CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS
DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

Unidad Zacatenco

Departamento de Matemática Educativa

Exploración sobre una interpretación de la integral definida como acumulación

Tesis que presenta

José Hardi Romero Mendoza

Para obtener el grado de

Maestro en Ciencias

en la especialidad de

Matemática Educativa

Directores de tesis

Dr. Ernesto Alonso Sánchez Sánchez

Dr. Mario Sánchez Aguilar

Ciudad de México Marzo, 2024

Agradecimientos

Especial agradecimiento al Consejo Nacional de Humanidades, Ciencia y Tecnología, por el apoyo económico brindado para la realización de mis estudios de maestría en el Departamento de Matemática Educativa del CINVESTAV-IPN, mediante la beca No.1136364.

Al Dr. Ernesto Sánchez Sánchez y al Dr. Mario Sánchez Aguilar, especialmente por la dedicación que mostraron en el desarrollo de este trabajo de tesis. Estaré siempre agradecido por el apoyo, la confianza y conocimientos que de ellos pude obtener.

A los Dres. Hugo Rogelio Mejía y Apolo Castañeda Alonso, sus recomendaciones a este trabajo ayudaron a mejorar este trabajo.

Al M. en C. Francisco Sepúlveda Vega por sus observaciones y consejos para mejorar este trabajo.

A los Dres. Luis Enrique Moreno Armella, Jesús Alfonso Riestra Velázquez, Luz Manuel Santos Trigo, Olimpia Figueras Mourut de Montppellier, Hugo Rogelio Mejía, Ernesto Sánchez Sánchez y Gonzalo Zubieta Badillo, mis profesores durante la maestría, cuyas enseñanzas me ayudaron a visualizar un gran terreno de conocimiento por el cual puedo transitar.

Al personal administrativo y de limpieza del Departamento de Matemática Educativa, cuyo trabajo diario permite tener un lugar digno en el cual estudiar.

A mi madre y hermana mayor, cuyo apoyo incondicional me han ayudado en los momentos más difíciles.

Dedico este trabajo a la vida, que parece nunca la terminaré de entender y aceptar, que siempre me desconcierta y adolece.

Índice

Resumen

El presente trabajo tiene como propósito principal responder a la pregunta de investigación: ¿Cómo responden estudiantes universitarios, que ya han recibido un curso de cálculo, a la interpretación de integrales definidas que pueden ser relacionadas con alguna idea de acumulación? Esta pregunta se abordó mediante el análisis de las respuestas escritas de un cuestionario que consta de seis preguntas (anexo I) proporcionadas por un grupo de 22 estudiantes de ingeniería. Dicho análisis se realizó aplicando algunos procedimientos de la teoría fundamentada, con la cual se identificaron y categorizaron las expresiones escritas. Los resultados revelaron que la consideración de expresarse mediante ideas relacionadas con el movimiento, el cambio y la acumulación parece ayudar a crear un significado consistente que relaciona una integral definida con una interpretación basada en la acumulación. También se observó que el uso de expresiones relacionadas con elementos algebraicos, geométricos y cálculos puede considerarse suficientemente productivo para crear un significado de las integrales más amplio que el que se basa exclusivamente en el concepto de área. Asimismo, se observó que algunos estudiantes recurrían a describir las partes de una integral, con lo cual no siempre lograron proporcionar una interpretación consistente basada en la acumulación. En este último caso, es probable que los estudiantes también formularon internamente la forma en que se comportan y se afectan mutuamente las partes de la integral. Esta suposición se realizó basándonos en la observación de que los estudiantes no siempre hacían explícitas sus ideas y razonamientos con respecto a alguna acumulación o la forma en que se comporta una integral. En su lugar, reutilizaban resultados previos para conjeturar un nuevo resultado, lo que en algunos casos llevó a tener poca claridad sobre lo que intentaron expresar debido a la omisión de algunas ideas.

Palabras clave: cálculo, integral definida, acumulación, interpretación, barrido.

Abstract

The present work has as its main purpose to answer the research question: How do university students who have already received a course in integral calculus respond to questions of definite integrals that may be related to some idea of accumulation? This question was answered through the analysis of written responses from a questionnaire consisting of six questions (annex I), provided by a group of 22 engineering students. This analysis was conducted applying some procedures of the grounded theory, with which written expressions were identified and categorized. The results revealed that considering expressing themselves through ideas related to motion, change, and accumulation seems to help create a consistent meaning that relates a definite integral to an interpretation based on accumulation. It was also observed that the use of expressions related to algebraic, geometric, and computational elements can be considered sufficiently productive to create a meaning for integrals that is broader than that based solely on an area. Likewise, it was observed that some students resorted to describing the parts of an integral, with which they did not always succeed in providing a consistent interpretation based on accumulation. In the latter case, it is likely that students also internally formulated how the parts of the integral behave and affect each other. This assumption was made based on the observation that students did not always make their ideas and reasoning explicit regarding accumulation or how an integral behaves. Instead, they reused previous results to conjecture a new outcome, which in some cases led to a lack of clarity about what they were trying to express due to the omission of some ideas. With these results, some didactic implications were proposed that could be used in the teaching of integral calculus with a focus on accumulation.

Keywords: calculus, definite integral, accumulation, interpretation, sweeping.

Capítulo 1. Planteamiento del problema, pregunta de investigación y objetivos

En términos coloquiales, la idea de acumulación puede entenderse como el aumento de una cantidad a través del tiempo (Thompson y Silverman, 2008). La integral, vista como el resultado de una acumulación, se ha convertido en uno de los focos de atención para una parte de la investigación en educación matemática (Larsen et. Al, 2017). Esta idea, junto a la integral como un área y las técnicas de integración, son destacados como temas importantes para la comprensión y el desarrollo de habilidades de resolución de problemas en el contexto de las integrales (Sofronas et al., 2011). Si bien las conceptualizaciones de la integral como área bajo la curva y como función primitiva son útiles para la resolución de problemas rutinarios o instrumentales, estas podrían ser complementadas con el enfoque de acumulación, en búsqueda de mejorar habilidades para la resolución de problemas no rutinarios o problemas de comprensión conceptual (Rasslan y Tall, 2002; Tall, 1993; Sealey, 2014; Thomson, 1994; Thompson y Silverman, 2008).

Sin embargo, algunas investigaciones sugieren que el concepto de acumulación modifica lo que los estudiantes podrían entender de una integral. Según Swidan y Yerushalmy (2015) los estudiantes pueden entender a una integral como una suma de rectángulos en el contexto de las sumas de Riemann. Pero para Jones (2013), bajo el concepto de acumulación, los estudiantes pueden entender a las integrales como un proceso aditivo continuo mediante un “rectángulo representativo” (p. 126). Este rectángulo representativo es reconocido por Thompson y Silverman (2008) como “bit incremental” (p. 43), que se relaciona con el producto $f(x)\Delta x$ en una integral de Riemann. Según estos últimos autores, los estudiantes de nivel universitario llegan a considerar al bit incremental como un objeto solitario, que se acumula a una taza constante con respecto a una cantidad independiente. Además, Carlson et al. (2003) muestran que los estudiantes pueden adquirir con relativa facilidad la coordinación de la acumulación con una integral definida. Según los autores, al poner a los estudiantes en el contexto de una circunferencia que se expande y una enseñanza del cálculo integral mediante el concepto de acumulación, estos pueden interpretar a la integral $\int_2^5 2\pi r\, dr$ como una suma infinita de circunferencias pequeñas. En este mismo contexto, Bernabé (2021), guiándose del trabajo de Carlson et. Al (2003), muestra que, si se menciona la idea de una circunferencia que se expande, sin una explicación previa de la acumulación, los estudiantes pueden llegar a relacionar las integrales $\int_0^x 2\pi r\, dr$ y $\int_2^4 2\pi r\, dr$ con el área de un círculo y con el área de un anillo, respectivamente. Pero no pueden conceptualizar la acumulación, teniendo que recurrir infructuosamente a su razonamiento intuitivo, usando el modelo de área bajo la curva para explicar funciones de acumulación $\left(F(x) = \int_a^x f(t)dt\right)$. En conclusión, parece que es necesario continuar investigando sobre cómo los estudiantes perciben la integral como un proceso de acumulación y si esta concepción les ayuda a enriquecer su comprensión de la integral y su capacidad para resolver problemas. Pensar a la integral como acumulación cuando resulta conveniente, ¿ofrece una vía más intuitiva y aplicable para abordar problemas complejos y no rutinarios? Para responder a esta pregunta todavía falta reunir más evidencia empírica. Esta investigación se inscribe dentro de este problema formulando la siguiente pregunta:

> ¿Cómo responden estudiantes universitarios, que ya han recibido un curso de cálculo (incluyendo el tema de integral), a la interpretación de integrales definidas que pueden ser relacionadas con alguna idea de acumulación?

Para responder a esta pregunta se diseñó un cuestionario (ver anexo I) el cual tuvo como base el cuestionario de Bernabé (2021), con las siguientes diferencias. En primera instancia, el instrumento de investigación utilizado aquí incluye una introducción de la acumulación, considerando que la integral puede relacionarse con el rastro que deja un segmento variable cuando se quiere representar un área bajo una curva (Jones, 2013). Además, se incluye una pregunta que sugiere entender al volumen de una esfera como una suma infinita de esferas huecas, imágenes auxiliares para interpretar una doble integral y se insiste a los participantes en explicar sus respuestas con relación a la acumulación. Esto se realiza con el fin de recabar información acerca de las expresiones escritas que los estudiantes utilizan para explicar las relaciones que puedan observar entre una integral definida y alguna idea de acumulación. Se espera que de esta forma se pueda obtener información que permita anticipar posibles dificultades o facilitadores para la enseñanza de la integral con el enfoque de acumulación, que permitan complementar los enfoques de enseñanza de la integral, como el de área bajo la curva, sumas de Riemann y el enfoque mediante antiderivada. Además de contribuir a la información sobre cómo los estudiantes se expresan ante la noción de acumulación en el contexto de integrales definidas, que pueda vincular ideas heurísticas con el conocimiento formal y operativo.

La estrategia utilizada para abordar este trabajo es analizar las respuestas que da un grupo de estudiantes al cuestionario, los cuales ya han tomado un curso de cálculo integral en su formación. En el cuestionario, se espera que los estudiantes interpreten y expliquen la relación entre algunas integrales definidas con respecto a un círculo, circunferencia, anillo de círculo, esfera, superficie de esfera y cono.

Objetivo general

Identificar las ideas que puedan ser productivas para explicar algunas relaciones entre integrales definidas y sus interpretaciones basadas en la acumulación, por medio de la descripción y categorización de las expresiones que utilizan un grupo de estudiantes universitarios al responder un cuestionario que se les presenta para tal fin.

Objetivos particulares

Para lograr el objetivo general, se aplicó un cuestionario a un grupo de 22 estudiantes universitarios con el fin de categorizar sus expresiones con relación a los siguientes puntos, los cuales, a su vez, cada uno corresponde a una de las seis preguntas del cuestionario, bajo el mismo orden ascendente:

1. Claridad y utilidad de una interpretación de la integral definida como acumulación de área bajo una curva.
2. Explicación de una integral definida que se relaciona con el área de un círculo mediante acumulación de circunferencias.
3. Explicación del área de un anillo de un círculo y su relación con una integral definida mediante acumulación de circunferencias.
4. Explicación de una integral definida que se relaciona con el volumen de una esfera mediante acumulación de superficies de esferas.
5. Explicación de una doble integral definida que se relaciona con el volumen de un cono mediante acumulación de círculos.
6. Estados anímicos al momento de explicar la relación entre las integrales definidas y sus interpretaciones basadas en la acumulación.

Capítulo 2. Antecedentes

En el estudio del cálculo integral es común enfrentar múltiples obstáculos relacionados con la comprensión conceptual y la visualización de procesos complejos. Se han realizado intentos para abordar esta problemática por parte de algunos autores, como Sealey (2014) y Jones (2013), quienes, respectivamente, se han enfocado en la simbología utilizada para representar a las sumas de Riemann y las integrales. Thompson (1994) y Thompson y Silverman (2008) proponen un enfoque basado en los conceptos de cambio y acumulaciones, a partir de estudiar cómo Newton descubrió la relación entre lo que hoy conocemos como cálculo diferencial y cálculo integral. Otros autores, como Carlson et al. (2003) y Swidan y Yerushalmy (2016), han trabajado bajo el enfoque de la acumulación y han reportado haber obtenido resultados significativos en la enseñanza del cálculo.

Se abordarán los antecedentes considerando el contexto anterior, mostrando algunas dificultades en el aprendizaje de la integral y los resultados que algunos autores han obtenido para intentar solventarlas, los cuales han sido abordados con un enfoque de aprendizaje conceptual, con enfoques relacionados a la simbología utilizada en el cálculo integral y con enfoques en los que se considera la acumulación.

Dificultades en el aprendizaje de la integral

El concepto de integral puede ser representado de múltiples formas. Según Natansón (1997) el concepto fundamental del cálculo integral, que lo introduce en su prefacio al tema de suma de cantidades infinitamente pequeñas, es el "límite de la suma de un número ilimitadamente creciente de sumandos que decrecen ilimitadamente" (p.44). Esta idea, que el mismo autor la considera natural y simple, puede ser representada mediante sumas infinitas de productos con las sumas de Riemann. Aunque también se puede representar la misma idea, por ejemplo, en asociación con funciones (antiderivadas), el gráfico de una función, un área bajo una curva o sólidos de revolución. Estas múltiples representaciones de una misma idea pueden llevar a un entendimiento más profundo del concepto que se define, pero puede traer dificultades en el aprendizaje del concepto de cálculo integral.

En 1993, en el Congreso Internacional de Educación matemática (ICME por sus siglas en inglés), Tall presenta un análisis de la literatura de su época, cuyo propósito está orientado a la reflexión de las dificultades que presentan los estudiantes en el aprendizaje del cálculo. En este análisis Tall menciona que en temas de integración los estudiantes suelen optar por afrontar los problemas procedimentalmente y no por comprensión conceptual, por lo habituados que suelen estar a los enfoques simbólicos y numéricos. Este autor propone fomentar el uso de enfoques visuales y versátiles que involucren un enfoque simbólico, numérico y gráfico, para abordar las dificultades inherentes a la realización de tareas de forma procedimental de los alumnos. Por ejemplo, los problemas de notación y significado, las dificultades de abstracción de problemas en contexto a lenguaje matemático, la identificación adecuada de representaciones y la asimilación conceptual. También propone que se pudiera proceder mediante una enseñanza no estándar, con ideas informales de los conceptos matemáticos, la programación, el uso de manipuladores simbólicos, infografías y la construcción adecuada de intuiciones que permitan una adecuada formalización de los conocimientos.

Un enfoque común en la enseñanza del cálculo integral, en el que pueden observarse las sugerencias de Tall (1993), suele iniciarse mediante la estimación de áreas, utilizando figuras y métodos numéricos. Lo anterior se sigue con la estimación de áreas bajo una curva, con lo cual se proporciona la definición de la integral definida, descrita como el límite de una suma de Riemann. Este enfoque suele continuarse con la introducción de la integral indefinida, su relación con la integral definida, métodos de integración y se finaliza con la introducción del TFC mediante la integral definida, su relación con los polinomios y la idea de que una curva puede verse localmente como una línea. Sin embargo, como se muestra en la investigación de Rasslan y Tall (2002), este enfoque, pese a la operatividad que puede obtenerse con él en el ámbito procedimental, puede requerir que sea complementado para lograr un aprendizaje conceptual de la integral. En la investigación de estos autores se tiene por objetivo examinar la comprensión de la integral definida, las imágenes conceptuales y las definiciones de un grupo de estudiantes. Para ello proponen las siguientes preguntas de investigación.

> ¿Cuáles son las definiciones que dan los estudiantes de educación secundaria sobre la integral definida? ¿qué imágenes de la integral definida usan los estudiantes para resolver diversos problemas? y ¿qué conceptos erróneos exhiben los estudiantes con relación a la integral definida? (Rasslan y Tall, 202, p. 90).

Los autores analizaron las respuestas a un cuestionario que se les presentó a 41 estudiantes de escuela secundaria en Inglaterra. Los estudiantes tuvieron acceso a calculadoras gráficas y formaban parte de una escuela con un rendimiento por encima del promedio nacional, con un plan de estudios enfocado en conceptos y experiencias. El cuestionario consistía en una pregunta para indagar en la definición de los estudiantes de la integral definida y cinco para indagar en cómo la utilizaban en relación con la definición que proporcionaban. Los resultados indicaron que la muestra tenía habilidades débiles en la visualización de funciones mediante imágenes icónicas. “La mayoría no escribe de forma significativa sobre la definición de integral definida, y tiene dificultades interpretando problemas para calcular áreas e integrales definidas en contextos más amplios” (Rasslan y Tall, 2002, p. 96). Según los autores, estos resultados indican que la definición no es el único criterio utilizado por los estudiantes para determinar si una idea en particular es un ejemplo del concepto. Comentan que, en su lugar, suelen basarse en procesos, propiedades e imágenes mentales que se relacionen con el concepto en su mente. Concluyen su investigación indicando que se debe incluir un conjunto de ejemplos en la enseñanza de la integral definida y que “se debe alentar a los estudiantes a expresar sus ideas de manera que les ayuden a construir un concepto más perspicaz” (Rasslan y Tall, 2002, p. 96).

A modo de resumen, se puede decir que las dificultades del aprendizaje en el cálculo integral se deben principalmente a la múltiple representación que puede tener el concepto de integral y su relación con otros conceptos del cálculo, así como a la dificultad que tienen los estudiantes de poder moverse entre estas múltiples representaciones. Esto podría ser parte de los factores que lleven a que los estudiantes se enfoquen en un aprendizaje procedimental, dejando de lado el desarrollo de sus habilidades relacionadas con el aprendizaje conceptual, como la representación y manipulación de las ideas del concepto con elementos visuales y su relación con los símbolos matemáticos. Esto también parece generar dificultades para abstraer y representar las ideas necesarias para resolver problemas en contextos en los que el pensamiento procedimental no resulta ventajoso.

Manejo e interpretaciones de la simbología de las sumas de Riemann y las integrales definidas

Es común que el aprendizaje del cálculo integral se profundice desde el enfoque de cálculo de antiderivadas, pero no todos los problemas relacionados con el concepto de integral pueden resolverse de esta forma, por ello se suele continuar profundizando con el enfoque de métodos de integración en un curso avanzado de cálculo. Sin embargo, en estos enfoques suele prestársele poca o nula atención a las sumas de Riemann, las cuales juegan un papel importante en la comprensión del concepto de la integral, esencialmente porque es de ellas de donde surge formalmente este concepto. Se puede considerar que un correcto uso de las sumas de Riemann para resolver problemas de integrales, en particular problemas que involucren a las integrales definidas, es un indicio de un adecuado manejo del concepto de la integral. En este contexto, Sealey (2014), basándose en sus resultados previos (Sealey, 2006) donde afirma que para comprender la integral definida no es suficiente el modelo de área bajo la curva, propone que los estudiantes requieren de una comprensión de la estructura de la suma de Riemann, para establecer apropiadamente una integral y determinar el integrando. En su trabajo de 2014 presenta los resultados de una investigación basada en un marco que describe los componentes de las sumas de Riemann en cuatro capas: “producto”, “sumas”, “función” y “límite” (p. 232), con el objetivo de analizar cómo se involucran veintidós estudiantes universitarios con este marco, sus obstáculos y superación de estos. Para ello se plantea las siguientes preguntas de investigación:

1. Dada la descomposición matemática de la integral definida, ¿cómo se involucran los estudiantes con cada una de las capas dentro del Marco Integral de Riemann?
2. ¿Qué obstáculos encuentran los estudiantes dentro de cada capa del Marco Integral de Riemann, y cómo pueden los estudiantes superar estos obstáculos?
3. ¿Son suficientes las capas del Marco Integral de Riemann para analizar el compromiso de los estudiantes con los problemas de palabras que involucran integrales definidas? (p. 230, 231).

Según el autor, los estudiantes examinados fueron introducidos al concepto matemático de integral mediante la solución de problemas en un contexto de física. Comenta que para la examinación de sus obstáculos se utilizaron videos de sesiones en el aula, copias de los trabajos que realizaron los estudiantes y entrevistas clínicas, considerando como marco la descomposición de la integral de Riemann. El autor indica que para la capa de suma se requiere que los estudiantes identifiquen todas y cada una de las piezas a sumar, mientras que en la capa del producto se requiere que describan como se forman dichas piezas. En sus resultados muestra que los estudiantes no tenían dificultades en la capa suma, ni en su aproximación al límite, pasando más tiempo en estas dos capas. En contraste, tuvieron dificultades con la selección de infinitesimales en la capa del producto, tanto en el contexto del problema como en el algebraico. Además, entendían la toma de intervalos y la forma de aproximarse al resultado mediante un proceso discreto, pero tenían dificultades para establecer un proceso continuo. Concluye que estos resultados sugieren que, en la enseñanza del cálculo integral, para que los estudiantes puedan usar las integrales definidas y sumas de Riemann de forma efectiva, es requerido proporcionar a los estudiantes la oportunidad de que sean ellos quienes le den sentido a estos dos términos.

Es sabido que detrás de la simbología de la integral definida $\left(\int_a^b f(x)\,dx\right)$ se encuentra la idea de una suma y un límite. Por ello es de destacarse el hecho de que, en los resultados del anterior autor, los estudiantes no presentaran dificultades con la capa de la suma ni con la aproximación de un límite. Esto guarda una estrecha relación con que los estudiantes suelen basarse en sus imágenes mentales, procesos y propiedades relacionados con los conceptos, para determinar si algo es un ejemplo de algún concepto (Rasslan y Tall, 2002), considerando que en la muestra de Sealey (2014) los estudiantes eran universitarios, por lo que ya habrían tomado algún curso de cálculo integral en su formación preuniversitaria. Es decir, habría de esperarse que los estudiantes ya tuvieran alguna noción básica sobre las integrales, en tal caso entonces puede conjeturarse que la idea de suma y aproximación al límite permanecen latentes en las imágenes mentales de los estudiantes con relación a las integrales. Además, considere que en la cotidianeidad de nuestras vidas estamos acostumbrados a tomar decisiones que de alguna forma nos parecen evidentes, ya sea por lo experiencia que estemos al contexto en el que tomamos la decisión o porque el contexto se relaciona con otro en el cual tenemos un mayor dominio. Esto puede explicar, en parte, el que en el trabajo de Sealey (2014) "los estudiantes pasaron una parte significativa de su tiempo trabajando dentro de las capas de suma y límite" (p. 244).

Por otra parte, existe una diferencia sobre el significado que se le da a la simbología que se utiliza para representar una suma en el contexto del cálculo integral. En el manejo algebraico de las integrales, las sumas suelen presentarse como un operador entre integrales y no como una expresión descriptiva, como si ocurre con las sumas de Riemann. Es decir, para mostrar que un área bajo una curva en específico es equivalente a una integral definida, cuyo integrando está relacionado con el gráfico de la curva, se suele utilizar la simbología particular de las sumas de Riemann, estableciendo a la integral definida como el límite de la suma en cuestión. Estas diferencias plantean retos diferentes para los estudiantes al momento de resolver un problema relacionados con integrales. Por ejemplo, un alumno podría tener un buen dominio algebraico y calcular el valor de una integral definida en particular, y representarla adecuadamente como un área bajo una curva, sin embargo, puede que tenga dificultades para establecer, manipular o representar correctamente la integral mediante una suma de Riemann. Con esto se puede plantear que un enfoque centrado en solo considerar la comprensión de la estructura de la suma de Riemann podría traer consecuencias en el aprendizaje conceptual de los estudiantes, si no se consideran las dificultades inherentes a las atribuciones de significados que los alumnos otorgan a los símbolos de las integrales. En este contexto, Jones (2013) afirma que existe una limitada comprensión acerca de cómo los estudiantes atribuyen significado a las distintas partes de la estructura del símbolo integral, y de qué manera estas partes se integran para formar el concepto general en su cognición. El autor propone una combinación de esquemas conceptuales y plantillas de símbolos de integrales (formas simbólicas), para documentar las expresiones cognitivas que manifiestan y aprovechan un grupo de estudiantes para trabajar con integrales en contextos de física y matemáticas. Para ello plantea las siguientes preguntas de investigación.

> ¿Qué esquemas conceptuales han mezclado los estudiantes en toda la plantilla de símbolo integral o en partes de la plantilla de símbolo integral? ¿Cómo influyen estas formas simbólicas que muestran los estudiantes en la resolución de problemas en elementos que involucran la integral? (p. 124).

El autor analiza las respuestas en dos entrevistas realizadas a nueve estudiantes de Estados Unidos que tenían experiencia trabajando con la integral en contextos de física y matemáticas, ayudándose de grabaciones y de sus propias notas. En cada entrevista los estudiantes debían resolver problemas de física y matemáticas apoyados de plantillas de integrales, por ejemplo $\int_{[\,]}^{[\,]}[\,]\,d[\,]$. Así, identifica quince formas simbólicas emergentes de la integral. Sus resultados muestran que las formas simbólicas "sumando piezas", "perímetro y área" y "coincidencia de funciones" (p. 136) fueron las más populares, en donde "sumando piezas" resultó ser la más productiva, en contraste con las otras dos. La forma simbólica de sumar piezas "se ocupa del pensamiento que es similar en formas a una suma de Riemann" (p. 125). El autor narra como en esta forma simbólica el gesto de barrido con la mano y el establecer un rectángulo representativo jugaron un papel importante en el pensamiento de un alumno. El alumno expresó una suma de segmentos al interpretar un área, delimitada superior e inferiormente por el grafico de dos funciones y en los laterales por rectas perpendiculares al eje de las abscisas. Además, "hizo un solo rectángulo que sirvió como referencia para lo que estaba sucediendo dentro de la integración" (p. 126). Por otra parte, las formas simbólicas "perímetro y área" y "coincidencia de funciones" refieren, respectivamente, a la interpretación de la integral como área y a la búsqueda de una antiderivada. Según el autor, una característica importante de la forma simbólica del perímetro y área es que considera el área de una región como un conjunto estático, sin dividirla ni medirla mediante aproximaciones, como si ocurre en las sumas de Riemann. Mientras que, en la forma simbólica de coincidencia de funciones, el diferencial puede interpretarse como un indicador de que el integrando es realmente una derivada y los límites de integración simbolizan la diferencia final en el cálculo de la integral definida.

El autor finaliza explicando que los estudiantes que procedieron a realizar dibujos, en la forma simbólica suma de piezas, pudieron proporcionar argumentos consistentes del significado del cálculo que realizaban con las integrales definidas y tuvieron menores dificultades para proporcionar sus explicaciones. Mientras que los estudiantes que se restringieron a las formas simbólicas de perímetro y área y coincidencia de funciones presentaron dificultades recurrentes para explicar los cálculos y comprender lo que representaban las integrales en los problemas en contextos físicos.

A modo de resumen, se resalta que una enseñanza de la integral definida, con el enfoque del modelo de área bajo la curva y el cálculo de una antiderivada, parece que requieren ser complementados con algún otro enfoque para que los estudiantes puedan resolver problemas de integrales en contextos físicos de manera productiva. En contraste, aunque los resultados de Sealey (2014) y Jones (2013) están relacionados con la representación y manipulación simbólica, se puede sugerir, en lo general, que las imágenes mentales de los alumnos sobre los procesos y propiedades de la integral parecen estar más cercanas a la idea de un comportamiento continuo de la suma y no de algún proceso discreto que tiende al límite. Lo anterior se resalta con la estrecha relación de la forma simbólica de suma de piezas con la capa de sumas en la estructura de las sumas de Riemann, pues ambas están relacionadas con la idea de suma, pero difieren significativamente. En la capa de sumas, según Sealey (2014) los estudiantes pasaron más tiempo y se sintieron más cómodos, pero a pesar de ello tuvieron dificultades para establecer algún proceso continuo. Mientras que, en la forma simbólica de suma de piezas de Jones (2013), la realización de dibujos y expresiones intuitivas de algún barrido de área con la mano parecen haber jugado un papel importante en la producción de argumentos consistentes de cómo funciona una integral. Esto plantea que un enfoque centrado en solo considerar la enseñanza de la integral definida a través del modelo de área bajo la curva, la comprensión de la estructura de la suma de Riemann, su paso al límite y el cálculo de antiderivadas no parece ser suficiente, y podría traer dificultades en el aprendizaje de las integrales, si no se consideran las dificultades inherentes a las atribuciones de significados que los alumnos pueden otorgar a los símbolos de integrales.

La acumulación y el aprendizaje de las integrales

En las investigaciones de los autores citados hasta ahora se observan dos ideas clave que resultan importantes para destacar. En primer lugar, se evidencia que la enseñanza de la integral definida, enfocada exclusivamente en el cálculo de antiderivadas y áreas bajo la curva, resulta insuficiente para que los estudiantes desarrollen habilidades para resolver problemas no rutinarios. En segundo lugar, se destaca que los estudiantes se sienten más cómodos al expresar sus ideas sobre las integrales cuando las relacionan con sumas. Específicamente, establecen una conexión congruente entre la integral y la noción de "barrido". Estas expresiones les ayudan a comunicar sus ideas sin necesidad de recurrir a formalismos, explicando así el funcionamiento y comportamiento de una integral. Además, según Jones (2013), se ha observado que la creación de ilustraciones y expresiones por parte de los alumnos, para representar la idea de una suma continua, resulta productiva para desarrollar argumentos coherentes al momento de explicar el comportamiento de una integral.

En principio, lo anterior puede presuponer que habría de incluirse, en el proceso de enseñanza del cálculo integral, contextos en donde los estudiantes puedan experimentar la conexión de la integral con los procesos continuos, y permitirles expresar sus ideas al respecto. Pero, no por ello debería de olvidarse su abstracción a sumas de Riemann, pues estas se pueden considerar como un medio fundamental a través del cual se operan fenómenos físicos relacionados con la continuidad. Un enfoque que aborda esta perspectiva es el propuesto por Thompson (1994) y Thompson Silverman (2008) basado en los conceptos de cambio y acumulación. Aunque este enfoque también acarrea dificultades que pueden considerarse inherentes al mismo.

Según Thompson (1994) las acumulaciones se constituyen mediante el aumento en una cantidad durante un periodo de tiempo, en donde “la cantidad acumulada está compuesta por aumentos infinitesimales en las cantidades que, compuestas multiplicativamente, conforman los aumentos en la cantidad acumulada.” (p. 236). Por incrementos en la cantidad acumulada, el autor se refiere a aquello cuya medida es $f(t_i)\Delta t$ en una suma de Riemann. Señala que cuando ocurre una acumulación de forma continua, de dos cantidades covariantes (que cambian al mismo tiempo, pero con una relación de dependencia), los aumentos que se realizan en cada una de las cantidades son proporcionales a la acumulación total de cada una. En su publicación, el autor presenta el análisis de dos experimentos de enseñanza y una reflexión sobre los conceptos abordados. El enfoque se centra en la comprensión del TFC por parte de los estudiantes, explorando el cambio, la acumulación y las imágenes como procesos mentales dinámicos.

El objetivo fue investigar las ideas que hacen comprensible el TFC para aquellos que reflexionan sobre las relaciones entre la integral y la derivada.

El primer experimento fue llevado a cabo con un estudiante de séptimo grado en EUA, equivalente a segundo grado de secundaria en México, en donde el contenido estaba centrado en las ideas de velocidad y aceleración. Según el autor, el estudiante ya poseía el esquema operacional de la velocidad como tasa de cambio, pero carecía de una formalización analítica. Para el autor, el objetivo de presentar este experimento es introducir y esclarecer el origen del segundo experimento. En este primer experimento el estudiante aproxima el cálculo de la distancia que recorre un objeto con aceleración uniforme en un intervalo de tiempo. El estudiante consideró acumulaciones constantes de cambios en la velocidad, en intervalos de tiempo regulares, de tal forma que la suma total de todos los cambios era igual al cambio total de la velocidad. El autor señala que el razonamiento del estudiante muestra la existencia de formas tempranas de imágenes mentales del TFC, que pueden ser utilizadas pedagógicamente para una enseñanza conceptual del cálculo.

El segundo experimento se llevó a cabo con el objetivo particular de captar información sobre las orientaciones y entendimientos que los docentes en formación llevan consigo a los cursos de cálculo de secundaria. En este participaron 19 estudiantes, ocho de nivel universitario y once de nivel maestría. Todos los estudiantes tenían conocimientos de cálculo integral, aunque sus conocimientos eran de carácter procedimental. Se reporta que, en una evaluación previa, solo uno proporcionó una definición satisfactoria de la integral definida de una función y tres relacionaron correctamente a $\int_a^x f(t)\,dt$ con una función que depende de x. El estudio tuvo una duración total de quince horas, en las que se discutieron las ideas sobre el TFC en un ambiente computacional estructurado en cuatro fases de desarrollo conceptual. A continuación, se muestran algunos resultados que pueden ser relevantes para el presente trabajo.

En la primera fase, relacionada con la reconstrucción de imágenes mentales de una función considerando la covariación, muestra como resultado que los estudiantes solían dar explicaciones sobre el comportamiento de las funciones como si estas pudieran ser analizadas independientemente de su argumento. “Se referían a una sola cosa que variaba, esta cosa llamada ‘la función’” (p. 268).

La segunda fase se enfocó en enriquecer las nociones que los estudiantes tuvieran acerca de la tasa promedio, encontrando que los estudiantes parecían considerar el cociente de la tasa promedio como una derivada, lo cual interpretaban como una rapidez a la cual cambiaba la función, “sin interpretar los detalles de la expresión como una cantidad de cambio en una cantidad en relación con un cambio en otra" (p. 246).

En la tercera fase, relacionada con la conceptualización de sumas de Riemann como funciones descriptivas de acumulación aproximada, los estudiantes presentaban dificultades en la coordinación de los cambios debidos a la covariación funcional de dos cantidades, con relación a la acumulación de incrementos de una cantidad por intervalos. También indica que "una aproximación a una acumulación variable a menudo entraba en conflicto con sus imágenes de integral definida y la suma de Riemann, como aplicable solo en situaciones que involucran cantidades fijas de alguna cantidad" (p. 247).

La cuarta fase está relacionada con la construcción del TFC por parte de los estudiantes. En esta fase, en un intento de determinar una función que exprese el volumen de un cono usando sumas de Riemann, muestra que algunos estudiantes parecen tener "una imagen de un disco circular que se mueve hacia arriba, aumentando así su área, mientras que el espacio generado aumenta de volumen" (p. 261). Esta idea la consiguen mediante la concepción de un diferencial de volumen, indicando la altura de este con sus dedos y cerrando los dedos hasta que el diferencial colapsa a un disco. Además, en el mismo problema, lograron conceptualizar los incrementos del volumen como la tasa promedio del aumento en la acumulación del volumen, sobre el cambio en la altura. Sin embargo, los estudiantes no lograron establecer una relación correcta entre el diferencial de volumen y una suma de Riemann. "Esto sugiere que sus esquemas de tasa y tasa promedio no estaban operativos en la medida en que podían asimilar cualquier cambio covariable a ellos" (p. 269). Finaliza señalando que los resultados del experimento sugieren que la coordinación y síntesis del TFC deben ser precedidos por la construcción de una cantidad significativa de imágenes mentales, con respecto a la acumulación, tasa de cambio y tasa de cambio de acumulación.

Con lo anteriormente mostrado del artículo de este autor, se puede decir que un enfoque basado en el cambio y la acumulación no está exento de presentar dificultades al momento de intentar llevar esas ideas a una formalización. A pesar de esto se resalta que ante las dificultades que puede traer la covariación funcional para los estudiantes, al momento de intentar entender formalmente la acumulación, estos parecen recurrir a la simplificación de las variaciones, considerando las intrínsecas de algún objeto. Esto se aprecia en dos aspectos: en primer lugar, los estudiantes explican el comportamiento de las funciones como si fueran un único objeto. En segundo lugar, consideran los incrementos en el volumen de un cono, en relación con la acumulación, como un objeto solitario (disco) que se mueve en función de una variable independiente (la altura) o como “paquetes” (cilindros infinitesimales) de dicho objeto. Considerando que en el quehacer matemático es usual simplificar un problema para entenderlo (Polya, 1965), se puede esperar que estas descripciones e interpretaciones pueda ser aprovechadas para establecer la formalización de la acumulación de una cantidad, ya sea como una suma de Riemann o como una integral definida.

Por otra parte, Thompson y Silverman (2008) afirman que las dificultades observadas en Thompson (1994) implican una complejidad mayor de lo que se puede esperar en las ideas de una función de acumulación $\left(F(x) = \int_a^x f(t)\,dt\right)$. Aunque también indican que la principal fuente de problemas de los estudiantes con estas ideas es la enseñanza que reciben, que tiene poca intención de que los estudiantes entiendan realmente este tipo de funciones. Para estos autores, en términos coloquiales, la idea de acumulación está relacionada con el aumento de una cantidad, lo que da como resultado una mayor cantidad de esta. Consideran que no debería desprenderse a las funciones de acumulación de las integrales definidas. En el capítulo de libro que presentan, realizan un análisis sobre el aprendizaje de las integrales, en el cual se contrasta el enfoque de enseñanza utilizando la representación de la integral como área bajo una curva con las funciones de acumulación, con los objetivos siguientes:

> (1) Explicar la composición compleja de una comprensión bien estructurada de las funciones de acumulación.
>
> (2) Ilustrar las dificultades de los estudiantes para comprender matemáticamente la acumulación.
>
> (3) Señalar enfoques prometedores para ayudar a los estudiantes a conceptualizar las funciones de acumulación.
>
> (4) Ubicar la comprensión de los estudiantes de las funciones de acumulación dentro del cálculo como un todo. (p. 43).

En el análisis que presentan se hace énfasis en dos imágenes mentales y sus implicaciones, las cuales han observado en el aprendizaje de los alumnos sobre las funciones de acumulación. La primera imagen refiere a la idea de una integral definida como “‘la cantidad de pintura necesaria’ para cubrir el área entre el eje x y la función en el intervalo [a, b]” (p. 51). Consideran que los estudiantes podrían imaginar a la función de acumulación como el llenado de pintura de una región, mediante el movimiento del segmento vertical que une al eje de las abscisas con la curva. La segunda imagen refiere a la medición de la acumulación de una cantidad, la cual “se crea a partir de bits que a su vez están hechos de medidas de dos cantidades" (p. 51), dispuestas multiplicativamente $(f(t_i)\Delta x)$. Mencionan que las dos imágenes son iguales "cuando se ha construido un esquema de entendimientos dentro del cual el área puede representar una cantidad distinta" (p. 51).

Según los autores no se puede pretender enseñar la idea de una función de acumulación haciendo que los estudiantes solo calculen integrales definidas y relacionen sus resultados con un área bajo una curva. Mencionan que para que los estudiantes vean al área bajo una curva como una cantidad distinta del área, es necesario que las cantidades que se acumulan sean concebidas como si fueran creadas mediante incrementos variables de bits que se forman multiplicativamente. Pues una suma de Riemann representa la cantidad total acumulada de una cantidad derivada, como la velocidad, la distancia o el trabajo, cuyos bits están definidos por $f(c)\Delta x$, donde $c \in [x, x + \Delta x]$. Ya que Δx y los valores que arroja la función f pueden verse como valores que miden una cantidad, como el tiempo, la distancia o la fuerza. Por ejemplo, si consideramos un objeto que se mueve con una velocidad conocida f, representamos a Δx como la medida de un cambio en el tiempo y a $f(c)$ como la medida de la velocidad en un punto c del mismo intervalo de tiempo, entonces $f(c)\Delta x$ representa la distancia aproximada que recorre el objeto en dicho intervalo.

Los autores comentan que las dificultades de comprensión de una función de acumulación y la evaluación de dichas comprensiones apuntan a la necesidad de una mayor investigación, sobre como la acumulación puede ser entendida, sus implicaciones para el aprendizaje en el cálculo y el cómo desarrollar esas comprensiones. Ya que han observado que los estudiantes presentan dificultades para entender la acumulación cuando no conceptualizan los bits que se adicionan a la acumulación total momentánea, con relación a la misma. En este contexto, realizan la sugerencia de que, para que los alumnos comprendan la función de acumulación, puede ser necesario que comprendan como se relacionan las partes de la terna $\left(x, f(x), \int_a^x f(t)dt\right)$. Considerando las conductas en las que las palabras y notaciones de los alumnos refieran a relaciones e ideas, como evidencia de tal comprensión. A su vez sugieren que debe evitarse conducir a los alumnos a conductas donde sus palabras y símbolos se refieran a otras palabras, símbolos o imágenes, pues pueden obstaculizar el aprendizaje del concepto de acumulación y sus implicaciones, como la tasa de cambio.

Para finalizar este subcapítulo, se hace el señalamiento de que, si bien la investigación de Thompson (1994) y las reflexiones de Thompson y Silverman (2008) no se centran exclusivamente en la integral definida, estas sirven de apoyo para entender el cómo la enseñanza de estas integrales puede ser abordada mediante el concepto de acumulación. Una forma de abordar la enseñanza bajo este enfoque de acumulación puede ser mediante las sugerencias de Tall (1993), acompañándola con representaciones pictóricas, con las que los estudiantes puedan tener la oportunidad de expresar sus ideas, y que sean ellos quienes logren establecer la relación entre las sumas de Riemann, las integrales definidas y el concepto de acumulación, ayudándolos a expresar con formalidad esas relaciones. Pues las evidencias parecen mostrar que la idea de una acumulación, en términos simples, es cercana a las ideas que los estudiantes puedan tener acerca de una suma continua. Esto podría ser aprovechado como introducción al cálculo integral mediante exposición, representación y experimentación con fenómenos físicos en los que los estudiantes puedan ver la acumulación, en donde los estudiantes tengan la oportunidad de establecer para cada ejemplo las respectivas sumas de Riemann e integrales definidas.

La sugerencia y reflexión como medios para producir ideas de acumulación

En este subcapítulo se abordará una investigación que ha considerado el enfoque de acumulación en la enseñanza del cálculo integral y otra basada en sus resultados, en la que no se aborda con profundidad las ideas de acumulación. Con ambas se puede mostrar que la sugerencia y la reflexión profunda sobre los conceptos subyacentes de la integral son medios fundamentales para la producción de significado que relacionen a las integrales con la acumulación. También se prestará atención a resultados simples que podrían ser comprensibles para los estudiantes y beneficiosos para introducir el cálculo integral. Estos resultados estarán relacionados con la acumulación.

En las reflexiones que hacen Thompson y Silverman (2008), los autores resaltan los resultados de Carlson et al. (2003) por considerarlos un ejemplo de que una enseñanza basada en el enfoque de acumulación puede ser provechoso. Carlson et al. (2003) realizaron un experimento de enseñanza, cuyo objetivo fue indagar la efectividad de los materiales curriculares para los estudiantes en un primer curso de cálculo. Para ello utilizaron una instrucción que abordó las dificultades conceptuales que se observaron en el experimento de enseñanza de Thompson (1994), con relación al aprendizaje de las funciones de acumulación y tasa de cambio. En el experimento participaron 24 estudiantes universitarios a los que se les realizó una evaluación inicial de sus habilidades de razonamiento y comprensión. En el desarrollo del experimento se aprovechó el razonamiento de la covariación de dos cantidades de una función, para desarrollar las ideas de límite, derivada, tasa de cambio y acumulaciones, en términos de cantidades covariantes, enfocándose en que los estudiantes pudieran conceptualizar el TFC al final de este. Tomó seis sesiones para el desarrollo de las nociones de acumulación de cantidades y funciones de acumulación y cinco para desarrollar las nociones del TFC. Los autores recolectaron información mediante preguntas escritas, videograbaciones y entrevistas clínicas a los estudiantes representantes de la muestra, codificando y analizando la información con relación a un marco que se centra en los "entendimientos fundamentales y habilidades de razonamiento"; "razonamiento de covariaciones con cantidades acumuladas"; "aspectos notacionales de la acumulación"; y "declaraciones y relaciones del TFC" (p. 166).

Con el anterior enfoque los autores reportaron una alta tasa de éxito en las concepciones que tuvieron los estudiantes sobre las funciones de acumulación, el uso de estas para explicar el TFC y "una sólida comprensión de los aspectos notacionales de la acumulación" (p. 172). Según los autores, en diferentes contextos de una función de acumulación, los estudiantes pudieron coordinar la acumulación de la variable independiente con la acumulación de una tasa de cambio instantánea, considerando una acumulación desde un valor inicial a un valor final fijos. Es decir, pudieron coordinar la acumulación en el contexto de una integral definida.

En una de las entrevistas a un estudiante se le preguntó sobre el significado de x en la función $g(x) = \int_0^x f(t)\,dt$, respondiendo que: "esto te dice qué tan lejos a la derecha en el gráfico de f quieres ir (el estudiante pasa su mano por el gráfico)" (p. 171). En este mismo contexto cuando se le pregunta al estudiante sobre el significado de la evaluación $g(9)$, el estudiante responde: "Veo eso como encontrar el tiempo que pasa de 0 a 9 y pensar en cuánta área se agrega debajo de la curva a medida que me muevo […]" (p. 171). Estas respuestas son semejantes a la noción de acumulación como un llenado de pintura de la que reflexionan Thompson y Silverman (2008), a la acumulación de volumen de un cono mediante discos reportada por Thompson (1994) y al barrido de área que reporta Jones (2013), todas ellas relacionadas con la capa de suma de Riemann de Sealey (2014), en el sentido de que puede verse como una especie de suma continua. Según Carlson et al. (2003) con lo anterior el estudiante "demostró que entendía el papel de la variable de entrada a g" (p. 170), aunque Thompson y Silverman (2008) comentan que con esto no se puede saber si el estudiante "entiende que se están acumulando cantidades infinitesimales de bits multiplicativos a medida que x varía" (p. 49), ya que ellos consideran importante que los estudiantes conceptualicen de esa forma la acumulación, y sugieren que se requiere un análisis más profundo sobre como evaluar los niveles de comprensión de los alumnos con relación a las sumas de Riemann.

Por otra parte, en un cuestionario que se les realiza a los estudiantes, se sugiere considerar la idea de una circunferencia que se expande de $r = 0$ a $r = x$. En este contexto, Carlson et al. (2003) preguntaron a otro estudiante sobre el significado de $\int_2^5 2\pi r\, dr$, quien respondió que consideraba que la tasa de cambio del círculo se acumulaba de tal manera que se sumaban de forma infinita muchas circunferencias pequeñas. Lo que sugiere que la idea introductoria jugó un papel importante en la respuesta del estudiante. Además, el alumno expresó que veía a al resultado de la evaluación de la función de acumulación $A(x) = \int_a^x 2\pi r\, dr$ como una acumulación de área y logró establecer de forma correcta a la integral definida con su representación como un área bajo una recta en el intervalo $[2, 5]$.

A pesar de estos resultados los autores reportan que también hubo dificultades para explicar el significado de la variable t en una función como $g(x) = \int_0^x f(t)\, dt$ y dificultades para establecer el significado de $\frac{d}{dx}\int_a^x 2\pi r\, dr$. Estos resultados pueden sugerir que algunas de las respuestas de los estudiantes pudieron haber sido guiadas por el significado de los símbolos que les dan a las partes de la integral con relación a alguna idea de acumulación, pues no se observa que los estudiantes profundicen en alguna forma operativa como las sumas de Riemann, ni en la relación entre los bits de acumulación $(f(t_i)\Delta x)$ como sugieren Thompson (1994) y Thompson y Silverman (2008). Aunque debe aclararse que el experimento de enseñanza de Carlson et al. (2003) no se enfoca en la formalización ni entendimiento de las funciones de acumulación con relación a las integrales definidas y las sumas de Riemann.

También se puede destacar el papel importante que parece haber jugado la idea de una circunferencia que se expande en la respuesta de uno de los estudiantes. Lo cual permite cuestionar si es posible que los estudiantes puedan relacionar a una integral como $\int_0^x 2\pi r\, dr$ con una acumulación de circunferencias, sin que se sugiera mínimamente pensar en una circunferencia y en una acumulación, aún y cuando los estudiantes no hayan sido formados en el enfoque de acumulación. Una variante similar, sería cuestionarse si es posible que una idea como la acumulación de circunferencias pueda ser concebida solo planteando la idea de una circunferencia que se expande. Este último planteamiento puede responderse mediante los resultados que presenta Bernabé (2021). Este autor, motivado en las complicaciones que tienen los estudiantes para entender y explicar el TFC, por la nula relación intuitiva entre la asociación de la derivada con la pendiente de una recta tangente y la asociación de una integral con un área bajo una curva, presenta un estudio de caso con el siguiente objetivo.

> Documentar dificultades y niveles de razonamiento de los estudiantes para resolver un problema no rutinario que implica al TFC y determinar la relación de tales dificultades y razonamientos con el modelo intuitivo de área bajo la curva de la integral (p. 11).

En su estudio participaron 24 estudiantes de nivel universitario de México a los cuales se les presentó un cuestionario abierto. Los estudiantes tenían conocimientos de cálculo integral y diferencial y no fueron instruidos en el concepto de acumulación. El cuestionario incluía cuatro ítems relacionados con el TFC, aunque no se mencionó este, y una introducción con la idea de una circunferencia que se expande. Cabe mencionar que este cuestionario estuvo basado en los ítems que se muestran en el trabajo de Carlson et al. (2003). El análisis de las respuestas que recabó el autor fue realizado mediante la teoría fundamentada. En sus resultados muestra que los estudiantes tuvieron dificultades para establecer alguna relación entre las funciones de acumulación y el TFC. Ninguno de los estudiantes mencionó la acumulación, ni expresaron con palabras alguna suma o acumulación de circunferencias, limitando sus respuestas a cálculos e interpretaciones intuitivas, algunas relacionadas con el modelo de un área bajo una curva. A pesar de esto si se tuvieron diez respuestas que relacionaron a la integral $\int_0^x 2\pi r\, dr$ con el área de un círculo y diez respuestas que relacionan a la integral $\int_2^4 2\pi r\, dr$ con el área de un anillo de un círculo. Según el autor, el modelo de un área bajo una curva, bajo el cual suelen ser instruidos los estudiantes en sus cursos de cálculo integral, limitó las respuestas de los estudiantes y sugiere instruir a los estudiantes con otro modelo para las integrales, al abordar las funciones de acumulación y su relación con el TFC en un curso de cálculo. Propone que esos temas pudieran ser abordados mediante geometría dinámica, con la comparación simultánea entre una interpretación gráfica del integrando y el gráfico de este.

Los anteriores resultados evidencian que la concepción de las ideas relacionadas con la acumulación no surge de manera espontánea, sino más bien parecen ser producto de la sugerencia y la reflexión profunda sobre las relaciones conceptuales subyacentes al cálculo integral. Además, se resalta el hecho de que basta una pequeña sugerencia como la idea de una circunferencia que se expande para que los estudiantes relacionen a un integral con ideas de acumulación, aún y cuando estos no se expresen con relación a una acumulación de forma explícita, lo que sugiere que los estudiantes pueden intuir con relativa facilidad la relación entre las ideas de acumulación y las integrales.

Emociones en el aprendizaje de las matemáticas

Aunque el presente trabajo no tiene como foco de atención el indagar el dominio afectivo de los estudiantes, se consideró pertinente dedicarle un subcapítulo al tema de las emociones, por la posibilidad de que éste pueda brindar una mayor comprensión sobre los resultados que se puedan obtener del instrumento de investigación que se presentará más adelante.

Es sabido que en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas el dominio afectivo juega un papel importante en la creación de significado en los estudiantes (Cantoral, 2002). Tanto en el salón de clases como en el hogar, los estudiantes suelen encontrarse inmersos en emociones y creencias durante la resolución de problemas, los cuales pueden alterar la forma en la cual abordan y responden el problema, en búsqueda de formas para persuadir y aprobar una asignatura (Espinoza y Martines, 2010).

En el trabajo de Espinoza y Martines (2010) se presenta un estudio de caso con cuatro estudiantes, a quienes se les pide anotar y puntuar las emociones que sentían durante una sesión de clases, con el objetivo de establecer las relaciones entre las emociones de los estudiantes y cómo éstas inciden en la deserción del conocimiento matemático. Dicho trabajo se desarrolló bajo un enfoque sustentado en la teoría, el marco de la dimensión cognitiva de las emociones y las estructuras neurobiológicas que las producen y las regulan. Con cita a Ortony et al. (1996) indican que el conocimiento matemático previo; el docente y sistema educativo; los compañeros; él alumno mismo; metas del estudiante y submetas son productores de emociones. Como parte de sus resultados comentan:

> […] las emociones positivas en el ambiente del salón de clase son escasas, cuando se producen tienen mucha intensidad, pues, según los estudiantes, cuando se logra una meta que es difícil les da seguridad y crece la autoestima, lo que implica que las emociones que producen las matemáticas, más que cualquier otra asignatura, influyen poderosamente en la psiquis de los estudiantes […]. (Espinoza y Martines, 2010, p. 211).

En contraste, señalan que “el desequilibrio en la comprensión de estructuras matemáticas, que no logra ser estabilizado” (p. 213) da paso a dificultades de aprendizaje.

Concluyen que las emociones surgen cuando no se logra un equilibrio cognitivo, lo que conduce a un cambio en la conducta del estudiante que obstaculiza el aprendizaje matemático. Se destaca que las emociones negativas son especialmente generadas por las creencias de los estudiantes sobre las matemáticas.

En el trabajo de Towers et al. (2017) se muestran resultados similares a los anteriormente mencionados, aunque se hace un señalamiento de que las experiencias con las emociones de algunos estudiantes no pueden ser simplemente clasificadas como positivas y negativas. Estos autores presentan una exploración sobre cómo se relacionan los estudiantes con las matemáticas y las emociones que se asocian a su práctica. Para esto, se enfocan en una muestra de 41 estudiantes de Canada de Kindergarten a noveno grado, equivalente a una muestra con niveles de estudios desde el preescolar hasta secundaria en México. El estudio se enmarca en la teoría del enactivismo, la cual reconoce que los docentes, estudiantes y el entorno de aprendizaje se encuentran estructurados en una actividad recíproca. El diseño de investigación se enmarca en la indagación de las narrativas de los estudiantes y sus experiencias. Como parte de sus resultados, muestran que los estudiantes describen sus emociones con respecto a creencias sobre sus propias capacidades, además de evaluaciones y valoraciones externas. Comentan que algunos estudiantes describen haber experimentado felicidad y confianza cuando entendían un concepto, disfrutando de los desafíos matemáticos al aumentar las dificultades en la resolución de problemas. Según Towers et al. (2017) "cuando se establecía una conexión entre los conceptos nuevos y los conceptos previamente aprendidos, los estudiantes podían desarrollar una relación emocional positiva" (p.174). En contraste, comentan que los estudiantes describieron haber experimentado irritabilidad, frustración, nerviosismo, incertidumbre o incompetencia cuando no comprendían un concepto. Aunque no todos los estudiantes percibían estos estados como algo negativo. Encontraron que en las narrativas de 24 estudiantes se presentaba un matiz de estados y emociones. Algunos consideraron a la incertidumbre y frustración como algo positivo, como parte del proceso del aprendizaje y la resolución de problemas.

En la presente investigación, la comprensión de las emociones en el aprendizaje matemático adquiere una relevancia particular debido a la inclusión de una pregunta relacionadas con el dominio afectivo en nuestro instrumento de investigación. Se reconoce que las emociones desempeñan un papel crucial en la forma en que los estudiantes abordan los problemas matemáticos. Por lo tanto, al explorar las percepciones y experiencias emocionales de los estudiantes en el contexto de interpretación de integrales con relación a alguna idea de acumulación, se espera obtener una visión más amplia de los factores que influyen en dicho motivación y rendimiento.

Capítulo 3. Marco conceptual

En este capítulo se presentan los conceptos más importantes relacionados con el presente trabajo. El objeto de estudio son los razonamientos de 22 estudiantes observados a través de las respuestas a un cuestionario, en el cual se pide interpretaciones de la integral definida considerando alguna idea de acumulación. El marco que se propone está constituido por tres subtemas principales, el primero aborda los conceptos de razonamiento, los modelos de representación y algunas expresiones de comunicación escrita. En el segundo se abordan los conceptos de suma de Riemann, integral de Riemann y la acumulación. Mientras que en el tercer subtema se abordarán las representaciones de la acumulación mediante representaciones gráficas de la suma e integral de Riemann.

Conceptos relacionados al razonamiento

Razonamiento

Es un proceso para obtener y justificar conclusiones a partir de premisas establecidas, o supuestas, y de la evidencia empírica. En el contexto de las matemáticas, el razonamiento puede ser formal, es decir, seguir reglas y procedimientos definidos, o informal, que implica el uso intuitivo de un concepto. A menudo un razonamiento involucra falsos comienzos, conjeturas, exploración y explicaciones parciales antes de llegar a una conclusión (Hiebert y Carpenter, 1992; NCTM, 2009).

Intuición

De acuerdo con Fischbein (1987) una intuición funciona como una forma de cognición que dota de información a un sujeto de forma inmediata, automática y relacionada con su experiencia. Esta información puede ser percibida por el sujeto como un saber o conocimiento, verdadero, obvio, necesario, con cierto grado de generalidad y pertinente para la situación en la cual se obtiene. La intuición responde a la necesidad humana de partir de certezas significativas, no convencionales y prácticas, para guiar la conducta en una situación o problema sin necesidad de un razonamiento explícito y deductivo, y tiene el potencial de permitir el desarrollo de razonamientos que trasciendan la información directamente accesible a hechos establecidos. Sin embargo, también puede ser una fuente potencial de errores, debido a que se encuentra estrechamente relacionada con la experiencia de un sujeto. En el contexto de la matemática, la intuición juega un papel importante en el proceso de construcción de significado y en la identificación de patrones y regularidades en los problemas matemáticos.

Creación de significado

Es un proceso en el que se integra la intuición y el razonamiento para la creación de relaciones entre un conjunto de nueva información de un contexto, fenómeno o concepto con el conjunto de conocimientos existentes. Este puede ser fomentado mediante la resolución de problemas (NCTM, 2009). La creación de significado es parte importante en el presente trabajo, ya que se requiere de la realización de interpretaciones de integrales. Estas interpretaciones pueden verse como una creación de significado.

Modelos

El concepto de modelo tiene múltiples caracterizaciones e implicaciones (Blum et al., 2007; Fischbein, 1987). Fischbein sugiere que un modelo es una versión simplificada de un original.

Conviene distinguir entre modelos científicos y modelos intuitivos. Un modelo científico ocurre cuando el original es un fenómeno de la realidad y el modelo una representación simplificada y abstracta de esa realidad. Un modelo intuitivo se presenta cuando el original es un concepto matemático y el modelo una representación geométrica o figurada de ese concepto.

Para el presente trabajo se abordarán solamente los modelos matemáticos y modelos intuitivos, los cuales se describen a continuación.

Modelo matemático. Es un modelo científico que utiliza elementos de un subdominio matemático, como operaciones y variables, para representar una situación particular de manera consistente y desapegada de dicha situación. Permite ser analizado y manipulado como si fuera la misma situación que representa, sin sus limitaciones físicas, para crear relaciones con las cuales se pueda controlar o predecir sus comportamientos (Blum et al., 2007).

Ejemplos de este tipo de modelos son las sumas de Riemann y la integral de Riemann. Las sumas de Riemann permiten representar la totalidad de una cantidad de forma exacta (volumen en un cilindro o área rectangular) o aproximada (volumen de un cono o área bajo una curva). En contraste, la integral de Riemann permite expresar estas mismas cantidades de forma exacta sin distinción entre regiones con perímetros curvos o rectos.

Modelo intuitivo. Este tipo de modelo responde a la necesidad de entender un concepto abstracto. Son representaciones de clase sensorial que ayudan a dar forma a las intuiciones, volviendo más concreta una información formal de un subdominio matemático. Representan de forma aproximada una situación local y no necesariamente puede generalizarse. Sin embargo, pueden ser manipulados y percibidos como otra realidad concreta y consistente, para crear significado de nueva información compleja de forma accesible (Fischbein, 1987).

Como herramientas de enseñanza, los modelos intuitivos tienen el potencial de ayudar a los estudiantes en los niveles iniciales a crear significado de los conceptos matemáticos y científicos, así como a adquirir habilidades para aplicarlos en situaciones del mundo real y construir modelos formales como los modelos matemáticos. Para esto los modelos intuitivos deben lograr representar una cantidad significativa de situaciones similares a la situación original (deben ser generativos) y los elementos que lo componen deben estar claramente definidos y relacionados de forma lógica y consistente, de tal manera que posea una consistencia interna (Fischbein, 1987). Un ejemplo de estos modelos como herramienta didáctica es la representación de la integral definida como área bajo una curva, la cual posee todas las características antes mencionadas (Bernabé, 2021).

Expresiones escritas

Expresiones descriptivas. Son los elementos a los que se refiere en un texto para poder realizar una descripción y presentación de objetos matemáticos sin ambigüedad. Estas expresiones están relacionadas con las habilidades lingüísticas y semióticas necesarias para el aprendizaje y la comprensión de las matemáticas.

Por ejemplo, considere la siguiente oración, en donde las expresiones descriptivas son fundamentales para identificar qué es lo que puede entenderse de la expresión “integral definida” en el contexto del modelo de un área bajo una curva: "La integral definida se utiliza para calcular el área bajo una curva en un intervalo específico del gráfico de una función." En esta, las expresiones descriptivas son: "calcular", "área bajo una curva", "intervalo específico" y "gráfico de una función". Estas expresiones son descriptivas porque se refieren a conceptos matemáticos relacionados con una integral definida. El "calcular" es una expresión que describe a la integral definida como un objeto matemático con el cual se puede obtener algún resultado numérico. El término "área bajo una curva" se refiere a la cantidad de espacio encerrada entre la curva y el eje horizontal dentro de un intervalo. "Intervalo específico" hace referencia a los límites del intervalo sobre el cual se está realizando el cálculo. Y finalmente, el "gráfico de una función" se refiere a una figura construida mediante la relación matemática entre una variable independiente y una variable dependiente.

Expresiones referenciales. Las expresiones referenciales son elementos utilizados en un texto para referir a objetos o situaciones específicas, ya sea de forma directa o indirecta. Estos pueden ser elementos verbales como nombres propios, pronombres y descripciones, así como elementos no verbales como ilustraciones, diagramas y gráficos. Se utilizan para representar una idea, un objeto, una situación, una propiedad o una relación.

Por ejemplo, considere la siguiente oración: "La integral definida expresada como $\int_a^b f(x)\,dx$, puede representar el cálculo del área bajo el gráfico de la función $f(x)$, en el intervalo $[a,b]$". En esta se hace referencia implícita a la relación entre la integral definida y el área bajo una curva, expresada mediante los símbolos que se muestran. Bajo esa misma oración como ejemplo, si se observase la expresión $\int_1^2 2\pi r\,dr$, habría de entenderse a la misma como una expresión referencial que denota el área bajo el gráfico de la función $2\pi r$, en el intervalo $[1,2]$. Estas expresiones referenciales son fundamentales para comprender cómo se aplica el concepto de integral definida en el cálculo y cómo se relaciona con la función $f(x)$ y los límites del intervalo.

Integral definida y la acumulación

Existen diversas maneras desde las cuales puede realizarse una primera aproximación del concepto de integral. En este subcapítulo se repasan los conceptos siguientes que generalmente están asociados a diferentes formas de introducir o desarrollar el concepto de integral: sumas de Riemann, antiderivada, técnicas de integración y acumulación. Conviene que los primeros estudios de la integral se hagan considerando situaciones como las que históricamente dieron origen al concepto, por lo que las definiciones que se exponen adelante se restringen a funciones continuas. Para simplificar aún más, se consideran funciones con dominio y rango en los reales positivos, aunque se espera que todo ello se pueda ampliar a funciones discontinuas, o con dominio y rango en los reales negativos.

Suma e integral de Riemann

Sea f función real continua en $[a,b] \in \mathbb{R}^+$, con rango positivo y $P_n := \{x_0 = a, x_1, x_2, \dots, x_n = b\}$, una partición regular de dicho intervalo, donde $x_{i-1} < x_i$ y $\Delta x = x_i - x_{i-1}$, para todo $i = 1,2,\dots,n$. Sea $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$. Entonces, se entenderá por suma de Riemann a una suma descrita como

$$A = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x$$

La anterior suma puede representar una aproximación de un área bajo la gráfica de la función f mediante rectángulos de anchura Δx y altura $f(c_i)$, en el intervalo $[a, b]$. De tal forma que la aproximación será mejor cuanto n sea más grande, como se muestra representado en las figuras 3.1 y 3.2.

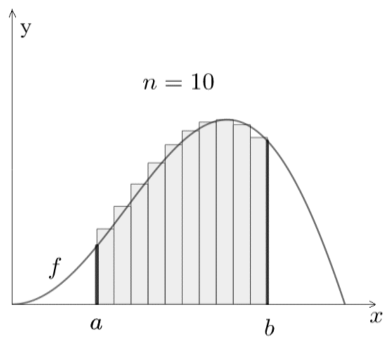


Figura 3.1. Representación de una suma de Riemann con $n = 10$, con la que se aproxima un área bajo una curva.

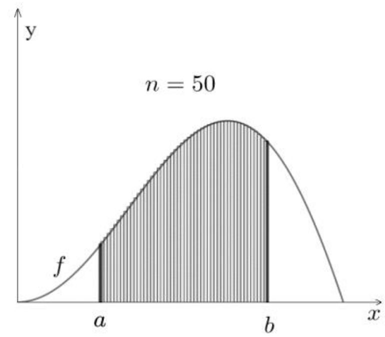


Figura 3.2. Representación de una suma de Riemann con $n = 50$, con la que se aproxima un área bajo una curva.

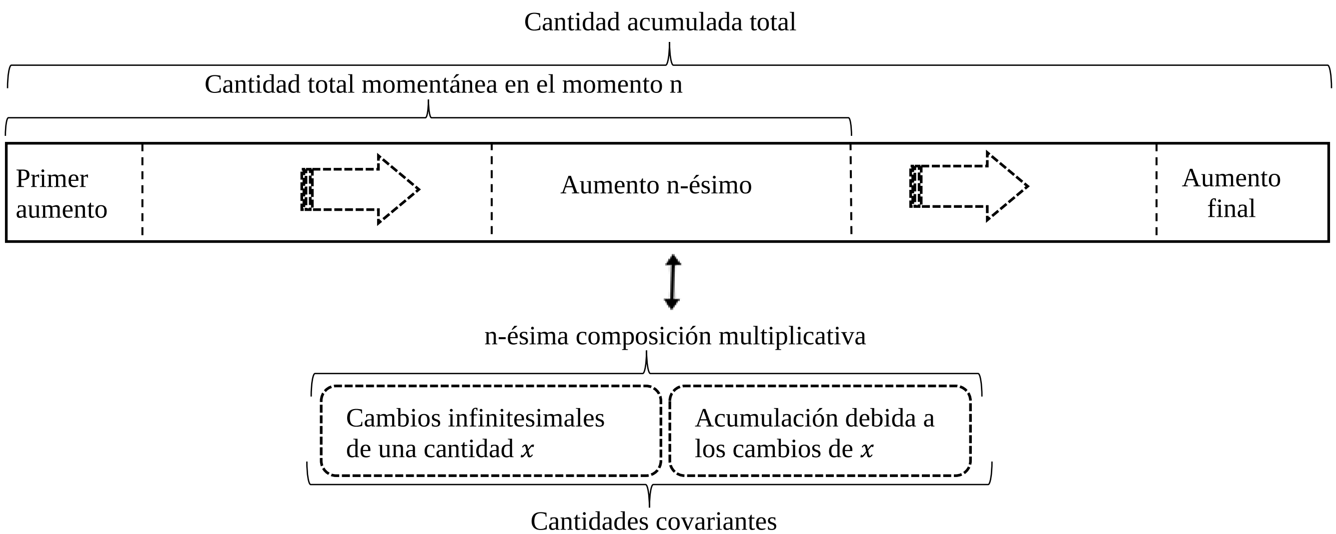
Por otra parte, se entenderá por integral de Riemann al límite de una suma de Riemann cuando el número de elementos en la partición P_n tiende a infinito y la amplitud de los intervalos de la partición tiende a cero. Esta permite calcular el área exacta bajo la curva que determina la función *f*. El límite de esta suma se entenderá como se muestra a continuación.

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x = \int_a^b f(x)dx$$

Acumulación

De forma simple, se entenderá por acumulación al proceso covariante de aumento de una cantidad con relación al cambio de una variable o bien como una cantidad estrictamente creciente que puede representarse como un barrido. Este entendimiento se dará por cuestiones de consistencias con los resultados que se mostrarán más adelante. Sin embargo, de forma amplia, el concepto de acumulación se puede definir como el proceso covariante de aumento de una cantidad con relación al cambio de una variable, donde dichos aumentos están compuestos de forma multiplicativa por cambios infinitesimales de la variable y los cambios que esta provoca en la cantidad que se acumula. Una forma operativa de analizar este proceso es mediante los conceptos: cantidad acumulada, incremento, cantidad acumulada total y cantidad total momentánea. La cantidad acumulada es una cantidad compuesta, (como el trabajo, que se compone por la multiplicación de la fuerza y la distancia) mientras que los incrementos son medidas de dicha cantidad. Así mismo, la cantidad acumulada total es la medida final que se obtiene de la cantidad acumulada en cuestión al final del proceso, mientras que la cantidad total momentánea es la medida de la cantidad acumulada en algún momento entre el inicio y el final del proceso (Thompson y Silverman, 2008). A continuación, se muestra un esquema representativo de este proceso.

Esquema de una acumulación



Representaciones de la integral definida usando la acumulación

Las representaciones y términos que se mostrarán aquí no forman parte central del presente trabajo, pero se consideró incluirse para mostrar el cómo la acumulación puede ser presentada con relación a una suma de Riemann y una integral de Riemann. Esta representación puede realizarse considerando a la acumulación como el aumento de una cantidad a través de incrementos compuestos multiplicativamente. En donde la representación gráfica de los subconceptos: incrementos, cantidad total momentánea y cantidad acumulada total, que caracterizan a una acumulación, son claves para establecer las relaciones matemáticas en el Teorema Fundamental del Cálculo.

Acumulación y sumas de Riemann

La acumulación puede ser representada por el modelo matemático de las sumas de Riemann como $\sum_{i=1}^{t} f(c_i)\Delta x$, con $t \leq n$ una variable en los naturales, no fija y estrictamente creciente, donde cada término $f(c_i)\Delta x$ de la suma representa un incremento positivo. Así mismo, la cantidad total momentánea queda representada por la suma $\sum_{i=1}^{k} f(c_i)\Delta x$, para algún natural $k \leq n$ fijo, reservando la suma $\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x$ para referirse a la cantidad acumulada total.

Luego, dado que una suma de Riemann puede representar un proceso de acumulación, entonces las características de cualquier representación gráfica de una acumulación, bajo estas consideraciones, habrán de ser heredadas por las representaciones gráficas de su respectiva suma de Riemann. Esto permite establecer que las representaciones gráficas de una acumulación son modelos intuitivos que pueden ser utilizados como herramientas de enseñanza. Considere, por ejemplo, las figuras 3.3 y 3.4, en las que se muestran dos representaciones de la acumulación usando las sumas de Riemann.

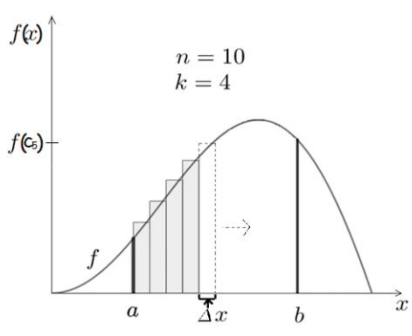


Figura 3.3. Representación de una cantidad total momentánea en el momento 4 de un total de 10: $\sum_{i=1}^{4} f(c_i)\Delta x$. Con la que se aproxima un área bajo una curva.

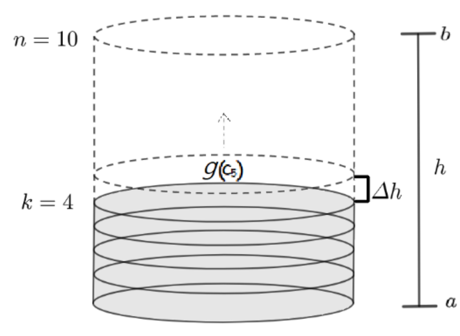


Figura 3.4. Representación de una cantidad total momentánea en el momento 4 de un total de 10: $\sum_{i=1}^{4} g(c_i)\Delta h$. Con la que se calcula el volumen de un cilindro.

En la figura 3.3 se muestra la representación de la cantidad total momentánea $\sum_{i=1}^{k} f(c_i)\Delta x$, en el momento $k = 4$, de una acumulación que aproxima al área bajo la curva de una función f, con una partición regular con diez intervalos. Aunado a ello se muestra el siguiente incremento que se realizaría en el momento $k = 5$. En este caso $f(c_i)$ representa la altura de los rectángulos de base Δx. Mientras que en la figura 3.4 se muestra la representación de la cantidad total momentánea $\sum_{i=1}^{k} g(c_i)\Delta h$ en el momento $k = 4$, de una acumulación que calcula de forma exacta el volumen de un cilindro de altura $h = b - a$, con igualmente una partición regular de diez intervalos y señalando el siguiente incremento que se realizaría para el momento $k = 5$. Aquí, los incrementos se realizan mediante cilindros con base $g(c_i)$ y altura Δh, donde g es la función asociada a la suma de Riemann de esta acumulación.

Acumulación y función de acumulación

Se definirá a una función de acumulación con relación a las características de una acumulación, por lo que habría de esperarse que dicha función tenga el potencial de describir a una acumulación. Entonces se dirá que F_a es una función de acumulación en $[a, b] \in \mathbb{R}^+$ si existe una función f función continua en un intervalo $[a, b] \in \mathbb{R}^+$, con rango positivo. Tal que para toda $x \in (a, b)$ no fija y estrictamente creciente se tiene $F_a'(x) = f(x)$ para la misma x pero en $[a, b]$

$$F_a(x) = \int_a^x f(t)dt$$

(Swidan y Yerushalmy, 2014; Thompson y Silverman, 2008).

Esta definición sugiere que cualquier función derivable, continua y positiva puede verse como una función de acumulación. Aunque se hace notar que bastaría con que sea derivable y continua. El considerarla positiva es por cuestiones de simpleza y consistencia con el presente trabajo.

Luego, si F_a es una función de acumulación en $[a, b] \in \mathbb{R}^+$ que describe a una acumulación, entonces puede considerarse que la cantidad total momentánea está dada por el valor de $F_a(k)$, para algún $k \in [a, b]$ fijo, y la cantidad acumulada total está dada por el valor de $F_a(b)$. Mientras que los incrementos pueden ser representados por alguno de los tres miembros de la igualdad siguiente.

$$F_a(k + I) - F_a(k) = \int_k^{k+I} f(t)\, dt = f(c_k)(I) \rightarrow (1)$$

Para algún $c_k \in [k, k + I] \subset [a, b]$ y $I > 0$.

Con lo anterior, bajo una analogía al subcapítulo pasado, como una función de acumulación puede representar un proceso de acumulación mediante una integral definida con límite superior variable, entonces las características de cualquier representación gráfica de una acumulación, bajo estas consideraciones, habrán de ser heredadas por las representaciones gráficas de su respectiva integral de Riemann. Por ejemplo, considere las figuras 3.5 y 3.6, en analogía a la figura 3.3 y 3.4. En la figura 3.5 se muestra la representación de la cantidad total momentánea $F_a(k) = \int_a^k f(t)dt$ de una acumulación $F_a(x) = \int_a^x f(t)dt$, con la que se calcula de forma exacta un área bajo la curva de una función f. Aunado a ello se muestra un incremento de la cantidad acumulada, representado por ΔF_a, debido a un incremento I en la variable de acumulación x. Mientras que en la figura 3.6 se muestra la representación de la cantidad total momentánea $G_a(k) = \int_a^k g(t)dt$ de una acumulación $G_a(x) = \int_a^x g(t)dt$, con la que se calcula de forma exacta el volumen de un cilindro de altura $h = b - a$ y la representación de un incremento $\Delta \mathrm{G_a}$, debido a un incremento I en la variable de acumulación h.

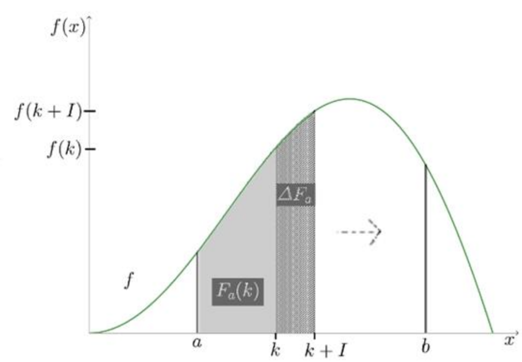


Figura 3.5. Representación de una cantidad total momentánea en el momento $k < b$: $F_a(k) = \int_a^k f(t)dt$. Con la que se calcula de forma exacta un área bajo una curva.

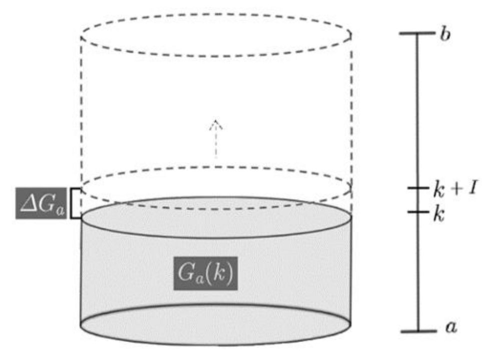


Figura 3.6. Representación de una cantidad total momentánea en el momento $k < b$: $G_a(k) = \int_a^k f(t)dt$. Con la que se calcula de forma exacta el volumen de un cilindro.

Las representaciones de los incrementos en las figuras 3.4 y 3.6 corresponden a las expresiones $F_a(k+I) - F_a(k)$ y $\int_k^{k+I} f(t)\, dt$ de la igualdad (1) mostrada anteriormente. Sin embargo, la tercera representación matemática del mismo incremento: $f(c_k)(I)$, en la igualdad (1), requiere consideraciones adicionales dependiendo del contexto. Por ejemplo, en la figura 3.6, el volumen del cilindro que representa ΔG_a compagina sin ninguna modificación con dicha expresión: $\Delta G_a = g(c_k)(I)$ para algún $c_k \in [k, k+I] \subset [a, b]$, pues el volumen de cualquier cilindro es calculado como el producto de la altura por su base. En este caso I representa el valor de la altura y $g(c_k)$ representa el valor de la base. Mientras que en la figura 3.5, representar el incremento del área como $\Delta F_a = f(c_k)(I)$, conlleva a suponer la existencia de algún cuadrilátero cuya área sea la misma que el área incrementada. En este caso, si se supone que no se conoce el teorema del valor medio, intentar representar el incremento implica resolver el problema de encontrar dicho cuadrilátero. El cual tiene como solución el cuadrilátero de base I y altura $f(c_k)$, con $c_k \in [k, k+I] \subset [a, b]$, como se muestra en la figura 3.7. Esto puede verse como una prueba de que la representación de una acumulación como área bajo una curva, considerando una función de acumulación, es un modelo generativo de nuevos problemas que pueden resolverse bajo las variables que constituyen el mismo modelo.

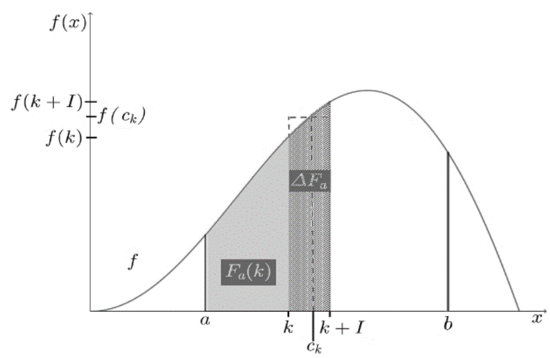


Figura 3.7. Representación gráfica del incremento ΔF_a y su relación con el rectángulo que representa el producto $f(c_k)(I)$.

Acumulación y el TFC

Por otra parte, de la expresión (1) mostrada en el apartado anterior se deduce el Teorema Fundamental del Cálculo (TFC) con relativa facilidad, pues se cumplen todas las condiciones. Este establece que si f es una función real, continua, existe su integral en un intervalo $[a, b]$ y se define la siguiente función.

$$F_a(x) = \int_a^x f(t)\, dt$$

Entonces F_a es derivable y $F_a'(k) = f(k)$, para todo $k \in (a,b)$. Además, de ello se deduce que para alguna otra función H, tal que $H'(x) = f(x)$ para todo $x \in (a,b)$, entonces $\int_a^b f(t)dt = H(b) - H(a) = F_a(b)$. Primero se presenta la demostración del TFC y después la implicación indicada.

Demostración del TFC. Sea f función real, continua en un intervalo $[a,b]$, entonces se entenderá que una función real H en (a,b), es antiderivada de f en dicho intervalo

En la expresión (1), considere la restricción $k,\ k+I \in (a,b)$. Luego, bajo esta condición se sigue cumpliendo que

$$F_a(k+I) - F_a(k) = \int_k^{k+I} f(t)\,dt = f(c_k)(I)$$

Entonces

$$\frac{F_a(k+I) - F_a(k)}{I} = \frac{\int_k^{k+I} f(t)\,dt}{I} = f(c_k)$$

Tomando el límite para $I \to 0$, como $k \leq c_k \leq k+I$, entonces $c_k \to k$. Así

$$F_a'(k) = \lim_{I\to 0}\frac{F_a(k+I) - F_a(k)}{I} = \lim_{I\to 0}\frac{\int_k^{k+I} f(t)\,dt}{I} = \lim_{I\to 0} f(c_k) = f(k)$$

Por lo tanto, F_a es derivable y $F_a'(k) = f(k)$, para todo $k \in (a,b)$.

Implicación del TFC. Ahora se demuestra que si H es otra función tal que $H'(x) = f(x)$ para todo $x \in (a,b)$, entonces $\int_a^b f(t)dt = H(b) - H(a) = F_a(b)$.

Por hipótesis $H'(x) = f(x)$ y por el resultado anterior $F_a'(x) = f(x)$, para todo $x \in (a,b)$. De esto se sigue que existe una constante c, tal que $F_a(x) = H(x) + c$. Luego como $F_a(a)$ representa la cantidad total acumulada justo al inicio del proceso (la cual es cero) se tiene que.

$$0 = F_a(a) = \int_a^a f(t)\,dt = H(a) + c$$

Así

$$c = -H(a)$$

Esto implica que

$$F_a(x) = \int_a^x f(t)\,dt = H(x) - H(a)$$

En particular

$$F_a(b) = \int_a^b f(t)\,dt = H(b) - H(a) \blacksquare$$

Representación intuitiva de una acumulación considerando el TFC

Basado en los resultados anteriores y las evidencias mostradas en el capítulo de los antecedentes, en donde los estudiantes representan la acumulación como un barrido, puede suponerse que la representación de una acumulación en donde se vea involucrada al mismo tiempo el TFC, implica una distinta a la mostrada en las figuras 3.5 y 3.6. Ya que la razón de cambio instantánea de una acumulación, al estar relacionada con la función a integrar, puede ser representada mediante alguna interpretación de dicha función. A saber, un área bajo una curva puede ser representada por una acumulación de segmentos de longitud $f(x)$, mientras que el volumen de un cilindro puede ser representado por una acumulación de circunferencias de medida $g(x)$, como se muestra en las figuras 3.8 y 3.9.

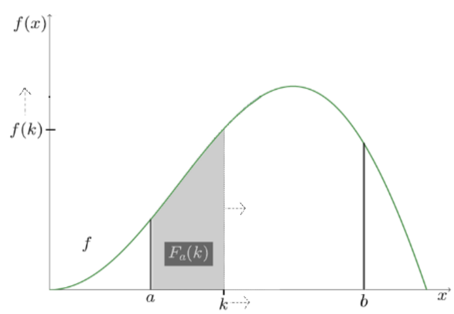


Figura 3.8. Representación de una acumulación, en la que la cantidad total momentánea es un área y los incrementos son representados con relación a los segmentos de longitud $f(x)$.

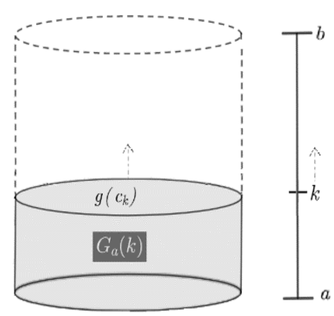


Figura 3.9. Representación de una acumulación, en la que la cantidad total momentánea es un volumen y los incrementos son representados con relación a las circunferencias de medida $g(x)$.

No debe perderse de vista que el valor de $F_a'(k) = f(k)$ es una medida relativa a t, provocado por un cambio instantáneo en t, por lo que habrá de entenderse como un indicador del comportamiento de los incrementos en la acumulación y no como un valor que pueda componerse multiplicativamente para expresar un aumento instantáneo a la cantidad acumulada. Por ejemplo, véase a $f(t)$ como una función que representa la cantidad de agua en un tanque en función de la altura t del agua. Si $F_a'(k) = f(k)$ es grande, significa que pequeños cambios en la altura del agua producen grandes cambios en la cantidad de agua en el tanque; si es pequeña, significa que se necesitan grandes cambios en la altura del agua para producir cambios apreciables en la cantidad de agua en el tanque. Luego, $F_a'(k) = f(k)$ permite aproximarse a los aumentos que se realizan a la cantidad acumulada, considerando a $f(k)$ constante en cambios de t, expresando esta aproximación como $f(k)\Delta t$, entendiendo que la aproximación será más precisa cuanto más pequeño sea el aumento al cual se quiere aproximar. Esto conlleva a que la tasa de cambio instantánea también permita obtener la cantidad acumulada total del proceso, considerando a la misma como el "límite de la suma de un número ilimitadamente creciente de sumandos que decrecen ilimitadamente" (Natansón, 1997, p.44), es decir $\lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} f(k)\Delta t$, en términos de una integral de Riemann.

Para finalizar este subcapítulo, cabe resaltar que las representaciones graficas de una suma de Riemann y una función de acumulación, con la consideración del concepto de acumulación, permiten expresar las mismas ideas que pueden hacerse sin dicho concepto. La diferencia entre estas dos formas de representar ambos modelos matemáticos radica en que, al considerar el concepto de acumulación, el resultado de una suma de Riemann o una función de acumulación puede verse como si hubiera sido construido por un proceso aditivo. Pero, si dicho concepto no se considera las representaciones se hacen sobre objetos previamente definidos, es decir, se recurre a la partición de un objeto preexistente para establecer las relaciones pertinentes que permiten construirlo. Esta diferencia implica que al considerar el concepto de acumulación se involucran características sensoriales dinámicas como el movimiento, el cambio, la diferencia, velocidad o tamaño en instantes que pueden ser fijados para construir objetos, lo que proporciona un conjunto más amplio de información para la creación de significado en un primer curso de cálculo integral.

Capítulo 4. Método

En este trabajo se llevó a cabo un estudio exploratorio de carácter cualitativo. Se analizaron las respuestas de 22 estudiantes de ingeniería con relación a la explicación de la integral definida con respecto al proceso de acumulación, utilizando un cuestionario como herramienta de estudio (ver Anexo I). Dicho cuestionario se basó en el utilizado por Bernabé (2021) sobre las expresiones utilizadas por 24 estudiantes de ingeniería para interpretar integrales definidas en relación con el TFC. El cuestionario de este autor, a su vez, se basó en un problema presentado por Carlson et al. (2003) en su investigación sobre el nivel de comprensión de estudiantes en un primer curso de cálculo, en temas como la covariación, límite, derivada, acumulación y TFC.

A diferencia de los estudios previos, en este trabajo se centró en la idea de acumulación como herramienta para explicar algunas integrales. Se buscó direccionar la atención de los estudiantes hacia esta idea en particular.

Características de los estudiantes

Para el presente estudio, se requirió que los estudiantes tuvieran un conocimiento básico sobre el manejo de las integrales, incluyendo el cálculo de sumas de Riemann y el modelo de área bajo la curva. También, se buscó que no estuvieran acostumbrados a interpretar integrales mediante el concepto de acumulación, para que sus respuestas fueran lo más intuitivas posibles. Con este fin, se eligieron estudiantes de formación superior que ya contaban con conocimientos previos de cálculo integral, obtenidos en cursos con enfoques tradicionales del mismo.

En total, participaron en el estudio 22 estudiantes de ingeniería con edades entre 19 y 24 años, provenientes de una escuela de formación superior de la Ciudad de México. Según información proporcionada por el profesor que aplicó el cuestionario, los estudiantes habían cursado previamente un curso de cálculo integral. Además, en algunas de las respuestas se observó que algunos de ellos tenían conocimientos sobre integración numérica. Si bien la integración numérica utiliza el concepto de acumulación, el enfoque del curso donde estos estudiantes aprendieron estos métodos numéricos es significativamente diferente al que se presenta en este trabajo, según se observó en el plan de estudio de la escuela.

Se mantuvo en todo momento el anonimato de los estudiantes, solicitando de manera voluntaria un medio de contacto en caso de requerir alguna entrevista. Sin embargo, solo se analizaron en profundidad solo las primeras respuestas recibidas, para explotar la mayor cantidad de información que se obtuviera de ellas, por considerarse representativas de los razonamientos e intuiciones de los estudiantes.

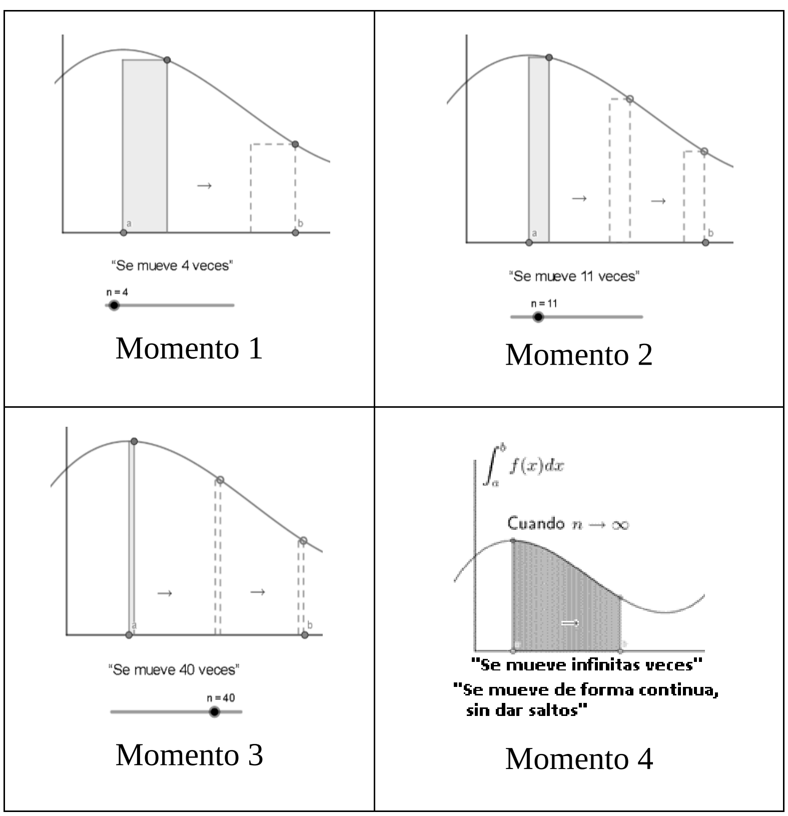
Cuestionario y aplicación

El cuestionario estuvo diseñado con seis preguntas, de las cuales cinco eran abiertas y una fue de opción múltiple. Su aplicación tomó alrededor de 50 minutos. Las preguntas se plantearon con la intención de que estuviera al alcance de los estudiantes la creación de algún significado de forma intuitiva entre las relaciones que pudiera surgir de una integral definida y el concepto de acumulación, sin la necesidad de realizar cálculos complejos. Se diseñó de esta manera con base en los resultados obtenidos por Bernabé (2021), donde se encontraron respuestas en las que los estudiantes no utilizaron el concepto de acumulación y recurrieron a realizar cálculos para responder.

A continuación, se muestran las preguntas y se discuten sus objetivos.

Pregunta 0

Lee la explicación que Juan, un estudiante de cálculo, hace del modelo de acumulación para la integral:



Es como tomar un rectángulo debajo de la gráfica que se puede desplazar. Aunque realmente nos interesa un rectángulo muy delgado, tan delgado que se parece a un segmento.

*Así, la integral es el área del **‘rastro’** que deja el segmento que se mueve desde el punto ‘a’ hasta el punto ‘b’, sin dar saltos. Lo hace de forma continua.*

*Es como si el segmento fuera **acumulando área** con su*

Conjunto de figuras 4.1. Representación del paso de una suma de Riemann a una integral de Riemann, con la que se calcula un área bajo una curva considerando una idea de barrido.

El profesor dijo que el modelo de acumulación es una forma intuitiva de ver la integral.

¿Te parece claro el modelo de acumulación y crees que puede ser útil para resolver problemas?

Esta pregunta tuvo como objetivo indagar las perspectivas que los estudiantes tienen sobre la interpretación de la integral definida como el barrido de área bajo una curva, utilizando el concepto de acumulación y el movimiento. La explicación previa a la pregunta, acompañada con el conjunto de figuras 4.1, se presentaron para brindar una aproximación que se consideró intuitiva sobre cómo se podría entender una integral definida con la idea de un barrido. Se esperó que respondieran que representa el área de un círculo con radio de dos unidades, interpretada como el rastro que deja una circunferencia al expandirse.

Pregunta 1

Teniendo en cuenta el modelo de acumulación, piensa en un círculo con centro en el origen que se expande desde un radio igual a cero hasta un radio igual a "r". Responde sin hacer cálculos ¿Qué representa la siguiente integral? Explica tu respuesta: $\int_0^2 2\pi r \, dr$

Figura 4.1. Representación de la integral $\int_0^2 2\pi r \, dr$. Mostrada en la pregunta 1

La intención del texto previo a la pregunta fue establecer una conexión entre la integral y el área de un círculo, mientras que el objetivo de la pregunta fue recopilar información sobre los razonamientos que los estudiantes usan para explicar esta relación.

Pregunta 2

Basado en el modelo de acumulación, ¿qué integral es la que representa la siguiente área?

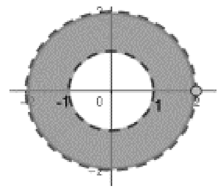


Figura 4.2. Área de un anillo de circunferencia mostrada en la pregunta 2.

El propósito del texto introductorio a la pregunta fue dirigir la atención de los estudiantes hacia la idea de acumulación al abordar la figura presentada. El objetivo de la pregunta fue obtener información sobre los razonamientos que los estudiantes expresan para explicar la relación entre la figura y una integral. Se esperó que los estudiantes expresaran la integral $\int_1^2 2\pi r \, dr$, explicando algo congruente con la idea de una acumulación de circunferencias que se produce al aumentar gradualmente el radio desde una hasta dos unidades.

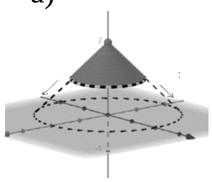
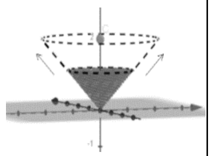
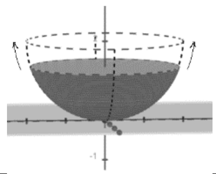
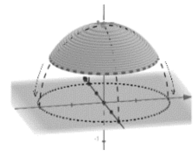
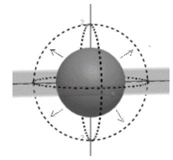
Pregunta 3

Sabiendo que $4\pi r^2$ puede verse como la fórmula para calcular el área de la superficie de una esfera y basado en el modelo de acumulación, ¿qué interpretación se puede dar al cálculo de la siguiente integral? No es necesario que des un resultado numérico, ni que realices el cálculo, aunque puedes realizarlo si lo deseas. $\int_0^2 4\pi r^2 \, dr$.

La intención del texto previo a la pregunta es sugerir la relación que guarda la integral mostrada con la acumulación de superficies de esferas. El objetivo de la pregunta es recabar información sobre las interpretaciones y explicaciones que dan a tal relación. El fin del texto posterior a la pregunta es invitar a los estudiantes a no realizar cálculos para responder a la pregunta. Se presupuso que para este punto del cuestionario los estudiantes ya habrían adquirido alguna idea sobre cómo interpretar la integral definida con alguna idea de acumulación, considerando la interpretación del integrando y que no habrían de requerir una pista visual para proporcionar una respuesta consistente. Se esperó que los estudiantes pudieran relacionar a la integral con el volumen de una esfera y que explicarían con relación a alguna acumulación mediante superficie de esferas.

Pregunta 4

Pensando en la idea de acumulación de Juan, ¿cuál de las siguientes imágenes representaría $\int_0^2\left(\int_0^x 2\,\pi r\,dr\right)dx$? (Explica detalladamente la razón de tu decisión).

a)	b)	c)	d)	e)	f) Otro (dibújalo)
					

Conjunto de figuras 4.2. Opciones para elegir como representación de la integral $\int_0^2\left(\int_0^x 2\,\pi r\,dr\right)dx$. Mostradas en la pregunta 4

Esta pregunta estuvo acompañada con las imágenes de conos, semi esferas y una esfera, como se muestra en el conjunto de figuras 4.2. El fin de mostrar las imágenes fue para proporcionar pistas a los estudiantes sobre cómo podrían interpretar la doble integral y servir de distractores, pues se esperó que los incisos diferentes al b) serian posibles respuestas considerando la relación de estas figuras con las de un círculo, circunferencia, esfera y la acumulación, debido al orden presentado en las preguntas. La intención del texto previo a la pregunta fue para seguir manteniendo la atención de los estudiantes en que deberían seguir pensando en alguna idea de acumulación para interpretar la doble integral. La pregunta tiene por objetivo recabar información sobre las explicaciones que dan los estudiantes a la relación que realizan entre la doble integral definida y alguna de las imágenes mostradas o alguna otra interpretación que quisieran realizar. Se esperó que los estudiantes pudieran relacionar a la doble integral con el volumen del cono mostrado en el inciso b), el cual tiene altura y radio iguales a 2 unidades, y que explicaran la situación con alguna idea relacionada a la acumulación de circunferencias.

Pregunta 5

¿Qué te pareció la idea de Juan? ¿la usarías? ¿te sentiste confundido? ¿te estresó?, etc.

La intención de estas preguntas fue recabar información que permita observar alguna posible aceptación, rechazo o confusión sobre la perspectiva de interpretación de integrales, propuesta implícitamente en las preguntas anteriores. Las respuestas a esta pregunta podrían dar luz sobre posibles modificaciones al cuestionario o nuevos caminos para investigaciones futuras.

Confiabilidad y validez

Se esperó que el cuestionario utilizado para la toma de datos (Anexo I) tuviera cierto grado de confianza aceptable desde su primera versión, por estar basado en el trabajo de Bernabé (2021). Sin embargo, al tener diferentes objetivos, las modificaciones fueron significativas. En total se llevaron acabó cuatro validaciones, tres internas, con ayuda del personal docente de Cinvestav, y una externa, con personas ajenas a dicha institución. A continuación, se muestran más detalles.

La primera validación realizada fue interna. Se presentó a un grupo de posgrado en matemática educativa, en una clase de metodología de la investigación. En ésta participaron tres estudiantes de posgrado y dos docentes, en el cual se hicieron modificaciones significativas en búsqueda de que los encuestados pudieran expresar abiertamente sus ideas.

Posterior a las modificaciones de la primera validación, se realizó una validación externa con cuatro estudiantes, para observar el tipo de respuestas que podrían esperarse, las dificultades de las preguntas o posibles ambigüedades que pudieran surgir. Estos participantes tenían estudios acreditados de nivel superior, dos con formación en ingeniería y dos con formación en ciencias fisicomatemáticas, con un rango de edad de 24 a 29 años. Como resultado, se obtuvieron dudas sobre la forma en la cual tenían que responder, con tiempos de respuesta del cuestionario desde los 30 a los 70 minutos aproximadamente. Un estudiante hizo explícito que la pregunta en la cual habría de interpretarse una doble integral, le pareció difícil de responder y sugirió que se añadieran pistas que ayudaran a su interpretación.

Finalmente, con los resultados de la validación externa, se realizaron las modificaciones pertinentes y se dieron otras dos validaciones internas con el mismo grupo de posgrado. En estas últimas validaciones se decidió acortar la longitud de las preguntas en prevención de evitar distractores y hacer que los estudiantes se enfocaran en responder con mayor rapidez.

Método de análisis de las respuestas

El análisis de las respuestas fue realizado mediante métodos propuestos por la teoría fundamentada, los cuales compaginan con el presente trabajo: un caso de estudio, exploratorio y de carácter cualitativo. Según Charmaz (2009), estos métodos consisten en pautas flexibles y sistemáticas, que proporcionan dispositivos heurísticos y principios generales, para la recopilación y análisis cualitativo, que pueden llevar a la construcción de teorías basadas en los datos recolectados. Además, permiten mantener un orden para crear relaciones entre los datos o entre hipótesis emergentes.

> Como teóricos fundamentados, estudiamos nuestros primeros datos y comenzamos a separar, ordenar y sintetizar estos datos a través de una codificación cualitativa. La codificación significa que adjuntamos etiquetas a segmentos de datos que representan de qué se trata cada segmento. La codificación destila datos, los ordena y nos brinda un control para hacer comparaciones con otros segmentos de datos. Los teóricos fundamentados enfatizan lo que está sucediendo en la escena cuando codifican datos. (Charmaz, 2009. Pag 16).

Según Glaser y Säuss (1967; Glaser, 1978; Strauss, 1987, como se citó en Charmaz, 2009), la práctica de la teoría fundamentada posee los siguientes componentes:

- Participación simultánea en la recopilación y el análisis de datos.
- Construir códigos analíticos y categorías a partir de datos, no de hipótesis preconcebidas deducidas lógicamente.
- Uso del método comparativo constante, que implica hacer comparaciones durante cada etapa del análisis.
- Avanzar en el desarrollo de la teoría durante cada paso de la recopilación y el análisis de datos.
- Redacción de memorandos para elaborar categorías, especificar sus propiedades, definir relaciones entre categorías e identificar brechas.
- Muestreo dirigido a la construcción de teorías, no a la representatividad de la población.
- Realización de la revisión de la literatura después de desarrollar un análisis independiente (p. 19).

En algunos casos se crearon síntesis de las respuestas, mientras que en otros se optó por la creación de etiquetas o se realizaron ambas acciones. Esta forma de proceder, con respecto a la síntesis y etiquetado, se debió a que se obtuvieron respuestas exclusivamente en palabras, en cálculos o mezclando ambas formas. Posterior a esto, se buscaron relaciones entre las respuestas que proporcionaron los estudiantes, en búsqueda de crear categorías que posteriormente permitieron la descripción y discusión de estas para identificar las ideas que puedan ser productivas para explicar algunas relaciones entre integrales definidas y sus interpretaciones basadas en la acumulación.

Capítulo 5. Resultados

Pregunta 0

El primer objetivo particular de este trabajo consistió en la categorización de las expresiones que utilizan los estudiantes para explicar la posible claridad y utilidad de una interpretación de la integral definida, como acumulación de área bajo una curva. Para lograr este objetivo se les presentó el conjunto de imágenes 4.1, acompañado de un breve texto (véase Anexo I). Con ello se les realizó la siguiente pregunta:

> ¿Te parece claro el modelo de acumulación y crees que puede ser útil para resolver problemas?

El análisis de las respuestas obtenidas fue realizado considerando la claridad y utilidad del modelo presentado; la negación de la claridad y utilidad de este; y las expresiones y relaciones que utilizaron los estudiantes para complementar sus respuestas. Bajo estos aspectos se observó que en algunas respuestas no se pudo identificar si se hace referencia a la claridad o la utilidad, en tales casos se consideró el contexto y la relevancia de la respuesta para ser clasificados. Aquellas respuestas que no pudieron ser clasificadas se consideraron singulares. A continuación, se muestra un ejemplo sobre cómo se realizaron estas clasificaciones, considerando las expresiones referenciales y descriptivas.

> Estudiante 5. Sí, me parece útil e intuitivo puesto que el concepto de integral se basa en particiones infinitas para calcular, en este caso el área debajo de la curva.

En la respuesta no se menciona de forma explícita que la introducción presentada en el cuestionario sea clara, sin embargo, se indica que es intuitiva y se acompaña inmediatamente con una explicación. La explicación que proporciona se consideró como evidencia del por qué es clara la introducción. En la explicación se observa que hace referencia al concepto de la integral, las particiones en una suma de Riemann y un área bajo la curva, en donde el concepto de la integral puede considerarse como la principal expresión referencial, mientras que las sumas de Riemann y un área bajo la curva pueden considerarse como expresiones descriptivas, que permiten explicar la relación de la introducción con el concepto de la integral. Finalmente, se consideró que no hay explicación con respecto a la utilidad que se indica, a pesar de que la utilidad se puede poner como subordinada a la claridad. Más adelante se proporcionará otro ejemplo, con la respuesta del estudiante 15, sobre las previsiones realizadas para la clasificación, relacionada con la subordinación de la utilidad a la claridad. La dificultad en identificar si los estudiantes hacían referencia a la claridad o utilidad del modelo sugiere que el cuestionario debería ser modificado, preguntando sobre la claridad y utilidad de forma separada y distanciada.

Así, la respuesta del estudiante 5 fue incluida en las categorías "indicaron claridad" e "indicaron utilidad", en las respectivas subcategorías "relacionó con alguna idea de integral" y "sin explicación de la utilidad". A continuación, en la tabla 5.1 se muestran los resultados de la categorización bajo estas consideraciones y se procede a dar mayor explicación.

Tabla 5.1. Categorización y frecuencia de los resultados obtenidos en la pregunta 0

Categoría	Subcategoría	Frecuencia
Indicaron claridad (Total: 18)	Relacionó con alguna idea de integral.	6
	Relacionó con sumas de Riemann.	1
	Relacionó con un área bajo la curva.	2
	Describió la introducción.	2
	Sin explicación de la claridad.	7
Indicaron utilidad (Total: 6)	Como método para resolver problemas.	4
	Sin explicación de la utilidad.	2
Condicionaron su utilidad (Total: 7)	Expresó duda de su utilidad.	3
	Utilidad condicionada al contexto.	3
	Por falta de precisión para ser usado.	1
Indicaron no percibir utilidad (Total: 4)	Por falta de operatividad.	2
	Por falta de precisión para ser usado.	2
Casos singulares (Total: 2)	Permite obtener un área bajo la curva.	1
	Permite comprender la integral.	1

Indicaron claridad

En esta categoría se incluyeron dieciocho respuestas, de un total de veintidós, en las que se observó que se hacía referencia a la claridad de la introducción presentada en el cuestionario. En seis de estas dieciocho respuestas, correspondientes a los estudiantes 5, 6, 13, 15, 17 y 21, se observó la consideración de alguna idea de la integral como principal expresión referencial. También se observaron dos respuestas, correspondientes a los estudiantes 7 y 14, que pudieron relacionarse con el modelo de área bajo la curva y dos más, de los estudiantes 10 y 16, con relación a una descripción que realizaron de la introducción que se presentó en la pregunta. Mientras que una más, que correspondió al estudiante 9, se relacionó con las sumas de Riemann y en las respuestas de los estudiantes 1, 2, 3, 8, 11 y 19 no se dieron explicaciones con relación a la claridad que indicaron. Se reproducen y discuten a continuación las respuestas de los estudiantes 10, 13 y 21 con relación a la claridad.

Estudiante 10. Me queda claro el concepto de que los segmentos se van acumulando y es claramente útil esta forma de verlo. Pero personalmente me gusta más verlo como segmentos independientes los cuales se suman. Como la suma de “Riemann” que es la forma en la que yo aprendí este concepto, ya que me genera algo de “confusión”, “ruido”, el hecho que el segmento se mueva n veces.

Estudiante 13. Si, esta explicación es clara para entender de manera intuitiva que es lo que hace el operador integral, realmente lo que está explicando es la sumatoria de Riemann. […].

Estudiante 21. Es claro el modelo de acumulación, ya que simplifica la idea de “integral” y es entendible […].

Las respuestas de los estudiantes 13 y 21 fueron incluidas en la subcategoría de quienes consideraron alguna idea de la integral como principal expresión referencial. Si bien se puede considerar que un área bajo una curva o las sumas de Riemann, por ejemplo, también pueden entenderse como ideas que se relacionan con la integral, en esta subcategoría se consideró una relación más estrecha en la que en la respuesta se observe a la palabra “integral” o “integrales”. Por ejemplo, en la respuesta del estudiante 13 se refiere al “operador integral”, mientras que en la del estudiante 21 se hace referencia a la “idea de ‘integral’”. En estas dos respuestas se observa que la introducción presentada en el cuestionario les parece una forma simple pero estrechamente relacionada con lo que pueda entenderse por “integral”. Ya sea como concepto como sugiere la respuesta del estudiante 5, la cual se reprodujo al inicio, o como operador según se expresa en la respuesta del estudiante 13. En el resto de las respuestas, con relación a la claridad, se tiene la misma apreciación, aunque no todas se relacionan directamente con la palabra “integral”. A pesar de esta claridad se advierte sobre posibles dificultades relacionadas al movimiento, como lo sugiere la respuesta del estudiante 10. Su respuesta fue incluida en la subcategoría de quienes describieron la introducción, es decir, la expresión referencial al que parecen aludir es a una especie de réplica de la introducción. En la respuesta de este estudiante se expresa confusión y ruido debido al movimiento del segmento mostrado en las imágenes de la introducción, lo que sugiere que el movimiento de forma discontinua de los rectángulos podría ser fuente de dificultades de aprendizaje.

Indicaron utilidad

En esta categoría se incluyeron seis respuestas. Cuatro respuestas, correspondientes a los estudiantes 13, 14, 15 y 17 estuvieron relacionadas con una explicación de una utilidad como método para resolver problemas, y de las otras dos respuestas, que correspondieron a los estudiantes 5 y 10, no se dieron explicación acerca de la utilidad que perciben. Para esta categoría se consideró reproducir y discutir las respuestas de los estudiantes 15 y 17, a modo de ejemplo. La discusión que se realiza es con la finalidad de esclarecer que existen elementos que pudieran ser tomados en cuenta para esclarecer la claridad y utilidad que expresaron todos los estudiantes, acerca de la interpretación de la integral que se mostró al inicio del cuestionario. Aunque estos elementos no se tomaron en cuenta para la clasificación, por considerarlos ambiguos al momento de aportar información acerca de la claridad y utilidad, discutirlos permite imaginar el panorama de las respuestas que se obtuvieron.

Estudiante 15. Sí, dependiendo de la función que sea dada, hay modelos y más en métodos numéricos donde se “aproximan” integrales a base de acumulaciones de áreas, algunos tienen un índice de error muy bajo y dependiendo el grado o tipo de función llega a ser exacta la aproximación, con un error de ceros. Entonces sí, es útil para resolver problemas. En el caso de que sean problemas donde se necesite mucha exactitud, lo mejor será “acumulado de áreas” pero con un “n” muy grande o en el peor de los casos podría no funcionar.

Estudiante 17. Visualmente me parece claro, ya que las gráficas y la explicación van de la mano, entiendo que entre más rectángulos/segmentos hallan mejor va a ser la precisión de la integral del área, si me parece útil para resolver problemas.

Se retoma con la respuesta del estudiante 15 la explicación de las previsiones que se realizaron para la clasificación de las respuestas obtenidas, como se comentó al inició con la respuesta del estudiante 5. En esta respuesta se incluyen dos afirmaciones. Se consideró que la primera se refiere a la claridad, la cual es acompañada con una explicación acerca de cómo puede aproximarse el valor de una integral definida, de cuyo integrando no se conoce su primitiva. Mientras que la segunda afirmación se observó que se refiere a la utilidad. En este caso, en contraste con la respuesta del estudiante 5 que se reprodujo al inicio, se muestra que la utilidad está subordinada no a la claridad en sí, sino a la explicación que evidencia la claridad acerca de la introducción que se le presentó. Es decir, se puede conjeturar que al estudiante le pareció clara la introducción y, como muestra de tal claridad, presenta una explicación en la cual relaciona a la acumulación con la aproximación de la integral de una función mediante acumulación, y continúa afirmando la utilidad que observa de la relación entre la acumulación y las integrales haciendo énfasis a la explicación inicial que proporciona.

Sin embargo, el poder diferenciar si la utilidad está o no subordinada a la claridad no resulta tan evidente, pues debe considerarse que aún para este caso lo que se ha dicho anteriormente es solo una conjetura, ya que no se contó con más información. Por otra parte, esta respuesta también podría clasificarse considerando que la utilidad parece estar condicionada a un contexto, en particular a los casos en los cuales del integrando no posee o no se conoce su función primitiva. Pero, se incluyó en la categoría “indicaron utilidad” debido a que en la respuesta no se muestra ningún condicionamiento o duda acerca de la utilidad. Por ello puede entenderse que la utilidad que se indica es debido a su consideración como un método de resolución de problemas en los cuales se aproxime el valor de una integral definida sin conocer la función primitiva. Esto también puede sugerir que el estudiante poseía algunos conocimientos acerca de este método de aproximación a los valores de integrales definidas al momento de responder.

Por otra parte, la respuesta del estudiante 17 puede considerarse como ejemplo de las respuestas que afirman una utilidad, pero no explican la misma. En este caso se afirma que le parece útil para resolver problemas, pero no se da mayor explicación sobre ello, como si ocurre en el caso del estudiante 15. Además, nótese que la claridad a la que refiere el estudiante 17 es debido a la consistencia entre las imágenes y el texto presentados en la introducción, proporcionando una breve explicación sobre cómo se aproxima un área bajo la curva con rectángulos infinitesimales, que puede verse como evidencia de su entendimiento. Aunque la aproximación que indica podría tomarse como evidencia también de la utilidad que menciona, se decidió no hacerlo pues la utilidad también podría relacionarse con la claridad visual que se indica en su respuesta.

Condicionaron su utilidad

En esta categoría se incluyeron siete respuestas, tres de las cuales, condicionaron la utilidad a algún contexto (estudiantes 9, 12 y 21). Mientras que en tres respuestas más, pertenecientes a los estudiantes 1, 2 y 11, se observó duda acerca de su utilidad sin dar explicaciones de ello, y en la respuesta del estudiante 18 se observó la indicación de una posible utilidad condicionada a una mayor precisión para ser utilizado. Se aborda a continuación, como primer ejemplo, la respuesta del estudiante 18, ya que guarda relación con lo comentado al final de la categoría anterior.

> Estudiante 18. Me parece una buena opción para introducción al tema de la integral, aunque para ser precisos, para resolver problemas creo que se debería hacer un análisis más profundo que explique todas las implicaciones que pueda a llegar a tener respecto con lo que está ligada, con esto me refiero a tener claro en qué momento se puede resolver

problemas de este tipo, y en qué casos habría que implementar alguna otra forma de resolverlo.

Como se observa en la anterior respuesta, no se hace una mención directa a la claridad ni a la utilidad. La claridad se podría relacionar con la expresión “me parece una buena opción para introducción del tema de la integral”, sin embargo, se optó por relacionar toda la respuesta a una explicación acerca de una posible utilidad. Bajo este contexto se puede decir que la utilidad puede ser de carácter didáctico, condicionada a esclarecer las relaciones que puede guardar una introducción como la que se presentó con respecto a la resolución de problemas. En la respuesta del estudiante 12, que a continuación se reproduce y discute, se observa una relación similar con la resolución de problemas.

Estudiante 12. Más o menos, es que la integral tiene bastantes propiedades y hay problemas muy complejos que no se podrían resolver de manera muy precisa con solamente tomar en cuenta la cuestión gráfica.

Nótese que en esta respuesta tampoco se observa un señalamiento directo a la claridad o la utilidad. Se consideró relacionarla exclusivamente con la utilidad debido a la mención que hace acerca de la resolución de problemas. El condicionamiento que se observa en la respuesta es por cuestión de la expresión “más o menos”, mientras que el resto de la explicación refleja la idea de que la utilidad estaría condicionada al contexto en el cual pueda resolverse problemas de manera precisa solo por medio de gráficas.

Finalmente, se muestra a continuación la respuesta del estudiante 2 como ejemplo de las respuestas en las cuales se observa una duda acerca de su utilidad, en este caso con la expresión “puede ser útil”, y que no proporcionaron más detalles acerca de tal utilidad.

Estudiante 2. Si, si puede ser útil realmente es entendible.

Indicaron no percibir utilidad

Se tuvo un total de cuatro respuestas incluidas en esta categoría, de las cuales dos, pertenecientes a los estudiantes 3 y 8, se relacionaron con una falta de operatividad y las otras dos respuestas, de los estudiantes 19 y 20, se relacionaron con una falta de precisión para ser aplicado. En contraste con la categoría en la cual se observó un condicionamiento de la utilidad, en esta las respuestas referían explícitamente a que la introducción presentada no era útil. A continuación, se reproducen y discuten brevemente las respuestas de los estudiantes 3 y 20 como ejemplo.

Estudiante 3. Si es claro el modelo, pero no es útil para resolver el problema, ya que cada área de cada rectángulo es distinta, además de que como tal un rectángulo no representa toda el área, hay que hacer una operación inicial o primordial que es la suma de todos estos mismos y el resultado de esa área es la suma y el total del área escrito.

Estudiante 20. Me parece clara la forma en que Juan da su explicación, sin embargo, no me parece de gran utilidad en la solución de problemas por la falta de precisión para la solución.

Como se observa en la respuesta del estudiante 3, la falta de utilidad para resolver problemas es debido a que, para el cálculo del área, según el estudiante, se requiere realizar una operación. La descripción que proporciona acerca de esta operación coincide con una descripción de las sumas de Riemann, por lo cual se puede decir que no le pareció útil cualquier idea que pueda haber tenido de la introducción para resolver problemas, porque no es operativo como las sumas de Riemann. Mientras que la respuesta del estudiante 20 se asemeja con las respuestas de los estudiantes 12 y 18, que ya fueron reproducidas, en cuanto a la falta de información para saber dónde, o de qué forma, podría utilizarse la interpretación de la integral presentada en la introducción.

Casos singulares

En esta categoría se incluyeron solo dos respuestas, de las cuales no se pudo determinar si la afirmación que reflejan es con respecto a la utilidad o a la claridad. Estas respuestas fueron de los estudiantes 4 y 22 que a continuación se reproducen.

Estudiante 4. Si, ya que bajo este principio se puede obtener fácilmente un área bajo la curva por el principio de integral definida.

Estudiante 22. Si, ya que es una forma en la que se puede comprender la integral, por medio de intervalos para tener una aproximación de su cálculo.

Aunque no pueda determinarse si se refieren a la claridad o utilidad, es rescatable que las respuestas son afirmativas y se asemejan al resto, en cuanto a que se relacionan con alguna facilidad para expresar un área bajo la curva, alguna idea de integral o como algún método de aproximación al cálculo de una integral definida.

Se puede concluir esta parte del análisis, indicando que la claridad y utilidad, de la idea del barrido de un área con relación a una integral definida, parecen ser expresadas tanto de forma condicionada una de otra, como de formas independientes. Aunque en ambos casos se percibe que la utilidad de la idea presentada puede ser condicionada a la operatividad que pueda obtenerse de ella, así como a una mayor explicación sobre su funcionamiento. A demás se resalta que solo se obtuvieron cuatro respuestas negativas, relacionadas con alguna falta de explicación, lo que permite sugerir que la idea del barrido se fue relacionada por los participantes con relativa facilidad a la idea que pueda tenerse de una integral definida.

Pregunta 1

El objetivo particular número dos de la investigación consistía en categorizar las respuestas de los estudiantes al explicar una integral definida que se relaciona con la expansión de un círculo. Para lograr esto, se analizaron las respuestas de los estudiantes mediante dos preguntas clave: ¿cómo interpretaron los estudiantes a la integral $\int_0^2 2\pi r\, dr$? y ¿cómo se relacionan las explicaciones de los estudiantes?

La pregunta formulada a los estudiantes fue la siguiente, acompañada de la figura 4.1:

Figura 4.1. Representación de la integral $\int_0^2 2\pi r\, dr$. Mostrada en la pregunta 1

> Pregunta 1. Teniendo en cuenta el modelo de acumulación, piensa en un círculo con centro en el origen que se expande desde un radio igual a cero a un radio igual a r. Responde sin hacer cálculos ¿Qué representa la siguiente integral? Explica tu respuesta
>
> $$\int_0^2 2\pi r\, dr$$

Se presentan a continuación los resultados obtenidos.

¿Cómo Interpretaron los estudiantes a la integral?

Esta pregunta fue respondida observando las expresiones referenciales o palabras que referían a algún objeto matemático en las respuestas de los 22 estudiantes, tales como “circunferencia”, “círculo” o “radio”. Para la respuesta de cada estudiante, estas palabras fueron relacionadas con el contexto de la pregunta y el resto de la explicación que proporcionaron. Así se descubrió que todos refirieron que la integral representa un área, pero, difieren en qué área es la que representa. Para clasificar las diferentes interpretaciones, se crearon cuatro categorías basadas en las explicaciones proporcionadas por los estudiantes, la cuales se muestran en la tabla 5.2.

Tabla 5.2. Categorías y frecuencias de los resultados obtenidos en la pregunta 1

Categoría	Total
Relacionaron con el área de un círculo.	15
Relacionaron con el área de una circunferencia.	4
Relacionaron con un área bajo la curva.	2
Respuestas singulares.	2

Para lo anterior, debe considerarse que la respuesta de un estudiante (estudiante 9) fue incluida en dos categorías. A continuación, se detallan los resultados considerando cada una de las categorías.

Relacionaron con el área de un círculo. La categoría incluyó a quince respuestas que se relacionaron con la integral con el área de un círculo, correspondientes a los estudiantes 1, 3, 5, 9-13, 15-18, 20-22.

En la respuesta del estudiante 9 se identificó al radio con una medida de “r” unidades y en la respuesta del estudiante 20 no se pudo determinar con claridad si éste identificó la medida del radio del círculo al que hacía referencia, aunque puede suponerse que refiere a un radio de dos unidades. En las trece respuestas restantes se identifica el radio con una medida de dos unidades. Como ejemplo, se presenta a continuación la respuesta del estudiante 20.

> Estudiante 20. Es el área que quedará sombreada considerando 4 cuadrantes. Los limites se consideran como [0,2] pues es hasta donde se tomará el área. $2\pi r$ corresponde a la superficie del círculo.

Relacionaron con el área de una circunferencia. En esta categoría se incluyeron las respuestas de los estudiantes 2, 7, 8 y 19. Como aclaración, se puede tomar la suposición de que se refirieron al área que encierra una circunferencia, es decir, el área de un círculo. Sin embargo, este supuesto no se consideró en el análisis, manteniendo a las respuestas de estos estudiantes en categorías diferentes de aquellas que refirieron al área de un círculo. Se observó que en las cuatro respuestas también se identifica al radio de la circunferencia con una medida de dos unidades. Además, en la respuesta del estudiante 8 se indicó que la circunferencia tiene centro en el origen del plano cartesiano. Este último hecho se hace relevante considerando que solo en esa respuesta y en la del estudiante 17 observa que se ubica la circunferencia con centro en el origen.

Relacionaron con un área bajo una curva. En esta categoría se incluyeron las respuestas que pudieron relacionarse con el modelo de área bajo la curva como expresión referencial. Solo fueron incluidos dos estudiantes, cuyas respuestas se reproducen a continuación.

Estudiante 9. Un área bajo la función contenida por los limites 0 y 2 de la función que en este caso es $2\pi r$ que debido a su forma y que el termino con coeficiente distinto de cero tiene exponente 1 vendrá siendo una recta, en este caso $2\pi r$ se puede ver como el perímetro de un círculo de radio "r", al integrar obtenemos un término cuadrático por lo que sabemos πr^2 es el área de un círculo (formula que ya conocemos).

Estudiante 14. Es el cálculo de la mitad de la circunferencia expandida ya que el $2\pi r$ representa el perímetro y al estar en función de 'r' (dr) indica que el radio va cambiando entonces se evalúa del punto 0 al 2 es decir una semicircunferencia, por lo que para obtener toda el área el resultado de la integral se debe multiplicar por 2.

Se observó que en la respuesta del estudiante 9 se proporciona con claridad dos representaciones: una como área bajo una recta y otra como el área de una circunferencia. Mientras que en la respuesta del estudiante 14 se hace referencia a que la integral definida representa el área de una semicircunferencia y obtiene el área de un círculo con la adición de otra operación. Si bien la respuesta del estudiante 14 parece que podría ser incluida en la categoría "relacionaron con el área de un círculo", debe notarse que no se refiere al área del círculo como expresión referencial, sino como una interpretación consecuente de haber considerado el área de una semicircunferencia. Aunque no queda claro la orientación de la semicircunferencia, la respuesta de este estudiante se incluye en esta categoría por considerarse que proporciona una interpretación peculiar, en contraste con el resto de las categorías.

Respuestas singulares. En esta última categoría se incluyeron las respuestas en las que no pudo determinarse a que área se hacía referencia. Particularmente, las respuestas de los participantes 4 y 6. A continuación, se reproduce como ejemplo la respuesta del estudiante 4.

Estudiante 4. Representa el área dentro de la región $[0,2]$ de la circunferencia de radio $[0, x]$.

Para finalizar los resultados parciales de este análisis, se retoma la pregunta: ¿cómo interpretaron los estudiantes a la integral $\int_0^2 2\pi r\, dr$? Como se mencionó, en las veintidós respuestas se identifica a la integral con un área: en diecinueve se relaciona a la integral con el área de un círculo o el área que encierra una circunferencia, en dos respuestas no se pudo identificar con claridad a qué área se referían y solo dos respuestas pudieron ser relacionadas con el modelo de área bajo la curva.

¿Cómo se relacionan las explicaciones de los estudiantes?

Para contestar esta pregunta, para cada respuesta de los estudiantes se intentó responder a la pregunta: ¿con qué ideas se puede relacionar la respuesta de cada estudiante? Se evaluaron sus explicaciones buscando palabras claves como “se mueve”, “se expande”, “una vuelta”, “se acumula”, “representa”, etc. con el fin de analizar como usaban estas expresiones para la creación de significado entre la integral y la imagen o la idea de una circunferencia que se expande. Al final de esta etapa, las respuestas de los veintidós estudiantes se agruparon en cinco categorías. Los resultados de este análisis se presentan a continuación en la tabla 5.3, posterior a la tabla se describen las cinco categorías identificadas.

Tabla 5.3. Categorización y frecuencia de los resultados obtenidos en la pregunta 0

Categoría	**Total**
Se expresaron con alguna idea de movimiento.	13
Recurrieron a describir la integral.	10
Usaron explícitamente la palabra acumulación.	8
Realizaron algún cálculo.	3
Otros.	1

Se expresaron con alguna idea de movimiento. En esta categoría se incluyeron las respuestas en las que se observaron expresiones como “desde… hasta”, “una vuelta”, “lo que va variando”, “se expande”, “va cambiando” o “se mueve”. Las respuestas incluidas correspondieron a los estudiantes 1, 5, 6, 8, 11, 12, 14, 16-19, 21 y 22, en todas ellas se identificó un movimiento con inicio en 0 y final en 2 unidades.

En ocho respuestas, correspondientes a los estudiantes 1, 6, 8, 11, 12, 14, 17 y 18, se identificó la referencia a un movimiento o cambio en el radio. En las respuestas de los estudiantes 8, 11 y 14, e movimiento estuvo relacionado con el diferencial (dr). En seis respuestas, correspondientes a los estudiantes 5, 11, 12, 14, 16 y 21, se observó que expresaban la idea de expansión de una circunferencia, de las cuales, en la respuesta del estudiante 16 se observa una explicación que hace referencia explícita a la figura 4.1 mostrada en la pregunta.

Por otra parte, en la respuesta del estudiante 22 se observó una referencia al movimiento de un segmento, pero no se pudo determinar a qué segmento se refería. Mientras que en la respuesta del estudiante 19, que a continuación se reproduce, se expresa implícitamente una idea de movimiento con una integral doble.

Estudiante 19. $\int_0^2 2\pi r\, dr\ = \int_{-2}^{0} \int_0^2 f(x)dx$. Es la forma en la que determinamos el área de la circunferencia sombreada comprendida desde $x_0 = 0$ hasta $x_1\ = 2.\ \pi \frac{r^2}{2}\big|_0^2 = \frac{\pi(4)}{2} = 2\pi$.

La idea implícita de movimiento, a la que se refirió anteriormente, es por cuanto a que las integrales dobles suelen relacionarse con el cálculo de áreas mediante barrido de un segmento, cuya longitud, inicio y final están delimitadas por las curvas que componen a la región. En este caso los límites de integración, que se observan en la integral doble de la respuesta del estudiante, coinciden con un recorrido a dos trozos del intervalo $[-2,2]$ sobre el eje de las abscisas. Además de observarse la expresión "desde… hasta".

Finalmente, se hace la observación de que en las respuestas de los estudiantes 12 y 18, que se reproducen a continuación, se expresa una idea de acumulación, pero no se hace referencia de forma explícita a la misma.

Estudiante 12. El área del perímetro que va dejando un círculo muy pequeño de radio 0 (el radio mínimo) hasta el círculo más grande de radio 2, es decir, el radio va aumentando de $r = 0$ hasta $r = 2$.

Estudiante 18. La integral corresponde al perímetro de circunferencia, de radio r, la cual recorre de $r = 0$ a $r = 2$, lo que quiere decir que el dar representación de una suma infinita de circunferencias que nos lleva al resultado del área del círculo con radio igual a 2.

Recurrieron a describir la integral. Como sugiere el nombre de la categoría, en esta se incluyeron las respuestas de los estudiantes en las cuales se observó la descripción total o parcial de la integral mostrada. Las respuestas correspondieron a los estudiantes 1, 3, 7, 8, 9, 13, 14, 16, 17 y 20.

En la respuesta del estudiante 7 se observó que éste describe su entendimiento sobre el concepto de la integral, relacionándolo con una generalización de la suma de infinitos sumandos. Las respuestas del resto de los estudiantes en esta categoría fueron relacionadas con la descripción de algunos símbolos de la integral. A continuación, se reproduce la respuesta del estudiante 7 por considerarse peculiar en esta categoría.

Estudiante 7: La integral es un concepto fundamental del cálculo y del análisis matemático, básicamente, una integral es una generalización de la suma de infinitos sumandos, en la integral (1) (se refiere a la de la pregunta) se quiere calcular el área sombreada el cual corresponde a una circunferencia $\pi r^2|_0^2 \rightarrow 4\pi.$

Por otra parte, en la respuesta de los estudiantes 9, 13 y 14 se observó una relación del integrando con una circunferencia, mientras que las respuestas de los estudiantes 3, 16, 17 y 20 se observó la relación del integrando con un círculo. En la respuesta del estudiante 8 el integrando se relacionó con una vuelta, en la del estudiante 1 con ángulos radianes y en la del estudiante 9 con una recta.

Es importante destacar que en la respuesta del estudiante 9, que se reprodujo anteriormente, se observó la relación entre la variable del integrando y la potencia del resultado de la integral con una recta y con la fórmula para calcular el área de un círculo, respectivamente.

Finalmente, a excepción de las respuestas de los estudiantes 3 y 13, en el resto de las ocho las respuestas incluidas en esta categoría también se pudieron identificar referencia a los límites de integración. Solo en la respuesta del estudiante 8 se describe al diferencial con relación a un cambio en el radio. A continuación, se reproduce la respuesta del estudiante 1 como ejemplo de esta categoría.

Estudiante 1. Es el área del círculo. 2π es el periodo en radianes de la circunferencia y r es el radio, ya que va de 0 a 2 esto nos arrojara todo lo que este contenido en este rango para la función dada.

Usaron explícitamente la palabra acumulación. En esta categoría se incluyeron las respuestas de los estudiantes en las que se observó una referencia explícita a la palabra “acumulación”, o alguna otra semejante como “acumula”, “acumulando” o “acumuladas”. Las respuestas incluidas correspondieron a los estudiantes 6, 8, 10, 13, 15, 16, 21 y 22.

Las respuestas de los estudiantes 16, 21 y 22 refieren a que ocurre una acumulación de área, mientras que en las respuestas de los estudiantes 6, 8, 10, 13 y 15 se refiere, respectivamente, a que ocurre una acumulación de circunferencias, diámetros, rastros y aros.

Por otra parte, a excepción de las respuestas de los estudiantes 13 y 15, en las cinco respuestas restantes se observó la identificación del inicio y fin de la acumulación, siendo consistente en todas con los límites de integración. En las respuestas de los estudiantes 13 y 15 no queda claro si identificaron estos parámetros. A continuación, se reproduce la respuesta del estudiante 15 como ejemplo.

Estudiante 15. Representa el área de un círculo con radio de 2, aunque aquí en vez de acumulación de rectángulos es la acumulación de ‘aros’ por así decirlo.

Realizaron algún cálculo. En esta categoría se incluyeron las respuestas que muestran algún cálculo. Aquí se encuentran las respuestas de los estudiantes 2, 7 y 19, de ellos solo en la respuesta del estudiante 2 se enfatiza en el resultado las unidades cuadráticas. A continuación, se reproduce su respuesta como ejemplo.

Estudiante 2: El área de la circunferencia de radio 2. $2\pi \int_0^2 r\, dr = 2\pi \frac{r^2}{2} |_0^2 = 2\pi \left[\frac{2^2}{2} - 0\right]$. $\int_0^2 2\pi r\, dr\ = 2\pi * 2 = 4\pi u^2$.

Otros. Finalmente, solo la respuesta del estudiante 4, la cual se reproduce a continuación, no pudo ser incluida en alguna de las categorías anteriores.

Estudiante 4: Representa el área dentro de la región $[0{,}2]$ de la circunferencia de radio $[0, x]$.

Para concluir, se retoma una de las dos preguntas clave para lograr el objetivo particular número dos de esta investigación: ¿cómo se relacionan las explicaciones de los estudiantes? Al revisar cómo se clasifican cada una de las respuestas dentro de las cinco categorías presentadas previamente, se puede notar que hay algunas respuestas que pudieron clasificarse dentro de más de una categoría. Por ejemplo, la respuesta del estudiante 8, de quien se puede afirmar que extiende adecuadamente la idea de un barrido, cumple con los criterios de la categoría de quienes describieron la integral, incluyeron ideas de movimiento y mencionaron explícitamente la acumulación. Esta se reproduce a continuación.

Estudiante 8. La integral representa el área de la circunferencia con centro en el origen y de radio 2, ya que el 2π representa una vuelta completa, la integral definida de 0 a 2 representa las circunferencias acumuladas con dichos radios x de la dr representa el diferencial del radio, que es lo que va variando.

Por lo anterior, las categorizaciones realizadas de las respuestas obtenidas permitieron describir algunas relaciones entre ellas, obteniendo así la figura 5.1. Antes, en la tabla 5.4 se reproduce la distribución de las respuestas en cada categoría (nótese que la suma no es veintidós porque varias respuestas tienen más de una distribución).

Tabla 5.4. Frecuencia de respuestas en cada categoría

	Movimiento	Descripción	Acumulación	Cálculos	Otros	Total
Frecuencia	13	8	8	3	1	30

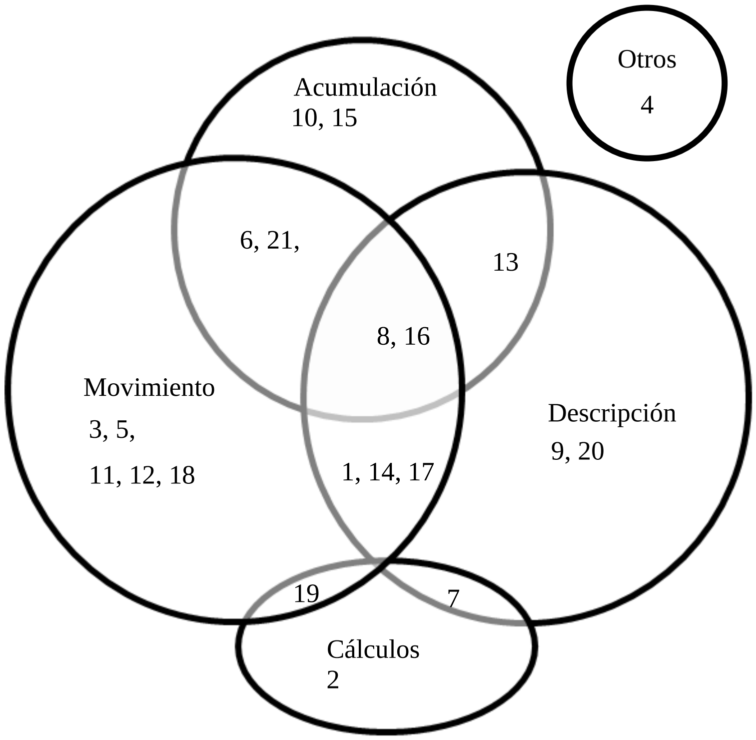


Figura 5.1. Relaciones de las respuestas capturadas de la pregunta 1, considerando las ideas principales que describieron cada respuesta.

Considerando la figura 5.1, se observó que en las respuestas en las cuales se expresó explícitamente la palabra “acumulación”, o alguna expresión semejante como “se acumula”, se recurre mayormente a dar una descripción de alguna parte de los símbolos de la integral definida y también se expresa alguna idea de movimiento. Estas ideas de movimiento, como se ejemplifica con la respuesta del estudiante 8, se manifiesta mediante el uso de palabras como “vuelta” o “lo que va variando”. Además, se enfatiza que en las respuestas que fueron relacionadas con la acumulación no se observó la realización de algún cálculo.

Pregunta 2

El objetivo particular número tres de la investigación se enfocó categorizar las respuestas de los estudiantes al explicar el área de un anillo de un círculo y su relación con una integral definida. Para alcanzar este objetivo, se analizaron las respuestas de los estudiantes a través de las siguientes preguntas: ¿qué símbolos relacionados con la integral utilizó cada estudiante para interpretar la figura 4.2 mostrada en la pregunta? ¿qué idea o razonamiento parece que intentó transmitir cada estudiante en su respuesta con respecto a la interpretación de la figura? ¿cómo se relacionan sus respuestas? y ¿guardan alguna relación con la acumulación?

La pregunta formulada a los estudiantes fue la siguiente, acompañada de la figura 4.2:

Pregunta 2. Basado en el modelo de acumulación, ¿qué integral es la que representa la siguiente área?

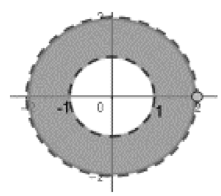


Figura 4.2. Área de un anillo de circunferencia mostrada en la pregunta 2.

Para responder a la pregunta: ¿qué símbolos relacionados con la integral utilizó cada estudiante para interpretar la figura mostrada en la pregunta presentada? Se evaluaron las expresiones de cada estudiante en el integrando, las literales y los límites de integración. Como resultado, se clasificaron las respuestas como típicas y atípicas. Se consideraron respuestas típicas aquellas que incluían la integral $\int_1^2 2\pi r\, dr$ o la diferencia de integrales $\int_0^2 2\pi r\, dr - \int_0^1 2\pi r\, dr$. Las respuestas que no incluían estas integrales fueron consideradas atípicas.

La pregunta: ¿qué idea o razonamiento intentó transmitir cada estudiante en su respuesta con respecto a la interpretación de la figura? Llevó a identificar que en algunas respuestas los estudiantes no proporcionaron explicaciones claras, limitándose al uso de símbolos matemáticos. Debido a esto no fue posible determinar con certeza la idea que transmitían esas respuestas, aunque puede decirse que en tales casos se presentó un razonamiento procedimental. Por lo tanto, se crearon dos categorías: explican su respuesta y no explican su respuesta

Las preguntas: ¿cómo se relacionan sus respuestas? y ¿guardan alguna relación con la acumulación? Serán respondidas al final de la presentación de estos resultados. En resumen, se pudieron establecer dos categorías principales con sus respectivas subcategorías, con sus subcategorías correspondientes, como se muestra a continuación en la tabla 5.5.

Tabla 5.5. Categorización y frecuencia de los resultados obtenidos en la pregunta 2

Categoría	Subcategoría	Frecuencia
Respuestas relacionadas con el uso de símbolos	Presentaron una respuesta típica.	17
	Presentaron una respuesta atípica.	5
Respuestas relacionadas con el uso de símbolos	Presentaron una respuesta típica.	17
	Presentaron una respuesta atípica.	5
Respuestas relacionadas con las explicaciones	Explicaron su respuesta.	6
	No explicaron su respuesta.	16

Respuestas relacionadas con el uso de símbolos

En esta categoría se incluyen las respuestas relacionadas con los símbolos utilizados para expresar la integral que representa la figura mostrada en la pregunta del cuestionario, considerando que los 22 estudiantes respondieron con al menos un símbolo integral. Como se explicó anteriormente, las respuestas de los estudiantes que presentaron la integral $\int_1^2 2\pi r\, dr$ o la diferencia de integrales $\int_0^2 2\pi r\, dr - \int_0^1 2\pi r\, dr$, sin modificaciones, salvo su cálculo, se agruparon bajo el nombre “presentaron una respuesta típica”, en caso contrario se agruparon bajo el nombre “presentaron una respuesta atípica”. A continuación, describimos las dos subcategorías.

Presentaron una respuesta típica. En esta subcategoría se ubicaron diecisiete respuestas, correspondiente a los estudiantes 1, 2, 4, 5, 6, 8, 10, 11, 13 y 15 hasta 22. Para analizarlas se clasificaron en tres conglomerados, considerando si en la respuesta se expresa $\int_1^2 2\pi r\, dr$, la diferencia de integrales $\int_0^2 2\pi r\, dr - \int_0^1 2\pi r\, dr$, o si se expresan ambas opciones. Los resultados de esta clasificación se presentan en la tabla 5.6.

Tabla 5.6. Clasificación de respuestas consideradas típicas

	Expresaron $\int_1^2 2\pi r\, dr$	**Expresaron** $\int_0^2 2\pi r\, dr - \int_0^1 2\pi r\, dr$	**Expresaron ambas opciones**
Participantes	2, 4, 6, 8, 10, 13, 16, 18, 20 y 22	1, 2, 5, 11, 13 y 15-22	2, 13, 16, 18, 20, 22
Frecuencia	10	13	6

Con esta clasificación se encontró que algunos estudiantes parecían haber percibido a la integral $\int_1^2 2\pi r\, dr$ como resultado de la diferencia de integrales. Esto se evidenció por las explicaciones brindadas por los estudiantes 15, 16, 17 y 18. Este aspecto será discutido más a fondo en la categoría de “respuestas relacionadas con las explicaciones”. Además, se notó que solo dos estudiantes, el 2 y el 19, incluyeron algún tipo de cálculo en su respuesta. Las respuestas de estos dos estudiantes, junto a las respuestas de los estudiantes 2 y 14, incluidos en las respuestas atípicas, fueron las únicas que mostraron algún cálculo del total de respuestas recibidas. Para proporcionar un ejemplo concreto, se presentan a continuación las respuestas de los estudiantes 2 y 19.

Estudiante 2: $\int_0^2 2\pi r\, dr - \int_0^1 2\pi r\, dr \quad o \quad \int_1^2 2\pi r\, dr \;\rightarrow\; 2\pi \int_1^2 r\, dr$

$$2\pi \left[\frac{r^2}{2}\Big|_1^2\right] \rightarrow 2\pi \left[\frac{4}{2} - \frac{1}{2}\right]$$

$$2\pi \left[2 - \frac{1}{2}\right] = 2\pi \left[\frac{3}{2}\right] = 3\pi u^2$$

Estudiante 19: El área se define como $A = \int_a^b f(x)\, dx \qquad f(x) = \pi r \qquad A_{Tot} = A_M - A_m$

$$= \int_0^2 2\pi\mathrm{r}\ \mathrm{dr} - \int_0^1 2\pi\mathrm{r}\ \mathrm{dr} \quad = \int_0^2 2\pi\mathrm{r}\ \mathrm{dr} - \int_0^1 2\pi\mathrm{r}\ \mathrm{dr}$$

$$= \pi\mathrm{r}^2\big|_0^2 - \pi\mathrm{r}^2\big|_0^1 \qquad = 4\pi - \pi \quad = 3\pi$$

Presentaron una respuesta atípica. Esta subcategoría incluye las respuestas de los estudiantes 3, 7, 9, 12 y 14. Estos estudiantes proporcionaron una respuesta que no incluía la integral $\int_1^2 2\pi r\, dr$, la diferencia $\int_0^2 2\pi r\, dr - \int_0^1 2\pi r\, dr$ o que las incluía, pero con modificaciones en las mismas, sin considerar las modificaciones por el cálculo de ésta, como se ejemplifica con las respuestas de los estudiantes 2 y 19, anteriormente reproducidas.

En las respuestas de estos estudiantes se observó poca claridad con relación a la forma en la cual parecían interpretar el área del anillo de circulo. Esto llevó a explorar la relación de sus respuestas con la idea de que parecían estar expresándose mediante el uso de elementos de otros modelos. Para ello se prestó atención a las expresiones referenciales observados en sus respuestas, las ideas y modelos que mejor se adaptaban a ellas, lo cual permitió dar significado consistente a las respuestas. La tabla 5.7 muestra tales ideas y modelos con los que se pudieron relacionar las respuestas de estos cinco estudiantes. Las primeras tres filas muestran los modelos, y las últimas dos la simbología utilizada.

Tabla 5.7. Ideas y modelos con a los cuales parecieron recurrir los estudiantes para explicar el área de la figura 4.2

Ideas y modelos	**Frecuencia**	**Estudiantes que parecen usarlo en sus respuestas**
Modelo de un área bajo la curva	3/5	3, 9, 14
Diferencia de áreas de forma algebraica	2/5	12, 7
Diferencia áreas de forma geométrica	1/5	9
Simbología de integral definida con integrando $2\pi r$	4/5	3, 9, 12, 14
Simbología de integral definida sin integrando $2\pi r$	1/5	7

Como ejemplo se reproducen y discuten brevemente las respuestas de los estudiantes 7 y 9.

Estudiante 7. Representaría el área de la dona, pero en este caso la fórmula sería

$$A = \int_a^b |R^2 - r^2|dx \quad ; \text{ donde } R = \text{radio mayor}, r = \text{radio menor.}$$

Estudiante 9. Sería una integral en la que haya una resta ya que no queremos considerar el circulo de adentro además como se usa todo el circulo (parte positiva y negativa) tendría que multiplicarse por 2. Por lo tanto, la integral sería $4[\int_0^{+2} 2\pi r - \int_0^1 2\pi r]$.

Se observó que la respuesta del participante 7 formalmente no es consistente con el área de la figura 4.2. Sin embargo, tiene sentido si se visualiza como una representación intuitiva de la idea de calcular la diferencia de áreas, ya que la diferencia de áreas de forma geométrica requiere la consideración de la diferencia de los cuadrados de sus radios.

Por otra parte, la respuesta del estudiante 9 se consideró atípica por incluir la multiplicación por cuatro unidades. También, debido a la explicación que muestra, se consideró como un intento de mostrar al área con una idea de diferencia de áreas de forma geométrica, explicada con ideas del modelo de área bajo la curva y la simbología de la integral definida en donde se aprecia el integrando $2\pi r$. Pues menciona no considerar el círculo central, lo cual se entiende que refleja una diferencia geométrica, representando la ausencia de esa área con la integral negativa " $-\int_0^1 2\pi r$ ". Además, su explicación: "se usa todo el circulo (parte positiva y negativa) tendría que multiplicarse por 2", se entendió como una referencia a la interpretación de áreas positivas y negativas relativas al eje de las abscisas, lo cual es comúnmente utilizado en el modelo de área bajo la curva de la integral.

Se concluye esta categoría enfatizando en que las respuestas atípicas pueden considerarse como evidencia de las dificultades que enfrentan los estudiantes, al tratar de expresar un área utilizando diferentes modelos para representarla o explicarla.

Respuestas relacionadas con las explicaciones

Se observó que solo las respuestas de los estudiantes 9, 15-18 y 22 (Total: 6) incluyeron alguna explicación. En la respuesta del estudiante 22 se observó la consideración de la acumulación, mientras que las cinco respuestas restantes se relacionaron con una diferencia de áreas. Además, en la respuesta del estudiante 18 se añade una explicación que se puede relacionar con un área bajo la curva. A continuación, se reproducen y discuten las respuestas de los estudiantes 16, 18 y 22.

> Estudiante 16. […]. De igual manera calculamos el área del círculo, solo que ahora quitando el centro así que podemos describir la integral de dos formas.
>
> - $\int_1^2 2\pi r\, dr$ ya que únicamente abarca este espacio
> - $\int_0^2 2\pi r\, dr - \int_0^1 2\pi r\, dr$ Usando la misma fórmula que el ejercicio 1, pero quitando el centro que no está.

> Estudiante 18. $\int_0^2 2\pi r\, dr - \int_0^1 2\pi r\, dr$ que podemos reescribir como $\int_1^2 2\pi r\, dr,$ aunque hay otras formas igual d calcularlo, como pensarlo como dos semicírculos e integrarlas en función de x.

> Estudiante 22. $\int_1^2 2\pi r\, dr$ El área comprendida entre el radio uno y el dos de la circunferencia, es decir cuando el radio es 1 y hasta 2 se acumula el área.

Al inicio de la respuesta del estudiante 16 se observa una clara referencia a la pregunta 1 del cuestionario, aunque no se continúa con esa explicación se sigue refiriéndose a ella por las integrales que muestra.

Por otra parte, al final de la respuesta del estudiante 18 se observa una referencia al modelo de área bajo la curva. Considerando que, para calcular el área de una circunferencia con ese modelo, se suele recurrir al cálculo del área de la mitad de la circunferencia, con relación al eje de las abscisas como variable independiente.

Finalmente, en la respuesta del estudiante 22 es la única en la que se observó una palabra derivada de “acumulación” del total de las 22 respuestas. En esta respuesta se deja claro que tal acumulación inicia con la circunferencia de radio uno y finaliza con la circunferencia de radio 2.

Para concluir la presentación de los resultados del análisis de las respuestas de la pregunta 2, se retoman las preguntas pendientes: ¿cómo se relacionan sus respuestas? y ¿guardan alguna relación con la acumulación? Se observó que las respuestas obtenidas se relacionan directamente con la integral

$\int_0^2 2\pi r\, dr$, mostrada en la pregunta 1 del cuestionario, la cual parece haber sido usada de forma operativa mediante la diferencia $\int_0^2 2\pi r\, dr - \int_0^1 2\pi r\, dr$, sin tener que recurrir a dar explicaciones sobre alguna acumulación en la mayoría de las respuestas. También se observó que algunas respuestas se encuentran relacionadas con diferentes ideas que permiten representar la diferencia de dos áreas circulares.

Aunque no se mostraron evidencias claras de una relación con respecto a la acumulación en las respuestas de los estudiantes, con excepción de la respuesta del estudiante 22, se puede conjeturar que existen relaciones entre operaciones elementales con símbolos de la integral definida, como la suma o la resta. Estas operaciones están relacionadas con la acumulación de objetos geométricos, como circunferencias o círculos. Además, estas relaciones parecen ser lo suficientemente cercanas a la comprensión de los estudiantes como para que puedan establecerlas por sí mismos con poca o nula intervención del docente.

Pregunta 3

El objetivo particular número cuatro consistió en categorizar las respuestas de los estudiantes al explicar una integral definida que se relaciona con el volumen de una esfera mediante acumulación de superficies de esferas. La pregunta formulada a los estudiantes fue la siguiente.

> Pregunta 3. Sabiendo que $4\pi r^2$ puede verse como la fórmula para calcular el área de la superficie de una esfera, y basado en el modelo de acumulación, ¿qué interpretación se puede dar al cálculo de la siguiente integral? No es necesario que des un resultado numérico, ni que realices el cálculo, aunque puedes realizarlo si lo deseas. $\int_0^2 4\pi r^2\, dr$

Para lograr el objetivo se notó por una primera lectura que las respuestas recibidas parecían tener una tendencia a contener alguna explicación, aunque no necesariamente estaban relacionadas con la acumulación. Por ello, con el fin de comprender como razonaron los estudiantes se analizaron sus respuestas mediante dos preguntas clave: ¿qué expresiones referenciales utilizan los estudiantes al explicar la integral $\int_0^2 4\pi r^2\, dr$? Y ¿qué expresiones descriptivas se observan en la explicación o precisión de cada una de las respuestas? Se proporcionará un ejemplo de la forma en la que se realizó la clasificación más adelante, con la respuesta del estudiante 14. De esta manera, se crearon dos categorías: “expresiones referenciales con las que se relacionaron las respuestas” y “expresiones descriptivas utilizados para precisar la respuesta”. Los resultados obtenidos se muestran en las tablas 5.8 y 5.9

Tabla 5.8. Resultados simplificados del análisis que muestra la relación de las respuestas expresiones referenciales

Categoría	**subcategoría**	**Frecuencia**
Área (Total: 9)	Área de la superficie de una esfera.	4
	Área dentro de una región de esfera.	1
	Área de un círculo o circunferencia.	2
	Área acumulada.	2
Volumen (Total: 9)	Volumen de una esfera.	7
	No se puede determinar.	2
Otros (Total: 4)	Una esfera.	2
	Cálculo de una esfera.	1
	Sin respuesta.	1

Tabla 5.9. Resultados simplificados del análisis que muestra la relación de las respuestas expresiones descriptivas

Categoría	Frecuencia
Realizaron o refirieron a algún cálculo.	7
Consideraron las dimensiones del espacio.	5
Expresaron alguna idea de movimiento.	3
Consideraron a la acumulación o alguna idea de acumulación.	3

En las tablas 5.8 y 5.9, se muestra la clasificación de cada respuesta de acuerdo con la categoría correspondiente, basándose en lo que expresó cada estudiante. A continuación, se detallan los resultados obtenidos.

Expresiones referenciales con las que se relacionaron las respuestas

Para identificar la expresión al que se refirieron los estudiantes en sus respuestas, se observaron las oraciones que utilizaron. Se clasificaron sus respuestas según si hacían referencia a un área o un volumen, como medidas geométricas.

1. Nueve respuestas fueron clasificadas con referencia a un área, la fórmula para calcular un área o el cálculo de un área. Estas correspondieron a los estudiantes 4, 7, 10, 14, 15 y 19-22.
2. Nueve respuestas fueron clasificadas con referencia a algún volumen. Estas correspondieron a los estudiantes 2, 5, 8, 9, 11, 12, 13, 17 y 18.
3. Tres respuestas fueron clasificadas como “otros” al no poderse relacionar con alguna medida geométrica como el área o volumen. Estas correspondieron a los estudiantes 3, 6 y 16.

A continuación, se detallan estas tres clasificaciones.

Área. De las nueve respuestas incluidas en esta subcategoría, las respuestas de los estudiantes 10, 14, 19, 20 y 22 refirieron a que la integral indica, representa o permite obtener el área de la superficie de una esfera, entendiendo esto como referencia al valor del área de la superficie de una esfera. Las respuestas de los estudiantes 10, 14. 20 y 22 refieren a que tal esfera es de radio dos, mientras que en la respuesta del estudiante 14 se indica que la esfera es de radio uno. En la respuesta del estudiante 19 no queda clara la medida del radio. A continuación, se reproduce la respuesta del estudiante 14 como ejemplo de cómo se realizaron las clasificaciones.

Estudiante 14. Indica el cálculo del área de la superficie de una esfera que esta tiene de radio 1 y se encuentra en el eje ‘x’ en específico (1,0) donde se está calculando su área con ayuda de las curvas de nivel que va formando la variación del radio.

En la anterior respuesta, para ser clasificada según sus expresiones referenciales se observó que relaciona a la integral con el “cálculo del área de la superficie de una esfera”, lo cual llevó a que se incluyera en la subcategoría “área de la superficie de una esfera”. En cuanto a las expresiones descriptivas que utiliza fue clasificada como “realizaron o refirieron a algún cálculo” y “expresaron alguna idea de movimiento”, por indicar explícitamente un cálculo de área y referirse a una variación del radio, respectivamente.

Continuando con la descripción de las referencias observadas en las respuestas en esta subcategoría, los estudiantes 7 y 15 refieren al cálculo del área de un círculo o cálculo del área encerrada por una circunferencia. Mientras que en la respuesta del estudiante 4, se observó una referencia al cálculo del área dentro de una región de una esfera de radio dos y en la respuesta del estudiante 21 se hace referencia al área acumulada de una esfera, pero en ambos casos no se especifica a que área se refieren exactamente. Se muestra como ejemplo la respuesta del estudiante 4.

Estudiante 4. Estimamos calculando el área dentro de una región especifica de la esfera, esta región está dada por la región $[0,2]$, la cual hace el corrimiento desde el punto 0, hasta 2 y por la está función del área sabemos el valor numérico de la misma.

Volumen. De las nueve respuestas incluidas en esta subcategoría, se observó que siete respuestas hacen referencia al volumen de una esfera de radio dos, las cuales correspondieron a los estudiantes 2, 8, 11, 12, 13, 17 y 18. Como ejemplo, se reproduce la respuesta del estudiante 2.

Estudiante 2. El volumen de una esfera de radio 2 $\int_0^2 4\pi r^2\, dr = 4\pi \frac{r^3}{3}|_0^2 \to \frac{4}{3}\pi r^3$ (volumen de esfera)

$\frac{4}{3}\pi r^3|_0^2 \quad \frac{4}{3}\pi(8) = \frac{32}{3}\pi u^3$ (volumen)

Por otra parte, no se pudo determinar a qué volumen se refieren los estudiantes 5 y 9 en sus respuestas. Aunque se supuso que podrían haber hecho referencia al volumen de una esfera, se evitó asumirlo para evitar posibles errores de clasificación. A continuación, se reproduce la respuesta del estudiante 9 como ejemplo.

Estudiante 9. Al elevarse una vez más nuestra variable quedaría al cubo, esto se podría ver como un volumen al ser la multiplicación de 3 números se podría considerar las tres dimensiones para formar un volumen.

Otros. De las cuatro respuestas que no pudieron relacionarse con alguna medida geométrica, por no hacer referencia a alguna, solo la respuesta del estudiante 1 fue en blanco. La respuesta del estudiante 3 hace referencia al cálculo de una esfera, mientras que las respuestas de los estudiantes 6 y 16 referencian a una esfera. Si bien estas tres últimas respuestas pudieron ser clasificadas con relación al volumen de una esfera se decidió no hacerlo, pues los estudiantes pudieron haber referido también a la superficie de una esfera. A continuación, se muestra como ejemplo la respuesta del estudiante 3.

Estudiante 3. $\int_0^2 4\pi r^2\, dr = \frac{4\pi r^3}{3}\Big|_0^2 = \frac{4\pi(2)^3}{3} = \frac{32}{3}\pi$ Es una integral que busca hallar el cálculo de la esfera con radio x, pero limitada a un radio 2 encontrando el valor del área de dicha región.

Expresiones descriptivas utilizadas para precisar la respuesta

Para identificar las expresiones descriptivas utilizadas por los estudiantes para explicar o precisar su respuesta, se analizaron los objetos secundarios a los que hicieron referencia, así como las ideas que subyacen en la explicación. En la tabla 5.9, mostrada anteriormente, se observa que siete estudiantes realizaron algún cálculo o hicieron referencia a uno, cinco consideraron a las tres dimensiones espaciales, tres expresaron alguna idea de movimiento y tres consideraron a la acumulación o alguna idea relacionada con ella. Solo las respuestas de los estudiantes 1, 5, 10, 13, 15 y 19 no pudieron ser ubicadas en alguna de estas cuatro subcategorías. A continuación, se presentan en detalle los resultados obtenidos.

Realizaron o refirieron a algún cálculo. Esta subcategoría, aunque parezca pertenecer al tipo de expresiones referenciales, se incluyó como descriptiva debido a que se observó que los cálculos presentados eran complemento a la respuesta principal que otorgaron los estudiantes. Se tomó de esta forma ya que no hubo manera de identificar si primero realizaron el cálculo y luego otorgaron la respuesta en palabras, o primero expresaron una respuesta en palabras y después complementaron la misma con cálculos. Ante tal ambigüedad, se decidió considerarse según su orden de lectura.

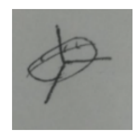
Las respuestas que incluyeron algún cálculo, o en las que se refiere a alguno, corresponden a los estudiantes 2, 8, 12, 14, 16, 18 y 22. A continuación se reproduce y discuten como ejemplo la respuesta del estudiante 12.

Estudiante 12. El volumen de una esfera de radio 2 $\int_0^2 (\pi r^2|_0^x)dx = \int_0^2 \pi x^2\, dx = \pi \frac{x^3}{3}|_0^2 = \frac{8\pi}{3}$

En la respuesta del estudiante 12, se observa que se señala una evaluación en el argumento de la primera integral. Puede suponerse que en esta respuesta se utiliza la integral $\int_0^x 2\pi r\, dr$ y luego se vuelve a integrar de cero a dos, ignorando el hecho de que se solicitó interpretar a la integral $\int_0^2 4\pi r^2\, dr$ para esclarecer la descripción al volumen de una esfera de radio dos.

Consideraron las dimensiones del espacio. Los estudiantes 6, 9, 16, 17 y 20 mostraron en sus respuestas la consideración de las tres dimensiones espaciales. En la respuesta del estudiante 9, que ya fue reproducida en este mismo subcapítulo, se observó que esta relación con el espacio se realiza con respecto a la potencia del integrando. Mientras que en la respuesta del estudiante 16, 17 y 20 se observó que ubican una esfera en el origen y en la respuesta del estudiante 6 la relación con las tres dimensiones espaciales es explícita, como se muestra a continuación con la reproducción de su respuesta y la del estudiante 17.

Estudiante 6. La interpretación es la misma es viéndolo de la forma de una esfera es decir un plano de 3 dimensiones donde el segmento está dado de $0 \to 2$ completamente el eje de la x y x



Expresión ilustrativa del estudiante Expresión ilustrativa en la respuesta del estudiante 6

Estudiante 17. La integral representa el volumen de una esfera situada en el centro del plano R^3, de radio $= 2$.

Expresaron alguna idea de movimiento. Se observó que los estudiantes 4, 11 y 14 usaron expresiones que se relacionan con ideas de movimiento. Hubo respuestas en las que no quedó claro si se consideró alguna idea de movimiento. Por ejemplo, en la respuesta del estudiante 16 se utilizó la expresión “que llega hasta 2”, pero no se clasificó como una respuesta que incluyera una idea de movimiento, debido a que se encontraba en un contexto descriptivo de una esfera. A continuación, se reproduce parcialmente esa respuesta.

Estudiante 16. La integral representa una esfera que gráficamente se sitúa en el centro de un plano R^3, que llega hasta 2, es decir que la esfera tiene radio 2.

En la respuesta del estudiante 4, que ya se reprodujo, se habla de un “corrimiento” de una esfera, similar a la expansión a la que hace referencia el estudiante 11. Sin embargo, en la respuesta del estudiante 4 se refiere a la medida de un área, mientras que en la del estudiante 11 se refiere a un volumen. Por otro lado, la respuesta del estudiante 14, que también ha sido mencionada previamente, hace referencia a una variación del radio.

Consideraron a la acumulación o alguna idea de acumulación. En esta subcategoría se ubicaron las respuestas de los estudiantes 11, 18 y 21. A continuación, se reproducen y discuten estas respuestas.

Estudiante 11. El volumen de una esfera que se expande de 0 a 2. En el sentido de la acumulación lo vería como si llenáramos una esfera poco a poco y en ese caso dr sería la diferencial del radio.

Estudiante 18. $\int_0^2 4\pi r^2 dr = 4\pi \frac{r^3}{3}|_0^2 = 4\pi\left(\frac{8}{3}\right) = \frac{32}{3}\pi$ Podemos imaginarlo como la suma de capas de una esfera huecas, pero de un r pequeñísima hasta llegar a un r=2, en donde entre (0,2) hay infinitos r, que, con la integral, que es la suma de todas estas esferas huecas, conforman el volumen total de la esfera de radio = 2

Estudiante 21. Es el área acumulada de una esfera que va desde cero hasta 2, es decir, con un radio que va de cero a dos.

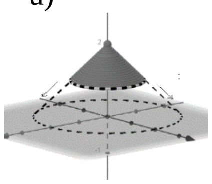
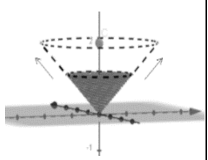
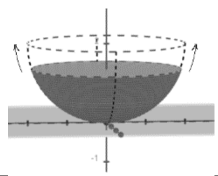
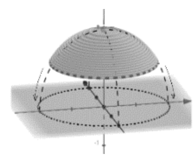
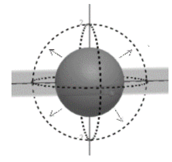
En las respuestas de los estudiantes 11 y 18 se observó que parece hacerse referencia a una misma idea, pero con dos diferencias significativas. Primero, en la respuesta del estudiante 18 no se hace una consideración explícita de la acumulación, aunque la idea de acumulación está implícita en su respuesta, en contraste con el estudiante 11. En segundo lugar, la respuesta del estudiante 11 se relaciona con un movimiento continuo y uniforme, ya que menciona una expansión y un llenado “poco a poco”. En cambio, en la respuesta del estudiante 18 se observa la misma idea, pero discretizada. Se puede decir que en la respuesta del estudiante 11 se observa la idea de una acumulación continua, en cuanto a que refiere a una expansión, mientras que en la respuesta del estudiante 18 se observa una idea de acumulación discreta y operativa del mismo fenómeno, por cuanto a que la acumulación se puede relacionar con la suma a la que refiere el estudiante. Para esclarecer la diferencia entre una acumulación continua y una discreta a la que se refirió anteriormente, considérese como ejemplo, el llenado con agua de un balde. Realizarlo mediante un flujo constante de agua se consideraría como acumulación continua, mientras que, si se hace a través de un vaso con agua se consideraría una acumulación discreta. Esta diferencia no fue prevista en la planeación y desarrollo de la investigación, por lo que se ahondará con mayor profundidad en el capítulo de discusiones.

Para finalizar, en la respuesta del estudiante 21, se podría entender que se está reflejando la misma idea de acumulación de superficies de esferas para conformar un volumen. Sin embargo, no queda del todo claro que se refiera a esa misma idea, pues al mencionar que la integral representa “el área acumulada de una esfera”, también podría estarse refiriendo al área de la superficie de una esfera o alguna otra área relacionada con una esfera, como se ha mostrado en la categoría “expresiones referenciales con los que se relacionaron las respuestas”.

Pregunta 4

El objetivo particular número cinco consistió en categorizar las respuestas de los estudiantes al explicar una integral definida doble, que se relaciona con el volumen de un cono mediante acumulación de círculos. Para este objetivo se planteó a los estudiantes responder la siguiente pregunta en el cuestionario, acompañada con el conjunto de figuras 4.2.

> Pregunta 4. Pensando en la idea de acumulación de Juan, ¿cuál de las siguientes imágenes representaría $\int_0^2 \left(\int_0^x 2\,\pi r\, dr \right) dx$? (Explica detalladamente la razón de tu decisión).

a) 	b) 	c) 	d) 	e) 	f) Otro (dibújalo)

Conjunto de figuras 4.2. Opciones para elegir como representación de la integral $\int_0^2 \left(\int_0^x 2\,\pi r\, dr \right) dx$. Mostradas en la pregunta 4

Para alcanzar el objetivo, se consideraron los incisos que seleccionaron los estudiantes y las expresiones descriptivas que utilizaron para esclarecer su elección. Así, se tomaron a consideración dos categorías para analizar las respuestas, la primera está basada en la frecuencia de selección de los incisos, la cual se utilizó para crear la tabla 5.10; la segunda, enfocada en las expresiones descriptivas utilizados por los estudiantes para esclarecer su selección, la cual se utilizó para crear la tabla 5.11. Debe considerarse que el estudiante 7 fue el único que seleccionó más de un inciso, por ello aparece con un "*" en la tabla 5.10.

Tabla 5.10. Frecuencia de selección de los incisos

Inciso seleccionado	**Frecuencia**	**Estudiantes que lo seleccionaron**
c	7	4, 5, 6, 7*, 17, 19 y 20
b	6	2, 10, 11, 13, 15 y 21
e	4	7*, 8, 16 y 22
f	4	3, 9, 14, y 18
d	2	7* y 12

Tabla 5.11. Expresiones descriptivas utilizados por los estudiantes

Expresiones que utilizaron	Frecuencia	Estudiantes que utilizaron esta expresión
Explicó las integrales	7	6, 8, 10, 12, 13, 17 y 18
Realizó cálculos	4	2, 5, 12 y 16
Expresó alguna idea relacionada con el movimiento	4	4, 10, 12 y 13
No mostró argumentos	4	1, 7, 11 y 20
Consideró las dimensiones geométricas	3	3, 9 y 16
Consideró alguna potencia	3	9, 15 y 21
Mencionó a la acumulación	3	6, 10 y22
Respuestas singulares	2	14 y 19

Para clasificar las expresiones descriptivas utilizadas por los estudiantes, se tomaron en cuenta elementos que ya se habían observado en el análisis de las preguntas anteriores del cuestionario, ya que algunas expresiones continuaron observándose en estas respuestas, tales como la realización de cálculos, la consideración de las dimensiones geométricas, la consideración de alguna potencia, la consideración de alguna idea de movimiento o la mención explícita de la acumulación. Sin embargo, se encontraron respuestas que no pudieron ser clasificadas según esas expresiones, las cuales se clasificaron como: explicó las integrales y respuestas singulares.

A continuación, se profundiza en los resultados obtenidos a partir de las tablas 5.10 y 5.11. Los resultados se presentarán por orden de frecuencia de selección de cada inciso, y se describirán las expresiones descriptivas que usaron los estudiantes en cada categoría.

Seleccionaron el inciso c

Este inciso fue seleccionado por un total de siete estudiantes, los cuales fueron del 4 al 7, 17, 19 y 20. En las respuestas de los estudiantes 6 y 17, se observó la expresión de explicar las dos integrales. En la respuesta del estudiante 6 se hace referencia a cada integral, considerando sus límites de integración con relación a una acumulación, aunque no se aclara la relación. Por su parte, en la respuesta del estudiante 17 se observó la explicación de la primera integral como representante de una circunferencia en el plano (x, r) y la segunda integral como generadora de una altura.

Por otro lado, en la respuesta del estudiante 4, se observaron expresiones que indican movimiento, considerando el “corrimiento que debería realizar la integral y las regiones de integración”, según lo indicado por ese Estudiante, en relación con el teorema fundamental del cálculo. Sin embargo, no queda claro a qué regiones se refiere ni la relación con el teorema fundamental. Mientras que en la respuesta del estudiante 5 se observó la elección de este inciso basándose en los cálculos que realizó. A continuación, se reproduce la respuesta de este último estudiante.

Estudiante 5. Ya que al resolver las integrales da como resultado $\frac{8\pi}{3}$

$$\int_0^x 2\pi r\, dr = \pi r^2|_0^x = \int_0^2 \pi x^2\, dx = \pi \int_0^2 x^2\, dx = \pi \frac{x^3}{3}|_0^2 = \frac{8}{3}\pi$$

Por último, la respuesta del estudiante 19 fue considerada singular debido a que en su explicación no quedó clara la relación con la figura en este inciso, y no se le pudo dar ninguna otra clasificación. En cuanto a los estudiantes 7 y 20, no proporcionaron ninguna explicación de su respuesta. Como ejemplo de las respuestas singulares, se reproduce a continuación la respuesta del estudiante 19.

Estudiante 19. Porque consideramos el área de la circunferencia que genera un semicírculo que va de $x_0 = 0$ a $x_1 = 2$

Seleccionaron el inciso b

Este inciso puede ser considerado como correcto, ya que se construyen círculos mediante la acumulación de circunferencias, apilados de forma ascendente según el tamaño de su radio. Las expresiones que se observaron para explicar la selección de este inciso fueron: la explicación de las integrales, realización de cálculos, considerar alguna idea de movimiento, identificar alguna potencia y expresar una acumulación.

Los estudiantes que lo seleccionaron fueron el 2, 10, 11, 13, 15 y 21. En las respuestas de los estudiantes 15 y 21 se observó la expresión de identificar alguna potencia, mientras que en la respuesta del estudiante 2 se muestra la realización de cálculos y en la respuesta del estudiante 11 solo se mencionó el inciso b), sin acompañarlo de ninguna explicación adicional y usando una expresión ilustrativa sin aparente relación con este inciso.

En la respuesta del estudiante 21, que a continuación se reproduce, se observa que parece identificar la relación entre las formas circulares con sus expresiones analíticas, como la expresión analítica de una circunferencia, por ejemplo. Además, también se puede observar la consideración de los límites inferiores de integración para identificar la orientación de la figura.

Estudiante 21. Descarté las opciones c), d) y e) porque no hay términos cuadráticos, entonces no se puede formar ese tipo de figuras y considero que la figura b) es la que lo representa ya que es la que pasa por el origen y como las integrales van de cero a dos y de cero a x.

Por su parte, en las respuestas de los estudiantes 10 y 13, que se reproducen a continuación, se observa el uso de expresiones relacionadas con movimiento y expresiones relacionadas con la explicación de cada integral.

Estudiante 10. Ya que en la primera integral se obtiene la acumulación del área de un círculo y posteriormente esa se mueve con respecto a x de 0 a 2.

Estudiante 13. La integral dentro del área de un círculo en función de x y la 2da "mueve" x de 0 a 2 por lo que también ese radio se va a mover ya que x se "mueve" linealmente es la única. $\int_0^2 \pi x^2 dr.\ \frac{\pi x^3}{3}$

También se observa la palabra acumulación en la respuesta del estudiante 10, mientras que en la respuesta del estudiante 13 se puede considerar implícita la idea de acumulación. En ambas respuestas, podemos notar que la idea de una "dirección de acumulación" y "acumulación ordenada" parecen jugar un papel importante para la selección de este inciso. Por esto último, estas dos respuestas serán retomadas en el capítulo de discusiones.

Seleccionaron el inciso e

Los estudiantes 7, 8, 16 y 22 seleccionaron este inciso. En la respuesta del estudiante 8, se observó que explica cada una de las integrales, considerando la primera como representante del área de una circunferencia de radio variable "x" y la segunda como representante del volumen de una esfera de radio dos. Por otro lado, en la respuesta del estudiante 22 se observó una referencia explícita a la acumulación, mientras que el estudiante 7 no proporcionó ninguna explicación a la selección de este inciso y en la respuesta del estudiante 16 se observó que recurrió a considerar las dimensiones geométricas y a realizar cálculos, asociando sus resultados con el volumen de una esfera, al igual que la respuesta del estudiante 5 que ya fue reproducida. A continuación, se reproducen las respuestas de los estudiantes 16 y 22 y se discuten brevemente.

Estudiante 16. Por la forma de la integral debe ser en un plano de 3 dimensiones, al realizar la integral lo que dio es el volumen de una esfera así que es esta imagen.

$$\int_0^2 \frac{2\pi r^2}{2} \Big|_0^x dx = \int_0^2 \pi x^2 \, dx = \pi \int_0^2 x^2 \, dx = \frac{\pi x^3}{3} \Big|_0^2 = \frac{\pi \, 2^3}{3} = \frac{8\pi}{3}$$

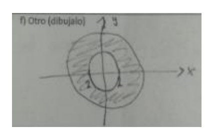
Estudiante 22. E) ya que $2\pi r$ se trata de una circunferencia y la integral describe el área que se acumula desde r=0 hasta r=2.

La respuesta del estudiante 16 puede ser considerada como ejemplo de uso de expresiones que relacionan a la doble integral con las dimensiones geométricas. Además, se puede observar que la expresión de realizar cálculos para apoyar la interpretación no necesariamente resulta fructífera en el contexto de la acumulación, considerando que no seleccionaron el enciso esperado. Lo mismo se observa en la respuesta del estudiante 5, que ya ha sido reproducida, quien seleccionó el inciso c). Por otra parte, la respuesta del estudiante 22 podría clasificarse también bajo el uso de expresiones que describen cada una de las integrales, ya que en su respuesta parece encontrarse implícito el describir primero una circunferencia y posteriormente una acumulación de área. Sin embargo, no se clasificó de tal forma al no observar una referencia explícita a la primera o la segunda integral, como sí se observa en la respuesta del estudiante 10, que ya ha sido reproducida.

Seleccionaron el inciso f

Los estudiantes 3, 9, 14 y 18 seleccionaron este inciso. A continuación, se reproducen sus respuestas y se discuten brevemente, junto a las imágenes que realizaron.

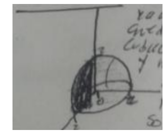
Estudiante 3. Porque solo está en una región, las demás gráficas son en regiones de 3 o más dimensión.



Expresión ilustrativa del estudiante 3

Como se observa en su respuesta, su interpretación es en términos de un anillo de círculo, semejante a la figura 4.2, mostrada en la pregunta 2 del cuestionario. También se expresa con relación a las dimensiones geométricas.

Estudiante 9. Sería una media esfera ya que como vimos quedara un término cubico y sería un volumen y no se consideraría la parte negativa por lo que solo sería un cuarto de la esfera.

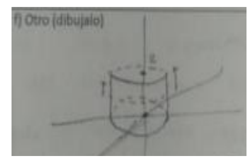


Expresión ilustrativa del estudiante 9

Nuevamente se observa la expresión de considerar a las dimensiones geométricas, puesto que las dibujó y refiere a un volumen. Además, se observa que restringe su respuesta a elementos positivos y utiliza la expresión de identificar alguna potencia.

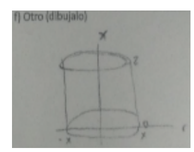
Por otra parte, en las respuestas de los estudiantes 14 y 18, que a continuación se reproducen con las imágenes que realizaron, se observa la interpretación de la doble integral como la construcción de un cilindro.

Estudiante 14. Ya que se ve representado también por la función dependiendo a r $(2\pi r)$.



Expresión ilustrativa del estudiante 14

Estudiante 18. Primeramente, se realiza, la integral de área que nos lleva a un círculo, y finalmente se le calcula su altura.



Expresión ilustrativa del estudiante 18

La respuesta del estudiante 14 se clasificó como singular. Si bien en su figura muestra los tres ejes coordenados y parece considerar al cilindro con relación a la multiplicación $r(2\pi r)$, no realiza ningún énfasis en su explicación. Mientras que en la respuesta del estudiante 18, se observa la expresión de explicar cada una de las integrales. Es importante destacar que en el dibujo del estudiante 14 se puede observar que el cilindro parece estar construyendo se o que ha sido construido, mientras que en el dibujo del estudiante 18, el cilindro parece estático, como si fuera un cilindro dado.

Seleccionaron el inciso d

Quienes seleccionaron este inciso fueron los estudiantes 7* y 12. El estudiante 7 no proporcionó ninguna explicación y el estudiante 12 utilizó tres expresiones en su respuesta relacionadas con: explicación de las integrales, realización de cálculos y la explicación considerando alguna idea de movimiento. A continuación, se reproduce y discute brevemente la respuesta del estudiante 12.

> Estudiante 12. $\int_0^2 (\pi r^2|_0^x) dx = \int_0^2 \pi x^2\, dx = \pi \frac{x^3}{3}|_0^2 = \frac{8\pi}{3}$. Sería d, porque primero $\int_0^x 2\pi r\, dr$ es el área que va dejando el círculo de su perímetro, y luego $\int_0^2 (\pi r^2|_0^x) dx$ es el volumen que va dejando la elevación de las diferentes circunferencias con diferentes radios.

Nótese que el estudiante identificó a la primera integral con el área de un círculo, además de apoyarse con un cálculo. Sin embargo, como se evidencia en las respuestas de los estudiantes 5, l6 y 22, que ya fueron reproducidas, estas expresiones no parecen ser suficientes para relacionar a la doble integral con la figura mostrada en el inciso b.

Para finalizar este análisis, parece importante resaltar que, a excepción de los estudiantes 1, 7, 11, y 20, quienes no proporcionaron argumentos, y el estudiante 3, quien relaciona a la doble integral con un área, el resto de los estudiantes identificaron a la doble integral con formas que pueden relacionarse con la acumulación. Aunque solo tres estudiantes expresaron ideas que se relacionan claramente con la acumulación. También se observó que no parece que la consideración de expresarse con relación a alguna idea en particular pueda ser fructífero, para ayudar a identificar al inciso b como respuesta correcta.

Pregunta 5

Durante la elaboración del cuestionario se planteó la duda de la existencia de posibles dificultades que pudieran tener los estudiantes para responderlo, ya que se procuró que el mismo fuera simple pero que arrojara la mayor información posible. Ante esta previsión, se consideró como objetivo particular final el categorizar las expresiones escritas los estudiantes con relación a sus estados anímicos al responder el cuestionario. Para esto se realizó la pregunta final siguiente a los estudiantes.

> Pregunta 5. Por favor, responde: ¿Cómo te sentiste al responder los problemas? ¿Confundido? ¿Estresado? etc.

El análisis de las respuestas se realizó con base a si se hacía referencia a algún sentir. Así se agruparon las respuestas en tres categorías, las cuales se muestran en la tabla 5.12 y se detallan posteriormente. Considere que el estudiante 13 no respondió a esta pregunta, por lo cual se tiene un total de 11/21 estudiantes en cuyas respuestas se expresa una emoción o sentimiento positivo y 10/21 para el caso contrario.

Tabla 5.12. Frecuencia de sentimientos o emociones observadas.

Categoría	Subcategoría	Frecuencia	Estudiantes
Expresaron algún sentimiento o emoción positiva.		7	4, 5, 6, 8, 9, 11 y 18
Expresaron algún sentimiento o emoción negativa.	Expresaron confusión	6	2, 3, 7, 15, 21 y 22
	Expresaron estrés	4	7, 12, 17 y 19
	Expresaron alguna dificultad para recordar	3	14, 15 y 19
Expresaron algún sentimiento o emoción positiva y negativa.		4	1, 10, 16 y 20

Expresaron algún sentimiento o emoción positiva

Las respuestas que fueron incluidas en esta categoría fueron aquellas en las que se observó que el estudiante expresaba algún sentimiento o emoción que puede considerarse como benéfico para el aprendizaje. En esta categoría se incluyeron las respuestas de los estudiantes 4, 5, 6, 8, 9, 11 y 18. En las respuestas de los estudiantes 4 y 8 se observó que indicaron sentirse tranquilos al momento de responder el cuestionario, el estudiante 5 indicó sentirse analítico y pensante, mientras que los estudiantes 6 y 11 indicaron sentirse entretenido y divertido, respectivamente. Finalmente, el estudiante 9 indicó sentirse bien y el estudiante 18 indicó sentirse cómodo. A continuación, se reproducen y discuten las respuestas de los estudiantes 6, 8 y 9.

Estudiante 6. Entretenido debido que con el primer ejemplo pude comprender más rápido la acumulación.

Estudiante 8. Me sentí normal; tranquilo. Únicamente fue cosa de hacer un poco de memoria para recordar los conceptos básicos del cálculo, y al ser temas que se utilizan en demás materias que curso actualmente, pues no me resultó un ejercicio demasiado complicado o estresante.

Estudiante 9. Me sentí bien al aplicar el cálculo de esta forma y visualizar diferentes “aplicaciones”.

Se hace notar que las respuestas de los estudiantes 6 y 8 sugieren que estos ya tenían algún conocimiento del uso de alguna idea de acumulación. Pues en la respuesta del estudiante 6 se indica que pudo comprender más rápido a la acumulación con la introducción del cuestionario, mientras que en la respuesta del estudiante 8 se indica que es un tema que utilizaba en los cursos a los que estaba inscrito al momento de responder el cuestionario. Sin embargo, a pesar de que pudieran tener alguna idea de acumulación, se observa también que tal idea pudiera ser diferente a la planteada en este cuestionario, mediante relaciones de los símbolos de la integral definida con representaciones pictóricas, como lo sugiere la respuesta del estudiante 9. Esta diferencia de perspectiva también se ve reflejada en la respuesta del estudiante 21, la cual se discutirá en la siguiente categoría.

Expresaron algún sentimiento o emoción negativa

En contraste con la categoría anterior, aquí se incluyeron las respuestas en las que se expresaba algún sentimiento o emoción que pueda considerarse como perjudicial o poco benéfico para el aprendizaje. Se observó que las respuestas en esta categoría se pudieron agrupar con facilidad en tres subcategorías principales: expresaron confusión, expresaron estrés y expresaron alguna dificultad para recordar. Se incluyeron un total de diez respuestas, de las cuales en las respuestas de los estudiantes 2, 3, 7, 15, 21 y 22, se indicó que se sintieron confundidos. En cuatro respuestas en total se expresó estrés, correspondientes a los estudiantes 7, 12, 17 y 19, mientras que solo en las respuestas de los estudiantes 14, 15 y 19 se expresó dificultad para recordar. A continuación, se reproducen y discuten las respuestas de los estudiantes 21, 19 y 15 como ejemplos de cada subcategoría.

Estudiante 21. Un poco confundido, son temas que manejamos de manera numérica y no como son planteados en este cuestionario.

Estudiante 19. Estresada y preocupada porque no recuerdo algunos temas de cálculo y dado que aún no llego a aplicar dichos conocimientos actualmente en su totalidad, no he tenido el interés de profundizar ni retomarlos.

Estudiante 15. Un poco confundida, ya que algunos conceptos no los recordaba con claridad, pero algunas cosas eran algo lógicas, bueno no se necesitaba un proceso de cálculos para llegar a la respuesta.

Se aclara que en la respuesta del estudiante 19 también se observa que se expresa preocupación, sin embargo, fue la única respuesta en la que se observó, por lo cual no se consideró crear una nueva subcategoría.

Algo que puede tomarse como destacable es que el manejo procedimental del cálculo en contraste con el tipo de preguntas que se realizaron en el cuestionario, parece ser un factor causante de estos sentimientos o emociones negativas. Esto se refleja en la respuesta del estudiante 21, al expresar que en su experiencia los temas de integración suelen abordarse de forma numérica. Además, en la respuesta del estudiante 19 se observa una preocupación por falta de aplicación de los conocimientos de cálculo, lo cual también puede relacionarse con una costumbre al manejo procedimental del mismo.

Por otra parte, la respuesta del estudiante 15 sugiere que hubo estudiantes que se vieron en la necesidad de detenerse a recordar lo que se les mostró en sus cursos de cálculo, a pesar de que la intensión con la que fue elaborado el cuestionario no fuera evaluar algún conocimiento. Esta preocupación por recordar lo que vieron en sus cursos de cálculo, parece indicar que existe alguna exigencia implícita o bien que los estudiantes deban poder aplicar sus conocimientos de forma conceptual, a pesar de la costumbre procedimental que parecen reflejar sus respuestas. Esta hipótesis se apoya también en la expresión que se observa en la respuesta del estudiante 7, quien indicó sentirse muy estresado y confundido, debido a que “son temas que debo ‘controlar’”.

Expresaron algún sentimiento o emoción positiva y negativa

Aquí se incluyeron las respuestas en las que se observaron expresiones relacionadas con sentimiento o emociones positivas y negativas, según lo descrito en las categorías anteriores. Solo se incluyeron las respuestas de los estudiantes 1, 10, 16 y 20 en ésta. En la respuesta del estudiante 1 se hace referencia a que éste se sintió tranquilo durante las tres primeras preguntas del cuestionario, pero confundido y estresado con la cuarta y quinta pregunta, las cuales están relacionadas con la esfera y el cono. En la respuesta del estudiante 10 se indica que ésta se sintió entretenida, pero frustrada por el olvido de conocimientos que considera básicos. Mientras que en la respuesta del estudiante 16 se expresa duda y tranquilidad, y en la respuesta del estudiante 20 se expresa estrés, pero facilidad para contestar. Se reproduce a continuación la respuesta del estudiante 10 como ejemplo.

Estudiante 10. Fue entretenido, pero si me sentí frustrada ya que hay conocimientos básicos de los cuales a veces uno olvida ya que se permite (en cierto grado de educación) formularios en lo que uno ya no les presta atención.

Se hace notar que en esta respuesta también se señala una preocupación por alguna costumbre al manejo procedimental. En particular, se hace referencia a una pérdida de atención por la costumbre de utilizar formularios.

Capítulo 6. Síntesis de resultados y discusiones

La síntesis de los resultados puede desglosarse en cinco temas clave, mostrados en la siguiente lista.

1. Descripción y etiquetado de los diferentes tipos de expresiones observadas.
2. Evaluación de respuestas y etiquetas.
3. Relación entre las diferentes expresiones y las respuestas esperadas.
4. Sobre la representación de la integral mediante la idea de un barrido.
5. Otros resultados motivados por las respuestas de los estudiantes.

A continuación, se muestran una discusión de estos temas, así como una síntesis del capítulo de resultados.

Descripción y etiquetado de los diferentes tipos de expresiones observadas

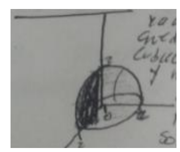
En términos generales, se observó que los estudiantes respondieron al cuestionario con cierto tipo de expresiones. Estas pueden considerarse como referentes de las ideas y razonamientos que los estudiantes tuvieron al dar sus respuestas. Las expresiones no se limitaron únicamente a considerar alguna acumulación, ya que también se usaron para describir las partes de una integral, expresar ideas relacionadas con movimiento o cambio, realizar cálculos, utilizar diferentes modelos y emplear ilustraciones. A continuación, en las tablas 6.1 y 6.2, se muestra un resumen sobre las categorizaciones generales y particulares de las expresiones usadas por los 22 estudiantes. Para la categorización particular se consideró el etiquetado realizado durante el análisis y para la categorización general se consideró si la descripción de cada etiqueta correspondía a expresiones descriptivas o expresiones referenciales. Posterior a estas tablas se proporciona una descripción más detallada sobre el significado de cada una de las etiquetas.

Tabla 6.1. Resumen de las expresiones descriptivas observadas

Etiqueta	Significado	Ejemplo
Descripción de una integral	Uso expresiones que describían a una integral, total o parcialmente.	"[…] 2πr representa el perímetro […] (*dr*) indica que el radio va cambiando […]."
Movimiento o cambio	Uso de expresiones relacionadas con movimiento o cambio.	"desde... hasta", "una vuelta", "lo que va variando", "va cambiando", "se mueve".

Acumulación	Uso de expresiones relacionadas con la acumulación o barrido, involucrando o no la idea de algún movimiento.	“se acumula”, “barrido”, “se expande”.
Elementos de la geometría	Uso de diferencia de áreas y dimensiones geométricas.	“[…] se sitúa en el centro de un plano R^3 […]”.

Tabla 6.2. Resumen de las expresiones referenciales observadas

Etiqueta	Significado	Ejemplo
Elementos de la geometría	Uso de diferencia de áreas y dimensiones geométricas.	“[…] se sitúa en el centro de un plano R^3 […]”.
Elementos algebraicos	Uso de expresiones algebraicas como respuesta o como complemento a la misma	“$f(r) = 2\pi r$”, “$r(2\pi r)$”, “ $[0, x]$”
Área bajo una curva	Uso de expresiones directamente relacionadas con el modelo de un área bajo una curva.	“[…] un área bajo la función […]”.
Cálculos	Realizaron cálculos de para argumentar una respuesta, o como respuesta en sí.	“[…] $\int_0^2 \frac{2\pi r^2}{2} \|_0^x dx$ [...] $= \frac{8\pi}{3}$ ”
Ilustraciones	Acompañamiento de una ilustración en la respuesta.	 Ilustración 6.1.

Expresiones relacionadas con la descripción de una integral

Como lo sugiere el nombre, este tipo de expresiones fueron clasificadas como descriptivas. Se incluyeron en esta categoría aquellas respuestas en las que se observó el uso de expresiones que describían a una integral, total o parcialmente. En este tipo de respuestas se identificó que los límites de integración se relacionaban con el inicio y el final de una acumulación, o bien con los puntos de intersección entre una figura (como un círculo) y el eje de las abscisas. Mientras que el integrando solía relacionarse con interpretaciones diferenciadas según el contexto. También se observó que el integrando era explicado por partes, considerando el coeficiente, la variable y la potencia de este. Finalmente, quienes consideraron al diferencial, lo identificaban como aquel que indica la variación de la variable en el integrando. A modo de ejemplo, se puede considerar la siguiente respuesta en la pregunta 1.

Estudiante 14. Es el cálculo de la mitad de la circunferencia expandida ya que el $2\pi r$ representa el perímetro y al estar en función de '*r*' (*dr*) indica que el radio va cambiando entonces se evalúa del punto 0 al 2 […].

Expresiones relacionadas con algún movimiento o cambio

Las expresiones en las que se observaron relaciones con alguna idea de movimiento o cambio se clasificaron como descriptivas. Por ejemplo, frases como "desde... hasta", "una vuelta", "lo que va variando", "va cambiando" o "se mueve". A modo de ejemplo, se puede considerar la siguiente respuesta en la pregunta 1.

Estudiante 5. El área del círculo desde $x=0$, hasta $x=2$.

Expresiones relacionadas con alguna idea de acumulación

Las expresiones que parecieron estar relacionadas con alguna idea de acumulación fueron clasificadas como expresiones descriptivas y referenciales. Para la clasificación de las respuestas bajo esta consideración, se tomó en cuenta si en la misma se observaba una explicación consistente y clara con relación a alguna acumulación. También se consideraron aquellas respuestas en las que se mencionaba explícitamente la palabra acumulación o palabras relacionadas a la acumulación, como "acumula", "barrido", "se expande", etc., aún y cuando en la respuesta no se observase una relación clara con la acumulación. Se descartaron las respuestas que aparentaban tener relación con alguna idea de acumulación, pero no se observaba evidencia suficiente como para clasificarse en esta categoría.

Un contraste para considerar, entre este tipo de expresiones con las expresiones de movimiento o cambio, es que no necesariamente se requiere expresar una idea de movimiento para expresar una acumulación. Por ejemplo, considere la respuesta del estudiante 18 en la pregunta 4, quien para expresar que la integral $\int_0^2 4\pi r^2 dr$ representa el volumen de una esfera, lo hace indicando una acumulación como una suma de capas de esferas huecas.

Expresiones relacionadas con elementos de la geometría

Las expresiones que se relacionaron con elementos de la geometría fueron clasificadas como expresiones descriptivas y referenciales. Este tipo de expresiones refieren al uso de elementos o propiedades de la geometría euclidiana, particularmente, al uso de diferencia de áreas y al uso de las dimensiones geométricas. La diferencia de área refiere a una consideración explicita de tomar dos áreas y realizar la diferencia entre ellas; no se consideró, por ejemplo, a la diferencia entre integrales como una diferencia de áreas. Mientras que las dimensiones geométricas refieren a la consideración de ubicar algún objeto en un espacio o plano cartesiano. Considere como ejemplo de este último la respuesta parcial del estudiante 16 en la pregunta 3, donde se pide interpretar la integral $\int_0^2 4\pi r^2\,dr$.

> Estudiante 16. La integral representa una esfera que gráficamente se sitúa en el centro de un plano R^3 […].

Expresiones relacionadas con elementos algebraicos

Las expresiones que fueron relacionadas con el uso de elementos algebraicos fueron clasificadas como referenciales. Este tipo de expresiones refieren al uso de elementos algebraicos como respuesta o como complemento a la misma. Se consideraron las respuestas en donde se mostraban expresiones compuestas, como $f(r) = 2\pi r$ o $r = 0$, y aquellas en donde aparecían operaciones, pero no son desarrolladas. No se consideraron las respuestas donde se observaron expresiones aisladas que referían a alguna parte de la integral, como $2\pi r^2$ o [0,2], pero sí aquellas en las que se realizaba alguna modificación de estas expresiones, como $r(2\pi r)$ o $[0, x]$. Considere como ejemplo la respuesta del estudiante 7 en la pregunta 2, quien no realiza ningún cálculo y expresa el área del anillo de circunferencia como "A $= \int_a^b |R^2 - r^2| dx$; donde R=radio mayor, r=radio menor".

Expresiones relacionadas con un área bajo una curva

Estas expresiones están relacionadas con el modelo de un área bajo una curva y fueron consideradas como referenciales. Se incluyeron aquí las respuestas que se referían explícitamente a un área bajo una curva. Considere como ejemplo la siguiente frase que forma parte de la respuesta del estudiante 9 en la pregunta 1, donde es clara la relación con dicho modelo: "un área bajo la función contenida por los limites 0 y 2".

Se observaron respuestas en las que parecía considerarse el uso de este modelo, por lo que la frecuencia que se mostrará en la tabla 6.3 podría ser más alta. Sin embargo, estas respuestas no fueron consideradas en esta clasificación debido a que no era del todo claro que realmente las expresiones mostradas en la respuesta estuvieran relacionadas con dicho modelo.

Expresiones relacionadas con cálculos

Se observaron expresiones en la que se realizaron cálculos de forma explícita para argumentar una respuesta, o como respuesta en sí. Estas fueron clasificadas como expresiones referenciales. En esta clasificación no fueron consideradas aquellas respuestas que parecían basarse en algún cálculo implícito. Como ejemplo de un cálculo implícito, considere la respuesta parcial del estudiante 16 en la pregunta 3. En donde se observa que la primera integral proviene de un proceso no mostrado explícitamente en esta respuesta.

Estudiante 16. […] al realizar la integral lo que dio es el volumen de una esfera así que es esta imagen.

$$\int_0^2 \frac{2\pi r^2}{2} \Big|_0^x dx = \int_0^2 \pi x^2 \, dx = [\dots] = \frac{8\pi}{3}$$

Expresiones ilustrativas

Las expresiones ilustrativas fueron clasificadas como referenciales. Estas están relacionadas con el acompañamiento de una ilustración en la respuesta dada por algún estudiante. Considere como ejemplo la siguiente ilustración.

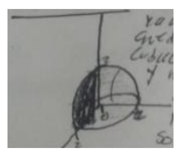


Ilustración 6.1. Ilustración mostrada por el estudiante 9 en la pregunta 4

Con la finalidad de observar si existía alguna relación entre el tipo de expresiones usadas y la productividad de las ideas con las que pudieran estar relacionadas, se organizaron primero las expresiones con relación a la frecuencia observada de sus usos, como se muestra en la tabla 6.3 y en el gráfico de barras 6.1. Para ello solo se realizó con las preguntas 1, 2, 3 y 4, ya que estas pueden considerarse como problemas a resolver, recordando que la pregunta 0 y la pregunta 6 son complementarias para responder y comprender las respuestas que proporcionaran los estudiantes en el resto de las preguntas. Posterior a ello, en el apartado contiguo, se realizó un contraste entre estas expresiones y las respuestas esperadas en búsqueda de alguna relación que pudiera indicar alguna productividad en su uso.

Tabla 6.3. Expresiones observadas y frecuencia de uso considerando la muestra de 22 estudiantes

Etiqueta	**Tipo de expresión**	**Frecuencia en la pregunta 1**	**Frecuencia en la pregunta 2**	**Frecuencia en la pregunta 3**	**Frecuencia en la pregunta 4**	**Total**	**Frecuencia porcentual**
Descripción de una integral	Descriptiva	10	0	1	7	18	13%
Movimiento o cambio	Descriptiva	13	1	6	4	24	18%
Acumulación	Descriptiva	12	1	3	4	20	15%
Elementos de la geometría	Descriptiva/referencial	0	5	4	8	17	13%
Elementos algebraicos	Referencial	7	11	4	4	26	19%
Área bajo una curva	Referencial	2	3	0	0	5	4%
Cálculos	Referencial	3	4	5	4	17	13%
Ilustraciones	Referencial	0	1	1	5	7	5%

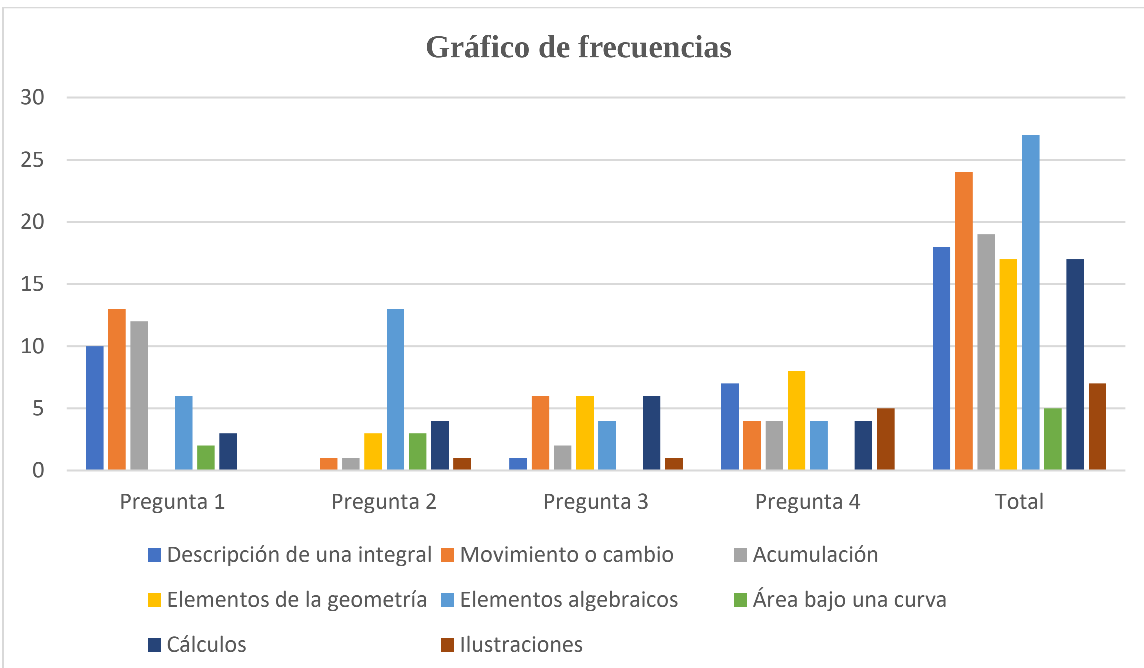


Gráfico de barras 6.1. Ilustración de las frecuencias observadas en la tabla 6.3

En la tabla 6.3 se observa una diferencia marcada en el uso de los diferentes tipos de expresiones. Si no se consideran a las expresiones relacionadas con elementos de la geometría, se tiene una frecuencia total de 61/117 para el tipo de expresiones descriptivas y de 56/117 para el tipo de expresiones referenciales. Por lo que en primera instancia se observa que los estudiantes recurrieron mayormente a responder mediante descripciones. Sin embargo, dado que la diferencia entre estas frecuencias es de aproximadamente un 4.3% (5/117), se puede decir que no parece haber una preferencia significativa entre el responder mediante el uso de expresiones descriptivas o referenciales.

Por otra parte, las altas frecuencias de algunas etiquetas que se observan en algunas preguntas, visualizadas en el gráfico 6.1, pueden explicarse por el contexto de la pregunta en particular. Por ejemplo, en la pregunta 2, la alta frecuencia del uso de expresiones relacionadas con elementos algebraicos puede explicarse debido a que se pide indicar y explicar una integral que represente el área del anillo de un círculo. En contraste, en el resto de las preguntas no se observa una frecuencia tan alta del uso de estas expresiones ya que no se pide indicar ninguna integral.

Además, de forma análoga a lo anterior, una posible explicación a la alta frecuencia del uso de expresiones con elementos algebraicos y las expresiones que refieren a alguna idea de movimiento, es que estas están relacionadas con las que comúnmente se utilizan para describir a una integral definida.

Así, se puede decir que la relación entre las frecuencias de alguna expresión y el tipo de pregunta no parece ser suficiente para considerar si las ideas o razonamientos relacionados con alguna de estas expresiones son productivos para la creación se significado consistente con lo que podría esperarse. En el siguiente subtema se proporciona más información sobre el tipo de respuesta esperada y se relacionan con las respuestas proporcionadas por los 22 estudiantes.

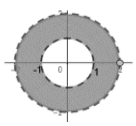
Evaluación de respuestas y etiquetas

En este subtema se presenta primero una recapitulación de lo que se consideró como una respuesta esperada y una síntesis de los resultados del análisis basado en este tipo de respuestas. Posterior a ello se muestra una discusión sobre estos resultados.

Recapitulación sobre las respuestas esperadas y síntesis de los resultados

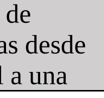
Como se muestra en el capítulo de metodología, se esperó que los estudiantes respondieran de cierta forma considerando alguna idea de acumulación. Particularmente, esta esperanza permite establecer un contraste con las respuestas dadas por los estudiantes en las preguntas 1, 2, 3 y 4, considerándolas como problemas a resolver. Las respuestas esperadas se muestran a continuación en la tabla 6.4.

Tabla 6.4. Respuestas esperadas para las preguntas 1, 2, 3 y 4

Pregunta simplificada	**Respuesta esperada**
Pregunta 1. ¿Qué representa la siguiente integral? $\int_0^2 2\pi r\, dr$	Se esperó que respondieran que representa el área de un círculo con radio de dos unidades, interpretada como el rastro que deja una circunferencia al expandirse.
Pregunta 2. ¿Qué integral es la que representa la siguiente área? 	Se esperó que los estudiantes expresaran la integral $\int_1^2 2\pi r\, dr$, explicando algo congruente con la idea de una acumulación de circunferencias que se produce al aumentar gradualmente el radio desde una hasta dos unidades.
Pregunta 3. $4\pi r^2$ puede verse como la fórmula para calcular el área de la superficie de una esfera ¿Qué interpretación se puede dar al cálculo de la siguiente integral? $\int_0^2 4\pi r^2\, dr$.	Se esperó que los estudiantes pudieran relacionar a la integral con el volumen de una esfera y que explicarían con relación a alguna acumulación mediante superficie de esferas.
Pregunta 4. ¿Cuál de las siguientes imágenes representaría $\int_0^2 \left(\int_0^x\ 2\,\pi r\, dr\right) dx$?	Se esperó que los estudiantes pudieran relacionar a la doble integral con el volumen del cono mostrado en el inciso b) (ver anexo I), el cual tiene altura y radio iguales a 2 unidades, y que explicaran la situación con alguna idea relacionada a la acumulación de circunferencias.

El contraste entre las respuestas esperadas y las proporcionadas por los estudiantes se puede aprovechar para observar el desempeño del grupo. Además, se podría relacionar este desempeño con las expresiones que usan, para conjeturar qué tipo de expresiones podrían ser las adecuadas para la creación de significado de las integrales definidas basadas en alguna idea de acumulación. Más adelante, en la tabla 6.5 se muestra una síntesis del contraste y la frecuencia absoluta de las respuestas. En dicha tabla, se toma en cuenta una categorización sobre qué tan cerca o lejos está la respuesta de algún estudiante con respecto de la respuesta esperada, considerando cuatro formas de clasificación.

Tabla 6.5. Contraste entre respuestas esperadas y respuestas observadas.

	Pregunta 1	**Pregunta 2**	**Pregunta 3**	**Pregunta 4**
Pregunta simplificada	¿Qué representa la siguiente integral? $\int_0^2 2\pi r\, dr$	¿Qué integral es la que representa la siguiente área? 	¿Qué interpretación se puede dar al cálculo de la siguiente integral? $\int_0^2 4\pi r^2\, dr$	¿Cuál de las siguientes imágenes representaría $\int_0^2 \left(\int_0^x\ 2\,\pi r\, dr\right) dx$?
Respuesta esperada desde	Área de un círculo con radio de dos unidades,	Acumulación de circunferencias desde un radio igual a una	Volumen de una esfera, generado por	Volumen del cono recto, con vértice en el origen, con altura y radio iguales

el modelo de acumulación	interpretada como el rastro que deja una circunferencia al expandirse	hasta dos unidades: $\int_1^2 2\pi r\, dr$	acumulación de superficie de esferas	a dos unidades (inciso b)), generado mediante acumulación de circunferencias
Respuestas consistentes con lo esperado	Identifican el área de un círculo y parecen explicar con la idea de alguna acumulación (11)	Identifican a la integral, o alguna relación semejante y congruente de la misma, y parecen explicar con la idea de alguna acumulación (1)	Identifican con una esfera o el volumen de una esfera y parecen explicar con la idea de alguna acumulación (3)	Seleccionaron el inciso b) y parecen explicar con la idea de alguna acumulación (2)
Expresiones observadas y su frecuencia	Acumulación (11) Movimiento o cambio (9) Descripción de una integral (4) Elementos algebraicos (2)	Acumulación (1) Movimiento o cambio (1)	Acumulación (3) Movimiento o cambio (3) Elementos algebraicos (1) Cálculos (1)	Acumulación (2) Movimiento o cambio (2) Cálculos (1) Descripción de una integral (1)
Respuestas medianamente consistentes con lo esperado	Identifican el área del círculo y no parecen explicar con la idea de alguna acumulación (9)	Identifican a la integral, pero no parecen explicar con la idea de alguna acumulación (16)	Identifican con una esfera o el volumen de una esfera, pero no parecen explican con la idea de alguna acumulación (9)	Seleccionaron el inciso b) pero no parecen explicar con la idea de alguna acumulación (4)
Expresiones observadas y su frecuencia	Movimiento o cambio (3) Descripción de una integral (5) Cálculos (3) Elementos algebraicos (4) Área bajo una curva (2)	Elementos algebraicos (9) Área bajo una curva (1) Cálculos (3) Elementos de la geometría (2) Ilustraciones (1) N.A. (4)	Cálculos (3) N. A. (2) Ilustraciones (1) Elementos de la geometría (4) Elementos algebraicos (1)	Cálculos (1) Ilustraciones (1) Elementos de la geometría (2) Descripción de una integral (2)
Respuestas poco consistentes con lo esperado	Identifican el área o parecen explicar con la idea de alguna acumulación, pero con inconsistencias (2)	Identifican a la integral, no parecen explicar con la idea de alguna acumulación y presenta inconsistencias (2)	Identifican con una esfera, pero presentando inconsistencias: (7)	Seleccionaron otro inciso y parecen explicar con la idea de alguna acumulación (4)
Expresiones observadas y su frecuencia	Acumulación (1) Movimiento o cambio (1) Descripción de una integral (1) Elementos algebraicos (1)	Elementos algebraicos (2) Área bajo una curva (1) Elementos de la geometría (1)	Descripción de una integral (1) Movimiento o cambio (3) Elementos algebraicos (2) Elementos de la geometría (2) Cálculos (1)	Movimiento o cambio (2) Descripción de una integral (2) Acumulación (3) Cálculos (1) Elementos algebraicos (2)
Respuestas inconsistentes con lo esperado		Identifican con una integral diferente a la esperada: (3)	Identifican con algún otro objeto diferente a una esfera o proporcionan una respuesta inesperada: (3)	Seleccionaron otro inciso, sin aparente relación con la idea de alguna acumulación o dieron una respuesta inesperada: (12)

Expresiones observadas y su frecuencia		Elementos de la geometría (2) Cálculos (1) Área bajo una curva (1)	N. A. (3)	N. A. (3) Ilustraciones (4) Elementos de la geometría (6) Cálculos (2) Descripción de una integral (2) Elementos algebraicos (2)
*N. A.: No aplica. Refiere respuestas en las cuales no se observó una explicación sobre la respuesta dada y no era posible darle una clasificación.				

Para la obtención de la tabla 6.5, cada una de las respuestas de los estudiantes fue evaluada considerando los criterios mencionados en los renglones “respuestas consistentes con lo esperado”, “respuestas medianamente consistentes con lo esperado”, “respuestas poco consistentes con lo esperado” y “respuestas inconsistentes con lo esperado”. Además, se registran las expresiones usadas en cada pregunta y por cada renglón. A continuación, en la tabla 6.5.a se muestra un ejemplo de evaluación y más adelante se presentará un desglose de la tabla 6.5.

Tabla 6. 5.a. Ejemplo de evaluación de respuestas en la pregunta 3.

¿Qué interpretación se puede dar al cálculo de la siguiente integral? $\int_0^2 4\pi r^2\, dr$	**Consistente**	**Medianamente consistente**	**Poco consistente**	**Inconsistente**
Respuesta esperada	Identifican con una esfera o el volumen de una esfera y parecen explicar con la idea de alguna acumulación.	Identifican con una esfera o el volumen de una esfera, pero no parecen considerar alguna idea de acumulación	Identifican con una esfera, pero presentando inconsistencias.	Identifican con algún otro objeto diferente a una esfera o proporcionan una respuesta inesperada.
Ejemplos	[…] suma de capas de una esfera huecas, […] la suma de todas estas esferas huecas conforman el volumen total de la esfera de radio = 2. (Estudiante 18)	El volumen de una esfera de radio 2 $\int_0^2 4\pi r^2\, dr = 4\pi \frac{r^3}{3}\|_0^2 \rightarrow \frac{4}{3}\pi r^3$ (Estudiante 2)	Se obtendría el área superficial de una esfera de radio $r = 2$ (Estudiante 10)	El área de una circunferencia. (Estudiante 15)

Para proporcionar una mejor perspectiva de la tabla 6.5, se presenta a continuación las tablas 6.5.b, 6.5.c, 6.5.d y 6.5.e enseguida de estas se mostrará una discusión sobre las mismas. En la tabla 6.5.b se muestra un simplificado de la tabla 6.5, considerando solo las frecuencias; en la tabla 6.5.c se muestran los totales de la tabla 6.5.b, seguido de ésta se muestra su gráfico de barras; en la 6.5.d se muestran los resultados de la evaluación por pregunta, se guida de su gráfico; y en la tabla 6.5.e se muestra la frecuencia de la aparición de las etiquetas en la tabla 6.5.

Tabla 6.5.b. Frecuencias de la evaluación de las etiquetas. Síntesis te tabla 6.5

	Respuestas consistentes con lo esperado				**Respuestas medianamente consistentes con lo esperado**				**Respuestas poco consistentes con lo esperado**				**Respuestas inconsistentes con lo esperado**			
	1	**2**	**3**	**4**	**1**	**2**	**3**	**4**	**1**	**2**	**3**	**4**	**1**	**2**	**3**	**4**
Acumulación	11	1	3	1					1			3				
Área bajo una curva					2	1				1				1		
Cálculos			1	1	3	3	3	1			1	1		1		2
Descripción de una integral	4			1	5			2	1		1	2				2
Elementos algebraicos	2		1		4	9	1		1	2	2	2				2
Elementos de la geometría						2	4	2		1	2			2		6
Movimiento o cambio	9	1	3	2	3				1		3	2				
Ilustraciones						1	1	1								4

Tabla 6.5.c. totales de la tabla 6.5 b

	Consistentes	**Medianamente consistentes**	**Poco consistentes**	**Inconsistentes**
Acumulación	16		4	
Área bajo una curva		3	1	1
Cálculos	2	10	2	3
Descripción de una integral	5	7	4	2
Elementos algebraicos	3	14	7	2
Elementos de la geometría		8	3	8
Movimiento o cambio	15	3	6	
Ilustraciones		3		4

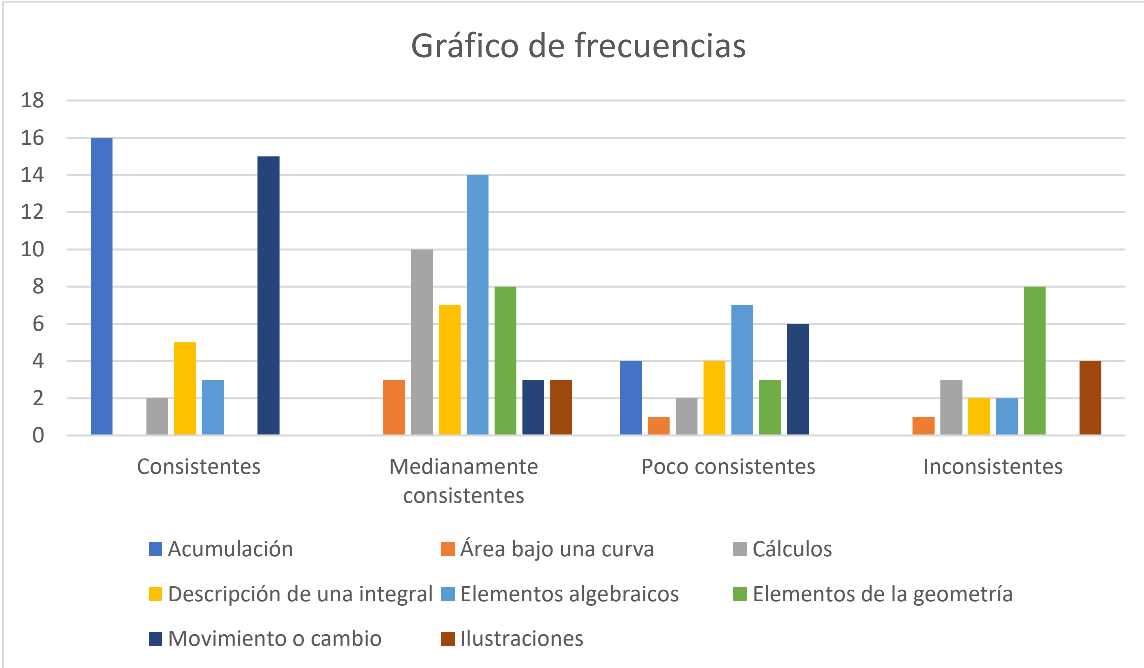


Gráfico de barras 6.2. Ilustración de las frecuencias observadas en la tabla 6.5.c

Tabla 6. 5.d. Frecuencias de respuestas en categorías por pregunta

	Pregunta 1	Pregunta 2	Pregunta 3	Pregunta 4	Total
Respuestas consistentes con lo esperado	11	1	3	2	17
Respuestas medianamente consistentes con lo esperado	9	16	9	4	38
Respuestas poco consistentes con lo esperado	2	2	7	4	15
Respuestas inconsistentes con lo esperado	0	3	4	12	19

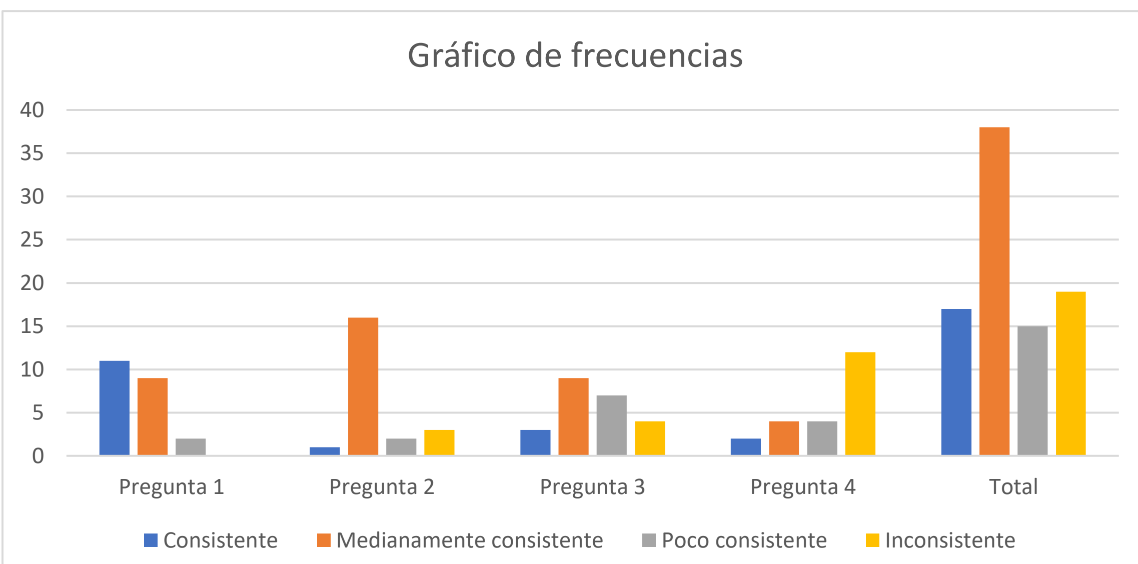


Gráfico de barras 6.3. Ilustración de las frecuencias observadas en la tabla 6.5.d

Tabla 6.5.e. Frecuencia observada de las expresiones en la tabla 6.5

Expresiones relacionadas con:	**Frecuencia relativa**
Cálculos	10/16
Elementos algebraicos	10/16
Descripción de una integral	8/16
Movimiento o cambio	8/16
Elementos de la geometría	7/16
Acumulación	6/16
Área bajo una curva	4/16
Ilustraciones	4/16
*Considere que en la tabla 6.5 hay cuatro formas de clasificar una respuesta, para cada una de las cuatro preguntas, lo cual da un total de 16 posibles formas de clasificar las expresiones.	

Discusiones sobre las respuestas esperadas y las relaciones entre las diferentes expresiones

En primera instancia, los resultados que se observan de la tabla 6.3 muestran que dependiendo del contexto los estudiantes parecen estar orientados a responder de alguna forma en particular que no necesariamente esté relacionada con la acumulación. Esta afirmación también se puede corroborar con lo que se observa en la tabla 6.5.d y su gráfico de barras, ya que se puede apreciar que conforme los estudiantes avanzaron en responder el cuestionario, sus respuestas tendían a alejarse de las respuestas esperadas, de forma que se tiene una mayor frecuencia en las respuestas consistentes con lo esperado en la pregunta 1 y pasan a presentar una mayor frecuencia en las respuestas inconsistentes con lo esperado en la pregunta 4. Esto último parece también indicar la existencia de un aumento en la dificultad de la interpretación en las preguntas, a pesar de estar todas relacionadas bajo la misma idea de un barrido radial.

Estos resultados son consistentes con la afirmación que realizan Rasslan y Tall (2002) con respecto a que los estudiantes no solo usan las definiciones como criterio para determinar si una idea en particular es un ejemplo de un concepto, sino que también se basan en procesos, propiedades e imágenes mentales que se relacionen con el concepto en su mente. Aunque en el cuestionario del presente trabajo no se pedía determinar si algo era o no un ejemplo de un concepto. Se observó que los estudiantes no solo usaron como criterio alguna idea o razonamiento relacionado con la acumulación. Para expresar los significados dados a las integrales y las imágenes mostradas, también se basaban en propiedades e ideas que tenían de otros modelos. En lo particular, como se mencionó en el capítulo de resultados, se observó que en algunos casos dichas ideas de otros modelos eran acompañadas con expresiones que describían las partes de la integral, que relacionaban a la potencia del integrando con las dimensiones espaciales o que mostraban al diferencial como indicador de algún movimiento.

Por otra parte, con la información apreciable en las tablas 6.1, 6.2, 6.4, 6.5.c, 6.5.e y el gráfico de barras 6.2, considerando el contexto de la creación de significado bajo alguna idea de acumulación, se evaluaron como productivas, poco productivas, improductivas y productiva en algunos casos, las ideas o razonamientos que pudieran estar relacionadas con cada respuesta de los estudiantes. Esta evaluación se realizó considerando las etiquetas de la tabla 6.1 y 6.2, observando la cercanía con las respuestas esperadas en la tabla 6.5.c, 6.5.e y un contraste con las frecuencias en la tabla 6.4, considerando que detrás de cada respuesta de los estudiantes hay ideas y razonamientos que no necesariamente son evidentes, pero que están relacionados mediante las etiquetas adjudicadas. Para esta evaluación, parece importante volver a mencionar que la productividad a la que se refiere es a la creación de significado bajo alguna idea de acumulación. A continuación, se presenta en la tabla 6.6, una síntesis de esta evaluación sobre las etiquetas. Seguido de ello se presentan más detalles en los siguientes tres apartados.

Tabla 6.6. Evaluación de la productividad de las ideas o razonamientos relacionadas a cada etiqueta.

Etiquetas relacionadas con ideas o razonamientos que podrían ser productivos	**Etiquetas relacionadas con ideas o razonamientos que podrían ser poco productivos**	**Etiquetas relacionadas con ideas o razonamientos que podrían ser improductivos**	**Etiquetas relacionadas con ideas o razonamientos que podrían ser productivo solo en ciertos casos.**
• Movimiento o cambio • Acumulación	• Cálculos • Elementos de la geometría • Elementos algebraicos	• Área bajo una curva • Ilustraciones	• Descripción de una integral

Etiquetas relacionadas con ideas o razonamientos que podrían ser productivos. Se consideró ubicar aquí a las etiquetas comunes relacionadas con la categoría “respuestas consistentes con lo esperado” y que no aparecían en la categoría “inconsistentes con lo esperado”, en la tabla 6.5.b y 6.5c. Por ello, se incluyeron aquí a las etiquetas: “movimiento o cambio” y “acumulación”.

Sobre la etiqueta “movimiento o cambio”. Esta etiqueta refiere al uso de expresiones relacionadas con movimiento o cambio. En el subcapítulo de “frecuencia observada de las diferentes expresiones”, se supuso que la alta frecuencia de expresiones relacionadas con movimiento o cambio en la tabla 6.4 podría explicarse por su relación con el lenguaje utilizado para describir una integral definida. Sin embargo, los hallazgos de la tabla 6.5., 6.5.c y 6.5.e contradicen esta suposición. Estas expresiones se presentan en todas las respuestas consistentes con lo esperado, pero su presencia no es tan constante ni frecuente en las demás categorías, como se muestra en la tabla 6.5.e. En esta última tabla se observa una frecuencia de 8/16 para las expresiones relacionadas con alguna idea de movimiento o cambio, lo cual significa que solo aparece con una frecuencia de 4/12, fuera de la categoría "respuestas consistentes con lo esperado". Análogamente, las expresiones relacionadas con la acumulación se observan con una frecuencia de 6/16 en la tabla 6.6.e, lo cual significa que solo aparece con una frecuencia de 2/12, fuera de la misma categoría.

Por lo anterior, se puede suponer que las expresiones relacionadas con movimiento o cambio no son necesariamente utilizadas por su conexión con el lenguaje comúnmente empleado para describir una integral definida. Si no fuera de esta manera, se esperaría una mayor frecuencia en la tabla 6.5.e. Por el contrario, estos resultados parecen sugerir que, para algunos estudiantes de la muestra, las ideas o razonamientos vinculados a algún movimiento o cambio fueron naturales, e intuitivamente consistentes con la idea de alguna acumulación.

Sobre la etiqueta "acumulación". Se puede decir que el usar expresiones semejantes a "acumulación" no necesariamente significa que la respuesta que se proporciona sea consistente o tenga alguna claridad sobre la relación con este modelo. Este supuesto se da debido a que en la tabla 6.e, la frecuencia de las expresiones relacionadas con este tipo de ideas debería de ser de 4/16, pero se tiene una frecuencia de 6/16, encontrando que esta diferencia en la frecuencia se debe a que se ubicaron algunas respuestas en la categoría "respuestas poco consistentes con lo esperado". Las respuestas en dicha categoría expresaban palabras semejantes a "acumulación", pero estas eran poco consistentes con la respuesta esperada o no era claro el papel que jugaba la acumulación en la misma. Fueron cuatro respuestas que tuvieron esta característica, las cuales corresponden al estudiante 14, en la pregunta 1, y a los estudiantes 6, 12 y 22, en la pregunta 4. Observando la respuesta del estudiante 14 se aprecia que parece que intentó dar sentido a la integral $\int_0^2 2\pi r\, dr$ como el barrido de un área bajo una semi circunferencia. Mientras que al hacer una revisión de las respuestas de los estudiantes 6, 12 y 22, en la pregunta 4, no se observó una relación clara entre las expresiones proporcionadas con la acumulación, a pesar de que se refieren explícitamente a la acumulación.

Para finalizar, se retoma parte de los resultados mostrados previamente, con la pregunta 1 en el capítulo de resultados. En dichos resultados, con respecto a la figura 5.1 mostrada en ese capítulo, se enfatizó en que las respuestas que fueron relacionadas con la acumulación no estaban relacionadas con la realización de cálculos. Lo que en principio parecía sugerir que el cuestionario cumplió con lograr que aquellos que respondiesen consistentemente con lo esperado, no realizarían algún cálculo. Sin embargo, en las preguntas 3 y 4, en el renglón de las respuestas consistentes con lo esperado, de la tabla 6.5.c y su gráfico de barras, se observa que en cada una hubo una respuesta en la cual si se incluyó algún cálculo. Con una revisión a estas respuestas, correspondientes al estudiante 18 en la pregunta 3 y al estudiante 13 en la pregunta 4, no se observó con claridad la intensión de dichos cálculos. A pesar de esto, se puede sugerir que este acto haya sido realizado con la intensión de tener mayor certeza sobre la respuesta que iban a proporcionar en su momento. Esto permite presuponer que la realización de cálculos pueda ser considerado como un recurso que ayuda confirmar la interpretación que se pueda dar de una integral, cuando no se tiene certezas sobre la interpretación que se proporciona, a través de alguna relación entre el objeto interpretado y los resultados de los cálculos.

Etiquetas relacionadas con ideas o razonamientos que podrían ser poco productivos. Aquí se ubicaron las etiquetas cálculos, elementos de la geometría y elementos algebraicos. Estas tres son las que se encuentran con mayor frecuencia en la categoría "respuestas medianamente consistentes con lo esperado" y "respuestas poco consistentes con lo esperado", de la tabla 6.5.c y su gráfico de barras. Las expresiones relacionadas con cálculos se observan en cada una de las preguntas, mientras que las expresiones relacionadas con elementos algebraicos y elementos de la geometría aparecen en tres de las cuatro preguntas cada una. Bajo una revisión de las respuestas a las que se adjuntaron estas tres etiquetas se encontraron patrones de las cuales se desprendieron las dos hipótesis siguientes.

Hipótesis 1. Los estudiantes, cuyas respuestas fueron incluidas en la categoría "respuestas medianamente consistentes con lo esperado", en la tabla 6.5, consideraron alguna idea o razonamiento relacionado con la acumulación, pero tuvieron dificultades para expresarla o no consideraron relevante hacerlo. Esta hipótesis se sustenta bajo las dos siguientes premisas.

a. En las respuestas incluidas en la categoría "respuestas medianamente consistentes con lo esperado", se pudieron identificar los objetos geométricos cuya acumulación como barrido permite interpretar otro tipo de objeto geométrico sin inconsistencias (circunferencias que generan un círculo o un anillo de círculo, superficies de esferas que generan una esfera sólidas y círculos que generan un cono). Sin embargo, no se observó que proporcionaran alguna explicación con respecto a la acumulación.
b. En la pregunta 2, a pesar de no observarse explicaciones en la mayoría de las respuestas, se recibieron 17/22 respuestas expresando la integral $\int_1^2 2\pi r\, dr$ o la diferencia de

integrales $\int_0^2 2\pi r\, dr - \int_0^1 2\pi r\, dr$, relacionándola con el anillo de un círculo. Ambas expresiones están relacionadas con la idea del área de un círculo obtenida mediante una acumulación de circunferencias de radios variables.

Hipótesis 2. El valor aportado por el modelo de un área bajo una curva en la construcción de significado de las integrales parece ser limitado, especialmente cuando se busca atribuir un significado más allá del cálculo de áreas. Por el contrario, elementos como cálculos, elementos de la geometría y algebraicos parecen ofrecer un soporte más sólido en esta construcción de significado.

Parece pertinente recordar que la referencia que se realiza al modelo de un área bajo una curva en el presente trabajo considera solo la representación de la integral según dicho modelo. La realización de cálculos, uso de elementos de la geometría y uso de elementos algebraicos se consideran ajenos a dicha representación. Las premisas que respaldan la hipótesis 2 se detallan a continuación:

a. En las respuestas analizadas, se observa que las menciones al modelo de un área bajo una curva (como en el caso de los estudiantes 9, 19 y 18 en las preguntas 1 y 2) se presentan más como una referencia complementaria que como una base sustancial para identificar el objeto requerido.
b. Se evidencia una baja frecuencia de expresiones relacionadas con el área bajo una curva, representando solo el 25% (4/16) de las respuestas analizadas en la tabla 6.5.e. Esta proporción sugiere que, en el contexto de este estudio, el modelo de área bajo una curva no es ampliamente empleado o considerado como un componente central en la construcción de significado de las integrales.

La hipótesis 2 es consistente con los resultados que muestra Sealey (2014) y Thompson y Silverman (2008), con respecto a que no parece que el modelo de un área bajo una curva sea suficiente para que los estudiantes logren resolver algunos problemas en contexto. Particularmente, Thompson y Silverman (2008) señalan que no se puede pretender enseñar la idea de una función de acumulación haciendo que los estudiantes solo calculen integrales definidas y relacionen sus resultados con un área bajo una curva. También mencionan que para que los estudiantes vean al área bajo una curva como una cantidad distinta del área, es necesario que las cantidades que se acumulan sean concebidas como si fueran creadas mediante incrementos variables que se forman multiplicativamente. A esta última mención de Thompson y Silverman (2008), en consonancia con las hipótesis 1 y 2, se puede agregar que para que los estudiantes asocien la integral definida con algo más que un área, es fundamental lograr una objetivación de la integral y sus componentes. Esto podría permitir que la integral se relacione y perciba como una representación de algo más que solo un área, lo que a su vez podría hacer que un área bajo una curva sea tan solo una representación de aquello que se construye mediante la acumulación indicada por una integral.

Etiquetas relacionadas con ideas o razonamientos que podrían ser improductivos. Las etiquetas incluidas aquí son “ilustraciones” y “área bajo una curva”. Debe considerarse que incluir aquí estas etiquetas no es significado de que las ideas relacionadas con ellas sean improductivas en cualquier circunstancia, sino que son consideradas improductivas en el contexto de la creación de significado de una integral bajo alguna idea de acumulación. A continuación de proporcionan más detalles.

Sobre la etiqueta “ilustraciones”. Esta está relacionada mayormente con respuestas inesperadas en la pregunta 4, en donde se proporcionan la mayor cantidad de ilustraciones. En dicha pregunta se incluye una opción en la que se puede expresar alguna figura distinta de las mostradas que describa a la doble integral $\int_0^2 \left(\int_0^x \ 2\,\pi r\,dr \right) dx$. Las respuestas que tenían expresiones ilustrativas en dicha pregunta fueron las de los estudiantes 3, 9, 14 y 18. El estudiante 3 relacionó a la doble integral con el área de un anillo de circunferencia, el estudiante 9 la relacionó con el volumen de la mitad de una semi esfera, y los estudiantes 9 y 14 la relacionaron con cilindros. Esto lleva a considerar que las expresiones ilustrativas son evidencias de ideas o razonamientos improductivos, debido a que no se proporcionó una explicación clara sobre el por qué se interpretó a la doble integral de estas formas. Particularmente, la inconsistencia probablemente se deba a que los estudiantes hayan considerado que la interpretación de la doble integral debería ser algo similar a los objetos interpretados en la pregunta 1, 2 y 3 (circunferencia, anillo de circunferencia y esfera), debido a las imágenes proporcionadas.

Estos últimos resultados son contrastantes con los mostrados por Jones (2003), quien indica que la realización de ilustraciones parece haber jugado un papel importante en la producción de argumentos consistentes de cómo funciona una integral. En el presente trabajo, las ilustraciones no produjeron argumentos, sino que fueron utilizados como una herramienta para expresar de forma general una idea, sin brindar más detalles al respecto. Este contraste puede explicarse debido a la diferencia del contexto entre el trabajo de Jones (2003) con el contexto del presente trabajo, ya que, los estudiantes de la muestra del presente trabajo no tenían experiencias significativas con la interpretación de integrales lo cual parece haber producido algún grado de estrés e incertidumbre, según se observó en las respuestas obtenidas en la respuesta 5 (véase capítulo de resultados).

Sobre la etiqueta “área bajo una curva”. Esta etiqueta refiere a las respuestas que se relacionaron con el modelo de un área bajo una curva. El intento de responder a las preguntas del cuestionario considerando alguna idea del modelo de un área bajo una curva, podría ser una explicación a algunas respuestas inconsistentes con lo esperado (véase tabla 6.5 y tabla 6.5.a) y a la poca claridad en algunas respuestas. Puede suponerse que, si bien el modelo de un área bajo una curva se puede explicar intuitivamente mediante la acumulación como la idea de un barrido lateral de un segmento, que se desplaza con relación a una curva (véase pregunta 0), el modelo de un área bajo una curva resulta insuficiente para explicar cómo es que, por ejemplo, el área bajo la curva de la función $f(r) = 4\pi r^2$ se relaciona con el volumen de una esfera. Aunque esto no implica que dicho modelo tenga que ser reemplazado por algún otro, pero sí puede sugerirse que sea complementado. Ya que, en sí, el modelo de un área bajo una curva puede verse como el análisis último que se puede realizar sobre una función, extrayendo de éste información útil, como la rapidez de cambio, por ejemplo. Esto parece indicar que habría de considerarse la posibilidad de establecer un puente entre el conocimiento de la experiencia sensible al mundo físico y el conocimiento abstracto que puede obtenerse del modelo de un área bajo una curva.

Etiquetas relacionadas con ideas o razonamientos que podrían ser productivo solo en ciertos casos. En esta clasificación se decidió ubicar a la etiqueta “descripción de una integral” toda vez que no se pudo clasificar como productiva, pero tampoco como improductiva. A continuación, se proporcionan más detalles.

Sobre la etiqueta “descripción de una integral”. Esta se muestra con mayor frecuencia en la pregunta 1 y la pregunta 4, según lo que se observa en la tabla 6.4. En el contexto de la realización de respuestas con estas expresiones, Thompson y Silverman (2008) sugieren que se debe evitar conducir a los estudiantes a conductas donde sus palabras y símbolos se refieran a otras palabras, símbolos o imágenes, pues pueden obstaculizar el aprendizaje del concepto de acumulación y sus implicaciones. Nótese que en el presente trabajo no se orientó a que los estudiantes respondieran refiriéndose a símbolos, es decir, describiendo las partes de una integral. Una explicación a esto es que, el describir las partes de una integral, podría ser un medio por el cual algunos estudiantes intentaron abordar posibles dificultades de explicar las relaciones que surgen al relacionar a una acumulación con su representación como integral. Esta suposición se sustenta considerando que la mayor frecuencia observada en la tabla 6.5.d, de esta etiqueta es en la pregunta 1 y en la pregunta 4, como se muestra a continuación en la tabla 6.5.f.

Tabla 6.5.f. Frecuencia absoluta de la etiqueta "*descripción de una integral", observada en la tabla 6.5*

	Pregunta 1	Pregunta 3	Pregunta 4
Respuestas consistentes con lo esperado	4		4
Respuestas medianamente consistentes con lo esperado	5		2
Respuestas poco consistentes con lo esperado	1	1	2
Respuestas inconsistentes con lo esperado			2

Una forma de describir estas frecuencias de la tabla 6.5.f es que la pregunta 1 es el primer acercamiento de los estudiantes al tener que explicar la relación entre una integral y una acumulación. Mientras que en la pregunta 4 puede considerarse que se solicita una interpretación significativamente contrastante con respecto a las preguntas 1, 2 y 3, pues se pide interpretar una doble integral (véase gráfico de barras 6.2). Por ello es de suponerse que algunos estudiantes pudieron haberse encontrado en dificultades al intentar dar algún significado a las integrales mostradas en estas dos preguntas y, ante tales dificultades, procedieron mediante la descripción de las partes de la integral, en búsqueda de algún significado con relación a la acumulación.

Sin embargo, no puede decirse nada con respecto a si dichas expresiones descriptivas de las partes de una integral, que refieren a la descripción de símbolos, están relacionadas con alguna idea productiva. Tampoco se puede decir nada sobre si esta forma de proceder podría obstaculizar el aprendizaje del concepto de acumulación y sus implicaciones, como indican Thompson y Silverman (2008). Por ejemplo, en la pregunta 4, el estudiante 15, logra identificar que la respuesta correcta es el inciso b) mediante este método, pero el estudiante 22 en la misma pregunta no logra identificar a la integral con dicho inciso (véase capítulo de resultados). Una posible explicación para ello puede ser que, si se procede por descripción de la integral, la creación de significado se ve mejorada cuando las partes se describen trabajando en conjunto y no de forma separada.

Sobre la representación de la integral mediante la idea de un barrido

En este subcapítulo se abordarán cuatro temas: la claridad y utilidad de la representación de la integral mediante la idea de un barrido, las emociones que expresaron los estudiantes al responder el cuestionario, las posibles dificultades al trabajar con la idea de un barrido para representar a la integral definida y el papel que parece jugar la representación de ideas. A continuación, se presentan más detalles sobre estos temas en los siguientes apartados.

Claridad y utilidad de la representación de la integral mediante la idea de un barrido

El modelo que se muestra al inicio del cuestionario se basa en la idea de aproximar un proceso continuo mediante un barrido de área bajo una curva utilizando un segmento de recta representativo (véase pregunta 0). Esta idea se sustentó en los resultados obtenidos por Bernabé (2021), Jones (2013), Sealey (2014), Swidan y Yerushalmy (2016) y Thomson (1994). Los resultados de los estudios de estos autores se pueden resumir comentando que algunos estudiantes, a pesar de hayan presentado dificultades en abordar los problemas que se les presentaron, parecieron haberse sentido cómodos al trabajar con sumas y simplificaron el concepto de integral usando alguna idea de barrido.

Según los resultados del presente trabajo, el representar a la integral con relación a alguna acumulación, como la idea de un barrido, puede ser percibido como algo claro y podría ayudar al aprendizaje del cálculo integral. También se observó que las primeras ideas que se muestran sobre una integral y la acumulación, así como el contexto, las expresiones, el orden en el cual se muestran todas las ideas semejantes y los conocimientos y creencias previas que puedan tener los estudiantes sobre el concepto de integral, parecen jugar un papel muy importante en como puedan responder a los problemas que se les presentan.

En cuanto a la *claridad de la representación de la integral mediante alguna idea de barrido*, según lo observado en la pregunta 0, 18/ 22 estudiantes indicaron que la idea de expresar a la integral como un barrido fue clara. Con base en las expresiones descriptivas y referenciales observadas en esta pregunta, dicha claridad se debió a que tal idea permitía entender de forma simple a una integral (7/22) o porque se identificaba la relación con las sumas de Riemann (1/22) o un área bajo una curva (3/22).

Por otra parte, en cuanto a la *utilidad de la representación de la integral mediante alguna idea de barrido*, No todos identificaron a esta idea como útil, lo cual puede explicarse debido a la falta de experiencia para ligarlo con diferentes contextos. Según lo observado en la pregunta 0, algunos indicaron que era útil (6/22) por que podría considerarse como un método para resolver problemas o podría ser utilizado en la didáctica. Pero hubo quienes condicionaron su utilidad (7/22), por falta de explicación sobre cómo podría ser usada, y también hubo quienes negaron alguna utilidad de dicha idea (4/22) por falta de percibir alguna operatividad en ella.

En contraste con los resultados mostrados por los autores mencionados al inicio de este apartado: Bernabé (2021), Jones (2013), Sealey (2014), Swidan y Yerushalmy (2016) y Thomson (1994), se concuerda en que algunos estudiantes (11/21) parecen haberse sentido cómodos trabajando con la representación de la integral como un barrido, pero también se observó cierta incomodidad, confusión frustración y estrés manifestada en las respuestas proporcionadas algunos estuantes en la pregunta 5, generalmente relacionadas con la falta de costumbre de trabajar con este tipo de representaciones. Aunado a ello, como se observó en la tabla 6.5.a y su gráfico de barras 6.2, conforme los estudiantes avanzaban en las preguntas, se presentaron dificultades para extender la idea de la representación de la integral como un barrido. Estos resultados sugieren que algunos estudiantes no parecen haber entendido del todo la idea presentada.

La concordancia y discrepancia con los anteriores autores sugiere que darles la oportunidad a los estudiantes de expresarse y crear significado a la simbología de la integral definida, mediante figuras y la idea de barrido, tiene el potencial de ayudar a algunos estudiantes a trabajar con cierto agrado en la resolución de problemas donde se vea involucrado el concepto de integral. Pero se debe tomar en cuenta las posibles que enfrentan los estudiantes al trabajar mediante esta idea y las razones de estas dificultades. Como se mostrará más adelante, se sugiere propiciar ambientes de aprendizaje previos a su uso, en donde los estudiantes puedan experimentar situaciones similares y adquirir las herramientas necesarias para hacer frente a los problemas en un ambiente de cálculo.

Emociones al trabajar con alguna idea de barrido para representar a la integral definida

Según los resultados a la pregunta 5, aunque algunos estudiantes (11/21) expresaron haberse sentido de cierta forma que podría considerarse benéfica para su aprendizaje (sentimientos positivos). Otros también se expresaron con relación a sentimientos negativos (10/21), entre ellos hubo quienes indicaron que se llegaron a sentir estresados (6/21), confusos (4/21) o con dificultades para recordar algo en particular (3/21). Estos sentimientos, que podrían ser fuente de dificultades de aprendizaje (sentimientos negativos), parecen estar relacionados con alguna costumbre de trabajar de forma procedimental en el cálculo.

En lo general, quienes respondieron con relación a sentimientos positivos, expresaron sentirse tranquilos, analíticos, pensantes, entretenido, divertido o cómodos. En contraste, entre quienes respondieron con relación a sentimientos negativos hubo algunos expresaron que se sintieron así debido a que los temas de integración suelen abordarse de forma numérica, lo cual contrasta con el enfoque interpretativo presentado en el cuestionario. También hubo quienes indicaron que les generó cierta preocupación la costumbre del uso de formularios en sus cursos, en contraste con la falta de experiencia para la aplicación e interpretación de sus conocimientos de cálculo.

Por otra parte, también hubo estudiantes que expresaron haber tenido sentimientos positivos y negativos (4/21), en el sentido de sentirse entretenidos al responder los ejercicios, pero al mismo tiempo frustrados por la falta de practica y no poder recordar alguna idea (por ejemplo).

Estos resultados sugieren que los sentimientos negativos que expresaron los estudiantes no necesariamente se debieron al enfoque en sí (de interpretación de imágenes e integrales), sino a una posible falta de alguna habilidad para lidiar con cuestiones de este tipo. Considere que hubo respuestas que parecían ser inconsistentes si se restringía la lectura a un simbolismo tradicional, pero que mantenían cierta consistencia con el contexto de la pregunta cuando se involucraban ideas de otros modelos de representación (como expresar $\int_a^b |R^2 - r^2| dx$ para indicar una diferencia de áreas de circunferencias).

Estos resultados son semejantes con los obtenidos por Espinoza y Martines (2010) y Towers et al. (2017). Aunque en el trabajo de estos autores las emociones no se estudian en el contexto del cálculo, es relevante el cómo estos se relacionan con el aprendizaje y la práctica de la matemática. Espinoza y Martines (2010) indican que los conocimientos matemáticos previos, el sistema educativo y las creencias del alumno son algunos productores de emociones y que las emociones negativas son especialmente generadas por las creencias de los estudiantes. Mientras que Towers et al. (2017) indican que los estudiantes describen sus emociones con respecto a creencias sobre sus propias capacidades, además de evaluaciones y valoraciones externas, experimentando emociones negativas cuando no comprenden un concepto y emociones positivas en el caso contrario. Además, señalan que cerca del 58% de la muestra (24/41 estudiantes) presentaron un matiz de estados y emociones entre lo negativo y positivo, entre los cuales se encontró que también podían considerar a la incertidumbre y frustración como algo positivo.

En el presente trabajo se observa también que las emociones parecen estar relacionadas con las creencias de los estudiantes sobre sus propias capacidades, sus conocimientos previos, las costumbres educativas y el tipo de problemas que intentan resolver. En general, las respuestas de los estudiantes parecen estar relacionadas con la percepción que tienen sobre la dificultad de responder a la interpretación de las integrales que se les solicitaron, manifestando haber experimentado alguna emoción o sentimiento positivo cuando no percibían dificultad o cuando les parecía un reto, y experimentando alguna emoción o sentimiento negativo en caso contrario. Sin embargo, se discrepa de Towers et al. (2017) con respecto al porcentaje de estudiantes que expresaron haber experimentado emociones positivas y negativas, toda vez que se encontró que solo el 19% de estudiantes (4/21) expresaron haber experimentado algún matiz de emociones.

Por lo ya comentado, parece sugerible el propiciar ambientes de educación en donde los estudiantes tengan la oportunidad de experimentar con las diferentes formas de expresar un mismo concepto, así como de hacer explícitas sus emociones, de forma que esto pueda ayudarles a superar las dificultades que parecen presentarse cuando se establecen en la comodidad de trabajar de forma procedimental.

Dificultades al trabajar con alguna idea de barrido para representar a la integral definida

Como se mencionó en el apartado anterior, las respuestas de los estudiantes parecen estar relacionadas con la percepción que tienen sobre la dificultad de responder a la interpretación de las integrales que se les solicitaron. Estas dificultades podrían deberse a alguna costumbre de trabajar de forma procedimental o por falta de alguna habilidad para moverse entre diferentes modelos de representación. Este resultado es consistente con lo expresado por Tall (1993). Según este autor, en temas de integración, los estudiantes suelen afrontar los problemas procedimentalmente y no por comprensión conceptual, por lo habituados que suelen estar en los enfoques simbólicos y numéricos. Particularmente, en el contexto del presente trabajo, se puede hacer hincapié en que los estudiantes parecen afrontar de esta manera los problemas en temas de integración, cuando se ven superados en sus habilidades para interpretar símbolos e imágenes relacionadas con las integrales definidas. Para ello debe considerarse que no todos los estudiantes recurrieron a esta práctica y tampoco fueron siempre los mismos.

Algunos autores proponen diferentes métodos para afrontar estas dificultades. Por ejemplo, Tall (1993) propone fomentar el uso de enfoques visuales y versátiles que involucren un enfoque simbólico, numérico y gráfico, y que se podría proceder mediante una enseñanza no estándar, con ideas informales de los conceptos matemáticos, la programación, el uso de manipuladores simbólicos, infografías y la construcción de intuiciones que permitan una formalización de los conocimientos. Mientras que Rasslan y Tall (2003) proponen que se debe alentar a los estudiantes a que expresen sus ideas, en espera de que esto les ayude a construir conceptos que puedan considerarse más perspicaces.

En el presente estudio se propone la creación de ambientes de aprendizaje tanto previos como durante el estudio del cálculo, donde los estudiantes puedan enfrentarse a situaciones que requieran el uso de sus creencias para interpretar un mismo concepto de diversas maneras, en espera de que con la ayuda del docente puedan adquirir las habilidades necesarias para resolver problemas en el cálculo. Se resalta la importancia de promover entornos educativos que permitan a los alumnos explorar múltiples formas de expresar un concepto y expresar sus emociones abiertamente. Se sostiene que esta práctica podría ser fundamental para superar las dificultades inherentes a un enfoque procedimental en el aprendizaje de las matemáticas.

Sobre el papel que parece jugar la presentación de ideas

Se observaron respuestas consistentes con las que han reportado los diferentes autores de los que se ha hecho mención. Por ejemplo, en el presente trabajo como en el de Jones (2013) se observa que los estudiantes parecen sentirse cómodos relacionando a la integral definida con la idea de una suma continúa expresada mediante la idea de un barrido. También se encontró semejanza con los resultados de Swidan y Yerushalmy (2016), en cuanto a que los límites de este barrido, entendido como acumulación, son interpretados según los límites superior e inferior indicados en una integral definida.

Sin embargo, también se observó que el tipo de interpretación que los estudiantes puedan dar a una integral, bajo este tipo de ideas, parece depender considerablemente de la interpretación inicial que se les muestre a los estudiantes y del conocimiento o lo habituados que estén con respecto otros modelos. A continuación, se discuten como ejemplo los contextos y resultados mostrados en los estudios considerados más relevantes con el tema de la interpretación de las integrales.

En el trabajo de Sealey (2014) se enfatiza la idea de las sumas de Riemann, por lo cual los estudiantes parecen sentirse cómodos en la capa de suma al resolver los problemas que se les presentan, pero tuvieron dificultades en la capa del producto y en el establecer algún proceso continuo, como lo reporta el autor. Lo cual podría ser explicado porque la frase “suma de Riemann” evoca ideas de un proceso discreto y dista intuitivamente del tener que prestar atención a algún producto.

En el trabajo de Jones (2013), se relaciona la idea de plantillas de integrales con áreas (por ejemplo $\int_{[\,]}^{[\,]}[\,]\,d[\,]$), sin considerar otras interpretaciones de la integral. Esto parece explicar las conexiones entre la idea de un barrido con una integral específica, y por qué las expresiones ilustrativas de dicho barrido fueron útiles para desarrollar ideas que explican el funcionamiento de una integral. Ya que parece resultar más simple e intuitivo el expresar una integral como barrido de un área, en lugar de tener que expresar todo el proceso que conlleva establecer la relación de un área con una integral de Riemann. Sobre todo, en el contexto en el que los estudiantes no se vieron influenciados a tener que explicar dicho proceso.

En los trabajos de Swidan y Yerushalmy (2016) y Carlson et al. (2003) se enfatiza en una idea intuitiva de acumulación, pero sin relacionarlo con algo más que un área, por lo cual los estudiantes parecen considerar las ideas de barridos laterales y la expansión de un círculo para representar a una integral sin interpretarla como algo diferente a un área.

En el trabajo de Thompson (1994) se enfatiza en el reflexionar sobre la acumulación como un llenado y en encontrar las integrales que representan diferentes áreas y volúmenes, lo cual parece explicar que siempre hayan intentado resolver los problemas considerando un llenado desde una base hasta cierta altura; particularmente parece explicar porque logran relacionar al volumen de un cono con la idea de una acumulación de círculos.

En el trabajo de Bernabé (2022) se enfatiza en la idea de una circunferencia que se expande desde el origen en el plano cartesiano hasta un radio x, relacionándola con la integral $\int_0^x 2\pi r\, dr$, sin mencionar la acumulación, lo cual parece explicar que no se mencione a la acumulación en sus resultados y no se haya podido interpretar algo distinto a un área bajo una curva. Además, este último autor muestra algunas respuestas que, aunque parezcan producto de alguna confusión, están relacionadas con la misma idea de una circunferencia que se expande. Por ejemplo, en su muestra, según el autor, algunos estudiantes interpretaron a la $\int_2^4 2\pi r\, dr$ como el área de una circunferencia de radio dos, que se expande desde su centro en $(2,0)$. Donde puede suponerse que el límite inferior de la integral está siendo representado como el punto sobre las abscisas desde donde empieza a expandirse la circunferencia. Mientras que el límite superior parece representar el punto sobre las abscisas hasta donde debería de dejar de expandirse. Nótese que esta interpretación, aunque parezca fruto de alguna confusión, está estrechamente relacionada con la idea principal que muestra el autor en su cuestionario.

En el presente trabajo se encontraron respuestas diversas en las que se logra relacionar a la integral definida con diferentes objetos. Algunas de estas respuestas, como ya se mostró en el subcapítulo anterior, fueron consistentes con lo esperado. Estas respuestas pueden ser explicadas si se considera que en el cuestionario del presente trabajo se enfatiza en la idea de considerar de forma intuitiva a la acumulación en diferentes escenarios. Por ejemplo, en la pregunta 3, el que algunos hayan logrado relacionar a la integral $\int_0^2 4\pi r^2\, dr$ con el volumen de una esfera obtenido mediante expansión, se puede explicar porque en la pregunta se indica que $4\pi r^2$ se relaciona con la superficie de una esfera, y previamente ya se había mostrado la idea de una expansión.

Las respuestas que fueron poco consistentes con lo esperado y que, en principio pueden llegar a ser consideradas como resultado de alguna confusión, también pueden ser explicadas por el énfasis en las ideas mostradas en el cuestionario y los conocimientos que los estudiantes ya poseían. Considere como ejemplo la respuesta del estudiante 14 en la pregunta 2 y 3, y la respuesta del estudiante 9 en la pregunta 4. En la pregunta 2, el estudiante 14 indica que el área del anillo de círculo mostrado se puede representar como "$A_{c_0} = \int_{-2}^{2} 2\pi r\, dr - \int_{-1}^{1} 2\pi r\, dr$", donde se observa relación entre los límites de integración con los puntos donde las circunferencias, que conforman al anillo, cortan al eje de las abscisas. Mientras que en la pregunta 3, el mismo estudiante indicó que la integral $\int_0^2 4\pi r^2\, dr$ se trataba de la superficie de una esfera de radio uno y centro en (1,0) sobre el eje de las abscisas. En esta respuesta parece que el estudiante relaciona nuevamente a los límites de la integral con puntos de corte en el eje de las abscisas, pero también se puede suponer que interpretó la construcción de la superficie de la esfera intentando hacer una analogía al barrido de área de la pregunta 0. Así, el límite inferior realmente parecería que indica el inicio de un barrido que finalizará hasta el límite superior. Finalmente, el estudiante 9 consideró que la doble integral representa a la mitad de una esfera, señalando que se trata de la mitad positiva y añade la lustración 6.1. En esta ilustración se observa que la semi esfera parece obtenerse mediante una especie de barrido lateral.

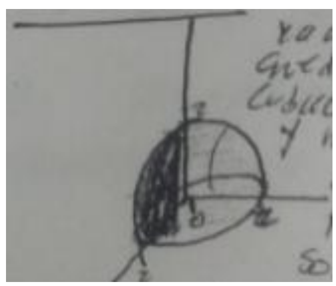


Ilustración 6.1. Ilustración mostrada por el estudiante 9 en la pregunta 4

Una explicación posible para estas tres respuestas es que los estudiantes intentaron extrapolar la idea de la pregunta 0, es decir, parecen mostrar la idea de un barrido lateral pero modificada según el contexto, sin limitarse a solo mostrar el área bajo una curva.

Nótese que la respuesta del estudiante 14 en la pregunta 3 es similar a algunas respuestas obtenidas por Bernabé (2002), en cuanto a que en su trabajo la $\int_2^4 2\pi r\, dr$ es interpretada por los estudiantes como el área de una circunferencia de radio dos, que se expande desde su centro en $(2,0)$. En ambos resultados, aunque se presentan en contextos diferentes, pareciera que los estudiantes intentaron dar significado a los límites de integración con relación a las primeras ideas que se les presentan en ambos cuestionarios.

Por lo anterior, se puede decir que las primeras ideas que se muestran sobre una integral y la acumulación, así como el contexto, las expresiones y el orden en el cual se muestran todas las ideas semejantes, parecen jugar un papel muy importante en como los estudiantes puedan responder a los problemas que se les presentan. Además, como se mostró en la tabla 6.5 del subtema anterior, la mayoría de los estudiantes lograron dar una respuesta consistente con lo esperado, aún y cuando no se hayan expresado con alguna idea de acumulación, y en todas las respuestas se observaron interpretaciones significativamente diferentes a las de un área bajo una curva. Lo cual parece sugerir que el orden y el tipo de ideas presentadas en el cuestionario del presente trabajo podrían ser útiles para el desarrollo de alguna secuencia didáctica, que permita que los estudiantes relacionen a una integral definida con algo diferente a un área y puedan establecer relaciones operativas simples como la diferencia de integrales. Aunque aún queda la cuestión sobre cómo lograr que los estudiantes puedan expresar tales ideas de forma operativa con respecto al resto de enfoques, como las sumas de Riemann, antiderivadas o métodos de integración, de manera que se puedan superar las dificultades de transitar entre los diferentes modelos de representación (Tall, 1993). Ya que, según lo observado en las respuestas a la pregunta 5, los resultados también sugieren que algunos estudiantes tuvieron dificultades al trabajar con varios modelos para representar una misma idea y se notó que les resultó desafiante adaptar sus conocimientos a contextos diferentes a los habituales (Rasslan y Tall, 2002).

Otros resultados motivados por las respuestas de los estudiantes

Durante el análisis de las respuestas, se observaron diferentes formas para expresar a la acumulación, así como expresiones que parecen inherentes a la descripción de una acumulación. Algunas de estas formas de expresarse llevaron a considerar que de forma intuitiva la acumulación puede entenderse como continua o discreta. Además, de que también se puede decir si es una acumulación ordenada o si sigue una dirección. Estos resultados cobran relevancia ya que ninguno de los autores citados hasta este momento ha enfatizado en algo semejante. A continuación, se proporciona más información al respecto en los siguientes apartados.

Acumulación discreta y acumulación continua

La “acumulación discreta” está relacionada con una acumulación en donde los incrementos a la cantidad acumulada son discretos. Por ejemplo, el llenado de un balde con agua mediante vasos con agua. Mientras que la “acumulación continua” está relacionada con una acumulación en donde los incrementos a la cantidad acumulada no son discretos, pero pueden ser discretizados. Esta también está relacionada con las ideas que describen algún movimiento continuo. Por ejemplo, el llenado de un balde con agua mediante un flujo continuo o “chorro” de agua. Estas dos formas de referirse a una acumulación fueron motivadas por las respuestas de los estudiantes 11 y 18, en la pregunta 3. A continuación se vuelven a reproducir sus respuestas.

Estudiante 11. El volumen de una esfera que se expande de 0 a 2. En el sentido de la acumulación lo vería como si llenáramos una esfera poco a poco y en ese caso dr sería la diferencial del radio.

Estudiante 18. $\int_0^2 4\pi r^2 dr = 4\pi \frac{r^3}{3}\Big|_0^2 = 4\pi\left(\frac{8}{3}\right) = \frac{32}{3}\pi$ Podemos imaginarlo como la suma de capas de una esfera huecas, pero de un r pequeñísima hasta llegar a un *r=2*, en donde entre (0,2) hay infinitos *r*, que, con la integral, que es la suma de todas estas esferas huecas, conforman el volumen total de la esfera de radio *= 2*

Nótese que ambas respuestas refieren a una acumulación, sin embargo, en la respuesta del estudiante 18 se observa la idea de una acumulación discreta, la cual se realiza mediante una suma en donde los incrementos a la cantidad acumulada son capas de esferas huecas. Mientras que en la respuesta del estudiante 11 se observa la idea de una acumulación discreta extendida a una acumulación continua, la cual se realiza mediante la expansión de una única esfera. En ambas el resultado final es un volumen, pero nótese que en una el volumen es construido mediante adición de superficies, mientras que en la otra el volumen ya existe y solo aumenta por efecto de la expansión.

Puede considerarse que ambas formas de expresar la acumulación están motivadas por la experiencia que pudieron haber tenido los estudiantes con las sumas de Riemann y los fenómenos relacionados a la continuidad. Pues, ciertamente, la idea de una acumulación discreta está estrechamente relacionada con las sumas de Riemann, ya que en tales sumas se tiene identificado con claridad al aumento a la cantidad acumulada ($f(t_i)\Delta t$). Mientras que, por ejemplo, la idea de una acumulación continua se relaciona de forma intuitiva con un barrido, chorro, expansión o dilatación. Aunque, de forma operativa, la acumulación continua también se puede relacionar con el límite de una suma de Riemann.

Dirección de acumulación y acumulación ordenada

Las ideas de dirección de acumulación y acumulación ordenada están relacionadas, respectivamente, con las limitaciones sobre las cuales dos acumulaciones pueden ocurrir al mismo tiempo y el orden en el que ocurren. A continuación, se vuelven a reproducir las respuestas de los estudiantes que motivaron estas ideas en la pregunta 4, donde se pidió interpretar la integral doble $\int_0^2 \left(\int_0^x 2\,\pi r\, dr \right) dx$.

Estudiante 13. La integral dentro del área de un círculo en función de x y la 2da "mueve" x de 0 a 2 por lo que también ese radio se va a mover ya que x se "mueve" linealmente es la única. $\int_0^2 \pi x^2 dr.\ \frac{\pi x^3}{3}$

Estudiante 10. Ya que en la primera integral se obtiene la acumulación del área de un círculo y posteriormente esa se mueve con respecto a x de 0 a 2.

Ambas respuestas expresan la idea de que las acumulaciones son ordenadas y covariantes, debido a las dos integrales mostradas. Primero realizan una acumulación considerando la primera integral: $\int_0^x 2\,\pi r\, dr$. Después de esto realizan una segunda acumulación considerando la acumulación total de la primera, para cada valor estrictamente creciente de $x \in [0,2]$. Esto obliga a considerar dos direcciones distintas para representar la covariación de las acumulaciones. Una vez iniciada la acumulación representada con la primera integral, la segunda acumulación, que depende de la anterior, solo puede ser representada considerando un sentido diferente al de la primera. En el presente caso puede decirse que la primera acumulación ocurre de forma horizontal o radial, mientras que la segunda ocurre de forma vertical.

En consecuencia, lo anterior también sugiere que la idea de una dirección de acumulación parece obedecer a que una acumulación es estrictamente creciente y que no puede ser detenida, hasta que finaliza según lo indique el límite superior de la integral asociada. Sin embargo, a los estudiantes no se les indicó en ningún momento que la acumulación habría de entenderse como un proceso estrictamente creciente de una cantidad acumulada. Ante esto, debe considerarse que, en el marco conceptual presentado, se muestra a una acumulación como una cantidad estrictamente creciente por cuestiones de consistencia y limitaciones del estudio. Aunque también podría considerarse la idea de una acumulación que no sea creciente estricto.

Por otra parte, las ideas de dirección y orden de una acumulación no solo podrían ser aplicadas en el contexto de una doble integral. Por ejemplo, la integral $\int_0^2 2\,\pi r\, dr$, si bien puede interpretarse como el área de un círculo que se expande, al introducir un cambio de perspectiva mediante la idea de una dirección de acumulación, también puede interpretarse como el área lateral de un cono de radio dos y altura dos, construido de la punta a la base, como se muestra en la figura 6.1. Es decir, en lugar de que la acumulación se realice de forma horizontal, los cambios que ocurren a la circunferencia debido a su expansión podrían acumularse de forma vertical.

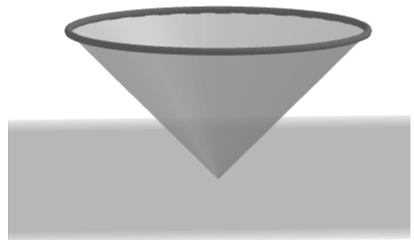


Figura 6.2 Área lateral de un cono

Capítulo 7. Conclusiones

En este estudio se analizaron las respuestas de un grupo de 22 estudiantes de ingeniería con respecto a la relación entre las integrales definidas y la acumulación. Para lograr esto, se aplicó un cuestionario compuesto por seis preguntas (ver Anexo I). El propósito principal era responder a la siguiente pregunta de investigación: ¿Cómo responden estudiantes universitarios, que ya han recibido un curso de cálculo (incluyendo el tema de integración), a la interpretación de integrales definidas que pueden ser relacionadas con alguna idea de acumulación? El objetivo general planteado fue identificar y categorizar las expresiones utilizadas por los estudiantes universitarios al explicar cualquier relación entre integrales definidas y sus interpretaciones basadas en la acumulación. Los objetivos específicos fueron identificar y categorizar estas expresiones, considerando el contexto particular de cada una de las preguntas. Para lograr estos objetivos y responder a la pregunta, se aplicaron procedimientos de la teoría fundamentada a las respuestas recibidas en el mencionado cuestionario. A continuación, se proporcionan más detalles sobre las conclusiones de este trabajo.

Cumplimiento de los objetivos y respuesta a la pregunta de investigación

Al analizar las respuestas proporcionadas por el grupo de estudiantes, se identificaron diferentes expresiones que permitieron simplificar las ideas o razonamientos que podrían estar detrás de sus respuestas. Estas expresiones se agruparon en dos categorías principales: expresiones descriptivas y expresiones referenciales. Por lo tanto, se puede concluir que tanto el objetivo general como los objetivos particulares (véase "Planteamiento del problema, pregunta de investigación y objetivos") se lograron satisfactoriamente, ya que se identificaron y categorizaron las expresiones utilizadas por los estudiantes de manera específica en cada pregunta y de manera general. Con el logro de los objetivos particulares y el objetivo general se procede a responder la pregunta de investigación: ¿Cómo responden estudiantes universitarios, que ya han recibido un curso de cálculo (incluyendo el tema de integración), a la interpretación de integrales definidas que pueden ser relacionadas con alguna idea de acumulación?

En términos generales, la mayoría de los estudiantes respondieron proporcionando interpretaciones distintas a la de un área bajo una curva, utilizando expresiones descriptivas y referenciales, sin mostrar una preferencia evidente entre ambas, toda vez que se observó una frecuencia de 52.14% en el uso de expresiones descriptivas y 47.86% en el uso de expresiones referenciales. Las expresiones que utilizaron los estudiantes para expresar sus ideas estuvieron relacionadas con las etiquetas "Elementos algebraicos" (20.15%), "Movimiento o cambio" (17.91%), "Acumulación" (14.18%), "Descripción de una integral"

(13.43%), “Elementos de la geometría” (12.69%), “Cálculos (12.69%), “Ilustraciones” (5.22%) y “área bajo una curva” (3.73%) (para más detalles, véase tabla 6.3).

El diseño del cuestionario se llevó a cabo considerando que detrás de cada pregunta se encuentra una interpretación de las integrales, basada en la idea de una acumulación generada por el rastro dejado por un objeto geométrico debido a su movimiento. En consecuencia, se esperaba que los estudiantes respondieran de forma específica en cada una de las preguntas, como está descrito en la tabla 6.4. Mediante estas respuestas esperadas se realizó una evaluación, contrastándolas con las respuestas proporcionadas por los estudiantes. Esta evaluación llevó a realizar la observación de que detrás de cada etiqueta asociada a las respuestas de los estudiantes, se pueden encontrar ideas o razonamientos que se consideren como productivos, poco productivos o improductivos. Con esto se pudo observar que los estudiantes tendieron a aumentar la cantidad de respuestas inconsistentes y a diversificar sus tipos de respuestas. Además, también que las ideas o razonamientos asociados a las etiquetas “Acumulación” y “Movimiento o cambio” fueron las más productivas; las ideas o razonamientos asociados con las etiquetas “Elementos algebraicos”, “Elementos de la geometría” y “Cálculos” fueron poco productivas para proporcionar una respuesta consistente con lo esperado, pero lo suficientemente productivas para lograr crear un significado de las integrales como algo más que solo un área o la medida de un área; las ideas o razonamientos asociados con las etiquetas “Ilustraciones” y “Área bajo una curva” fueron improductivas y las asociadas con la etiqueta “Descripción de una integral” fueron productivas solo en algunos casos, por ejemplo en situaciones donde el estudiante lograba identificar el objeto geométrico, su forma de movimiento y el cómo este movimiento era limitado y afectado por otros factores, como los límites de integración y el contexto en el que estudiante ubica la situación.

También se observó que los estudiantes expresaron haber experimentado emociones durante la contestación del cuestionario. Estas emociones, parecen estar relacionadas con factores como las creencias de los estudiantes sobre sus propias capacidades, sus conocimientos previos, las costumbres educativas y el tipo de problemas que intentan resolver. Estos podrían ser factores que pueden introducir nuevos retos en la enseñanza y aprendizaje del cálculo, aunque no se tiene evidencia de cómo afectaron dichas emociones a la forma en que respondieron los estudiantes.

Finalmente, se observó que los estudiantes no siempre explicitaban sus ideas y razonamientos en relación con conceptos como barrido, acumulación o el comportamiento de una integral. En su lugar, a menudo parecían recurrir a resultados previos para inferir nuevos resultados, lo que en algunos casos resultó en una falta de claridad para entender qué es lo que intentaron expresar, debido a posibles omisiones que pudieron haber hecho. Por lo tanto, se mantiene cierta ambigüedad sobre si los estudiantes interpretaron la idea de un barrido como una acumulación.

A continuación, las siguientes observaciones son conclusiones adicionales que surgieron en el curso del análisis.

Inclusión de las observaciones a un curso de cálculo integral

Parece recomendable incorporar ejemplos, ejercicios, prácticas de representaciones e interpretaciones distintas a los habituales en los cursos de matemática, para contrarrestar las dificultades que acarrea la costumbre de enseñar bajo un enfoque mayormente procedimental, como la dificultad de transitar entre diferentes modelos de representación, dificultad de proceder a la resolución de un problema si no es por alguna fórmula y las inherentes a las emociones que estas dos provocan. Particularmente en la enseñanza del cálculo integral, en donde habría de considerarse enfoques que vayan más allá de los vinculados a los modelos tradicionales, como la resolución de problemas en donde los ejercicios se reducen a resolverse de forma procedimental mediante el cálculo de una curva, el volumen de un sólido, una antiderivada o el valor de evaluar a una integral.

Se observó una consistencia intuitiva entre las ideas o razonamientos asociados a la etiqueta “Movimiento o cambio” y los conceptos comúnmente utilizados en un curso de cálculo, especialmente en relación con la noción de acumulación. Por ejemplo, el uso de la expresión “desde... hasta” para indicar los límites de integración se utilizó de manera intuitiva para representar el inicio y final de una acumulación. Además, la interpretación de integrales parece ser un trabajo significativamente difícil (véase gráfico de barras 6.2), que incluso parece que puede ser abordado desde los enfoques procedimentales bajo la interpretación de símbolos y las ideas intuitivas relacionadas al contexto en el que se presentan; toda vez que se observó que las ideas o razonamientos relacionados con cálculos, elementos geométricos y elementos algebraicos parecen ser suficientes para generar un significado distintos al de solo un área bajo una curva, aún y cuando no se haya logrado una consistencia con lo esperado bajo la idea de un rastro para interpretar una integral definida. En consecuencia, un curso de cálculo integral basado en la inclusión de los factores “elementos algebraicos”, “movimiento o cambio”, “acumulación”, “elementos geométricos” y “cálculos” parece que podría desarrollarse de manera natural al incluir la experiencia de los estudiantes con la interpretación de dichos factores.

En contraste, las respuestas asociadas al modelo tradicional de calcular el área bajo una curva, mediante la etiqueta “área bajo una curva”, mostraron poca claridad sobre la relación entre la acumulación y la interpretación proporcionada por algunos estudiantes, toda vez que dicho modelo se suele usar para el análisis bajo abstracciones. Esto sugiere la necesidad de considerar la posibilidad de establecer un puente de conocimiento entre la experiencia sensible del mundo físico y el conocimiento abstracto que se obtiene del modelo de un área bajo una curva. Este puente se cree que podría lograrse mediante la puesta en práctica de observar fenómenos cotidianos y la identificación de posibles relaciones con integrales particulares, o viceversa.

Para finalizar, considérese que las respuestas obtenidas en la pregunta 5, en donde se cuestiona sobre el sentir de los estudiantes al responder el cuestionario, el trabajar con la interpretación de integrales mediante la idea de un barrido fue bien recibido. Llegando a mencionar que las dificultades que presentaron se debieron a la costumbre que tienen de trabajar mediante fórmulas y cálculos procedimentales. Aunque no se tiene evidencia de que los resultados obtenidos en el presente trabajo sean generalizables, las sugerencias que se realizan son con el fin de brindar una perspectiva que pueda ser de ayuda en el proceso de enseñanza del cálculo. Sea que dichas sugerencias funcionen o no tras llevarse a cabo, también podría ser fuente de nuevas investigaciones.

Interpretaciones intuitivas relacionadas a la idea de un barrido

Se observaron relaciones que parecen intuitivas al interpretar una integral mediante la idea de un barrido, las cuales se enlistan a continuación.

1) Relacionar a la acumulación con el aumento de una cantidad positiva y estrictamente creciente.
2) Una acumulación no puede ser detenida hasta que finalice en el momento establecido, indicado con el límite superior de la integral.
3) No se pueden sobreponer dos acumulaciones simultaneas y covariantes, por lo que ambas acumulaciones deben seguir direcciones distintas.
4) Se puede simplificar la explicación sobre algún proceso de acumulación al cual se pueda hacer referencia, usando expresiones como “desde… hasta”, “dilatación” o “expansión”.
5) La resta de integrales es una operación consistente con la interpretación de las integrales bajo alguna idea de acumulación ($\int_1^2 2\pi r\, dr = \int_0^2 2\pi r\, dr - \int_0^1 2\pi r\, dr$).

Estas intuiciones, aunque pudieran llegar a ser de ayuda para superar algún obstáculo conceptual, pueden también ser fuente de nuevos errores y dificultades, por lo cual no deberían ser tomadas con ligereza. Las puntuaciones siguientes están relacionadas directamente con cada una de las intuiciones mencionadas, estos son breves recomendaciones que puedan servir para evitar que las intuiciones mencionadas puedan ser fuentes de nuevos errores.

1) Evitar generalizar a la acumulación con una cantidad y estrictamente creciente. Si bien esta generalidad, abarca las cantidades positivas y negativas, debería hacerse explícito el signo que guarda una cantidad, haciendo énfasis en que la cantidad que cambia en una acumulación puede ser fluctuante, estrictamente creciente o decreciente por intervalos. Además, hay que considerar que una acumulación puede ser interpretada de diferentes formas, por lo que no debe limitarse a solo una cantidad.
2) Evitar restringir la idea de los límites de integración como el inicio y fin de una acumulación. Por el contrario, habría de considerarse que una acumulación puede ser indefinida en estos límites. Es recomendable que se haga énfasis en una acumulación con límite superior x para que esto pueda ser de ayuda al momento de introducir el TFC, no sin antes verificar que los estudiantes hayan comprendido esta variabilidad.
3) Si bien se encontró la intuición de una covariación en las integrales dobles, habría de evitarse entrar a este terreno sin haber pasado integrales dobles donde sus límites de integración sean constantes, a modo de enfatizar que se realizan acumulaciones de cantidades resultantes de otra acumulación.
4) Las expresiones que simplifiquen una idea de cómo se comporta una acumulación deberían ser ejemplificadas y experimentadas por los estudiantes, en medida de lo posible, con ejemplos físicos, con el fin de evitar ambigüedades sobre la expresión que se use.
5) Se esperaría que otras operaciones, como la suma de integrales, tengan una relación intuitiva con alguna idea de acumulación. Sin embargo, habrá de hacerse énfasis en que no todas las operaciones tienen una interpretación consistente. En general, que no todas las integrales podrás tener una interpretación semejante a las que se han mostrado en este trabajo.

Para finalizar este apartado, parece importante recordar que las interpretaciones de las integrales que se han mostrado hasta ahora, así como las intuiciones observadas no deberían verse como una absoluta forma de proceder en un curso de cálculo. Aunque pudiera llegar a ser atractivo trabajar mediante interpretaciones de este tipo, deberían usarse solo como medios para tratar de solventar dificultades de enseñanza y aprendizaje, evitando crear nuevas o aumentar el nivel de dificultad. Se sugiere, que se vea como un puente entre la experiencia sensible al mundo físico y el conocimiento abstracto que puede obtenerse del modelo de la enseñanza tradicional.

Limitaciones y trabajos a futuro

Limitaciones

El presente estudio estuvo limitado principalmente por el instrumento de investigación y la muestra de estudiantes.

Por cuanto al instrumento de investigación, este limitó la cantidad de información que se pudo obtener de las respuestas que proporcionaron los estudiantes. También se observó que el instrumento de investigación podía mejorarse al ser más específicos en lo que se pregunta y haciendo énfasis en que se explique detalladamente la respuesta principal que proporcione el estudiante.

Por otra parte, es importante tener en cuenta que la muestra seleccionada para este estudio presenta un sesgo significativo y, por lo tanto, no puede considerarse representativa de la población en general. Sin embargo, esto no significa que los resultados y conclusiones carezcan de valor. Más bien, invita a reflexionar sobre el contexto específico en el que se desarrolló este trabajo y a reconocer que, con suficiente evidencia adicional, se podrían expandir nuestras conclusiones.

Posibles trabajos a futuro

Derivado de las conclusiones y observaciones anteriores, abajo se presenta una lista de cuestionamientos que podrían derivar en trabajos de investigación.

1) ¿Cómo responden estudiantes universitarios de áreas distintas a la ingeniería, que ya han recibido un curso de cálculo (incluyendo el tema de integración), a la interpretación de integrales definidas que pueden ser relacionadas con alguna idea de acumulación?
2) ¿Cómo interpretan los estudiantes a una "acumulación negativa"?
3) ¿Qué tipo de integrales, objetos geométricos o ejemplos físicos serían idóneos para complementar un curso de cálculo integral usando la acumulación, el movimiento y el cambio?
4) Aparte de la suma y la resta, ¿qué otras operaciones podrían ser consistentes con la interpretación de las integrales bajo alguna idea de acumulación?
5) ¿Qué beneficios podrían derivarse de un curso de cálculo donde se introduzcan expresiones como "acumulación discreta", "acumulación continua", "dirección de acumulación" y "acumulación ordenada"?
6) ¿Cómo evolucionan los razonamientos de los estudiantes a lo largo de la práctica de interpretaciones de las integrales mediante ideas relacionadas a la acumulación?

7) ¿Qué ruta de enseñanza podría ser idónea para lograr que los estudiantes puedan interpretar adecuadamente las sumas de Riemann y entender mejor el TFC mediante la representación de integrales e ideas de acumulación?

Referencias

Bernabé, E. (2021). *Razonamiento y dificultades de los estudiantes sobre un problema no rutinario del Teorema Fundamental del Cálculo* [Tesis de maestría, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional]. https://repositorio.cinvestav.mx/bitstream/handle/cinvestav/3904/SSIT0016975.pdf

Blum, W., Galbraith, P. L., Henn, H-W., y Niss, M. (Eds.). (2007). *Modelling and Applications in Mathematics Education: The 14th ICMI Study* (Vol. 10). Springer.

Cantoral, R. (2001). Enseñanza de la matemática en la educación superior. *Sinéctica*, (19).

Carlson, M. P., Smith, N., y Persson, J. (2003). Developing and Connecting Calculus Students' Notions of Rate-of Change and Accumulation: The Fundamental Theorem of Calculus. *International Group for the Psychology of Mathematics Education*, *2*, 165-172. https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED500922.pdf

Charmaz, K. (2006). *Constructing grounded theory: a practical guide through qualitative analysis*. SAGE Publications.

Espinosa, A. J., & Martínez, A. M. P. (2010). Las emociones en la deserción del conocimiento matemático. *Praxis & Saber*, 1(1), 191-216.

Fischbein, E. (1987). *Intuition in Science and Mathematics: An Educational Approach*. Dordrecht Springuer.

Hiebert, J., y Carpenter, T. P. (1992). Learning and teaching with understanding. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics* (p.65–97). Macmillan Publishing Co, Inc.

Jones, S. R. (2013). Understanding the integral: Students' symbolic forms. *The Journal of Mathematical Behavior*, *32*(2), 122-141. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2012.12.004

Larsen, S., Marrongelle, K., Bressoud, D., y Graham, K. (2017). Understanding the concepts of calculus: Frameworks and roadmaps emerging from educational research. *Compendium for research in mathematics education*, 526-550.

Natansón, I. P., (1984), *La suma de cantidades infinitamente pequeñas*, México, Limusa.

National Council of Teachers of Mathematics. (2009). *Focus in High School Mathematics: Reasoning and Sense Making*. NCTM.

Ortony, Andrew; Clore, Geral y Collins Allan (1996). *La estructura cognitiva de las emociones*. Madrid:

Siglo XXI.

Polya, G. (1965). *How to Solve It?*. Princeton University Press.

Rasslan, S., y Tall, D. (2002). Definitions and images for the definite integral concept. In *Proceedings of the 26th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, p.89-96).

Retana, J. Á. G. (2013). La problemática de la enseñanza y el aprendizaje del cálculo para ingeniería. *Revista Educación*, 37(1), 29-42.

Sealey, V. (2014). A framework for characterizing student understanding of Riemann sums and definite integrals. *The Journal of Mathematical Behavior*, 33(1), 230–245. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2013.12.002

Sofronas, K. S., DeFranco, T. C., Vinsonhaler, C., Gorgievski, N., Schroeder, L., y Hamelin, C. (2011). What does it mean for a student to understand the first-year calculus? Perspectives of 24 experts. *The Journal of Mathematical Behavior*, *30*(2), 131-148. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2011.02.001

Swidan, O., y Yerushalmy, M. (2015). Conceptual structure of the accumulation function in an interactive and multiple-linked representational environment. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, *2*(1), 30-58. https://doi.org/10.1007/s40753-015-0020-z

Tall, D. (1993). Students Difficulties in Calculus. *Proceeding of Working Group 3 on Students' Difficulties in Calculus*. Québec, Canada, ICME-7, 13-28.

Towers, J., Takeuchi, M. A., Hall, J., & Martin, L. C. (2017). "Students' Emotional Experiences Learning Mathematics in Canadian Schools". En *U. Xolocotzin* (Ed.), *Understanding Emotions in Mathematical Thinking and Learning* (p.163–186). Academic Press. doi:10.1016/B978-0-12-802218-4.00006-6

Thompson, P. W. (1994). Images of rate and operational understanding of the fundamental theorem of calculus. *Educational studies in mathematics*, *26*(2), 229-274. https://doi.org/10.1007/BF01273664

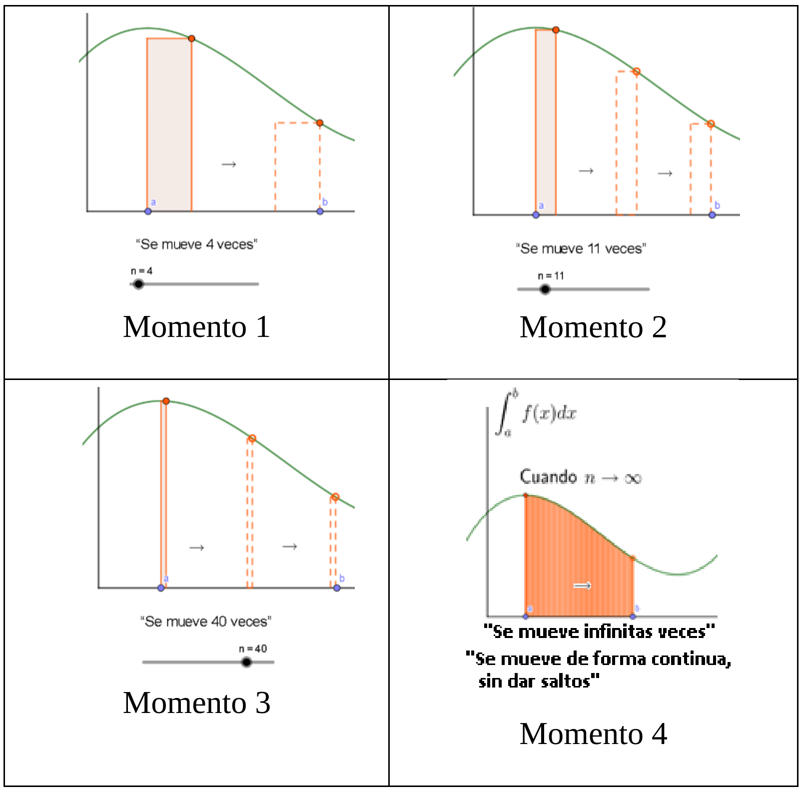
Thompson, P. W., y Silverman, J. (2008). The concept of accumulation in calculus. *Making the connection: Research and teaching in undergraduate mathematics*, *73*, 43-52. https://doi.org/10.5948/UPO9780883859759.005

Anexo I

Carrera: ________________________________ Edad: ____ Contacto: _________________________

Responde a las preguntas según el contexto que se presenta. Procura **que tus respuestas sean lo más amplias y detalladas posibles,** puedes realizar cualquier esbozo. Si te "equivocas" en algo, **no lo borres,** es de gran interés escucharte.

0.Lee la explicación que Juan, un estudiante de cálculo, hace del modelo de acumulación para la integral:



Es como tomar un rectángulo debajo de la gráfica que se puede desplazar. Aunque realmente nos interesa un rectángulo muy delgado, tan delgado que se parece a un segmento.

*Así, la integral es el área del **<u>'rastro'</u>** que deja el segmento que se mueve desde el punto 'a' hasta el punto 'b', sin dar saltos. Lo hace de forma continua.*

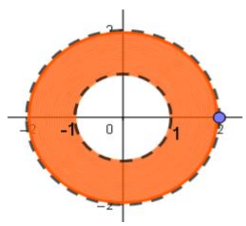
*Es como si el segmento fuera **acumulando área** con su movimiento.*

El profesor dijo que el modelo de acumulación es una forma intuitiva de ver la integral. *¿Te parece claro el modelo de acumulación y crees que puede ser útil para resolver problemas?*

1. Teniendo en cuenta el modelo de **acumulación**, piensa en un círculo con centro en el origen que se expande desde un radio igual a cero a un radio igual a r. Responde sin hacer cálculos ¿Qué representa la siguiente integral? Explica tu respuesta.

$$\int_0^2 2\pi r dr$$

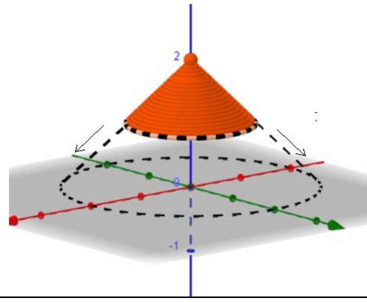
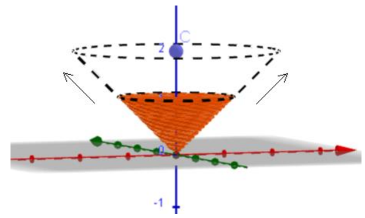
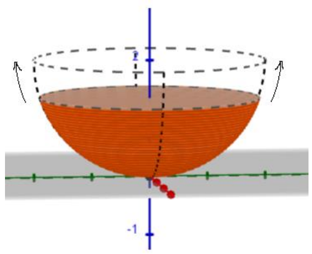
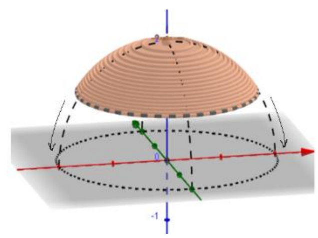
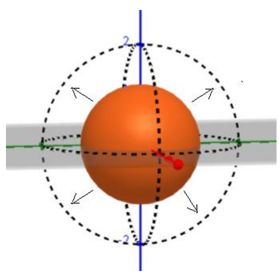
2. Basado en el modelo de **acumulación**, *¿qué integral es la que representa la siguiente área?*



3. Sabiendo que $4\pi r^2$ puede verse como <u>la fórmula para calcular el área de la superficie de una esfera</u>, **y basado en el modelo de acumulación**, ¿Qué interpretación se puede dar al cálculo de la siguiente integra? Noes necesarios que des un resultado numérico, ni que realices el cálculo, aunque puedes realizarlo si lo deseas.

$$\int_0^2 4\pi r^2 dr$$

4. Pensando en la idea de acumulación de Juan, ¿cuál de las siguientes imágenes representaría $\int_0^2 \left(\int_0^x 2\pi r \, dr \right) \, dx$? (Explica detalladamente la razón de tu decisión)

a) 	b) 
c) 	d) 
 e)	f) Otro (dibujalo)

5. Usa este espacio para expresar alguna duda o sugerencia, si lo deseas. ¿Qué te pareció la idea de Juan? ¿la usarías? ¿te sentiste confundido? ¿te estresó?, etc. Agradezco de antemano tu participación.