por ejemplo, traten de reproducir lo más parecido posible la función f' en GeoGebra).



a) Aproximen la pendiente de la función f (de la recta tangente) en el punto $x = 4$. Expliquen su procedimiento.
b) ¿Es posible que $f(2) = -1$? ¿Por qué sí o por qué no?
c) ¿Se cumple que $f(5) - f(4) > 0$? Primero, traten de responder esta pregunta sin emplear GeoGebra, después, comprueben su hipótesis. Incluyan ambas partes del análisis de esta pregunta.
d) Aproxima el valor de x donde f alcanza un máximo. Nuevamente, intenten responder esta pregunta sin emplear GeoGebra y después comprueben su hipótesis.
e) Aproximen todos los intervalos donde la gráfica de f es cóncava hacia arriba y donde es cóncava hacia abajo. Incluyan las coordenadas (x, y) de los puntos de inflexión. Describan detalladamente su forma de proceder.

Actividad 7. Problemas que involucran el uso de la integral

(Nota: El Problema 1 de esta actividad es la misma que la actividad 7, esto debido a que los estudiantes no concluyeron con la actividad 7 en los tiempos planeados y se retomó en la sesión dedicada a la Actividad 8)

Problema 2. Un vehículo experimental se prueba en una pista completamente recta. Comienza desde el reposo y su velocidad v en m/s se registra cada 10 segundos durante 1 minuto.

t	0	10	20	30	40	50	60
v	0	5	21	40	62	78	83

a) Usa un modelo polinomial de grado 3 para aproximar el comportamiento de los datos durante el transcurso de la prueba y grafica $v(t)$
b) ¿Cuál fue la distancia total que recorrió el vehículo a lo largo de la prueba?
c) Si al inicio de la prueba el kilometraje marcaba 1.5 km, al final, ¿cuánto marcó?
d) ¿Cuál es la razón entre el desplazamiento del vehículo en el intervalo [0,30] respecto al intervalo [30, 60]? Es decir, si la distancia recorrida en el intervalo [0,30] fuese la mitad que la distancia recorrida en el intervalo [30, 60], la razón sería ½

Problema adicional

Problema 3. Un móvil a una altura de 20m es disparado hacia arriba. La velocidad del móvil (en m/s) a lo largo del tiempo (en segundos) está dada por la función $v(t) = 39.2 - 4.9t$

a) ¿Cuál fue el desplazamiento que experimentó en el intervalo $4 \leq t \leq 9$?
b) ¿Cuál fue el recorrido TOTAL que experimentó el móvil en el intervalo $4 \leq t \leq 9$?
c) Cuánto tardó en alcanzar su altura máxima
d) ¿Cuál fue su altura máxima?
e) ¿Cuánto tiempo pasó para que toque el piso de nuevo?

Actividad 8. Problemas de sólidos en revolución

Nota. A partir de la Actividad 8, se incluyeron varios problemas con la libertad de que los estudiantes seleccionaran el problema que desearan desarrollar.

Problema A. Usen GeoGebra para calcular el volumen de los sólidos siguientes al rotarse alrededor del Eje x. Incluyan un bosquejo del sólido formado.

a) $f(x) = 1 - x^2$, entre $x = 0$ y $x = 1$
b) $g(x) = \sqrt{25 - x^2}$, entre $x = 2$ y $x = 4$
c) $h(x) = \ln x$, entre $x = 1$ y $x = e$.

Problema B. Un fabricante debe calcular la cantidad de material requerida para una pieza de maquinaria cuya forma se muestra en la Figura a; Para ello, se mide el diámetro en centímetros del corte transversal a diferentes longitudes a lo largo del objeto, medidas presentes en la siguiente tabla (Figura b):

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
d	4.2	3.8	4.2	4.7	5.2	5.7	5.8	5.4	4.9	4.4	4.6

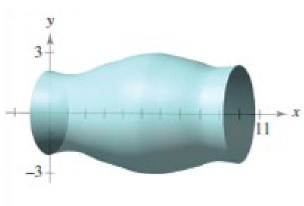


Figura a. Forma de la pieza

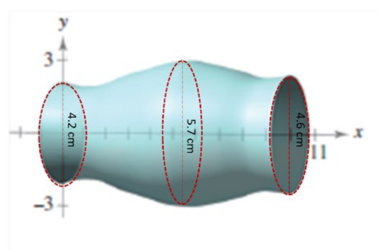
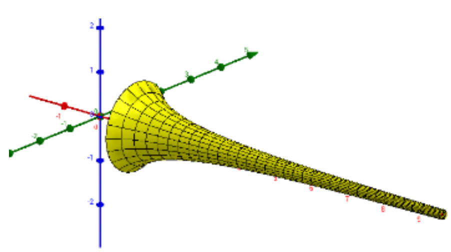


Figura b. Ejemplo de los cortes transversales

a) Usen un polinomio de grado 4 que pase por los puntos dados, tal que simule la curva que al rotar alrededor del Eje x, forme la pieza mostrada.
b) Con base en el inciso anterior, aproximen el volumen de la pieza para saber el material requerido.

Problema C. La trompeta de Torricelli[1] es un sólido formado por la revolución de la curva $y = \frac{1}{x}$ alrededor del eje x, entre $x = 1$ y $x = a$, donde a es un número real. A medida que a toma valores más y más grandes, ¿qué ocurre con el volumen de la trompeta de Torricelli? ¿Es infinito? ¿tiende a algún valor? Expliquen su respuesta e incluyan una argumentación matemática de ella.



Problema D. La región $\mathfrak{R}$ entre dos curvas $f(x) = x$ y $g(x) = x^2$ gira alrededor del Eje X. ¿Cuál será el volumen en revolución resultante?

[1] También llamado el Cuerno de Gabriel, descrito en 1643 en la obra *De solido hyperbolico acuto* del matemático Evangelista Torricelli en el siglo XVII

Actividad 9. El Teorema del Valor Medio para la Integral

Nota: El problema muestra fue resuelto por el profesor junto con los estudiantes

Seleccionen uno de los dos problemas siguientes y trabajen en equipo. En sus soluciones, incluyan su interpretación sobre cómo se utiliza el Teorema del Valor Medio de la integral, el cuál establece que:

Considera una función $f(x)$, entonces el valor promedio $\bar{y}$ de todas las alturas de la función sobre un intervalo $[a, b]$ está dado por:

$$\bar{y} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

Problema muestra. En cierta ciudad, se modelo la temperatura (en °F) ambiental h horas después de las 9 AM a través de la función

$$T(h) = 50 + 14\sin\frac{\pi h}{12}$$

1. ¿Cuál fue la temperatura promedio durante el periodo de 9AM hasta las 9PM?

Problema A. Para estudiar la capacidad pulmonar de una persona, se realiza un experimento estudiando un ciclo respiratorio de 5 segundos. Se registran los volúmenes en litros de aire en los pulmones de la persona persona en diferentes instantes de tiempo. Los cuales se observan en la tabla que encontrarán en este enlace.

- Aproxima una función del volumen V en los pulmones a lo largo del ciclo respiratorio medido en segundos (t) mediante un ajuste polinómico de grado 3. Discutan el dominio de la función, ¿tiene sentido para valores $t \geq 5$? ¿Por qué?
- Según el modelo que obtuvieron, ¿existe un nivel máximo de aire en los pulmones? ¿cuándo se alcanza?
- Analicen con cuidado el modelo que encontraron y contesten: ¿durante qué lapso la persona estuvo inhalando (aspirando aire)? ¿en qué lapso exhaló (expulsando aire)?
- ¿Cuál es el promedio de volumen de aire en los pulmones de la persona estudiada?

Problema B. La velocidad v del flujo sanguíneo a una distancia d (en mm) del eje central de una arteria de radio $0.85mm$ está dado por la expresión siguiente:

$$v(d) = k(0.85^2 - d^2)$$

Donde k es una constante de proporcionalidad.

- ¿Cuál es la velocidad promedio del flujo sanguíneo a lo largo del radio de la arteria?
- Si el radio de la arteria es R, ¿cuál es la velocidad promedio entre $d = 0$ y $d = R$?

Actividad 10. Interpretación geométrica del Teorema del Valor Medio

Problema A. La temperatura (en C°) de una taza de café que se deja sobre una mesa en un cuarto a temperatura ambiente se modela mediante la Ley de Enfriamiento de Newton en términos del tiempo (en minutos) como sigue:

$$T(t) = 20 + 75e^{-0.02t}$$

a) Describan la situación con ayuda del modelo: ¿Cuál fue la temperatura inicial de la taza de café? La Ley de Enfriamiento establece que a medida que transcurre el tiempo, la temperatura del objeto inicial tenderá a parecerse a la temperatura del ambiente. ¿Cuál es la temperatura ambiente según el modelo $T(t)$?
b) ¿Cuánto tiempo transcurrió para que la taza de café esté a 61°C?
c) ¿Cuál fue el promedio de la temperatura de la taza de café durante los primeros 30 minutos?
d) Encuentra un valor c tal que $f(c)$ es igual al promedio encontrado en el inciso anterior. ¿Qué significa este valor c en términos del problema?

Problema B. Sea la función $f(x) = \frac{x}{2}\sin^2\left(\frac{\pi x}{2}\right) + 1$ y $a \in \mathbb{R}$. Un rectángulo R_1 tiene base a y su altura es de 3 unidades. Determinen el valor de a si se cumple que:

$$R_1 = \int_0^a f(x)dx$$

Expliquen su razonamiento, haciendo énfasis en cómo el TVM para integrales fue relevante en la solución.

Problema C. Considera la función $f(x) = x^2$ y un número real $b \in \mathbb{R}^+$.

a) ¿Cuántos valores de b existen para los cuales la siguiente igualdad es verdadera?

$$\frac{1}{b}\int_0^b f(x)dx = \frac{1}{b^2}\int_0^{b^2} f(x)dx$$

Demuestren que no existen otros valores de b que satisfagan dicha ecuación

Actividad 11. Evaluación final

La A11 constituyó una serie de problemas que los estudiantes seleccionaron para resolver. Cada equipo (o estudiantes) eligieron el problema que iban a resolver como parte de su evaluación final. Para consultar la relación de problemas asignados, se puede consultar el siguiente enlace (E# denota el código de bitácora correspondiente):

https://tinyurl.com/4pbuer3a

APÉNDICE 2. EJEMPLAR DE RELATORÍA COMPARTIDA A LOS ESTUDIANTES

Los estudiantes tomaron dos sesiones donde se presentaron algunas funciones y comandos básicos de GeoGebra, a la par que se estudiaron los conceptos de función exponencial y logarítmica. Posterior a esta sesión, se compartió por medio de un archivo de Word una *relatoría* que pudiera dar una idea a los estudiantes de lo que significa registrar en una bitácora las ideas clave. La relatoría se mostrará a continuación, siendo tal cuál como se compartió a los estudiantes:

Diferenciación en funciones trascendentales

Las funciones trascendentales se diferencian de las algebraicas porque tienen una composición particular. En este curso se abordan dos tipos:

1. Funciones exponenciales
2. Funciones logarítmicas

Las preguntas esenciales serán: ¿Cómo se definen? ¿Qué tipo de situaciones pueden modelarse con ellas? ¿Cuál es la forma de derivar estas funciones?

Función exponencial

Definición. Una función exponencial es una función donde la variable por estudiar es un exponente. Es decir, es de la forma:

$f(x) = a^x$, donde $a \in \mathbb{R}$

¿Cuál es la importancia o relevancia de las funciones exponenciales?

Generalmente permiten modelar situaciones de crecimiento poblacional. Por ejemplo, supongamos que realizamos un experimento donde se observa el crecimiento de dos bacterias que se reproducen asexualmente. Cada minuto, cada una de las bacterias se duplica. El total de la población se podría modelar mediante una tabla:

Minutos transcurridos (t)	**Cantidad de individuos (P)**
0	2
1	4
2	8
3	16
4	32
5	64
6	128

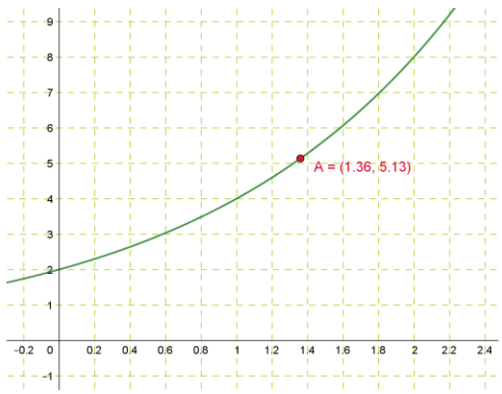
En este ejemplo, podemos establecer la cantidad de individuos P como una función del tiempo, y estas dos cantidades se relacionan con la expresión:

$$P(t) = 2 \cdot 2^t$$

O bien,

$$P(t) = 2^{t+1}$$

La variable es un componente del exponente dado, y funge como la cantidad de tiempo transcurrido una vez que comenzó el experimento. Ahora bien, este ejemplo funciona siempre que transcurra una cantidad entera de tiempo, pues la cantidad de individuos también es entera. Si graficamos la función anterior obtenemos una gráfica como la siguiente:



Los puntos (0,2), (1,4) y (2,8) tienen sentido en términos de la situación, pero, *¿cómo interpretar el punto A(1.36,5.13), por ejemplo?* Es decir, *¿qué significa que P(t) sea un número no entero?* Una forma de extender esta idea es cambiar el significado de la variable P de modo que en vez de describir una cantidad de individuos (bacterias), ahora se mida en *masa de la población*. Así, por ejemplo, P(0)=2 mide la cantidad de masa (en individuos), de modo que P(1.36)=5.13 da como resultado la masa total de individuos: quizás no se haya completado la división celular para que existan individuos completos, pero en el proceso de reproducción celular de las bacterias ha ocurrido un incremento de masa. Llamemos esta medida como m_i (masa de individuos).

¿Cómo cambia la masa de la población a medida que transcurre el tiempo?

Una característica primordial del crecimiento exponencial es que el crecimiento de una población está directamente relacionado con la cantidad de población. Por ejemplo, durante el primer minuto, la población creció un total de 2 m_i; durante el segundo minuto, en total creció 4 m_i; durante el tercer minuto, $8m_i$, etcétera. Es decir, entre más bacterias haya, mayor será el índice de crecimiento. Podría incluso parecer que la tasa de crecimiento es proporcional, lo cual se ilustra en la siguiente tabla:

t	**P(t) inicial**	**Cambio al final del intervalo**
0	2	2
1	4	4
2	8	8
3	16	16
4	32	32

5	64	64
6	128	128

¿Cuál es la tasa de cambio instantánea en un instante de tiempo dado? Por ejemplo, ¿cuál será la velocidad de crecimiento instantánea a los $t = 300$?

En la tabla se muestra el crecimiento en intervalos de un minuto: del minuto 0 al minuto 1, hubo un incremento de 2 m_i. Para la velocidad instantánea, recordemos que se habla de un límite, de la derivada $P'(t)$ en un instante dado. Es decir:

$$P'(t) = \lim_{h\to 0}\frac{P(t+h)-P(t)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{2^{(t+h)+1}-2^{t+1}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{2^{t+1+h}-2^{t+1}}{h}$$

Empleando leyes de los exponentes (¿*Cuáles son las leyes de los exponentes*?) *se separa:*

$$P'(t) = \lim_{h\to 0}\frac{2^{t+1}2^{h}-2^{t+1}}{h}$$

Factorizando el término 2^{t+1} se obtiene:

$$P'(t) = \lim_{h\to 0}\frac{2^{t+1}(2^{h}-1)}{h}$$

Dado que 2^{t+1} no contiene h, podemos *sacarlo* del límite:

$$P'(t) = 2^{t+1}\lim_{h\to 0}\frac{2^{h}-1}{h}$$

Es decir,

$$P'(t) = P(t)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{2^{h}-1}{h}$$

La expresión anterior dice algo importante: $P'(t)$, la tasa de cambio instantánea es proporcional a $P(t)$, la población en un tiempo determinado. Es decir, la derivada de la función t es igual a la población multiplicada por alguna constante, la cuál es igual a lo que sea que de este límite:

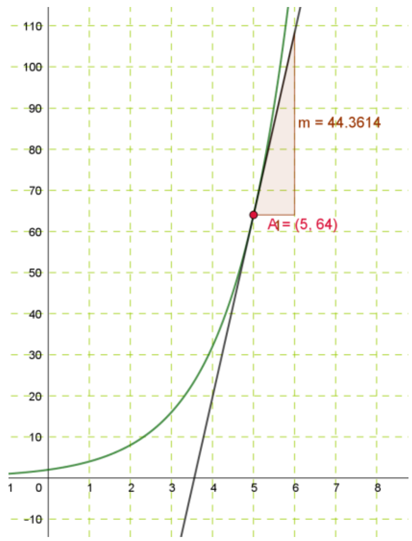
$$\lim_{h\to 0}\frac{2^{h}-1}{h}$$

Este número lo podemos aproximar con la noción aritmética de límite:

h	$\boldsymbol{2^h-1}$	$\boldsymbol{\frac{2^h-1}{h}}$
0.1	0.07177346254	0.71773462536
0.01	0.00695555006	0.69555500567
0.001	0.00069338746	0.69338746258
0.0001	0.00006931712	0.69317120376
0.00001	0.00000693150	0.69314958282

0.000001	0.00000069315	0.69314742079
0.0000001	0.00000006931	0.69314720408

Es decir, esa constante es aproximadamente 0.69314. *¿Cómo comparamos esta idea con la interpretación geométrica de la derivada?* Con ayuda de GeoGebra, vamos a determinar la tasa de cambio instantánea de la masa de la población a los $t = 5$ minutos. Recordemos que, geométricamente, encontrar la tasa de cambio instantánea equivale a obtener la pendiente de la recta tangente en el punto $t = 5$. Usando el comando de Tangentes, se obtiene:



Ahora, con el comando de Pendiente, obtenemos la pendiente de la recta tangente, que es $m = 44.3614$, recordando que esto significa que $P'(5) = 44.3614$. *¿Y para t=6?* Movemos el punto A y obtenemos que la pendiente de la recta tangente es $m = 88.7228$, ¿Y para t=7? Nuevamente obtenemos la pendiente de la recta tangente igual a $m = 177.4457$. ¿Cómo se relaciona el valor de m con la constante $k = 0.69314$? Notemos la siguiente tabla:

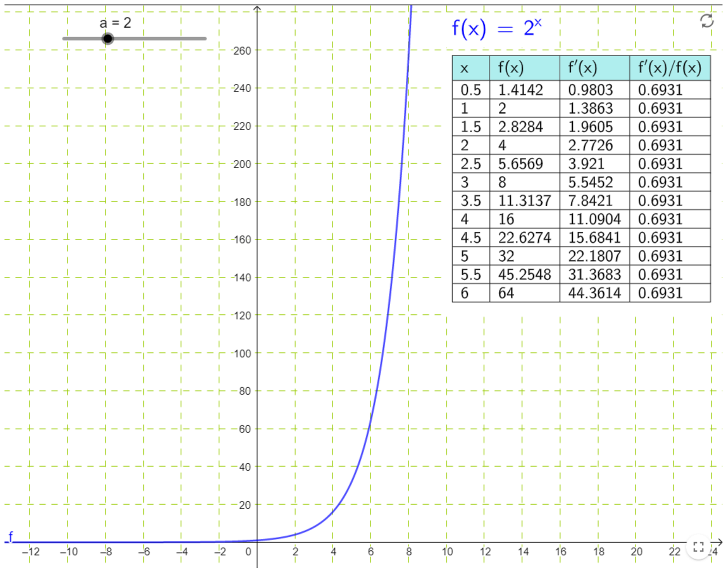
t	P(t)	P'(t)	P'(t)/P(t)
5	64	44.3614	0.69314688
6	128	88.7228	0.69314688
7	256	177.4457	0.69314727

La división $\frac{P'(t)}{P(t)}$ indicia que el cociente siempre es aproximadamente k, es decir, que

$$P'(t) = 0.69314 \cdot P(t)$$

Es decir, la derivada de la función exponencial $P(t)$ es siempre proporcional a la función. Esto no ocurre particularmente para la *base* 2, sino que cambia dependiendo del número que usemos como base. *¿Cómo hacemos una exploración al respecto?* Probemos con una función cuya base sea diferente, y pueda cambiar. En el siguiente modelo dinámico se exploran diferentes bases exponenciales:

https://www.geogebra.org/m/c9kqruen



x	f(x)	f′(x)	f′(x)/f(x)
0.5	1.4142	0.9803	0.6931
1	2	1.3863	0.6931
1.5	2.8284	1.9605	0.6931
2	4	2.7726	0.6931
2.5	5.6569	3.921	0.6931
3	8	5.5452	0.6931
3.5	11.3137	7.8421	0.6931
4	16	11.0904	0.6931
4.5	22.6274	15.6841	0.6931
5	32	22.1807	0.6931
5.5	45.2548	31.3683	0.6931
6	64	44.3614	0.6931

Al mover la base, podemos ver que cambia la constante k, por ejemplo, si $f(x) = 2^x$, $k = 0.6931$; si $f(x) = 3^x$, $k = 1.0986$, etcétera. Sin embargo, notemos que debe existir una base entre 2.7 y 2.8 tal que $k = 1$. Este número existe, y es justamente el número irracional e. Podemos pensar que e se define como un número tal que, si es la base de una función exponencial, su derivada tendrá el mismo valor. Es decir, si $f(x) = e^x$, entonces

$$f'(x) = f(x) = e^x$$

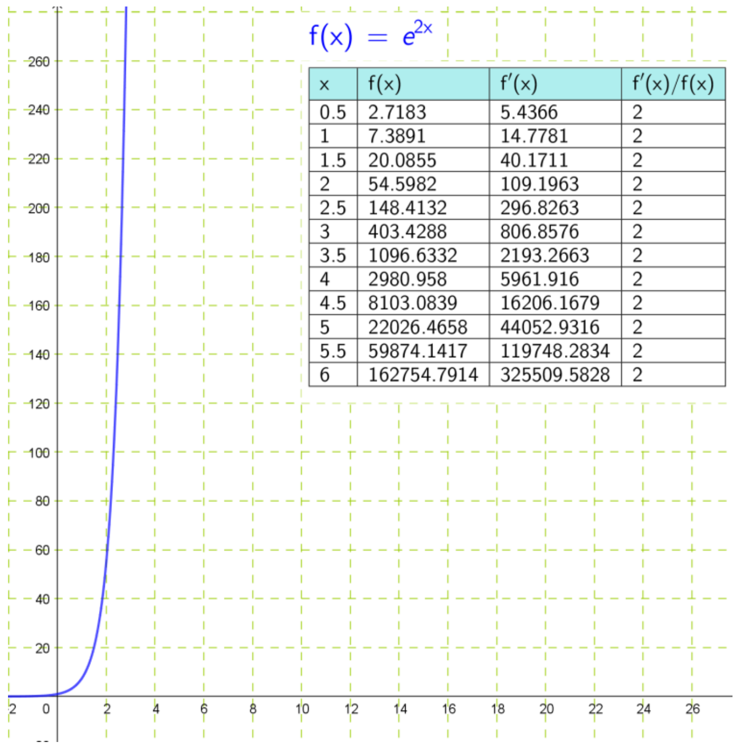
Ejemplo: Supongamos que la masa total de una población de bacterias está dada por la función $M(t) = e^{2t}$, donde t representa el tiempo en minutos transcurrido después de haber comenzado un experimento de observación. *¿Cuál es la proporción que existe entre la velocidad de cambio instantánea de la masa total de la población con respecto al total de la población?*

Se pregunta la “proporción”, es decir, el resultado de dividir $\frac{M'(t)}{M(t)}$. Podemos resolver esto de dos maneras:

a) De manera aritmética. Podemos calcular algunos valores con ayuda de Geogebra, simulando el modelo dinámico visto con anterioridad y obtener diferentes valores. Por ejemplo, a partir de la imagen que se muestra, la tasa de cambio instantánea siempre parece ser el doble de la cantidad de población en ese instante, por lo tanto,

$$\frac{M'(t)}{M(t)} = 2$$

Independientemente del valor de t.



x	f(x)	f′(x)	f′(x)/f(x)
0.5	2.7183	5.4366	2
1	7.3891	14.7781	2
1.5	20.0855	40.1711	2
2	54.5982	109.1963	2
2.5	148.4132	296.8263	2
3	403.4288	806.8576	2
3.5	1096.6332	2193.2663	2
4	2980.958	5961.916	2
4.5	8103.0839	16206.1679	2
5	22026.4658	44052.9316	2
5.5	59874.1417	119748.2834	2
6	162754.7914	325509.5828	2

b) A partir de lo anterior, podemos resolver el problema con ayuda de la regla de la cadena, para obtener $M'(t)$.

$$M'(t) = \frac{d}{dM}e^{2t} \cdot \frac{d}{dt}2t$$
$$M'(t) = 2e^{2t}$$

Entonces:

$$\frac{M'(t)}{M(t)} = \frac{2\cancel{e^{2t}}}{\cancel{e^{2t}}} = 2$$

Extendiendo el problema. Con base en lo anterior, ¿Qué tipo de modelo exponencial describiría una población tal que su velocidad instantánea en cualquier instante de tiempo t es 10 veces la población en ese preciso instante? ¿Y 15 veces?

Consulta profunda. Revisar el siguiente video que describe de manera visual las ideas discutidas en esta lección [considerar activar los subtítulos en español]: https://youtu.be/m2MIpDrF7Es

Función logarítmica

Una definición muy sintética sobre la función logarítmica, es que es la inversa de la función exponencial (¿qué es una función inversa?). De modo informal, la *inversa* de una función es otra función que *deshace* la primera. Por ejemplo, si consideramos la función $f(x) = 2x + 1$, la imagen de x resulta de multiplicar el valor de x por 2 y después sumarle 1:

$$f(3) = 2(3) + 1 = 7$$

¿Qué función podría deshacer esto? Pues otra función g que reste 1 y después divida por 2 el valor obtenido, es decir, $g(x) = \frac{x-1}{2}$ es la inversa de f. Observemos que

$$g(7) = \frac{7-1}{2} = 3$$

Por tanto, lo que ocurre es que si a un número x hallamos su imagen en f, y luego a esta imagen hallamos la imagen en g, se obtiene el número x otra vez:

$$x \to f \to g \to x$$

Las funciones inversas implican la composición de funciones y las relaciones de inyectividad o biyectividad de las funciones, temas de matemáticas 4. Por lo pronto, basta con saber que los logaritmos son una función inversa de los exponenciales.

Definición. Al igual que los exponentes, los logaritmos requieren de una base. De manera aritmética, el logaritmo de un número x con base a se define como:

$$\log_a x = n$$

Donde y es un número tal que:

$$x = a^n$$

Es decir, el logaritmo base a de un número x es un **exponente $\boldsymbol{n}$** tal que, al elevar la base a ese exponente, se obtiene el número x.

Forma logarítmica	Explicación
¿Cuál es el valor de $\boldsymbol{\log_5 25}$?	¿A qué exponente debemos elevar al 5 para obtener 25? 2. Entonces, $\log_5 25 = 2$
¿Cuál es el valor de $\boldsymbol{\log_{10} 10000}$?	¿A qué exponente debemos elevar al 10 para obtener 10,000? Pues las potencias de 10 se obtienen contando los ceros, por lo tanto, el exponente debe ser 4. Entonces $\log_{10} 10000 = 4$
¿Cuál es el valor de $\boldsymbol{b}$ si $\boldsymbol{\log_b 8 = 3}$?	La base es un número que debe ser elevado al cubo (3) para que el resultado obtenido sea 8. Toma en cuenta que $2^3 = 8$, por lo tanto $b = 2$, es decir, $\log_2 8 = 3$
¿Cuál es el valor de $\boldsymbol{x}$ si $\boldsymbol{\log_3 x = 4}$?	En este caso, x es el resultado de la potenciación 3^4. Es decir, $x = 81$ ya que $3^4 = 81$, o bien, $\log_3 81 = 4$
¿Qué significa que $\boldsymbol{\log_x r = m + n}$?	La base es x, el exponente es $m + n$ y el resultado es r, es decir, su forma exponencial es: $$x^{m+n} = r$$

Para profundizar sobre los logaritmos, se recomienda el siguiente enlace.

Notaciones y propiedades de los logaritmos

Los logaritmos, al igual que los exponenciales, se pueden concebir como *operaciones* que se aplican al momento de resolver ecuaciones. Por ejemplo, si se sabe que se cumple la siguiente igualdad:

$$\log_3 x = 4$$

Entonces también se cumple

$$3^{\log_3 x} = 3^4$$

En este caso, ambos elementos de la ecuación se *convirtieron* en exponentes de una base 3. Similarmente, si se tiene la ecuación siguiente:

$$10^x = 1000$$

También se cumple que:

$$\log_{10} 10^x = \log_{10} 1000$$

En este caso, se *aplicó* el logaritmo base 10 a ambos lados de la ecuación. Dada la naturaleza inversa entre los logaritmos y los exponenciales, se sigue que para cualesquiera números reales a, b:

$$\log_a a^b = b$$

$$a^{\log_a b} = b$$

Por ejemplo:

$$\log_4 4^{10} = 10$$

$$9^{\log_9 6} = 6$$

Existen dos tipos de logaritmos que son utilizados frecuentemente:

- El logaritmo base 10, se escribe simplemente como $\log x$, en vez de escribir $\log_{10} x$
- El logaritmo natural, es el logaritmo base e. En vez de escribir $\log_e x$, se escribe como $\ln x$

Así, se cumple lo siguiente:

$$e^{\ln x} = x \quad \leftrightarrow \ln e^x = x$$

$$10^{\log x} = x \ \leftrightarrow \log 10^x = x$$

Para cualquier número real $x > 0$.

Propiedades de los exponentes y logaritmos

Dado que toda expresión logarítmica puede expresarse en forma exponencial, se tienen las siguientes propiedades de los logaritmos:

Propiedad	Motivo	Ejemplo
$\log_a 1 = 0$	$a^0 = 1$	$\log_{10} 10 = 1$
$\log_a a = 1$	$a^1 = a$	$\log_2 8 = \log_2 2^3 = 3$

Propiedad 1. $\boldsymbol{\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c}$

Notemos que:

$$\log_a b = y \quad \leftrightarrow a^y = b$$

$$\log_a c = z \leftrightarrow a^z = c$$

Ahora bien, nótese que

$$bc = a^y a^z = a^{y+z}$$

Es decir,

$$bc = a^{y+z}$$

En su forma logarítmica, esto significa que

$$\log_a(bc) = y + z = \log_a b + \log_a c$$

Por ejemplo, ¿Cuál es el resultado de calcular $\log_2 4 + \log_2 0.25$? Pues por la propiedad anterior, $\log_2 4 + \log_2 0.25 = \log_2(4 \cdot 0.25) = \log_2 1 = 0$

Propiedad 2. $\boldsymbol{\log_a(b^c) = c \cdot \log_a b}$

Nuevamente, conviene transformar las expresiones logarítmicas a su forma exponencial

$$\log_a b = x \leftrightarrow a^x = b$$

Entonces

$$(a^x)^c = b^c$$

Por las leyes de los exponentes

$$a^{cx} = b^c$$

Recordando que los logaritmos se pueden *aplicar* a las ecuaciones:

$$\log_a a^{cx} = \log_a(b^c)$$

$$cx = \log_a(b^c)$$

Pero debe tomarse en cuenta que $x = \log_a b$, entonces se cumple que:

$$c \cdot \log_a b = \log_a(b^c)$$

Esta propiedad es bastante útil, pues permite simplificar operaciones con logaritmos. Por ejemplo:

Si solo sabemos que $\log_3 n = 5$, ¿ Cuál es el valor de $\log_3\left(n^{\frac{1}{5}}\right)$? Por la propiedad 2,

$$\log_3\left(n^{\frac{1}{5}}\right) = \frac{1}{5}\log_3 n$$

Sabiendo que $\log_3 n = 5$, entonces:

$$\log_3\left(n^{\frac{1}{5}}\right) = \frac{1}{5}\log_3 n = \frac{1}{5}(5) = 1$$

¿Cuál es el resultado de $\log_6 36^{10}$? Obtener el valor 36^{10} podría ser extremadamente tardado, pero por la propiedad 2, sabemos que

$$\log_6 36^{10} = 10 \cdot \log_6 36 = 10 \cdot \log_6 6^2 = 10(2) = 20$$

Cambio de base

Muchas calculadoras no cuentan con la posibilidad de evaluar logaritmos de cualquier base, sino de base 10 o natural. En general, siempre es preferible trabajar con logaritmos en base 10 o natural. Para ello existe un procedimiento denominado *cambio de base* y se fundamenta en las propiedades de los exponentes.

Ejercicio. Deseamos calcular $\log_6 10$ solamente usando logaritmos base 10. Supongamos que el resultado es un número x que no conocemos. Entonces:

$$\log_6 10 = x$$

En forma exponencial, esto equivale a que

$$6^x = 10$$

Podemos aplicar logaritmo como una operación a ambos lados de la ecuación:

$$\log 6^x = \log 10$$

Por la propiedad 2 de los logaritmos:

$$x \log 6 = \log 10$$

$$x = \frac{\log 10}{\log 6} = \frac{1}{\log 6} = 1.285097$$

Ahora consideremos otro caso, pero con base natural. ¿Cuál es el valor de $\log_7 8$? Supongamos nuevamente, que el resultado es algún número que deseamos conocer, sea ese número y. Entonces:

$$y = \log_7 8$$

Es equivalente a

$$7^y = 8$$

Aplicando logaritmo como operación a esta ecuación:

$$\ln 7^y = \ln 8$$

Por la propiedad 2:

$$y \ln 7 = \ln 8$$

$$y = \frac{\ln 8}{\ln 7} \approx 1.06862$$

¿Es preferible usar base 10 o base natural? ¿Se obtiene el mismo resultado? En general, el procedimiento puede hacerse para cualquier base. Supongamos que deseamos calcular $\log_a b$ utilizando una base c. Sea $x = \log_a b$, en forma exponencial:

$$a^x = b$$

$$\log_c a^x = \log_c b$$

$$xlog_c a = \log_c b$$

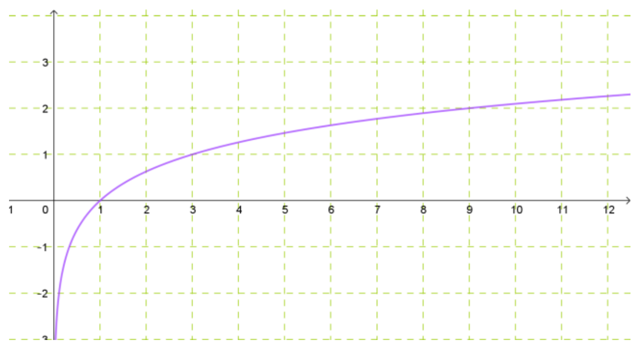
$$x = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

¿Qué significa esto en términos concretos? Que el número siempre se encuentra calculando el logaritmo de cualquier base del número buscado, entre el logaritmo de cualquier base de la base utilizada. Es decir:

$$\log_6 10 = \frac{\log 10}{\log 6} = \frac{\ln 10}{\ln 6} \approx 1.285097$$

Características de la función logarítmica

La mayoría de los graficadores permiten obtener las gráficas de funciones logarítmicas de cualquier base, tal como $f(x) = \log_3 x$.



¿Qué significa el valor $f(5)$?

$f(5) = \log_3 x$ es aproximadamente $f(5) \approx 1.4649$. Es el exponente necesario al que debemos elevar 3 para que de como resultado 5. Es decir, la función $f(x) = \log_3 x$ describe el valor y al que debemos elevar 3, si queremos que de como resultado el número x. Es decir:

$$\log_3 5 = 1.4649 \leftrightarrow 3^{1.4649} = 5$$

¿Para qué valor de x, se cumple que $f(x) = 0$?

Con ayuda de la gráfica podemos ver que si $x = 1$, $f(x) = 0$. Es decir, $\log_3 1 = 0$. Veamos que tiene sentido, pues determinar un valor de x tal que $f(x) = 0$ equivale a encontrar un número que resulta de elevar 3 a la potencia 0. Por las leyes de los exponentes, cualquier número diferente de 0 elevado a la 0 da como resultado 1. Es decir,

$$\log_3 1 = 0 \leftrightarrow 3^0 = 1$$

¿La función está definida para valores negativos de x?

La gráfica no se define para valores negativos, e incluso parece que $x = 0$ es una asíntota vertical. ¿Por qué? Supongamos que deseamos obtener $f(0)$. Este número y es tal que

$$y = \log_3 0 \quad \leftrightarrow \quad 3^y = 0$$

Para cualquier número diferente de 0, no es posible encontrar un exponente tal que el número elevado a dicho exponte de como resultado 0. ¿Por qué parece que el eje Y es una asíntota vertical? Es decir, debe analizarse qué ocurre con la función $f(x) = \log_3 x$ cuando $x \to 0$. Gráficamente podemos ver que $f(x) \to -\infty$ cuando $x \to 0$, es decir, que

$$\lim_{x\to 0} \log_3 x = -\infty$$

¿Qué explicación o lógica podemos dar a este hecho? Pues si tomamos valores de x cercanos a 0, básicamente lo que estamos haciendo es tratar de pensar en qué debe ocurrir con y para que $3^y \to 0$. Si $y = 1$, $3^1 = 3$, está muy lejos de aproximarse al 0; $3^{0.5} = 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3} \approx 1.73$ sigue estando muy lejos de aproximarse al 0. De hecho, $3^0 = 1$, aun está lejos de aproximarse al 0. Los exponentes deben ser entonces negativos si deseamos obtener valores muy pequeños:

y	3^y
-1	0.3333333333333330000000000000000000000000000000000000000000000000
-5	0.0041152263374485600000000000000000000000000000000000000000000000
-10	0.0000169350878084303000000000000000000000000000000000000000000000
-30	0.0000000000000048569357496188600000000000000000000000000000000000
-60	0.0000000000000000000000000000235898248759257000000000000000000000
-100	0.0000000000000000000000000000000000000000000000019403252174826300
-200	0.0000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000

Se observa que 3^{-200} es tan pequeño que no se alcanzan a ver otros decimales. A medida que los números son negativamente grandes, 3^y se aproxima a 0. Es decir,

$$\lim_{y\to -\infty} 3^y = 0 \quad \leftrightarrow \quad \lim_{x\to 0} \log_3 x = -\infty$$

O bien, los exponentes a los que deben elevarse al 3 son negativamente grandes, si deseamos que el resultado sea próximo a 0.

<u>Problema ejemplo</u>

La presión atmosférica disminuye a medida que incrementa la altura. A nivel del mar, la presión promedio de aire es una atmósfera (1atm=1.033227 kg/cm^2). La siguiente tabla muestra los valores de presión (en atmósferas) ante alturas seleccionadas (en kilómetros).

h	**0**	**5**	**10**	**15**	**20**	**25**
p	1	0.55	0.25	0.12	0.06	0.02

a) Discutan la posibilidad de aproximar un modelo $p(h) = a + b \ln h$ para los datos, o bien $h(p) = a + b \ln p$.

b) Usa el modelo aproximado para estimar la altura cuando $p = 0.75$

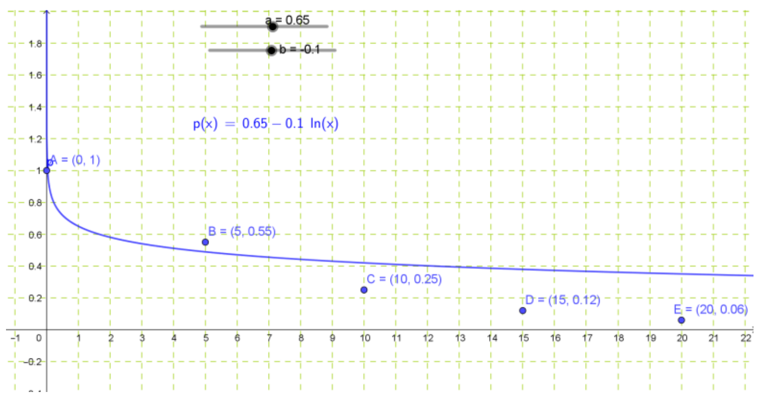
c) Usa el modelo aproximado para estimar la presión cuando $h = 13$

d) ¿Cuál es la tasa de cambio instantánea cuando $h = 5$? ¿Cuándo $h = 20$?

Comprensión del problema

¿Estoy comprendiendo los datos del problema? ¿existe algún término que no entienda? El problema describe una relación inversa entre la presión que puede experimentarse a una altura determinada. A nivel del mar, se refiere convencionalmente a una altura de 0m. La tabla muestra los valores de medidas específicas.

El inciso a y b. En estos incisos, debemos obtener una función que se ajuste a los datos dados. *¿Qué significa obtener un modelo ajustado?* Debemos obtener una función, gráfica o analíticamente, tal que los resultados al evaluarla sean lo más parecidos posibles a los que se muestran en la tabla. Una primera aproximación para hacer esto es definir dos deslizadores, a y b, e introducir la función $f(x) = a + b \ln x$ en Geogebra. Al mover los deslizadores, se obtienen diferentes curvas que parece que *pasan* por los datos. *¿Cómo afectan los coeficientes a y b a la forma de la gráfica?* Mover ciegamente los deslizadores no es una forma eficiente de generar una aproximación: debe notarse que el deslizador a, solo traslada la curva verticalmente, mientras que el deslizador b, modifica qué tanto *varía* la curva a medida que incrementan los valores de x



Esta primera aproximación permite explorar los parámetros importantes de la función logarítmica, pero no es una forma óptima de obtener el modelo. A fin de cuentas, estamos basándonos en la exploración empírica de manera visual. Por ejemplo, si $p(h) = 0.65 - 0.1 \ln h$ es nuestro modelo propuesto, veamos que obtenemos la siguiente tabla:

h	p
0	#¡NUM!
5	0.489056
10	0.419741
15	0.379195
20	0.350427
25	0.328112

¿A simple vista parece satisfactoria la aproximación a los datos del problema? No, igual que en la gráfica, podemos ver que los datos están bastante alejados. La idea es obtener una

expresión algebraica que al sustituir los valores de h, obtengamos valores de p similares (y viceversa para el inciso b)

El inciso c y d. *¿Qué significa estimar la altura cuando* $p = 0.75$*?* Prácticamente, calcular a qué altura obtendríamos una presión de 0.75 atm. Podemos hacerlo de dos maneras, una vez que obtengamos el modelo que consideremos satisfactorio: la primera, resolver la ecuación

$$0.75 = a + b \ln h$$

O bien, utilizar el segundo modelo para calcular

$$h(0.75) = a + b \ln 0.75$$

El inciso d es entonces similar, equivale a preguntarnos, ¿Cuál es la presión atmosférica a los 13 km de altura? Y puede realizarse de las dos maneras.

El inciso e. ¿Cómo interpretamos la tasa de cambio instantánea cuando $h = 5$ en términos del problema? ¿Qué representa el cambio $\frac{dp}{dh}$? En términos matemáticos, se nos está pidiendo obtener el valor de $p'(5)$ y $p'(20)$, pero la interpretación de resultados requiere que nos cuestionemos sobre el significado de la tasa de cambio de los valores involucrados:

$$\frac{\Delta p}{\Delta h} = \frac{cambio\ en\ presión}{cambio\ en\ altura}$$

Esta tasa de cambio describe *cómo cambia la presión atmosférica cuando cambia la altura*. Recordando que la presión atmosférica no tiene una relación lineal con la altura a la que uno se encuentra (por ejemplo, decir que por cada 5 metros de altura la presión atmosférica disminuye 0.5 atm). Dependiendo de la altura a la que estemos, el incremento de altura podría suponer una disminución más o menos drástica de la presión atmosférica.

Solución.

Afortunadamente, puede usarse el comando AjusteLog() de Geogebra, que pide introducir una serie de puntos que nos dará la mejor aproximación logarítmica. No obstante, debe hacerse un ajuste ya que al considerar el punto (0,1), el comando de ajuste logarítmico regresa un mensaje de error, debido a que una función logarítmica no puede admitir h=0 como un valor definido. Un posible ajuste es tomar (0.01, 1), o bien, no considerar el punto A. Esta segunda opción no es preferible, pues regresa valores negativos para cantidades de altura muy grandes. Una posible propuesta es

$$p(h) = 0.4973 - 0.1196\ ln\ h$$

Para el inciso b, no podemos simplemente despejar h y obtenerla en términos de p, pues nos daría como resultado una expresión exponencial. Para ello, podríamos colocar los puntos, pero con las coordenadas invertidas, considerando a h en el Eje Y, mientras que p se ubica en el Eje X. Este ajuste no requiere de modificar los valores de ningún tipo, y puede ser

$$h(p) = 0.8628 - 6.4474\ ln\ p$$

Conviene notar que esta expresión no requiere de ajustes adicionales, y parece mostrar un ajuste más satisfactorio que la expresión $p(h)$, al menos a nivel visual. *¿Existe otra manera de comprobar lo apropiado de cada ajuste?* Podemos obtener los valores numéricos y obtener las diferencias respecto a los datos originales.

Para el primer modelo:

h	**p**	**Error**
0.01	1.04808	-0.0481
5	0.30481	0.2452
10	0.22191	0.0281
15	0.17342	-0.05341719595
20	0.13901	-0.07901042008
25	0.11232	-0.09232245135

Para el segundo modelo:

p	**h**	**Error**
1	0.8628	-0.8628
0.55	4.717294279	0.282705721
0.25	9.800794264	0.199205736
0.12	14.53298712	0.467012877
0.06	19.00198426	0.998015745
0.02	26.08517713	-1.085177125

Las cantidades de error ciertamente son mayores que el anterior pero, *¿esto realmente nos indica algo objetivo sobre lo apropiado de cada uno?* En este caso, hay que notar que los valores de h son mayores que los valores de p, por lo que el error absoluto será lógicamente siempre mayor. Por ello siempre es preferible utilizar otras formas de calcular el error: error proporcional, varianza, desviación estándar, etc.

Incisos c y d. ¿Es irrelevante si se usa cualquiera de los dos modelos? ¿Se obtendrán resultados similares? Para el inciso c, podemos sustituir en el segundo modelo $p = 0.75$ y se obtiene

$$h(0.75) = 0.8628 - 6.4474\ln(0.75) = 2.7176$$

¿Si resolvemos la ecuación $0.75 = 0.4973 - 0.1196\ln h$ obtenemos los mismos resultados? Eso dependerá del ajuste del modelo

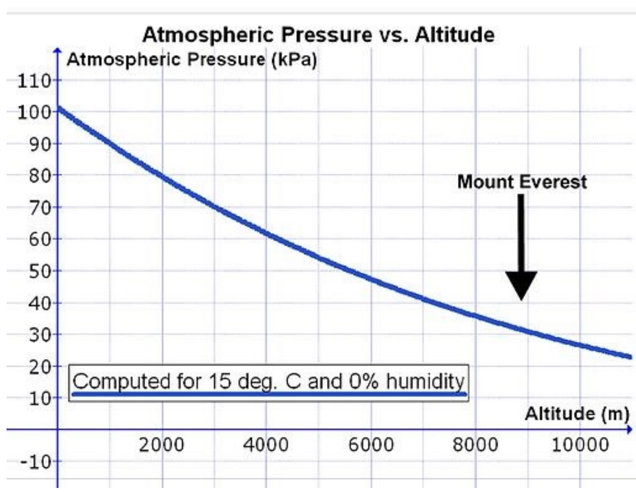
$$0.2527 = -0.1196\ln h$$

$$-2.11288 = \ln h$$

$$e^{-2.11288} = h$$

$$h \approx 0.12089$$

Los resultados son demasiado diferentes, ¿cuál consideraríamos que es el adecuado, según los datos? En realidad, es difícil saberlo, salvo que consideremos investigar en internet algún dato que verifique la relación entre altura y presión. Por ejemplo, la siguiente imagen de Wikipedia muestra que el resultado más factible es el primero:



Para el segundo inciso podemos hacer la misma comparación para comparar ambos modelos:

$$p(13) = 0.4973 - 0.1196\ln(13)$$

$$p(13) = 0.19053$$

$$13 = 0.86286 - 6.4474\ln p$$

$$12.13714 = -6.4474\ln p$$

$$-1.88248 = \ln p$$

$$e^{-1.88248} = p$$

$$p = 0.1522$$

En este caso, los resultados, aunque son distintos, no presentan una variación extrema: una diferencia de 0.04 atm.

Inciso e. Existen varias formas de dar respuesta a este inciso. La primera es utilizar la función $p(h) = 0.4973 - 0.1196 \ln h$ y obtener la derivada. Es decir:

$$p'(h) = d\frac{0.4973}{dh} - 0.1196\frac{d}{dh}\ln h$$

Pero ¿Cómo obtenemos $\frac{d}{dh}\ln h$? En realidad, la forma general de la derivada de la función logarítmica es:

$$\frac{d}{du}\ln u = \frac{u'}{u}$$

O bien,

$$\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x}$$

Pero bien, regresando al problema, se sigue entonces que:

$$p'(h) = 0 - 0.1196\left(\frac{1}{h}\right)$$

$$p'(5) = -0.1196\left(\frac{1}{5}\right) = -0.02392$$

$$p'(20) = -0.1196\left(\frac{1}{20}\right) = -0.00598$$

Según estos valores, al aumentar la altura estando a 5km, la presión atmosférica disminuye a una tasa de 0.02392 atm/km, mientras que, a los 20km, disminuye a una tasa de 0.00598 atm/km. Es decir, disminuye casi cuatro veces más lento.

Otra forma de dar respuesta es usando el segundo modelo, pero despejándolo para obtener una función $p(h)$. Recordemos que el modelo es

$$h(p) = 0.8628 - 6.4474\ ln\ p$$

Para obtener $p(h)$ debemos despejar p:

$$h - 0.8628 = -6.4474 \ln p$$

$$\frac{h - 0.8628}{-6.4474} = \ln p$$

$$e^{\left(\frac{h-0.8628}{-6.4474}\right)} = p$$

Es decir,

$$p(h) = e^{\left(\frac{h-0.8628}{-6.4474}\right)}$$

Derivando, usando la regla de la cadena:

$$p'(h) = e^{\left(\frac{h-0.8628}{-6.4474}\right)} \cdot \frac{d}{dh}\left(\frac{h-0.8628}{-6.4474}\right)$$

$$p'(h) = e^{\left(\frac{h-0.8628}{-6.4474}\right)} \cdot \left(\frac{1}{-6.4474}\right)$$

No es una expresión muy amigable de trabajar, pero solamente hay que sustituir. Otra forma de emplear este modelo es derivando implícitamente, considerando a p como una función de h:

$$h = 0.8628 - 6.4474\ ln\ p$$

$$\frac{dh}{dh} = \frac{d}{dh}0.8628 - 6.4474\frac{d}{dh}\ln p$$

$$1 = 0 - 6.4474\ \left(\frac{1}{p}\right)p'$$

Recuerda que $p' = \frac{dp}{dh}$, lo que estamos tratando de determinar. Entonces:

$$1 = -6.4474\ \frac{p'}{p}$$

$$\frac{p}{-6.4474} = p'$$

Pero si $h = 5$, entonces $p = 0.526404674$. Así:

$$p'(5) = \frac{0.5264}{-6.4474} \approx -0.08164$$

Nuevamente, obtenemos un valor diferente que debemos considerar como probablemente el más apropiado.

Extensión de los problemas.

Extender un problema es tomarlo como punto de partida para explorar otras ideas conectadas. Al resolver un problema, ponemos en juego diferentes conocimientos que podemos profundizar o afianzar al preguntarnos más cosas al respecto. Por ejemplo, en la solución del problema anterior, solamente se presentó la fórmula de derivación de la función logarítmica. Podríamos cuestionarnos, ¿Cómo se obtiene dicha expresión? Pues bien, una sencilla forma de obtener la expresión de la derivada del logaritmo natural es utilizando la regla de la cadena y sabiendo lo siguiente:

$$\frac{d}{dx}x = 1$$

Del lado derecho, recordando que $e^{\ln x} = x$

$$\frac{d}{dx}e^{\ln x} = 1$$

Aplicando la regla de la cadena a la función compuesta $y = e^{\ln x}$:

$$e^{\ln x} \cdot \frac{d}{dx} \ln x = 1$$

Recordando nuevamente que $e^{\ln x} = x$:

$$x \frac{d}{dx} \ln x = 1$$

$$\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}$$

Continuando con la extensión, podemos notar que solo conocemos la derivada de la función exponencial de base e. *¿Qué ocurre con las derivadas de las funciones exponenciales de cualquier base?* En la lección sobre función exponencial, se determinó que cualquier función exponencial de base $a \in \mathbb{R}$ tiene por derivada

$$f'(x) = k \cdot f(x)$$

Donde k es alguna constante que depende de la base a. De hecho,

$$k = \lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h}$$

Resolver ese límite parece ser complicado, pero podemos encontrar otra manera de obtener una expresión de la derivada de cualquier función exponencial, considerando que si los logaritmos pueden cambiarse de base, claramente también las expresiones exponenciales. Por ejemplo, considera la función exponencial siguiente:

$$f(x) = 7^x$$

Recordemos que toda función exponencial es inversa a las funciones logarítmicas de igual base, podemos hacer el siguiente arreglo:

$$f(x) = e^{\ln 7^x}$$

El exponente del número e, es la expresión $\ln 7^x$. Recordando la propiedad 2 de los logaritmos:

$$\ln 7^x = x(\ln 7)$$

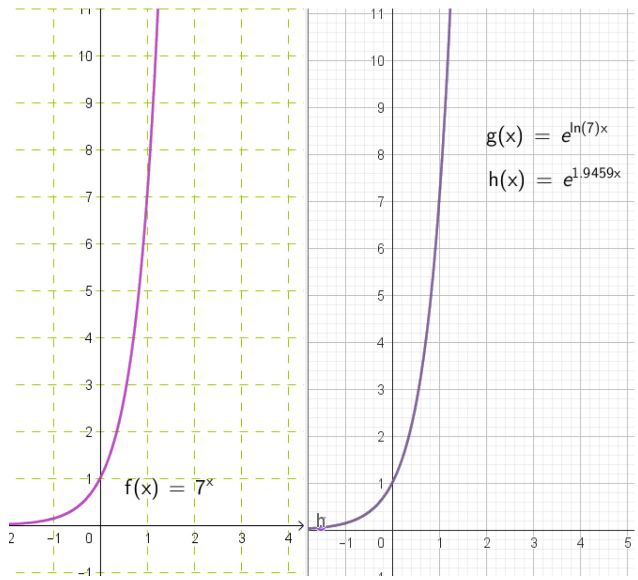
Es decir

$$f(x) = e^{\ln 7^x} = e^{x\,(\ln 7)}$$

Dado que $\ln 7 \approx 1.9459$, la función anterior se puede escribir como

$$f(x) = e^{1.9459x}$$

Veamos que en un graficador, ambas funciones son equivalentes:



Es decir, podemos transformar cualquier función exponencial en una función exponencial natural equivalente.

Función exponencial	**Equivalente natural**
$\boldsymbol{f(x) = 2^x}$	$g(x) = e^{(\ln 2)x}$
$\boldsymbol{f(x) = 5^x}$	$g(x) = e^{(\ln 5)x}$
$\boldsymbol{f(x) = 10^x}$	$g(x) = e^{(\ln 10)x}$
$\boldsymbol{f(x) = \pi^x}$	$g(x) = e^{(\ln \pi)x}$

Por lo tanto, podemos regresar al problema planteado, sea $f(x) = a^x$ $a \in \mathbb{R}$ una función exponencial cualquiera. ¿Cuál es su función derivada?

$$f(x) = a^x = e^{(\ln a)x}$$

Por la regla de la cadena:

$$f'(x) = e^{(\ln a)x} \cdot \frac{d}{dx}(\ln a)x$$

Considera que $\ln a$ es una **constante,** entonces:

$$f'(x) = e^{(\ln a)x} \cdot (\ln a)(1)$$

$$f'(x) = \ln a \;\; e^{(\ln a)x}$$

Sin embargo, $e^{(\ln a)x} = a^x$, entonces:

$$f'(x) = (\ln a)a^x$$

O bien,

$$f'(x) = \ln a \cdot f(x)$$

Por lo tanto, esa constante k que habíamos obtenido es precisamente el valor $k = \ln a$. De manera general, la derivada de una función exponencial es

$$\frac{d}{du} a^u = (\ln a) a^u \cdot u'$$

Ejemplo. Encontrar la derivada de la función $f(x) = 7^x$.

$$f'(x) = \ln 7 \cdot 7^x$$

O bien, aproximadamente

$$f'(x) = 1.9459 \cdot 7^x$$

APÉNDICE 3. SESIÓN INTRODUCTORIA A GEOGEBRA

Sesión de introducción. Durante la tercera sesión, se utilizó un problema del libro de texto para explorar algunas funciones de GeoGebra, la Figura A muestra la tarea que se utilizó para explorar los comandos de la barra de entrada, intersección de puntos, puntos controlados, derivación, extremos, recta tangente y el trazado y medición de la pendiente de rectas tangentes.

Ejemplo

Para estimar la cantidad de defoliación causada por la polilla gitana durante un año, un guardabosques midió la masa de huevecillos en $\frac{1}{40}$ de acres del otoño pasado. El porcentaje y de defoliación se aproxima mediante la expresión:

$$y = \frac{300}{3 + 17e^{-0.06255x}}$$

Donde x es la masa de huevecillos en miles (si $x = 1$, se lee como "1000 masas de huevecillos).

a) Usando la gráfica de la función, estima el porcentaje de defoliación si 2000 masas de huevecillos son contadas
b) Estimar el número de masas de huevecillos existentes, si se observa que aproximadamente 2/3 del bosque está defoliado.
c) Estima la rapidez a la que aumenta la defoliación si hay 1500 masas de huevecillos.
d) Estima el valor de x para el cuál el porcentaje de defoliación incremente con mayor rapidez

Figura A. Tarea de introducción

Primero, se discutió la idea de interpretar el enunciado del problema, enfatizando la existencia de dos variables, la variable y que es un porcentaje (%) de qué tanta pérdida de follaje se estima que hay en una zona del bosque descrito por la situación, y la variable x que representa una cantidad de huevecillos medidas en masas unitarias. Los estudiantes notaron que el primer inciso se trata de un ejercicio de *sustitución,* es decir, se calcular el valor de y, para $x = 2$. Para resolver este ejercicio en GeoGebra, se discutió con los estudiantes el uso de la Vista Algebraica y la Vista Gráfica como elementos clave: en la Vista Algebraica los estudiantes pueden introducir objetos matemáticos en forma algebraica o numérica, los cuales podrán ser representados en la Vista Gráfica. En la Figura B se ilustra cómo introducir una función $f(x)$ genera su gráfica asociada.

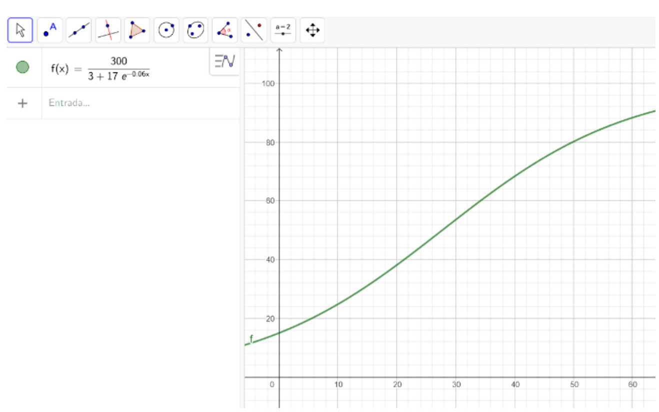


Figura B. Introducción de una función en la barra de entrada

Posteriormente, para resolver el primer inciso, primero se sugirió a los estudiantes utilizar el comando de Punto en objeto para colocar un punto sobre la gráfica de f y visualizar sus coordenadas en la Vista Algebraica, haciendo énfasis que al introducir un objeto en la Vista Gráfica se genera una representación algebraica en la Vista Algebraica (Figura 9). Aquí se mostró con los estudiantes cómo a través del punto sobre la gráfica puede verse la relación entre los valores de x y y del problema descrito. Cuando manualmente se mueve el punto de tal forma que su abscisa es 2, se obtiene que su ordenada es aproximadamente 16.67. Este proceso de aproximación puede refinarse introduciendo en la barra de entrada $f(2)$. La idea por destacar en este tipo de exploraciones es que a la par que se revisan las herramientas de la interfaz de GeoGebra, se realizan exploraciones de conceptos que podrían ser aún débiles en los estudiantes y, principalmente, que cada herramienta utilizada sea relacionada con conceptos o procesos matemáticos.

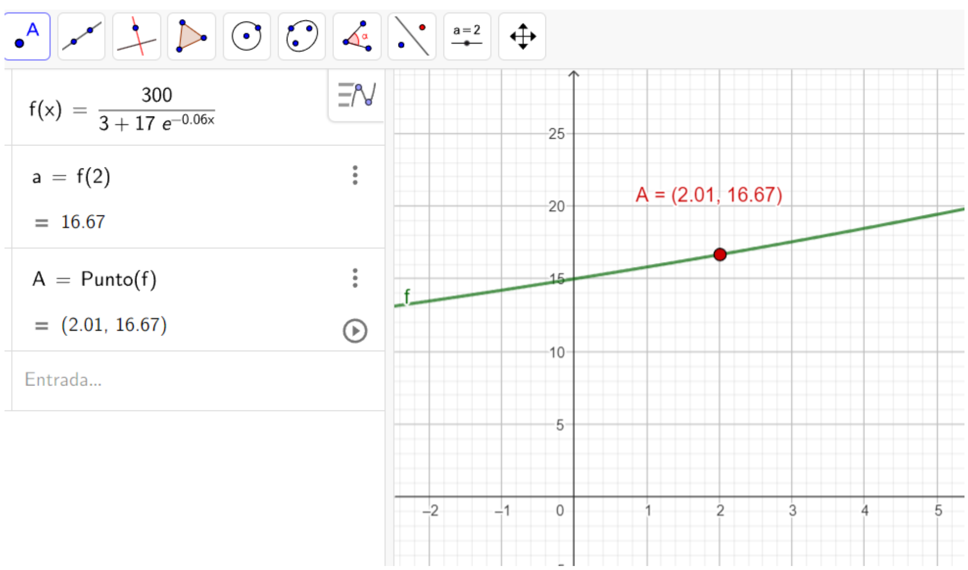


Figura C. ¿Cuál es el valor de $f(2)$?

Habiendo realizada esta exploración, se pidió a los estudiantes explorar las herramientas de GeoGebra para resolver el segundo inciso: ¿para qué valor de x, la defoliación es de $2/3$? En la interpretación de este problema, los estudiantes discutieron el significado de $2/3$, que en términos de porcentajes representa un $66.\overline{6}\%$. La primera aproximación sugerida por los estudiantes fue la de mover el punto A hasta que la ordenada tuviera un valor de 66.66, que prontamente fue calificado como un método *poco eficiente* por algunos estudiantes. Sin embargo, un estudiante sugirió introducir la expresión $66.6 = f$ en la barra de entrada, lo cual genera una recta vertical (Figura 10) que es la solución a la ecuación

$$66.6 = \frac{300}{3 + 17e^{-0.06255x}}$$

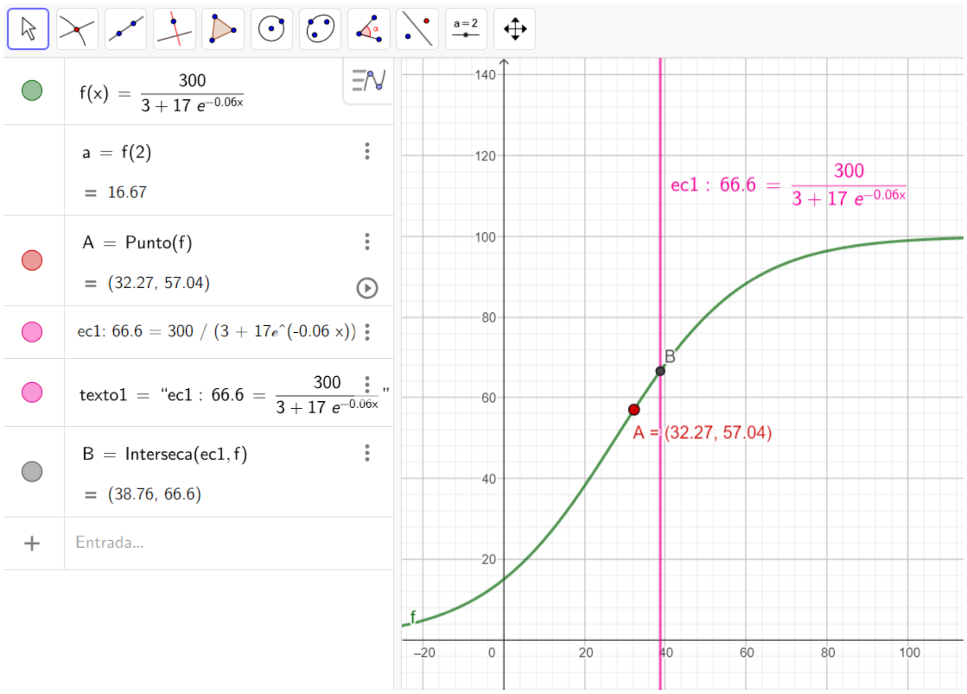


Figura D. Solución del inciso b) de la tarea de introducción

¿Cómo utilizar dicha recta para encontrar una solución *exacta*? Se mostró a los estudiantes el uso del comando de *Intersección* para encontrar el punto B, donde la gráfica de f interseca a la recta vertical obtenida. En la Vista Algebraica se observa que las coordenadas de B son $(38.76,\ 66.6)$, concluyendo entonces que cuando hay 38.76 mil masas de huevecillos, la defoliación es del 66.6% o bien, de 2/3. En el tercer inciso, los estudiantes notaron que necesitaba determinarse el valor de $f'(1.5)$, pues la *rapidez* se puede asociar con el concepto de velocidad instantánea, estudiado con anterioridad. No obstante, se pidió a los estudiantes tratar de encontrar una solución usando las herramientas de GeoGebra; cabe destacar que los estudiantes conocían ya el comando de Tangente a una curva y de pendiente de una recta, pues fue explorado en la primera sesión (Apéndice 2). El equipo 2 compuesto por una terna de estudiantes muestra una transcripción que sintetiza una de las aproximaciones que se compartió con el resto del grupo:

c) Estima la rapidez a la que aumenta la defoliación si hay 1500 masas de huevecillos.

- ★ El aumento empieza rápido, pero en cierto momento empieza a disminuir la velocidad, aún así mientras más huevecillos más defoliación hay.
- ★ Camino largo, como se hizo antes, solo que ahora ponemos x en lugar de y, ponemos $x = 1.5$, después ponemos el punto con el comando de intersección. Teniendo eso, con ayuda del comando tangente, que debemos de marcar una curva y después el punto, nos saldrá la recta, por último con el comando pendiente, en el cual debemos de seleccionar la recta (tangente).

Figura E. Solución del inciso C por una terna de estudiantes

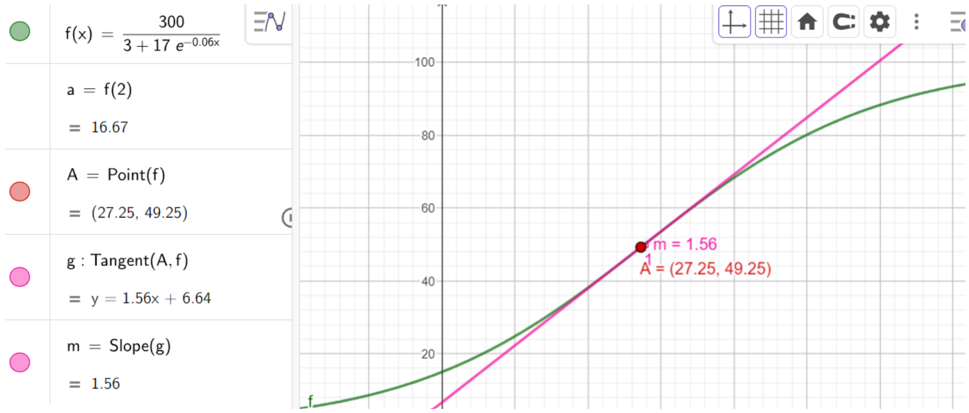


Figura F. https://www.GeoGebra.org/m/eju7pyjz

Es decir, estos estudiantes encontraron la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en el punto donde $x = 1.5$. Esta solución fue de utilidad para recordar a los estudiantes el significado geométrico de la derivada y se complementó agregando que es posible introducir en la barra de entrada la expresión $f'(1.5)$ para obtener la respuesta. Se retomó la idea que presentaron los estudiantes sobre el hecho de que, aunque la defoliación siempre aumenta, se presenta un comportamiento asintótico que se relaciona con el hecho de que la tasa de defoliación respecto al aumento de masas de huevecillos va en disminución. Esta última afirmación se exploró al trazar la recta tangente a la gráfica de f en el punto A, y se notó que la pendiente de esta recta comienza a disminuir cuando x adquiere valores cada vez mayores (Figura 12). El comportamiento de la pendiente de la tangente para diferentes valores de x puede estudiarse de manera general al introducir en la barra de entrada la expresión f' o $f'(x)$, lo que inmediatamente genera la gráfica de la función derivada de f. Así para responder el inciso d, equivale a determinar el máximo de la gráfica de f' o bien, a encontrar la abscisa del punto A para la cual la pendiente de la recta tangente está *lo mayor vertical* posible. Una vez que los estudiantes exploraron la solución de esta manera, se mostró el uso de la herramienta *Extremos* que permite encontrar los puntos máximos y mínimos de una gráfica, obteniendo así el punto $(27.73, 1.56)$, indicando que la tasa de defoliación máxima es de 1.56% por cada mil huevecillos, y se alcanza cuando hay 27.73mil huevecillos. Se enfatiza que esta sesión sirvió para presentar la interfaz de las herramientas principales de GeoGebra, y sirvió como un punto de partida para que los estudiantes comenzaran a explorar el tipo de recursos que pueden emplear para resolver problemas futuros.

APÉNDICE 4. DESGLOSE DE CÓDIGOS POR FRECUENCIA DE LAS VENTAJAS Y DESVENTAJAS PERCIBIDAS DEL TRABAJO EN LA BITÁCORA

	Código	#N	Descripción
Ventajas	Aprendizaje	13	El solo hecho de trabajar en una bitácora se identifica como una estrategia de aprendizaje
	Nuevo	10	Los estudiantes se sienten motivados al trabajar de una forma nueva o innovadora
	Recordar	8	La bitácora sirve de referencia para retomar ideas anteriores
	Práctico	7	Se refiere a elementos como la facilidad, naturalidad o flexibilidad del trabajo, en comparación con un ambiente tradicional
	Orden	7	Permite apreciar con mejor estructura los temas del curso o las relaciones entre los conceptos
	Complementar	6	Asocian el trabajo de la bitácora con la posibilidad de incluir consultas externas en videos, sitios web o Khan Academy
	Experimentar	6	Se asocia el trabajo de la bitácora con el uso de GeoGebra para explorar conceptos y problemas matemáticos
	Utilidad	5	Consideran la bitácora como un producto que puede ser relevante en sus estudios universitarios
	Metacognición	5	Trabajar en la bitácora permite r ideas y refinarlas, aclarar o plantear dudas y resolver obstáculos cognitivos
	Retro	4	Consideran que la bitácora facilita el proceso recibir y seguir la retroalimentación del profesor
	Dinamismo	3	La bitácora se asocia con un estudio dinámico del Cálculo, en términos de movimiento y variación
	Links	3	Poder usar links sobre las construcciones en GeoGebra en Google Docs se percibe como un elemento positivo de la bitácora
	Formato	2	Permisibilidades propias de poder editar un documento en tiempo real como el Google Docs
	Justicia	2	Se percibe como una herramienta evaluativa justa para todos y que permite a los estudiantes claridad en la evaluación
	Equipo	2	La bitácora facilita el trabajo y aprendizaje colaborativo
	Teléfono	2	Los estudiantes podían consultar y trabajar en su bitácora a través de su teléfono y podían acceder a ella en cualquier momento
	Ninguna	1	Ninguna ventaja percibida
	Nexam	1	Es una alternativa preferible a evaluaciones tradicionales, principalmente exámenes escritos
	Tiempo	1	Se percibe la bitácora como una forma flexible de trabajar que se adapta a los tiempos de los estudiantes

Desventajas	Expresarse	8	Se percibe dificultad al redactar textualmente las ideas matemáticas y los argumentos de los estudiantes
	Formato	7	Google Docs no se percibe como un sistema idóneo
	Registro	6	Los estudiantes encuentran dificultades para registrar lo que ocurre en clase o bien, retomar sus razonamientos de manera posterior
	Carga	4	El trabajo con la bitácora implica una carga de trabajo mayor que formatos tradicionales
	Equipo	4	El trabajo en equipo se percibe de manera negativa al trabajar con una bitácora digital
	Tiempo	4	Los estudiantes no contaron con el tiempo que deseaban para poder trabajar en su bitácora
	Disciplina	4	Los estudiantes no contaban con hábitos que les permitiera trabajar con mayor continuidad en su bitácora
	Orden	4	Representó un desafío poder ordenar los temas del curso de manera propia
	Publicidad	2	Se percibe de manera negativa el hecho de que sus compañeros puedan acceder a su bitácora
	Continuidad	2	Se rechazó la necesidad de trabajar de manera continua en una bitácora digital
	Justificar	1	Se percibe de manera negativa el énfasis en la justificación de las actividades al trabajar con la bitácora
	Herramienta	1	Se percibe negativamente el uso de un nuevo formato de trabajo, pues implica gran dificultad adaptarse a él
	Idea	1	Los estudiantes consideran que no fueron capaces de reflejar fielmente sus ideas en la bitácora

APÉNDICE 5. DESGLOSE POR BITÁCORAS DE VENTAJAS Y DESVENTAJAS

Bitácora	Ventajas (códigos)	Desventajas (códigos)
1	Recordar; Aprendizaje	Expresarse; Justificar
2	Complementar; Recordar; Aprendizaje; Nuevo; Dinamismo	Registro; Tiempo; Expresarse; Disciplina
3	Justicia; Aprendizaje; Complementar; Metacognición; Utilidad; Nuevo; Experimentar; Orden; Links; Practico	Formato; Equipo; Registro
4	Ninguna	Carga; Expresarse; Publicidad
5	Aprendizaje; Nuevo; Orden; Complementar	Equipo; Tiempo; Carga; Disciplina
6	Practico; Orden; Formato; Nuevo; Aprendizaje; Recordar	Equipo; Registro
7	Recordar; Aprendizaje	Carga
8	Recordar; Aprendizaje; Utilidad; Nuevo	Orden; Carga
9	Orden; Practico; Metacognición; Experimentar; Recordar	Formato; Disciplina; Herramienta
10	Practico; Aprendizaje; Retro; Experimentar	Formato; Equipo; Orden
11	Nuevo	Expresarse
12	Recordar; Experimentar; Links; Retro; Metacognición; Dinamismo; Teléfono; Orden; Nuevo	Formato
13	Justicia; Retro; Practico; Experimentar; Nuevo; Recordar; Aprendizaje; Metacognición; Equipo; Utilidad	Formato; Tiempo; Publicidad; Formato
14	Aprendizaje; Complementar; Metacognición	Expresarse; Idea
15	Nuevo; Nexam; Links; Teléfono; Practico; Dinamismo; Equipo; Formato; Orden; Complementar;	Registro; Continuidad; Expresarse;
16	Complementar; Aprendizaje; Utilidad; Orden	Registro
17	No respondió	No respondió

18	Aprendizaje	Formato; Orden; Expresarse
19	Nuevo; Experimentar; Retro; Utilidad	No respondió
20	Aprendizaje; Practico; Tiempo	Formato; Disciplina; Continuidad
21	Ninguna	Expresarse; Tiempo; Registro; Orden

APÉNDICE 6. SÍNTESIS DEL DESEMPEÑO POR ACTIVIDAD Y BITÁCORA

Esta tabla sintetiza de manera muy general el desempeño de las bitácoras por cada actividad. Las columnas A# representan las actividades descritas en el Apéndice 1, en cada celda, hay un número entre -1 y 2. Estos no representan una calificación, sino un código agrupador, sobre el desempeño de los estudiantes. Para cada actividad, se planteó una forma *esperada* en la que los estudiantes podrían abordarla. A partir de esto, se generaron los siguientes códigos:

Código	Nombre del código	Aspectos característicos
-1	No incluido	Los estudiantes no incluyeron esta actividad en su bitácora, o no la hicieron en clases.
0	Desempeño esperado	Los estudiantes resolvieron el problema similar a la forma *esperada,* una vez que encuentran una solución, concluyen con sus exploraciones.
1	Desempeño ligeramente mayor al esperado	Emplean GeoGebra para encontrar una forma adicional de argumentar o resolver la actividad
2	Desempeño mayor al esperado	Exploran actividades adicionales con GeoGebra; emplean GeoGebra para extender las actividades, investigando nuevas relaciones matemáticas.

Bitácoras	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9	A10	A11 AF	Comentario General
01 bina	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	Descripciones escasas, bitácora enfocada a describir su procedimiento; caminos lineales de solución. Consultas externas y en KA para complementar su trabajo.
02 terna	2	2	2	1	0	1	-1	1	1	1	2	Descripciones detalladas, la tecnología para ampliar sus concepciones y complementar sus recursos matemáticos. Consultas externas para profundizar en los conceptos, buen trabajo en KA.
03 bina	2	-1	1	0	-1	2	1	0	1	1	2	Descripciones breves, emplean tecnología para ampliar sus concepciones y complementar sus recursos matemáticos. Consultas frecuentes en KA para adquirir recursos.
04 bina	0	-1	2	0	1	2	-1	1	0	0	1	Descripciones escasas, emplea tecnología para ampliar sus concepciones y complementar sus recursos matemáticos. Consultas frecuentes en KA para adquirir recursos.
05 bina	0	0	1	0	0	1	-1	0	2	0	2	Descripciones escasas, emplea tecnología para ampliar sus concepciones y complementar sus recursos matemáticos. Consultas frecuentes en KA para adquirir recursos.
06 solo	2	1	2	-1	0	-1	1	0	0	2	-1	Descripciones escasas, emplea tecnología para ampliar sus concepciones y complementar sus recursos matemáticos. Consultas frecuentes en KA para adquirir recursos.
07 solo	1	2	2	2	2	-1	1	1	1	0	2	Descripciones breves, emplean tecnología para ampliar sus concepciones y complementar sus recursos matemáticos. Consultas frecuentes en KA para adquirir recursos.

08 bina	0	0	1	0	-1	1	2	0	1	0	2	Descripciones escasas, emplea tecnología para ampliar sus concepciones y complementar sus recursos matemáticos. Consultas frecuentes en KA para adquirir recursos.
09 terna	2	1	-1	-1	0	2	-1	-1	1	2	2	Descripciones escasas, emplean tecnología para ampliar sus concepciones y complementar sus recursos matemáticos. Consultas frecuentes en KA para adquirir recursos.
10 bina	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	Desarrollan múltiples vías de explorar problemas, plasman sus ideas con detalle, poca referencia a KA o consultas externas. Alto enfoque en sus procesos.
11 bina	-1	-1	2	-1	0	-1	-1	0	1	-1	1	Descripciones escasas, bitácora enfocada a describir su procedimiento; caminos lineales de solución. Consultas externas y en KA para complementar su trabajo.
12 solo	2	2	2	2	2	-1	2	2	2	2	2	Desarrolla múltiples vías de explorar problemas, plasma sus ideas con detalle, poca referencia a KA o consultas externas. Alto enfoque en sus procesos.
13 bina	1	2	1	2	1	2	2	1	0	2	2	Descripciones detalladas, la tecnología para ampliar sus concepciones y complementar sus recursos matemáticos. Consultas externas para profundizar en los conceptos, buen trabajo en KA.
14 solo	0	0	1	-1	0	-1	0	2	0	-1	2	Descripciones breves, usa la tecnología para ampliar sus concepciones y complementar sus recursos matemáticos. Emplea soluciones analíticas
15 bina	1	1	1	0	0	1	1	0	1	2	1	Explican sus procedimientos; emplean tecnología para ampliar sus concepciones y complementar sus recursos matemáticos. Consultas frecuentes en KA para adquirir recursos.
16 terna	0	1	1	1	0	0	1	2	2	2	1	Explican sus procedimientos; emplea tecnología para ampliar sus concepciones y complementar sus recursos matemáticos. Consultas frecuentes en KA para adquirir recursos.
17 bina	0	1	-1	1	0	-1	-1	-1	1	0	0	Descripciones escasas, bitácora enfocada a describir su procedimiento; caminos lineales de solución. Consultas externas y en KA para complementar su trabajo.
18 solo	0	1	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	Descripciones escasas, bitácora enfocada a describir su procedimiento; caminos lineales de solución. Consultas externas y en KA para complementar su trabajo.
19 solo	0	1	1	1	0	0	-1	0	0	0	1	Descripciones escasas, bitácora enfocada a describir su procedimiento; caminos lineales de solución. Consultas externas y en KA para complementar su trabajo.
20 solo	0	1	-1	2	-1	1	1	-1	-1	-1	2	Descricpiones profundas sobre sus procedimientos, avances inconsistentes en la bitácora. Refuerza su trabajo con información en línea.
21 solo	-1	1	0	-1	0	-1	1	1	2	2	2	Descripciones detalladas, la tecnología para ampliar sus concepciones y complementar sus recursos matemáticos. Consultas externas para profundizar en los conceptos, buen trabajo en KA. Emplea soluciones analíticas

La tabla tiene como propósito dar una visión panorámica y sintetizada del desempeño de los estudiantes. El objetivo de esta codificación no fue cuantificar el desempeño de los estudiantes, sino generar un apoyo visual para describir el desarrollo de las actividades a lo largo del curso. La versión completa de la tabla anterior se encuentra en el siguiente enlace (por su extensión, conviene consultarla en línea):

https://tinyurl.com/yrux838k

APÉNDICE 7. ENLACES A LAS BITÁCORAS DIGITALES POR PERFILES DE TRABAJO

A) Bitácoras categorizadas bajo el perfil procedimental

Código de bitácora	Integrantes (Nombres)	Enlace
Bitácora 1	Padme y Alejandra	http://tinyurl.com/54h6vt6v
Bitácora 5	Percy y Ángel	http://tinyurl.com/m6rwuxfm
Bitácora 11	Kevin y Valeria	http://tinyurl.com/3v2xryku
Bitácora 18	Carlos	http://tinyurl.com/yverhn5n
Bitácora 19	Mauricio	http://tinyurl.com/wsc7d8st

B) Bitácoras categorizadas bajo el perfil inquisitivo

Código de bitácora	Integrantes (Nombres)	Enlace
Bitácora 2	Dante, Ian y Ariadna	http://tinyurl.com/2dckzzhh

Bitácora 3	Daniela y Susana	http://tinyurl.com/2ph5kmbc
Bitácora 4	Fernando y Danna	http://tinyurl.com/496tyvrj
Bitácora 6	Atziry	http://tinyurl.com/yjm2pv2p
Bitácora 7	Kaori	http://tinyurl.com/e7zrkshc
Bitácora 8	Manuel y Jonathan	http://tinyurl.com/msaub8yh
Bitácora 9	Abraham, Alex y Fernando	http://tinyurl.com/3m5pa9ev
Bitácora 14	Eric	http://tinyurl.com/mr3327p5
Bitácora 16	Víctor, Josué y Ana	http://tinyurl.com/mtfhjvba
Bitácora 17	Andrés y América	http://tinyurl.com/4cn2deyu

Bitácora 20	Hugo	http://tinyurl.com/mppn54v3
Bitácora 21	Ashley	http://tinyurl.com/4hhjzj68

C) Perfil analítico

Código de bitácora	Integrantes (Nombres)	Enlace
Bitácora 10	Samuel y Ricardo	http://tinyurl.com/yc8n6vt4
Bitácora 12	Ferrán	http://tinyurl.com/29vt98zz
Bitácora 13	Arturo y Johana	http://tinyurl.com/bdzjj26m
Bitácora 15	Jorge y José	http://tinyurl.com/mpvjjsnc

APÉNDICE 8. COMPARACIÓN DE TRES PERFILES DE LA BITÁCORA EN UN PROBLEMA

A continuación, se incluye una discusión en la que se contraste cómo se aproximaron los estudiantes de cada perfil a la solución de un mismo problema. El problema analizado es el siguiente:

Actividad 4. Encuentren valores posibles para a y b tales que la afirmación planteada sea verdadera. Las soluciones no son únicas, de modo que pueden dar valores particulares o bien, una generalización sobre lo que deben satisfacer los valores a y b.

- $\int_a^b sin\, x\, dx < 0$
- $\int_a^b cos\, x\, dx = 0$

Para ejemplificar el contraste de los tres perfiles para un mismo problema, se tomará en cuenta el trabajo registrado en tres bitácoras, cada una correspondiente a uno de los tres perfiles descritos en el análisis. Esto es, las siguientes bitácoras compuestas por los estudiantes indicados:

Bitácora	**Estudiantes**	**Perfil**
Bitácora 11	Kevin y Valeria	Procedimental
Bitácora 9	Abraham, Alex y Fernando	Inquisitivo
Bitácora 10	Samuel y Ricardo	Analítico

El problema de la actividad 4 consistía en determinar los límites inferior y superior de la integral definida tal que el área bajo la curva de $\sin x$ fuera negativa, y tal que el área bajo la curva de $\cos x$ fuera exactamente cero. El siguiente análisis es principalmente ilustrativo en cuanto a las diferencias sobre cómo se aproximan al problema estudiantes bajo perfiles de trabajo distintos. Esta discusión implica un desarrollo escalonado, en el sentido en que los estudiantes comienzan con un punto de partida similar (ilustrado a través de la aproximación del perfil procedimental) y desarrollan ideas hasta cierto nivel de generalización (siendo el trabajo del perfil analítico el trabajo con mayor grado de generalización). En este sentido, es importante destacar que, para evitar redundancias, se asumirá que el trabajo de los estudiantes del perfil inquisitivo constituye una extensión de las exploraciones de los estudiantes del nivel procedimental y, a su vez, el trabajo de los estudiantes en el nivel analítico conforma una extensión del trabajo de los estudiantes del nivel inquisitivo. Cabe destacar, que la mayor parte de las discusiones incluidas en este análisis se llevaron a cabo en plenaria, de modo que los estudiantes compartieron grupalmente sus aproximaciones a lo largo de dos sesiones de trabajo.

Primera aproximación (perfil procedimental)

Para ilustrar la forma de acercarse de un perfil procedimental, se tomó como ejemplo el trabajo de los estudiantes Kevin y Valeria. Estos estudiantes iniciaron su aproximación incluyendo la gráfica de seno y coseno en GeoGebra.

Posteriormente, identificaron un par de valores particular para los límites de integración que cumplieran lo establecido:

$$\int_{-5}^{0} (\sin x)\,dx < 0 = -0.72$$

https://www.geogebra.org/classic/m4qj8mug

$$\int_{2}^{2} (\cos x)\,dx = 0$$

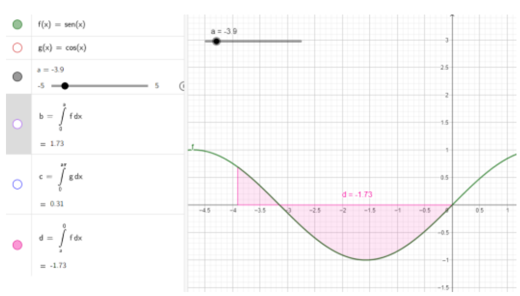
https://www.geogebra.org/classic/wdzz3ctg

Figura A. Soluciones particulares a la Actividad 4

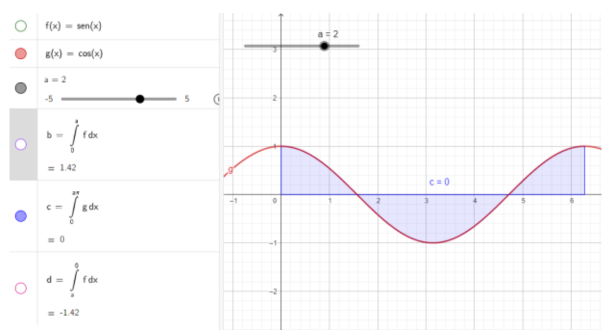
El profesor solicitó a estos estudiantes que exploraran una posible generalización sobre los valores que pueden tener a y b. En su nueva modificación, Kevin y Valeria generaron un deslizador para explorar el comportamiento de las integrales de las funciones seno y coseno. Su exploración se sintetiza brevemente con el siguiente texto en su bitácora:

> *Observamos que el área es positiva cuando la función es positiva y tiene valores negativos cuando la función es negativa. Para llegar al resultado que se muestra, primero metimos la función de $f(x) = sen(x)$, después con el deslizador pusimos los valores desde que inicia que es de 0 a un número menor a 0.*
>
> *Seguido de eso empleamos la integral de 0 a $a\pi$. y así es como obtenemos el resultado de la segunda integral.*
>
> *https://www.geogebra.org/m/gan6heeu*

La interpretación de esta aproximación se puede hacer con ayuda del modelo dinámico que incluyeron. Este modelo incluye ambas funciones, y un deslizador de nombre a. En este sentido, los estudiantes propusieron que $\int_a^0 \sin x\, dx$ siempre es menor a cero, si $a < 0$; por su parte, $\int_0^{a\pi} \cos x\, dx$ siempre es igual a 0 si a es un número entero.



(a)



(b)

Figura B. Soluciones generales de la Actividad 4 por parte de Kevin y Valeria

Cabe destacar que antes de concluir con esta exploración, Kevin y Valeria notaron que su exploración respecto a la función de $\sin x$ no era congruente con su solución inicial, ya que la integral $\int_0^a \sin x\, dx$ siempre daba valores positivos. La explicación que se les ofreció consistió principalmente en hacerles notar que si $a < 0$, entonces los límites de integración debían ser

$\int_a^0 \sin x\, dx$, o bien, $\int_0^a \sin x\, dx = -\int_a^0 \sin x\, dx$. En este sentido, los estudiantes incluyeron la integral $\int_a^0 \sin x\, dx$, de modo que pudieran comprobar que la integral es negativa; es decir, los estudiantes concluyeron que si el límite inferior es menor a cero y el límite superior es cero, la integral será negativa.

Segunda aproximación (perfil inquisitivo)

A continuación, se describe la exploración realizada por la terna Abraham, Alex y Fernando en la bitácora 9. La forma de explorar el problema de estos estudiantes inició de manera similar a la forma en que concluyó la exploración de los estudiantes en un perfil procedimental. No obstante, notaron que la solución dada (el límite inferior es negativo y el superior es cero) no siempre se cumplía, ya que, si el área sombreada cubre dos *crestas* completas de la función seno, entonces el valor de la integral será exactamente 0. Para continuar con su exploración, el profesor sugirió a los estudiantes que consideraran, ¿pueden generar una generalización donde los límites de integración no incluyen necesariamente a algún cero? Es decir, una solución donde los límites de integración no tengan que incluir al cero.

Abraham, Alex y Fernando iniciaron una nueva exploración considerando dos deslizadores, a y b. Primero, notaron que si ambos límites de integración eran múltiplos enteros de π, el área bajo la curva de la función coseno siempre era igual a cero.

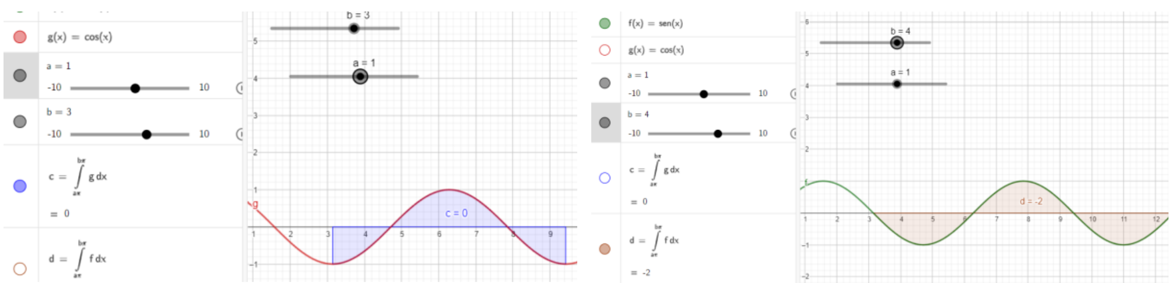


Figura C. Exploración de Abraham, Alex y Fernando sobre la Actividad 4

https://www.geogebra.org/m/s8bz32wz

Con base en esta idea, desarrollaron una exploración similar, pero para la función seno. A partir de realizar exploraciones con los deslizadores los estudiantes concluyeron que

- Si el límite inferior de integración es un número par, y el límite de integración superior también es un número par, el área representada por la integral definida de seno es igual a cero
- Si el límite inferior de integración es un número impar, y el límite de integración superior es un número par, el área representada por la integral definida de seno es negativa

La conclusión anterior no incluye diversos casos. El profesor hizo notar a los estudiantes que, por ejemplo, si ambos límites de integración son números impares, la integral definida bajo la curva de seno también es negativa. Después de una exploración final, esta terna de estudiantes incluyó en su bitácora lo siguiente:

Al hacer la gráfica de este ejercicio y buscar un valor en el que la integral sea menor que 0, iniciamos desde una raíz en el que su siguiente valor sea inmediatamente negativo, las raíces de esta función son múltiplos de π así que podemos empezar desde π. No importa cuánto sea el valor de b, la integral siempre es negativa. A excepción de que b sea igual a π multiplicado por *un número impar. Aunque b también puede ser cualquier número que no sea* π *multiplicado por un número impar, sólo si b es mayor que a.* [Modelo https://www.geogebra.org/m/ffve48r6]

Con ayuda del modelo, se aprecia con mayor claridad la intención de lo que los estudiantes describen: El límite inferior de integración debe ser una raíz de $\sin x$, tal que $\sin x < 0$ para valores que se aproximen a la raíz por la derecha. El límite superior de integración puede ser entonces cualquier número real, tal que no sea de la forma $(2k+1)\pi$, para $k \in \mathbb{K}$. La Figura D que el límite inferior de la integral definida comienza a partir de la raíz $x = \pi$ y b (el límite superior) es un deslizador que representa cualquier número real. Si $b = (2k+1)\pi$, la integral definida es exactamente cero.

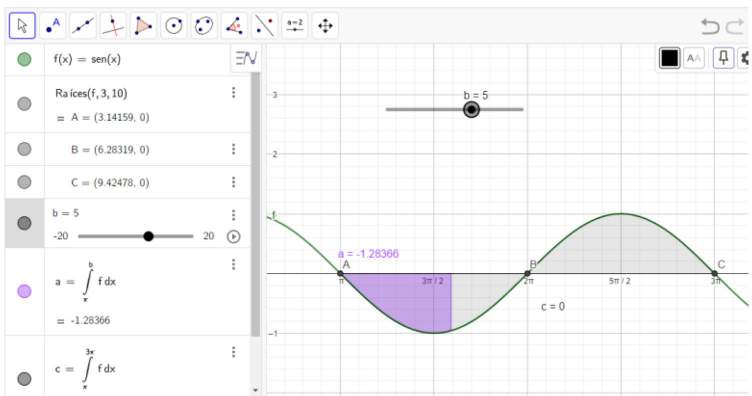


Figura D. Exploración final en la Bitácora 9 sobre la Actividad 4

Tercera aproximación (perfil analítico)

Finalmente, se describe el trabajo de la pareja de estudiantes Samuel y Ricardo, registrado en la bitácora 10. Estos estudiantes trataron de construir una expresión general para los límites de integración de la integral definida bajo $\sin x$ tal que su valor fuese negativo. De este modo, incluyeron lo siguiente en su bitácora:

analizando el resultado de distintas integrales se encontró un patrón con el que se puede generalizar la función de la forma siguiente: sin importar si trabajamos con negativos

$$\int_0^{a\pi} sin\, x\, dx = \begin{cases} 0, & a\ par \\ 2, & a\ impar \end{cases}$$

Además,

$$\int_{a\pi}^{a\pi+b} sin\, x\, dx < 0$$

a es un entero impar y b cualquier número positivo que no sea un múltiplo impar de pi

https://www.geogebra.org/m/jg4ejd7f

En el modelo dinámico que incluyen, ilustrado en la Figura E, se muestra que definieron un deslizador a que solo puede tomar números impares, y un deslizador b que solo puede tomar números positivos. La comprobación de la integral muestra que esto se cumple, siempre que no ocurra que $b = (2k+1)\pi$ para algún $k \in \mathbb{K}$

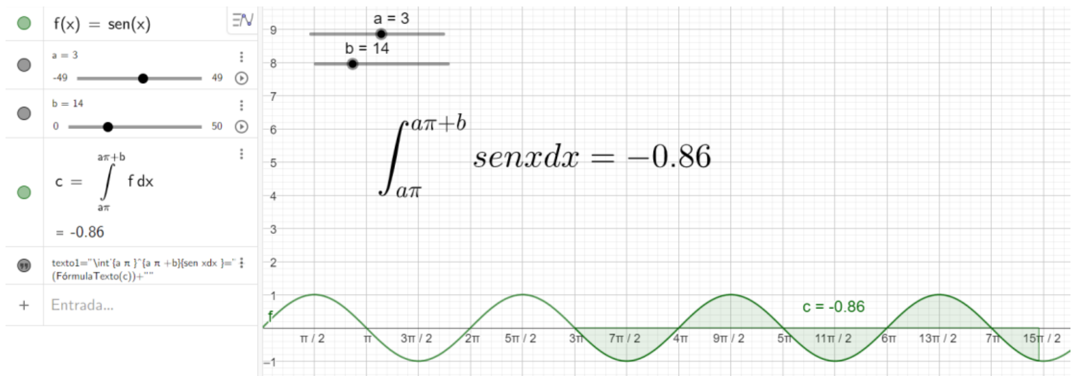
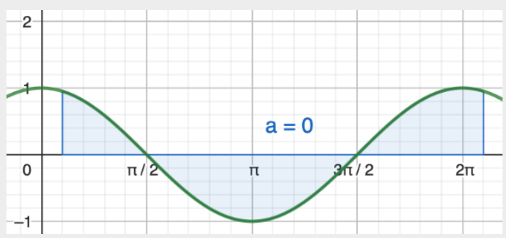


Figura D. Exploración de Samuel y Ricardo sobre la Actividad 4

En cuanto al caso de hallar valores de a y b tales que $\int_a^b \cos x \, dx = 0$, Samuel y Ricardo realizaron una exploración adicional, la cuál concluyen en su bitácora como sigue:

> *analizando la gráfica se concluye que a y b pueden ser cualquier número, con la condición de que:* $b - a = 2\pi$*, o dicho de otra manera la diferencia entre a y b tiene que ser de* 2π
>
> $$\int_a^{a+2\pi} \cos x \, dx = 0$$
>
> 
>
>
> *https://www.geogebra.org/m/jg4ejd7f*

La Figura E muestra la interfaz del modelo dinámico de Samuel y Ricardo. Definieron un deslizador b que puede adquirir cualquier valor (en un rango limitado por defecto por GeoGebra) y constituye el limite inferior de integración. El límite superior, está definido algebraicamente de la forma $b + 2\pi$. A medida que se mueve el deslizador, la integral siempre es cero.

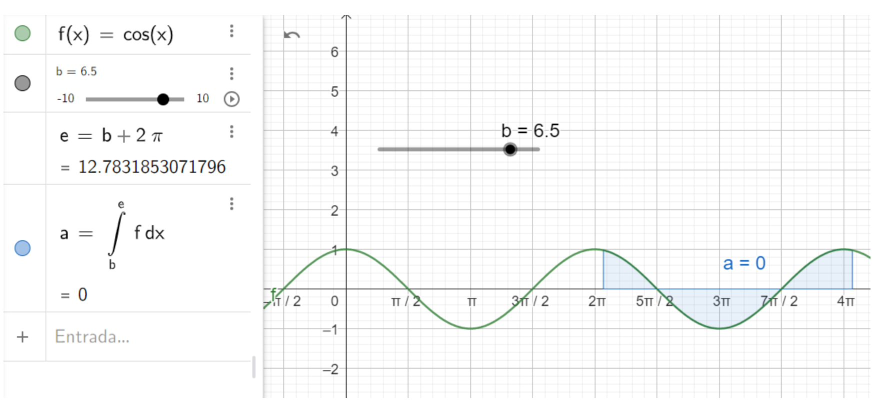


Figura E. Exploración final de Samuel y Ricardo