



CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS  
AVANZADOS DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

**Unidad Zacatenco**

**DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA ELÉCTRICA  
SECCIÓN DE MECATRÓNICA**

**“Transporte de una carga suspendida y un  
péndulo invertido sobre un cuadrirotor”**

**TESIS**

Que presenta

**ADRIAN HUMBERTO MARTINEZ VASQUEZ**

Para obtener el grado de

**DOCTOR EN CIENCIAS**

En la especialidad de

**Ingeniería Eléctrica**

Director de Tesis:

**Dr. Rafael Castro Linares**

Ciudad de México

Abril, 2024



*A mis padres Gerardo y Olivia.*



## AGRADECIMIENTOS

A mi familia que siempre me ha apoyado, en especial a mis padres Gerardo y Olivia, a mis hermanos Ricardo, Laura y Gerardo por estar siempre conmigo. Especial agradecimiento a Carlos, Alejandra y Fernando. Agradezco a mi finada abuela Cecilia y a mi abuela Celina, agradezco a mi tío Florian por la ayuda recibida, a mi tío Eduardo por las agradables charlas, a mi tía Nancy por su cariño recibido, agradezco a mi madrina Martha por su cariño recibido y finalmente agradezco a mi primo Ildefonso.

Al Dr. Rafael Castro Linares por su apoyo, por permitirme realizar mis estudios de doctorado bajo su asesoramiento y por dirigir esta tesis.

A los profesores Dr. Jaime Álvarez Gallegos, Dr. Hebertt J. Sira Ramírez, Dr. Martín Velasco Villa y Dr. Abraham Efraím Rodríguez Mata por haber fungido como sinodales de esta tesis y por compartir sus conocimientos.

A los profesores Dr. Hugo Rodríguez Cortés, Dr. Alejandro Rodríguez Angeles y Dr. Gerardo Ramón Flores Colunga por haber fungido como sinodales en el examen predoctoral y por sus comentarios que contribuyeron a la mejora de este trabajo.

Al auxiliar Andrés González Rodríguez por el préstamo del equipo y el apoyo recibido.

Esta tesis se desarrolló con la ayuda económica del Consejo Nacional de Humanidades, Ciencias y Tecnologías (Conahcyt).



## RESUMEN

En este trabajo se presenta el problema del péndulo suspendido y péndulo invertido anclado a un cuadrirotor en el espacio de tres dimensiones. El problema consiste en controlar el sistema completo, es decir, a través de las entradas de control convencionales de un cuadrirotor, los pares asociados a los ángulos de Euler (alabeo, cabeceo y guiñada) y la fuerza total de empuje debida a los motores, permitiendo controlar la dinámica de rotación y la dinámica de traslación horizontal del cuadrirotor y a su vez controlar de manera indirecta el péndulo invertido o suspendido atenuando las oscilaciones debidas a la naturaleza inestable para en caso del péndulo invertido y debidas a los movimientos de traslación para ambos casos.

Cuando se aborda la configuración de de péndulo suspendido, el principal problema que se aborda es el de transporte de cargas puntuales suspendidas oscilantes, el reto consiste en atenuar de manera indirecta las oscilaciones de la carga suspendida a través del de la dinámica de traslación horizontal del cuadrirotor que a su vez es controla por la dinámica de rotación del vehículo.

En ambas configuraciones se propone un análisis basado en modelos lineales asociados a las dinámicas en los marcos  $X - Z$  y  $Y - Z$  con respecto al marco de referencia inercial donde dichos modelos son linealizados al rededor de un punto de equilibrio, dejando desacoplada la dinámica de guiñada y altura. Esto simplifica considerablemente el modelo completo del sistema no lineal y permite controlar la dinámica de traslación del vehículo por medio de las estradas de control en la dinámica rotacional.

Por otra parte, a partir del análisis presentado para la configuración del péndulo suspendido, se concluye que el modelo dinámico obtenido para la configuración del péndulo invertido sobre un cuadrirotor son similares permitiendo abordar ambos modelos con similares estrategias de control.

Finalmente, se proponen tres estrategias de control que hacen uso de salidas planas, la primera estrategia se basa en un control realimentado donde una de las ventajas de esta estrategia es la simplicidad del control. La segunda estrategia consiste en controles por modos deslizantes que permite atenuar los efectos generados por las perturbaciones descocidas inyectadas. La tercera estrategia de control consiste en un control por rechazo activo de la perturbación, donde las perturbaciones externas descocidas y perturbaciones internas debidas a dinámicas desprecias durante el proceso de linealización son estimadas por un observador de estado extendido y a su vez son comenzadas en la estrategia de control.



## ABSTRACT

In this work, the problem of the suspended pendulum and inverted pendulum anchored to a quadrotor in three-dimensional space is presented. The problem is to control the full system, that is, through the conventional control inputs of a quadrotor, the torques associated with the Euler angles (roll, pitch and yaw) and the total thrust force due to the motors, allowing to control the rotation dynamics and the horizontal translation dynamics of the quadrotor and at the same time indirectly control the inverted or suspended pendulum, attenuating the oscillations due to the unstable nature in the case of the inverted pendulum and due to the translational movements in both cases.

When the suspended pendulum configuration is addressed, the main problem addressed is that of transporting oscillating suspended point loads, the challenge is to indirectly attenuate the oscillations of the suspended load through the horizontal translation dynamics of the quadrotor which in turn is controlled by the rotation dynamics of the vehicle.

In both configurations, an analysis is proposed based on linear models associated with the dynamics in the  $X - Z$  and  $Y - Z$  frames with respect to the inertial reference frame where the aforementioned models are linearized around an equilibrium point, decoupling the dynamics of yaw and height. This considerably simplifies the full model of the nonlinear system and allows the translational dynamics of the vehicle to be controlled through the control inputs in the rotational dynamics.

On the other hand, from the analysis presented for the configuration of the suspended pendulum, it is concluded that the dynamic model obtained for the configuration of the inverted pendulum on a quadrotor are similar, allowing both models to be addressed with similar control strategies.

Finally, three control strategies are proposed that make use of flat outputs, the first strategy is based on feedback control where one of the advantages of this strategy is the simplicity of the control. The second strategy consists of sliding mode control that allow attenuating the effects generated by the injected unknown disturbances. The third control strategy consists of an active disturbance rejection control, where unknown external disturbances and internal disturbances due to neglected dynamics during the linearization process are estimated by an extended state observer and in turn are compensated in the control law.



# Índice general

AGRADECIMIENTOS	III
RESUMEN	V
ABSTRACT	VII
Índice general	IX
Índice de figuras	XIII
Índice de tablas	XVII
<b>1 Introducción</b>	<b>1</b>
1.1 Generalidades . . . . .	1
1.2 El problema del péndulo en un cuadrirotor . . . . .	6
1.2.1 Cuadrirotor y péndulo suspendido . . . . .	7
1.2.2 Péndulo invertido sobre un cuadrirotor . . . . .	8
1.2.3 El problema del despegue y aterrizaje . . . . .	9
1.3 Planteamiento del problema . . . . .	10
1.4 Objetivos . . . . .	11
1.4.1 Objetivo general . . . . .	11
1.4.2 Objetivos particulares . . . . .	11
1.5 Contribución de la tesis . . . . .	12
1.6 Organización de la tesis . . . . .	12
<b>2 Marco teórico</b>	<b>15</b>
2.1 Modelo del cuadrirotor y péndulo suspendido . . . . .	18
2.1.1 Modelo dinámico del cuadrirotor con carga suspendida en tres dimensiones . . . . .	18
2.1.2 Modelo dinámico del cuadrirotor con carga suspendida en el marco de referencia $X - Z$ . . . . .	23
2.1.3 Modelo dinámico del cuadrirotor con carga suspendida en dos dimensiones en el marco $Y - Z$ . . . . .	25
2.2 Modelo del cuadrirotor y péndulo invertido . . . . .	26

2.2.1	Modelo dinámico del cuadrirotor y péndulo invertido en tres dimensiones	27
2.2.2	Modelo dinámico del cuadrirotor y péndulo invertido en el marco $X - Z$	29
2.2.3	Modelo dinámico del cuadrirotor y péndulo invertido en el marco $Y - Z$	31
2.3	Resumen de capítulo	33
<b>3</b>	<b>Control del cuadrirotor y péndulo suspendido</b>	<b>35</b>
3.1	Sistema péndulo esférico suspendido y cuadrirotor en tres dimensiones	35
3.2	Dinámica lateral	37
3.2.1	Linealización tangencial aproximada	41
3.2.2	Parametrización diferencial	42
3.3	Control realimentado	46
3.3.1	Control de altura	48
3.3.2	Control de guiñada	49
3.3.3	Control de traslación horizontal	49
3.4	Análisis de convergencia	50
3.5	Control por modos deslizantes	52
3.5.1	Control por modos deslizantes de altitud	53
3.5.2	Control por modos deslizante de guiñada	54
3.5.3	Control horizontal de traslación	55
3.6	Análisis de convergencia	57
3.7	Resumen de capítulo	59
<b>4</b>	<b>Control del cuadrirotor y péndulo invertido</b>	<b>61</b>
4.1	Sistema péndulo invertido esférico sobre un cuadrirotor en tres dimensiones	61
4.2	Dinámica lateral	63
4.3	Linealización tangencial aproximada	64
4.4	Control por rechazo activo de la perturbación	66
4.4.1	Control ADRC de altitud	68
4.4.2	Control ADRC de guiñada	69
4.4.3	Control ADRC en la dinámica de traslación horizontal	69
4.4.4	Esquema ADRC para la dinámica de traslación horizontal basada en OEE y observador de Luenberger	72
4.5	Análisis de convergencia	74
4.5.1	Control activo de rechazo a perturbaciones	76
4.6	Resumen de capítulo	77
<b>5</b>	<b>Resultados de simulación</b>	<b>79</b>
5.1	Cuadrirotor y carga suspendida	79
5.1.1	Control por realimentación de estados	79
5.2	Resultados control por modos deslizantes	85
5.2.1	Discusión y comparación con resultados previos	92
5.3	Resultados de simulación control ADRC	93
5.3.1	Discusión y comparación con resultados previos	100

<i>ÍNDICE GENERAL</i>	XI
5.4 Resumen de capítulo . . . . .	102
<b>6 Conclusiones</b>	<b>103</b>
6.1 Conclusiones . . . . .	103
6.2 Trabajo futuro . . . . .	104
<b>A Artículos publicados</b>	<b>105</b>
A.1 Artículos de revista indexada al JCR . . . . .	105
A.2 Artículos de congreso internacional . . . . .	105
<b>B Programa de animación del cuadrirotor</b>	<b>107</b>
B.1 Programa principal . . . . .	107
B.2 Bibliotecas para el cuerpo de cuadrirotor y péndulo esférico . . . . .	110
B.3 Rotación del cuerpo del cuadrirotor y péndulo en el espacio tridimensional .	112
<b>Bibliografía</b>	<b>115</b>



# Índice de figuras

1.1	Tipo de drones para transporte de cargas. . . . .	2
1.2	Diferentes configuraciones de drones multirotores para transporte de cargas. . . . .	4
2.1	El helicóptero de cuatro rotores de Bothezat. . . . .	15
2.2	Patente del helicóptero de Bothezat. . . . .	16
2.3	Movimientos de rotación del cuadrirotor. . . . .	17
2.4	Cuadrirotor con carga suspendida en el espacio de tres dimensiones. . . . .	19
2.5	Cuadrirotor con carga suspendida en el marco $X - Z$ . . . . .	23
2.6	Cuadrirotor con carga suspendida en el marco $Y - Z$ . . . . .	25
2.7	Péndulo invertido sobre un cuadrirotor en el espacio de tres dimensiones. . . . .	27
2.8	Cuadrirotor y péndulo invertido en el marco $x - Z$ . . . . .	30
2.9	Cuadrirotor y péndulo invertido en el marco $Y - Z$ . . . . .	32
3.1	Representación en cascada de la salida plana $\mathcal{F}_x$ asociada a la dinámica de traslación en el marco inercial $X - Z$ . . . . .	44
3.2	Representación en cascada de la salida plana $\mathcal{F}_y$ asociada a la dinámica de traslación en el marco inercial $Y - Z$ . . . . .	45
3.3	Representación en cascada de la salida plana $\mathcal{L}$ asociada a la dinámica de altura. . . . .	46
3.4	Diagrama del esquema del control general para el cuadrirotor y péndulo suspendido. . . . .	47
4.1	Diagrama del esquema del control general para el cuadrirotor y péndulo suspendido aplicando un control por rechazo activo de la perturbación. . . . .	67
4.2	Observador de estado extendido y la representación en cascada de la dinámica de traslación horizontal sobre el eje $X$ . . . . .	70
4.3	Observador de estado extendido y la representación en cascada de la dinámica de traslación horizontal sobre el eje $Y$ . . . . .	71
4.4	Representación en cascada de la salida plana con OEE y observador de Luenberger para la dinámica de traslación horizontal en el eje $X$ . . . . .	72
4.5	Representación en cascada de la salida plana con OEE y observador de Luenberger para la dinámica de traslación horizontal en el eje $Y$ . . . . .	73

5.1	Comportamiento de seguimiento de trayectoria del sistema de péndulo suspendido en un cuadrirotor en el espacio tridimensional hasta alcanzar la trayectoria de referencia mediante control por realimentación de estados. . . . .	80
5.2	Comportamiento del ángulo de guiñada en los primeros cinco segundos de simulación. . . . .	81
5.3	Comportamiento de los ángulos de oscilación de la carga suspendida esférica usando controladores por realimentación de estado. . . . .	81
5.4	Errores de seguimiento de trayectoria del sistema de péndulo suspendido en un cuadrirotor en un espacio tridimensional con controladores por realimentación de estados. . . . .	82
5.5	Comportamiento de los ángulos de orientación del cuadrirotor con controladores por realimentación de estados. . . . .	83
5.6	Señales de control aplicada al cuadrirotor para alcanzar la trayectoria de referencia en el espacio tridimensional y minimizar las oscilaciones del péndulo esférico suspendido mediante la estrategia de control por realimentación de estados. . . . .	83
5.7	Perturbaciones externas inyectadas al sistema en los tres ejes del espacio tridimensional y la perturbación rotacional en guiñada. . . . .	84
5.8	Seguimiento de trayectoria del cuadrirotor con carga suspendida en el espacio tridimensional usando control por realimentación de estados. . . . .	85
5.9	Comportamiento de seguimiento de trayectoria del sistema de péndulo suspendido en un cuadrirotor en el espacio tridimensional hasta alcanzar la referencia aplicando controles por modos deslizantes. . . . .	86
5.10	Comportamiento del ángulo de guiñada en los primeros cinco segundos de simulación. . . . .	87
5.11	Ángulos de oscilación de la carga suspendida esférica. . . . .	88
5.12	Errores de seguimiento de trayectoria del sistema de péndulo invertido en un cuadrirotor en un espacio tridimensional. . . . .	89
5.13	Ángulos de orientación del cuadrirotor. . . . .	89
5.14	Señales de control aplicadas al cuadrirotor para alcanzar la trayectoria de referencia en el espacio tridimensional y mantener en equilibrio el péndulo esférico suspendido. . . . .	90
5.15	Perturbaciones inyectadas en los tres ejes del espacio tridimensional y la perturbación rotacional en guiñada. . . . .	91
5.16	Seguimiento de trayectoria del cuadrirotor con carga suspendida en el espacio tridimensional usando control por modos deslizantes. . . . .	92
5.17	Comportamiento de seguimiento de trayectoria del sistema de péndulo invertido en un cuadrotor en el espacio tridimensional hasta alcanzar la referencia mediante control ADRC. . . . .	95
5.18	Ángulos de orientación del cuadrirotor aplicando ADRC. . . . .	95
5.19	Errores de seguimiento de trayectoria del sistema de péndulo invertido en un cuadrirotor en un espacio tridimensional aplicando un control ADRC. . . . .	96

5.20	Comportamiento de los ángulos de oscilación del péndulo invertido esférico aplicando la estrategia ADRC. . . . .	97
5.21	Estimación de la perturbación en los tres ejes del espacio tridimensional y la perturbación rotacional en guiñada. . . . .	98
5.22	Señal de control aplicada al cuadrirotor para alcanzar la trayectoria de referencia en el espacio tridimensional y mantener en equilibrio el péndulo esférico invertido. . . . .	99
5.23	Animación virtual del sistema completo bajo el esquema de seguimiento de trayectoria que se muestra en los resultados de la simulación en un espacio tridimensional aplicando la estrategia ADRC. . . . .	100



# Índice de tablas

5.1	Parámetros de simulación del péndulo y el cuadrirotor. . . . .	80
5.2	Resultados de rendimiento del controlador. . . . .	93
5.3	Comportamiento de los errores de seguimiento del sistema. . . . .	101



# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1 Generalidades

Los vehículos aéreos no tripulados VANT o UAV<sup>1</sup> son aeronaves que vuelan sin tripulación humana a bordo. Los VANT son utilizados mayormente en aplicaciones militares, aunque recientemente han tenido un alto crecimiento dentro de las aplicaciones civiles. Una de las aplicaciones civiles que ha tenido un alto impacto con el uso de VANT y cuyo tema es abordado en ese trabajo de tesis es el transporte de cargas. Dentro de los usos o aplicaciones comerciales más comunes se encuentran entrega de comida, entrega de correo postal, entrega de paquetería, entrega de instrumental medico o medicinas, etc. Muchos de estas tareas se desarrollan en escenarios urbanos, lugares de difícil acceso o en escenarios de catástrofes naturales.

Esto ha propiciado que diferentes compañías se interesen por desarrollar prototipos para la entrega de productos, solo por mencionar algunos, en 2013 se fundó la compañía Amazon Prime Air, donde la meta de Prime Air es entregar paquetes que pesen 2,27 kg a los clientes en menos de 30 minutos mediante el uso de drones. El equipo de Prime Air diseñó y creó un propio con CFD (de sus siglas en ingles, computational fluids dynamics), una rama de la dinámica de fluidos que usa análisis numéricos y datos para resolver problemas relacionados al flujo del aire y el efecto de éste bajo diferentes condiciones alrededor de una aeronave [1].

Otra compañía de mensajería y paquetería es DHL la cual desarrolló un dron llamado “Parcelcopter” que principalmente se enfoca en entrega de medicamentos en zonas remotas de difícil acceso. Actualmente el “Parcelcopter” ha hecho entras en África [2].

Por otra parte, en 2022 la compañía Fedex inicia una colaboración con la compañía Elroy Air la cual desarrolla un sistema de carga autónomo de despegue y aterrizaje vertical (Vertical take off and landing VTOL). El dron llamado “Chaparral” es un vehículo de largo alcance desarrollado por la compañía Elroy Air, este vehículo está diseñado exclusivamente para mover carga por vía aérea entre ubicaciones con una infraestructura mínima[3].

En 2012 inicia “Project Wing” como un proyecto de Google X [4]. Este proyecto tiene como objetivo entregar productos en una ciudad mediante el uso de vehículos voladores,

---

<sup>1</sup>de sus siglas en ingles. *Unmaned Aerial Vehicles*.

similar al concepto Amazon Prime Air, la compañía llevó a cabo pruebas a gran escala en Australia. En 2014, el proyecto se anunció públicamente, al mismo tiempo que se inició en una empresa independiente, actualmente “Wing” [5]. En la actualidad la compañía cuenta con un dron híbrido tipo ala fija combinado con un dron multirotor, esto permite vuelos largos con cargas relativamente pesadas y aterrizaje y despegue vertical.

Tipos de Dron	Ventajas	Desventajas	visual
Helicoptero rotor de cola	<ul style="list-style-type: none"> <li>• VTOL</li> <li>• Maniobrable</li> <li>• Carga pesadas</li> <li>• Despegue/aterrizaje vertical (VTOL)</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Costoso</li> <li>• Altos requisitos de mantenimiento</li> </ul>	
Multirotor	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Bajo Costo</li> <li>• Maniobrable</li> <li>• Bajo peso</li> <li>• Despeje/Aterrizaje vertical</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Cargas limitadas</li> <li>• Suceptible a viento</li> <li>• Corto alcance</li> </ul>	
Ala fija	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Largo alcance.</li> <li>• Resistente</li> <li>• Bajo costo</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Despegue/aterrizaje horizontal</li> <li>• Menor maniobrabilidad</li> </ul>	
Ala fija + multirotor	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Combinación de ala fija y VTOL</li> <li>• Medio alcance</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Peso considerable</li> <li>• Costoso</li> <li>• Tecnológicamente complejo</li> </ul>	
Ala inclinable	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Combinacion de ala fija y VTOL</li> <li>• Largo alcance</li> <li>• Cargas pesadas</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Tecnológicamente complejo</li> <li>• Costoso</li> </ul>	

Figura 1.1: Tipo de drones para transporte de cargas.

Diferentes configuraciones y prototipos de vehículos autónomos has sido usados para tareas de transporte de cargas, en la figura 1.1 se muestra una clasificación de vehículos aéreos autónomos utilizados para este fin. Una breve descripción de los tipos de vehículos aéreos autónomos de describe a continuación.

- **Helicóptero de rotor de cola.** Este helicóptero consiste de un rotor principal vertical que genera la fuerza de sustentación y un rotor montado en el larguero de la cola en dirección horizontal, la principal función del rotor de cola es contrarrestar en efecto

del par motor generado por el rotor principal. Además de que este tipo de aeronaves es el clásico helicóptero pilotado por personas, también se ha usado como vehículo autónomo no tripulado donde el principal uso que se ha dado a este tipo de vehículos es de aeromodelismo. Este tipo de vehículo presenta todas las ventajas que un dron multirotor. Por otra parte, la desventaja que presenta este tipo de helicóptero es la complejidad estructural, además presenta un alto costo de fabricación y tecnológica.

- **Dron multirotor.** El dron multirotor es el vehículo aéreo autónomo no tripulado más utilizado en la aplicación de diversas tareas o misiones, donde el transporte de carga no es la excepción. El dron multirotor generalmente se clasifica en drones de cuatro motores (también llamado cuadrirotor), seis motores (hexarotor), ocho motores (octarotor), etc. Actualmente se conocen configuraciones que exceden los diez o hasta veinte motores dependiendo de la aplicación. La principal ventaja es la simplicidad de la estructura y sencillez en la construcción.
- **Dron de ala fija.** El dron de ala fija simular a un avión permite transportar cargas por largas distancias a velocidades relativamente altas, además de que permite cargas relativamente pesadas, pero que no supere en volumen a la estructura del vehículo. Sin embargo, como desventaja este tipo de vehículo no permite el despegue y aterrizaje vertical debido a que la fuerza de sustentación se genera a partir del viento que fluye a través de las alas.
- **Drone de ala fija y multirotor.** El dron de ala fija y multirotor es tipo de vehículo híbrido que permite el vuelo estacionario, despegue y aterrizaje vertical y vuelo horizontal por medio de alas <sup>2</sup>. Este tipo de dron permite compensar la desventaja de despegue y aterrizaje vertical en los drones de ala fija convencionales. Esto se logra agregando motores extra a la estructura del dron de ala fija en dirección vertical similar a la de un dron multirotor (en realidad es un dron multirotor en combinación con un dron de ala fija), de esta forma permite el despegue y aterrizaje vertical además de vuelo estacionario siempre que se los motores para este fin estén activados. Para el vuelo horizontal se activan el conjunto de motores horizontales que provee velocidad de traslación horizontal al vehículo permitiendo el aire fluya a través de las alas generando la fuerza de sustentación requerida para el vuelo. La principal desventaja es el exceso de peso debido a cantidad de motores utilizados, es decir, se utiliza un conjunto de motores para el vuelo horizontal dado por la fuerza de sustentación de las alas y otro conjunto de motores para el vuelo estacionario, despegue y aterrizaje vertical similar a un helicóptero. Otra desventaja es la complejidad tecnológica y el costo de fabricación. Debido a esta desventaja, se han propuesto prototipos híbridos donde se combina el despegue y aterrizaje vertical y el vuelo horizontal utilizando los mismos motores como se describe a continuación.
- **Ala inclinable y multirotor.** El dron de ala inclinable y multirotor combina las bondades del vuelo horizontal donde la fuerza de sustentación se genera a través del

---

<sup>2</sup>También llamado VTOL del inglés “vertical takeoff and landing”

aire que fluye por las alas, y por otro lado, el vuelo estacionario además del despegue y aterrizaje vertical todo esto con el un solo conjunto de motores. Esto se logra debido al cambio del ángulo de ataque de los motores en las alas, es decir, de una posición vertical a un posición horizontal. La transición del vuelo estacionario a vuelo horizontal se lleva a cabo durante el vuelo, rotando la estructura de las alas que contienen a los motores pasando de volar por la fuerza de empuje de los motores (vuelo estacionario) a volar por la fuerza de sustentación generada por el aire que fluye por las alas (vuelo horizontal). La principal desventaja de este tipo de drones es la complejidad tecnológica que implica la transición híbrida durante el vuelo, la complejidad de fabricación y además de que son muy costosos.

Basado en la clasificación mostrada anteriormente, en este trabajo de tesis se centra en el estudio del dron multirotor para el transporte de cargas, más precisamente, en el dron de cuatro rotores o comúnmente llamado cuadrirotor. Sin embargo, existen diferentes configuraciones de transporte de cargas usando este tipo de vehículo, éstas configuraciones se resumen en la figura 1.2.

<b>Cuadrirotor</b>	<b>Ventajas</b>	<b>Desventajas</b>	<b>Visual</b>
Anclado al cuerpo	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Anclaje simple</li> <li>• Bajo costo</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Cargas ligeras</li> <li>• Pérdida de maniobrabilidad cuadrirotor</li> </ul>	
Brazo manipulador	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Maniobrabilidad de la carga</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Tecnológicamente complejo</li> <li>• Costoso</li> <li>• Cargas ligeras</li> <li>• Pérdida de maniobrabilidad cuadrirotor</li> </ul>	
Carga suspendida	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Anclaje simple</li> <li>• Maniobrabilidad del cuadrirotor</li> <li>• Cargas voluminosas</li> <li>• Bajo costo</li> <li>• Cargas medianamente pesadas</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Susceptible a oscilaciones</li> <li>• Distancias cortas</li> </ul>	
Cooperación + carga suspendida	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Anclaje simple</li> <li>• Cargas voluminosas</li> <li>• Cargas pesadas</li> <li>• Maniobrabilidad</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Tecnológicamente complejo</li> <li>• Costoso</li> </ul>	

Figura 1.2: Diferentes configuraciones de drones multirrotores para transporte de cargas.

A continuación se presenta un breve descripción de las distintas configuraciones mostradas en la figura 1.2.

- **Carga anclada al cuerpo de un dron multirotor** En el primer caso se muestra un cuadrirotor transportando una carga anclada al cuerpo del cuadrirotor. Esta configuración es una de las más intuitivas y simples de implementar ya que la carga puede ser sujeta por una pinza, o para mayor simplicidad, amarrada por un cordón al cuerpo del dron. Sin embargo, esta configuración presenta algunos inconvenientes que podrían limitar algunas misiones visto desde la perspectiva de la dinámica del dron. Al anclar una carga útil al cuerpo del dron, no sólo se afecta la masa del vehículo sino también afecta a los momentos de inercia del dron. Para cargas relativamente pequeñas (pequeñas comparadas con la masa del dron) el efecto de la carga útil es insignificante para la dinámica del dron, pero precisamente, para la dinámica rotacional. Para cargas más pesadas, se tiene un incremento en la inercia rotacional del dron, afectando la maniobrabilidad y agilidad del dron debido a que para controlar el desplazamiento traslacional del dron, éste se controla por medio de la dinámica rotacional, es decir, la dinámica rotacional asociada a los movimientos de alabeo, cabeceo y guiñada. Otro inconveniente que presenta esta configuración es que no permite anclar cargas útiles voluminosas, es decir, que superen en tamaño al dron.
- **Dron multirotor y brazo manipulador** En el segundo caso, se presenta un dron multirotor anclado con un brazo manipulador articulado. El brazo manipulador articulado puede considerarse a partir de dos eslabones en adelante que pueden moverse en un espacio cartesiano de dos dimensiones o tres dimensiones, por consiguiente, el brazo manipulador generalmente tiene tres grados de libertad incluyendo el movimiento esférico para el caso de tres dimensiones. El objetivo del brazo manipulador es poder manipular cargas en el espacio cartesiano generalmente usando alguna garra en el efector final y considerando la maniobrabilidad del vuelo del dron. Sin embargo, esta configuración presenta algunos inconvenientes. Considerando la masa del brazo manipulador y la masa de la carga útil al manipular la carga durante una misión, presenta un efecto sobre la dinámica rotacional del dron incrementando los momentos de inercia asociados a los movimientos de alabeo, cabeceo y guiñada, y que además puede ser variable de acuerdo a la posición que el brazo manipulado presente, es decir, si el brazo presenta una elongación horizontal máxima, el momento inducido sobre la dinámica del dron será máximo. Lo anterior lleva al hecho de que solo admite cargas ligeras, despreciables comparado con la masa del dron, además de cargas de bajo volumen.
- **Dron multirotor y carga suspendida** Esta configuración es la que se aborda en este trabajo, y consiste de un dron multirotor transportando una carga útil suspendida. Esta configuración presenta algunas ventajas respecto de las configuraciones ya mostradas. El anclaje es simple, debido a que la carga se puede sujetar por medio de un cable al cuerpo del dron, el dron mantiene su dinámica inercial, esto es, debido a que la carga está anclada por el cable no induce cambios en la inercia rotacional del dron. Además permite cargas útiles relativamente pesadas (similar o superior a la masa del dron,

tanto como la fuerza de empuje de los motores permita) y voluminosas. Sin embargo, esta configuración presenta algunos inconvenientes, esta sujeto a perturbaciones debido a las oscilaciones de la carga, además es susceptible a perturbaciones externas (al igual que las configuraciones anteriores).

- **Cooperación entre múltiples multirotores y carga suspendida** Es una configuración que actualmente es muy estudiada, es la cooperación de múltiples drones multirotores, transportando una carga útil suspendida anclada por medio de cables. La principal venta que presenta esta configuración es que permite transportar cargas pesadas y voluminosas, pero su principal desventaja es reto de controlar múltiples drones para ejecutar la misión de transportar una carga. El enfoque de esta configuración es diferente al caso de un solo dron con carga suspendida, en tanto que la configuración de un solo dron con carga suspendida el principal reto es atenuar las oscilaciones de la carga, para el caso de la configuración de cooperación de multiples drones el reto consistes en coordinar el conjunto de drones para transportar dicha carga.

## 1.2 El problema del péndulo en un cuadrirotor

Un péndulo es un dispositivo hecho de un peso suspendido de un pivote para que pueda oscilar libremente [6]. Cuando un péndulo se desplaza lateralmente desde su posición de equilibrio en reposo, está sujeto a una fuerza restauradora debida a la gravedad que lo acelerará de regreso a la posición de equilibrio. Cuando se suelta, la fuerza restauradora que actúa sobre la masa del péndulo hace que éste oscile alrededor de la posición de equilibrio, oscilando hacia adelante y hacia atrás. El tiempo que transcurre durante un ciclo completo, un giro hacia la izquierda y otro hacia la derecha, se denomina período. El período depende de la longitud del péndulo y también, en ligera medida, de la amplitud, la anchura de la oscilación del péndulo.

El problema de la oscilación del péndulo es vigente y atractivo para la comunidad científica, incluso cuando se agrega alguna configuración física a este tipo de problema. Por ejemplo cuando el péndulo se suspende de un cuadrirotor, que lo hace más complicado y desafiante desde la perspectiva del modelado matemático y la teoría del control. El modelo dinámico resultante consiste en un sistema subactuado con ocho variables a controlar y solo cuatro entradas de control para el caso del péndulo esférico en un cuadrirotor que se desplaza en el espacio de tres dimensiones. El objetivo es controlar el desplazamiento horizontal del cuadrirotor atenuando las oscilaciones del péndulo debido a la inercia del movimiento horizontal del cuadrirotor o inclusive a perturbaciones externas.

Otro problema que va muy de la mano en el caso del pendulo suspendido es el péndulo invertido. El péndulo invertido es uno de los sistemas más populares y estudiados en teoría de control con fines educativos. El sistema consiste en un sistema dinámico no lineal y subactuado donde el objetivo principal es mantener en equilibrio la masa del péndulo invertido sobre un carro que se mueve horizontalmente mediante una fuerza inducida por las ruedas [7]. El poste que sostiene la masa del péndulo se mueve libremente sobre el carro, de modo que la

posición del péndulo invertido se controla indirectamente mediante el movimiento horizontal del carro. Este sistema ha presentado un desafío en la teoría del control y numerosos artículos se han centrado en el control de dicho sistema. Sin embargo, a diferencia del problema clásico, una configuración interesante que complica aún más el sistema es cambiar el carro por un cuadrirotor que permita al sistema moverse horizontal y verticalmente en el espacio ya sea de dos o tres dimensiones. El objetivo sigue siendo mantener el equilibrio del péndulo invertido [8] mientras el cuadrirotor se desplaza en horizontal y verticalmente en el espacio.

### 1.2.1 Cuadrirotor y péndulo suspendido

Las aplicaciones más significativas con uso de cuadrirotos relacionadas con el transporte de cargas de un lugar a otro, se pueden desarrollar de diferentes formas como se describió en la figura 1.2. Sin embargo, se han desarrollado algunos artículos que abordan este problema, en particular, una técnica utilizada es la planitud diferencial, la se introdujo por Fliess [9] y algunos trabajos han abordado el problema del cuadrirotor con cargas suspendidas utilizando esta técnica. Algunas estrategias de control basadas en la propiedad de planitud diferencial con una carga suspendida por cable usando un cuadrirotor se encuentran en [10, 11]. Además, el esquema se ha ampliado para incluir la cooperación entre múltiples cuadrirotos como se presenta en [12, 13, 14]. Por otra parte, se han desarrollado otros tipos de técnicas, como los enfoques de control activo de rechazo de perturbaciones (ADRC de sus siglas en inglés *Active Disturbance Rejection Control*), donde el balanceo de la carga suspendida se considera una perturbación externa [15]. De manera similar, en [16] se propone una estrategia de control de doble ADRC para atenuar la influencia de la oscilación de la carga y la perturbación externa en un cuadrirotor. Por otra parte, en [17] se presenta una solución al problema en un cuadrirotor que transporta una carga útil volando a través de una ventana estrecha con el supuesto de que su modelo complejo dinámico derivado no está disponible. En [18] se propone un controlador predictivo de modelo (MCP de sus siglas en inglés *Model Predictive Controller*) para un vehículo aéreo autónomo de rotor basculante con carga suspendida considerando el problema de seguimiento de trayectoria de la aeronave asegurando el transporte de carga sin oscilaciones. Mientras que, en [19] se presenta una técnica robusta de Control Predictivo de Modelo (MPC), para un sistema de carga suspendida de múltiples cuerpos que considera un enjambre de múltiples helicópteros autónomos que están conectados por cables a una carga útil suspendida. El sistema de control está compuesto por diferentes módulos de control para resolver la planificación de trayectorias, el seguimiento de trayectorias y el control de velocidad, tienen en cuenta las limitaciones de rendimiento del multirotor, las limitaciones para evasión de obstáculos y el coste computacional. En [20] se emplea un esquema similar para controlar un multirotor con una carga suspendida, donde se utiliza un algoritmo de control predictivo de modelo cuadrático lineal secuencial (SLQ-MPC por sus siglas en inglés *Sequential Linear Quadratic Model Predictive Control*) para controlar un multirotor con un sistema de carga suspendida, considerando de puntos de referencia y evasión de obstáculos en una función de costos. Por otro lado, [21] presenta el diseño de un sistema de planificación de trayectoria y control de retroalimentación para navegar de forma autónoma un cuadrirotor con una carga útil suspendida a través de un entorno confinado que consta de túneles hor-

izontales y verticales; la tarea de planificación de trayectoria se formula como un problema de control óptimo y se resuelve aplicando un algoritmo de búsqueda A\* descrito en [22]. En [23] propone una trayectoria óptima para transportar la máxima carga útil con la mínima oscilación; la relación entre la longitud del cable y la longitud del cuadrirotor se utiliza para aumentar la capacidad máxima de carga útil y reducir el ángulo máximo de oscilación de la carga suspendida. En [24] presenta dos estrategias de control no lineal para controlar la posición del cuadrirotor mientras se atenúa el ángulo de giro de la carga útil; las leyes de control se basan en un esquema jerárquico que considera la separación en escala de tiempo entre la dinámica de rotación y traslación del cuadrirotor. La primera estrategia es un control PD con un término acoplado no lineal. La segunda estrategia es un control de acoplamiento no lineal basado en el primer algoritmo propuesto. Experimentos numéricos demuestran que el rendimiento de los controladores propuestos es adecuado para soportar una carga, con atenuación de oscilaciones. Por otra parte, [25] propone un diseño de control predictivo (MPC) basado en modelos para un vehículo aéreo cuadrirotor con carga suspendida; el controlador tiene en cuenta la dinámica de la carga útil suspendida, la dinámica en el espacio tridimensional y la rotación del vehículo, logrando un buen equilibrio entre tiempos de estabilización rápidos y ángulos de giro pequeños; la estrategia MPC restringido considera los límites en los ángulos de giro y la posición del cuadrirotor para estabilizar el vehículo aéreo logrando atenuar la oscilación de la carga siguiendo una trayectoria de referencia, considerando un rango máximo de oscilación de  $\pm 10^\circ$ . En [26] presenta una metodología para resolver el problema del esquema de Asignación de amortiguación de interconexión Control basado en pasividad (IDA-PBC de sus siglas en inglés *Interconnection damping assignment Passivity Based Control*) para el caso de sistemas subactuados con matriz de inercia dependiente de las coordenadas no actuadas. Los autores aplican la estrategia robusta IDA-PBC propuesta a un vehículo aéreo no tripulado que transporta una carga útil suspendida por un cable con el objetivo de estabilizar la posición del vehículo y atenuar el ángulo de oscilación de la carga útil. Finalmente, en [27] considera la carga como una perturbación; la solución se presenta a través de la implementación de un controlador basado en pasividad y un observador de estado extendido basado en un controlador de rechazo activo de perturbaciones.

### 1.2.2 Péndulo invertido sobre un cuadrirotor

El péndulo invertido de un carro es un problema de control clásico que se ha investigado durante varias décadas. Cuando un cuadrotor se integra con un péndulo invertido, se añade un grado adicional de subactuación a la dinámica del sistema. El cuadrirotor y péndulo invertido está estrechamente relacionado con el caso del cuadrirotor con carga suspendida. Sin embargo, la principal diferencia consiste en la posición del péndulo, es decir, en el caso del péndulo invertido, la masa del péndulo se ubica verticalmente sobre el cuadrirotor, es decir, la masa del péndulo se localiza en el punto de equilibrio inestable. Por el contrario, en el caso de carga suspendida la masa del péndulo se ubica verticalmente debajo del cuadrirotor, es decir, en el punto de equilibrio estable. Sin embargo, en la literatura se presentan muy pocos trabajos relacionados con el péndulo invertido sobre un cuadrirotor. El péndulo invertido en un cuadrirotor se introdujo por primera vez por [28], donde se presenta un controlador

lineal de retroalimentación de estado completo basado en la técnica del regulador cuadrático lineal (LQR por sus siglas en inglés *linear quadratic regulator*) para estabilizar un péndulo invertido en un cuadrirotor. En [29] se presenta un algoritmo genético mejorado basado en control óptimo para el péndulo invertido en un cuadrirotor. En [30] presenta una solución novedosa para el vuelo del péndulo invertido sobre un cuadrotor; esta solución se basa en un algoritmo de aprendizaje reforzado para la iteración de valores aproximados y combina el aprendizaje de funciones de valores de estado y de acción de estado en una configuración de iteración de valores aproximados con entradas continuas. Por otra parte, en [31] se propone una estrategia de control no lineal en cascada de tres niveles utilizando un dron de rotor basculante para equilibrar un péndulo invertido; se implementa una ley de control de retroalimentación de linealización entrada-salida en cada nivel del sistema en cascada y la estrategia de control se valida mediante los resultados de la simulación. Alternativamente, en [32] se propone un control híbrido robusto basado en un modelo de regulación de control predictivo para balancear y equilibrar un péndulo invertido unido a un cuadrirotor, mientras se mueve desde una posición inicial hacia una posición final predeterminada. El esquema robusto de control híbrido propuesto es capaz de superar los desafíos asociados con el uso de un cuadrirotor como actuador del péndulo. Por otra parte, resultados de simulación del control de trayectoria de un péndulo invertido sobre un cuadrirotor se presenta en [33], el mapeo de estados propuesto permite a través del uso de la propiedad de planitud diferencial de los sistemas combinados, extender el control a un sistema pasivo. En [34] se presenta un esquema de control para un sistema de aeronave PVTOL (de sus siglas en inglés *planar vertical take-off and landing*) con carga pendular invertida, el esquema de control se basa en el uso del movimiento angular como control artificial para proponer nuevas entradas de control auxiliares; este esquema de control logra una robustez competitiva en presencia de perturbaciones externas, debido al viento cruzado, y para rechazar las no linealidades del sistema de aeronave PVTOL mediante un esquema de control por rechazo activo de la perturbación. Finalmente, en [35] y [36] se presenta una estrategia basada en ADRC basado en un observador de estado extendido discontinuo (DESO-ADRC de sus siglas en inglés *discontinuous extended state observer-ADRC*) utilizando la propiedad de planitud diferencial para el péndulo invertido sobre un cuadrirotor en el espacio de dos de tres dimensiones respectivamente. Mediante salidas auxiliares llamadas salidas planas, los resultados muestran que la parte discontinua del observador propuesta introduce robustez a las estimaciones de perturbaciones endógenas y exógenas.

### 1.2.3 El problema del despegue y aterrizaje

Un problema de estudio que no se aborda en este trabajo tesis pero que es importante mencionarlo es el problema del despegue y aterrizaje del cuadrirotor transportando un péndulo ya sea suspendido o invertido. En la literatura se encuentran trabajos que abordan el problema de despegue y una carga pendular suspendida. La maniobra de levantar una carga desde el suelo a través de un cable mediante un vehículo aéreo como un cuadrirotor es un paso crítico antes de proceder con el transporte de la carga determina. Estrategias de control basadas en un control de regulador cuadrático lineal (LQR) para levantar y transportar la

carga por medio de un cuadrirotor se presenta en [37]. Por otra parte, estrategias basadas en control geométrico combinado con un método de estimación de mínimos cuadrados para diseñar un controlador adaptable que sigue una trayectoria prescrita planificada en función de los puntos de referencia se presenta en [38]. Estrategias que consisten en descomposición de modos híbridos más simples que caracterizan la dinámica del sistema cuadrirotor-carga en regímenes específicos durante la maniobra se presentan en [39]; se define un sistema híbrido y se demuestra que dicho sistema es diferencialmente plano permitiendo el seguimiento de una trayectoria suave generada en base a los estados discretos de la maniobra de elevación.

Aunque pocos trabajos abordan el problema del aterrizaje, el cual consiste en aterrizar la carga suspendida, en [40] se plantea el problema del descenso de la carga útil mediante un cable de longitud variable mientras el cuadrirotor permanece en vuelo estacionario, se propone el diseño de un controlador geométrico no lineal para transportar la carga útil a una posición fija deseada mientras se alinea el cable a lo largo de la dirección vertical y considera los cambios de longitud en la dirección del cable.

Por otra parte, para el caso del péndulo invertido, no se han reportado trabajos en la literatura que aborden la misión de despegue. De la misma manera, para el problema del aterrizaje no se encontraron trabajos en la literatura.

### 1.3 Planteamiento del problema

En el presente trabajo de tesis se propone abordar el modelado y control de dos configuraciones, péndulo suspendido sobre un cuadrirotor y péndulo invertido sobre un cuadrirotor en el espacio de tres dimensiones. El objetivo es atenuar las oscilaciones del péndulo que se generan por el la inercia del movimiento de traslación horizontal o por perturbaciones externas ya sea en la configuración de invertido o suspendido mediante estrategias de control que se inyectan en las entradas convencionales del modelo del cuadrirotor, es decir, en las entradas de control dados por los pares asociados a los movimientos en alabeo, cabeceo y guiñada. El modelo completo del sistema cuadrirotor y péndulo en sus configuraciones invertido y suspendido agrega dos grados de libertad al modelo convencional del cuadrirotor, por lo tanto, el modelo a controlar para ambos casos consiste en un conjunto de ocho ecuaciones diferenciales no lineales de segundo orden, manteniendo las cuatro entradas de control para un cuadrirotor convencional, es decir, entradas de control asociadas a la fuerza total de empuje, y los momentos en alabeo, cabeceo y guiñada. Se justifica el análisis de ambos sistemas debido a que presentan similar estructura en términos del modelo dinámico, pero diferente comportamiento en términos de la localización del punto de equilibrio del péndulo. Para la configuración del péndulo suspendido, el punto de equilibrio se localiza en la región estable, a diferencia del péndulo invertido donde el punto de equilibrio se encuentra en la región inestable. Sin embargo, ambas configuraciones se pueden abordar y controlar con similares estrategias de control.

Se presenta resultados de simulación para una dinámica de movimiento en el espacio de tres dimensiones. Se plantea desarrollar una plataforma virtual en Matlab Simulink para validar las estrategias de control propuestas, esto implica simular el modelo completo no

lineal que resulta de aplicar el formalismo Euler-Lagrange.

## 1.4 Objetivos

Para el desarrollo de esta tesis doctoral, se plantean los siguientes objetivos.

### 1.4.1 Objetivo general

El objetivo general de esta tesis es controlar y estabilizar el sistema péndulo suspendido anclado a un cuadirotor y el sistema péndulo invertido sobre un cuadirotor en el espacio de tres dimensiones. Se propone un esquema de seguimiento de trayectoria para ambos sistemas atenuando las oscilaciones del péndulo debidas a las inercia del movimiento del cuadirotor o debidas a perturbaciones externas.

### 1.4.2 Objetivos particulares

Dentro de los objetivos particulares se proponen los siguientes

- Proponer un modelo matemático del sistema péndulo suspendido de anclada a un cuadirotor en el espacio de tres dimensiones.
- Obtener un modelo matemático del sistema péndulo invertido sobre un cuadirotor.
- Se propone una estrategia para simplificar el modelo completo en el espacio de tres dimensiones y un análisis basado en marcos de referencia  $X - Z$  y  $Y - Z$  para ambas configuraciones.
- Realizar un análisis de los modelos dinámicos para determinar la controlabilidad y observabilidad.
- Desarrollar una estrategia de control basada en realimentación de estados para controlar el sistema completo no lineal en el espacio de tres dimensiones.
- Desarrollar una estrategia de control basada en modos deslizantes para controlar el sistema completo no lineal en el espacio de tres dimensiones.
- Desarrollar un estrategia de control basada en un observador de estado extendido para estimar perturbaciones externas del sistema completo en el espacio de tres dimensiones.
- Desarrollar una plataforma de simulación virtual para la validación de las estrategias de control propuestas.
- Implementar simulaciones numéricas que validad el control de los modelos dinámicos con las estrategias de control propuestas bajo un esquema de seguimiento de trayectoria.

## 1.5 Contribución de la tesis

Como se describió en el estado del arte, los resultados presentados en la literatura muestran en su mayoría resultados de simulación basado en modelos en dos dimensiones. Por consiguiente, la contribución de este trabajo se resume en los siguientes puntos

- Se demuestra que ambos modelos dinámicos para las configuraciones del péndulo suspendido anclado un cuadrirotor y péndulo invertido sobre un cuadrirotor, son modelos similares, y pueden controlarse con las mismas estrategias de control.
- Se presenta un análisis que considera a ambos modelos en el espacio de tres dimensiones basado en planitud diferencial.
- Se presenta una estrategia de control basado en un control por realimentación de estados y planitud diferencial para controlar el modelo completo en el espacio de tres dimensiones.
- Se presenta una estrategia de control basado en modos deslizantes combinada con planitud diferencial para controlar en modelo completo en el espacio de tres dimensiones.
- Se presenta un control por rechazo activo de perturbaciones, aplicado al modelo completo en el espacio de tres dimensiones.
- Se propone una plataforma virtual desarrollada en Matlab Simulink para la validación de las estrategias de control propuestas.

## 1.6 Organización de la tesis

En el capítulo 1 se presenta una investigación del estado del arte sobre el tema de transporte de cargas por medio de vehículos aéreos no tripulados. Se exploran diferentes configuraciones de drones para realizar tareas de transporte de cargas, desde helicópteros de rotor de cola, helicópteros multirotores, aviones de ala fija, vehículos híbridos de ala fija en combinación con multirotor y ala inclinable. Además, se exploran diferentes configuraciones de transporte de carga con multirotores. Finalmente se presenta el planteamiento del problema, los objetivos general y particular y la contribución de la tesis.

En el capítulo 2 se presenta el modelo matemático dinámico de los sistemas péndulo suspendido anclado al cuadrirotor y péndulo invertido sobre un cuadrirotor, ambos obtenidos por el formalismo de Euler-Lagrange en el espacio de tres dimensiones.

En el capítulo 3 se presenta el problema de control del péndulo suspendido anclado al cuadrirotor en el espacio de tres dimensiones. Se presentan dos estrategias de control, una estrategia basada en control por realimentación de estados y la segunda estrategia de control basada en modos deslizantes. Además se presenta un análisis de convergencia para ambas estrategias de control.

En el capítulo 4 se presenta el problema de control del péndulo invertido sobre un cuadricóptero en el espacio de tres dimensiones. La estrategia de control elegida está basada en un control por rechazo activo de la perturbación.

En el capítulo 5 se presentan resultados de simulación de las tres estrategias de control propuesta. Finalmente, en el capítulo 6 se presentan conclusiones generales de la tesis, así como, trabajo futuro.



# Capítulo 2

## Marco teórico

El helicóptero de cuatro rotores no es una configuración nueva, ya existía en el año 1922. En enero de 1921, el Cuerpo Aéreo del Ejército de EE. UU. adjudicó un contrato al Dr. George de Bothezat y a Ivan Jerome para desarrollar una máquina de vuelo vertical. La estructura en forma de X de 1678 kg sostenía un rotor de seis palas de 8,1 m de diámetro en cada extremo de los brazos de 9 m (ver Figura 2.1). En los extremos de los brazos laterales, se utilizaban dos pequeñas hélices de paso variable para controlar el empuje y la orientación. También se montó un pequeño rotor de elevación sobre el motor radial Le Rhone de 180 hp en la unión de los bastidores, pero luego se eliminó por considerarlo innecesario [41].



Figura 2.1: El helicóptero de cuatro rotores de Bothezat.

En la figura 2.2 se muestra una imagen de la patente del helicóptero de Bothezat. Cada rotor tenía un control de paso colectivo individual para producir un empuje diferencial a través de la inclinación del vehículo para la traslación. El vehículo pesaba 1700 kg en el despegue y realizó su primer vuelo en octubre de 1922. Posteriormente el motor pronto se actualizó a un rotativo Bentley BR-2 de 220 Hp. A finales de 1923 se realizaron alrededor de 100 vuelos en lo que eventualmente se conocería como Wright Field cerca de Dayton, Ohio, incluido uno con tres pasajeros colgados de la estructura del avión. Aunque el contrato requería un vuelo estacionario de 100 m, la altura más alta jamás alcanzada fue de unos 5 m. Después de gastar 200.000 dólares, De Bothezat demostró que su vehículo podía ser bastante estable y que el helicóptero práctico era teóricamente posible. Sin embargo, tenía poca potencia, no respondía, era mecánicamente complejo y susceptible a problemas de confiabilidad. La carga de trabajo del piloto era demasiado alta durante el vuelo estacionario para intentar el movimiento lateral [42].

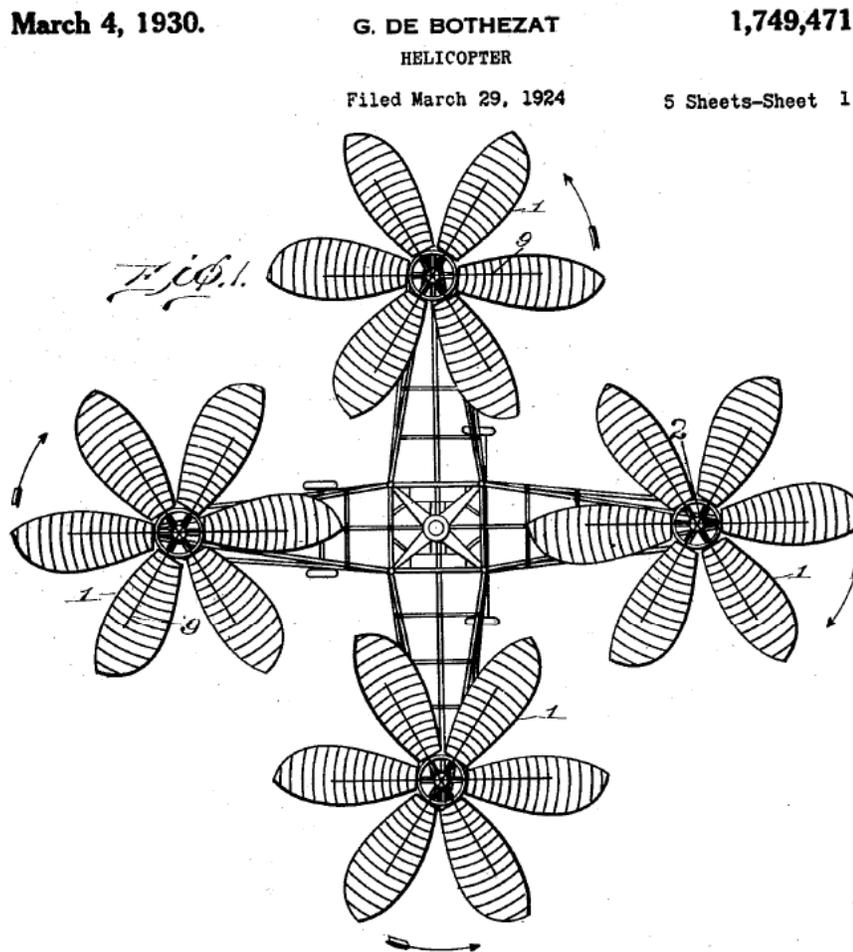


Figura 2.2: Patente del helicóptero de Bothezat.

Sin embargo, en las ultimas décadas el concepto del cuadrirotor ha tomado gran impor-

tancia en aplicaciones a pequeña escala. La necesidad de aeronaves con una capacidad de maniobra alta han propiciado el aumento en la investigación en los vehículos cuadrirotos y vehículos de mas allá de cuatro rotores (seis rotores, ocho rotores o inclusive más rotores). El cuadrirotor como el que se muestra en la figura 2.3 presenta características que lo hacen viable para aplicación en infinidad de tareas. Dentro de las principales características se resaltan las siguientes: no tiene plato cíclico, de hecho no necesitan ningún control de palas, la fuerza de empuje se obtiene a partir de la suma total de las fuerzas de empuje de cada motor. El movimiento de cabeceo (para una configuración en “+”) se obtiene aumentando o reduciendo la velocidad de rotación del motor delantero y a su vez aumentando o reduciendo la velocidad de rotación del motor trasero, mientras que el movimiento alabeo se obtiene aumentando o reduciendo los motores laterales. El movimiento de guiñada se obtiene aumentando la velocidad de rotación de los motores delantero y trasero, y reduciendo la velocidad e rotación de los motores laterales.

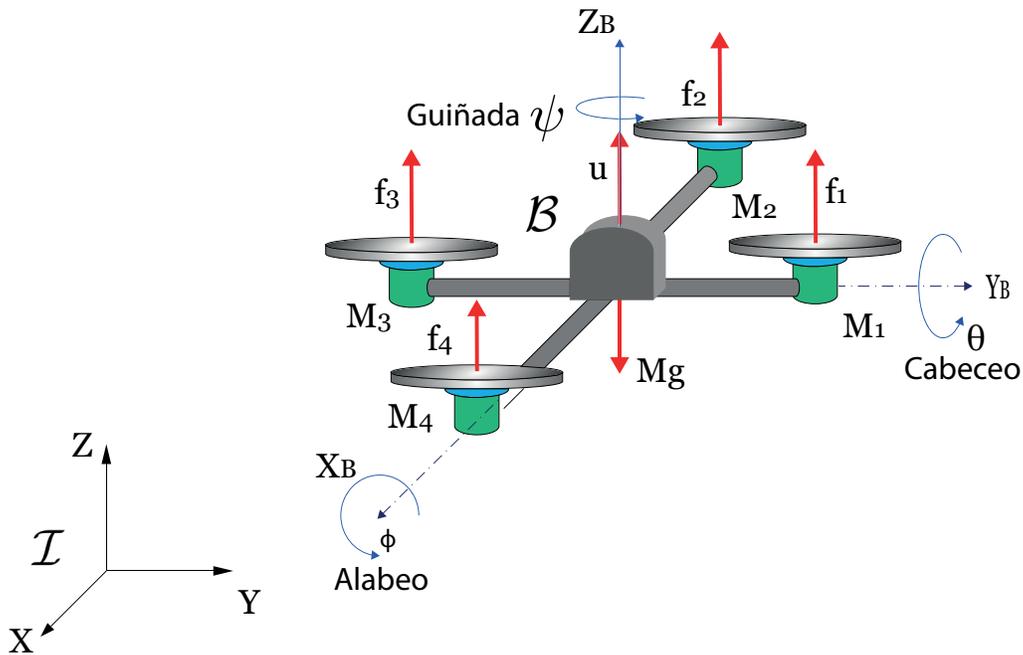


Figura 2.3: Movimientos de rotación del cuadrirotor.

Al anclar una carga puntual al centro geométrico del cuadrirotor similar al péndulo suspendido, o colocar por encima del cuadrirotor un péndulo invertido, se obtiene una configuración interesante visto de desde la perspectiva del modelado y la teoría de control. El principal cambio de estas configuraciones respecto al modelo de un cuadrirotor convencional es el incremento en las variables a controlar, por lo tanto, el modelo resultante, agrega grados de libertad al modelo resultante y por ende agrega ecuaciones al modelo resultante. A con-

tinuación se presenta el modelo dinámico obtenido a partir del formalismo de Euler-Lagrange de ambas configuraciones,

## 2.1 Modelo del cuadrirotor y péndulo suspendido

El modelo del cuadrirotor con carga suspendida también se le puede llamar cuadrirotor con péndulo suspendido, debido a la dinámica de oscilación de la carga suspendida considerada como carga puntual. Las oscilaciones de la carga puede generarse debido al movimiento de traslación del cuadrirotor debido a la inercia de movimiento partiendo desde el reposo hasta alcanzar una velocidad deseada. A continuación se presenta el modelo dinámico del cuadrirotor con un péndulo suspendido en el espacio de tres dimensiones.

### 2.1.1 Modelo dinámico del cuadrirotor con carga suspendida en tres dimensiones

Para modelar el cuadrirotor con péndulo suspendido en el espacio de tres dimensiones se consideran las siguientes suposiciones:

- El cuadrirotor es simétrico.
- El punto de anclaje del cable es en el centro de masa del cuadrirotor.
- El cable se considera rígido, sin elasticidad y se desprecia su masa.
- La masa de la carga suspendida se considera puntual.
- El centro de masa y el centro geométrico del cuadrirotor coinciden.

El diagrama de cuerpo libre para en cuadrirotor con carga suspendida en tres dimensiones se presenta en la figura 2.4.

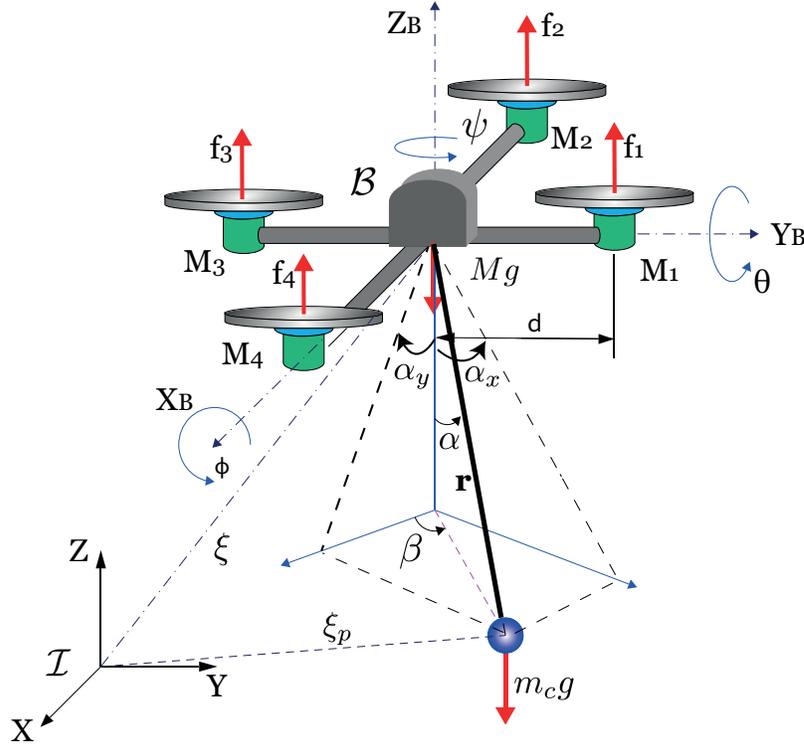


Figura 2.4: Cuadrirotor con carga suspendida en el espacio de tres dimensiones.

Se definen el marco de referencia inercial como  $\mathcal{I} = \{\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}\}$  fijo en la tierra, y el marco de referencia en el cuerpo  $\mathcal{B} = \{\mathbf{X}_B, \mathbf{Y}_B, \mathbf{Z}_B\}$  fijo en el vehículo. Las variables generalizadas del sistema se definen como  $\mathbf{q} = [\xi \ \eta \ \mu]^T \in \mathbb{R}^8$ , donde  $\xi = [x \ y \ z]^T \in \mathbb{R}^3$  describe la posición del cuadrirotor en el espacio con respecto al marco inercial. Mientras que  $\eta = [\phi \ \theta \ \psi]^T \in \mathbb{R}^3$  describe los ángulos de Euler del cuadrirotor (ángulos de alabeo, cabeceo y guiñada) donde  $\phi, \theta \in (-\pi/2, \pi/2)$ .  $\mu = [\alpha \ \beta]^T \in \mathbb{R}^2$  son los ángulos que describen la oscilación del péndulo esférico con respecto al marco en el cuerpo.  $M$  y  $m_c$  son la masa del cuadrirotor y de la carga suspendida respectivamente,  $l$  es la longitud del cable del cuadrirotor hacia la carga suspendida,  $d$  es la distancia entre el centro geométrico del cuadrirotor y los motores,  $f_1, \dots, f_4$  son la fuerza de empuje de cada motor.

El lagrangiano del sistema se define como

$$L = K_q + K_p - T_q - T_p, \quad (2.1)$$

donde  $K_q$  es energía cinética del cuadrirotor,  $K_p$  es la energía cinética del péndulo,  $T_q$  es la energía potencial del cuadrirotor y  $T_p$  es la energía potencial del péndulo suspendido y se definen como,

$$K_q = \frac{1}{2}M\dot{\xi}^T\dot{\xi} + \frac{1}{2}\dot{\eta}^T\mathcal{J}\dot{\eta}, \quad (2.2)$$

$$K_p = \frac{1}{2}m_c\dot{\xi}_p^T\dot{\xi}_p. \quad (2.3)$$

donde la matriz  $\mathcal{J}$  se define como

$$\mathcal{J} = W_\eta^T \mathbf{I}_q W_\eta = \begin{bmatrix} I_\phi S_\theta^2 + C_\theta^2(I_\theta S_\phi^2 + I_\psi C_\phi^2) & C_\theta S_\phi C_\phi(I_\theta - I_\psi) & -I_\phi S_\theta \\ C_\theta S_\phi C_\phi(I_\theta - I_\psi) & I_\theta C_\phi^2 + I_\psi S_\phi^2 & 0 \\ -I_\phi S_\theta & 0 & I_\phi \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}, \quad (2.4)$$

donde por simplicidad, los términos  $S_v$  y  $C_v$  representan las funciones  $\sin v$  y  $\cos v$ , respectivamente. También se define la matriz de inercia  $\mathbf{I}_q$  como,

$$\mathbf{I}_q = \begin{bmatrix} I_\phi & 0 & 0 \\ 0 & I_\theta & 0 \\ 0 & 0 & I_\psi \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}, \quad (2.5)$$

y

$$W_\eta = \begin{bmatrix} -S_\theta & 0 & 1 \\ C_\theta S_\phi & C_\phi & 0 \\ C_\theta C_\phi & -C_\phi & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}. \quad (2.6)$$

Por otra parte, la energía potencial del cuadrirotor  $T_q$  y la carga suspendida  $T_p$  se definen como

$$T_q = Mgz, \quad (2.7)$$

$$T_p = m_c g(z - l \cos \alpha). \quad (2.8)$$

La posición de la carga suspendida  $\xi_p$  respecto del marco de referencia inercial  $\mathcal{I}$  se define como

$$\xi_p = \xi + l\mathbf{r}, \quad \xi_p \in \mathbb{R}^3, \quad (2.9)$$

donde  $\mathbf{r}$  es la posición de la carga suspendida respecto del marco inercial en el cuerpo  $\mathcal{B}$  y se define como  $\mathbf{r} = [S_\alpha C_\beta \ S_\alpha S_\beta \ -C_\alpha]^T \in \mathbb{R}^3$ .

El modelo completo del cuadrirotor con carga suspendida se obtiene mediante las ecuaciones de Euler-Lagrange como

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{u} \in \mathbb{R}^n, \quad (2.10)$$

donde  $n$  corresponde con la dimensión de  $\mathbf{q}$ ,  $\mathbf{u} = [f \ \tau \ 0 \ 0]^T \in \mathbb{R}^8$  representa la fuerza aplicada al cuadrirotor por la fuerza de propulsión de los motores considerando la siguiente definición  $f = \mathbf{R}(\phi, \theta, \psi) \mathbf{F} \in \mathbb{R}^3$ , donde  $\mathbf{F} = [0 \ 0 \ u]^T \in \mathbb{R}^3$ , donde  $u = f_1 + f_2 + f_3 + f_4$ , mientras que  $\mathbf{R}(\phi, \theta, \psi)$  es la matriz de rotación del marco en el cuerpo al marco inercial definida en (2.11). Mientras que,  $\tau = [\tau_\phi \ \tau_\theta \ \tau_\psi]^T \in \mathbb{R}^3$  representan los pares de entrada y se definen como  $\tau_\phi = (f_2 - f_4)d$ ,  $\tau_\theta = (f_3 - f_1)d$ ,  $\tau_\psi = \sum_{i=1}^4 \tau_{M_i}$ , con  $\tau_{M_i}$  siendo el par producido por el motor  $M_i$ .

$$\mathbf{R}(\phi, \theta, \psi) = \begin{bmatrix} C_\theta C_\psi & S_\phi S_\theta C_\psi - C_\phi S_\psi & C_\phi S_\theta C_\psi + S_\phi S_\psi \\ C_\theta S_\psi & S_\phi S_\theta S_\psi + C_\phi C_\psi & C_\phi S_\theta S_\psi - S_\phi C_\psi \\ -S_\theta & S_\phi C_\theta & C_\phi C_\theta \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \quad (2.11)$$

El modelo del cuadrirotor con carga suspendida en tres dimensiones se expresa con el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales no lineales.

La dinámica de traslación corresponde con,

$$(M + m_c)\ddot{x} + m_c l (\ddot{\alpha} C_\alpha C_\beta - \ddot{\beta} S_\alpha S_\beta - (\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2) S_\alpha C_\beta - 2\dot{\alpha}\dot{\beta} C_\alpha S_\beta) = u (S_\theta C_\phi C_\psi + S_\phi S_\psi), \quad (2.12)$$

$$(M + m_c)\ddot{y} + m_c l (\ddot{\alpha} C_\alpha S_\beta + \ddot{\beta} S_\alpha C_\beta - (\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2) S_\alpha S_\beta + 2\dot{\alpha}\dot{\beta} C_\alpha C_\beta) = u (S_\theta C_\phi S_\psi - S_\phi C_\psi), \quad (2.13)$$

$$(M + m_c)\ddot{z} + m_c l \ddot{\alpha} S_\alpha + m_c l \dot{\alpha}^2 C_\alpha + (M + m_c)g = u (C_\theta C_\phi), \quad (2.14)$$

mientras que la dinámica de rotación del cuadrirotor se define como,

$$I_\theta \ddot{\theta} = \tau_\theta, \quad (2.15)$$

$$I_\phi \ddot{\phi} = \tau_\phi, \quad (2.16)$$

$$I_\psi \ddot{\psi} = \tau_\psi, \quad (2.17)$$

y la dinámica del péndulo suspendido se define como,

$$m_c l (\ddot{x} C_\alpha C_\beta + \ddot{y} C_\alpha S_\beta + \ddot{z} S_\alpha + l \ddot{\alpha} - l \dot{\beta}^2 S_\alpha C_\alpha + g S_\alpha) = 0, \quad (2.18)$$

$$m_c l (-\ddot{x} S_\alpha S_\beta + \ddot{y} S_\alpha C_\beta + l \dot{\beta} S_\alpha^2 + 2l \dot{\alpha} \dot{\beta} S_\alpha C_\alpha) = 0. \quad (2.19)$$

El modelo dinámico del cuadrirotor y carga suspendida se expresa de manera generalizada como

$$\mathcal{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathcal{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathcal{G}(\mathbf{q}) = \mathbf{B}\mathbf{u}_1, \quad (2.20)$$

donde  $\mathbf{q} = [x \ y \ z \ \phi \ \theta \ \psi \ \alpha \ \beta]^T \in \mathbb{R}^8$  es el vector de coordenadas generalizadas, y

$$\mathcal{M}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} (M + m_c)\mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \Theta \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathcal{J} & \mathbf{0}_{3 \times 2} \\ \Theta^T & \mathbf{0}_{2 \times 3} & \Phi \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{8 \times 8},$$

$$\mathcal{C}(\dot{q}, q) = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \Upsilon \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 2} \\ \mathbf{0}_{2 \times 3} & \mathbf{0}_{2 \times 3} & \Psi \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{8 \times 8},$$

$$\mathcal{G}(\dot{q}, q) = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{2 \times 1} \\ g(M + m_c) \\ \mathbf{0}_{3 \times 1} \\ \mathcal{G}_\mu \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^8, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}e_3 & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 1} & \mathbf{I}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{2 \times 1} & \mathbf{0}_{2 \times 3} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{8 \times 4}, \quad \mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} u \\ \tau_\theta \\ \tau_\phi \\ \tau_\psi \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4,$$

siendo  $\mathbf{I}_{3 \times 3}$  siendo la matriz identidad unitaria,  $e_3 = [0 \ 0 \ 1]^T \in \mathbb{R}^3$ , y

$$\Theta = m_c l \begin{bmatrix} C_\alpha C_\beta & -S_\alpha S_\beta \\ C_\alpha S_\beta & S_\alpha C_\beta \\ S_\alpha & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 2},$$

$$\Phi = \begin{bmatrix} m_c l^2 & 0 \\ 0 & m_c l S_\alpha^2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}, \quad \mathcal{G}_\mu = \begin{bmatrix} m_c l g S_\alpha \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2,$$

$$\Upsilon = m_c l \begin{bmatrix} -(\dot{\alpha} S_\alpha C_\beta + \dot{\beta} C_\alpha S_\beta) & -(\dot{\alpha} C_\alpha S_\beta + \dot{\beta} S_\alpha C_\beta) \\ (\dot{\beta} C_\alpha C_\beta - \dot{\alpha} S_\alpha S_\beta) & (\dot{\alpha} C_\alpha C_\beta - \dot{\beta} S_\alpha S_\beta) \\ \dot{\alpha} C_\alpha & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 2},$$

$$\Psi = m_c l^2 \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\beta} S_\alpha C_\alpha \\ \dot{\beta} S_\alpha C_\alpha & \dot{\alpha} S_\alpha C_\alpha \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}.$$

### 2.1.2 Modelo dinámico del cuadirotor con carga suspendida en el marco de referencia $X - Z$

Un caso particular del sistema cuadirotor y carga suspendida en tres dimensiones es restringir la dinámica de movimiento en un plano, en este caso se puede elegir el plano  $X - Z$ , es decir, considerando que el movimiento de rotación  $\theta$  es alrededor del eje  $Y$ , entonces  $\phi \rightarrow 0$ ,  $\psi \rightarrow 0$  y  $\alpha \rightarrow 0$ , por tanto, el movimiento en la dinámica traslacional solo se considera a lo largo de los ejes  $X$  y  $Z$  respecto del marco de referencia inercial.

En la figura 2.5 se muestra un diagrama de cuerpo libre del cuadirotor con carga suspendida en dos dimensiones, es decir, en el marco  $X - Z$ .

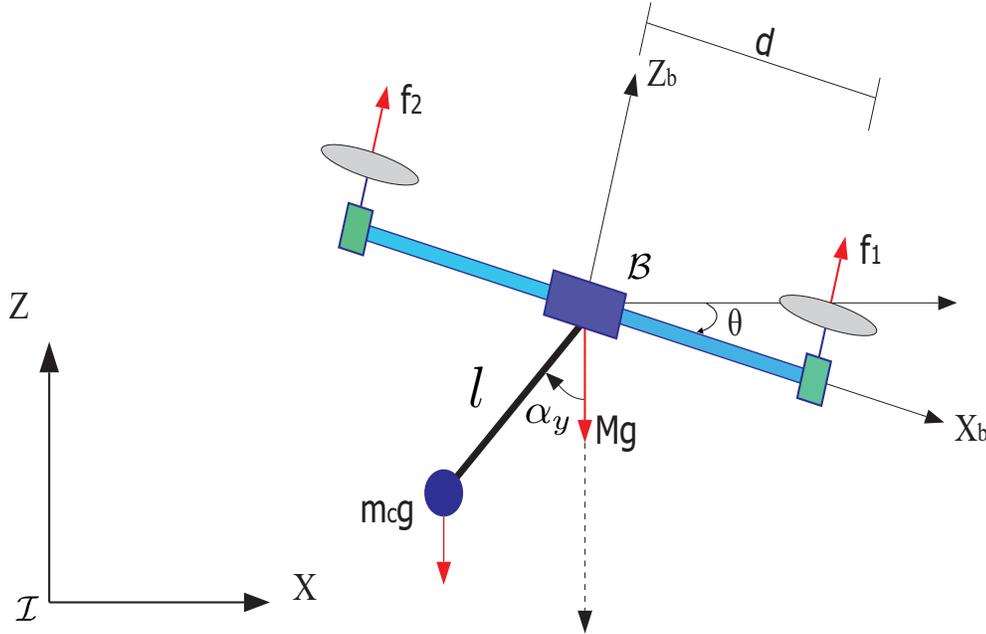


Figura 2.5: Cuadirotor con carga suspendida en el marco  $X - Z$ .

De este modo el marco de referencia inercial se considera como  $\mathcal{I} = \{X, Z\}$ , y el marco de referencia en el cuerpo como  $\mathcal{B} = \{X_b, Z_b\}$ , las coordenadas generalizadas como  $q = [x \ z \ \theta \ \alpha_y]^T \in \mathbb{R}^4$ , y las entradas de control como  $\mathbf{u} = [f \ \tau_\theta \ 0]^T \in \mathbb{R}^4$  donde  $f = \mathbf{R}(-\theta)\mathbf{F} \in \mathbb{R}^2$ , donde  $\mathbf{F} = [0 \ u]^T \in \mathbb{R}^2$  y  $u = f_1 + f_2$ , y el par  $\tau = d(f_1 - f_2)$ , es decir,  $\mathbf{u} = [u \sin \theta \ u \cos \theta \ \tau_\theta \ 0]^T \in \mathbb{R}^4$  mientras que  $\mathbf{R}(-\theta) \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  es la matriz de rotación del marco inercial al marco en el cuerpo en dos dimensiones en sentido horaria (se define horaria debido a que el eje  $Y$  del marco de referencia inercial apunta hacia adentro de la hoja de papel, esto tiene como resultado que los ángulos de rotación de  $\theta$  y  $\alpha_y$  sean negativos) se define como,

$$\mathbf{R}(-\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}. \quad (2.21)$$

El modelo dinámico para el caso del péndulo suspendido sobre el cuadrirotor se puede obtener aplicando la ecuación de Euler-Lagrange descrita en (2.10), donde el lagrangiano para el caso en el espacio de dos dimensiones se define como

$$L_{X-Z} = \frac{1}{2}M(\dot{x}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2}I_\theta\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m_c(\dot{x}_p^2 + \dot{z}_p^2) - Mgz - m_cg(z - l \cos \alpha_y), \quad (2.22)$$

donde la posición de la masa del péndulo se elige como  $x_p = x - l \sin \alpha_y$  y  $z_p = z - l \cos \alpha_y$ , el ángulo  $\alpha_y$  se define como  $\alpha_y = \arctan 2(S_\alpha C_\beta / C_\alpha)$ . El modelo dinámico en dos dimensiones considerando el plano  $X - Z$  se reduce al siguiente modelo,

$$(M + m_c)\ddot{x} - m_cl\ddot{\alpha}_y \cos \alpha_y + m_cl\dot{\alpha}_y^2 \sin \alpha_y = u \sin \theta, \quad (2.23)$$

$$(M + m_c)(\ddot{z} + g) + m_cl\ddot{\alpha}_y \sin \alpha_y + m_cl\dot{\alpha}_y^2 \cos \alpha_y = u \cos \theta, \quad (2.24)$$

$$I_\theta\ddot{\theta} = \tau_\theta, \quad (2.25)$$

$$-m_cl\ddot{x} \cos \alpha_y + m_cl\ddot{z} \sin \alpha_y + m_cl^2\ddot{\alpha}_y + m_cgl \sin \alpha_y = 0. \quad (2.26)$$

El sistema anterior se puede expresar en de manera general como,

$$\mathcal{M}(q)\ddot{q} + \mathcal{C}(q, \dot{q})\dot{q} + \mathcal{G}(q) = \mathbf{u}, \quad (2.27)$$

donde las matrices y vectores asociados a la ecuación (2.27) se expresan como

$$\mathcal{M}(q) = \begin{bmatrix} M + m_c & 0 & 0 & -m_cl \cos \alpha_y \\ 0 & M + m_c & 0 & m_cl \sin \alpha_y \\ 0 & 0 & I_\theta & 0 \\ -m_cl \cos \alpha_y & m_cl \sin \alpha_y & 0 & m_cl^2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4},$$

$$\mathcal{C}(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & m_cl\dot{\alpha} \sin \alpha_y \\ 0 & 0 & 0 & m_cl\dot{\alpha} \cos \alpha_y \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4},$$

$$\mathcal{G}(q) = \begin{bmatrix} 0 \\ (M + m_c)g \\ 0 \\ m_cgl \sin \alpha_y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4.$$

### 2.1.3 Modelo dinámico del cuadirotor con carga suspendida en dos dimensiones en el marco $Y - Z$

En la figura 2.6 se muestra el cuadirotor y péndulo suspendido en el marco de referencia  $Y - Z$ , donde  $\mathcal{I} = \{X, Z\}$  es el marco de referencia inercial, mientras que el marco de referencia en el cuerpo se define como  $\mathcal{B} = \{X_b, Z_b\}$ , siguiendo el mismo análisis mostrado anteriormente, el modelo para la dinámica lateral en el marco inercial  $Y - Z$ , se obtiene considerando que la matriz de rotación que lleva del marco inercial al marco en el cuerpo en dos dimensiones es en sentido antihoraria definida en (2.28).

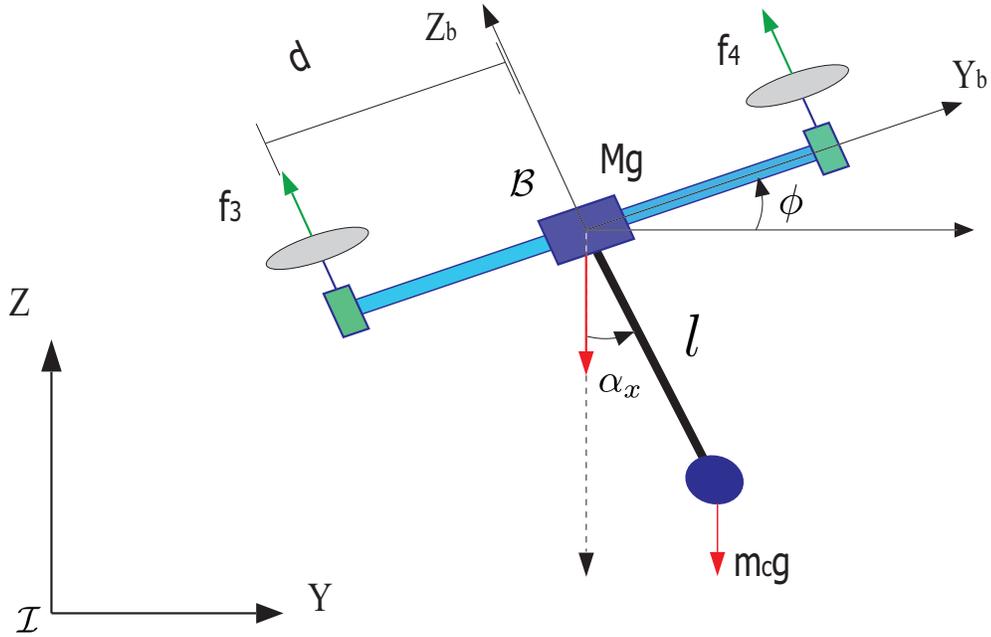


Figura 2.6: Cuadirotor con carga suspendida en el marco  $Y - Z$ .

$$\mathbf{R}(\phi) = \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}. \quad (2.28)$$

El lagrangiano para el marco de referencia  $Y - Z$  se define como

$$L_{Y-Z} = \frac{1}{2}M(\dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2}I_\phi \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}m_c(\dot{y}_p^2 + \dot{z}_p^2) - Mgz - m_cg(z - l \cos \alpha_x), \quad (2.29)$$

donde la posición de la masa del péndulo se elige como  $y_p = y + l \sin \alpha_x$  y  $z_p = z - l \cos \alpha_x$ , el ángulo  $\alpha_x$  se define como  $\alpha_x = \arctan 2(S_\alpha S_\beta / C_\alpha)$ , el vector de coordenadas generalizadas se define como  $q = [y \ z \ \phi \ \alpha_x]^T \in \mathbb{R}^4$ , y el vector de entradas de control  $\mathbf{u} = [f \ \tau_\phi \ 0]^T \in \mathbb{R}^4$

donde  $f = \mathbf{R}(\phi)\mathbf{F} \in \mathbb{R}^2$ , donde  $\mathbf{F} = [0 \ u]^T \in \mathbb{R}^2$  y  $u = f_3 + f_4$ , y el par  $\tau_\phi = d(f_3 - f_4)$ , es decir,  $\mathbf{u} = [-u \sin \phi \ u \cos \phi \ \tau_\phi \ 0]^T \in \mathbb{R}^4$ . El modelo dinámico para el cuadrirotor y carga suspendida en el marco de referencia inercial  $Y - Z$  se obtiene aplicando (2.10) y queda expresada como,

$$(M + m_c)\ddot{y} + m_c l \ddot{\alpha}_x \cos \alpha_x - m_c l \dot{\alpha}_x^2 \sin \alpha_x = -u \sin \phi, \quad (2.30)$$

$$(M + m_c)(\ddot{z} + g) + m_c l \ddot{\alpha}_x \sin \alpha_x + m_c l \dot{\alpha}_x^2 \cos \alpha_x = u \cos \phi, \quad (2.31)$$

$$I_\theta \ddot{\phi} = \tau_\phi, \quad (2.32)$$

$$m_c l \ddot{y} \cos \alpha_x + m_c l \ddot{z} \sin \alpha_x + m_c l^2 \ddot{\alpha}_x + m_c g l \sin \alpha_x = 0. \quad (2.33)$$

Expresando el modelo dinámico anterior en forma general dado por (2.27) se obtienen las siguientes matrices y vectores

$$\mathcal{M}(q) = \begin{bmatrix} M + m_c & 0 & 0 & m_c l \cos \alpha_x \\ 0 & M + m_c & 0 & m_c l \sin \alpha_x \\ 0 & 0 & I_\phi & 0 \\ m_c l \cos \alpha_x & m_c l \sin \alpha_x & 0 & m_c l^2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4},$$

$$\mathcal{C}(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -m_c l \dot{\alpha} \sin \alpha_x \\ 0 & 0 & 0 & m_c l \dot{\alpha} \cos \alpha_x \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4},$$

$$\mathcal{G}(q) = \begin{bmatrix} 0 \\ (M + m_c)g \\ 0 \\ m_c g l \sin \alpha_y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4.$$

Notar que ambos modelo matemáticos restringidos en los marcos  $X - Z$  y  $Y - Z$  pueden obtenerse a partir del modelo completo en tres dimensiones dados por las ecuaciones (2.12)-(2.19). Sin embargo para lograr esto se debe restringir la dinámica de movimiento en  $\psi = 0$ ,  $\beta = 0$ ,  $y = 0$  para el caso de la dinámica asociada al marco  $X - Z$ , mientras que  $\psi = 0$ ,  $\beta = \pi/2$ ,  $x = 0$  para la dinámica asociada al marco  $Y - Z$ .

## 2.2 Modelo del cuadrirotor y péndulo invertido

En esta sección se presenta el modelo dinámico del péndulo invertido sobre un cuadrirotor para los casos en el espacio de dos y tres dimensiones. Se considera que la masa puntual del péndulo invertido se sostiene a través de un poste que es rígido, mientras que dicho poste está

anclado por encima del cuadrirotor, en su centro geométrico, además el poste puede moverse libremente, es decir, no está actuado por lo que el objetivo es controlarlo por medio de los movimientos de traslación horizontal del cuadrirotor. Al igual que en la sección anterior, los modelos dinámicos se obtienen utilizando el formalismo de Euler Lagrange para todos los casos.

### 2.2.1 Modelo dinámico del cuadrirotor y péndulo invertido en tres dimensiones

En la figura 2.7 se muestra el diagrama de cuerpo libre del sistema péndulo invertido sobre un cuadrirotor en el espacio de tres dimensiones. Similar a caso del péndulo suspendido, se define  $\xi = [x \ y \ z]^T \in \mathbb{R}^3$  como las coordenadas del centro de masa del cuadrirotor con respecto al marco inercial  $\mathcal{I}$ ,  $\eta = [\phi \ \theta \ \psi]^T \in \mathbb{R}^3$  son los ángulos de Euler de la dinámica rotacional del cuadrirotor y  $\mu = [\alpha \ \beta]^T \in \mathbb{R}^2$  son los ángulos de oscilación del péndulo invertido esférico. Mientras que  $\xi_p = \xi + l\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$  donde  $\mathbf{r} = [\sin \alpha \cos \beta \ \sin \alpha \sin \beta \ \cos \alpha]^T \in \mathbb{R}^3$  son las coordenadas de la masa puntual del péndulo con respecto al marco inercial.

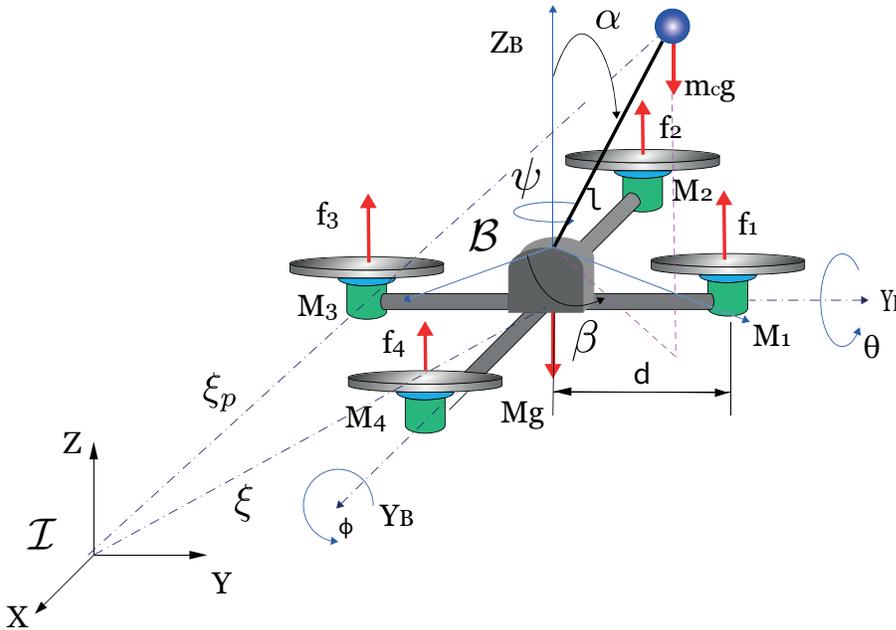


Figura 2.7: Péndulo invertido sobre un cuadrirotor en el espacio de tres dimensiones.

El diagrama de cuerpo libre para el caso del péndulo invertido es similar al caso del péndulo suspendido, inclusive en el modelo matemático, como se mostrará las adelante. Por simplicidad se consideran las mismas variables. Se sugiere el formalismo de Euler-Lagrange para obtener el modelo completo del sistema de péndulo invertido sobre un cuadrirotor, donde el lagrangiano se define en (2.1). Los términos de energía cinética del péndulo y del cuadrirotor definidos en las expresiones (2.3) y (2.2) son iguales para los ambos casos, junto

con el termino de energía potencial asociada el cuadirotor definido por (2.7). Sin embargo, el termino de energía potencial asociada el péndulo invertido difiere con respecto al caso del péndulo suspendido, es decir, la energía potencial para el péndulo invertido se define como,

$$T_p = m_c g(z + l \cos \alpha). \quad (2.34)$$

Notar el cambio de signo con respecto a la expresión que define la energía potencial para el caso del péndulo suspendido definido en (2.8). Se define el lagrangiano para el pendulo invertido sobre un cuadirotor en el espacio de tres dimensiones

$$L = \frac{1}{2} M \dot{\xi}^T \dot{\xi} + \frac{1}{2} \dot{\eta}^T \mathcal{J} \dot{\eta} + \frac{1}{2} m_c \dot{\xi}_p^T \dot{\xi}_p - Mgz - m_c g(z + l \cos \alpha), \quad (2.35)$$

donde la matriz  $\mathcal{J}$  se define en (2.4). Aplicando la ecuación de Euler-Lagrange (2.10) donde el vector de coordenadas generalizadas se define como  $\mathbf{q} = [\xi \ \eta \ \mu]^T \in \mathbb{R}^8$ , se obtiene el siguiente modelo matemático

$$(M + m_c) \ddot{x} + m_c l (\ddot{\alpha} C_\alpha C_\beta - \ddot{\beta} S_\alpha S_\beta - (\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2) S_\alpha C_\beta - 2\dot{\alpha} \dot{\beta} C_\alpha S_\beta) = u (S_\theta C_\phi C_\psi + S_\phi S_\psi), \quad (2.36)$$

$$(M + m_c) \ddot{y} + m_c l (\ddot{\alpha} C_\alpha S_\beta + \ddot{\beta} S_\alpha C_\beta - (\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2) S_\alpha S_\beta + 2\dot{\alpha} \dot{\beta} C_\alpha C_\beta) = u (S_\theta C_\phi S_\psi - S_\phi C_\psi), \quad (2.37)$$

$$(M + m_c) \ddot{z} - m_c l \ddot{\alpha} S_\alpha - m_c l \dot{\alpha}^2 C_\alpha + (M + m_c) g = u (C_\theta C_\phi), \quad (2.38)$$

$$I_\phi \ddot{\phi} = \tau_\phi, \quad (2.39)$$

$$I_\theta \ddot{\theta} = \tau_\theta, \quad (2.40)$$

$$I_\psi \ddot{\psi} = \tau_\psi, \quad (2.41)$$

$$m_c l (\ddot{x} C_\alpha C_\beta + \ddot{y} C_\alpha S_\beta - \ddot{z} S_\alpha + l \ddot{\alpha} - l \dot{\beta}^2 S_\alpha C_\alpha - g S_\alpha) = 0, \quad (2.42)$$

$$m_c l (-\ddot{x} S_\alpha S_\beta + \ddot{y} S_\alpha C_\beta + l \dot{\beta}^2 S_\alpha^2 + 2l \dot{\alpha} \dot{\beta} S_\alpha C_\alpha) = 0. \quad (2.43)$$

El modelo dinámico del cuadirotor y péndulo invertido en tres dimensiones se expresa de manera general como

$$\mathcal{M}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \mathcal{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} + \mathcal{G}(\mathbf{q}) = \mathbf{B} \mathbf{u}_1, \quad (2.44)$$

donde  $\mathbf{q} = [x \ y \ z \ \phi \ \theta \ \psi \ \alpha \ \beta]^T \in \mathbb{R}^8$  es el vector de coordenadas generalizadas, y

$$\mathcal{M}(q) = \begin{bmatrix} (M + m_c) \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \Theta \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathcal{J} & \mathbf{0}_{3 \times 2} \\ \Theta^T & \mathbf{0}_{2 \times 3} & \Phi \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{8 \times 8},$$

$$\mathcal{C}(\dot{q}, q) = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \Upsilon \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 2} \\ \mathbf{0}_{2 \times 3} & \mathbf{0}_{2 \times 3} & \Psi \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{8 \times 8},$$

$$\mathcal{G}(\dot{q}, q) = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{2 \times 1} \\ g(M + m_c) \\ \mathbf{0}_{3 \times 1} \\ \mathcal{G}_\mu \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^8, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}e_3 & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 1} & \mathbf{I}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{2 \times 1} & \mathbf{0}_{2 \times 3} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{8 \times 4}, \quad \mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} u \\ \tau_\theta \\ \tau_\phi \\ \tau_\psi \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4,$$

con  $\mathbf{I}_{3 \times 3}$  siendo una matriz identidad unitaria,  $e_3 = [0 \ 0 \ 1]^T$ , y

$$\Theta = m_c l \begin{bmatrix} C_\alpha C_\beta & -S_\alpha S_\beta \\ C_\alpha S_\beta & S_\alpha C_\beta \\ -S_\alpha & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 2},$$

$$\Phi = \begin{bmatrix} m_c l^2 & 0 \\ 0 & m_c l S_\alpha^2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}, \quad \mathcal{G}_\mu = \begin{bmatrix} -m_c l g S_\alpha \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2,$$

$$\Upsilon = m_c l \begin{bmatrix} -(\dot{\alpha} S_\alpha C_\beta + \dot{\beta} C_\alpha S_\beta) & -(\dot{\alpha} C_\alpha S_\beta + \dot{\beta} S_\alpha C_\beta) \\ (\dot{\beta} C_\alpha C_\beta - \dot{\alpha} S_\alpha S_\beta) & (\dot{\alpha} C_\alpha C_\beta - \dot{\beta} S_\alpha S_\beta) \\ -\dot{\alpha} C_\alpha & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 2},$$

$$\Psi = m_c l^2 \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\beta} S_\alpha C_\alpha \\ \dot{\beta} S_\alpha C_\alpha & \dot{\alpha} S_\alpha C_\alpha \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2},$$

### 2.2.2 Modelo dinámico del cuadrirotor y péndulo invertido en el marco $X - Z$

Al igual que para el modelo del péndulo suspendido sobre el cuadrirotor, en esta sección se presenta el caso particular del modelo del péndulo invertido sobre el cuadrirotor en el espacio de dos dimensiones, es decir, en la marco  $X - Z$ .

En la figura 2.8 se muestra el diagrama de cuerpo libre del sistema del péndulo invertido sobre un cuadrirotor restringido al marco  $X - Z$ .

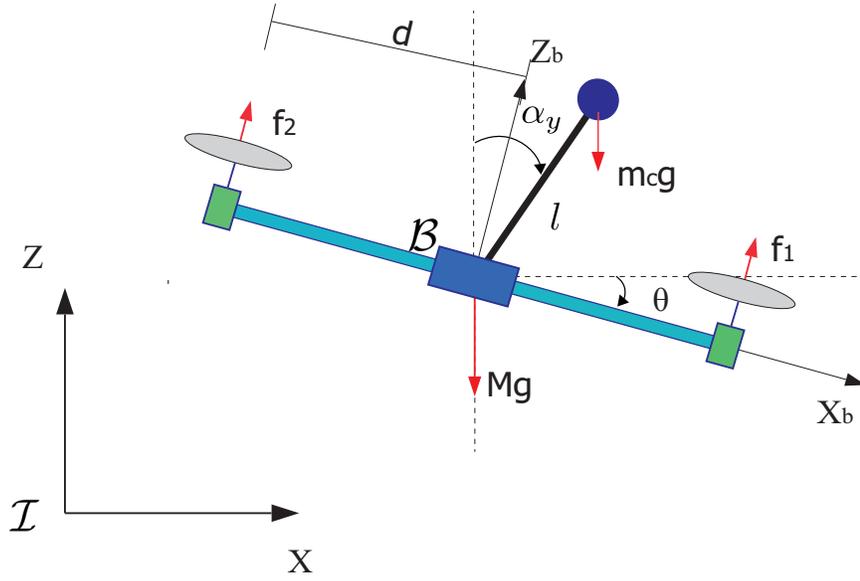


Figura 2.8: Cuadrirotor y péndulo invertido en el marco  $x - Z$ .

Definiendo  $\mathcal{I} = \{X, Z\}$  y  $\mathcal{B} = \{X_b, Z_b\}$  como los marcos de referencia inercial y en el cuerpo respectivamente, el vector de coordenadas generalizadas se define como  $\mathbf{q} = [x \ z \ \theta \ \alpha_y] \in \mathbb{R}^4$ ,  $f_1$  y  $f_2$  representan las fuerzas de empuje de los motores,  $\mathbf{u} = [f \ \tau_\theta \ 0]^T \in \mathbb{R}^4$  donde  $f = \mathbf{R}(-\theta)\mathbf{F} \in \mathbb{R}^2$ , donde  $\mathbf{F} = [0 \ u]^T \in \mathbb{R}^2$  y  $u = f_1 + f_2$ , y el par  $\tau = d(f_1 - f_2)$ ,  $\mathbf{R}(-\theta)$  es la matriz de rotación en sentido horario definida en (2.21), es decir, el vector de entradas de control se definen como  $\mathbf{u} = [u \cos \theta, u \sin \theta, \tau_\theta, 0]^T$ ,  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^4$ . Las coordenadas de la masa puntual del péndulo invertido se definen como  $x_p = x + l \cos \alpha_y$  y  $z_p = z + l \cos \alpha_y$ .

Definiendo el lagrangiano para el péndulo invertido sobre el cuadrirotor en dos dimensiones

$$L_{X-Z} = \frac{1}{2}M(\dot{x}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2}I_\theta\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m_c(\dot{x}_p^2 + \dot{z}_p^2) - Mgz - m_c g(z + l \cos \alpha_y). \quad (2.45)$$

Aplicando la ecuación de Euler-Lagrange deninida en (2.10) considerando (2.45) se obtiene el modelo dinámico del péndulo invertido en el plano  $X - Z$ ,

$$(M + m_c)\ddot{x} + m_c l \ddot{\alpha}_y \cos \alpha_y - m_c l \dot{\alpha}_y^2 \sin \alpha_y = u \sin \theta, \quad (2.46)$$

$$(M + m_c)(\ddot{z} + g) - m_c l \ddot{\alpha}_y \sin \alpha_y - m_c l \dot{\alpha}_y^2 \cos \alpha_y = u \cos \theta, \quad (2.47)$$

$$I_\theta \ddot{\theta} = \tau_\theta, \quad (2.48)$$

$$m_c l \ddot{x} \cos \alpha_y - m_c l \ddot{z} \sin \alpha_y + m_c l^2 \ddot{\alpha}_y - m_c g l \sin \alpha_y = 0. \quad (2.49)$$

Expresando el modelo dinámico anterior en forma matricial general dado por la expresión (2.27) donde los vectores y matrices se definen como,

$$\mathcal{M}(q) = \begin{bmatrix} M + m_c & 0 & 0 & m_c l \cos \alpha_y \\ 0 & M + m_c & 0 & -m_c l \sin \alpha_y \\ 0 & 0 & I_\theta & 0 \\ m_c l \cos \alpha_y & -m_c l \sin \alpha_y & 0 & m_c l^2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4},$$

$$\mathcal{C}(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -m_c l \dot{\alpha} \sin \alpha_y \\ 0 & 0 & 0 & -m_c l \dot{\alpha} \cos \alpha_y \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4},$$

$$\mathcal{G}(q) = \begin{bmatrix} 0 \\ (M + m_c)g \\ 0 \\ -m_c g l \sin \alpha_y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4.$$

### 2.2.3 Modelo dinámico del cuadrirotor y péndulo invertido en el marco $Y - Z$

Para el caso del péndulo invertido en el marco  $Y - Z$  se considera el diagrama de cuerpo libre mostrado en la figura 2.9. Definiendo el vector de coordenadas generalizadas como  $\mathbf{q} = [y \ z \ \phi \ \alpha_x] \in \mathbb{R}^4$ ,  $f_3$  y  $f_4$  representan las fuerzas de empuje de los motores, el vector de entradas de control se define como  $\mathbf{u} = [f \ \tau_\phi \ 0]^T \in \mathbb{R}^4$  donde  $f = \mathbf{R}(\phi)\mathbf{F} \in \mathbb{R}^2$ , donde  $\mathbf{F} = [0 \ u]^T \in \mathbb{R}^2$  y  $u = f_3 + f_4$ , y el par  $\tau = d(f_3 - f_4)$ ,  $\mathbf{R}(\phi)$  es la matriz de rotación en sentido antihorario definida en (2.28).

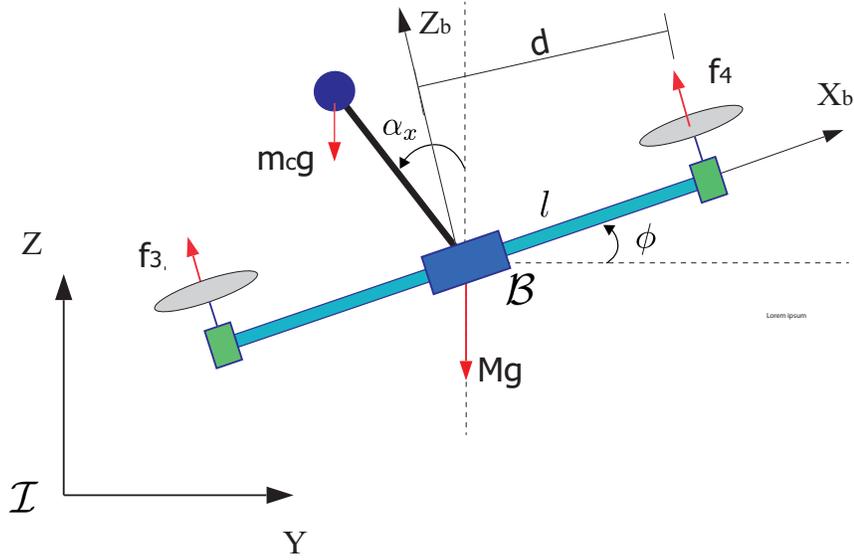


Figura 2.9: Cuadrirotor y péndulo invertido en el marco  $Y - Z$ .

El lagrangiano para el plano  $Y - Z$  se define como

$$L_{Y-Z} = \frac{1}{2}M(\dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2}I_\phi\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}m_c(\dot{y}_p^2 + \dot{z}_p^2) - Mgz - m_cg(z + l \cos \alpha_x). \quad (2.50)$$

Aplicando la ecuación de Euler-Lagrange definida en (2.10) considerando (2.45) se obtiene el modelo dinámico del péndulo invertido en el plano  $Y - Z$ ,

$$(M + m_c)\ddot{y} - m_cl\ddot{\alpha}_x \cos \alpha_x + m_cl\dot{\alpha}_x^2 \sin \alpha_x = -u \sin \phi, \quad (2.51)$$

$$(M + m_c)(\ddot{z} + g) - m_cl\ddot{\alpha}_x \sin \alpha_x - m_cl\dot{\alpha}_x^2 \cos \alpha_x = u \cos \phi, \quad (2.52)$$

$$I_\phi\ddot{\phi} = \tau_\phi, \quad (2.53)$$

$$-m_cl\ddot{y} \cos \alpha_x - m_cl\ddot{z} \sin \alpha_x + m_cl^2\ddot{\alpha}_x - m_cgl \sin \alpha_x = 0. \quad (2.54)$$

Expresando el modelo en el marco  $Y - Z$  en forma matricial general como en la expresión (2.27) donde los vectores y matrices se definen como,

$$\mathcal{M}(q) = \begin{bmatrix} M + m_c & 0 & 0 & -m_cl \cos \alpha_x \\ 0 & M + m_c & 0 & -m_cl \sin \alpha_x \\ 0 & 0 & I_\phi & 0 \\ -m_cl \cos \alpha_x & -m_cl \sin \alpha_x & 0 & m_cl^2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4},$$

$$\mathcal{C}(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & m_c l \dot{\alpha} \sin \alpha_x \\ 0 & 0 & 0 & -m_c l \dot{\alpha} \cos \alpha_x \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4},$$

$$\mathcal{G}(q) = \begin{bmatrix} 0 \\ (M + m_c)g \\ 0 \\ -m_c g l \sin \alpha_x \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4.$$

Es importante resaltar que ambos modelos matemáticos restringidos en los marcos  $X - Z$  y  $Y - Z$  pueden obtenerse a partir del modelo completo en tres dimensiones dados por las ecuaciones (2.36)-(2.43). Sin embargo para lograr esto se restringe en movimiento  $\psi = 0$ ,  $\beta = 0$ ,  $y = 0$  para el caso de la dinámica asociada al marco  $X - Z$ , mientras que  $\psi = 0$ ,  $\beta = \pi/2$ ,  $x = 0$  para la dinámica asociada al marco  $Y - Z$ .

## 2.3 Resumen de capítulo

En este capítulo se presentó el modelo dinámico del cuadrirotor con péndulo suspendido y el modelo dinámico cuadrirotor con péndulo invertido en el espacio de tres dimensiones. Ambos modelos se obtuvieron a partir del formalismo de Euler-Lagrange. Los modelos resultantes consisten en ocho ecuaciones diferenciales de segundo orden no lineales acopladas matricialmente. Por otra parte, se presentan modelos simplificados de ambos modelos dinámicos de tres dimensiones, es decir, los modelos de tres dimensiones se restringen a los marcos de referencia  $X - Z$  y  $Y - Z$  los cuales simplifican considerablemente el problema de control reduciendo a cuatro ecuaciones diferenciales no lineales acopladas para cada marco de referencia. Esto permite abordar la dinámica de guiñada independiente al modelo completo junto con la dinámica en altura como se mostrará más adelante en el diseño de las estrategias de control. Ambos modelos restringidos pueden obtenerse por dos vías, por medio del Euler-Lagrange o como un caso particular del modelo completo tridimensional.



# Capítulo 3

## Control del cuadrirotor y péndulo suspendido

En esta sección se presentan dos estrategias de control para estabilizar y controlar el sistema del cuadrirotor con carga suspendida para tres dimensiones, es decir, (1) control por realimentado y (2) control por modos deslizantes. Para controlar el sistema no lineal en tres dimensiones se consideran los modelos restringidos en los marcos  $X - Z$  y  $Y - Z$  obtenidos en la sección 2. Estos modelos se linealizan al rededor del punto de equilibrio obteniendo modelos simplificados permitiendo de esta manera diseñar estrategias de control simples y fácil de implementar. La estrategia de control se obtienen a partir de los modelos lineales asociados a los marcos  $X - Z$  y  $Y - Z$  de referencia (también llamados modelos de traslación horizontal) obteniendo los controles  $\tau_\theta$  y  $\tau_\phi$  que controlan tanto la dinámica rotacional, la dinámica de traslación horizontal del cuadrirotor, y a su vez controla de manera indirecta la dinámica de oscilación del péndulo. Mientras que, en control en altura y control en guiñada se obtienen a partir de modelos dinámicos de segundo orden, considerando que estas dos dinámicas están desacopladas del sistema original. Para lograr esto se demuestra que los modelos de traslación horizontal son controlables y además diferencialmente planos. Por otra parte, debido a que las maniobras del cuadrirotor se consideran suaves y cercanas a los puntos de equilibrio es posible inyectar las estrategias de control diseñadas a los modelos del cuadrirotor ya sea en su configuración de péndulo invertido o péndulo suspendido no lineales en tres dimensiones garantizando un esquema de seguimiento de trayectoria mientras las oscilaciones de la carga son atenuadas.

### 3.1 Sistema péndulo esférico suspendido y cuadrirotor en tres dimensiones

Se considera el sistema del péndulo suspendido dado por las expresiones (2.12)-(2.19), donde para desacoplar el sistema completo y reescribirlo en forma explícita se considera que la ecuación (2.20) se expresa como,

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathcal{M}(\mathbf{q})^{-1} [\mathbf{B}u - \mathcal{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} - \mathcal{G}(\mathbf{q})], \quad (3.1)$$

donde el sistema desacoplado se expresa como,

$$\ddot{x} = g_x(\phi, \theta, \psi, \alpha, \beta)u + f_x(\alpha, \beta, \dot{\alpha}, \dot{\beta}), \quad (3.2)$$

$$\ddot{y} = g_y(\phi, \theta, \psi, \alpha, \beta)u + f_y(\alpha, \beta, \dot{\alpha}, \dot{\beta}), \quad (3.3)$$

$$\ddot{z} = g_z(\phi, \theta, \psi, \alpha, \beta)u + f_z(\alpha, \beta, \dot{\alpha}, \dot{\beta}), \quad (3.4)$$

$$\ddot{\phi} = \frac{\tau_\phi}{I_\phi}, \quad (3.5)$$

$$\ddot{\theta} = \frac{\tau_\theta}{I_\theta}, \quad (3.6)$$

$$\ddot{\psi} = \frac{\tau_\psi}{I_\psi}, \quad (3.7)$$

$$\ddot{\alpha} = g_\alpha(\phi, \theta, \psi, \alpha, \beta)u + f_\alpha(\alpha, \dot{\alpha}), \quad (3.8)$$

$$\ddot{\beta} = g_\beta(\phi, \theta, \psi, \alpha, \beta)u + f_\beta(\alpha, \dot{\alpha}, \dot{\beta}), \quad (3.9)$$

donde,

$$g_x(\phi, \theta, \psi, \alpha, \beta) = \frac{(M + m_c - m_c S_\alpha^2 C_\beta^2) C_\phi S_\theta}{M(M + m_c)} + \frac{m_c C_\beta S_\beta S_\alpha^2 S_\phi}{M(M + m_c)} + \frac{m_c C_\alpha C_\beta S_\alpha C_\phi C_\theta}{M(M + m_c)}, \quad (3.10)$$

$$f_x(\alpha, \beta, \dot{\alpha}, \dot{\beta}) = \frac{m_c l (\dot{\beta}^2 S_\alpha^2 + \dot{\alpha}^2) C_\beta S_\alpha}{M + m_c}, \quad (3.11)$$

$$g_y(\phi, \theta, \psi, \alpha, \beta) = \frac{m_c S_\alpha C_\alpha S_\beta C_\phi C_\theta}{M(M + m_c)} - \frac{m_c C_\beta C_\alpha S_\beta C_\phi C_\theta}{M(M + m_c)} - \frac{(m_c C_\beta^2 + M + m_c S_\beta^2) S_\phi}{M(M + m_c)} \quad (3.12)$$

$$f_y(\alpha, \beta, \dot{\alpha}, \dot{\beta}) = -\frac{m_c l (\dot{\beta}^2 S_\alpha^2 - \dot{\alpha}^2) S_\beta S_\alpha}{M + m_c}, \quad (3.13)$$

$$g_z(\phi, \theta, \psi, \alpha, \beta) = \frac{m_c C_\alpha C_\beta S_\alpha C_\phi S_\theta}{M(M+m_c)} - \frac{m_c S_\alpha C_\alpha S_\beta S_\phi}{M(M+m_c)} + \frac{(m_c S_\alpha^2 + M) C_\phi C_\theta}{M(M+m_c)}, \quad (3.14)$$

$$f_z(\alpha, \beta, \dot{\alpha}, \dot{\beta}) = -\frac{m_c l \left( \dot{\beta}^2 C_\alpha S_\alpha^2 + \dot{\alpha}^2 C_\alpha \right) + (M+m_c)g}{M+m_c}, \quad (3.15)$$

$$g_\alpha(\phi, \theta, \psi, \alpha, \beta) = \frac{S_\beta C_\alpha S_\phi - S_\alpha C_\phi C_\theta - C_\beta C_\alpha C_\phi S_\theta}{Ml}, \quad (3.16)$$

$$f_\alpha(\alpha, \dot{\beta}) = \dot{\beta}^2 C_\alpha S_\alpha, \quad (3.17)$$

$$g_\beta(\phi, \theta, \psi, \alpha, \beta) = \frac{S_\beta C_\phi S_\theta + C_\beta S_\phi}{Ml S_\alpha}, \quad (3.18)$$

$$f_\beta(\alpha, \dot{\alpha}, \dot{\beta}) = -\frac{2\dot{\alpha}\dot{\beta}C_\alpha}{S_\alpha}, \quad (3.19)$$

Para lograr traslación de una carga suspendida en un cuadrirotor usando un esquema de seguimiento de trayectoria, es necesario controlar el conjunto de ecuaciones dado por (2.20). Se introduce la siguiente suposición para simplificar el problema de control.

**Suposición 1** *La dinámica de altura y la dinámica de guiñada están desacopladas del sistema.*

**Suposición 2** *El sistema se considera simétrico y se puede abordar de manera similar en el marco  $X - Z$  y  $Y - Z$ .*

**Suposición 3** *Los movimientos de rotación en los ángulos de Euler de alabeo y cabeceo están en  $0 < \theta, \phi < \pi/2$ .*

## 3.2 Dinámica lateral

Bajo la suposición 1, el movimiento de traslación horizontal se puede restringir al marco  $X - Z$  y  $Y - Z$ , por tanto, el modelo dado por las expresiones (2.30)-(2.33) en el marco  $X - Z$  se expresa de manera explícita como

$$\ddot{q} = \mathcal{M}(q)^{-1} [\mathbf{u} - \mathcal{C}(q, \dot{q})\dot{q} - \mathcal{G}(q)], \quad (3.20)$$

es decir,

$$\ddot{x} = \left( \frac{(m_c \cos^2 \alpha_y + M) \sin \theta - m_c \cos \theta \cos \alpha_y \sin \alpha_y}{M(M + m_c)} \right) u_x - \frac{m_c l \dot{\alpha}_y^2 \sin \alpha_y}{M + m_c}, \quad (3.21)$$

$$\ddot{z} = \left( \frac{(M + m_c \sin^2 \alpha_y) \cos \theta - m_c \sin \theta \sin \alpha_y \cos \alpha_y}{M(M + m_c)} \right) u_x - \frac{m_c l \dot{\alpha}_y^2 \cos \alpha_y + (M + m_c)g}{M + m_c} \quad (3.22)$$

$$\ddot{\theta} = \frac{\tau_\theta}{I_\theta}, \quad (3.23)$$

$$\ddot{\alpha}_y = \left( \frac{\sin \theta \cos \alpha_y - \cos \theta \sin \alpha_y}{Ml} \right) u_x, \quad (3.24)$$

mientras que para el marco de referencia  $Y - Z$ , se tiene

$$\ddot{y} = \left( \frac{m_c \cos \alpha_x \cos \phi \sin \alpha_x - (m_c \cos^2 \alpha_x + M) \sin \phi}{M(M + m_c)} \right) u_y + \frac{m_c l \dot{\alpha}_x^2 \sin \alpha_x}{M + m_c}, \quad (3.25)$$

$$\ddot{z} = \left( \frac{(M + m_c \sin^2 \alpha_x) \cos \phi - m_c \sin \phi \sin \alpha_x \cos \alpha_x}{M(M + m_c)} \right) u_y - \frac{m_c l \dot{\alpha}_x^2 \cos \alpha_x + (M + m_c)g}{M + m_c} \quad (3.26)$$

$$\ddot{\phi} = \frac{\tau_\phi}{I_\phi}, \quad (3.27)$$

$$\ddot{\alpha}_x = \left( \frac{\sin \phi \cos \alpha_x - \cos \phi \sin \alpha_x}{Ml} \right) u_y. \quad (3.28)$$

El sistema anterior se puede reescribir en la siguiente forma,

$$\ddot{x} = g_x(\theta, \alpha_y)u_x + f_x(\theta, \alpha_y), \quad (3.29)$$

$$\ddot{z} = g_{z_x}(\theta, \alpha_y)u_x + f_{z_x}(\theta, \alpha_y), \quad (3.30)$$

$$\ddot{\theta} = g_\theta(\theta)\tau_\theta, \quad (3.31)$$

$$\ddot{\alpha} = g_{\alpha_y}(\theta, \alpha_y)u_x, \quad (3.32)$$

donde

$$f_x(\alpha_y, \dot{\alpha}_y) = -\frac{m_c l \dot{\alpha}_y^2 \sin \alpha_y}{M + m_c}, \quad (3.33)$$

$$g_x(\phi, \alpha_y) = \left( \frac{(m_c \cos^2 \alpha_y + M) \sin \theta - m_c \cos \theta \cos \alpha_y \sin \alpha_y}{M(M + m_c)} \right), \quad (3.34)$$

$$f_{z_x}(\alpha_y, \dot{\alpha}_y) = -\frac{m_c l \dot{\alpha}_y^2 \cos \alpha_y + (M + m_c)g}{M + m_c}, \quad (3.35)$$

$$g_{z_x}(\phi, \alpha_y) = \left( \frac{(M + m_c \sin^2 \alpha_y) \cos \theta - m_c \sin \theta \sin \alpha_y \cos \alpha_y}{M(M + m_c)} \right), \quad (3.36)$$

$$g_\phi(\phi) = \frac{1}{I_\phi}, \quad (3.37)$$

$$g_{\alpha_y}(\phi, \alpha_y) = \left( \frac{\sin \theta \cos \alpha_y - \cos \theta \sin \alpha_y}{Ml} \right). \quad (3.38)$$

Haciendo el siguiente cambio de variable,  $x_1 = x$ ,  $x_2 = \dot{x}_1$ ,  $x_3 = z$ ,  $x_4 = \dot{x}_3$ ,  $x_5 = \theta$ ,  $x_6 = \dot{x}_5$ ,  $x_7 = \alpha$ ,  $x_8 = \dot{x}_7$ , el sistema anterior se puede reescribir como,

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad (3.39)$$

$$\dot{x}_2 = g_x(\phi, \alpha_y)u_x + f_x(\alpha_y, \dot{\alpha}_y), \quad (3.40)$$

$$\dot{x}_3 = x_4 \quad (3.41)$$

$$\dot{x}_4 = g_{z_x}(\phi, \alpha_y)u_x + f_{z_x}(\alpha_y, \dot{\alpha}_y), \quad (3.42)$$

$$\dot{x}_5 = x_6 \quad (3.43)$$

$$\dot{x}_6 = g_\phi(\phi)\tau_\phi, \quad (3.44)$$

$$\dot{x}_7 = x_8 \quad (3.45)$$

$$\dot{x}_8 = g_{\alpha_y}(\phi, \alpha_y)u_x. \quad (3.46)$$

Entonces, el sistema anterior se puede escribir de manera general como

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}_x(t)), \quad (3.47)$$

donde  $\dot{\mathbf{x}} = [\dot{x}_1 \ \dot{x}_2 \ \dot{x}_3 \ \dot{x}_4 \ \dot{x}_5 \ \dot{x}_6 \ \dot{x}_7 \ \dot{x}_8]^T \in \mathbb{R}^8$ , mientras que  $\mathbf{u}_x = [u_x \ \tau_\phi]^T \in \mathbb{R}^2$ .

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}_x) = \begin{pmatrix} x_2 \\ g_x(\theta, \alpha_y)u_x + f_x(\alpha_y, \dot{\alpha}_y) \\ x_4 \\ g_z(\theta, \alpha_y)u_x + f_z(\alpha_y, \dot{\alpha}_y) \\ x_6 \\ g_\theta(\theta)\tau_\theta \\ x_8 \\ g_{\alpha_y}(\theta, \alpha_y)u \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^8. \quad (3.48)$$

De manera similar, se puede obtener para la dinámica de traslación en el marco  $Y - Z$ , es decir,

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{y}(t), \mathbf{u}_y(t)), \quad (3.49)$$

donde  $\dot{\mathbf{y}} = [\dot{y}_1 \ \dot{y}_2 \ \dot{y}_3 \ \dot{y}_4 \ \dot{y}_5 \ \dot{y}_6 \ \dot{y}_7 \ \dot{y}_8]^T \in \mathbb{R}^8$ , mientras que  $\mathbf{u}_y = [u_y \ \tau_\theta]^T \in \mathbb{R}^2$ .

$$\mathbf{f}(\mathbf{y}(t), \mathbf{u}_y) = \begin{pmatrix} y_2 \\ g_y(\phi, \alpha_x)u_y + f_y(\alpha_x, \dot{\alpha}_x) \\ y_4 \\ g_{z_y}(\phi, \alpha_x)u_y + f_{z_y}(\alpha_x, \dot{\alpha}_x) \\ y_6 \\ g_\theta(\phi)\tau_\phi \\ y_8 \\ g_{\alpha_x}(\phi, \alpha_x)u_y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^8, \quad (3.50)$$

donde

$$f_y(\alpha_x, \dot{\alpha}_x) = \frac{m_c l \dot{\alpha}_x^2 \sin \alpha_x}{M + m_c}, \quad (3.51)$$

$$g_y(\theta, \alpha_x) = \frac{m_c \cos \alpha_x \cos \phi \sin \alpha_x - (m_c \cos^2 \alpha_x + M) \sin \phi}{M(M + m_c)}, \quad (3.52)$$

$$f_{z_y}(\alpha_x, \dot{\alpha}_x) = -\frac{m_c l \dot{\alpha}_x^2 \cos \alpha_x + (M + m_c)g}{M + m_c}, \quad (3.53)$$

$$g_{z_y}(\theta, \alpha_x) = \frac{(M + m_c \sin^2 \alpha_x) \cos \phi - m_c \sin \phi \sin \alpha_x \cos \alpha_x}{M(M + m_c)}, \quad (3.54)$$

$$g_\theta(\phi) = \frac{1}{I_\phi}, \quad (3.55)$$

$$g_{\alpha_x}(\theta, \alpha_x) = \frac{\sin \phi \cos \alpha_x - \cos \phi \sin \alpha_x}{Ml}. \quad (3.56)$$

### 3.2.1 Linealización tangencial aproximada

Considerando el sistema no lineal expresado por (3.47) y aproximando  $\mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}_x(t))$  por una expansión en series de Taylor al rededor del punto de equilibrio  $x(t) = \bar{x}$ ,  $z(t) = \bar{z}$ ,  $\theta(t) = 0$ ,  $\alpha_y(t) = 0$  para  $u_x(t) = \bar{u}_x = (M + m_c)g$  y  $\tau_\theta = 0$ , para la dinámica de traslación en el marco inercial  $X - Z$ , se obtiene el sistema lineal en espacio de estado,

$$\dot{\mathbf{x}}_\delta = \mathbf{A}\mathbf{x}_\delta + \mathbf{B}\mathbf{u}_\delta, \quad (3.57)$$

donde  $\dot{\mathbf{x}}_\delta = [x_\delta \ \dot{x}_\delta \ z_\delta \ \dot{z}_\delta \ \theta_\delta \ \dot{\theta}_\delta \ \alpha_{y\delta} \ \dot{\alpha}_{y\delta}]^T \in \mathbb{R}^8$  cuyas variables incrementales se definen como  $x_\delta = x - \bar{x}$ ,  $z_\delta = z - \bar{z}$ ,  $\theta_\delta = \theta$ ,  $\alpha_{y\delta} = \alpha_y$ ,  $u_\delta = u - \bar{u}$  y  $\tau_\delta = \tau$ , y además,

$$\mathbf{A} = \left. \frac{d\mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}_x(t))}{d\mathbf{x}} \right|_{\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}}} \quad (\dim(\mathbf{A}) = 8 \times 8), \quad (3.58)$$

$$\mathbf{B} = \left. \frac{d\mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}_x(t))}{d\mathbf{u}} \right|_{\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}}} \quad (\dim(\mathbf{A}) = 8 \times 2), \quad (3.59)$$

es decir,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{g(M+m_c)}{M} & 0 & -\frac{gm_c}{M} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{g(M+m_c)}{Ml} & 0 & -\frac{g(M+m_c)}{Ml} & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.60)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{M+m_c} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{I_\theta} & 0 & 0 \end{bmatrix}^T, \quad (3.61)$$

y

$$\mathbf{u}_\delta = \begin{bmatrix} u_\delta = u_1 - \bar{u}_1 \\ \tau_\delta = \tau \end{bmatrix}. \quad (3.62)$$

Por otra parte, el modelo lineal para la dinámica de traslación en el marco de referencia inercial  $X - Z$  también se puede expresar como sigue,

$$\ddot{x}_\delta = \frac{(M + m_c)g\theta_\delta - m_c g\alpha_{y\delta}}{M}, \quad (3.63)$$

$$\ddot{z}_\delta = \frac{u_{x\delta}}{M + m_c}, \quad (3.64)$$

$$\ddot{\theta}_\delta = \frac{\tau_{\theta\delta}}{I_\theta}, \quad (3.65)$$

$$\ddot{\alpha}_{y\delta} = \frac{(M + m_c)g}{Ml}(\theta_\delta - \alpha_{y\delta}), \quad (3.66)$$

De manera similar, para el marco inercial  $Y - Z$ , el punto de equilibrio se elige como  $(y(t), z(t), \phi(t), \alpha_y(t)) = (\bar{y}, \bar{z}, 0, 0)$  para  $u_y(t) = \bar{u} = (M + m_c)g$  y  $\tau_\phi = 0$ , con  $\bar{y}$  y  $\bar{z}$  siendo constantes reales positivas. Por lo tanto, el modelo linealizado tangente en el marco inercial  $Y - Z$  se expresa como

$$\ddot{y}_\delta = \frac{m_c g\alpha_{x\delta} - (M + m_c)g\phi_\delta}{M}, \quad (3.67)$$

$$\ddot{z}_\delta = \frac{u_{y\delta}}{M + m_c}, \quad (3.68)$$

$$\ddot{\phi}_\delta = \frac{\tau_{\phi\delta}}{I_\phi}, \quad (3.69)$$

$$\ddot{\alpha}_{x\delta} = \frac{(M + m_c)g}{Ml}(\phi_\delta - \alpha_{x\delta}), \quad (3.70)$$

donde las variables incrementales se definen como  $y_\delta = y - \bar{y}$ ,  $\phi_\delta = \phi - 0$  y  $\alpha_{x\delta} = \alpha_x - 0$ .

### 3.2.2 Parametrización diferencial

Un sistema es diferencial plano si existe un conjunto de salidas tal que las entradas y estados del sistema pueden expresarse como funciones suaves de las salidas planas y de sus derivadas de mayor orden [9].

Basado de la suposición 2 a continuación se muestra el proceso de parametrización diferencial en la dinámica de traslación asociada al marco inercial  $X - Z$ , y la dinámica de traslación en el marco  $Y - Z$ . Para definir la salida plana del sistema linealizado, se obtiene la matriz de controlabilidad. La matriz de controlabilidad del sistema está dada por una disposición matricial de la forma  $\mathcal{C} = [b_1 \ Ab_1 \dots \ A^7 b_1 \ b_2 \ Ab_2 \dots \ A^7 b_2]$ , donde  $b_1$  y  $b_2$  representa columnas de la matriz  $\mathbf{B}$ , es decir,  $\mathbf{B} = [b_1 \ b_2]$ . Para los sistemas asociados a los marcos  $X - Z$  y  $Y - Z$ , el rango de la matriz de controlabilidad  $\mathcal{C}$  es ocho, por tanto, el sistema (3.57) es controlable y diferencial plano [43]

Los índices de Kronecker de la entrada incremental  $u_\delta$  y  $\tau_\delta$ , corresponden a la matriz de controlabilidad elegida  $\mathcal{C}$ , y están respectivamente, dados por  $\gamma_1 = 2$  y  $\gamma_2 = 6$ . La inversa de la matriz  $\mathcal{C}$  determina que las salidas planas están dadas por

$$\mathcal{F} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathcal{C}^{-1} \mathbf{x}, \quad (3.71)$$

es decir,

$$\mathcal{L} = (M + m_c) z_\delta, \quad (3.72)$$

$$\mathcal{F}_x = \frac{I_\phi M l}{g^2 (M + m_c)} (x_\delta - l \alpha_y). \quad (3.73)$$

Se puede definir un factor proporcional  $\gamma_1 = (M + m_c)$  y  $\gamma_2 = \frac{I_\phi M l}{g^2 (M + m_c)}$  de tal manera que

$$\mathcal{F}_{x\gamma} = \gamma_2 (x_\delta - l \alpha_y), \quad (3.74)$$

$$\mathcal{L}_\gamma = \gamma_1 z, \quad (3.75)$$

sustituyendo los estados del sistema en asociado al marco inercial  $X - Z$  entonces se puede elegir salidas planas como

$$\mathcal{F}_x = x_\delta - l \alpha_{y\delta}, \quad (3.76)$$

$$\mathcal{L} = z_\delta. \quad (3.77)$$

Por otra parte, repitiendo el mismo proceso para la dinámica de traslación respecto del marco inercial  $Y - Z$  se tiene que las salidas planas son,

$$\mathcal{F}_y = y_\delta + l \alpha_{x\delta}, \quad (3.78)$$

$$\mathcal{L} = z_\delta. \quad (3.79)$$

donde los factores proporcionales quedan como  $\gamma_1 = (M + m_c)$  y  $\gamma_2 = \frac{I_\phi M l}{g^2 (M + m_c)}$ .

De hecho, todas las variables del sistema pueden parametrizarse en términos de  $\mathcal{F}_x$ ,  $\mathcal{F}_y$  y  $\mathcal{L}$ , y un número finito de sus derivadas respecto del tiempo. Notar que la salida plana  $\mathcal{F}_x$  y  $\mathcal{F}_y$  puede interpretarse como la proyección de la masa de la carga suspendida en sus respectivos marcos de referencia inercial de dos dimensiones.

Dado que las entradas de control  $u_{x\delta}$  y  $u_{y\delta}$  solo tiene efecto en la altura, es decir, en la dinámica en  $z$ . La dinámica de traslación horizontal en el marco  $X - Z$  puede expresarse como

$$\begin{aligned} x_\delta &= \mathcal{F}_x + \frac{l}{g} \ddot{\mathcal{F}}_x, & \dot{x}_\delta &= \dot{\mathcal{F}}_x + \frac{l}{g} \mathcal{F}_x^{(3)}, & \alpha_{y\delta} &= \frac{1}{g} \ddot{\mathcal{F}}_x, \\ \dot{\alpha}_{y\delta} &= \frac{1}{g} \mathcal{F}_x^{(3)}, & \theta_\delta &= \frac{M l}{g^2 (M + m_c)} \mathcal{F}_x^{(4)} + \frac{1}{g} \ddot{\mathcal{F}}_x, \\ \dot{\theta}_\delta &= \frac{M l}{g^2 (M + m_c)} \mathcal{F}_x^{(5)} + \frac{1}{g} \mathcal{F}_x^{(3)}, & \tau_{\theta\delta} &= \frac{I_\theta M l}{g^2 (M + m_c)} \mathcal{F}_x^{(6)} + \frac{I_\theta}{g} \mathcal{F}_x^{(4)} \end{aligned}$$

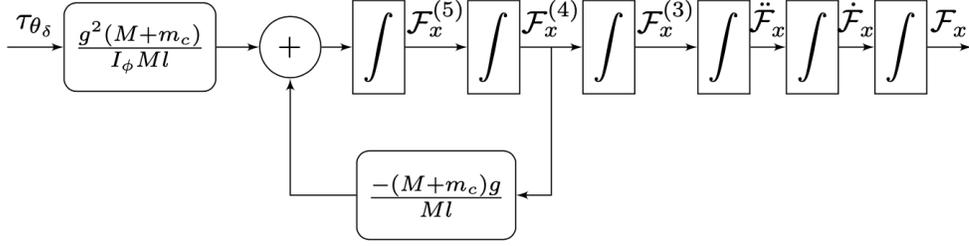


Figura 3.1: Representación en cascada de la salida plana  $\mathcal{F}_x$  asociada a la dinámica de traslación en el marco inercial  $X - Z$ .

La salida auxiliar (3.76) se puede parametrizar completamente en términos de las variables del sistema y sus derivadas con respecto al tiempo como:

$$\mathcal{F}_x = x_\delta + l\alpha_{y\delta}, \quad (3.80)$$

$$\dot{\mathcal{F}}_x = \dot{x}_\delta + l\dot{\alpha}_{y\delta}, \quad (3.81)$$

$$\ddot{\mathcal{F}}_x = -g\alpha_{y\delta}, \quad (3.82)$$

$$\mathcal{F}_x^{(3)} = -g\dot{\alpha}_{y\delta}, \quad (3.83)$$

$$\mathcal{F}_x^{(4)} = \frac{g^2(M+m_c)}{Ml}(\theta_\delta - \alpha_{y\delta}), \quad (3.84)$$

$$\mathcal{F}_x^{(5)} = \frac{g^2(M+m_c)}{Ml}(\dot{\theta}_\delta - \dot{\alpha}_{y\delta}), \quad (3.85)$$

$$\mathcal{F}_x^{(6)} = \frac{g^2(M+m_c)}{I_\theta M l}\tau_{\theta_\delta} - \frac{g(M+m_c)}{Ml}\mathcal{F}_x^{(4)}. \quad (3.86)$$

Este resultado muestra que la dinámica de traslación horizontal en el marco  $X - Z$  tiene grado relativo seis, es decir, la sexta derivada de la salida plana exhibe la entrada de control asociada a los pares generados por los motores relacionados al ángulo de Euler  $\theta$ . En la figura 3.1 se muestra una diagrama de bloques ilustrando la expresión (3.86).

Por otro lado, la salida plana (3.78) asociado al marco  $Y - Z$  muestra una estructura similar a la dinámica horizontal de traslación en  $X - Z$ . Considerando la salida plana definida en (3.78) y el modelo lineal dado por el conjunto de ecuaciones (3.67)-(3.70), todas las variables exhiben la siguiente relación

$$\begin{aligned} y_\delta &= \mathcal{F}_y + \frac{l}{g}\ddot{\mathcal{F}}_y, & \dot{y}_\delta &= \dot{\mathcal{F}}_y + \frac{l}{g}\dot{\mathcal{F}}_y^{(3)}, & \alpha_{x_\delta} &= -\frac{1}{g}\ddot{\mathcal{F}}_y, \\ \dot{\alpha}_{x_\delta} &= -\frac{1}{g}\dot{\mathcal{F}}_y^{(3)}, & \phi_\delta &= -\frac{1}{g}\ddot{\mathcal{F}}_y - \frac{Ml}{g^2(M+m_c)}\mathcal{F}_y^{(4)}, \\ \tau_{\phi_\delta} &= -\frac{I_\phi M l}{g^2(M+m_c)}\mathcal{F}_y^{(6)} - \frac{I_\phi}{g}\mathcal{F}_y^{(4)}. \end{aligned}$$

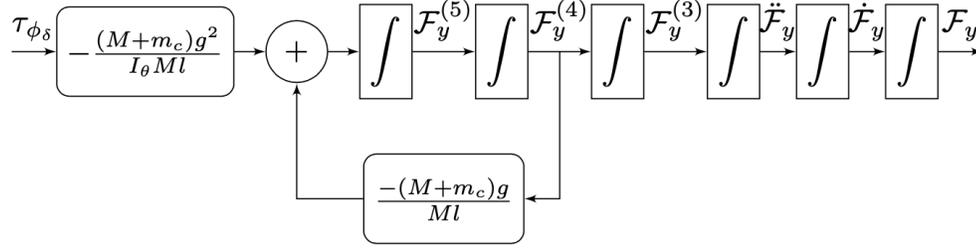


Figura 3.2: Representación en cascada de la salida plana  $\mathcal{F}_y$  asociada a la dinámica de traslación en el marco inercial  $Y - Z$ .

Parametrizando el sistema  $Y - Z$  completamente en términos de las variables y sus derivadas con respecto al tiempo, se tiene

$$\mathcal{F}_y = y_\delta + l\alpha_{x\delta}, \quad (3.87)$$

$$\dot{\mathcal{F}}_y = \dot{y}_\delta + l\dot{\alpha}_{x\delta}, \quad (3.88)$$

$$\ddot{\mathcal{F}}_y = -g\alpha_{x\delta}, \quad (3.89)$$

$$\mathcal{F}_y^{(3)} = -g\dot{\alpha}_{x\delta}, \quad (3.90)$$

$$\mathcal{F}_y^{(4)} = \frac{g^2(M + m_c)}{Ml}(\alpha_{x\delta} - \phi_\delta), \quad (3.91)$$

$$\mathcal{F}_y^{(5)} = \frac{g^2(M + m_c)}{Ml}(\dot{\alpha}_{x\delta} - \dot{\phi}_\delta), \quad (3.92)$$

$$\mathcal{F}_y^{(6)} = -\frac{g^2(M + m_c)}{I_\phi Ml}\tau_{\phi\delta} - \frac{g(M + m_c)}{Ml}\mathcal{F}_y^{(4)}. \quad (3.93)$$

En la figura 3.2 se ilustra un diagrama de bloques de la expresión (3.93).

Por otra parte, la salida plana asociada al movimiento vertical sobre el eje  $Z$ , queda expresado como

$$z_\delta = \mathcal{L}, \quad (3.94)$$

$$\dot{z}_\delta = \dot{\mathcal{L}}, \quad (3.95)$$

$$u_\delta = (M + m_c)\ddot{\mathcal{L}}. \quad (3.96)$$

La salida plana  $\mathcal{L}$  (ecuación (3.96)) y sus derivadas respecto del tiempo exhiben las siguientes relaciones:

$$\mathcal{L} = z_\delta, \quad (3.97)$$

$$\dot{\mathcal{L}} = \dot{z}_\delta, \quad (3.98)$$

$$\ddot{\mathcal{L}} = \frac{u_\delta}{M + m_c}. \quad (3.99)$$

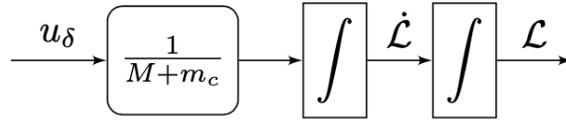


Figura 3.3: Representación en cascada de la salida plana  $\mathcal{L}$  asociada a la dinámica de altura.

En la figura 3.3 se muestra el diagrama de bloques de la dinámica vertical asociada a la salida plana  $\mathcal{L}$ .

### 3.3 Control realimentado

En la figura 3.4 se muestra un diagrama general del sistema de control del péndulo suspendido y un cuadrirotor en el espacio de tres dimensiones. El diagrama se observa las variables que realimentan en control compuestas por estados del sistema principalmente en la dinámica de altura y guiñada y las salidas auxiliares definidas por las salidas planas y sus derivadas. Finalmente, de la figura se observa las cuatro entradas de control asociadas a la fuerza de empuje de los motores y los controles relacionados con los pares en alabeo, cabeceo y guiñada.

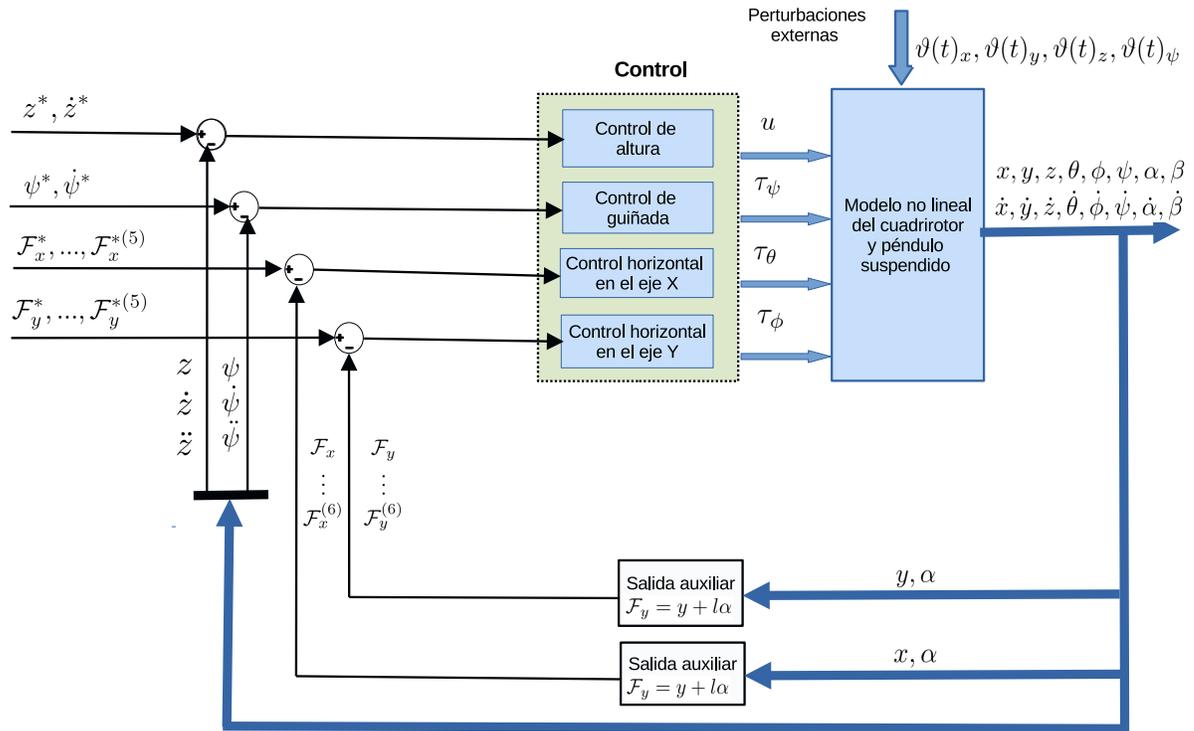


Figura 3.4: Diagrama del esquema del control general para el cuadricóptero y péndulo suspendido.

Para desarrollar una estrategia de control para la configuración del cuadricóptero y carga suspendida en el espacio de tres dimensiones, se sugiere establecer la siguiente secuencia jerárquica de control.

1. Controlar la dinámica en altura, es decir,  $z \rightarrow z^*(t)$ , aquí  $z^*(t)$  representa la trayectoria de seguimiento deseada en altura.
2. Controlar la dinámica rotacional de guiñada, es decir,  $\psi \rightarrow \psi^*(t)$ , aquí  $\psi^*(t)$  representa la trayectoria de seguimiento deseada guiñada.
3. Controlar la dinámica de rotacional de alabeo y cabeceo.
4. Mediante el control de la dinámica de rotación alabeo y cabeceo, controlar la dinámica de traslación horizontal del cuadricóptero.
5. A través de la dinámica de traslación horizontal del cuadricóptero, controlar la oscilación del péndulo suspendido.

Como se aprecia de la secuencia jerárquica de control definida anteriormente, la dinámica de oscilación del péndulo suspendido se controla indirectamente a través de la dinámica de traslación horizontal, es decir, la dinámica de movimiento de traslación sobre los ejes  $X$  y  $Y$  del marco de referencia inercial, y esta a su vez es controlada indirectamente por la dinámica de rotación asociados a los ángulo de Euler, es decir, los ángulos de de alabeo y cabeceo donde se inyectan las leyes de control.

Por otra parte, se agregan funciones de perturbación externas desconocidas en los tres ejes de espacio cartesiano, es decir, en los ejes  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ , y una perturbación asociada a la dinámica rotacional en la dinámica de guiñada  $\psi$ . Debido a que la dinámica traslación depende de la dinámica rotacional, la perturbación inyectada en los ejes  $X$  y  $Y$  tiene efecto sobre la dinámica rotacional, es decir, en los ángulo de  $\phi$  y  $\theta$ . A continuación se considera la siguiente suposición asociada a las perturbaciones desconocidas externas.

**Suposición 4** *Las perturbaciones externas  $\vartheta_x(t)$ ,  $\vartheta_y(t)$ ,  $\vartheta_z(t)$  y  $\vartheta_\psi(t)$  son desconocidas, acotadas, continuas y diferenciables.*

Por otra parte, se introduce la siguiente suposición para las trayectorias deseadas de referencia.

**Suposición 5** *Todas las trayectorias deseadas de referencia se consideran continuas, suaves e infinitamente diferenciables.*

### 3.3.1 Control de altura

La dinámica en altura corresponde en la expresión (2.14) el cual es un sistema de segundo orden no lineal y considerando a la suposición 1, se puede introducir un término de perturbación desconocida externa  $\vartheta(t)_z$ , es decir,

$$\ddot{z} = g_z(\phi, \theta, \psi, \alpha, \beta)u + f_z(\alpha, \beta, \dot{\alpha}, \dot{\beta}) + \vartheta_z(t). \quad (3.100)$$

Haciendo el siguiente cambio de variable,  $u_z = g_z(\phi, \theta, \psi, \alpha, \beta)u$ , mientras que  $\varrho_z(t) = f_z(\alpha, \beta, \dot{\alpha}, \dot{\beta}) + \vartheta_z(t)$  como un término de perturbación interna y externa, donde  $f_z(\alpha, \beta, \dot{\alpha}, \dot{\beta})$  se define en (3.15), la dinámica en altura se puede reescribir como,

$$\ddot{z} = u_z + \varrho_z(t). \quad (3.101)$$

Los errores de seguimiento de trayectoria en altura se definen como  $e_z = z - z^*(t)$  y  $\ddot{e}_{u_z} = u_z - u_z^*$ , siendo  $z^*(t)$  la trayectoria deseada y  $u_z^* = \ddot{z}^*(t)$ . El sistema (3.100) se puede escribir en términos del error de seguimiento  $e_z$  como

$$\ddot{e}_z = e_{u_z} + \varrho_z(t), \quad (3.102)$$

donde el control por realimentación de estados puede definirse como,

$$e_{u_z} = -\lambda_1 \dot{e}_z - \lambda_0 e_z, \quad (3.103)$$

siendo  $k_0 > 0$  y  $k_1 > 0$  ganancias constantes reales positivas.

De (3.102) y (3.103), se deduce que el control que logra el seguimiento de la trayectoria en altura por realimentación de estados está dado por la siguiente expresión

$$u = \frac{\ddot{z}^*(t) + e_{u_z}}{g_z(\phi, \theta, \psi, \alpha, \beta)}. \quad (3.104)$$

### 3.3.2 Control de guiñada

Al igual que la dinámica en altura, la dinámica de guiñada corresponde a un sistema de segundo orden lineal y considerando la suposición 1, la dinámica de guiñada se considera en la ecuación (2.17), e inyectando un término de perturbación externa desconocida, el sistema se puede escribir en la siguiente forma,

$$\ddot{\psi} = \frac{\tau_\psi}{I_\psi} + \vartheta_\psi(t), \quad (3.105)$$

donde  $\vartheta_\psi(t)$  representa un término de perturbación desconocida externa que afecta la dinámica en guiñada del cuadrirotor. Definiendo los errores de seguimiento como  $e_\psi = \psi - \psi^*(t)$ , y  $\ddot{e}_{u_\psi} = u_\psi - u_\psi^*$ , siendo  $\psi^*(t)$  la trayectoria deseada. El sistema para la dinámica en guiñada adopta la siguiente forma,

$$\ddot{e}_{u_\psi} = e_{u_\psi} + \vartheta_\psi(t). \quad (3.106)$$

El control por realimentación de estado en guiñada se define como,

$$\tau_\psi = I_\psi(\ddot{\psi}^*(t) + e_{u_\psi}), \quad (3.107)$$

donde,

$$e_{u_\psi} = -\gamma_1 \dot{e}_\psi - \gamma_0 e_\psi. \quad (3.108)$$

### 3.3.3 Control de traslación horizontal

El control de traslación horizontal se realiza en los marcos de referencia inerciales  $X - Z$  y  $Y - Z$ , mediante las entradas de control  $\tau_\phi$  y  $\tau_\theta$ . De acuerdo al análisis mostrado previamente, la dinámica de traslación horizontal está gobernada por las ecuaciones (3.86) y (3.93). Sin embargo, debido a que el proceso de diseño de las estrategias de control para ambas dinámicas son iguales sólo se mostrará el análisis en la dinámica de traslación horizontal asociada al marco  $X - Z$ . La dinámica asociada al marco  $Y - Z$  solo se mostrará como resultado final.

Considerando el resultado mostrado en la expresión (3.86) e inyectando un término de perturbación externa desconocido  $\vartheta(t)_x$ , se tiene el siguiente sistema,

$$\mathcal{F}_x^{(6)} = u_{\mathcal{F}_x} + \varrho_x(t), \quad (3.109)$$

donde  $u_{\mathcal{F}_x} = \frac{g^2(M+m_c)}{I_\phi M l} \tau_{\phi_\delta}$ ,  $\varrho_x(t) = \vartheta_x(t) - \frac{g(M+m_c)}{Ml} \mathcal{F}_x^{(4)}$  para la dinámica en el marco  $X - Z$ . Para desarrollar la ley de control de seguimiento de trayectoria, el error se define como  $e_{\mathcal{F}_x} = \mathcal{F}_x - \mathcal{F}_x^*(t)$ , donde  $\mathcal{F}_x^*(t)$  es la trayectoria de referencia deseada para el marco  $X - Z$  siempre que se cumpla la suposición 5. Entonces, la dinámica del error de seguimiento  $e_{\mathcal{F}_x}$  se puede expresar como

$$e_{\mathcal{F}_x}^{(6)} = e_{u_{\mathcal{F}_x}}(t) + \varrho_x(t), \quad (3.110)$$

donde  $e_{u_{\mathcal{F}_x}} = u_{\mathcal{F}_x} - u_{\mathcal{F}_x}^*$  siendo  $u_{\mathcal{F}_x}^* = \mathcal{F}_x^{*(6)}(t)$ .

El control por realimentación para la dinámica del error de seguimiento se puede definir como

$$e_{u_{\mathcal{F}_x}} = -k_5 e_{\mathcal{F}_x}^{(5)} - k_4 e_{\mathcal{F}_x}^{(4)} - k_3 e_{\mathcal{F}_x}^{(3)} - k_2 \ddot{e}_{\mathcal{F}_x} - k_1 \dot{e}_{\mathcal{F}_x} - k_0 e_{\mathcal{F}_x}. \quad (3.111)$$

De este resultado se obtiene que para un esquema de control de seguimiento de trayectoria en el marco inercial  $X - Z$ , se tiene que

$$\begin{aligned} \tau_\theta = & \frac{I_\theta M l}{g^2(M + m_c)} \{ \mathcal{F}_x^{*(6)} - k_5(\mathcal{F}_x^{(5)} - \mathcal{F}_x^{*(5)}) - k_4(\mathcal{F}_x^{(4)} - \mathcal{F}_x^{*(4)}) \\ & - k_3(\mathcal{F}_x^{(3)} - \mathcal{F}_x^{*(3)}) - k_2(\ddot{\mathcal{F}}_x - \ddot{\mathcal{F}}_x^*) - k_1(\dot{\mathcal{F}}_x - \dot{\mathcal{F}}_x^*) - k_0(\mathcal{F}_x - \mathcal{F}_x^*) \}. \end{aligned} \quad (3.112)$$

Mientras que la ley de control por realimentación de estados para la dinámica de traslación horizontal en el marco  $Y - Z$  esta dada por

$$\begin{aligned} \tau_\phi = & -\frac{I_\phi M l}{g^2(M + m_c)} \{ \mathcal{F}_y^{*(6)} - k_5(\mathcal{F}_y^{(5)} - \mathcal{F}_y^{*(5)}) - k_4(\mathcal{F}_y^{(4)} - \mathcal{F}_y^{*(4)}) \\ & - k_3(\mathcal{F}_y^{(3)} - \mathcal{F}_y^{*(3)}) - k_2(\ddot{\mathcal{F}}_y - \ddot{\mathcal{F}}_y^*) - k_1(\dot{\mathcal{F}}_y - \dot{\mathcal{F}}_y^*) - k_0(\mathcal{F}_y - \mathcal{F}_y^*) \}. \end{aligned} \quad (3.113)$$

### 3.4 Análisis de convergencia

Con base en las estructuras de control desarrolladas en las subsecciones 3.3.1, 3.3.2 y 3.3.3, se puede estudiar el comportamiento del error de seguimiento del sistema realimentado. Para este fin, se propone el siguiente teorema.

**Teorema 1** *Considere los controladores dados por las ecuaciones (3.104), (3.107), (3.112) y (3.113), y tomando en cuenta las suposiciones 1, 2, 3 y 4. Entonces, todas las trayectorias*

de los errores de seguimiento  $e_z$ ,  $e_\psi$ ,  $e_{\mathcal{F}_x}$ ,  $e_{\mathcal{F}_y}$  y sus derivadas respecto del tiempo, convergen globalmente hacia una esfera de radio tan pequeño como se desee, siempre que los coeficientes constantes  $\lambda_0$ ,  $\lambda_1$ ,  $\gamma_0$ ,  $\gamma_1$ ,  $k_0$ ,  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $k_3$ ,  $k_4$  y  $k_5$  de los polinomios (3.114), (3.115) y (3.116) se eligen de modo que, para un número  $\mathcal{N} > 0$ , los polinomios  $q_1(p)$ ,  $q_2(p)$  y  $q_3(p)$  exhiben todas sus raíces a la izquierda de la línea  $\{p \in \mathbb{C} \mid \text{Re}(p) \leq -\mathcal{N}\}$  en el plano complejo  $\mathbb{C}$ .

$$q_1(p) = p^2 + \lambda_1 p + \lambda_0, \quad (3.114)$$

$$q_2(p) = p^2 + \gamma_1 p + \gamma_0, \quad (3.115)$$

$$q_3(p) = p^6 + k_5 p^5 + k_4 p^4 + k_3 p^3 + k_2 p^2 + k_1 p + k_0. \quad (3.116)$$

**Prueba 1** Sea  $\mathbf{e}_x$  los errores de seguimiento de trayectoria y sus derivadas respecto del tiempo, es decir,  $\mathbf{e}_x = (e_z \dot{e}_z)^T$  o  $\mathbf{e}_x = (e_\psi \dot{e}_\psi)^T$ , para la dinámica de altura y guiñada, y  $\mathbf{e}_x = (e_{\mathcal{F}} e_{\mathcal{F}}^{(1)} e_{\mathcal{F}}^{(2)} e_{\mathcal{F}}^{(3)} e_{\mathcal{F}}^{(4)} e_{\mathcal{F}}^{(5)})^T$  para la dinámica horizontal representada por la parametrización de las salidas planas, donde  $e_{\mathcal{F}}$  puede elegirse como  $e_{\mathcal{F}_x}$  o  $e_{\mathcal{F}_y}$  y  $\varrho(t)$  representa las perturbaciones. Entonces, la dinámica del error de seguimiento del sistema en lazo cerrado se puede escribir en una forma generalizada como

$$\dot{\mathbf{e}}_x = \mathbf{A}_e \mathbf{e}_x + \mathbf{B}_e \varrho(t), \quad (3.117)$$

donde

$$\mathbf{A}_e = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\lambda_0 & -\lambda_1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_e = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (3.118)$$

corresponde con la dinámica del error de seguimiento de altura y

$$\mathbf{A}_e = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\gamma_0 & -\gamma_1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_e = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (3.119)$$

corresponde para la dinámica del error de seguimiento de guiñada, y

$$\mathbf{A}_e = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -k_0 & -k_1 & -k_2 & -k_3 & -k_4 & -k_5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_e = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (3.120)$$

corresponde para la dinámica del error de seguimiento horizontal, donde  $\mathcal{F}$  puede tomar el valor de  $\mathcal{F}_x$  o  $\mathcal{F}_y$ .

Dado que la matriz  $\mathbf{A}_e$  definida por (3.118), (3.119) o (3.120) son Hurwitz, existe una matriz definida positiva simétrica real  $\mathbf{P}_e$  tal que es una solución a la ecuación de Lyapunov

$$\mathbf{P}_e \mathbf{A}_e + \mathbf{A}_e^T \mathbf{P}_e = -\mathbf{Q}_e, \quad (3.121)$$

para una matriz definida positiva simétrica real  $\mathbf{Q}_e$  dada. Se propone la siguiente función candidata de Lyapunov.

$$V_e = \frac{1}{2} \mathbf{e}_x^T \mathbf{P}_e \mathbf{e}_x, \quad (3.122)$$

cuya derivada respecto del tiempo a lo largo de la dinámica (3.158) está dada por

$$\dot{V}_e = -\mathbf{e}_x^T (\mathbf{P}_e \mathbf{A}_e + \mathbf{A}_e^T \mathbf{P}_e) \mathbf{e}_x + \mathbf{e}_x^T \mathbf{P}_e \mathbf{B}_e \varrho(t), \quad (3.123)$$

$$\dot{V}_e \leq -\|\mathbf{e}_x\|^2 \|\mathbf{P}_e\| |R_e(\sigma_{\max}(\mathbf{A}_e))| + K \|\mathbf{e}_x\| \|\mathbf{P}_e\|. \quad (3.124)$$

Esto satisface que

$$\dot{V}_e \leq -\|\mathbf{e}_x\| \|\mathbf{P}_e\| (|R_e(\sigma_{\max}(\mathbf{A}_e))| \|\mathbf{e}_x\| - K). \quad (3.125)$$

Esta función es estrictamente negativa en cualquier lugar fuera de la esfera

$$S(0, \rho) = \left\{ \|\mathbf{e}_x\| \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{e}_x\| \leq \rho = \frac{K}{|R_e(\sigma_{\max}(\mathbf{A}_e))|} \leq \frac{K}{\mathcal{N}} \right\}. \quad (3.126)$$

Todas las trayectorias  $\mathbf{e}_x$  que inician fuera de la esfera  $S(0, \rho)$  convergen hacia el interior de ésta, y todas las trayectorias que inician dentro de la esfera  $S(0, \rho)$  permanecen dentro de dicha esfera de convergencia.  $\square$

### 3.5 Control por modos deslizantes

En esta sección se presenta una estrategia de control basada en modos deslizantes para controlar el sistema completo (cuadrirotor y péndulo suspendido en tres dimensiones). Se utiliza la misma estrategia jerárquica descrita en la sección 3.3 y además se consideran las suposiciones 4 y 5. La estrategia de control basada en modos deslizantes es una estrategia de control robusta ante perturbaciones debido a la naturaleza discontinua del control, también permite convergencia en tiempo finito el cual se calcula en el análisis para las cuatro leyes de control que se diseñan para el cuadrirotor. Adicionalmente, se presenta un análisis de convergencia de los errores de seguimiento de trayectoria. Finalmente, la figura 3.4 puede usarse para ilustrar el esquema de control general para el cuadrirotor en el espacio de tres dimensiones.

### 3.5.1 Control por modos deslizantes de altitud

Considerando la dinámica de traslación vertical del sistema, dado por la expresión (3.101) y la dinámica del error de seguimiento (3.102).

La idea principal del control de modo deslizante es modificar la dinámica del sistema aplicando una entrada de control de realimentación discontinua que obliga al sistema a deslizarse sobre una superficie predefinida y el sistema produce el comportamiento deseado al restringir su estado para evolucionar en esta superficie. Para el caso del control de la dinámica en altura, esta superficie deslizante se selecciona mediante una función de conmutación dada por

$$s = \dot{e}_z(t) + \mu_1 e_z(t) + \mu_0 \int_0^t e_z(\varpi) d\varpi, \quad (3.127)$$

donde  $\mu_0$  y  $\mu_1$  son coeficientes reales positivos distintos de cero.

Si los estados del sistema (3.101) se ven obligados a deslizarse sobre la función deslizante (3.127), es decir,  $s = 0$ , entonces  $e_z$  converge asintóticamente al origen. Se propone una función candidata de Lyapunov para diseñar una realimentación que permita alcanzar esta superficie [44].

$$V_{hy} = \frac{1}{2} s^2, \quad (3.128)$$

cuya derivada respecto del tiempo y al sustituir la dinámica (3.102), toma la forma

$$\dot{V}_{hy} = s(e_u + \varrho_z(t) + \mu_1 \dot{e}_z + \mu_0 e_z). \quad (3.129)$$

Si  $\dot{V}_{hy} < 0$ , las trayectorias de (3.102) alcanzan la superficie  $s = 0$ . Considere la realimentación

$$e_{u_z} = -\mu_1 \dot{e}_z - \mu_0 e_z - \rho_z \cdot \text{sign}(s), \quad (3.130)$$

donde  $\mu_0 = \lambda_0 > 0$ ,  $\mu_1 = \lambda_1 > 0$ ,  $\rho_z > 0$ ,  $\text{sign}(s)$  es la función signo definida como

$$\text{sign}(s) = \begin{cases} +1 & \text{si } s > 0 \\ -1 & \text{si } s < 0. \end{cases} \quad (3.131)$$

Dado que  $s \cdot \text{sign}(s) = |s|$  se tiene que, junto con la suposición 4

$$\dot{V}_{hy} = -\rho|s| + s\varrho_z(t) \leq -|s|(\rho - \bar{\varrho}_z). \quad (3.132)$$

Para  $\rho > \bar{\varrho}_z$ ,  $\dot{V}_{hy} < 0$ ; por lo tanto, las trayectorias del sistema (3.102) llegará a la superficie  $s = 0$  [44]. Si

$$\rho - \bar{\rho}_z \geq \rho_0 > 0, \quad (3.133)$$

siendo  $\rho_0$  una constante real positiva, se tiene que

$$\dot{V}_{hy} \leq -\rho_0 |s|, \quad (3.134)$$

y dado que  $V_{hy} = \frac{1}{2}s^2 = \frac{1}{2}|s|^2$ ,  $|s| = \sqrt{2V_{hy}}$  lleva a

$$\dot{V}_{hy} \leq -\eta V_{hy}^{\frac{1}{2}}, \quad (3.135)$$

donde  $\eta = \sqrt{2}\rho_0$ . Considerando ahora una función escalar diferencial

$$\dot{v}_{hy} = -\eta v_{hy}^{\frac{1}{2}}(t), \quad (3.136)$$

con  $v_{hy}(0) = v_{hy,0}$  siendo la condición inicial, y cuya solución es

$$v_{hy}(t) = \left(-\frac{\eta}{2}t + \sqrt{v_{hy,0}}\right)^2. \quad (3.137)$$

Dado que  $V_{hy}$  es una función continua que es diferenciable en  $t$  y que satisface la desigualdad diferencial (3.135), se tiene del lema de comparación (ver [45], capítulo 3, sección 3.4) que

$$V_{hy}(t) \leq \left(-\frac{\eta}{2}t + \sqrt{V_{hy,0}}\right)^2, \quad (3.138)$$

donde  $V_{hy,0} = V_{hy}(0)$ . Entonces, dado que la solución desaparece después de

$$t_s \leq \frac{2}{\eta} \sqrt{V_{hy,0}}, \quad (3.139)$$

$s$  también desaparece y el modo deslizante comienza después de un intervalo de tiempo finito. De (3.102) y (3.130), se deduce que el control que logra el seguimiento de la trayectoria en altura viene dado por

$$u = \frac{\ddot{z}^*(t) - \lambda_1 \dot{e}_z - \lambda_0 e_z - \rho_z \cdot \text{sign}(s)}{g_z(\phi, \theta, \psi, \alpha, \beta)}. \quad (3.140)$$

### 3.5.2 Control por modos deslizante de guiñada

Dado que la dinámica en guiñada corresponde con una ecuación diferencial de segundo orden dado por (3.105), y cuya estructura es similar a la dinámica en altura, se propone la siguiente superficie deslizante

$$s = \dot{e}_\psi(t) + \mu_1 e_\psi(t) + \mu_0 \int_0^t e_\psi(\varpi) d\varpi. \quad (3.141)$$

El control de guiñada sigue el mismo razonamiento expuesto anteriormente para el control en altura por lo tanto, el control que logra el seguimiento de la trayectoria de guiñada viene dado por

$$\tau_\psi = I_\psi(\ddot{\psi}^*(t) - \gamma_1 \dot{e}_\psi - \gamma_0 e_\psi - \rho_\psi \cdot \text{sign}(s)). \quad (3.142)$$

### 3.5.3 Control horizontal de traslación

El control de traslación horizontal sigue el mismo análisis mostrado en la subsección 3.3.3, donde para lograr el control sobre los marcos  $X - Z$  y  $Y - Z$  se hace uso de las dinámicas descritas por las expresiones dadas en (3.86) y (3.93). Debido a que ambas dinámicas siguen el mismo razonamiento y similitud de la estructura de ambas ecuaciones, solo se mostrará el análisis de control para la dinámica en el marco  $X - Z$ . El control resultante para el marco  $Y - Z$  sólo se mostrará como resultado.

Considerando el sistema (3.109) para la dinámica de traslación horizontal en el marco  $X - Z$ , donde la dinámica del error de seguimiento está dado por (3.110), se propone la siguiente función de conmutación como

$$\sigma = e_{\mathcal{F}_x}^{(5)}(t) + k_5 e_{\mathcal{F}_x}^{(4)}(t) + k_4 e_{\mathcal{F}_x}^{(3)}(t) + k_3 \ddot{e}_{\mathcal{F}_x}(t) + k_2 \dot{e}_{\mathcal{F}_x}(t) + k_1 e_{\mathcal{F}_x}(t) + k_0 \int_0^t e_{\mathcal{F}_x}(\varpi) d\varpi, \quad (3.143)$$

donde  $k_5, k_4, k_3, k_2, k_1$  y  $k_0$  son coeficientes reales positivos distintos de cero elegidos de tal manera que, si todas las variables de la dinámica correspondiente están restringidas a la superficie de deslizamiento  $\sigma = 0$ , el error de seguimiento de trayectoria  $e_{\mathcal{F}}$  converge a cero asintóticamente.

Para atraer las variables dinámicas a  $\sigma = 0$  se puede obtener un control horizontal mediante la función candidata de Lyapunov

$$V_{\mathcal{F}} = \frac{1}{2} \sigma^2, \quad (3.144)$$

cuya derivada respecto del tiempo  $t$  a lo largo de la dinámica (3.110) toma la forma

$$\dot{V}_{\mathcal{F}} = \sigma(e_{u_{\mathcal{F}_x}} + \varrho(t) + k_5 e_{\mathcal{F}_x}^{(5)} + k_4 e_{\mathcal{F}_x}^{(4)} + k_3 e_{\mathcal{F}_x}^{(3)} + k_2 e_{\mathcal{F}_x}^{(2)} + k_1 e_{\mathcal{F}_x}^{(1)} + k_0 e_{\mathcal{F}_x}). \quad (3.145)$$

Eligiendo la realimentación

$$e_{u_{\mathcal{F}_x}} = -k_5 e_{\mathcal{F}_x}^{(5)} - k_4 e_{\mathcal{F}_x}^{(4)} - k_3 e_{\mathcal{F}_x}^{(3)} - k_2 e_{\mathcal{F}_x}^{(2)} - k_1 e_{\mathcal{F}_x}^{(1)} - k_0 e_{\mathcal{F}_x} - \rho_{\mathcal{F}} \cdot \text{sign}(\sigma), \quad (3.146)$$

donde  $\rho_{\mathcal{F}} > 0$  y  $\text{sign}(\sigma)$  siendo la función signo definida en (3.131). Usando nuevamente el hecho de que  $\sigma \cdot \text{sign}(\sigma) = |\sigma|$  se tiene que, junto con la suposición 4

$$\dot{V}_{\mathcal{F}} = -\rho_{\mathcal{F}}|\sigma| + \sigma \varrho_x(t) \leq -|\sigma|(\rho_{\mathcal{F}} - \bar{\varrho}_x). \quad (3.147)$$

Para  $\rho_{\mathcal{F}} > \bar{\varrho}_x$ ,  $\dot{V}_{\mathcal{F}} < 0$ ; por lo tanto, todas las trayectorias del sistema (3.110) alcanzan la superficie de deslizamiento  $\sigma = 0$  [44]. Si

$$\rho_{\mathcal{F}} - \bar{\varrho}_x \geq \rho_{\mathcal{F}0} > 0, \quad (3.148)$$

siendo  $\rho_{\mathcal{F}0}$  una constante real positiva, se tiene que

$$\dot{V}_{\mathcal{F}} \leq -\rho_{\mathcal{F}0}|s|, \quad (3.149)$$

y dado que  $V_{\mathcal{F}} = \frac{1}{2}\sigma^2 = \frac{1}{2}|\sigma|^2$ ,  $|\sigma| = \sqrt{2V_{\mathcal{F}}}$  lleva de nuevo a

$$\dot{V}_{\mathcal{F}} \leq -\eta V_{\mathcal{F}}^{\frac{1}{2}}, \quad (3.150)$$

donde  $\eta = \rho_{\mathcal{F}0}\sqrt{2}$ . La solución de esta última expresión es, como antes, no negativa y está acotada por

$$V_{\mathcal{F}}(t) \leq \left(-\frac{\eta}{2}t + \sqrt{V_{\mathcal{F},0}}\right)^2, \quad (3.151)$$

con  $V_{\mathcal{F},0} = V_{\mathcal{F}}(0)$ . Entonces, dado que la solución desaparece después de algunos  $t_s \leq \frac{2}{\eta}\sqrt{V_{\mathcal{F},0}}$ ,  $\sigma$  también desaparece y el modo deslizante comienza después de un intervalo de tiempo finito.

De (3.146), se obtiene el control de modo deslizante que permite tener seguimiento de trayectoria en el sistema (3.109), es decir,

$$u_{\mathcal{F}} = \mathcal{F}_x^*(t)^{(6)} - k_5 e_{\mathcal{F}_x}^{(5)} - k_4 e_{\mathcal{F}_x}^{(4)} - k_3 e_{\mathcal{F}_x}^{(3)} - k_2 e_{\mathcal{F}_x}^{(2)} - k_1 e_{\mathcal{F}_x}^{(1)} - k_0 e_{\mathcal{F}_x} - \rho_{\mathcal{F}_x} \cdot \text{sign}(\sigma). \quad (3.152)$$

De esta forma, la ley de control por modos deslizantes que permite tener un seguimiento de la trayectoria del cuadirotor que transporta una carga suspendida con oscilaciones mínimas a lo largo del marco  $X - Z$  está dada por

$$\begin{aligned} \tau_{\theta} = & \frac{MlI_{\theta}}{g^2(M + m_c)} \{ \mathcal{F}_x^*(t)^{(6)} - k_5(\mathcal{F}_x^{(5)} - \mathcal{F}_x^{*(5)}) - k_4(\mathcal{F}_x^{(4)} - \mathcal{F}_x^{*(4)}) \\ & - k_3(\mathcal{F}_x^{(3)} - \mathcal{F}_x^{*(3)}) - k_2(\ddot{\mathcal{F}}_x - \ddot{\mathcal{F}}_x^*) - k_1(\dot{\mathcal{F}}_x - \dot{\mathcal{F}}_x^*) - k_0(\mathcal{F}_x - \mathcal{F}_x^*) \\ & - \rho_{\mathcal{F}_x} \cdot \text{sign}(\sigma) \} + \frac{I_{\theta}}{g} \mathcal{F}_x^{(4)}. \end{aligned} \quad (3.153)$$

De manera similar, la ley de control por modos deslizantes en el marco  $Y - Z$  viene dada por

$$\begin{aligned}
\tau_\phi = & -\frac{MI\phi}{g^2(M+m_c)} \{ \mathcal{F}^*(t)_y^{(6)} - k_5(\mathcal{F}_y^{(5)} - \mathcal{F}_y^{*(5)}) - k_4(\mathcal{F}_y^{(4)} - \mathcal{F}_y^{*(4)}) \\
& - k_3(\mathcal{F}_y^{(3)} - \mathcal{F}_y^{*(3)}) - k_2(\ddot{\mathcal{F}}_y - \ddot{\mathcal{F}}_y^*) - k_1(\dot{\mathcal{F}}_y - \dot{\mathcal{F}}_y^*) - k_0(\mathcal{F}_y - \mathcal{F}_y^*) \\
& - \rho_{\mathcal{F}_y} \cdot \text{sign}(\sigma) \} - \frac{I\phi}{g} \mathcal{F}_y^{(4)}. \tag{3.154}
\end{aligned}$$

### 3.6 Análisis de convergencia

Con base en las estructuras de control desarrolladas en las subsecciones 3.5.1, 3.5.2 y 3.5.3, se puede estudiar el comportamiento del error de seguimiento del sistema el lazo cerrado. A continuación se presenta el siguiente resultado.

**Teorema 2** *Considere los controladores dados por las ecuaciones (3.140), (3.142), (3.153) y (3.154), y considerando las suposiciones 1, 2, 3 y 4. Entonces, las trayectorias de los errores de seguimiento  $e_z$ ,  $e_\psi$ ,  $e_{\mathcal{F}_x}$ ,  $e_{\mathcal{F}_y}$  y sus derivadas respecto del tiempo, convergen globalmente hacia una esfera de radio tan pequeño como se desee, siempre que los coeficientes constantes  $\lambda_0$ ,  $\lambda_1$ ,  $\gamma_0$ ,  $\gamma_1$ ,  $k_0$ ,  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $k_3$ ,  $k_4$  y  $k_5$  en los polinomios (3.155), (3.156) y (3.157) se eligen de modo que, para un número  $\mathcal{N} > 0$ ,  $q_1(p)$ ,  $q_2(p)$  y  $q_3(p)$  exhiban todas sus raíces a la izquierda de la línea  $\{p \in \mathbb{C} \mid \text{Re}(p) \leq -\mathcal{N}\}$  en el plano complejo  $\mathbb{C}$ .*

$$q_1(p) = p^2 + \lambda_1 p + \lambda_0, \tag{3.155}$$

$$q_2(p) = p^2 + \gamma_1 p + \gamma_0, \tag{3.156}$$

$$q_3(p) = p^6 + k_5 p^5 + k_4 p^4 + k_3 p^3 + k_2 p^2 + k_1 p + k_0. \tag{3.157}$$

**Prueba 2** *Sea  $\mathbf{e}_x$  los errores de seguimiento de trayectoria y sus derivadas temporales, esto es  $\mathbf{e}_x = (e_z \ \dot{e}_z)^T$  o  $\mathbf{e}_x = (e_\psi \ \dot{e}_\psi)^T$ , para la dinámica de altura y orientación, y  $\mathbf{e}_x = (e_{\mathcal{F}}^{(1)} \ e_{\mathcal{F}}^{(2)} \ e_{\mathcal{F}}^{(3)} \ e_{\mathcal{F}}^{(4)} \ e_{\mathcal{F}}^{(5)})^T$  para la dinámica horizontal representada por la parametrización de las salidas planas, donde  $e_{\mathcal{F}}$  puede ser  $e_{\mathcal{F}_x}$  o  $e_{\mathcal{F}_y}$ ,  $\varrho(t)$  representa las perturbaciones. La dinámica del error de seguimiento del sistema de circuito cerrado se puede reescribir en una forma generalizada como*

$$\dot{\mathbf{e}}_x = \mathbf{A}_e \mathbf{e}_x + \mathbf{B}_e (R_e(\mathbf{e}_x) + \vartheta(t)), \tag{3.158}$$

donde

$$\mathbf{A}_e = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\lambda_0 & -\lambda_1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_e = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad R_e(\mathbf{e}_x) = -\rho_z \cdot \text{sign}(s),$$

para la dinámica del error de seguimiento de altura,

$$\mathbf{A}_e = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\gamma_0 & -\gamma_1 \end{bmatrix}, \mathbf{B}_e = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, R_e(\mathbf{e}_x) = -\rho_\psi \cdot \text{sign}(s),$$

para la dinámica del error de seguimiento de guiñada, y

$$\mathbf{A}_e = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -k_0 & -k_1 & -k_2 & -k_3 & -k_4 & -k_5 \end{bmatrix}, \mathbf{B}_e = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$R_e(\mathbf{e}_x) = -\rho_{\mathcal{F}} \cdot \text{sign}(\sigma),$$

para la dinámica del error de seguimiento horizontal, donde  $\mathcal{F}$  puede tomar los valores de  $\mathcal{F}_x$  o  $\mathcal{F}_y$ .

Dado que la matriz  $\mathbf{A}_e$  en (3.158), (3.159) y (3.159) es Hurwitz, existe una matriz definida positiva simétrica real  $P_e$  que es una solución de la ecuación de Lyapunov

$$P_e \mathbf{A}_e + \mathbf{A}_e^T P_e = -Q_e, \quad (3.159)$$

para una matriz definida positiva simétrica real dada  $Q_e$ . A continuación se considera la siguiente función candidata de Lyapunov.

$$V_e = \frac{1}{2} \mathbf{e}_x^T P_e \mathbf{e}_x \quad (3.160)$$

cuya derivada respecto del tiempo a lo largo de la dinámica (3.158) está dada por

$$\dot{V}_e = -\mathbf{e}_x^T Q_e \mathbf{e}_x + 2\mathbf{e}_x^T P_e b_e [-\rho \cdot \text{sign}(\nu) + \vartheta(t)], \quad (3.161)$$

donde  $\nu$  puede tomar los valores de  $s$  o  $\sigma$ . Observe que  $\mathbf{e}_x^T Q_e \mathbf{e}_x \geq \lambda_{\min}(Q_e) \|\mathbf{e}_x\|^2$  donde  $\lambda_{\min}(Q_e)$  denota el valor propio mínimo de la matriz  $Q_e$  y dado que  $Q_e$  es simétrico y definido positivo, entonces  $\lambda_{\min}(Q_e)$  es real y positivo. De esto, junto con la suposición 4, y teniendo en cuenta que  $\|\rho \cdot \text{sign}(s)\| \leq \rho$ , con  $\rho = \rho_z$  o  $\rho = \rho_\psi$ , y  $\|\rho \cdot \text{sign}(\sigma)\| \leq \rho$ , con  $\rho = \rho_{\mathcal{F}}$ , se tiene que

$$\dot{V}_e \leq -\lambda_{\min}(Q_e) \|\mathbf{e}_x\| \left( \|\mathbf{e}_x\| - \frac{2\|P_e \mathbf{B}_e\|(\rho + \bar{\vartheta})}{\lambda_{\min}(Q_e)} \right). \quad (3.162)$$

Entonces para

$$\|\mathbf{e}_x\| > \frac{2\|P_e \mathbf{B}_e\|(\rho + \bar{\vartheta})}{\lambda_{\min}(Q_e)}, \quad (3.163)$$

$\dot{V}_e < 0$  y la dinámica del error de seguimiento  $\mathbf{e}_x$  converge hacia una esfera definida como

$$S(0, \rho) = \left\{ \|\mathbf{e}_x\| \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{e}_x\| < \frac{2\|P_e \mathbf{B}_e\|(\rho + \bar{\vartheta})}{\lambda_{\min}(Q_e)} \right\}. \quad (3.164)$$

Si

$$\|\mathbf{e}_x\| \geq \frac{2\|P_e \mathbf{B}_e\|(\rho + \bar{\vartheta})}{\lambda_{\min}(Q_e)} + \rho_{0e} > 0, \quad (3.165)$$

donde  $\rho_{0e}$  es una constante real positiva, se tiene que

$$\dot{V}_e \leq -\lambda_{\min}(Q_e)\|\mathbf{e}_x\|\rho_{0e}. \quad (3.166)$$

Dado que  $V_e = \frac{1}{2}\mathbf{e}_x^T P_e \mathbf{e}_x$ , entonces  $\frac{V_e}{\|\mathbf{e}_x\|} \leq \frac{1}{2}\|\mathbf{e}_x\|\|P_e\|\frac{\|\mathbf{e}_x\|}{\|\mathbf{e}_x\|} = \frac{1}{2}\|\mathbf{e}_x\|\|P_e\|$ , o, equivalentemente,  $\|\mathbf{e}_x\| \geq \sqrt{\frac{2}{\|P_e\|}}V_e^{\frac{1}{2}}$ , por lo tanto (3.166) se puede reiterar como

$$\dot{V}_e \leq -\eta_e V_e^{\frac{1}{2}}, \quad (3.167)$$

donde  $\eta_e = \lambda_{\min}(Q_e)\sqrt{\frac{2}{\|P_e\|}}$ . Como se mostró anteriormente, la solución de (3.167) es negativa y está acotada por

$$V_e(t) \leq \left(-\frac{\eta_e}{2}t + \sqrt{V_{e,0}}\right)^2, \quad (3.168)$$

donde  $V_{e,0} = V_e(0)$ . Por lo tanto, dado que la solución de (3.167) desaparece después de algún tiempo

$$t_{s,e} < \frac{2}{\eta_e}\sqrt{V_{e,0}}, \quad (3.169)$$

$\mathbf{e}_x$  entra en la esfera  $S(0, \rho)$  después de un intervalo de tiempo finito y todas las trayectorias que comienzan dentro de esta esfera permanecen dentro de la esfera.  $\square$

## 3.7 Resumen de capítulo

En este capítulo se presentó el análisis y control del cuadrirotor en la configuración de péndulo suspendido. Para abordar el control del péndulo suspendido y cuadrirotor se propuso analizar el modelo completo no lineal restringiendo el movimiento dinámico en los marco de referencia  $X-Z$  y  $Y-Z$  respecto del marco de referencia inercial  $\mathcal{I}$  y desacoplando el sistema original. Esto propicia simplificar el modelo dinámico no lineal reduciendo el modelo original de ocho ecuaciones diferenciales no lineales de segundo orden a dos modelos con cuatro ecuaciones

diferenciales de segundo orden para la dinámica de traslación horizontal y dos modelos de segundo orden para las dinámicas en altura y guiñada. La dinámica en altura y guiñada se desacoplan del sistema original. La principal ventaja de esto es que permite linealizar los modelos resultantes al rededor de un punto de equilibrio simplificando aún mas el problema de control.

Se presenta una análisis para obtener salidas auxiliares a partir de los modelos lineales los cuales se demuestran que son controlables y por lo tanto diferenciables planos, estas salidas se conocen como salidas planas del sistema [43, 9]. A partir de estas salidas planas, se parametriza la dinámica de traslación horizontal del cuadrirotor junto con la dinámica de rotación del cuadrirotor, y la dinámica de oscilación del péndulo.

Finalmente se presentaron dos estrategias de control aplicada a la configuración del cuadrirotor y péndulo suspendido, es decir, (1) control realimentado y (2) control por modos deslizantes. En el control realimentado se presenta un análisis de convergencia, calculando la esfera de convergencia donde permanecen todas las trayectorias de la solución del sistema. En cuanto al control por modelos deslizantes además del análisis de convergencia se calculó en tiempo en el que las variables convergen a la superficie deslizante es decir, las trayectorias a las solución del sistema convergen asintóticamente a cero, mientras que la solución a los errores de seguimiento de trayectoria permanecen cercanas a cero.

# Capítulo 4

## Control del cuadrirotor y péndulo invertido

En esta sección se presenta el problema de control del péndulo invertido esférico sobre un cuadrirotor en tres dimensiones. Para el control de este sistema se propone controles basados en observadores de estado extendido para estimar perturbaciones desconocidas ya sea de naturaleza externa o debidas a dinámicas no modeladas y compensarlas en las ley de control. A esta estrategia de control se le conoce como control pro rechazo activo de perturbaciones o ADRC (por sus siglas en inglés). Como en la sección anterior, para el sistema del péndulo invertido se inyectan perturbaciones desconocidas externas que cumplen con la suposición 4 descrita en el capítulo 3. Adicionalmente, la estrategia de control propuesta se basa en la simplificación del modelo no lineal de tres dimensiones a modelos desacoplados a marcos de referencia  $X - Z$  y  $Y - Z$  los cuales son llamados dinámicas de traslación horizontal, que a su vez son linealizados, al rededor de un punto de equilibrio, y por otra parte, la dinámica de altura y de guiñada se abordan independiente como dos modelos de segundo orden desacoplados. Esto permite proponer cuatro leyes de control para controlar el sistema completo no lineal descrito por las ecuaciones (2.36)-(2.38), (2.39)-(2.41) y (2.42)-(2.43), es decir, el control en altura el cual es la fuerza de empuje debida a los motores, y los tres controle dados por los pares asociados a el movimiento de guiñada, alabeo y cabeceo.

### 4.1 Sistema péndulo invertido esférico sobre un cuadrirotor en tres dimensiones

Para abordar el problema de control del sistema péndulo invertido sobre un cuadrirotor en el espacio de tres dimensiones, se propone un análisis similar al presentado en la sección anterior, sistema péndulo suspendido y cuadrirotor, es decir, a partir de la ecuación general (2.44) que representa el modelo matemático del sistema péndulo invertido sobre un cuadrirotor. Es necesario desacoplar dicho sistema y expresarlo en forma explicita como en (3.2)-(3.9). Para lograr esto, se obtiene (3.1), donde los términos asociados al sistema péndulo invertido y cuadrirotor quedan como,

$$g_x(\phi, \theta, \psi, \alpha, \beta) = \frac{(M + m_c - m_c S_\alpha^2 C_\beta^2) C_\phi C_\psi S_\theta + S_\phi S_\psi}{M(M + m_c)} - \frac{m_c C_\beta C_\alpha S_\alpha C_\phi C_\theta}{M(M + m_c)} - \frac{m_c (C_\phi S_\psi S_\theta - C_\psi S_\phi) C_\beta S_\beta S_\alpha^2}{M(M + m_c)}, \quad (4.1)$$

$$f_x(\alpha, \beta, \dot{\alpha}, \dot{\beta}) = \frac{m_c l (\dot{\beta}^2 S_\alpha + \dot{\alpha}^2) S_\alpha C_\beta}{M + m_c}, \quad (4.2)$$

$$g_y(\phi, \theta, \psi, \alpha, \beta) = \frac{(m_c S_\beta^2 C_\alpha^2 + m_c C_\beta^2 + M) (C_\phi S_\psi S_\theta - C_\psi S_\phi)}{M(M + m_c)} - \frac{m_c S_\alpha C_\alpha S_\beta C_\phi C_\theta}{M(M + m_c)} - \frac{m_c (C_\phi C_\psi S_\theta + S_\phi S_\psi) C_\beta S_\beta S_\alpha^2}{M(M + m_c)}, \quad (4.3)$$

$$f_y(\alpha, \beta, \dot{\alpha}, \dot{\beta}) = \frac{m_c l (\dot{\beta}^2 S_\alpha^2 + \dot{\alpha}^2) S_\alpha S_\beta}{M + m_c}, \quad (4.4)$$

$$g_z(\phi, \theta, \psi, \alpha, \beta) = \frac{(m_c S_\alpha^2 + M) C_\phi C_\theta}{M(M + m_c)} - \frac{m_c (C_\phi C_\psi S_\theta + S_\phi S_\psi) C_\beta C_\alpha S_\alpha}{M(M + m_c)} - \frac{m_c (C_\phi S_\psi S_\theta - C_\psi S_\phi) S_\alpha C_\alpha S_\beta}{M(M + m_c)}, \quad (4.5)$$

$$f_z(\alpha, \beta, \dot{\alpha}, \dot{\beta}) = \frac{m_c l \dot{\beta}^2 (C_\alpha - C_\alpha^3) + m_c l \dot{\alpha}^2 C_\alpha - (M + m_c) g}{M + m_c}, \quad (4.6)$$

$$g_\alpha(\phi, \theta, \psi, \alpha, \beta) = \frac{S_\alpha C_\phi C_\theta}{Ml} - \frac{(C_\phi C_\psi S_\theta + S_\phi S_\psi) C_\beta C_\alpha}{Ml} - \frac{(C_\phi S_\psi S_\theta - C_\psi S_\phi) S_\beta C_\alpha}{Ml}, \quad (4.7)$$

$$f_\alpha(\alpha, \dot{\beta}) = \dot{\beta}^2 C_\alpha S_\alpha, \quad (4.8)$$

$$g_\beta(\phi, \theta, \psi, \alpha, \beta) = \frac{(C_\phi C_\psi S_\theta + S_\phi S_\psi) S_\beta}{Ml S_\alpha} - \frac{(C_\phi S_\psi S_\theta - C_\psi S_\phi) C_\beta}{Ml S_\alpha} \quad (4.9)$$

$$f_\beta(\alpha, \dot{\alpha}, \dot{\beta}) = -\frac{2\dot{\alpha}\dot{\beta}C_\alpha}{S_\beta}. \quad (4.10)$$

## 4.2 Dinámica lateral

De acuerdo a la suposición 1 dada en el capítulo 3, el movimiento de traslación horizontal se puede restringir al marco  $X - Z$  y puede considerarse que  $y = \theta \rightarrow 0$ ,  $\psi \rightarrow \pi/2$ ,  $\beta \rightarrow 0$  y  $\alpha_y = \arctan 2(S_\alpha C_\beta / C_\alpha)$ , además la entrada de control es  $u_x = f_2 + f_4$ , mientras que  $\tau_\theta = d(f_1 - f_3)$ . De manera similar, para el marco  $Y - Z$ , el movimiento se restringe a  $x = \phi = \psi \rightarrow 0$ ,  $\alpha_x = \arctan 2(S_\alpha S_\beta / C_\alpha)$  y  $\beta = \pi/2$ , con  $u_y = f_1 + f_3$ , y  $\tau_\phi = d(f_1 - f_3)$ . Entonces el modelo dinámico para el sistema péndulo invertido y cuadirotor en el marco  $X - Z$  queda como

$$\ddot{x} = \left( \frac{(m_c \cos^2 \alpha + M) \sin \theta - m_c \cos \alpha \sin \alpha \cos \theta}{M(M + m_c)} \right) u_x + \frac{m_c l \dot{\alpha}^2 \sin \alpha}{M + m_c}, \quad (4.11)$$

$$\ddot{z} = \left( \frac{(M + m_c \sin^2 \alpha) \cos \theta - m_c \sin \theta \sin \alpha \cos \alpha}{M(M + m_c)} \right) u_x + \frac{m_c l \dot{\alpha}^2 \cos \alpha - (M + m_c)g}{M + m_c}, \quad (4.12)$$

$$\ddot{\theta} = \frac{\tau_\theta}{I_\theta}, \quad (4.13)$$

$$\ddot{\alpha}_y = \left( \frac{\cos \theta \sin \alpha - \sin \theta \cos \alpha}{Ml} \right) u_x, \quad (4.14)$$

mientras que para el marco de referencia  $Y - Z$ , se tiene

$$\ddot{y} = \left( \frac{m_c \cos \alpha \cos \phi \sin \alpha - (m_c \cos^2 \alpha + M) \sin \phi}{M(M + m_c)} \right) u_y - \frac{m_c l \dot{\alpha}^2 \sin \alpha}{M + m_c}, \quad (4.15)$$

$$\ddot{z} = \left( \frac{(M + m_c \sin^2 \alpha) \cos \phi - m_c \sin \phi \sin \alpha \cos \alpha}{M(M + m_c)} \right) u_y + \frac{m_c l \dot{\alpha}^2 \cos \alpha - (M + m_c)g}{M + m_c}, \quad (4.16)$$

$$\ddot{\phi} = \frac{\tau_\phi}{I_\phi}, \quad (4.17)$$

$$\ddot{\alpha}_x = \left( \frac{\sin \phi \cos \alpha + \cos \phi \sin \alpha}{Ml} \right) u_y. \quad (4.18)$$

### 4.3 Linealización tangencial aproximada

En la sección 3.2.1 se presentó el proceso de linealización para el caso del péndulo suspendido con el cuadrirotor, de manera similar los puntos de equilibrio para el caso del péndulo invertido sobre un cuadrirotor en el marco  $X - Z$  corresponde con  $x(t) = \bar{x}$ ,  $z(t) = \bar{z}$ ,  $\theta(t) = 0$ ,  $\alpha_y(t) = 0$  para  $u_x(t) = \bar{u}_x = (M + m_c)g$  y  $\tau_\theta = 0$ , entonces el modelo lineal se expresa como

$$\ddot{x}_\delta = \frac{(M + m_c)g\theta_\delta - m_c g \alpha_{y\delta}}{M}, \quad (4.19)$$

$$\ddot{z}_\delta = \frac{u_{x\delta}}{M + m_c}, \quad (4.20)$$

$$\ddot{\theta}_\delta = \frac{\tau_{\theta\delta}}{I_\theta}, \quad (4.21)$$

$$\ddot{\alpha}_{y\delta} = \frac{(M + m_c)g}{Ml}(\alpha_{y\delta} - \theta_\delta). \quad (4.22)$$

Por otra parte, para el marco inercial  $Y - Z$ , el punto de equilibrio se elige como  $(y(t), z(t), \phi(t), \alpha_y(t)) = (\bar{y}, \bar{z}, 0, 0)$  para  $u_y(t) = \bar{u} = (M + m_c)g$  y  $\tau_\phi = 0$ , con  $\bar{y}$  y  $\bar{z}$  siendo constantes reales positivas. Por lo tanto, el modelo linealizado tangente en el marco inercial  $Y - Z$  se escribe como

$$\ddot{y}_\delta = \frac{m_c g \alpha_{x\delta} - (M + m_c)g\phi_\delta}{M}, \quad (4.23)$$

$$\ddot{z}_\delta = \frac{u_{y\delta}}{M + m_c}, \quad (4.24)$$

$$\ddot{\phi}_\delta = \frac{\tau_{\phi\delta}}{I_\phi}, \quad (4.25)$$

$$\ddot{\alpha}_{x\delta} = \frac{(M + m_c)g}{Ml}(\alpha_{y\delta} - \phi_\delta). \quad (4.26)$$

Estos modelos lineales para el péndulo invertido sobre un cuadrirotor son similares con los modelos lineales presentados en la sección 3.2.1, más precisamente las ecuaciones (3.63), (3.64), (3.65), (3.66) correspondientes a al marco  $X - Z$  y (3.67), (3.68), (3.69), (3.70) asociadas al marco  $Y - Z$ . Para el caso del péndulo invertido sobre un cuadrirotor se proponen las siguientes salidas planas

$$\mathcal{F}_x = x_\delta + \alpha_{y\delta}, \quad (4.27)$$

$$\mathcal{F}_y = y_\delta - l\alpha_{x\delta}. \quad (4.28)$$

La dinámica de traslación horizontal para el marco  $X - Z$  se expresa como,

$$\begin{aligned}
x_\delta &= \mathcal{F}_x - \frac{l}{g}\ddot{\mathcal{F}}_x, & \dot{x}_\delta &= \dot{\mathcal{F}}_x - \frac{l}{g}\dot{\mathcal{F}}_x^{(3)}, & \alpha_{y_\delta} &= \frac{1}{g}\ddot{\mathcal{F}}_x, \\
\dot{\alpha}_{y_\delta} &= \frac{1}{g}\dot{\mathcal{F}}_x^{(3)}, & \theta_\delta &= \frac{1}{g}\ddot{\mathcal{F}}_x - \frac{Ml}{g^2(M+m_c)}\mathcal{F}_x^{(4)}, \\
\tau_{\theta_\delta} &= -\frac{I_\theta Ml}{g^2(M+m_c)}\mathcal{F}_x^{(6)} + \frac{I_\theta}{g}\mathcal{F}_x^{(4)}.
\end{aligned}$$

Entonces el modelo asociado al marco  $X - Z$  queda parametrizado de la siguiente manera

$$\mathcal{F}_x = x_\delta + l\alpha_{y_\delta}, \quad (4.29)$$

$$\dot{\mathcal{F}}_x = \dot{x}_\delta + l\dot{\alpha}_{y_\delta}, \quad (4.30)$$

$$\ddot{\mathcal{F}}_x = g\alpha_{y_\delta}, \quad (4.31)$$

$$\mathcal{F}_x^{(3)} = g\dot{\alpha}_{y_\delta}, \quad (4.32)$$

$$\mathcal{F}_x^{(4)} = \frac{g^2(M+m_c)}{Ml}(\alpha_{y_\delta} - \theta_\delta), \quad (4.33)$$

$$\mathcal{F}_x^{(5)} = \frac{g^2(M+m_c)}{Ml}(\dot{\alpha}_{y_\delta} - \dot{\theta}_\delta), \quad (4.34)$$

$$\mathcal{F}_x^{(6)} = \frac{g(M+m_c)}{Ml}\mathcal{F}_x^{(4)} - \frac{g^2(M+m_c)}{I_\theta Ml}\tau_{\theta_\delta}, \quad (4.35)$$

mientras que la dinámica de traslación para el marco  $Y - Z$  se parametriza como,

$$\begin{aligned}
y_\delta &= \mathcal{F}_y + \frac{l}{g}\ddot{\mathcal{F}}_y, & \dot{y}_\delta &= \dot{\mathcal{F}}_y + \frac{l}{g}\dot{\mathcal{F}}_y^{(3)}, & \alpha_{x_\delta} &= -\frac{1}{g}\ddot{\mathcal{F}}_y, \\
\dot{\alpha}_{x_\delta} &= -\frac{1}{g}\dot{\mathcal{F}}_y^{(3)}, & \phi_\delta &= \frac{Ml}{g^2(M+m_c)}\mathcal{F}_y^{(4)} - \frac{1}{g}\ddot{\mathcal{F}}_y, \\
\tau_{\phi_\delta} &= \frac{I_\phi Ml}{g^2(M+m_c)}\mathcal{F}_y^{(6)} - \frac{I_\phi}{g}\mathcal{F}_y^{(4)}.
\end{aligned}$$

Es decir,

$$\mathcal{F}_y = y_\delta - l\alpha_{x_\delta}, \quad (4.36)$$

$$\dot{\mathcal{F}}_y = \dot{y}_\delta - l\dot{\alpha}_{x_\delta}, \quad (4.37)$$

$$\ddot{\mathcal{F}}_y = -g\alpha_{x_\delta}, \quad (4.38)$$

$$\mathcal{F}_y^{(3)} = -g\dot{\alpha}_{x_\delta}, \quad (4.39)$$

$$\mathcal{F}_y^{(4)} = \frac{g^2(M + m_c)}{Ml}(\phi_\delta - \alpha_{x_\delta}), \quad (4.40)$$

$$\mathcal{F}_y^{(5)} = \frac{g^2(M + m_c)}{Ml}(\dot{\phi}_\delta - \dot{\alpha}_{x_\delta}), \quad (4.41)$$

$$\mathcal{F}_y^{(6)} = \frac{g^2(M + m_c)}{I_\phi Ml}\tau_{\phi_\delta} + \frac{g(M + m_c)}{Ml}\mathcal{F}_y^{(4)}. \quad (4.42)$$

De este resultado se puede concluir que ambos sistemas (péndulo invertido y péndulo suspendido sobre un cuadrirotor) se pueden abordar de manera similar en sus modelos lineales asociados al movimiento de traslación horizontal en los marcos  $X - Z$  y  $Y - Z$ .

## 4.4 Control por rechazo activo de la perturbación

En esta sección se presenta un esquema de control basado en un control por rechazo activo de la perturbación (ADRC de sus siglas en ingles *Active disturbance rejection control*). Dado que la dinámica en altura y guiñada se considera desacoplada y que corresponde con un sistema de segundo orden se presentará observadores OEE (observadores de estado extendido o ESO de sus siglas en ingles *extended state observer*) para esquemas de segundo orden. Para la dinámica de traslación horizontal se presentaran esquemas de OEE de sexto orden. En la figura 4.1 se muestra una diagrama que ilustra el esquema de control para el cuadrirotor y péndulo suspendido en el espacio de tres dimensiones. En el diagrama se ilustra las cuatro entradas de control necesarias para controlar el sistema completo, es decir, las entradas de control asociadas a la fuerza total de empuje debida a los motores, y los pares asociados a los movimientos de alabeo y cabeceo y guiñada.

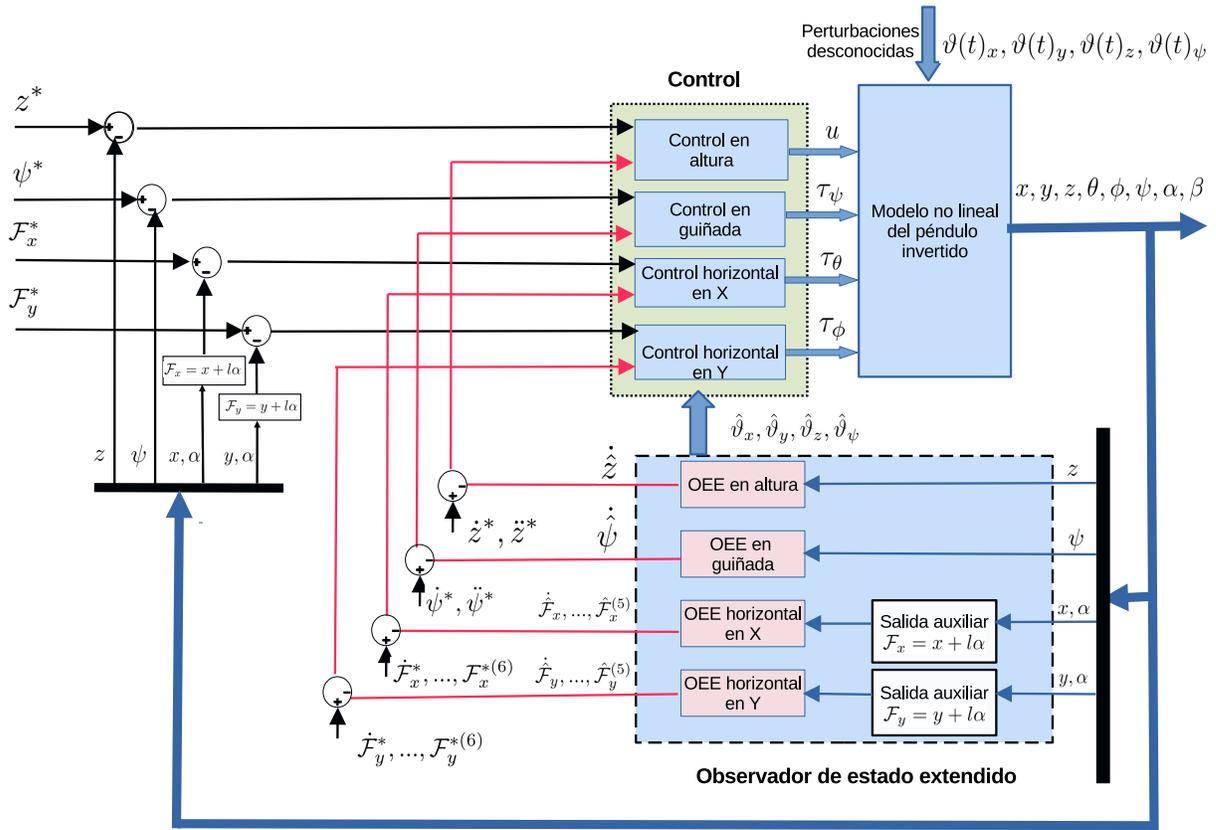


Figura 4.1: Diagrama del esquema del control general para el cuadricóptero y péndulo suspendido aplicando un control por rechazo activo de la perturbación.

Las técnicas de control utilizadas para estabilizar el sistema completo se basan en la siguiente regla de prioridad.

1. Controlar la dinámica en altura, es decir,  $z \rightarrow z^*(t)$ .
2. Controlar la dinámica rotacional de guiñada, es decir,  $\psi \rightarrow \psi^*(t)$ .
3. Controlar la dinámica de rotacional de alabeo y cabeceo
4. Mediante el control de la dinámica de rotación alabeo y cabeceo, controlar la dinámica de traslación horizontal.
5. Mediante la dinámica de traslación horizontal, controlar la oscilación del péndulo suspendido.

### 4.4.1 Control ADRC de altitud

Desacoplando el sistema (2.20), la dinámica vertical asociada al control de altura corresponde a

$$\ddot{z} = g_z u + \varrho_z, \quad (4.43)$$

donde  $\varrho_z = fz + \vartheta_{z1}$ , es el término de perturbación total en el eje vertical  $Z$ ,  $u$  es la entrada de control correspondiente a la fuerza de empuje. El término  $\vartheta_z$  corresponde a la perturbación exógena o externa desconocida que en este caso puede ser una ráfaga de viento, el término  $g_z$  corresponde a los términos no lineales como resultado de desacoplar el modelo completo dado por (2.44), y  $fz$  corresponde a no linealidades asociadas con la dinámica en altura y se definen como,

$$f_z = \frac{m_c l \dot{\alpha}^2 \cos \alpha - (M + m_c)g}{M + m_c}. \quad (4.44)$$

A continuación se proporciona el OEE para la dinámica de altura de segundo orden:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{z}}_1 &= \hat{z}_2 + \lambda_{z_2}(z_1 - \hat{z}_1), \\ \dot{\hat{z}}_2 &= u_z + \hat{\varrho}_z + \lambda_{z_1}(z_1 - \hat{z}_1), \\ \dot{\hat{\varrho}}_z &= \lambda_{z_0}(z_1 - \hat{z}_1). \end{aligned} \quad (4.45)$$

Dado que  $\tilde{e}_z = z_1 - \hat{z}_1$ , la dinámica del error de estimación es la siguiente:

$$\tilde{e}_z^{(3)} + \lambda_{z_2} \dot{\tilde{e}}_z + \lambda_{z_1} \tilde{e}_z + \lambda_{z_0} \tilde{e}_z = \dot{\vartheta}_z. \quad (4.46)$$

El siguiente polinomio característico denota la dinámica para estimar el error de seguimiento del OEE en la dinámica de altura,

$$p_z(s) = \lambda_{z_3} s^3 + \lambda_{z_2} s^2 + \lambda_{z_1} s + \lambda_{z_0}. \quad (4.47)$$

Para la dinámica de altura (4.43), a continuación se describe el controlador de seguimiento de trayectoria de referencia de salida OEED basado en un control por rechazo activo de la perturbación.

$$u = \frac{\ddot{z}^* - k_{z_1}(\dot{\hat{z}} - \dot{\hat{z}}^*) - k_{z_0}(\hat{z} - z^*) - \hat{\vartheta}_{z_1}}{g_z}. \quad (4.48)$$

### 4.4.2 Control ADRC de guiñada

La dinámica de guiñada desacoplada del sistema completo (2.44) queda expresada como

$$\ddot{\psi} = \frac{\tau_{\psi}}{I_{\psi}} + \vartheta_{\psi}, \quad (4.49)$$

donde  $\vartheta_{\psi}$  es el término que representa la perturbación global introducida en la dinámica de guiñada. El Observador de Estado Extendido para la dinámica en guiñada es el siguiente,

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\psi}}_1 &= \hat{\psi}_2 + \lambda_{\psi_2}(\psi_1 - \hat{\psi}_1), \\ \dot{\hat{\psi}}_2 &= u_{\psi} + \hat{\vartheta}_{\psi_1} + \lambda_{\psi_1}(\psi_1 - \hat{\psi}_1), \\ \dot{\hat{\vartheta}}_{\psi_1} &= \lambda_{\psi_0}(\psi_1 - \hat{\psi}_1). \end{aligned} \quad (4.50)$$

Definiendo el error de estimación se define como  $\tilde{e}_{\psi} = \psi_1 - \hat{\psi}_1$ , la dinámica del error de estimación introducido por el observador se rige por lo siguiente.

$$\tilde{e}_{\psi}^{(3)} + \lambda_{\psi_2}\ddot{\tilde{e}}_{\psi} + \lambda_{\psi_1}\dot{\tilde{e}}_{\psi} + \lambda_{\psi_0}\tilde{e}_{\psi} = \dot{\vartheta}_{\psi}. \quad (4.51)$$

Un polinomio característico denota la dinámica de la estimación del error de seguimiento del OEE en la dinámica de guiñada.

$$p_{\psi}(s) = s^3 + \lambda_{\psi_2}s^2 + \lambda_{\psi_1}s + \lambda_{\psi_0}. \quad (4.52)$$

La referencia de salida del control activo por rechazo a la perturbación basado en un observador de estado extendido en la dinámica de guiñada viene dada por:

$$\tau_{\psi} = I_{\psi} \left[ \ddot{\psi}^* - k_{\psi_1}(\dot{\hat{\psi}} - \dot{\psi}^*) - k_{\psi_0}(\hat{\psi} - \psi^*) - \hat{\vartheta}_{\psi_1} \right]. \quad (4.53)$$

### 4.4.3 Control ADRC en la dinámica de traslación horizontal

Debido a que los modelos dinámicos lineales para la dinámica de traslación horizontal en los marcos  $X - Z$  y  $Y - Z$  para el sistema péndulo invertido sobre un cuadirotor son similares para el caso del péndulo suspendido anclado a un cuadirotor se pueden considerar las salidas planas definidas en (4.27) para la dinámica de traslación en el marco  $X - Z$ , mientras que (4.28) para la dinámica de traslación en el marco  $Y - Z$  y (3.77) para la dinámica en altura, se tiene que el proceso de parametrización diferencial corresponde con el mostrado en las ecuaciones (4.29) a (4.35) y (4.36) a (4.42). El observador de estado extendido para una planta de sexto orden puede expresarse como

$$\begin{aligned}
\dot{\hat{\mathcal{F}}}_1 &= \hat{\mathcal{F}}_2 + \lambda_6(\mathcal{F}_1 - \hat{\mathcal{F}}_1), \\
\dot{\hat{\mathcal{F}}}_2 &= \hat{\mathcal{F}}_3 + \lambda_5(\mathcal{F}_1 - \hat{\mathcal{F}}_1), \\
\dot{\hat{\mathcal{F}}}_3 &= \hat{\mathcal{F}}_4 + \lambda_4(\mathcal{F}_1 - \hat{\mathcal{F}}_1), \\
\dot{\hat{\mathcal{F}}}_4 &= \mathcal{F}_5 + \lambda_3(\mathcal{F}_1 - \hat{\mathcal{F}}_1) \\
\dot{\hat{\mathcal{F}}}_5 &= \hat{\mathcal{F}}_6 + \lambda_2(\mathcal{F}_1 - \hat{\mathcal{F}}_1), \\
\dot{\hat{\mathcal{F}}}_6 &= u_{\mathcal{F}} + \hat{\varrho}_x + \lambda_1(\mathcal{F}_1 - \hat{\mathcal{F}}_1), \\
\dot{\hat{\varrho}}_x &= \lambda_0(\mathcal{F}_1 - \hat{\mathcal{F}}_1),
\end{aligned} \tag{4.54}$$

donde  $\mathcal{F}_1 = x_\delta + l\alpha_{y\delta}$  para la dinámica de traslación en el eje  $X$ , mientras que para la dinámica de traslación en el eje  $Y$  adopta  $\mathcal{F}_1 = y_\delta - l\alpha_{x\delta}$ . En las figuras 4.2 y 4.3) se ilustra un diagrama de la dinámica de traslación horizontal y la representación en cascada de las salidas planas de la parametrización diferencial a lo largo de los ejes  $X$  y  $Y$  junto con el OEE.

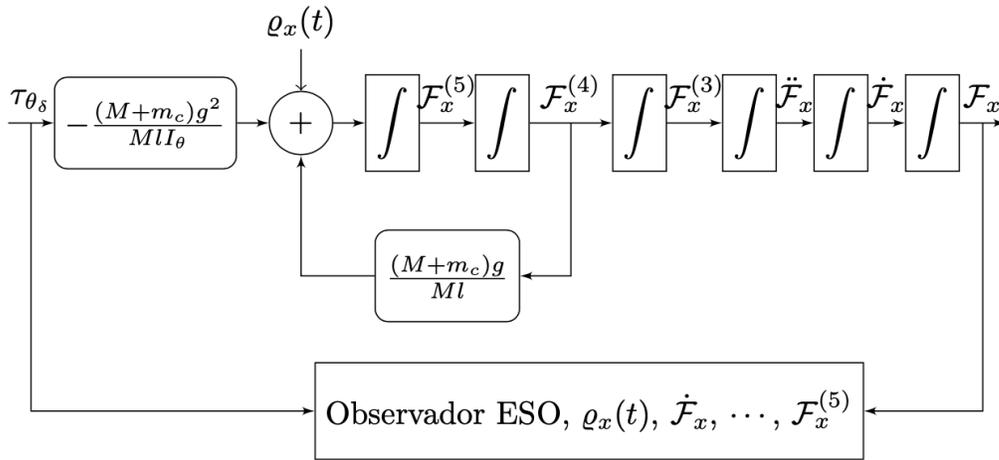


Figura 4.2: Observador de estado extendido y la representación en cascada de la dinámica de traslación horizontal sobre el eje  $X$ .

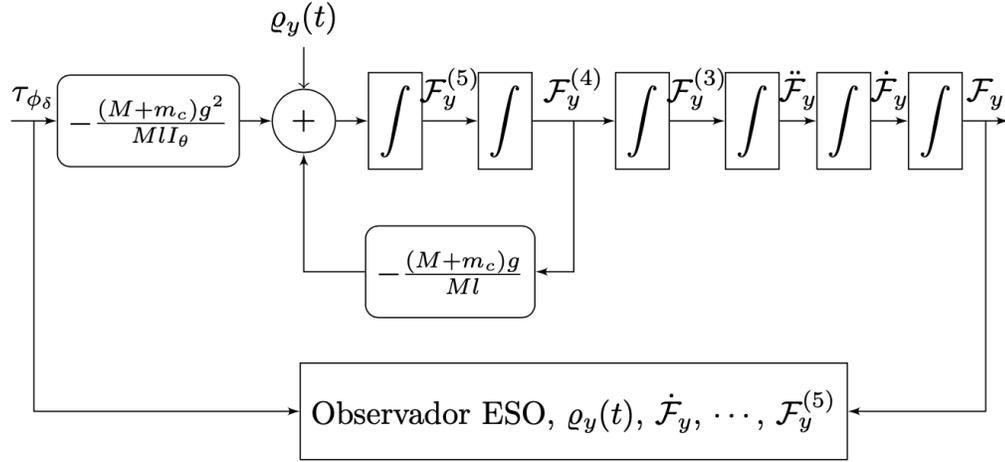


Figura 4.3: Observador de estado extendido y la representación en cascada de la dinámica de traslación horizontal sobre el eje  $Y$ .

Definiendo el error de estimación como  $\tilde{e} = \mathcal{F}_1 - \hat{\mathcal{F}}_1$ , se obtiene que la dinámica de estimación para un sistema de sexto orden se rige por

$$\tilde{e}^{(7)} + \lambda_6 \tilde{e}^{(6)} + \lambda_5 \tilde{e}^{(5)} + \lambda_4 \tilde{e}^{(4)} + \lambda_3 \tilde{e}^{(3)} + \lambda_2 \ddot{\tilde{e}} + \lambda_1 \dot{\tilde{e}} + \lambda_0 \tilde{e} = \dot{\varrho}_{\mathcal{F}}(t). \quad (4.55)$$

La siguiente expresión representa el polinomio característico asociado con la dinámica del error de estimación. El polinomio característico del OEE para la dinámica de traslación horizontal de sexto orden viene dado por:

$$p_{\mathcal{F}} = s^7 + \lambda_6 s^6 + \lambda_5 s^5 + \lambda_4 s^4 + \lambda_3 s^3 + \lambda_2 s^2 + \lambda_1 s + \lambda_0. \quad (4.56)$$

Finalmente, el control por rechazo activo a la perturbación aplicado a la dinámica de traslación horizontal en el eje  $X$  viene dado por

$$\begin{aligned} \tau_\theta = & \frac{MlI_\theta}{(M+m_c)g^2} \left( -k_5(\hat{\mathcal{F}}_x^{(5)} - \mathcal{F}_x^{*(5)}) - k_4(\hat{\mathcal{F}}_x^{(4)} - \mathcal{F}_x^{*(4)}) - k_3(\hat{\mathcal{F}}_x^{(3)} - \mathcal{F}_x^{*(3)}) \right. \\ & \left. - k_2(\ddot{\hat{\mathcal{F}}}_x - \ddot{\mathcal{F}}_x^*) - k_1(\dot{\hat{\mathcal{F}}}_x - \dot{\mathcal{F}}_x^*) - k_0(\mathcal{F}_x - \mathcal{F}_x^*) - \hat{\varrho}_x + \mathcal{F}_{x_d}^{(6)} \right), \end{aligned} \quad (4.57)$$

donde  $\mathcal{F}_{x_d}$  es la trayectoria de referencia deseada asociada al eje  $X$ . Por otra parte, realizando el mismo proceso para la dinámica de traslación horizontal en el eje  $Y$  se obtiene la siguiente ley de control ADRC.

$$\begin{aligned} \tau_\phi = & \frac{MlI_\phi}{(M+m_c)g^2} \left( -k_5(\hat{\mathcal{F}}_y^{(5)} - \mathcal{F}_{y_d}^{(5)}) - k_4(\hat{\mathcal{F}}_y^{(4)} - \mathcal{F}_{y_d}^{(4)}) - k_3(\hat{\mathcal{F}}_y^{(3)} - \mathcal{F}_{y_d}^{(3)}) \right. \\ & \left. - k_2(\ddot{\hat{\mathcal{F}}}_y - \ddot{\mathcal{F}}_{y_d}) - k_1(\dot{\hat{\mathcal{F}}}_y - \dot{\mathcal{F}}_{y_d}) - k_0(\mathcal{F}_x - \mathcal{F}_{y_d}) - \hat{\varrho}_y + \mathcal{F}_{y_d}^{(6)} \right). \end{aligned} \quad (4.58)$$

#### 4.4.4 Esquema ADRC para la dinámica de traslación horizontal basada en OEE y observador de Luenberger

En esta sección se presenta una estructura de control alternativa para controlar la dinámica de traslación horizontal del sistema péndulo invertido sobre un cuadrirotor. Esta estrategia de control se ilustra en las figuras 4.4 y 4.5 donde se muestra que la dinámica de traslación horizontal para la estimación de la perturbación puede reducirse en la un sistema de segundo orden a partir de la cuarta derivada de la salida plana, la parte restante del sistema se aborda con un observador de Luenberger de cuarto orden para estimar los estados asociados a la primera hasta la cuarta derivada de la salida plana.

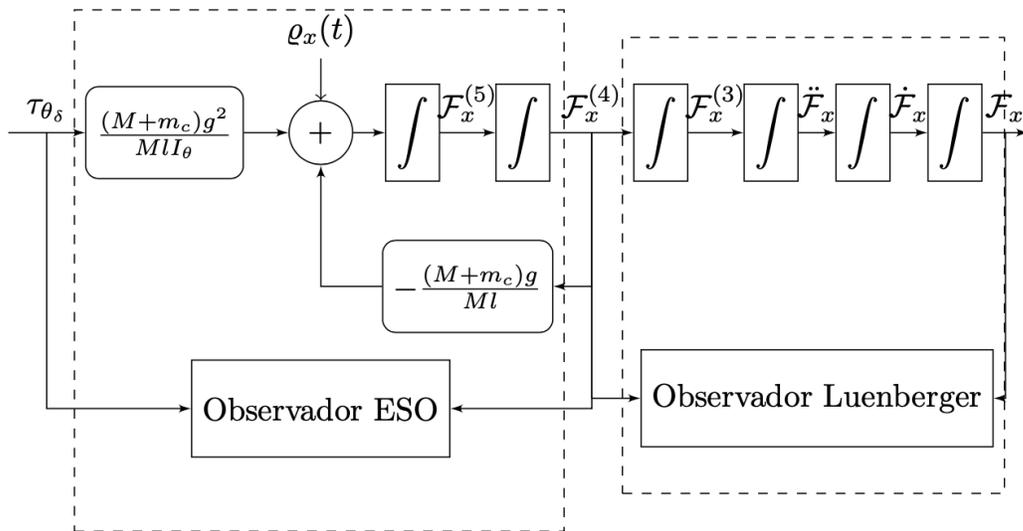


Figura 4.4: Representación en cascada de la salida plana con OEE y observador de Luenberger para la dinámica de traslación horizontal en el eje X.

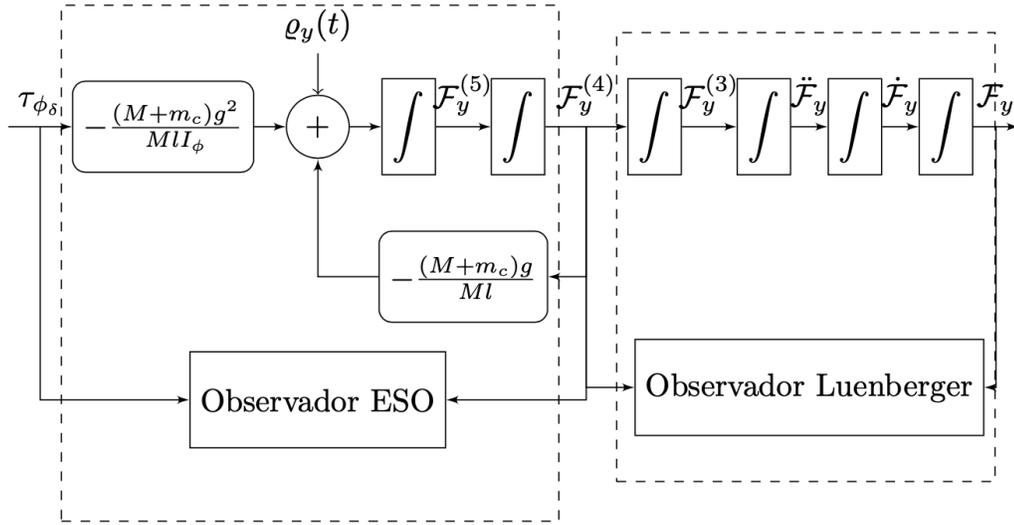


Figura 4.5: Representación en cascada de la salida plana con OEE y observador de Luenberger para la dinámica de traslación horizontal en el eje  $Y$ .

El observador de Luenberger de cuarto orden se expresa como sigue,

$$\begin{aligned}
 \dot{\hat{\mathcal{F}}}_1 &= \hat{\mathcal{F}}_2 + \lambda_3(\mathcal{F}_1 - \hat{\mathcal{F}}_1), \\
 \dot{\hat{\mathcal{F}}}_2 &= \hat{\mathcal{F}}_3 + \lambda_2(\mathcal{F}_1 - \hat{\mathcal{F}}_1), \\
 \dot{\hat{\mathcal{F}}}_3 &= \hat{\mathcal{F}}_4 + \lambda_1(\mathcal{F}_1 - \hat{\mathcal{F}}_1), \\
 \dot{\hat{\mathcal{F}}}_4 &= \mathcal{F}_5 + \lambda_0(\mathcal{F}_1 - \hat{\mathcal{F}}_1),
 \end{aligned} \tag{4.59}$$

donde  $\mathcal{F}_x = x_\delta + l\alpha_{y\delta}$  para la dinámica de traslación en  $X$  y  $\mathcal{F}_y = y_\delta - l\alpha_{x\delta}$  para la dinámica de traslación en  $Y$ .

Dado que el error de estimación para el observador de Luenberger se define como  $\tilde{e}_1 = \mathcal{F}_1 - \hat{\mathcal{F}}_1$ , la dinámica del error de estimación se rige por:

$$\tilde{e}_1^{(4)} + \lambda_3\tilde{e}_1^{(3)} + \lambda_2\ddot{\tilde{e}}_1 + \lambda_1\dot{\tilde{e}}_1 + \lambda_0\tilde{e}_1 = 0, \tag{4.60}$$

cuyo polinomio característico corresponde con

$$p(s) = s^4 + \lambda_3s^3 + \lambda_2s^2 + \lambda_1s + \lambda_0. \tag{4.61}$$

Por otra parte, el OEE para estimar la perturbación total desconocida en la segunda etapa se obtiene como sigue

$$\begin{aligned}
\dot{\hat{\mathcal{F}}}_5 &= \hat{\mathcal{F}}_6 + \lambda_2(\mathcal{F}_5 - \hat{\mathcal{F}}_5), \\
\dot{\hat{\mathcal{F}}}_6 &= u_{\mathcal{F}} + \hat{\varrho}_x + \lambda_1(\mathcal{F}_5 - \hat{\mathcal{F}}_5), \\
\dot{\hat{\varrho}}_{x1} &= \hat{\vartheta}_x + \lambda_0(\mathcal{F}_5 - \hat{\mathcal{F}}_5),
\end{aligned} \tag{4.62}$$

donde el error de estimación para el OEE de segundo orden se define como  $\tilde{e}_5 = \mathcal{F}_5 - \hat{\mathcal{F}}_5$ , por tanto, la dinámica del error de estimación se expresa como,

$$\tilde{e}_5^{(3)} + \lambda_2\ddot{\tilde{e}}_5 + \lambda_1\dot{\tilde{e}}_5 + \lambda_0\tilde{e}_5 = \dot{\varrho}_x(t), \tag{4.63}$$

cuyo polinomio característico es

$$p(s) = s^3 + \lambda_2s^2 + \lambda_1s + \lambda_0. \tag{4.64}$$

Finalmente, el control por rechazo activo a la perturbación para ambos movimientos dinámicos de traslación horizontal en los ejes  $X$  e  $Y$  respectivamente asociados a los momentos en alabeo y cabeceo se muestran a continuación.

$$\begin{aligned}
\tau_\theta &= \frac{MlI_\theta}{(M + m_c)g^2} \left( -k_5(\hat{\mathcal{F}}_x^{(5)} - \mathcal{F}_x^{*(5)}) - k_4(\hat{\mathcal{F}}_x^{(4)} - \mathcal{F}_x^{*(4)}) - k_3(\hat{\mathcal{F}}_x^{(3)} - \mathcal{F}_x^{*(3)}) \right. \\
&\quad \left. - k_2(\ddot{\hat{\mathcal{F}}}_x - \ddot{\mathcal{F}}_x^*) - k_1(\dot{\hat{\mathcal{F}}}_x - \dot{\mathcal{F}}_x^*) - k_0(\mathcal{F}_x - \mathcal{F}_x^*) - \hat{\varrho}_x + \mathcal{F}_x^{*(6)} \right),
\end{aligned} \tag{4.65}$$

y la ecuación de movimiento a lo largo del eje  $Y$  es:

$$\begin{aligned}
\tau_\phi &= \frac{-MlI_\phi}{(M + m_c)g^2} \left( -k_5(\hat{\mathcal{F}}_y^{(5)} - \mathcal{F}_y^{*(5)}) - k_4(\hat{\mathcal{F}}_y^{(4)} - \mathcal{F}_y^{*(4)}) - k_3(\hat{\mathcal{F}}_y^{(3)} - \mathcal{F}_y^{*(3)}) \right. \\
&\quad \left. - k_2(\ddot{\hat{\mathcal{F}}}_y - \ddot{\mathcal{F}}_y^*) - k_1(\dot{\hat{\mathcal{F}}}_y - \dot{\mathcal{F}}_y^*) - k_0(\mathcal{F}_y - \mathcal{F}_y^*) - \hat{\varrho}_y + \mathcal{F}_y^{*(6)} \right).
\end{aligned} \tag{4.66}$$

## 4.5 Análisis de convergencia

**Teorema 3** *Suponiendo que se cumplan todos las suposiciones antes mencionadas, suposición 1, suposición 2, suposición 3 y suposición 4. Dados los coeficientes  $\lambda_{z_0}, \dots, \lambda_{z_2}$  dados en (4.45),  $\lambda_{\psi_0}, \dots, \lambda_{\psi_2}$  dados en (4.50),  $\lambda_0, \dots, \lambda_6$  dados en (4.54) y  $\lambda_0, \dots, \lambda_2$  dados en (4.62) asociados a los polinomios característicos del OEE dados por (4.47), (4.52), (4.56) y (4.64) se eligen de tal manera que para  $N \gg 0$ , todas las raíces están ubicadas a la izquierda del eje imaginario, en la recta  $\{s \in \mathbb{C} \mid \text{Re}(s) \leq -N\}$ . Entonces los errores de estimación  $\tilde{e}_\psi$ ,  $\tilde{e}_{z_1}$ ,  $\tilde{e}_{\mathcal{F}_1}$  y  $\tilde{e}_{\mathcal{F}_5}$  convergen global y asintóticamente hacia una esfera de radio  $\rho$  dada por  $S(0, \rho)$ , así como, las variables de estimación  $\hat{\varrho}_\psi$ ,  $\hat{\varrho}_z$ ,  $\hat{\varrho}_x$  y  $\hat{\varrho}_y$  convergen hacia  $\varrho_\psi$ ,  $\varrho_z$ ,  $\varrho_x$  y  $\varrho_y$ .*

**Prueba 3** Dado  $\tilde{\mathbf{e}} = [\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n]^T$  denote las variables de fase en cada sistema dado (4.46), (4.51) y (4.63). Los sistemas perturbados son de la forma

$$\dot{\tilde{\mathbf{e}}} = \mathbf{A}_e \tilde{\mathbf{e}} + \mathbf{B} \dot{\varrho}(t), \quad (4.67)$$

donde  $\mathbf{A}_e$  es una matriz compañera de los polinomios (4.47), (4.52), (4.56) y (4.64) y  $\mathbf{B}$  siendo un vector de ceros excepto el ultimo componente el cual es igual a uno.

Dado que  $|\operatorname{Re}(\sigma_{\max}(\mathbf{A}_e))|$  denota el valor propio más grande de  $\mathbf{A}_e$  tal que  $|\operatorname{Re}(\sigma_{\max}(\mathbf{A}_e))| \geq N$ . Esto significa que hay una matriz positiva, constante, simétrica  $\mathbf{P}$ , es decir,  $\mathbf{P} = \mathbf{P}^T > 0$  que garantiza una solución a la ecuación de Lyapunov para cualquier  $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^T > 0$  dado,

$$\mathbf{A}_e^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A}_e = -\mathbf{Q}. \quad (4.68)$$

Eligiendo una función candidata de Lyapunov.

$$V(\tilde{\mathbf{e}}) = \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{e}}^T \mathbf{P} \tilde{\mathbf{e}}, \quad (4.69)$$

para un sistema de lazo cerrado, la derivada con respecto al tiempo de  $V(\tilde{\mathbf{e}})$  se expresa como,

$$\dot{V}(\tilde{\mathbf{e}}) = \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{e}}^T (\mathbf{A}_e^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A}_e) \tilde{\mathbf{e}} + \tilde{\mathbf{e}}^T \mathbf{P} \mathbf{b} \dot{\varrho}(t), \quad (4.70)$$

$$\dot{V}(\tilde{\mathbf{e}}) \leq -\|\tilde{\mathbf{e}}\|^2 \|\mathbf{P}\| |\operatorname{Re}(\sigma_{\max}(\mathbf{A}_e))| + \|\tilde{\mathbf{e}}\| \|\mathbf{P}\| (\bar{\varrho}), \quad (4.71)$$

$$\dot{V}(\tilde{\mathbf{e}}) \leq -\|\mathbf{e}\| \|\mathbf{P}\| (|\operatorname{Re}(\sigma_{\max}(\mathbf{A}_e))| \|\mathbf{e}\| - \bar{\varrho}). \quad (4.72)$$

Fuera de la esfera, esta función tiene un valor estrictamente negativa.

$$S(0, r) = \left( \mathbf{e} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{e}\| \leq r = \frac{\bar{\varrho}}{|\operatorname{Re}(\sigma_{\max}(\mathbf{A}_e))|} \leq \frac{\bar{\varrho}}{N} \right). \quad (4.73)$$

Como resultado, ninguna trayectoria que inicie dentro de  $S(0, r)$  nunca saldrá de ella. El radio de la esfera  $S(0, r)$  a lo largo de  $\tilde{\mathbf{e}}$  disminuye con el componente real del valor propio dominante de  $\mathbf{A}_e$ , es decir, cuando aumenta  $(|\operatorname{Re}(\sigma_{\max}(\mathbf{A}_e))|)$ .  $\square$ .

### 4.5.1 Control activo de rechazo a perturbaciones

De acuerdo con los controles de retroalimentación (4.48), (4.53), (4.65) y (4.66) para el seguimiento de altura, guiñada y trayectoria horizontal, respectivamente, definiendo el errores de seguimiento de trayectoria,  $e_z = z - z^*$ ,  $e_\psi = \psi - \psi^*$  y  $e_{\mathcal{F}} = \mathcal{F} - \mathcal{F}^*$ , respectivamente, el sistema en lazo cerrado de cada dinámica está dada por

$$\ddot{e}_\psi + k_{\psi_1}\dot{e}_\psi + k_{\psi_0}e_\psi + (\varrho_\psi - \hat{\varrho}_\psi) = 0, \quad (4.74)$$

$$\ddot{e}_z + k_{z_1}\dot{e}_z + k_{z_0}e_z + (\varrho_z - \hat{\varrho}_z) = 0, \quad (4.75)$$

$$e_{\mathcal{F}}^{(6)} + k_5e_{\mathcal{F}}^{(5)} + k_4e_{\mathcal{F}}^{(4)} + k_3e_{\mathcal{F}}^{(3)} + k_2\ddot{e}_{\mathcal{F}} + k_1\dot{e}_{\mathcal{F}} + k_0e_{\mathcal{F}} + (\varrho_{\mathcal{F}} - \hat{\varrho}_{\mathcal{F}}) = 0. \quad (4.76)$$

Estas dinámicas de lazo cerrado tienen una representación genérica expresada en un espacio de estados lineal como:

$$\dot{\mathbf{e}} = \mathbf{A}\mathbf{e} + \mathbf{B}(\varrho - \hat{\varrho}), \quad (4.77)$$

donde  $\mathbf{e} = [e, \dot{e}, \dots, e^{(n)}]^T$  es un vector de estado, tomando los siguientes valores:  $e = e_\psi$ , con  $\varrho = \varrho_\psi$ ,  $n = 2$  para (4.74);  $e = e_z$ , con  $\varrho = \varrho_z$ ,  $n = 2$  para (4.75);  $e = e_{\mathcal{F}}$ , con  $\varrho = \varrho_{\mathcal{F}}$  para (4.76); y  $n = 6$ .

**Teorema 4** *El conjunto de coeficientes  $k_{z_0}, k_{z_1}$  y  $k_0, \dots, k_5$  se eligen de tal manera que para los errores de seguimiento de salida  $(e, \dot{e}, \dots, e^{(n-1)})$  proporcionado por los controles de realimentación de rechazo de perturbaciones (4.48), (4.53), (4.65) y (4.66) guía el error de seguimiento de trayectoria de los sistemas controlados  $\psi$ ,  $z$ ,  $\mathcal{F}_x$  y  $\mathcal{F}_y$  hacia una pequeña región deseada del origen y se eligen de manera que,*

$$p_\psi = s^2 + k_{\psi_1}s + k_{\psi_0}, \quad (4.78)$$

$$p_z = s^2 + k_{z_1}s + k_{z_0}, \quad (4.79)$$

$$p_{\mathcal{F}} = s^6 + k_5s^5 + k_4s^4 + k_3s^3 + k_2s^2 + k_1s + k_0, \quad (4.80)$$

los polinomios son Hurwitz si y sólo si se define un número  $N \gg 0$ , tal que sus raíces se encuentran lo suficientemente lejos en el lado izquierdo del eje imaginario del plano complejo, es decir,  $\{s \in \mathbb{C} \mid \text{Re}(s) \leq -N\}$ . Entonces, las trayectorias del error de seguimiento  $e = e_\psi$ ,  $e = e_z$   $e = e_{\mathcal{F}_x}$  y  $e = e_{\mathcal{F}_y}$  convergen globalmente en una bola  $S(0, \rho)$  con radio  $\rho$ , tan pequeño como se desee.

**Prueba 4** *El teorema anterior establece que el sistema genérico (4.77), el término  $(\vartheta - \hat{\vartheta})$  y  $\mathbf{e}, \dot{\mathbf{e}}, \dots, \mathbf{e}^{n-1}$  evolucionan en una vecindad pequeña y deseada del origen en términos del error de estimación de la perturbación. Se puede decir que el error de estimación  $\|\vartheta - \hat{\vartheta}\| = \|e_\vartheta\| \leq \bar{e}_\vartheta$  está acotado en este sentido. Se propone una función candidata de Lyapunov utilizando la misma evidencia presentada en el teorema 4*

$$V(\mathbf{e}) = \frac{1}{2} \mathbf{e}^T \mathbf{P} \mathbf{e}, \quad (4.81)$$

así como la derivada con respecto al tiempo de  $V(\mathbf{e})$ ,

$$\dot{V}(\mathbf{e}) = \frac{1}{2} \mathbf{e}^T (\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A}) \mathbf{e} + \mathbf{e}^T \mathbf{P} \mathbf{B} e_\vartheta, \quad (4.82)$$

$$\dot{V}(\mathbf{e}) \leq -\|\mathbf{e}\|^2 \|\mathbf{P}\| |\operatorname{Re}(\sigma_{\max}(\mathbf{A}))| + \bar{e}_\vartheta \|\mathbf{e}\| \|\mathbf{P}\|, \quad (4.83)$$

$$\dot{V}(\mathbf{e}) \leq -\|\mathbf{e}\| \|\mathbf{P}\| (|\operatorname{Re}(\sigma_{\max}(\mathbf{A}))| \|\mathbf{e}\| - \bar{e}_\vartheta). \quad (4.84)$$

*Fuera de la esfera, esta función tiene un valor estrictamente negativo*

$$S(0, \rho) = \left( \mathbf{e} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{e}\| \leq \rho = \frac{\bar{e}_\vartheta}{|\operatorname{Re}(\sigma_{\max}(\mathbf{A}))|} \right). \quad (4.85)$$

*Si sustituimos cada una de las dinámicas de movimiento del sistema (4.43), (4.49), (3.86) y (3.93) los errores de seguimiento de trayectoria del sistema completo converge hacia el interior de la esfera de radio  $S(0, \rho)$ , cuanto mayor es el valor de  $|\operatorname{Re}(\sigma_{\max}(\mathbf{A}))|$ , el radio de la esfera es más pequeño.  $\square$*

## 4.6 Resumen de capítulo

En este capítulo se presentó el problema de control del cuadrirotor en la configuración de péndulo invertido. Se presentó un análisis similar al presentado en el capítulo 3. Una vez obtenido los modelos lineales asociados a los marcos de referencia  $X - Z$  y  $Y - Z$  se concluye que existe una similitud con respecto a la configuración del péndulo suspendido. Esto permite aplicar la estrategia de control basada en un control ADRC estimando las perturbaciones externas desconocidas y perturbaciones internas asociadas a dinámicas no modeladas o despreciadas durante el proceso de linealización para después compensarlas en las leyes de control. Además se presentó un análisis de convergencia del observador de estado extendido junto con el control de rechazo a la perturbación. Finalmente, se presentaron dos esquemas de

control, el primero propone un OEE de sexto orden para las dinámicas de traslación horizontal, estimado de esta manera las seis variables de fases del sistema junto con la perturbación. El segundo propone dividir la dinámica de traslación horizontal en dos etapas de acuerdo a la estructura definida por la expresiones (4.29) a (4.35) y (4.36) a (4.42), permitiendo combinar un OEE de segundo orden y un observador de Luenberger de cuarto orden. Ambas estrategias de control garantizan el control del cuadrirotor en un esquema de seguimiento de trayectoria atenuando las oscilaciones del péndulo.

# Capítulo 5

## Resultados de simulación

### 5.1 Cuadrirotor y carga suspendida

#### 5.1.1 Control por realimentación de estados

Se realizaron simulaciones numéricas para evaluar el desempeño de los controladores (3.104), (3.107), (3.112) y (3.113) cuando se aplican al sistema completo no lineal para la configuración del cuadrirotor con carga suspendida dada por las ecuaciones (3.2), (3.3), (3.4), (3.5), (3.6), (3.7), (3.8) y (3.9). Los parámetros del modelo de planta utilizado en las simulaciones corresponden a los de una plataforma real y se enumeran en la tabla 5.1. Las ganancias de control fueron seleccionadas según los polinomios (3.116), (3.114) y (3.115). Sus valores corresponden con

$$\left\{ \begin{array}{l} k_0 = \omega_n^6, \\ k_1 = 6\omega_n^5\zeta, \\ k_2 = 12\omega_n^4\zeta^2 + 3\omega_n^4, \\ k_3 = 8\omega_n^3\zeta^3 + 12\omega_n^3\zeta, \\ k_4 = 2\omega_n^2\zeta^2 + 3\omega_n^2, \\ k_5 = 6\omega_n\zeta, \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda_0 = \omega_n^2, \\ \lambda_1 = 2\zeta\omega_n, \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \gamma_0 = \omega_n^2, \\ \gamma_1 = 2\zeta\omega_n, \end{array} \right.$$

donde  $\omega_n = 7$  y  $\zeta = 0.6$  se eligieron para  $k_0, \dots, k_5$ , mientras que  $\omega_n = 10$  y  $\zeta = 0.9$  para  $\lambda_0, \lambda_1$ . Finalmente  $\omega_n = 9$  y  $\zeta = 0.9$  para las ganancias del control en altura  $\gamma_0, \gamma_1$ .

En las figuras 5.1 se muestra los resultados de simulación de cuadrirotor y carga puntual suspendida, las coordenadas del cuadrirotor parten de una condición inicial dadas en  $\xi = [1, 5, 4]^T$  metros, diferente a la trayectoria deseada inicial. En la figura 5.1d se muestra el comportamiento de la dinámica en guiñada la cual parte de una condición inicial  $\psi(0) = 5$  Rad diferente a la trayectoria deseada inicial, en la figura 5.2 se aprecia el comportamiento de guiñada en los primeros cinco segundos de simulación.

Parámetros	Valor [unidad]
Masa del cuadrirotor, ( $M$ )	0.5 [kg]
Masa de la carga suspendida, ( $m_c$ )	0.2 [kg]
Longitud del cable, ( $l$ )	0.3 [m]
Aceleración de gravedad, ( $g$ )	9.8 [m/s <sup>2</sup> ]
Momento de inercia ( $I_\phi$ )	0.1 [kg.m <sup>2</sup> ]
Momento de inercia, ( $I_\theta$ )	0.1 [kg.m <sup>2</sup> ]
Momento de inercia, ( $I_\psi$ )	0.1 [kg.m <sup>2</sup> ]

Tabla 5.1: Parámetros de simulación del péndulo y el cuadrirotor.

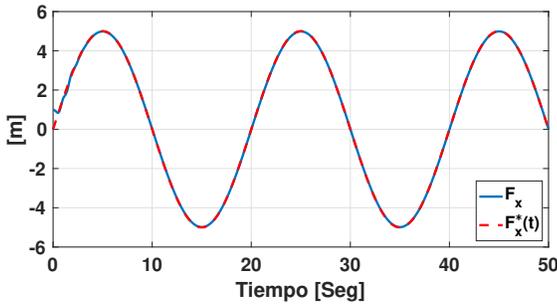
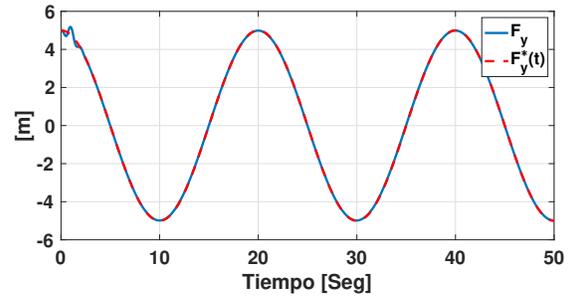
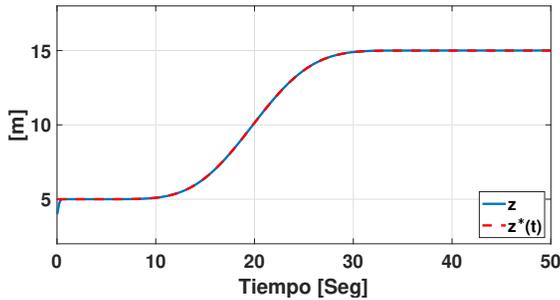
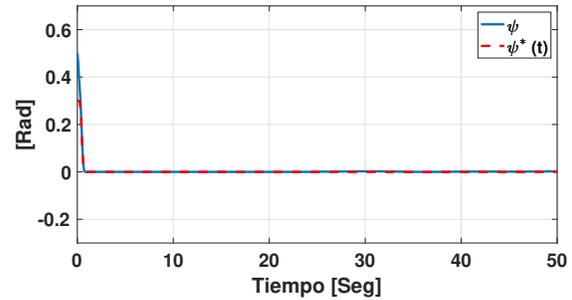
(a) Seguimiento de trayectoria de la salida plana  $\mathcal{F}_x$  asociada al eje  $X$ .(b) Seguimiento de trayectoria de la salida plana  $\mathcal{F}_y$  asociada al eje  $Y$ .(c) Seguimiento de trayectoria en altura asociada al eje  $Z$ .(d) Seguimiento de trayectoria en guiñada alrededor del eje  $Z_B$ .

Figura 5.1: Comportamiento de seguimiento de trayectoria del sistema de péndulo suspendido en un cuadrirotor en el espacio tridimensional hasta alcanzar la trayectoria de referencia mediante control por realimentación de estados.

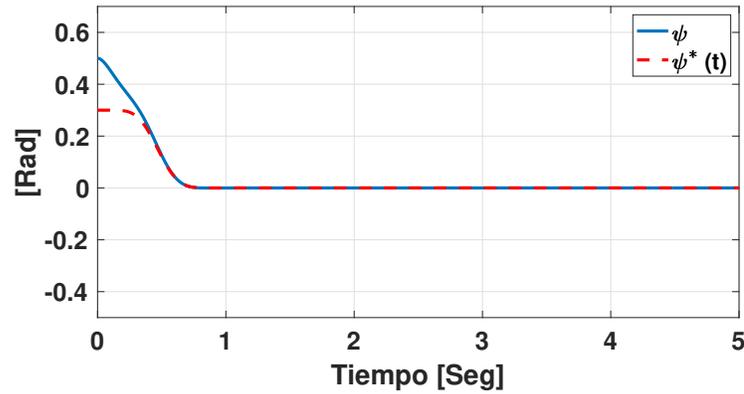
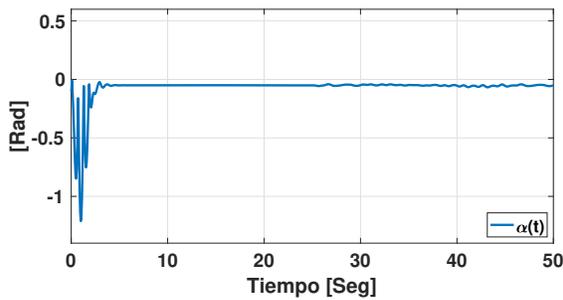
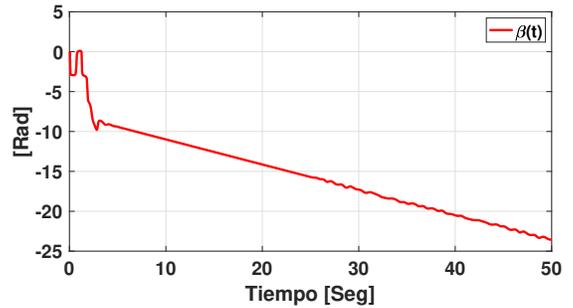


Figura 5.2: Comportamiento del ángulo de guiñada en los primeros cinco segundos de simulación.

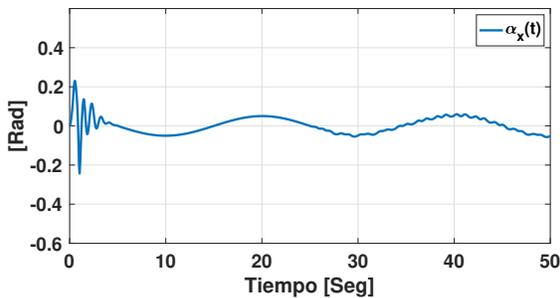
El las figuras 5.3a y 5.3b se muestra el comportamiento de los ángulos  $\alpha$  y  $\beta$  de la carga puntual suspendida, mientras que en 5.3c 5.3d se muestra el comportamiento de  $\alpha$  proyectadas en los planos  $X - Z$  y  $Y - Z$  respectivamente.



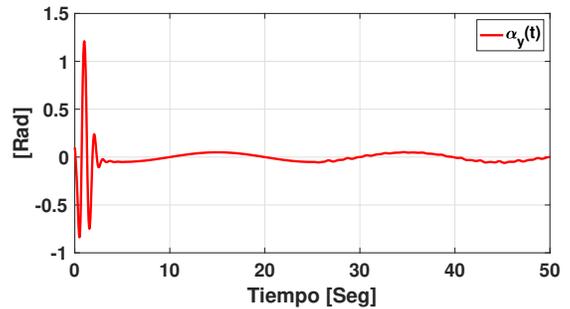
(a) Ángulo de oscilación  $\alpha$  de la carga suspendida esférica.



(b) Ángulo de oscilación  $\beta$  de la carga suspendida esférica.



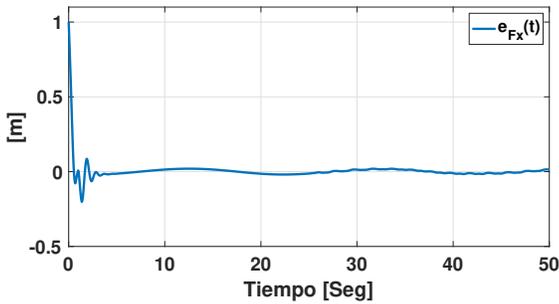
(c) Ángulo de oscilación  $\alpha_x$  proyectado en el marco  $Y - Z$ .



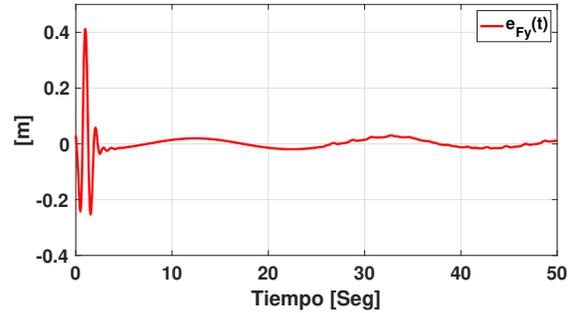
(d) Ángulo de giro  $\alpha_y$  proyectado en el marco  $X - Z$ .

Figura 5.3: Comportamiento de los ángulos de oscilación de la carga suspendida esférica usando controladores por realimentación de estado.

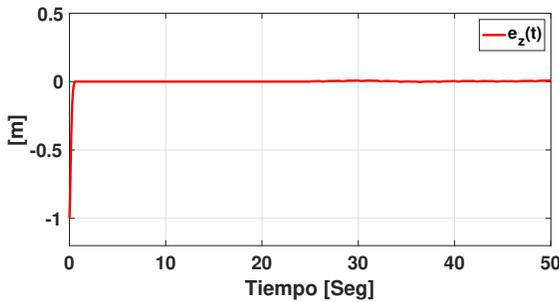
En las figuras 5.4 se muestran los errores de seguimiento de las salidas  $F_x$ ,  $F_y$ ,  $z$  y  $\psi$ , de las gráficas se aprecia que los errores permanecen dentro de una región cercana a cero.



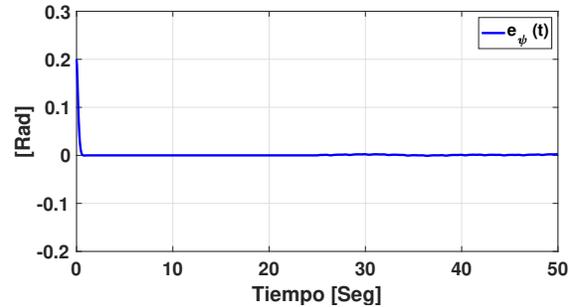
(a) Error de seguimiento de trayectoria en el marco  $X - Z$ .



(b) Error de seguimiento de trayectoria en el marco  $Y - Z$ .



(c) Error de seguimiento de trayectoria en altura.

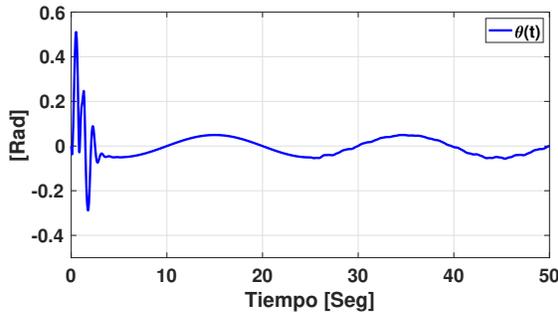


(d) Error de seguimiento de trayectoria en guiñada.

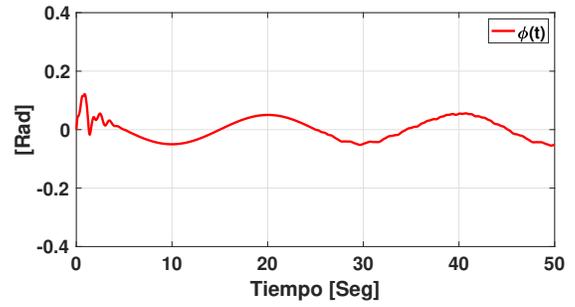
Figura 5.4: Errores de seguimiento de trayectoria del sistema de péndulo suspendido en un cuadricóptero en un espacio tridimensional con controladores por realimentación de estados.

En las figuras 5.5 se muestra el comportamiento de los ángulos de alabeo y cabeceo del cuadricóptero, se observa que los primeros instantes de simulación convergen a la referencia dada en la dinámica de traslación.

En las figuras 5.6 se muestran las señales de control asociadas con los movimientos de alabeo, cabeceo y guiñada del cuadricóptero. Además se muestra la señal de control asociada a la fuerza total de empuje.

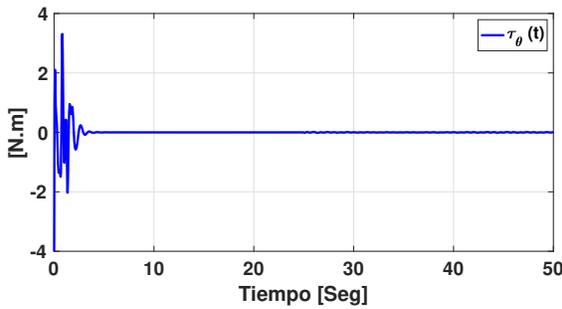


(a) Ángulo de cabeceo del cuadrotor.

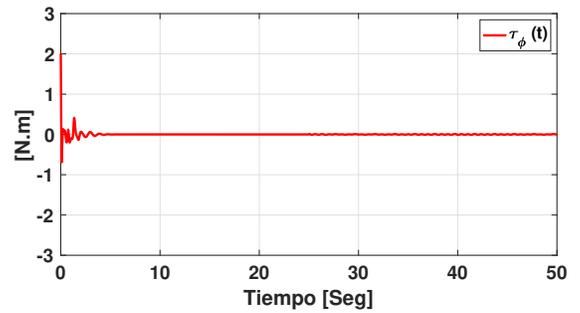


(b) Ángulo de alabeo del cuadrotor.

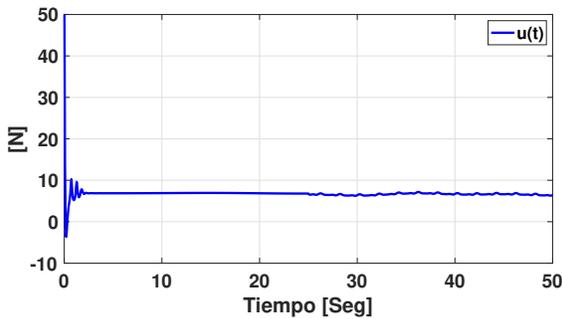
Figura 5.5: Comportamiento de los ángulos de orientación del cuadrirotor con controladores por realimentación de estados.



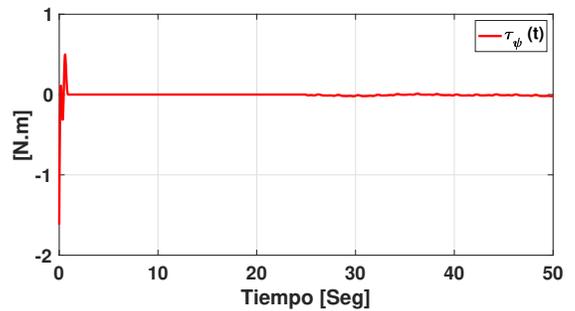
(a) Señal de control  $\tau_\theta$  aplicada al cuadrotor para alcanzar la trayectoria de referencia de traslación en el eje X.



(b) Señal de control  $\tau_\phi$  aplicada al cuadrotor para alcanzar la trayectoria de referencia de traslación en el eje Y.



(c) Señal de control  $u$  aplicada al cuadrotor para alcanzar la trayectoria de referencia de traslación en altura.

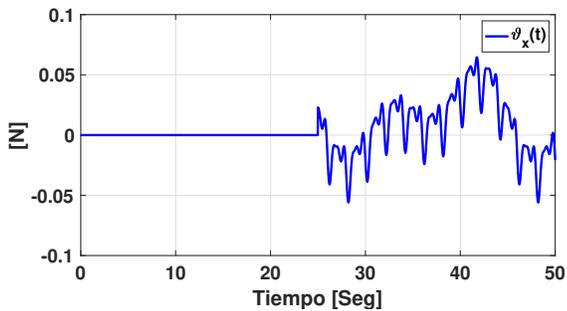


(d) Señal de control  $\tau_\psi$  aplicada al cuadrotor para alcanzar la trayectoria de referencia rotacional en guiñada.

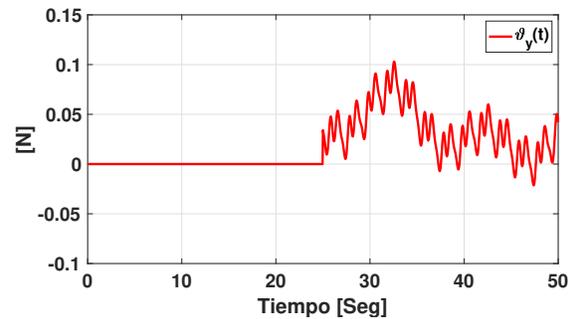
Figura 5.6: Señales de control aplicada al cuadrirotor para alcanzar la trayectoria de referencia en el espacio tridimensional y minimizar las oscilaciones del péndulo esférico suspendido mediante la estrategia de control por realimentación de estados.

En la figura 5.7 se muestran las perturbaciones externas inyectadas al sistema. Se aprecia

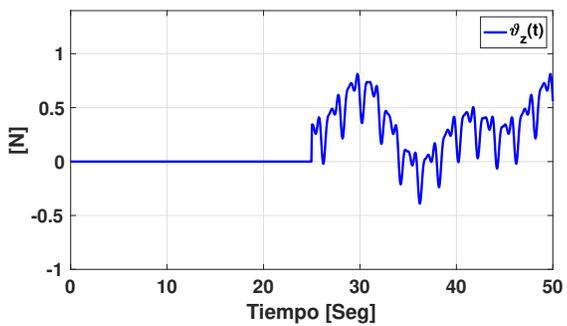
que dichas perturbaciones se inyectaron al sistema a los veinticinco segundos de simulación.



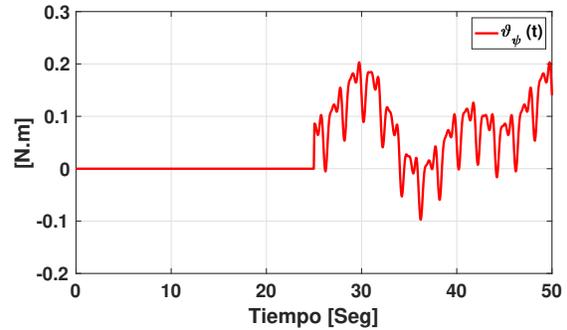
(a) Perturbación externa inyectada en el eje  $X$ .



(b) Perturbación externa inyectada en el eje  $Y$ .



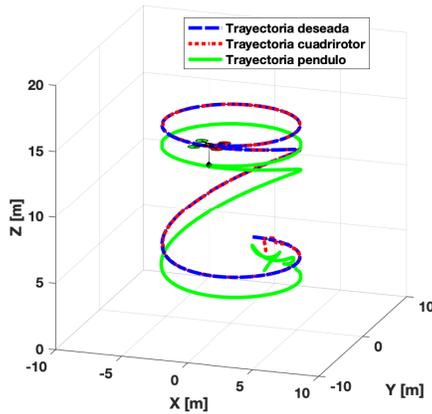
(c) Perturbación externa inyectada en el eje  $Z$ .



(d) Perturbación externa inyectada en la dinámica rotacional al rededor del eje  $Z$  (dinámica de guiñada).

Figura 5.7: Perturbaciones externas inyectadas al sistema en los tres ejes del espacio tridimensional y la perturbación rotacional en guiñada.

Finalmente, en las figuras 5.8 se presenta el desempeño de sistema cuadrirotor y carga suspendida en el espacio tridimensional, en las figuras se muestran vistas laterales y superficiales con respecto al marco de referencia inercial.



(a) Comportamiento del sistema completo en el espacio tridimensional.

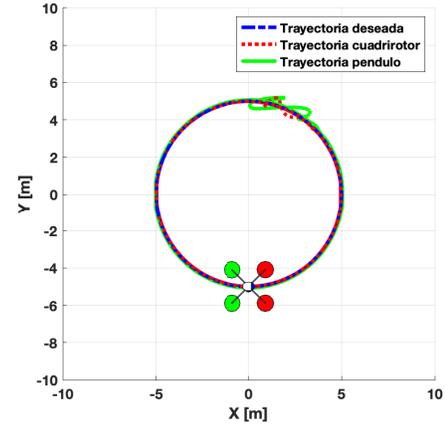
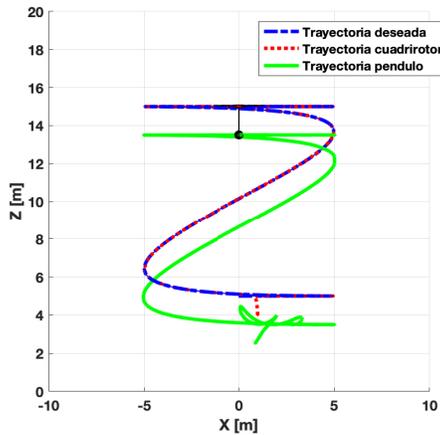
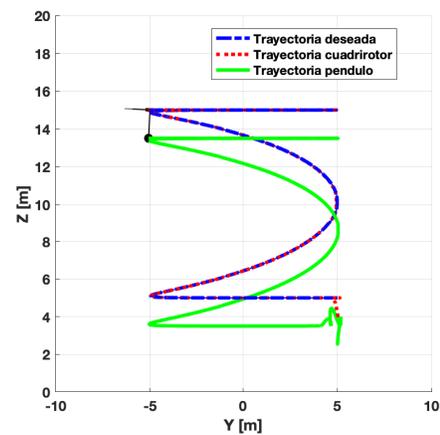
(b) Vista superficial del sistema completo en el marco  $X - Y$ .(c) Vista lateral en el marco  $X - Z$  que muestra el sistema completo.(d) Vista lateral en el comportamiento del marco  $Y - Z$  del sistema completo.

Figura 5.8: Seguimiento de trayectoria del cuadrirotor con carga suspendida en el espacio tridimensional usando control por realimentación de estados.

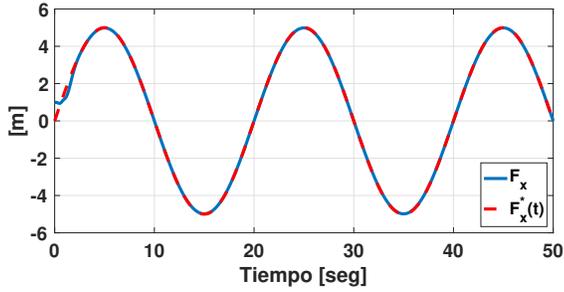
## 5.2 Resultados control por modos deslizantes

Se realizaron simulaciones numéricas para evaluar el desempeño de los controladores (3.140), (3.142), (3.153) y (3.154) cuando se aplican al sistema completo dinámica del cuadrirotor y carga suspendida dada por las ecuaciones (3.2), (3.3), (3.4), (3.5), (3.6), (3.7), (3.8) y (3.9). Los parámetros del modelo de planta utilizado en las simulaciones corresponden a los de una plataforma real y se enumeran en la tabla 5.1. Las ganancias de control fueron seleccionadas según los polinomios (3.157), (3.155) y (3.156). Sus valores corresponden con

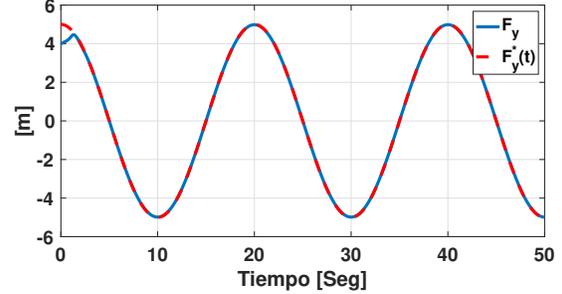
$$\begin{cases} k_0 = \omega_n^6, \\ k_1 = 6\omega_n^5\zeta, \\ k_2 = 12\omega_n^4\zeta^2 + 3\omega_n^4, \\ k_3 = 8\omega_n^3\zeta^3 + 12\omega_n^3\zeta, \\ k_4 = 2\omega_n^2\zeta^2 + 3\omega_n^2, \\ k_5 = 6\omega_n\zeta, \end{cases} \quad \begin{cases} \lambda_0 = \omega_n^2, \\ \lambda_1 = 2\zeta\omega_n, \end{cases} \quad \begin{cases} \gamma_0 = \omega_n^2, \\ \gamma_1 = 2\zeta\omega_n, \end{cases}$$

Para el control de altura se eligieron  $\omega_n = 10$  y  $\zeta = 0.9$ , mientras que para el control de guiñada se eligieron  $\omega_n = 9$  y  $\zeta = 0.9$ . Además,  $\rho_z = 1$  y  $\rho_\psi = 0.3$ . Las ganancias de control para la dinámica horizontal se seleccionaron como  $\omega_n = 6$ ,  $\zeta = 0.9$  y  $\rho_F = 1000$ .

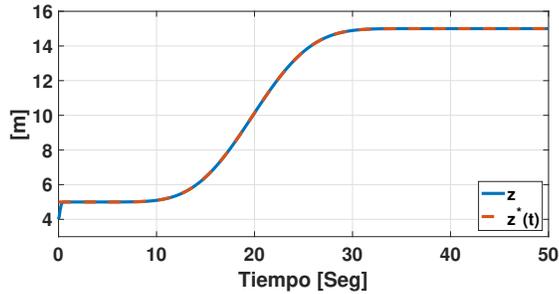
La trayectoria de referencia que siguen las salidas  $\mathcal{F}_x$ ,  $\mathcal{F}_y$ ,  $z$  y  $\psi$ , se muestran en las figuras 5.9, de las figuras se observa que el cuadrirotor tiene una condición inicial en  $\xi = [1, 4, 4]^T$  metros, diferente a la trayectoria deseada, mientras que en guiñada tiene un condición inicial en  $\psi(0) = 0.5 \text{ Rad}$  diferente a la trayectoria deseada en los primeros instantes de simulación. En la figura 5.10 se muestra el comportamiento de la dinámica en guiñada en los primeros cinco segundos de simulación.



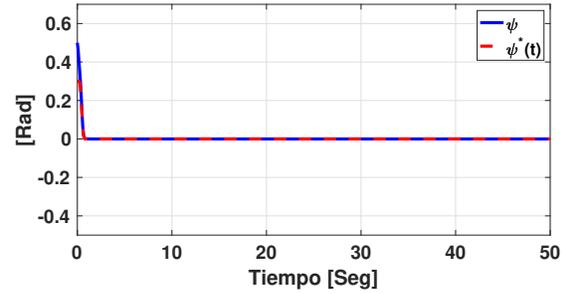
(a) Seguimiento de trayectoria de la salida plana  $\mathcal{F}_x$  asociada al eje X.



(b) Seguimiento de trayectoria de la salida plana  $\mathcal{F}_y$  asociada al eje Y.



(c) Seguimiento de trayectoria en altura asociada al eje Z.



(d) Seguimiento de trayectoria en guiñada alrededor del eje  $Z_B$ .

Figura 5.9: Comportamiento de seguimiento de trayectoria del sistema de péndulo suspendido en un cuadrirotor en el espacio tridimensional hasta alcanzar la referencia aplicando controles por modos deslizantes.

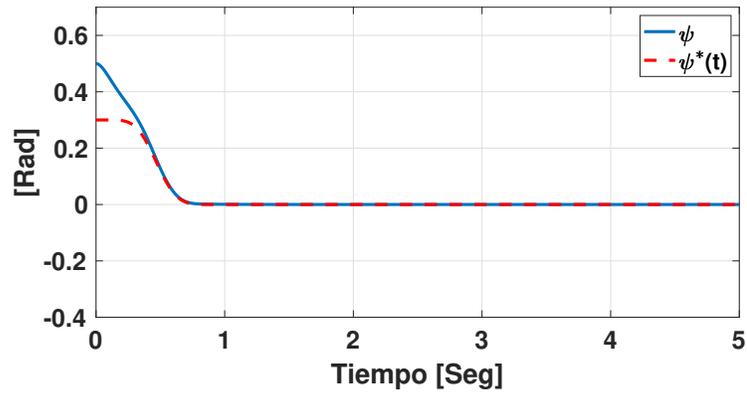
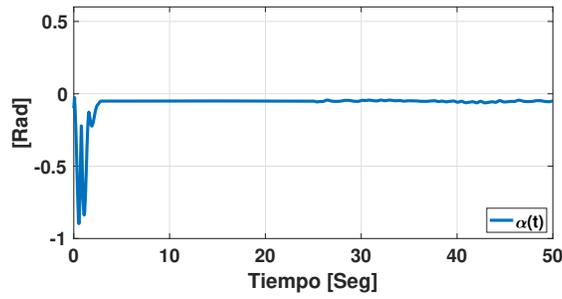
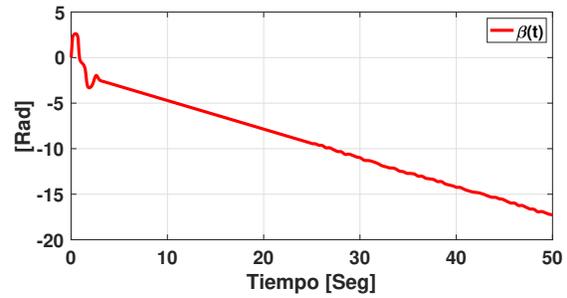


Figura 5.10: Comportamiento del ángulo de guiñada en los primeros cinco segundos de simulación.

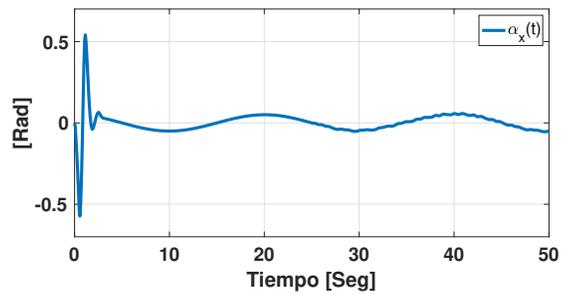
En las figuras 5.11 se muestran los ángulos de oscilación de la carga suspendida, en 5.20a se muestra el ángulo  $\alpha$  el cual atenúa las oscilaciones una vez alcanzada la trayectoria deseada por el cuadricóptero. Mientras que en 5.20b se muestra el ángulo  $\beta$  que se proyecta en el plano  $X - Y$ . Las figuras 5.20c y 5.20c muestran el comportamiento del ángulo  $\alpha$  proyectado en los planos  $X - Z$  y  $Y - Z$  respectivamente, estos ángulos corresponden con la dinámica mostrada en los modelos (3.63) a (3.66) asociada al plano  $X - Z$ , y a la dinámica descrita en el modelo dado por (3.67) a (3.70) asociada al plano  $Y - Z$ .



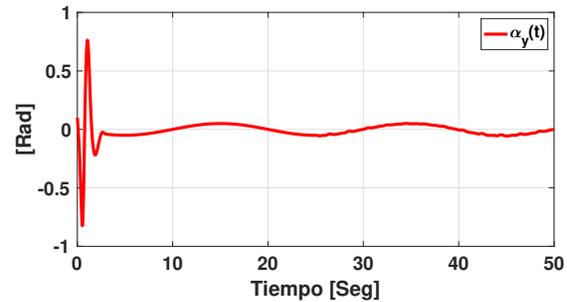
(a) Ángulo de oscilación  $\alpha$  de la carga suspendida esférica.



(b) Ángulo de oscilación  $\beta$  de la carga suspendida esférica.



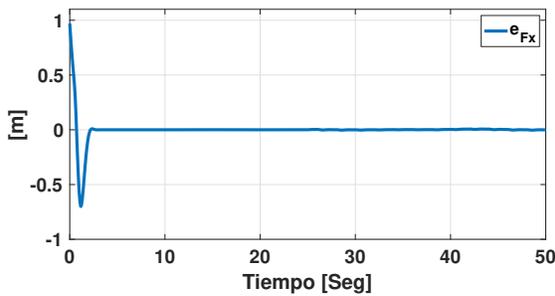
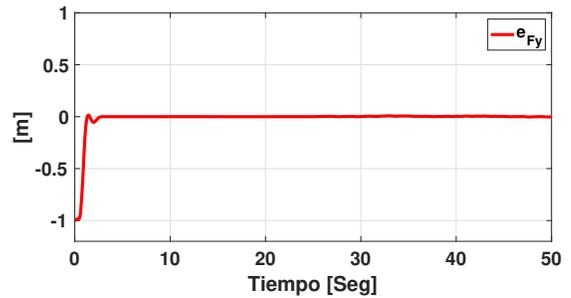
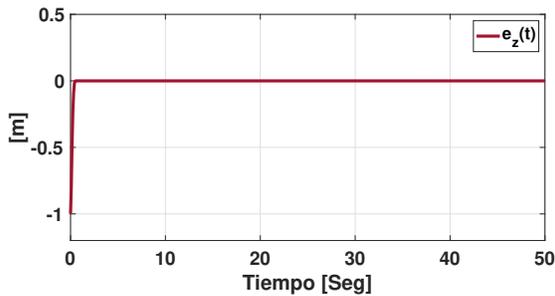
(c) Ángulo de oscilación  $\alpha_x$  proyectado en el marco  $Y - Z$ .



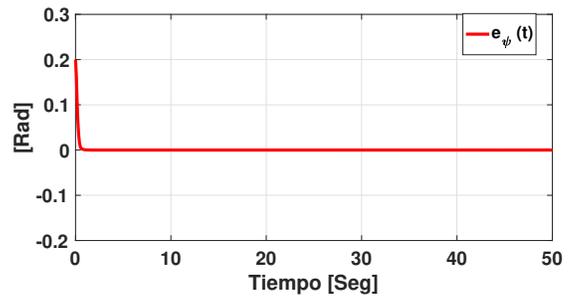
(d) Ángulo de giro  $\alpha_y$  proyectado en el marco  $X - Z$ .

Figura 5.11: Ángulos de oscilación de la carga suspendida esférica.

Los errores de seguimiento de trayectoria  $e_{\mathcal{F}_x}$ ,  $e_{\mathcal{F}_y}$ ,  $e_z$  y  $e_\psi$  se muestran en las figuras 5.12a, 5.12b y 5.12c, así como el error de seguimiento de trayectoria para el ángulo de guiñada  $e_\psi$  correspondiente con la figura 5.12d.

(a) Error de seguimiento de trayectoria en el marco  $X - Z$ .(b) Error de seguimiento de trayectoria en el marco  $Y - Z$ .

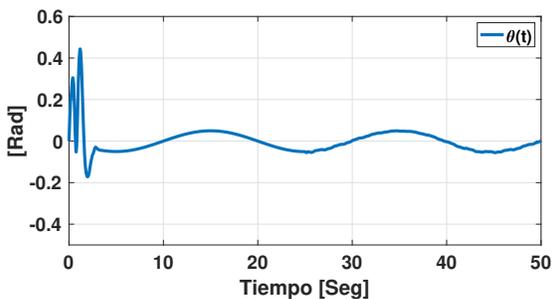
(c) Error de seguimiento de trayectoria en altura.



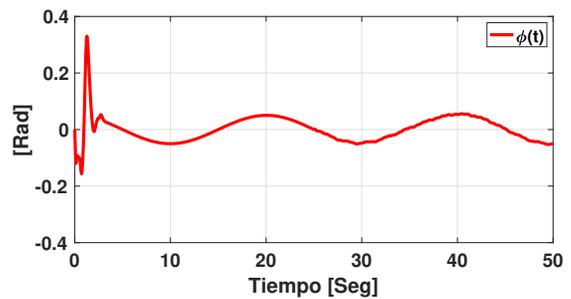
(d) Error de seguimiento de trayectoria en guiñada.

Figura 5.12: Errores de seguimiento de trayectoria del sistema de péndulo invertido en un cuadrórotor en un espacio tridimensional.

Los ángulos de orientación de alabeo  $\phi$  y cabeceo  $\theta$  del cuadrórotor se muestran en las figuras 5.13a y 5.13b, se aprecia un movimiento de oscilación debido a la naturaleza de la trayectoria de referencia deseada.



(a) Ángulo de cabeceo del cuadrórotor.

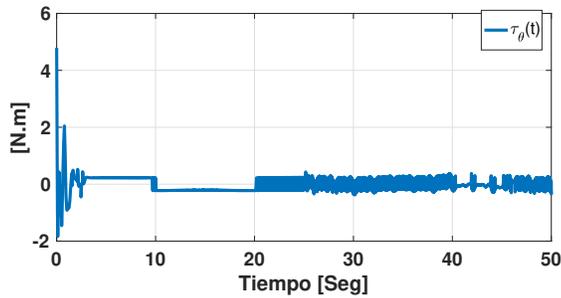


(b) Ángulo de alabeo del cuadrórotor.

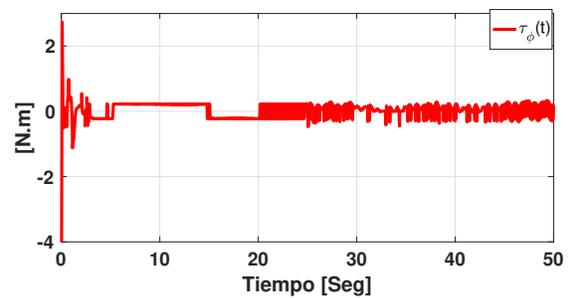
Figura 5.13: Ángulos de orientación del cuadrórotor.

Las señales de control de la fuerza de empuje y los pares que actúan sobre los ángulos de Euler y se muestran en las figuras 5.14a, 5.14b, 5.14c y 5.14d, donde se aprecia el compor-

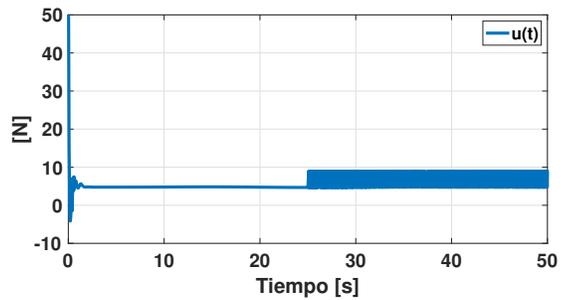
tamiento de castaño típico del control por modos deslizantes.



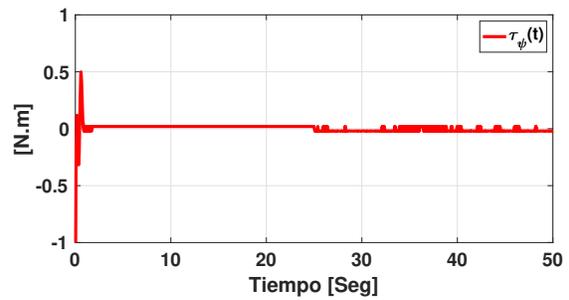
(a) Señal de control  $\tau_\theta$  aplicada al cuadrotor para alcanzar la trayectoria de referencia de traslación en el eje  $X$ .



(b) Señal de control  $\tau_\phi$  aplicada al cuadrotor para alcanzar la trayectoria de referencia de traslación en el eje  $Y$ .



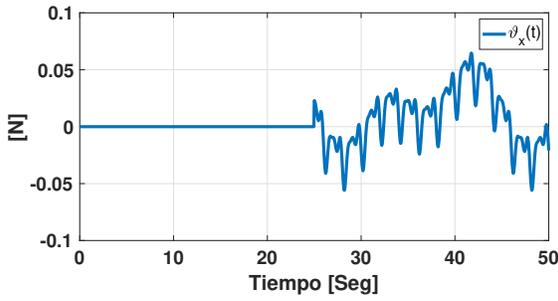
(c) Señal de control  $u$  aplicada al cuadrotor para alcanzar la trayectoria de referencia de traslación en altura.



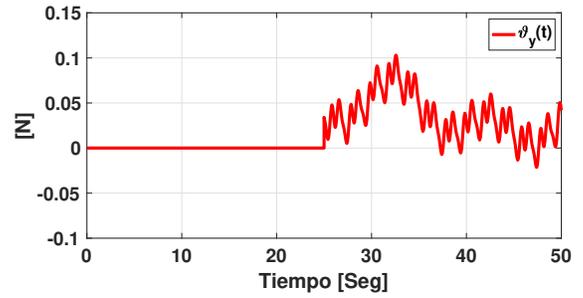
(d) Señal de control  $\tau_\psi$  aplicada al cuadrotor para alcanzar la trayectoria de referencia rotacional en guiñada.

Figura 5.14: Señales de control aplicadas al cuadrirrotor para alcanzar la trayectoria de referencia en el espacio tridimensional y mantener en equilibrio el péndulo esférico suspendido.

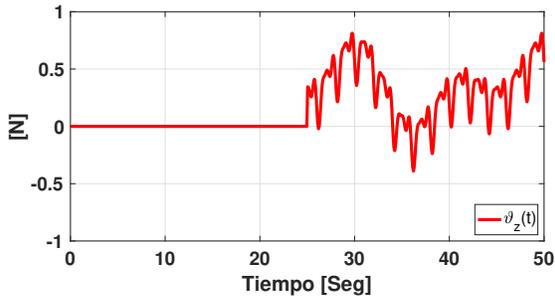
En las figuras 5.15a, 5.15b, 5.15c y 5.15d se muestran las perturbaciones desconocidas inyectadas al sistema sobre los ejes  $X$ ,  $Y$  y  $Z$ , y una perturbación en la dinámica rotacional asociada al ángulo de guiñada  $\psi$ .



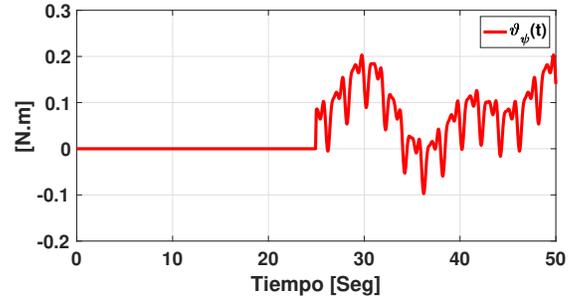
(a) Perturbación inyectada en el eje X.



(b) Perturbación inyectada en el eje Y.



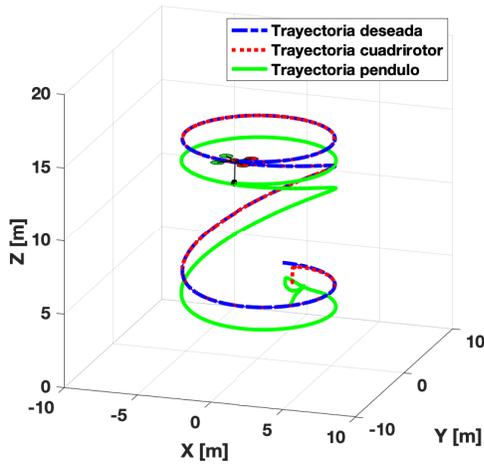
(c) Perturbación inyectada en el eje Z.



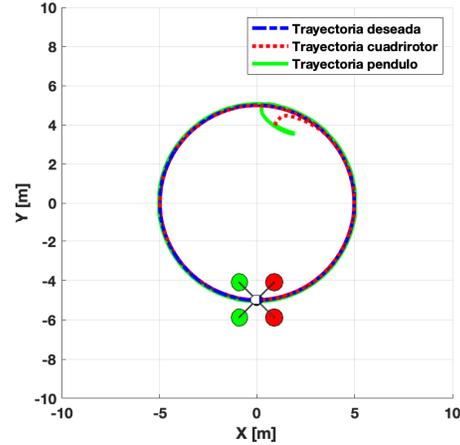
(d) Perturbación rotacional inyectada en guiñada.

Figura 5.15: Perturbaciones inyectadas en los tres ejes del espacio tridimensional y la perturbación rotacional en guiñada.

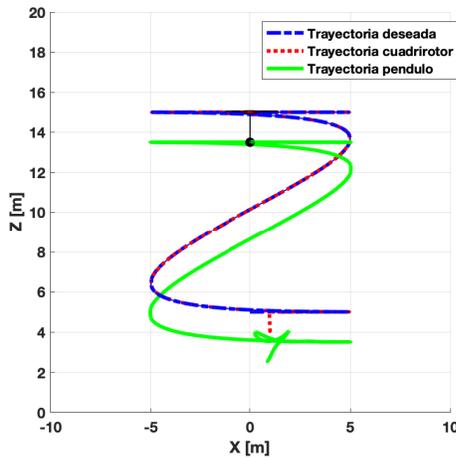
Finalmente, en la figura 5.16, se muestra el comportamiento del cuadricóptero llevando una carga suspendida y siguiendo la referencia deseada en el espacio tridimensional. En las figuras se aprecia que el vehículo parte de una condición inicial diferente a la trayectoria deseada para después seguir dicha trayectoria atenuando las oscilaciones del péndulo suspendido.



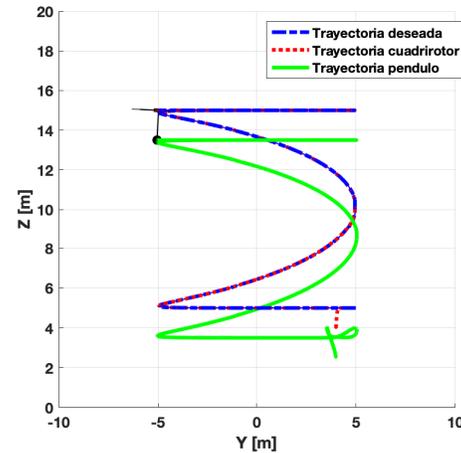
(a) Comportamiento del sistema completo en el espacio tridimensional.



(b) Vista superficial del sistema completo en el marco  $X - Y$ .



(c) Vista lateral en el marco  $X - Z$  que muestra el sistema completo.



(d) Vista lateral en el comportamiento del marco  $Y - Z$  del sistema completo.

Figura 5.16: Seguimiento de trayectoria del cuadrirotor con carga suspendida en el espacio tridimensional usando control por modos deslizantes.

### 5.2.1 Discusión y comparación con resultados previos

Se ha realizado una comparación numérica del controlador basado en modos deslizantes de este trabajo respecto a dos trabajos publicados más recientes que abordan el mismo problema, [24] y [25]. En esos trabajos, los autores muestran resultados de simulación utilizando técnicas de control basadas en un enfoque proporcional y derivativo (PD) con términos acoplados, y un enfoque basado en control predictivo de modelos. Es importante enfatizar que en [24] se propone controlar el sistema a través de la fuerza de empuje utilizando los ángulos de Euler

deseados como entradas de control, lo que lleva a considerar la dinámica rotacional por separado. En el presente trabajo, el sistema se controla a través de la fuerza de empuje resultante y los pares de torsión como entradas de control, debida a la fuerza de empuje de los motores, de la misma manera que en [25]. La tabla 5.2 resume los resultados de rendimiento para el controlador propuesto en el presente trabajo, donde RMS e ISE representan la medición cuadrática del error (Root Mean Square por sus siglas en ingles) y el error integral cuadrático (Integral Square Error por sus siglas en ingles), respectivamente. Los resultados de la tabla 5.2 se pueden comparar con los resultados mostrados en la tabla 1 en [24] y la tabla 3 en [25] para una mejor comparación cuantitativa.

Una principal diferencia y aporte importante en este trabajo es el comportamiento obtenido para la oscilación de los ángulos  $\alpha$  y  $\beta$ . En comparación con la figura 2 (b) en [24] y la figura 2 (c) en [25], el ángulo  $\beta$  no converge a cero, este el ángulo  $\beta$  gira alrededor del eje  $Z_B$  (ver figura 5.11). Por tanto, el ángulo de interés que converge a cero, garantizando oscilaciones mínimas, es el ángulo  $\alpha$ .

Otro punto importante a destacar es la aplicabilidad y programación en plataforma en tiempo real. A diferencia de [25], en este trabajo brinda una estrategia de control simple y fácil de implementar que puede programarse en un microcontrolador o sistema operativo que opera en un cuadrirotor en tiempo real.

Variable	RMS	ISE
$e_{\mathcal{F}_x}$	0.0900 [m]	0.4883 [m]
$e_{\mathcal{F}_y}$	0.1240 [m]	0.7687 [m]
$e_z$	0.0479 [m]	0.1143 [m]
$e_\psi$	0.0584 [rad]	0.0013 [rad]
$\alpha$	0.11 [rad]	0.6051 [rad]
$\alpha_x$	0.0699 [rad]	0.2444 [rad]
$\alpha_y$	0.0923 [rad]	0.4263 [rad]
$\beta$	10.48 [rad]	$5.49 \times 3$ [rad]

Tabla 5.2: Resultados de rendimiento del controlador.

### 5.3 Resultados de simulación control ADRC

En esta sección se muestran los resultados de simulación para la configuración del péndulo invertido sobre un cuadrirotor en el espacio de tres dimensiones. La estrategia de control se implementa en las cuatro entradas de control del cuadrirotor. Las estrategias de control simuladas se basa en un control por rechazo activo de la perturbación (ADRC). Durante la simulación se inyectan perturbaciones externas después de los diez segundos de simulación.

La simulación se realizó considerando el modelo dado por (2.36), (2.37), (2.38), (2.39), (2.40), (2.41), (2.42) y (2.43) y las leyes de control dadas por (4.48), (4.53), (4.57) y (4.58).

Los parámetros del cuadirotor y del péndulo invertido se resumen en la tabla 5.1.

Las ganancias del OEE y del ADRC para el control y estimación en altura se eligieron como sigue

$$\begin{cases} \lambda_{z_0} = p\omega_n^2, \\ \lambda_{z_1} = \omega_n^2 + 2p\zeta\omega_n, \\ \lambda_{z_2} = p + 2\omega_n\zeta, \end{cases} \quad \begin{cases} k_{z_0} = k_{z_0} = \omega_n^2, \\ k_{z_1} = k_{z_1} = 2\zeta\omega_n, \end{cases}$$

donde  $\omega_n = 500$ ,  $\zeta = 0.9$  y  $p = 20$  para  $\lambda_{z_0}, \dots, \lambda_{z_2}$  mientras que  $\omega_n = 10$  y  $\zeta = 0.9$  para  $k_{z_0}$  y  $k_{z_1}$ .

Las ganancias del OEE y del ADRC para el control y estimación en guiñada se eligieron como sigue

$$\begin{cases} \lambda_{\psi_0} = p\omega_n^2, \\ \lambda_{\psi_1} = \omega_n^2 + 2p\zeta\omega_n, \\ \lambda_{\psi_2} = p + 2\omega_n\zeta, \end{cases} \quad \begin{cases} k_{\psi_0} = k_{z_0} = \omega_n^2, \\ k_{\psi_1} = k_{z_1} = 2\zeta\omega_n, \end{cases}$$

donde  $\omega_n = 50$ ,  $\zeta = 0.9$  y  $p = 100$  para  $\lambda_{\psi_0}, \dots, \lambda_{\psi_2}$  mientras que  $\omega_n = 10$  y  $\zeta = 0.9$  para  $k_{\psi_0}$  y  $k_{\psi_1}$ .

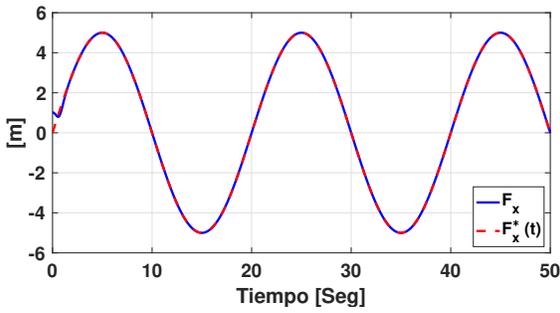
Finalmente, as ganancias del OEE y del ADRC para el control y estimación en guiñada se eligieron como sigue

$$\begin{cases} \lambda_0 = p\omega_n^6, \\ \lambda_1 = \omega_n^6 + 6p\zeta\omega_n^5, \\ \lambda_2 = 6\omega_n^5\zeta + 12p\omega_n^4\zeta^2 + 3p\omega_n^4, \\ \lambda_3 = 12\omega_n^4\zeta^2 + 3\omega_n^4 + 8p\omega_n^3\zeta^3 + 12p\omega_n^3\zeta, \\ \lambda_4 = 8\omega_n^3\zeta^3 + 12\omega_n^3\zeta + 12p\omega_n^2\zeta^2 + 3p\omega_n^2, \\ \lambda_5 = 12\omega_n^2\zeta^2 + 3\omega_n^2 + 6p\omega_n\zeta, \\ \lambda_6 = p + 6\omega_n\zeta, \end{cases} \quad \begin{cases} k_0 = \omega_n^6, \\ k_1 = 6\zeta\omega_n^5, \\ k_2 = 12\omega_n^4\zeta^2 + 3\omega_n^4, \\ k_3 = 8\omega_n^3\zeta^3 + 12\omega_n^3\zeta, \\ k_4 = 12\omega_n^2\zeta^2 + 3\omega_n^2, \\ k_5 = 6\omega_n\zeta, \end{cases}$$

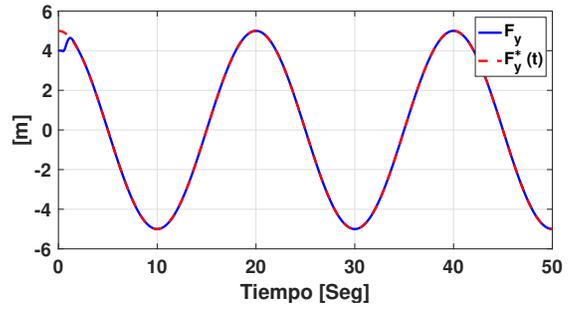
donde  $\omega_n = 100$ ,  $\zeta = 0.8$  y  $p = 100$  para  $\lambda_0, \dots, \lambda_6$  mientras que  $\omega_n = 7$  y  $\zeta = 0.9$  para  $k_0$  y  $k_5$ .

Estos parámetros se eligen de forma adecuada para que sus polinomios correspondientes (4.47), (4.52), (4.56) y (4.64) correspondientes al OEE y (4.74), (4.75) y (4.76) correspondientes al control de rechazo de perturbaciones sean de Hurwitz.

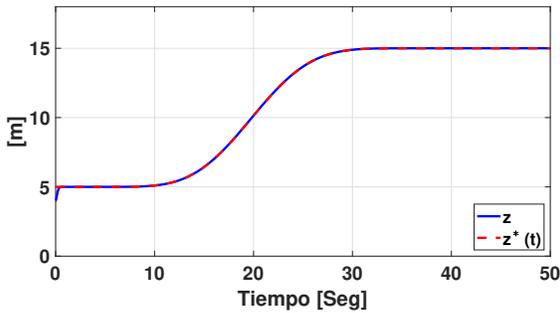
En las figuras 5.17 se muestra el comportamiento del seguimiento de trayectoria del sistema cuadirotor-péndulo invertido. El comportamiento de las variables  $\psi$ ,  $z$ , correspondientes a la dinámica de guiñada y altura del cuadirotor y se muestra en la figura 5.17d y figura 5.17c, mientras que, las salidas asociadas a la dinámica de traslación horizontal del cuadirotor se muestran en las figuras 5.17a y figura 5.17b.



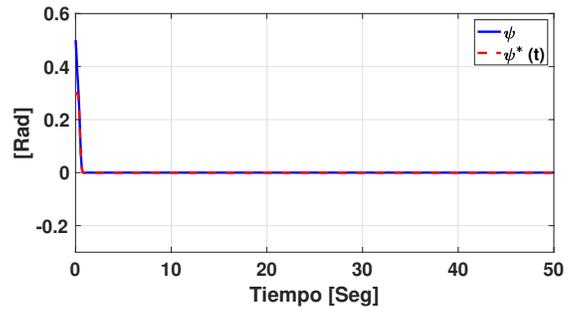
(a) Seguimiento de trayectoria de la salida plana  $\mathcal{F}_x$  asociada al eje  $X$ .



(b) Seguimiento de trayectoria de la salida plana  $\mathcal{F}_y$  asociada al eje  $Y$ .



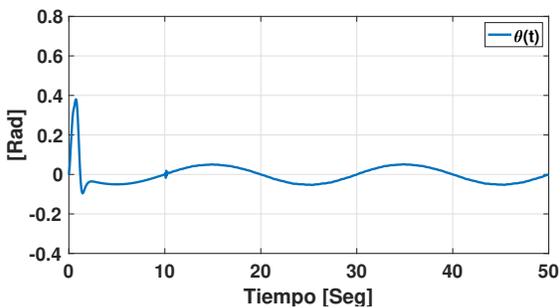
(c) Seguimiento de trayectoria en altura asociada al eje  $Z$ .



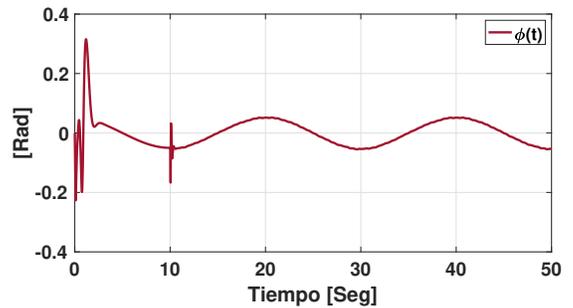
(d) Seguimiento de trayectoria en guiñada alrededor del eje  $Z_B$ .

Figura 5.17: Comportamiento de seguimiento de trayectoria del sistema de péndulo invertido en un cuadrotor en el espacio tridimensional hasta alcanzar la referencia mediante control ADRC.

Las figuras 5.18 muestran el comportamiento de los ángulos de orientación del cuadrotor. En las figuras 5.18a 5.18b se muestran el ángulo de cabeceo y alabeo asociados con la dinámica de rotación del cuadrotor.



(a) Ángulo de cabeceo del cuadrotor.

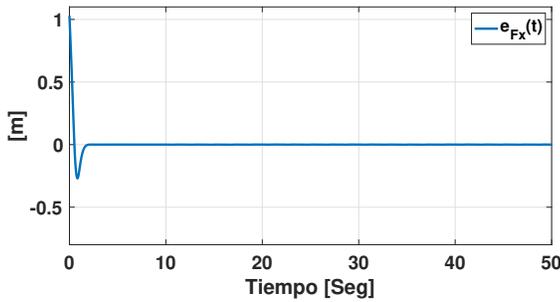


(b) Ángulo de alabeo del cuadrotor.

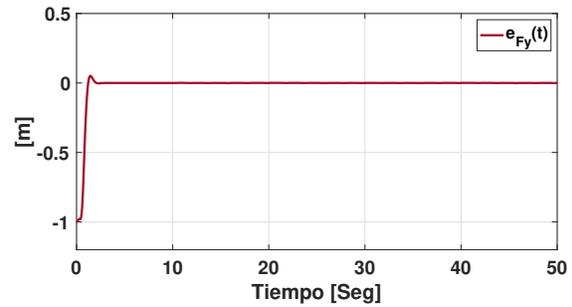
Figura 5.18: Ángulos de orientación del cuadrotor aplicando ADRC.

El error de seguimiento de trayectoria  $e_\psi$ ,  $e_z$ ,  $e_{F_x}$  y  $e_{F_y}$  asociados al cuadrotor se mues-

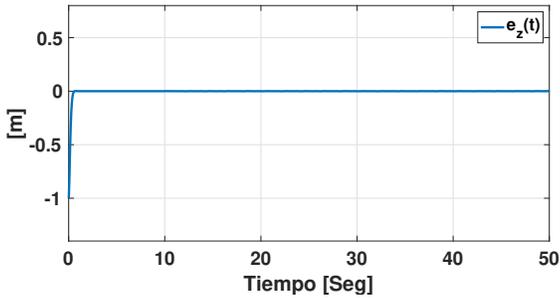
tran en la figura 5.19. La figura 5.19a y la figura 5.19b muestran el comportamiento de la dinámica de traslación horizontal del cuadrirotor en los marcos de referencia  $X - Z$  e  $Y - Z$  respectivamente. En las figuras 5.19a, 5.19b se muestra el error de seguimiento de las salidas  $\mathcal{F}_x$  y  $\mathcal{F}_y$  asociadas a la dinámica de traslación horizontal, mientras que, en las figuras 5.19c y en la figura 5.19d se muestra el error de seguimiento de la trayectoria en altura y dinámica de guiñada. Todos los errores permanecen dentro de una región acotada cercana a cero.



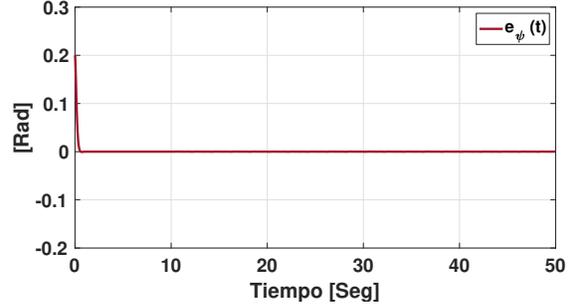
(a) Error de seguimiento de trayectoria en el marco  $X - Z$ .



(b) Error de seguimiento de trayectoria en el marco  $Y - Z$ .



(c) Error de seguimiento de trayectoria en altura.



(d) Error de seguimiento de trayectoria en guiñada.

Figura 5.19: Errores de seguimiento de trayectoria del sistema de péndulo invertido en un cuadrirotor en un espacio tridimensional aplicando un control ADRC.

Las figuras 5.20 muestran el comportamiento del péndulo esférico invertido en un cuadrirotor. En la figura 5.20a se muestra el comportamiento del ángulo  $\alpha$ , este ángulo se mantiene cerca de cero manteniendo el péndulo invertido en la posición vertical inestable en equilibrio mientras se realiza un seguimiento de trayectoria del cuadrirotor. La figura 5.20b muestra el comportamiento del ángulo  $\beta$ , este ángulo describe la traslación de la masa del péndulo con respecto al eje  $Z_B$ . Las figuras 5.20c y 5.20d muestran el ángulo con respecto al plano  $Y - Z$  y  $X - Z$  respectivamente.

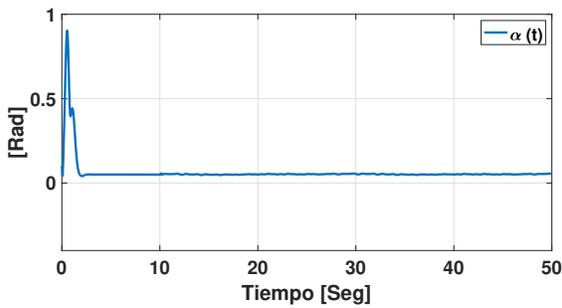
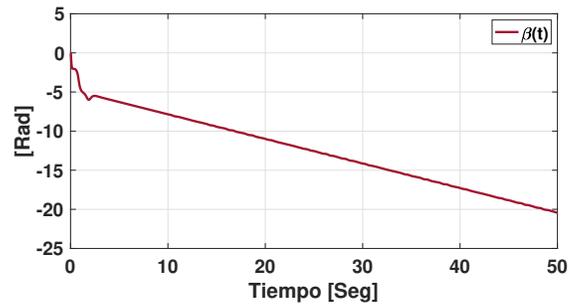
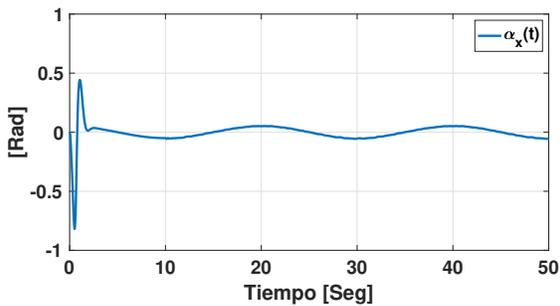
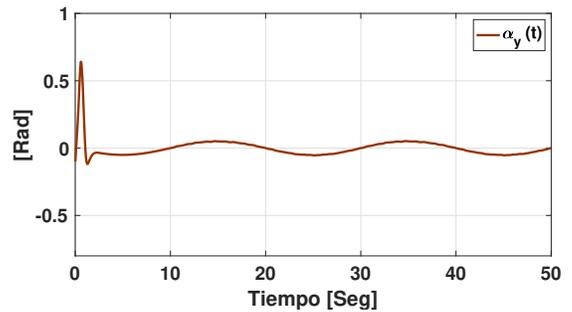
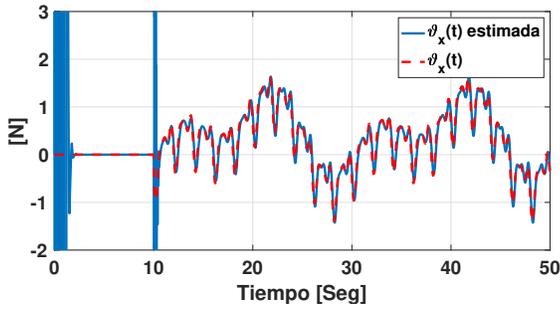
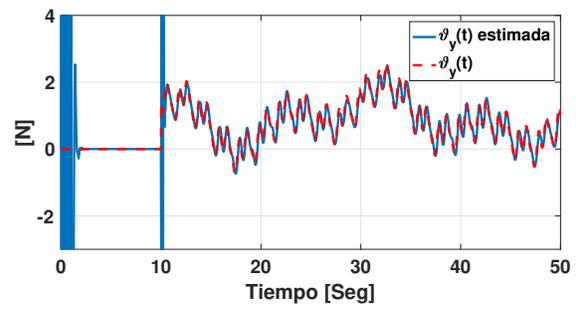
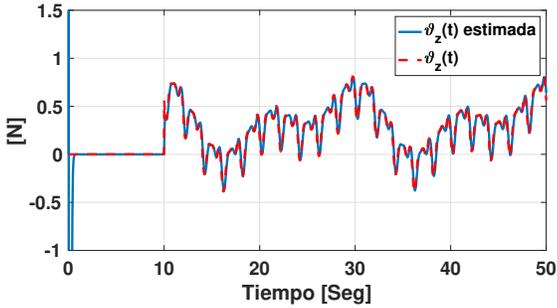
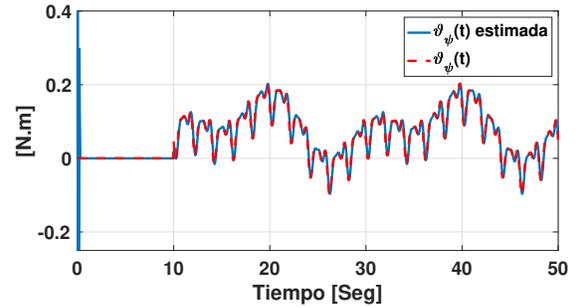
(a) Ángulo de oscilación  $\alpha$  del péndulo invertido esférico.(b) Ángulo  $\beta$  del péndulo esférico invertido.(c) Ángulo de oscilación  $\alpha_x$  proyectado en el marco  $Y - Z$ .(d) Ángulo de giro  $\alpha_y$  proyectado en el marco  $X - Z$ .

Figura 5.20: Comportamiento de los ángulos de oscilación del péndulo invertido esférico aplicando la estrategia ADRC.

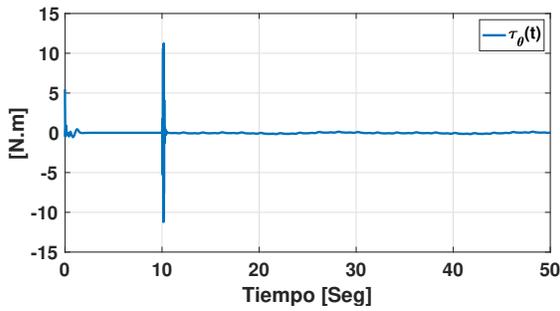
Las perturbaciones externas, como ráfagas de viento en movimiento vertical, horizontal y de rotación en guiñada, se generan aleatoriamente en la simulación y se inyectan en el modelo. Las figuras 5.21 muestran las perturbaciones inyectadas después de diez segundos de simulación. Las figuras 5.21a y 5.21b muestran la perturbación en la horizontal en los ejes  $X$  e  $Y$ , mientras que la figura 5.21c muestra la perturbación inyectada en la dinámica vertical. La figura 5.21d muestra la perturbación que simula un momento al rededor del eje  $Z$  en la dinámica de guiñada.

(a) Estimación de la perturbación en el eje  $X$ .(b) Estimación de la perturbación en el eje  $Y$ .(c) Estimación de la perturbación en el eje  $Z$ .

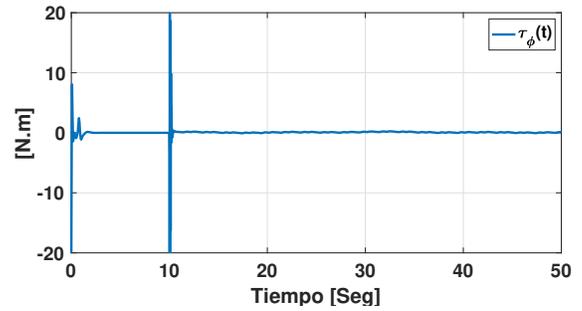
(d) Estimación de la perturbación rotacional en guiñada.

Figura 5.21: Estimación de la perturbación en los tres ejes del espacio tridimensional y la perturbación rotacional en guiñada.

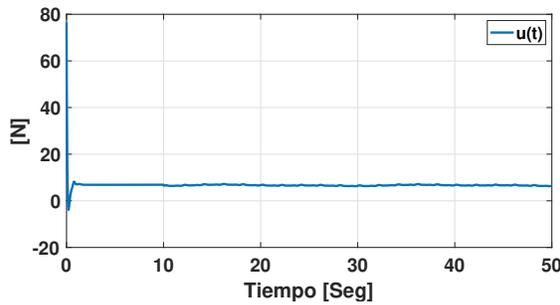
En las figuras 5.22 se muestra el comportamiento de las señales de control por rechazo activo de la perturbación bajo el esquema de seguimiento de trayectoria y que mantiene en equilibrio el péndulo invertido. Las figuras 5.22a y 5.22b muestran las señales de control asociadas a los ángulos de cabeceo y alabeo del cuadrirotor. Las figuras 5.22c y 5.22d muestran el comportamiento de las señales de control en la dinámica de altura y guiñada del cuadrirotor. El efecto de las perturbaciones inyectadas al cuadrirotor después de diez segundos de simulación se reflejan en las señales de control.



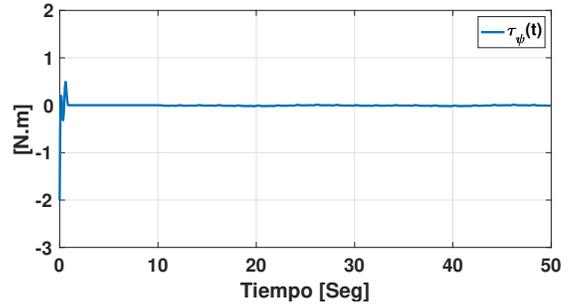
(a) Señal de control  $\tau_\theta$  aplicada al cuadrotor para alcanzar la trayectoria de referencia de traslación en el eje  $X$ .



(b) Señal de control  $\tau_\phi$  aplicada al cuadrotor para alcanzar la trayectoria de referencia de traslación en el eje  $Y$ .



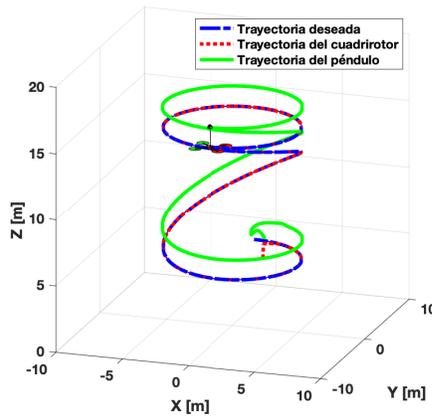
(c) Señal de control  $u$  aplicada al cuadrotor para alcanzar la trayectoria de referencia de traslación en altura.



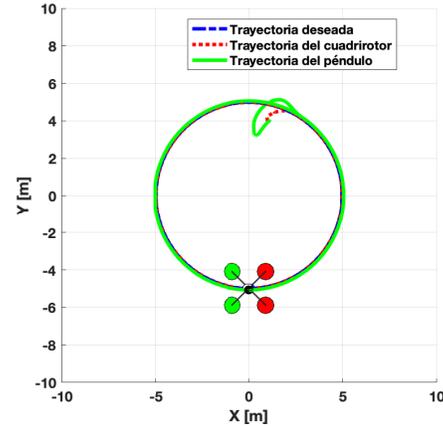
(d) Señal de control  $\tau_\psi$  aplicada al cuadrotor para alcanzar la trayectoria de referencia rotacional en guiñada.

Figura 5.22: Señal de control aplicada al cuadrirotor para alcanzar la trayectoria de referencia en el espacio tridimensional y mantener en equilibrio el péndulo esférico invertido.

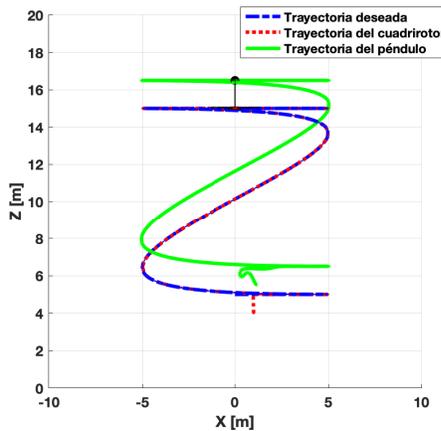
Las figuras 5.23 demuestran el comportamiento virtual del sistema completo con un esquema de control de seguimiento de trayectoria. La figura 5.23a ilustra el seguimiento de la trayectoria tridimensional del cuadrirotor con el péndulo esférico invertido, donde se observa que el sistema parte de una condición inicial diferente a la trayectoria deseada, y por la acción del control por rechazo activo de perturbación converge hacia la trayectoria deseada. Además, se observa el comportamiento del péndulo invertido, cuya cinemática se obtiene a partir de las soluciones numéricas de los elementos  $\alpha$  y  $\beta$ , demostrando que  $\beta$  no converge a cero. La figura 5.23b muestra las proyecciones en el marco  $X - Y$ , y la figura 5.23c y figura 5.23d representan el comportamiento del sistema en los sistemas de coordenadas  $X - Z$  y  $YZ$ .



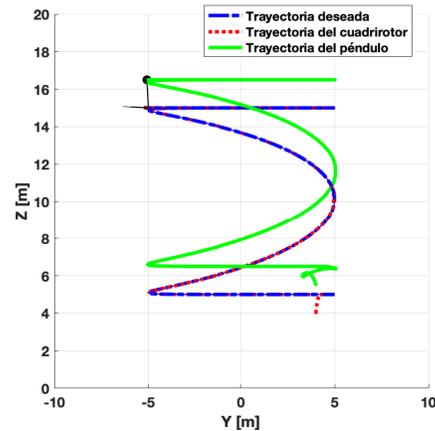
(a) Comportamiento del sistema completo en el espacio tridimensional.



(b) Vista superficial del sistema completo en el marco  $X - Y$ .



(c) Vista lateral en el marco  $X - Z$  que muestra el sistema completo.



(d) Vista lateral en el comportamiento del marco  $Y - Z$  del sistema completo.

Figura 5.23: Animación virtual del sistema completo bajo el esquema de seguimiento de trayectoria que se muestra en los resultados de la simulación en un espacio tridimensional aplicando la estrategia ADRC.

### 5.3.1 Discusión y comparación con resultados previos

La tabla 5.3 resume el rendimiento del error de seguimiento del sistema bajo el esquema de control por rechazo activo de la perturbación aplicado al modelo no lineal. La tabla muestra el error cuadrático medio (RMS) y el error cuadrático integral (ISE); Estos resultados se comparan con los resultados obtenidos en seis artículos seleccionados más recientes. En [21] se aborda el problema del péndulo suspendido considerando el caso plano (espacio bidimensional) obteniendo una oscilación del péndulo invertido a 5 grados. El problema de la oscilación del péndulo suspendido en un espacio bidimensional también se abordado por [26],

utilizando un control basado en pasividad de asignación de interconexión y amortiguación (IDA-PBC). Mientras que [34] estudió el problema del péndulo invertido y un cuadrirotor en un entorno bidimensional obteniendo oscilaciones de ángulo pendular de 9 grados y casi cero grados, respectivamente. Por otro lado [23] abordó el problema para el caso tridimensional, desarrollando una trayectoria óptima para reducir las oscilaciones de la carga, sus resultados muestran un ángulo de oscilación  $\beta$  cercano a cero pero un ángulo de oscilación  $\alpha$  limitado por 11.45 grados. En [24] se estudió el mismo problema usando estrategias de control no lineales que permiten una oscilación de ángulo  $\beta$  también cercana a cero y una oscilación de ángulo  $\alpha$  dentro de 14.32 grados. En [25] se obtienen resultados similares, donde se utiliza un controlador predictivo basado en un modelo para un cuadrirotor en el espacio tridimensional con una oscilación de ángulo  $\beta$  acercándose a cero y una oscilación de ángulo  $\alpha$  dentro de 11,46 grados.

A diferencia de los resultados citados anteriormente, en este trabajo, el ángulo  $\beta$  muestra una oscilación circular alrededor del eje  $Z_B$ , con una tasa de oscilación acotada (alrededor de 20 grados por segundo) pero con una oscilación del ángulo  $\alpha$  que tiende a cero grados. Además, cuando se introducen perturbaciones externas aleatorias variables ( $0.5N$  en la dinámica de traslación y  $0.2N.m$  en la dinámica de guiñada), el ángulo  $\alpha$  permanece limitado a 3.43 grados. Estos resultados muestran un aumento en el desempeño de la estrategia de control propuesta en el sentido de atenuar la oscilación del péndulo en presencia de perturbaciones externas.

Se puede concluir que la estrategia de control presentada para los problemas considerados brinda simplicidad desde el punto de vista de cálculo, y proporciona un buen desempeño cuando se trata de un péndulo invertido o suspendido sobre un cuadrirotor que se mueve en un espacio tridimensional. Además, se ha demostrado que los problemas del péndulo invertido y suspendido pueden abordarse con la misma estrategia de control propuesta.

Variable	RMS	ISE
$e\mathcal{F}_x$	0.0595	0.0441
$e\mathcal{F}_y$	0.0863	0.2606
$e_z$	0.0411	0.0589
$e_\psi$	0.0565	0.0053
$\alpha$	0.0638	0.1423
$\alpha_x$	0.0464	0.0754
$\alpha_y$	0.0441	0.0680

Tabla 5.3: Comportamiento de los errores de seguimiento del sistema.

## 5.4 Resumen de capítulo

En este capítulo se presentaron resultados de simulación del cuadrirotor en dos configuraciones, (1) transportando un péndulo suspendido y (2) transportando un péndulo invertido. Se demuestra que ambas configuraciones pueden abordarse como estrategias de control similares debido a que hay una similitud entre ambos sistemas en sus respectivos modelos lineales. Basado de este hecho, se simularon tres estrategias de control, es decir, (1) control por realimentación, (2) control por modos deslizantes y (3) control por rechazo activo de la perturbación. Estas estrategias de control se implementaron en el modelo completo no lineal, siempre y cuando las soluciones comiencen cerca de la región linealizada del sistema.

# Capítulo 6

## Conclusiones

### 6.1 Conclusiones

En este trabajo se presentó el problema del péndulo suspendido y péndulo invertido sobre un cuadrirotor en el espacio de tres dimensiones. Se presentaron dos modelos dinámicos no lineales para ambos casos que consisten en ocho ecuaciones diferenciales de segundo orden cuyas entradas de control corresponden al de un cuadrirotor convencional, es decir, tres pares asociados a los ángulos de Euler (movimientos de alabeo, cabeceo y guiñada) y una fuerza de empuje total debida a los motores. Se demostró que ambas configuraciones pueden abordarse con similares estrategias de control debido a que existe una similitud en sus respectivos modelos lineales. Haciendo uso de las propiedades de planitud diferencial fue posible proponer salidas auxiliares para controlar la dinámica de traslación horizontal del vehículo. Este hecho es de gran importancia, debido a que las oscilaciones del péndulo pueden controlarse de manera indirecta por medio de la dinámica de traslación del cuadrirotor, y ésta dinámica a su vez se controlan por la dinámica de rotación del cuadrirotor donde se tienen las entradas de control. De este modo la dinámica de traslación horizontal corresponde con un sistema de grado relativo seis, mientras que las dinámicas en altura y guiñada se desacoplan del sistema completo.

Por otra parte, se desarrolló un ambiente de simulación virtual para validar el comportamiento del vehículo y del péndulo ya sea invertido o suspendido, donde una vez que se resuelven de manera numérica los modelos no lineales correspondientes al cuadrirotor y péndulo suspendido o invertido en el espacio de tres dimensiones con las estrategias de control diseñadas, el ambiente de simulación virtual extrae dichas soluciones numéricas y las procesa para mostrar la dinámica de movimiento del sistema.

Cabe mencionar que no se obtuvieron resultados experimentales, debido a los factores que a continuación se detallan.

- Para validar las estrategias de control propuestas en esta tesis es necesario construir una plataforma desde la elección de las piezas físicas que forman el cuadrirotor. También es necesario desarrollar un software que reciba como entradas de control los pares asociados a la dinámica rotacional en los ángulos de alabeo, cabeceo y guiñada; y la fuerza

total de empuje debida a los motores. Si bien se trabajó con plataformas Ardupilot y la plataforma PX4 donde ambos software tiene un control interno sofisticado para estabilizar desde la dinámica rotacional hasta la dinámica de traslación del cuadrórotor, éste control no permite entradas de control como las descritas anteriormente. Las entradas de control que recibe este sistema son las velocidades de traslación horizontal y posiciones cartesianas en el espacio tridimensional, todo esto mediante el sistema ROS. Desarrollar un software desde cero que permita las entras de control de fuerza de empuje y los pares asociados a la dinámica rotacional represento un enorme reto en el cual se trabajo durante los dos primero años del doctorado consiguiendo muy poco éxito. Algunos de los retos involucran principalmente son MIL (Model in the loop), SIL (Software in the loop) y HIL (Hardware in the loop) [46], [47], [48], [49], [50].

## 6.2 Trabajo futuro

Como trabajo futuro se proponen los siguientes puntos.

- Aplicar estrategias de control como control pasivo, control optimo, backstepping.
- Proponer un estudio para la selección de ganancias tanto en los controladores por realimentación de estados, modos deslizantes y el esquema de control ADRC.
- Construir una plataforma (hardware y software) que reciba como entras de control los pares asociados a los ángulos de Euler, es decir, los ángulos de alabeo, cabeceo y guiñada. Adicionalmente, la plataforma debe recibir la fuerza total de empuje para la dinámica en altura.
- Validar las estrategias de control propuestas en una plataforma experimental que cumpla con las características descritas en el punto anterior.
- Extender el modelo dinámico al caso del péndulo invertido y/o suspendido doble.
- Explorar esquemas de control de transporte de cargas que involucren cooperación de cuadrórotos.

# Apéndice A

## Artículos publicados

A continuación se presenta un lista de los artículos publicados durante el periodo Enero de 2018 a Abril de 2024.

### A.1 Artículos de revista indexada al JCR

**A. H. Martinez-Vasquez** and R. Castro-Linares, “Flatness-based sliding mode control for stabilizing a spherical pendulum on a quadrotor”. *Asian J. Control.* (2024), 1–17, DOI 10.1002/asjc.3308.

**Martinez-Vasquez AH**, Castro-Linares R, Rodríguez-Mata AE, Sira-Ramírez H. “Spherical Inverted Pendulum on a Quadrotor UAV: A Flatness and Discontinuous Extended State Observer Approach”. *Machines.* 2023; 11(6):578. <https://doi.org/10.3390/machines11060578>.

### A.2 Artículos de congreso internacional

**A. H. Martinez-Vasquez**, R. Castro-Linares and A. E. Rodriguez-Mata, “Sliding Mode Control of a Quadrotor with Suspended Payload: a Differential Flatness Approach”. 2020 17th International Conference on Electrical Engineering, Computing Science and Automatic Control (CCE), Mexico City, Mexico, 2020, pp. 1-6, doi: 10.1109/CCE50788.2020.9299140.

**A. H. Martinez-Vasquez**, R. Castro-Linares and H. Sira-Ramírez, “Discontinuous Active Disturbance Rejection Control of an Inverted Pendulum on a Quadrotor UAV”. 2022 IEEE International Conference on Engineering Veracruz (ICEV), Boca del Río. Veracruz, Mexico, 2022, pp. 1-6, doi: 10.1109/ICEV56253.2022.9959615.



# Apéndice B

## Programa de animación del cuadirotor

Se presentan los códigos diseñados en Matlab que permiten desarrollar una animación del péndulo invertido o suspendido sobre un cuadirotor en el espacio tridimensional.

### B.1 Programa principal

A continuación se presenta el programa principal que permite animar el cuadirotor en el espacio de tres dimensiones. Todos los scripts pueden encontrarse en la siguiente liga [https://drive.google.com/drive/folders/1zjay2IM1zph4rHQPD1bIuMaZx90iaLVH?usp=drive\\_link](https://drive.google.com/drive/folders/1zjay2IM1zph4rHQPD1bIuMaZx90iaLVH?usp=drive_link) y [https://drive.google.com/drive/folders/1m4ci86XqrfgyvfScftufrJmsl7\\_2Y7uC?usp=drive\\_link](https://drive.google.com/drive/folders/1m4ci86XqrfgyvfScftufrJmsl7_2Y7uC?usp=drive_link).

```
% Esta simulación grafica un robot unicycle compuesto por un poligono  
% rotado sobre el eje Z. Éste se mueve a lazo abierto.
```

```
x1=Fx';  
tiempo=tiempo';  
z1=z';  
theta=theta';  
zs=z_d';  
xs=Fx_d';  
alpha=alpha';
```

```
tfin = 30; %tiempo de simulación  
To = 0.0001; %tiempo de muestreo  
t = tiempo; %tiempo
```

```
escala=1.5;
```

```
l=1.5;
```

```

x=x1;
y=Fy;
z=z1;
th=-theta;
alp=-1*alpha;
be=beta;

%Trayectorias deseadas
xs=xs;
ys=Fy_d;
zs=zs;

%Animación
scrsz = get(groot,'ScreenSize'); % Obtiene el tamaño de la pantalla.
offx = 350; offy = 200; %Corrimientos para la fig
figpos = [offx offy scrsz(3)/2 scrsz(4)/2];

f1 = figure(1);
set(f1,'Color','w','Position',figpos);

% grid on, axis equal, axis([-7 15 -5 5 0 15]);
grid on, axis equal, axis([-10 10 -10 10 0 20]);
% title('Simulación de un cuadrirotor con carga suspendida')
%title('Flying inverted Pendulum')
xlabel('X [m]'), ylabel('Y [m]'), zlabel('Z [m]')

cuadri_geometria1(escala);
pendulo_geometria(escala);
Ho = cuadri_rotacion1(x(1),y(1),z(1),phi(1),th(1),psi(1),-alp(1),beta(1),'g');
% hold on
%H1 = plot(x(1),z(1),'om');

view([0,-90,0]) %Vista en planta
pause(2)

paso =1000;
p1=plot3(xs,ys,zs,'b','linewidth',1)
j=1;

tiemp = ['t = ',num2str(tiempo(1)), ' s'];
Ht = text(7.5,0,14.5,tiemp,'color','k','FontSize',12);
for i=1:paso:length(x)
    t_k=tiempo(i);
    delete(Ht);
    delete(Ho) %Borra el objeto Ho para que no se empalme
    Ho = cuadri_rotacion1(x(i),y(i),z(i),phi(i),-th(i),psi(i),-alp(i),beta(i),'g');
    hold on
    %H1 = plot3(x(i),y(i),z(i),'+m');
    H2 = plot3(x(i),y(i),z(i),'r');
    H3 = plot3(xp(i),yp(i),zp(i),'g');

```

```

% view([-30.0,30.0]);

%view([20+1*t_k,-30]);
%view([30,-90,30]);

% view([30,-90,30]);
% view([0,-90,0]); %% para frame x-z
view([0,0,90]); %% para frame x-y
%view([90,0,0]); %% para frame y-z

%% imprime el tiempo
% tiempo = ['time = ',num2str(tiempo(i)),' s'];
% Ht = text(5,0,18,tiemp,'color','k','FontSize',12);

% movieVector(j)=getframe(gcf);
% j=j+1;

%% Coordinadas del pendulo
% xp(i)=x(i)+l*sin(alp(i))*cos(beta(i));
% yp(i)=y(i)+l*cos(alp(i))*sin(beta(i));
% zp(i)=z(i)-l*cos(alp(i));
pause(0.00001)

end
%view([0,-90,0]);
p1=plot3(xs,ys,zs,'b-.','linewidth',3);
p2=plot3(x,y,z,'r','linewidth',3);
% xp=x+l*(sin(alp).*cos(beta));
% yp=y+l*(cos(alp).*sin(beta));
% zp=z+l*cos(alp);
p3=plot3(xp,yp,zp,'g','linewidth',3);
legend([p1 p2 p3],{'Trayectoria deseada','Trayectoria cuadirotor',
'Trayectoria pendulo'})

%%Graba video
% movieVector(j)=getframe(gcf);

%% Grafica en los planos
view([30,-90,30]);
% view([0,-90,0]); %% para frame x-z
% view([0,0,90]); %% para frame x-y
% view([90,0,0]); %% para frame y-z

%% Garda video
% videoo= VideoWriter('inverted_quad','MPEG-4');
% videoo.FrameRate=30;
%
% open(videoo);
% writeVideo(videoo, movieVector);

```

```
% close(videoo);
```

## B.2 Bibliotecas para el cuerpo de cuadrirotor y péndulo esférico

A continuación se presenta la biblioteca que define el cuerpo del cuadrirotor,

```
function robot_geometria(scale)
%Esta func genera las coordenadas de las aristas del poligono que será
%interpretado como el robot móvil

if nargin < 1 %Si no se manda el argumento, scale=1
    scale = 1;
end

global Cuadri
% global Pendulo

%%Se crea un objeto global llamado 'Robot' con las dimensiones físicas
%%Placas superiores e inferiores
Cuadri.Ci = [0.100 0.100 -0.100 -0.200 -0.200 -0.100;
            -0.150 0.150 0.150 0.075 -0.075 -0.150;
            0.050 0.050 0.050 0.050 0.050 0.050]*scale;
Cuadri.Fi = [0.100 0.200 0.200 0.100;
            -0.150 -0.075 0.075 0.150;
            0.050 0.050 0.050 0.050]*scale;

Cuadri.Cs = [0.100 0.100 -0.100 -0.200 -0.200 -0.100;
            -0.150 0.150 0.150 0.075 -0.075 -0.150;
            -0.050 -.050 -.050 -.050 -.050 -.050]*scale;
Cuadri.Fs = [0.100 0.200 0.200 0.100;
            -0.150 -0.075 0.075 0.150;
            -0.050 -0.050 -0.050 -0.050]*scale;
%Placa superior verde formada por 4 puntos p1(x1,y1,z1),...,p4(x4,y4,z4)
% placa=[x1 x2 x3 x4; y1 y2 y3 y4; z1 z2 z3 z4];

%% Placas verticales
Cuadri.Fa1 = [0.200 0.200 0.200 0.200;
            -0.075 0.075 0.075 -0.075;
            -0.050 -0.050 0.050 0.050]*scale;
Cuadri.Fa2 = [0.200 0.100 0.100 0.200;
            0.075 0.150 0.150 0.075;
            -0.050 -0.050 0.050 0.050]*scale;
Cuadri.Fa3 = [0.100 -0.100 -0.100 0.100;
            0.150 0.150 0.150 0.150;
            -0.050 -0.050 0.050 0.050]*scale;
Cuadri.Fa4 = [-0.100 -0.200 -0.200 -0.100;
```

## B.2. BIBLIOTECAS PARA EL CUERPO DE CUADRIROTOR Y PÉNDULO ESFÉRICO 111

```
0.150 0.075 0.075 0.150;
-0.050 -0.050 0.050 0.050]*scale;
Cuadri.Fa5 = [-0.200 -0.200 -0.200 -0.200;
0.075 -0.075 -0.075 0.075;
-0.050 -0.050 0.050 0.050]*scale;
Cuadri.Fa6 = [-0.200 -0.100 -0.100 -0.200;
-0.075 -0.150 -0.150 -0.075;
-0.050 -0.050 0.050 0.050]*scale;
Cuadri.Fa7 = [-0.100 0.100 0.100 -0.100;
-0.150 -0.150 -0.150 -0.150;
-0.050 -0.050 0.050 0.050]*scale;
Cuadri.Fa8 = [0.100 0.200 0.200 0.100;
-0.150 -0.075 -0.075 -0.150;
-0.050 -0.050 0.050 0.050]*scale;

Cuadri.brazo1s=[0.6-0.01 0.6+0.01 -0.6+0.01 -0.6-0.01;
0.6+0.01 0.6-0.01 -0.6-.01 -0.6+.01;
0.01 0.01 0.01 0.01]*scale;
Cuadri.brazo1ld=[0.6+0.01 0.6+0.01 -0.6+0.01 -0.6+0.01;
0.6-0.01 0.6-0.01 -0.6-0.01 -0.6-0.01;
0.01 -0.01 -0.01 0.01]*scale;

Cuadri.brazo2s=[0.6+0.01 0.6-0.01 -0.6-0.01 -0.6+0.01;
-0.6+0.01 -0.6-0.01 0.6-.01 0.6+.01;
0.01 0.01 0.01 0.01]*scale;
Cuadri.brazo2ld=[0.6-0.01 0.6-0.01 -0.6-0.01 -0.6-0.01;
-0.6-0.01 -0.6-0.01 0.6-0.01 0.6-0.01;
0.01 -0.01 -0.01 0.01]*scale;

%% Helices
Cuadri.N = 12;

Cuadri.xroda1 = 0.6+(0.3*cos(0:2*pi/Cuadri.N:2*pi));
Cuadri.yroda1 = 0.6+(0.3*sin(0:2*pi/Cuadri.N:2*pi));

Cuadri.xroda2 = 0.6+(0.3*cos(0:2*pi/Cuadri.N:2*pi));
Cuadri.yroda2 = 0.3*(-2+sin(0:2*pi/Cuadri.N:2*pi));

Cuadri.xroda3 = -0.6+(-0.3*cos(0:2*pi/Cuadri.N:2*pi));
Cuadri.yroda3 = -0.6+(-0.3*sin(0:2*pi/Cuadri.N:2*pi));
Cuadri.xroda4 = -0.6+(-0.3*cos(0:2*pi/Cuadri.N:2*pi));
Cuadri.yroda4 = 0.6+(0.3*sin(0:2*pi/Cuadri.N:2*pi));

Cuadri.Roda1 = [Cuadri.xroda1; Cuadri.yroda1; 0*ones(size(Cuadri.xroda1))]*scale;
Cuadri.Roda2 = [Cuadri.xroda2; Cuadri.yroda2; 0*ones(size(Cuadri.xroda2))]*scale;
Cuadri.Roda3 = [Cuadri.xroda3; Cuadri.yroda3; 0*ones(size(Cuadri.xroda3))]*scale;
Cuadri.Roda4 = [Cuadri.xroda4; Cuadri.yroda4; 0*ones(size(Cuadri.xroda4))]*scale;
```

El siguiente código corresponde con el cable rígido y la esfera del péndulo

```
function pendulo_geometria(scala)
%UNTITLED Summary of this function goes here
% Detailed explanation goes here
if nargin < 1 %Si no se manda el argumento, scale=1
    scale = 1;
end

global Pendulo

Pendulo.l=1;

Pendulo.ladoxz = [0.01 0.01 -0.01 -0.01;
                 0 0 0 0;
                 0 -1 -1 0]*scala;
Pendulo.ladoxy = [0 0 0 0;
                 0.01 0.01 -0.01 -0.01;
                 0 -1 -1 0]*scala;

    Pendulo.N = 12;
Pendulo.xyroda = 0.15*cos(0:2*pi/Pendulo.N:2*pi);
Pendulo.zroda = 0.15*(+sin(0:2*pi/Pendulo.N:2*pi))-1;

Pendulo.xrueda = 0.15*cos(0:2*pi/Pendulo.N:2*pi);
Pendulo.yrueda = 0.15*(+sin(0:2*pi/Pendulo.N:2*pi));

Pendulo.Masaxz = [Pendulo.xyroda; 0*ones(size(Pendulo.xyroda));
                 Pendulo.zroda]*scala;
Pendulo.Masayz = [0*ones(size(Pendulo.xyroda)) ; Pendulo.xyroda ;
                 Pendulo.zroda]*scala;
Pendulo.Masaxy = [Pendulo.xrueda ; Pendulo.yrueda;
                 -1*ones(size(Pendulo.xrueda)) ]*scala;
```

### B.3 Rotación del cuerpo del cuadrirrotor y péndulo en el espacio tridimensional

El siguiente código corresponde la función para la rotación en el espacio de tres dimensiones del sistema completo, es decir, el péndulo y el cuerpo del cuadrirrotor.

```
function P3DX = cuadri_rotacion(x,y,z,phi,theta,psi,alp,beta,color)

global Cuadri
global Pendulo
%x,y,phi = coordenadas de postura. color = color usado.
%psi=theta ;
%% Matriz de Rotación sobre el eje Z
% Rot = [cos(psi) -sin(psi) 0;
%        sin(psi) cos(psi) 0;
```

### B.3. ROTACIÓN DEL CUERPO DEL CUADRIROTOR Y PÉNDULO EN EL ESPACIO TRIDIMENS

```
%           0       0       1];
%%% Matriz de rotacion sobre el eje y para el UAV en el plano
% Rot = [cos(theta) 0 sin(theta);
%           0       1       0;
%       -sin(theta) 0  cos(theta)];

Rot =
[cos(psi)*cos(theta)  cos(psi)*sin(phi)*sin(theta)-cos(phi)*sin(psi)
sin(phi)*sin(psi)+cos(phi)*cos(psi)*sin(theta);
cos(theta)*sin(psi)  cos(phi)*cos(psi)+sin(phi)*sin(psi)*sin(theta)
cos(phi)*sin(psi)*sin(theta)-cos(psi)*sin(phi);
-sin(theta)  cos(theta)*sin(phi)  cos(phi)*cos(theta)];

%% Matriz de rotacion en y del pendulo.
%% Se requiere expandir la matriz para el caso del espacio.
alp_y=-atan2(sin(alp)*cos(beta),cos(alp));
alp_x=atan2(sin(alp)*sin(beta),cos(alp));

psi_p=0;
Rot_Load =
[cos(psi_p)*cos(alp_y)  cos(psi_p)*sin(alp_x)*sin(alp_y)-cos(alp_x)*sin(psi_p)
sin(alp_x)*sin(psi_p)+cos(alp_x)*cos(psi_p)*sin(alp_y);
cos(alp_y)*sin(psi_p)  cos(alp_x)*cos(psi_p)+sin(alp_x)*sin(psi_p)*sin(alp_y)
cos(alp_x)*sin(psi_p)*sin(alp_y)-cos(psi_p)*sin(alp_x);
-sin(alp_y)  cos(alp_y)*sin(alp_x)  cos(alp_x)*cos(alp_y)];

%%Todas las aristas que forman las placas/poligonos y ruedas del Cuadri se rotan
Cir = Rot*CQuadri.Ci;
Fir = Rot*CQuadri.Fi;
Csr = Rot*CQuadri.Cs;
Fsr = Rot*CQuadri.Fs;

Fa1r = Rot*CQuadri.Fa1;
Fa2r = Rot*CQuadri.Fa2;
Fa3r = Rot*CQuadri.Fa3;
Fa4r = Rot*CQuadri.Fa4;
Fa5r = Rot*CQuadri.Fa5;
Fa6r = Rot*CQuadri.Fa6;
Fa7r = Rot*CQuadri.Fa7;
Fa8r = Rot*CQuadri.Fa8;

% Brazos del UAV
Bra1s = Rot*CQuadri.brazo1s;
Bra1d = Rot*CQuadri.brazo1ld;

Bra2s = Rot*CQuadri.brazo2s;
Bra2d = Rot*CQuadri.brazo2ld;

% Pendulo
```

```

Pendulo1 = Rot_Load*Pendulo.ladoxz;
Pendulo2 = Rot_Load*Pendulo.ladoxy;

% Esfera
Masa_xz=Rot_Load*Pendulo.Masaxz;
Masa_yz=Rot_Load*Pendulo.Masayz;
Masa_xy=Rot_Load*Pendulo.Masaxy;

Roda1r = Rot*Cuadri.Roda1;
Roda2r = Rot*Cuadri.Roda2;
Roda3r = Rot*Cuadri.Roda3;
Roda4r = Rot*Cuadri.Roda4;

% Se crean las 'caras' del Pionner. patch crea poligonos cerrados con color
P3DX(1) = patch(Fir(1,:) +x, Fir(2,:) +y, Fir(3,:) +z, [0 0 1]);
P3DX(2) = patch(Cir(1,:) +x, Cir(2,:) +y, Cir(3,:) +z, [1 1 1]);
P3DX(3) = patch(Fsr(1,:) +x, Fsr(2,:) +y, Fsr(3,:) +z, color);
P3DX(4) = patch(Csr(1,:) +x, Csr(2,:) +y, Csr(3,:) +z, [1 1 1]);
P3DX(5) = patch(Fa1r(1,)+x, Fa1r(2,)+y, Fa1r(3,)+z, [0.7 0 0]);
P3DX(6) = patch(Fa2r(1,)+x, Fa2r(2,)+y, Fa2r(3,)+z, [0.7 0 0]);
P3DX(7) = patch(Fa3r(1,)+x, Fa3r(2,)+y, Fa3r(3,)+z, [0.7 0 0]);
P3DX(8) = patch(Fa4r(1,)+x, Fa4r(2,)+y, Fa4r(3,)+z, [0.7 0 0]);
P3DX(9) = patch(Fa5r(1,)+x, Fa5r(2,)+y, Fa5r(3,)+z, [0.7 0 0]);
P3DX(10) = patch(Fa6r(1,)+x, Fa6r(2,)+y, Fa6r(3,)+z, [0.7 0 0]);
P3DX(11) = patch(Fa7r(1,)+x, Fa7r(2,)+y, Fa7r(3,)+z, [0.7 0 0]);
P3DX(12) = patch(Fa8r(1,)+x, Fa8r(2,)+y, Fa8r(3,)+z, [0.7 0 0]);

P3DX(13) = patch(Roda1r(1,)+x,Roda1r(2,)+y,Roda1r(3,)+z,'r');
P3DX(14) = patch(Roda2r(1,)+x,Roda2r(2,)+y,Roda2r(3,)+z,'r');
P3DX(15) = patch(Roda3r(1,)+x,Roda3r(2,)+y,Roda3r(3,)+z,'g');
P3DX(16) = patch(Roda4r(1,)+x,Roda4r(2,)+y,Roda4r(3,)+z,'g');

P3DX(17) = patch(Bra1s(1,)+x,Bra1s(2,)+y,Bra1s(3,)+z, [1,1,1]);
P3DX(18) = patch(Bra1d(1,)+x,Bra1d(2,)+y,Bra1d(3,)+z, [0 0 1]);

P3DX(19) = patch(Bra2s(1,)+x,Bra2s(2,)+y,Bra2s(3,)+z, [1,1,1]);
P3DX(20) = patch(Bra2d(1,)+x,Bra2d(2,)+y,Bra2d(3,)+z, [0 0 1]);

%%% pendulo
P3DX(21) = patch(Pendulo1(1,)+x,Pendulo1(2,)+y,Pendulo1(3,)+z, [0 0 1]);
P3DX(22) = patch(Pendulo2(1,)+x,Pendulo2(2,)+y,Pendulo2(3,)+z, [0 0 1]);

% Masa del pendulo
P3DX(23) = patch(Masa_xz(1,)+x,Masa_xz(2,)+y,Masa_xz(3,)+z, 'k');
P3DX(24) = patch(Masa_yz(1,)+x,Masa_yz(2,)+y,Masa_yz(3,)+z, 'k');
P3DX(25) = patch(Masa_xy(1,)+x,Masa_xy(2,)+y,Masa_xy(3,)+z, 'k');

```

# Bibliografía

- [1] Amazon prime air's drone takes flight with aws and siemens. <https://aws.amazon.com/es/partners/success/prime-air-siemens/>, 2020. Accedido: (14 Noviembre 2023).
- [2] Delivering vital medicines via drone. <https://www.dhlexpress.be/en/news/we-care/dhl-parcelcopter/>, 2020. Accedido: (15 Noviembre 2023).
- [3] Chaparral, an autonomous evtol platform for middle-mile logistics, humanitarian aid shipping, and military resupply. <https://elroyair.com/chaparral/aircraft/>, 2023. Accedido: (15 Noviembre 2023).
- [4] Por ALEXIS C. MADRIGAL. Inside google's secret drone-delivery program. <https://x.company/projects/wing/>, 2014. [Visitado el 04-07-2018].
- [5] Wing transforming the way goods are transported. <https://x.company/projects/wing/>, 2023. Accedido: (20 Noviembre 2023).
- [6] Gregory L. Baker and James A. Blackburn. *The pendulum, a case study in physics*. Oxford University Press, 2005.
- [7] Sardor Israilov, Li Fu, Jesús Sánchez-Rodríguez, Franco Fusco, Guillaume Allibert, Christophe Raufaste, and Médéric Argentina. Reinforcement learning approach to control an inverted pendulum: A general framework for educational purposes. *PLOS ONE*, 18(2):1–15, 02 2023.
- [8] Bin He, Shuai Wang, and Yongjia Liu. Underactuated robotics: A review. *International Journal of Advanced Robotic Systems*, 16(4):1729881419862164, 2019.
- [9] Michel Fliess, Jean Lévine, Philippe Martin, and Pierre Rouchon. Flatness and defect of non-linear systems: introductory theory and examples. *International Journal of Control*, 61:13–27, 06 1995.
- [10] Xiao Liang and Yuli Hu. Tracking control and differential flatness of quadrotor with cable-suspended load. In *2019 IEEE 3rd Information Technology, Networking, Electronic and Automation Control Conference (ITNEC)*, pages 88–92, 2019.

- [11] Koushil Sreenath, Taeyoung Lee, and Vijay Kumar. Geometric control and differential flatness of a quadrotor uav with a cable-suspended load. In *52nd IEEE Conference on Decision and Control*, pages 2269–2274, 2013.
- [12] Prasanth Kotaru, Guofan Wu, and Koushil Sreenath. Differential-flatness and control of quadrotor(s) with a payload suspended through flexible cable(s). In *2018 Indian Control Conference (ICC)*, pages 352–357, 2018.
- [13] Taeyoung Lee, Koushil Sreenath, and Vijay Kumar. Geometric control of cooperating multiple quadrotor uavs with a suspended payload. In *52nd IEEE Conference on Decision and Control*, pages 5510–5515, 2013.
- [14] Taeyoung Lee. Geometric control of multiple quadrotor uavs transporting a cable-suspended rigid body. In *53rd IEEE Conference on Decision and Control*, pages 6155–6160, 2014.
- [15] Yuan Ping, Juntong Qi, and Chong Wu. Quadrotor transporting cable suspended load using adrc. In *2019 Chinese Control Conference (CCC)*, pages 8008–8013, 2019.
- [16] Zhibao Wang, Juntong Qi, Chong Wu, Mingming Wang, Yuan Ping, and Ji Xin. Control of quadrotor slung load system based on double adrc. In *2020 39th Chinese Control Conference (CCC)*, pages 6810–6815, 2020.
- [17] Guo Minhuan, Dongbing Gu, Wenzhong Zha, Xinhua Zhu, and Yan Su. Controlling a quadrotor carrying a cable-suspended load to pass through a window. *Journal of Intelligent & Robotic Systems*, 98:387–401, 2020.
- [18] Richard Andrade, Guilherme V. Raffo, and Julio E. Normey-Rico. Model predictive control of a tilt-rotor uav for load transportation. In *2016 European Control Conference (ECC)*, pages 2165–2170, 2016.
- [19] Tartaglione Gaetano, Egidio D’Amato, Marco Ariola, Pierluigi Salvo Rossi, and Tor Arne Johansen. Model predictive control for a multi-body slung-load system. *Robotics and Autonomous Systems*, 92:1–11, 2017.
- [20] Clark Youngdong Son, Taewan Kim, Suseong Kim, and H. Jin Kim. Model predictive control of a multi-rotor with a slung load for avoiding obstacles. In *2017 14th International Conference on Ubiquitous Robots and Ambient Intelligence (URAI)*, pages 232–237, 2017.
- [21] J. B. Ubbink and J. A. A. Engelbrecht. Sequence-constrained trajectory planning and execution for a quadrotor uav with suspended payload. *IFAC-PapersOnLine*, 53(2):9405–9411, 2020. 21st IFAC World Congress.
- [22] Peter E. Hart, Nils J. Nilsson, and Bertram Raphael. A formal basis for the heuristic determination of minimum cost paths. *IEEE Transactions on Systems Science and Cybernetics*, 4(2):100–107, 1968.

- [23] Hashemi Danial and Heidari Hamidreza. Trajectory planning of quadrotor uav with maximum payload and minimum oscillation of suspended load using optimal control. *Journal of Intelligent & Robotic Systems*, 100:1369–1381, 2020.
- [24] M.E. Guerrero-Sánchez, R. Lozano, P. Castillo, O. Hernández-González, C.D. García-Beltrán, and G. Valencia-Palomo. Nonlinear control strategies for a uav carrying a load with swing attenuation. *Applied Mathematical Modelling*, 91:709–722, 2021.
- [25] Norberto Urbina-Brito, María-Eusebia Guerrero-Sánchez, Guillermo Valencia-Palomo, Omar Hernández-González, Francisco-Ronay López-Estrada, and José Antonio Hoyo-Montaño. A predictive control strategy for aerial payload transportation with an unmanned aerial vehicle. *Mathematics*, 9(15), 2021.
- [26] M. E. Guerrero-Sánchez, O. Hernández-González, G. Valencia-Palomo, D. A. Mercado-Ravell, F. R. López-Estrada, and J. A. Hoyo-Montaño. Robust ida-pbc for under-actuated systems with inertia matrix dependent of the unactuated coordinates: application to a uav carrying a load. *Nonlinear Dynamics*, 105:3225–3238, 2021.
- [27] Ameya R. Godbole and Kamesh Subbarao. Nonlinear control of unmanned aerial vehicles with cable suspended payloads. *Aerospace Science and Technology*, 93:105299, 2019.
- [28] Markus Hehn and Raffaello D’Andrea. A flying inverted pendulum. In *2011 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pages 763–770, 2011.
- [29] Haoyu Chen, Yang Yang, and Jianan Sun. Improved genetic algorithm based optimal control for a flying inverted pendulum. In *2019 3rd International Conference on Electronic Information Technology and Computer Engineering (EITCE)*, pages 1428–1432, 2019.
- [30] Rafael Figueroa, Aleksandra Faust, Patricio Cruz, Lydia Tapia, and Rafael Fierro. Reinforcement learning for balancing a flying inverted pendulum. In *Proceeding of the 11th World Congress on Intelligent Control and Automation*, pages 1787–1793, 2014.
- [31] Marcelino M. de Almeida and Guilherme V. Raffo. Nonlinear balance control of an inverted pendulum on a tilt-rotor uav. *IFAC-PapersOnLine*, 48(9):168–173, 2015. 1st IFAC Workshop on Advanced Control and Navigation for Autonomous Aerospace Vehicles ACNAAV’15.
- [32] Christoph Hintz, Shakeeb Ahmad, Joseph Kloeppel, and Rafael Fierro. Robust hybrid control for swinging-up and balancing an inverted pendulum attached to a uav. In *2017 IEEE Conference on Control Technology and Applications (CCTA)*, pages 1550–1555, 2017.
- [33] D. Spencer Maughan, Ishmaal T. Erekson, and Rajnikant Sharma. Flying inverted pendulum trajectory control on robust intelligent sensing and control multi-agent analysis platform. In *2015 International Conference on Unmanned Aircraft Systems (ICUAS)*, pages 1279–1284, 2015.

- [34] C. A. Villaseñor-Rios, A. Luviano-Juárez, N. B. Lozada-Castillo, B. E. Carvajal-Gómez, D. Mújica-Vargas, and O. Gutiérrez-Frías. Flatness-based active disturbance rejection control for a pvtol aircraft system with an inverted pendular load. *Machines*, 10(7), 2022.
- [35] Adrian H. Martinez-Vasquez, Rafael Castro-Linares, and H. Sira-Ramírez. Discontinuous active disturbance rejection control of an inverted pendulum on a quadrotor uav. In *2022 IEEE International Conference on Engineering Veracruz (ICEV)*, pages 1–6, 2022.
- [36] Adrian H. Martinez-Vasquez, Rafael Castro-Linares, Abraham Efraím Rodríguez-Mata, and Hebertt Sira-Ramírez. Spherical inverted pendulum on a quadrotor uav: A flatness and discontinuous extended state observer approach. *Machines*, 11(6), 2023.
- [37] Yaser Alothman, Wesam Jasim, and Dongbing Gu. Quad-rotor lifting-transporting cable-suspended payloads control. pages 1–6, 2015.
- [38] Patricio Cruz and Rafael Fierro. Autonomous lift of a cable-suspended load by an unmanned aerial robot. pages 802–807, 2014.
- [39] Patricio J. Cruz, Meeko Oishi, and Rafael Fierro. Lift of a cable-suspended load by a quadrotor: A hybrid system approach. pages 1887–1892, 2015.
- [40] Farhad A. Goodarzi. Autonomous aerial payload delivery with quadrotor using varying length cable. pages 394–399, 2016.
- [41] All the world’s rotorcraft. [https://www.aviastar.org/helicopters\\_eng/full\\_list.html](https://www.aviastar.org/helicopters_eng/full_list.html). Accedido: (4 Diciembre 2023).
- [42] *The Quad-rotor Rotorcraft*, pages 39–59. Springer London, London, 2005.
- [43] H. Sira-Ramírez and S.K. Agrawal. *Differentially Flat Systems*. 2004.
- [44] Shi Jingxin Utkin Vadim, Guldner Jurgen. *Sliding Mode Control in Electro-Mechanical Systems*. 2009.
- [45] Hassan K Khalil. *Nonlinear systems; 3rd ed.* Prentice-Hall, Upper Saddle River, NJ, 2002.
- [46] Jonathan Nibert, Marc E. Herniter, and Zachariah Chambers. Model-based system design for mil, sil, and hil. *World Electric Vehicle Journal*, 5(4):1121–1130, 2012.
- [47] Changwoo Park, Seunghwan Chung, and Hyeongcheol Lee. Vehicle-in-the-loop in global coordinates for advanced driver assistance system. *Applied Sciences*, 10(8), 2020.
- [48] Clément Mayet and Lahoucine Id-Khajine. Introduction to hardware-in-the-loop (hil) simulations of electrical power systems. In Jorge García, editor, *Encyclopedia of Electrical and Electronic Power Engineering*, pages 590–599. Elsevier, Oxford, 2023.

- [49] Sitl simulator (software in the loop). <https://ardupilot.org/dev/docs/sitl-simulator-software-in-the-loop.html>. Accedido: (15 Noviembre 2023).
- [50] Px4 autopilot user guide. <https://docs.px4.io/main/en/>. Accedido: (15 Noviembre 2023).