CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y ESTUDIOS AVANZADOS DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

UNIDAD ZACATENCO

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA EDUCATIVA

EL PAPEL DE LA VISUALIZACIÓN EN LA CONSTRUCCIÓN DE POLÍGONOS REGULARES POR ESTUDIANTES DE EDUCACIÓN MEDIA SUPERIOR

Tesis que presenta

VICTORIA OROZCO VIDAL

Para obtener el grado de

MAESTRO EN CIENCIAS

En la especialidad de

MATEMATICA EDUCATIVA

Director de tesis: **Dr. Gonzalo Zubieta Badillo**

Ciudad de México — Noviembre, 2023

Agradezco a toda la clase trabajadora que con su esfuerzo hicieron posible que el Consejo Nacional de Humanidades Ciencias y Tecnologías me brindara el apoyo económico necesario para la realización de mis estudios de maestría.

CVU: 1148004

Agradecimientos

En primer lugar, agradezco a Dios por la vida por su bondad hacia mí, por permitirme cumplir mis sueños y metas guiándome a través de cada decisión tomada.

En segundo lugar, a mi familia. A mis padres Herculano y Mari porque son parte importante de este trabajo, ya que sin su apoyo y amor incondicional nada de esto hubiera sido posible, a mis hermanos Lalo y Dulce por la inspiración y soporte brindado, a mi cuñada y sobrinos que me brindaron su cariño y sostén aun a la distancia. A mis tíos Gollo y Gladis porque gracias a su vocación decidí seguir este camino en mi vida y por estar siempre junto a mis padres y hermanos cuando no estuve cerca. A César por estar siempre a mi lado en tan importante parte de mi vida, por estar a mi lado en noches de desvelo y estudio.

A mi asesor, el Dr. Gonzalo muchas gracias por aceptar mi proyecto y saberme guiar con la sabiduría y paciencia que lo caracterizan. A mis sinodales los Dres. Salvador Moreno y Jesús Riestra por tomarse el tiempo necesario para leer este trabajo y por sus comentarios que ayudaron a la mejora de este proyecto.

Al departamento y todos los que en el laboran, a mis profesores por los conocimientos compartidos.

A los alumnos que participaron en este estudio y la institución que me abrió sus puertas para realizar la aplicación de este trabajo.

Finalmente, pero no menos importantes, a mis compañeros y amigos, Mayra, Yadira, Hardi, Ceci, Daniel, José Luís, principalmente a Daniela Ropero y Mario Mayorga por las sugerencias para mi trabajo y el tiempo dedicado a escuchar las ideas que se vieron plasmadas en este proyecto.

Dedico esta tesis con mucho amor a mis padres motor principal en mi vida, a mis hermanos cómplices de vida y aventuras, a César compañero incondicional y a mis sobrinos por ser inspiración.

Índice de contenido

Resumen

Esta investigación está centrada en proponer una posible solución para la problemática observada en un aula de educación medio superior en el estado de Tabasco. Dicha problemática es la falta de conocimiento de las características y propiedades de los polígonos por parte de los alumnos.

La propuesta presentada es un diseño de actividades en GeoGebra, en la cual se toma en cuenta la visualización como una habilidad útil para la presentación y aprendizaje de los temas matemáticos, en este caso los polígonos y sus características a partir de sus diagonales, así como las fases del modelo de Van Hiele las cuales fueron utilizadas para realizar actividades con el fin de ayudar a los estudiantes a avanzar en los niveles del modelo (Vargas, G. y Gamboa, R., 2013).

El análisis de lo realizado por los alumnos se hizo a partir de la categorización del nivel de conocimiento, tomando en cuenta los niveles del modelo de Van Hiele los que a su vez fueron de ayuda para observar si la comprensión que los alumnos poseen es relacional o instrumental, esto a partir de lo que menciona Skemp en el capítulo 12 de su libro "The Psychology of Learning Mathematics"

A partir del análisis realizado se pudo observar que, aunque el nivel de los alumnos oscila entre el nivel 1 y 2 del modelo de Van Hiele, la comprensión presente no necesariamente es instrumental.

Abstract

This research focuses on proposing a possible solution to the problem observed in a high school classroom in the Mexican state of Tabasco. This problem is the lack of knowledge of the characteristics and properties of polygons by the students.

The proposal presented is the design of activities in GeoGebra, where visualization is taken as a useful skill for the presentation and learning of mathematical topics, in this case the polygons and their characteristics from their diagonals, as well as the phases of Van Hiele's model that help to carry out activities for students to advance in the levels of the model (Vargas, G. y Gamboa, R., 2013).

The analysis of what was done by the students was based on the categorization of the level of knowledge, taking into account the levels of Van Hiele's model, which in turn were helpful to observe whether the understanding that the students have is relational or instrumental, based on what Skemp mentions in chapter 12 of his book "The psychology of learning mathematics".

From the analysis it was possible to observe that, although the students´s level oscillates between level 1 and 2 of Van Hiele's model, the present understanding is not necessarily instrumental.

Presentación

En este trabajo se presenta un análisis de los resultados obtenidos en la aplicación de un diseño acerca de los polígonos regulares y sus propiedades en un entorno de geometría dinámica. El cual fue aplicado a alumnos que cursaban el segundo semestre del nivel de educación medio superior.

Para la realización de las actividades se tomó en cuenta la visualización desde el punto de vista de Arcavi (2003), pues menciona que esta es la capacidad de interpretar datos a través de imágenes o diagramas usando diversas herramientas ya sean análogas como el papel y lápiz o tecnológicas como GeoGebra, las cuales facilitan la interpretación y documentación de la información. Así como las fases del modelo de Van Hiele que ayudan a entender el proceso cognitivo que ocurre durante el aprendizaje de los individuos, además suele ser una herramienta útil para diseñar actividades sobre un tema en específico (Vargas, 2013), en este caso los polígonos. En el análisis de las actividades se buscó catalogar el nivel de aprendizaje de los alumnos tomando en cuenta los niveles del modelo de Van Hiele, lo cual a su vez ayudó a observar el tipo de comprensión de los estudiantes, es decir, de acuerdo con las construcciones dadas y lo mencionado por Skemp (1987), se clasificó la comprensión de los alumnos en relacional o instrumental.

El objetivo de la creación de este trabajo surge por la observación de las respuestas dadas en un examen diagnóstico aplicado a alumnos de educación medio superior en una preparatoria del estado de Tabasco. En las respuestas dadas se percibió que, aunque el tema de los polígonos y sus características es abordado desde niveles básicos, los estudiantes llegan a la educación medio superior con un conocimiento insuficiente del tema, lo cual puede deberse a diversos factores como la carencia de significados al presentar el tema como algo terminado.

En el capítulo 1 se presentan los aspectos generales, tales como un breve recorrido por investigaciones realizadas en matemática educativa en torno al tema de polígonos y sus diagonales, seguido de esto se muestra la problemática que dio pauta a la realización de esta tesis, por último, se expone una propuesta de solución a lo observado.

En el capítulo 2 se aborda la base teórica de este trabajo, la cual busca mostrar la importancia de la comprensión relacional y la utilidad de la comprensión instrumental, tomando en cuenta lo mencionado por Skemp (1987), así como resaltar el papel de la visualización desde el punto de vista de Arcavi (2003).

En el capítulo 3 se muestra la metodología utilizada para la creación y aplicación de las actividades, por ejemplo: el tipo de estudio, características de los participantes, un resumen conciso del modelo de Van Hiele y las actividades aplicadas.

Posteriormente, en el capítulo 4 se presenta la parte más importante del trabajo, pues en este se observa el análisis de los resultados de las construcciones dadas por algunos de los alumnos a los que se les aplicaron las actividades. Por último, en el capítulo 5 se presenta una conclusión general sobre lo que se observó al trabajar en cada uno de los capítulos de esta tesis y en la aplicación de las actividades.

Capítulo 1

Antecedentes

Este capítulo señala los elementos que dieron origen a este trabajo. En la primera parte se muestran investigaciones que se han realizado en la matemática educativa en torno al tema de polígonos. Posteriormente se presenta la problemática observada, además de la pregunta de investigación, por último, se propone una posible solución, la cual está fundamentada por los artículos estudiados al inicio de este apartado.

1.1 Estado del arte

El tema de polígonos y sus propiedades en general, ha sido abordado por la matemática educativa desde diferentes enfoques, la mayoría de ellos orientados al conocimiento de profesores y futuros profesores que enseñan este tema. En este apartado se presenta un breve resumen de algunos artículos que son de importancia para el trabajo, debido a que presentan semejanzas con la investigación realizada. Por ejemplo, el artículo realizado por Morales y Rosas (2016) muestra una problemática presente en los cursos de geometría y a su vez un posible camino para resolver dicho problema, en este se menciona que la argumentación gráfica es importante, lo cual respalda el uso de figuras geométricas para enseñar a los alumnos las propiedades de los polígonos.

El segundo artículo abordado, es el realizado por González y Sánchez (2020) que tiene como objetivo principal lograr que los alumnos diferencien los conceptos de área y perímetro, además de mostrar los errores que suelen cometer. Otra de las investigaciones enfocada al conocimiento de los futuros profesores en cuanto al tema de polígonos, es el realizado por Carreño y Climent (2010). Esta investigación es de interés para este trabajo debido a que tiene como marco teórico los primeros tres niveles del modelo de Van Hiele, en dicho trabajo se menciona que los futuros profesores peruanos suelen estar dentro de los dos primeros niveles del modelo.

La mayoría de estos artículos deja de lado los Sistemas de Geometría Dinámica (SGD), sin embargo, la investigación realizada por Cuervos, Fonseca y Sepúlveda (2021) presenta la importancia que los SGD tienen al abordar la enseñanza y aprendizaje de los polígonos. Por último, este apartado se concluye mostrando la importancia del conocimiento sobre los polígonos y sus propiedades, en específico sus diagonales, como lo muestra el trabajo realizado por Rodríguez y Solarte (2007).

El trabajo realizado por Morales et al. (2016) presenta como problemática que el discurso matemático escolar carece de significado, los conceptos son presentados como algo abstracto y terminado por lo que los alumnos los encuentran carentes de significado. En consecuencia, el artículo presenta elementos que permiten la resignificación del polígono, sus elementos y sus propiedades a través de la argumentación gráfica. Para ello, se realizó y aplicó un diseño que tiene como objetivo fundamental la recolección de los argumentos gráficos que surgen del uso de las figuras geométricas, con el fin de resignificar los polígonos. Este estudio tiene como herramienta principal a las figuras en el modelo y como marco teórico la socioepistemología para la resignificación del conocimiento de los alumnos sobre los polígonos. El artículo concluye diciendo que la argumentación gráfica, es mucho más útil de lo que se presenta actualmente, por lo que se necesita que sea tomada en cuenta.

El artículo realizado por Gonzáles et al. (2020) tiene como propósito, investigar el conocimiento que estudiantes de la licenciatura en Educación Primaria de una escuela Normal tienen acerca del perímetro y área de los polígonos. Los autores mencionan que, si bien el conocimiento sobre los temas es considerado como algo básico, las investigaciones demuestran que existen dificultades en comprender y diferenciar ambos conceptos, una de las creencias que suele tenerse es que si el perímetro aumenta el área del polígono también debe hacerlo y viceversa. D’Amore y Fandiño (2007) mencionan que muchas veces el obstáculo presente en la construcción de conocimientos satisfactorios sobre las relaciones entre “perímetro y área” no es sólo epistemológica, sino que es básicamente de naturaleza didáctica.

El marco teórico del trabajo realizado por González et al. (2020) es lo mencionado por Petrou y Goulding (2011) acerca de los factores que entran en juego en la enseñanza de los alumnos. El diseño utilizado por los autores consta de 10 reactivos los cuales se eligieron considerando su posible contribución para caracterizar el conocimiento sobre perímetro y área de estudiantes de la licenciatura en Educación Primaria. Al analizar los resultados, los autores concluyeron que los sujetos de estudio están más familiarizados con el uso de procedimientos de rutina, que con la definición y comprensión de los conceptos asociados a perímetro y área de polígonos. Se menciona que, “los argumentos carecen de una estructura lógica que permita reconstruir el proceso por el cual se llega a una solución; además, los docentes en formación aún poseen algunas concepciones erróneas o dificultades relacionadas al perímetro y área de polígonos" (González et al. 2020, pág. 85).

La investigación realizada por Cuervo et al. (2021) es similar al trabajo que aquí se plantea ya que utiliza GeoGebra con la finalidad de que los alumnos tengan una mejor comprensión de los polígonos; además, tiene como marco teórico el modelo de Van Hiele, sin embargo, su pregunta de investigación es ¿las situaciones didácticas mediadas por el programa GeoGebra pueden conducir a los estudiantes de grado séptimo de una Institución Educativa a la construcción y comprensión de los polígonos regulares? El estudio es de carácter cualitativo tipo descriptivo y para el análisis de resultados usa la teoría de situaciones didácticas y el modelo de Van Hiele. Los autores mencionan que la situación de pandemia y la evolución de las TIC (Tecnologías de la Información y Comunicación) han generado la necesidad de revolucionar el sistema educativo incorporando nuevos mecanismos y herramientas que incentiven y generen mejores resultados en los estudiantes, como el caso de las TIC. Tomando en cuenta lo anterior y la pregunta de investigación, ellos realizaron la aplicación de una prueba diagnóstica con la que concluyeron que:

> El uso del software GeoGebra como medio dinámico en el aprendizaje de la geometría motiva a los estudiantes a interactuar y manipular las herramientas del programa lo que lleva a potenciar las competencias matemáticas y fortalecer el trabajo en grupo entre los estudiantes. (Cuervo et al., 2021, pág. 383)

La investigación realizada por Carreño et al. (2010) menciona que la geometría es un tema importante en la educación peruana, pero a pesar de ello los alumnos muestran serias limitaciones para representar y clasificar gráficamente los objetos geométricos sobre todo cuando se trata de demostraciones. Esta observación dio paso en su estudio, al conocimiento sobre los polígonos que tienen los estudiantes para profesor de matemáticas, usando como marco teórico los estudios que investigan las necesidades de los profesores en cuanto al conocimiento del contenido matemático y tienen como interés el conocimiento de los estudiantes referente a los polígonos.

El trabajo realizado por Carreño et al., (2010) es de carácter interpretativo, pues busca describir el conocimiento de los estudiantes para profesores de matemáticas respecto a temas geométricos, tomando en cuenta los niveles de Van Hiele. En el estudio participaron 12 estudiantes que cursaban la asignatura de Geometría Plana y Trigonometría, a los cuales se les elaboraron cuatro pruebas abarcando los temas de ángulos, triángulos y polígonos. Dichas pruebas tuvieron como referencia las actividades y tareas de las unidades de enseñanza

Polígonos y Triángulos planteadas por Corberán et al., (1994) y la investigación de Matos (1994).

Después de la aplicación (Carreño & Climent, 2010, págs. 192-193). Afirman que:

> Los resultados obtenidos corroboran que el conocimiento geométrico de los estudiantes para profesor de matemáticas, en general, es limitado conceptualmente y por ello, carente de redes matemáticas complejas y de relaciones inclusivas entre varios objetos geométricos… El desarrollo de capacidades y destrezas, propias de un razonamiento formal, no se evidencia en las respuestas vertidas por los estudiantes. Antes bien, se observa una postura eminentemente intuitiva, apoyada en lo concreto, en lo experimental (manipulativo) y en lo que “parece ser” … Aunque nuestro objetivo no ha sido clasificar el razonamiento de los estudiantes en niveles de Van Hiele, los resultados obtenidos en el estudio completo indican que se moverían en los niveles 1 y 2 de los mismos.

El trabajo de Rodríguez et al., (2007) es de interés para esta tesis pues muestra el uso de las diagonales de los polígonos en un área distinta de las matemáticas. El artículo menciona la importancia de los polígonos y su triangulación en la geometría computacional, la cual refiere que, para poder demostrar su existencia, se requiere mostrar la existencia de una diagonal. En el artículo se enuncian varias proposiciones con la finalidad de probar la triangulación de los polígonos computacionalmente, concluye mostrando la forma de triangular polígonos y el posible uso de esto:

> Las posibles aplicaciones de este tema incluyen la vigilancia con cámaras de seguridad fijas o con robots ambulantes, la iluminación óptima de espacios, la reproducción de imágenes, para aplicaciones inalámbricas, etc. Interpolar funciones en una nube de puntos. Se emplea en la cartografía para obtener un modelo aproximado del terreno, a partir de las coordenadas espaciales de unos cuantos miles de puntos (Rodríguez et al., 2007, pág. 462)

Al realizar un recorrido por los trabajos realizados en matemática educativa en torno al tema de los polígonos, se puede ver que este es de interés para la vida escolar y la vida diaria. Pues como menciona Rodríguez et al. (2007) tiene aplicaciones en distintos campos, sin embargo, ellos en su investigación muestran que los polígonos y sus propiedades suelen presentarse como un tema terminado y carente de significado. En respuesta a esto, los investigadores mencionan que la argumentación gráfica es útil para que los alumnos construyan su propio conocimiento en una forma didáctica.

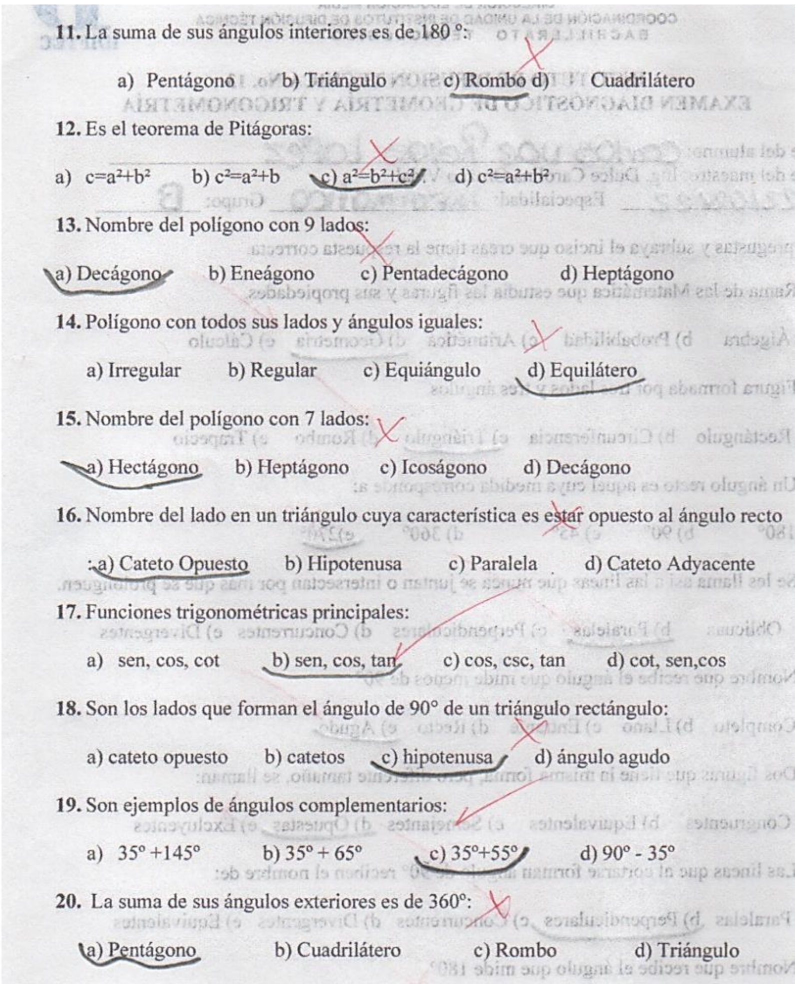
Se observa que de los artículos mencionados solo el realizado por Cuervo et al., (2021) trabaja un SGD, a pesar de que la investigación de Morales et al. (2016), muestra la importancia del uso de lo gráfico. La conclusión a la que llegan Cuervo et al., (2021) con respecto al interés de los alumnos para la realización de las actividades es que el uso de las herramientas del programa lleva a potenciar las competencias matemáticas y fortalecer el trabajo en grupo entre los estudiantes.

1.2 Problemática

Algunos conocimientos en geometría surgen en el ser humano como algo espontáneo y natural, estos tienen su origen en la capacidad de los seres humanos para observar y reconocer objetos y comparar formas y tamaños.

> Se reconoce la conveniencia de que ciertas superficies estén limitadas por líneas rectas, lo que conduce a las primeras figuras geométricas, como los cuadrados, rectángulos y otros polígonos. Todos estos muestran como desde épocas remotas, las figuras más ordenadas de la geometría han estado presentes para diferentes usos… estas formas geométricas simples las utilizó el hombre de la antigüedad para elaborar frisos, grecas y otros ornamentos. (Alarcón, 1996, pág. 210).

En la actualidad se reconoce el valor de las figuras como el triángulo, cuadrado, pentágono, etc. Las cuales podrían llamarse básicas, y debido a su importancia son incluidas en los planes de estudio desde niveles básicos, sin embargo, esto no evita que los alumnos al llegar a estudios de nivel medio superior tengan dificultades en reconocer propiedades y características básicas de las figuras geométricas. En la Figura 1.1 se presentan algunas de las respuestas dadas por un alumno de una preparatoria del estado de Tabasco en un examen diagnóstico previo al inicio de un curso de geometría.



11. La suma de sus ángulos interiores es de 180 °:

a) Pentágono b) Triángulo c) Rombo d) Cuadrilátero

12. Es el teorema de Pitágoras:

a) $c=a^2+b^2$ b) $c^2=a^2+b$ c) $a^2=b^2+c^2$ d) $c^2=a^2+b^2$

13. Nombre del polígono con 9 lados:

a) Decágono b) Eneágono c) Pentadecágono d) Heptágono

14. Polígono con todos sus lados y ángulos iguales:

a) Irregular b) Regular c) Equiángulo d) Equilátero

15. Nombre del polígono con 7 lados:

a) Hectágono b) Heptágono c) Icoságono d) Decágono

16. Nombre del lado en un triángulo cuya característica es estar opuesto al ángulo recto

a) Cateto Opuesto b) Hipotenusa c) Paralela d) Cateto Adyacente

17. Funciones trigonométricas principales:

a) sen, cos, cot b) sen, cos, tan c) cos, csc, tan d) cot, sen,cos

18. Son los lados que forman el ángulo de 90° de un triángulo rectángulo:

a) cateto opuesto b) catetos c) hipotenusa d) ángulo agudo

19. Son ejemplos de ángulos complementarios:

a) 35° +145° b) 35° + 65° c) 35°+55° d) 90° - 35°

20. La suma de sus ángulos exteriores es de 360°:

a) Pentágono b) Cuadrilátero c) Rombo d) Triángulo

Figura 1.1: Respuestas dadas por un alumno de medio superior en un examen diagnóstico de geometría

En las respuestas dadas en este examen, se reafirma lo mencionado anteriormente, que a los alumnos de medio superior se les dificulta recordar propiedades y características de los polígonos, por ejemplo, el número de lados de un eneágono, la suma de los ángulos internos de un triángulo o incluso conocer las propiedades que debe cumplir un polígono para que sea regular, lo que deriva en la dificultad para poder trazarlos.

La investigación realizada por Morales et al., (2016) señala que, presentar los temas matemáticos como concluidos y abstractos evita que estos tengan un significado para los alumnos. Como consecuencia de esto el aprendizaje de los temas no es el esperado, pues como se mencionó anteriormente, aunque el tema de polígonos es un tema visto desde el nivel primaria los alumnos de medio superior tienen dificultades para reconocer sus propiedades.

Lo anterior da pauta a la pregunta de investigación de esta tesis: **¿Cómo ayuda en la comprensión de las propiedades de los polígonos a alumnos de medio superior trabajar con actividades planteadas en GeoGebra?** Para intentar responder esta pregunta se tomará en cuenta los niveles del modelo de Van Hiele, con los cuales se pretende clasificar el aprendizaje de los alumnos cuando las actividades son presentadas desde la visualización.

1.3 Propuesta

Este trabajo tiene como propósito mostrar que el aprendizaje sobre polígonos en alumnos de medio superior puede ser más claro cuando los temas se presentan desde diferentes ángulos, y además se usa lo visual, ya que como menciona (Arcavi, 2003, pág. 215) “vivimos en un mundo donde la información se transmite mayoritariamente en envoltorios visuales, y las tecnologías apoyan y fomentan la comunicación que es esencialmente visual”. Por lo que es necesario que los temas de matemáticas no sean encasillados en lo abstracto y algebraico, sino que se usan representaciones gráficas como herramienta principal para el aprendizaje. Principalmente en temas de geometría donde el uso de representaciones gráficas es necesario para muchos de los conceptos, como el de polígonos.

En la actualidad con el uso de las Tics se hace necesario reformular las formas de enseñanza y aprendizaje, con el fin de incluir los sistemas dinámicos de geometría y otras tecnologías que permiten observar de mejor manera los conceptos y propiedades de los temas matemáticos, para así lograr una mejor enseñanza y aprendizaje de parte de los profesores y alumnos.

Además, el uso de representaciones gráficas podría ayudar a que la comprensión de los alumnos sea relacional y no instrumental. Ya que, con la visualización se busca que se desarrollen ideas previamente desconocidas, esto podría interpretarse como el saber cómo actuar o que caminos tomar al momento de resolver las actividades y no solo resolver aplicando reglas, sin saber por qué y cuándo funcionan.

Tomando en cuenta lo trabajado por otros investigadores y la problemática presentada, la propuesta que se tiene alude a hacer uso de la visualización desde el punto de vista de Arcavi (2003) con la finalidad de evitar que el aprendizaje de los alumnos sea una comprensión instrumental.

En sí, la propuesta de este trabajo es mostrar que, a partir de trabajar con los alumnos actividades creadas de forma específica, en este caso partiendo desde las diagonales de los polígonos, y haciendo uso de los sistemas de geometría dinámica (SGD), se facilita el aprendizaje de las propiedades de los polígonos para que la comprensión de estos sea relacional y no instrumental.

Capítulo 2

Marco teórico

En este capítulo se presentan las bases teóricas en que se apoya este trabajo. Se resalta la importancia de la visualización en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, así como la relación de este trabajo con la comprensión desde el punto de vista de Skemp de las propiedades y características de los polígonos.

2.1 Introducción

Muchas de las investigaciones realizadas en educación matemática concuerdan en que es necesario incluir elementos que ayuden a mejorar el aprendizaje y comprensión de los temas que se estudian en el área de las matemáticas, sobre todo en la actualidad, donde se vive rodeado de nuevas tecnologías que favorecen el aprendizaje a través de la interacción con construcciones de diagramas e imágenes. Esto hace necesario cambiar los métodos de enseñanza y obliga a los docentes a tomar en cuenta la forma de comprensión que tienen los alumnos, pues se busca que el conocimiento sea razonado y no memorizado. Dado lo anterior, a continuación, se argumenta la importancia de la visualización y el valor de la compresión racional en las matemáticas, además de mostrar por qué son estas investigaciones el sustento del trabajo realizado.

2.2 Visualización desde el punto de vista de Arcavi

Cuando se habla de visualización inmediatamente se piensa en el verbo visualizar, este último se define como la formación de una imagen mental de algo abstracto que ayuda a otorgar características visibles a lo que normalmente no vemos. Tomando en cuenta esto, la visualización se puede entender como: “La habilidad para representar, transformar, generar, comunicar, documentar y reflejar información visual. En este sentido se trata de un proceso mental demasiado útil en diversas áreas del conocimiento matemático y científico” (Cantoral y Montiel, 2001, pág. 14).

Tomando en cuenta la definición anterior, la visualización suele ser una herramienta útil en el área de las matemáticas, pues según Cantoral et al. (2001) esto ayuda, por ejemplo, a representar a partir de dibujos propiedades de inclusión en la teoría de conjuntos o en el análisis de funciones donde se suelen usar representaciones visuales para describir propiedades como la paridad. En general la visualización suele ser útil para la resolución de problemas en matemáticas.

Por otro lado, Arcavi (2003) en su artículo "The role of visual representations in the learning of mathematics" menciona que lo visual está siempre presente, debido a que como seres biológicos la mayor parte de nuestro cerebro está involucrado en lo visual, el control de lo visual y la percepción. Además, en el aspecto sociocultural, se puede afirmar que el mundo en el que vivimos y la información que se transmite se hace mayormente de forma visual y la tecnología actual fomenta esta forma de comunicación.

El ser humano desde sus inicios como comunidad ha sentido la necesidad de comunicarse y esta necesidad se ha saciado en su gran mayoría con lo visual, lo que alienta a los seres humanos a tratar y buscar formas de "ver" incluso lo que no se puede ver, (McCormick et al., 1987, pág. 3) menciona que "La visualización ofrece un método para ver lo invisible".

Las matemáticas, como creación humana y cultural que trata con objetos y entidades abstractas, muy diferentes de los fenómenos físicos, depende en gran medida de la visualización en sus diferentes formas y en diferentes niveles, mucho más allá del campo obviamente visual de la geometría y la visualización espacial.

Como se ha observado la visualización es importante en la vida diaria de los seres humanos y esta ha sido abordada, estudiada y definida de distintas formas, Arcavi define la visualización de la siguiente manera:

> La visualización es la capacidad, el proceso y el producto de la creación, la interpretación, uso y reflexión sobre imágenes, diagramas en nuestra mente, en papel o con herramientas tecnológicas, con el fin de representar y comunicar información, reflexionar y desarrollar ideas previamente desconocidas y avanzar en la comprensión. (Arcavi, 2003, pág 2017)

Este trabajo pretende apoyarse en la visualización cuando es entendida como la habilidad de interpretar datos a través de imágenes o diagramas que no solo son presentados en papel, sino usando herramientas tecnológicas como GeoGebra que faciliten la interpretación y documentación de la información, además de desarrollar nuevas ideas y conocimientos. Se busca reafirmar la idea de que las matemáticas dependen de las diferentes formas y niveles de la visualización, pues se espera que, al mostrar las propiedades de los polígonos de forma visual, los alumnos sean capaces de generar un conocimiento más sólido acerca de las propiedades de los polígonos e incluso ayude a un mejor aprendizaje de las propiedades geométricas en general.

2.3 Comprensión relacional y comprensión instrumental

La palabra “comprensión” se ha usado libremente en las investigaciones de educación matemática, lo que ha llevado a una búsqueda de la definición exacta de dicho término. Sin embargo, esta búsqueda se vio envuelta en inconvenientes debido a que la comunidad de matemática educativa tenía dificultades para diferenciar entre lo que es conocimiento y lo que es comprensión. Dentro de las posibles definiciones de la palabra, llamó la atención de los investigadores en matemática educativa la Dada por Skemp sobre la "Comprensión instrumental y relacional" lo que llevó a una nueva definición de esta palabra (Meel, 2003).

En este trabajo se usa la definición de comprensión propuesta por Skemp, debido a que en ella se contemplan dos tipos de compresión: relacional e instrumental. Ambas se explican más a fondo en lo que sigue de este capítulo y la relación que existe con la investigación.

De acuerdo con Skemp (1987) en el área de la educación matemática se encuentran expresiones que pueden entenderse de dos o más formas, lo que lleva a tener dificultades. La palabra “comprensión” es un ejemplo de dichas expresiones, el autor menciona que en la actualidad hay dos significados que podrían darse: "comprensión relacional" y "comprensión instrumental". La primera la define como el saber qué hacer y por qué y la segunda es el aplicar reglas sin tener razones. Él explica que la mayoría de los alumnos y profesores entienden por comprensión el segundo significado, pues se considera que cuando un alumno ha aprendido algún concepto, es porque ha logrado aplicar ciertas reglas, aunque no sabe cómo ni porqué funcionan. Este tipo de comprensión se ve a diario en los salones de clase, por ejemplo, en geometría los alumnos suelen recordar que la suma de los ángulos internos de un triángulo es 180°, sin embargo, muchas veces no saben por qué sucede, lo cual se puede interpretar como una comprensión instrumental y no relacional.

Skemp (1987) menciona que cuando se sabe que existe esta diferencia de significados, podrían surgir dos preguntas, la primera de ellas es ¿importa esto? y la segunda es ¿es un tipo de comprensión mejor que otra? Con relación a la primera pregunta expone que es necesario tener en cuenta esta diferencia de significado. Cuando se ignora esta diferencia, se generan problemas para comunicar los conocimientos que uno tiene a otras personas, e incluso podría darse el caso donde los alumnos tienen como objetivo comprender instrumentalmente, y el profesor quiere que comprendan relacionalmente o viceversa.

El primer caso si bien resulta tedioso para el profesor, causa menos problemas, pues los alumnos sólo prestarán atención a las partes que a ellos les interesa, que es algún tipo de regla que les ayude a obtener las respuestas, y lo demás probablemente lo excluirán. Este proceder en los alumnos funciona sólo en algunos casos, ya que, si el profesor hace una pregunta que no se ajusta del todo a la regla aprendida, fallarán. En el siguiente ejemplo se observa de una forma más clara de lo mencionado anteriormente:

El Sr. Peter Burney, mientras enseñaba “área” comenzó a sospechar que los niños no entendían realmente lo que estaban haciendo. Entonces les preguntó: "¿Cuál es el área de un campo de 20 cm por 15 yardas?" La respuesta fue: "300 centímetros cuadrados". Él preguntó: "¿Por qué no 300 yardas cuadradas?" Respuesta: "Porque el área siempre está en centímetros cuadrados”. (Skemp, 1987, pág. 155)

Según Skemp (1987) para evitar este error los alumnos necesitan otra regla, que ambas dimensiones deben estar en la misma unidad, o mejor aún, los alumnos deberían tener comprensión relacional. Indica que este es uno de los argumentos por los cuales la comprensión relacional es mejor que la instrumental, ya que si se tiene la primera no es necesario hacer uso de un conjunto de reglas para dar una respuesta, sino que se tendrá fundamentos para resolver de cierta forma.

Casos similares al anterior, se vieron presentes en la investigación realizada, pues algunos alumnos esperaban que el procedimiento aplicado en la actividad uno fuera efectivo para las siguientes. Por ejemplo, cuando a los alumnos se les solicitó construir un pentágono a partir de tener un triángulo inscrito en una circunferencia, un alumno, al que más adelante se nombrará E3, construyó el pentágono utilizando la herramienta “polígono regular” obteniendo así lo solicitado como se muestra en la Figura 2.1. Luego, cuando se le pidió que construyera un hexágono regular, partiendo de un triángulo equilátero inscrito en una circunferencia, inició construyendo el triángulo equilátero, posteriormente construyó el hexágono de la misma forma que el pentágono, por último, inscribió en una circunferencia el polígono obtenido. Esta forma de construcción hizo que el triángulo equilátero no estuviera inscrito en la circunferencia, obteniendo la construcción que se muestra en la Figura 2.2.

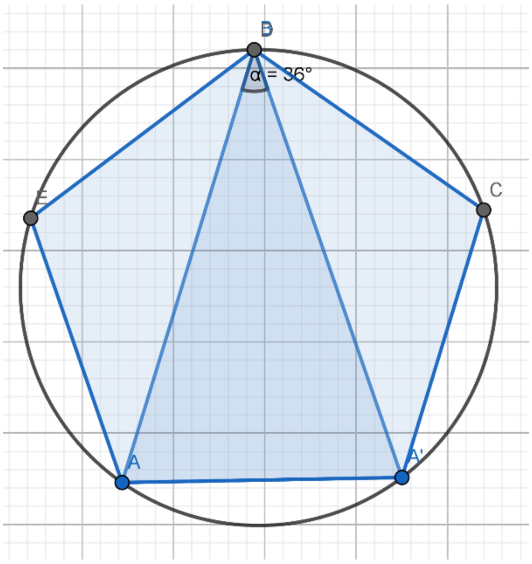


Figura 2.1: Construcción realizada por E3 cuando se le solicitó construir un pentágono

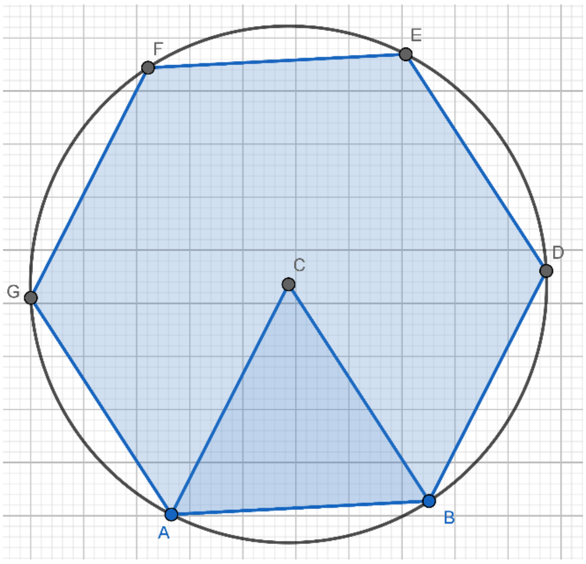


Figura 2.2: Construcción realizada por E3 cuando se le solicitó construir un hexágono

En este caso se observa que está presente la comprensión instrumental, pues E3 espera que el procedimiento que aplicó inicialmente funcione de nuevo para actividades que le parecen similares, por lo tanto "la regla" que ha descubierto debería dar un resultado positivo, sin embargo, vemos que esto no sucede.

Casos como el mencionado anteriormente, donde la comprensión instrumental está presente, se observarán en el capítulo 4 donde se muestra el análisis de las respuestas dadas por la población de estudio, también se podrán ver casos donde la comprensión relacional ayudó a crear una solución diferente para cada actividad.

El segundo caso, donde el profesor comprende de forma instrumental y el alumno comprende de manera relacional, en palabras de Skemp (1987), puede ser más perjudicial. Esto debido a que el estilo de enseñanza es más difícil de cambiar y se creará una dificultad para entender lo que el profesor desea enseñar y lo que el alumno desea aprender. Cambiar el aprendizaje tradicional por el "moderno", requiere de cambios de esquemas en los profesores, ya que, si esto no sucede el cambio puede generar más daño que un bien.

Si a los alumnos todavía se les enseña instrumentalmente, entonces un programa de estudios tradicional probablemente los beneficiará más. Al menos adquirirán competencia en una serie de técnicas matemáticas que les serán útiles en otras materias, y cuya falta ha sido objeto de quejas recientemente por parte de profesores de ciencias, empresarios y otros. (Skemp, 1987, pág. 156)

Lo anterior hace ver que una comprensión relacional es más eficiente en el aprendizaje de los alumnos que la instrumental, pero entonces ¿Por qué se sigue optando por una comprensión instrumental? Skemp (1987), menciona que las matemáticas instrumentales a veces suelen ser más fáciles de entender, pues el saber qué hacer y por qué puede ser más largo de explicar y entender, y en las escuelas muchas veces los planes de estudio suelen estar sobrecargados de contenidos, lo que lleva a enseñar una matemática instrumental que requiere menos tiempo para memorizar formulas y reglas, lo que permite cubrir los temas señalados. Sin embargo, la comprensión relacional tiene al menos cuatro ventajas:

Es más adaptable. Aunque pueda ser más largo y tedioso el conocimiento, cuando uno aplica una regla o fórmula si esta falla se puede saber el porqué.

Es más fácil de recordar. Pues consiste, por ejemplo, en relacionar todas las fórmulas de área con la del área de un rectángulo. En este caso aún es necesario conocer las reglas separadas, pues sería tedioso calcular las fórmulas cada vez que sea necesario usarlas, pero saber también cómo están interrelacionadas permite recordarlas como partes de un todo conectado, lo cual es más fácil. Además, “Las ideas requeridas para comprender un tema en particular resultan ser básicas para comprender también muchos otros temas” (Skemp, 1987, pág. 159).

La comprensión relacional puede ser efectiva como una meta por sí misma. Este puede generar satisfacción cuando se convierte en motivación y se tiene como meta.

Los esquemas relacionales son de naturaleza orgánica. Este tiene relación con el anterior ya que, si las personas obtienen satisfacción, puede que busquen ir más allá del conocimiento que se les presenta.

Estas ventajas sobre la comprensión relacional muestran que es mucho más eficiente esta que la instrumental, pues ayuda a los alumnos a crear conocimientos con mejores cimientos que solo memorizar reglas. Además, “cuanto más completo sea el esquema de un alumno, mayor será su sentimiento de confianza en su propia capacidad para encontrar nuevas formas de "llegar allí sin ayuda externa"” (Skemp, 1987, pág. 163). Lo que hará que busque ir más allá de lo enseñado y seguirá creando conocimientos por su propia cuenta. Aunque también se menciona que la instrumental suele ser de mucha ayuda en casos donde obtener las respuestas a través de lo relacional, requieren de más tiempo para la deducción de reglas. Por lo que se puede concluir que se debe buscar un equilibrio entre ambos tipos de comprensión y no solo cambiar una por otra.

La visualización en conjunto con la comprensión relacional puede ser de ayuda para que los alumnos aprendan de mejor forma las propiedades de los polígonos. Pues si estas se muestran haciendo uso de figuras que ayuden a visualizar e interpretar las propiedades de forma más clara, se puede llegar a enseñar y aprender las propiedades no instrumentalmente, sino relacionalmente. Además, si se toma en cuenta lo que menciona Skemp (1987) sobre que una comprensión relacional ayuda a que los alumnos no solo aprendan el tema que se les enseña, pues también adquieren conocimiento de temas relacionados, los alumnos pueden llegar a comprender algunas propiedades de la geometría en general y no sólo las de los polígonos.

Capítulo 3

Metodología

En este capítulo se presenta el tipo de investigación que se realizó, las características de los participantes, las herramientas utilizadas para la realización de las actividades y la toma de datos, así como la argumentación del diseño de las actividades, las cuales están basadas en el modelo de Van Hiele.

3.1 Tipo de investigación

El tipo de estudio que se llevó a cabo es de carácter cualitativo, pues con las actividades se pretende observar y describir el aprendizaje de los alumnos con relación a la geometría, en específico los polígonos regulares cuando son presentados tomando en cuenta la visualización. Además, la categorización del nivel de aprendizaje obtenido por los alumnos de segundo semestre de nivel medio superior se realizó tomando en cuenta los niveles del modelo de Van Hiele lo cual ayudó a ubicar el tipo de comprensión de los alumnos como relacional o instrumental.

3.2 Participantes

La investigación se llevó a cabo con estudiantes que cursan el segundo grado de una escuela de nivel medio superior del estado de Tabasco. El grupo estaba compuesto de 34 estudiantes de los cuales 33 participaron en la aplicación de las actividades. De los 33 alumnos que participaron en el diseño, 9 realizaron todas las actividades solicitadas, 16 entregaron 3 actividades, 2 entregaron 2 actividades, 4 alumnos sólo entregaron una actividad y 2 no entregaron las actividades.

Al momento de la aplicación los alumnos estaban llevando un curso de geometría y trigonometría. Además, según el plan de estudios, los alumnos ya habían trabajado con polígonos en niveles anteriores.

3.3 Diseño de las actividades e Instrumento de trabajo

Para la toma de datos se diseñaron 4 actividades en hojas dinámicas de GeoGebra atendiendo a las fases del modelo de Van Hiele, 2 actividades previas con el fin de que los estudiantes se familiarizaran con las herramientas que el SGD ofrece y una presentación sobre los polígonos y sus diagonales. Tanto las actividades como la presentación fueron realizadas pensando en lo escrito por Arcavi (2003), quien menciona que como seres biológicos la mayor parte de nuestro cerebro está involucrado en lo visual y es necesario hacer uso de esta a partir de gráficos para una mejor interpretación de datos.

Para la categorización del nivel de aprendizaje de los alumnos que a su vez ayudó a ubicar el tipo de comprensión de los alumnos, se tomó en cuenta los niveles del modelo de Van Hiele, además las fases propuestas en este también fueron necesarias para el diseño de las actividades, es por ello por lo que se da una breve explicación de lo propuesto por Van Hiele.

El modelo de Van Hiele suele ser una herramienta útil para observar el avance del razonamiento de los alumnos en geometría, además sirve como guía en la realización de actividades de los profesores. Este modelo fue creado pensando en el proceso cognitivo que se lleva a cabo cuando uno aprende y enseña geometría.

> El modelo de Van Hiele describe cómo se va modificando la forma de pensar de los individuos mediante cinco niveles de razonamiento, que abarcan desde la visión más simplista de los conceptos geométricos hasta el empleo de la argumentación formal. A su vez, plantea la forma de organizar la enseñanza de acuerdo con fases de aprendizaje que facilitan el progreso en el razonamiento. (Lobo, 2004, pág. 2)

El modelo de Van Hiele consta de cinco niveles, los cuales están conformados por cinco fases en cada nivel. Estas fases ayudan a entender el proceso cognitivo que el alumno lleva a cabo mientras ocurre el aprendizaje, además es una herramienta útil para hacer planeaciones de actividades en un tema en específico.

> Van Hiele explica cómo se produce la evolución del razonamiento geométrico de los estudiantes dividiéndolo en cinco niveles consecutivos: **visualización, análisis, deducción informal, deducción formal y rigor**, los cuales se repiten con cada aprendizaje nuevo. El estudiante se ubica en un nivel dado al inicio del aprendizaje y, conforme vaya cumpliendo con un proceso, avanza al nivel superior. El modelo de Van

> Hiele también indica la manera de apoyar a los estudiantes a mejorar la calidad de su razonamiento, pues proporciona pautas para organizar el currículo educativo y así ayudar al estudiante a pasar de un nivel a otro. (Vargas, G. y Gamboa, R., 2013, pág. 81)

Vargas et al (2013) describe los niveles de la siguiente forma:

Nivel 1: Reconocimiento o visualización. El individuo reconoce las figuras geométricas por su forma como un todo, no diferencia partes ni componentes de la figura. Puede, sin embargo, producir una copia de cada figura particular o reconocerla. No es capaz de reconocer o explicar las propiedades determinantes de las figuras, las descripciones son principalmente visuales y las compara con elementos familiares de su entorno. No hay un lenguaje geométrico básico para referirse a figuras geométricas por su nombre.

Nivel 2: Análisis. El individuo puede ya reconocer y analizar las partes y propiedades particulares de las figuras geométricas y las reconoce a través de ellas, pero no le es posible establecer relaciones o clasificaciones entre propiedades de distintas familias de figuras. Establece las propiedades de las figuras de forma empírica, a través de la experimentación y manipulación. Como muchas de las definiciones de la geometría se establecen a partir de propiedades, no puede elaborar definiciones.

Nivel 3: Ordenación, clasificación o abstracción. Los estudiantes interrelacionan lógicamente propiedades de los conceptos, construyendo o siguiendo argumentos informales. Los estudiantes de este nivel pueden formular definiciones abstractas, señalar las condiciones necesarias y suficientes que debe satisfacer una clase de figuras geométricas, además de reconocer cómo unas propiedades de los objetos geométricos se derivan de otras, estableciendo relaciones entre propiedades y sus consecuencias.

Nivel 4: Deducción Formal. Los estudiantes prueban teoremas deductivamente y establecen relaciones entre teoremas. Entienden la necesidad de justificar deductivamente resultados matemáticos o proposiciones, con base en un sistema axiomático. El estudiante es capaz de demostrar un resultado de diferentes formas.

Nivel 5: Rigor. Los estudiantes establecen teoremas en diferentes sistemas axiomáticos y analizan o comparan esos sistemas. Se conoce la existencia de diferentes sistemas axiomáticos y se pueden analizar y comparar. El estudiante puede realizar deducciones abstractas. El razonamiento geométrico en este nivel es bastante abstracto y no necesariamente involucra el uso de modelos pictóricos o concretos. En este nivel los postulados o axiomas son objeto de análisis y escrutinio.

Se pretende que la población de este estudio logre alcanzar el nivel 3 del modelo, pues se espera que los alumnos al inicio de las actividades se encuentren en el nivel 1 del modelo, es decir, que cumplan la mayoría de las características propias de este. Es por eso por lo que las actividades están diseñadas para transitar del nivel 1 al 3 y fueron formuladas tomando en cuenta las fases del modelo de Van Hiele y la visualización. Esta última está presente en la forma en que se elaboraron las actividades, pues como se mencionó en el capítulo anterior, la visualización permite interpretar datos a través de imágenes o diagramas, además de generar nuevos conocimientos a partir de lo observado. Se espera que los alumnos al utilizar GeoGebra en la resolución de las actividades presentadas logren reconocer propiedades que en papel y lápiz no observarían, pues el SGD permite trabajar con puntos dinámicos, es decir, puntos que no tiene una posición fija, sino que pueden moverse a través del espacio geométrico dado en GeoGebra.

Descripción de las fases a partir de lo mencionado por Vargas et al (2013) y Barrera y Reyes (2015).

Fase 1: Información o indagación. El estudiante se familiariza con el nuevo tema de estudio. El profesor debe identificar a través de discusiones con los estudiantes los conocimientos previos que puedan tener, además se introduce vocabulario específico y es el momento para presentar a los alumnos el tema que van a iniciar, los tipos de problemas que van a resolver, los métodos y materiales que utilizarán, etc.

Fase 2: Orientación guiada. Se presentan actividades que tienen respuestas concretas, con el fin de guiar a los alumnos para que descubran y aprendan las diversas relaciones o componentes básicos de la red de conocimientos por formar.

Fase 3: Explicitación o explicación. Se espera que los alumnos logren expresar con sus palabras o por escrito los conocimientos que han adquirido sobre el nuevo tema, además de compartir reflexiones con el profesor o sus compañeros, todo esto con un vocabulario propio del nivel. En esta fase no se tiene un aprendizaje de conocimientos nuevos, sino que se construyen relaciones entre los conocimientos adquiridos y se perfecciona la forma de expresarse.

Fase 4: Orientación libre. Las actividades presentadas son diferentes a las anteriores, estas pueden tener diferentes caminos de resolución, además se debe procurar que los alumnos planteen nuevas relaciones o propiedades. Por otro lado, la participación del profesor debe ser mínima.

Fase 5: Integración. Los estudiantes forman una visión global de lo aprendido acerca del tema y de las relaciones que están formando, integrando estos nuevos conocimientos y formas de razonamiento con los que tenían anteriormente. El profesor en esta fase debe explicitar las relaciones o procesos que los estudiantes aprendieron. Las actividades propuestas no deben buscar la aparición de nuevos conocimientos, sino la organización de los ya adquiridos. Teóricamente, al final de la quinta fase, los estudiantes habrán logrado un nuevo nivel de pensamiento y están listos para iniciar el trabajo que los conduzca a alcanzar un nuevo nivel.

3.3.1 Descripción de las actividades

Se esperaba que los alumnos al inicio de las actividades estuvieran en el nivel 1 del modelo de Van Hiele. Por lo que las actividades planteadas están diseñadas para que los alumnos logren alcanzar el nivel 2 o incluso el nivel 3 del modelo.

La hoja dinámica realizada en GeoGebra (Figura 3.1) muestra los polígonos regulares que tienen de 3 a 10 lados y sus diagonales, con el fin de que los estudiantes se familiaricen con el nuevo tema de estudio, además de propiciar discusiones para observar los conocimientos previos que puedan tener e introducir vocabulario específico del tema a iniciar.

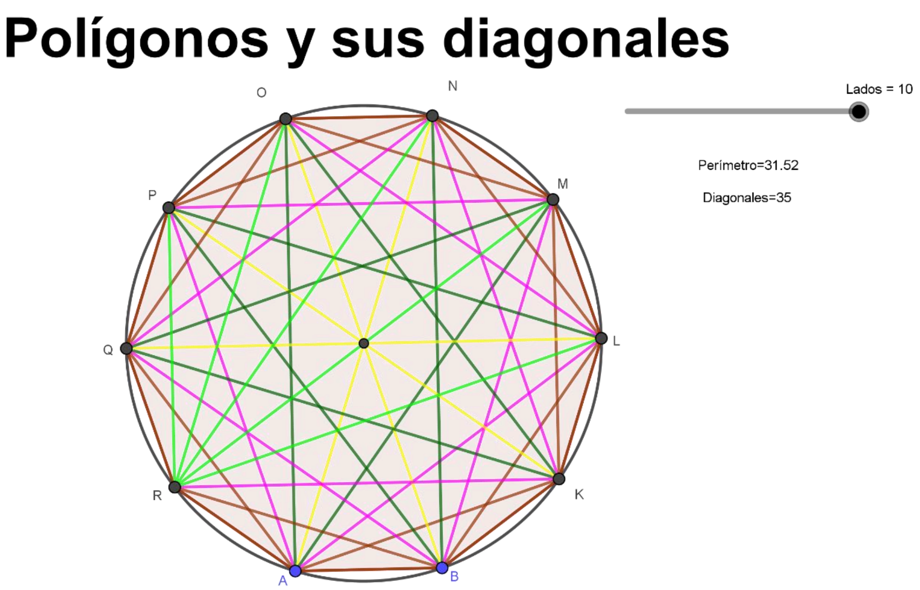


Figura 3.1: Captura de la hoja dinámica en GeoGebra que presenta los polígonos de 3 a 10 lados y sus diagonales.

Las siguientes listas de actividades previas tienen como propósito guiar a los alumnos para que descubran y aprendan las diversas relaciones o componentes básicos de la red de conocimientos por formar, como lo son las propiedades y características de los triángulos, las características de las rectas paralelas, perpendiculares, bisectrices y mediatrices y las propiedades y características de los polígonos regulares. Además de la familiarización con el uso de las herramientas de GeoGebra. Se espera que logren expresar con sus palabras los conocimientos que han adquirido sobre el nuevo tema, y compartan reflexiones con el profesor y sus compañeros.

Lista de actividades previas 1

1. Traza un punto A
2. Traza una recta f que pase por el punto A
3. Traza una recta paralela a la recta f
4. Traza un punto usando la herramienta “punto en objeto” sobre la recta paralela
5. traza una recta perpendicular a la recta f y que pase por el punto construido anteriormente
6. Marca el punto de intersección entre la recta f y la recta perpendicular
7. Traza un ángulo de 90°
8. Traza un ángulo de 45° usando la herramienta bisectriz
9. Traza un ángulo de 30° usando la herramienta ángulo dada su amplitud

Lista de actividades previas 2

a. Construye un triángulo con la herramienta polígono
b. Construye un triángulo con la herramienta polígono regular
c. Construye un triángulo isósceles donde el ángulo desigual es de 30°
d. Calcula el centro del triángulo equilátero usando la herramienta “medio o centro”
e. Inscribe en una circunferencia el triángulo equilátero construido en el punto 2
f. Construye una circunferencia usando los vértices del triángulo construido en el punto a.
g. Marca el centro de la circunferencia
h. Traza la mediatriz en la base del triángulo isósceles y la mediatriz que pasa por uno de los lados iguales del triángulo
i. Traza el punto de intersección de las mediatrices
j. Construye una circunferencia que pase por el punto de intersección de las mediatrices y un vértice del triángulo

Las actividades 1, 2, 3 y 4 que se muestran a continuación, fueron presentadas a los alumnos en hojas dinámicas de GeoGebra, estas tienen la finalidad de procurar que los alumnos planteen nuevas relaciones o propiedades respecto al tema de polígonos y se busca mostrar los diferentes caminos que pueden tomar los alumnos para la resolución de las actividades. En específico, las primeras tres actividades están pensadas para que los alumnos aprendan el vocabulario propio del tema a través de las nuevas relaciones que se espera formulen. La actividad 4 busca formar en los estudiantes una visión global de lo aprendido acerca del tema y de las relaciones que tiene con otros temas de geometría, como lo es con algunas de las rectas notables de los triángulos, además de integrar estos nuevos conocimientos y formas de razonamiento con los que tenían anteriormente acerca del tema. En esta última actividad se buscó la menor interacción posible tanto entre los estudiantes como entre el aplicador de las actividades, con el fin de que el conocimiento adquirido por los alumnos se pudiera apreciar de forma eficaz en la solución dada para la actividad 4.

Actividad 1: Dado el siguiente triángulo isósceles inscrito en la circunferencia, construye un pentágono regular. (Figura 3.2)

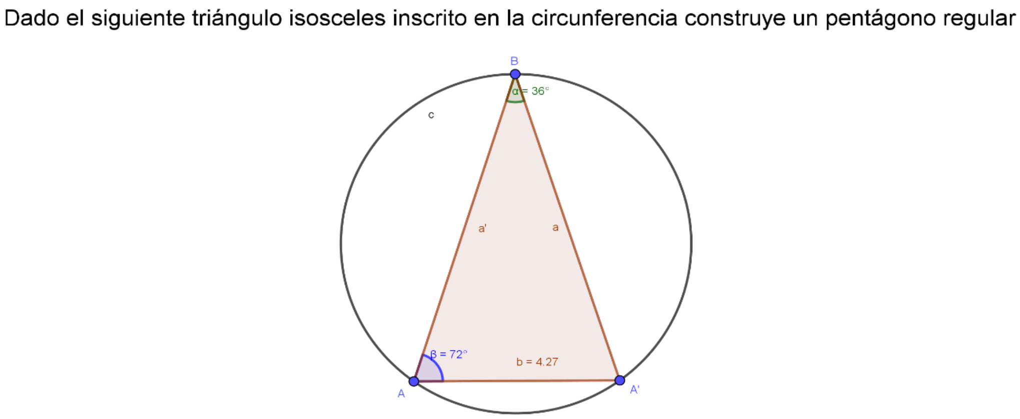


Figura 3.2: Captura de la hoja dinámica en GeoGebra que presenta la actividad 1

Actividad 2: Dado el siguiente triángulo equilátero inscrito en la circunferencia, construye un hexágono regular. (Figura 3.3)

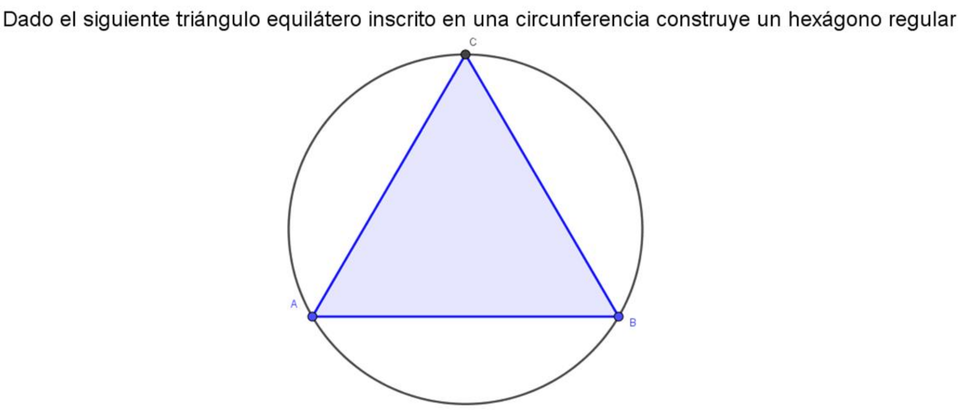


Figura 3.3: Captura de la hoja dinámica en GeoGebra que presenta la actividad 2

Actividad 3: Dado el siguiente triángulo isósceles inscrito en la circunferencia, construye un octágono regular. (Figura 3.4)

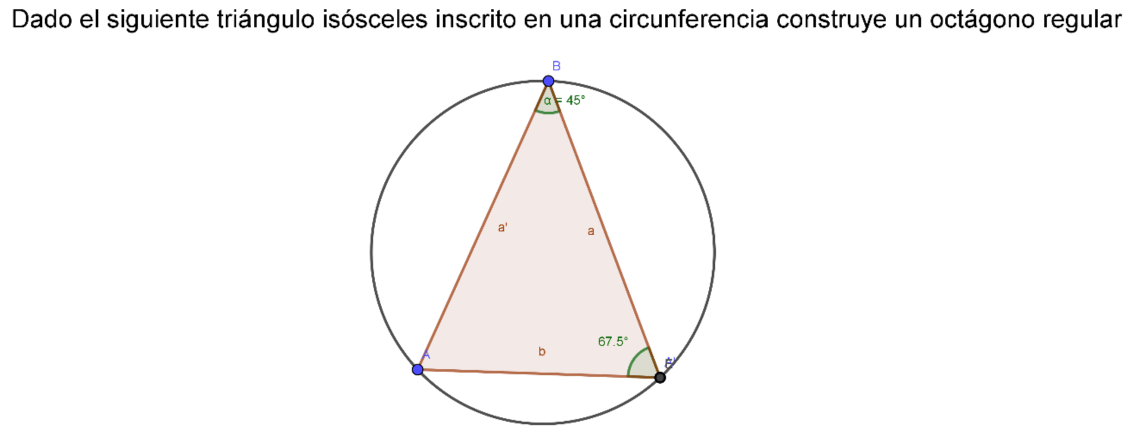


Figura 3.4: Captura de la hoja dinámica en GeoGebra que presenta la actividad 3

Actividad 4: Dado un eneágono inscrito en una circunferencia ¿Qué triángulo consideras que podría servir de base para construirlo a partir de sus diagonales? (Figura 3.5)

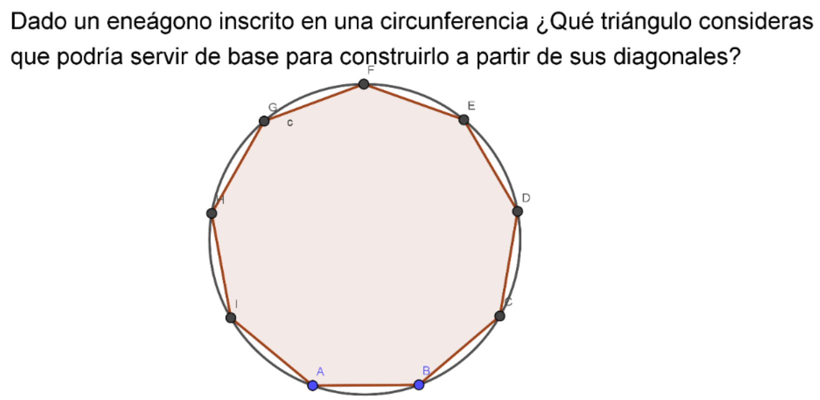


Figura 3.5: Captura de la hoja dinámica en GeoGebra que presenta la actividad 4

Tomando en cuenta los propósitos de cada una de las actividades diseñadas, estas se pueden ubicar de la siguiente manera de acuerdo con las fases propuestas por Van Hiele.

Fase 1: Presentación de los polígonos y sus diagonales. Con el fin de que los alumnos se familiaricen con el tema de estudio, así como reconocer los conocimientos de los alumnos respecto al tema de polígonos.

Fase 2 y 3: Actividades previas. Estas actividades están diseñadas con el fin de guiar a los alumnos en las diversas relaciones o componentes básicos de la red de conocimientos por formar.

Fase 4: Actividades 1, 2 y 3. Las actividades están diseñadas para que los alumnos logren expresar a través de sus construcciones los conocimientos que han adquirido sobre el nuevo tema, así como aprender el vocabulario propio del tema.

Fase 5: Actividad 4. Se espera que resuelvan la actividad usando los conocimientos adquiridos en las fases anteriores, así como un uso del lenguaje propio del tema.

Todas las actividades planteadas, están diseñadas para resolverse a partir del uso de GeoGebra, esto con el fin de atender a la definición de la visualización dada por Arcavi (2003) y para procurar una comprensión relacional con respecto al tema de los polígonos como señala Skemp (1987).

3.4 Validación interna y externa

Para asegurar que las actividades planteadas estén diseñadas de tal forma que los datos recabados a partir de ellas sean útiles, se aplicaron a personas relacionadas profesionalmente al área de las matemáticas y la educación. Realizando así cambios que se consideraron necesarios para una mejor comprensión de lo que se solicita en cada una de ellas. Posteriormente se realizó un diagnóstico de las actividades, aplicándolas a 3 alumnos de un colegio de Bachilleres del estado de Tabasco, que cumplían características similares a los participantes de este estudio.

3.5 Recolección de datos

Para la toma de datos se realizaron tres sesiones de aproximadamente 120 minutos cada sesión. La presentación de las actividades se efectuó en la biblioteca de la escuela en forma de exposición, en la primera sesión se realizó una explicación de algunas propiedades de los polígonos y sus diagonales y se trabajó con las actividades previas 1 y 2 con el fin de que los alumnos aprendieran y se familiarizaran con las herramientas de GeoGebra.

En la segunda sesión, se continuó trabajando las actividades previas, estas también ayudaron a conocer los conocimientos con los que los alumnos contaban respecto a elementos de geometría. Por ejemplo, las propiedades de los polígonos regulares, nombres y propiedades de los triángulos, así como propiedades de las rectas paralelas, perpendiculares, bisectrices y mediatrices, además, se trabajó la primera actividad del diseño. La tercera y última sesión se utilizó para que los alumnos resolvieran las actividades faltantes del diseño.

Para la realización de las actividades los alumnos trabajaron con la aplicación desde su celular y las actividades fueron proyectadas por lo que parte de la actividad era construir los triángulos de los que debían partir, sin embargo, para esto si se les dio una explicación de como poder realizarlos.

En la aplicación de todas las actividades los estudiantes tenían la indicación de alzar la mano cuando necesitaran de orientación para sus soluciones, esto con la finalidad de que sus respuestas fueran individuales. Cabe recalcar que en la presentación de las propiedades de los polígonos y en las actividades previas los alumnos tuvieron la oportunidad de expresar sus ideas y dudas respecto al tema.

3.6 Proceso de análisis de los datos

Para el análisis de los datos primero se realizó una relación en la cual se pudiera observar las actividades resueltas por cada uno de los individuos que conformaron la población de estudio, posterior a esto se inició el análisis con los estudiantes que respondieron todas las actividades, pues es en estas construcciones en las que se esperaba observar la evolución de pasar de un nivel de Van Hiele a otro y la forma de comprensión presente en ellos.

A partir de lo mencionado anteriormente se tomó en cuenta la forma de construcción de los estudiantes que resolvieron todas las actividades comparando así la construcción dada entre cada uno de estos alumnos, sin embargo, esta forma de proceder dificultaba la observación del nivel alcanzado por cada uno de ellos. Por lo que se optó por mostrar las construcciones dadas por cada alumno a cada una de las actividades y en cada una de las construcciones mostrar una pequeña explicación de lo que se observaba, para concluir con el análisis realizado para el individuo.

Durante el análisis se advirtió que muchas de las formas de construcciones eran muy similares por lo que se optó por mostrar las soluciones que se consideraron eran muy particulares y se podría observar algo interesante en ellas. Además, en el primer análisis realizado a las actividades de los alumnos que resolvieron todos los ítems, también se pudo observar que una entrevista con ellos podría dar luz a los procedimientos realizados. Sin embargo, al tratarse de una muestra grande y por la falta de disposición de la población de estudio, sólo se realizaron cuatro entrevistas, las cuales fueron realizadas a través de la plataforma zoom, en ella se mostró a los estudiantes las construcciones realizadas y se cuestionó su proceder.

En la mayoría de las entrevistas se buscó que lograran nuevas formas de construcción, esto con la finalidad de alcanzar un nuevo nivel de Van Hiele o en su defecto consolidar el que habían logrado avanzar. En el siguiente capítulo se observan transcripciones de algunas de las respuestas dadas por los alumnos a las preguntas realizadas en las entrevistas.

Finalmente, el análisis concluye con un análisis general en el que se muestra el nivel alcanzado por la mayoría de los alumnos, así como algunas de las posibles razones por las cuales podrían estar en estos niveles. Además de mostrar cuál de los dos tipos de comprensión (relacional e instrumental) prevalece en los estudiantes y cómo la visualización y los aspectos tomados en cuenta para la realización y presentación de las actividades influye en los tipos de comprensión.

Capítulo 4

Análisis de los datos

En este capítulo se presentan los resultados obtenidos en la aplicación de las actividades a alumnos de segundo semestre de medio superior. También, se tomó en cuenta los niveles del modelo de Van Hiele, para hacer una clasificación del nivel de aprendizaje obtenido por los alumnos, a su vez esta clasificación fue de ayuda para entender el tipo de comprensión que los alumnos tienen, es decir, si la comprensión adquirida es relacional o instrumental.

Debido a que la muestra de datos que se tiene es grande, además de que muchas de las respuestas dadas por los alumnos suelen ser muy similares entre ellas, en este trabajo sólo se presenta un análisis de aquellas que se consideraron aportan casos diferentes. Dicho análisis se realizó tomando en cuenta los niveles de Van Hiele para las construcciones realizadas por los alumnos, asimismo se da una breve argumentación sobre el tipo de comprensión que posee cada uno de ellos tomando en cuenta lo mencionado por Skemp (1987).

Primero se presentan las construcciones de los alumnos que realizaron las cuatro actividades. Posteriormente se observa lo realizado por aquellos alumnos que resolvieron tres actividades, finalmente se analizan las construcciones hechas por los alumnos que resolvieron dos actividades o menos.

Cabe mencionar, que en algunos casos se realizó una entrevista para comprender mejor el porqué de las construcciones realizadas e indagar en las propiedades geométricas que conocían. Además, estas sirvieron para tener un enfoque más acertado al momento de analizar las respuestas dadas por los alumnos que no fueron entrevistados.

Algunas respuestas obtenidas durante las entrevistas se presentan a lo largo del análisis de las actividades, esto con el fin de ser más claros en las argumentaciones dadas. Es importante mencionar que durante las sesiones también se tuvo la oportunidad de guiarlos para mejorar sus construcciones con la intención de que lograran avanzar a un nuevo nivel en el modelo de Van Hiele.

4.1 Análisis de las respuestas de los alumnos

Con el fin de analizar las respuestas dadas por los alumnos que respondieron todas las actividades del diseño y mantenerlos en el anonimato se nombrará a los estudiantes como:

E1, E2, E3, E4, E5, E6, E7, E8, E9, E10, E11, E12, E13

En cada caso se muestra una breve descripción de las construcciones realizadas por cada estudiante para las cuatro actividades. Finalmente, se ubica el nivel en el que se encuentran, tomando en cuenta las características que se deben cumplir del modelo de Van Hiele según Vargas et al (2013), además se toma a consideración lo escrito por Skemp (1987) para ubicar la comprensión de los alumnos como relacional o instrumental, dependiendo de los procedimientos realizados para las actividades.

- **Análisis de las respuestas de E1**

Al momento de observar las respuestas dadas por **E1** se le realizó una entrevista para profundizar en el porqué de sus respuestas, además de conocer las propiedades geométricas que domina.

En la primera actividad **E1** construyó correctamente el triángulo del que partía la actividad, posteriormente para construir el pentágono usó la herramienta polígono regular, tomando como base el lado desigual del triángulo (Figura 4.1).

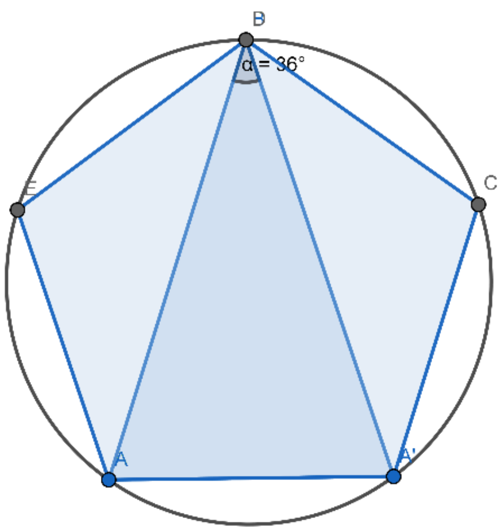


Figura 4.1: Solución dada por E1 para la actividad 1

Al cuestionarle cómo había resuelto la primera actividad mencionó qué había iniciado construyendo el triángulo a partir de un punto, al preguntarle el nombre del triángulo construido, no recordaba los nombres de los triángulos, por lo que se procedió a mencionarle los nombres de estos sin las propiedades. A continuación, se presenta una transcripción de lo mencionado por **E1**.

> ***Profesor:*** *¿Cómo hiciste este pentágono? ¿Qué herramientas usaste o por qué pensaste que ese te servía?*
>
> ***E1:*** *Recuerdo que empecé con un punto, en ese punto empecé a trazar las líneas…*
>
> ***Profesor:*** *Bueno, Este triángulo fue construido no se si recuerdas, con "ángulo dada su amplitud" yo les mencionaba que tomaban un punto, luego tomaban otro y les iba a pedir la amplitud del ángulo, en este caso era 36°, eso es lo que hiciste. Hasta aquí vamos bien, después de eso con la herramienta "polígono" ustedes podían trazar el triángulo que se forma y este triángulo en particular es un triángulo… ¿Cómo se llama… equilátero, isósceles, escaleno, triángulo rectángulo…?*
>
> ***E1:*** *Creo que era, isósceles, no me acuerdo bien.*
>
> ***Profesor:*** *Isósceles, ok. Y ¿qué cumplen los isósceles?*
>
> ***E1:*** *los isósceles creo que son los irregulares o no sé.*
>
> ***Profesor:*** *En específico ¿Qué observas de este triángulo?*
>
> ***E1:*** *Es irregular, tiene dos partes iguales y una diferente.*
>
> ***Profesor:*** *Ándale, tiene dos partes iguales y una diferente, esos son los triángulos isósceles…*

Durante la entrevista se hicieron otras preguntas relacionadas a propiedades que se habían explicado en el transcurso de la aplicación de las actividades y muchas de ellas no las recordaba. También se le cuestionó del porqué creía que su método había funcionado a lo que no supo dar respuesta como se muestra en la siguiente transcripción.

> ***Profesor:*** *¿Por qué crees que al elegir los puntos A y A' si funciona la construcción y si yo tomara por ejemplo los puntos A y B crees que saldría el pentágono?*
>
> ***E1:*** *¿A y B?*
>
> ***Profesor:*** *Si, el segmento AB ¿por qué crees que este no funciona?*
>
> ***E1:*** *No se*

Profesor: *Recuerdas cómo se llaman las líneas que forman el triángulo, el segmento AB y A'B*

E1: *No, no es la recta, la semirrecta, no, creo que no es esa*

Profesor: *Las dia…*

E1: *mmm…*

Profesor: *Las diagonales de un pentágono, recuerda que partimos de tener diagonales de los polígonos las cuales formaban figuras, en este caso triángulos. En este caso los segmentos AB y A'B son diagonales y el segmento AA' es una base por eso tomar ese segmento si funciona, sin embargo, si tomaras algún otro pues no hubiera funcionado.*

Para la segunda actividad primero construyó un triángulo con la herramienta polígono, por lo que obtiene un triángulo con todos los vértices compuestos por puntos dinámicos, es decir, puntos que se mueven en el espacio dado por GeoGebra. Luego, para poder construir el hexágono solicitado, intentó proceder como en el ejercicio anterior, es decir, usó la herramienta polígono regular y tomó como vértices iniciales a los puntos A y B, sin embargo, por la forma de construcción del triángulo, el hexágono no siempre está inscrito en la circunferencia en la que está inscrita el triángulo del que partió. En la Figura 4.2 se observa lo obtenido por **E1**.

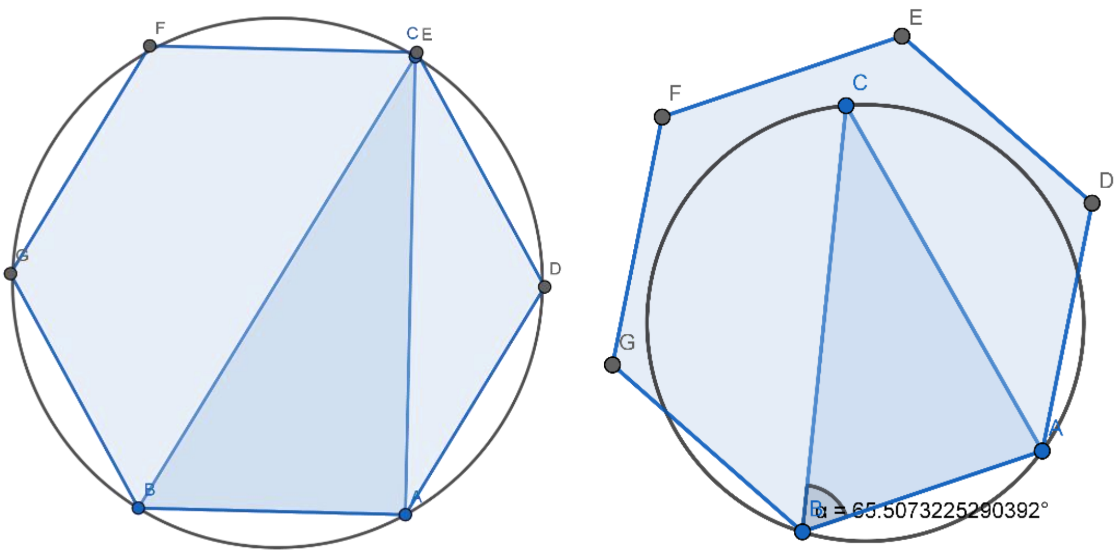


Figura 4.2: Solución 1 dada por E1 a la actividad 2

Al notar que con lo que ha realizado no obtiene lo esperado, procedió a construir primero el hexágono con la herramienta polígono regular, posteriormente lo inscribió en la circunferencia y teniendo esto, construyó los triángulos equiláteros con vértices A, F, D y B, C, E respectivamente como se muestra en la Figura 4.3.

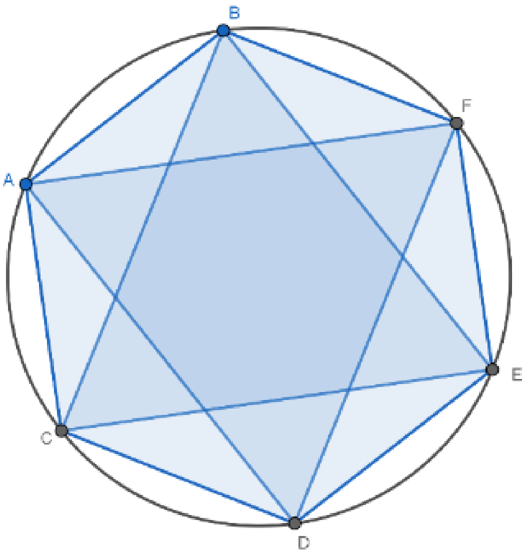


Figura 4.3: Solución 2 dada por E1 a la actividad 2

Se le cuestionó si consideraba que el triángulo obtenido era un triángulo equilátero y como en la actividad anterior, no recordó las propiedades de los triángulos, por lo que se procedió a dar una breve explicación de las propiedades de los triángulos. Dada esa explicación, **E1** pudo deducir que el tipo de triángulo obtenido cambiaba dependiendo de la posición de los vértices. Seguido de esto se le mostró que la construcción que había realizado tenía puntos que podían cambiar de lugar (puntos dinámicos) por lo que el triángulo dado no siempre era equilátero.

Posteriormente se le solicitó que diera una nueva solución a partir de las cosas que hasta ahora había observado. **E1** notó que los vértices faltantes del hexágono deben ser puntos fijos inscritos en la circunferencia y que estos pueden obtenerse a partir de trazar rectas que pasen por el punto medio de los lados del triángulo, logrando así construir, a partir de un camino diferente al inicial, el hexágono solicitado (Figura 4.4).

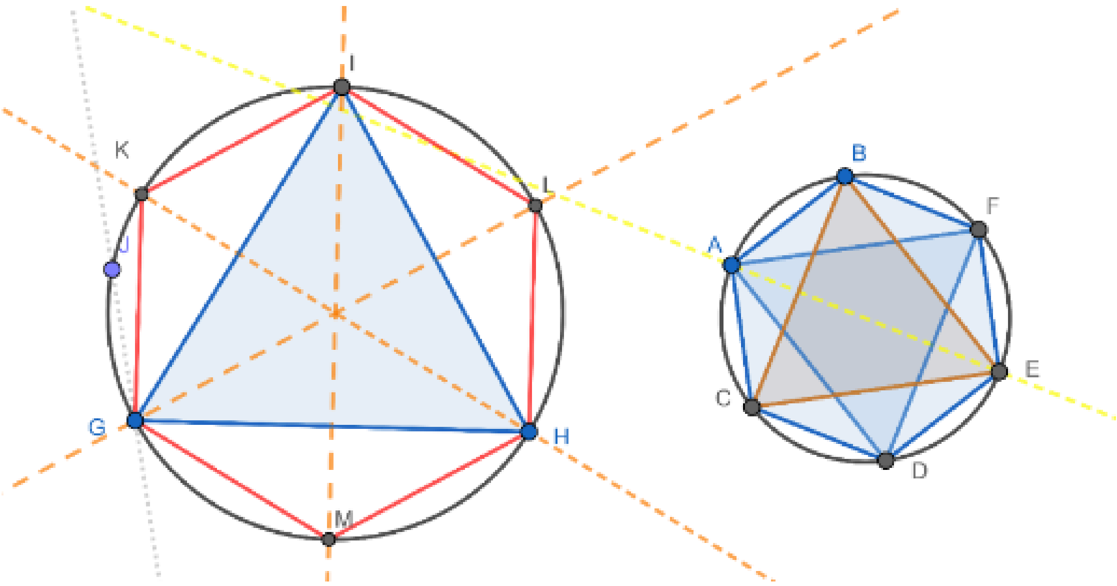


Figura 4.4: Solución dada por E1 a la actividad 2

En la tercera actividad construyó e inscribió el triángulo inicial de forma correcta. Para construir el octágono utilizó la herramienta polígono regular, sin embargo, al seleccionar la posición del segundo vértice lo eligió de forma arbitraria, es decir, sin una posición fija lo que no permite que el octágono este siempre inscrito como se muestra en la Figura 4.5. Además, se puede observar que intentó trazar todas las figuras geométricas que observa, pero tal vez por cuestión de tiempo solo logró trazar los cuadrados que se contemplan.

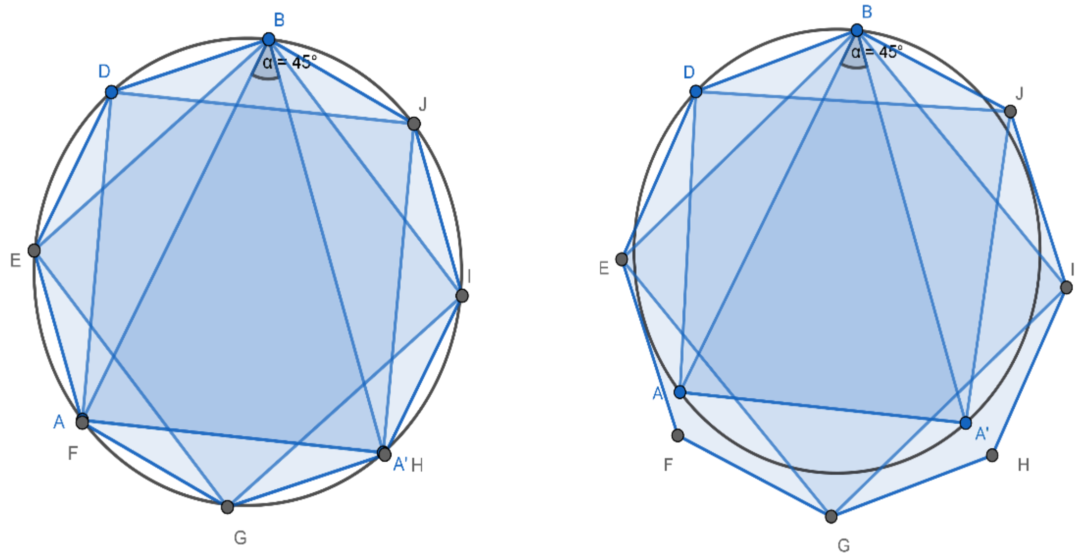


Figura 4.5: Solución dada por E1 a la actividad 3

Al cuestionar a **E1** por qué creía que su construcción fallaba mencionó que el punto que había tomado para construir el octágono no era exacto, como en la actividad anterior se le solicitó intentar construir el octágono que cumpliera estar siempre inscrito en la circunferencia. Aunque al principio no notó qué herramientas podían ser de ayuda, fue menos el tiempo que tardó en notar un posible camino para hacer lo solicitado. Notó que si traza una mediatriz por la base del triángulo esta serviría para trazar un vértice del octágono, teniendo esto percibió que con la herramienta “polígono” regular ya podría trazar el octágono sin que este dejara de estar inscrito (Figura 4.6).

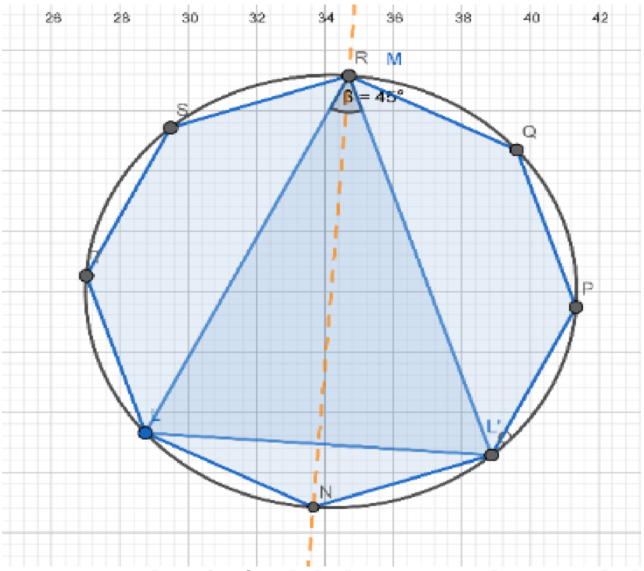


Figura 4.6: Solución final dada por E1 a la actividad 3

En la actividad cuatro **E1** tomó como un posible triángulo, el formado por dos diagonales del eneágono y un lado de este, lo que facilitó la construcción usando la herramienta polígono regular. Además, en este momento recordaba los nombres de las líneas presentes en las figuras trabajadas, y era capaz dar una solución a la actividad sin necesidad de apoyo.

Se puede ver, al analizar las construcciones realizadas en las primeras dos actividades que **E1** cumple con algunas características propias del nivel 1 del modelo de Van Hiele, pues como menciona Vargas et al (2013), el alumno está haciendo contacto con el nuevo tema de estudio, además, en las respuestas dadas en la entrevista y las herramientas elegidas para construir el pentágono y el hexágono, se observa que estas han servido para formar nuevos conocimientos y entender algunas propiedades. Posteriormente, en las actividades siguientes, se percibe que el alumno ha logrado cumplir más características propias del nivel, pues ya es capaz de expresar con sus palabras los procedimientos que ha usado y recuerda los nombres y propiedades de algunas figuras.

Al término de la entrevista **E1** ha logrado consolidar su conocimiento y expresa con más fluidez sus ideas, pues es capaz de usar adecuadamente los nombres y propiedades de la mayoría de las figuras utilizadas en sus construcciones, por lo que se puede concluir que ha cumplido todas las fases propuestas por Van Hiele para los primeros niveles y está en proceso de consolidar las características propias del nivel 2. Tomando en cuenta lo observado en el análisis de las características del modelo y la forma de proceder de **E1** para resolver las actividades, se deduce que la visualización fue una herramienta clave. Pues, el que pudiera utilizar las herramientas que GeoGebra ofrece para la construcción de los polígonos solicitados, hizo que fuera capaz de ver errores que tal vez no hubiera observado, como en la actividad tres, que al construir el octágono notó que la ubicación de los vértices si era importante. Además, como las respuestas dadas no siguen un mismo procedimiento, también se puede ver que la comprensión que tiene es relacional, pues Skemp (1987) menciona que la comprensión relacional es el saber qué hacer y por qué, lo que se podría tomar en este caso como el entender por qué falla cierto procedimiento y así poder seguir un camino distinto de construcción.

- **Análisis de las respuestas de E2**

E2 también tuvo una entrevista en la cual se buscó guiarlo para hacer construcciones distintas a las dadas a partir del nuevo conocimiento adquirido.

En la actividad uno **E2** construyó el triángulo inicial como se esperaba, al momento de construir el pentágono intentó medir el ángulo no dado, sin embargo, abandonó esta idea y resolvió usando la herramienta “polígono regular” obteniendo la construcción que se muestra en la Figura 4.7. Tomando en cuenta que intentaba seguir un camino distinto a partir de medir el ángulo se le cuestionó el porqué de su proceder, respondiendo que intentaba construir un triángulo. La idea de construir un triángulo similar al del que parte puede deberse a que intenta reproducir lo que observa en la presentación de los polígonos y sus diagonales.

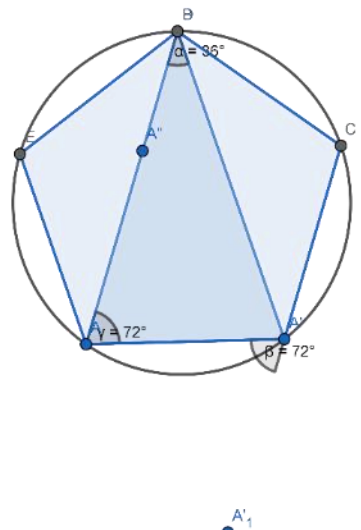


Figura 4.7: Solución dada por E2 a la actividad 1

Para la actividad dos inició construyendo el hexágono con la herramienta polígono regular, posteriormente lo inscribió en una circunferencia. Luego, tomando como puntos iniciales a D y E, construyó un triángulo regular, en consecuencia, el triángulo que obtuvo no estaba conformado por las diagonales; Por último, como se observa en la Figura 4.8, trazó todas las diagonales del hexágono.

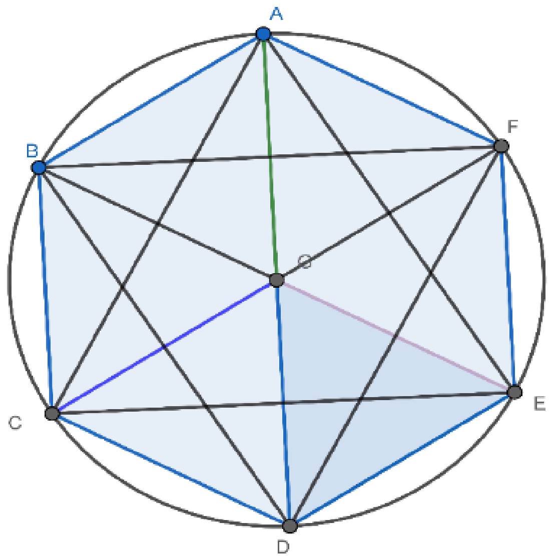


Figura 4.8: Solución dada por E2 a la actividad 2

En la entrevista se intentó indagar si tenía alguna idea de por qué la construcción del triángulo había resultado de esa forma, por lo que se le preguntó si sabía el nombre de las rectas por las cuales estaba conformado el triángulo, respondió que le parecían perpendiculares, mencionando posteriormente que no recordaba, además se intentó dar una orientación más detallada para que lograra transitar a un nuevo nivel del modelo de Van Hiele.

En la transcripción de una parte de la entrevista presentada a continuación, se puede observar que **E2** sigue intentado reproducir los pasos que ha hecho anteriormente para copiar la figura que se les presentó en un inicio con las diagonales.

> ***Profesor:*** *¿recuerdas que te pedía la actividad? La actividad pedía que a partir de un triángulo dado construyeras el hexágono y no al revés. Lograste construir el pentágono e incluso es un buen camino porque haces uso de GeoGebra que es parte de lo que consiste la actividad, observar que tenemos otras herramientas a parte del lápiz y el papel para poder hacer construcciones geométricas, sin embargo, si llegaste a este punto, ¿Qué observas? ¿recuerdas cuál es el nombre las líneas que trazaste?*
>
> ***E2:*** *Este… perpendiculares me parece*
>
> ***Profesor:*** *Estas que son del hexágono BE qué es del hexágono*
>
> ***E2:*** *Líneas rectas o algo así*
>
> ***Profesor:*** *Pero… ¿recuerdas que estábamos viendo, polígonos y sus…?*
>
> ***E2:*** *Diagonales*

Profesor: *Sus diagonales, entonces trazaste diagonales, pero también trazaste radios, ¿recuerdas cuáles eran los radios de un hexágono? O bueno en general de un polígono*

E2: *No*

Profesor: *¿No? Ok, los radios de un polígono son los segmentos de recta que van de un vértice al centro del polígono, en este caso en el hexágono era lo que les comentaba que al ser número par su número de lados, si se observan estos radios e incluso son la mitad de una diagonal*

E2: *Si, ya recordé*

Profesor: *Bueno viendo esto y que tú ya observaste que están aquí las diagonales, ¿crees que ahora si partiendo de este triángulo tu puedas tener tu hexágono*

E2: *Si*

Profesor: *Ok, ¿cómo lo harías?, Este se llama punto I, este J y este es K*

E2: *Creo que…, a ver déjame pensar un ratito… creo que no sé cómo, creo que lo que yo hice fue colocar puntos esa vez*

Profesor: *No intentes reproducir lo que hiciste, ya observaste que las diagonales son las que van de un vértice a sus opuestos y que el triángulo del que se parte está formado por las diagonales, tu lograste construir ese triángulo, ¿lo notas?*

E2: *Si, ya*

Profesor: *Ok, dime los vértices del triángulo*

E2: *¿los que están en la imagen?*

Profesor: *Si*

E2: *La C, la F y la E. La A, la I y la B*

Profesor: *La C… ¿?*

E2: *La C… y… la A, la B y la D y la F*

Profesor: *Pero tienes que formar un triángulo, un triángulo tiene tres vértices, dime tres vértices primero. La C, la A y la ¿?*

E2: *Y la E*

Profesor: *Ok, aquí está el triángulo que nosotros queremos formar, más bien del que estamos partiendo. Tú lo lograste hacer y son diagonales, dime ¿qué observas de estas diagonales que te ayuden a construir el hexágono?*

En la siguiente parte de la entrevista se procedió a comparar lo que había realizado en la actividad uno, se le preguntó si consideraba que esto funcionaba o no para la actividad dos, mencionó que creía que no pues el triángulo parecía un poco más inclinado, por lo que partiría de distintos puntos, sin embargo, lo que intentó fue reproducir lo realizado en la actividad anterior. Se le mostró que estos puntos no funcionarían pues el hexágono construido no quedaba inscrito en la circunferencia, al ver esto dijo que si se tomaba otro lado del triángulo tal vez sí funcionaría.

Lo anterior deja ver que no era consciente que el triángulo que estaba usando era un triángulo equilátero y las propiedades que este debe cumplir. Al observar esto se le cuestionó sobre las partes que componen un polígono, y se le dio una explicación un poco más detallada de las características y partes de un polígono regular.

Después de la explicación dijo que para poder construir el hexágono a partir del triángulo equilátero se necesitaba un punto, usando la herramienta "medio o centro" trazó el centro del polígono intentando proceder como lo había hecho al principio. Luego de algunos intentos fallidos mencionó que necesitaba trazar una diagonal que dividiera la circunferencia, trazando así la recta que pasa por el centro del polígono y un vértice del triángulo, lo que le permitió obtener el punto que necesitaba para construir el hexágono con la herramienta "polígono regular" como se muestra en la Figura 4.9.

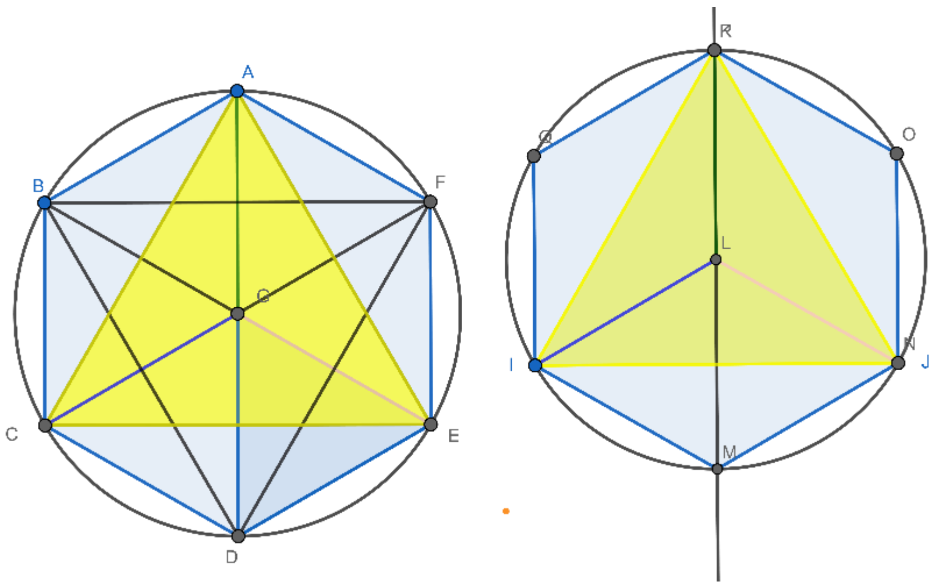


Figura 4.9: Solución final dada por E2 a la actividad 2

En la actividad tres **E2** construyó el triángulo isósceles correctamente, como se muestra en la Figura 4.10, posteriormente para construir el octágono tomó como vértices los puntos A y A' por lo que el polígono que obtuvo tiene como radio los lados del triángulo. Luego, trazó los demás radios para intentar reproducir lo que observaba en la presentación, al final inscribió la construcción realizada en una circunferencia.

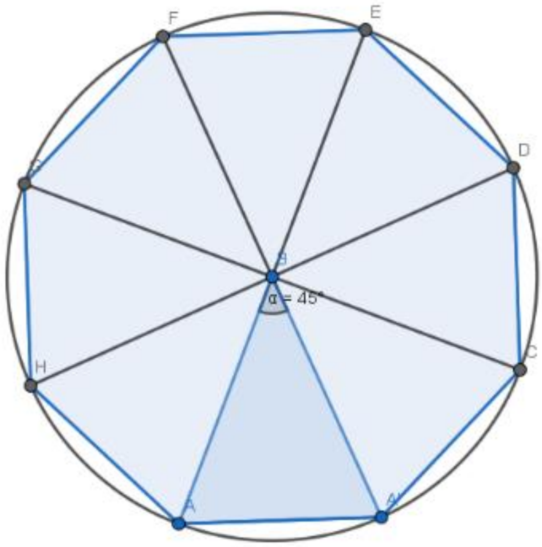


Figura 4.10: Solución dada por E2 a la actividad 3

En la entrevista se le hizo ver que, si el triángulo lo hubiera inscrito desde un principio esta construcción fallaría pues el octágono obtenido no estaría inscrito, al preguntarle como resolvería esta actividad mencionó que tomaría como un lado del octágono la base del triángulo dado. Se le explico que esto no funciona pues el triángulo está formado por diagonales y no comparte lados con el polígono, además, era lo que había intentado en un principio. De nuevo se le explicó algunas propiedades de los polígonos y se intentó que resolviera de forma similar a lo realizado a la actividad anterior, por lo que tomó el centro del triángulo para construir una recta que pasara por el centro y el vértice B del triángulo, luego tomó el punto de intersección de la circunferencia con la recta obtenida y este punto le sirvió para construir el octágono con la herramienta polígono regular (Figura 4.11).

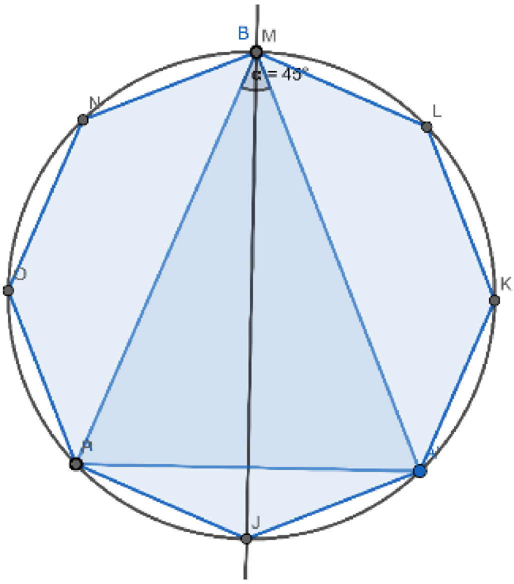


Figura 4.11: Solución final dada por E2 a la actividad 3

En la última actividad **E2** Toma como un posible triángulo el formado por dos diagonales del eneágono y un lado de este, lo que facilita la construcción del eneágono con la herramienta polígono regular como se observa en la Figura 4.12.

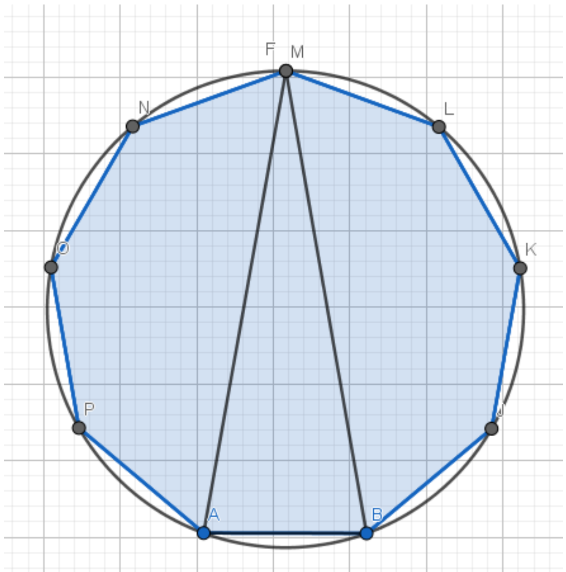


Figura 4.12: Solución dada por E2 a la actividad 4

Al inicio del análisis de las construcciones realizadas por E2 se observa que resuelve de forma mecanizada e intenta reproducir lo que se le ha presentado de apoyo. Tomando en cuenta esto y las respuestas dadas en la entrevista, se deduce que el estudiante cumple solo algunas características del nivel 1 del modelo de Van Hiele, pues Ha logrado descubrir y aprender algunas relaciones entre los conocimientos que está formando. Sin embargo, los conocimientos que ha adquirido son necesarios más no suficientes para poder establecer relaciones o clasificaciones entre propiedades de distintas familias de figuras, lo cual es propio del nivel 2 del modelo de Van Hiele según Vargas et al (2013).

Una de las posibles causas de que este alumno no logre avanzar más allá del nivel 1 se debe al desinterés que muestra en las explicaciones dadas, así como al momento de intentar solucionar las actividades. Lo que también evita que logre tener una comprensión relacional sobre el tema de los polígonos, pues intenta solo aplicar reglas que algunas veces fallan (Skemp, 1987).

- **Análisis de las respuestas de E3**

En la actividad uno E3 procede como E1 por lo que, se puede deducir que responde de forma mecanizada, sin una exploración previa para obtener la solución.

Para la actividad dos, partió de un triángulo equilátero. Luego, para construir el hexágono procedió de la misma forma que en la actividad uno, es decir, usando la herramienta polígono regular construyó el polígono solicitado tomando un lado del triángulo como un lado del polígono, posteriormente lo inscribió en una circunferencia. Debido a lo anterior, los lados del triángulo no son diagonales del hexágono, sino que resultan ser radios de este como se muestra en la Figura 4.13.

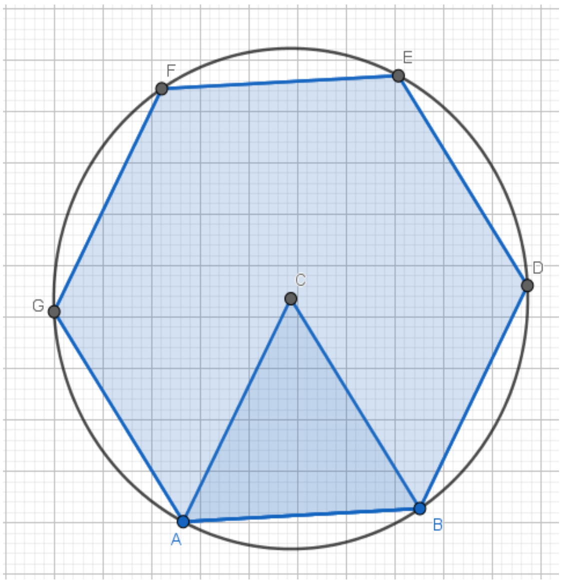


Figura 4.13: Solución dada por E3 a la actividad 2

E3 deja ver que la solución es obtenida a partir de lo que ha observado en la actividad uno, sin embargo, en esta actividad el procedimiento aplicado hace que el hexágono conseguido no tenga como diagonales los lados del triángulo, sino que estos son radios del polígono.

Para la actividad tres y cuatro, realizó la construcción del octágono y eneágono de la misma forma que **E1,** pero en la actividad tres, **E3** no intenta trazar las diagonales que observa, aunque el polígono obtenido no siempre está inscrito. La forma de construcción muestra un avance a las anteriores, pues en esta ocasión el alumno notó que la base del triángulo es una diagonal del polígono y no un lado de este, no obstante, esta forma de resolución puede deberse a lo que observa en la presentación del hexágono con sus diagonales.

Observando las construcciones realizadas para las primeras actividades y comparándolas con lo realizado por **E1** se puede argumentar que **E3** cumple con algunas características del nivel 1 del modelo de Van Hiele, pues como menciona Vargas et al (2013) el alumno es capaz de reconocer las figuras geométricas, pero no diferencia partes ni componentes de estas. En las actividades tres y cuatro el alumno muestra un avance en las características que identifican el primer nivel, pues las construcciones dadas y la elección del triángulo para la última actividad dejan ver que cumple que: "las descripciones son principalmente visuales y las compara con elementos familiares de su entorno." (Vargas et al, 2013, pág 82)

Se deduce de lo anterior que **E3** ha logrado consolidar las caracteríticas del nivel 1 y tal vez con más actividades o una explicación más detalla podria pasar al nivel 2 del modelo de Van Hiele, ya que si el alumno logra establecer una visión global de todo lo aprendido e integrar estos nuevos conocimientos y formas de razonamiento con los que tenían anteriormente puede ser capaz de entender cada una de las características de los polígonos, lo cual es propio del nivel 2 (Vargas et al, 2013). Este razonamiento se puede interpretar como que el alumno no solo tiene comprensión instrumental, sino que el observar las figuras y sus propiedades han desarrollado una comprensión relacional, sin embargo sigue muy presente la primera, pues en las actividades aplicó reglas esperando llegar a una solución efectiva (Skemp, 1987).

- **Análisis de las respuestas de E4**

En la actividad uno construyó el triángulo inicial con la herramienta polígono por lo que el triángulo que obtuvo no es siempre un triángulo isósceles, posteriormente construyó el pentágono con la herramienta polígono regular partiendo de los puntos A y B los cuales son vértices del triángulo. Como **E4** notó que tanto el pentágono como el triángulo deben estar inscritos, trazó una circunferencia que pasa por los puntos A, B y C, no obstante, la forma en que construyó el triángulo no permite que el pentágono este siempre inscrito. Luego de construir el triángulo y el pentágono intenta medir el ángulo formado por los puntos A, B y C, pero al momento de elegir los vértices de este elige los puntos A, C y E por lo que el ángulo no era 36° como esperaba, por último, trazó las diagonales faltantes del polígono, trazando triángulos que pasan por los vértices del pentágono como se observa en la Figura 4.14.

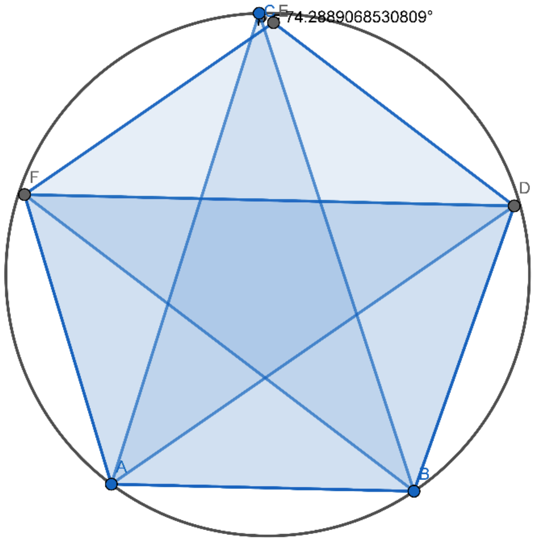


Figura 4.14: Solución dada por E4 a la actividad 1

Aunque el triángulo del que parte no es el indicado, se observa que intenta copiar lo que observa en la figura presentada sin lograr entender porqué o cómo se tiene esa construcción, es decir, observa propiedades generales de los polígonos pero no las propiedades particulares.

En la actividad dos construyó el triángulo inicial y lo hace correctamente. Luego fuera de esta construcción y usando la herramienta polígono regular construyó un hexágono inscrito, posteriormente traza los triángulos con vértices en H, F, D y I, G, E respectivamente, después pinta un punto en donde considera es el centro del hexágono para así poder trazar triángulos que tienen como vértice los del hexágono y el punto que tomó como el centro del polígono, esto con el fin de reproducir las diagonales del hexágono (Figura 4.15).

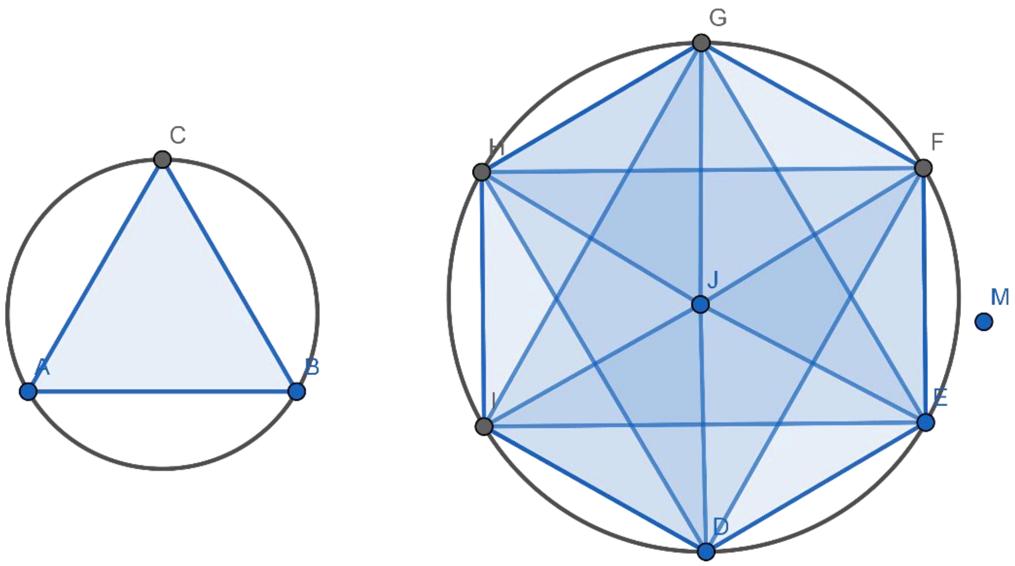


Figura 4.15: Solución dada por E4 a la actividad 2

E4 intenta partir del triángulo que se les ha indicado, aunque como las propiedades que conoce hasta ahora son generales, el triángulo obtenido es de poca ayuda para trazar el hexágono por lo que decide construirlo usando la herramienta polígono regular y así trazar lo que observa en la proyección presentada del hexágono con sus diagonales. Sin embargo, no toma en cuenta que en el SGD usado es importante tomar en cuenta las características de los puntos elegidos pues el dado como centro no siempre lo es.

Para la tercera actividad construyó el triángulo usando la herramienta polígono regular como se muestra en la Figura 4.16, posteriormente construyó un ángulo de 45° con la herramienta "ángulo dada su amplitud" tomando los vértices A y C del triángulo. Debido a que el triángulo trazado es equilátero, el vértice B no coincide con el del ángulo lo cual puede ser un problema para poder dar una posible forma de construcción del octágono.

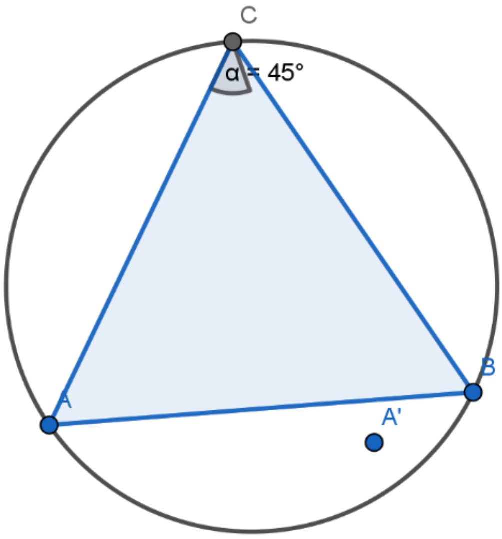


Figura 4.16: Solución dada por E4 a la actividad 3

Por último en la actividad cuatro tomó como un posible triángulo, el formado por dos diagonales del eneágono y un lado de este, sin embargo, cuando se le solicitó que construyera el eneágono a partir del triángulo obtenido no dió alguna posible construcción.

Analizando la construcción realizada para resolver las actividades se observa que **E4** cumple con algunas características del nivel 1 del modelo de Van Hiele, pues logra reconocer las propiedades de las figuras geométricas aunque las ve como un todo, por lo que las construcciones realizadas son principalmente visuales. En sus construcciones y tomando en cuenta las características que cumple del modelo de Van Hiele se observa que la comprensión que tiene este estudiante es instrumental, pues busca formas de reproducir lo que ve sin entender muy bien como y por qué lo que es propio de la comprensión relacional (Skemp, 1987).

- **Análisis de las respuestas de E5**

Para la actividad uno **E5** logró realizar el triángulo del que debe partir, sin embargo, no construyó el pentágono solicitado. Esto puede deberse a que las características y propiedades que conoce sobre los polígonos regulares no son suficientes para poder trazar el pentágono regular, además, de ser la primera vez que está en contacto con GeoGebra.

En la actividad dos **E5** obtuvo el triángulo que se muestra en la Figura 4.17, para ello inició colocando tres puntos que le sirvieron como vértices del triángulo, luego con la herramienta segmento de recta los unió. Posteriormente, con la herramienta “circunferencia (centro, punto)” construyó una circunferencia tomando un punto arbitrario que consideró era el centro del triángulo y el vértice E del triángulo lo tomó como punto de la circunferencia.

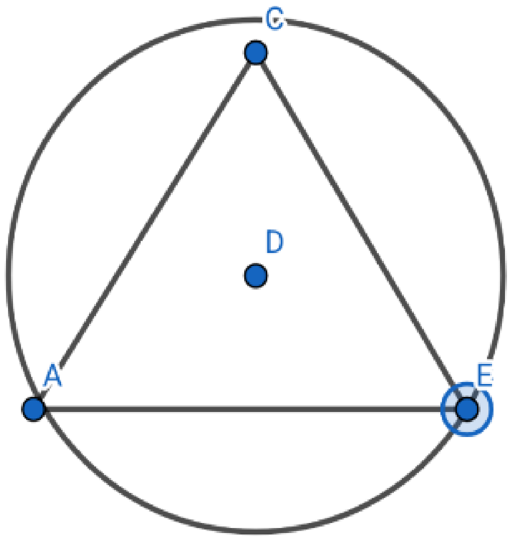


Figura 4.17: Construcción dE4 triángulo realizada por E5 para la actividad 2

E5 notó que esta construcción no le ayudaba para construir lo que se le solicitaba por lo que procedió a construir el hexágono con la herramienta polígono regular, posteriormente lo inscribió en una circunferencia y trazó las diagonales del hexágono comenzando por las que son paralelas, después la diagonal que va del punto F al C, por último, trazó las restantes como se observa en la Figura 4.18. Al observar la construcción y la forma en que procede este alumno, se puede deducir que logra reconocer algunas propiedades de los polígonos e incluso si no reconoce por su nombre las características de las diagonales, es capaz de trazarlas.

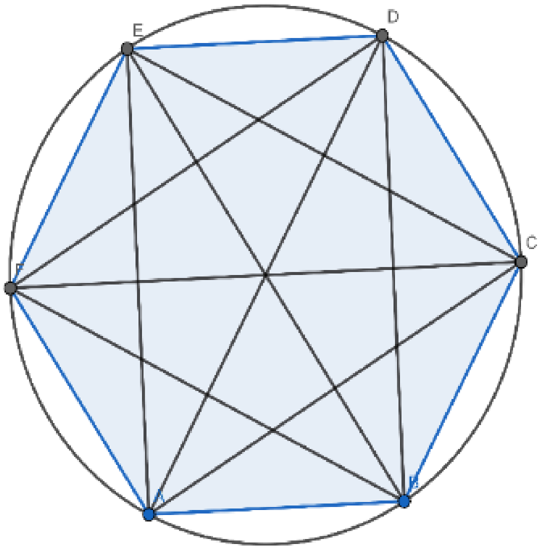


Figura 4.18: Solución dada por E5 a la actividad 2

La Figura 4.19 muestra lo realizado por **E5** para la actividad tres. Se puede ver que procede de la misma forma que en la actividad anterior. Primero construyó el octágono, para luego inscribirlo en una circunferencia, posteriormente trazó las diagonales comenzando con aquellas que forman cuadrados lo que muestra que notó que las diagonales van desde un vértice hacia sus opuestos, además de que de un vértice parten más de una diagonal. En la última actividad **E5** construyó el eneágono, pero no eligió un posible triángulo.

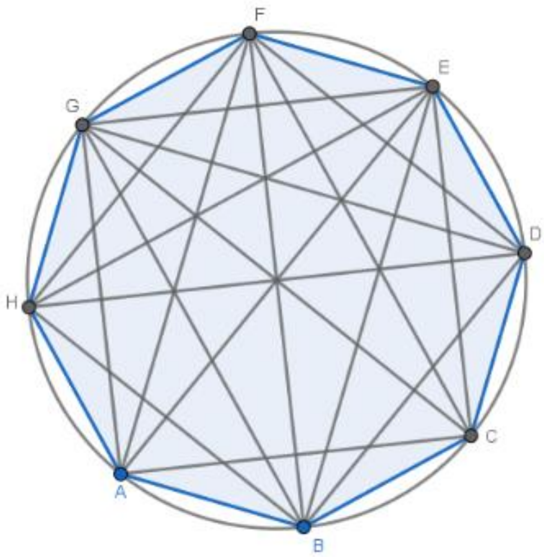


Figura 4.19: Solución dada por E5 a la actividad 3

Al inicio de las actividades se observa que **E5** cumple algunas características del nivel 1 del modelo pues reconoce propiedades generales de las figuras, pero estas no son suficientes para dar definiciones o en este caso lograr construir el polígono solicitado. En las actividades dos y tres se observa que sigue reproduciendo lo que ve en la proyección presentada, sin embargo, identifica ciertas propiedades de los polígonos que lo ayudan a reproducir lo que observa esto hace pensar que ha logrado avanzar al nivel 2 del modelo. Sin embargo, en la última actividad se percibe que las propiedades que ha aprendido son necesarias, pero no suficientes para construir el eneágono con el triángulo que ha elegido, por lo que se puede concluir que **E5** al finalizar la actividad el alumno aún sigue en el nivel 1 del modelo.

La forma en que procede **E5** muestra que si bien la visualización muchas veces es de ayuda para que logren avanzar en los niveles propuestos por Van Hiele, se debe tener cuidado como es utilizada, pues en este caso se observa una confusión con lo que se le solicita en las actividades y la proyección presentada. Además, la comprensión instrumental suele ser un obstáculo pues esperan encontrar procedimientos que ayuden a obtener las construcciones solicitadas (Skemp, 1987).

- **Análisis de las respuestas de E6**

Las construcciones dadas por E6, también aportan cosas diferentes a las construcciones por lo que se realizó una entrevista, en este caso se buscó que el alumno mostrara como había llegado a las deducciones presentadas.

En la actividad uno **E6** notó que las diagonales del pentágono forman triángulos congruentes al inicial, en general que los polígonos están formados por triángulos. Por lo que, para construir el polígono solicitado tomó los vértices del triángulo inicial para trazar otros iguales a este, hasta formar el pentágono como se muestra en la Figura 4.20.

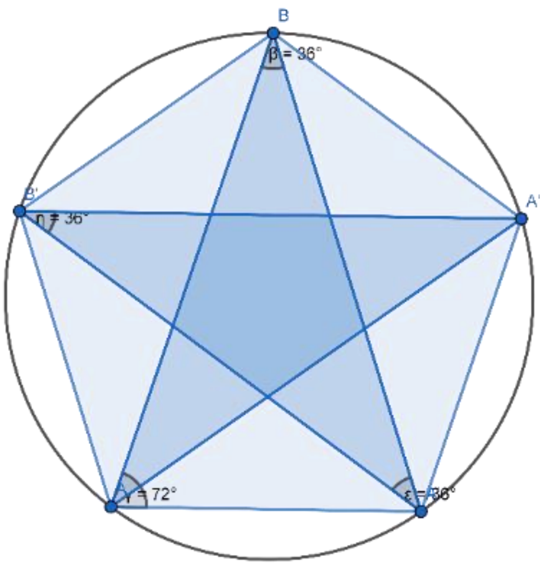


Figura 4.20: Solución dada por E6 a la actividad 1

Para construir el hexágono solicitado en la actividad dos, **E6** pintó el punto medio de cada uno de los lados del triángulo y trazó las rectas que pasan por estos puntos y los vértices opuesto a estos respectivamente como se muestra en la Figura 4.21. Por último, tomó como vértice del hexágono los puntos de intersección entre las rectas trazadas y la circunferencia que inscribe el triángulo.

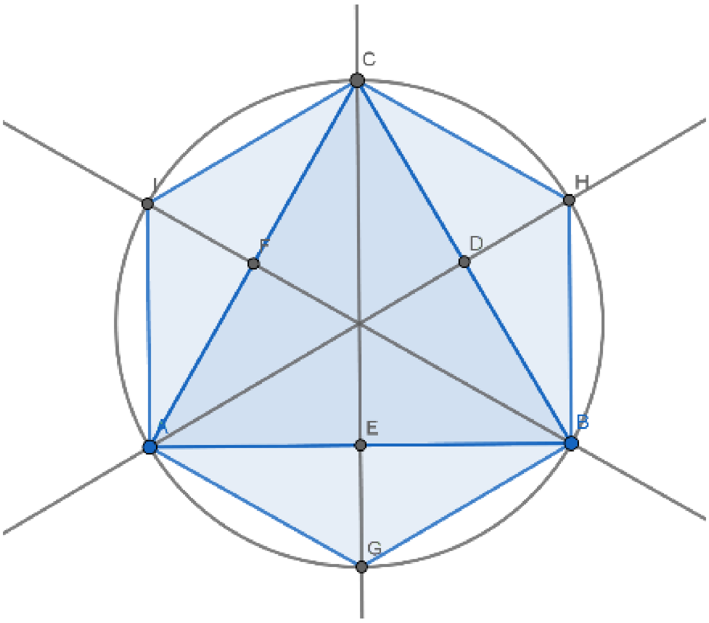


Figura 4.21: Solución dada por E6 a la actividad 2

Se le preguntó a **E6** por qué no procedió de la misma forma que en la actividad uno, respondió que, usando su lógica notó que no sabía cuántos grados debía rotar el triángulo para que quedara al revés, y donde cayeran los vértices de este serían los vértices faltantes del hexágono. Por lo que era más fácil, trazar una recta que pasara por el punto medio de los lados del triángulo, para así tomar la intersección con la circunferencia y de ese modo poder construir el polígono solicitado.

> ***Profesor:*** *...Ahora para el hexágono veo que no hiciste lo mismo que en el anterior, ¿por qué en este no funciona lo que realizaste en el anterior y tomas esta recta?*
>
> ***E6:*** *Porque pues usando mi lógica. Se que, si roto ese triángulo no sé qué cantidad de grados exactamente, pero si lo roto digamos al revés, pues… juntando los puntos exteriores se forma el hexágono, por eso puse esa recta para marcar donde debo de iniciar mi triángulo, ya ve que la circunferencia pues se cruza ahí con la recta.*
>
> ***Profesor:*** *¿La circunferencia cruza esta recta?*
>
> ***E6:*** *ajá, la intersección, empecé ahí mi triángulo.*

Profesor: *Ok y ¿cómo construiste esta recta? ¿esta recta solo es una recta que pasa por dos puntos no?*

E6: *No recuerdo que función agarre, pero era para marcar como la mitad entre una recta y uní el otro punto.*

Profesor: *De hecho, GeoGebra nos dice que herramienta usamos, si nos posicionamos aquí podemos ver que es el punto medio del segmento CB ¿y crees que hay una recta que no necesita que tracemos el punto medio para construirla?*

E6: *La verdad no sé…*

En sus respuestas se observa que, si bien no sabía que la recta que estaba utilizando era una mediatriz, las herramientas proporcionadas por GeoGebra y lo observado sobre las diagonales y polígonos ayudó a que diera una construcción eficiente para el hexágono.

También, se le preguntó sobre las características de las rectas paralelas, perpendiculares y mediatrices para saber cuáles de ellas recordaba, de las dos primeras recordaba características esenciales, pero de la mediatriz solo recordaba que era una recta que divide a un segmento en dos partes. Se le mostro que esta no solo divide en dos partes al segmento, sino que incluso es a la mitad, y que era justamente una mediatriz la recta que había utilizado para poder resolver la actividad.

En la actividad tres **E6** construyó ángulos dada su amplitud desde los vértices A y A’ del triángulo, luego trazó las rectas que pasan por los vértices de los ángulos obtenidos y para poder pintar los puntos C y D que son las intersecciones de las rectas con la circunferencia. Notó que para construir el octágono faltaban tres puntos más e intentó construir uno tomando como vértice el punto C, pero el ángulo obtenido no le resultó útil como se muestra en la Figura 4.22. Sin embargo, luego notó que había una diagonal horizontal que dividía al triángulo en dos partes, por lo que tomó el punto medio entre los puntos A, C y D, A’ para trazar la diagonal que necesitaba, por último, para encontrar el vértice faltante tomó el punto medio del segmento AA’ y trazó la recta que pasa por este punto y el vértice B del triángulo.

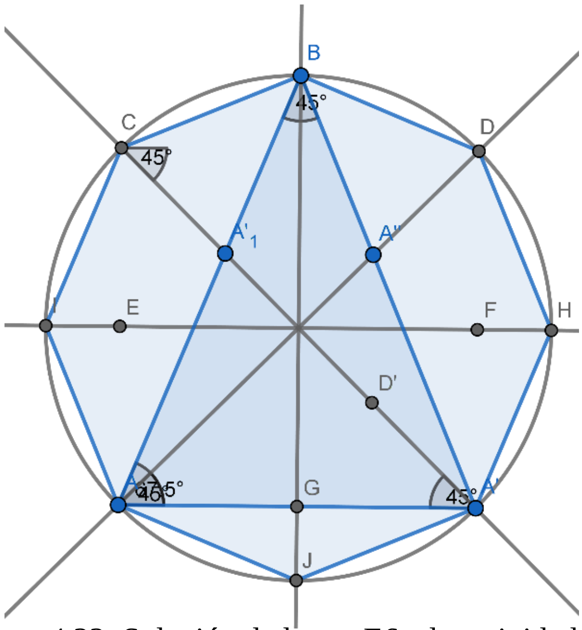


Figura 4.22: Solución dada por E6 a la actividad 3

E6 dijo que para construir el polígono solicitado en esta actividad intenta hacer el mismo procedimiento que en la actividad uno, pues notó que esto solo sirve cuando los triángulos son irregulares, sin embargo, solo funcionó para obtener dos vértices por lo que, para encontrar otros dos trazó la diagonal que dividide en dos al triángulo verticalmente y aplicó este mismo procedimiento para el vértice faltante. También notó que las rectas que obtuvo midiendo ángulos formaban ángulos de 90° por lo que las otras dos rectas trazadas dividen a estos en 45° que es lo que se necesita.

Profesor: *En esta actividad, mides este ángulo ¿por qué mides este ángulo?*

E6: *Porque iba a hacer lo mismo de… la de la primera… eso lo hago, pero cuando son polígonos irregulares.*

Profesor: *Ok, y en este caso tienes un triángulo isósceles, bien. Luego, por ejemplo, este que te quedó aquí, ¿por qué crees que este no funcionó y volvió a caer en la misma línea?*

E6: *Porque tenía tal vez que ponerlo en sentido contrario de las manecillas del reloj*

Profesor: *Vamos a probarlo, si es en sentido contrario debió ser ACD, pero de nuevo, cae sobre uno de los que ya tenemos.*

E6: *Y no funcionaría*

Profesor: *Si, porque de nuevo cae en uno de los ángulos que ya tenemos. Luego, esta línea ¿Cómo se te ocurrió tomar esta recta?*

E6: *Porque puse la recta que divide al triángulo verticalmente y si hago otra recta, una recta que corta a otra, pues va a ser como un ángulo de 90° grados y ya tendría la circunferencia dividida en cuatro.*

En la conversación se observa que **E6** ha logrado hacer deducciones de lo que observa en las actividades, una de ellas es que su método de construir los polígonos a partir de triángulos solo funciona cuando estos son isósceles.

E6 resolvió la actividad cuatro como se muestra en la Figura 4.23, partió de un triángulo que está conformado por un ángulo de 20°, dos diagonales y un lado del eneágono. Luego, construyó el eneágono trazando ángulos dada su amplitud para así construir triángulos isósceles semejantes al dado inicialmente, estos tenían como vértices los puntos que va obteniendo de los triángulos anteriores. Lo mismo que aplicó en la actividad uno y tres, mencionando que en este caso si funciona pues el triángulo del que parte es un triángulo irregular.

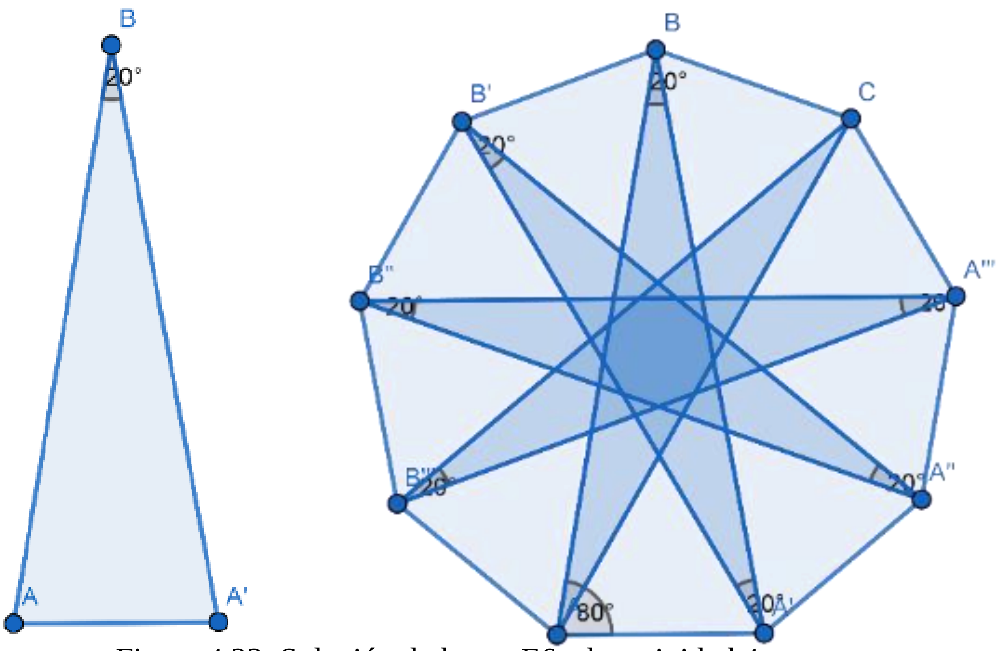


Figura 4.23: Solución dada por E6 a la actividad 4

También mencionó que esta forma de resolver solo funciona con polígonos con número de lados impares, por lo que para probar que si funcionaba con otro polígono impar se le pidió lo aplicara con un endecágono, notando que con este polígono también funcionó (Figura 4.24).

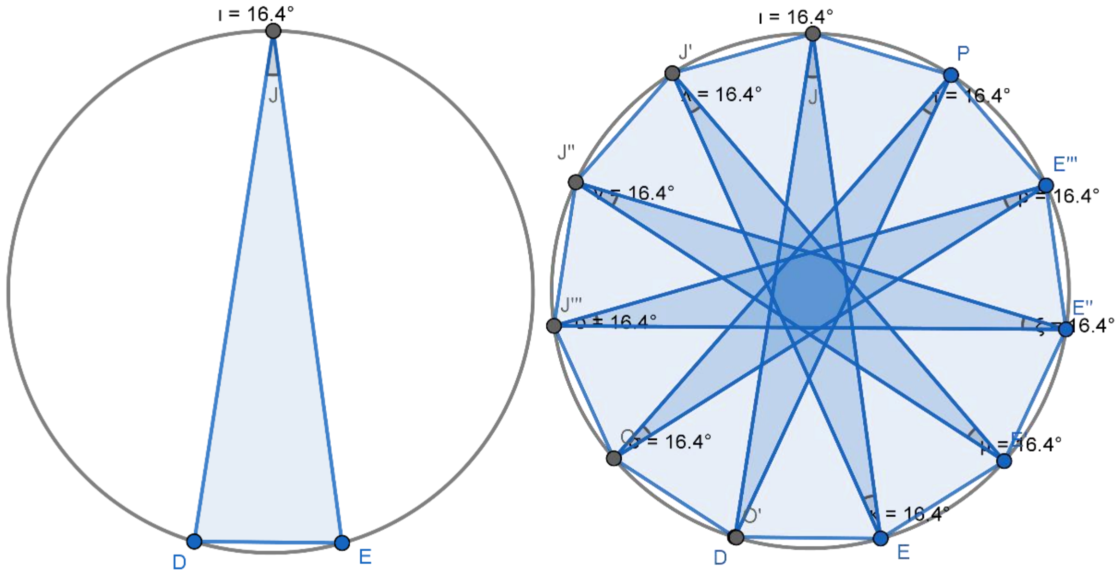


Figura 4.24: Construcción del endecágono dada por E6

Se observa desde la primera actividad que el alumno se encuentra en el nivel 2 del modelo de Van Hiele, pues es capaz de utilizar los conocimientos adquiridos para resolver actividades diferentes a las comunes y, probablemente, más complejos. Además, establece propiedades de los polígonos de forma empírica, a través de la experimentación y manipulación, sin embargo, aún no puede elaborar definiciones (Vargas et al, 2013). Al trabajar las actividades dos y tres, el alumno logra completar las siguientes características propias del nivel 2 y al finalizar las actividades se puede ubicar al alumno en el nivel 3 pues es capaz de interrelacionar lógicamente propiedades de los conceptos. Puede formular definiciones abstractas, y es capaz de señalar las condiciones necesarias y suficientes que deben cumplir los polígonos para utilizar una u otra forma de construcción (Vargas et al, 2013).

E6 logró encontrar nuevos caminos de construcción para los polígonos e incluso logró hacer deducciones que pueden ser aplicadas a ciertos polígonos, este es un claro ejemplo de la importancia de tener comprensión relacional e instrumental, pues la primera ayudó a notar cuando es aplicable la nueva regla y la segunda es solo la aplicación de esta (Skemp, 1987).

- **Análisis de las respuestas de E7**

En la actividad uno **E7** construyó el triángulo inicial con la herramienta polígono, luego lo inscribió en una circunferencia, sin embargo, la forma de construcción del triángulo hace que no siempre sea un triángulo isósceles. Posteriormente, para construir el pentágono, construyó los triángulos que tienen como vértices los puntos A, B y D y A, C y E respectivamente. Como los triángulos construidos tiene todos puntos dinámicos, es decir, no tienen una posición fija dentro de la construcción, el pentágono que obtiene no es siempre regular, como se muestra en la Figura 4.25.

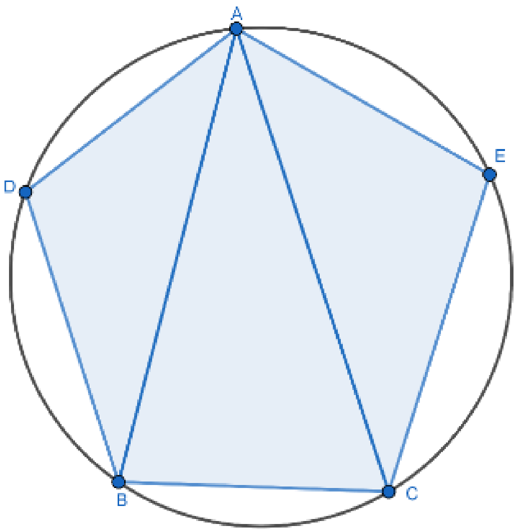


Figura 4.25: Solución dada por E7 a la actividad

La construcción dada puede deberse a que nunca antes había trabajado con un SGD, en este caso geogebra por lo que, aunque en un principio para ella le parece un polígono regular, en el SGD no siempre lo es.

Para la actividad dos **E7** primero construyó el triángulo equilátero solicitado, posteriormente procedió como en la actividad uno, es decir, dibujó triángulos en cada uno de los lados del triángulo equilátero para obtener el hexágono, como se muestra en la Figura 4.26.

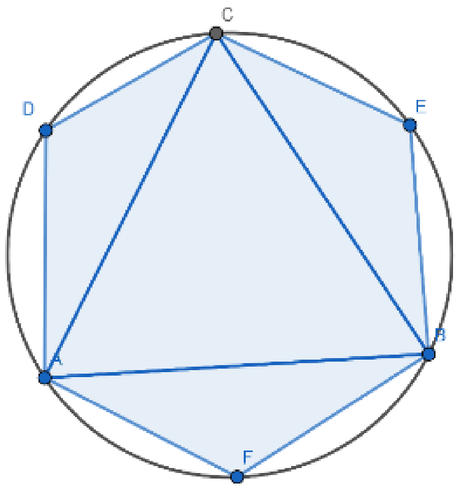


Figura 4.26: Solución 1 dada por E7 a la actividad 2

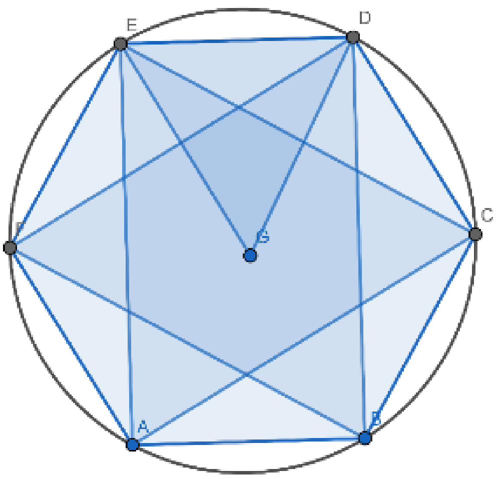


Figura 4.27: Solución 2 dada por E7 a la actividad 2

En este caso, si notó que el polígono que obtuvo no era regular por lo que dió una nueva construcción, partió de un hexágono regular inscrito, luego trazo los triángulos que tienen como vértices los puntos A, E, C y F, D, B respectivamente. Posteriormente trazó un punto G donde consideró era el centro del polígono para así construir el triángulo con vértices G, E y D, como se muestra en la Figura 4.27. En esta actividad se observa un avance en cuato al uso de las herramientas de GeoGebra lo que también permite que perciba otras propiedades de los polígonos como el centro, aunque estas sigan siendo parte de un todo.

Para la actividad tres **E7** construyó el octágono con la herramienta polígono regular, posteriormente trazó las figuras geométricas que notó que se formaban con las diagonales, iniciando por el cuadrado, posteriormente dos triángulos y finaliza con un rectángulo como se muestra en la Figura 4.28.

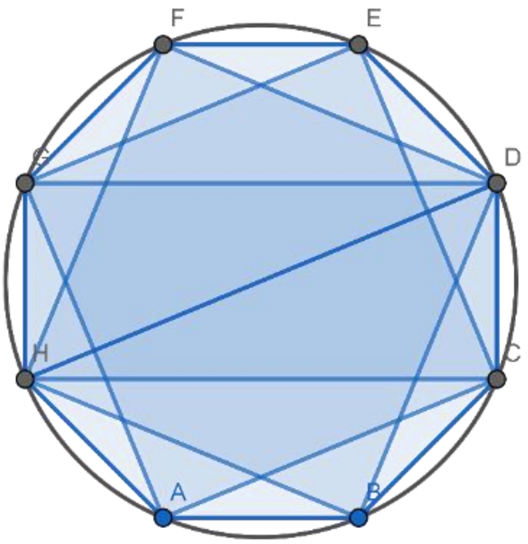


Figura 4.28: Solución dada por E7 a la actividad 3

E7 notó algunas propiedades de las diagonales, sin embargo, estas no son suficientes para lograr construir el octágono solicitado a partir de los triángulos formados por las diagonales. Por último en la actividad cuatro **E7** procedió como la mayoria de los alumnos hasta ahora. Dió un posible triángulo formado por dos diagonales y un lado del triángulo pero no construyó el eneágono a partir de este.

En las respuestas dadas por **E7** se observa que cumple con lo mencionado por Vargas et al (2013) para el nivel 2 del modelo de Van Hiele, pues logró reconocer algunas propiedades particulares de los polígonos y sus diagonales, aunque no le es posible establecer relaciones o clasificaciones entre propiedades que lo ayuden a formar los polígonos a través de las diagonales. Tomando en cuenta la actitud de este estudiante al momento de la aplicación de las actividades, las construcciones dadas y la experiencia con los alumnos entrevistados, se podría considerar que con una asesoría especializada, podria llegar al nivel 3 del modelo de Van Hiele.

La visualización para este estudiante fue de importancia pues el poder observar y comparar los polígonos con sus diagonales y las construcciones realizadas por él, permite un avance en el nuevo tema de estudio y las herramientas con las que cuenta. En cuanto al tipo de comprensión de este alumno se podría considerar que es relacional pues no busca aplicar reglas, sino que trata de entender qué pasos debe seguir para obtener lo que se le solicita en cada actividad (Skemp, 1987).

- **Análisis de las respuestas de E8**

Para tener una mejor idea sobre el porqué de las respuestas dadas por **E8**, se le realizó una entrevista que, además sirvió para darle una mejor orientación para la comprensión de las propiedades de los polígonos.

En la actividad uno **E8** inició construyendo el pentágono con la “herramienta polígono regular”, posteriormente lo inscribió en una circunferencia, sin embargo, no construyó el triángulo del que debía partir la actividad, la Figura 4.29 muestra dicha construcción.

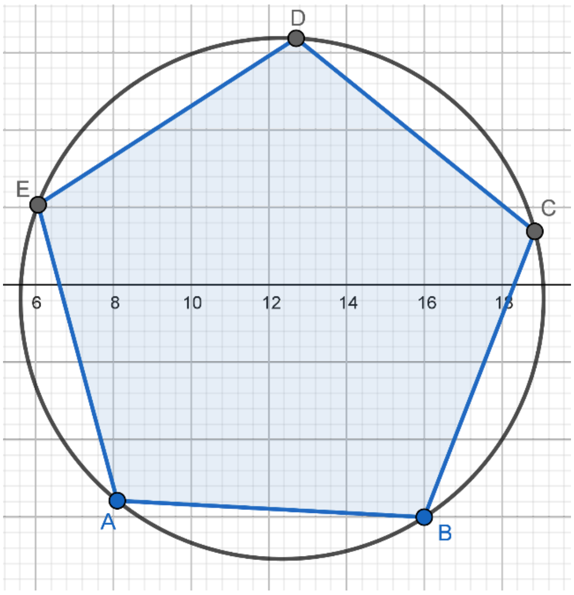


Figura 4.29: Solución 1 dada por E8 a la actividad 1

En la entrevista realizada se buscó que recordara las instrucciones dadas para construir el pentágono regular. Se le cuestionó si creía que el pentágono que había construido cumplía con ser un polígono regular, esto con el fin de observar las propiedades que conocía en ese momento sobre los polígonos, a lo que respondió que creía que no, pues no cumplía las medidas. Se dio una breve explicación de lo que posiblemente creaba la confusión anterior y se le cuestionó de nuevo sobre lo que debía cumplir un polígono para que fuera regular, las respuestas dadas a esta pregunta se observan a continuación:

Profesor: *…Tu construiste este pentágono ¿Este pentágono cumple ser un polígono regular?*

E8: *Mmm… No, me parece que no*

Profesor: *¿No? ¿Por qué crees que no?*

E8: *Porque… no tiene las medidas*

Profesor: *Porque no tiene las medidas ¿y qué medidas debe tener?*

E8: *Eeehhh…. El dada su amplitud ¿no?, me parece*

Profesor: *No, bueno el ángulo dada su amplitud, lo que yo te explique ahorita es como construir este triángulo… Las instrucciones eran estas: dado el siguiente triángulo isósceles inscrito en la circunferencia construye un pentágono regular. Bueno, tu no partiste del triángulo, no hay problema, pero ¿consideras que el pentágono que construiste es un pentágono regular, que si cumple la segunda petición de la actividad?*

E8: *Mmm… si*

Profesor: *¿Qué debe cumplir un polígono para que sea regular? ¿Cuáles son las características de los polígonos regulares?*

E8: *Mmm… estar dentro del circulito*

Profesor: *¿Estar dentro del círculo?*

E8: *ajá*

Profesor: *Entonces si yo construyo este de aquí, ¿No es regular?*

E8: *Mmm… No… No porque no está dentro de…*

Profesor: *¿de la circunferencia?*

E8: *Ajá*

Profesor: *Ok, entonces, vamos a construir una circunferencia y vamos a construir un polígono, ¿tu consideras que este si es regular?*

E8: *Mmm… si*

Profesor: *¿Sí? ¿Por qué esta dentro de la circunferencia?*

E8: *Ajá… ¿o no?*

Profesor: *Obsérvalo bien, recuerda tus clases pasadas de geometría que nos decían de los polígonos regulares, un polígono regular debe ¿qué…?*

E8: *Es que la verdad no me acuerdo*

Profesor: *Ok, los polígonos regulares son aquellos que todos sus lados miden lo mismo, si te das cuenta, todos sus lados se parecen, no importa que estén o no inscritos en una circunferencia, el polígono tres es irregular ¿por qué? Porque, este segmento no mide lo mismo que este de aquí y aunque pudiéramos ubicarlos en lugares donde parece que siempre miden lo mismo, estos puntos se mueven lo que no garantiza que siempre sea regular. En los polígonos regulares, siempre sus ángulos y lados miden lo mismo…*

En la entrevista se observó que las propiedades que **E8** recordaba o conocía de los polígonos no son suficientes para entender lo que la actividad solicitaba, a pesar de que antes de iniciar las actividades se les dio una breve explicación sobre los polígonos y algunas de sus propiedades. Luego de una breve explicación sobre algunas propiedades de los polígonos, se le solicitó que resolviera la actividad a partir del triángulo isósceles.

La primera idea que tuvo fue tomar un punto, trazar un segmento horizontal con una medida arbitraria, luego colocó un punto arriba de este segmento, de nuevo con una distancia arbitraria para unirlo con los extremos del segmento anterior, formando un triángulo, posteriormente colocó un punto en cada segmento como se muestra en la Figura 4.30, sin embargo, lo que obtuvo fue un triángulo que tenía todos sus puntos dinámicos.

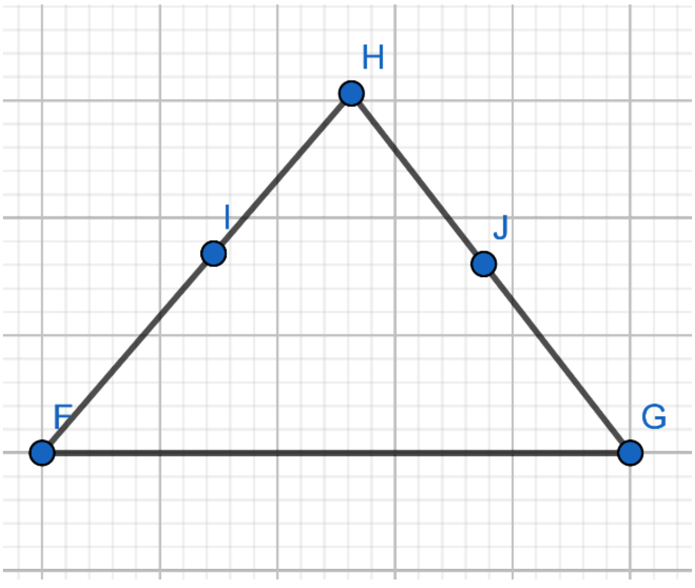


Figura 4.30: Solución 2 dada por E8 a la actividad 1

Luego de mostrarle que esta idea no lo llevaría a construir lo solicitado, optó por construir el pentágono usando la herramienta “polígono”, lo que muestra que ha logrado reconocer que un pentágono debe tener cinco lados, aunque esta construcción da como resultado un polígono irregular. Por último, mencionó que la herramienta “polígono regular” construía lo que se solicitaba, por lo que tomó como un lado del pentágono la base del triángulo lo que dio como resultado un pentágono regular inscrito en la circunferencia como se muestra en la Figura 4.31.

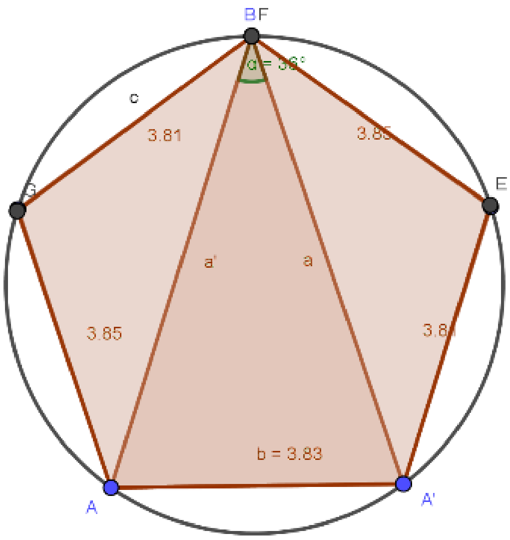


Figura 4.31: Solución 3 dada por E8 a la actividad 1

Al preguntarle el por qué creía que sucedía de esta forma, mencionó que era porque la base del triángulo era también un lado del pentágono.

En la actividad dos **E8** construyó el hexágono con la herramienta “polígono regular” para luego construir las figuras geométricas que observó se formaban con las diagonales del hexágono, como el triángulo CBE y el cuadrilátero DABF. Posteriormente trazó un punto G donde consideró era el centro del polígono y construyó los triángulos ABG y DGE, por último, inscribió el hexágono en una circunferencia obtenido lo que se observa en la Figura 4.32.

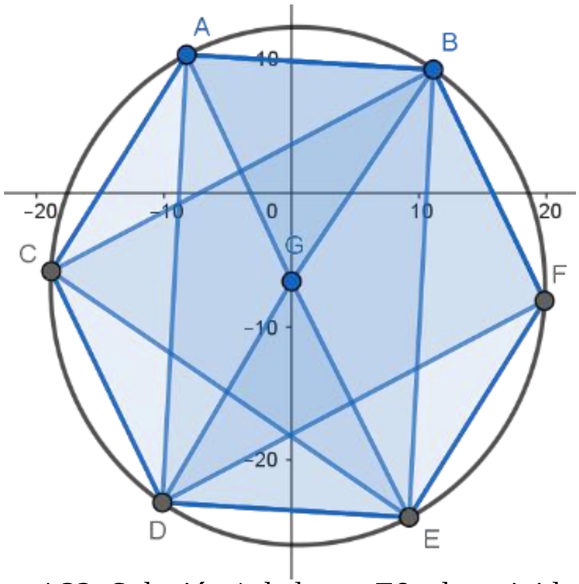


Figura 4.32: Solución 1 dada por E8 a la actividad 2

En la entrevista se le mostró lo que había realizado y mencionó que como se había terminado la clase no había terminado la construcción pues quería construir todos los triángulos que observaba. Al preguntarle si recordaba el nombre de estas líneas mencionó que no lo recordaba, lo que dio pauta para indagar si recordaba las propiedades de los polígonos, se puedo ver que **E8** estaba confundido en cuanto a las propiedades de los polígonos, como el saber cuáles son sus lados o sus vértices, lo que pudo ser un inconveniente para dar posibles soluciones a las actividades.

Se intentó que diera una solución a partir de tener el triángulo equilátero, para ello se le mostró el hexágono y sus diagonales y el triángulo que dio fue el construido por dos radios y un lado del polígono. Luego se inscribió este triángulo en una circunferencia y se le preguntó cómo construiría el hexágono a partir de lo que tenía, mencionó que se necesitaba encontrar los otros puntos pero que estos debían ser específicos porque puntos al azar se mueven. En la siguiente transcripción de la entrevista se muestra lo anterior.

Profesor: *¿cómo construyes el hexágono a partir de esto?*

E8: *Bueno sería…uniendo los otros puntos, de nuevo*

Profesor: *De nuevo los otros puntos, ok. Y ¿Cómo los pongo? algo que hay que tomar en cuenta es que si pongo puntos así nada más…*

E8: *Si, no funcionan porque después se mueven y no quedan*

Profesor: *Ok, se mueven y no siempre funcionan, entonces, ¿cómo busco esos puntos?*

E8: *Sería, del polígono regular*

Profesor: *y ¿qué lado tomo?*

E8: *sería de la I a la J y sería de…6 lados*

La figura que obtuvo efectivamente cumplía ser regular, pero no quedaba inscrita en la circunferencia como se muestra en la Figura 4.33, aunque se puede notar que la comprensión de este estudiante ha avanzado.

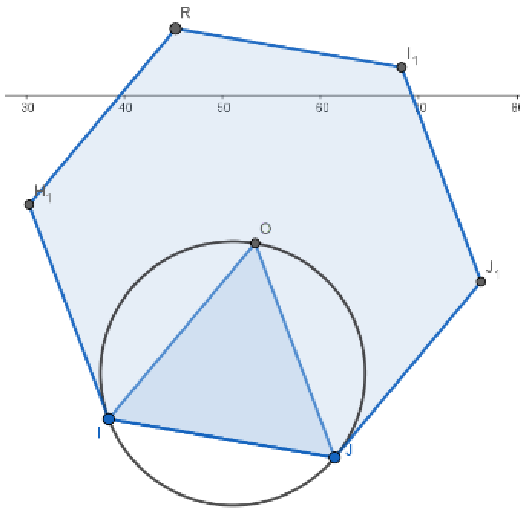


Figura 4.33: Solución 2 dada por E8 a la actividad 2

Posteriormente se le hizo ver que, si el hexágono tuviera que estar inscrito, la construcción anterior no funcionaria. Para esta nueva construcción tomó el triángulo formado por TRJ y mencionó que para construir el hexágono podía usar de nuevo la herramienta “polígono regular” partiendo de uno de los lados, intento esto con todos los lados, se le hizo ver que esto no funciona pues el triángulo está formado por diagonales del hexágono las cuales deben estar siempre dentro de este, además de que el triángulo es equilátero.

Luego de algunos intentos fallidos, se le mostró que podía trazar una recta que pasara por el centro del polígono y uno de los vértices del triángulo, eligiendo la recta que pasa por TO, posteriormente tomó el punto de intersección entre la recta construida y la circunferencia, teniendo esto usó la herramienta “polígono regular” obteniendo la Figura 4.34.

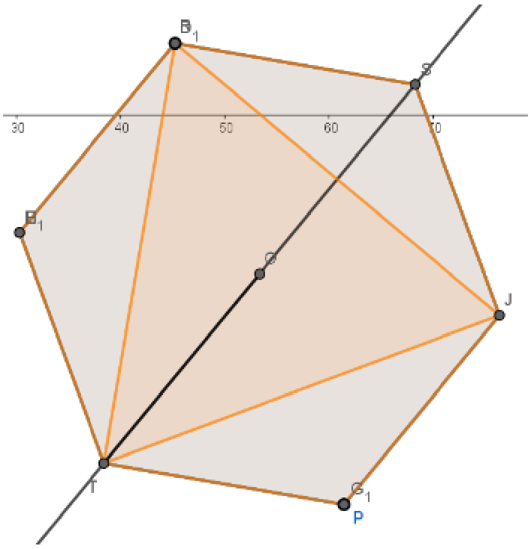


Figura 4.34: Solución 3 dada por E8 a la actividad 2

En las respuestas dadas por **E8** a la actividad dos se puede observar, como en la actividad anterior, que no tiene muy claro las propiedades y características de los polígonos, aunque su forma de resolución es por ensayo y error.

En la actividad dos, parte del triángulo correcto e incluso obtiene un octágono regular, sin embargo, este no está inscrito en la circunferencia como se observa en la Figura 4.35. Se le solicitó que intentara construir el octágono pero que, si estuviera inscrito en la circunferencia, mencionó que necesitaba trazar los demás puntos. Se le hizo ver que el triángulo del que se parte está conformado por diagonales y no comparte lados con el polígono solicitado por lo que la herramienta "polígono regular" podía no ser de mucha ayuda en este momento. A pesar de la explicación anterior E8 intentó varias veces construir el octágono tomando como lado los del triángulo.

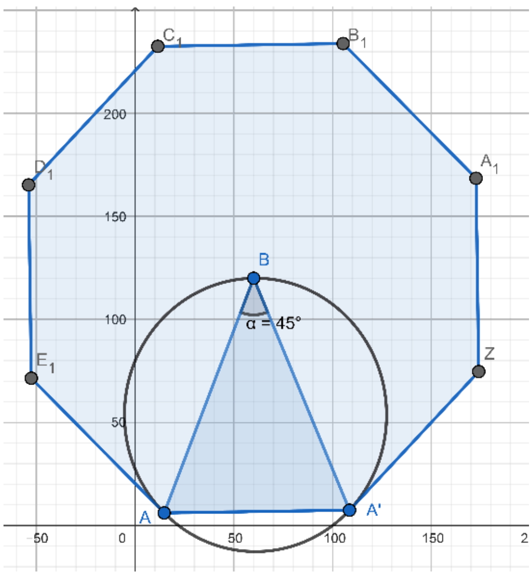


Figura 4.35: Solución 1 dada por E8 a la actividad 3

para mostrarle porque esto no funciona se construyó un octágono irregular que sirvió de apoyo para la explicación, al observar esto, mencionó que se necesitaba pintar el centro de la circunferencia. A partir de tener el centro de la circunferencia procedió como en la actividad anterior, obteniendo la Figura 4.36.

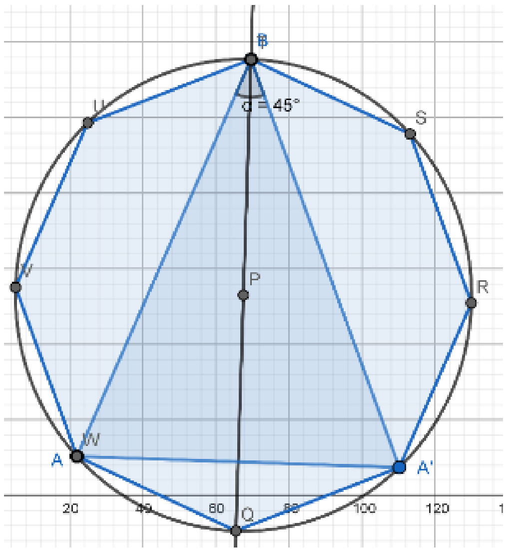


Figura 4.36: Solución 2 dada por E8 a la actividad 3

Se observa que **E8** se encuentra en el nivel 1 del modelo de Van Hiele y a pesar de las explicaciones dadas, el nivel en el que concluye las actividades es el nivel 1 pues "reconoce las figuras geométricas por su forma como un todo y no diferencia partes ni componentes de la figura" (Vargas et al, 2013, pág. 82). En cuanto al papel de la visualización se vio en la actividad tres que esta fue de ayuda para comprender porque lo que intentaba no funcionaba, por último, el tipo de comprensión de **E8** es relacional e instrumental, pues resuelve a partir de ensayo y error, pero en ocasiones intentaba resolver aplicando reglas. (Skemp, 1987)

- **Análisis de las respuestas de E9**

En la actividad uno **E9** partió del triángulo isósceles solicitado, posteriormente trazó el pentágono usando la herramienta "polígono regular", tomando como medida para los lados del polígono el lado desigual del triángulo, por último, inscribió estas figuras en una circunferencia, la Figura 4.37 muestra lo obtenido por **E9**.

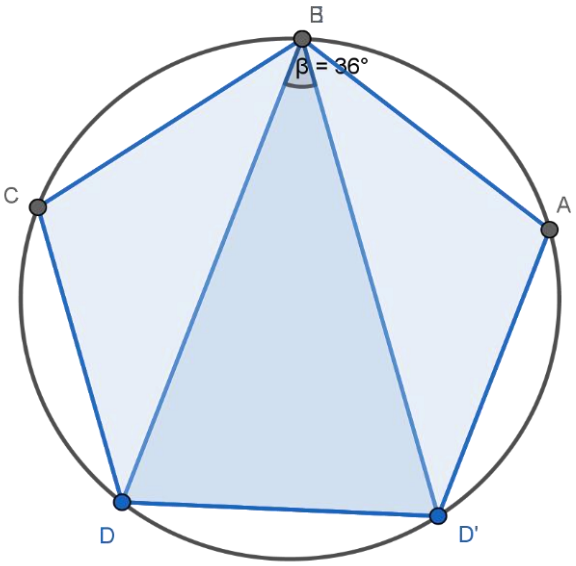


Figura 4.37: Solución dada por E9 a la actividad 1

Tomando en cuenta lo observado en las construcciones analizadas anteriormente, se observa que **E9** dio una construcción que se podría considerar mecanizada y en la que aplica pocos conocimientos sobre los polígonos y sus diagonales.

Para la actividad dos **E9** procedió de la misma forma que en la actividad anterior, es decir, construyó correctamente el triángulo del que debía partir para luego tomar un lado del triángulo como medida para los lados del hexágono e inscribirlo en una circunferencia como se muestra en la Figura 4.38. Sin embargo, observó que el triángulo no quedaba de la misma forma que en la actividad anterior, lo que probablemente lo llevó a trazar todas las diagonales del polígono como se muestra en la Figura 4.39 y aunque no es visible algunas de las diagonales que obtuvo, fueron trazadas doblemente u obtenidas a partir de trazar dos radios del hexágono.

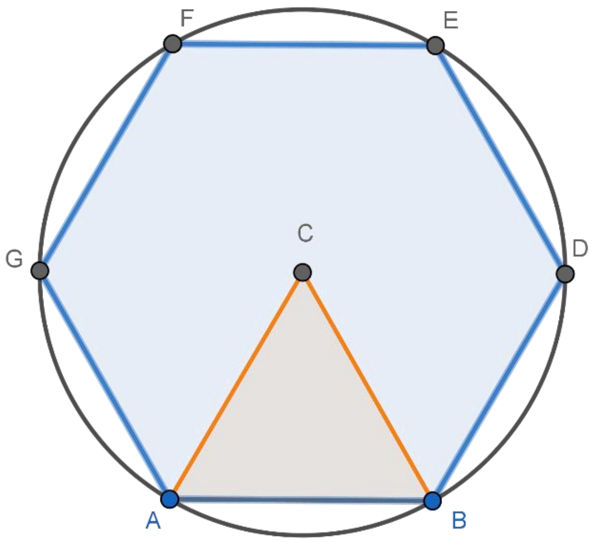


Figura 4.38: Construcción del hexágono realizada por E9 a partir de un triángulo equilátero

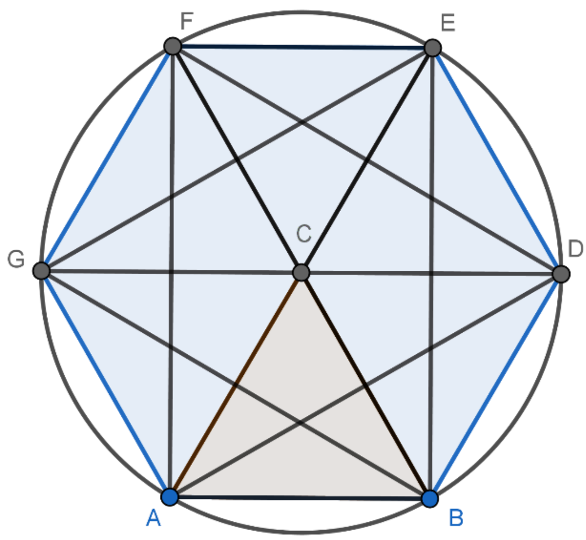


Figura 4.39: Hexágono con sus diagonales realizado por E9

Se observa que de nuevo **E9** responde de forma mecanizada y hasta el momento ha aplicado el mismo procedimiento de construcción para las primeras dos actividades, excepto que, en la segunda, trazó las diagonales del hexágono, sin embargo, no es consciente de que características deben cumplir esos segmentos de recta que ha trazado dentro del polígono construido.

En la actividad tres, una vez más construyó el octágono solicitado a partir del lado desigual del triángulo isósceles como se muestra en la Figura 4.40 y trazó sus diagonales obteniendo lo que se muestra en la Figura 4.41, en este caso las diagonales que ha trazado ya cumplen las propiedades de las diagonales, es decir, van de un vértice a los vértices opuestos y solo trazó una cada vez. En este caso, aunque ha aplicado “la regla” que ha descubierto se nota que reconoce más propiedades de las diagonales.

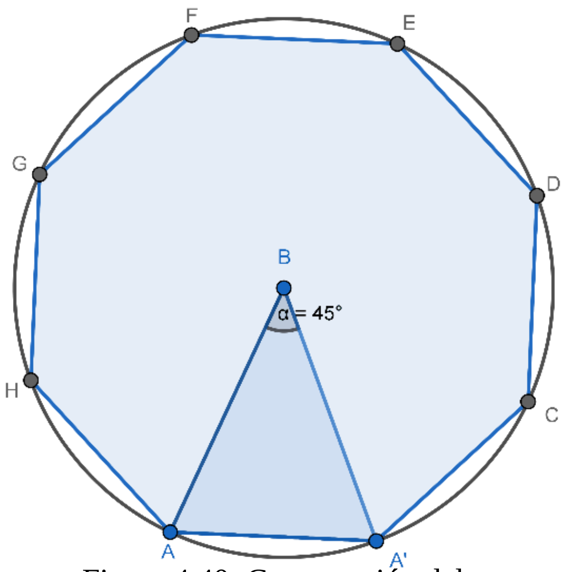


Figura 4.40: Construcción del octágono realizada por E9 a partir de un triángulo isósceles

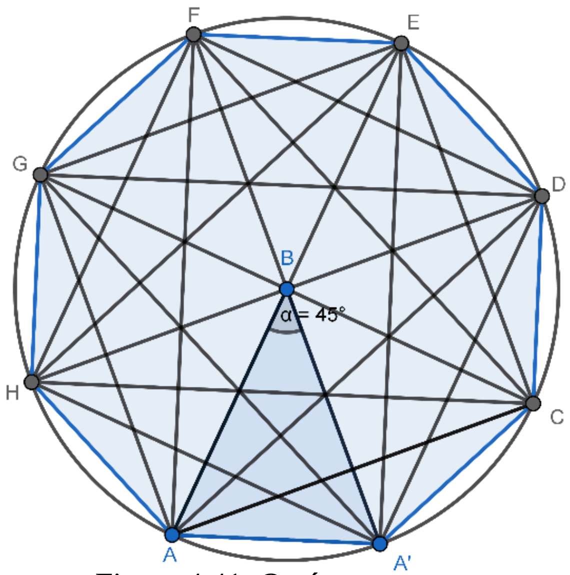


Figura 4.41: Octágono con sus diagonales realizado por E9

Para la actividad cuatro **E9** no dio ninguna posible construcción y esto puede deberse a que “la regla” que ha descubierto no es suficiente para poder realizar lo solicitado en esta actividad.

En las construcciones dadas por **E9** para cada una de las actividades se observa que las ha realizado intentando seguir pasos específicos sin saber muy bien si en realidad le han funcionado y por qué. Este estudiante ha buscado la forma de obtener lo que observa sin seguir las instrucciones que se le han dado pues en ninguna de las soluciones proporcionadas partió de tener el triángulo inscrito en una circunferencia, lo que también hace pensar que, no reconoce qué debe cumplir una figura geométrica para que se considere que está inscrita. Esto se puede tomar como que, si bien reconoce las propiedades de los polígonos, las reconoce como parte de un todo y de forma muy general, además intenta reproducir lo que observa, lo que según Vargas et al (2013) es propio del nivel 1 del modelo de Van Hiele, además este es un ejemplo claro de un conocimiento instrumental, pues solo aplica “reglas” que algunas veces no funcionan. (Skemp, 1987)

- **Análisis de las respuestas de E10**

Para la actividad uno, partió del triángulo isósceles inscrito en una circunferencia como solicita la actividad, posteriormente para construir el pentágono trazó el triángulo CDA’ y el cuadrilátero ADBC usando la herramienta “polígono” por lo que todos los vértices que conforman el pentágono son puntos dinámicos, es decir, cambian de lugar. Por lo que el pentágono obtenido no es siempre regular, como se muestra en la Figura 4.42.

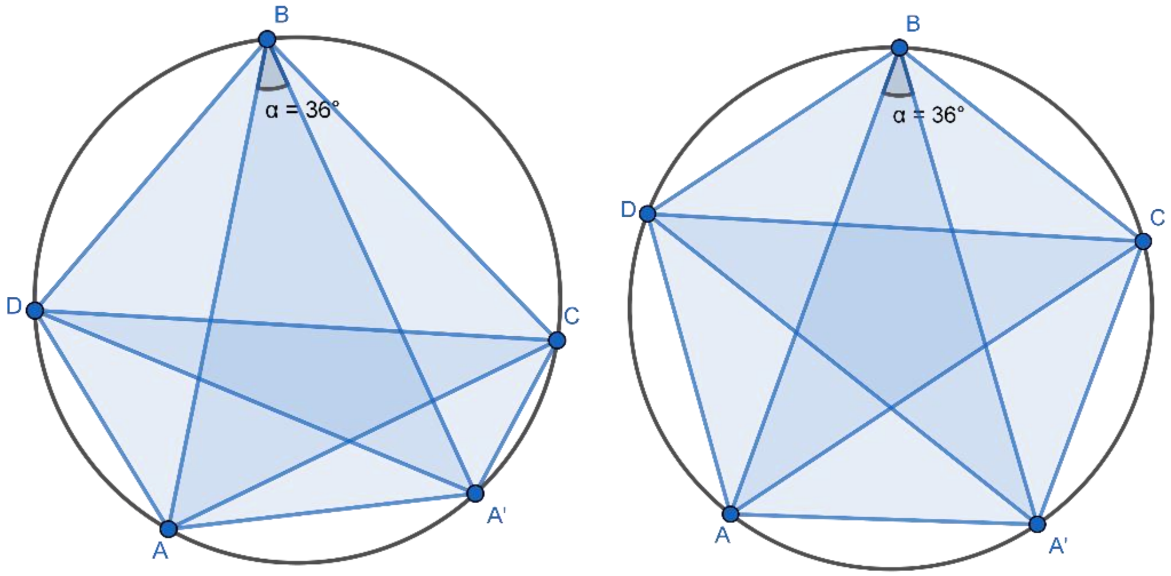


Figura 4.42: Solución dada por E10 a la actividad 1

Observando la forma en que **E10** construye el pentágono se puede deducir que tal vez el problema no es el conocimiento que tiene sobre las propiedades de los polígonos, sino que como en el caso de **E5** es la primera vez que está en contacto con las herramientas de GeoGebra.

En la actividad dos primero construyó el hexágono con la herramienta “polígono regular”, posteriormente lo inscribió en una circunferencia y finalmente trazó todas las diagonales como se muestra en la Figura 4.43. Se puede ver que en esta actividad **E10** notó que el polígono obtenido anteriormente no es regular, por lo que el hexágono lo construyó de tal forma que se garantice que siempre lo es, sin embargo, no parte del triángulo del que debe partir, aunque si lo construyó, pero no realizó ningún procedimiento a partir de este.

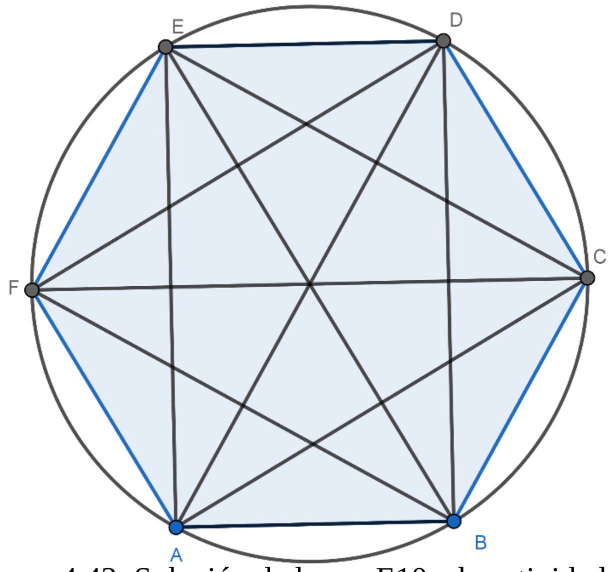


Figura 4.43: Solución dada por E10 a la actividad 2

Para la actividad tres partió de un triángulo isósceles inscrito en una circunferencia como se solicitaba, pero al intentar construir el octágono inició construyendo un triángulo a partir de segmentos de recta, luego trazó un triángulo similar al inicial, pero usando segmentos de recta, posteriormente trazó los segmentos CA, A’D, AE, A’E, CF, AF, GA, GC, BC, DB y DF, con los que intentó construir el octágono solicitado y sus diagonales. Sin embargo, este no es obtenido, además el polígono que obtiene no es regular como se muestra en la Figura 4.44.

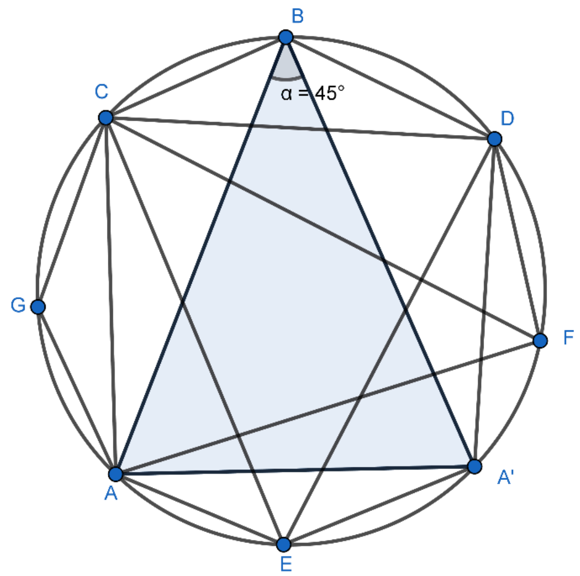


Figura 4.44: Solución dada por E10 a la actividad 3

En esta actividad se observa que **E10** intenta construir el octágono a partir de lo observado en la actividad dos, pero de nuevo no considera que los puntos son dinámicos, por lo que el que obtiene no es regular ni tampoco un octágono. Lo anterior puede influir en que **E10** no de una posible construcción para la actividad cuatro.

Se observa en la primera construcción realizada que **E10** intenta reproducir lo que observa en la proyección, y aunque reconoce algunas propiedades de las Figuras las ve como un todo, además, el no conocer muy bien cómo funciona GeoGebra representa un obstáculo para ella. Para la segunda actividad intenta un camino diferente a partir de usar otras herramientas, sin embargo, su construcción deja ver que sigue reproduciendo lo que observa visualmente y que ve las propiedades como un todo. Por último, en la actividad tres intenta unificar lo que ha observado en las actividades anteriores, pero esto le lleva una construcción poco eficiente pues de nuevo intenta reproducir una copia de lo que observa. Por lo anterior y tomando en cuenta lo mencionado por Vargas et al (2013) se puede ubicar a **E10** en el nivel 1 del modelo de Van Hiele, aunque el tipo de comprensión podría considerarse relacional, pues sus respuestas fueron dadas a partir de la experimentación y no sigue una regla de construcción para todas las actividades (Skemp, 1987).

- **Análisis de las respuestas de E11**

Para este alumno solo se presenta el análisis de las tres últimas actividades, ya que para la actividad uno no realizó nada.

En la actividad dos inició construyendo el triángulo equilátero del que debía partir, posteriormente construyó el hexágono usando la herramienta "polígono regular", obteniendo así una imagen similar a la de **E9**, posteriormente usando la herramienta "polígono" intentó trazar las diagonales del hexágono, pero a partir de construir hexágonos irregulares, obteniendo la construcción que se observa en la Figura 4.45.

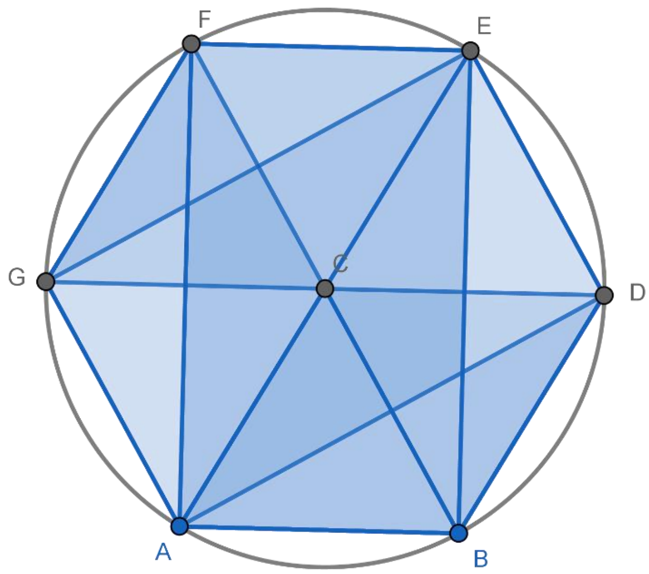


Figura 4.45: Solución dada por E11 a la actividad 2

Una posible explicación de porqué traza las diagonales de esta forma, es que tal vez **E11** intentó reproducir lo que observaba trazando un solo polígono, es decir, no reconoció que el polígono mostrado es un hexágono al que se le han trazado sus diagonales, sino que esperaba construir un hexágono que luzca de esa forma.

En la actividad tres partió del triángulo isósceles inscrito en la circunferencia, luego notó que necesitaba un vértice más para poder usar la herramienta polígono regular, por lo que colocó un punto sobre la circunferencia donde consideró debía estar el vértice, posteriormente trazó un segmento de recta que va desde el vértice B al, punto que colocó.

Teniendo lo anterior, construyó el octágono con la herramienta "polígono regular", para finalmente trazar todas las diagonales del octágono, aunque notó que necesitaba un punto sobre la circunferencia que sirviera como vértice del octágono, este fue elegido de forma arbitraria lo que resulta en un octágono que no siempre está inscrito como se muestra en la Figura 4. 46.

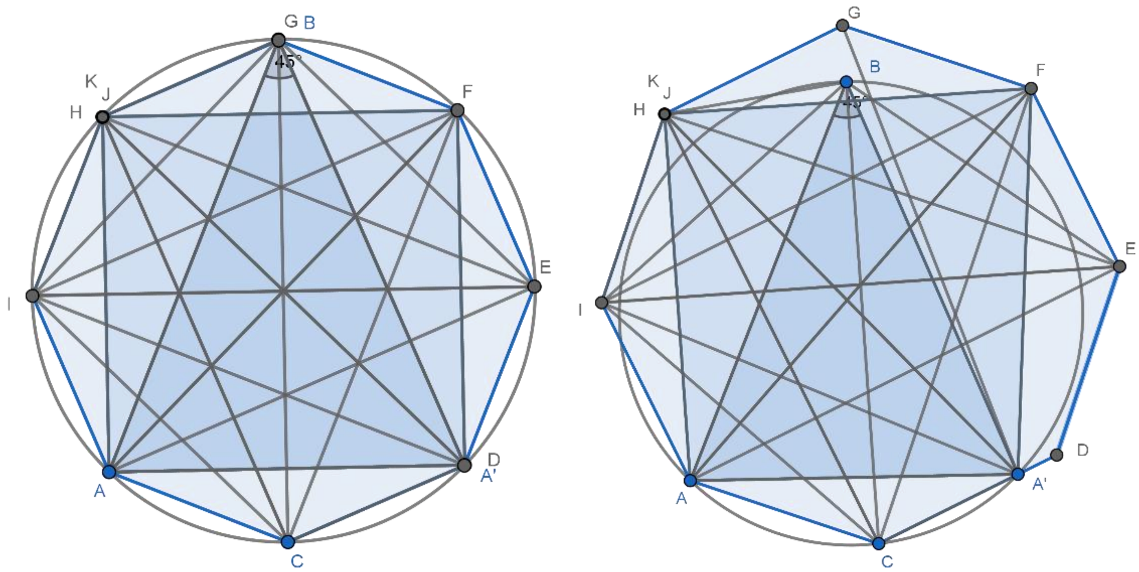


Figura 4.46: Solución dada por E11 a la actividad 3

Por último, en la actividad cuatro **E11** parte de un triángulo que considera es isósceles, pero este tiene todos sus puntos dinámicos, pues lo realizó a partir de segmentos de recta, posteriormente construyó el eneágono con la herramienta "polígono regular" y tomó como lado el lado desigual del triángulo, al tener estas construcciones inscribió cada una de ellas en una circunferencia diferente. Aunque los lados del triángulo elegido son diagonales del eneágono, no siempre es así por la forma en que se construyó, como se observa en la Figura 4.47.

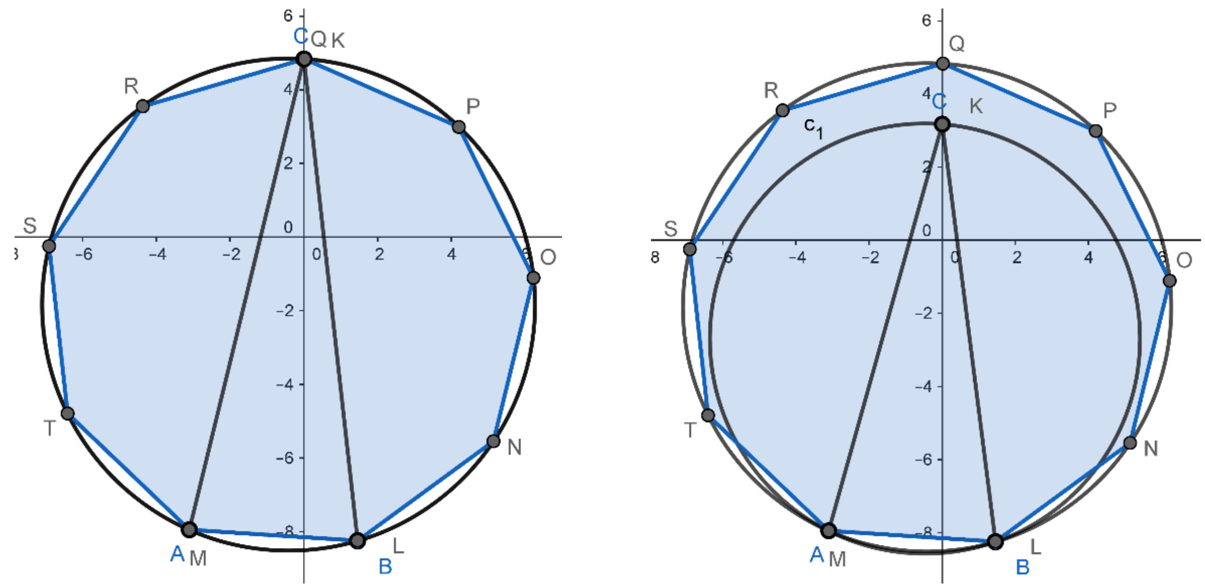


Figura 4.47: Solución dada por E11 a la actividad 4

La construcción dada por **E11** a la primera actividad muestra que, en un principio reconocía las diagonales como un todo e intentó reproducir lo que observaba. Luego en la actividad dos, muestra un avance pues identifica las diagonales como parte de los polígonos, pero ya como una característica particular, esto le permite construir un triángulo que considera sirve como base para poder trazar un eneágono regular. Tomando en cuenta lo mencionado por Vargas et al (2013) podría considerarse que este alumno paso del nivel 1 al nivel 2. Se observa también que una de las complicaciones que tuvo es la dificultad para manejar las herramientas de GeoGebra y esto se debe, como en casos anteriores, el poco contacto que han tenido con este SGD, aunque este acercamiento también permitió que el tipo de comprensión observada sea relacional (Skemp, 1987) pues en la tercera y en la última actividad demuestra que reconoce los elementos que debe utilizar para construir lo solicitado.

- **Análisis de las respuestas de E12**

En la actividad uno **E12** construyó el pentágono a partir de triángulos. Partió de un triángulo que consideró era isósceles, sin embargo, por la forma en que lo construyó, este no siempre lo es, pues todos sus puntos son dinámicos. Luego, trazó el triángulo ADC, el cual está dentro del triángulo que construyo inicialmente, seguido de este construyó los triángulos DEF, CFB y AEB, todos estos formados a partir de puntos dinámicos. Posteriormente inscribió el pentágono obtenido en una circunferencia y midió cada uno de los lados de este para comprobar que era regular, sin embargo, no lo es como se muestra en la Figura 4.48.

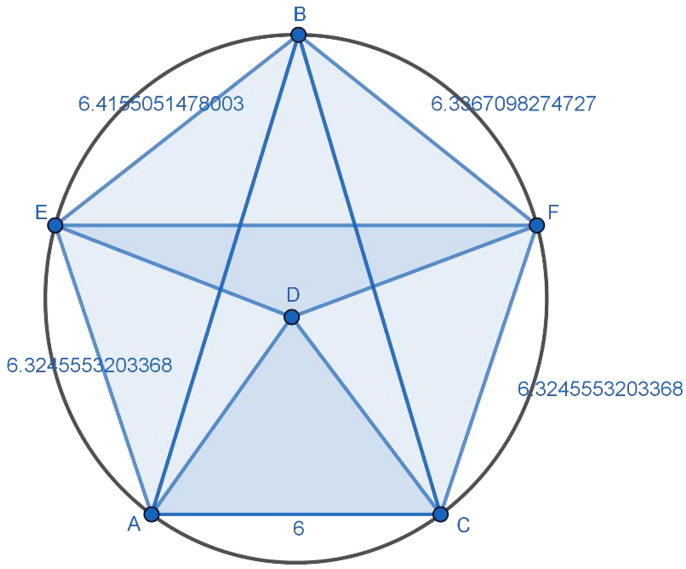


Figura 4.48: Solución dada por E12 a la actividad 1

Se observa que reconoce que un polígono regular sus lados deben medir lo mismo, pero en este caso no lo logra, lo cual puede deberse a que intenta reproducir lo que observa, además de no conocer muy bien cómo funcionan las herramientas de GeoGebra.

Para la actividad dos **E12**, repite un proceso similar al anterior, pero en este caso partió de un hexágono regular, posteriormente trazó una circunferencia con la herramienta “circunferencia (centro, radio)” lo que no garantiza que el polígono construido este siempre inscrito, seguido de esto trazo las diagonales del hexágono a partir de las figuras geométricas que observaba como se muestra en la figura 4.49. De nuevo se observa que, aunque reconoce algunas propiedades las reconoce como parte de un todo lo que hace que intente repetir lo que ve. Para la actividad tres no dio una posible solución.

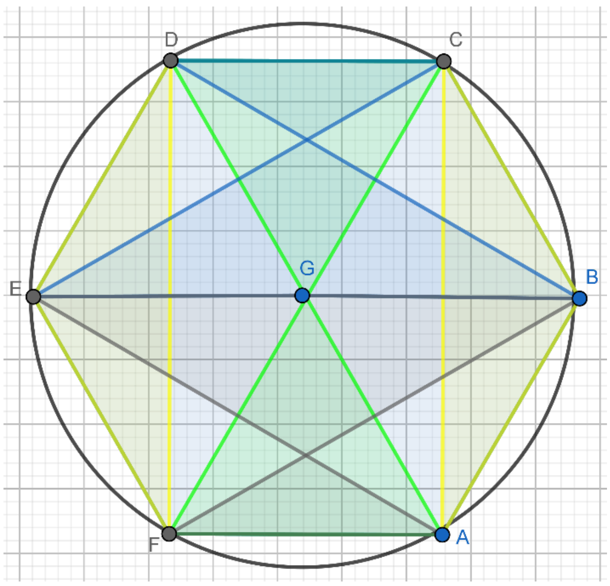


Figura 4.49: Solución dada por E12 a la actividad 2

Por último, en la actividad cuatro tomó como posible triángulo el isósceles que tiene su ángulo desigual de 25°, para inscribirlo trazó dos arcos de circunferencia tomando como puntos a BA’A y ABA’ y finalmente usando la herramienta “polígono regular” construyó el eneágono. Sin embargo, este no siempre está inscrito como se observa en la Figura 4.50 lo cual se debe a la forma en que fue trazado, además el triángulo construido en un inicio no fue utilizado para su construcción.

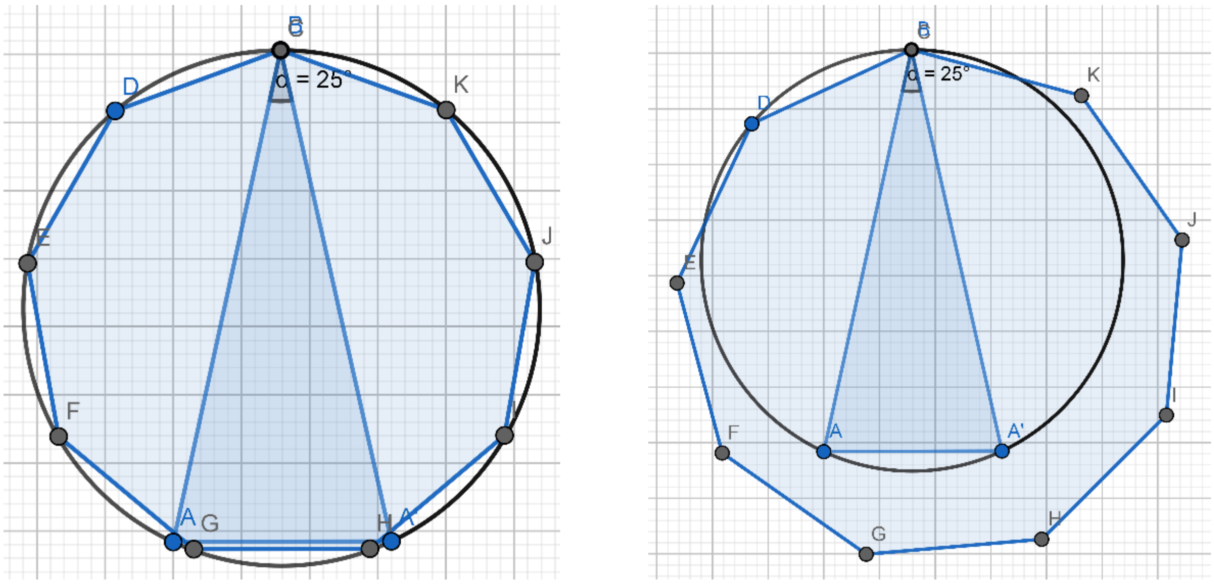


Figura 4.50: Solución dada por E12 a la actividad 4

En esta última actividad, aunque no resulto como tal vez **E12** esperaba notó que las diagonales de los polígonos forman triángulos con características específicas como la medida de sus ángulos internos.

En general se observa que realizó las actividades como si trabajara en papel y lápiz, es decir, no toma en cuenta que para el SGD utilizado si importa como construye las figuras, el orden en que toma los puntos y las herramientas que utiliza para trazarlas. Sin embargo, también se observa que busca experimentar con las herramientas disponibles, lo que se puede interpretar como una comprensión relacional e instrumental pues, aunque para las actividades uno y tres toma caminos muy similares, también busca experimentar, lo que según Skemp (1987) es una combinación de ambos tipos de comprensión.

En cuanto a los niveles de Van Hiele se observa que en la primera actividad reconoce algunas propiedades de los polígonos como un todo e intenta reproducir lo que observa, pero en las actividades siguientes demuestra que logra reconocer algunas características particulares de los polígonos lo que es propio del nivel 2 del modelo de Van Hiele (Vargas et al, 2013).

- **Análisis de las respuestas de E13**

En la actividad uno partió de un triángulo construido con todos sus vértices con puntos dinámicos, lo que hace que no siempre sea un triángulo isósceles, posteriormente lo inscribió en una circunferencia y finalmente colocó dos puntos dinámicos sobre la circunferencia como se muestra en la Figura 4.51, pero no trazó el pentágono. Esto se puede deber a que precisamente notó que el polígono que obtendría no es siempre regular.

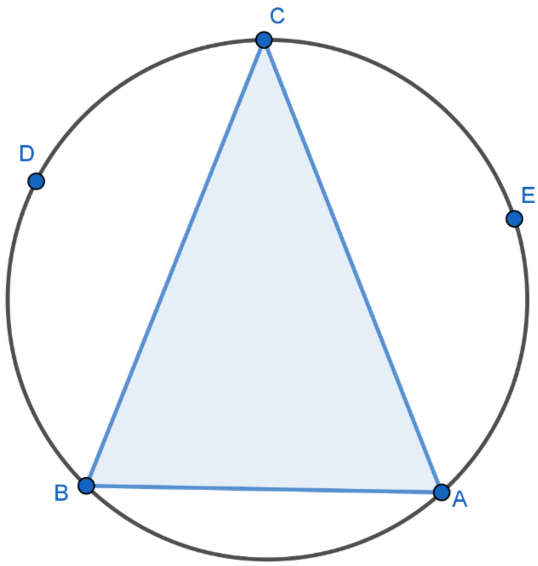


Figura 4.51: Solución dada por E13 a la actividad 1

En la actividad dos construyó e inscribió el triángulo inicial de forma correcta. Luego, para construir el hexágono, colocó tres puntos dinámicos sobre la circunferencia, pero en este caso, si unió todos los puntos usando la herramienta “polígono” lo que no garantiza que el hexágono construido siempre sea regular. (Figura 4.52)

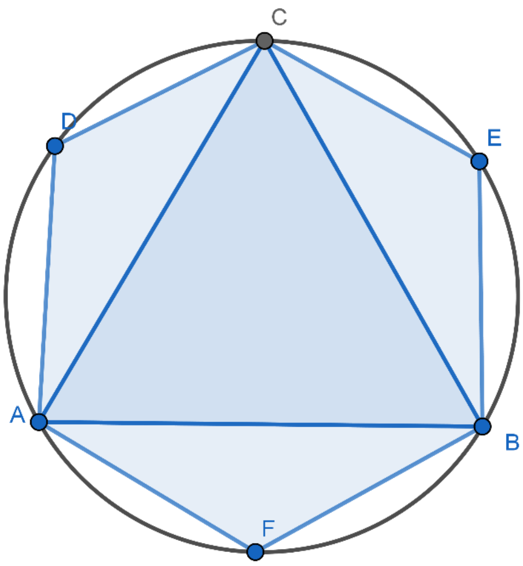


Figura 4.52: Solución dada por E13 a la actividad 2

Se observa que **E13** no es consciente que los puntos son dinámicos a pesar de ser algo que se explicó al inicio de las actividades. Esto evita que el hexágono trazado sea siempre regular. Para la actividad tres, al igual que **E12**, no dio una posible construcción. Por último, la actividad cuatro la resolvió de la misma forma que **E1**, lo que muestra que ha logrado reconocer algunas propiedades de las diagonales.

Las primeras dos actividades muestran que una de las dificultades que **E13** tiene es que resuelve como si realizara las construcciones en papel y lápiz y deja de lado que en GeoGebra importa cómo se comportan los puntos elegidos, además aplica los mismos pasos para ambas actividades, es decir responde de forma mecanizada, lo que puede tomarse como comprensión instrumental (Skemp, 1987). En cuanto a los niveles de Van Hiele se ubica a **E13** en el nivel 2 pues puede reconocer algunas propiedades particulares de las figuras geométricas y las reconoce a través de ellas, lo que le permitió construir el eneágono (Vargas et al, 2013).

4.2 Análisis general

Se observa que la mayoría de los alumnos intentó reproducir lo que observaba visualmente o aplicar el mismo procedimiento para todas las actividades, lo que muchas veces no permitía que lograran reconocer propiedades diferentes a las que ya conocían de los polígonos. Incluso en las construcciones que no fueron presentadas en este documento prevalecen estas formas de construcción.

Otra de las situaciones observadas es que muchos no tomaban en cuenta que en GeoGebra algunos puntos no son fijos, sino que son puntos dinámicos lo que evitaba que las construcciones dadas fueran siempre regulares, esto es más una problemática en relación con el uso y conocimiento que tenían los alumnos sobre este software, sin embargo, en algunos casos las herramientas que ofrece fueron de ayuda para dar posibles construcciones y observar propiedades y comportamiento de los polígonos.

En cuanto a los niveles alcanzados del modelo de Van Hiele, solo **E6** logró avanzar al nivel 3, pues logró hacer deducciones a través de lo trabajado, los demás alumnos se ubican entre el nivel 1 y 2 del modelo, e incluso la mayoría está en el nivel 1 pues aunque reconocen características de los polígonos, las reconocen como un todo, lo que hacía que intentaran reproducir lo que observaban (Vargas et al, 2013), esto hace pensar que el tipo de conocimiento que sobresale es el instrumental, sin embargo, no es así pues Skemp (1987) menciona que la comprensión relacional es entender por qué y para qué se hacen las cosas y la mayoría de los alumnos intentó caminos en los que se observa que buscaban entender por qué se veían de determinada forma los polígonos. En total de los alumnos de los cuales se presentó un análisis de sus construcciones 5 cumplen con las características propias del nivel 2, 7 con las del nivel 1 y como ya se mencionó solo 1 se ubicó en el nivel 3. En cuanto al tipo de comprensión en 5 alumnos se aprecia una comprensión relacional, en 4 una relación instrumental y en los 4 restantes se observa que están presentes ambos tipos de comprensión, estos alumnos son los que buscaban aplicar una regla, pero entendiendo por qué funcionaba.

Lo anterior hace pensar que la visualización es una herramienta importante para lograr que los alumnos tengan una comprensión relacional, pues esta permite ver e interpretar datos a través de imágenes que no solo son presentadas en papel, sino que usan Sistemas de Geometría Dinámicos (SGD) como GeoGebra, que en este caso ayudó a la exploración de las propiedades de los polígonos y como estas pueden ser de ayuda para construirlos.

Capítulo 5

Conclusiones generales

Como se mostró en el capítulo 1, la problemática que dio pauta para la creación de esta tesis, fueron las respuestas observadas en un examen diagnóstico aplicado en una escuela de medio superior en el estado de Tabasco. En estas respuestas se percibió que, aunque el tema de polígonos regulares es un tema visto desde niveles básicos de la educación, los estudiantes al llegar al nivel medio superior siguen teniendo dificultades para reconocer las características y propiedades de los polígonos.

El poco tiempo para la aplicación de las actividades no permitió que los alumnos se habituaran lo suficiente a las herramientas que GeoGebra ofrece, por lo que a veces también significó un problema para poder plantear respuestas que ayudaran a una mejor exploración de los polígonos y la geometría en general. Algunos alumnos realizaron construcciones sin tomar en cuenta que en el SGD las figuras no son estáticas, sino que las propiedades que tienen dependen de la forma en que son construidas.

Tomando en cuenta lo anterior, la continuación de este trabajo podría mejorar las actividades, haciendo que sean más específicas y que ayuden a entender el uso de las herramientas de GeoGebra, lo que a su vez podría verse reflejado en que los alumnos transiten a los niveles más avanzados del modelo de Van Hiele.

Las observaciones realizadas en este trabajo también sirven de pauta para que la enseñanza que se da en las aulas use los SGD y las Tics en general como se menciona en el artículo de Cuervo et al. (2021). Pues, como se ha expuesto en el análisis de las respuestas, GeoGebra fue de ayuda para que el tema presentado no estuviera carente de significado o fuera mostrado como algo terminado (Morales et al., 2016), sino que dio a los alumnos la oportunidad de explorar las figuras geométricas y descubrir propiedades y características a partir de esta interacción.

Tomando en cuenta lo observado en la problemática y lo expuesto en los artículos revisados, este trabajo tuvo como propuesta mostrar que, a partir de trabajar con los alumnos actividades creadas de forma específica y haciendo uso de los sistemas de geometría dinámica (SGD), el aprendizaje de las propiedades de los polígonos puede ser más fácil, además de que el uso de la visualización en las actividades puede ayudar a que la comprensión de los alumnos sea relacional y no instrumental, es decir que los alumnos entiendan el por qué las reglas que conocen en algunos casos funcionan y en otros no, así como el poder crear o descubrir nuevos caminos de solución (Skemp, 1987). Para ello se diseñaron actividades basadas en las fases de Van Hiele con el fin de dar una respuesta a la pregunta de investigación: **¿Cómo ayuda en la comprensión de las propiedades de los polígonos a alumnos de medio superior trabajar con actividades planteadas en GeoGebra?**

Al analizar las respuestas obtenidas después de la aplicación de este diseño, se observó que si bien la mayoría de los alumnos logró una comprensión relacional (Skemp, 1987), pues buscaban entender cómo y por qué se obtenían los polígonos a partir de las diagonales, los niveles de Van Hiele en los que se ubicó a la mayoría de los estudiantes fueron en el 1 y 2, que cómo lo mencionó Carreño et al., (2010) es en el nivel en el que se encuentran incluso los profesores en formación. En el caso de nuestro estudio puede deberse a que se necesita ser más claros en las peticiones de las actividades, pues se observó en el análisis que algunos de los alumnos construían lo solicitado mecánicamente lo que llevaba a que obtuvieran polígonos que no estaban inscritos.

Se observó que efectivamente trabajar con GeoGebra para mostrar las propiedades y características de los polígonos ayuda que la comprensión sea relacional, pues el uso de este SGD ayudó a una mejor interpretación de datos a través de imágenes o diagramas y facilitó la interpretación y documentación de la información. Además, se observó en el capítulo anterior que el uso de GeoGebra ayudó a desarrollar nuevas ideas y conocimientos en los alumnos (Vargas et al, 2013). Aunque en la aplicación se intentó que la interacción entre los alumnos fuera mínima, sí se observó que aquellos alumnos que compartían ideas tenían construcciones similares e incluso particulares como es el caso de **E7** pues en su última construcción reconoce que los polígonos que había construido anteriormente no eran regulares, esto reafirma lo que Cuervo et al. (2021) describe en su trabajo, el uso de GeoGebra motiva a los estudiantes a interactuar y fortalecer el trabajo en grupo entre los estudiantes.

Referencias

Alarcón, J.; Bonilla, E.; Nava, R.; Rojano, T. y Quintero, R. (1996). *Libro para el maestro matemáticas educación secundaria*. CONALITEG.

Arcavi, A. (*2003).* The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 52(3),* 215-241. DOI: 10.1023/A:1024312321077.

Barrera, F. y Reyes, A. (2015). La teoría de Van Hiele: Niveles de pensamiento Geométrico. *Pädi Boletín Científico De Ciencias Básicas E Ingenierías Del ICBI, 3(5).* https://doi.org/10.29057/icbi.v3i5.554

Cantoral Uriza, R. A., y Montiel Espinosa, G. (2001). *Funciones: visualización y pensamiento matemático*. Pearson Educación.

Carreño, E. & Climent, N. (2010). Conocimiento del contenido sobre polígonos de estudiantes para profesor de matemáticas. *PNA, revista de la universidad de Granada, 5(1*),11-23. https://doi.org/10.30827/pna.v5i1.6158

Cuervo Lancheros, D. T.; Fonseca Cuervo, C. A.; y Sepúlveda Delgado, O. (2021). La comprensión de los polígonos por medio del geogebra en estudiantes de grado séptimo. *Revista Boletín Redipe, 10(7),* 372–384. https://doi.org/10.36260/rbr.v10i7.1374

González Peralta, Angelina Guadalupe y Sánchez Aguilar, Mario. (2020). Conocimientos de docentes de primaria en formación respecto a perímetro y área de polígonos. *Perfiles educativos, 42(169),* 70-87. https://doi.org/10.22201/iisue.24486167e.2020.169.59328

Lobo, N. (2004). Aplicación del modelo propuesto en la Teoría de Van Hiele para la enseñanza de la geometría. *Multiciencias, 4(1),* 1-10. https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=90440104

McCormick, B.H.; DeFantim T.A. y Brown, M.D. (1987). *Visualization in scientific computing: Definition, domain and recommendations. Computer Graphics 21,* 3–13.

Meel, E. (2003). Modelos y teorías de la comprensión matemática: Comparación de los modelos de Pirie y Kieren sobre el crecimiento de la comprensión matemática y la Teoría APOE. *Relime 6(3),* 221-278.

Morales S., A. y Rosas T., L. (2016). Una propuesta para el desarrollo de modelos geométricos en las Educadoras de Párvulos. El caso del polígono. *Estudios Pedagógicos, XLII(2)*, 247-267. https://dx.doi.org/10.4067/S0718-07052016000200014

Petrou, Marilena y Maria Goulding (2011). "Conceptualising Teachers' Mathematical Knowledge in Teaching" en Tim Rowland y Kenneth Ruthven (coords.), *Mathematical Knowledge in Teaching.* Springer, pp. 9-25.

Rodríguez Buitrago, O., y Solarte Martinez, G. (2007). Triangulación de polígonos. *Scientia Et Technica*, *XIII(34)*, 457-462. https://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/4809784.pdf

Skemp, R. (1987). *The Psychology of Learning Mathematics, cap. 12*. LEA.

Vargas, G. y Gamboa, R. (2013). El modelo de Van Hiele y la enseñanza de la geometría. *Uniciencia 27(1)*, 74-94. https://www.redalyc.org/comocitar.oa?id=475947762005