Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional

Unidad Zacatenco
Departamento de Matemáticas

Operadores de Toeplitz no acotados en el Espacio de Fock.

T E S I S

Que presenta

Germán Jordi Arreortúa Reyes

Para obtener el grado de

**Maestro en Ciencias
En la especialidad de
Matemáticas**

Directora de Tesis

Dra. Maribel Loaiza Leyva

Ciudad de México Marzo de 2024

Agradecimientos

Quiero expresar mi profundo agradecimiento a la institución CINVESTAV por su inestimable apoyo durante el tiempo que cursé mi maestría. Su compromiso con la excelencia académica y la investigación ha sido fundamental para enriquecer mi formación como estudiante.
Agradezco a mis profesores y en especial a mi asesora la Dra. Maribel Loaiza Leyva, quien me brindó un excelente asesoramiento durante todo este proceso.
Así mismo agradezco al CONAHCyT por su constante respaldo a la labor científica en nuestro país. La beca otorgada fue un factor determinante que hizo posible la realización de este trabajo y contribuyó de manera significativa a mi desarrollo académico y profesional.
Por último quisiera expresar mi más sincero agradecimiento a mi familia y amigos por su apoyo constante durante todo este proceso, quienes fueron un factor importante es la realización de este trabajo de Tesis.

Índice general

Resumen

Este trabajo se centra en el estudio de operadores de Toeplitz no acotados en el espacio de Fock. Iniciamos estudiando las propiedades de este tipo de operadores cuando tienen símbolos acotados. Posteriormente toma particular importancia el estudio de los mismos cuando los símbolos ya no son acotados. Esto implica que los operadores tienen que restringirse a un dominio donde si est'en bien definidos. Como símbolos especiales consideramos las funciones radiales. En particular, se analiza cómo una equivalencia unitaria dada del operador de Toeplitz con símbolo radial se extiende mediante un operador de multiplicación actuando en el espacio de sucesiones l^2_+. Se proporciona una condición necesaria y suficiente para determinar cuándo dicha equivalencia unitaria es igual al operador de multiplicación.

Abstract

This work focuses on the study of unbounded Toeplitz operators defined on the Fock space. First we give some properties of Toeplitz operators with bounded symbols. When the symbol of a Toeplitz operator is no longer bounded, the operator is well defined in a subspace, called the domain of the operator, of the Fock space. Additionally, we examine Toeplitz operators with radial symbols. In particular, we analyze how a given unitary equivalence of the Toeplitz operator with radial symbol extends through a multiplication operator acting in the sequence space l^2_+. A necessary and sufficient condition is provided to determine when this unitary equivalence is equal to the multiplication operator.

Introducción

Consideremos un espacio de Hilbert $\mathscr{H}$ complejo formado por funciones y sea $\mathscr{K}$ un subespacio cerrado de $\mathscr{H}$. Denotemos por $P_{\mathscr{K}} : \mathscr{H} \to \mathscr{K}$ a la proyección ortogonal de $\mathscr{H}$ en $\mathscr{K}$.
Sea $M_f : \mathscr{D}(M_f) \subset \mathscr{K} \to \mathscr{H}$ el operador de multiplicación por la función f. Esto es

$$M_f(g) = fg,$$

donde $\mathscr{D}(M_f) = \{g \in \mathscr{K} : gf \in \mathscr{H}\}$. Entonces el operador de Toeplitz con símbolo f, $T_f : \mathscr{D}(T_f) \subset \mathscr{K} \to \mathscr{K}$ se define como

$$T_f = P_{\mathscr{K}} M_f.$$

El siguiente diagrama muestra como actúa un operador de Toeplitz.

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{D}(T_f) \; = \; \mathscr{D}(M_f) \subseteq \mathscr{K} \arrow[r, "M_f"] \arrow[dr, "T_f"'] & \mathscr{H} \arrow[d, "P_{\mathscr{K}}"] \\
& \mathscr{K}
\end{tikzcd}$$

El primer objetivo de esta Tesis es el estudio y compilado de las propiedades más importantes de los operadores de Toeplitz en el espacio de Fock F^2_α el cual consiste de todas las funciones enteras en el plano complejo, cuadrado integrables con respecto a la medida Gaussiana. Pero sobre todo nos centráremos en los operadores de Toeplitz cuyo símbolo no es acotado. Esta parte está basada principalmente en [2] y [3]. Cuando el operador de Toeplitz tiene símbolo acotado entonces está bien definido sobre todo el espacio de Fock, pero cuando el símbolo no es acotado esto no necesariamente ocurre. Ahora bien, aunque el dominio del operador no sea todo el espacio de Fock, existen extensiones del mismo. En este trabajo estudiamos dos de sus extensiones.

La Proposición 2.3 de [2] juega un papel fundamental en este trabajo pues determina cuando un operador de Toeplitz es cerrado. Este resultado es imprescindible para nuestro segundo objetivo el cual consiste en dar condiciones necesarias y suficientes bajo las cuales un operador de Toeplitz con símbolo radial es cerrado. Por símbolo radial entendemos una función compleja φ que depende únicamente del módulo de la variable, es decir

$$\varphi(z) = \varphi(|z|).$$

En [1] encontramos que dada una función radial φ tal que para toda $n \in \mathbb{N}_0$, se tiene que

$$\int_{\mathbb{R}_+} |\varphi(r)| \exp(-r^2) r^n dr < \infty,$$

existe un operador unitario R del espacio de Fock sin peso al espacio de sucesiones l^2_+ tal que $RT_\varphi R^*$ es extendido por un operador de multiplicación actuando en l^2_+.

En este trabajo damos condiciones necesarias y suficientes para determinar cuando el operador $RT_\varphi R^*$ coincide con el operador de multiplicación mencionado arriba. En este caso el operador de Toeplitz con símbolo φ es cerrado pues el operador el operador de multiplicación es cerrado y la propiedad de que un operador sea cerrado se preserva bajo equivalencia unitaria.

Capítulo 1

Operadores lineales en espacios de Hilbert

En este capítulo se estudiarán algunas propiedades importantes de los operadores lineales no acotados definidos entre espacios de Hilbert. Siempre que hablemos de un operador lineal $T : \mathscr{D}(T) \subseteq \mathscr{H} \to \mathscr{K}$, asumiremos por defecto que $\mathscr{H}$ y $\mathscr{K}$ son espacios de Hilbert sobre $\mathbb{C}$. Solo en algunos casos se especificará que se trata de espacios de Banach o espacios normados. En este capítulo se estudian los operadores lineales cerrados, así como las condiciones para determinar cuando un operador lineal tiene cerradura. Otro tema importante en nuestro estudio el core un operador lineal y así como su relación con la cerradura de un operador lineal. Además incluimos otros enunciados interesantes que son necesarios en este trabajo. Es importante mencionar que los resultados de este capítulo están basados en [4].

1.1. Operadores lineales y sus extensiones

Sean $\mathscr{H}, \mathscr{K}$ espacios de Hilbert, $T : \mathscr{D}(T) \to \mathscr{K}$ un operador lineal, con $\mathscr{D}(T) \subseteq \mathscr{H}$ dominio de T. Decimos que T es acotado si existe un número real c tal que para todo $x \in \mathscr{D}(T)$ se tiene que,

$$\|T(x)\| \leq c\|x\|.$$

Es importante tener en cuenta que, aunque las normas se denoten de la misma manera, estas corresponden a normas de espacios diferentes. Por lo tanto, aunque se utilice la misma notación por conveniencia, no se asume necesariamente que sean iguales. En este contexto, la norma a la izquierda se refiere a la norma definida en $\mathscr{K}$, mientras que la norma a la derecha se refiere a la definida en $\mathscr{H}$.

Sean $T : \mathscr{D}(T) \subseteq \mathscr{H} \to \mathscr{K}$ y $T_1 : \mathscr{D}(T_1) \subseteq \mathscr{H} \to \mathscr{K}$ dos operadores lineales. Decimos que T_1 es una extensión del operador T si $\mathscr{D}(T) \subseteq \mathscr{D}(T_1)$ y $T = T_1|_{\mathscr{D}(T)}$ y se denotará por

$$T \subseteq T_1.$$

El operador T_1 es una extensión propia de T si $\mathscr{D}(T) \subsetneq \mathscr{D}(T_1)$.

Veamos el siguiente ejemplo de una extensión propia de un operador.

Consideremos el espacio de sucesiones complejas

$$\ell^2_{\mathbb{N}} = \left\{ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty \right\}.$$

Este espacio es un espacio de Hilbert con el producto interno

$$\langle (x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{y_n}.$$

Sea $T : \mathscr{D}(T) \subseteq \ell^2_{\mathbb{N}} \to \ell^2_{\mathbb{N}}$ el operador lineal cuyo dominio $\mathscr{D}(T)$ consiste de todas las sucesiones $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con un número finito de términos diferentes de cero, y $T(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (nx_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Sea $T_1 : \mathscr{D}(T_1) \to \mathscr{H}$, donde

$$\mathscr{D}(T_1) = \left\{ (z_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2_{\mathbb{N}} : \sum_{n=1}^{\infty} n^2 |z_n|^2 < \infty \right\}$$

y

$$T_1(z_n)_{n\in\mathbb{N}} = (nz_n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Es claro que T_1 es una extensión de T, más aún es una extensión propia de T pues $\left(\frac{1}{n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ pertenece a $\mathscr{D}(T_1)$ pero no pertenece a $\mathscr{D}(T)$.

1.2. Operador adjunto

Sea $T : \mathscr{D}(T) \subseteq \mathscr{H} \to \mathscr{H}$ un operador lineal densamente definido, entonces el operador adjunto $T^* : \mathscr{D}(T^*) \to \mathscr{H}$ de T es definido como sigue

$$\mathscr{D}(T^*) = \{ y \in \mathscr{H} : \quad \text{existe } y^* \in \mathscr{H}, \text{ tal que } \langle Tx, y \rangle \ = \ \langle x, y^* \rangle \ \forall \ x \in \mathscr{D}(T) \}.$$

Para cada $y \in \mathscr{D}(T^*)$ el operador adjunto T^* está definido en términos de y^* por

$$T^*(y) = y^*. \tag{1.1}$$

El operador adjunto solo tiene sentido cuando el operador lineal T está densamente definido. En efecto, si T no es densamente definido entonces $\mathscr{D}(T)^\perp \neq \{0\}$ y, si $v \in \mathscr{D}(T)^\perp \setminus \{0\}$, para toda $x \in \mathscr{D}(T)$ se tiene que

$$\langle T(x), y \rangle = \langle x, y^* + v \rangle.$$

Por lo cual la correspondencia (1.1) no está bien definida. Por otro lado, si $\mathscr{D}(T)$ es denso en $\mathscr{H}$ entonces $\mathscr{D}(T)^\perp = \{0\}$, por lo cual, si existe $y_1^* \in H$ tal que

$$\langle x, y_1^* \rangle = \langle T(x), y \rangle \ \forall x \in \mathscr{D}(T),$$

entonces
$$\langle x, y_1^* \rangle = \langle T(x), y \rangle = \langle x, y^* \rangle \quad \forall x \in \mathscr{D}(T).$$
Por lo tanto $y^* = y_1^*$.

Notemos que si T es un densamente definido entonces T^* existe, pues para $x \in \mathscr{D}(T)$ se tiene que
$$\langle T(x), 0 \rangle = \langle x, 0 \rangle = 0,$$
Entonces
$$\{y \in \mathscr{H} : \quad \text{existe } y^* \in \mathscr{H}, \text{ tal que } \langle Tx, y \rangle \ = \ \langle x, y^* \rangle \ \forall \ x \in \mathscr{D}(T)\} \neq \emptyset.$$

1.3. Operadores lineales cerrados

El concepto de operador cerrado es fundamental en este estudio. En esencia, un operador cerrado ”preserva la convergencia” entre espacios normados.
Sean $\mathscr{H}, \mathscr{K}$ espacios normados. Se define en $\mathscr{H} \times \mathscr{K}$ la norma
$$\|(x, y)\| = \sqrt{\|x\|_{\mathscr{H}}^2 + \|y\|_{\mathscr{K}}^2}.$$
Observe que una sucesión (x_n, y_n) en $\mathscr{H} \times \mathscr{K}$ converge a $(x, y) \in \mathscr{H} \times \mathscr{K}$ si y solo si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a x y $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a y. Además; si $\mathscr{H}, \mathscr{K}$ son espacios de Banach, entonces también lo es $\mathscr{H} \times \mathscr{K}$.

Un operador lineal $T : \mathscr{D}(T) \subseteq \mathscr{H} \to \mathscr{K}$, se llama cerrado si su gráfica,
$$\mathcal{G}(T) = \{(x, T(x)) : x \in \mathscr{D}(T)\},$$
es un subespacio cerrado de $\mathscr{H} \times \mathscr{K}$.

Notemos que la condición ”$\mathcal{G}(T)$ es cerrada”se puede escribir en términos de sucesiones de la siguiente manera: para cada sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathscr{H}$ y $(x, y) \in \mathscr{H} \times \mathscr{K}$ tales que
$$x = \lim_{n\to\infty} x_n \quad \text{y} \quad y = \lim_{n\to\infty} T(x_n),$$
se tiene que $(x, y) \in \mathcal{G}(T)$; esto es, $x \in \mathscr{D}(T)$ y $y = T(x)$.

El siguiente teorema se encuentra en [4] y lo incluimos aquí junto con su demostración por completez.

Teorema 1.3.1. Sean $\mathscr{H}, \mathscr{K}$ espacios de Banach y $T : \mathscr{D}(T) \subseteq \mathscr{H} \to \mathscr{K}$ un operador lineal, entonces

a) Si T es cerrado y $\mathscr{D}(T)$ es cerrado, entonces T es acotado.

b) Sea T acotado, entonces T es cerrado si y solo si $\mathscr{D}(T)$ es cerrado.

Demostración. Si T es un operador cerrado con dominio $\mathscr{D}(T)$ cerrado entonces; por el Teorema de la Gráfica Cerrada, el operador T es acotado.
Para el inciso b) primeramente supongamos que T es cerrado. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathscr{D}(T)$ que converge a $x \in \mathscr{H}$, puesto que T es acotado y $\mathscr{K}$ es completo entonces $T(x_n)$ converge a algún elemento $y \in \mathscr{K}$. Debido a que T es un operador cerrado se tiene que $(x, y) \in \mathcal{G}(T)$. En particular, $x \in \mathscr{D}(T)$ y por ello $\mathscr{D}(T)$ es cerrado. Por otro lado, supongamos que $\mathscr{D}(T)$ es cerrado y sean $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathscr{D}(T)$ y $(x, y) \in \mathscr{H} \times \mathscr{K}$ tales que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a x y $(T(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge a y. Puesto que T es acotado entonces es continuo y por ello $y = T(x)$. Así T es un operador cerrado. $\square$

El siguiente teorema muestra que, cuando un operador lineal es densamente definido, su operador adjunto es siempre cerrado.

Proposición 1.3.1. [4] Sea $T : \mathscr{D}(T) \subseteq \mathscr{H} \to \mathscr{H}$ un operador densamente definido, entonces el operador adjunto T^* es cerrado.

Demostración. Sea $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathscr{D}(T^*)$ tal que ambos límites

$$y = \lim_{n\to\infty} y_n \quad \text{y} \quad z = \lim_{n\to\infty} T^*(y_n)$$

existen. Por la definición de T^* tenemos que

$$\langle T(x), y_n\rangle = \langle x, T^*(y_n)\rangle, \qquad \forall\ x \in \mathscr{D}(T),\ n \in \mathbb{N}.$$

Puesto que el producto interno es continuo se tiene que

$$\langle T(x), y\rangle = \langle x, z\rangle, \forall\ x \in \mathscr{D}(T).$$

Nuevamente por la definición de T^* se tiene que $y \in \mathscr{D}(T^*)$ y $z = T^*y$. Por lo tanto T^* es cerrado. $\square$

En este trabajo denotaremos por $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$.
Sea $p \geq 1$ y consideremos el espacio de sucesiones complejas

$$\ell^p_+ = \left\{ (x_n)_{n\in\mathbb{N}_0} : \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^p < \infty \right\}$$

con la siguiente norma

$$\|(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}\|_p = \left(\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Sea $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ una sucesión de números complejos y $M_a : \mathscr{D}(M_a) \subseteq \ell^p_+ \to \ell^p_+$ el operador de multiplicación con símbolo a. Esto es,

$$\mathscr{D}(M_a) = \left\{ (x_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \in \ell^p_+ : \sum_{n=0}^{\infty} |a_n x_n|^p < \infty \right\}$$

y

$$M_a(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0} = (a_n x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}.$$

Este es un ejemplo de un operador cerrado el cual tendrá relevancia en capítulos futuros.

Proposición 1.3.2. El operador de multiplicación $M_a : \mathscr{D}(M_a) \subseteq \ell^p_+ \to \ell^p_+$, es cerrado.

Demostración. Sea $(v_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ una sucesión en $\mathscr{D}(M_a)$ y $w = (w_k)_{k\in\mathbb{N}_0}, y = (y_k)_{k\in\mathbb{N}_0} \in \ell^p_+$ tales que

$$w = \lim_{n\to\infty} v_n \quad \text{y} \quad y = \lim_{n\to\infty} M_a(v_n) = \lim_{n\to\infty} (a_k v_{n,k})_{k\in\mathbb{N}_0}, \text{ para } v_n = (v_{n,k})_{k\in\mathbb{N}_0}.$$

Para todo $k \in \mathbb{N}_0$ se tiene que

$$|v_{n,k} - w_k| \leq \|v_n - w\|_p \xrightarrow{n\to\infty} 0 \quad \text{y} \quad |a_k v_{n,k} - y_k| \leq \|a v_n - y\|_p \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Por lo cual

$$w_k = \lim_{n\to\infty} v_{n,k} \quad \text{y} \quad y_k = \lim_{n\to\infty} a_k v_{n,k}.$$

Entonces para todo $k \in \mathbb{N}_0$

$$y_k = \lim_{n\to\infty} a_k v_{n,k} = a_k \lim_{n\to\infty} v_{n,k} = a_k w_k.$$

Por lo tanto $w \in \mathscr{D}(M_a)$ y $y = M_a(w)$. Por ende el operador M_a es cerrado. □

Consideremos dos espacios de Hilbert $\mathscr{H}, \mathscr{K}$ y $T : \mathscr{D}(T) \subseteq \mathscr{H} \to \mathscr{K}$ un operador lineal. Notemos que podemos dotar a $\mathscr{D}(T)$ con el siguiente producto interno

$$\langle x, y\rangle_T = \langle x, y\rangle + \langle T(x), T(y)\rangle.$$

El cual produce la siguiente norma

$$\|x\|_T = \sqrt{\|x\|^2 + \|T(x)\|^2}.$$

Una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $x \in \mathscr{D}(T)$ en el espacio $(\mathscr{D}(T), \|\cdot\|_T)$ si y solo si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a x es $\mathscr{H}$ y $(T(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $T(x)$ en $\mathscr{K}$.

Proposición 1.3.3. Sea $T : \mathscr{D}(T) \subseteq \mathscr{H} \to \mathscr{K}$ un operador lineal. Entonces T es cerrado si y solo si el espacio $(\mathscr{D}(T), \|\cdot\|_T)$ es de Hilbert.

Demostración. Supongamos que T es cerrado y sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $(\mathscr{D}(T), \|\cdot\|_T)$. Entonces $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(T(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ son sucesiones de Cauchy en $\mathscr{H}$ y $\mathscr{K}$ respectivamente. Luego, existen $x \in \mathscr{H}$ y $y \in \mathscr{K}$ tales que

$$x = \lim_{n\to\infty} x_n \quad \text{y} \quad y = \lim_{n\to\infty} T(x_n).$$

Puesto que T es cerrado $x \in \mathscr{D}(T)$ y $T(x) = y$. Por lo cual $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a x en $(\mathscr{D}(T), \|\cdot\|_T)$.

Ahora supongamos que $(\mathscr{D}(T), \|\cdot\|_T)$ es un espacio de Hilbert. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathscr{D}(T)$, $x \in \mathscr{H}$ y $y \in \mathscr{K}$, tales que

$$x = \lim_{n\to\infty} x_n \quad \text{y} \quad y = \lim_{n\to\infty} T(x_n).$$

Entonces la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en $(\mathscr{D}(T), \|\cdot\|_T)$. Así pues existe $x' \in \mathscr{D}(T)$ tal que la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a x' en $(\mathscr{D}(T), \|\cdot\|_T)$. Esto implica que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a x' en $\mathscr{H}$ y $(T(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $T(x')$ en $\mathscr{K}$. Por lo tanto $x = x'$ y $T(x) = y$, y por ello T es un operador cerrado. □

1.3.1. La cerradura de un operador lineal

Un operador lineal se llama cerrable si tiene una extensión lineal cerrada. Una extensión cerrada $\tilde{T}$ de un operador T se llama minimal si toda extensión lineal cerrada de T es también extensión cerrada de $\tilde{T}$. En este caso $\tilde{T}$ se llama la cerradura de T y se denota por $\overline{T}$.

Ejemplo 1.3.1. Consideremos el espacio de sucesiones $\ell^2_{\mathbb{N}}$ y $T : \mathscr{D}(T) \subseteq \ell^2_{\mathbb{N}} \to \ell^2_{\mathbb{N}}$, donde $\mathscr{D}(T)$ consiste de las sucesiones con un número finito de términos diferentes de cero y

$$T(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (nx_n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Notemos que T es un operador lineal el cual no es acotado. En efecto, dado $k \in \mathbb{N}$ definimos $e_k = (e_{k,n})_{n\in\mathbb{N}}$ donde $e_{k,n} = 1$ si $k = n$ y 0 en caso contrario. Luego

$$\|Te_k\| = k \quad \text{y} \quad \|e_k\| = 1 \qquad \forall\ k \in \mathbb{N}.$$

Para cada $k \in \mathbb{N}$ sea $x_k = (x_{k,n})_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{D}(T)$ con

$$x_{k,n} = \begin{cases} \frac{1}{n2^n} & \text{si } n \le k, \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Sea $y = \left(\frac{1}{n2^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ y $z = \left(\frac{1}{2^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, notemos que

$$y = \lim_{k\to\infty} x_k \quad \text{y} \quad z = \lim_{k\to\infty} T(x_k).$$

Puesto que $y \notin \mathscr{D}(T)$ tenemos que el operador T no es cerrado.

El operador anterior no es un operador de multiplicación en el sentido que definimos antes, pues su dominio es más pequeño. Ahora bien, si definimos la sucesión $a := (n)_{n\in\mathbb{N}}$, es claro que el operador de multiplicación $M_a : \mathscr{D}(M_a) = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} : (a_n x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2_{\mathbb{N}}\} \subseteq \ell^2_{\mathbb{N}} \to \ell^2_{\mathbb{N}}$ es extensión de T. Más aún, por la Proposición 1.3.2 es una extensión cerrada. Sea S una extensión cerrada de T y $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{D}(M_a)$. Para cada $k \in \mathbb{N}$ definimos $w_k = (w_{k,n})_{n\in\mathbb{N}}$ con $w_{k,n} = x_n$ si $n \le k$ y 0 en caso contrario. Entonces $w_k \in \mathscr{D}(T) \subset \mathscr{D}(S)$ y $(w_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge a x. Además notemos que

$$S(w_k) = T(w_k) = (nw_{k,n})_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow{k\to\infty} (nx_n)_{n\in\mathbb{N}} = M_a(x).$$

Puesto que S es cerrado entonces $x \in \mathscr{D}(S)$ y $S(x) = M_a(x)$. Así S es una extensión de M_a lo cual implica que M_a es la cerradura de T.

La siguiente proposición proporciona la forma de calcular la cerradura de un operador T cuando este es cerrable.

Proposición 1.3.4. Sea $T : \mathscr{D}(T) \subseteq \mathscr{H} \to \mathscr{K}$ un operador lineal cerrable. Sea $T' : \mathscr{D}(T') \subseteq \mathscr{H} \to \mathscr{K}$, definido de la siguiente manera

$$\mathscr{D}(T') = \{x \in \mathscr{H} : \text{ existe una sucesión } (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ en } \mathscr{D}(T) \text{ tal que } x = \lim_{n\to\infty} x_n \text{ y existe } \lim_{n\to\infty} T(x_n)\},$$

y

$$T'(x) = \lim_{n\to\infty} T(x_n).$$

Entonces $\overline{T}$ existe, más aún $\overline{T} = T'$.

Demostración. Puesto que T es cerrable podemos elegir una extensión cerrada de T, denotada por $\tilde{T}$. Usando esta extensión demostraremos que T' está bien definida. En efecto, sea $x \in \mathscr{D}(T')$ y supongamos que existen dos sucesiones $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathscr{D}(T)$ tales que

$$x = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} v_n,$$

y las sucesiones $(T(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ y $(T(v_n))_{n\in\mathbb{N}}$ convergen en $\mathscr{K}$. Puesto que $\tilde{T}$ es extensión cerrada de T, se tiene que

$$x \in \mathscr{D}(\tilde{T}) \quad \text{y} \quad \tilde{T}(x) = \lim_{n\to\infty} T(x_n) = \lim_{n\to\infty} T(v_n).$$

Esto es, el límite $\lim_{n\to\infty} T(x_n)$ no depende de la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que converja a x. Así pues T' está bien definido y es una extensión de T. De la definición de T' es claro que

$$\mathcal{G}(T') = \overline{\mathcal{G}(T)}.$$

Por lo que T' es un operador cerrado, además puesto que $\tilde{T}$ es extensión cerrada de T. Entonces

$$\mathcal{G}(T') \subseteq \mathcal{G}(\tilde{T})$$

y al ser $\tilde{T}$ arbitrario se sigue que $\overline{T} = T'$. □

Corolario 1.3.1. Sea $T : \mathscr{D}(T) \subseteq \mathscr{H} \to \mathscr{K}$ un operador lineal cerrable. Entonces

$$\mathcal{G}(\overline{T}) = \overline{\mathcal{G}(T)}.$$

En la siguiente proposición damos una caracterización de los operadores lineales cerrables.

Proposición 1.3.5. Sea $T : \mathscr{D}(T) \subseteq \mathscr{H} \to \mathscr{K}$ un operador lineal. La cerradura de T existe si y solo si para toda sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathscr{D}(T)$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0 \quad \text{y existe} \quad y = \lim_{n\to\infty} T(x_n).$$

Entonces $y = 0$

Demostración. Si $\overline{T}$ existe y $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y y cumplen la hipótesis de la proposición entonces

$$0 = \overline{T}(0) = \lim_{n\to\infty} T(x_n) = y.$$

Supongamos que se cumplen las condiciones para demostrar la otra dirección. Sean $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dos sucesiones en $\mathscr{D}(T)$ que tienen el mismo límite y además los límites

$$y_1 = \lim_{n\to\infty} T(x_n), \quad y_2 = \lim_{n\to\infty} T(v_n),$$

existen en $\mathscr{K}$. Entonces

$$0 = \lim_{n\to\infty} (x_n - v_n) \quad \text{y} \quad \lim_{n\to\infty} T(x_n - v_n) = y_1 - y_2.$$

Por hipótesis

$$y_1 - y_2 = 0.$$

Por lo que si dos sucesiones convergen al mismo límite, las sucesiones formadas por sus imágenes bajo T tienen el mismo límite. De esta forma el operador T' de la Proposición 1.3.4 está bien definido y $\overline{T} = T'$. □

Sea $T : \mathscr{D}(T) \subseteq \mathscr{H} \to \mathscr{K}$ un operador lineal. Decimos que un subespacio $\mathscr{D} \subseteq \mathscr{D}(T)$ es un core de T si $T\big|_{\mathscr{D}}$ es cerrable y

$$T \subseteq \overline{T\big|_{\mathscr{D}}}.$$

Lema 1.3.1. Sea $T : \mathscr{D}(T) \subseteq \mathscr{H} \to \mathscr{K}$ un operador cerrado y $\mathscr{D}$ un subespacio de $\mathscr{H}$ tal que es denso en $(\mathscr{D}(T), \|\cdot\|_T)$, entonces $\mathscr{D}$ es core para T y se tiene que

$$\overline{T\big|_{\mathscr{D}}} = T.$$

Demostración. Considere el operador $T_1 = T\big|_{\mathscr{D}}$. Puesto que T cerrado y

$$T_1 \subseteq T$$

T_1 es un operador cerrable y, de acuerdo la Proposición 1.3.4, la cerradura de T_1 está dada por

$$\mathscr{D}(\overline{T_1}) = \{x \in \mathscr{H} : \text{ existe } (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ en } \mathscr{D} \text{ tal que } x = \lim_{n\to\infty} x_n \text{ y } \lim_{n\to\infty} T(x_n) \text{ existe } \},$$

y

$$\overline{T_1}(x) = \lim_{n\to\infty} T(x_n).$$

Dado $v \in \mathscr{D}(T)$ existe $(v_n)_{n\in\mathscr{D}}$ en $\mathscr{D}$ tal que la sucesión $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a v en $\mathscr{H}$ y $(T(v_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $T(v)$ en $\mathscr{K}$. Por consiguiente $v \in \mathscr{D}(\overline{T_1})$ y $T(v) = \overline{T_1}(v)$. Así pues $T \subseteq T_1$, y puesto que T es extensión cerrada de T_1 se tiene que $\overline{T_1} \subseteq T$. Por lo tanto $\overline{T_1} = T$. □

Proposición 1.3.6. [3] Sea $\mathscr{H}$, $\mathscr{K}$ y $\mathscr{L}$ espacios de Hilbert, y sean $T_1 : \mathscr{D}(T_1) \subseteq \mathscr{H} \to \mathscr{K}$ y $T_2 : \mathscr{D}(T_2) \subseteq \mathscr{H} \to \mathscr{L}$, dos operadores lineales. Supongamos que T_2 es cerrado, que $\mathscr{D}(T_1) = \mathscr{D}(T_2)$ y que $\mathscr{D}$ es un core para T_1. Entonces T_1 es cerrado si y solo si existen $\alpha, \beta \geq 0$ tales que

$$\|v\|_{T_1} \leq \alpha \|v\|_{T_2}, \tag{1.2}$$

$$\|v\|_{T_2} \leq \beta \|v\|_{T_1} \tag{1.3}$$

para todo $v \in \mathscr{D}$. Si se cumple que

$$\|T_1 v\| \leq \|T_2 v\|, \quad \forall\, v \in \mathscr{D}$$

entonces (1.3) es condición suficiente para que T_1 sea cerrado.
Por otro lado, si T_1 es cerrado, $\mathscr{D}$ es un core para T_2.

Demostración. Supongamos que T_1 es cerrado. Sea $\mathscr{X} = \mathscr{D}(T_1) = \mathscr{D}(T_2)$, por el Corolario 1.3.3, $(\mathscr{X}, \|\cdot\|_{T_1})$, $(\mathscr{X}, \|\cdot\|_{T_2})$ son espacios de Hilbert. Consideremos el operador lineal identidad $I : (\mathscr{X}, \|\cdot\|_{T_1}) \to (\mathscr{X}, \|\cdot\|_{T_2})$ dado por $I(x) = x$. Este operador es cerrado pues dada una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $(\mathscr{X}, \|\cdot\|_{T_1})$, $x, y \in \mathscr{X}$ tales que

$$x = \lim_{n\to\infty} x_n \quad \text{y} \quad y = \lim_{n\to\infty} I(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_n$$

en $(\mathscr{X}, \|\cdot\|_{T_1})$ y $(\mathscr{X}, \|\cdot\|_{T_2})$ respectivamente. Entonces $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a x y y en $\mathscr{H}$. Esto implica que $x = y$ y entonces $I(x) = y = \lim_{n\to\infty} I(x_n)$. Como consecuencia el operador I es cerrado. Similarmente el operador identidad de $(\mathscr{X}, \|\cdot\|_{T_2})$ a $(\mathscr{X}, \|\cdot\|_{T_1})$ es cerrado. Por el Teorema 1.3.1 inciso a) se tiene que el operador I es acotado, por lo cual se cumplen (1.2) y (1.3).

Ahora supongamos que se cumple (1.2) y (1.3). Sea $v \in \mathscr{X} \subseteq \mathscr{D}(\overline{T_1|_{\mathscr{D}}})$, por la Proposición 1.3.4 existe $(v_n)_{n\in\mathscr{D}}$ en $\mathscr{D}$ tal que

$$v = \lim_{n\to\infty} v_n \quad \text{y} \quad T_1(v) = \overline{T|_{\mathscr{D}}}(v) = \lim_{n\to\infty} T_1(v_n)$$

Así pues $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a v en $(\mathscr{X}, \|\cdot\|_{T_1})$. Entonces por (1.3), $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en $(\mathscr{X}, \|\cdot\|_{T_2})$. Puesto que $(\mathscr{X}, \|\cdot\|_{T_2})$ es de Hilbert ya que T_2 es cerrado, entonces $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en $(\mathscr{X}, \|\cdot\|_{T_2})$, nuevamente por (1.3) se tiene que

$$\|v - \lim_{n\to\infty} v_n\|_{T_2} = \lim_{n\to\infty} \|v - v_n\|_{T_2} = \beta \lim_{n\to\infty} \|v - v_n\|_{T_1} = 0.$$

Por lo cual $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a v en $(\mathscr{X}, \|\cdot\|_{T_2})$. Además se tiene que

$$\|v\|_{T_1} = \lim_{n\to\infty} \|v_n\|_{T_1} \leq \alpha \lim_{n\to\infty} \|v_n\|_{T_2} = \alpha \|v\|_{T_2}$$

$$\|v\|_{T_2} = \lim_{n\to\infty} \|v_n\|_{T_2} \leq \beta \lim_{n\to\infty} \|v_n\|_{T_1} = \beta \|v\|_{T_2}$$

Por lo tanto (1.2), (1.3) se cumplen para todo $v \in \mathscr{X}$. Puesto que $(\mathscr{X}, \|\cdot\|_{T_2})$ es un espacio de Hilbert y $|\cdot\|_{T_1}$ y $\|\cdot\|_{T_2}$ son equivalentes entonces $(\mathscr{X}, \|\cdot\|_{T_1})$ también es un espacio de Hilbert,

por lo cual T_1 es cerrado.
Si $\|T_1 v\| \leq \|T_2 v\|$, para todo $v \in \mathscr{D}$ entonces (1.2) se cumple para $\alpha = 1$.
Finalmente si T_1 es cerrado, entonces
$$T_1 = \overline{T\big|_{\mathscr{D}}}.$$
Por la Proposición 1.3.4, $\mathscr{D}$ es denso en $(\mathscr{X}, \|\cdot\|_{T_1})$ y por lo tanto también en $(\mathscr{X}, \|\cdot\|_{T_2})$, por el Lema 1.3.1, $\mathscr{D}$ es core de T_2.

□

La siguiente proposición garantiza que la propiedad de que un operador sea cerrado se preserva bajo equivalencia unitaria.

Proposición 1.3.7. Sea $T : \mathscr{D}(T) \subseteq \mathscr{H} \to \mathscr{H}$ un operador lineal y $U : \mathscr{H} \to \mathscr{K}$ un operador lineal unitario, entonces T es cerrado si y solo si UTU^{-1} es cerrado.

Demostración. Notemos que $\mathscr{D}(UTU^{-1}) = U(\mathscr{D}(T))$, pues si $x \in \mathscr{D}(UTU^{-1})$ entonces $U^{-1}(x) \in \mathscr{D}(T)$ por lo cual $x = UU^{-1}(x)$. Si $x \in U(\mathscr{D}(T))$ entonces $x \in \mathscr{D}(UTU^{-1})$ pues $U^{-1}(x) \in \mathscr{D}(T)$.
Primeramente supongamos que T es cerrada. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $U(\mathscr{D}(T))$ que converge a $x \in \mathscr{K}$ y $(UTU^{-1}(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $y \in \mathscr{K}$. Puesto que U es unitaria entonces $(U^{-1}(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $U^{-1}(x)$ y puesto que $x_n \in U(\mathscr{D}(T)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ entonces $U^{-1}(x_n) \in \mathscr{D}(T)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Nuevamente puesto que U es unitaria entonces
$$\|TU^{-1}(x_n) - U^{-1}(y)\| = \|UTU^{-1}(x_n) - y\|$$
por lo cual $(TU^{-1}(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $U^{-1}(y)$. Puesto que T es cerrado entonces
$$U^{-1}(x) \in \mathscr{D}(T) \qquad \text{y} \qquad T(U^{-1}(x)) = U^{-1}(y)$$
Por lo cual $x \in U(\mathscr{D}(T))$ y $UTU^{-1}(x) = y$. Por lo tanto UTU^{-1} es cerrado.
Ahora supongamos que $UTU^{-1} : U(\mathscr{D}(T)) \to \mathscr{H}$ es cerrado. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathscr{D}(T)$ que converge a $x \in \mathscr{H}$ y $(T(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge a y, Puesto que U es unitario entonces $U(x_n)$ converge a $U(x)$ y $UT(x_n)$ converge a $U(y)$. Luego $UTU^{-1}(U(x_n))$ converge a $U(y)$. Puesto que UTU^{-1} es cerrado entonces $U(x) \in U(\mathscr{D}(T))$ y $UTU^{-1}(U(x))) = U(y)$, por lo cual $x \in \mathscr{D}(T)$ y $T(x) = y$. Por lo tanto T es cerrado. □

Capítulo 2

El espacio de Fock

Este capítulo está dedicado a estudiar las propiedades más importantes del espacio de Fock en el plano complejo. Demostraremos que es un subespacio cerrado del espacio de Hilbert $L^2(\mathbb{C}, d\lambda_\alpha)$, donde $\mathrm{d}\,\lambda_\alpha$ es la medida Gaussiana con peso. Mostraremos además que el espacio de Fock es un espacio de Hilbert con núcleo reproductor. Los resultados que aquí presentamos están basados en [8].

2.1. El espacio de Fock F_α^2

Sea $\alpha > 0$, consideremos la medida Gaussiana

$$\mathrm{d}\,\lambda_\alpha(z) = \frac{\alpha}{\pi}\exp(-\alpha|z|^2)\,\mathrm{dA}(z),$$

donde dA es la medida de área Euclidiana en el plano complejo $\mathbb{C}$.

La medida $\mathrm{d}\,\lambda_\alpha$ es una medida de probabilidad pues

$$\int_{\mathbb{C}} \frac{\alpha}{\pi}\exp(-\alpha|z|^2)\,\mathrm{dA}(z) = \frac{\alpha}{\pi}\int_0^\infty\int_0^{2\pi}\exp(-\alpha r^2)r\,dr\,d\theta = 2\alpha\int_0^\infty \exp(-\alpha r^2)r\,dr = 1.$$

El espacio de Fock, que denotaremos por F_α^2, consiste de todas las funciones enteras en el espacio de Hilbert $L^2(\mathbb{C}, d\lambda_\alpha)$. Este último espacio tiene el producto interno

$$\langle f, g\rangle = \int_{\mathbb{C}} f(z)\overline{g(z)}\,\mathrm{d}\,\lambda_\alpha(z) = \frac{\alpha}{\pi}\int_{\mathbb{C}} f(z)\overline{g(z)}\exp(-\alpha|z|^2)\,\mathrm{dA}(z).$$

Uno de los objetivos de este capítulo es demostrar que el espacio de Fock es subespacio cerrado de $L^2(\mathbb{C}, d\lambda_\alpha)$ y, por consiguiente, es un espacio de Hilbert.

Proposición 2.1.1. Sea f una función holomorfa en un conjunto abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$. Sean $w \in \Omega$ y $R > 0$ tales que $\overline{B(w,R)} \subseteq \Omega$, entonces

$$|f(w)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(w + R \ \exp(i\theta)| d\theta. \tag{2.1}$$

Demostración. Por la fórmula integral de Cauchy para la circunferencia se tiene que

$$\begin{aligned} f(w) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{B(w,R)} \frac{f(z)}{z-w} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(w + R\exp(i\theta))Ri \exp i\theta}{w + R\exp(i\theta) - w} d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(w + R\exp(i\theta)) d\theta \,. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$|f(w)| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(w + R\exp(i\theta)) d\theta \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(w + R\exp(i\theta))| d\theta.$$

□

Sea $w \in \mathbb{C}$ y $R > 0$ tal que se cumplen las condiciones de la proposición anterior. Si multiplicamos por $r > 0$ ambos lados de la desigualdad (2.1) e integramos de 0 a R con respecto a la variable r obtenemos lo siguiente

$$|f(w)| \leq \frac{1}{\pi R^2} \int_{B(w,R)} |f(z)| \,\mathrm{dA}(z).$$

Proposición 2.1.2. Dado $R > 0$, existe $C_R > 0$ tal que para todo $w \in B(0,R)$ y para todo $f \in F^2_\alpha$

$$|f(w)| \leq C_R \|f\|.$$

Demostración. Sea $w \in B(0,R)$, entonces

$$
\begin{aligned}
|f(w)| &\leq \frac{1}{\pi R^2} \int\limits_{B(w,R)} |f(z)|\, \mathrm{dA}(z) \\
&= \frac{1}{\sqrt{\alpha\pi} R^2} \int\limits_{B(w,R)} \exp\left(\frac{\alpha|z|^2}{2}\right) \left(\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} |f(z)| \exp\left(-\frac{\alpha|z|^2}{2}\right)\right) \mathrm{dA}(z) \\
&\leq \frac{1}{\sqrt{\alpha\pi} R^2} \left(\int\limits_{B(w,R)} \exp(\alpha|z|^2) dA(z)\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int\limits_{B(w,R)} \frac{\alpha}{\pi} |f(z)|^2 \exp(-\alpha|z|^2)\, \mathrm{dA}(z)\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \frac{1}{\sqrt{\alpha\pi} R^2} \left(\int\limits_{B(0,2R)} \exp(\alpha|z|^2) dA(z)\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int\limits_{\mathbb{C}} \frac{\alpha}{\pi} |f(z)|^2 \exp(-\alpha|z|^2)\, \mathrm{dA}(z)\right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}
$$

Entonces, definiendo C_R como sigue

$$
C_R := \frac{1}{\sqrt{\alpha\pi} R^2} \left(\int\limits_{B(0,2R)} \exp(\alpha|z|^2) dA(z)\right)^{\frac{1}{2}},
$$

se tiene que

$$
|f(w)| \leq C_R \|f\|.
$$

□

Como consecuencia de esta última proposición se obtiene un resultado muy importante: los funcionales de evaluación son acotados en F^2_α.

Corolario 2.1.1. Dado $w \in \mathbb{C}$ existe una constante C_w, que solamente depende de w, tal que

$$
|f(w)| \leq C_w \|f\|
$$

para todo $f \in F^2_\alpha$.

Demostración. Basta tomar $R = 2|w|$ en la proposición anterior. □

De lo anterior se sigue que dado un conjunto compacto $K \subset \mathbb{C}$, existe una constante $C_k > 0$, que solamente depende de K, tal que

$$
\sup\{|f(z)| : z \in K\} \leq C_K \|f\|
$$

para todo $f \in F^2_\alpha$.

Proposición 2.1.3. El espacio de F^2_α es cerrado.

Demostración. Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en F^2_α que converge a f en $\in L^2(\mathbb{C}, d\lambda_\alpha)$. Sea $K \subset \mathbb{C}$ un conjunto compacto, entonces existe $C_K > 0$ tal que

$$\sup\{|f_m(z) - f_n(z)| : z \in K\} \leq C_K \|f_m - f_n\| \qquad \forall\ m, n \in \mathbb{N}.$$

Por el criterio de Cauchy para la convergencia uniforme de funciones se tiene que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente en K y; por el Teorema de convergencia de Weierstrass, la función límite puntual

$$g(z) := \lim_{n\to\infty} f_n(z), \quad z \in \mathbb{C}, \tag{2.2}$$

es una función entera y $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente en conjuntos compactos a la función g. Por otro lado, puesto que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a f, existe una función $\gamma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, estrictamente creciente tal que $(f_{\gamma(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge casi en todas partes a f. Así pues sea $E \subseteq \mathbb{C}$ tal que $(f_{\gamma(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge puntualmente a f en E y $\mathbb{C}\setminus E$ es de medida cero. Por (2.2) para todo conjunto compacto $K \subseteq E$ se tiene que

$$g(z) = \lim_{n\to\infty} f_{\gamma(n)}(z) = f(z) \quad \forall\ z \in K.$$

Por lo tanto $f \equiv g$ ctp y por ello la sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en F^2_α. Esto es, el espacio de Fock F^2_α es subespacio cerrado de $L^2(\mathbb{C}, d\lambda_\alpha)$. □

Para $n \in \mathbb{N}_0$ ($\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$) sea

$$e_n(z) = \sqrt{\frac{\alpha^n}{n!}} z^n.$$

Proposición 2.1.4. El conjunto $\{e_n : n \geq 0\}$ es una base ortonormal de F^2_α.

Demostración. Primeramente notemos que

$$\begin{aligned}
\|e_n\|^2 &= \int_{\mathbb{C}} |e_n(z)|^2 \, \mathrm{d}\,\lambda_\alpha(z) = \int_{\mathbb{C}} \frac{\alpha^n}{n!} |z|^{2n} \, \mathrm{d}\,\lambda_\alpha(z) = \frac{\alpha^{n+1}}{\pi n!} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} r^{2n+1} \exp(-\alpha r^2) d\theta dr \\
&= \frac{2\alpha^{n+1}}{n!} \frac{1}{2\alpha^{n+1}} \int_0^\infty \alpha^n r^{2n} \exp(-\alpha r^2) 2\alpha r dr = \frac{1}{n!} \int_0^\infty t^n \exp(-t) dt \\
&= \frac{1}{n!} \Gamma(n+1) = 1\,.
\end{aligned}$$

Sean m, n enteros no negativos distintos, entonces

$$\begin{aligned}\langle z^n, z^m\rangle &= \int_{\mathbb{C}} z^n \bar{z}^m \, \mathrm{d}\,\lambda_\alpha(z) = \frac{\alpha}{\pi}\int_0^\infty \int_0^{2\pi} r^n \exp(in\theta) r^m \exp(-im\theta)\exp(-\alpha r^2) r d\theta dr \\ &= \frac{\alpha}{\pi}\int_0^\infty \int_0^{2\pi} r^{n+m+1}\exp(i(n-m)\theta)\exp(-\alpha r^2) d\theta dr \\ &= \frac{\alpha}{\pi}\int_0^\infty \int_0^{2\pi} r^{n+m+1}\cos((n-m)\theta)\exp(-\alpha r^2) d\theta dr \\ &\quad + i\frac{\alpha}{\pi}\int_0^\infty \int_0^{2\pi} r^{n+m+1}\operatorname{sen}((n-m)\theta)\exp(-\alpha r^2) d\theta dr\,.\end{aligned}$$

Puesto que $n-m$ es un número entero distinto de cero se tiene que

$$\int_0^{2\pi} \cos((n-m)\theta))\; d\theta = \frac{\operatorname{sen}((n-m)2\pi)}{n-m} = 0, \qquad \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}((n-m)\theta)\; d\theta = \frac{1-\cos(2\pi(n-m))}{n-m} = 0.$$

Lo anterior implica que $\langle z_n, z_m\rangle = 0$ y por ello el conjunto $\{e_n : n \geq 0\}$ es ortonormal. A continuación se mostrará que $\{e_n : n \geq 0\}$ es un conjunto total; es decir, que su complemento ortogonal consiste únicamente de la función cero.
Sean $f \in F^2_\alpha$ y $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$\langle f, e_n\rangle = \lim_{R\to\infty} \int_{B(0,R)} f(z)\overline{e_n(z)}\, \mathrm{d}\,\lambda_\alpha(z).$$

Por el Teorema de Taylor se tiene que

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k.$$

converge en todo el plano complejo $\mathbb{C}$ y uniformemente en $\overline{B(0,R)}$ entonces

$$\int_{B(0,R)} f(z)\overline{e_n(z)}\, \mathrm{d}\,\lambda_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \int_{B(0,R)} z^k\overline{e_n(z)}\, \mathrm{d}\,\lambda_\alpha(z).$$

Usando coordenadas polares es fácil demostrar que

$$\int_{B(0,R)} z^k\overline{e_n(z)}\, \mathrm{d}\,\lambda_\alpha(z) = 0, \text{ para toda } k \neq n.$$

Por lo cual

$$\langle f, e_n \rangle = \lim_{R\to\infty} a_n \int\limits_{B(0,R)} z^n \overline{e_n(z)} \, \mathrm{d}\, \lambda_\alpha(z) = a_n \sqrt{\frac{n!}{\alpha^n}}.$$

Así pues, si $\langle f, e_n \rangle = 0$ para todo $n \geq 0$, entonces $a_n = 0$ para todo $n \geq 0$, por lo cual $f = 0$. En conclusión $\{e_n : n \geq 0\}$ es un conjunto ortonormal total y por lo tanto es una base ortonormal de F^2_α. □

Sea $w \in \mathbb{C}$ consideremos el funcional lineal $\varphi_w : F^2_\alpha \to \mathbb{C}$ dado por

$$\varphi_w(f) = f(w).$$

Por el Corolario 2.1.1, φ_w es acotado y, por el Teorema de Representación de Riesz, existe una única función $\mathrm{K}^\alpha_w \in F^2_\alpha$ tal que

$$\varphi_w(f) = f(w) = \langle f, \mathrm{K}^\alpha_w \rangle \qquad \forall\ f \in F^2_\alpha.$$

Definición 2.1.1. La función $\mathrm{K}_\alpha : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, dada por

$$\mathrm{K}_\alpha(z, w) = \mathrm{K}^\alpha_w(z), \qquad z, w \in \mathbb{C}$$

es llamada el núcleo reproductor de F^2_α.

El núcleo reproductor de un espacio de Hilbert con núcleo reproductor puede ser calculado utilizando una base ortonormal del espacio. La demostración del siguiente lema puede encontrarse en [6].

Lema 2.1.1. Sea $\mathscr{H}$ un espacio de Hilbert con núcleo reproductor K, si $\{e_s : s \in S\}$ es una base ortonormal para $\mathscr{H}$, entonces

$$\mathrm{K}(x, y) = \sum_{s\in S} e_s(x)\overline{e_s(y)}.$$

Proposición 2.1.5. El núcleo reproductor del espacio de Fock F^2_α está dado por

$$\mathrm{K}_\alpha(z, w) = \exp(\alpha z \overline{w}), \qquad z, w \in \mathbb{C}. \tag{2.3}$$

Demostración. Por la Proposición 2.1.4 y el Lema 2.1.1 se tiene que

$$\begin{aligned}\mathrm{K}_\alpha(z, w) &= \sum_{n=0}^{\infty} e_n(z)\overline{e_n(w)} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} z^n \overline{w}^n \\ &= \exp(\alpha z \overline{w})\,.\end{aligned}$$

□

Sea $z \in \mathbb{C}$, denotaremos por k_z^α al núcleo reproductor normalizado de F_α^2. Es decir,

$$\begin{aligned} k_z^\alpha(w) &= \frac{K_z^\alpha(w)}{\|K_z^\alpha\|} = \frac{K_z^\alpha(w)}{\sqrt{K_z^\alpha(z)}} = \frac{\exp(\alpha z\overline{w})}{\sqrt{\exp(\alpha|z|^2)}} \\ &= \exp\left(\alpha\overline{z}w - \frac{\alpha|z|^2}{2}\right). \end{aligned} \tag{2.4}$$

Ya hemos demostrado que F_α^2 es un subespacio cerrado de $L^2(\mathbb{C}, d\lambda_\alpha)$ y por ello la proyección ortogonal de $L^2(\mathbb{C}, d\lambda_\alpha)$ sobre F_α^2 existe.

Proposición 2.1.6. La proyección ortogonal

$$P_\alpha : L^2(\mathbb{C}, d\lambda_\alpha) \to F_\alpha^2$$

está dada por

$$P_\alpha f(z) = \int_{\mathbb{C}} f(w)\mathrm{K}_\alpha(z,w)\,\mathrm{d}\,\lambda_\alpha(w) = \int_{\mathbb{C}} f(w)\exp(\alpha z\overline{w})\,\mathrm{d}\,\lambda_\alpha(w), \tag{2.5}$$

para todo $f \in L^2(\mathbb{C}, d\lambda_\alpha)$ y $z \in \mathbb{C}$.

Demostración. Sea $f \in L^2(\mathbb{C}, d\lambda_\alpha)$ y $z \in \mathbb{C}$ entonces

$$\begin{aligned} P_\alpha f(z) &= \langle P_\alpha f, \mathrm{K}_z^\alpha\rangle = \langle f, P_\alpha \mathrm{K}_z^\alpha\rangle = \langle f, \mathrm{K}_z^\alpha\rangle = \int_{\mathbb{C}} f(w)\overline{K_z^\alpha(w)}\,\mathrm{d}\,\lambda_\alpha(w) \\ &= \int_{\mathbb{C}} f(w)\mathrm{K}_\alpha(z,w)\,\mathrm{d}\,\lambda_\alpha(w) = \int_{\mathbb{C}} f(w)\exp(\alpha z\overline{w})\,\mathrm{d}\,\lambda_\alpha(w)\,. \end{aligned}$$

□

Capítulo 3

Operadores de Toeplitz con símbolo acotado

Este capítulo está dedicado a estudiar las propiedades del operador de Toeplitz T_a definido en F^2_α y con símbolo a en $L^\infty(\mathbb{C}, d\lambda_\alpha)$. Puesto que el símbolo es acotado el operador de Toeplitz T_a está definido en F^2_α y es acotado. Esto último implica que el operador adjunto de T_a existe y está definido de manera natural. Este capítulo se centra en dar condiciones necesarias y suficientes para determinar cuando el operador de Toeplitz es compacto. Los resultados están basados en [8].

3.1. Operadores de Toeplitz

Sea $\varphi \in L^\infty(\mathbb{C}, d\lambda_\alpha)$, se define el operador de Toeplitz $T_\varphi : F^2_\alpha \to F^2_\alpha$ por

$$T_\varphi(f) = P_\alpha(\varphi f), \qquad f \in F^2_\alpha,$$

donde P_α está dada por (2.5) en la Proposición 2.1.6. Al operador anterior se le conoce como operador de Toeplitz con símbolo φ.

Observe que

$$\|T_\varphi(f)\| = \|P_\alpha(\varphi f)\| \leq \|\varphi f\| \leq \|\varphi\|_\infty \|f\|$$

lo cual implica que el operador T_φ es acotado.

Por otro lado; si f, g son funciones en F^2_α, entonces

$$\begin{aligned}\langle T_\varphi(f), g\rangle = \langle P_\alpha(\varphi f), g\rangle = \langle \varphi f, g\rangle = \int_{\mathbb{C}} \varphi(w) f(w)\overline{g(w)}\,\mathrm{d}\,\lambda_\alpha(w) = \int_{\mathbb{C}} f(w)\overline{\overline{\varphi(w)}g(w)}\,\mathrm{d}\,\lambda_\alpha(w)\\ = \langle f, \overline{\varphi} g\rangle = \langle P_\alpha(f), \overline{\varphi} g\rangle = \langle f, P_\alpha(\overline{\varphi} g)\rangle = \langle f, T_{\overline{\varphi}}(g)\rangle\,.\end{aligned}$$

Esto es, $T^*_\varphi = T_{\overline{\varphi}}$.

Más aún, si $\varphi \geq 0$ y $f \in F^2_\alpha$, se tiene que

$$\langle T_\varphi(f), f\rangle = \langle P_\alpha(\varphi f), f\rangle = \langle \varphi f, f\rangle = \int_{\mathbb{C}} \varphi(w)|f(w)|^2\,\mathrm{d}\,\lambda_\alpha(w) \geq 0,$$

implicando que el operador T_φ es positivo.

Por la Proposición 2.1.6 el operador de Toeplitz T_φ está dado por

$$T_\varphi f(z) = \int_{\mathbb{C}} \varphi(w) f(w) K_\alpha(z,w) \, \mathrm{d}\,\lambda_\alpha(w).$$

.

Proposición 3.1.1. ([8], Corolario 2.4) Sea $f \geq 0$ o $f \in L^1(\mathbb{C}, \mathrm{d}\,\lambda_\alpha)$. Entonces para todo $z \in \mathbb{C}$ se tiene que

$$\int_{\mathbb{C}} f(z \pm w) \, \mathrm{d}\,\lambda_\alpha(w) = \int_{\mathbb{C}} f(w) |k_z^\alpha(w)|^2 \, \mathrm{d}\,\lambda_\alpha(w)$$

y

$$\int_{\mathbb{C}} f(\pm(z-w)) |k_z^\alpha(w)|^2 \, \mathrm{d}\,\lambda_\alpha(w) = \int_{\mathbb{C}} f(w) \, \mathrm{d}\,\lambda_\alpha(w)$$

Demostración. Solo incluiremos la demostración de la segunda igualdad dado que le primera se encuentra demostrada en [8].

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{C}} f(\pm(z-w)) |k_z^\alpha(w)|^2 \, \mathrm{d}\,\lambda_\alpha(w) &= \frac{\alpha}{\pi} \int_{\mathbb{C}} f(\pm(z-w)) \exp(-\alpha|z|^2 + \alpha \bar{z} w + \alpha z \bar{w}) \exp(-\alpha|w|^2) \, \mathrm{dA}(w) \\
&= \frac{\alpha}{\pi} \int_{\mathbb{C}} f(\pm(z-w)) \exp(-\alpha|z-w|^2) \, \mathrm{dA}(w) \\
&= \int_{\mathbb{C}} f(w) \, \mathrm{d}\,\lambda_\alpha(w).
\end{aligned}$$

□

Proposición 3.1.2. ([8], Corolario 2.5) Sea $\alpha > 0$ y $\beta \in \mathbb{R}$, entonces

$$\int_{\mathbb{C}} |\exp(\beta w \overline{z})| \, \mathrm{d}\,\lambda_\alpha(w) = \exp\left(\frac{\beta^2 |z|^2}{4\alpha}\right) \qquad \forall\ z \in \mathbb{C}.$$

Demostración.

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{C}} |\exp(\beta w \overline{z})| \, \mathrm{d}\,\lambda_\alpha(w) &= \int_{\mathbb{C}} \exp(\mathrm{Re}(\beta w \overline{z})) \, \mathrm{d}\,\lambda_\alpha(w) = \int_{\mathbb{C}} \left| K_w^\alpha \left(\frac{\beta z}{2\alpha}\right) \right|^2 \mathrm{d}\,\lambda_\alpha(w) \\
&= \langle K^\alpha_{\frac{\beta z}{2\alpha}}, K^\alpha_{\frac{\beta z}{2\alpha}} \rangle = K_\alpha\left(\frac{\beta z}{2\alpha}, \frac{\beta z}{2\alpha}\right) = \exp\left(\alpha \frac{\beta z}{2\alpha} \frac{\beta \overline{z}}{2\alpha}\right) \\
&= \exp\left(\frac{\beta^2 |z|^2}{4\alpha}\right).
\end{aligned}$$

□

Corolario 3.1.1. Si $f \in L^\infty(\mathbb{C}, d\lambda_\alpha)$, entonces para todo $z \in \mathbb{C}$ se tiene que

$$|P_\alpha f(z)| \leq \|f\|_\infty \exp\left(\frac{\alpha|z|^2}{4}\right).$$

Demostración.

$$\begin{aligned}
|P_\alpha f(z)| = |\langle P_\alpha f, K_z\rangle| = |\langle f, K_z^\alpha\rangle| &= \left|\int_{\mathbb{C}} f(w)\overline{K_z^\alpha(w)}\,\mathrm{d}\,\lambda_\alpha(w)\right| \\
&\leq \int_{\mathbb{C}} |f(w)||K_w^\alpha(z)|\,\mathrm{d}\,\lambda_\alpha(z) \leq \|f\|_\infty \int_{\mathbb{C}} |\exp(\alpha w\overline{z})|\,\mathrm{d}\,\lambda_\alpha(w) \\
&= \|f\|_\infty \exp\left(\frac{\alpha|z|^2}{4}\right).
\end{aligned}$$

□

Definición 3.1.1. Sea $a \in \mathbb{C}$, se define el operador $U_a : L^2(\mathbb{C}, d\lambda_\alpha) \to L^2(\mathbb{C}, d\lambda_\alpha)$ por

$$U_a f = (f \circ \varphi_a)\; k_a^\alpha \qquad f \in L^2(\mathbb{C}, d\lambda_\alpha),$$

donde $\varphi_a(z) = a - z$, $z \in \mathbb{C}$ y k_a^α es el núcleo reproductor normalizado del espacio de Fock (Fórmula 2.4).

Dado $f \in L^2(\mathbb{C}, d\lambda_\alpha)$ y $z \in \mathbb{C}$, se tiene que

$$\begin{aligned}
U_a^2 f(z) = U_a(U_a f)(z) &= k_a^\alpha(z)(U_a f)(a-z) = k_a^\alpha(z)k_a^\alpha(a-z)f(z) \\
&= \exp\left(\alpha\bar{a}z - \frac{\alpha|a|^2}{2}\right)\exp\left(\alpha\bar{a}(a-z) - \frac{\alpha|a|^2}{2}\right) f(z) \\
&= f(z),
\end{aligned}$$

Esto es

$$U_a^2 = I. \tag{3.1}$$

Por otro lado, para $f, g \in L^2(\mathbb{C}, d\lambda_\alpha)$

$$\begin{aligned}
\langle U_a f, g\rangle &= \int_{\mathbb{C}} U_a f(z)\overline{g(z)}\,\mathrm{d}\,\lambda_\alpha(z) = \int_{\mathbb{C}} k_a^\alpha(z) f(a-z)\overline{g(z)}\,\mathrm{d}\,\lambda_\alpha(z) \\
&= \frac{\alpha}{\pi}\int_{\mathbb{C}} k_a^\alpha(a-z) f(z)\overline{g(a-z)}\exp(-\alpha|z-a|^2)\,\mathrm{dA}(z) \\
&= \frac{\alpha}{\pi}\int_{\mathbb{C}} \exp\left(\alpha\overline{a}(a-z) - \frac{\alpha|a|^2}{2}\right)\exp(-\alpha|z-a|^2) f(z)\overline{g(a-z)}\,\mathrm{dA}(z) \\
&= \frac{\alpha}{\pi}\int_{\mathbb{C}} \exp\left(\alpha\overline{z}a - \frac{\alpha|a|^2}{2} - \alpha|z|^2\right) f(z)\overline{g(a-z)}\,\mathrm{dA}(z) \\
&= \int_{\mathbb{C}} f(z)\overline{k_a(z)g(a-z)}\,\mathrm{d}\,\lambda_\alpha(z) = \langle f, U_a g\rangle.
\end{aligned}$$

Así
$$U_a^* = U_a. \tag{3.2}$$
Usando (3.1) y (3.2) se tiene que el operador U_a es unitario. Además puesto que $U^2 = I$ y dado que F_α^2 es invariante bajo U_a entonces.
$$P_\alpha U_a = U_a P_\alpha.$$
En efecto, sea $f \in L^2(\mathbb{C}, d\lambda_\alpha)$ entonces existe $g \in F_\alpha^2$ y h en el complemento ortogonal de F_α^2 tal que $f = g + h$. Notemos $P_\alpha U(h) = 0$, pues si $h = 0$ es claro y si $h \neq 0$ entonces $U_a(h) \notin F_\alpha^2$ pues F_α^2 en invariante bajo U_a y $U^2 = I$. Por lo cual
$$\begin{aligned} U_a P_\alpha(f) &= U_a P_\alpha(g+h) = U_a(g) = P_\alpha U_a(g) \\ &= P_\alpha U_a(g) + P_\alpha U_a(h) = P_\alpha U_a(f) \end{aligned}$$

La siguiente proposición muestra la imagen, bajo un operador de Toeplitz, de k_z^α (y por consiguiente de K_z^α).

Proposición 3.1.3. Sea $f \in L^\infty(\mathbb{C}, d\lambda_\alpha)$ entonces
$$T_f(k_z^\alpha) = U_z(P_\alpha(f \circ \varphi_z)) = (P_\alpha(f \circ \varphi_z) \circ \varphi_z) k_z^\alpha.$$

Demostración.
$$\begin{aligned} T_f(k_z^\alpha) &= P_\alpha(f k_z^\alpha) = P_\alpha((f \circ \varphi_z \circ \varphi_z) k_z^\alpha) = P_\alpha(U_z(f \circ \varphi_z)) \\ &= U_z(P_\alpha(f \circ \varphi_z)) = (P_\alpha(f \circ \varphi_z) \circ \varphi_z) k_z^\alpha . \end{aligned}$$
□

Lema 3.1.1. Sea $F : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to [0, \infty)$ una función Lebesgue medible, para la cual existe $C_1 > 0$ tal que
$$F(w,z) \leq C_1 \exp\left(\frac{\alpha|z|^2}{4}\right), \quad z, w \in \mathbb{C}. \tag{3.3}$$
Entonces existe $C_2 > 0$ tal que para todo $w \in \mathbb{C}$ se tiene que
$$\int_{\mathbb{C}} F(w, \varphi_w(z)) \left| \exp\left(\alpha z \overline{w} + \frac{\alpha|z|^2}{2}\right) \right| \mathrm{d}\,\lambda_\alpha(z) \leq C_2 \exp\left(\frac{\alpha|w|^2}{2}\right) \left[\int_{\mathbb{C}} F(w,z)^2 \,\mathrm{d}\,\lambda_\alpha(z)\right]^{\frac{1}{4}}.$$

Demostración. Realizando el cambio de variable $u = w - z$ se tiene que
$$\int_{\mathbb{C}} F(w, \varphi_w(z)) \left| \exp\left(\alpha z \overline{w} + \frac{\alpha|z|^2}{2}\right) \right| \mathrm{d}\,\lambda_\alpha(z) = \frac{\alpha}{\pi} \exp\left(\frac{\alpha|w|^2}{2}\right) \int_{\mathbb{C}} F(w,u) \exp\left(\frac{-\alpha|u|^2}{2}\right) \mathrm{dA}(u).$$
Sea
$$\Sigma = \int_{\mathbb{C}} F(w,u) \exp\left(\frac{-\alpha|u|^2}{2}\right) \mathrm{dA}(u).$$

Aplicando la desigualdad de Hölder y (3.3) se tiene que

$$
\begin{aligned}
\Sigma &= \int\limits_{\mathbb{C}} \left(F(w,u) \exp\left(\frac{-3\alpha|u|^2}{8} \right) \right) \exp\left(\frac{-\alpha|u|^2}{8} \right) \mathrm{dA}(u) \\
&\leq \left(\int\limits_{\mathbb{C}} F(w,u)^4 \exp\left(\frac{-3\alpha|u|^2}{8} \right)^4 \mathrm{dA}(u) \right)^{\frac{1}{4}} \left(\int\limits_{\mathbb{C}} \exp\left(\frac{-\alpha|u|^2}{8} \right)^{\frac{4}{3}} \mathrm{dA}(u) \right)^{\frac{3}{4}} \\
&\leq \left(\frac{6\pi}{3} \right)^{\frac{2}{3}} \left(\int\limits_{\mathbb{C}} C_1^2 \exp\left(\frac{\alpha|u|^2}{2} \right) F(w,u)^2 \exp\left(\frac{-3\alpha|u|^2}{2} \right) \mathrm{dA}(u) \right)^{\frac{1}{4}} \\
&= \left(\frac{6\pi}{3} \right)^{\frac{2}{3}} \sqrt{C_1} \left(\frac{\pi}{\alpha} \right)^4 \left(\frac{\alpha}{\pi} \int\limits_{\mathbb{C}} F(w,u)^2 \exp(-\alpha|u|^2) dA(u) \right)^{\frac{1}{4}} \\
&= \sqrt{C_1} \left(\frac{6\pi}{3} \right)^{\frac{2}{3}} \left(\frac{\pi}{\alpha} \right)^4 \left(\int\limits_{\mathbb{C}} F(w,u)^2 \,\mathrm{d}\,\lambda_\alpha(u) \right)^{\frac{1}{4}}.
\end{aligned}
$$

Tomando $C_2 = \sqrt{C_1} \left(\frac{6\pi}{3} \right)^{\frac{2}{3}} \left(\frac{\pi}{\alpha} \right)^3$ se obtiene el resultado deseado. $\square$

Lema 3.1.2. Sea $f \in L^\infty(\mathbb{C}, d\lambda_\alpha)$ entonces para todo $z \in \mathbb{C}$ se tiene que

$$
\int\limits_{\mathbb{C}} |P_\alpha(f \circ \varphi_w)(\varphi_w(z)) K_w^\alpha(z)| K_w^\alpha(w)^{\frac{1}{2}} \,\mathrm{d}\,\lambda_\alpha(w) \leq 4\|f\|_\infty K_z^\alpha(z)^{\frac{1}{2}}
$$

y

$$
\int\limits_{\mathbb{C}} |f(w) - P_\alpha(f \circ \varphi_w)(\varphi_w(z)) K_w^\alpha(z)| K_w^\alpha(w)^{\frac{1}{2}} \,\mathrm{d}\,\lambda_\alpha(w) \leq 6\|f\|_\infty K_z^\alpha(z)^{\frac{1}{2}}.
$$

Demostración. Por las proposiciones 3.1.2 y 3.1.3 se tiene que

$$
\begin{aligned}
|P_\alpha(f \circ \varphi_w)(\varphi_w(z)) K_w^\alpha(z)| = |T_f(K_w^\alpha)(z)| &= \left| \int\limits_{\mathbb{C}} f(u) K_w^\alpha(u) K_u^\alpha(z) \,\mathrm{d}\,\lambda_\alpha(u) \right| \\
&\leq \|f\|_\infty \int\limits_{\mathbb{C}} |K_w^\alpha(u)||K_u^\alpha(z)| \,\mathrm{d}\,\lambda_\alpha(u). \\
&= \|f\|_\infty \int\limits_{\mathbb{C}} |\exp(\alpha u(\overline{w+z})| \,\mathrm{d}\,\lambda_\alpha(u) \\
&= \|f\|_\infty \exp\left(\frac{\alpha^2|w+z|^2}{4\alpha} \right) \\
&= \|f\|_\infty \exp\left(\frac{\alpha|w+z|^2}{4} \right).
\end{aligned}
$$

Utilizando la desigualdad anterior y definiendo

$$\Sigma_1 = \int\limits_{\mathbb{C}} |P_\alpha(f \circ \varphi_w)(\varphi_w(z))||K_w^\alpha(z)|K_w^\alpha(w)^{\frac{1}{2}} \,\mathrm{d}\,\lambda_\alpha(w),$$

se tiene que

$$\begin{aligned}
\Sigma_1 &\leq \|f\|_\infty \int\limits_{\mathbb{C}} \exp\left(\frac{\alpha|w+z|^2}{4}\right) K_w^\alpha(w)^{\frac{1}{2}} \,\mathrm{d}\,\lambda_\alpha(w) \\
&= \frac{\alpha}{\pi}\|f\|_\infty \int\limits_{\mathbb{C}} \exp\left(\frac{\alpha|w+z|^2}{4} - \frac{\alpha|w|^2}{2}\right) \mathrm{dA}(w) \\
&= \frac{\alpha}{\pi}\|f\|_\infty \exp\left(\frac{\alpha|z|^2}{4}\right) \int\limits_{\mathbb{C}} \left|\exp\left(\frac{\alpha w\overline{z}}{4}\right)\right|^2 \exp\left(\frac{-\alpha|w|^2}{4}\right) \mathrm{dA}(w) \\
&= 4\|f\|_\infty \exp\left(\frac{\alpha|z|^2}{4}\right) \int\limits_{\mathbb{C}} \left|\exp\left(\frac{\alpha w\overline{z}}{4}\right)\right|^2 \mathrm{d}\,\lambda_{\frac{\alpha}{4}}(w) \\
&= 4\|f\|_\infty \exp\left(\frac{\alpha|z|^2}{4}\right) \exp\left(\frac{\alpha|z|^2}{4}\right) \\
&= 4\|f\|_\infty \exp\left(\frac{\alpha|z|^2}{2}\right) = 4\|f\|_\infty K_z^\alpha(z)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Procederemos a demostrar la segunda desigualdad del lema. Sean $z \in \mathbb{C}$,

$$\Sigma_2 = \int\limits_{\mathbb{C}} |f(w)||K_w^\alpha(z)|K_w^\alpha(w)^{\frac{1}{2}} \,\mathrm{d}\,\lambda_\alpha(w)$$

y

$$\Sigma_3 = \int\limits_{\mathbb{C}} |f(w) - P_\alpha(f \circ \varphi_w)(\varphi_w(z))K_w^\alpha(z)|K_w^\alpha(w)^{\frac{1}{2}} \,\mathrm{d}\,\lambda_\alpha(w).$$

Notemos que

$$\begin{aligned}
\Sigma_2 &\leq \|f\|_\infty \int\limits_{\mathbb{C}} \exp(\mathrm{Re}(\alpha z\overline{w})) \exp\left(\frac{\alpha|w|^2}{2}\right) \mathrm{d}\,\lambda_\alpha(w) \\
&= 2\|f\|_\infty \exp\left(\frac{\alpha|z|^2}{2}\right) \int\limits_{\mathbb{C}} \frac{\alpha}{2\pi} \exp\left(-\frac{\alpha|w-z|^2}{2}\right) \mathrm{d}\,\lambda_\alpha(w) \\
&= 2\|f\|_\infty \exp\left(\frac{\alpha|z|^2}{2}\right) \int\limits_{\mathbb{C}} \mathrm{d}\,\lambda_{\frac{\alpha}{2}}(w) \\
&= 2\|f\|_\infty \exp\left(\frac{\alpha|z|^2}{2}\right) = 2\|f\|_\infty K_z^\alpha(z)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Usando que $\Sigma_3 \leq \Sigma_1 + \Sigma_2$ y las cotas superiores para Σ_1 y Σ_2, se obtiene el resultado deseado.

$\square$

El siguiente lema nos garantiza que, para todo $z \in \mathbb{C}$, el núcleo normalizado k_z^α converge débilmente a cero en F_α^2 cuando $z \to \infty$. El resultado se sigue de [8], Corolario 2.8, y de que el conjunto de polinomios es denso en F_α^2.

Lema 3.1.3. Si $f \in F_\alpha^2$ entonces

$$\lim_{z\to\infty} \exp\left(-\frac{\alpha|z|^2}{2}\right) f(z) = 0.$$

Demostración. Dado $f \in F_\alpha^2$ y $\varepsilon > 0$ entonces para $\frac{\varepsilon}{2}$ existe un polinomio p tal que

$$\|f - p\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Puesto que

$$|f(z) - p(z)| \leq \|f - p\| \exp\left(\frac{\alpha|z|^2}{2}\right)$$

entonces

$$|f(z)| \exp\left(-\frac{\alpha|z|^2}{2}\right) < \frac{\varepsilon}{2} + |p(z)| \exp\left(-\frac{\alpha|z|^2}{2}\right)$$

Notemos que

$$\lim_{z\to\infty} |p(z)| \exp\left(-\frac{\alpha|z|^2}{2}\right) = 0$$

Por lo tanto para $\frac{\varepsilon}{2}$ existe $M > 0$ tal que para todo $|z| > M$

$$|p(z)| \exp\left(-\frac{\alpha|z|^2}{2}\right) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Por lo tanto

$$|f(z)| \exp\left(-\frac{\alpha|z|^2}{2}\right) < \varepsilon$$

□

Proposición 3.1.4. Sea $f \in L^\infty(\mathbb{C}, d\lambda_\alpha)$, el operador de Toeplitz T_f es compacto si y solo si

$$\lim_{w\to\infty} \|P_\alpha(f \circ \varphi_w)\| = 0.$$

Demostración. Primeramente supongamos que T_f es compacto. Sean $z \in \mathbb{C}$ y $g \in F_\alpha^2$, entonces

$$g(z) = \langle g, K_z^\alpha \rangle.$$

Luego

$$\exp\left(-\frac{\alpha|z|^2}{2}\right) g(z) = \langle g, k_z^\alpha \rangle.$$

Por el Lema 3.1.3, k_z^α converge débilmente a cero en F_α^2, cuando $z \to \infty$. Puesto que T_f es compacto

$$\lim_{w\to\infty} \|T_f(k_w^\alpha)\| = 0.$$

Por la Proposición 3.1.3 y debido a que el operador U_w en la Definición 3.1.1 es unitario, se tiene que

$$\|T_f(k_w^\alpha)\| = \|U_w(P_\alpha(f \circ \varphi_w))\| = \|P_\alpha(f \circ \varphi_w)\|.$$

Ahora supongamos que

$$\lim_{w\to\infty} \|P_\alpha(f \circ \varphi_w)\| = 0.$$

Se mostrará que T_f^* es compacto y, por consiguiente, T_f también lo es. Sea $h \in F_\alpha^2$ entonces

$$\begin{aligned} T_f^* h(w) &= \langle T_f^* h, K_w^\alpha \rangle = \langle h, T_f K_w^\alpha \rangle = \langle h, (P_\alpha(f \circ \varphi_w) \circ \varphi_w) K_w^\alpha \rangle \\ &= \int_{\mathbb{C}} h(z) \overline{(P_\alpha(f \circ \varphi_w) \circ \varphi_w(z)) K_w^\alpha(z)} \, \mathrm{d}\, \lambda_\alpha(z). \end{aligned}$$

Sea $R > 0$ y definamos la transformación lineal $S_R : F_\alpha^2 \to L^2(\mathbb{C}, d\lambda_\alpha)$ por la siguiente fórmula:

$$S_R(h)(w) = \chi_{B(0,R)}(w) T_f^* h(w), \quad w \in \mathbb{C}.$$

Entonces se tiene que

$$\begin{aligned} S_R(h)(w) &= \chi_{B(0,R)}(w) \int_{\mathbb{C}} h(z) \overline{P_\alpha(f \circ \varphi_w) \circ \varphi_w(z) K_w^\alpha(z)} \, \mathrm{d}\, \lambda_\alpha(z) \\ &= \int_{\mathbb{C}} \chi_{B(0,R)}(w) h(z) \overline{P_\alpha(f \circ \varphi_w) \circ \varphi_w(z)} K_z^\alpha(w) \, \mathrm{d}\, \lambda_\alpha(z) \\ &= \int_{\mathbb{C}} G(w,z) K_z^\alpha(w) h(z) \, \mathrm{d}\, \lambda_\alpha(z)\,. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Con

$$G(w,z) = \chi_{B(0,R)}(w) \overline{P_\alpha(f \circ \varphi_w) \circ \varphi_w(z)}.$$

Dado $w \in \mathbb{C}$ se tiene que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{C}} |G(w,z)|^2 |K_\alpha(w,z)|^2 \, \mathrm{d}\, \lambda_\alpha(z) &= \int_{\mathbb{C}} \chi_{B(0,R)}(w) |P_\alpha(f \circ \varphi_w) \circ \varphi_w(z) K_w^\alpha(z)|^2 \, \mathrm{d}\, \lambda_\alpha(z) \\ &\le \int_{\mathbb{C}} |P_\alpha(f \circ \varphi_w) \circ \varphi_w(z) K_w^\alpha(z)|^2 \, \mathrm{d}\, \lambda_\alpha(z) \\ &= \int_{\mathbb{C}} |T_f(K_w^\alpha)(z)|^2 \, \mathrm{d}\, \lambda_\alpha(z) \\ &= \|T_f(K_w^\alpha)\|^2 < \infty\,. \end{aligned}$$

De manera similar, para $z \in \mathbb{C}$, se tiene que

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{\mathbb{C}} |G(w,z)|^2 |K_\alpha(w,z)|^2 \,\mathrm{d}\,\lambda_\alpha(w) \\
&= \int\limits_{\mathbb{C}} \chi_{B(0,R)}(w) |T_f(K_w^\alpha)(z)|^2 \,\mathrm{d}\,\lambda_\alpha(w) \\
&= \int\limits_{\mathbb{C}} \chi_{B(0,R)}(w) |\langle T_f(K_w^\alpha), K_z^\alpha\rangle|^2 \,\mathrm{d}\,\lambda_\alpha(w) \\
&\leq \int\limits_{\mathbb{C}} \chi_{B(0,R)}(w) \|T_f(K_z^\alpha)\|^2 \|K_w^\alpha\|^2 \,\mathrm{d}\,\lambda_\alpha(w) \\
&\leq \|f\|_\infty^2 \|K_z^\alpha\|^2 \int\limits_{\mathbb{C}} \chi_{B(0,R)}(w) \|K_w^\alpha\|^2 \,\mathrm{d}\,\lambda_\alpha(w) \\
&= \|f\|_\infty^2 K_z^\alpha(z) \int\limits_{\mathbb{C}} \chi_{B(0,R)}(w) K_w^\alpha(w) \,\mathrm{d}\,\lambda_\alpha(w) < \infty\,.
\end{aligned}$$

Por lo cual aplicando Teorema de Fubini y las proposiciones 3.1.1 y 3.1.3 se tiene que

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{\mathbb{C}} \int\limits_{\mathbb{C}} |G(w,z)|^2 |K_\alpha(w,z)|^2 \,\mathrm{d}\,\lambda_\alpha(w)\,\mathrm{d}\,\lambda_\alpha(z) \\
&= \int\limits_{\mathbb{C}} \int\limits_{\mathbb{C}} \chi_{B(0,R)}(w) |P_\alpha(f\circ\varphi_w)\circ\varphi_w(z)|^2 ||K_w^\alpha(z)|^2 \,\mathrm{d}\,\lambda_\alpha(w)\,\mathrm{d}\,\lambda_\alpha(z) \\
&= \int\limits_{\mathbb{C}} \chi_{B(0,R)}(w) \exp(\alpha|w|^2) \left(\int\limits_{\mathbb{C}} |P_\alpha(f\circ\varphi_w)(w-z)|^2 |k_w^\alpha(z)|^2 \;\mathrm{d}\,\lambda_\alpha(z) \right) \mathrm{d}\,\lambda_\alpha(w) \\
&= \int\limits_{\mathbb{C}} \chi_{B(0,R)}(w) \exp(\alpha|w|^2) \|P_\alpha(f\circ\varphi_w)\|^2 \,\mathrm{d}\,\lambda_\alpha(w) \\
&= \frac{\alpha}{\pi} \int\limits_{B(0,R)} \|P_\alpha(f\circ\varphi_w)\|^2 dA(w) = \frac{\alpha}{\pi} \int\limits_{B(0,R)} \|U_w P_\alpha(f\circ\varphi_w)\|^2 \,\mathrm{dA}(w) \\
&= \frac{\alpha}{\pi} \int\limits_{\mathbb{C}} \|T_f k_w^\alpha\|^2 \,\mathrm{dA}(w) \leq \frac{\alpha}{\pi} \|T_f\|^2 \int\limits_{B(0,R)} \mathrm{dA}(w) = \alpha R^2 \|T_f\|^2 < \infty\,.
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$G(w,z)K_\alpha(w,z)$$

Es Hilbert–Schmidt kernel, y por (3.4) el operador integral de Hilbert-Schmidt asociado es el operador S_R y por consiguiente el operador S_R es compacto.

Ahora mostremos que T_f^* se puede aproximar por operadores compactos. Esto último implica que T_f^* es compacto y, a su vez, que T_f lo es. Sea $g \in F_\alpha^2$ entonces

$$\begin{aligned}
&(T_f^* - S_R)(g(w)) \\
&= \int_{\mathbb{C}} g(z)\overline{(P_\alpha(f\circ\varphi_w)\circ\varphi_w(z))K_w(z)}\,\mathrm{d}\,\lambda_\alpha(z) \\
&\qquad - \int_{\mathbb{C}} \chi_{B(0,R)}(w)\overline{P_\alpha(f\circ\varphi_w)\circ\varphi_w(z)}K_z(w)g(z)\,\mathrm{d}\,\lambda_\alpha(z) \\
&= \int_{\mathbb{C}} g(z)(1-\chi_{B(0,R)}(w))\overline{(P_\alpha(f\circ\varphi_w)\circ\varphi_w(z))K_w(z)}\,\mathrm{d}\,\lambda_\alpha(z)
\end{aligned}$$

Ahora haremos uso del Test de Schur (Lemma 2.14 de [8]) para acotar a la norma de $T_f - S_R$. Sea

$$H(w,z) = (1-\chi_{B(0,R}(w))\overline{(P_\alpha(f\circ\varphi_w)\circ\varphi_w(z)K_w(z)}$$

y

$$h(z) = K_z(z)^{\frac{1}{4}}.$$

Notemos que por el Lema 3.1.2 se tiene que

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{C}} |H(w,z)|h(w)^2\,\mathrm{d}\,\lambda_\alpha(w) \\
&= \int_{\mathbb{C}} |(1-\chi_{B(0,R)}(w))\overline{(P_\alpha(f\circ\varphi_w)\circ\varphi_w(z))K_w(z)}|K_w(w)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}\,\lambda_\alpha(w) \\
&\leq 4\|f\|_\infty h(z)^2,
\end{aligned}$$

para todo $z \in \mathbb{C}$. Definimos

$$F(w,z) = (1-\chi_{B(0,R)}(z))|P_\alpha(f\circ\varphi_w)(z)|.$$

Por el Corolario 3.1.1 se tiene que

$$F(w,z) \leq \|f\circ\varphi_w\|_\infty \exp\left(\frac{\alpha|z|^2}{4}\right) \leq \|f\|_\infty \exp\left(\frac{\alpha|z|^2}{4}\right).$$

Notemos que

$$|H(w,z)| = F(w,\varphi_w(z))|K_w(z)|.$$

Por el Lema 3.1.1 existe $C > 0$ tal que

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{\mathbb{C}} |H(w,z)| h(z)^2 \,\mathrm{d}\,\lambda_\alpha(z) \\
&= \int\limits_{\mathbb{C}} F(w, \varphi_w(z))| \exp\left(\alpha z\overline{w} + \frac{\alpha|z|^2}{2}\right) | \,\mathrm{d}\,\lambda_\alpha(z) \\
&\leq C \exp\left(\frac{\alpha|w|^2}{2}\right) \left[\int\limits_{\mathbb{C}} F(w,z)^2 \,\mathrm{d}\,\lambda_\alpha(z)\right]^{\frac{1}{4}} \\
&= C \; h(w)^2 (1 - \chi_R(w)) \|P_\alpha(f \circ \varphi_w)\|^{\frac{1}{2}} .
\end{aligned}$$

Puesto que

$$\|P_\alpha(f \circ \varphi_w)\| = \|T_f(k_w^\alpha)\| \leq \|f\|_\infty \|(k_w^\alpha)\| = \|f\|_\infty$$

Entonces

$$\sup\{\|P_\alpha(f \circ \varphi_w)\|^{\frac{1}{2}} : |w| > R\} < \infty$$

Por el Test de Schur existe una constante positiva $C > 0$ tal que

$$\|T_f^* - S_R\| \leq C \; \sup\{\|P_\alpha(f \circ \varphi_w)\|^{\frac{1}{4}} : |w| > R\}$$

Puesto que

$$\lim_{w \to \infty} \|P_\alpha(f \circ \varphi_w)\| = 0$$

Entonces

$$\lim_{w \to \infty} \|T_f^* - S_R\| = 0$$

Puesto que los operadores S_R son compactos entonces T_f^* es compacto. por lo tanto T_f también lo es. $\square$

Capítulo 4

Operadores de Toeplitz con símbolos no acotados

En este capítulo estudiamos operadores de Toeplitz definidos en el espacio de Fock F^2_α cuando los símbolos no son acotados. Se definen un par de extensiones del operador de Toeplitz y se estudian sus propiedades. Se dan condiciones necesarias y suficientes para determinar cuando un operador de Toeplitz es cerrado en términos de un core. Este resultado es es muy importante para la segunda parte del capítulo en la cual se estudian los operadores de Toeplitz con símbolo radial en el Espacio de Fock sin peso. En particular, se estudian los resultados en [1] que relacionan un operador de Toeplitz con símbolo radial con un operador de multiplicación en un subespacio de ℓ^2. Esto se hace a través de un operador unitario. El operador de multiplicación mencionado arriba es una extensión de un operador unitariamente equivalente al operador de Toeplitz. Dicha extensión es en general propia. Sin embargo, existen operadores donde se da la igualdad. El resultado más importante de este trabajo es precisamente que se dan condiciones necesarias y suficientes para que la igualdad mencionada sea válida. Puesto que el operador de multiplicación es cerrado entonces se obtienen condiciones para determinar cuando un operador de Toeplitz con símbolo radial es cerrado.

Los resultados de la primera parte del capítulo están basados en [1], [2] y [3].

4.1. Operadores de Toeplitz

Sea $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función Lebesgue medible. El operador de Toeplitz $T_\varphi : \mathscr{D}(T_\varphi) \to F^2_\alpha$ con símbolo φ, está dado por

$$T_\varphi f = P_\alpha(\varphi f),$$

donde

$$\mathscr{D}(T_\varphi) = \{f \in F^2_\alpha : \varphi f \in L^2(\mathbb{C}, d\lambda_\alpha)\}.$$

Para $f \in \mathscr{D}(T_\varphi)$ y $z \in \mathbb{C}$, se tiene que

$$T_\varphi f(z) = \int_{\mathbb{C}} \varphi(w) f(w) K^\alpha_w(z) \,\mathrm{d}\,\lambda_\alpha(w).$$

Así pues, una manera natural de extender el operador T_φ es mediante la integral anterior. Esto es, definimos

$$\Pi_\varphi : \mathscr{D}(\Pi_\varphi) \to F^2_\alpha$$

de la siguiente manera

$$\Pi_\varphi f(z) = \int_{\mathbb{C}} \varphi(w) f(w) K^\alpha_w(z) \,\mathrm{d}\,\lambda_\alpha(w) = \int_{\mathbb{C}} \varphi(w) f(w) \overline{K^\alpha_z(w)} \,\mathrm{d}\,\lambda_\alpha(w),$$

donde

$$\begin{aligned} \mathscr{D}(\Pi_\varphi) &= \{f \in F^2_\alpha : \varphi f \overline{K^\alpha_z} \in L^1(\mathbb{C}, \mathrm{d}\,\lambda_\alpha) \text{ para todo } z \in \mathbb{C} \text{ y } \Pi_\varphi f \in F^2_\alpha\} \\ &= \{f \in F^2_\alpha : \varphi f K^\alpha_z \in L^1(\mathbb{C}, \mathrm{d}\,\lambda_\alpha) \text{ para todo } z \in \mathbb{C} \text{ y } \Pi_\varphi f \in F^2_\alpha\}. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Por la Proposición 2.1.4 el conjunto $\{z^n : n \in \mathbb{N}_0\}$ es una base ortogonal del espacio de Fock; por lo cual, si $f \in \mathscr{D}(T_\varphi)$, entonces existe $r_f \in L^2(\mathbb{C}, d\lambda_\alpha)$ tal que

$$\varphi f = P_\alpha(\varphi f) + r_f = T_\varphi(f) + r_f$$

y para toda $n \in \mathbb{N}_0$ se tiene que

$$\int_{\mathbb{C}} r_f(w) \overline{w}^n \,\mathrm{d}\,\lambda_\alpha(w) = 0.$$

Por lo cual otra forma natural de extender el operador T_φ es la siguiente: Sea $Q_\varphi : \mathscr{D}(Q_\varphi) \to F^2_\alpha$, donde

$$\mathscr{D}(Q_\varphi) = \{f \in F^2_\alpha : \text{existe } r_f \in L^1(\mathbb{C}, \mathrm{d}\,\lambda_\alpha) \text{ tal que} \\ \varphi f - r_f \in F^2_\alpha \quad \text{y} \quad \int_{\mathbb{C}} r_f(w) \overline{w}^n \,\mathrm{d}\,\lambda_\alpha(w) = 0 \text{ para todo } n \in \mathbb{N}_0 \ \}$$

y

$$Q_\varphi f = \varphi f - r_f, \quad f \in \mathscr{D}(Q_\varphi).$$

Notemos que Q_φ está bien definida, pues si existen r_1, r_2 en $L^1(\mathbb{C}, \mathrm{d}\,\lambda_\alpha)$ tales que

$$\varphi f - r_i \in F^2_\alpha \quad \text{y} \quad \int_{\mathbb{C}} r_i(w) \overline{w}^n \,\mathrm{d}\,\lambda_\alpha(w) = 0 \text{ para todo } n \in \mathbb{N}_0,$$

con $i = 1, 2$, entonces

$$r_2 - r_1 = \varphi f - r_1 - (\varphi f - r_2) \in F^2_\alpha.$$

Puesto que $r_2 - r_1$ está en el complemento ortogonal del conjunto $\{z^n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$, y este es base de F^2_α, se tiene que

$$\varphi f - r_1 = \varphi f - r_2 \text{ o equivalentemente } r_1 = r_2.$$

Sabemos que Π_φ y Q_φ son extensiones de T_φ, más adelante presentamos la relación entre ellas.

Lema 4.1.1. Sea $R > 0$ y $m \in \mathbb{N}_0$ entonces existen $a_1, ..., a_n \in \mathbb{C}$ y $C > 0$ tales que para todo $z \in B(0, R)$ se tiene que

$$|w^m K_z^\alpha(w)| \leq C \sum_{j=1}^{n} |K_{a_j}^\alpha(w)|, \quad w \in \mathbb{C},$$

donde el núcleo reproductor $K_z^\alpha(w)$ está dado por la Fórmula 2.3.

Demostración. Sea $z = z_1 + iz_2 \in B(0, R), w = w_1 + iw_2 \in \mathbb{C}$. Notemos que

$$\begin{aligned}
|w^m K_z^\alpha(w)| &\leq (|w_1| + |w_2|)^m |\exp(\alpha \overline{z} w)| \\
&= (|w_1| + |w_2|)^m \exp(\alpha(z_1 w_1 + z_2 w_2)) \\
&= \sum_{j=1}^{m} \binom{m}{j} |w_1|^j \exp(\alpha z_1 w_1) |w_2|^{m-j} \exp(\alpha z_2 w_2) \\
&\leq \sum_{j=1}^{m} m! \exp(|w_1| + \alpha z_1 w_1) \exp(|w_2| + \alpha z_2 w_2) \,.
\end{aligned} \tag{4.2}$$

Puesto que, para $l = 1, 2$,

$$|w_l| + \alpha z_l w_l \leq |w_l| + \alpha |z_l w_l| \leq |w_l| + \alpha R |w_l|,$$

se tiene que

$$\exp(|w_l| + \alpha z_l w_l) \leq \exp((1 + \alpha R)|w_l|).$$

Notemos que

$$\exp((1 + \alpha R)|w_1|) = \begin{cases} |\exp((1 + \alpha R) w)| & si \quad w_1 \geq 0, \\ |\exp(-(1 + \alpha R) w)| & si \quad w_1 < 0. \end{cases}$$

Similarmente

$$\exp((1 + \alpha R)|w_2|) = \begin{cases} |\exp(-i(1 + \alpha R) w)| & si \quad w_2 \geq 0, \\ |\exp(i(1 + \alpha R) w)| & si \quad w_2 < 0. \end{cases}$$

Por lo tanto

$$\exp(|w_1| + \alpha z_1 w_1) \leq |K_{\frac{1+\alpha R}{\alpha}}^\alpha(w)| + |K_{\frac{-(1+\alpha R)}{\alpha}}^\alpha(w)|$$

y

$$\exp(|w_2| + \alpha z_2 w_2) \leq |K_{\frac{-i(1+\alpha R)}{\alpha}}^\alpha(w)| + |K_{\frac{i(1+\alpha R)}{\alpha}}^\alpha(w)|.$$

Además dados $a, b \in \mathbb{C}$ se tiene que $K_a^\alpha K_b^\alpha = K_{a+b}^\alpha$ con lo cual la Fórmula 4.2 implica que existen $a_1, ..., a_n \in \mathbb{C}$ y $C_1, ..., C_n > 0$ tales que

$$|w^m K_z^\alpha(w)| \leq \sum_{j=1}^{n} C_j |K_{a_j}^\alpha(w)| \leq C \sum_{j=1}^{n} |K_{a_j}^\alpha(w)|,$$

donde $C = \text{máx}\{C_j\}_{j=1}^n$. $\square$

Corolario 4.1.1. Sean $z \in \mathbb{C}$ y $m \in \mathbb{N}_0$, entonces existen $a_1, ..., a_n \in \mathbb{C}$ y $C > 0$ tal que

$$|w^m K_z^\alpha(w)| \leq C \sum_{j=1}^{n} |K_{a_j}^\alpha(w)|.$$

Para todo $w \in \mathbb{C}$.

Demostración. Sea $R = |z| + 1$ y apliquemos la proposición anterior. $\square$

Proposición 4.1.1. Sea $r : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función Lebesgue medible tal que para todo $z \in \mathbb{C}$ se tiene que $rK_z^\alpha \in L^1(\mathbb{C}, \mathrm{d}\,\lambda_\alpha)$ entonces, la función $\Phi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dada por

$$\Phi(z) = \int_{\mathbb{C}} r(w)\overline{K_z^\alpha(w)}\,\mathrm{d}\,\lambda_\alpha(w),$$

es una función entera y además

$$\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}z^k}\Phi(z) = \int_{\mathbb{C}} r(w)\overline{w^k K_z^\alpha(w)}\,\mathrm{d}\,\lambda_\alpha(w).$$

Demostración. Sea $R > 0$, definimos $h : \mathbb{C} \times B(0, R) \to \mathbb{C}$, de la siguiente manera

$$h(w, z) = r(w)\overline{K_z^\alpha(w)} = r(w)\exp(\alpha\overline{w}z).$$

Notemos que

- Para todo $z \in \mathbb{C}$, $h^z := h(\cdot, z) \in L^1(\mathbb{C}, \mathrm{d}\,\lambda_\alpha)$.
- Para todo $w \in \mathbb{C}, h_w := h(w, \cdot)$ es holomorfa y

$$\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}z^k}h_w(z) = r(w)\alpha^k\overline{w}^k\exp(\alpha\overline{w}z).$$

- La Ecuación anterior y el Lema 4.1.1 implican que existen $a_1, ..., a_n \in \mathbb{C}$ y $C > 0$ tales que para todo $z \in B(0, R)$

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{C}} \left|\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}z^k}h_w(z)\right|\mathrm{d}\,\lambda_\alpha(w) &= \int_{\mathbb{C}} |r(w)\alpha^k\overline{w^k K_z^\alpha(w)}|\,\mathrm{d}\,\lambda_\alpha(w)\\ &\leq C\alpha^k\sum_{j=1}^{n}\int_{\mathbb{C}} |r(w)K_{a_j}^\alpha(w)|\,\mathrm{d}\,\lambda_\alpha(w) < \infty\end{aligned}$$

  Así

$$\sup\left\{\int_{\mathbb{C}} \left|\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}z^k}h_w(z)\right|\mathrm{d}\,\lambda_\alpha(w) : z \in B(0, R)\right\} < \infty.$$

Así pues por el primer Teorema en [5] podemos derivar bajo el signo de la integral y se tiene que

$$\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}z^k}\Phi(z) = \int_{\mathbb{C}} r(w)\overline{w^k K_z^\alpha(w)}\,\mathrm{d}\,\lambda_\alpha(w).$$

□

Como consecuencia de la proposición anterior se tiene que (4.1) se reduce a

$$\mathscr{D}(\Pi_\varphi) = \{f \in F_\alpha^2 : \varphi f K_z^\alpha \in L^1(\mathbb{C}, \mathrm{d}\,\lambda_\alpha) \text{ para todo } z \in \mathbb{C} \text{ y } \Pi_\varphi(f) \in L^2(\mathbb{C}, d\lambda_\alpha)\}.$$

Proposición 4.1.2. Sea $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función Lebesgue medible entonces

$$T_\varphi \subseteq \Pi_\varphi \subseteq Q_\varphi.$$

Demostración. Sabemos que $T_\varphi \subseteq \Pi_\varphi$. Sea $f \in \mathscr{D}(\Pi_\varphi)$, esto implica que $\varphi f K_z^\alpha \in L^1(\mathbb{C}, d\lambda_\alpha)$ y que $\Pi_\varphi(f) \in L^2(\mathbb{C}, d\lambda_\alpha) \subset L^1(\mathbb{C}, d\lambda_\alpha)$. Definamos $r = \varphi f - \Pi_\varphi(f)$; entonces, dado $z \in \mathbb{C}$ tenemos que

$$\int_{\mathbb{C}} |r(w)\overline{K_z^\alpha(w)}|\,\mathrm{d}\,\lambda_\alpha(w) \le \int_{\mathbb{C}} |\varphi(w)f(w)\overline{K_z^\alpha(w)}|\,\mathrm{d}\,\lambda_\alpha(w) + \int_{\mathbb{C}} |\Pi_\varphi(f)(w)\overline{K_z^\alpha(w)}|\,\mathrm{d}\,\lambda_\alpha(w) \quad < \infty\,.$$

Además

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{C}} r(w)\overline{K_z^\alpha(w)}\,\mathrm{d}\,\lambda_\alpha(w) &= \int_{\mathbb{C}} \varphi(w)f(w)\overline{K_z^\alpha(w)}\,\mathrm{d}\,\lambda_\alpha(w) - \int_{\mathbb{C}} \Pi_\varphi f(w)\overline{K_z^\alpha(w)}\,\mathrm{d}\,\lambda_\alpha(w) \\ &= \Pi_\varphi f(z) - \langle \Pi_\varphi f, K_z^\alpha\rangle \\ &= \Pi_\varphi f(z) - \Pi_\varphi f(z) = 0\,.\end{aligned} \tag{4.3}$$

Sea $h : \mathbb{C} \times B(0,1) \to \mathbb{C}$, dada por

$$h(w,z) = r(w)\overline{K_z^\alpha(w)}.$$

Luego, por la Proposición 4.1.1, para todo $k \in \mathbb{N}_0$ se tiene que

$$\int_{\mathbb{C}} \alpha^k \overline{w}^k r(w)\,\mathrm{d}\,\lambda_\alpha(w) = \left(\frac{\partial^k}{\partial z^k}\int_{\mathbb{C}} h(w,z)\,\mathrm{d}\,\lambda_\alpha(w)\right)\Bigg|_{z=0} = 0.$$

Por lo tanto

$$\Pi_\varphi \subseteq Q_\varphi.$$

□

Veamos que las extensiones anteriores pueden ser propias.

Sea g la función constante 1. Definamos $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ por la fórmula

$$\varphi(w) = \frac{1}{2\alpha} \exp(\alpha|w|^2 - |w|).$$

Para toda $n \in \mathbb{N}_0$ se tiene que

$$\int_{\mathbb{C}} |(\varphi(w)g(w) - 1)w^n| \,\mathrm{d}\,\lambda_\alpha(w) \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{C}} |w|^n \exp(-|w|) \,\mathrm{dA}(w) + \int_{\mathbb{C}} |w|^n \,\mathrm{d}\,\lambda_\alpha(w) < \infty.$$

Además para todo $n \in \mathbb{N}_0$ se tiene que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{C}} (\varphi(w)g(w) - 1)\overline{w}^n \,\mathrm{d}\,\lambda_\alpha(w) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{C}} \exp(-|w|)\overline{w}^n \,\mathrm{dA}(w) + \int_{\mathbb{C}} \overline{w}^n \,\mathrm{d}\,\lambda_\alpha(w) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} r^{n+1} \exp(-i\theta n) \exp(-r) dr d\theta = 0.\end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\int_{\mathbb{C}} (\varphi_2(w)g(w) - 1) \,\mathrm{d}\,\lambda_\alpha(w) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{C}} \exp(-|w|) \,\mathrm{dA}(w) - 1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} r \exp(-r) d\theta dr - 1 = 0.$$

Por lo anterior $g \in \mathscr{D}(Q_{\varphi_2})$,

$$Q_\varphi(g) = g \qquad \text{y} \qquad r_g = \varphi g - 1.$$

Por otro lado $g \notin \mathscr{D}(\Pi_\varphi)$ pues

$$\int_{\mathbb{C}} |\varphi(w)g(w)K^{\alpha}_{\frac{1}{\alpha}}(w)| \,\mathrm{d}\,\lambda_\alpha(w) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{C}} \exp(-|w| + \mathrm{Re}(w)) \,\mathrm{dA}(w) = \infty.$$

La Proposición 4.1.2 nos brinda otra manera de definir Π_φ.

Proposición 4.1.3. Sea $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función Lebesgue medible entonces

$$\begin{aligned}\mathscr{D}(\Pi_\varphi) = \{f \in F^2_\alpha : \text{existe } r_f \in L^1(\mathbb{C}, \mathrm{d}\,\lambda_\alpha) \text{ tal que} \\ \varphi f - r_f \in F^2_\alpha \quad \text{y} \quad \int_{\mathbb{C}} r_f(w)\overline{K^\alpha_z}(w) \,\mathrm{d}\,\lambda_\alpha(w) = 0 \text{ para todo } z \in \mathbb{C}\}.\end{aligned} \tag{4.4}$$

Además

$$\Pi_\varphi f = \varphi f - r_f.$$

Demostración. Supongamos que $f \in \mathscr{D}(\Pi_\varphi)$, entonces definimos $r_f = \varphi f - \Pi_\varphi f$, notemos que $r_f \in L^1(\mathbb{C}, \mathrm{d}\,\lambda_\alpha)$, pues $\varphi f = \varphi f K_0^\alpha \in L^1(\mathbb{C}, d\lambda_\alpha)$ y $\Pi_\varphi f \in L^2(\mathbb{C}, d\lambda_\alpha)$. Por (4.3) se tiene que

$$\int_{\mathbb{C}} r_f(w)\overline{K_z^\alpha(w)}\,\mathrm{d}\,\lambda_\alpha(w) = 0 \quad \forall\, z \in \mathbb{C}.$$

Si existe $r_f \in L^1(\mathbb{C}, \mathrm{d}\,\lambda_\alpha)$ tal que $q := \varphi f - r_f \in F_\alpha^2$ y para todo $z \in \mathbb{C}$

$$\int_{\mathbb{C}} r_f(w)\overline{K_z^\alpha}\,\mathrm{d}\,\lambda_\alpha(w) = 0.$$

Entonces $\varphi f K_z^\alpha = qK_z + r_f K_z^\alpha \in L^1(\mathbb{C}, \mathrm{d}\,\lambda_\alpha)$ y

$$\Pi_\varphi f(z) = \int_{\mathbb{C}} \varphi(w) f(w)\overline{K_z^\alpha(w)}\,\mathrm{d}\,\lambda_\alpha(w) = \int_{\mathbb{C}} q(w)\overline{K_z^\alpha(w)}\,\mathrm{d}\,\lambda_\alpha(w) = \langle q, K_z^\alpha\rangle = q(z).$$

□

Denotemos por $\mathbb{P}$ al conjunto de polinomios y sea $\mathbb{K} = \mathrm{Span}\{K_z : z \in \mathbb{C}\}$.

Proposición 4.1.4. Si $\mathbb{P} \subseteq \mathscr{D}(T_\varphi)$ y $T = T_\varphi\big|_{\mathbb{P}}$, entonces $T^* = Q_{\overline{\varphi}}$ y si $\mathbb{K} \subseteq \mathscr{D}(T_\varphi)$ y $T_1 = T_\varphi\big|_{\mathbb{K}}$, entonces $T_1^* = \Pi_{\overline{\varphi}}$.

Demostración. Puesto que $\mathbb{P}$ es denso en F_α^2 entonces T^* está bien definida.
Primeramente mostremos que $Q_{\overline{\varphi}} \subseteq T^*$. Sea $f \in \mathscr{D}(Q_{\overline{\varphi}})$, entonces existe $r_f \in L^1(\mathbb{C}, \mathrm{d}\,\lambda_\alpha)$ tal que

$$q := \overline{\varphi} f - r_f \in F_\alpha^2 \qquad \text{y} \qquad \int_{\mathbb{C}} r_f(w)\overline{w}^n\,\mathrm{d}\,\lambda_\alpha(w) = 0 \;\forall\, n \in \mathbb{N}_0.$$

Sea $g \in \mathbb{P}$, luego

$$\begin{aligned}\langle Tg, f\rangle = \langle T_\varphi g, f\rangle = \langle \varphi g, f\rangle &= \int_{\mathbb{C}} \varphi(w) g(w)\overline{f(w)}\,\mathrm{d}\,\lambda_\alpha(w) = \int_{\mathbb{C}} g(w)\overline{\overline{\varphi(w)} f(w)}\,\mathrm{d}\,\lambda_\alpha(w) \\ &= \int_{\mathbb{C}} g(w)(\overline{q(w) + r_f(w)})\,\mathrm{d}\,\lambda_\alpha(w) = \langle g, q\rangle + \int_{\mathbb{C}} g(w)\overline{r_f(w)}\,\mathrm{d}\,\lambda_\alpha(w) = \langle g, q\rangle = \langle g, Q_{\overline{\varphi}} f\rangle.\end{aligned}$$

Por la definición del adjunto de un operador se tiene que

$$D(Q_{\overline{\varphi}}) \subseteq \mathscr{D}(T^*) \qquad \text{y} \qquad T^* f = Q_{\overline{\varphi}} f.$$

La correspondiente demostración para T_1 se realiza de forma análoga tomando $f \in \mathscr{D}(\Pi_\varphi)$, $g \in \mathbb{K}$ y aplicando la Proposición 4.1.3.
Ahora mostremos que $T^* \subseteq Q_{\overline{\varphi}}$. Sea $h \in \mathscr{D}(T^*)$ y $p \in \mathbb{P}$. Notemos que

$$\langle h, \varphi p\rangle = \overline{\langle T_\varphi p, h\rangle} = \overline{\langle Tp, h\rangle} = \overline{\langle p, T^* h\rangle} = \langle T^* h, p\rangle.$$

Por lo cual
$$\int\limits_{\mathbb{C}} \Big(h(w)\overline{\varphi(w)} - T^*h(w)\Big)\,\overline{p(w)}\,\mathrm{d}\,\lambda_\alpha(w) = 0. \tag{4.5}$$
Definamos $r_h = \overline{\varphi}h - T^*h$. Puesto que $\overline{\varphi}h - r_h = T^*h \in F^2_\alpha$ y utilizando (4.5) se tiene que
$$h \in \mathscr{D}(Q_{\overline{\varphi}}) \qquad \text{y} \qquad Q_{\overline{\varphi}}h = T^*h.$$
Por lo tanto $Q_{\overline{\varphi}} = T^*h$.
De nueva cuenta, la correspondiente demostración para T_1 se realiza de igual manera solo tenemos que tomar $h \in \mathscr{D}(T_1^*)$, $p \in \mathbb{K}$ y aplicar la Proposición 4.1.3. □

La proposición anterior tiene como consecuencia un importante corolario.

Corolario 4.1.2. Sea T como en la proposición anterior. Entonces

1. $Q_{\overline{\varphi}}$ es cerrado.
2. $Q^*_{\overline{\varphi}} = \overline{T}$.
3. $\overline{T_{\overline{\varphi}}} = Q^*_\varphi \subseteq Q_{\overline{\varphi}}$.
4. Si $T_\varphi = \overline{T} = T^*_{\overline{\varphi}}$, entonces
$$T_\varphi = \Pi^*_{\overline{\varphi}} = Q^*_{\overline{\varphi}}.$$

Demostración. 1. El resultado se sigue de que el operador adjunto siempre es cerrado.

2. Por la proposición anterior $T^* = Q_{\overline{\varphi}}$. Además
$$\mathbb{P} \subseteq \mathscr{D}(T) \subseteq \mathscr{D}(T_\varphi) = \mathscr{D}(T_{\overline{\varphi}}) \subseteq \mathscr{D}(Q_{\overline{\varphi}}).$$

   Entonces T^* es densamente definido. Entonces por el Teorema 10.2-1 inciso b) en [4] sabemos que
$$T \subseteq T^{**}$$
   Y puesto que el operador adjunto es cerrado entonces
$$\overline{T} \subseteq T^{**}$$
   Por el Teorema 10.2-1 inciso a) en [4] sabemos que dado dos operadores densamente definidos S_1, S_2 tal que $S_1 \subseteq S_2$ entonces
$$S_2^* \subseteq S_1^*$$
   Por lo cual
$$T^{**} \subseteq \overline{T}^{**}$$
   Por el Teorema 13.12 en [7] se sigue que
$$\overline{T} = \overline{T}^{**}$$
   Así pues
$$\overline{T} \subseteq T^{**} \subseteq \overline{T}^{**} = \overline{T}$$
   Por lo tanto
$$\overline{T} = T^{**} = Q^*_{\overline{\varphi}}$$

3. Aplicamos la proposición anterior y el inciso anterior a $T_{\overline{\varphi}}\big|_{\mathbb{P}}$ entonces

$$\overline{T_{\overline{\varphi}}\big|_{\mathbb{P}}} = Q_{\varphi}^{*} \subseteq (T_{\varphi}\big|_{\mathbb{P}})^{*} = Q_{\overline{\varphi}}.$$

4. Puesto que $\mathbb{P} \subseteq \mathscr{D}(T_{\varphi})$ el cual es denso entonces existe los operadores adjuntos de $T_{\varphi}, \Pi_{\varphi}$ y Q_{φ}. Por el inciso 2 sabemos que $\overline{T} = Q_{\overline{\varphi}}^{*}$. Por lo tanto

$$\overline{T} = Q_{\overline{\varphi}}^{*} \subseteq \Pi_{\overline{\varphi}}^{*} \subseteq T_{\overline{\varphi}}^{*} = T_{\varphi} = \overline{T}.$$

□

Lema 4.1.2. Sea $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función medible. Entonces $\varphi K_z \in L^2(\mathbb{C}, d\lambda_{\alpha})$ para todo $z \in \mathbb{C}$ si y solo si para todo $z \in \mathbb{C}$ se tiene que

$$\int\limits_{\mathbb{C}} |\varphi(w)|^2 |K_z^{\alpha}(w)| \,\mathrm{d}\,\lambda_{\alpha}(w) < \infty. \tag{4.6}$$

Demostración. Basta recordar que $K_z^{\alpha}(w) = \exp(\alpha z \overline{w})$. □

Denotemos por $\mathbb{A}$ al álgebra generada por $\mathbb{P} \cup \mathbb{K}$.

Proposición 4.1.5. Sea $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función medible. Si $\mathbb{K} \subseteq \mathscr{D}(T_{\varphi})$ entonces $\mathbb{A} \subseteq \mathscr{D}(T_{\varphi})$, además $\Pi_{\varphi} = Q_{\varphi}$ y

$$\overline{T_{\varphi}\big|_{\mathbb{P}}} = \overline{T_{\varphi}\big|_{\mathbb{K}}} = \overline{T_{\varphi}\big|_{\mathbb{A}}}.$$

Demostración. Supongamos que $K_z^{\alpha} \subseteq \mathscr{D}(T_{\varphi})$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Entonces dado $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y $z \in \mathbb{C}$ se tiene que

$$\int\limits_{\mathbb{C}} |\varphi(w) K_z^{\alpha}(w) w^m|^2 \,\mathrm{d}\,\lambda_{\alpha}(w) = \int\limits_{\mathbb{C}} |\varphi(w)|^2 |K_{2z}^{\alpha}(w) w^{2m}| \,\mathrm{d}\,\lambda_{\alpha}(w).$$

Por el Corolario 4.1.1 existe $C > 0$ y $a_1, ..., a_s$ tales que

$$|K_{2z}^{\alpha}(w) w^{2m}| \leq C \sum_{j=1}^{s} |K_{a_j}^{\alpha}(w)|.$$

Por lo anterior y Lema 4.1.2 se tiene que

$$\int\limits_{\mathbb{C}} |\varphi(w) K_z^{\alpha}(w) w^m|^2 \,\mathrm{d}\,\lambda_{\alpha}(w) \leq C \sum_{j=1}^{s} \int\limits_{\mathbb{C}} |\varphi(w)|^2 |K_{a_j}^{\alpha}(w)| \,\mathrm{d}\,\lambda_{\alpha}(w) < \infty.$$

Por lo tanto para todo $z \in \mathbb{C}$ y $m \in \mathbb{N}_0$

$$K_z^{\alpha}(w) w^m \in \mathscr{D}(T_{\varphi}).$$

Puesto que $\mathbb{A}$ está generado por los elementos anteriores entonces

$$\mathbb{A} \subseteq \mathscr{D}(T_\varphi).$$

Ahora demostremos que $\Pi_\varphi = Q_\varphi$. Sea $f \in \mathscr{D}(Q_\varphi)$ entonces existe $r_f \in L^1(\mathbb{C}, d\lambda_\alpha)$ tal que

$$\varphi f - r_f \in F^2_\alpha \qquad \text{y} \qquad \int\limits_{\mathbb{C}} r_f(w)\overline{w}^n \,\mathrm{d}\,\lambda_\alpha(w) = 0 \;\forall\; n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Puesto que $\mathbb{K} \subseteq \mathscr{D}(T_\varphi)$ y $f \in F^2_\alpha$ entonces

$$\overline{K^\alpha_z}\varphi f \in L^1(\mathbb{C}, d\lambda_\alpha).$$

Además como $\varphi f - r_f \in F^2_\alpha$ entonces $\overline{K^\alpha_z}(\varphi f - r_f) \in L^1(\mathbb{C}, d\lambda_\alpha)$.
Por lo tanto, para todo $z \in \mathbb{C}$,

$$\overline{K^\alpha_z} r_f = \overline{K^\alpha_z} f\varphi - \overline{K^\alpha_z}(f\varphi - r_f) \in L^1(\mathbb{C}, d\lambda_\alpha).$$

Entonces por la Proposición 4.1.1 se tiene que la función $\Phi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, dada por

$$\Phi(z) = \int\limits_{\mathbb{C}} r(w)\overline{K^\alpha_z(w)} \,\mathrm{d}\,\lambda_\alpha(w),$$

es una función entera y

$$\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}z^k}\Phi(z) = \int\limits_{\mathbb{C}} r_f(w)\overline{w^k K^\alpha_z(w)} \,\mathrm{d}\,\lambda_\alpha(w).$$

Por lo cual para toda $k \in \mathbb{N}_0$

$$\left(\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}z^k}\Phi(z)\right)\Big|_{z=0} = \alpha^k \int\limits_{\mathbb{C}} r_f(w)\overline{w}^k \,\mathrm{d}\,\lambda_\alpha(w) = 0.$$

Así pues Φ es la función constante cero y por la Proposición 4.1.3 se sigue que

$$f \in \mathscr{D}(\Pi_\varphi) \qquad \text{y} \qquad \Pi_\varphi(f) = \varphi f - r_f = Q_\varphi(f).$$

Por lo tanto

$$Q_\varphi = \Pi_\varphi.$$

□

En la proposición anterior no se pueden intercambiar los roles de $\mathbb{K}$ y $\mathbb{P}$. Esto es, si $\mathbb{P} \subseteq \mathscr{D}(T_\varphi)$ entonces no necesariamente $\mathbb{K} \subseteq \mathscr{D}(T_\varphi)$. Por ejemplo sea

$$\varphi(z) = \exp\left(\frac{\alpha}{2}|z|^2 - |\operatorname{Re}(z)| - |\operatorname{Im}(z)|\right)$$

Para $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, se tiene que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{C}} |z^n \varphi(z)|^2 \, \mathrm{d}\,\lambda_\alpha(z) &= \frac{\alpha}{\pi} \int_{\mathbb{C}} |z|^{2n} \exp(-2(|\operatorname{Re}(z)| + |\operatorname{Im}(z)|)) \, \mathrm{dA}(z) \\
&\leq \frac{\alpha}{\pi} \int_{\mathbb{C}} (|\operatorname{Re}(z)| + |\operatorname{Im}(z)|)^{2n} \exp(-2(|\operatorname{Re}(z)| + |\operatorname{Im}(z)|)) \, \mathrm{dA}(z) \\
&= \frac{\alpha}{\pi} \int_{\mathbb{C}} \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} |\operatorname{Re}(z)|^k \exp(-2|\operatorname{Re}(z))| \operatorname{Im}(z)|^{2n-k} \exp(-2|\operatorname{Im}(z)|) \, \mathrm{dA}(z) \\
&\leq \frac{\alpha}{\pi} \int_{\mathbb{C}} \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} k! \exp(-|\operatorname{Re}(z)|)(2n-k)! \exp(-|\operatorname{Im}(z)|) \, \mathrm{dA}(z) \\
&= \frac{\alpha}{\pi} \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} k!(2n-k)! \int_{\mathbb{C}} \exp(-|\operatorname{Re}(z)| - |\operatorname{Im}(z)|) \, \mathrm{dA}(z) < \infty.
\end{aligned}$$

Así $\mathbb{P} \in \mathscr{D}(T_\varphi)$.

Por otro lado

$$\int_{\mathbb{C}} |\varphi(z) K_2^\alpha(z)|^2 \, \mathrm{d}\,\lambda_\alpha(z) = \frac{\alpha}{\pi} \int_{\mathbb{C}} \exp(-2(|\operatorname{Re}(z)| + |\operatorname{Im}(z)|)) \exp(4 \operatorname{Re}(z)) \, \mathrm{dA}(z) = \infty$$

por lo que $K_2^\alpha \notin \mathscr{D}(T_\varphi)$.

La siguiente proposición nos brinda una manera de determinar si un operador de Toeplitz es cerrado en términos de su core.

Proposición 4.1.6. Sea $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función medible y $\mathscr{D}$ un core para T_φ entonces T_φ es cerrado si y solo si existe $C \geq 0$ tal que

$$\|\varphi f\|^2 \leq C(\|f\|^2 + \|T_\varphi f\|^2), \quad \forall\ f \in \mathscr{D}. \tag{4.7}$$

Demostración. Sabemos que el operador de multiplicación $M_\varphi : \mathscr{D}(M_\varphi) \subseteq L^2(\mathbb{C}, \mathrm{d}\,\lambda_\alpha) \to L^2(\mathbb{C}, \mathrm{d}\,\lambda_\alpha)$ es cerrado. Definimos $S := M_\varphi\big|_{\mathscr{D}(M_\varphi) \cap F_\alpha^2}$ el cual es un operador cerrado, pues F_α^2 es cerrado. Notemos que $\mathscr{D}(M_\varphi) \cap F_\alpha^2 = \mathscr{D}(T_\varphi)$ y

$$\|T_\varphi f\| \leq \|Sf\| \quad \forall f \in \mathscr{D}(T_\varphi).$$

Por la Proposición 1.3.6 tenemos que T_φ es cerrado si y solo si existe $\beta \geq 0$ tal que

$$\|f\|_S \leq \beta \|f\|_{T_\varphi} \quad \forall\ f \in \mathscr{D}.$$

Por lo cual si T_φ es cerrado entonces para $C = \beta^2$ se tiene que

$$\|\varphi f\|^2 \leq \|f\|^2 + \|\varphi f\|^2 \leq C(\|f\|^2 + \|T_\varphi f\|^2), \quad \forall\ f \in \mathscr{D}.$$

Y si existe $C \geq 0$ que satisface (4.7) entonces

$$\|f\|_S^2 = \|f\|^2 + \|\varphi f\|^2 \leq C(\|f\|^2 + \|T_\varphi f\|^2) + \|f\|^2 \leq (C+1)(\|f\|^2 + \|T_\varphi f\|^2) = (C+1)\|f\|_{T_\varphi}^2$$

Para todo $f \in \mathscr{D}$. Por lo cual definimos $\beta = \sqrt{C+1}$.

□

4.2. Operadores de Toeplitz con símbolo radial.

El objetivo de esta sección, la cual está basada en [1], es dar condiciones necesarias y suficientes para determinar cuando un operador de Toeplitz con símbolo radial es unitariamente equivalente a un operador de multiplicación definido en un subespacio de ℓ^2, donde

$$\ell^2 = \left\{ (x_n)_{n\in\mathbb{Z}} : \sum_{n\in\mathbb{Z}} |x_n|^2 < \infty \right\}.$$

Nos enfocaremos solamente en el caso del espacio de Fock sin peso. La primera parte de esta sección resume los resultados de [1] y el objetivo es, bajo determinadas condiciones en su símbolo, asociar a un operador de Toeplitz un operador de multiplicación por una sucesión (actuando en ℓ_+^2). Los resultados principales de este trabajo se encuentran a partir del Teorema 4.2.3. Se demuestra mediante ejemplos que no todo operador de Toeplitz con símbolo radial es unitariamente equivalente a un operador de multiplicación y se dan condiciones bajo las cuales se puede garantizar dicha equivalencia unitaria.

De esta forma comenzamos por definir los símbolos con los cuales trabajaremos. Sea $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función medible, decimos que φ es una función radial si

$$\varphi(z) = \varphi(|z|) \ \forall \ z \in \mathbb{C}.$$

Puesto que $\varphi(z)$ está determinada por el módulo se z, entonces podemos considerar a φ como una función definida en $\mathbb{R}_+$ (el conjunto de los números reales no negativos) y por ello la denotaremos por $\varphi = \varphi(r)$.

El primer paso para asociar un operador de multiplicación a un operador de Toeplitz es dar las condiciones que implican la existencia de tal operador de multiplicación. Con esto en mente, denotemos por $L_1^\infty(\mathbb{R}, \exp(-r^2))$ al espacio de todas las funciones $\varphi = \varphi(r)$ sobre $\mathbb{R}_+$ tales que para todo $n \in \mathbb{N}_0$ ($\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$).

$$\int_{\mathbb{R}_+} |\varphi(r)| \exp(-r^2) r^n dr < \infty.$$

Bajo estas condiciones, a cada función $\varphi = \varphi(r)$ en $L_1^\infty(\mathbb{R}, \exp(-r^2))$, se le puede asociar la sucesión $\gamma_\varphi = \{\gamma_\varphi(n)\}_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ donde

$$\gamma_\varphi(n) = \int_{\mathbb{R}_+} \varphi(\sqrt{r}) r^n \exp(-r) dr. \tag{4.8}$$

Siguiendo [1], notemos que el espacio F_1^2 se puede describir como la cerradura en $L^2(\mathbb{C}, \mathrm{d}\,\lambda_1)$ del conjunto de funciones derivables que satisfacen

$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\varphi = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)\varphi = 0,$$

donde $z = x + iy$.

Consideremos el operador unitario $U_1 : L^2(\mathbb{C}, \mathrm{d}\,\lambda_1) \to L^2(\mathbb{R}^2, dxdy)$ dado por

$$U_1(f)(z) = \pi^{-\frac{1}{2}} \exp(-|z|^2) f(z).$$

Entonces $F^{(1)} := U_1(F_1^2)$ es la cerradura del conjunto de todas las funciones derivables que satisfacen

$$D^{(1)}f := U_1\frac{\partial}{\partial \overline{z}}U_1^{-1}f = \left(\frac{\partial}{\partial \overline{z}} + \frac{z}{2}\right)f = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y} + x + iy\right)f = 0.$$

Descomponemos ahora $L^2(\mathbb{R}^2, dxdy)$ en coordenadas polares:

$$L^2(\mathbb{R}^2, dxdy) = L^2(\mathbb{R}_+, rdr) \otimes L^2([0, 2\pi), d\theta) = L^2(\mathbb{R}_+, rdr) \otimes L^2(S^1),$$

donde S^1 es la circunferencia unitaria y

$$\frac{dt}{it} = |dt| = d\theta.$$

En estas coordenadas el operador $\frac{\partial}{\partial \overline{z}}$ se descompone como

$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}} = \frac{\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta}{2}\left(\frac{\partial}{\partial r} + i\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + r\right) = \frac{t}{2}\left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{t}{r}\frac{\partial}{\partial t} + r\right).$$

Denotemos por $\ell^2(L^2(\mathbb{R}_+, rdr))$ al conjunto

$$\ell^2(L^2(\mathbb{R}_+, rdr)) = \left\{(f_n)_{n\in\mathbb{Z}} : f_n \in L^2(\mathbb{R}_+, rdr) \quad \text{y} \quad \sum_{n\in\mathbb{Z}} \|f_n\|^2 < \infty\right\}.$$

Considere ahora el operador unitario

$$U_2 := I \otimes \mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}_+, rdr) \otimes L^2(S^1) \to L^2(\mathbb{R}_+, rdr) \otimes \ell^2 = \ell^2(L^2(\mathbb{R}_+, rdr)),$$

donde $\mathcal{F}$ es transformada de Fourier discreta. Esto es $\mathcal{F} : L^2(S^1) \to \ell^2$ y está dada por

$$\mathcal{F}(f) = \{c_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$$

con

$$c_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{S^1} f(t)t^{-n}\frac{dt}{it} \text{ para todo } n \in \mathbb{Z}.$$

Recordando que la transformada de Fourier inversa $\mathcal{F}^{-1} = \mathcal{F}^* : \ell^2 \to L^2(S^1)$ está dada por

$$\mathcal{F}^{-1}(c_n)_{n\in\mathbb{Z}} \longmapsto f = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n t^n,$$

se tiene que el operador $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ en coordenadas polares se transforma unitariamente en

$$(I \otimes \mathcal{F}) \frac{t}{2} \left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{t}{r} \frac{\partial}{\partial t} + r \right) (I \otimes \mathcal{F})^{-1} \{c_n(r)\}_{n\in\mathbb{Z}} = \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{n-1}{r} + r \right) c_{n-1}(r) \right)_{n\in\mathbb{Z}}.$$

Así pues, la imagen $F^{(2)} := U_2(F^{(1)})$ es el subespacio de $L^2(\mathbb{R}_+, rdr) \otimes l^2 = \ell^2(L^2(\mathbb{R}_+, rdr))$ formado por la cerradura de todas las sucesiones $(c_n(r))_{n\in\mathbb{Z}}$ tales que

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{n}{r} + r \right) c_n(r) = 0, \ n \in \mathbb{Z}.$$

Solucionando la ecuación anterior y considerando que la solución debe de estar en $L^2(\mathbb{R}_+, rdr)$ se tiene que

$$c_n(r) = b_n r^n \exp\left(\frac{-r^2}{2} \right), \quad n \geq 0,$$

y

$$c_n(r) \equiv 0, \ \forall \ n < 0.$$

Para todo $n \geq 0$ se tiene que

$$\|c_n\|^2_{L^2(\mathbb{R}_+, rdr)} = b_n^2 \int_0^\infty \exp(-r^2) r^{2n+1} dr = b_n^2 \frac{n!}{2}.$$

Así pues para cada $n \in \mathbb{N}_0$ sea

$$c_n = b_n \sqrt{\frac{n!}{2}}$$

y entonces

$$c_n(r) = \begin{cases} c_n \sqrt{\frac{2}{n!}} r^n \exp\left(\frac{-r^2}{2} \right), & \text{si } n \geq 0, \\ 0, & \text{si } n < 0. \end{cases}$$

Puesto que $F^{(2)} \subseteq \ell^2(L^2(\mathbb{R}_+, rdr))$ entonces

$$\|(c_n(r))_{n\in\mathbb{Z}}\|^2 = \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \|c_n\|^2_{L^2(\mathbb{R}_+, rdr)} \right)^2 = \left(\sum_{n\in\mathbb{N}_0} |c_n|^2 \right)^2 = \|(c_n)_{n\in\mathbb{N}}\|^2_{\ell^2_+},$$

Aquí ℓ^2_+ denota el subespacio de ℓ^2 que consiste de todas las sucesiones $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ tales que $a_n = 0$ para todo $n < 0$.

Para cada $n \in \mathbb{N}_0$ sea

$$u_n : L^2(\mathbb{R}_+, dr) \to L^2(\mathbb{R}_+, rdr)$$

definido de la siguiente manera

$$(u_n f)(r) = w_n(r) f(\alpha_n(r)),$$

donde

$$w_n(r) = \sqrt{\frac{2}{n!}} r^n \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{r^{2k}}{k!} \right)^{-\frac{1}{2}}$$

y

$$\alpha_n(r) = r^2 - ln \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{r^{2k}}{k!} \right).$$

Utilizaremos un nuevo operador unitario $U_3 : \ell^2(L_2(\mathbb{R}_+, rdr)) \to \ell^2(L^2(\mathbb{R}_+)) = L^2(\mathbb{R}_+) \otimes \ell^2$, definido por

$$U_3(c_n(r))_{n\in\mathbb{Z}} = (u_{|n|}^{-1} c_n)(r))_{n\in\mathbb{Z}}.$$

Bajo este último operador el espacio $F^{(2)}$ es transformado en $F^{(3)} := U_3(F^{(2)})$ que coincide con el espacio de todas las sucesiones $(d_n(r))_{n\in\mathbb{Z}}$ donde

$$d_n = u_n^{-1} \left(c_n \sqrt{\frac{2}{n!}} r^n \exp\left(\frac{-r^2}{2} \right) \right) = c_n \exp\left(\frac{-r}{2} \right) \ \forall \ n \in \mathbb{N}_0$$

y $d_n(r) = 0$ para todo $n < 0$.
Sea $L_0 = \text{span}\{l_0(r)\}$, donde $l_0(r) = \exp\left(-\frac{r}{2}\right) \in L^2(\mathbb{R}_+, dr)$ y tiene norma 1. La proyección ortogonal $P_0 : L^2(\mathbb{R}_+) \to L_0$ está dada por

$$P_0(f)(r) = \langle f, l_0 \rangle l_0 = \int_{\mathbb{R}_+} f(s) \exp\left(-\frac{r+s}{2} \right) ds.$$

Denotemos por p_+ a la proyección ortogonal de ℓ^2 sobre ℓ^2_+. Es fácil ver que

$$p_+ = \chi_+ I$$

donde $\chi_+ = (\chi_+(n))_{n\in\mathbb{Z}}$ con $\chi_+(n) = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$ y $\chi_+(n) = 0$ para todo $n < 0$.

De esta forma

$$F^{(3)} = l_0 \otimes \ell^2_+$$

y la proyección ortogonal $P^{(3)}$ de $\ell^2(L^2(\mathbb{R}_+)) = L^2(\mathbb{R}_+) \otimes \ell^2$ sobre $F^{(3)}$ tiene la forma

$$P^{(3)} = P_0 \otimes p^+.$$

Por todo lo anterior se tiene el siguiente teorema.

Teorema 4.2.1. 1 El operador unitario $U = U_3 U_2 U_1$ es un isomorfismo isométrico del espacio $L^2(\mathbb{C}, \mathrm{d}\,\lambda_1)$ sobre $L^2(\mathbb{R}_+) \otimes \ell^2$.

2 La proyección $P_1 : L^2(\mathbb{C}, \mathrm{d}\,\lambda_1) \to F_1^2$ es unitariamente equivalente a

$$UP_1U^{-1} = P_0 \otimes p_+.$$

Sea $R_0 : \ell_+^2 \to L^2(\mathbb{R}_+) \otimes \ell^2$ dado por

$$R_0((c_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}) = l_0(r)(\chi_+(n)c_n)_{n\in\mathbb{Z}}.$$

Notemos que la imagen de R_0 coincide con el espacio $F^{(3)}$ y el operador adjunto $R_0^* : L^2(\mathbb{R}_+)\otimes\ell^2 \to l_+^2$ está dado por

$$R_0^*(c_n(r))_{n\in\mathbb{Z}} = \left(\chi_+(n)\int\limits_{\mathbb{R}_+} c_n(t)\exp\left(\frac{-t}{2}\right)\right)_{n\in\mathbb{Z}}.$$

Además

$$R_0^* R_0 = I : \ell_+^2 \to \ell_+^2,$$

$$R_0 R_0^* = P^{(3)} : L^2(\mathbb{R}_+) \otimes \ell^2 \to F^{(3)} = L_0 \otimes \ell_+^2.$$

Es fácil demostrar que el operador $R = R_0^* U : L^2(\mathbb{C}, \mathrm{d}\,\lambda_1) \to \ell_+^2$ cumple las siguientes dos propiedades:

$$RR^* = I : \ell_+^2 \to \ell_+^2,$$

$$R^*R = P_1 : L^2(\mathbb{C}, \mathrm{d}\,\lambda_1) \to F_1^2.$$

Las dos ecuaciones anteriores implican que la restricción

$$R\big|_{F_1^2} : F_1^2 \to \ell_2^+$$

es un isomorfismo isométrico.

En el siguiente teorema damos la forma explícita del adjunto del operador R.

Teorema 4.2.2. El isomorfismo isométrico

$$R^* = U^* R_0 : \ell_+^2 \to F_1^2$$

está dado por

$$R^*(c_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{\sqrt{n!}} z^n.$$

Demostración.

$$
\begin{aligned}
R^* &= U_1^* U_2^* U_3^* R_0 (c_n)_{n\in\mathbb{N}_0} = U_1^* U_2^* U_3^* (l_0(r)(\chi_+(n))c_n)_{n\in\mathbb{N}_0} = U_1^* U_2^* U_3^* \left(c_n \exp\left(-\frac{r}{2}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}_0} \\
&= U_1^* U_2^* \left(c_n \sqrt{\frac{2}{n!}} r^n \exp\left(-\frac{r^2}{2}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}_0} = U_1^* \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n\in\mathbb{N}_0} c_n \sqrt{\frac{2}{n!}} r^n \exp\left(-\frac{r^2}{2}\right)\right) \\
&= \sqrt{\pi} \exp\left(\frac{r^2}{2}\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n\in\mathbb{N}_0} c_n \sqrt{\frac{2}{n!}} (rt)^n \exp\left(-\frac{r^2}{2}\right) \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}_0} \frac{c_n}{\sqrt{n!}} z^n.
\end{aligned}
$$

□

Corolario 4.2.1. El operador $R : F_1^2 \to \ell_+^2$ está dado por

$$
R : \varphi(z) \mapsto \left(\frac{1}{\sqrt{n!}} \int_{\mathbb{C}} \varphi(z) \overline{z}^n \, \mathrm{d}\,\lambda_1(z) \right)_{n\in\mathbb{N}_0} .
$$

Usando el operador R se puede transformar de manera unitaria cada operador de Toeplitz con símbolo en $L_1^\infty(\mathbb{R}, \exp(-r^2))$. La elección de la función γ_a (Fórmula 4.8) no es arbitraria como lo muestra el siguiente teorema.

Teorema 4.2.3. Sea $\varphi = \varphi(r)$ en $L_1^\infty(\mathbb{R}, \exp(-r^2))$. Entonces el operador de multiplicación $M_{\gamma(\varphi)}$ definido en ℓ_+^2 es una extensión del operador $RT_\varphi R^*$ con T_φ el operador de Toeplitz con símbolo φ definido en el espacio de Fock F_1^2.

Demostración. Sea $c = (c_n)_{n\in\mathbb{Z}_+} \in R(\mathscr{D}(T_\varphi)) \subseteq \ell_+^2$. Notemos que

$$
\begin{aligned}
RT_\varphi R^*(c) &= RP_1 M_\varphi P_1 R^*(c) = R(R^*R)M_\varphi (R^*R)R^*(c) = (RR^*)RM_\varphi R^*(RR^*)(c) \\
&= RM_\varphi R^*(c) = R_0^* U_3 U_2 U_1 M_\varphi U_1^{-1} U_2^{-1} U_3^{-1} R_0(c) \\
&= R_0^* U_3 (I \otimes \mathcal{F}) M_\varphi (I \otimes \mathcal{F}^{-1}) U_3^{-1} R_0(c) = R_0^* U_3 M_{(\varphi(r))_{n\in\mathbb{N}_0}} U_3^{-1} R_0(c) \\
&= R_0^* M_{(\varphi(v_{|n|}^{-1})(r))_{n\in\mathbb{Z}}} R_0(c) = R_0^* M_{(\varphi(v_{|n|}^{-1})(r))_{n\in\mathbb{N}_0}} \left(c_n \exp\left(\frac{-r}{2}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}_0} \\
&= R_0^* \left(c_n \varphi(v_n^{-1}(r)) \exp\left(\frac{-r}{2}\right)\right)_{n\in\mathbb{Z}} = \left(\int_{\mathbb{R}_+} c_n \varphi(v_n^{-1}(r)) \exp(-r) dr \right)_{n\in\mathbb{N}_0} \\
&= \left(c_n \int_{\mathbb{R}_+} \varphi(r) \exp(-v_n(r)) v_n'(r) dr \right)_{n\in\mathbb{N}_0} = \left(c_n \frac{2}{n!} \int_{\mathbb{R}_+} \varphi(r) \exp(-r^2) r^{2n+1} dr \right)_{n\in\mathbb{N}_0} \\
&= \left(c_n \frac{1}{n!} \int_{\mathbb{R}_+} a(\sqrt{r}) \exp(-r)) r^n dr \right)_{n\in\mathbb{N}_0} = M_{\{\gamma_a(n)\}_{n\in\mathbb{N}_0}} (c_n)_{n\in\mathbb{N}_0} .
\end{aligned}
$$

□

Notemos que el operador de multiplicación del Teorema anterior no necesariamente coincide con el operador $RT_\varphi R^*$, pues consideremos $b_n = (\delta_{n,j})_{j\in\mathbb{N}_0}$, con $\delta_{n,j}$ la delta de Kronecker. Notemos que $b_n \in \mathscr{D}(M_{\{\gamma_a(n)\}_{n\in\mathbb{N}_0}})$, para todo $n \in \mathbb{N}_0$,entonces

$$R^*(b_n) \mapsto \frac{z^n}{\sqrt{n!}}$$

Por lo cual $z^n \in \mathscr{D}(T_\varphi)$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$ lo cual no siempre se cumple pues si consideramos a $\varphi(r) = \exp\left(\frac{r^2}{2}\right) \in L_1^\infty(\mathbb{R}, \exp(-r^2))$ y $z^n \notin \mathscr{D}(T_\varphi)$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$.

El propósito de los siguientes resultados es encontrar condiciones necesarias y suficientes para que el operador de multiplicación $M_{\gamma(\varphi)}$, en el teorema anterior, coincida con el operador $RT_\varphi R^*$.

Proposición 4.2.1. Sean $T : \mathscr{D}(T) \subseteq \ell^2_+ \to \ell^2_+$ un operador cerrado que contiene en su dominio a la sucesión $b_k = (\delta_{k,j})_{j\in\mathbb{N}_0}$ para todo $k \in \mathbb{N}_0$. Si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ es una sucesión tal que $T \subseteq M_{(v_n)_{n\in\mathbb{N}_0}}$, entonces $T = M_{(v_n)_{n\in\mathbb{N}_0}}$.

Demostración. Cada sucesión $(c_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \in \ell^2_+$ se escribe como $(c_n)_{n\in\mathbb{N}_0} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n b_n$. Tomemos $(c_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \in \mathscr{D}(M_{(v_n)_{n\in\mathbb{N}_0}})$ y para cada $m \in \mathbb{N}_0$ definamos $s_m = \sum_{n=0}^{m} c_n b_n \in \mathscr{D}(T)$. Luego

$$T(s_m) = M_{(v_n)_{n\in\mathbb{N}_0}}(s_m) = \sum_{n=0}^{m} c_n v_n b_n.$$

Primeramente demostraremos que $T(s_m)$ converge a $\sum_{n=0}^{\infty} c_n v_n b_n$. Esta última serie converge pues coincide con $M_{(v_n)_{n\in\mathbb{N}_0}}((c_n)_{n\in\mathbb{N}_0})$. Sea $\varepsilon > 0$, dado que $(c_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \in \mathscr{D}(M_{(v_n)_{n\in\mathbb{N}_0}})$ se tiene que

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 |v_n|^2 < \infty,$$

lo cual implica que existe $N \in \mathbb{N}_0$ tal que

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} |c_n|^2 |v_n|^2 < \varepsilon.$$

Para todo $m \geq N$ se tiene que

$$\left\| \sum_{n=0}^{\infty} c_n v_n b_n - T(s_m) \right\|^2 = \left\| \sum_{n=m+1}^{\infty} c_n v_n b_n \right\|^2 = \sum_{n=m+1}^{\infty} |c_n|^2 |v_n|^2 < \varepsilon.$$

Por lo tanto
$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n v_n b_n = \lim_{m\to\infty} T(s_m).$$
Por otro lado,
$$(c_n)_{n\in\mathbb{N}_0} = \lim_{m\to\infty} s_m.$$
Puesto que T es cerrado se tiene que
$$(c_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \in \mathscr{D}(T) \quad \text{y} \quad T((c_n)_{n\in\mathbb{N}_0}) = \lim_{m\to\infty} T(s_m) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n v_n b_n = M_{(v_n)_{n\in\mathbb{N}_0}}((c_n)_{n\in\mathbb{N}_0}).$$
En conclusión
$$T = M_{(v_n)_{n\in\mathbb{N}_0}}.$$
□

La proposición anterior nos da como resultado un importante corolario.

Corolario 4.2.2. Sea $\varphi = \varphi(r)$ en $L_1^\infty(\mathbb{R}, \exp(-r^2))$, entonces T_φ es cerrado y $z^m \in \mathscr{D}(T_\varphi)$ para toda $m \in \mathbb{N}_0$ si y solo si
$$RT_\varphi R^* = M_{\gamma_\varphi},$$
donde γ_φ está dada por (4.8).

Demostración. Por la Proposición 1.3.7 sabemos que la cerradura de un operador se preserva bajo equivalencia unitaria. Entonces si $RT_\varphi R^* = M_{\gamma_\varphi}$, entonces T_φ es cerrado pues M_{γ_φ} lo es.

Supongamos ahora T_φ es cerrado y que $z^m \in \mathscr{D}(T_\varphi)$ para toda $m \in \mathbb{N}_0$ entonces $R\left(\frac{z^m}{\sqrt{m!}}\right) = b_m \in \mathscr{D}(RT_\varphi R^*)$ donde $b_m = (\delta_{m,j})_{j\in\mathbb{N}_0}$ para todo $m \in \mathbb{N}_0$. Por el Teorema 4.2.3 y la Proposición 4.2.1 se tiene que
$$RT_\varphi R^* = M_{\gamma_\varphi}.$$
□

Proposición 4.2.2. Sea $T : \mathscr{D}(T) \subseteq \ell_+^2 \to \ell_+^2$ un operador tal que $b_n = (\delta_{n,j})_{j\in\mathbb{N}_0} \in \mathscr{D}(T)$ y $(v_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ una sucesión tal que $T \subseteq M_{(v_n)_{n\in\mathbb{N}_0}}$, entonces $M_{(v_n)_{n\in\mathbb{N}_0}}$ es la cerradura de T.

Demostración. Puesto que $M_{(v_n)_{n\in\mathbb{N}_0}}$ es cerrado entonces por el Corolario 1.3.4 existe la cerradura de T y además $\overline{T} \subseteq M_{(v_n)_{n\in\mathbb{N}_0}}$. Dado que $b_n \in \mathscr{D}(\overline{T})$ para toda $n \in \mathbb{N}_0$ la Proposición 4.2.1 implica que $\overline{T} = M_{(v_n)_{n\in\mathbb{N}_0}}$.

□

Corolario 4.2.3. Sea $\varphi = \varphi(r)$ en $L_1^\infty(\mathbb{R}, \exp(-r^2))$ y T un operador definido en el espacio de Fock tal que $T \subseteq T_\varphi$. Si $z^m \in \mathscr{D}(T)$ para toda $m \in \mathbb{N}_0$, entonces
$$\overline{T} = R^* M_{\gamma_\varphi} R.$$

En particular, si el operador T_φ es cerrado y tiene en su dominio a z^m para todo $m \in \mathbb{N}_0$, entonces

$$T_\varphi = R^* M_{\gamma_\varphi} R.$$

Demostración. Notemos que $R^* M_{\gamma_\varphi} R$ es extensión cerrada de T, por la Proposición 1.3.4, existe la cerradura de T. Así

$$T \subseteq \overline{T} \subseteq R^* M_{\gamma_\varphi} R.$$

Esto implica que

$$RTR^* \subseteq R\overline{T}R^* \subseteq M_{\gamma_\varphi}.$$

Usando la Proposición 4.2.1 se tiene que

$$R\overline{T}R^* = M_{\gamma_\varphi}.$$

□

Más adelante daremos un criterio para determinar cuando un operador de Toeplitz con símbolo en $L_1^\infty(\mathbb{R}, \exp(-r^2))$ es cerrado y se dará un ejemplo de un operador de Toeplitz no cerrado con símbolo en este espacio.

Proposición 4.2.3. Sea $\varphi = \varphi(r)$ en $L_1^\infty(\mathbb{R}, \exp(-r^2))$, entonces T_φ es cerrado y $z^n \in \mathscr{D}(T_\varphi)$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$ si y solo si existe $C \geq 0$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}_+} |\varphi(\sqrt{r})|^2 r^n \exp(-r) dr \leq C n! (1 + |\gamma_\varphi(n)|^2), \quad \forall\, n \in \mathbb{N}_0. \tag{4.9}$$

Demostración. Supongamos que T_φ es cerrado y $z^n \in \mathscr{D}(T_\varphi)$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$. Por el Corolario 4.2.3 se tiene que $\mathbb{P}$ es un core de T_φ. Por la Proposición 4.1.6 existe $C \geq 0$ tal que

$$\|\varphi f\|^2 \leq C(\|f\|^2 + \|T_\varphi f\|^2), \quad \forall\, f \in \mathbb{P}.$$

Sea $f(z) = \sum_{k=0}^{n} c_k z^k \in \mathbb{P}$ entonces

$$\begin{aligned}
\|\varphi f\|^2 &= \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}_+} \int_0^{2\pi} \left| \varphi(r) \sum_{k=0}^{n} c_k r^k \exp(ik\theta) \right|^2 \exp(-r^2) r \, d\theta \, dr \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}_+} \int_0^{2\pi} |\varphi(r)|^2 \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} c_k \overline{c_j} r^k r^j \exp(i(k-j)\theta) \exp(-r^2) r \, d\theta \, dr \\
&= 2 \sum_{k=0}^{n} |c_k|^2 \int_{\mathbb{R}_+} |\varphi(r)|^2 r^{2k+1} \exp(-r^2) dr \\
&= \sum_{k=0}^{n} |c_k|^2 \int_{\mathbb{R}_+} |\varphi(\sqrt{r})|^2 r^k \exp(-r) dr \, .
\end{aligned}$$

Y, usando el Corolario 4.2.2

$$\begin{aligned}
\|T_\varphi(f)\|^2 &= \|R^* M_{\gamma_\varphi} R(f)\|^2 \\
&= \|M_{\gamma_\varphi} R(f)\|^2_{\ell^2_+} \\
&= \left\| \sum_{k=0}^{n} c_k M_{\gamma_\varphi} R(z^k) \right\|^2_{\ell^2_+} \\
&= \left\| \sum_{k=0}^{n} c_k \gamma_\varphi(k) \sqrt{k!} b_k \right\|^2_{\ell^2_+} \\
&= \sum_{k=0}^{n} |c_k|^2 |\gamma_\varphi(k)|^2 k!\,.
\end{aligned}$$

Así pues, en particular para $f(z) = z^n$ se tiene que

$$\int\limits_{\mathbb{R}_+} |\varphi(\sqrt{r})|^2 r^n \exp(-r) dr = \|\varphi z^n\|^2 \leq C(\|z^n\|^2 + \|T_\varphi(z^n)\|^2) = C(n! + n!|\gamma_\varphi(n)|^2).$$

Ahora supongamos que existe $C \geq$ tal que cumple la Desigualdad (4.9), puesto que $|\gamma_\varphi(n)| < \infty$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$, entonces para todo $n \in \mathbb{N}_0$ se tiene que

$$\int\limits_{\mathbb{R}_+} |\varphi(\sqrt{r})|^2 r^n \exp(-r) dr < \infty$$

Notemos que $z^n \in \mathscr{D}(T_\varphi)$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$. Pues

$$\int\limits_{\mathbb{C}} |z^n \varphi(z)|^2 \exp(-|z|^2)\, \mathrm{dA}(z) = \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{\infty} |\varphi(r)|^2 r^{2n} \exp(-r^2) r dr d\theta$$

Entonces haciendo un cambio de variable $x = r^2$ se tiene que

$$\int\limits_0^{\infty} |\varphi(r)|^2 r^{2n} \exp(-r^2) r dr = \frac{1}{2} \int\limits_0^{\infty} |\varphi(\sqrt{x})|^2 x^n \exp(-x) dx < \infty$$

Así pues por el corolario 4.2.3, $\mathbb{P}$ es un core de T_φ.

Sea $f(z) = \sum_{k=0}^{n} c_k z^k \in \mathbb{P}$, entonces

$$\begin{aligned}\|\varphi f\|^2 &= \sum_{k=0}^{n} |c_k|^2 \int\limits_{\mathbb{R}_+} |\varphi(\sqrt{r})|^2 r^k \exp(-r) dr \\ &\leq C \sum_{k=0}^{n} |c_k|^2 k!(1 + |\gamma_\varphi(k)|^2) \\ &= C(\sum_{k=0}^{n} |c_k|^2 k! + \sum_{k=0}^{n} |c_k|^2 k! |\gamma_\varphi(k)|^2) \\ &= C(\|f\|^2 + \|T_\varphi(f)\|^2).\end{aligned}$$

Por la Proposición 4.1.6, T_φ es cerrado. □

Finalmente presentamos dos ejemplos de símbolos en $L_1^\infty(\mathbb{R}, \exp(-r^2))$ no acotados. El operador correspondiente al primer símbolo es cerrado mientras que el correspondiente al segundo no lo es y por ello no es unitariamente equivalente a un operador de multiplicación.

Ejemplo 4.2.1. Sea $\varphi(r) = r^2$, notemos que

$$\int\limits_{R_+} |\varphi(r)| \exp(-r^2) r^n dr < \infty, \forall n \in \mathbb{N}_0$$

y por ello $\varphi \in L_1^\infty(\mathbb{R}, \exp(-r^2))$. Además

$$\gamma_\varphi(n) = \frac{1}{n!} \int\limits_{\mathbb{R}_+} r^{n+1} \exp(-r) dr = n + 1$$

y

$$\int\limits_{\mathbb{R}_+} |\varphi(\sqrt{r})|^2 r^n \exp(-r) dr = \int\limits_{\mathbb{R}_+} r^{n+2} \exp(-r) dr = (n+2)!.$$

Puesto que

$$\begin{aligned}(n+2)! &= n!(n+1)(n+2) = n!(n^2 + 3n + 2) \\ &\leq n!(2n^2 + 4n + 4) = 2n!(n^2 + 2n + 2) \\ &= 2n!(1 + (n+1)^2).\end{aligned}$$

Entonces para $C = 2$ se tiene que

$$(n+2)! \leq Cn!(1 + (n+1)^2), \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$$

Por lo cual T_φ es un operador cerrado.

Ejemplo 4.2.2. Sea $\varphi(r) = \exp\left(\frac{r^2}{3}\right)$, entonces

$$\int\limits_{R_+} |\varphi(r)| \exp(-r^2) r^n dr = \int\limits_{R_+} r^n \exp\left(\frac{-2r^2}{3}\right) dr < \infty, \forall n \in \mathbb{N}_0$$

y por ello $\varphi \in L_1^\infty(\mathbb{R}, \exp(-r^2))$. Además notemos que $z^n \in \mathscr{D}(T_\varphi)$ pues

$$\int\limits_{\mathbb{R}_+} |\varphi(\sqrt{r})|^2 r^n \exp(-r) dr = \int\limits_{\mathbb{R}_+} \exp\left(\frac{-r}{3}\right) r^n dr = 3^{n+1} n!.$$

Por otra parte notemos que

$$\gamma_\varphi(n) = \frac{1}{n!} \int\limits_{\mathbb{R}_+} \varphi(\sqrt{r}) r^n \exp(-r) dr = \frac{1}{n!} \int\limits_{\mathbb{R}_+} \exp\left(\frac{-2r}{3}\right) r^n dr = \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}.$$

Dado $n \in \mathbb{N}_0$ notemos que

$$2\left(\frac{3}{2}\right)^{2n+2} \geq 1 + \left(\frac{3}{2}\right)^{2n+2}$$

Por lo cual

$$2 \cdot 3^{n+1} \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} \geq 1 + \left(\frac{3}{2}\right)^{2n+2}.$$

Así pues

$$\frac{3^{n+1}}{1 + \left(\frac{3}{2}\right)^{2n+2}} \geq \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}\right)^{n+1}$$

Por lo tanto no existe $C \geq 0$ que cumple la desigualdad 4.9 en la Proposición 4.2.3, por lo tanto T_φ no es un operador cerrado.

Bibliografía

[1] S. M. Grudsky and N. L. Vasilevski. Toeplitz operators on the fock space: Radial component effects. *Integral Equations and Operator Theory*, 44(1):10–37, 2002.

[2] J Janas. Unbounded toeplitz operators on bargmann-segal spaces. *Studia Math*, 99(2):87–99, 1991.

[3] J Janas and J Stochel. Unbouded toeplitz operators in the segal-bergman space, 11*. *Journal of Fuctional Analysis*, (126):418–447, 1994.

[4] Erwin Kreyszig. *Introductory Functional Analysis with Applications*. John Wiley & Sons, 1978.

[5] Lutz Mattner. Complex differentiation under the integral. *NAW*, 5(2), March 2001.

[6] Mrinal Raghupathi and Vern I.Paulsen. *An Introduction to the Theory of Reproducing Kernel Hilbert Spaces*. Cambridge University Press, 2016.

[7] Walter Rudin. *Functional Analysis*. McGraw-Hill, second edition, 1991.

[8] Kehe Zhu. *Analysis on Fock Spaces*. Springer, 2012.