



CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS DEL
INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

UNIDAD ZACATENCO

DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA ELÉCTRICA
SECCIÓN DE MECATRÓNICA

Predicción no Lineal de Robots Móviles con Retardos

TESIS

Que presenta

Julio Alejandro Báez Hernández

Para obtener el grado de
Doctor en ciencias

En la especialidad de
Ingeniería Eléctrica

Directores de Tesis:

Dr. Martín Velasco Villa

Dra. Sabine Marie Sylvie Mondié Cuzange

Resumen

Este trabajo de tesis aborda el problema de seguimiento de trayectoria en robots móviles que son afectados por un retardo de tiempo τ en las entradas de control y se propone un esquema de predicción basado en subpredictores. Primero se introducen el problema y los objetivos específicos de la tesis, para después presentar una breve recopilación del estado del arte de los sistemas con retardo.

Se desarrolla la obtención de los modelos cinemáticos de los robots móviles a emplear, el robot móvil omnidireccional o (3,0) y el diferencial o (2,0). Dentro de este capítulo también se explica y asume la naturaleza del retardo en el sistema.

Una vez presentados la problemática y los sistemas a evaluar, se analiza la eficacia del esquema de predicción en dos casos diferentes, primero se evalúa la convergencia del robot omnidireccional con retardo variable a la entrada y después la convergencia del robot diferencial con retardo de tiempo constante. En ambos casos se utiliza el esquema de predicción basado en subpredictores, el cual propone dividir el retardo en fracciones mas pequeñas y así utilizar un predictor en cadena basado en un observador tipo Luenberger que estime los valores futuros del sistema de manera gradual.

En ambos casos se presentan simulaciones numéricas que confirman los resultados anteriormente obtenidos. De igual manera, se muestran resultados experimentales para el caso del robot diferencial, lo cual aparte de demostrar la convergencia de los errores de predicción también muestra la viabilidad de su implementación. Finalmente el trabajo de tesis cierra con las conclusiones obtenidas y el trabajo futuro a desarrollar.

Abstract

This thesis addresses the trajectory tracking problem in mobile robots affected by a time delay τ in control inputs and proposes a prediction scheme based on sub-predictors. First, the problem and specific objectives of the thesis are introduced, followed by a brief overview of the state of the art in delayed systems.

The kinematic models of the mobile robots to be used during the work are developed within the next chapter: the omnidirectional mobile robot or (3,0) and the differential drive mobile robot or (2,0). The nature of the delay in the system is also explained and assumed.

Once the problem and systems to be evaluated are presented, the effectiveness of the prediction scheme is analyzed in two different cases. Firstly, the convergence of the omnidirectional robot with variable input delay is evaluated, followed by the convergence of the differential robot with constant time delay. In both cases, the prediction scheme based on sub-predictors is used, which suggests dividing the delay into smaller fractions and using a chain predictor based on a Luenberger observer to estimate future values of the system gradually.

Numerical simulations confirming the previously obtained results are presented in both cases. Additionally, experimental results for the case of the differential robot are shown, demonstrating not only the convergence of prediction errors but also the feasibility of implementation. Finally, the thesis concludes with the conclusions drawn and outlines future work to be carried out.

Agradecimientos

A mis padres y familia

Por todo el apoyo y confianza que me brindaron a lo largo de todo mi posgrado.

A los doctores Martín Velasco Villa y Sabine Marie Sylvie Mondié Cuzange

Por su guía y lecciones que me permitieron realizar este trabajo.

Al jurado evaluador

Por su tiempo y valiosas observaciones.

A la ingeniera Martha Chávez González

Por su ayuda y disposición a lo largo de los años.

A mis compañeros y amigos

Por toda la compañía y el apoyo que me ayudo a seguir avanzando durante el posgrado.

A la sección de Mecatrónica

Por permitirme ser parte y por todas las enseñanzas académicas y personales que aprendí dentro de ella.

Al CONACYT

Por su apoyo económico que hizo posible mis estudios de posgrado.

Contenido

Resumen	III
Agradecimientos	VII
Contenido	XI
Lista de figuras	XIV
Lista de tablas	XV
1. Planteamiento del problema, justificación y objetivos de la tesis	1
1.1. Objetivo general	2
1.2. Objetivos particulares	2
1.3. Metas alcanzadas	2
1.4. Aportaciones del trabajo	2
2. Introducción y estado del arte	3
2.1. Sistemas con retardo	3
2.2. Estabilidad mediante técnicas de Lyapunov	4
2.3. Esquemas de control para sistemas con retardo en la entrada	5
2.3.1. Predictor de Smith	5
2.3.2. Predictores de Smith modificados	6
2.3.3. Asignación finita del espectro	8
2.3.4. Predictor Truncado	10
2.3.5. Predicción basada en subpredictores	12
2.4. Robótica móvil	17
2.5. Problemas de control en robots móviles con retardos	20
2.5.1. Kojima et al., 2010	20
2.5.2. Xue y Yu, 2018	21
2.5.3. Park y Yoo, 2017	23
2.6. Desarrollos previos en la sección de Mecatrónica	25
2.6.1. Fragoso-Rubio et al., 2019	25
2.6.2. Báez-Hernández y Velasco-Villa, 2019	27
3. Modelado de robots móviles	29
3.1. Cinemática del robot omnidireccional	29
3.2. Cinemática del robot diferencial	31
3.2.1. Cambio de coordenadas	32

3.3.	Presencia de retardo en las entradas de control	33
3.4.	Conclusiones del capítulo	34
4.	Robot (3,0) con perturbación en el retardo	35
4.1.	Sistema en adelanto	35
4.2.	Predicor propuesto	35
4.3.	Esquema de control	36
4.4.	Sistema en lazo cerrado	37
4.5.	Análisis de estabilidad	39
4.6.	Resultados en simulación numérica para el robot omnidireccional	42
4.7.	Conclusiones del capítulo	45
5.	Control basado en predicción para un robot diferencial	47
5.1.	Esquema de predicción	47
5.1.1.	Sistema en adelanto	47
5.1.2.	Cadena de subpredicadores	49
5.2.	Errores de predicción	49
5.3.	Dinámica de los errores de inyección	49
5.3.1.	Convergencia de los errores de inyección	50
5.3.2.	Análisis de la dinámica de (5.8a) cuando $\Lambda_{j-1}\bar{e}_{w_{j-1}}(t) = 0$	51
5.3.3.	Análisis de la dinámica de $e_{w_{j3}}(t)$ con $\lambda_{(j-1)3}e_{w_{(j-1)3}}(t) = 0$ en la ecuación (5.8)	56
5.3.4.	Estabilidad del sistema completo (5.8)	57
5.4.	Problema de seguimiento de trayectoria	58
5.5.	Dinámica de los errores de seguimiento	60
5.6.	Sistema en lazo cerrado.	61
5.7.	Análisis de estabilidad	62
5.8.	Estabilidad de $\dot{e}(t) = f(e(t))$	64
5.9.	Resultados en simulación numérica para el robot diferencial	65
5.10.	Conclusiones del capítulo	67
6.	Evaluación experimental	71
6.1.	Plataforma experimental	71
6.1.1.	Computadora central	72
	<i>Robot Operating System (ROS)</i>	72
6.1.2.	Sistema de captura de movimiento	73
6.1.3.	Robot móvil diferencial o (2,0)	73
6.2.	Resultados experimentales	74
6.2.1.	Seguimiento de trayectoria tipo lemniscata con $\tau = 0.12 \text{ seg.}$	75
6.2.2.	Seguimiento de trayectoria tipo parábola con $\tau = 0.12 \text{ seg.}$	78
6.2.3.	Seguimiento de trayectoria tipo parábola con $\tau = 0.9 \text{ seg.}$	81
6.2.4.	Seguimiento de trayectoria tipo lemniscata con $\tau = 0.9 \text{ seg}$ con perturbaciones.	84
6.3.	Conclusiones del capítulo	86
7.	Conclusiones y trabajo futuro	87
7.1.	Conclusión	87
7.2.	Trabajo Futuro	87

A. Dinámica de los errores del robot (3,0)	89
B. Análisis para sistemas con retardos inciertos [1]	93
C. Artículo de revista	95
Bibliografía	109

Lista de Figuras

2.1. Ejemplos de sistemas con retardos	3
2.2. Diagrama de bloques del esquema clásico del predictor de Smith	6
2.3. Diagrama de bloques del predictor de Smith modificado por Palmor y Powers	7
2.4. Diagrama de bloques del predictor de Smith modificado por Astrom, Hang y Lim	8
2.5. Ejemplos de tipos de ruedas.	18
2.6. Robot Omnidireccional o tipo (3,0).	19
2.7. Robot Diferencial o tipo (2,0).	19
3.1. Diagrama cinemático del robot omnidireccional.	29
3.2. Parámetros de la rueda.	30
3.3. Robot móvil diferencial.	32
3.4. Ejemplo de retardo en comunicaciones	34
4.1. Diagrama del sistema.	37
4.2. Interpretación gráfica del instante de tiempo en que se encuentra cada error.	37
4.3. Zona de estabilidad del sistema.	43
4.4. Errores de predicción $\tilde{\rho}_3(t)$	44
4.5. Errores de seguimiento $z_s(t)$	44
4.6. Trayectoria realizada por el robot omnidireccional.	45
5.1. Robot móvil diferencial.	47
5.2. Trayectoria realizada por el robot diferencial.	66
5.3. Errores de predicción $\tilde{w}_3(t)$	67
5.4. Errores de seguimiento $e_s(t)$	68
5.5. Entradas de control del robot diferencial.	69
6.1. Diagrama general de la plataforma experimental.	71
6.2. Sistema de nodos <i>ROS</i>	73
6.3. Marcadores infrarrojos.	73
6.4. Robot <i>Turtlebot 3 Waffle Pi</i> utilizado.	74
6.5. Trayectoria realizada por el robot diferencial con $\tau = 0.12 \text{ seg.}$	76
6.6. Errores de predicción $\tilde{w}_3(t)$ con $\tau = 0.12 \text{ seg.}$	76
6.7. Errores de seguimiento $e_s(t)$ con $\tau = 0.12 \text{ seg.}$	77
6.8. Entradas de control para el robot diferencial con $\tau = 0.12 \text{ seg.}$	77
6.9. Trayectoria realizada por el robot diferencial con $\tau = 0.12 \text{ seg.}$	78
6.10. Errores de predicción $\tilde{w}_3(t)$ con $\tau = 0.12 \text{ seg.}$	79
6.11. Errores de seguimiento $e_s(t)$ con $\tau = 0.12 \text{ seg.}$	79
6.12. Entradas de control para el robot diferencial con $\tau = 0.12 \text{ seg.}$	80

6.13. Trayectoria realizada por el robot diferencial con $\tau = 0.9$ seg.	82
6.14. Errores de predicción $\tilde{w}_3(t)$ con $\tau = 0.9$ seg.	82
6.15. Errores de seguimiento $e_s(t)$ con $\tau = 0.9$ seg.	83
6.16. Entradas de control para el robot diferencial con $\tau = 0.9$ seg.	83
6.17. Trayectoria realizada por el robot diferencial con $\tau = 0.9$ seg.	84
6.18. Errores de predicción $\tilde{w}_3(t)$ con $\tau = 0.9$ seg.	85
6.19. Errores de seguimiento $e_s(t)$ con $\tau = 0.9$ seg.	85
6.20. Entradas de control para el robot diferencial con $\tau = 0.9$ seg.	86

Lista de Tablas

3.1. Parámetros de las ruedas.	30
6.1. Especificaciones <i>Turtlebot 3 Waffle Pi</i>	74
6.2. Ganancias del predictor con retardo $\tau = 0.12 \text{ seg.}$	75
6.3. Ganancias del predictor con retardo $\tau = 0.9 \text{ seg.}$	81

Capítulo 1

Planteamiento del problema, justificación y objetivos de la tesis

La problemática a solucionar en este trabajo de tesis es el seguimiento de trayectorias para robots móviles sujetos a retardos de tiempo. El enfoque aquí presentado busca utilizar un esquema de predicción y con ello poder utilizar una retroalimentación que resuelva el problema de seguimiento de trayectorias o problema de formación de un conjunto de vehículos.

El aumento de la presencia de los robots móviles en la industria y en la vida diaria vuelve a estos una materia de estudio importante en el área de control. Los usos de estos varían desde el transporte de mercancía en almacenes automatizados y vigilancia hasta labores de exploración y rescate. En múltiples tareas, sobre todo en las que los robots se manejan de manera autónoma, es posible que existan retardos que perjudiquen el rendimiento del robot de manera que se provoquen colisiones o errores en el movimiento. Es debido a esto que el interés de este trabajo reside en contrarrestar los efectos de los retardos que puedan presentarse en los sistemas compuestos por robots móviles.

Dichos retardos se encuentran tanto en las señales de entrada como en los estados del sistema. En el primer caso, estos retardos de tiempo son generalmente debidos a los tiempos muertos existentes en las redes de comunicación y a los tiempos de procesamiento. Por otro lado, los retardos existentes en los estados del sistema se deben a la comunicación entre los robots o de manera natural en la definición de algún esquema líder-seguidor.

Para resaltar la importancia de este trabajo se pueden mencionar las siguientes áreas de aplicación:

1. **Exploración/Vigilancia con robot móvil con cámara abordo[2].** En este caso es posible encontrar retardos debidos a los recursos computacionales si el procesamiento de imágenes o mapeo se realizan en la computadora a bordo, este proceso puede generar retardos variantes de acuerdo a los algoritmos utilizados. Por otro lado, si se busca reducir este retardo realizando el cómputo en una computadora externa, el sistema se enfrenta ahora a un retardo producido por la comunicación. Existen múltiples factores, como la velocidad del robot o el terreno, que pueden volver muy importante el solucionar el control a pesar de esos retardos, por ejemplo, un vehículo aéreo no tripulado que realiza acciones de reconocimiento en un área desconocida es más propenso a sufrir esta clase de problemas.
2. **Sistemas de cooperación con múltiples robots móviles [3].** Otro caso particular donde es posible encontrar retardos de tiempo, tanto en las señales de entrada como en los estados, es cuando se maneja un conjunto de robots que necesitan comunicarse entre ellos, con una computadora central o en un esquema descentralizado. Los efectos de los retardos son más evidentes con mayor cantidad de robots en el sistema y con tareas más complejas a realizar. Un ejemplo de esta situación sería

un pelotón de robots que deba seguir un circuito mediante algún esquema líder seguidor, en esta clase de sistemas es necesario un conocimiento preciso de la localización de los robots así como una acción de control eficaz y a tiempo, todo esto para evitar colisiones.

1.1. Objetivo general

Control a distancia de robots móviles sujetos a retardos de tiempo en las señales de entrada. Se analizará el problema de seguimiento de trayectoria, donde una posible solución es utilizar valores futuros de los estados en la solución y para resolverlo se propone el desarrollo de un predictor de estados.

1.2. Objetivos particulares

- Estudiar sistemas lineales y no lineales con retardos de tiempo.
- Robots móviles con retardo en la señal de entrada.
 - Analizar el problema de seguimiento de trayectorias en sistemas con retardo en la entrada constante e incierto.
 - Comparar diferentes esquemas de predicción de estados propuestos en la literatura.
 - Formalizar el esquema del predictor no lineal basado en sub-predictores para estimar los estados en un robot móvil con retardos en la entrada.
 - Analizar la dinámica de los errores de predicción.
 - Analizar la estabilidad del sistema en lazo cerrado utilizando los estados predichos.
 - Realizar evaluaciones numéricas para validar el esquema de predicción.
 - Realizar pruebas experimentales para verificar la eficiencia del esquema de predicción.

Es importante mencionar que se consideraran diferentes tipos de robots móviles, en particular los tipos (3,0) y (2,0).

1.3. Metas alcanzadas

Durante la realización de este trabajo de tesis se lograron las siguientes metas:

- Se logró analizar el esquema de predicción para distintos sistemas y retardos.
- Se publicó un artículo de investigación en la revista IEEE Access titulado "Non-Linear Prediction-Based Trajectory Tracking for Non-Holonomic Mobile Robots"[4].
- Se realizaron los experimentos pertinentes para demostrar el desempeño del sistema.

1.4. Aportaciones del trabajo

- Condiciones de estabilidad para el caso del robot omnidireccional con retardo incierto en la entrada.
- Condiciones de estabilidad para el caso del robot diferencial con retardo constante.
- Experimentos y simulaciones del esquema de predicción aplicado a un robot diferencial.

Capítulo 2

Introducción y estado del arte

2.1. Sistemas con retardo

Los retardos son una problemática que se presenta en una gran variedad de sistemas, desde sistemas biológicos y químicos hasta sistemas robóticos y de telecomunicaciones, [5]. Por ejemplo, en los procesos químicos [6], y en los reactores [7], es frecuente que se presenten intercambios de masa y energía que no ocurren de manera instantánea y, por lo tanto, pueden ser modelados como un retardo en los estados del sistema (Figura 2.1a). Otro ejemplo son los sistemas donde se utiliza la teleoperación, como en el pelotón de robots presentado en la Figura 2.1b, donde es posible que el ambiente, la cantidad de robots y la red de comunicación provoquen retardos en la transmisión de la señal lo cual se refleja en un retardo a la entrada del sistema [8], [9]. Cabe resaltar que ninguno de estos dos tipos de retardo es exclusivo de los sistemas antes presentados, ya que es posible encontrar retardos a la entrada en procesos químicos y viceversa.



(a) Ejemplo de procesos químicos.



(b) Ejemplo de sistema con teleoperación

Figura 2.1: Ejemplos de sistemas con retardos

Los retardos también pueden dividirse dependiendo de su comportamiento en el tiempo, estos pueden ser puntuales o variantes en el tiempo, [10]. Siendo estos últimos los más comunes dentro de los sistemas robóticos debido a la naturaleza de los retardos de comunicación y procesamiento. De manera general, estos sistemas pueden representarse en el caso no lineal mediante un sistema de la siguiente forma

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t - h(t))), \quad t \geq 0$$

donde $h : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ es el retardo. Es frecuente que el sistema sea afín en la señal de entrada, caso en el cual se modela como

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) + g(x(t))u(t - h(t)).$$

Para el caso lineal invariante en el tiempo, se tiene la descripción lineal

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t - h(t))$$

y para un retardo constante se tiene que

$$h(t) = c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

2.2. Estabilidad mediante técnicas de Lyapunov

Al igual que en cualquier tipo de sistema, el análisis de la estabilidad nos permite comprobar la eficacia del esquema de control antes de llevarlo a la práctica. En particular, la estabilidad de los sistemas con retardos puede analizarse a través de funcionales de Lyapunov. Para tal efecto, considere inicialmente la clase general de sistemas

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(t, x_t), \quad t \geq t_0, \\ x_{t_0}(\theta) &= \phi(\theta), \quad \forall \theta \in [-\tau, 0] \end{aligned} \quad (2.1)$$

donde, $x(t)$ es un vector en \mathbb{R}^n y x_t denota el operador de traslación actuando a lo largo de la trayectoria, $x_t(\theta) = x(t + \theta)$.

Primero es importante demostrar por qué es necesario utilizar una técnica distinta al enfoque clásico de Lyapunov. Se considera un sistema lineal de la forma

$$\dot{x}(t) = ax(t) + bx(t - \tau), \quad t \geq 0$$

donde a y b son constantes reales. Siguiendo el método clásico se propone la siguiente función candidata de Lyapunov

$$V(x) = x^2$$

al derivarla se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{V}(x(t)) &= 2x(t)[ax(t) + bx(t - \tau)] \\ &= 2ax^2(t) + 2bx(t)x(t - \tau). \end{aligned}$$

De este resultado se tiene que si $b \neq 0$ entonces no es posible afirmar que \dot{V} sea definida negativa, esto se debe a que no puede comprobarse con certeza que el producto de $x(t)x(t - \tau)$ sea mayor o menor a 0. Lo anterior muestra la necesidad de modificar el método clásico de Lyapunov para poder analizar la estabilidad del sistema (2.1).

Método de Lyapunov-Krasovskii

Presentado primero en [11] y desarrollado ampliamente en múltiples trabajos como [10], este enfoque se introduce a continuación.

Teorema 1. [10] *La solución trivial del sistema (2.1) es uniformemente estable si y solo si existe una funcional definida positiva $V(t, \phi)$ tal que las siguientes condiciones se satisfagan.*

1. *El valor de la funcional a lo largo de las soluciones del sistema, $V(t, x_t)$, no incrementa.*
2. *La funcional es continua en ϕ en el punto 0_h , uniformemente para $t > 0$.*

La solución trivial del sistema (2.1) es uniformemente asintóticamente estable si y solo si además de las condiciones antes mencionadas, se cumple que para cualquier $t \geq 0$ existe un valor positivo $\mu(t_0)$ tal que si $\phi \in PC([- \tau, 0], \mathbb{R}^n)$ y $\|\phi\|_h < \mu(t_0)$, entonces $V(t, x_t(t_0, \phi))$ decrece a cero mientras $t - t_0 \rightarrow \infty$.

Observación 1. [10] *El espacio de las funciones continuas a trozos se expresa como $PC([-h, 0], \mathbb{R}^n)$. Se define para este espacio la siguiente norma estándar uniforme,*

$$\|\phi\|_h = \sup_{\theta \in [-h, 0]} \|\phi(\theta)\|.$$

Es importante mencionar que en los trabajos de Kharitonov [12] y [10] se desarrollan este tipo de funcionales candidatas para obtener una metodología que permite analizar la estabilidad de los sistemas lineales descritos en (2.1).

Además de lo antes mencionado, es posible establecer condiciones suficientes de estabilidad para el sistema (2.1) siguiendo el teorema mencionado en [13].

Teorema 2. *Suponiendo que $u, v, w : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ son funciones continuas no decrecientes, $u(s)$ y $v(s)$ son positivas para $s > 0$, y $u(0) = v(0) = 0$. Si $x(\sigma, \phi)$ es la solución de la ecuación (2.1) a través de (σ, ϕ) y existe una función continua $V : \mathbb{R} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que*

$$\begin{aligned} u(|\phi(0)|) &\leq V(t, \phi) \leq v(|\phi|) \\ \dot{V}(t, \phi) &\leq -w(|\phi(0)|) \end{aligned} \tag{2.2}$$

entonces la solución $x = 0$ de la ecuación (2.1) es uniformemente estable. Si $u(s) \rightarrow \infty$ cuando $s \rightarrow \infty$, entonces la solución de la ecuación (2.1) está uniformemente acotada. Por otro lado, si $w(s) > 0$ para $s > 0$, entonces la solución $x = 0$ es uniformemente asintóticamente estable.

2.3. Esquemas de control para sistemas con retardo en la entrada

2.3.1. Predictor de Smith

La solución clásica y simple propuesta por Smith [14] en 1957 es la más conocida. A pesar de ser una de las soluciones más comunes y sencillas de implementar para compensar tiempos muertos en sistemas

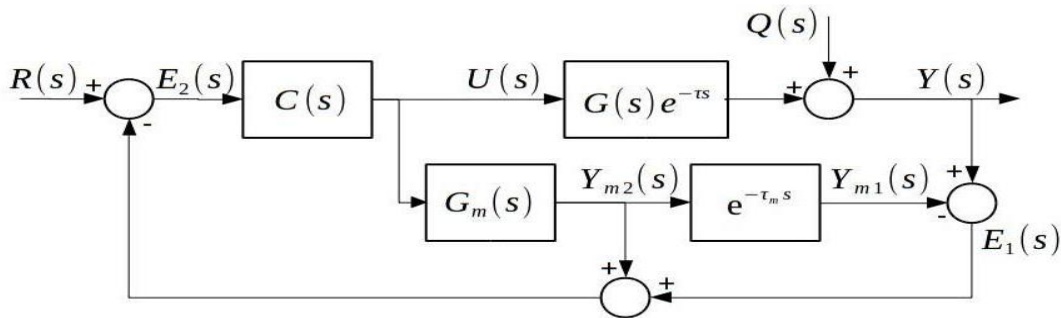


Figura 2.2: Diagrama de bloques del esquema clásico del predictor de Smith

lineales, presenta ciertas restricciones, ya que es necesario tener conocimiento pleno del sistema y que este sea estable en lazo abierto.

En la Figura 2.2 se observa un diagrama de bloques con el esquema del predictor de Smith. En él se aprecian las tres partes que componen el sistema, el Controlador $C(s)$, la planta con retardo a la entrada $G(s)e^{-\tau s}$ y el predictor compuesto por una copia del modelo del sistema $G_m(s)$ y un retardo $e^{\tau_m s}$. El modelo sin retardo de la planta $G_m(s)$ permite predecir la salida de la planta $Y_{m2}(s)$, mientras que la salida después del retardo $Y_{m1}(s)$ se utiliza para calcular el error existente $E_1(s)$ y así corregir mediante el control algunos errores de modelado y el efecto de las perturbaciones $Q(s)$. Del diagrama de bloques, y suponiendo que $G_m(s) = G(s)$, es posible obtener la función de transferencia en lazo cerrado

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{C(s)G(s)e^{-\tau s}}{1 + C(s)G(s)} \quad (2.3)$$

donde es posible ver que el predictor elimina el retardo de la ecuación característica. Sin embargo, este esquema cuenta con varias limitaciones, entre ellas:

1. Este esquema no puede utilizarse en plantas inestables o con integradores ($G(s) = \frac{1}{s}$).
2. Los errores en el modelado ($G_m(s) \neq G(s)$, $\tau_m \neq \tau$) pueden conllevar errores en el control si este no se ajusta de manera adecuada.

Se han presentado múltiples modificaciones a este esquema que solucionan las limitaciones de este enfoque, dichas modificaciones se presentan a continuación.

2.3.2. Predictores de Smith modificados

A continuación se mencionan dos modificaciones importantes presentadas en la literatura.

Palmor y Powers, 1985

Una de las primeras modificaciones realizadas al predictor de Smith para solventar la problemática de perturbaciones externas fue el propuesto por Palmor y Powers [15]. Suponiendo que las perturbaciones $D(s)$ son medibles, estas se retroalimentan de manera que la función de transferencia $\frac{Y(s)}{R(s)}$ y la relación salida/perturbación $\frac{Y(s)}{D(s)}$ queda representada de la siguiente manera

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{C(s)G(s)e^{-\tau s}}{1 + C(s)G(s)} \quad (2.4)$$

$$\frac{Y(s)}{D(s)} = G(s)e^{-\tau s} \left(\frac{1}{1 + C(s)G(s)} \right) \quad (2.5)$$

donde, al igual que en el predictor de Smith clásico, se considera que $G_m(s) = G(s)$ y, por lo tanto $P_m(s) = G_m e(s)e^{-\tau_m s} = G(s)e^{-\tau s}$. En la ecuación (2.5), es notable que, con la correcta elección de $C(s)$ es posible atenuar los efectos de las perturbaciones externas. Las desventajas de esta técnica de control son:

1. Es necesario medir o conocer el comportamiento de las perturbaciones.
2. Al igual que en el caso clásico, el retardo debe ser conocido, por lo que si $\tau_m \neq \tau$ existirán errores.

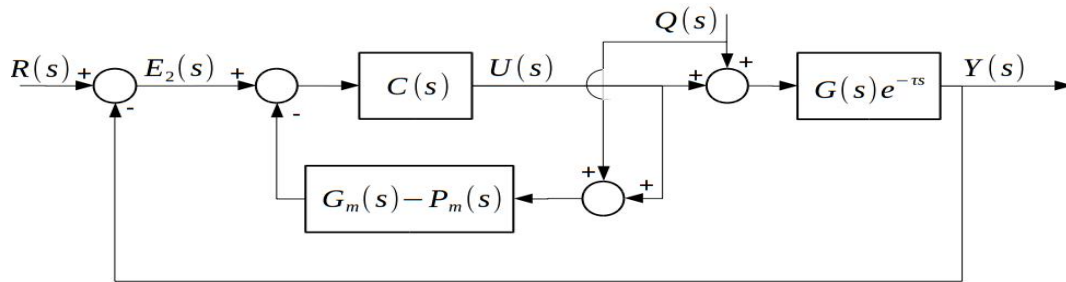


Figura 2.3: Diagrama de bloques del predictor de Smith modificado por Palmor y Powers

Astrom, Hang y Lim, 1994

Para solucionar el problema de plantas con integradores ($\frac{1}{s}$), Astrom et al. [16] propone la modificación del predictor de Smith que se muestra en el diagrama de bloques de la Figura 2.4.

Durante el desarrollo de su trabajo, Astrom et al. suponen que el modelado de la planta es adecuado por lo que $G_m(s) = G(s)$ y $\tau_m = \tau$. De igual manera, en el desarrollo del artículo se estudia el caso particular

$$G(s) = \frac{1}{s}.$$

La función de transferencia de este sistema en lazo cerrado es

$$\begin{aligned} \frac{Y(s)}{R(s)} &= \frac{ke^{-\tau s} (1 + M(s)\frac{1}{s}e^{-\tau s})}{s + k (1 + M(s)\frac{1}{s}e^{-\tau s})} \\ &= \frac{k}{s + k} e^{-\tau s} \end{aligned} \quad (2.6)$$

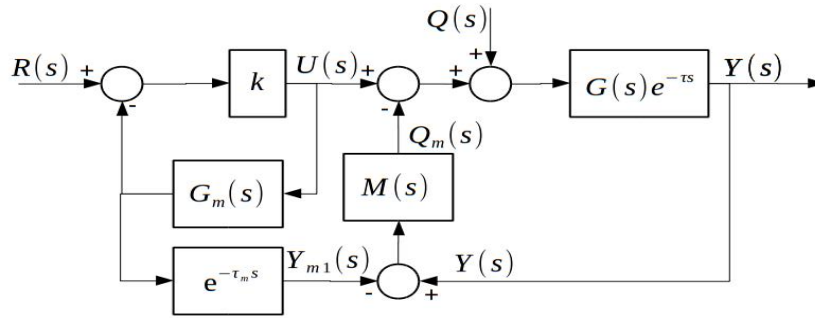


Figura 2.4: Diagrama de bloques del predictor de Smith modificado por Astrom, Hang y Lim

De la ecuación (2.6) se observa que con una correcta elección de k se obtiene una respuesta adecuada del sistema. Por otro lado, la relación salida/perturbación es

$$\frac{Y(s)}{Q(s)} = \frac{\frac{1}{s}e^{-\tau s}}{1 + M(s)\frac{1}{s}e^{-\tau s}}. \quad (2.7)$$

Escogiendo

$$M(s) = \frac{C(s)}{1 + \frac{C(s)}{s(1+\tau s)} - \frac{C(s)}{s}e^{-\tau s}} \quad (2.8)$$

se tiene que la atenuación de las perturbaciones y la estabilidad de la planta se encuentran desacopladas. Debido a esto, es posible seleccionar una retroalimentación o ley de control $C(s)$ que dependa de parámetros distintos a k y permitan estabilizar el sistema. Las ventajas de esta modificación es que no es necesario medir las perturbaciones externas, ya que estas se estiman por medio de la función $M(s)$. Por otro lado, se observa en simulaciones que este predictor es capaz de tolerar ciertas incertidumbres del retardo del orden de 10 %.

2.3.3. Asignación finita del espectro

Manitius y Olbrot, 1979

Manitius y Olbrot [17] introducen la idea de asignación finita de espectro en sistemas con retardo. En este trabajo primero se considera un sistema general de la forma

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + \int_{-h}^0 d\beta(\theta)u(t+\theta) \quad (2.9)$$

donde F es una matriz $m \times n$ que produce un espectro finito del sistema en lazo cerrado y se utiliza la retroalimentación

$$u(t) = Fx(t) + F \int_{-h}^0 \int_{\tau}^0 e^{(\tau-\theta)A} d\beta(\tau)u(t+\theta)d\theta \quad (2.10)$$

donde $\beta(\cdot)$ es una matriz de funciones $n \times m$ de variaciones acotadas. Para probar la eficacia de la ley de control (2.10) proponen que para las condiciones iniciales

$$x(0) \in \mathbb{R}, \quad u(\theta) = \phi(\theta)\theta \in (-h, 0), \quad \phi(\cdot) \in L^1((-h, 0), \mathbb{R}^m)$$

existe una solución única continua $(x(t), u(t)), t \geq 0$ para el sistema (2.9), (2.10). Una condición necesaria y suficiente para la estabilidad asintótica del sistema (2.9), (2.10) es que todas las raíces de la ecuación característica

$$\det \begin{bmatrix} I\lambda - A & -\int_{-h}^0 e^{\lambda\theta} d\beta(\theta) \\ -F & I - F \int_{-h}^0 e^{\tau A} \int_{-h}^0 e^{(\lambda-A)\theta} d\theta d\beta(\tau) \end{bmatrix}$$

tengan partes reales negativas[17]. Al demostrar la estabilidad de ese sistema general, es posible demostrar la estabilidad del sistema particular

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B_0u(t) + B_1u(t-h), \quad x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m \quad (2.11)$$

utilizando la siguiente retroalimentación

$$u(t) = Fx(t) + F \int_{-h}^0 e^{-(h+\theta)A} B_1u(t+\theta) d\theta. \quad (2.12)$$

Kharitonov, 2014

Kharitonov [18], [19], retoma la idea de Manitius y Olbrot y la extiende al caso de sistemas con retardo en el estado y la entrada de forma

$$\dot{x}(t) = A_0x(t) + A_1x(t-h) + Bu(t-\tau) \quad (2.13)$$

donde $A_j, j = 0, 1$ son matrices reales $n \times n$ y B es una matriz real $n \times m$ y los retardos satisfacen que $h \leq \tau$. Se toma en cuenta que la solución del valor inicial del sistema (2.13) es

$$x(t_0 + \theta, t_0, \varphi) = \varphi(\theta), \quad \theta \in [-h, 0]$$

con $t_0 \geq 0$ como el tiempo inicial y φ la función inicial que pertenece al espacio $PC([-h, 0]R^n)$ de funciones continuas definidas en el intervalo $[-h, 0]$ y de rango R^n .

Se denota la matriz fundamental del sistema como $K(t)$. Satisface la ecuación

$$\frac{d}{dt}K(t) = A_0K(t) + A_1K(t-h), \quad t \geq 0$$

con condiciones iniciales $K(t) = 0_{n \times n}, t < 0$ y $K(0) = I_{n \times n}$. Ahora, utilizando la fórmula de Cauchy [20] se expresa la solución del sistema $x(t, t_0, \varphi)$ como

$$x(t, t_0, \varphi) = K(t-t_0)\varphi(0) + \int_{-h}^0 K(t-t_0-\theta-h)A_1\varphi(\theta)d\theta + \int_{t_0}^t K(t-\xi)Bu(\xi-\tau)d\xi. \quad (2.14)$$

Para proponer una retroalimentación, se supone que se conocen las matrices F_0 y F_1 de tal manera que el sistema

$$\dot{x}(t) = (A_0 + BF_0)x(t) + (A_1 + BF_1)x(t - h) \quad (2.15)$$

sea exponencialmente estable. De esta manera se propone la siguiente ley de control

$$u(t) = F_0x(t + \tau) + F_1x(t + \tau - h), \quad t \geq 0 \quad (2.16)$$

la cual, utilizando la solución del sistema obtenida en (2.14) para predecir la solución en los tiempos $t + \tau$, $t + \tau - h$ y $t + \tau - 2h$, permite obtener la ley de control

$$\begin{aligned} u(t) &= \int_{-\tau}^0 F_0K(-\xi)Bu(t + \xi)d\xi + \int_{-\tau}^{-h} F_1K(-h - \xi)Bu(t + \xi)d\xi \\ &= + \int_{-h}^0 F_0K(\tau - \theta - h)A_1x(t + \theta)d\theta + \int_{-h}^0 F_1K(\tau - \theta - 2h)A_1x(t + \theta)d\theta \\ &= [F_0K(\tau) + F_1K(\tau - h)]x(t) \end{aligned} \quad (2.17)$$

donde se supone que la condición inicial de $u(t)$ es

$$u(t) = \psi(t), \quad t \in [-\tau, 0), \quad \psi \in PC([-\tau, 0], R^m).$$

Para el caso particular de $h = 0$, el sistema (2.13) se reduce a

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t - \tau) \quad (2.18)$$

y la matriz fundamental $K(t) = e^{At}$ y la ley de control

$$u(t) = Fe^{A\tau}x(t) + F \int_{t-\tau}^t e^{A(t-\theta)}Bu(\theta)d\theta \quad (2.19)$$

donde $F = F_0 + F_1$ coincide con la presentada en [17] en la ecuación (2.12).

Cabe mencionar que el sistema lineal (2.13) en lazo cerrado con la ley de control (2.16) puede perder su estabilidad cuando se aproximan las integrales mediante sumatorias. Esta desventaja en la implementación se resuelve en [19] y se explicará más a detalle a continuación.

2.3.4. Predictor Truncado

Zuo et al., 2017

Zuo et al. [21] presenta un predictor truncado para predecir los estados futuros del sistema y así poder utilizarlos en una ley de control que estabilice el sistema. Para esto se considera un sistema de la forma

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(\phi(t)) + f(x(t)) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \quad (2.20)$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$ son los estados, $u \in \mathbb{R}^p$ es la señal de entrada, $\phi(t) : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continuamente diferenciable que representa el retardo variable a la entrada, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$ y $C \in \mathbb{R}^{q \times n}$ son matrices constantes y $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, con $f(0) = 0$, es una función no lineal tipo Lipschitz, cuya constante de Lipschitz $\gamma > 0 \in \mathbb{R}$ es tal que

$$\|f(a) - f(b)\| \leq \gamma \|a - b\|$$

Cabe mencionar que la función $\phi(t)$ es continuamente diferenciable, invertible, conocida y cumple con

$$0 < \beta \leq \dot{\phi}(t) < \infty$$

de igual manera, $\phi(t)$ puede ser reescrita como

$$\phi(t) = t - \delta(t)$$

donde existe una constante $h \geq 0$ tal que

$$0 \leq \delta(t) \leq h, \quad t \geq 0$$

Para desarrollar el predictor se supone que las salidas $y(t)$ del sistema (2.20) son las únicas que se pueden medir. Así se propone la siguiente retroalimentación con predictor truncado

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}(t) &= A\hat{x}(t) + Bu(\phi(t)) + L(C\hat{x}(t) - y(t)) \\ u(t) &= Ke^{A(\phi^{-1}(t)-t)}\hat{x}(t) \end{aligned} \quad (2.21)$$

con K y L como matrices de ganancias de control y de predicción respectivamente, las cuales pueden describirse como

$$K = -B^T P_1, \quad L = -P_2^{-1} C^T \quad (2.22)$$

Con este esquema de control y predicción (2.21) se demuestra que el sistema (2.20) es globalmente asintóticamente estable si existe $Y = P_1^{-1} > 0$, $P_2 > 0$, $a > 0$, $\omega_1 \geq 0$ y $\omega_2 \geq 0$ tal que

$$\begin{aligned} \alpha Y &\geq BB^T, \\ \left(A - \frac{1}{2}\omega_1 I\right)^T + \left(A - \frac{1}{2}\omega_1 I\right) &< 0, \\ Y \left(A - \frac{1}{2}\omega_2 I\right)^T + \left(A - \frac{1}{2}\omega_2 I\right) Y &< 0, \\ \begin{bmatrix} YA^T + AY - BB^T + (3a^2 + 1)I & Y \\ Y & -\frac{1}{\sigma} I \end{bmatrix} &< 0, \\ \begin{bmatrix} A^T P_2 + P_2 A - 2C^T C + ae^{\omega_2 h} \beta^{-1} P_1 + \Delta I & P_2 \\ P_2 & -I \end{bmatrix} &< 0 \end{aligned}$$

donde

$$\sigma = 2a^2h^2e^{2\omega_1h}\beta^{-1} + (2 + h^2e^{\omega_1h})\gamma^2 \quad \text{y} \quad \Delta = 2a^2h^2e^{2\omega_1h}\beta^{-1}$$

Utilizando esta técnica, existen las ventajas de que no es necesario modelar la no linealidad $f(x(t))$ para diseñar el predictor truncado, ni tampoco es necesario acceder a todos los estados del sistema, solo es necesaria la salida $y(t)$. Por otro lado, es necesario conocer perfectamente la constante de Lipschitz γ y el comportamiento de $\phi(t)$, lo cual vuelve más complicada su implementación.

2.3.5. Predicción basada en subpredictores

Germani et al., 2002

En el trabajo presentado por Germani et al. [22] se presenta una técnica llamada observador en cadena. Es digna de mención debida a la similitud que presenta con los subpredictores. Se considera un sistema no lineal con retardo en la salida de la forma

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x(t)) + g(x(t))u(t), \quad t \geq -\Delta, \quad x(-\Delta) = \bar{x} \\ \bar{y}(t) &= h(x(t - \Delta)), \quad t \geq 0 \end{aligned} \quad (2.23)$$

donde $\Delta > 0$ es el retardo medido, $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}$, los vectores de funciones f, g y h son C^∞ , la salida $\bar{y}(t) \in \mathbb{R}$ es una función del estado x en el tiempo $t - \Delta$. Posteriormente, se define el mapeo $z = \Phi(x)$ tal que

$$\Phi(x) = [h(x) \quad L_f h(x) \quad \dots \quad L_f^{n-1} h(x)]^T$$

ya $L_f^k h(x)$ representa la derivada de Lie de orden k de la función h a lo largo de f .

Definición. Se dice que el sistema (2.23) es observable a la deriva si la función $z = \Phi(x)$ es un difeomorfismo en todo \mathbb{R}^n .

Para desarrollar el predictor de estados se hacen varias suposiciones en el trabajo, la principal es:

Suposición 1. El sistema (2.23) es observable a la deriva y tanto el mapeo $z = \Phi(x)$ como su inversa $x = \Phi^{-1}(z)$ son globalmente uniformemente Lipschitz.

De esta manera, el jacobiano del mapeo $\Phi(x)$, denotado como $Q(x)$, y de su inversa se definen como

$$Q(x) = \frac{\delta \Phi(x)}{\delta x}, \quad \left. \frac{\delta \Phi^{-1}(z)}{\delta z} \right|_{z=\Phi(x)} = Q^{-1}(x) \quad (2.24)$$

el cual cuenta con las siguientes propiedades

$$Q(x)f(x) = A_n \Phi(x) + B_n L_f^n h(x), \quad h(x) = C_n \Phi(x) \quad (2.25)$$

donde las matrices (A_n, B_n, C_n) definen un grupo Brunowski triple

$$A_n = \begin{bmatrix} 0_{(n-1) \times 1} & I_{n-1} \\ 0 & 0_{1 \times (n-1)} \end{bmatrix}, \quad B_n = \begin{bmatrix} 0_{(n-1) \times 1} \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C_n = [1 \quad 0_{1 \times (n-1)}]. \quad (2.26)$$

Utilizando las definiciones del mapeo, es posible representar el sistema (2.23) en las coordenadas $z(t)$, obteniendo

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= A_n z(t) + \tilde{H}(z(t), u(t)), \quad t \geq -\Delta, \quad z(-\Delta) = \Phi(\bar{x}) \\ \bar{y}(t) &= C_n z(t - \Delta), \quad t \geq 0 \end{aligned} \quad (2.27)$$

donde la matriz $\tilde{H}(z, u)$ es globalmente Lipschitz con respecto a z y tiene una forma

$$\begin{aligned} \tilde{H}(z, u) &= H(x, u)|_{x=\Phi^{-1}(z)} \\ H(x, u) &= B_n L_f^n h(x) + Q(x)g(x)u. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Basándose en el predictor propuesto en [23] y en [24], los autores proponen el siguiente cambio de variables

$$\begin{aligned} x_j(t) &= x(t - \Delta + \frac{j}{m}\Delta), \quad t \geq -\frac{j}{m}\Delta \\ u_j(t) &= u(t - \Delta + \frac{j}{m}\Delta), \quad j = 0, \dots, m \end{aligned} \quad (2.29)$$

e introducen el siguiente Observador en Cadena para el sistema (2.23)

$$\begin{aligned} \hat{x}_0(t) &= f(\hat{x}_0(t)) + g(\hat{x}_0(t))u_0(t) + Q^{-1}(\hat{x}_0(t))K(\bar{y}(t) - h(\hat{x}_0(t))) \\ \hat{x}_j(t) &= f(\hat{x}_j(t)) + g(\hat{x}_j(t))u_j(t) + Q^{-1}(\hat{x}_j(t)) \left\{ e^{A_n \frac{\Delta}{m} j} K(\bar{y}(t) - h(\hat{x}_0(t))) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=0}^{j-1} e^{A_n \frac{\Delta}{m} (j-i)} \left(H(\hat{x}_i(t), u_i(t)) - H(\hat{x}_{i+1}(t - \frac{\Delta}{m}), u_i(t)) \right) \right\} \end{aligned} \quad (2.30)$$

para $j = 1, \dots, m$, $t \geq 0$ y donde K es el vector de ganancias del observador y las matrices $Q(x)$, A_n y $H(x, u)$ provienen de las definiciones obtenidas en (2.24), (2.26) y (2.28) respectivamente. Se demuestra posteriormente que bajo una correcta elección de las ganancias de K y de un valor m lo suficientemente grande, es posible asegurar que los estados estimados, en particular $\hat{x}_m(t)$, convergen exponencialmente a los estados reales del sistema.

Najafi et al., 2013

En el 2013, Najafi et al. propusieron en [25] un método para controlar y estabilizar sistemas con tiempos muertos a la entrada. Este enfoque se basa en utilizar una serie de subpredictores para estimar los valores futuros del sistema y usar esta predicción en un control diseñado para el sistema libre de retardos.

Sea el sistema con retardo a la entrada

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t - \tau) \\ x(t) &= \phi(t), \quad \forall t \in [-d, 0]\end{aligned}\tag{2.31}$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$ son los estados del sistema, $u \in \mathbb{R}^m$ son las entradas de control y $\tau > 0$ es el retardo. Se introduce el predictor-observador

$$\dot{\tilde{x}}(t) = A\tilde{x}(t) + Bu(t) + L(\tilde{x}(t - \tau) - x(t))\tag{2.32}$$

donde $\tilde{x} \in \mathbb{R}^n$ son los estados predichos del sistema. La idea que han propuesto es dividir el retardo y utilizar una estructura secuencial de predictores, así el predictor está compuesto por una cadena de R subpredictores, cada uno estimando los estados $\bar{\tau}$ unidades del tiempo en el futuro

$$\bar{\tau} = \frac{\tau}{R}, \quad R \in \mathbb{Z}^+.\tag{2.33}$$

De esta manera, se obtiene el siguiente sistema de subpredictores

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}}_1(t) &= A\tilde{x}_1(t) + L_1(\tilde{x}_1(t - \bar{\tau}) - \tilde{x}_2(t)) + Bu(t) \\ &\vdots \\ \dot{\tilde{x}}_i(t) &= A\tilde{x}_i(t) + L_i(\tilde{x}_i(t - \bar{\tau}) - \tilde{x}_{i+1}(t)) + Bu(t - (i - 1)\bar{\tau}) \\ &\vdots \\ \dot{\tilde{x}}_R(t) &= A\tilde{x}_R(t) + L_R(\tilde{x}_R(t - \bar{\tau}) - x(t)) + Bu(t - (R - 1)\bar{\tau})\end{aligned}\tag{2.34}$$

con $\tilde{x}_i \in \mathbb{R}^n, i = 1, \dots, R$. Se define

$$\begin{aligned}e_1(t) &= \tilde{x}_1(t - R\bar{\tau}) - \tilde{x}_2(t - (R - 1)\bar{\tau}) \\ &\vdots \\ e_i(t) &= \tilde{x}_i(t - (R - i + 1)\bar{\tau}) - \tilde{x}_{i+1}(t - (R - i)\bar{\tau}) \\ &\vdots \\ e_R(t) &= \tilde{x}_R(t - \bar{\tau}) - x(t).\end{aligned}\tag{2.35}$$

Analizando la dinámica de los errores de la ecuación (2.35) puede verse que si $\tilde{x}_i(t + (i - 1)\bar{\tau})$ se aproxima a $\tilde{x}_{i+1}(t + i\bar{\tau})$, el estado predicho $\tilde{x}_1(t)$ tiende al estado real del sistema $x(t + R\bar{\tau})$ siempre que los errores del sistema (2.35) tiendan a cero.

Con una correcta elección de L_i y R , es posible proponer una ley de control $u(t)$ que utilice los estados predichos $\tilde{x}_i, i = 1, \dots, R$ para estabilizar el sistema en lazo cerrado donde el retardo sea grande y se tengan incertidumbres paramétricas.

Las desventajas que presenta este esquema es que no es robusto ante perturbaciones en el retardo, y que mientras mayor sea el retardo, mayor debe ser la cantidad de subpredictores y, por lo tanto, puede presentarse un problema de procesamiento.

Mazenc y Malisoff, 2017

Continuando con las ideas presentadas anteriormente, Mazenc y Malisoff [26] presentan un esquema de predicción para sistemas variantes en el tiempo con retardos igualmente variantes en el tiempo. En este trabajo se estudian los sistemas de la forma

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t - h(t)) + \delta(t) \quad (2.36)$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$ son los estados del sistema, $u \in \mathbb{R}^m$ son las entradas de control, $h : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ es el retardo variante y conocido y $\delta : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ son perturbaciones o errores de modelado desconocidos pero acotados. Antes de definir el esquema de control y de predicción se deben cumplir las siguientes suposiciones.

Suposición 2. La función h cumple las siguientes características:

1. h es continuamente diferenciable.
2. h se encuentra acotada por arriba por una constante $C_h > 0$.
3. \dot{h} tiene un límite inferior finito $\underline{h} \in \mathbb{R}$.
4. \dot{h} se encuentra acotada por arriba por una constante $l_h > 0 \in (0, 1)$.
5. \dot{h} tiene una constante de Lipschitz global $n_h > 0$.

Suposición 3. Las funciones $A(t)$ y $B(t)$ en (2.36) son acotadas y continuas y existe una función acotada y constante $K : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^{m \times n}$ tal que

$$\dot{x}(t) = [A(t) + B(t)K(t)]x(t) \quad (2.37)$$

sea uniformemente globalmente estable en \mathbb{R}^n .

Como en el trabajo de Najafi et al. se divide el retardo utilizando las siguientes funciones

$$\Omega_i(t) = t - \frac{i}{R}h(t) \quad \text{y} \quad \theta_j(t) = \Omega_{R-j+1}^{-1}(\Omega_{R-j}(t)) \quad (2.38)$$

para $i \in \{0, \dots, R\}$ y $j \in \{0, \dots, R\}$, y se define

$$Q_1 = \dot{\theta}_1 \quad \text{y} \quad Q_i(t) = \dot{\theta}_i(t)Q_{i-1}(\theta_i(t)) \quad \text{para } i > 1. \quad (2.39)$$

Con estas funciones, se propone la siguiente ley de control

$$u(t) = K(t + h(t))z_R(t) \quad (2.40)$$

donde z_R es el vector compuesto por los últimos n componentes del sistema

$$\begin{aligned}\dot{z}_1(t) &= Q_1(t)A(\theta_1(t))z_1(t) + Q_1(t)B(\theta_1(t))u(\Omega_{m-1}(t)) + L_1(t)[z_1(\theta_1^{-1}(t)) - x(t)] \\ \dot{z}_i(t) &= Q_i(t)A(G_i(t))z_i(t) + Q_i(t)B(G_i(t))u(\Omega_{m-i}(t)) + L_i(t)[z_i(\theta_i^{-1}(t)) - z_{i-1}(t)]\end{aligned}\quad (2.41)$$

para $2 \leq i \leq R$, donde

$$\begin{aligned}L_i(t) &= -I_h - Q_i(t)A(G_i(t)) \\ G_i(t) &= \Omega_R^{-1}(\Omega_{R-i}(t)).\end{aligned}$$

Cabe mencionar que $L_i(t)$ es una ganancia dinámica que se multiplica por el error de predicción y $G_i(t)$ representa el instante de tiempo de cada subpredicador, se define de esta manera debido a que el retardo es variante en el tiempo. Utilizando la ley de control (2.40) junto con el sistema de predictores propuesto en (2.41) se logra que el sistema en lazo cerrado sea entrada-estado estable (Input-State Stable, ISS) y, al igual que en el caso anterior, si los límites de la función del retardo aumentan, solo debe aumentarse la cantidad de ecuaciones en el sistema de predictores.

La desventaja de este esquema de control y predicción es la necesidad de conocer el comportamiento de la función de retardo, lo cual puede ser problemático en algunas aplicaciones debido a la naturaleza de los mismos.

Mazenc y Malisoff, 2017

Además de sus aportaciones en los sistemas lineales, en el trabajo presentado por Mazenc y Malisoff [27], se propone un esquema de subpredictores para sistemas no lineales con retardos constantes a la entrada. Así, se considera un sistema de la forma

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t-h), \delta(t)) \quad (2.42)$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$ son los estados del sistema, $u \in \mathbb{R}^c$ es la entrada de control, $\delta \in \mathbb{R}^d$ es una perturbación acotada y medible y $h > 0$ es el retardo constante. Para llevar a cabo el esquema de predicción se hacen las siguientes suposiciones.

Suposición 4. La función f es continua, satisface $f(t, 0, 0, 0) = 0$ para $t > 0$ y existe una constante $k > 0$ tal que para todo $t > 0$ y $U \in \mathbb{R}^c$, la desigualdad

$$|f(t, z_1, U, \Delta_1) - f(t, z_2, U, \Delta_2)| \leq k|z_1 - z_2| + k|\Delta_1 - \Delta_2|$$

se mantiene para todo $z_1 \in \mathbb{R}^n$, $z_2 \in \mathbb{R}^n$, $\Delta_1 \in \mathbb{R}^d$ y $\Delta_2 \in \mathbb{R}^d$.

Suposición 5. Existe una función continua $u_s : [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^c$ que es localmente Lipschitz y que vuelve al sistema

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u_s(t, x(t) + \epsilon(t)), \delta(t))$$

"ISS con respecto a las perturbaciones combinadas (ϵ, δ) .

De esta manera, el trabajo propone que si se satisfacen las Suposiciones 4 y 5 se define una $m \in \mathbb{N}$ que satisfice

$$m > 11.4kh. \quad (2.43)$$

Se escoge cualquier constante $\lambda_a \in (0, 1)$ tal que

$$m > h\sqrt{\frac{2}{k}(1 + \lambda_a)(4k + \lambda_a)^{\frac{3}{2}}}. \quad (2.44)$$

Así, existen funciones $\beta_d \in \mathcal{KL}$ y $\gamma_d \in \mathcal{K}_\infty$ tal que las soluciones $x(t)$ del sistema (2.42) son estables utilizando la siguiente retroalimentación

$$u(t) = u_s(t + h, z_m(t)) \quad (2.45)$$

utilizando z_m como los últimos m componentes del estado del sistema

$$\begin{aligned} \dot{z}_1(t) &= f_0\left(t + \frac{h}{m}, z_1(t), \Phi(t, z_m, 1)\right) - (4k + \lambda_a)\left[z_1\left(t - \frac{h}{m}\right) - x(t)\right] \\ \dot{z}_2(t) &= f_0\left(t + \frac{2h}{m}, z_2(t), \Phi(t, z_m, 2)\right) - (4k + \lambda_a)\left[z_2\left(t - \frac{h}{m}\right) - z_1(t)\right] \\ &\vdots \\ \dot{z}_m(t) &= f_0\left(t + h, z_m(t), \Phi(t, z_m, m)\right) - (4k + \lambda_a)\left[z_m\left(t - \frac{h}{m}\right) - z_{m-1}(t)\right] \end{aligned} \quad (2.46)$$

donde

$$\Phi(t, z_m, i) = u_s\left(t + h - \frac{h(m-i)}{m}, z_m\left(t - \frac{h(m-i)}{m}\right)\right)$$

para todo $t \geq 0$ e $i \in \{1, 2, \dots, m\}$. Con esto, los estados del sistema (2.42) en lazo cerrado satisfacen

$$|x(t)| \leq \beta_d\left(|x|_{[t_0-h, t_0+\frac{h}{m}]} + |z|_{[t_0-h, t_0+\frac{h}{m}]}, t - t_0\right) + \gamma_d(|\delta|_{[t_0, t]})$$

para todo $t_0 \geq \frac{h}{m}$ y todo $t \geq t_0$.

Utilizando esta técnica es posible estimar los estados del sistema con retardos en la entrada arbitrarios. Las desventajas que presenta es que utilizando únicamente la ley de control (2.45) no es posible atenuar completamente la perturbación $\delta(t)$. Sin embargo, es útil para mantener al sistema estable siempre que la perturbación se encuentre acotada.

2.4. Robótica móvil

La robótica puede dividirse en dos diferentes tipos, por un lado, se encuentran los robots manipuladores que son, de manera general, robots fijos compuestos de eslabones que se utilizan para mover o manipular materiales u objetos [28], y por el otro lado, los robots móviles, estos pueden ser descritos como máquinas con un cierto grado de autonomía capaces de trasladarse en el ambiente. Este tipo de robots

puede subdividirse principalmente en tres clases dependiendo del ambiente, los robots móviles aéreos o UAV's (*Unmanned Aerial Vehicles*), los robots móviles acuáticos o AUV (*Autonomous Underwater Vehicles*) y los robots móviles con ruedas, los cuales son los considerados en este trabajo.

Dentro de la categoría de los robots móviles con ruedas existen muchos tipos de robots dependiendo del tipo de ruedas y la posición de estas en el cuerpo del robot, [29]. Los principales tipos de ruedas son los siguientes:

1. Rueda fija: El tipo más sencillo de rueda, se le llama así debido a que se encuentra unida al cuerpo del vehículo por un punto fijo, Figura 2.5a.
2. Rueda de dirección: Similar a la fija con la diferencia de que esta rueda puede girar a lo largo de su eje vertical y, por lo tanto, brindar cierto sentido de dirección al giro de la rueda.
3. Rueda castor: Este tipo también puede girar en el eje vertical, sin embargo, el eje de giro se encuentra desplazado y no en el eje vertical de la rueda tal como se muestra en la Figura 2.5b
4. Rueda sueca: Son un tipo especial de rueda que cuenta con rodillos como en la Figura 2.5c, estos proporcionan dirección de acuerdo a la orientación con que se encuentren respecto a la rueda. Las ruedas suecas permiten que el robot se mueva en cualquier dirección variando únicamente la velocidad de estas.



(a) Rueda fija.



(b) Rueda de castor.



(c) Rueda sueca.

Figura 2.5: Ejemplos de tipos de ruedas.

Definición. *El grado de movilidad del robot móvil es igual al número de grados de libertad directamente controlables por la velocidad de las ruedas. En el caso de robots móviles con ruedas, este parámetro se encuentra siempre entre 1 y 3.*

Definición. *El grado de direccionabilidad del robot móvil es igual al número de grados de libertad directamente controlables por el giro vertical de las ruedas. En el caso de robots móviles con ruedas, este parámetro se encuentra siempre entre 0 y 2.*

Con los tipos de ruedas es posible crear distintas combinaciones y de esa manera crear distintos tipos de robots móviles con ruedas. Este trabajo se centra en dos tipos de robots:

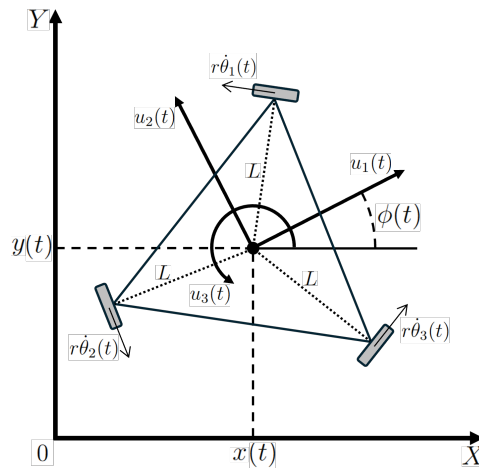


Figura 2.6: Robot Omnidireccional o tipo (3,0).

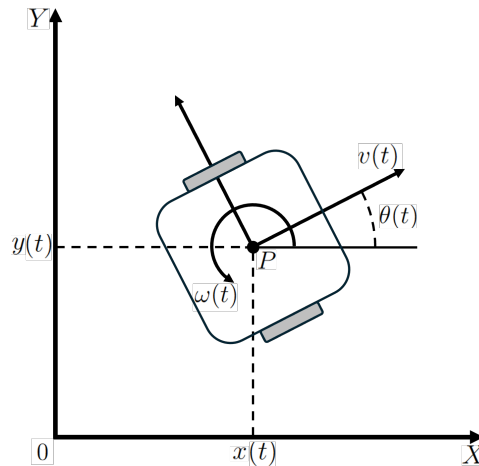


Figura 2.7: Robot Diferencial o tipo (2,0).

1. Tipo (3,0): También conocidos como Omnidireccionales, estos robots tienen un grado de movilidad de 3 y un grado de direccionalidad de 0, lo cual quiere decir que este robot es capaz de moverse con total libertad en el plano en cualquier dirección sin tener que reorientarse. Este tipo de robots está compuesto únicamente de ruedas suecas o castor, un ejemplo se encuentra en la Figura 2.6.
2. Tipo (2,0): Este tipo de robot cuenta con un grado de movilidad de 2 y un grado de direccionalidad de 0, por lo cual este robot puede moverse en el plano de manera restringida. Estos robots tienen por lo general varias ruedas fijas, las cuales comparten un solo eje de giro y es este acomodo el que genera la movilidad restringida del vehículo. En el ejemplo de la Figura 2.7 es posible apreciar que las ruedas solo permiten avanzar y retroceder, sin embargo, es posible hacerlo girar introduciendo velocidades distintas en cada rueda.

2.5. Problemas de control en robots móviles con retardos

Como ya se mencionó anteriormente, es posible que existan retardos en los sistemas robóticos originados por diversos factores tales como el ambiente, la velocidad de procesamiento y la comunicación entre los sistemas. Estos retardos tienen un impacto negativo sobre la estabilidad y desempeño de los sistemas. Numerosos autores se han dado a la tarea de estudiar y remediar las problemáticas resultantes.

2.5.1. Kojima et al., 2010

Kojima et al. [30] propone un predictor de estados para el control de seguimiento de trayectorias de un robot tipo (2,0) con retardo en la entrada. Considera el siguiente modelo cinemático

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= v(t - \tau) \cos(\theta(t)) \\ \dot{y}(t) &= v(t - \tau) \sin(\theta(t)) \\ \dot{\theta}(t) &= \omega(t - \tau)\end{aligned}\tag{2.47}$$

donde $x(t), y(t)$ y $\theta(t)$ son los estados del sistema y $v(t)$ y $\omega(t)$ son las entradas del sistema (velocidad lineal y angular del robot). Para realizar el seguimiento de trayectorias de dicho sistema, el esquema se divide en dos partes:

a) El predictor de estados

$$\begin{bmatrix} \hat{\dot{x}}(t) \\ \hat{\dot{y}}(t) \\ \hat{\dot{\theta}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v(t) \cos(\hat{\theta}(t)) \\ v(t) \sin(\hat{\theta}(t)) \\ \omega(t) \end{bmatrix} - K \begin{bmatrix} \hat{x}(t - \tau) - x(t) \\ \hat{y}(t - \tau) - y(t) \\ \hat{\theta}(t - \tau) - \theta(t) \end{bmatrix}\tag{2.48}$$

donde $K = \text{diag}(k_1, k_2, k_3)$ con $k_i > 0$.

b) El control de seguimiento de trayectoria

$$\begin{aligned}\omega(t) &= \omega_d(t) + \frac{\lambda_1 v_d(t) y_e(t)}{1 + x_e^2(t) + y_e^2(t)} \frac{\sin(\theta_e(t))}{\theta_e(t)} + h_{\lambda_2}(\theta_e(t)) \\ v(t) &= v_d(t) \cos(\theta_e(t)) + h_{\lambda_3}(x_e(t))\end{aligned}\tag{2.49}$$

donde

$$\begin{bmatrix} x_e(t) \\ y_e(t) \\ \theta_e(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\hat{\theta}(t)) & \sin(\hat{\theta}(t)) & 0 \\ -\sin(\hat{\theta}(t)) & \cos(\hat{\theta}(t)) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_d(t) - \hat{x}(t) \\ y_d(t) - \hat{y}(t) \\ \theta_d(t) - \hat{\theta}(t) \end{bmatrix}\tag{2.50}$$

y $\lambda_i, i = 1, 2, 3$ son parámetros positivos de diseño y las funciones $h_{\lambda_2} \in \mathcal{L}_{\lambda_2}$, $h_{\lambda_3} \in \mathcal{L}_{\lambda_3}$ pertenecen a $\mathcal{L}_{\lambda_i} = \{\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \phi \text{ es continuo y cumple con } -\lambda_i \leq \phi(x) \leq \lambda_i \forall x \in \mathbb{R} \text{ y } x\phi(x) > 0 \forall x \neq 0\}$.

Cabe mencionar que $v_d(t), \omega_d(t), x_d(t), y_d(t)$ y $\theta_d(t)$ son los parámetros de la trayectoria deseada que se calculan por medio de un robot virtual definido mediante

$$\begin{aligned}
\dot{x}_d(t) &= v_d(t) \cos(\theta_d(t)) \\
\dot{y}_d(t) &= v_d(t) \sin(\theta_d(t)) \\
\dot{\theta}_d(t) &= \omega_d(t)
\end{aligned} \tag{2.51}$$

Se demuestra en el trabajo que el control de seguimiento de trayectoria presentado en la ecuación (2.49) hace que los errores de seguimiento $x_e(t)$, $y_e(t)$ y $\theta_e(t)$ tiendan a cero si los errores de predicción, definidos como

$$\begin{bmatrix} e_x(t) \\ e_y(t) \\ e_\theta(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{x}(t - \tau) - x(t) \\ \hat{y}(t - \tau) - y(t) \\ \hat{\theta}(t - \tau) - \theta(t) \end{bmatrix} \tag{2.52}$$

convergen a cero, lo que significaría que los estados predichos $\hat{x}(t)$, $\hat{y}(t)$ y $\hat{\theta}(t)$ estiman los valores futuros del robot móvil diferencial.

Las desventajas de este esquema son que a pesar de solucionar el problema, cuentan con condiciones de diseño restrictivas, lo que dificulta su implementación para retardos en la entrada grandes, sin mencionar, que estos deben de ser puntuales e invariantes en el tiempo.

2.5.2. Xue y Yu, 2018

En el trabajo presentado por Xue y Yu [31], estudian el caso del robot tipo (2,0) con retardo a la entrada dividiendo en sistema en 2 subsistemas y aplicando un control por retroalimentación de estados basado en predicción y con un par de observadores para estimar perturbaciones desconocidas. Bajo la suposición de que el robot móvil no derrapa, el modelo del sistema puede describirse de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= v(t) \cos(\theta(t)) \\
\dot{y}(t) &= v(t) \sin(\theta(t)) \\
\dot{\theta}(t) &= \omega(t) \\
\dot{v}(t) &= \tau_1(t - h_1) + p_1 \\
\dot{\omega}(t) &= \tau_2(t - h_2) + p_2
\end{aligned} \tag{2.53}$$

donde $v(t)$, $\omega(t)$ son las velocidades lineal y angular respectivamente y $\tau_1(t)$, $\tau_2(t)$ son las entradas de control, $h_1 > 0$, $h_2 > 0$ son los retardos conocidos constantes y p_1, p_2 son perturbaciones desconocidas que satisfacen $|p_1| \leq p_0, |p_2| \leq p_0$, donde p_0 es una constante positiva y constante.

Para diseñar el control de seguimiento de trayectoria se realiza el siguiente cambio de coordenadas

$$\begin{bmatrix} x_e(t) \\ y_e(t) \\ \theta_e(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta(t)) & \sin(\theta(t)) & 0 \\ -\sin(\theta(t)) & \cos(\theta(t)) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_d(t) - x(t) \\ y_d(t) - y(t) \\ \theta_d(t) - \theta(t) \end{bmatrix} \tag{2.54}$$

donde los estados $x_d(t), y_d(t), \theta_d(t)$ definen la trayectoria deseada a través de un robot virtual como el definido en el sistema (2.51). De esta manera el sistema del error está dado por los dos subsistemas

$$\begin{aligned}\dot{x}_e(t) &= \omega(t)y_e(t) - v(t) + v_d(t) \cos(\theta_e(t)) \\ \dot{y}_e(t) &= -\omega(t)x_e(t) + v_d(t) \sin(\theta_e(t)) \\ \dot{v}(t) &= \tau_1(t - h_1) + p_1\end{aligned}\quad (2.55)$$

$$\begin{aligned}\dot{\theta}_e(t) &= \omega_d(t) - \omega(t) \\ \dot{\omega}(t) &= \tau_2(t - h_2) + p_2\end{aligned}\quad (2.56)$$

Primero se analiza el subsistema (2.56), se realiza el cambio de coordenadas $\bar{\omega}(t) = \omega_d(t) - \omega(t)$ y se define $Z(t) = \begin{bmatrix} \theta_e(t) \\ \bar{\omega}(t) \end{bmatrix}$ para obtener el sistema equivalente

$$\dot{Z}(t) = A_2 Z(t) + B_2(\tau_2(t - h_2) + p_2)\quad (2.57)$$

con

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Ya que la perturbación p_2 es desconocida, se propone el siguiente observador en tiempo finito,

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\omega}}(t) &= v_{10}(t) - \tau_2(t - h_2) \\ v_{10}(t) &= -\lambda_{10}L_1^{1/2}|\hat{\omega}(t) - \bar{\omega}(t)|^{1/2} \text{sign}(\hat{\omega}(t) - \bar{\omega}(t)) - \hat{p}_2(t) \\ \dot{\hat{p}}_2(t) &= \lambda_{11}L_1 \text{sign}(\hat{p}_2(t) - v_{10}(t))\end{aligned}\quad (2.58)$$

donde $\lambda_{10}, \lambda_{11}, L_1$ son parámetros positivos de diseño y $\hat{\omega}(t), \hat{p}_2(t)$ son las estimaciones de $\bar{\omega}(t), p_2$. Con este predictor se propone la siguiente ley de control para $\tau_2(t)$,

$$\tau_2(t) = k_{11} \text{sign}(\hat{\theta}_e(t + h_2)) + k_{12} \text{sign}(\hat{\omega}(t + h_2))\quad (2.59)$$

con k_{11}, k_{12} ganancias positivas que satisfacen que $k_{11} > k_{12} > p_0$. Una vez que con esta ley de control se cumpla que $\theta_e(t) = 0, \bar{\omega}(t) = 0$, el subsistema (2.55) se reduce a,

$$\begin{aligned}\dot{x}_e(t) &= \omega_d(t)y_e(t) - v(t) + v_d(t) \\ \dot{y}_e(t) &= -\omega_d(t)x_e(t) \\ \dot{v}(t) &= \tau_1(t - h_1) + p_1.\end{aligned}\quad (2.60)$$

De manera equivalente al predictor (2.58) se propone un observador para estimar la perturbación p_1 ,

$$\begin{aligned}
\dot{\hat{v}}(t) &= v_{20}(t) - \tau_1(t - h_1) \\
v_{20}(t) &= -\lambda_{20}L_2^{1/2}|\hat{v}(t) - v(t)|^{1/2}\text{sign}(\hat{v}(t) - v(t)) - \hat{p}_1(t) \\
\dot{\hat{p}}_1(t) &= \lambda_{21}L_2\text{sign}(\hat{p}_1(t) - v_{20}(t))
\end{aligned} \tag{2.61}$$

donde $\lambda_{20}, \lambda_{21}, L_2$ son parámetros positivos de diseño y $\hat{v}(t), \hat{p}_1(t)$ son las estimaciones de $v(t), p_1$. Definiendo el cambio de coordenadas $\hat{v}(t) = v_d(t) - \hat{v}(t)$ se propone la siguiente ley de control para $\tau_1(t)$,

$$\begin{aligned}
\tau_1(t) &= \frac{1}{\omega_d(t)}(-k_{21}\text{sign}(\hat{y}_e(t + h_1)) - k_{22}\text{sign}(-\omega_d(t)\hat{x}_e(t + h_1)) \\
&\quad - k_{23}\text{sign}(-\omega_d^2(t)\hat{y}_e(t + h_1) + \omega_d(t)\hat{v}(t + h_1)) - \omega_d^3(t)\hat{x}_e(t + h_1) + \omega_d(t)\dot{v}_d(t + h_1))
\end{aligned} \tag{2.62}$$

con k_{21}, k_{22}, k_{23} constantes positivas que satisfacen

$$\begin{aligned}
-k_{21} + k_{23} &> p_0 \\
-k_{21} + k_{22} + k_{23} &> p_0
\end{aligned}$$

y cualquiera de las siguientes condiciones

$$\begin{aligned}
\text{C.1} \quad k_{21} < k_{22} < k_{23} \quad \text{con} \quad k_{23} < k_{21} + k_{22} \\
\text{C.2} \quad k_{22} < k_{21} < k_{23} \quad \text{con} \quad k_{23} < k_{21} + k_{22} \\
\text{C.3} \quad k_{21} < k_{23} < k_{22} \quad \text{con} \quad k_{22} < k_{21} + k_{23}.
\end{aligned}$$

Tomando en cuenta los predictores (2.58) y (2.61) y la ley de control compuesta por las ecuaciones (2.59) y (2.62) se demuestra que los estados $x_e(t), y_e(t), \theta_e(t)$ convergen a cero en un tiempo finito.

2.5.3. Park y Yoo, 2017

En el artículo [32], se desarrolla un esquema de seguimiento de baja complejidad para robots diferenciales con retardo variable cuyos parámetros son desconocidos y acotados. Para ello, los autores utilizan tanto el modelo dinámico como cinemático del robot, tal como se presenta a continuación,

$$\begin{aligned}
\dot{q}(t) &= S(q(t))\eta(t) \\
M\dot{\eta}(t) + C(\dot{q}(t))\eta(t) + D\eta(t) &= \tau_h(t)
\end{aligned} \tag{2.63}$$

donde,

$$S(q(t)) = \begin{bmatrix} \cos(\theta(t)) & 0 \\ \sin(\theta(t)) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} \frac{m_{11}+m_{12}}{r} & \frac{b(m_{11}-m_{12})}{r} \\ \frac{m_{11}+m_{12}}{r} & -\frac{b(m_{11}-m_{12})}{r} \end{bmatrix},$$

$$C(\dot{q}(t)) = \frac{rm_c d}{2b} \begin{bmatrix} \omega(t) & -b\omega(t) \\ -\omega(t) & -b\omega(t) \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} \frac{d_{11}}{r} & b\frac{d_{11}}{r} \\ \frac{d_{22}}{r} & -b\frac{d_{22}}{r} \end{bmatrix},$$

$$m_{11} = \frac{r^2}{4b^2}(mb^2 + I) + I_\omega, \quad m_{12} = \frac{r^2}{4b^2}(mb^2 - I),$$

$$m = m_c + 2m_\omega, \quad I = m_c d^2 + 2m_\omega b^2 + I_c + I_m.$$

En el modelo antes presentado, $q(t) = [x(t) \ y(t) \ \theta(t)]^T$ son los estados del robot, $\eta(t) = [v(t) \ \omega(t)]^T$ son las velocidades lineal y angular, $\tau_h(t) = [\tau_{1,h}(t) \ \tau_{2,h}(t)]^T = [\tau_1(t-h(t)) \ \tau_2(t-h(t))]^T$ son los torques de las ruedas, b es la mitad del ancho del robot, r es el radio de las ruedas, d es la distancia entre el centro de las ruedas y el centro de masa del robot, m_c y m_ω son la masa del cuerpo y de las ruedas respectivamente, I_c , I_ω y I_m son los momentos de inercia del chasis del robot, de las ruedas con respecto al eje de las mismas y de las ruedas con respecto al eje vertical, y finalmente, d_{11} y d_{12} son coeficientes de amortiguamiento.

El esquema de control que presentan es como sigue,

$$\begin{aligned} \omega_c(t) &= -\frac{k_1 \epsilon_1}{1 - \sigma(t)}, \quad v_c(t) = -k_3 \epsilon_3(t), \\ \tau_{1,h}(t) &= \frac{\bar{\tau}_{1,h}(t) + \bar{\tau}_{2,h}(t)}{2}, \quad \tau_{2,h}(t) = \frac{\bar{\tau}_{1,h}(t) - \bar{\tau}_{2,h}(t)}{2}, \\ \bar{\tau}_{1,h}(t) &= -k_4 \epsilon_4(t-h(t)), \quad \bar{\tau}_{2,h}(t) = -k_4 \epsilon_5(t-h(t)) \end{aligned} \quad (2.64)$$

donde para $i = 1, \dots, 5$,

$$\begin{aligned} \epsilon_i(t) &= \ln \left(\frac{1 + (e_i(t)/\rho_i(t))}{1 - (e_i(t)/\rho_i(t))} \right), \\ e_1(t) &= \theta(t) - \theta_r(t) + \arcsin \left(\frac{k_2 v_r(t) e_2(t)}{\omega_1(t) \rho_2(t)} \right), \\ e_2(t) &= -(x(t) - x_r(t)) \sin(\theta(t)) + (y(t) - y_r(t)) \cos(\theta(t)), \\ e_3(t) &= (x(t) - x_r(t)) \cos(\theta(t)) + (y(t) - y_r(t)) \sin(\theta(t)), \\ e_4(t) &= v(t) - v_c(t) - \kappa \tanh(\phi_1(t)), \\ e_5(t) &= \omega(t) - \omega_c(t) - \kappa \tanh(\phi_2(t)), \\ \omega_1(t) &= \sqrt{1 + \left(\frac{v_r(t) e_2(t)}{\rho_2(t)} \right)^2}, \\ \omega_2(t) &= \sqrt{1 + (1 - k_2^2) \left(\frac{v_r(t) e_2(t)}{\rho_2(t)} \right)^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{\phi}_1(t) &= -\kappa \sinh(\phi_1(t)) + k_\phi \epsilon_4(t) \cosh^2(\phi_1(t)), \\ \dot{\phi}_2(t) &= -\kappa \sinh(\phi_2(t)) + k_\phi \epsilon_5(t) \cosh^2(\phi_2(t)), \\ \sigma(t) &= \frac{k_2 v_r(t) e_3(t)}{\rho_2(t) \omega_1^2(t) \omega_2(t)}, \\ \rho_i(t) &= (\rho_{i,0} - \rho_{i,\infty}) e^{l_i t} + \rho_{i,\infty}.\end{aligned}$$

y $l_i > 0, \rho_{i,0} > 0, \rho_{i,\infty} > 0, k_i > 0, \kappa > 0, k_\phi > 0$ son parámetros de diseño. Con este esquema de control, proponen el siguiente teorema.

Teorema. *Considerando un robot no holonómico con parámetros inciertos constantes y acotados y un retardo variable de tiempo, controlado por el esquema de control antes presentado, suponiendo que las velocidades de referencia $v_r(t), \omega_r(t)$ y $\dot{v}_r(t)$ están acotadas y $v_r(t) \neq 0$, y si se escogen $k_2, \rho_{i,0}, \rho_2(t)$ y $\rho_3(t)$ tal que satisfagan $k_2 < \min\{1, 1/v_{r,max}\}$, $\rho_3(t) < \rho_2(t)$, y $|e_i(0)| < \rho_{i,0}$, es posible asegurar que se cumple lo siguiente,*

$$\begin{aligned}(i) \quad & |e_i(t)| < \rho_i(t), \forall t \geq 0 \\ (ii) \quad & \|[x(t) - x_r(t) \quad y(t) - y_r(t)]^T\| \leq \sqrt{2(\rho_2^2(t) + \rho_3^2(t))}, \forall t \geq 0 \quad y \\ & \lim_{t \rightarrow \infty} \|[x(t) - x_r(t) \quad y(t) - y_r(t)]^T\| \leq \sqrt{2(\rho_{2,\infty}^2 + \rho_{3,\infty}^2)} \\ (iii) \quad & |\theta(t) - \theta_r(t)| < \rho_1(t) + \arcsin(k_2), \forall t \geq 0 \quad y \\ & \lim_{t \rightarrow \infty} |\theta(t) - \theta_r(t)| < \rho_{1,\infty} + \arcsin(k_2)\end{aligned}$$

A pesar de las ventajas que este esquema puede presentar, como el control del sistema con incertidumbre en todos los parámetros, este no presenta una solución que asegure una convergencia asintótica a la trayectoria deseada para el robot. Sin embargo, comparado con esquemas similares, este no necesita de ninguna técnica de adaptabilidad o de aproximación de funciones.

2.6. Desarrollos previos en la sección de Mecatrónica

Dentro de la sección de Mecatrónica del Departamento de Ingeniería Eléctrica del Cinvestav se han llevado a cabo trabajos donde se buscan solucionar los problemas antes mencionados. Entre esos trabajos se mencionan los siguientes que tienen relevancia dentro del tema a tratar.

2.6.1. Fragoso-Rubio et al., 2019

Una propuesta para solucionar la predicción de estados de un sistema lineal es la presentada por Fragoso et al. [33]. En dicho trabajo se proponen un sistema de subpredictores para estimar los valores futuros de un sistema. Se considera un sistema lineal de la forma

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t - \tau) \\ y(t) &= Cx(t)\end{aligned}\tag{2.65}$$

donde las matrices $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ y $C \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ son matrices conocidas, $u(t) \in \mathbb{R}$ es la entrada de control, $y(t) \in \mathbb{R}$ es la salida, $x(t) \in \mathbb{R}$ es el vector de estados del sistema y τ representa el retardo

constante y positivo.

Al igual que en [34], se supone que el par de matrices (A, B) es controlable y el par de matrices (A, C) es observable. Con esto se propone un entero m tal que

$$m = \frac{\tau}{\bar{\tau}}. \quad (2.66)$$

Se define el cambio de variables

$$\begin{aligned} w_1(t) &= x(t + \bar{\tau}) \\ w_2(t) &= w_1(t + \bar{\tau}) = x(t + 2\bar{\tau}) \\ &\vdots \\ w_m(t) &= w_{m-1}(t + \bar{\tau}) = x(t + \tau) \end{aligned} \quad (2.67)$$

y se obtiene el sistema

$$\begin{aligned} \dot{w}_1(t) &= Aw_1(t) + Bu(t - (m-1)\bar{\tau}) \\ \dot{w}_2(t) &= Aw_2(t) + Bu(t - (m-2)\bar{\tau}) \\ &\vdots \\ \dot{w}_m(t) &= Aw_m(t) + Bu(t). \end{aligned} \quad (2.68)$$

Como en Najafi et al. [25], se propone el sistema de subpredictores

$$\begin{aligned} \dot{\hat{w}}_1(t) &= A\hat{w}_1(t) + Bu(t - (m-1)\bar{\tau}) + LCe_{w_1}(t - \bar{\tau}) \\ \dot{\hat{w}}_2(t) &= A\hat{w}_2(t) + Bu(t - (m-2)\bar{\tau}) + LCe_{w_2}(t - \bar{\tau}) \\ &\vdots \\ \dot{\hat{w}}_m(t) &= A\hat{w}_m(t) + Bu(t) + LCe_{w_m}(t - \bar{\tau}) \end{aligned} \quad (2.69)$$

donde

$$\begin{aligned} e_{w_1} &= x(t + \bar{\tau}) - \hat{w}_1(t) = w_1(t) - \hat{w}_1(t) \\ e_{w_j} &= \hat{w}_{j-1}(t + \bar{\tau}) - \hat{w}_j(t) \end{aligned} \quad (2.70)$$

para $j = 2, \dots, m$. En el trabajo se presentan las condiciones necesarias para que los estados predichos converjan a los estados reales y se remarca que para la utilización de este esquema solo es necesario utilizar la salida $y(t)$ en lugar de todos los estados $x(t)$ y que se van estimando poco a poco los intervalos de tiempo $\bar{\tau}$ y así se pueden tolerar retardos mayores.

A diferencia de [25], en este trabajo se explora una nueva manera de utilizar los subpredicadores y así obtener mejores resultados. Tomando en cuenta todo lo anteriormente mencionado se propone el siguiente esquema de subpredicadores de información completa

$$\begin{aligned}
\dot{\hat{w}}_1(t) &= A\hat{w}_1(t) + Bu(t - (m-1)\bar{\tau}) + LCe_{w_1}(t - \bar{\tau}) \\
\dot{\hat{w}}_2(t) &= A\hat{w}_2(t) + Bu(t - (m-2)\bar{\tau}) + LCe_{w_2}(t - \bar{\tau}) + LCe_{w_1}(t - \bar{\tau}) \\
\dot{\hat{w}}_3(t) &= A\hat{w}_3(t) + Bu(t - (m-3)\bar{\tau}) + LCe_{w_3}(t - \bar{\tau}) + LCe_{w_2}(t - \bar{\tau}) + LCe_{w_1}(t - \bar{\tau}) \\
&\vdots \\
\dot{\hat{w}}_m(t) &= A\hat{w}_m(t) + Bu(t) + LCe_{w_m}(t - \bar{\tau}) + LCe_{w_{m-1}}(t - \bar{\tau}) + \dots + LCe_{w_1}(t - \bar{\tau})
\end{aligned} \tag{2.71}$$

donde $L \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ y los errores de predicción se definen de la misma manera que en las ecuaciones (2.70). Al analizar la dinámica de los errores se demuestra que los estados predichos \hat{w}_j convergen exponencialmente a los estados reales del sistema w_i en caso de regulación del sistema. Esta técnica de predicción además de compartir ciertas características de la técnica propuesta en [25], introduce un nuevo esquema para aprovechar todos los estados de los subpredicadores y así lograr una convergencia exponencial. Recientemente, en [35], además de explorar más los análisis aquí presentados, se proponen múltiples ejemplos entre los cuales se destaca una prueba de robustez ante incertidumbres de modelado, el cual muestra resultados favorables de esta técnica.

2.6.2. Báez-Hernández y Velasco-Villa, 2019

Por último, en el artículo presentado por Báez-Hernández y Velasco-Villa [36] se presenta una cadena de subpredicadores como en [33] para controlar un robot tipo (3.0). Esta estrategia de control se basa en el predictor propuesto en [34], de manera que es posible controlar el robot móvil con un retardo a la entrada. El sistema es descrito como,

$$\dot{\check{x}}(t) = -r(J_1 R(\phi))^{-1} \dot{\theta}(t - \tau) \tag{2.72}$$

donde $x_i(t) = [x(t), y(t), \phi(t)]$ son los estados del robot omnidireccional, $\dot{\theta} = [\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2, \dot{\theta}_3]$ son las entradas de control del sistema ($\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2$ son las velocidades lineales y $\dot{\theta}_3$ la velocidad angular) y las matrices se definen como

$$R(\phi(t)) = \begin{bmatrix} \cos \phi(t) & \sin \phi(t) & 0 \\ -\sin \phi(t) & \cos \phi(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad J_1 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & L \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & L \\ 1 & 0 & L \end{bmatrix} \tag{2.73}$$

con r y L como parámetros físicos del sistema, el radio de las ruedas y la distancia del centro del robot a las ruedas, respectivamente. Con esto, se aplica un cambio de variables al sistema considerando la división del retardo $\tau = m\bar{\tau}$

$$\begin{aligned}
\rho_1(t) &= \zeta(t + \bar{\tau}) \\
\rho_2(t) &= \rho_1(t + \bar{\tau}) = \zeta(t + 2\bar{\tau}) \\
&\vdots \\
\rho_m(t) &= \zeta(t + m\bar{\tau}).
\end{aligned}$$

Así, el sistema se reescribe como,

$$\begin{aligned}
\dot{\rho}_1(t) &= -r(J_1R(\phi_{13}))^{-1}\dot{\theta}(t - (m - 1)\bar{\tau}) \\
&\vdots \\
\dot{\rho}_m(t) &= -r(J_1R(\phi_{m3}))^{-1}\dot{\theta}(t).
\end{aligned} \tag{2.74}$$

De manera similar a los trabajos anteriores se introduce el esquema de subpredictores,

$$\begin{aligned}
\dot{\hat{\rho}}_1(t) &= -r(J_1R(\hat{\phi}_{13}))^{-1}\dot{\theta}(t - (m - 1)\bar{\tau}) + \lambda_1 e_{\rho_1}(t - \bar{\tau}) \\
&\vdots \\
\dot{\hat{\rho}}_m(t) &= -r(J_1R(\hat{\phi}_{m3}))^{-1}\dot{\theta}(t) + \lambda_m e_{\rho_m}(t - \bar{\tau}).
\end{aligned} \tag{2.75}$$

Basándose en que los estados predichos $\hat{\rho}_j$ convergen a los estados futuros reales del robot ρ_i se propone la siguiente retroalimentación para solucionar el problema de seguimiento de trayectorias

$$\dot{\theta}(t) = -\frac{1}{r}J_1R(\hat{\rho}_{m3}(t))\{\dot{\rho}_{md}(t) - k[\hat{\rho}_m(t) - \rho_{md}(t)]\}. \tag{2.76}$$

En el trabajo se demuestra la convergencia de los errores de predicción y de seguimiento de trayectoria. Cabe notar que a pesar de funcionar de manera adecuada con retardos constantes, este tipo de esquema de predicción y control no es robusto ante incertidumbres del retardo.

Capítulo 3

Modelado de robots móviles

En este capítulo se muestran los procedimientos para la obtención de los modelos cinemáticos de los robots que se utilizarán a lo largo del documento. Primero se obtiene el modelo del robot móvil omnidireccional seguido de la cinemática del robot móvil diferencial, en la cual se realiza un cambio de variables para desacoplar la dinámica angular de los movimientos en x e y . Por último se presentan los modelos con retardos de tiempo a la entrada de los vehículos y la manera en que estos influyen en las ecuaciones de los modelos cinemáticos.

3.1. Cinemática del robot omnidireccional

En el caso del robot móvil omnidireccional (3:0), se utiliza la metodología y el análisis propuestos en [37] para el robot presentado en la Figura 3.1.

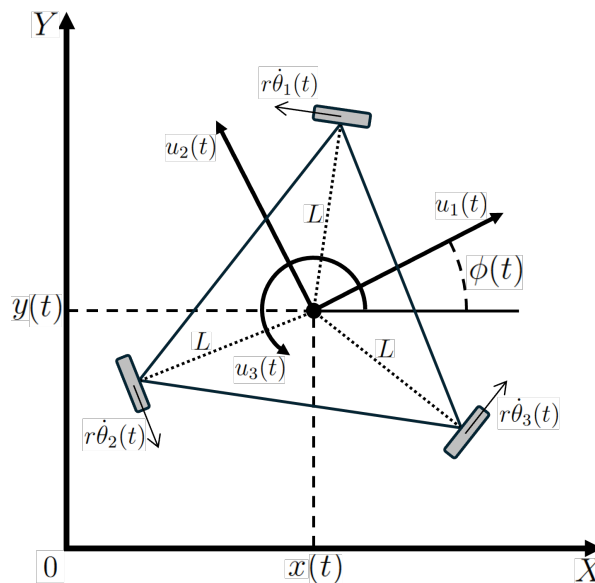


Figura 3.1: Diagrama cinemático del robot omnidireccional.

Para obtener el modelo cinemático del robot (3,0) se utilizan las restricciones de las ruedas del robot en la dirección longitudinal presentadas en [37], que en este caso se consideraran fijas. A partir de la Figura 3.2 se obtiene el modelo,

$$[-\sin(\alpha_i + \beta_i) \quad \cos(\alpha_i + \beta_i) \quad L \cos \beta_i] R(\phi(t)) \dot{\xi}(t) + r_N \dot{\theta}_n(t) = 0 \quad (3.1)$$

donde la posición de la rueda con respecto al centro del robot se representa por medio de la distancia L y el ángulo α_i , la orientación del plano de la rueda i con respecto a L_i esta representado por β_i y el radio de la rueda está descrito por r_N .

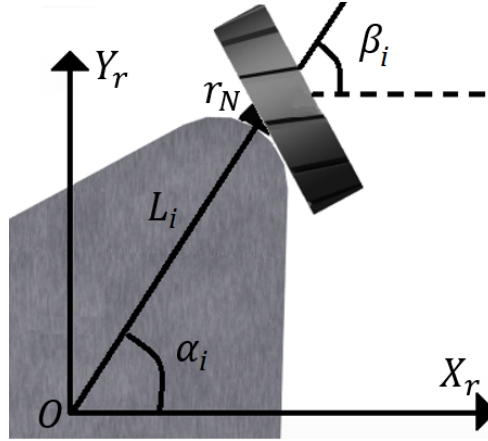


Figura 3.2: Parámetros de la rueda.

Con respecto a la Figura 3.1, se definen los parámetros α_i , β_i y L_i asociados a cada una de las ruedas utilizando el marco de referencia montado sobre el robot $X_r - Y_r$. De esta forma, se obtienen los valores presentados en la Tabla 3.1.

Rueda	α_i	β_i	L_i
1	$\frac{\pi}{6}$	0	L
2	$\frac{5\pi}{6}$	0	L
3	$\frac{3\pi}{2}$	0	L

Tabla 3.1: Parámetros de las ruedas.

Con la información de la Tabla 3.1, es posible obtener el sistema de ecuaciones que representa la velocidad en la dirección longitudinal de cada una de las ruedas de acuerdo al robot descrito en la Figura 3.1,

$$\begin{bmatrix} -\sin(\alpha_1 + \beta_1) & \cos(\alpha_1 + \beta_1) & l_1 \cos \beta_1 \\ -\sin(\alpha_2 + \beta_2) & \cos(\alpha_2 + \beta_2) & l_2 \cos \beta_2 \\ -\sin(\alpha_3 + \beta_3) & \cos(\alpha_3 + \beta_3) & l_3 \cos \beta_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\phi(t)) & \sin(\phi(t)) & 0 \\ -\sin(\phi(t)) & \cos(\phi(t)) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ \phi(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} r & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1(t) \\ \dot{\theta}_2(t) \\ \dot{\theta}_3(t) \end{bmatrix} = 0.$$

Considerando la Tabla 3.1, se obtiene,

$$\begin{bmatrix} -\sin \frac{\pi}{6} & \cos \frac{\pi}{6} & L \\ -\sin \frac{5\pi}{6} & \cos \frac{5\pi}{6} & L \\ -\sin \frac{3\pi}{2} & \cos \frac{3\pi}{2} & L \end{bmatrix} R(\phi(t)) \dot{\zeta}(t) + r\dot{\theta} = 0$$

equivalentemente,

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & L \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & L \\ 1 & 0 & L \end{bmatrix} R(\phi(t)) \dot{\zeta}(t) + r\dot{\theta} = 0$$

o bien,

$$J_1 R(\phi(t)) \dot{\zeta}(t) + r\dot{\theta} = 0 \quad (3.2)$$

donde,

$$\begin{aligned} \zeta(t) &= \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ \phi(t) \end{bmatrix}, & \theta(t) &= \begin{bmatrix} \theta_1(t) \\ \theta_2(t) \\ \theta_3(t) \end{bmatrix}, \\ J_1 &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & L \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & L \\ 1 & 0 & L \end{bmatrix}, & R(\phi(t)) &= \begin{bmatrix} \cos(\phi(t)) & \sin(\phi(t)) & 0 \\ -\sin(\phi(t)) & \cos(\phi(t)) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Acto seguido, se despeja $\dot{\zeta}(t)$ de la ecuación (3.2) para obtener el modelo cinemático del robot omnidireccional,

$$\dot{\zeta}(t) = -r(J_1 R(\phi))^{-1} \dot{\theta}(t). \quad (3.3)$$

3.2. Cinemática del robot diferencial

El segundo modelo cinemático considerado es del robot móvil diferencial o (2,0) presentado en la Figura 3.3. A diferencia del robot omnidireccional, es posible abstraer las ecuaciones cinemáticas del robot, tal como se muestra en [37], y obtener así el siguiente sistema,

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= v(t) \cos(\theta(t)) \\ \dot{y}(t) &= v(t) \sin(\theta(t)) \\ \dot{\theta}(t) &= \omega(t) \end{aligned} \quad (3.4)$$

donde $\zeta(t) = [x(t), y(t), \theta(t)]^T$ son los estados del robot diferencial. Con respecto a la Figura 3.3, el punto $P = (x, y)$ en el marco inercial $X - Y$ representa el punto medio del eje de las ruedas del robot móvil, $\theta(t)$ la orientación con respecto al eje X y $u(t) = [v(t), \omega(t)]^T$ son las entradas del control que representan la velocidad lineal y angular respectivamente.

A partir de las ecuaciones (3.4) se determina que el robot solo puede moverse respetando la restricción no-holonómica,

$$\dot{x}(t) \sin(\theta) - \dot{y}(t) \cos \theta = 0. \quad (3.5)$$

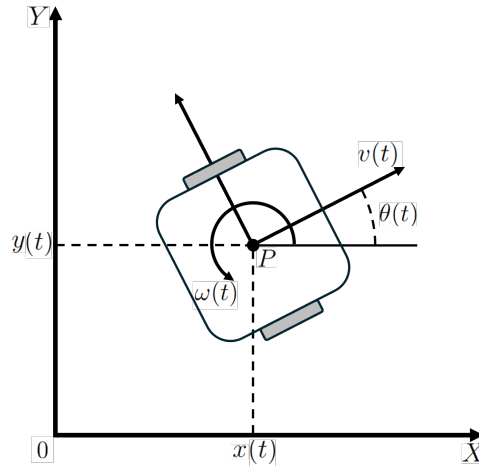


Figura 3.3: Robot móvil diferencial.

3.2.1. Cambio de coordenadas

El robot móvil (3.4) se representa alternativamente al considerar la transformación, globalmente invertible,

$$\zeta_r(t) = \begin{bmatrix} x_r(t) \\ y_r(t) \\ \theta_r(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta(t)) & \sin(\theta(t)) & 0 \\ -\sin(\theta(t)) & \cos(\theta(t)) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ \theta(t) \end{bmatrix}. \quad (3.6)$$

La derivada con respecto al tiempo de $x_r(t)$ es,

$$\begin{aligned} \dot{x}_r(t) &= \dot{x}(t) \cos(\theta(t)) - x(t) \dot{\theta}(t) \sin(\theta(t)) + \dot{y}(t) \sin(\theta(t)) + y(t) \dot{\theta}(t) \cos(\theta(t)) \\ &= v(t) \cos^2(\theta(t)) - x(t) \omega(t) \sin(\theta(t)) + v(t) \sin^2(\theta(t)) + y(t) \omega(t) \cos(\theta(t)) \\ &= v(t) + \omega(t) (-x(t) \sin(\theta(t)) + y(t) \cos(\theta(t))) \end{aligned}$$

esto es,

$$\dot{x}_r(t) = v(t) + \omega(t)y_r.$$

Por otra parte, a partir de $y_r(t)$ se obtiene,

$$\begin{aligned}\dot{y}_r(t) &= -\dot{x}(t) \sin(\theta(t)) - x(t)\dot{\theta}(t) \cos(\theta(t)) + \dot{y}(t) \cos(\theta(t)) - y(t)\dot{\theta}(t) \sin(\theta(t)) \\ &= -v(t) \sin(\theta(t)) \cos(\theta(t)) - x(t)\omega(t) \cos(\theta(t)) + v(t) \sin(\theta(t)) \cos(\theta(t)) \\ &\quad - y(t)\omega(t) \sin(\theta(t)) \\ &= -\omega(t)(x(t) \cos(\theta(t)) + y(t) \sin(\theta(t)))\end{aligned}$$

o bien,

$$\dot{y}_r(t) = -\omega(t)x_r.$$

De lo anterior, el modelo transformado a partir de (3.6) está descrito por,

$$\begin{aligned}\dot{x}_r(t) &= v(t) + \omega(t)y_r(t) \\ \dot{y}_r(t) &= -\omega(t)x_r(t) \\ \dot{\theta}_r(t) &= \omega(t).\end{aligned}\tag{3.7}$$

Observación 2. Tanto el modelo del robot móvil omnidireccional (3.3) como del diferencial (3.7) son obtenidos considerando que se desplazan sobre una superficie plana, con ruedas perpendiculares a la superficie que carecen de patinado o deslizamiento.

3.3. Presencia de retardo en las entradas de control

Una problemática asociada a los sistemas de control son los retardos de tiempo que pueden producirse al controlar un dispositivo (robot móvil) a distancia. Dichos retardos pueden aparecer al recibir información del robot o del ambiente, al procesar la información o al enviar comandos de control al dispositivo.

En la Figura 3.4 se ejemplifica dicho problema. Existe un retardo $\tau_2 > 0$ que simboliza el tiempo que tarda la computadora en recibir la información del robot, por otro lado, $\tau_1 > 0$ es el tiempo que tarda en llegar la señal de control ($u(\xi, \dot{\xi}) = [v(t), \omega(t)]$) al robot. Dicho esto, se tiene entonces un retardo total equivalente,

$$\tau = \tau_1 + \tau_2$$

que simboliza todo el tiempo que se “pierde” obteniendo, procesando y enviando información.

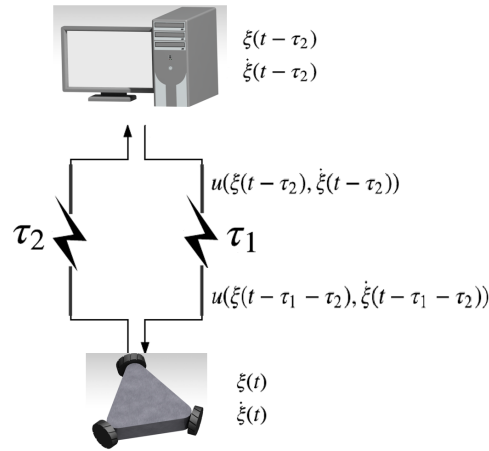


Figura 3.4: Ejemplo de retardo en comunicaciones

Para trasladar dicho comportamiento a los modelos cinemáticos de los robots móviles (Ec. (3.3) y (3.7)) se definen a $\hat{\theta}$ y a $u(t)$ como las entradas de control del robot omnidireccional y diferencial respectivamente. Al sufrir un retardo de comunicación, el modelo cinemático del robot omnidireccional se ve afectado de la siguiente manera,

$$\dot{\xi}(t) = -r(J_1 R(\phi))^{-1} \hat{\theta}(t - \tau) \quad (3.8)$$

y el del robot diferencial queda en la forma,

$$\begin{aligned} \dot{x}_r(t) &= v(t - \tau) + \omega(t - \tau) y_r(t) \\ \dot{y}_r(t) &= -\omega(t - \tau) x_r(t) \\ \dot{\theta}_r(t) &= \omega(t - \tau). \end{aligned} \quad (3.9)$$

3.4. Conclusiones del capítulo

En este capítulo se presenta una breve recapitulación de los modelos cinemáticos que se utilizan a lo largo del trabajo de tesis, y se explica como el retardo se presenta en dichos sistemas. Esto con la finalidad de familiarizar al lector con las clases de sistemas y esquemas que se presentaran en los capítulos siguientes.

Capítulo 4

Robot (3,0) con perturbación en el retardo

Una problemática general dentro de los sistemas con retardo es que no siempre se tiene completo conocimiento del mismo. Es posible expresar la incertidumbre en el retardo τ de la siguiente manera,

$$\tau = h + \eta \quad (4.1)$$

donde $h > \eta \in \mathbb{R}^+$ son el retardo modelado y la incertidumbre respectivamente. Con esto el sistema (3.8) del robot omnidireccional adquiere la forma,

$$\dot{\xi}(t) = -r(J_1 R(\phi))^{-1} \dot{\theta}(t - h - \eta). \quad (4.2)$$

4.1. Sistema en adelanto

Para compensar el retardo, se propondrá un predictor de estados futuros. Para ello es necesario conocer el sistema τ unidades de tiempo en el futuro. Se considera la siguiente definición.

Definición. *Dividiendo el retardo en n fracciones se obtiene,*

$$\bar{h} = \frac{h}{n}.$$

Con esto es posible considerar las variables adelantadas,

$$\rho_i(t) = \xi(t + i\bar{h}) = \rho_{i-1}(t + \bar{h}),$$

para $i = 1, \dots, n$. Así se obtiene el conjunto de sistemas en adelanto,

$$\dot{\rho}_i(t) = -r(J_1 R(\rho_{i3}))^{-1} \dot{\theta}(t - (n - i)\bar{h} - \eta). \quad (4.3)$$

En dichos sistemas es posible apreciar que cuando $i = n$ se tiene el sistema,

$$\dot{\rho}_n(t) = -r(J_1 R(\rho_{n3}))^{-1} \dot{\theta}(t - \eta)$$

el cual es un sistema libre de retardo siempre que la incertidumbre η sea igual a 0.

4.2. Predictor propuesto

Con el sistema en adelanto (4.3) se propone la siguiente cadena de subpredictores tipo Luenberger, tomando en cuenta que η es desconocida,

$$\dot{\hat{\rho}}_i(t) = -r(J_1 R(\hat{\rho}_{i3}))^{-1} \dot{\theta}(t - (n - i)\bar{h}) + \lambda e_{\rho_i}(t - \bar{h}), \quad (4.4)$$

para $i = 1, \dots, n$. Con los errores de inyección definidos como,

$$\begin{aligned} e_{\rho_1}(t) &= \rho_1(t) - \hat{\rho}_1(t) \\ e_{\rho_i}(t) &= \hat{\rho}_{(i-1)}(t + \bar{h}) - \hat{\rho}_i(t) \end{aligned}$$

para $j = 2, 3, \dots, n$. El error de predicción, a diferencia de los errores de inyección, es definido de la siguiente manera,

$$\tilde{\rho}_i(t) = \rho_i(t) - \hat{\rho}_i(t) \quad (4.5)$$

Dicho error, puede ser redefinido con respecto a los errores de inyección $e_{\rho_i}(t)$ dando como resultado,

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}_i(t) &= \rho_i(t) + e_{\rho_i}(t) - \hat{\rho}_{i-1}(t + \bar{h}) \\ &= \rho_i(t) + e_{\rho_i}(t) + e_{\rho_{i-1}}(t + \bar{h}) - \hat{\rho}_{i-2}(t + 2\bar{h}) \\ &\quad \vdots \\ &= \rho_i(t) + e_{\rho_i}(t) + e_{\rho_{i-1}}(t + \bar{h}) + \dots + e_{\rho_2}(t + (i-2)\bar{h}) - \hat{\rho}_1(t + (i-1)\bar{h}) \\ &= \rho_1(t + (i-1)\bar{h}) + e_{\rho_i}(t) + e_{\rho_{i-1}}(t + \bar{h}) + \dots + e_{\rho_2}(t + (i-2)\bar{h}) - \hat{\rho}_1(t + (i-1)\bar{h}) \\ &= e_{\rho_i}(t) + e_{\rho_{i-1}}(t + \bar{h}) + \dots + e_{\rho_2}(t + (i-2)\bar{h}) + e_{\rho_1}(t + (i-1)\bar{h}) \end{aligned}$$

que puede ser reescrito como,

$$\tilde{\rho}_i(t) = \sum_{k=1}^i e_{\rho_k}(t + (i-k)\bar{h}). \quad (4.6)$$

4.3. Esquema de control

El problema a resolver en este caso es el seguimiento de trayectorias y para ello se utiliza la retroalimentación de estados,

$$\dot{\theta}(t) = -\frac{1}{r} J_1 R(\rho_{n3}) \{ \dot{\rho}_{nd}(t) - k[\rho_n(t) - \rho_{nd}(t)] \}, \quad (4.7)$$

donde $\rho_{nd}(t)$ son los estados de la trayectoria deseada.

Sin embargo, como no es posible acceder a los estados futuros del sistema $\rho_n(t)$, se emplean los estados predichos (4.4), dando como resultado la siguiente retroalimentación.

$$\dot{\theta}(t) = -\frac{1}{r} J_1 R(\hat{\rho}_{n3}) \{ \dot{\rho}_{nd}(t) - k[\hat{\rho}_n(t) - \rho_{nd}(t)] \}. \quad (4.8)$$

En la Figura 4.1, se puede apreciar un diagrama de bloques del esquema de predicción y control con $n = 3$.

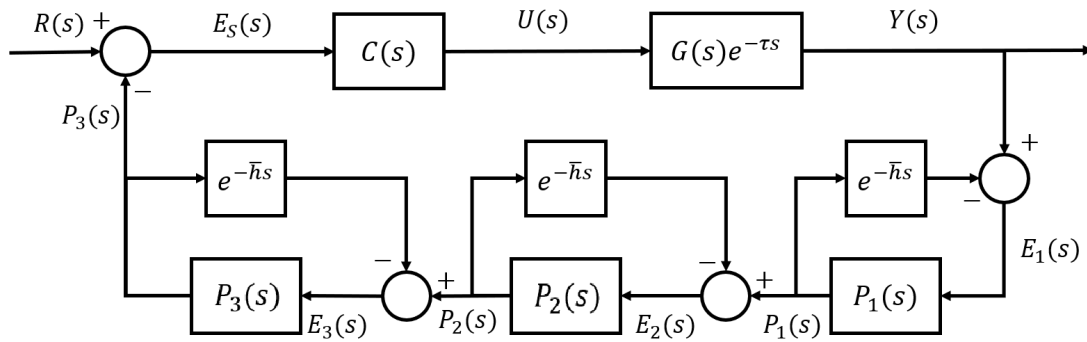


Figura 4.1: Diagrama del sistema.

4.4. Sistema en lazo cerrado

Comparando la trayectoria deseada con los estados del robot, se define el error de seguimiento como,

$$e_s(t) = \rho_n(t) - \rho_{nd}(t). \quad (4.9)$$

Una característica de los errores de inyección y de seguimiento es que todos estos se encuentran en distintos instantes de tiempo, tal como se muestra en la Figura 4.2. Debido a esto, se realiza el siguiente cambio de variables para analizar los errores del sistema en el tiempo t ,

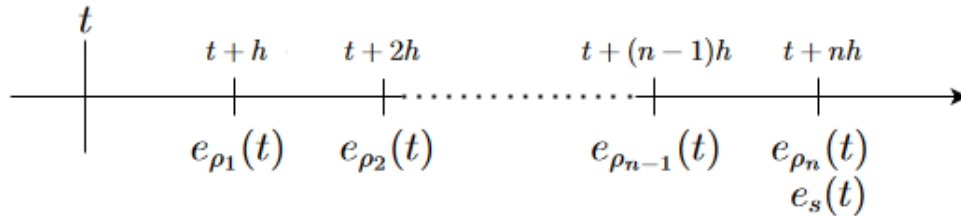


Figura 4.2: Interpretación gráfica del instante de tiempo en que se encuentra cada error.

$$\begin{aligned} z_s(t) &= e_s(t - n\bar{h}) \\ z_i(t) &= e_{\rho_i}(t - i\bar{h}) \end{aligned} \quad (4.10)$$

para $i = 1, 2, \dots, n$.

Derivando los errores del sistema, tal como se presenta en el Apéndice A, da como resultado el sistema en lazo cerrado siguiente,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{z}_s(t) \\ \dot{z}_1(t) \\ \dot{Z}_n(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 0_{1 \times n} \\ kI & -(kI)_{1 \times n} \\ 0_{(n-1) \times 1} & 0_{(n-1) \times n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_s(t) \\ z_1(t) \\ Z_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0_{1 \times n} \\ 0_{n \times 1} & -\Lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_s(t-\bar{h}) \\ z_1(t-\bar{h}) \\ Z_n(t-\bar{h}) \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} -(kI)_{2 \times 1} & (kI)_{2 \times n} \\ 0_{(n-1) \times 1} & 0_{(n-1) \times n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_s(t-\eta) \\ z_1(t-\eta) \\ Z_n(t-\eta) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \gamma_t(t-3\bar{h}) \\ \gamma_1(t-\bar{h}) \\ \Gamma_n(t) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Aquí I es la matriz identidad de dimensión 3, $Z_n(t)$ es un vector $\mathbb{R}^{(n-1) \times 1}$ que contiene los estados z_i para $i = 2, 3, \dots, n$, $\Gamma_n(t)$ es un vector $\mathbb{R}^{(n-1) \times 1}$ que contiene los términos no lineales γ_i para $i = 2, 3, \dots, n$ y Λ_n es una matriz bi diagonal inferior tal que,

$$\Lambda_n = \begin{bmatrix} -\lambda I & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \lambda I & -\lambda I & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda I & -\lambda I & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda I & -\lambda I \end{bmatrix}.$$

De manera alternativa, el sistema puede escribirse del siguiente modo,

$$\dot{z}(t) = \bar{A}_0 z(t) + A_1 z(t-\bar{h}) + A_2 z(t-\eta) + \Gamma(t) \quad (4.12)$$

teniendo en cuenta que,

$$\begin{aligned} \bar{A}_0 &= \begin{bmatrix} 0 & 0_{1 \times n} \\ kI & -(kI)_{1 \times n} \\ 0_{(n-1) \times 1} & 0_{(n-1) \times n} \end{bmatrix}, & A_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 0_{1 \times n} \\ 0_{n \times 1} & -\Lambda_n \end{bmatrix}, & z(t) &= \begin{bmatrix} z_s(t) \\ z_1(t) \\ Z_n(t) \end{bmatrix}, \\ A_2 &= \begin{bmatrix} -(kI)_{2 \times 1} & (kI)_{2 \times n} \\ 0_{(n-1) \times 1} & 0_{(n-1) \times n} \end{bmatrix}, & \Gamma(t) &= \begin{bmatrix} \gamma_t(t-3\bar{h}) \\ \gamma_1(t-\bar{h}) \\ \Gamma_n(t) \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma_t(t) &= \{E(\rho_{n3}(t) - \hat{\rho}_{n3}(t-\eta))\} \{ \dot{\rho}_{nd}(t-\eta) - k[e_s(t-\eta) - \tilde{\rho}_n(t-\eta)] \} \\ &\quad + \dot{\rho}_{nd}(t-\eta) - \dot{\rho}_{nd}(t) \\ \gamma_1(t) &= \{E(\rho_{13}(t) - \hat{\rho}_{13}(t_\eta))\} \{ \dot{\rho}_{nd}(t_\eta) - k[e_s(t_\eta) - \tilde{\rho}_n(t_\eta)] \} + \dot{\rho}_{nd}(t_\eta) \\ &\quad - \{E(\hat{\rho}_{13}(t) - \hat{\rho}_{13}(t_1))\} \{ \dot{\rho}_{nd}(t_1) - k[e_s(t_1) - \tilde{\rho}_n(t_1)] \} - \dot{\rho}_{nd}(t_1) \\ \gamma_i(t) &= \{E(\hat{\rho}_{(i-1)3}(t+\bar{h}) - \hat{\rho}_{n3}(t_i))\} \{ \dot{\rho}_{nd}(t_i) - k[e_s(t_i) - \tilde{\rho}_n(t_i)] \} \\ &\quad - \{E(\hat{\rho}_{i3}(t) - \hat{\rho}_{n3}(t_i))\} \{ \dot{\rho}_{nd}(t_i) - k[e_s(t_i) - \tilde{\rho}_n(t_i)] \} \end{aligned}$$

$$E(\cdot) = \begin{bmatrix} -2 \sin^2(\frac{\cdot}{2}) & -\sin(\cdot) & 0 \\ \sin(\cdot) & -2 \sin^2(\frac{\cdot}{2}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

4.5. Análisis de estabilidad

Para analizar el sistema (4.12) lo primero es modificarlo agregando un término neutro o auxiliar,

$$\begin{aligned}
\dot{z}(t) &= \bar{A}_0 z(t) + A_1 z(t - \bar{h}) + A_2 z(t - \eta) + \Gamma(t) \overbrace{+ A_2 z(t) - A_2 z(t)}^{=0} \\
&= (\bar{A}_0 + A_2) z(t) + A_1 z(t - \bar{h}) - A_2 [z(t) - z(t - \eta)] + \Gamma(t) \\
&= \underline{A}_0 z(t) + A_1 z(t - \bar{h}) - A_2 [z(t) - z(t - \eta)] + \Gamma(t) \\
&= A_0 z(t) + A_1 z(t - \bar{h}) - A_2 \int_{-\eta}^0 \dot{z}(t + \theta) d\theta + \Gamma(t) \\
&= A_0 z(t) + A_1 z(t - \bar{h}) - A_2 \int_{-\eta}^0 [\bar{A}_0 z(t + \theta) + A_1 z(t - \bar{h} + \theta) \\
&\quad + A_2 z(t - \eta + \theta) + \Gamma(t + \theta)] d\theta + \Gamma(t) \\
\dot{z}(t) &= A_0 z(t) + A_1 z(t - \bar{h}) - \underline{F}(z_t) + \Gamma(t) - A_2 \int_{-\eta}^0 \Gamma(t + \theta) d\theta
\end{aligned} \tag{4.13}$$

con,

$$F(z_t) = A_2 \int_{-\eta}^0 [\bar{A}_0 z(t + \theta) + A_1 z(t - \bar{h} + \theta) + A_2 z(t - \eta + \theta)] d\theta,$$

$$A_0 = \bar{A}_0 + A_2 = \begin{bmatrix} -kI & (kI)_{1 \times n} \\ 0_{n \times 1} & 0_{n \times n} \end{bmatrix}.$$

Siguiendo el análisis presentado en [1], se utiliza la siguiente funcional de Lyapunov-Krasovskii,

$$\begin{aligned}
\tilde{V}(z_t) &= v_0(z_t) + \int_{-h}^0 z^T(t + \theta) R_0 z(t + \theta) d\theta + \int_{-h}^0 z^T(t + \theta) A_1^T(\theta + \bar{h}) R_1 A_1 z(t + \theta) d\theta \\
&\quad + |\text{sign}(\eta)| \left(\frac{1+h}{\epsilon} \right) \left[\int_{-h-\eta\chi(\eta)}^0 z^T(t + \theta) A_0^T A_0^T \eta \chi U(0) A_0 A_0 z(t + \theta) d\theta \right. \\
&\quad \left. + \int_{-h-\eta\chi(\eta)}^0 z^T(t + \theta) A_1^T A_0^T(\theta + h + \eta\chi(\eta)) U(0) A_0 A_1 z(t + \theta) d\theta \right]
\end{aligned}$$

con $R_1 > 0$, $M > 0$, $\alpha > 0$,

$$\begin{aligned}
v_0(z_t) &= z^T(t)U(0)z(t) + 2z^T(t) \int_{-h}^0 U(-\theta - h)A_1z(t + \theta)d\theta \\
&\quad + \int_{-h}^0 z^T(t + \theta_1)A_1^T \int_{-h}^0 U(\theta_1 - \theta_2)A_1z(t + \theta_2)d\theta_2d\theta_1, \\
R_0 &= W_0 - 2U(0)|\eta|M^{-1}U(0) > 0, \\
W_0 &= W - hA_1^T R_1 A_1 - \frac{1}{\alpha}[1 + h]|\text{sign}(\eta)| \left[(\eta + \eta\chi(\eta))A_0^T A_0^T U(0)A_0 A_0 \right. \\
&\quad \left. + (h + \eta\chi(\eta))A_1^T A_0^T U(0)A_0 A_1 \right], \\
-W &= A_0^T U(0) + U(0)A_0 + A_1^T U(h) + U^T(h)A_1, \\
\eta_\chi &= \theta + \eta + \eta\chi(\eta) \\
\chi(\eta) &= \begin{cases} 0 & \text{si } \eta < 0 \\ 1 & \text{si } \eta \geq 0 \end{cases}.
\end{aligned}$$

Al derivar la funcional $\tilde{V}(z_t)$ a lo largo de las soluciones del sistema (desarrollo en Apéndice B) se tiene,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\tilde{V}(z_t) &= z^T(t)[R_0 - W_0]z(t) \\
&\quad + 2 \left[\Gamma(t) - F(z_t) - A_2 \int_{-\eta}^0 \Gamma(t + \theta)d\theta \right]^T [U(0)z(t) \\
&\quad + \int_{-h}^0 U(-\theta - h)A_1z(t + \theta)d\theta] \\
&\quad - z^T(t - h)R_0z(t - h) - \int_{t-h}^t z^T(\theta)A_1^T R_1 A_1 z(\theta)d\theta \\
&\quad - |\text{sign}(\eta)| \left(\frac{1+h}{\epsilon} \right) \left[\int_{t-\eta-\eta\chi(\eta)}^t z^T(\theta)A_0^T A_0^T A_0 A_0 z(\theta)d\theta \right. \\
&\quad \left. + \int_{t-h-\eta\chi(\eta)}^t z^T(\theta)A_1^T A_0^T A_0 A_1 z(\theta)d\theta \right].
\end{aligned} \tag{4.14}$$

Se tiene que $F(z_t)$ cumple las siguientes características,

$$2F^T(z_t) \left[U(0)z(t) + \int_{-h}^0 U(-\theta - h)A_1z(t + \theta)d\theta \right] = 2F_1(z_t) + 2F_2(z_t)$$

con,

$$F_1(z_t) = \left[A_2 \int_{-\eta}^0 [\bar{A}_0 z(t+\theta) + A_1 z(t-h+\theta) + A_2 z(t-\eta+\theta)] d\theta \right]^T [U(0)z(t)]$$

$$F_2(z_t) = \left[A_2 \int_{-\eta}^0 [\bar{A}_0 z(t+\theta) + A_1 z(t-h+\theta) + A_2 z(t-\eta+\theta)] d\theta \right]^T$$

$$\left[\int_{-h}^0 U(-\theta-h) A_1 z(t+\theta) d\theta \right].$$

Estos términos se mayorizan usando la identidad $2a^T b \leq a^T M a + b^T M^{-1} b$ donde $M > 0$,

$$|2F_1(z_t)| \leq \left| \int_{-\eta}^0 2A_2 [\bar{A}_0 z(t+\theta) + A_1 z(t-h+\theta) + A_2 z(t-\eta+\theta)] U(0)z(t) d\theta \right|$$

$$\leq \text{sign}(\eta) \int_{-\eta}^0 F^T(z_t, \theta) M F(z_t, \theta) d\theta + |\eta| z^T(t) U(0) M^{-1} U(0) z(t),$$

y,

$$|2F_2(z_t)| \leq \left| \left[A_2 \int_{-\eta}^0 [\bar{A}_0 z(t+\theta) + A_1 z(t-h+\theta) + A_2 z(t-\eta+\theta)] d\theta \right]^T \right.$$

$$\left. \left[\int_{-h}^0 U(-\theta-h) A_1 z(t+\theta) d\theta \right] \right|$$

$$\leq \text{sign}(\eta) \int_{-\eta}^0 F^T(z_t, \theta) M F(z_t, \theta) d\theta$$

$$+ |\eta| \int_{-h}^0 z^T(t+\theta) A_1^T U(h+\theta) M^{-1} U(h+\theta) A_1 z(t+\theta) d\theta,$$

donde,

$$M = \frac{1}{\epsilon} U(0)$$

y después de un par de transformaciones se obtiene,

$$|2F_1(z_t) + 2F_2(z_t)| \leq z^T(t) W z(t) + \int_{-h}^0 z^T(t+\theta) A_1^T R_1 A_1 z(t+\theta) d\theta$$

$$+ |\text{sign}(\eta)| \left(\frac{1+h}{\epsilon} \right) \left[\int_{t-\eta-\eta\chi(\eta)}^t z^T(\theta) A_0^T A_0^T A_0 A_0 z(\theta) d\theta \right. \quad (4.15)$$

$$\left. + \int_{t-h-\eta\chi(\eta)}^t z^T(\theta) A_1^T A_0^T A_0 A_1 z(\theta) d\theta \right].$$

De esta manera se tiene que,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \tilde{V}(z_t) &\leq -z^T(t)R_0z(t) + 2[\Gamma(t) \\
&\quad - A_2 \int_{-\eta}^0 \Gamma(t+\theta)d\theta]^T \left[U(0)z(t) + \int_{-h}^0 U(-\theta-h)A_1z(t+\theta)d\theta \right] \\
&\leq -z^T(t)R_0z(t) + [2 + a_1h + a_2\eta]vL_c \|z(t)\|^2 \\
&\quad + [1 + a_2\eta]va_1L_c \int_{-h}^0 \|z(t+\theta)\|^2 d\theta + [1 + a_1h]va_2L_c \int_{\eta}^0 \|z(t+\theta)\|^2 d\theta
\end{aligned} \tag{4.16}$$

donde, $a_1 = \|A_1\|$, $a_2 = \|A_2\|$, $v = \sup_{\tau \in [0, h]} \|U(\tau)\|$ y $\|\Gamma(t)\| \leq L_c \|z(t)\|$.

Modificando la funcional $\tilde{V}(z_t)$ de la siguiente manera,

$$\begin{aligned}
\tilde{V}_p(z_t) &= \tilde{V}(z_t) + 2\frac{\mu}{h} \int_{t-h}^t z^T(\theta)[h-t+\theta]U^T(h)A_1z(\theta)d\theta \\
&\quad + 2\frac{\mu}{\eta} \int_{t-\eta}^t z^T(\theta)[\eta-t+\theta]U(0)A_0z(\theta)d\theta
\end{aligned} \tag{4.17}$$

con $\mu > 0$, se obtiene la siguiente derivada,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \tilde{V}_p(z_t) &= \frac{d}{dt} \tilde{V}(z_t) + 2z^T(t) \left[2U(0)A_0 + 2U^T(h)A_1 \right] z(t) \\
&\quad - 2\frac{\mu}{h} \int_{t-h}^t z^T(\theta)U^T(h)A_1z(\theta)d\theta - 2\frac{\mu}{\eta} \int_{t-\eta}^t z^T(\theta)U(0)A_0z(\theta)d\theta \\
&= \frac{d}{dt} \tilde{V}(z_t) - \mu z^T(t)Wz(t) \\
&\quad - 2\frac{\mu}{h} \int_{t-h}^t z^T(\theta)U^T(h)A_1z(\theta)d\theta - 2\frac{\mu}{\eta} \int_{t-\eta}^t z^T(\theta)U(0)A_0z(\theta)d\theta.
\end{aligned} \tag{4.18}$$

Por lo que $\frac{d}{dt} (\tilde{V}_p(x_t)) < 0$ sí se cumple que,

$$\begin{aligned}
i) \quad &R1 \geq 2U(0)|\eta| > 0 \\
ii) \quad &\mu\lambda_{\min}(W) \geq [2 + a_1h + a_2\eta]vL_c \\
iii) \quad &2\mu[v_{\min}] \geq [1 + a_2\eta]vhL_c \\
iv) \quad &2\mu a_0 \geq [1 + a_1h]a_2\eta L_c.
\end{aligned} \tag{4.19}$$

Así, mientras se cumplan las condiciones anteriores, el sistema (4.12) resulta asintóticamente estable.

4.6. Resultados en simulación numérica para el robot omnidireccional

Para evaluar numéricamente el seguimiento de trayectoria se define una trayectoria tipo lemniscata descrita con las siguientes ecuaciones,

$$\rho_{nd1} = A \cos(pt)$$

$$\rho_{nd2} = B \sin(2pt)$$

donde $A = 1$, $B = 0.4$ y $p = \frac{\pi}{20}$.

Los parámetros del robot y de la retroalimentación son,

$$L = 0.1877 \text{ m}$$

$$r = 0.0381 \text{ m}$$

$$n = 3$$

$$k = 1$$

$$h = 1.5$$

Utilizando dichos parámetros, se analiza la región de estabilidad en función de η y λ usando el método por LMI presentado en [38] y las condiciones de estabilidad antes presentadas. A continuación, en la figura (4.3) se pueden apreciar los puntos (de color azul) donde el sistema es estable.

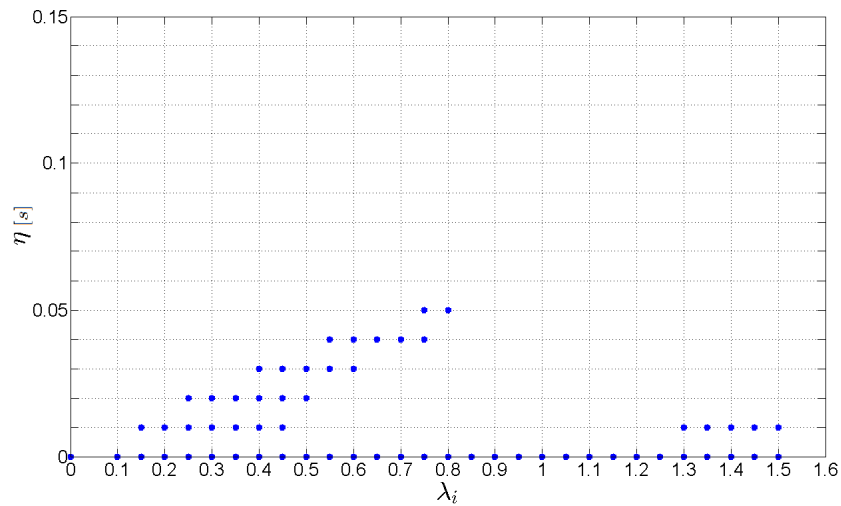


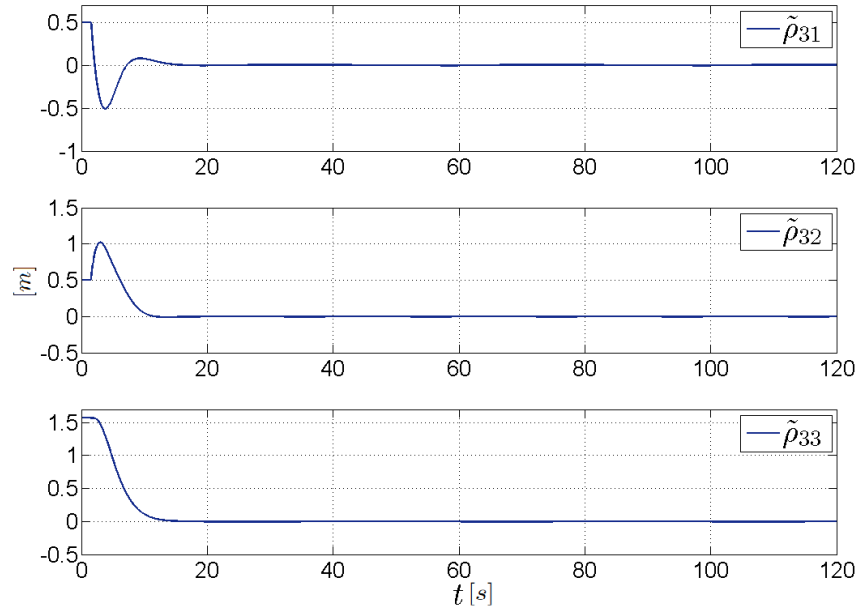
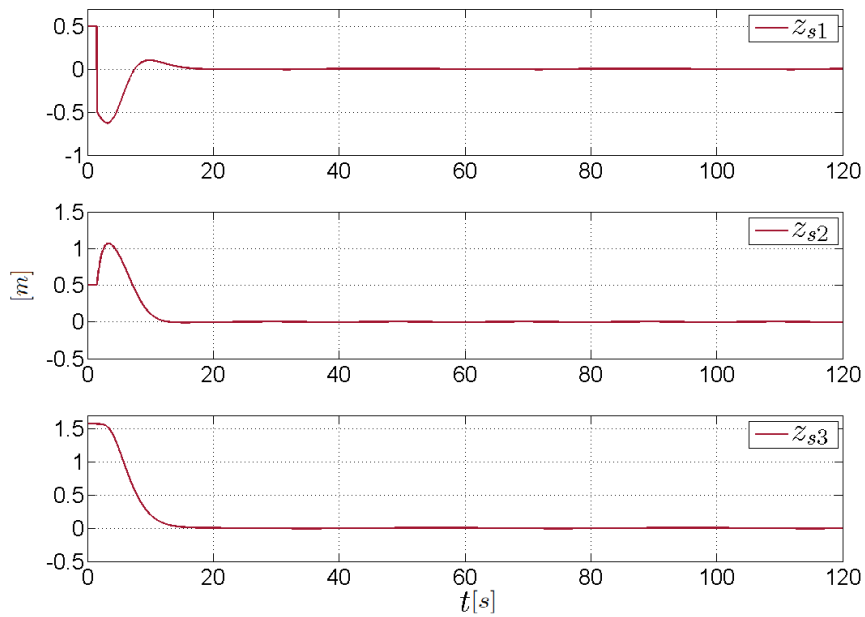
Figura 4.3: Zona de estabilidad del sistema.

Usando esta información, se utilizan la siguiente ganancia y perturbación del retardo,

$$\lambda = 0.5$$

$$\eta = 0.03 \text{ seg}$$

Obteniendo los siguientes resultados,

Figura 4.4: Errores de predicción $\tilde{\rho}_3(t)$.Figura 4.5: Errores de seguimiento $z_s(t)$.

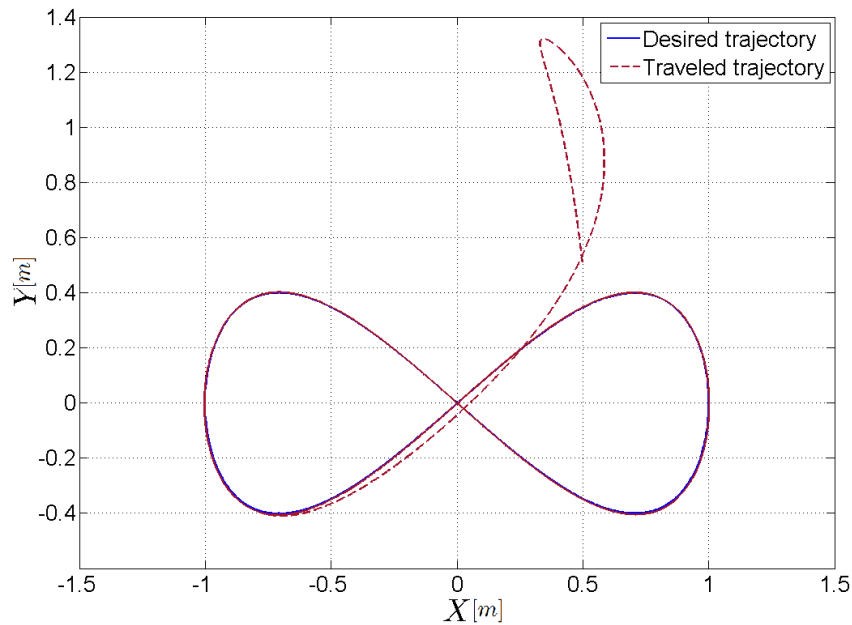


Figura 4.6: Trayectoria realizada por el robot omnidireccional.

En la Figura 4.6 se observa que el robot omnidireccional converge satisfactoriamente a la trayectoria deseada, resultado que se ve reflejado en los errores de predicción y de seguimiento presentados en las Figuras 4.4 y 4.5 respectivamente. De esta manera se puede demostrar que a pesar de sufrir una leve perturbación el esquema de predicción puede seguir funcionando eficientemente.

4.7. Conclusiones del capítulo

En este capítulo se presenta un esquema de predicción para el robot omnidireccional y los efectos que una perturbación tiene en el desempeño del robot, ya que estos representan una situación más cercana a la realidad. A pesar de que el rango de estabilidad asintótica podría considerarse pequeño, es factible utilizarlo debido a la flexibilidad que los subpredictores le otorgan al sistema, sin mencionar que aunque el sistema deje de ser asintóticamente estable, es posible observar un comportamiento estable que oscile alrededor de la trayectoria. Este resultado motiva la búsqueda de áreas de oportunidad en el marco de este esquema.

Capítulo 5

Control basado en predicción para un robot diferencial

A diferencia del robot omnidireccional antes presentando y tal como se puede apreciar en el Capítulo 3, el movimiento en el plano del robot diferencial se encuentra limitado por la restricción no holonómica (3.5), presentada de nuevo a continuación,

$$\dot{x}(t) \sin(\theta) - \dot{y}(t) \cos(\theta) = 0.$$

Debido a esto, la estrategia de control debe ser modificada lo que dificulta el análisis de estabilidad del esquema de predicción y del sistema en lazo cerrado. Por este motivo se considera un retardo constante en lugar de uno variante en el tiempo.

5.1. Esquema de predicción

5.1.1. Sistema en adelanto

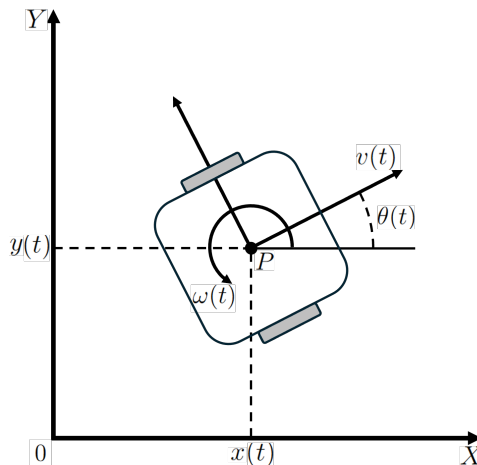


Figura 5.1: Robot móvil diferencial.

Recordando el modelo del robot diferencial (3.9),

$$\begin{aligned}\dot{x}_r(t) &= v(t-h) + \omega(t-h)y_r(t) \\ \dot{y}_r(t) &= -\omega(t-h)x_r(t) \\ \dot{\theta}_r(t) &= \omega(t-h)\end{aligned}$$

se propone un predictor que estime el estado futuro del sistema para compensar los efectos del retardo. Lo primero que se necesita es adelantar el sistema presentado en (3.9), tomando en cuenta la siguiente definición.

Definición. Existe una $n \in \mathbb{N}$ tal que,

$$h = n\bar{h}$$

donde n es la cantidad de fracciones en que se divide el retardo h .

Para determinar la dinámica del robot diferencial $j\bar{h}$ unidades de tiempo en el futuro, se proponen los siguientes conjuntos de coordenadas,

$$\begin{aligned}w_{j1}(t) &= x_r(t + j\bar{h}) = w_{(j-1)1}(t + \bar{h}) \\ w_{j2}(t) &= y_r(t + j\bar{h}) = w_{(j-1)2}(t + \bar{h}) \\ w_{j3}(t) &= \theta_r(t + j\bar{h}) = w_{(j-1)3}(t + \bar{h}).\end{aligned}\tag{5.1}$$

para $j = 1, 2, \dots, n$.

De esta manera, se obtienen los sistemas en adelante,

$$\begin{aligned}\dot{w}_{j1}(t) &= v(t - (n-j)\bar{h}) + \omega(t - (n-j)\bar{h})w_{j2}(t) \\ \dot{w}_{j2}(t) &= -\omega(t - (n-j)\bar{h})w_{j1}(t) \\ \dot{w}_{j3}(t) &= \omega(t - (n-j)\bar{h})\end{aligned}\tag{5.2}$$

y, por lo tanto, cuando $j = n$ se tiene que,

$$\begin{aligned}\dot{w}_{n1}(t) &= v(t) + \omega(t)w_{n2}(t) \\ \dot{w}_{n2}(t) &= -\omega(t)w_{n1}(t) \\ \dot{w}_{n3}(t) &= \omega(t)\end{aligned}\tag{5.3}$$

que corresponde a la dinámica del sistema original adelantado h unidades de tiempo.

5.1.2. Cadena de subpredicadores

Se propone la siguiente cadena de subpredicadores tipo Luenberger para el robot diferencial,

$$\begin{aligned}\dot{\hat{w}}_{j1}(t) &= v(t - (n - j)\bar{h}) + \omega(t - (n - j)\bar{h})\hat{w}_{j2}(t) + \lambda_{j1}e_{w_{j1}}(t - \bar{h}) \\ \dot{\hat{w}}_{j2}(t) &= -\omega(t - (n - j)\bar{h})\hat{w}_{j1}(t) + \lambda_{j2}e_{w_{j2}}(t - \bar{h}) \\ \dot{\hat{w}}_{j3}(t) &= \omega(t - (n - j)\bar{h}) + \lambda_{j3}e_{w_{j3}}(t - \bar{h})\end{aligned}\quad (5.4)$$

donde $\lambda_{j1}, \lambda_{j2}, \lambda_{j3} \in \mathbb{R}^+$. Los errores de inyección se definen como,

$$\begin{aligned}e_{w_{11}}(t) &= w_{11}(t) - \hat{w}_{11}(t) & e_{w_{j1}}(t) &= \hat{w}_{(j-1)1}(t + \bar{h}) - \hat{w}_{j1}(t) \\ e_{w_{12}}(t) &= w_{12}(t) - \hat{w}_{12}(t) & e_{w_{j2}}(t) &= \hat{w}_{(j-1)2}(t + \bar{h}) - \hat{w}_{j2}(t) \\ e_{w_{13}}(t) &= w_{13}(t) - \hat{w}_{13}(t) & e_{w_{j3}}(t) &= \hat{w}_{(j-1)3}(t + \bar{h}) - \hat{w}_{j3}(t)\end{aligned}$$

para $j = 2, 3, \dots, n$.

5.2. Errores de predicción

Como en el caso del robot omnidireccional, los errores de predicción \tilde{w}_n , a diferencia de los errores de inyección, se definen como,

$$\tilde{w}_n = [\tilde{w}_{n1} \ \tilde{w}_{n2} \ \tilde{w}_{n3}]^T = w_n(t) - \hat{w}_n(t). \quad (5.5)$$

Lema 1. *Los errores de predicción (5.5) convergen a cero si y solo si los errores de inyección (5.1.2) convergen también a cero.*

Demostración. *Dada la definición de los errores de inyección (5.1.2) se tiene que los errores de predicción \tilde{w}_n pueden reescribirse como,*

$$\begin{aligned}\tilde{w}_n(t) &= w_n(t) + e_{w_n}(t) - \hat{w}_{n-1}(t + \bar{h}) \\ &= w_n(t) + e_{w_n}(t) + e_{w_{n-1}}(t + \bar{h}) - \hat{w}_{n-2}(t + 2\bar{h})\end{aligned}$$

es decir,

$$\tilde{w}_n(t) = \sum_{k=1}^n e_{w_k}(t + (n - k)\bar{h}). \quad (5.6)$$

Ya que los errores de predicción \tilde{w}_n son la suma de todos los errores de inyección $e_{w_k}(t)$, entonces la convergencia de los errores de inyección implica la convergencia de los errores de predicción.

□

5.3. Dinámica de los errores de inyección

Siguiendo lo presentado en el Lema 1 se derivan los errores de inyección para analizar su dinámica, por lo que se tiene que,

$$\begin{aligned}
\dot{e}_{w_{j1}}(t) &= \dot{\hat{w}}_{(j-1)1}(t + \bar{h}) - \dot{\hat{w}}_{j1}(t) \\
&= v(t - (n - j + 1)\bar{h} + \bar{h}) + \omega(t - (n - j + 1)\bar{h} + \bar{h})\hat{w}_{(j-1)2}(t + \bar{h}) \\
&\quad + \lambda_{(j-1)1}e_{w_{(j-1)1}}(t) - v(t - (n - j)\bar{h}) - \omega(t - (n - j)\bar{h})\hat{w}_{j2}(t) - \lambda_{j1}e_{w_{j1}}(t - \bar{h}) \\
&= \omega(t - (n - j)\bar{h}) \left[\hat{w}_{(j-1)2}(t + \bar{h}) - \hat{w}_{j2}(t) \right] + \lambda_{(j-1)1}e_{w_{(j-1)1}}(t) - \lambda_{j1}e_{w_{j1}}(t - \bar{h}) \\
&= \omega(t - (n - j)\bar{h})e_{w_{j2}}(t) + \lambda_{(j-1)1}e_{w_{(j-1)1}}(t) - \lambda_{j1}e_{w_{j1}}(t - \bar{h})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{e}_{w_{j2}}(t) &= \dot{\hat{w}}_{(j-1)2}(t + \bar{h}) - \dot{\hat{w}}_{j2}(t) \\
&= -\omega(t - (n - j + 1)\bar{h} + \bar{h})\hat{w}_{(j-1)1}(t + \bar{h}) + \lambda_{(j-1)2}e_{w_{(j-1)2}}(t) \\
&\quad + \omega(t - (n - j)\bar{h})\hat{w}_{j1}(t) - \lambda_{j2}e_{w_{j2}}(t - \bar{h}) \\
&= -\omega(t - (n - j)\bar{h}) \left[\hat{w}_{(j-1)1}(t + \bar{h}) - \hat{w}_{j1}(t) \right] + \lambda_{(j-1)2}e_{w_{(j-1)2}}(t) - \lambda_{j2}e_{w_{j2}}(t - \bar{h}) \\
&= -\omega(t - (n - j)\bar{h})e_{w_{j1}}(t) + \lambda_{(j-1)2}e_{w_{(j-1)2}}(t) - \lambda_{j2}e_{w_{j2}}(t - \bar{h})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{e}_{w_{j3}}(t) &= \dot{\hat{w}}_{(j-1)3}(t + \bar{h}) - \dot{\hat{w}}_{j3}(t) \\
&= \omega(t - (n - j + 1)\bar{h} + \bar{h}) + \lambda_{(j-1)3}e_{w_{(j-1)3}}(t) \\
&\quad - \omega(t - (n - j)\bar{h}) - \lambda_{j3}e_{w_{j3}}(t - \bar{h}) \\
&= \lambda_{(j-1)3}e_{w_{(j-1)3}}(t) - \lambda_{j3}e_{w_{j3}}(t - \bar{h}).
\end{aligned}$$

Lo que da como resultado el siguiente sistema de errores de inyección,

$$\begin{aligned}
\dot{e}_{w_{j1}}(t) &= \omega(t - (n - j)\bar{h})e_{w_{j2}}(t) + \lambda_{(j-1)1}e_{w_{(j-1)1}}(t) - \lambda_{j1}e_{w_{j1}}(t - \bar{h}) \\
\dot{e}_{w_{j2}}(t) &= -\omega(t - (n - j)\bar{h})e_{w_{j1}}(t) + \lambda_{(j-1)2}e_{w_{(j-1)2}}(t) - \lambda_{j2}e_{w_{j2}}(t - \bar{h}) \\
\dot{e}_{w_{j3}}(t) &= \lambda_{(j-1)3}e_{w_{(j-1)3}}(t) - \lambda_{j3}e_{w_{j3}}(t - \bar{h})
\end{aligned} \tag{5.7}$$

donde, para el caso particular de $j = 1$ se tiene que $\lambda_{01} = \lambda_{02} = \lambda_{03} = 0$.

5.3.1. Convergencia de los errores de inyección

El sistema (5.7) se reescribe de la siguiente forma,

$$\dot{\bar{e}}_{w_j}(t) = A_j(t)\bar{e}_{w_j}(t) + \Lambda_j\bar{e}_{w_j}(t - \bar{h}) - \Lambda_{j-1}\bar{e}_{w_{j-1}}(t) \tag{5.8a}$$

$$\dot{\bar{e}}_{w_{j3}}(t) = -\lambda_{j3}e_{w_{j3}}(t - \bar{h}) + \lambda_{(j-1)3}e_{w_{(j-1)3}}(t), \tag{5.8b}$$

tomando en cuenta que,

$$\bar{e}_{wj}(t) = \begin{bmatrix} e_{wj1}(t) \\ e_{wj2}(t) \end{bmatrix}, \quad \Lambda_j = \begin{bmatrix} -\lambda_{j1} & 0 \\ 0 & -\lambda_{j2} \end{bmatrix}$$

$$A_j(t) = \begin{bmatrix} 0 & \omega(t - (n-j)\bar{h}) \\ -\omega(t - (n-j)\bar{h}) & 0 \end{bmatrix}.$$

Es fácil notar que las dinámicas de los subsistemas (5.8a) y (5.8b) se encuentran desacopladas, por lo tanto, la estabilidad del sistema (5.8) se analizara en dos partes, primero la estabilidad de $\bar{e}_{wj}(t)$ y finalmente la de $e_{wj3}(t)$.

5.3.2. Análisis de la dinámica de (5.8a) cuando $\Lambda_{j-1}\bar{e}_{w_{j-1}}(t) = 0$

Antes que todo, se presenta el siguiente resultado auxiliar.

Lema 2. Dado el subsistema (5.8a) y considerando los números reales enteros positivos α y η , existe una matriz simétrica $P_j(t)$, para toda $j = 1, 2, \dots, n$, tal que,

$$\dot{P}_j(t) + A_j^T P_j(t) + P_j(t) A_j + 2\alpha P_j(t) + \eta_j I = 0. \quad (5.9)$$

Demostración. Tomando en cuenta que la matriz simétrica $P_j(t)$ tiene la forma,

$$P_j(t) = \begin{bmatrix} p_{j1}(t) & p_{j2}(t) \\ p_{j2}(t) & p_{j3}(t) \end{bmatrix}$$

se reescribe la ecuación (5.9) como,

$$\dot{p}_j(t) = A_j^*(t)p_j(t) + \bar{\eta}_j \quad (5.10)$$

donde $\omega_j^*(t) = \omega(t - (n-j)\bar{h})$ y,

$$p_j(t) = \begin{bmatrix} p_{j1}(t) \\ p_{j2}(t) \\ p_{j3}(t) \end{bmatrix} \quad \bar{\eta}_j = - \begin{bmatrix} \eta_j \\ 0 \\ \eta_j \end{bmatrix}$$

$$A_j^*(t) = \begin{bmatrix} -2\alpha & 2\omega_j^*(t) & 0 \\ -\omega_j^*(t) & -2\alpha & \omega_j^*(t) \\ 0 & -2\omega_j^*(t) & -2\alpha \end{bmatrix}.$$

Para encontrar la solución de la ecuación (5.10) se usa la forma real de Jordán $J(t) = T_j A_j^*(t) T_j^{-1}$ de $A_j^*(t)$, cuya matriz de transformación es,

$$T_j = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.11)$$

la cual produce el cambio de coordenadas

$$z_j(t) = T_j p_j(t), \quad (5.12)$$

que conduce al siguiente sistema,

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_{j1}(t) \\ \dot{z}_{j2}(t) \\ \dot{z}_{j3}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2\alpha & 0 & 0 \\ 0 & -2\alpha & 2\omega_j^*(t) \\ 0 & -2\omega_j^*(t) & -2\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{j1}(t) \\ z_{j2}(t) \\ z_{j3}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\eta_j \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (5.13)$$

La solución de este sistema está dada por,

$$\begin{aligned} z_{j1}(t) &= z_{j1}(0)e^{-2\alpha t} - \frac{\eta_j}{2\alpha}(1 - e^{-2\alpha t}) \\ z_{j2}(t) &= z_{j2}(0)e^{-2\alpha t} \cos(2\omega_j^*(t)) + z_{j3}(0)e^{-2\alpha t} \sin(2\omega_j^*(t)) \\ z_{j3}(t) &= -z_{j2}(0)e^{-2\alpha t} \sin(2\omega_j^*(t)) + z_{j3}(0)e^{-2\alpha t} \cos(2\omega_j^*(t)). \end{aligned}$$

Usando la solución de $z_j(t)$ y la transformación inversa $p_j(t) = T_j^{-1}z_j(t)$ se tiene que la matriz $P_j(t)$ está compuesta de la siguiente manera y, por lo tanto, existe,

$$P_j(t) = \begin{bmatrix} z_{j1} + z_{j2} & z_{j3} \\ z_{j3} & z_{j1} - z_{j2} \end{bmatrix}.$$

□

Inspirado en el trabajo [39] y tomando en cuenta que el subsistema solo depende de la entrada de control $\omega_j^*(t)$ se demuestra el siguiente teorema.

Teorema 3. *Un sistema de la forma*

$$\dot{\bar{e}}_{w_j}(t) = A_j(t)\bar{e}_{w_j}(t) + \Lambda_j\bar{e}_{w_j}(t - \bar{h}) \quad (5.14)$$

donde $\bar{h} > 0$ y $\Lambda_j > 0$, es globalmente asintóticamente estable si existen números reales positivos $\alpha, \beta, \epsilon, \eta_j$, y una matriz simétrica $P_j(t)$ que cumpla con la ecuación de Lyapunov (5.9) que satisfagan la desigualdad,

$$\bar{h} < \frac{1}{\alpha} \ln \left(\frac{\sqrt{\epsilon(\eta_j - \epsilon)}}{\lambda_j \bar{p}_j} \right) \quad (5.15)$$

donde, $\bar{p}_j = \sup_{t > t_0} \|P_j(t) + \beta I\|$ y $2\alpha\beta > \eta_j > \epsilon$.

Demostración. *Se propone la siguiente funcional candidata de Lyapunov-Krasovskii,*

$$V(t, \bar{e}_{w_j t}) = V_1(\bar{e}_{w_j}(t)) + V_2(t, \bar{e}_{w_j t}) \quad (5.16)$$

con,

$$V_1(\bar{e}_{w_j}(t)) = \bar{e}_{w_j}^T(t)P_j(t)\bar{e}_{w_j}(t) + \beta\bar{e}_{w_j}^T(t)\bar{e}_{w_j}(t) \quad (5.17)$$

$$V_2(t, \bar{e}_{w_j t}) = \epsilon \int_{t-\bar{h}}^t e^{2\alpha(s-t)} \bar{e}_{w_j}^T(s)\bar{e}_{w_j}(s)ds. \quad (5.18)$$

La derivada de la funcional (5.16) es,

$$\begin{aligned} \dot{V}_1(\bar{e}_{w_j}(t)) &= \dot{\bar{e}}_{w_j}^T(t)P_j(t)\bar{e}_{w_j}(t) + \bar{e}_{w_j}^T(t)\dot{P}_j(t)\bar{e}_{w_j}(t) + \bar{e}_{w_j}^T(t)P_j(t)\dot{\bar{e}}_{w_j}(t) + \beta\dot{\bar{e}}_{w_j}^T(t)\bar{e}_{w_j}(t) \\ &\quad + \beta\bar{e}_{w_j}^T(t)\dot{\bar{e}}_{w_j}(t) \\ &= 2\dot{\bar{e}}_{w_j}^T(t)P_j(t)\bar{e}_{w_j}(t) + \bar{e}_{w_j}^T(t)\dot{P}_j(t)\bar{e}_{w_j}(t) + 2\beta\dot{\bar{e}}_{w_j}^T(t)\bar{e}_{w_j}(t) \\ &= 2[A_j(t)\bar{e}_{w_j}(t) + \Lambda_j\bar{e}_{w_j}(t-\bar{h})]^T P_j(t)\bar{e}_{w_j}(t) + \bar{e}_{w_j}^T(t)\dot{P}_j(t)\bar{e}_{w_j}(t) \\ &\quad + 2\beta[A_j(t)\bar{e}_{w_j}(t) + \Lambda_j\bar{e}_{w_j}(t-\bar{h})]^T \bar{e}_{w_j}(t) \\ &= 2\bar{e}_{w_j}^T(t)A_j^T(t)P_j(t)\bar{e}_{w_j}(t) + 2\bar{e}_{w_j}^T(t-\bar{h})\Lambda_j^T P_j(t)\bar{e}_{w_j}(t) + \bar{e}_{w_j}^T(t)\dot{P}_j(t)\bar{e}_{w_j}(t) \\ &\quad + 2\beta\bar{e}_{w_j}^T(t)A_j^T(t)\bar{e}_{w_j}(t) + 2\beta\bar{e}_{w_j}^T(t-\bar{h})\Lambda_j^T \bar{e}_{w_j}(t) \\ &= \bar{e}_{w_j}^T(t)[A_j^T(t)P_j(t) + P_j(t)A_j(t) + \dot{P}_j + 2\beta A_j^T(t)]\bar{e}_{w_j}(t) \\ &\quad + 2\bar{e}_{w_j}^T(t-\bar{h})\Lambda_j^T [P_j(t) + \beta I]\bar{e}_{w_j}(t) \end{aligned}$$

o escrito de otra manera,

$$\dot{V}_1(\bar{e}_{w_j}(t)) = \bar{e}_{w_j}^T(t)[A_j^T(t)P_{\beta j}(t) + P_{\beta j}(t)A_j(t) + \dot{P}_j]\bar{e}_{w_j}(t) + 2\bar{e}_{w_j}^T(t-\bar{h})\Lambda_j^T P_{\beta j}(t)\bar{e}_{w_j}(t)$$

donde,

$$P_{\beta j}(t) = P_j(t) + \beta I.$$

Observación 3. Es importante notar que si $\eta_j < 2\alpha\beta$ entonces $P_{\beta j} > 0$.

Definiendo \bar{p}_j y λ_j como $\bar{p}_j = \sup_{t>t_0} \|P_{\beta j}(t)\|$ y $\lambda_j = \lambda_{\max}\{\lambda_{j1}, \lambda_{j2}\} = \sup\|\Lambda_j\|$, se obtiene la siguiente desigualdad,

$$\dot{V}_1(\bar{e}_{w_j}(t)) \leq \bar{e}_{w_j}^T(t)[A_j^T(t)P_{\beta j}(t) + P_{\beta j}(t)A_j(t) + \dot{P}_j]\bar{e}_{w_j}(t) + 2\bar{p}_j\lambda_j\|\bar{e}_{w_j}(t-\bar{h})\| \|\bar{e}_{w_j}(t)\|$$

la cual puede ser reducida tomando en cuenta que $A_j^T(t) + A_j(t) = 0_{2 \times 2}$, por lo tanto, se tiene como resultado,

$$\dot{V}_1(\bar{e}_{w_j}(t)) \leq \bar{e}_{w_j}^T(t)[A_j^T(t)P_j(t) + P_j(t)A_j(t) + \dot{P}_j]\bar{e}_{w_j}(t) + 2\bar{p}_j\lambda_j\|\bar{e}_{w_j}(t-\bar{h})\| \|\bar{e}_{w_j}(t)\|. \quad (5.19)$$

Por otro lado, al derivar la funcional $V_2(t, \bar{e}_{w_j t})$ (5.18) se tiene,

$$\begin{aligned}\dot{V}_2(t, \bar{e}_{w,t}) &= \frac{d}{dt} \left\{ \epsilon \int_{t-\bar{h}}^t e^{2\alpha(s-t)} \bar{e}_{w_j}^T(s) \bar{e}_{w_j}(s) ds \right\} \\ &= -2\alpha\epsilon \int_{t-\bar{h}}^t e^{2\alpha(s-t)} \bar{e}_{w_j}^T(s) \bar{e}_{w_j}(s) ds + \epsilon \bar{e}_{w_j}^T(t) \bar{e}_{w_j}(t) - \epsilon e^{-2\alpha\bar{h}} \bar{e}_{w_j}^T(t-\bar{h}) \bar{e}_{w_j}(t-\bar{h}),\end{aligned}$$

la cual satisface la desigualdad,

$$\dot{V}_2(t, \bar{e}_{w,t}) \leq -2\alpha V_2(t, \bar{e}_{w,t}) + \epsilon \|\bar{e}_{w_j}(t)\|^2 - \epsilon e^{-2\alpha\bar{h}} \|\bar{e}_{w_j}(t-\bar{h})\|^2. \quad (5.20)$$

Sumando (5.19) y (5.20) es posible obtener la cota superior de la derivada de la funcional (5.16),

$$\begin{aligned}\dot{V}(t, \bar{e}_{w,t}) &\leq \bar{e}_{w_j}^T(t) [A_j^T(t) P_j(t) + P_j(t) A_j(t) + \dot{P}_j] \bar{e}_{w_j}(t) + 2\bar{p}_j \lambda_j \|\bar{e}_{w_j}(t-\bar{h})\| \|\bar{e}_{w_j}(t)\| \\ &\quad - 2\alpha V_2(t, \bar{e}_{w,t}) + \epsilon \|\bar{e}_{w_j}(t)\|^2 - \epsilon e^{-2\alpha\bar{h}} \|\bar{e}_{w_j}(t-\bar{h})\|^2 \\ &\leq \bar{e}_{w_j}^T(t) [-2\alpha P_j(t) - \eta_j I] \bar{e}_{w_j}(t) + 2\bar{p}_j \lambda_j \|\bar{e}_{w_j}(t-\bar{h})\| \|\bar{e}_{w_j}(t)\| - 2\alpha V_2(t, \bar{e}_{w,t}) \\ &\quad + \epsilon \|\bar{e}_{w_j}(t)\|^2 - \epsilon e^{-2\alpha\bar{h}} \|\bar{e}_{w_j}(t-\bar{h})\|^2 + 2\alpha V(t, \bar{e}_{w,t}) - 2\alpha V(t, \bar{e}_{w,t})\end{aligned}$$

Tomando en cuenta que $V(t, \bar{e}_{w,t})$ es acotada inferior y superiormente,

$$\beta \|\bar{e}_{w_j}(t)\|^2 \leq V(t, \bar{e}_{w,t}) \leq (\bar{p}_j + \epsilon) \|\bar{e}_{w_j}(t)\|^2$$

se obtiene que,

$$\begin{aligned}\dot{V}(t, \bar{e}_{w,t}) &\leq \bar{e}_{w_j}^T(t) [-2\alpha P_j(t) - \eta_j I] \bar{e}_{w_j}(t) + 2\bar{p}_j \lambda_j \|\bar{e}_{w_j}(t-\bar{h})\| \|\bar{e}_{w_j}(t)\| \\ &\quad + \epsilon \|\bar{e}_{w_j}(t)\|^2 - \epsilon e^{-2\alpha\bar{h}} \|\bar{e}_{w_j}(t-\bar{h})\|^2 + 2\alpha V_1(\bar{e}_{w_j}(t)) - 2\alpha\beta \|\bar{e}_{w_j}(t)\|^2 \\ &\leq [\epsilon - \eta_j] \|\bar{e}_{w_j}(t)\|^2 + 2\bar{p}_j \lambda_j \|\bar{e}_{w_j}(t-\bar{h})\| \|\bar{e}_{w_j}(t)\| \\ &\quad - \epsilon e^{-2\alpha\bar{h}} \|\bar{e}_{w_j}(t-\bar{h})\|^2.\end{aligned}$$

Finalmente, sabiendo que $2xy - y^2 \leq x^2$, se concluye que,

$$\dot{V}(t, \bar{e}_{w,t}) \leq -[\eta_j - \epsilon - \frac{\bar{p}^2 \lambda_j^2 e^{2\bar{h}\alpha}}{\epsilon}] \|\bar{e}_{w_j}(t)\|^2. \quad (5.21)$$

Por lo tanto, si $\eta_j > \epsilon$ y,

$$\lambda_j < \frac{\sqrt{\epsilon(\eta_j - \epsilon)}}{\bar{p} e^{\alpha\bar{h}}}. \quad (5.22)$$

el sistema (5.14) es asintóticamente estable.

□

Es posible simplificar el resultado (5.22) de manera que solo dependa de las ganancias del predictor λ_j .

Lema 3. *El sistema (5.14) es asintóticamente estable siempre que existan ganancias positivas λ_j , $j = 1, 2$, que satisfagan*

$$\bar{h} < \frac{1}{\lambda_j e}. \quad (5.23)$$

Demostración. *A partir de la definición de $P_j(t)$ en el Lema 2 es posible establecer que,*

$$\bar{p}_j = \beta.$$

De esta manera, el retardo admisible se acota como,

$$\bar{h} < \frac{1}{\alpha} \ln \left(\frac{\sqrt{\epsilon(\eta_j - \epsilon)}}{\lambda_j \beta} \right)$$

Por otro lado, puesto que $\beta > \frac{\eta_j}{2\alpha}$ se tiene que el retardo \bar{h} es tal que,

$$\bar{h} < \frac{1}{\alpha} \ln \left(\frac{2\alpha \sqrt{\epsilon(\eta_j - \epsilon)}}{\lambda_j \eta_j} \right)$$

Dado que η_j y ϵ solo deben ser dos números reales positivos, es posible relacionarlos de manera que,

$$\eta_j = k\epsilon$$

dando como resultado,

$$\bar{h} < \frac{1}{\alpha} \ln \left(\frac{2\alpha \sqrt{(k-1)}}{\lambda_j k} \right)$$

donde, si calculamos el valor máximo para k ,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dk} \left[\frac{1}{\alpha} \ln \left(\frac{2\alpha \sqrt{(k-1)}}{\lambda_j k} \right) \right] &= 0 \\ \frac{1}{\alpha} \left[\frac{2\alpha \lambda_j k \left(\frac{1}{2\sqrt{k-1}} \right) - 2\alpha \lambda_j \sqrt{k-1}}{2\alpha \lambda_j k \sqrt{k-1}} \right] &= 0 \\ \frac{1}{\alpha} \left[\frac{\alpha k - 2\alpha(k-1)}{2\alpha k(k-1)} \right] &= 0 \\ \frac{k - 2k + 1}{2k(k-1)} &= 0 \\ -k - 2 &= 0 \\ k &= 2 \end{aligned}$$

la cota superior de \bar{h} toma la forma,

$$\bar{h} < \frac{1}{\alpha} \ln \left(\frac{\alpha}{\lambda_j} \right).$$

Repetiendo con el valor de α se tiene,

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\alpha} \left[\frac{1}{\alpha} \ln \left(\frac{\alpha}{\lambda_j} \right) \right] &= 0 \\ \frac{1 - \ln \left(\frac{\alpha}{\lambda_j} \right)}{\alpha^2} &= 0 \\ 1 - \ln \left(\frac{\alpha}{\lambda_j} \right) &= 0 \\ \ln \left(\frac{\alpha}{\lambda_j} \right) &= 1 \\ \alpha &= \lambda_j e \end{aligned}$$

lo que finalmente da como resultado,

$$\bar{h} < \frac{1}{\lambda_j e}.$$

□

5.3.3. Análisis de la dinámica de $e_{w_{j3}}(t)$ con $\lambda_{(j-1)3} e_{w_{(j-1)3}}(t) = 0$ en la ecuación (5.8)

Finalmente, de acuerdo a lo presentado en [5],

Lema 4. *El subsistema (5.8b) es asintóticamente estable si se cumple que,*

$$\bar{h} < \frac{\pi}{2\lambda_{j3}}. \quad (5.24)$$

Demostración. *La ecuación característica del subsistema (5.8b) es,*

$$P(s) = s - \lambda_{j3} e^{-s\bar{h}}.$$

Al igual que en los sistemas sin retardos, el sistema será estable si la parte real de todas las raíces es negativa. Sin embargo, ya que los sistemas con retardo tienen una cantidad infinita de raíces, lo que se hará es analizar la frontera entre reales positivos y negativos, es decir cuando $s = 0$ y $s = iw$.

Cuando $s = 0$,

$$-\lambda_{j3} = 0$$

lo cual no puede ser posible, ya que $\lambda_{j3} > 0$. Por otro lado, cuando $s = iw$,

$$\begin{aligned} i\omega - \lambda_{j3} e^{-i\omega\bar{h}} &= 0 \\ i\omega - \lambda_{j3} \cos(-\omega\bar{h}) - i\lambda_{j3} \sin(-\omega\bar{h}) &= 0 \end{aligned}$$

el cual, si separamos la parte real y la imaginaria podemos obtener el sistema de dos ecuaciones siguiente,

$$\begin{aligned} -\lambda_{j3} \cos(\omega\bar{h}) &= 0 \\ \omega + \lambda_{j3} \sin(\omega\bar{h}) &= 0. \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones, y tomando en cuenta que $\lambda_{j\omega} \neq 0$ se tiene que $\omega\bar{h} = \cos^{-1}(0)$, es decir $\omega\bar{h} = p\frac{\pi}{2}$ para $p > 0$ impares. Sustituyendo este resultado en la segunda ecuación,

$$\begin{aligned} \omega + \lambda_{j3} \sin\left(p\frac{\pi}{2}\right) &= 0 \\ \omega \pm \lambda_{j3} &= 0 \\ \lambda_{j3} &= \omega \end{aligned}$$

El valor mínimo de p en que las raíces del subsistema (5.8b) cruzan por el eje $i\omega$ es $p = 1$, por lo tanto, si se cumple que,

$$\lambda_{j3} < \frac{\pi}{2\bar{h}}$$

las raíces siempre tendrán parte real negativa.

□

5.3.4. Estabilidad del sistema completo (5.8)

Lema 5. El sistema (5.8) para $j = 1, 2, \dots, n$ es asintóticamente estable si se cumple la desigualdad,

$$\bar{h} < \min \left\{ \frac{1}{\lambda_j e^{\lambda_j}}, \frac{\pi}{2\lambda_{j3}} \right\}. \quad (5.25)$$

donde $\lambda_j > 0$, $\lambda_{j3} > 0$ y e es la constante de Euler o de Napier.

Demostración. Si las condiciones de estabilidad (5.22) y (5.24) se cumplen para $j = 1$, el sistema (5.8) dado por

$$\begin{aligned} \dot{\bar{e}}_{w_1}(t) &= A_1(t)\bar{e}_{w_1}(t) + \Lambda_1\bar{e}_{w_1}(t - \bar{h}) \\ \dot{\bar{e}}_{w_{13}}(t) &= -\lambda_{13}\bar{e}_{w_{13}}(t - \bar{h}), \end{aligned}$$

es asintóticamente estable si para cualquier retardo \bar{h} se cumple que,

$$\bar{h} < \min \left\{ \frac{1}{\lambda_1 e'}, \frac{\pi}{2\lambda_{13}} \right\}.$$

Más aún, debido a que el origen $e_{w_1}(t) = [0 \ 0 \ 0]^T$ es el único punto de equilibrio estable, el sistema (5.8) con $j = 1$ es globalmente asintóticamente estable.

Para mostrar que los demás errores de inyección $e_{w_j}(t)$ convergen también al origen, se considera ahora el sistema (5.8) para $j = 2$,

$$\begin{aligned} \dot{e}_{w_2}(t) &= A_2(t)\bar{e}_{w_2}(t) + \Lambda_2\bar{e}_{w_2}(t - \bar{h}) - \Lambda_1\bar{e}_{w_1}(t) \\ \dot{e}_{w_{23}}(t) &= -\lambda_{23}e_{w_{23}}(t - \bar{h}) + \lambda_{13}e_{w_{13}}(t). \end{aligned} \quad (5.26)$$

Tomando en cuenta que $e_{w_1}(t)$ es un término desvaneciente para el sistema (5.26), es decir que $e_{w_1}(t) = 0$ cuando $t \rightarrow \infty$. Esto implica que cuando $t \rightarrow \infty$, el sistema (5.26) se reduce a,

$$\begin{aligned} \dot{e}_{w_2}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & \omega(t - (n-2)\bar{h}) \\ -\omega(t - (n-2)\bar{h}) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{w_{21}}(t) \\ e_{w_{22}}(t) \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} -\lambda_{21} & 0 \\ 0 & -\lambda_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{w_{21}}(t - \bar{h}) \\ e_{w_{22}}(t - \bar{h}) \end{bmatrix} \\ \dot{e}_{w_{23}}(t) &= -\lambda_{23}e_{w_{23}}(t - \bar{h}). \end{aligned} \quad (5.27)$$

Nuevamente, este sistema es asintóticamente estable si se cumplen las condiciones (5.22) y (5.24). Dicho procedimiento se repite hasta que $j = n$, lo que implica la estabilidad asintótica del sistema (5.8).

□

5.4. Problema de seguimiento de trayectoria

Para resolver el problema de seguimiento de trayectoria para el robot diferencial primero se define un robot virtual que provee la trayectoria deseada,

$$\begin{aligned} \dot{x}_d(t) &= v_d(t - h) \cos(\theta_d(t)) \\ \dot{y}_d(t) &= v_d(t - h) \sin(\theta_d(t)) \\ \dot{\theta}_d(t) &= \omega_d(t - h). \end{aligned} \quad (5.28)$$

Con dicho robot virtual, se utiliza en el sistema (3.9) la siguiente retroalimentación no lineal propuesta en [40],

$$\begin{aligned} v(t) &= v_d(t) \cos(e_3(t)) + k_1 e_1(t) \\ \omega(t) &= \omega_d(t) + k_2 v_d(t) \frac{\sin(e_3(t))}{e_3(t)} e_2(t) + k_3 e_3(t) \end{aligned} \quad (5.29)$$

donde los errores de seguimiento son,

$$\begin{aligned}
e(t) &= \begin{bmatrix} e_1(t) \\ e_2(t) \\ e_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta(t+h)) & \sin(\theta(t+h)) & 0 \\ -\sin(\theta(t+h)) & \cos(\theta(t+h)) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_d(t+h) - x(t+h) \\ y_d(t+h) - y(t+h) \\ \theta_d(t+h) - \theta(t+h) \end{bmatrix} \\
e(t) &= \begin{bmatrix} e_1(t) \\ e_2(t) \\ e_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_{1d}(t) - w_{n1}(t) \\ w_{2d}(t) - w_{n2}(t) \\ w_{3d}(t) - w_{n3}(t) \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{5.30}$$

Es importante mencionar que la ley de control (5.29) depende del error $e(t)$, el cual a su vez depende de $w_n = \zeta(t+h)$, que corresponde a estados futuros del sistema. Puesto que no es posible acceder a estados futuros, se emplean en la ley de control los estados de la cadena de subpredictores $\hat{w}_n(t)$ cuya dinámica está dada por (5.4). Entonces, la ley de control empleada es,

$$\begin{aligned}
v(t) &= v_d(t) \cos(\hat{e}_3(t)) + k_1 \hat{e}_1(t) \\
\omega(t) &= \omega_d(t) + k_2 v_d(t) \frac{\sin(\hat{e}_3(t))}{\hat{e}_3(t)} \hat{e}_2(t) + k_3 \hat{e}_3(t)
\end{aligned} \tag{5.31}$$

donde,

$$\begin{bmatrix} \hat{e}_1(t) \\ \hat{e}_2(t) \\ \hat{e}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_{1d}(t) - \hat{w}_{n1}(t) \\ w_{2d}(t) - \hat{w}_{n2}(t) \\ w_{3d}(t) - \hat{w}_{n3}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{w}_{n1}(t) + e_1(t) \\ \tilde{w}_{n2}(t) + e_2(t) \\ \tilde{w}_{n3}(t) + e_3(t) \end{bmatrix}. \tag{5.32}$$

Observación 4. La retroalimentación (5.32) se expresa basándose en los errores de predicción $\tilde{w}_n(t)$ (5.6) y los errores de seguimiento $e(t)$ (5.30).

5.5. Dinámica de los errores de seguimiento

Se derivan los errores de seguimiento, de manera que,

$$\begin{aligned}
\dot{e}_1(t) &= \dot{w}_{1d}(t) - \dot{w}_{n1}(t) \\
&= \dot{w}_{1d}(t) - v(t) - \omega(t)w_{n2}(t) \\
&= \dot{w}_{1d}(t) - v_d(t) \cos(\hat{e}_3(t)) - k_1 \hat{e}_1(t) \\
&\quad - \left[\omega_d(t) + k_2 v_d(t) \frac{\sin(\hat{e}_3(t))}{\hat{e}_3(t)} \hat{e}_2(t) + k_3 \hat{e}_3(t) \right] w_{n2}(t) \\
&= \dot{w}_{1d}(t) - v_d(t) \cos(\tilde{w}_{n3}(t) + e_3(t)) - k_1 [\tilde{w}_{n1}(t) + e_1(t)] \\
&\quad - \left[\omega_d(t) + k_2 v_d(t) \frac{\sin(\tilde{w}_{n3}(t) + e_3(t))}{\tilde{w}_{n3}(t) + e_3(t)} [\tilde{w}_{n2}(t) + e_2(t)] \right. \\
&\quad \left. + k_3 [\tilde{w}_{n3}(t) + e_3(t)] \right] [w_{2d}(t) - e_2(t)] \\
&= v_d(t) + \omega_d(t)w_{2d}(t) - v_d(t) \cos(\tilde{w}_{n3}(t) + e_3(t)) - k_1 [\tilde{w}_{n1}(t) + e_1(t)] \\
&\quad - \left[\omega_d(t) + k_2 v_d(t) \frac{\sin(\tilde{w}_{n3}(t) + e_3(t))}{\tilde{w}_{n3}(t) + e_3(t)} [\tilde{w}_{n2}(t) + e_2(t)] \right. \\
&\quad \left. + k_3 [\tilde{w}_{n3}(t) + e_3(t)] \right] [w_{2d}(t) - e_2(t)] \\
&= v_d(t) [1 - \cos(\tilde{w}_{n3}(t) + e_3(t))] - k_1 [\tilde{w}_{n1}(t) + e_1(t)] + \omega_d(t)e_2(t) \\
&\quad - \left[k_2 v_d(t) \frac{\sin(\tilde{w}_{n3}(t) + e_3(t))}{\tilde{w}_{n3}(t) + e_3(t)} [\tilde{w}_{n2}(t) + e_2(t)] + k_3 [\tilde{w}_{n3}(t) \right. \\
&\quad \left. + e_3(t)] \right] [w_{2d}(t) - e_2(t)] \\
&= -k_1 [\tilde{w}_{n1}(t) + e_1(t)] + \omega_d(t)e_2(t) + k_2 v_d \gamma_s e_2^2(t) + k_3 e_3(t)e_2(t) + \gamma_1(t)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{e}_2(t) &= \dot{w}_{2d}(t) - \dot{w}_{n2}(t) \\
&= \dot{w}_{2d}(t) + \omega(t)w_{n1}(t) \\
&= \dot{w}_{2d}(t) + \left[\omega_d(t) + k_2 v_d(t) \frac{\sin(\hat{e}_3(t))}{\hat{e}_3(t)} \hat{e}_2(t) + k_3 \hat{e}_3(t) \right] w_{n1}(t) \\
&= -\omega_d(t)w_{1d}(t) + \left[\omega_d(t) + k_2 v_d(t) \frac{\sin(\hat{e}_3(t))}{\hat{e}_3(t)} \hat{e}_2(t) + k_3 \hat{e}_3(t) \right] w_{n1}(t) \\
&= -\omega_d(t)w_{1d}(t) + \left[\omega_d(t) + k_2 v_d(t) \frac{\sin(\hat{e}_3(t))}{\hat{e}_3(t)} \hat{e}_2(t) + k_3 \hat{e}_3(t) \right] [w_{1d}(t) - e_1(t)]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{e}_2(t) &= \left[k_2 v_d(t) \frac{\sin(\hat{e}_3(t))}{\hat{e}_3(t)} \hat{e}_2(t) + k_3 \hat{e}_3(t) \right] [w_{1d}(t) - e_1(t)] - \omega_d(t) e_1(t) \\
&= \left[k_2 v_d(t) \frac{\sin(\tilde{w}_{n3}(t) + e_3(t))}{\tilde{w}_{n3}(t) + e_3(t)} [\tilde{w}_{n2}(t) + e_2(t)] + k_3 [\tilde{w}_{n3}(t) \right. \\
&\quad \left. + e_3(t)] \right] [w_{1d}(t) - e_1(t)] - \omega_d(t) e_1(t) \\
&= -\omega_d(t) e_1(t) - k_2 v_d \gamma_s e_2(t) e_1(t) - k_3 e_3(t) e_1(t) + \gamma_2(t)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{e}_3(t) &= \dot{w}_{3d}(t) - \dot{w}_{n3}(t) \\
&= \dot{w}_{3d}(t) - \omega(t) \\
&= \omega_d(t) - \omega_d(t) - k_2 v_d(t) \frac{\sin(\hat{e}_3(t))}{\hat{e}_3(t)} \hat{e}_2(t) - k_3 \hat{e}_3(t) \\
&= -k_2 v_d(t) \frac{\sin(\tilde{w}_{n3}(t) + e_3(t))}{\tilde{w}_{n3}(t) + e_3(t)} [\tilde{w}_{n2}(t) + e_2(t)] - k_3 [\tilde{w}_{n3}(t) + e_3(t)] \\
&= -k_3 [\tilde{w}_{n3}(t) + e_3(t)] + \gamma_3(t).
\end{aligned}$$

Lo que da como resultado el sistema de errores de seguimiento,

$$\begin{aligned}
\dot{e}_1(t) &= -k_1 [\tilde{w}_{n1}(t) + e_1(t)] + \omega_d(t) e_2(t) + k_2 v_d \gamma_s e_2^2(t) + k_3 e_3(t) e_2(t) + \gamma_1(t) \\
\dot{e}_2(t) &= -\omega_d(t) e_1(t) - k_2 v_d \gamma_s e_2(t) e_1(t) - k_3 e_3(t) e_1(t) + \gamma_2(t) \\
\dot{e}_3(t) &= -k_3 [\tilde{w}_{n3}(t) + e_3(t)] + \gamma_3(t).
\end{aligned} \tag{5.33}$$

5.6. Sistema en lazo cerrado.

Reacomodando en forma matricial las expresiones de los errores de inyección (5.7) y seguimiento (5.33) en cascada se tiene que,

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \dot{e}_{wj1}(t) \\ \dot{e}_{wj2}(t) \\ \dot{e}_{wj3}(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & \omega(t - (n-j)\bar{h}) & 0 \\ -\omega(t - (n-j)\bar{h}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{wj1}(t) \\ e_{wj2}(t) \\ e_{wj3}(t) \end{bmatrix} \\
&+ \begin{bmatrix} \lambda_{(j-1)1} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{(j-1)2} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{(j-1)3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{w(j-1)1}(t) \\ e_{w(j-1)2}(t) \\ e_{w(j-1)3}(t) \end{bmatrix} \\
&+ \begin{bmatrix} -\lambda_{j1} & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda_{j2} & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda_{j3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{wj1}(t - \bar{h}) \\ e_{wj2}(t - \bar{h}) \\ e_{wj3}(t - \bar{h}) \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} \dot{e}_1(t) \\ \dot{e}_2(t) \\ \dot{e}_3(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -k_1 & \omega_d(t) & 0 \\ -\omega_d(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -k_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1(t) \\ e_2(t) \\ e_3(t) \end{bmatrix} \\
&+ \begin{bmatrix} k_2 v_d(t) \gamma_s e_2^2(t) + k_3 e_3(t) e_2(t) \\ -k_2 v_d(t) \gamma_s e_2(t) e_1(t) - k_3 e_3(t) e_1(t) \\ 0 \end{bmatrix} \\
&+ \begin{bmatrix} -k_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -k_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{w}_{n1}(t) \\ \tilde{w}_{n2}(t) \\ \tilde{w}_{n3}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \gamma_1(t) \\ \gamma_2(t) \\ \gamma_3(t) \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{5.34}$$

donde,

$$\begin{aligned}
\gamma_s(t) &= \frac{\sin(\tilde{w}_{n3}(t) + e_3(t))}{\tilde{w}_{n3}(t) + e_3(t)} \\
\gamma_1(t) &= v_d(t) [1 - \cos(\tilde{w}_{n3}(t) + e_3(t))] \\
&\quad - k_2 v_d(t) \gamma_s(t) [\tilde{w}_{n2}(t)(w_{2d}(t) - e_2(t)) + e_2(t)w_{2d}(t)] \\
&\quad - k_3 [\tilde{w}_{n3}(t)(w_{2d}(t) - e_2(t)) + e_3(t)w_{2d}(t)] \\
\gamma_2(t) &= k_2 v_d(t) \gamma_s(t) [\tilde{w}_{n2}(t)(w_{1d}(t) - e_1(t)) + e_2(t)w_{1d}(t)] \\
&\quad + k_3 [\tilde{w}_{n3}(t)(w_{1d}(t) - e_1(t)) + e_3(t)w_{1d}(t)] \\
\gamma_3(t) &= -k_2 v_d(t) \gamma_s(t) [\tilde{w}_{n2}(t) + e_2(t)]
\end{aligned}$$

5.7. Análisis de estabilidad

Observe que el sistema (5.34) es de la forma,

$$\begin{aligned}
\dot{e}_{wj}(t) &= g(e_{wj}(t), \omega(t)) \\
\dot{e}(t) &= f(e(t)) + \Phi(e(t), \tilde{w}_n(t))
\end{aligned} \tag{5.35}$$

donde,

$$\begin{aligned}
e_{wj}(t) &= \begin{bmatrix} e_{wj1}(t) \\ e_{wj2}(t) \\ e_{wj3}(t) \end{bmatrix}, \quad e(t) = \begin{bmatrix} e_1(t) \\ e_2(t) \\ e_3(t) \end{bmatrix}, \\
g(e_{wj}(t), \omega(t)) &= \begin{bmatrix} 0 & \omega(t - (n-j)\bar{h}) & 0 \\ -\omega(t - (n-j)\bar{h}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{wj1}(t) \\ e_{wj2}(t) \\ e_{wj3}(t) \end{bmatrix} \\
&+ \begin{bmatrix} \lambda_{(j-1)1} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{(j-1)2} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{(j-1)3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{w(j-1)1}(t) \\ e_{w(j-1)2}(t) \\ e_{w(j-1)3}(t) \end{bmatrix} \\
&+ \begin{bmatrix} -\lambda_{j1} & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda_{j2} & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda_{j3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{wj1}(t - \bar{h}) \\ e_{wj2}(t - \bar{h}) \\ e_{wj3}(t - \bar{h}) \end{bmatrix} \\
f(e(t)) &= \begin{bmatrix} -k_1 & \omega_d(t) & 0 \\ -\omega_d(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -k_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1(t) \\ e_2(t) \\ e_3(t) \end{bmatrix} \\
&+ \begin{bmatrix} k_2 v_d(t) \gamma_s(t) e_2^2(t) + k_3 e_3(t) e_2(t) \\ -k_2 v_d(t) \gamma_s(t) e_2(t) e_1(t) - k_3 e_3(t) e_1(t) \\ 0 \end{bmatrix} \\
\Phi(e(t), \tilde{w}_n(t)) &= \begin{bmatrix} -k_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -k_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{w}_{n1}(t) \\ \tilde{w}_{n2}(t) \\ \tilde{w}_{n3}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \gamma_1(t) \\ \gamma_2(t) \\ \gamma_3(t) \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

De acuerdo a lo presentado en [41], el sistema completo (5.34) será asintóticamente estable siempre que se cumpla que $\dot{e}(t) = f(e(t))$ y $\dot{e}_{wj}(t) = g(e_{wj}(t), \omega(t))$ sean asintóticamente estables y el término de interconexión cumpla con,

$$\|\Phi(e(t), \tilde{w}_n(t))\| \leq \alpha_1(t)(\|e_w(t)\|) \|e(t)\| + \alpha_2(t)(\|e_w(t)\|) \quad (5.36)$$

donde $\alpha_1(t) =$ y $\alpha_2(t)$ son funciones clase K, es decir que son estrictamente crecientes y que $\alpha_1(0) = \alpha_2(0) = 0$ [41].

Note que $\Phi(e(t), \tilde{w}_n(t))$ se puede acotar de la siguiente manera,

$$\|\Phi(e(t), \tilde{w}_n(t))\| \leq \sqrt{\| -k_1 \tilde{w}_{n1}(t) + \gamma_1(t) \|^2 + \|\gamma_2(t)\|^2 + \| -k_3 \tilde{w}_{n3}(t) + \gamma_3(t) \|^2}. \quad (5.37)$$

Ahora bien $\gamma_1(t)$, $\gamma_2(t)$ y $\gamma_3(t)$ satisfacen las desigualdades,

$$\begin{aligned}
\gamma_1(t) &\leq \|v_d(t)[1 - \cos(\tilde{w}_{n3}(t) + e_3(t))]\| \\
&\quad + \|k_2 v_d(t) \gamma_s(t) [\tilde{w}_{n2}(t)(w_{2d}(t) - e_2(t)) + e_2(t)w_{2d}(t)]\| \\
&\quad + \|k_3 [\tilde{w}_{n3}(t)(w_{2d}(t) - e_2(t)) + e_3(t)w_{2d}(t)]\| \\
&\leq \|2v_d(t) \sin^2\left(\frac{\sin(e_{w_3}(t) + e_3(t))}{2}\right)\| \\
&\quad + \|k_2 v_d(t) e_{w_2}(t) + k_3 e_{w_3}(t)\| \|w_{2d}(t) - e_2(t)\| \\
&\leq \|v_d(t)(e_{w_3}(t) + e_3(t))\| + \|k_2 v_d(t) e_{w_2}(t) + k_3 e_{w_3}(t)\| \|w_{2d}(t) - e_2(t)\| \\
&\leq \|v_d(t) e_{w_3}(t)\| + \|v_d(t) e_3(t)\| + \|k_2 v_d(t) w_{2d}(t) e_{w_2}(t)\| \\
&\quad + \|k_3 w_{2d}(t) e_{w_3}(t)\| + \|k_2 v_d(t) e_2(t) e_{w_2}(t)\| + \|k_3 e_2(t) e_{w_3}(t)\| \\
&\leq \underline{\alpha}_{21}(\|e_w(t)\|) + \alpha_{11}(\|e_w(t)\|)\|e(t)\|,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\gamma_2(t) &\leq \left\| k_2 v_d(t) \frac{\sin(e_{w_3}(t) + e_3(t))}{e_{w_3}(t) + e_3(t)} e_{w_2}(t) + k_3 e_{w_3}(t) \right\| \|w_{1d}(t) - e_1(t)\| \\
&\leq \|k_2 v_d(t) e_{w_2}(t) + k_3 e_{w_3}(t)\| \|w_{1d}(t) - e_1(t)\| \\
&\leq \|k_2 v_d(t) w_{1d}(t) e_{w_2}(t)\| + \|k_3 w_{1d}(t) e_{w_3}(t)\| + \|k_2 v_d(t) e_1(t) e_{w_2}(t)\| \\
&\quad + \|k_3 e_1(t) e_{w_3}(t)\| \\
&\leq \underline{\alpha}_{22}(\|e_w(t)\|) + \alpha_{12}(\|e_w(t)\|)\|e(t)\|,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\gamma_3(t) &\leq \left\| k_2 v_d(t) \frac{\sin(e_{w_3}(t) + e_3(t))}{e_{w_3}(t) + e_3(t)} [\tilde{w}_{n2}(t) + e_2(t)] \right\| \\
&\leq \|k_2 v_d(t) [\tilde{w}_{n2}(t) + e_2(t)]\| \\
&\leq \|k_2 v_d(t) \tilde{w}_{n2}(t)\| + \|k_2 v_d(t) e_2(t)\| \\
&\leq \underline{\alpha}_{22}(\|e_w(t)\|) + \alpha_{12}(\|e_w(t)\|)\|e(t)\|.
\end{aligned}$$

Es posible encontrar $\alpha_1(t)$ y $\alpha_2(t)$ que acoten el término $\Phi(e(t), \tilde{w}_n(t))$, por lo que, siempre que los errores de predicción $\tilde{w}_n(t)$ y el subsistema $\dot{e}(t) = f(e(t))$ sean asintóticamente estables, el sistema (5.34) será asintóticamente estable.

Por un lado, la estabilidad de los errores de inyección $e_w(t)$, y, por lo tanto, de $\tilde{w}_n(t)$, se ha probado anteriormente en el Lema 5. A continuación se demuestra la estabilidad del subsistema $\dot{e}(t) = f(e(t))$.

5.8. Estabilidad de $\dot{e}(t) = f(e(t))$

La estabilidad del sistema $\dot{e} = f(e(t))$ se prueba de la siguiente manera. Dado el sistema,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{e}_1(t) \\ \dot{e}_2(t) \\ \dot{e}_3(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -k_1 & \omega_d(t) & 0 \\ -\omega_d(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -k_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1(t) \\ e_2(t) \\ e_3(t) \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} k_2 v_d(t) \gamma_s(t) e_2^2(t) + k_3 e_3(t) e_2(t) \\ -k_2 v_d(t) \gamma_s(t) e_2(t) e_1(t) - k_3 e_3(t) e_1(t) \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.38)$$

y observando que $(e_1(t), e_2(t), e_3(t)) = (0, 0, 0)$ es un punto de equilibrio del subsistema (5.38), se propone la siguiente función candidata de Lyapunov,

$$V(t) = \frac{1}{2} e_1^2(t) + \frac{1}{2} e_2^2(t) + \frac{1}{2} e_3^2(t) \quad (5.39)$$

cuya derivada da como resultado,

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= e_1(t) \dot{e}_1(t) + e_2(t) \dot{e}_2(t) + e_3(t) \dot{e}_3(t) \\ &= e_1(t) (-k_1 e_1(t) + \omega_d(t) e_2(t) + k_2 v_d(t) \gamma_s(t) e_2^2(t) + k_3 e_3(t) e_2(t)) \\ &\quad + e_2(t) (-\omega_d(t) e_1(t) - k_2 v_d(t) \gamma_s(t) e_2(t) e_1(t) - k_3 e_3(t) e_1(t)) - k_3 e_3^2(t) \\ &= -k_1 e_1^2(t) - k_3 e_3^2(t) \end{aligned}$$

Ya que $\dot{V}(t)$ solamente es semidefinida negativa, se emplea el Lema de Barbalat para probar la estabilidad del sistema. Calculando $\ddot{V}(t)$ se tiene,

$$\begin{aligned} \ddot{V}(t) &= -2k_1 e_1(t) \dot{e}_1(t) - 2k_3 e_3(t) \dot{e}_3(t) \\ &= -2k_1 e_1(t) (-k_1 e_1(t) + \omega_d(t) e_2(t) + k_2 v_d(t) \gamma_s(t) e_2^2(t) + k_3 e_3(t) e_2(t)) + 2k_3^2 e_3^2(t) \end{aligned}$$

la cual es acotada y, por lo tanto, $\dot{V}(t)$ es uniformemente continua y $\dot{V}(t) \rightarrow 0$, lo que a su vez implica que $e(t) \rightarrow 0$.

5.9. Resultados en simulación numérica para el robot diferencial

Se evalúa numéricamente el seguimiento de trayectoria del robot diferencial con el esquema de predicción usando una trayectoria tipo lemniscata descrita con las siguientes ecuaciones,

$$\begin{aligned} \rho_{nd1} &= A \cos(pt) \\ \rho_{nd2} &= B \sin((2pt)) \end{aligned}$$

donde $A = 1$, $B = 0.4$ y $p = \frac{\pi}{20}$. Tal como se mencionó anteriormente, se utiliza un robot virtual, definido en (5.28), para asegurar que los estados y velocidades deseadas sean admisibles para el sistema.

Los parámetros del robot, los subpredictores y la retroalimentación se fijan en,

$$\begin{aligned}
 n &= 3 \\
 h &= 1.5 \\
 \lambda_{j1} &= \lambda_{j2} = 0.6 \\
 \lambda_{j3} &= 0.5 \\
 k_1 &= k_3 = 0.2 \\
 k_2 &= 1.5
 \end{aligned}$$

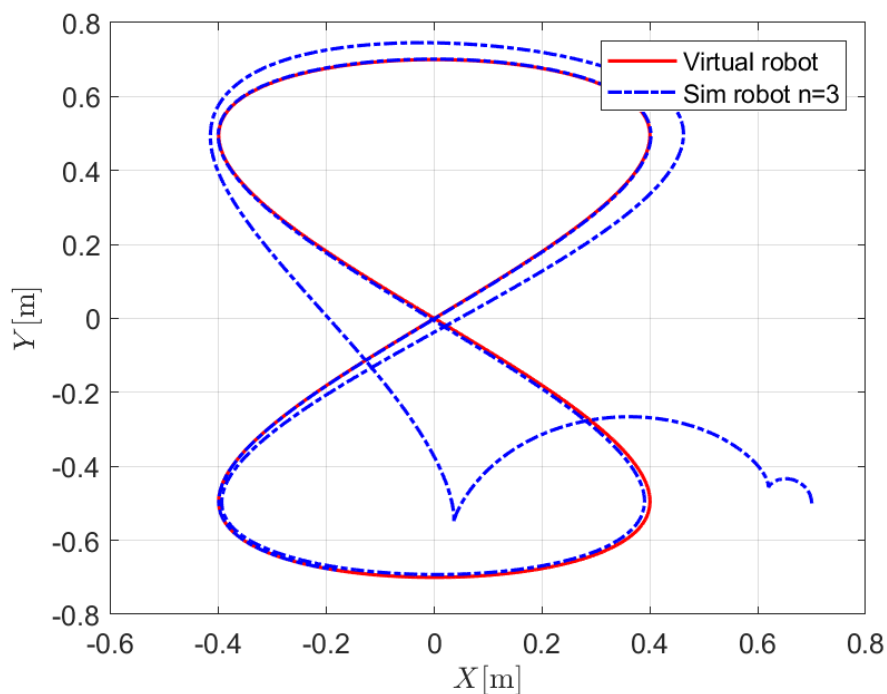


Figura 5.2: Trayectoria realizada por el robot diferencial.

Tal como se probó en este capítulo, se aprecia en la Figura 5.2 como el robot diferencial converge de manera satisfactoria a la trayectoria deseada. Recordando que la entrada de control propuesta es una ley de control lenta, observamos en las Figuras 5.3 y 5.4, como en menos de 40 segundos los errores de predicción y de seguimiento convergen a cero. En la Figura 5.5 se presentan las señales de control del sistema.

Por último, es importante recalcar que debido a que en la simulación se propone un retardo de 1.5 segundos y una cadena de subpredictores de 3 eslabones, se utiliza la condición (5.25) para definir los valores adecuados de λ_j . Por lo tanto, este resultado confirma también la validez de las condiciones de estabilidad antes presentadas.

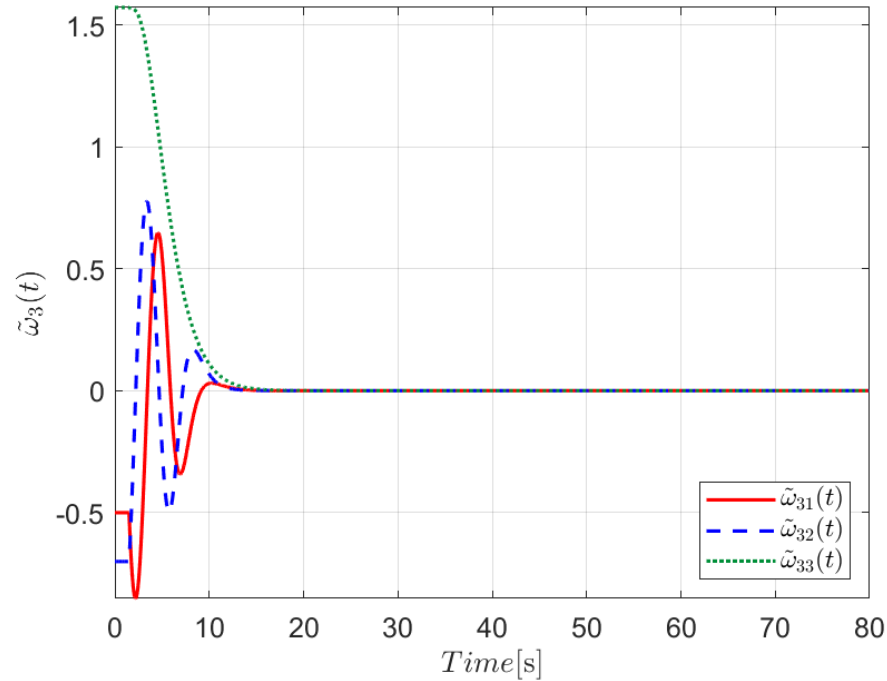
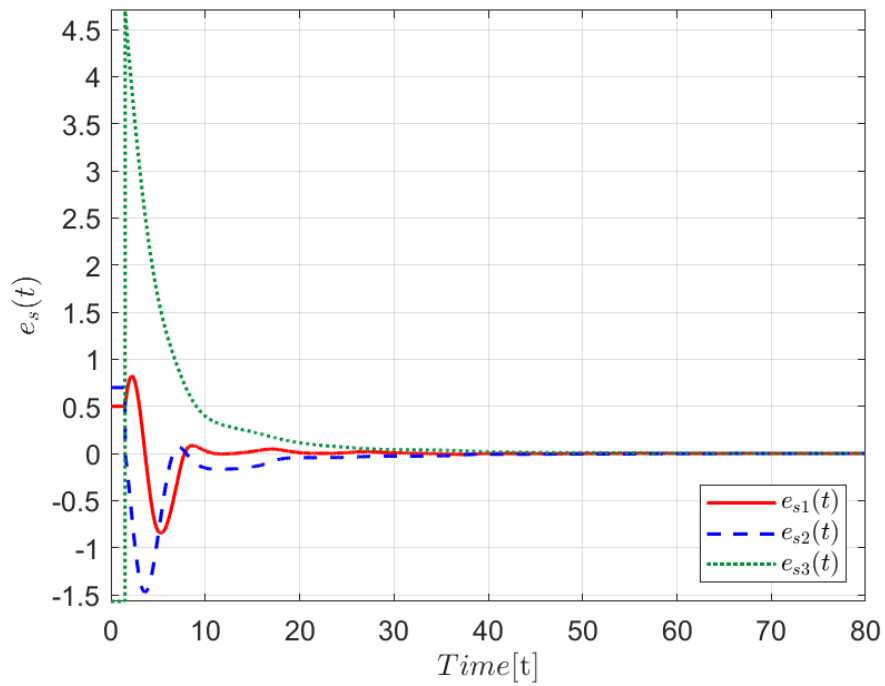


Figura 5.3: Errores de predicción $\tilde{w}_3(t)$.

5.10. Conclusiones del capítulo

A lo largo de este capítulo se analiza y presenta el caso de un robot diferencial con retardo constante a la entrada. A diferencia del capítulo anterior, se considera un retardo constante debido a la complejidad y no linealidad del sistema. Esto nos permite obtener una aproximación de casos más cercanos a la realidad donde el retardo es variante o incierto. Se demuestra la estabilidad asintótica en lazo cerrado del esquema de control basado en predicción con unas condiciones de estabilidad formales que solamente dependen de los parámetros del predictor-observador, resultado que facilitará la implementación del esquema en una plataforma experimental en el siguiente capítulo.

De igual manera, es importante mencionar que los resultados de este capítulo han sido reportados en el artículo [4], publicado en la Revista IEEE Access bajo el título "Non-Linear Prediction-Based Trajectory Tracking for Non-Holonomic Mobile Robots".

Figura 5.4: Errores de seguimiento $e_s(t)$.

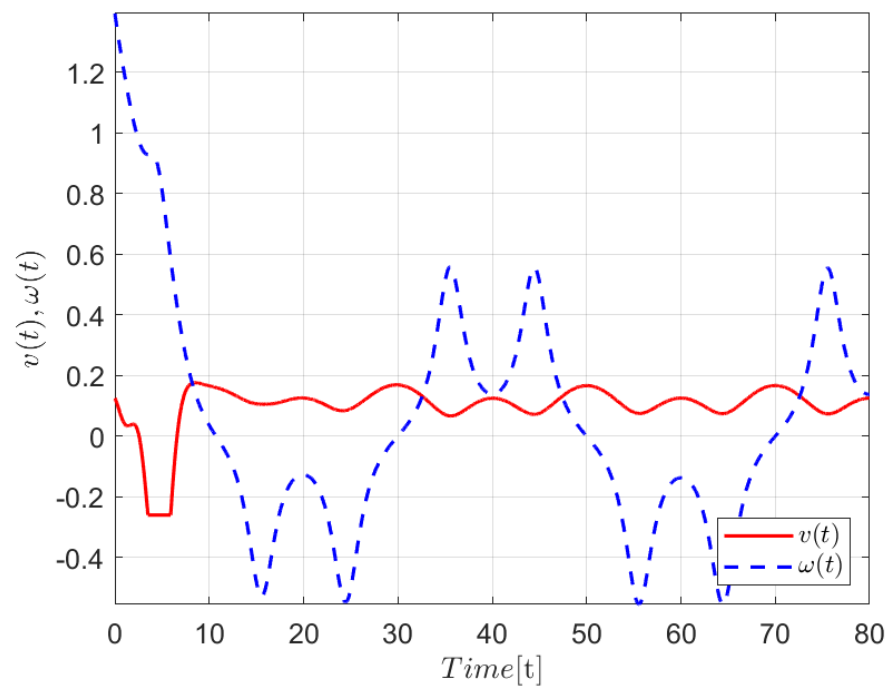


Figura 5.5: Entradas de control del robot diferencial.

Capítulo 6

Evaluación experimental

6.1. Plataforma experimental

La plataforma utilizada en las evaluaciones experimentales del predictor no lineal consta de 3 elementos principales,

- Computadora central.
- Sistema de captura de movimiento.
- Robot móvil diferencial.

En la Figura 6.1 se muestra de manera general como todos los elementos de la plataforma se encuentran conectados. El sistema de cámaras *Optitrack* captura la trayectoria seguida por los robots y transmite dicha información por medio de una red *Wifi* y utilizando *ROS* a la computadora central donde se procesan dichos datos y se retroalimenta a los robots móviles diferenciales *Turtlebot 3* usando nuevamente la red *Wifi* y *ROS*.

A continuación se presentan de manera más detallada los elementos de la plataforma.

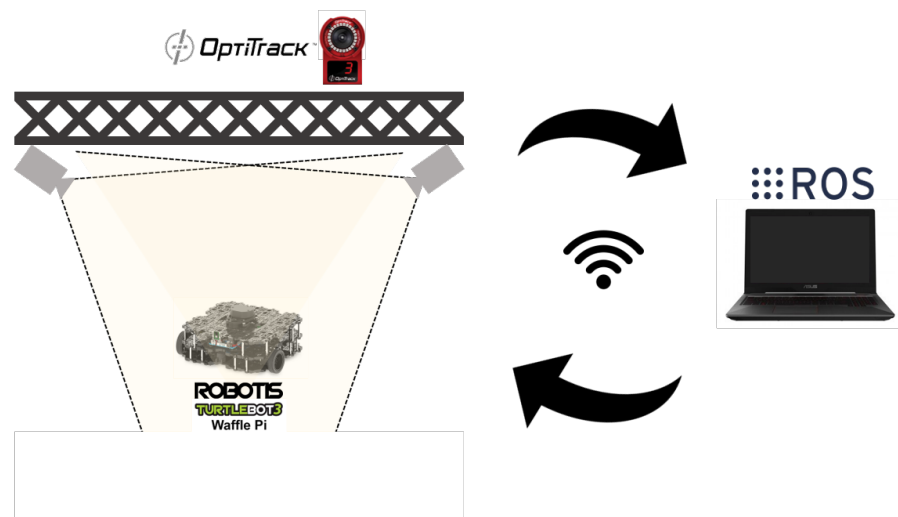


Figura 6.1: Diagrama general de la plataforma experimental.

6.1.1. Computadora central

La computadora central es el elemento donde se recibe y procesa toda la información para posteriormente retroalimentar al robot diferencial. La unidad se encuentra equipada con el sistema operativo *Ubuntu 16.4* y con *ROS Kinetic*.

Robot Operating System (ROS)

De acuerdo a lo descrito en [42], *ROS* es un meta sistema operativo de código abierto, el cual contiene todas las características básicas de un sistema operativo, permitiendo también obtener, escribir y ejecutar códigos a través de distintas computadoras. Estas últimas características son las utilizadas para conectar todos los elementos de la plataforma y utilizarlos como un solo sistema desde la computadora central.

Se toma en cuenta la siguiente terminología para facilitar la lectura (extraída de [43]),

- *Master*: Es el nombre del servidor principal donde todos los nodos se conectan y se comunican entre sí vía mensajes.
- *Nodo*: Es la unidad mínima de procesamiento, puede visualizarse como cada programa que existe dentro del sistema.
- *Mensaje*: Son los datos que los nodos utilizan para comunicarse entre ellos. Estos pueden ser enteros, flotantes o booleanos.
- *Tópico*: El lugar donde se publican los mensajes. Existen nodos que registran tópicos en el *master* para después publicar sus mensajes en ellos. De esta manera, si un nodo necesita recibir información solo debe suscribirse al tópico de su interés para poder acceder a los mensajes.
- *Editor (Publisher)*: Son los nodos que transmiten o publican sus mensajes en los tópicos registrados del *master*.
- *Suscriptor*: Son los nodos que reciben o adquieren mensajes de los tópicos registrados del *master*.

Con dichos conceptos, puede describirse el uso de *ROS* en esta plataforma de la siguiente manera (Figura 6.2),

- Cada elemento del sistema es un nodo.
- La computadora central es el *master* del sistema.
- El sistema de captura de movimiento es un nodo editor que publica la posición del robot móvil.
- Dentro de la computadora central se encuentra un nodo que se suscribe al tópico de la posición de los robots, procesa la información y posteriormente publica en un tópico diferente las señales de control del robot móvil.
- El robot móvil diferencial es un nodo suscriptor que recibe las señales de control de la computadora central y las traduce a un desplazamiento del robot.

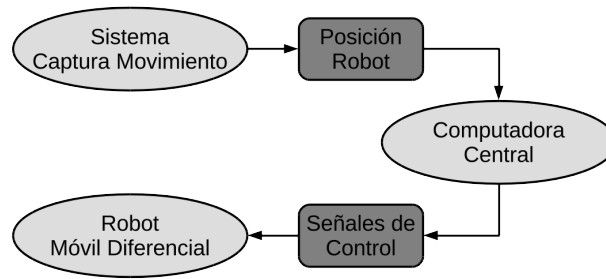


Figura 6.2: Sistema de nodos ROS.

6.1.2. Sistema de captura de movimiento

Los datos de posición del robot móvil son adquiridos por medio de un sistema *Optitrack* de la empresa *Natural Point Inc.*[®]. Dicho sistema cuenta con cuatro cámaras con detección de luz infrarroja *Flex 3 Optitrack* con una resolución de 640×480 y una velocidad de 100 imágenes por segundo.

Las cámaras emiten una luz infrarroja que es reflejada por unos marcadores especiales que se encuentran en los robots móviles tal y como se muestra en la Figura 6.3. Las cámaras captan este reflejo y mediante el software *Motive* se procesan los datos de la ubicación de los marcadores. Posteriormente, esta información es enviada a la computadora central a través de una Red Periférica de Realidad Virtual (*VRPN*, por sus siglas en inglés) usando ROS.

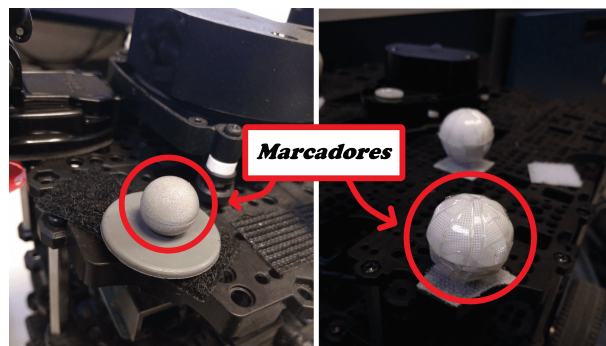


Figura 6.3: Marcadores infrarrojos.

6.1.3. Robot móvil diferencial o (2,0)

Para llevar a cabo los experimentos se utiliza un robot *Turtlebot 3* tipo *Waffle Pi* de ROBOTIS[®]. Los *Turtlebot 3* son robots móviles de bajo costo, de código abierto y diseñados para utilizarse en plataformas experimentales o educativas. Existen tres versiones de *Turtlebot 3*, el *Burger*, el *Waffle* y el que se utiliza en este caso el *Waffle Pi* (Figura 6.4). Las especificaciones más importantes de este robot se mencionan en la Tabla 6.1.

Velocidad traslacional máx.	0.26 m/s
Velocidad rotacional máx.	1.82 rad/s
Dimensiones	281mm × 306mm × 141mm
Peso	1.8kg
Tarjeta única	Raspberry Pi 3 Modelo B y B+
Actuadores	Dynamixel XM430-W210
Tiempo de funcionamiento	2h

Tabla 6.1: Especificaciones *Turtlebot 3 Waffle Pi*.

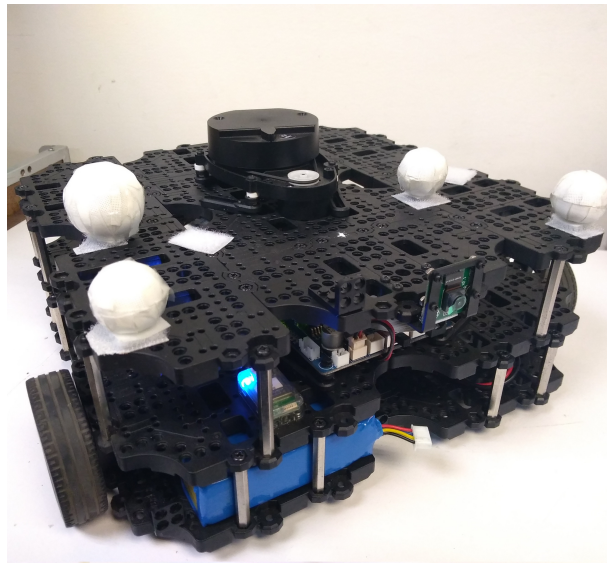


Figura 6.4: Robot *Turtlebot 3 Waffle Pi* utilizado.

6.2. Resultados experimentales

A continuación se presentan los experimentos realizados. Estos se realizaron tomando en cuenta un predictor con $n = 3$ en 4 distintos casos,

1. Seguimiento de trayectoria tipo lemniscata con $\tau = 0.12$ seg.
2. Seguimiento de trayectoria tipo parábola con $\tau = 0.12$ seg.
3. Seguimiento de trayectoria tipo parábola con $\tau = 0.9$ seg.
4. Seguimiento de trayectoria tipo lemniscata con $\tau = 0.9$ seg con perturbaciones en el sistema.

Las trayectorias deseadas se generan de la misma manera que la presentada en el capítulo anterior. Se definen la trayectoria de la lemniscata como,

$$\begin{aligned}x_{rd} &= A \cos pt \\y_{rd} &= B \sin(2pt)\end{aligned}$$

utilizando los parámetros $A = 0.7$, $B = 0.4$ y $P = \frac{\pi}{20}$. Por otro lado, la trayectoria de la parábola se describe a continuación,

$$\begin{aligned}x_{rd} &= 1.5625y_{rd}^2 - 1 \\y_{rd} &= a * (1 - 0.05t)\end{aligned}$$

donde,

$$a = \begin{cases} 1 & \text{si } t < 40 \\ -1 & \text{si } 40 < t < 80 \\ 1 & \text{si } 80 < t < 120 \end{cases}$$

Después, al igual que en las simulaciones presentadas en el capítulo anterior, se utiliza un robot virtual para generar los estados y velocidades deseadas que se utilizarán dentro de la retroalimentación (5.31).

Es importante mencionar que, las trayectorias antes mencionadas fueron escogidas debido a las características de ambas funciones, en primer lugar la lemniscata es una trayectoria cuyas velocidades no son constantes y, por lo tanto, no tiene tramos rectos. Por otro lado, la parábola presenta un reto debido a las discontinuidades que se encuentran en sus extremos.

6.2.1. Seguimiento de trayectoria tipo lemniscata con $\tau = 0.12$ seg.

Para realizar estos experimentos, se seleccionan las ganancias para el predictor que aseguran la convergencia del sistema en lazo cerrado, tal como se muestra en (5.25), descritas en la Tabla 6.2

j	1	2	3
λ_{j1}	5	4	3
λ_{j2}	5	4	3
λ_{j3}	9	8	7

Tabla 6.2: Ganancias del predictor con retardo $\tau = 0.12$ seg.

Y se utilizan $k_1 = k_3 = 0.2$ y $k_2 = 15$ como ganancias de la retroalimentación.

Al igual que en las simulaciones, se aprecia en la Figura 6.5 como el robot diferencial converge satisfactoriamente a la trayectoria deseada en el plano $X - Y$.

En la Figura 6.6 se presenta la evolución de los errores de predicción y es evidente que el sistema se mantiene estable alrededor del cero. Por otro lado, debido a que los errores de seguimiento dependen de los errores de predicción, se muestra en la Figura 6.7 como estos convergen igualmente alrededor de cero. Este comportamiento, aunque satisfactorio, es debido al ruido y perturbaciones externas que se presentan al llevar a cabo los experimentos.

Finalmente, en la Figura 6.8 se exponen las entradas de control o velocidades $v(t)$ y $\omega(t)$ del robot diferencial, las cuales pueden compararse directamente con las obtenidas en las simulaciones y comprobar que presentan una forma similar y que se encuentran acotadas.

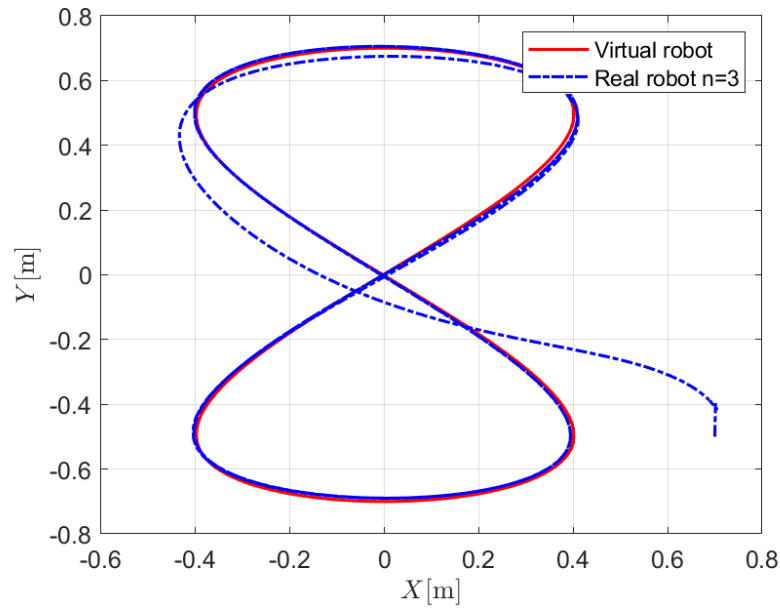


Figura 6.5: Trayectoria realizada por el robot diferencial con $\tau = 0.12$ seg.

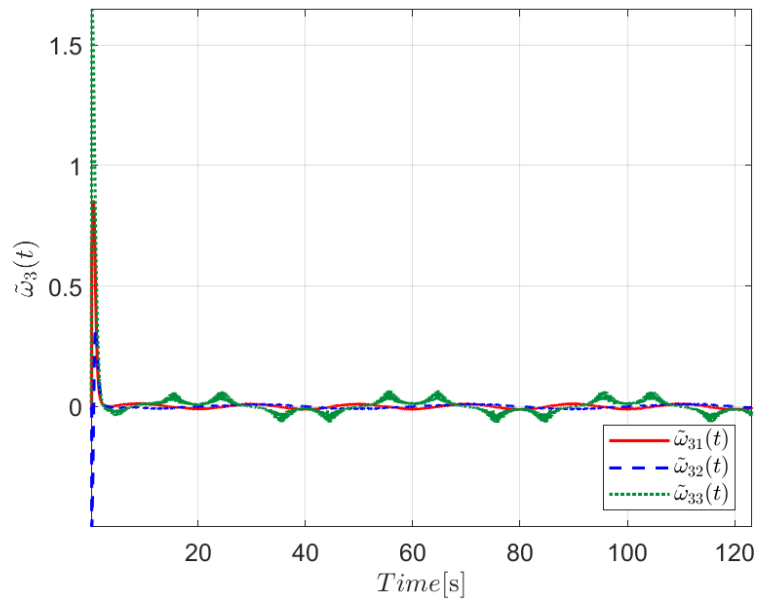
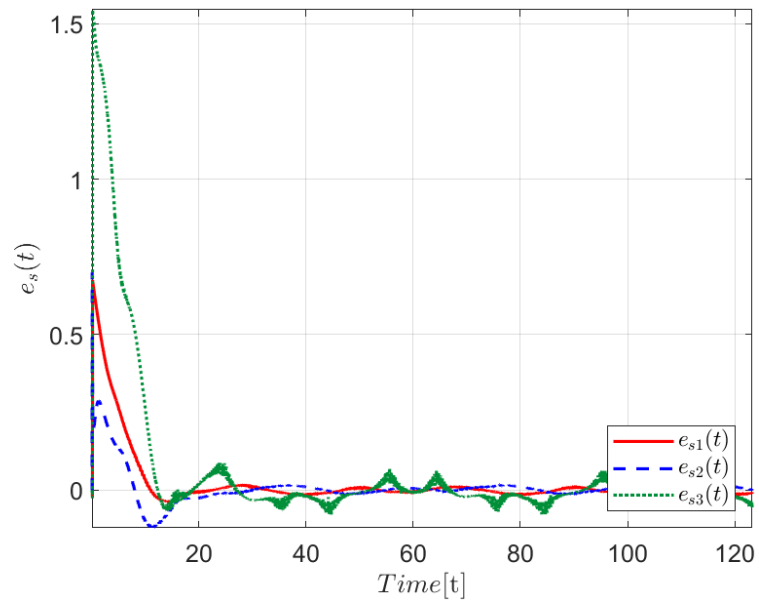
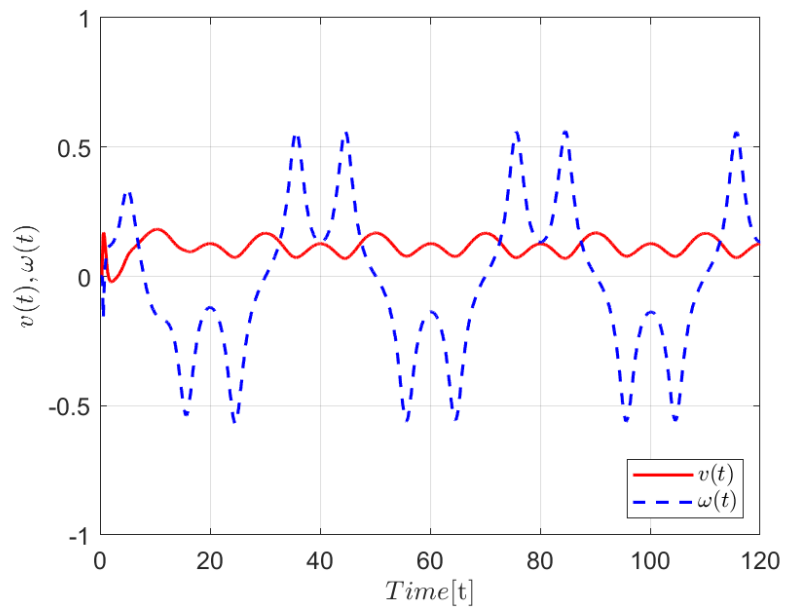


Figura 6.6: Errores de predicción $\tilde{w}_3(t)$ con $\tau = 0.12$ seg.

Figura 6.7: Errores de seguimiento $e_s(t)$ con $\tau = 0.12$ seg.Figura 6.8: Entradas de control para el robot diferencial con $\tau = 0.12$ seg.

6.2.2. Seguimiento de trayectoria tipo parábola con $\tau = 0.12$ seg.

Para llevar a cabo los experimentos con la trayectoria parabólica se utilizan las mismas ganancias para el predictor y la retroalimentación de la Tabla 6.2.

Se visualiza en la Figura 6.9 como a pesar de las discontinuidades, el sistema sigue satisfactoriamente la trayectoria deseada con unos giros o picos repentinos que se pueden apreciar en los extremos.

Los efectos de las discontinuidades son más visibles en las Figuras 6.10 y 6.11, que son los errores de predicción y de seguimiento respectivamente. En dichas figuras, se aprecia como cada 40 segundos hay un aumento de los errores debido al cambio brusco de la orientación, ya que la parábola en los extremos presentan un giro de 180° en la trayectoria deseada. Sin embargo, a pesar de los cambios bruscos, los errores de predicción y de seguimiento convergen rápidamente a la estabilidad.

En la Figura 6.12 también es apreciable el efecto de las discontinuidades en las señales de control, donde después de presentar picos en las velocidades, estas se normalizan tratando de estabilizar el sistema.

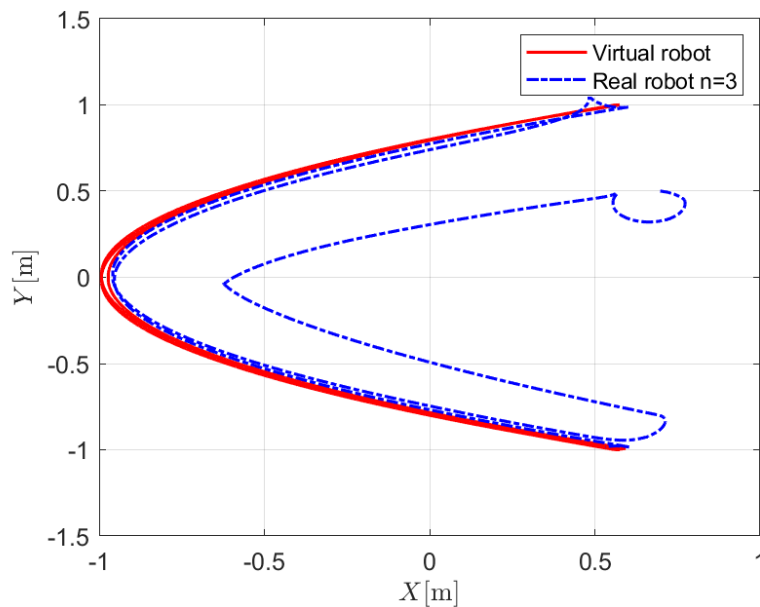
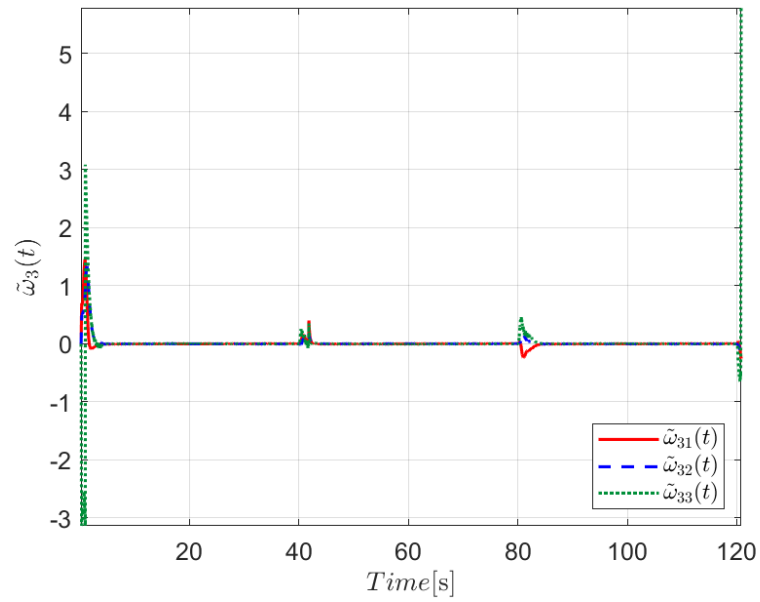
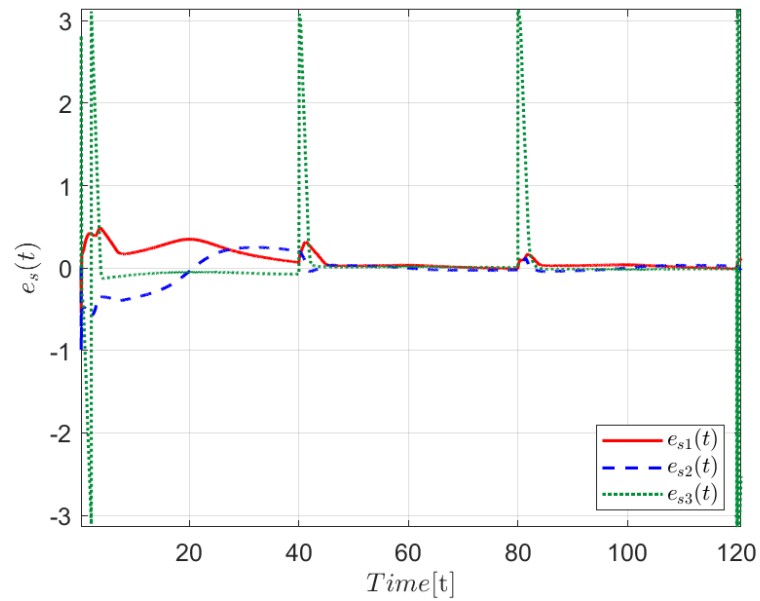


Figura 6.9: Trayectoria realizada por el robot diferencial con $\tau = 0.12$ seg.

Figura 6.10: Errores de predicción $\tilde{w}_3(t)$ con $\tau = 0.12$ seg.Figura 6.11: Errores de seguimiento $e_s(t)$ con $\tau = 0.12$ seg.

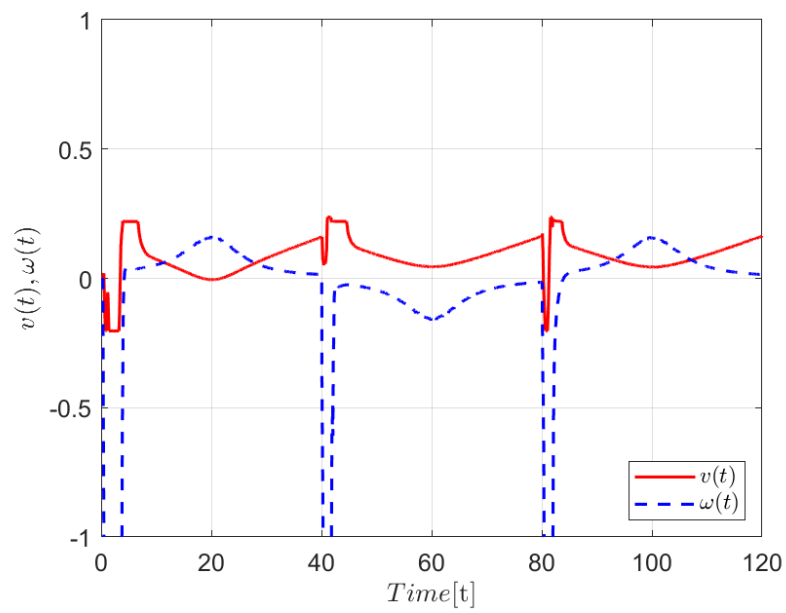


Figura 6.12: Entradas de control para el robot diferencial con $\tau = 0.12$ seg.

6.2.3. Seguimiento de trayectoria tipo parábola con $\tau = 0.9$ seg.

Al aumentar el retardo a $\tau = 0.9$ seg es necesario cambiar las ganancias del esquema de predicción, de manera que estas cumplan con la condición (5.25). Por lo tanto, se utilizan las ganancias definidas en la Tabla 6.3,

j	1	2	3
λ_{j1}	0.5	0.5	0.5
λ_{j2}	0.5	0.5	0.5
λ_{j3}	1.5	1.5	1.5

Tabla 6.3: Ganancias del predictor con retardo $\tau = 0.9$ seg.

Por otro lado, aunque la dinámica del predictor influye en la retroalimentación, solo hay que asegurarse que su dinámica sea más lenta que la de la ley de control. En este caso, se mantienen las mismas ganancias de control que en los experimentos anteriores.

En la Figura 6.13 puede verse como a pesar del aumento en el retardo, la trayectoria deseada es alcanzada. Debido a las discontinuidades, se siguen presentando giros bruscos en los extremos de la parábola, la mayor diferencia en el comportamiento puede apreciarse en la velocidad de convergencia a la trayectoria, ya que esta es más lenta que en el caso anterior.

La convergencia más lenta también es posible percibirla en las Figuras 6.14 y 6.15 donde después de los picos presentados a los 40 segundos los errores convergen lentamente a cero, para poco después volver a ser perturbado por la discontinuidad de la parábola.

El efecto de las discontinuidades, al igual que en el caso anterior, se aprecia en la Figura 6.16. Otro comportamiento interesante puede ser apreciado al inicio del experimento, donde se producen cambios bruscos en la velocidad debidos a las condiciones iniciales del experimento, ya que este se encuentra en una posición que lo obliga a dar un giro más brusco. De igual manera, en este experimento en particular se notan los efectos del ruido en particular en la velocidad angular.

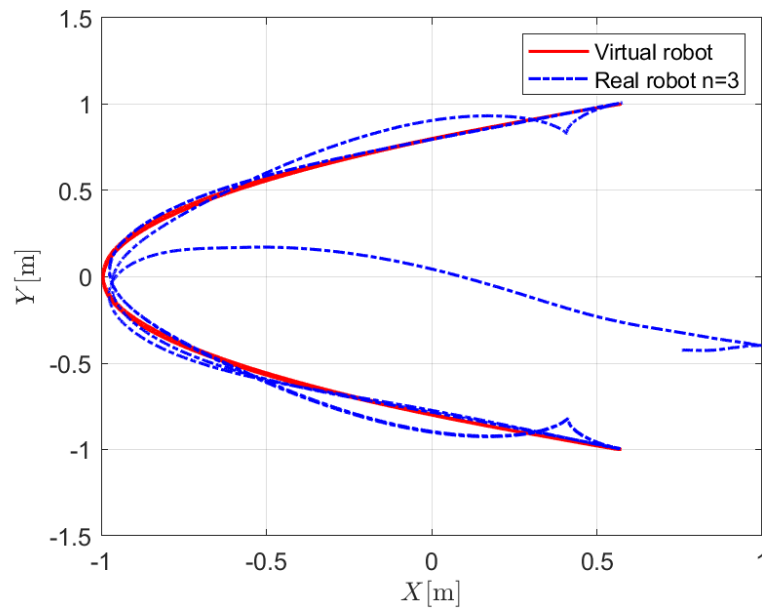


Figura 6.13: Trayectoria realizada por el robot diferencial con $\tau = 0.9$ seg.

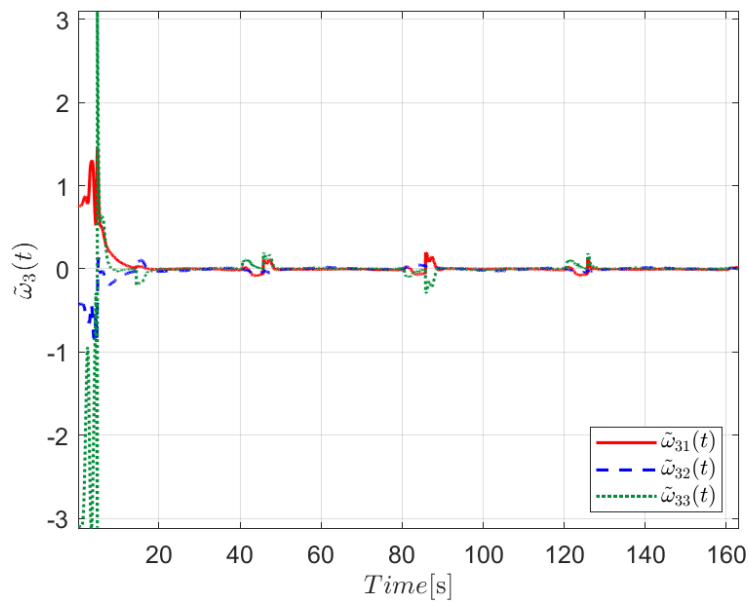
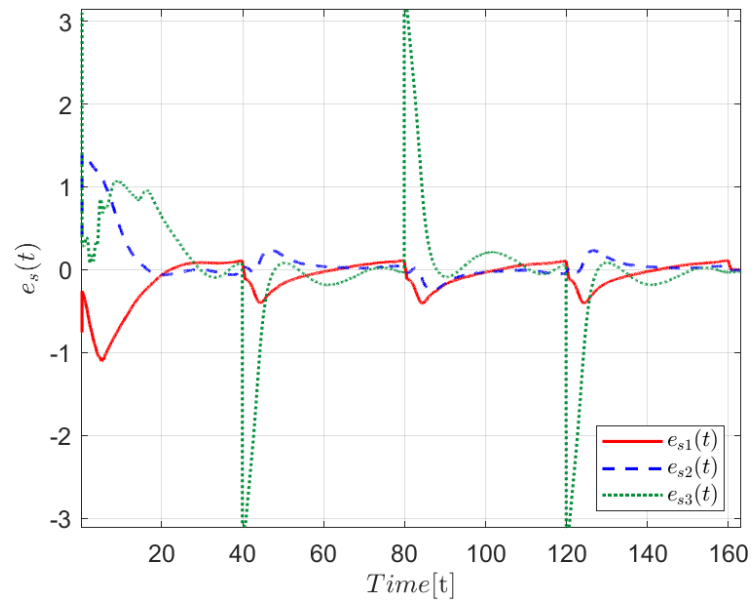
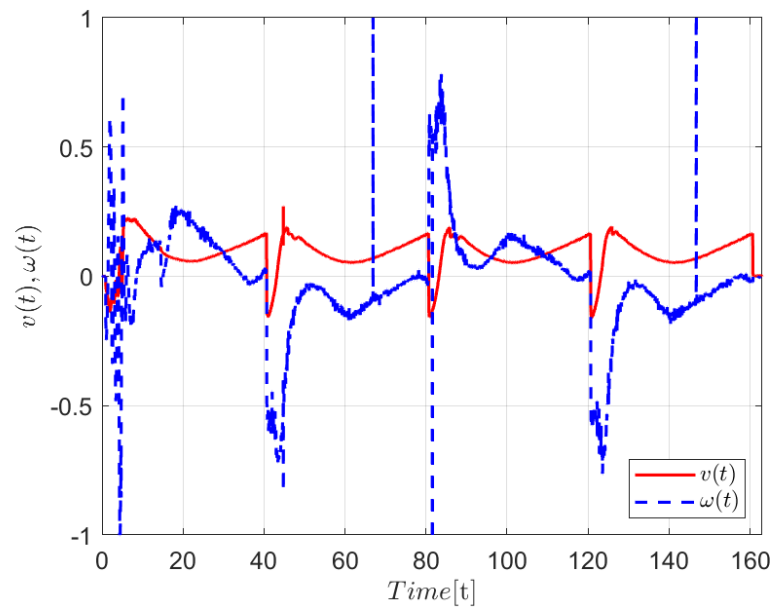


Figura 6.14: Errores de predicción $\tilde{w}_3(t)$ con $\tau = 0.9$ seg.

Figura 6.15: Errores de seguimiento $e_s(t)$ con $\tau = 0.9$ seg.Figura 6.16: Entradas de control para el robot diferencial con $\tau = 0.9$ seg.

6.2.4. Seguimiento de trayectoria tipo lemniscata con $\tau = 0.9$ seg con perturbaciones.

En el presente experimento se realiza un seguimiento de trayectorias con una perturbación, que en este caso se ve inducida por el operador. De manera más específica, alrededor del segundo 50 se tomó y movió de manera traslacional el robot diferencial para evaluar el comportamiento del mismo. Las ganancias utilizadas son las mismas que las presentadas en la Tabla 6.3.

En la Figura 6.17 se nota el desplazamiento hacia la derecha realizado por el operario, y como después de desplazarlo este busca converger nuevamente a la trayectoria, haciéndolo de manera satisfactoria.

De igual manera, en la Figura 6.18 se aprecian los efectos del retardo aumentado y de la perturbación inducida. Los errores de predicción convergen y se mantienen estables alrededor del cero, aunque, evidentemente al aumentar el retardo, el desempeño del esquema de predicción se ve perjudicado este se encuentra dentro de los parámetros aceptables para el seguimiento de trayectorias.

Por otro lado, los errores de seguimiento presentados en la Figura 6.19 se ven también afectados por los errores de predicción, haciendo que estos aumenten aunque se mantengan estables alrededor del cero. Al inducir la perturbación, un detalle importante a recalcar es como los errores de seguimiento convergen después de que los errores de predicción lo hagan, tal como se mencionó anteriormente.

Por último, en la Figura 6.20 presenta las entradas de control y como la única señal que cambia relativamente es la velocidad angular, esto es debido a que el desplazamiento realizado por el operario fue solamente traslacional.

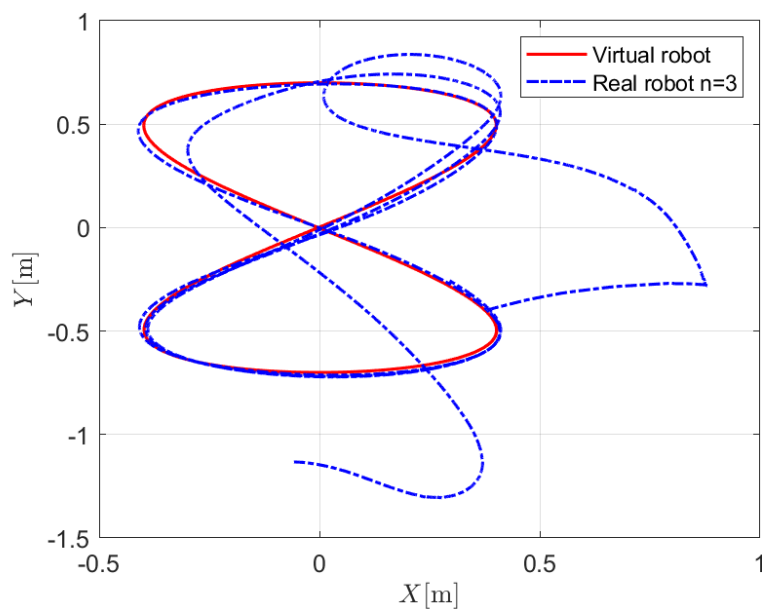
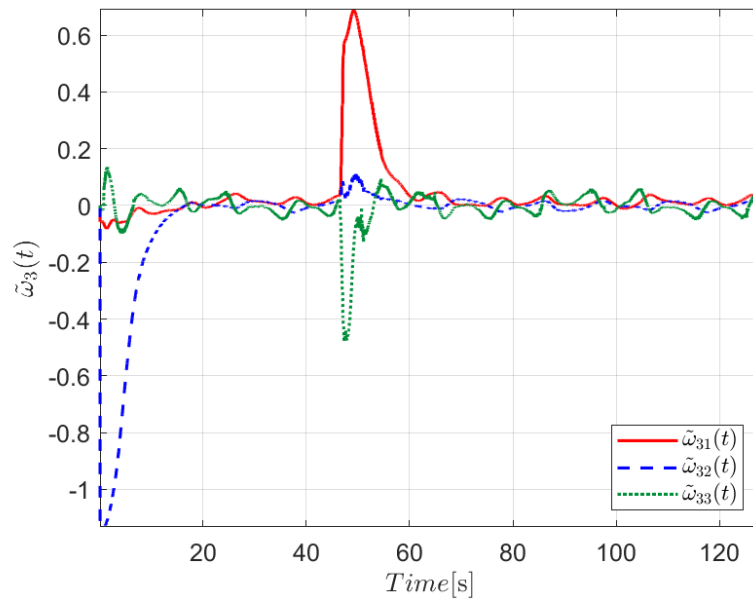
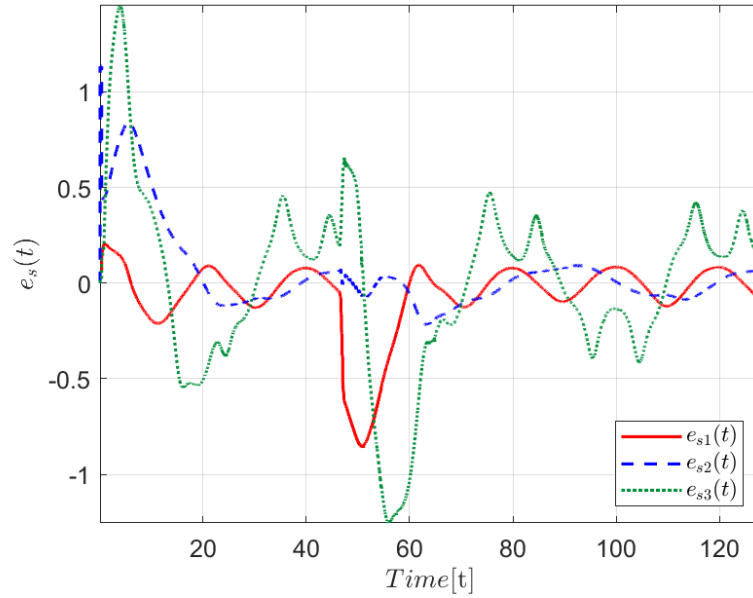


Figura 6.17: Trayectoria realizada por el robot diferencial con $\tau = 0.9$ seg.

Figura 6.18: Errores de predicción $\tilde{w}_3(t)$ con $\tau = 0.9$ seg.Figura 6.19: Errores de seguimiento $e_s(t)$ con $\tau = 0.9$ seg.

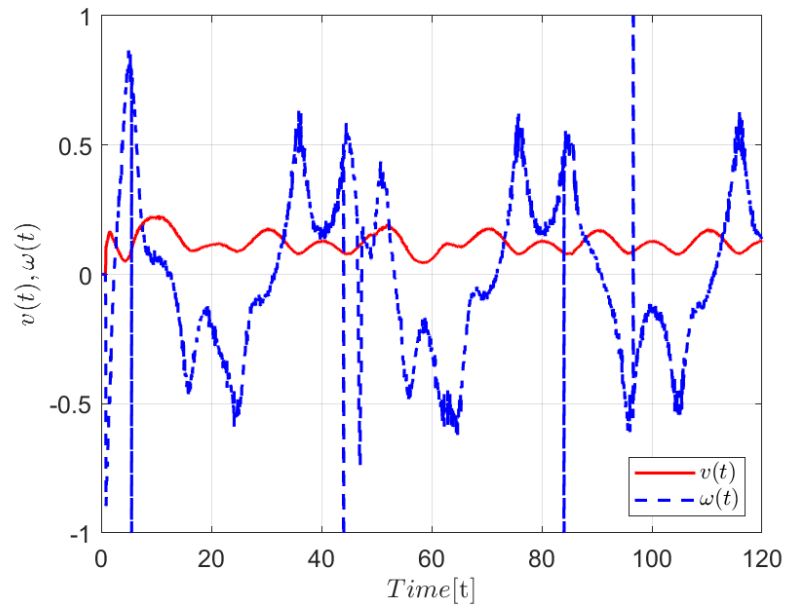


Figura 6.20: Entradas de control para el robot diferencial con $\tau = 0.9$ seg.

6.3. Conclusiones del capítulo

En este capítulo se presentaron múltiples experimentos que demuestran la eficacia del esquema de predicción a pesar de que se presenten perturbaciones, ya sean traslacionales o rotacionales. Otra observación importante a recalcar es que el esquema puede operar a mayores retardos de tiempo y la única limitación se presenta debido a que se está considerando un retardo de tiempo constante, cuando en la realidad este es variable. Sin embargo, este capítulo demuestra que a pesar de tener un retardo variable no modelado, el esquema logra estabilizar el sistema a unos márgenes aceptables.

Por último, los experimentos reafirman que la selección de la retroalimentación también influye en la selección de las ganancias del predictor y de la velocidad de convergencia del sistema.

Capítulo 7

Conclusiones y trabajo futuro

7.1. Conclusión

Este trabajo de tesis se enfoca en solucionar el problema de seguimiento de trayectorias para robots móviles con retardos en la entrada. La propuesta presentada es un esquema de predicción basado en subpredicadores, expandiendo y adaptando los resultados presentados en [33] y [36]. Las capacidades del predictor-observador se han demostrado tanto para el robot omnidireccional como en el diferencial a través de análisis de estabilidad, múltiples simulaciones y experimentos.

En el caso del robot (3,0) se demostró que es posible utilizar el predictor para retardos con incertidumbres, lo cual se demostró mediante un análisis de estabilidad usando el método de Lyapunov-Krasovskii y los resultados obtenidos por [1]. De igual manera, se llevó a cabo una simulación que corrobora los resultados ya mencionados.

Por otro lado, en el robot (2,0) se analizó la estabilidad del sistema en lazo cerrado utilizando la estrategia de análisis presentado en [41] junto con el método de Lyapunov-Krasovskii, dando así condiciones de estabilidad que depende solo de las ganancias del predictor-observador.

Se publicó un artículo de revista exponiendo los resultados obtenidos en el caso del robot diferencial, el cual, como ya se ha mencionado, fue publicado en IEEE Access bajo el título de "Non-Linear Prediction-Based Trajectory Tracking for Non-Holonomic Mobile Robots".

Finalmente, los resultados obtenidos a lo largo de la tesis demuestran lo eficiente que el esquema de predicción puede llegar a ser y que es posible, al menos teóricamente, controlar sistemas sujetos a retardos constantes en la entrada muy grandes simplemente aumentando el número de subpredicadores. Y a pesar de que esta afirmación no aplica también a los retardos con incertidumbres, sí es posible encontrar un determinado margen dentro del cual el sistema se mantiene asintóticamente estable.

7.2. Trabajo Futuro

Derivado de las conclusiones obtenidas en este trabajo, se consideran los siguientes puntos de mejora para trabajo futuro:

- Modificar el esquema de predicción con un enfoque adaptativo o redes neuronales para mejorar su desempeño ante retardos variantes e inciertos.
- Probar una ley de control más eficaz o que converja más rápidamente para mejorar el desempeño de la predicción.
- Realizar experimentos vía remota para demostrar el desempeño del esquema.

- Comprobar la estabilidad para retardos inciertos.

Apéndice A

Dinámica de los errores del robot (3,0)

Antes de desarrollar el sistema dinámico de los errores del robot omnidireccional, los siguientes resultados auxiliares son necesarios,

Corolario 1. *Las siguientes expresiones son equivalentes,*

$$\hat{\rho}_n(t) - \rho_{nd}(t) = e_s(t) - \tilde{\rho}_n(t) \quad (\text{A.1})$$

Demostración. *El resultado sigue directamente de la definición de los errores de seguimiento (4.9) y de predicción (4.5). \square*

Corolario 2. *Es posible reescribir la matriz de rotación $R^T(\cdot)$ de manera que,*

$$R^T(\cdot) = I + E(\cdot) \quad (\text{A.2})$$

donde I es la matriz identidad de tamaño adecuado y

$$E(\cdot) = \begin{bmatrix} -2 \sin^2(\frac{\cdot}{2}) & -\sin(\cdot) & 0 \\ \sin(\cdot) & -2 \sin^2(\frac{\cdot}{2}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Demostración. *La matriz de rotación,*

$$R^T(\cdot) = \begin{bmatrix} \cos(\cdot) & -\sin(\cdot) & 0 \\ \sin(\cdot) & \cos(\cdot) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

se puede reescribir como,

$$\begin{aligned} R^T(\cdot) &= \begin{bmatrix} \cos^2(\frac{\cdot}{2}) - \sin^2(\frac{\cdot}{2}) & -\sin(\cdot) & 0 \\ \sin(\cdot) & \cos^2(\frac{\cdot}{2}) - \sin^2(\frac{\cdot}{2}) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 - 2 \sin^2(\frac{\cdot}{2}) & -\sin(\cdot) & 0 \\ \sin(\cdot) & 1 - 2 \sin^2(\frac{\cdot}{2}) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= I + E(\cdot) \end{aligned}$$

\square

Empleando estos resultados técnicos, se determinan los errores de seguimiento y predicción con la retroalimentación (4.7) del robot omnidireccional. Sustituyendo,

$$\begin{aligned}\dot{\theta}(t) = & -\frac{1}{r}J_1R(\hat{\rho}_{n3}(t))\{\dot{\rho}_{nd}(t) - k[\hat{\rho}_n(t) - \rho_{nd}(t)]\} \\ & -\frac{1}{r}J_1R(\hat{\rho}_{n3}(t))\{\dot{\rho}_{nd}(t) - k[e_s(t) - \tilde{\rho}_n(t)]\}\end{aligned}$$

en el sistema del robot móvil omnidireccional cuando $i = 1$,

$$\dot{\rho}_1(t) = -r(J_1R(\rho_{13}(t)))^{-1}\dot{\theta}(t_\eta)$$

donde, $t_\eta = t - (n-1)\bar{h} - \eta$, se obtiene como resultado el sistema en lazo cerrado,

$$\begin{aligned}\dot{\rho}_1(t) = & -r(J_1R(\rho_{13}(t)))^{-1}\left[-\frac{1}{r}J_1R(\hat{\rho}_{n3}(t_\eta))\{\dot{\rho}_{nd}(t_\eta) - k[e_s(t_\eta) - \tilde{\rho}_n(t_\eta)]\}\right] \\ = & R^T(\rho_{13}(t))R(\hat{\rho}_{n3}(t_\eta))\{\dot{\rho}_{nd}(t_\eta) - k[e_s(t_\eta) - \tilde{\rho}_n(t_\eta)]\} \\ = & R^T(\rho_{13}(t) - \hat{\rho}_{n3}(t_\eta))\{\dot{\rho}_{nd}(t_\eta) - k[e_s(t_\eta) - \tilde{\rho}_n(t_\eta)]\} \\ = & \{I + E(\rho_{13}(t) - \hat{\rho}_{n3}(t_\eta))\}\{\dot{\rho}_{nd}(t_\eta) - k[e_s(t_\eta) - \tilde{\rho}_n(t_\eta)]\}.\end{aligned}$$

Repetiendo el proceso con los subpredictores y tomando en cuenta que $t_i = t - (n-i)\bar{h}$,

$$\begin{aligned}\hat{\rho}_i(t) = & -r(J_1R(\hat{\rho}_{i3}(t)))^{-1}\left[-\frac{1}{r}J_1R(\hat{\rho}_{n3}(t_i))\{\dot{\rho}_{nd}(t_i) - k[e_s(t_i) - \tilde{\rho}_n(t_i)]\}\right] \\ & + \lambda e_{\rho_i}(t - \bar{h}) \\ = & R^T(\hat{\rho}_{i3}(t))R(\hat{\rho}_{n3}(t_i))\{\dot{\rho}_{nd}(t_i) - k[e_s(t_i) - \tilde{\rho}_n(t_i)]\} + \lambda e_{\rho_i}(t - \bar{h}) \\ = & R^T(\hat{\rho}_{i3}(t) - \hat{\rho}_{n3}(t_i))\{\dot{\rho}_{nd}(t_i) - k[e_s(t_i) - \tilde{\rho}_n(t_i)]\} + \lambda e_{\rho_i}(t - \bar{h}) \\ = & \{I + E(\hat{\rho}_{i3}(t) - \hat{\rho}_{n3}(t_i))\}\{\dot{\rho}_{nd}(t_i) - k[e_s(t_i) - \tilde{\rho}_n(t_i)]\} + \lambda e_{\rho_i}(t - \bar{h}).\end{aligned}$$

Con esto, se calcula la dinámica de los errores de inyección, primero para $i = 1$,

$$\begin{aligned}\dot{e}_{\rho_1}(t) = & \dot{\rho}_1(t) - \hat{\rho}_1(t) \\ = & \{I + E(\rho_{13}(t) - \hat{\rho}_{n3}(t_\eta))\}\{\dot{\rho}_{nd}(t_\eta) - k[e_s(t_\eta) - \tilde{\rho}_n(t_\eta)]\} \\ & - \{I + E(\hat{\rho}_{13}(t) - \hat{\rho}_{n3}(t_1))\}\{\dot{\rho}_{nd}(t_1) - k[e_s(t_1) - \tilde{\rho}_n(t_1)]\} - \lambda e_{\rho_1}(t - \bar{h}) \\ = & -ke_s(t_\eta) + k\tilde{\rho}_n(t_\eta) + ke_s(t_1) - k\tilde{\rho}_n(t_1) - \lambda e_{\rho_1}(t - \bar{h}) + \gamma_1(t)\end{aligned}$$

donde,

$$\begin{aligned}\gamma_1(t) = & \{E(\rho_{13}(t) - \hat{\rho}_{n3}(t_\eta))\}\{\dot{\rho}_{nd}(t_\eta) - k[e_s(t_\eta) - \tilde{\rho}_n(t_\eta)]\} + \dot{\rho}_{nd}(t_\eta) \\ & - \{E(\hat{\rho}_{13}(t) - \hat{\rho}_{n3}(t_1))\}\{\dot{\rho}_{nd}(t_1) - k[e_s(t_1) - \tilde{\rho}_n(t_1)]\} - \dot{\rho}_{nd}(t_1).\end{aligned}$$

Para el caso general i ,

$$\begin{aligned}
\dot{e}_{\rho_i}(t) &= \dot{\hat{\rho}}_{(i-1)}(t + \bar{h}) - \dot{\hat{\rho}}_i(t) \\
&= \{I + E(\hat{\rho}_{(i-1)3}(t + \bar{h}) - \hat{\rho}_{n3}(t_i))\} \{\dot{\rho}_{nd}(t_i) - k[e_s(t_i) - \tilde{\rho}_n(t_i)]\} \\
&\quad + \lambda e_{\rho_{(i-1)}}(t - \bar{h}) - \{I + E(\hat{\rho}_{i3}(t) - \hat{\rho}_{n3}(t_i))\} \{\dot{\rho}_{nd}(t_i) - k[e_s(t_i) - \tilde{\rho}_n(t_i)]\} \\
&\quad - \lambda e_{\rho_i}(t - \bar{h}) \\
&= \lambda e_{\rho_{(i-1)}}(t - \bar{h}) - \lambda e_{\rho_i}(t - \bar{h}) + \gamma_i(t)
\end{aligned}$$

con,

$$\begin{aligned}
\gamma_i(t) &= \{E(\hat{\rho}_{(i-1)3}(t + \bar{h}) - \hat{\rho}_{n3}(t_i))\} \{\dot{\rho}_{nd}(t_i) - k[e_s(t_i) - \tilde{\rho}_n(t_i)]\} \\
&\quad - \{E(\hat{\rho}_{i3}(t) - \hat{\rho}_{n3}(t_i))\} \{\dot{\rho}_{nd}(t_i) - k[e_s(t_i) - \tilde{\rho}_n(t_i)]\}.
\end{aligned}$$

Ahora, se obtiene el error de seguimiento e_s ,

$$\begin{aligned}
\dot{e}_s(t) &= \dot{\rho}_n(t) - \dot{\rho}_{nd}(t) \\
&= \{I + E(\rho_{n3}(t) - \hat{\rho}_{n3}(t - \eta))\} \{\dot{\rho}_{nd}(t - \eta) - k[e_s(t - \eta) - \tilde{\rho}_n(t - \eta)]\} \\
&\quad - \dot{\rho}_{nd}(t) \\
&= -k e_s(t - \eta) + k \tilde{\rho}_n(t - \eta) + \gamma_t(t)
\end{aligned}$$

donde,

$$\begin{aligned}
\gamma_t(t) &= \{E(\rho_{n3}(t) - \hat{\rho}_{n3}(t - \eta))\} \{\dot{\rho}_{nd}(t - \eta) - k[e_s(t - \eta) - \tilde{\rho}_n(t - \eta)]\} \\
&\quad + \dot{\rho}_{nd}(t - \eta) - \dot{\rho}_{nd}(t).
\end{aligned}$$

Finalmente, tal como se menciona en el Capítulo 4, se realiza el siguiente cambio de variables para modificar el instante de tiempo de los errores,

$$\begin{aligned}
z_s(t) &= e_s(t - n\bar{h}) \\
z_i(t) &= e_{\rho_i}(t - i\bar{h}) \quad i = 1, 2, \dots, n.
\end{aligned}$$

lo que da como resultado el sistema completo en lado cerrado,

$$\begin{aligned}
z_s(t) &= -k z_s(t - \eta) + k \sum_{m=1}^n z_m(t - \eta) + \gamma_t(t - n\bar{h}) \\
z_1(t) &= -k z_s(t - \eta) + k \sum_{m=1}^n z_m(t - \eta) + k z_s(t) - k \sum_{m=1}^n z_m(t) - \lambda z_1(t - \bar{h}) + \gamma_1(t - \bar{h}) \\
z_i(t) &= \lambda z_{(i-1)}(t - \bar{h}) - \lambda z_i(t - \bar{h}) + \gamma_i(t - i\bar{h})
\end{aligned}$$

que en forma matricial da como resultado,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{z}_s(t) \\ \dot{z}_1(t) \\ \dot{Z}_n(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 0_{1 \times n} \\ kI & -(kI)_{1 \times n} \\ 0_{(n-1) \times 1} & 0_{(n-1) \times n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_s(t) \\ z_1(t) \\ Z_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0_{1 \times n} \\ 0_{n \times 1} & -\Lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_s(t - \bar{h}) \\ z_1(t - \bar{h}) \\ Z_n(t - \bar{h}) \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} -(kI)_{2 \times 1} & (kI)_{2 \times n} \\ 0_{(n-1) \times 1} & 0_{(n-1) \times n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_s(t - \eta) \\ z_1(t - \eta) \\ Z_n(t - \eta) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \gamma_t(t - n\bar{h}) \\ \gamma_1(t - \bar{h}) \\ \Gamma_n(t) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

la cual es la representación mostrada en el Capítulo 4.

Apéndice B

Análisis para sistemas con retardos inciertos [1]

A continuación, se presenta el desarrollo detallado del resultado propuesto en [1], el cual se emplea en el Capítulo 4. Dado un sistema de la forma,

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A_0x(t) + A_1x(t-h) - A_2 \int_{-\eta}^0 [\bar{A}_0x(t+\theta) + A_1x(t-h+\theta) + A_2x(t-\eta+\theta)]d\theta \\ \dot{x}(t) &= A_0x(t) + A_1x(t-h) - F(x_t)\end{aligned}\tag{B.1}$$

donde $A_0 = \bar{A}_0 + A_1$. Se utiliza la siguiente funcional de Lyapunov,

$$\begin{aligned}\tilde{V}(x_t) &= v_0(x_t) + \int_{-h}^0 x^T(t+\theta)R_0x(t+\theta)d\theta + \int_{-h}^0 x^T(t+\theta)A_1^T(\theta+\bar{\tau})R_1A_1x(t+\theta)d\theta \\ &+ |\text{sign}(\eta)| \left(\frac{1+h}{\epsilon}\right) \left[\int_{-\eta-\eta\chi(\eta)}^0 x^T(t+\theta)A_0^T A_0^T(\theta+\eta+\eta\chi(\eta))U(0)A_0A_0x(t+\theta)d\theta \right. \\ &\left. + \int_{-h-\eta\chi(\eta)}^0 x^T(t+\theta)A_1^T A_0^T(\theta+h+\eta\chi(\eta))U(0)A_0A_1x(t+\theta)d\theta \right]\end{aligned}$$

con,

$$\begin{aligned}v_0(x_t) &= x^T(t)U(0)x(t) + 2x^T(t) \int_{-h}^0 U(-\theta-h)A_1x(t+\theta)d\theta \\ &+ \int_{-h}^0 x^T(t+\theta_1)A_1^T \int_{-h}^0 U(\theta_1-\theta_2)A_1x(t+\theta_2)d\theta_2d\theta_1.\end{aligned}$$

Al derivar la funcional $\tilde{V}(x_t)$ a lo largo de las soluciones del sistema se tiene,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \tilde{V}(x_t) = & x^T(t)[R_0 - W]x(t) \\
& - 2F^T(x_t) \left[U(0)x(t) + \int_{-h}^0 U(-\theta - h)A_1x(t + \theta)d\theta \right] \\
& - x^T(t-h)R_0x(t-h) + hx^T(t)A_1^T R_1 A_1 x(t) - \int_{t-h}^t x^T(\theta)A_1^T R_1 A_1 x(\theta)d\theta \\
& + |\text{sign}(\eta)| \left(\frac{1+h}{\epsilon} \right) \left[x^T(t)A_0^T A_0^T (\eta + \eta\chi(\eta))A_0 A_0 x(t) \right. \\
& - \int_{t-\eta-\eta\chi(\eta)}^t x^T(\theta)A_0^T A_0^T A_0 A_0 x(\theta)d\theta + x^T(t)A_1^T A_0^T (h + \eta\chi(\eta))A_0 A_1 x(t) \\
& \left. - \int_{t-h-\eta\chi(\eta)}^t x^T(\theta)A_1^T A_0^T A_0 A_1 x(\theta)d\theta \right]. \tag{B.2}
\end{aligned}$$

Definiendo W de la siguiente manera,

$$\begin{aligned}
W = & W_0 + hA_1^T R_1 A_1 - |\text{sign}(\eta)| \frac{1+h}{\alpha} \left[(\eta + \eta\chi(\eta))A_0^T A_0^T U(0)A_0 A_0 \right. \\
& \left. + (h + \eta\chi(\eta))A_1^T A_0^T U(0)A_0 A_1 \right]
\end{aligned}$$

se tiene que,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \tilde{V}(x_t) = & x^T(t)[R_0 - W_0]x(t) \\
& - 2F^T(x_t) \left[U(0)x(t) + \int_{-h}^0 U(-\theta - h)A_1x(t + \theta)d\theta \right] \\
& - x^T(t-h)R_0x(t-h) - \int_{t-h}^t x^T(\theta)A_1^T R_1 A_1 x(\theta)d\theta \\
& - |\text{sign}(\eta)| \left(\frac{1+h}{\epsilon} \right) \left[\int_{t-\eta-\eta\chi(\eta)}^t x^T(\theta)A_0^T A_0^T A_0 A_0 x(\theta)d\theta \right. \\
& \left. + \int_{t-h-\eta\chi(\eta)}^t x^T(\theta)A_1^T A_0^T A_0 A_1 x(\theta)d\theta \right]. \tag{B.3}
\end{aligned}$$

Nota: Cabe mencionar que para este desarrollo se tiene que,

$$\frac{d}{dt} v_0(x_t) = -x^T(t)Wx(t)$$

Apéndice C

Artículo de revista

RESEARCH ARTICLE

Non-Linear Prediction-Based Trajectory Tracking for Non-Holonomic Mobile Robots

JULIO A. BÁEZ-HERNÁNDEZ¹, MARTÍN VELASCO-VILLA¹, AND SABINE MONDIÉ²¹Electrical Engineering Department, Center for Research and Advanced Studies of the National Polytechnic Institute, Mexico City 07360, Mexico²Automatic Control Department, Center for Research and Advanced Studies of the National Polytechnic Institute, Mexico City 07360, Mexico

Corresponding author: Martín Velasco-Villa (velasco@cinvestav.mx)

ABSTRACT This work addresses the trajectory tracking problem for a non-holonomic differential drive mobile robot with a constant time delay h at the input signal. To compensate for the adverse effects of the input time delay on the vehicle, a non-linear prediction-observer scheme based on a sub-prediction strategy that asymptotically estimates the future values of the state, h units of time ahead was introduced, and, thanks to the characteristics of the system, a condition which depends only on the gains of the predictor-observer is obtained for the convergence of the predicted states. Non-linear feedback based on the estimated future state is proposed to tackle the trajectory tracking problem of a mobile robot. The closed-loop system describing the prediction strategy and trajectory tracking solution was formally analyzed, showing the asymptotic convergence of the prediction and tracking errors to the origin. Numerical and real-time experiments were performed to evaluate the prediction-based control scheme, which show adequate performance.

INDEX TERMS Non-holonomic mobile robot, non-linear prediction, time delays, trajectory tracking.

I. INTRODUCTION

Since the eighteenth century, delays have been essentials in studying dynamical systems because of the issues they raise. The study of input time delays for linear or non-linear systems is an important area of interest due to the influence that time delays have on the stability of the close-loop system when problems as regulation or trajectory tracking are faced, since the closed loop system results on a retarded differential equation. When the system, is not destabilized by the effects of the time delay, it suffers for a large degradation of the performance of the closed loop system [1], [2].

In particular, input time delays, which are often present in networked or teleoperated control systems, are well known to undermine the execution of feedback control, and significant problems are observed in data transmission through a network, such as variable sampling intervals or communication constraints of protocol scheduling, among others. These issues can be assessed using a time delay approach in networked control system [3].

The complexity of the time delays has been addressed in several studies. For example, in a linear context, the celebrated Smith predictor [4] proposes a solution for open-loop linear stable systems that presents a strong restriction on the class of systems that can be applied. However, some modifications to Smith's work have overcome limitations such as large time delays and unstable systems [5], [6], [7].

Other approaches to control input delay-systems have also been explored. For example, [8] introduced the idea of finite spectrum assignment for input time delay systems, and further works improved this result by considering other types of delays and analyzing robustness [8], [9], [10], [11]. Meanwhile, [12] and [13] proposed a state-observer approach to estimate the future states of a system using the ideas of [14]. Finally, to address larger delays, an attractive solution inspired by the state observer approach is the introduction of a sub-predictor or chained-observer scheme that divides the time delay [15], [16].

Non-linear time delay systems present a new and generally difficult challenge. Some authors have proposed approaches based on non-continuous controllers or high-gain predictors with feedback controllers [17], [18]. In addition, a truncated predictor was presented in [19] to estimate a system's future

The associate editor coordinating the review of this manuscript and approving it for publication was Mohammad AlShabi^{1b}.

state under the Lipschitz condition assumption. Also, the original linear sub-predictor approach was extended to a non-linear approach; see, for instance, [20], [21]. In [22], a prediction scheme that estimates the values of unknown delayed states from a cascade system was proposed.

Several studies on mobile robotics have been reported in the literature. One of the most important approaches is related to prediction-based controls; an interesting survey was presented in [23]. For instance, considering delayed measurements, [24], [25] provides a solution for the kinematic model, and [26] uses a simplified dynamic model. In addition, using prediction-based solutions, [27] and [28] proposed a solution to the trajectory-tracking problem by incorporating fuzzy techniques with a parallel distributed strategy. The Smith predictor, together with sliding mode control, was considered in [29] as a strategy to compensate for a time delay on a differential-drive mobile robot, while in [30], an integral-based prediction was considered for the same purpose. A comparison of several control techniques for trajectory tracking was presented in [31] for a modified kinematic model of a mobile robot.

The dynamic model of a mobile robot with input or output time delays has also been studied. The tracking problem for small time-varying input delays was addressed in [32], whereas the consensus problem for time-varying delays was considered in [33] and [34]. A discrete-time approach has also been reviewed for the control of input-delay mobile robots, see for instance [35] for the tracking problem and [36] for a synchronization strategy under input time delays.

The time delay problem in teleoperated mobile robots has been a popular case study because of its various applications, such as exploration, rescue, and surveillance. Consequently, several authors have proposed GPI observers and state prediction schemes for mobile robots [24], [37], [38].

The present work is devoted to trajectory tracking problem using a non-holonomic mobile robot subject to an input time delay. To overcome the adverse delay effects on performance and stability of the closed-loop system, a generalization of the linear sequential predictor presented in [16] to the non-linear case was proposed, providing an alternative to the sub-predictor in [15]. The obtained future estimated state was used to design a non-linear feedback law that solves the aforementioned tracking problem. The main results of the work can be summarized as follows. a) It is presented a sub-predictor observer that asymptotically converge to the future value of the state, at time $t + h$ independent of the trajectory performed by the robot, subject to bounded linear and angular velocities; b) Based on a Lyapunov-Krasovskii approach, it is presented a sufficient condition for the convergence of the prediction state that depends on the design parameters of the observer stages and the involved original time delay h ; c) The convergence of the trajectory tracking errors, by means of a feedback based on the estimated future states is formally proof for the closed loop system showing that theoretically,

the proposed solution can handle any time delay by increasing the number of sub-predictors.

The present strategy is related to the problem considered in [27] or more recently in [28] where a parallel distributed compensation PDC is applied to a fuzzy model of a kinematic mobile robot. These two proposals have the disadvantage of local predictor convergence and the characteristic that stability results are based on linear matrix inequalities. The solution proposed in [25] considers as a disadvantage, a persistent excitation condition for the prediction strategy and an upper bound for the maximum value of the input time delay. In contrast to the restrictions founded in [25], [27], and [28], in this work it is provided a predictor-observer that globally asymptotically converges to the actual future state independently of the evolution of the robot where the limitation on the maximum time delay can be overcome by considering additional non-linear sub-predictors. Furthermore, it should be pointed out that prediction strategies based on the integral predictor of [39] or [40] produce approximate future values due to implementation problems [41], which motivates the use of approximate solutions of truncated predictors [42].

The contributions of this study are as follows: Section II develops the kinematic model of the delayed non-holonomic robot used in this study. Section III presents the non-linear sub-prediction scheme together with the corresponding prediction error stability analysis. Section IV introduces the prediction-based feedback control solution to the trajectory tracking problem and stability analysis of the closed-loop system. Finally, real-time experiments and numerical simulation results are presented in Section V, and concluding remarks are provided in Section VI.

II. KINEMATIC MODEL OF A (2,0) TYPE MOBILE ROBOT

Following [43] and [44], the kinematic model of a differential drive mobile robot shown in Figure 1 is represented as,

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= v(t) \cos(\theta(t)) \\ \dot{y}(t) &= v(t) \sin(\theta(t)) \\ \dot{\theta}(t) &= \omega(t)\end{aligned}\quad (1)$$

where $\xi(t) = [x(t), y(t), \theta(t)]^T$ denotes the state of the robot. Point $P = (x, y)$ in Figure 1 represents the Cartesian position of the wheel axis center, $\theta(t)$ is the orientation of the vehicle measured from the X axis, and $u(t) = [v(t), \omega(t)]^T$ are the control inputs corresponding to the linear and angular velocities, respectively.

Kinematic model (1) is obtained based on the assumption that the robot has a rigid body that moves on a flat surface and that the vertical axis of the wheels is perpendicular to the ground. Under these conditions, the following non-holonomic constraint is satisfied [45], [46],

$$\dot{x}(t) \sin(\theta(t)) - \dot{y}(t) \cos(\theta(t)) = 0. \quad (2)$$

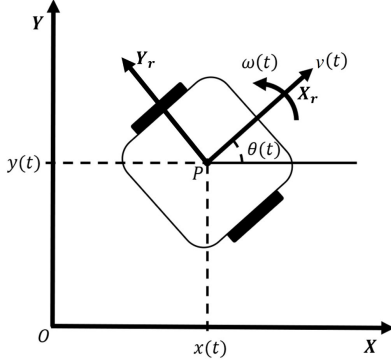


FIGURE 1. Differential drive mobile robot.

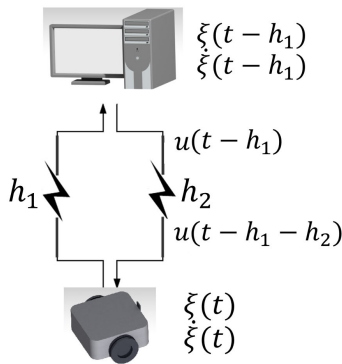


FIGURE 2. Mobile robot teleoperation scheme.

A. TIME DELAY IN THE CONTROL INPUTS

As mentioned previously, one of the problems associated with the teleoperation of robots is the time delay that can be produced by the environment or heavy data processing. A scheme for a remote-controlled mobile robot is presented in Figure 2. Here, $h_1 > 0$ is the time it takes the data to move from the robot sensors to the computer, whereas $h_2 > 0$ is the time the control input $u(t)$ is computed and injected into the robot. It should be noted that h_1 can be considered as a time delay at the output of the robot, whereas delay h_2 acts at the input of the vehicle; therefore, for the design purpose of a feedback law, a total time delay $h = h_1 + h_2$ in the input-output path is assumed.

Thus, according to Figure 2, the system takes the input delay form,

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= v(t-h)\cos(\theta(t)) \\ \dot{y}(t) &= v(t-h)\sin(\theta(t)) \\ \dot{\theta}(t) &= \omega(t-h). \end{aligned} \quad (3)$$

III. PREDICTION SCHEME

To design a prediction strategy to solve the trajectory tracking problem, instead of considering kinematic model (3), an alternative representation $\xi_r(t) = [x_r(t) \ y_r(t) \ \theta_r(t)]$ is obtained

using the following globally invertible transformation,

$$\begin{bmatrix} x_r(t) \\ y_r(t) \\ \theta_r(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta(t)) & \sin(\theta(t)) & 0 \\ -\sin(\theta(t)) & \cos(\theta(t)) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ \theta(t) \end{bmatrix} \quad (4)$$

that produces the body frame representation along the $X_r - Y_r$ frame,

$$\begin{aligned} \dot{x}_r(t) &= v(t-h) + \omega(t-h)y_r(t) \\ \dot{y}_r(t) &= -\omega(t-h)x_r(t) \\ \dot{\theta}_r(t) &= \omega(t-h). \end{aligned} \quad (5)$$

A. ADVANCED SYSTEM

The design of a feedback law that solves problems such as regulation or trajectory tracking requires the estimation of the future values of the states $\xi_r(t)$ of the mobile robot (5) to compensate for the time delay.

To obtain the future values, h units of time in the future, of the state $\xi_r(t)$ of system (5), a non-linear prediction strategy based on well-known linear sub-predictors [15], [16] is developed.

Assumption 1: For a fixed time delay h in system (5), there exists an integer $n \in \mathbb{N}$ such that,

$$\bar{h} = \frac{h}{n}, \quad (6)$$

where \bar{h} is a small enough time delay.

With condition (6), future values of $\xi_r(t)$ may be defined as,

$$\begin{aligned} w_{j1}(t) &= x_r(t+j\bar{h}) = w_{(j-1)1}(t+\bar{h}) \\ w_{j2}(t) &= y_r(t+j\bar{h}) = w_{(j-1)2}(t+\bar{h}) \\ w_{j3}(t) &= \theta_r(t+j\bar{h}) = w_{(j-1)3}(t+\bar{h}) \end{aligned} \quad (7)$$

for $j = 1, 2, \dots, n$.

From (7), the advanced systems are obtained for $j = 1, 2, \dots, n$, as,

$$\begin{aligned} \dot{w}_{j1}(t) &= v(t-(n-j)\bar{h}) + \omega(t-(n-j)\bar{h})w_{j2}(t) \\ \dot{w}_{j2}(t) &= -\omega(t-(n-j)\bar{h})w_{j1}(t) \\ \dot{w}_{j3}(t) &= \omega(t-(n-j)\bar{h}). \end{aligned} \quad (8)$$

When $j = n$, a delay-free system that evolves h seconds ahead is obtained

$$\begin{aligned} \dot{w}_{n1}(t) &= v(t) + \omega(t)w_{n2}(t) \\ \dot{w}_{n2}(t) &= -\omega(t)w_{n1}(t) \\ \dot{w}_{n3}(t) &= \omega(t). \end{aligned} \quad (9)$$

B. SUB-PREDICTORS CHAIN

A Luenberger-type predictor-observer, based on advanced dynamics (8)-(9), is introduced below. The observer for system (9) corresponds to the predictor of system (5). For $j = 1, 2, \dots, n$, it takes the form

$$\begin{aligned} \hat{w}_{j1}(t) &= v(t-(n-j)\bar{h}) + \omega(t-(n-j)\bar{h})\hat{w}_{j2}(t) \\ &\quad + \lambda_{j1}e_{w_{j1}}(t-\bar{h}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{\hat{w}}_{j2}(t) &= -\omega(t - (n - j)\bar{h})\hat{w}_{j1}(t) + \lambda_{j2}e_{w_{j2}}(t - \bar{h}) \\ \dot{\hat{w}}_{j3}(t) &= \omega(t - (n - j)\bar{h}) + \lambda_{j3}e_{w_{j3}}(t - \bar{h})\end{aligned}\quad (10)$$

where $\lambda_{j1}, \lambda_{j2}, \lambda_{j3} \in \mathbb{R}^+ \setminus 0$ and the injection errors $e_{w_{ji}}$ are defined for $j = 1$ in the form,

$$\begin{aligned}e_{w_{11}}(t) &= x_r(t + \bar{h}) - \hat{w}_{11}(t) = w_{11}(t) - \hat{w}_{11}(t) \\ e_{w_{12}}(t) &= y_r(t + \bar{h}) - \hat{w}_{12}(t) = w_{12}(t) - \hat{w}_{12}(t) \\ e_{w_{13}}(t) &= \theta_r(t + \bar{h}) - \hat{w}_{13}(t) = w_{13}(t) - \hat{w}_{13}(t)\end{aligned}\quad (11)$$

and for $j = 2, \dots, n$ as,

$$\begin{aligned}e_{w_{j1}}(t) &= \hat{w}_{(j-1)1}(t + \bar{h}) - \hat{w}_{j1}(t) \\ e_{w_{j2}}(t) &= \hat{w}_{(j-1)2}(t + \bar{h}) - \hat{w}_{j2}(t) \\ e_{w_{j3}}(t) &= \hat{w}_{(j-1)3}(t + \bar{h}) - \hat{w}_{j3}(t).\end{aligned}\quad (12)$$

Remark 1: Note that the injection errors for $j = 1$ defined in (11) have the property that $e_{w_{1i}}(t - h)$ is defined in time t , allowing the injection of these signals to the predictor-observer, referring to the actual position of the vehicle.

C. PREDICTION ERRORS

Unlike the injection errors, the prediction errors $\tilde{w}_j(t) = [\tilde{w}_{j1}(t) \tilde{w}_{j2}(t) \tilde{w}_{j3}(t)]^T$ for $j = 1, 2, \dots, n$ are defined as,

$$\tilde{w}_j(t) = w_j(t) - \hat{w}_j(t).\quad (13)$$

Lemma 1: The prediction errors \tilde{w}_j converge to zero if and only if the injection errors e_{w_k} converge to zero.

Proof: Given the definition of the injection errors (11)-(12),

$$\begin{aligned}\hat{w}_1(t) &= \xi(t + \bar{h}) - e_{w_1}(t) \\ \hat{w}_2(t) &= \hat{w}_1(t + \bar{h}) - e_{w_2}(t) = \xi(t + 2\bar{h}) - e_{w_1}(t + \bar{h}) \\ &\quad - e_{w_2}(t)\end{aligned}$$

yielding,

$$\begin{aligned}\hat{w}_j(t) &= \xi(t + j\bar{h}) - \sum_{k=1}^j e_{w_k}(t + (j - k)\bar{h}) \\ &= w_j(t) - \sum_{k=1}^j e_{w_k}(t + (j - k)\bar{h}).\end{aligned}\quad (14)$$

Then, the prediction errors can be rewritten as,

$$\begin{aligned}\tilde{w}_j(t) &= w_j(t) + e_{w_j}(t) - \hat{w}_{j-1}(t + \bar{h}) \\ &= w_j(t) + e_{w_j}(t) + e_{w_{j-1}}(t + \bar{h}) - \hat{w}_{j-2}(t + 2\bar{h})\end{aligned}$$

this is,

$$\tilde{w}_j(t) = \sum_{k=1}^j e_{w_k}(t + (j - k)\bar{h}).\quad (15)$$

Because the prediction error $\tilde{w}_j(t)$ is the sum of the injection errors $e_{w_k}(t)$, the convergence of $e_{w_k}(t)$ implies convergence of the prediction error. ■

D. INJECTION ERRORS CONVERGENCE

As mentioned in Subsection III-C, the convergence of the injection errors $e_{w_{ji}}$, is directly related to the stability and efficiency of the prediction errors \tilde{w}_n . The time derivative of the injection errors is given by

$$\begin{aligned}\dot{e}_{w_{j1}}(t) &= \omega(t - (n - j)\bar{h})e_{w_{j2}}(t) + \lambda_{(j-1)1}e_{w_{(j-1)1}}(t) \\ &\quad - \lambda_{j1}e_{w_{j1}}(t - \bar{h}) \\ \dot{e}_{w_{j2}}(t) &= -\omega(t - (n - j)\bar{h})e_{w_{j1}}(t) + \lambda_{(j-1)2}e_{w_{(j-1)2}}(t) \\ &\quad - \lambda_{j2}e_{w_{j2}}(t - \bar{h}) \\ \dot{e}_{w_{j3}}(t) &= \lambda_{(j-1)3}e_{w_{(j-1)3}}(t) - \lambda_{j3}e_{w_{j3}}(t - \bar{h})\end{aligned}\quad (16)$$

where, for $j = 1$, it is considered $\lambda_{01} = \lambda_{02} = \lambda_{03} = 0$.

The definition $\bar{e}_{w_j}(t)$,

$$\bar{e}_{w_j}(t) = \begin{bmatrix} e_{w_{j1}}(t) \\ e_{w_{j2}}(t) \end{bmatrix}$$

allows rewriting system (16) as,

$$\dot{\bar{e}}_{w_j}(t) = A_j(t)\bar{e}_{w_j}(t) + \Lambda_j\bar{e}_{w_j}(t - \bar{h}) - \Lambda_{j-1}\bar{e}_{w_{j-1}}(t)\quad (17a)$$

$$\dot{e}_{w_{j3}}(t) = -\lambda_{j3}e_{w_{j3}}(t - \bar{h}) + \lambda_{(j-1)3}e_{w_{(j-1)3}}(t).\quad (17b)$$

where,

$$\begin{aligned}A_j(t) &= \begin{bmatrix} 0 & \omega(t - (n - j)\bar{h}) \\ -\omega(t - (n - j)\bar{h}) & 0 \end{bmatrix} \\ \Lambda_j &= \begin{bmatrix} -\lambda_{j1} & 0 \\ 0 & -\lambda_{j2} \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

The convergence of the injection errors (17) is proven in two steps. First, the convergence of subsystem (17a) is addressed, followed by the convergence of subsystem (17b).

Before providing the stability conditions of subsystem (17a), we introduce the following auxiliary result.

Lemma 2: For subsystem (17a), given the positive real numbers α and η , there exists a symmetric matrix $P_j(t)$ such that,

$$\dot{P}_j(t) + A_j^T P_j(t) + P_j(t)A_j + 2\alpha P_j(t) + \eta_j I = 0.\quad (18)$$

Proof: Defining the symmetric matrix $P_j(t)$ as,

$$P_j(t) = \begin{bmatrix} p_{j1}(t) & p_{j2}(t) \\ p_{j2}(t) & p_{j3}(t) \end{bmatrix}$$

equation (18) rewrites as,

$$\dot{p}_{j1}(t) = A_j^*(t)p_{j1}(t) + \bar{\eta}_j\quad (19)$$

where $\omega_j^*(t) = \omega(t - (n - j)\bar{h})$ and,

$$\begin{aligned}p_{j1}(t) &= \begin{bmatrix} p_{j1}(t) \\ p_{j2}(t) \\ p_{j3}(t) \end{bmatrix} & \bar{\eta}_j &= - \begin{bmatrix} \eta_j \\ 0 \\ \eta_j \end{bmatrix} \\ A_j^*(t) &= \begin{bmatrix} -2\alpha_j & 2\omega_j^*(t) & 0 \\ -\omega_j^*(t) & -2\alpha_j & \omega_j^*(t) \\ 0 & -2\omega_j^*(t) & -2\alpha_j \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Using the transformation matrix

$$T_j = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (20)$$

to get the real Jordan form $J(t) = T_j A_j^*(t) T_j^{-1}$ of $A^*(t)$, the change of coordinates

$$z_j(t) = T_j p_{j1}(t), \quad (21)$$

leads to the system,

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_{j1}(t) \\ \dot{z}_{j2}(t) \\ \dot{z}_{j3}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2\alpha_j & 0 & 0 \\ 0 & -2\alpha_j & 2\omega_j^*(t) \\ 0 & -2\omega_j^*(t) & -2\alpha_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{j1}(t) \\ z_{j2}(t) \\ z_{j3}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\eta_j \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (22)$$

with solution,

$$\begin{aligned} z_{j1}(t) &= z_{j1}(0)e^{-2\alpha_j t} - \frac{\eta_j}{2\alpha_j}(1 - e^{-2\alpha_j t}) \\ z_{j2}(t) &= z_{j2}(0)e^{-2\alpha_j t} \cos(2\omega_j^*(t)) \\ &\quad + z_{j3}(0)e^{-2\alpha_j t} \sin(2\omega_j^*(t)) \\ z_{j3}(t) &= -z_{j2}(0)e^{-2\alpha_j t} \sin(2\omega_j^*(t)) \\ &\quad + z_{j3}(0)e^{-2\alpha_j t} \cos(2\omega_j^*(t)). \end{aligned}$$

The inverse transformation $p_{j1}(t) = T_j^{-1} z_j(t)$ is

$$P_j(t) = \begin{bmatrix} z_{j1} + z_{j2} & z_{j3} \\ z_{j3} & z_{j1} - z_{j2} \end{bmatrix}.$$

It is important to note that the error dynamics in (17) depend only on input $\omega_j^*(t)$. As a consequence, we present the following theorem inspired by [47]:

Theorem 1: A system of the form,

$$\dot{\bar{e}}_{w_j}(t) = A_j(t)\bar{e}_{w_j}(t) + \Lambda_j \bar{e}_{w_j}(t - \bar{h}) \quad (23a)$$

$$\dot{\bar{e}}_{w_{j3}}(t) = -\lambda_{j3} \bar{e}_{w_{j3}}(t - \bar{h}), \quad t \geq 0 \quad (23b)$$

where $\bar{h} > 0$, $\lambda_{j3} > 0$ and $\lambda_j > 0$, is globally asymptotically stable if there exist positive real numbers $\alpha, \beta, \epsilon, \eta_j$, and a symmetric matrix $P_j(t)$ that satisfy the Lyapunov equation (18) and if the following inequalities hold

$$\bar{h} < \min \left\{ \frac{1}{\alpha} \ln \left(\frac{\sqrt{\epsilon(\eta_j - \epsilon)}}{\lambda_j \bar{p}} \right), \frac{\pi}{2\lambda_{j3}} \right\} \quad (24)$$

where, $\bar{p} = \sup_{t>t_0} \|P(t) + \beta I\|$ and $2\alpha\beta > \eta_j > \epsilon$.

Proof: To prove the stability of subsystem (23a), the following Lyapunov-Krasovskii functional candidate is proposed,

$$V(t, \bar{e}_{w_{jt}}) = V_1(\bar{e}_{w_j}(t)) + V_2(t, \bar{e}_{w_{jt}}) \quad (25)$$

with,

$$V_1(\bar{e}_{w_j}(t)) = \bar{e}_{w_j}^T(t) P_j(t) \bar{e}_{w_j}(t) + \beta \bar{e}_{w_j}^T(t) \bar{e}_{w_j}(t) \quad (26)$$

$$V_2(t, \bar{e}_{w_{jt}}) = \epsilon \int_{t-\bar{h}}^t e^{2\alpha(s-t)} \bar{e}_{w_j}^T(s) \bar{e}_{w_j}(s) ds. \quad (27)$$

Differentiating the functional (26) gives,

$$\begin{aligned} \dot{V}_1(\bar{e}_{w_j}(t)) &= \bar{e}_{w_j}^T(t) [A_j^T(t) P_\beta(t) + P_\beta(t) A_j(t) + \dot{P}_j] \bar{e}_{w_j}(t) \\ &\quad + 2\bar{e}_{w_j}^T(t - \bar{h}) \Lambda_j^T P_\beta(t) \bar{e}_{w_j}(t) \end{aligned}$$

where

$$P_\beta = [P_j(t) + \beta I].$$

Note that if $\eta_j < 2\alpha\beta$ then $P_\beta > 0$.

Defining \bar{p} and λ_j as $\bar{p} = \sup_{t>t_0} \|P_\beta(t)\|$ and $\lambda_j = \lambda_{\max}\{\lambda_{j1}, \lambda_{j2}\} = \sup\|\Lambda_j\|$, the next inequality is obtained,

$$\begin{aligned} \dot{V}_1(\bar{e}_{w_j}(t)) &\leq \bar{e}_{w_j}^T(t) [A_j^T(t) P_\beta(t) + P_\beta(t) A_j(t) + \dot{P}_j] \bar{e}_{w_j}(t) \\ &\quad + 2\bar{p}\lambda_j \|\bar{e}_{w_j}(t - \bar{h})\| \|\bar{e}_{w_j}(t)\|. \end{aligned}$$

The time derivative of (27), yields,

$$\dot{V}_2(t, \bar{e}_{w_{jt}}) \leq -2\alpha V_2 + \epsilon \|\bar{e}_{w_j}(t)\|^2 - \epsilon e^{-2\alpha\bar{h}} \|\bar{e}_{w_j}(t - \bar{h})\|^2.$$

Given that $A_j^T(t) + A_j(t) = 0_{2 \times 2}$, the next inequality follows

$$\dot{V}(t, \bar{e}_{w_{jt}}) \leq -[\eta_j - \epsilon - \frac{\bar{p}^2 \lambda_j^2 e^{2\bar{h}\alpha}}{\epsilon}] \|\bar{e}_{w_j}(t)\|^2 \quad (28)$$

Hence, if λ_j is such that,

$$\lambda_j < \frac{\sqrt{\epsilon(\eta_j - \epsilon)}}{\bar{p} e^{\alpha\bar{h}}}. \quad (29)$$

If $\eta_j > \epsilon$ then subsystem (23a) is asymptotically stable. Similarly, subsystem (23b) is asymptotically stable if the following delay condition holds [2],

$$\bar{h} < \frac{\pi}{2\lambda_{j3}}. \quad (30)$$

Equations (29) and (30) indicate that system (23) is asymptotically stable for every fixed time delay which satisfies the following condition,

$$\bar{h} < \min \left\{ \frac{1}{\alpha} \ln \left(\frac{\sqrt{\epsilon(\eta_j - \epsilon)}}{\lambda_j \bar{p}} \right), \frac{\pi}{2\lambda_{j3}} \right\}.$$

Furthermore, because origin $e_{w_j} = [0 \ 0 \ 0]^T$ is the only equilibrium point, system (23) is globally asymptotically stable. ■

From Theorem 1, it is possible to provide a more straightforward existence condition for the prediction scheme which depends only on the predictor parameters.

Corollary 1: There always exists positive gains λ_i , $i = 1, 2, 3$, such that system (23) is globally asymptotically stable if,

$$\bar{h} < \min \left\{ \frac{1}{\lambda_{j2}}, \frac{\pi}{2\lambda_{j3}} \right\}. \quad (31)$$

Proof: Directly from equation (29) and condition (30).

Lemma 3: Assume that system (16)-(17) for $j = 1, 2, \dots, n$ satisfies inequality (24). Subsequently, the injection errors $e_{w_j}(t)$ asymptotically converge to the origin.

Proof: To carry out the proof, note that the injection error dynamic (17) for $j = 1$ corresponds to that considered in Theorem 1 for the case $\Lambda_0 = 0$ and $\lambda_{03} = 0$. Therefore, system (17) for $j = 1$, satisfies condition (23) in Theorem 1. Under these conditions, injection error $e_{w_1}(t)$ converges asymptotically to the origin.

To show that $e_{w_2}(t)$ also converges to the origin, note first that system (17) for $j = 2$ takes the form,

$$\begin{aligned} \dot{\bar{e}}_{w_2}(t) &= A_2(t)\bar{e}_{w_2}(t) + \Lambda_2\bar{e}_{w_2}(t - \bar{h}) - \Lambda_1\bar{e}_{w_1}(t) \\ \dot{e}_{w_{23}}(t) &= -\lambda_{23}e_{w_{23}}(t - \bar{h}) + \lambda_{13}e_{w_{13}}(t). \end{aligned} \quad (32)$$

Because $e_{w_1}(t)$ is a vanishing term for system (32), the convergence of $e_{w_2}(t)$ is obtained by considering $e_{w_1}(t) = 0$, obtaining

$$\begin{aligned} \dot{\bar{e}}_{w_2}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & \omega(t - (n - 2)\bar{h}) \\ -\omega(t - (n - 2)\bar{h}) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{w_{21}}(t) \\ e_{w_{22}}(t) \end{bmatrix} \\ &\quad + \begin{bmatrix} -\lambda_{21} & 0 \\ 0 & -\lambda_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{w_{21}}(t - \bar{h}) \\ e_{w_{22}}(t - \bar{h}) \end{bmatrix} \\ \dot{e}_{w_{23}}(t) &= -\lambda_{23}e_{w_{23}}(t - \bar{h}). \end{aligned} \quad (33)$$

Finally, Theorem 1 implies the convergence of $e_{w_2}(t)$. These arguments can be repeated until $j = n$. ■

Remark 2: Note that the prediction-observer scheme is based on the body-frame representation (5) of the kinematic model (1) obtained by employing global transformation (4). This transformation allows global convergence to the future values of the states, independent of the displacements of the mobile robot, in contrast to the results obtained in [25], [27], and [28] where the convergence to the future value depends on the linear velocity of the vehicle.

Remark 3: Note also, that the estimate of the future value is obtained for \bar{h} under condition (31) of Corollary 1, which only involves the design gains of sub-predictors λ_j . Therefore, increasing the number of sub-predictors allows the handling of a larger input time delay for the original system (1). It should be noticed that due to the chain configuration of the observer-predictor (10), or the injection errors (23), the convergence to the future values at time $t + h$ is obtained step by step converging first to the future value at time $t + \bar{h}$ and then at time $t + 2\bar{h}$ and so on until time $t + n\bar{h} = t + h$. The convergence conditions (31) are obtained for each step of the prediction chain on Corollary 1 which only involves the design gains of each sub-predictor. Therefore, condition (31) is relaxed by increasing the number n of sub-predictors, this fact is directly related to the size of the original time delay h that can be handled by the prediction strategy to produce the desired future value.

Remark 4: Even when theoretically the predictor-observer can handle any time delay, this fact is not relevant for a practical implementation since small time delays can destabilize the response of a possible prediction-based

feedback, and therefore, for small delays a short chain of sub-predictors will be necessary. The number of sub-predictors required to get the future values depends on the conditions given by Corollary 1 that state the minimal numbers of sub-predictors that must be used. Notice also that, when the input time delay h increases, it also increases the transient response of the prediction error affecting the time to get the future value of the state necessary to implement a feedback law for tracking or regulation.

IV. TRAJECTORY TRACKING PROBLEM FOR THE DIFFERENTIAL DRIVE MOBILE ROBOT

For the original delay-free system (1) the trajectory tracking problem can be solved by first defining the tracking error,

$$e_s(t) = \begin{bmatrix} e_{s1}(t) \\ e_{s2}(t) \\ e_{s3}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{rd}(t) - x_r(t) \\ y_{rd}(t) - y_r(t) \\ \theta_{rd}(t) - \theta_r(t) \end{bmatrix}. \quad (34)$$

The desired trajectory $\xi_{rd}(t) = [x_{rd}(t) \ y_{rd}(t) \ \theta_{rd}(t)]^T$ that the robot must follow is generated by a virtual mobile robot,

$$\begin{aligned} \dot{x}_{rd}(t) &= v_d(t) + \omega_d(t)y_{rd}(t) \\ \dot{y}_{rd}(t) &= -\omega_d(t)x_{rd}(t) \\ \dot{\theta}_{rd}(t) &= \omega_d(t) \end{aligned} \quad (35)$$

that satisfies the equivalent non-holonomic restriction (2).

For the delay-free mobile robot (1), the feedback

$$\begin{aligned} v(t) &= v_d(t) \cos(e_{s3}(t)) + k_1 e_{s1}(t) \\ \omega(t) &= \omega_d(t) + k_2 v_d(t) \frac{\sin(e_{s3}(t))}{e_{s3}(t)} e_{s2}(t) + k_3 e_{s3}(t) \end{aligned} \quad (36)$$

introduced in [48] solves the trajectory tracking problem employing the correct real positive gains k_1 , k_2 , and k_3 .

To solve the trajectory tracking problem for the advanced system (9), feedback (36) is expressed in terms of the estimated future values of the state, obtained from the state of the n -th sub-predictor, namely,

$$\begin{aligned} v(t) &= v_d(t) \cos(\hat{e}_{n3}(t)) + k_1 \hat{e}_{n1}(t) \\ \omega(t) &= \omega_d(t) + k_2 v_d(t) \frac{\sin(\hat{e}_{n3}(t))}{\hat{e}_{n3}(t)} \hat{e}_{n2}(t) + k_3 \hat{e}_{n3}(t) \end{aligned} \quad (37)$$

where the desired trajectory originates from the virtual robot (35). The trajectory tracking error is described as

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} e_{n1}(t) \\ e_{n2}(t) \\ e_{n3}(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} e_{s1}(t + h) \\ e_{s2}(t + h) \\ e_{s3}(t + h) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x_{rd}(t + h) - x_r(t + h) \\ y_{rd}(t + h) - y_r(t + h) \\ \theta_{rd}(t + h) - \theta_r(t + h) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} w_{1d}(t) - w_{n1}(t) \\ w_{2d}(t) - w_{n2}(t) \\ w_{3d}(t) - w_{n3}(t) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Thus the estimated tracking error is described by

$$\begin{bmatrix} \hat{e}_{n1}(t) \\ \hat{e}_{n2}(t) \\ \hat{e}_{n3}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_{1d}(t) - \hat{w}_{n1}(t) \\ w_{2d}(t) - \hat{w}_{n2}(t) \\ w_{3d}(t) - \hat{w}_{n3}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{w}_{n1}(t) + e_{n1}(t) \\ \tilde{w}_{n2}(t) + e_{n2}(t) \\ \tilde{w}_{n3}(t) + e_{n3}(t) \end{bmatrix}.$$

A. TRAJECTORY TRACKING ERROR DYNAMICS

After some computations, the closed-loop system (9)-(37) takes the form

$$\dot{e}_{wj}(t) = A_1(t)e_{wj}(t) + \Lambda_{(j-1)}e_{w(j-1)}(t) - \Lambda_j e_{wj}(t - \bar{h}) \quad (38a)$$

$$\dot{e}_n(t) = f(e_n(t)) + \Phi(e_n(t), e_{wj}(t)) \quad (38b)$$

where,

$$f(e_n) = \begin{bmatrix} -k_1 & \omega_d(t) & 0 \\ -\omega_d(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -k_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{n1}(t) \\ e_{n2}(t) \\ e_{n3}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_2 v_d(t) \gamma_s e_{n2}^2(t) + k_3 e_{n3}(t) e_{n2}(t) \\ -k_2 v_d(t) \gamma_s e_{n2}(t) e_{n1}(t) - k_3 e_{n3}(t) e_{n1}(t) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Phi(e_n, e_{wj}) = \begin{bmatrix} -k_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -k_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{w}_{n1}(t) \\ \tilde{w}_{n2}(t) \\ \tilde{w}_{n3}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \gamma_1(t) \\ \gamma_2(t) \\ \gamma_3(t) \end{bmatrix}$$

with

$$\gamma_s(t) = \frac{\sin(\tilde{w}_{n3}(t) + e_{n3}(t))}{\tilde{w}_{n3}(t) + e_{n3}(t)}$$

$$\gamma_1(t) = v_d(t)[1 - \cos(\tilde{w}_{n3}(t) + e_{n3}(t))] - k_2 v_d(t) \gamma_s(t) \times [\tilde{w}_{n2}(t)(w_{2d}(t) - e_{n2}(t)) + e_{n2}(t)w_{2d}(t)] - k_3 [\tilde{w}_{n3}(t)(w_{2d}(t) - e_{n2}(t)) + e_{n3}(t)w_{2d}(t)]$$

$$\gamma_2(t) = k_2 v_d(t) \gamma_s(t) [\tilde{w}_{n2}(t)(w_{1d}(t) - e_{n1}(t)) + e_{n2}(t)w_{1d}(t)] + k_3 [\tilde{w}_{n3}(t)(w_{1d}(t) - e_{n1}(t)) + e_{n3}(t)w_{1d}(t)]$$

$$\gamma_3(t) = -k_2 v_d(t) \gamma_s(t) [\tilde{w}_{n2}(t) + e_{n2}(t)].$$

For details on the computation of system (38), refer to Appendix A.

B. STABILITY ANALYSIS OF THE CLOSED-LOOP SYSTEM

To formally prove the convergence to the origin of the tracking error (38b), recall that the prediction error $e_{wj}(t)$ converges to zero independently of the dynamics of $e_n(t)$. For the tracking error, consider the case where $\Phi(e_n, e_{wj}) = 0$ in (38b)

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_{n1}(t) \\ \dot{e}_{n2}(t) \\ \dot{e}_{n3}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_1 & \omega_d(t) & 0 \\ -\omega_d(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -k_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{n1}(t) \\ e_{n2}(t) \\ e_{n3}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_2 v_d(t) \gamma_s e_{n2}^2 + k_3 e_{n3} e_{n2} \\ -k_2 v_d(t) \gamma_s e_{n2} e_{n1} - k_3 e_{n3} e_{n1} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (39)$$

where it is clear that $(e_{n1}, e_{n2}, e_{n3}) = (0, 0, 0)$ is an equilibrium point of (39). Time derivative of the Lyapunov candidate function,

$$V(t) = \frac{1}{2}e_{n1}^2 + \frac{1}{2}e_{n2}^2 + \frac{1}{2}e_{n3}^2 \quad (40)$$

yields,

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= e_{n1}\dot{e}_{n1} + e_{n2}\dot{e}_{n2} + e_{n3}\dot{e}_{n3} \\ &= e_{n1}(-k_1 e_{n1} + \omega_d e_{n2} + k_2 v_d \gamma_s e_{n2}^2 + k_3 e_{n3} e_{n2}) \\ &\quad + e_{n2}(-\omega_d e_{n1} - k_2 v_d(t) \gamma_s e_{n2} e_{n1} - k_3 e_{n3} e_{n1}) - k_3 e_{n3}^2 \\ &= -k_1 e_{n1}^2 - k_3 e_{n3}^2. \end{aligned}$$

Since $\dot{V}(t)$ is negative semidefinite, the Barbalat lemma allows proving the asymptotic stability of subsystem (39). Term $\dot{V}(t)$ is computed as follows,

$$\begin{aligned} \ddot{V}(t) &= -2k_1 e_{n1} \dot{e}_{n1} - 2k_3 e_{n3} \dot{e}_{n3} \\ &= -2k_1 e_{n1}(-k_1 e_{n1} + \omega_d e_{n2} + k_2 v_d \gamma_s e_{n2}^2 + k_3 e_{n3} e_{n2}) \\ &\quad + 2k_3 e_{n3}^2. \end{aligned}$$

Thus, $\dot{V}(t)$ is uniformly continuous and $\dot{V}(t) \rightarrow 0$ as $t \rightarrow \infty$, which in turn implies that $e(t) \rightarrow 0$ as $t \rightarrow \infty$.

C. LINEAR GROWTH OF THE INTERCONNECTION TERM

To complete the convergence proof of error (38b), it is necessary to verify the linear growth of the interconnection term $\Phi(e_n(t), e_{wj}(t))$. For that matter, the following definition [49] is recalled.

Definition 1: Function $\Psi(z, \zeta)$ has linear growth in z if there exist two class- κ functions $\delta_1(\cdot)$ and $\delta_2(\cdot)$, differentiable at $\zeta = 0$, such that,

$$\|\Psi(z, \zeta)\| \leq \delta_1(\|\zeta\|) \|z\| + \delta_2(\|\zeta\|). \quad (41)$$

Straightforward computations show that the function $\Phi(e_n(t), e_{wj})$ is bounded as in (42), shown at the bottom of the next page, where γ_1, γ_2 and γ_3 are bounded as,

$$\begin{aligned} \|\gamma_1(t)\| &\leq \delta_{21}(\|e_{wj}(t)\|) + \delta_{11}(\|e_{wj}(t)\|)\|e(t)\| \\ \|\gamma_2(t)\| &\leq \delta_{22}(\|e_{wj}(t)\|) + \delta_{12}(\|e_{wj}(t)\|)\|e(t)\| \\ \|\gamma_3(t)\| &\leq \delta_{23}(\|e_{wj}(t)\|) + \delta_{13}(\|e_{wj}(t)\|)\|e(t)\| \end{aligned} \quad (43)$$

with

$$\begin{aligned} \delta_{11}(\|e_{wj}(t)\|) &= \|v_d(t)\| + \|k_2 v_d(t) e_{wj_2}(t)\| + \|k_3 e_{wj_3}(t)\| \\ \delta_{21}(\|e_{wj}(t)\|) &= \|v_d(t) e_{wj_3}(t)\| + \|k_2 v_d(t) w_{2d}(t) e_{wj_2}(t)\| \\ &\quad + \|k_3 w_{2d}(t) e_{wj_3}(t)\| \\ \delta_{12}(\|e_{wj}(t)\|) &= \|k_2 v_d(t) e_{wj_2}(t)\| + \|k_3 e_{wj_3}(t)\| \\ \delta_{22}(\|e_{wj}(t)\|) &= \|k_2 v_d(t) w_{1d}(t) e_{wj_2}(t)\| \\ &\quad + \|k_3 w_{1d}(t) e_{wj_3}(t)\| \\ \delta_{13}(\|e_{wj}(t)\|) &= \|k_2 v_d(t)\| \\ \delta_{23}(\|e_{wj}(t)\|) &= \|k_2 v_d(t) \tilde{w}_{n2}(t)\|. \end{aligned}$$

It is easy to see that there exist $\delta_1(\|e_{wj}(t)\|)$ and $\delta_2(\|e_{wj}(t)\|)$ that satisfy the inequality (41) for the function

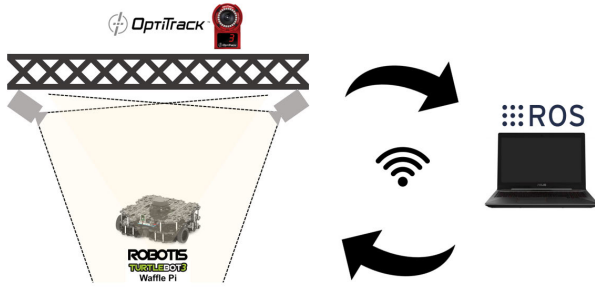


FIGURE 3. Experimental platform diagram.

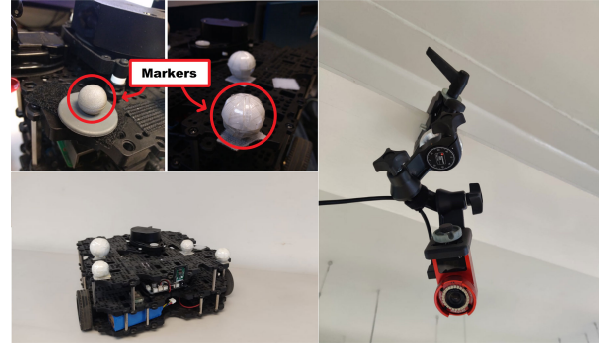


FIGURE 4. Passive markers in the differential drive robot and elements of the experimental platform.

$\Phi(e_n(t), e_{w_j}(t))$. Appendix (B) shows how to obtain $\|\gamma_i(t)\|$ for $i = 1, 2, 3$.

The above developments allow us to conclude on the stability of the closed-loop system (38).

Theorem 2: Consider system (9) and the prediction-based feedback (37) and assume that Lemma 3 is satisfied. Then, positive gains k_1, k_2, k_3 exist such that the overall closed-loop system (38) is asymptotically stable.

Proof: To demonstrate the theorem, notice first that the convergence of the prediction errors is insured by Lemma 3. The cascade structure of system (38), and the linear growth of function $\Phi(e_n(t), e_{w_j}(t))$ given in (42) allows the application of Proposition 4.1 in [49], which establishes the convergence of the tracking errors $e_n(t)$. ■

V. NUMERICAL AND EXPERIMENTAL EVALUATION

A MATLAB simulation and an experimental implementation are carried out to evaluate the proposed prediction scheme and the trajectory tracking solution. The experimental platform, depicted in Figure 3, is composed of an OptiTrack motion capture camera system and a ROBOTIS differential drive robot “Turtlebot3 Waffle Pi” with passive markers as indicators for 3D position and orientation, as shown in Figure 4, which are interconnected by the Robotic Operating System (ROS).

We consider a lemniscate-type trajectory described as follows,

$$\begin{aligned} x &= A \cos(pt) \\ y &= B \sin(2pt) \end{aligned}$$

with $A = 0.7, B = 0.4, p = \frac{\pi}{20}$.

For the differential drive model (5), the input delay is assumed to be $h = 0.12$ s. This delay time was artificially introduced through programming in the system for the numerical and experimental cases. For the prediction strategy (10), a set of $n = 3$ sub-predictors provide, according to (31), an appropriate delay $\bar{h}_{max} = 0.092$. The gain parameters

TABLE 1. Predictor and control parameters.

Parameter	Simulation	Experiment
$\lambda_{11}, \lambda_{12}, \lambda_{13}$	4	4
$\lambda_{21}, \lambda_{22}, \lambda_{23}$	3	4
$\lambda_{31}, \lambda_{32}, \lambda_{33}$	2	1
k_1, k_3	0.4	0.2
k_2	1.5	3.5

proposed for the predictor (10) and the feedback (37) are given in Table 1.

The initial condition are set as $x = 0.7$ m, $y = -0.5$ m and $\theta = \frac{\pi}{2}$ rad.

For the simulation results, the prediction and trajectory tracking errors are shown in Figure 5 and 6, respectively, where it is noticeable that both errors converge correctly and smoothly to the origin. For illustrative purposes, the injection errors are presented in Figure 7, showing that the injection error $e_{w1}(t)$ tends to zero before $e_{w2}(t)$, which in turn converges before $e_{w3}(t)$. This evolution is expected from the sub-predictor scheme because the future values are estimated step by step, a delay \bar{h} ahead. Observe that the trajectory tracking errors $e_s(t)$ converge after the prediction errors because the control law (37) requires the future state estimates. The evolution of control signals $v(t), \omega(t)$, depicted in Figure 8, is smooth.

For the real-time experiments, the time evolution of the prediction error $\tilde{w}_3(t)$ and the trajectory tracking error evolution $e_s(t)$ are shown in Figures 9 and 10, respectively. The errors converged to the origin, following the convergence pattern of the numerical results. Observe that the orientation errors $\tilde{w}_{33}(t)$ and $e_{s3}(t)$ were more sensitive to inaccurate measurements. Figure 11 shows that the experimental control signals $v(t), \omega(t)$ exhibited adequate behavior.

Finally, Figure 12 shows the desired trajectory generated by a virtual robot on the $X - Y$ plane, the path of the real-time experimental trajectories of the differential drive

$$\|\Phi(e_n(t), e_w(t))\| \leq \sqrt{\| -k_1 \tilde{w}_{n1}(t) + \gamma_1(t) \|^2 + \|\gamma_2(t)\|^2 + \| -k_3 \tilde{w}_{n3}(t) + \gamma_3(t) \|^2}. \quad (42)$$

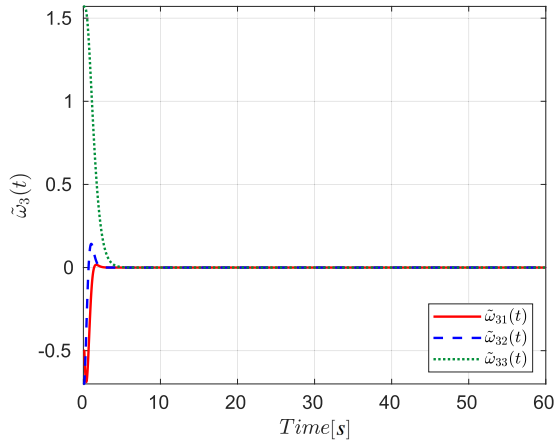


FIGURE 5. Numerical prediction errors.

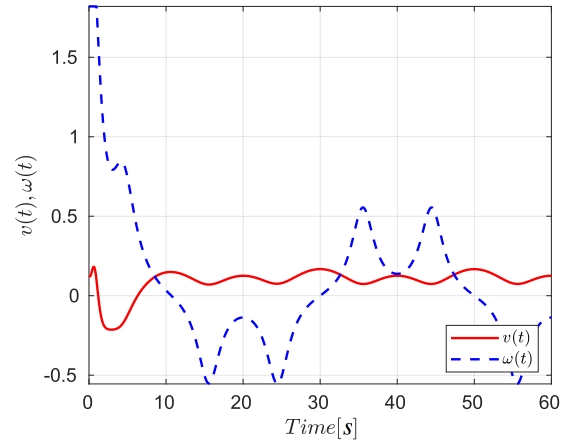


FIGURE 8. Numerical control signed evolution.

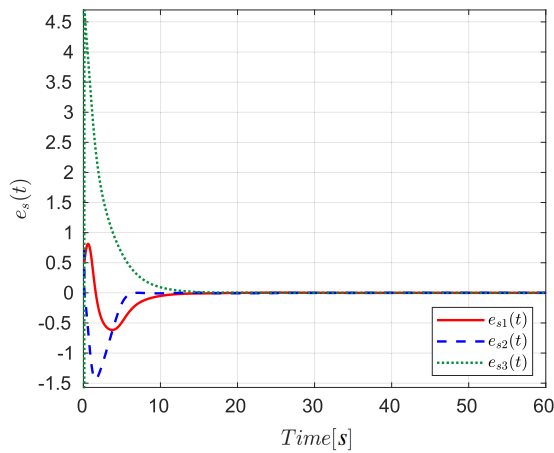


FIGURE 6. Numerical trajectory tracking errors.

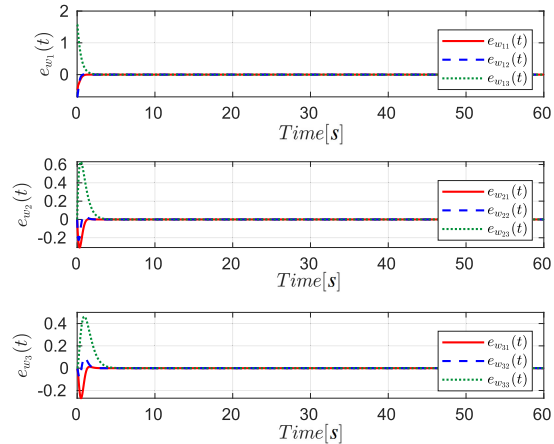


FIGURE 7. Numerical injection errors evolution.

robot, and the numerical results obtained from simulations of the closed-loop scheme. As expected, the numerical experiment converged better to the desired trajectory than the real-time experiments due to measurement errors in the latter case.

TABLE 2. Predictor parameters for comparison.

Parameter	Simulation
$\lambda_{11}, \lambda_{12}, \lambda_{13}$	0.4
$\lambda_{21}, \lambda_{22}, \lambda_{23}$	0.4
$\lambda_{31}, \lambda_{32}, \lambda_{33}$	0.75

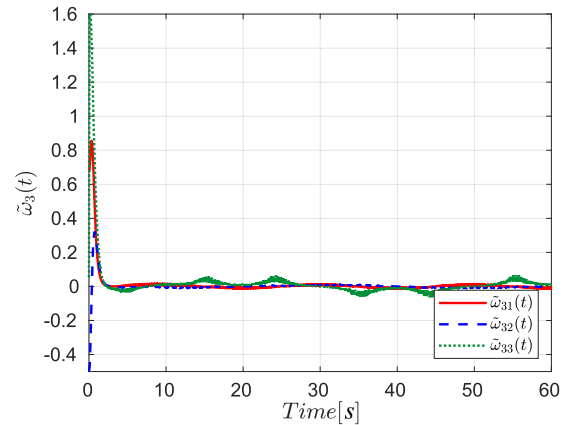


FIGURE 9. Real-time prediction errors.

A. PREDICTION SCHEME COMPARISON

To illustrate the main difference between the prediction-based solution presented in this work and the one proposed in [25], Figure 13 shows the robot evolution on the $X - Y$ plane with an input time delay of $h = 1.7$ s. For the solution in [25] and the one in equation (37), with $n = 1$ and $n = 3$, there were considered the gains parameters given in Table 2.

It is clear from Figure 13, that the performance of the solution in [25] (purple and dotted line) is comparable to the case $n = 1$ (green and discontinuous line). Nevertheless, in the present case, it is possible to improve the obtained performance simply by increasing the value of n , as seen in Figure 13 for $n = 3$ (blue and discontinuous line).

Remark 5: The proposed strategy is based on the kinematic model of the non-holonomic mobile robot,

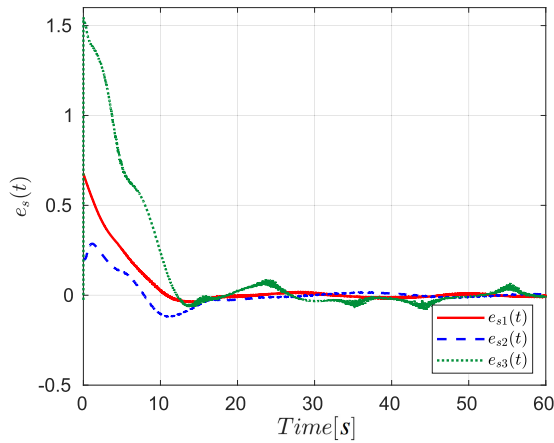


FIGURE 10. Real-time trajectory tracking errors.

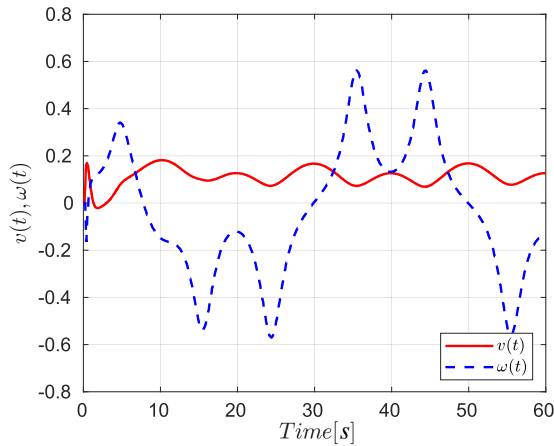


FIGURE 11. Experimental control inputs.

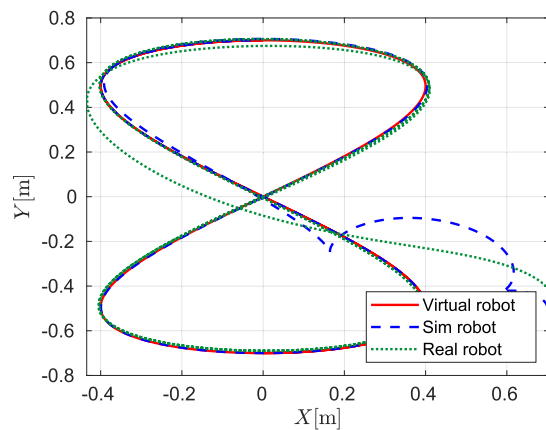


FIGURE 12. Desired trajectory (red and continuous), traveled path in the simulation (blue and discontinuous), and traveled path in the experiment (green and dotted) with time delay $h = 0.12$ s.

therefore, there exists forces and inertia that are not considered in the design that may interfere with the overall performance.

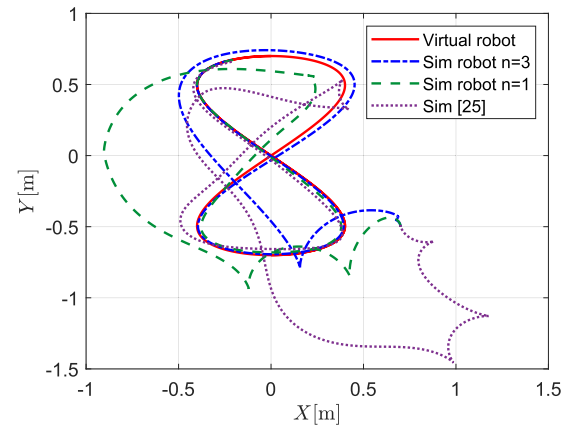


FIGURE 13. Comparison of solutions proposed in [25] with the present solution for $n = 1$ and $n = 3$.

Remark 6: Note that for implementation purposes, a possibly large amount of data processing due to complex environments or a formation composed of many non-holonomic mobile robots, it is necessary to increase the number of sub-predictors to ensure the fulfillment of the obtained stability condition. Also, as shown in the experimental results, unmodelled time delay fluctuations can deteriorate the overall performance.

VI. CONCLUSION

This contribution addresses the trajectory tracking problem of a non-holonomic differentially driven mobile robot subject to an input time delay h . A generalization of the non-linear case of a linear sub-predictor strategy is introduced to estimate the state of the system h units of time ahead. It was shown that it is possible to predict the state of the system independently of the trajectory that the mobile robot must track. Furthermore, a Lyapunov-Krasovskii functional-based analysis proved that the sub-predictor scheme can manage large time delays by increasing the number of sub-predictors in the observer chain. For appropriate gains in the prediction scheme, the introduction of the estimated future states into the control law was shown to achieve closed-loop system stability. Real-time experiments and numerical simulations were conducted to evaluate the effectiveness of the proposed prediction-based strategy. It should be pointed out that the presented prediction-based strategy is based on the knowledge of the constant time delay affecting the input signal, and even when theoretically it can be considered as large as desired, large time delay induces a non-adequate transient state for the prediction and tracking errors. The asymptotic rate of the obtained convergence of the prediction and tracking errors will depend on the stability margin obtained in Corollary 1. Future work includes taking into account time-varying delays arising in remote control due to wireless communication protocols, testing feedback laws with better convergence rates, and extending our work to the formation problem for a set of mobile robots with time delays.

**APPENDIX A
TRAJECTORY TRACKING ERROR DYNAMICS**

The evolution of the trajectory tracking errors can be obtained as follows.

$$\begin{aligned} \dot{e}_1(t) &= \dot{w}_{1d}(t) - \dot{w}_{n1}(t) \\ &= \dot{w}_{1d}(t) - v(t) - \omega(t)w_{n2}(t) \\ &= \dot{w}_{1d}(t) - v_d(t) \cos(\hat{e}_3(t)) - k_1 \hat{e}_1(t) \\ &\quad - \left[\omega_d(t) + k_2 v_d(t) \frac{\sin(\hat{e}_3(t))}{\hat{e}_3(t)} \hat{e}_2(t) + k_3 \hat{e}_3(t) \right] w_{n2}(t) \\ &= \dot{w}_{1d}(t) - v_d(t) \cos(\tilde{w}_{n3}(t) + e_3(t)) - k_1 [\tilde{w}_{n1}(t) + e_1(t)] \\ &\quad - \left[\omega_d(t) + k_2 v_d(t) \frac{\sin(\tilde{w}_{n3}(t) + e_3(t))}{\tilde{w}_{n3}(t) + e_3(t)} [\tilde{w}_{n2}(t) + e_2(t)] \right. \\ &\quad \left. + k_3 [\tilde{w}_{n3}(t) + e_3(t)] \right] [w_{2d}(t) - e_2(t)]. \end{aligned}$$

Substituting the evolution of the desired trajectory $\dot{w}_{1d}(t)$,

$$\begin{aligned} \dot{e}_1(t) &= v_d(t) + \omega_d(t)w_{2d}(t) - v_d(t) \cos(\tilde{w}_{n3}(t) + e_3(t)) \\ &\quad - k_1 [\tilde{w}_{n1}(t) + e_1(t)] \\ &\quad - \left[\omega_d(t) + k_2 v_d(t) \frac{\sin(\tilde{w}_{n3}(t) + e_3(t))}{\tilde{w}_{n3}(t) + e_3(t)} [\tilde{w}_{n2}(t) + e_2(t)] \right. \\ &\quad \left. + k_3 [\tilde{w}_{n3}(t) + e_3(t)] \right] [w_{2d}(t) - e_2(t)] \\ &= v_d(t) [1 - \cos(\tilde{w}_{n3}(t) + e_3(t))] \\ &\quad - k_1 [\tilde{w}_{n1}(t) + e_1(t)] + \omega_d(t)e_2(t) \\ &\quad - \left[k_2 v_d(t) \frac{\sin(\tilde{w}_{n3}(t) + e_3(t))}{\tilde{w}_{n3}(t) + e_3(t)} [\tilde{w}_{n2}(t) + e_2(t)] \right. \\ &\quad \left. + k_3 [\tilde{w}_{n3}(t) + e_3(t)] \right] [w_{2d}(t) - e_2(t)] \\ &= -k_1 [\tilde{w}_{n1}(t) + e_1(t)] + \omega_d(t)e_2(t) + k_2 v_d \gamma_s e_2^2(t) \\ &\quad + k_3 e_3(t)e_2(t) + \gamma_1(t). \end{aligned}$$

Repeating the procedure with $e_2(t)$ and $e_3(t)$,

$$\begin{aligned} \dot{e}_2(t) &= \dot{w}_{2d}(t) - \dot{w}_{n2}(t) \\ &= \dot{w}_{2d}(t) + \omega(t)w_{n1}(t) \\ &= \dot{w}_{2d}(t) \\ &\quad + \left[\omega_d(t) + k_2 v_d(t) \frac{\sin(\hat{e}_3(t))}{\hat{e}_3(t)} \hat{e}_2(t) + k_3 \hat{e}_3(t) \right] w_{n1}(t) \\ \dot{e}_2(t) &= -\omega_d(t)w_{1d}(t) + \left[\omega_d(t) + k_2 v_d(t) \frac{\sin(\hat{e}_3(t))}{\hat{e}_3(t)} \hat{e}_2(t) \right. \\ &\quad \left. + k_3 \hat{e}_3(t) \right] w_{n1}(t) \\ &= -\omega_d(t)w_{1d}(t) + \left[\omega_d(t) + k_2 v_d(t) \frac{\sin(\hat{e}_3(t))}{\hat{e}_3(t)} \hat{e}_2(t) \right. \\ &\quad \left. + k_3 \hat{e}_3(t) \right] [w_{1d}(t) - e_1(t)] \\ &= \left[k_2 v_d(t) \frac{\sin(\hat{e}_3(t))}{\hat{e}_3(t)} \hat{e}_2(t) + k_3 \hat{e}_3(t) \right] [w_{1d}(t) - e_1(t)] \\ &\quad - \omega_d(t)e_1(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \left[k_2 v_d(t) \frac{\sin(\tilde{w}_{n3}(t) + e_3(t))}{\tilde{w}_{n3}(t) + e_3(t)} [\tilde{w}_{n2}(t) + e_2(t)] \right. \\ &\quad \left. + k_3 [\tilde{w}_{n3}(t) + e_3(t)] \right] [w_{1d}(t) - e_1(t)] - \omega_d(t)e_1(t) \\ &= -\omega_d(t)e_1(t) - k_2 v_d \gamma_s e_2(t)e_1(t) - k_3 e_3(t)e_1(t) \\ &\quad + \gamma_2(t) \\ \dot{e}_3(t) &= \dot{w}_{3d}(t) - \dot{w}_{n3}(t) \\ &= \dot{w}_{3d}(t) - \omega(t) \\ &= \omega_d(t) - \omega_d(t) - k_2 v_d(t) \frac{\sin(\hat{e}_3(t))}{\hat{e}_3(t)} \hat{e}_2(t) - k_3 \hat{e}_3(t) \\ &= -k_2 v_d(t) \frac{\sin(\tilde{w}_{n3}(t) + e_3(t))}{\tilde{w}_{n3}(t) + e_3(t)} [\tilde{w}_{n2}(t) + e_2(t)] \\ &\quad - k_3 [\tilde{w}_{n3}(t) + e_3(t)] \\ &= -k_3 [\tilde{w}_{n3}(t) + e_3(t)] + \gamma_3(t) \end{aligned}$$

**APPENDIX B
BOUNDS OF γ_1, γ_2 AND γ_3**

The bound of the γ_i terms for $i = 1, 2, 3$. can be done as follows.

$$\begin{aligned} \gamma_1(t) &\leq \|v_d(t)[1 - \cos(\tilde{w}_{n3}(t) + e_3(t))]\| \\ &\quad + \left\| k_2 v_d(t) \gamma_s(t) [\tilde{w}_{n2}(t)(w_{2d}(t) - e_2(t)) + e_2(t)w_{2d}(t)] \right\| \\ &\quad + \left\| k_3 [\tilde{w}_{n3}(t)(w_{2d}(t) - e_2(t)) + e_3(t)w_{2d}(t)] \right\| \\ &\leq \|2v_d(t) \sin^2\left(\frac{\sin(e_{w_3}(t) + e_3(t))}{2}\right)\| \\ &\quad + \|k_2 v_d(t)e_{w_2}(t) + k_3 e_{w_3}(t)\| \|w_{2d}(t) - e_2(t)\| \\ &\leq \|v_d(t)(e_{w_3}(t) + e_3(t))\| \\ &\quad + \|k_2 v_d(t)e_{w_2}(t) + k_3 e_{w_3}(t)\| \|w_{2d}(t) - e_2(t)\| \\ &\leq \|v_d(t)e_{w_3}(t)\| \\ &\quad + \|v_d(t)e_3(t)\| + \|k_2 v_d(t)w_{2d}(t)e_{w_2}(t)\| \\ &\quad + \|k_3 w_{2d}(t)e_{w_3}(t)\| + \|k_2 v_d(t)e_2(t)e_{w_2}(t)\| \\ &\quad + \|k_3 e_2(t)e_{w_3}(t)\| \\ &\leq \alpha_{21}(\|e_w\|) + \alpha_{11}(\|e_w\|)\|e\| \\ \gamma_2(t) &\leq \left\| k_2 v_d(t) \frac{\sin(e_{w_3}(t) + e_3(t))}{e_{w_3}(t) + e_3(t)} e_{w_2}(t) \right. \\ &\quad \left. + k_3 e_{w_3}(t) \right\| \|w_{1d}(t) - e_1(t)\| \\ &\leq \|k_2 v_d(t)e_{w_2}(t) + k_3 e_{w_3}(t)\| \|w_{1d}(t) - e_1(t)\| \\ &\leq \|k_2 v_d(t)w_{1d}(t)e_{w_2}(t)\| + \|k_3 w_{1d}(t)e_{w_3}(t)\| \\ &\quad + \|k_2 v_d(t)e_1(t)e_{w_2}(t)\| + \|k_3 e_1(t)e_{w_3}(t)\| \\ &\leq \alpha_{22}(\|e_w\|) + \alpha_{12}(\|e_w\|)\|e\| \\ \gamma_3(t) &\leq \left\| k_2 v_d(t) \frac{\sin(e_{w_3}(t) + e_3(t))}{e_{w_3}(t) + e_3(t)} [\tilde{w}_{n2}(t) + e_2(t)] \right\| \\ &\leq \|k_2 v_d(t)[\tilde{w}_{n2}(t) + e_2(t)]\| \\ &\leq \|k_2 v_d(t)\tilde{w}_{n2}(t)\| + \|k_2 v_d(t)e_2(t)\| \\ &\leq \alpha_{23}(\|e_w\|) + \alpha_{13}(\|e_w\|)\|e\| \end{aligned}$$

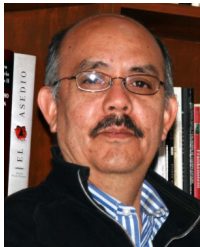
REFERENCES

- [1] K. Gu, V. L. Kharitonov, and J. Chen, *Stability of Time-Delay Systems*. Boston, MA, USA: Birkhäuser, 2003.
- [2] S.-I. Niculescu, *Delay Effects on Stability: A Robust Control Approach*. London, U.K.: Springer, 2001.
- [3] E. Fridman, *Introduction to Time-Delay Systems*, 1st ed. Cham, Switzerland: Birkhäuser, 2014.
- [4] O. J. M. Smith, "Closer control of loops with deadtime," *Chem. Eng. Prog.*, vol. 53, no. 5, pp. 217–219, 1957.
- [5] Z. J. Palmor and D. V. Powers, "Improved dead-time compensator controllers," *AIChE J.*, vol. 31, no. 2, pp. 215–221, Feb. 1985.
- [6] Z. J. Palmor, "Time-delay compensation Smith predictor and its modifications," in *The Control Handbook*, vol. 1. Boca Raton, FL, USA: CRC Press, 1996, pp. 224–229.
- [7] K. J. Astrom, C. C. Hang, and B. C. Lim, "A new Smith predictor for controlling a process with an integrator and long dead-time," *IEEE Trans. Autom. Control*, vol. 39, no. 2, pp. 343–345, Feb. 1994.
- [8] A. Manitius and A. Olbrot, "Finite spectrum assignment problem for systems with delays," *IEEE Trans. Autom. Control*, vol. AC-24, no. 4, pp. 541–552, Aug. 1979.
- [9] V. L. Kharitonov, "An extension of the prediction scheme to the case of systems with both input and state delay," *Automatica*, vol. 50, no. 1, pp. 211–217, Jan. 2014.
- [10] V. L. Kharitonov, "Predictor-based controls: The implementation problem," *Differ. Equ.*, vol. 51, no. 13, pp. 1675–1682, Dec. 2015.
- [11] L. Juárez, S. Mondié, and V. L. Kharitonov, "Dynamic predictor for systems with state and input delay: A time-domain robust stability analysis," *Int. J. Robust Nonlinear Control*, vol. 30, no. 6, pp. 2204–2218, Apr. 2020.
- [12] M. Dalla Mora, A. Germani, and C. Manes, "Design of state observers from a drift-observability property," *IEEE Trans. Autom. Control*, vol. 45, no. 8, pp. 1536–1540, Aug. 2000.
- [13] M. Hou, P. Zitek, and R. J. Patton, "An observer design for linear time-delay systems," *IEEE Trans. Autom. Control*, vol. 47, no. 1, pp. 121–125, Jan. 2002.
- [14] F. E. Thau, "Observing the state of non-linear dynamic systems," *Int. J. Control*, vol. 17, no. 3, pp. 471–479, Mar. 1973.
- [15] M. Najafi, S. Hosseinnia, F. Sheikholeslam, and M. Karimadini, "Closed-loop control of dead time systems via sequential sub-predictors," *Int. J. Control*, vol. 86, no. 4, pp. 599–609, Apr. 2013.
- [16] V. Fragoso-Rubio, M. Velasco-Villa, M. A. Hernández-Pérez, B. del Muro-Cuéllar, and J. F. Márquez-Rubio, "Prediction-observer scheme for linear systems with input-output time-delay," *Int. J. Control, Autom. Syst.*, vol. 17, no. 8, pp. 2012–2025, Aug. 2019.
- [17] J. Lei and H. K. Khalil, "High-gain-predictor-based output feedback control for time-delay nonlinear systems," *Automatica*, vol. 71, pp. 324–333, Sep. 2016.
- [18] P. Pepe and E. Fridman, "On global exponential stability preservation under sampling for globally Lipschitz time-delay systems," *Automatica*, vol. 82, pp. 295–300, Aug. 2017.
- [19] Z. Zuo, Z. Lin, and Z. Ding, "Truncated predictor control of Lipschitz nonlinear systems with time-varying input delay," *IEEE Trans. Autom. Control*, vol. 62, no. 10, pp. 5324–5330, Oct. 2017.
- [20] A. Germani, C. Manes, and P. Pepe, "A new approach to state observation of nonlinear systems with delayed output," *IEEE Trans. Autom. Control*, vol. 47, no. 1, pp. 96–101, Jan. 2002.
- [21] F. Mazenc and M. Malisoff, "Stabilization of nonlinear time-varying systems through a new prediction based approach," *IEEE Trans. Autom. Control*, vol. 62, no. 6, pp. 2908–2915, Jun. 2017.
- [22] C. Guo and X.-J. Xie, "Global output feedback control of nonlinear time-delay systems with input matching uncertainty and unknown output function," *Int. J. Syst. Sci.*, vol. 50, no. 4, pp. 713–725, Mar. 2019.
- [23] Y. Deng, V. Léchappé, E. Moulay, Z. Chen, B. Liang, F. Plestan, and Q.-L. Han, "Predictor-based control of time-delay systems: A survey," *Int. J. Syst. Sci.*, vol. 53, no. 12, pp. 2496–2534, Sep. 2022.
- [24] K. Kojima, T. Oguchi, A. Alvarez-Aguirre, and H. Nijmeijer, "Predictor-based tracking control of a mobile robot with time-delays," in *Proc. 8th IFAC Symp. Nonlinear Control Syst.*, 2010, pp. 167–170.
- [25] A. Alvarez-Aguirre, N. van de Wouw, T. Oguchi, and H. Nijmeijer, "Predictor-based remote tracking control of a mobile robot," *IEEE Trans. Control Syst. Technol.*, vol. 22, no. 6, pp. 2087–2102, Nov. 2014.
- [26] E.-H. Guechi, J. Lauber, M. Dambrine, and M. Defoort, "Output feedback controller design of a unicycle-type mobile robot with delayed measurements," *IET Control Theory Appl.*, vol. 6, no. 5, p. 726, 2012.
- [27] E.-H. Guechi, J. Lauber, M. Dambrine, G. Klančar, and S. Blažič, "PDC control design for non-holonomic wheeled mobile robots with delayed outputs," *J. Intell. Robot. Syst.*, vol. 60, nos. 3–4, pp. 395–414, Dec. 2010.
- [28] E.-H. Guechi, K. Belharet, and S. Blažič, "Tracking control for wheeled mobile robot based on delayed sensor measurements," *Sensors*, vol. 19, no. 23, p. 5177, Nov. 2019.
- [29] D.-H. Lee, J.-H. Jung, H.-N. Yoon, Y.-S. Park, and J.-M. Lee, "Simulation of time delay compensation controller for a mobile robot using the SMC and Smith predictor," in *Intelligent Autonomous Systems 14*, W. Chen, K. Hosoda, E. Menegatti, M. Shimizu, and H. Wang, Eds. Cham, Switzerland: Springer, 2017, pp. 687–694.
- [30] Q. Xue and X. Yu, "State feedback finite-time tracking controller of nonholonomic mobile robot with actuator delay," in *Proc. Chin. Control Decis. Conf. (CCDC)*, Jun. 2018, pp. 2832–2836.
- [31] B. Sarabia, D. Chávez, O. Camacho, and K. Patiño, "A control techniques comparison for trajectory tracking for a robotics platform with time delay," in *Proc. IEEE 5th Ecuador Tech. Chapters Meeting (ETCM)*, Cuenca, Ecuador, Oct. 2021, pp. 1–6.
- [32] B. S. Park and S. J. Yoo, "A low-complexity tracker design for uncertain nonholonomic wheeled mobile robots with time-varying input delay at nonlinear dynamic level," *Nonlinear Dyn.*, vol. 89, no. 3, pp. 1705–1717, Aug. 2017.
- [33] E. Nuño, A. Loría, T. Hernández, M. Maghenem, and E. Panteley, "Distributed consensus-formation of force-controlled nonholonomic robots with time-varying delays," *Automatica*, vol. 120, Oct. 2020, Art. no. 109114.
- [34] W. Lu, C. Zong, J. Li, and D. Liu, "Bipartite consensus-based formation control of high-order multi-robot systems with time-varying delays," *Trans. Inst. Meas. Control*, vol. 44, no. 6, pp. 1297–1308, 2022.
- [35] M. Velasco-Villa, A. Alvarez-Aguirre, and G. Rivera-Zago, "Discrete-time control of an omnidirectional mobile robot subject to transport delay," in *Proc. Amer. Control Conf.*, Jul. 2007, pp. 2171–2176.
- [36] M. Velasco-Villa, R. Castro-Linares, F. Rosales-Hernández, B. del Muro-Cuéllar, and M. A. Hernández-Pérez, "Discrete-time synchronization strategy for input time-delay mobile robots," *J. Franklin Inst.*, vol. 350, no. 10, pp. 2911–2935, Dec. 2013.
- [37] H. Sira-Ramírez, C. López-Urbe, and M. Velasco-Villa, "Trajectory-tracking control of an input delayed omnidirectional mobile robot," in *Proc. 7th Int. Conf. Electr. Eng. Comput. Sci. Autom. Control (CCE)*, Sep. 2010, pp. 470–475.
- [38] I. Estrada-Sánchez, M. Velasco-Villa, and H. Rodríguez-Cortés, "Prediction-based control for nonlinear systems with input delay," *Math. Problems Eng.*, vol. 2017, pp. 1–11, Oct. 2017, doi: 10.1155/2017/7415418.
- [39] A. Manitius and A. Olbrot, "Finite spectrum assignment problem for systems with delays," *IEEE Trans. Autom. Control*, vol. AC-24, no. 4, pp. 541–552, Aug. 1979.
- [40] Z. Artstein, "Linear systems with delayed controls: A reduction," *IEEE Trans. Autom. Control*, vol. AC-27, no. 4, pp. 869–879, Aug. 1982.
- [41] S. Mondie and W. Michiels, "Finite spectrum assignment of unstable time-delay systems with a safe implementation," *IEEE Trans. Autom. Control*, vol. 48, no. 12, pp. 2207–2212, Dec. 2003.
- [42] B. Zhou, Z. Lin, and G.-R. Duan, "Truncated predictor feedback for linear systems with long time-varying input delays," *Automatica*, vol. 48, no. 10, pp. 2387–2399, Oct. 2012.
- [43] G. Campion, G. Bastin, and B. Dandrea-Novet, "Structural properties and classification of kinematic and dynamic models of wheeled mobile robots," *IEEE Trans. Robot. Autom.*, vol. 12, no. 1, pp. 47–62, Feb. 1996.
- [44] C. C. de Wit, G. Bastin, and B. Siciliano, *Theory of Robot Control*, 1st ed. Berlin, Germany: Springer-Verlag, 1996.
- [45] R. M. Murray and S. S. Sastry, "Nonholonomic motion planning: Steering using sinusoids," *IEEE Trans. Autom. Control*, vol. 38, no. 5, pp. 700–716, May 1993.
- [46] R. W. Brockett, "Asymptotic stability and feedback stabilization," in *Differential Geometric Control Theory*. Boston, MA, USA: Birkhäuser, 1983, pp. 181–191.
- [47] P. Niamsup, K. Mukdasai, and V. N. Phat, "Improved exponential stability for time-varying systems with nonlinear delayed perturbations," *Appl. Math. Comput.*, vol. 204, no. 1, pp. 490–495, Oct. 2008.
- [48] C. Samson and K. Ait-Abderrahim, "Mobile robot control. Part 1: Feedback control of a non-holonomic wheeled cart in Cartesian space," *Nat. Inst. Res. Digit. Sci. Technol.*, Chesnay-Rocquencourt, France, Tech. Rep. 1288, 1990.
- [49] R. Sepulchre, M. Jankovic, and P. V. Kokotovic, *Constructive Nonlinear Control*, 1st ed. London, U.K.: Springer, 1997.



JULIO A. BÁEZ-HERNÁNDEZ received the B.S. degree in mechatronics engineering from Veracruz University, Veracruz, in 2017, and the M.S. degree in electrical engineering from the Center for Research and Advanced Studies of the National Polytechnic Institute (CINVESTAV-IPN), Mexico City, Mexico, in 2019, where he is currently pursuing the Ph.D. degree in electrical engineering.

His research interests include mobile robotics and non-linear systems with time delays.



MARTÍN VELASCO-VILLA received the B.S. degree in electronics and communication engineering from the National Polytechnic Institute (IPN), Mexico City, Mexico, in 1987, and the M.S. and Ph.D. degrees in electrical engineering from the Center for Research and Advanced Studies of the National Polytechnic Institute (CINVESTAV-IPN), in 1994.

He made a postdoctoral research stay with Ecole Centrale de Nantes, Nantes, France. He is currently a full-time Professor with the Mechatronics Section, Electrical Engineering Department, CINVESTAV-IPN. His research interests include the analysis and control of linear and non-linear systems with time delay, in particular, the prediction problem associated with this type of system is of great interest. In the field of non-linear systems, the area of mobile robotics associated with the formation and synchronization problems and the analysis and control of electromechanical systems are some other topics of interest.



SABINE MONDIÉ received the B.S. degree in industrial engineering from ITESM, Mexico City, the M.S. degree in electrical engineering from the Center for Research and Advanced Studies of the National Polytechnic Institute (CINVESTAV), Mexico City, Mexico, in 1983, and the Ph.D. degree in electrical engineering from IRCyN, Nantes, France, in 1996. She has been a Professor with the Department of Automatic Control, CINVESTAV, since 1996. She has been the Chair for Education and she is currently the Vice-Chair of the IFAC Technical Committee 2.2. on “Linear Control Systems.” She has served as an Associate Editor for several journals in control, including *Systems and Control Letters* and the *European Journal of Control*. She is also an Associate Editor of IEEE TRANSACTIONS ON AUTOMATIC CONTROL. Her research interests include time-delay systems, their stability and robustness properties, and delay applications in engineering and biology. She has directed/co-directed over 15 Ph.D. and 25 master theses and authored/coauthored 75 journals and 125 conference papers.

...

Bibliografía

- [1] A. V. Egorov and S. Mondié, “The delay lyapunov matrix in robust stability analysis of time-delay systems,” 2015.
- [2] J. Shirai, T. Yamaguchi, and K. Takaba, “Remote visual servo tracking control of drone taking account of time delays,” 2017.
- [3] V. Fragoso-Rubio, M. Velasco-Villa, M. Vallejo-Alarcón, J. A. Vásquez-Santacruz, and M. A. Hernández-Pérez, “Consensus problem for linear time-invariant systems with time-delay,” *Mathematical Problems in Engineering*, vol. 2019, no. Article ID 1607474, p. 12 pages, 2019.
- [4] J. A. Báez-Hernández, M. Velasco-Villa, and S. Mondié, “Non-linear prediction-based trajectory tracking for non-holonomic mobile robots,” *IEEE Access*, vol. 11, pp. 124 265 – 124 277, 2023.
- [5] S.-I. Niculescu, *Delay Effects on Stability, A Robust Control Approach*. Springer, 2001.
- [6] A. Kumar and P. Daoutidis, “Feedback control of nonlinear differential-algebraic equation systems,” *AIChE Journal*, vol. 41, pp. 619–636, 1995.
- [7] R. Cepeda-Gomez and N. Olgac, *Delays. Propagation. Conservation Laws*. Springer, 2012, vol. 423.
- [8] ———, *Stability Analysis for a Consensus System of a Group of Autonomous Agents with Time Delays*. Springer, 2012, vol. 423.
- [9] Y.-P. Tian and C.-L. Liu, “Consensus of multi-agent systems with diverse input and communication delays,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 53(9), pp. 2122–2128, 2008.
- [10] V. L. Kharitonov, *Time-Delay Systems: Lyapunov Functionals and Matrices*. Birkhäuser, 2013.
- [11] N. N. Krasovskii, “On using the lyapunov second method for equations with time delay,” *Prikladnaya Matematika i Mekhanika*, vol. 20, pp. 315–327, 1956.
- [12] K. Gu, V. L. Kharitonov, and J. Chen, *Stability of Time-Delay Systems*. Birkhäuser, 2003.
- [13] J. Hale, *Theory of Functional Differential Equations*. Springer-Verlag, 1977.
- [14] O. J. M. Smith, “Closer control of loops with deadtime,” *Chem. Eng. Prog.*, vol. 53(5), pp. 217–219, 1957.
- [15] Z. J. Palmor and D. V. Powers, “Improved dead-time compensator controllers,” *AIChE Journal*, vol. 31, pp. 215–221, 1985.

- [16] K. J. Astrom, C. C. Hang, and B. C. Lim, “A new smith predictor for controlling a process with an integrator and long dead-time,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 39(2), pp. 343–345, 1994.
- [17] A. Manitius and A. Olbrot, “Finite spectrum assignment problem for systems with delays,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 24(4), pp. 541–553, 1979.
- [18] V. L. Kharitonov, “An extension of the prediction scheme to the case of systems with both input and state delay,” *Automatica*, vol. 50, pp. 211–217, 2014.
- [19] —, “Predictor-based controls: The implementation problem,” *Differential Equations*, vol. 51(13), pp. 1675–1682, 2015.
- [20] R. Bellman and K. Cooke, *Differential Difference Equations*. New York: Academic Press, 1963.
- [21] Z. Zuo, Z. Lin, and Z. Ding, “Truncated predictor control of lipschitz nonlinear systems with time-varying input delay,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 62(10), pp. 5324–5330, 2017.
- [22] A. Germani, C. Manes, and P. Pepe, “A new approach to state observation of nonlinear systems with delayed output,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 47, pp. 96–101, 2002.
- [23] M. Mora, A. Germani, and C. Manes, “Design of state observers from a drift-observability property,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 45, pp. 1536 – 1540, 2000.
- [24] L. Marquez-Martinez, C. Moog, and M. Velasco-Villa, “Observability and observers for nonlinear systems with time-delays,” in *2nd IFAC Workshop Time Delay Systems (LTDS2000)*, Ancona, Italia, 2000, pp. 52 – 57.
- [25] M. Najafi, S. Hosseinnia, F. Sheikholeslam, and M. Karimadini, “Closed-loop control of dead time systems via sequential sub-predictors,” *International Journal of Control*, vol. 86, 2013.
- [26] F. Mazenc and M. Malisoff, “Stabilization and robustness analysis for time-varying systems with time-varying delays using a sequential subpredictors approach,” *Automatica*, vol. 82, pp. 118–127, 2017.
- [27] —, “Stabilization of nonlinear time-varying systems through a new prediction based approach,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 62(6), pp. 2908 – 2915, 2017.
- [28] U. Nehmzow, *Mobile Robotics: A Practical Introduction*, 2nd ed. Springer-Verlag, 2003.
- [29] G. Campion, G. Bastin, and B. D’Andrea-Novel, “Structural properties and classification of kinematic and dynamic models of wheeled mobile robots,” *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, vol. 12, no. 1, pp. 47 – 62, 1996.
- [30] K. Kojima, T. Oguchi, A. Alvarez-Aguirre, and H. Nijmeijer, “Predictor-based tracking control of a mobile robot with time-delays,” pp. 167–170, 2010.
- [31] Q. Xue and X. Yu, “State feedback finite-time tracking controller of nonholonomic mobile robot with actuator delay,” in *The 30th Chinese Control and Decision Conference*, 2018.

- [32] B. S. Park and S. J. Yoo, “A low-complexity tracker design for uncertain nonholonomic wheeled mobile robots with time-varying input delay at nonlinear dynamic level,” *Nonlinear Dynamics*, vol. 89, no. 3, pp. 1705–1717, 2017.
- [33] V. Fragoso-Rubio, M. Velasco-Villa, M. A. Hernández-Pérez, B. del Muro-Cuéllar, and J. F. Márquez-Rubio, “Prediction–observer scheme for linear systems with input–output time delay,” *International Journal of Control, Automation and System*, vol. 17, 2019.
- [34] I. E. Sanchez, M. V. Villa, and H. Rodríguez Cortés, “Prediction–based control for nonlinear systems with input delay,” *Mathematical Problems in Engineering*, 2017, doi.org/10.1155/2017/7415418.
- [35] M. Hernandez-Pérez, V. Fragoso-Rubio, M. Velasco-Villa, B. del Muro-Cuéllar, J. F. Márquez-Rubio, and H. Puebla, “Prediction-based control for a class of unstable time-delayed processes by using a modified sequential predictor,” *Journal of Process Control*, vol. 92, pp. 98–107, 2020.
- [36] J. A. Báez-Hernández and M. Velasco-Villa, “Predicción no lineal de estados para un robot móvil omnidireccional,” in *Congreso Nacional de Control Automático*, 2019.
- [37] C. Canudas de Wit, G. Bastin, and B. Siciliano, *Theory of Robot Control*, 1st ed. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1996.
- [38] A. Seuret and F. Gouaisbaut, “Hierarchy of lmi conditions for the stability analysis of time-delay systems,” *Systems & Control Letters*, vol. 81, pp. 1–7, 2015.
- [39] P. Niamsup, K. Mukdasai, and V. N. Phat, “Improved exponential stability for time-varying systems with nonlinear delayed perturbations,” *Applied Mathematics and Computation*, no. 204, pp. 490–495, 2008.
- [40] C. Samson and K. Ait-Abderrahim, “Mobile robot control. part 1: Feedback control of a non-holonomic wheeled cart in cartesian space,” 1990.
- [41] R. Sepulchre, M. Jankovic, and P. V. Kokotovic, *Constructive Nonlinear Control*, 1st ed. Springer-Verlag, 1997.
- [42] “Ros introduction,” <http://wiki.ros.org/ROS/Introduction>, Último acceso: 11-10-2019.
- [43] Y. Pyo, H. Cho, R. Jung, and T. Lim, *ROS Robot Programming*. ROBOTIS, 2017.