CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

UNIDAD ZACATENCO

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA EDUCATIVA

Tesis Doctoral

El vaivén de la intuición a la formalización: el infinito como proceso y como objeto

Presenta

M. en C. Liliana Aurora Tabares Sánchez

Director

Dr. Luis Enrique Moreno Armella

Codirector

Dr. Isaías Miranda Viramontes

Ciudad de México Octubre 2023

Contenido

Resumen

El presente es un estudio de carácter cognitivo que toma como consideración la cognición híbrida para explorar las ideas sobre situaciones del infinito matemático y para indagar cómo los estudiantes intentan apropiarse de ellas. El desarrollo del concepto de infinito matemático dentro del laboratorio didáctico, a través de las reflexiones que surgen de las nociones y percepciones personales y el análisis de algunas ideas de Galileo y Cantor respecto al infinito matemático nos invita a indagar en la relación de la intuición y la formalización para la comprensión del concepto.

En primera instancia, hemos utilizado ejercicios de límites de sucesiones y preguntas de reflexión acerca de conceptos que involucran la noción de infinito, esto nos permitió identificar características observables en las respuestas de los estudiantes con las cuales se diseñó una secuencia de cuatro actividades con la que exploramos las nociones de infinito potencial y actual de dos grupos de la licenciatura en Matemáticas Aplicadas, uno de primer semestre y otro de séptimo.

La reflexión que se desarrolla en este estudio se encuentra en el vaivén entre la intuición y lo formal que emerge cuando se busca comprender y darle sentido a estructuras o conceptos matemáticos y toma como referencia que las nociones matemáticas se desarrollan a partir de las primeras experiencias que se generan en el dominio sensorio motriz.

Abstract

This is a cognitive study that takes into consideration hybrid cognition to explore ideas about situations of mathematical infinity and to investigate how students try to appropriate them. The development of the concept of mathematical infinity within the didactic laboratory, through the reflections arising from personal notions and perceptions and the analysis of some ideas of Galileo and Cantor regarding mathematical infinity invites us to investigate the relationship between intuition and formalization for the understanding of the concept.

In the first instance, we have used exercises of limits of sequences and reflection questions about concepts that involve the notion of infinity, this allowed us to identify observable characteristics in the answers of the students with which we designed a sequence of four activities with which we explored the notions of potential and actual infinity of two groups of the degree in Applied Mathematics, one in the first semester and the other in the seventh semester.

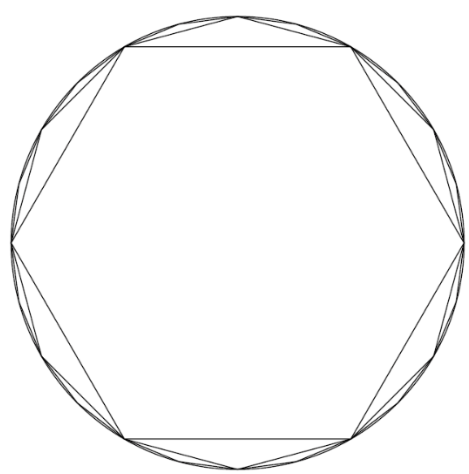
The reflection developed in this study is found in the back and forth between intuition and the formal that emerges when seeking to understand and make sense of mathematical structures or concepts and takes as a reference that mathematical notions are developed from the first experiences that are generated in the sensory-motor domain.

Introducción

Arquímedes es considerado unánimemente como el mayor matemático de la antigüedad. La riqueza de sus resultados asombra. Por ejemplo, la relación del volumen de una esfera con el del cilindro circunscrito a dicha esfera; la cuadratura del segmento de parábola; el centro de gravedad de diversas figuras y muchos otros. Cuando los matemáticos de la modernidad leyeron sus demostraciones —realizadas con el rigor más exquisito, se asombraron.

Leyendo sus trabajos, se tiene la certeza que Arquímedes conocía de antemano lo que se quería demostrar, porque: ¿cómo pudo alguien imaginar que el volumen de una esfera es 2/3 del volumen del cilindro circunscrito? La sospecha generalizada era que Arquímedes, por algún método (oculto a los ojos de los modernos) primero hallaba lo que quería demostrar y luego lo hacía mediante el método de exhaución ideado principalmente por Eudoxio.

Figura 1. Método de exhaución.



La esencia de dicho método, en términos modernos, e ilustrado aquí mediante la figura 1, consiste en ir "rellenando" la circunferencia mediante polígonos inscritos (y circunscritos) cuya área *converge* al área de la circunferencia. En ese sentido, la sucesión de polígonos inscritos va dejando cada vez menos margen para la diferencia del área de la circunferencia y de cada uno de los polígonos inscritos. Pero la situación se complica mucho más cuando consideramos el volumen de la esfera. En el caso del círculo se aproxima su área mediante polígonos inscritos y circunscritos. Pero ¿qué hacer en el caso de la esfera? Las sospechas pues, eran fundadas. Arquímedes parecía esconder un método secreto para hallar lo que debía demostrar. Dicho en nuestros términos del capítulo anterior, nadie podía explicar el camino de las intuiciones sensorio-motrices de Arquímedes hasta sus traslaciones metafóricas y demostraciones en el contexto simbólico de la geometría euclidiana. El problema era candente: ¿Cómo pudo Arquímedes *intuir* lo que debía demostrar?

Quienes sospecharon que Arquímedes tenía un método "secreto" para descubrir sus teoremas acertaron. Pero no supieron que habían acertado pues el pequeño opúsculo *El Método Mecánico* de Arquímedes, que contenía la respuesta al enigma, solo salió a la luz en 1907 después de casi diez siglos gracias al hallazgo, casi accidental, de J. Heiberg, un filólogo danés, en un sitio religioso en Estambul.

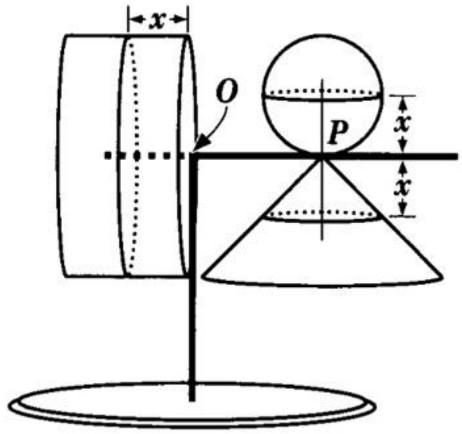
Para calcular el área de un triángulo, por ejemplo, no se necesitaba el genio de Arquímedes. Pero la fórmula para calcular el volumen de la esfera era otra cosa: es un problema que hoy día pondríamos **como un ejercicio** en el cálculo integral. El *Método* está contenido en una carta que Arquímedes escribe a su amigo Eratóstenes (bibliotecario de Alejandría) y allí le explica lo que él denomina un método para descubrir teoremas (Edwards, 1979). Hoy en día es lo que se llama un método *heurístico,* dicho informalmente, algo así como una técnica para encontrar el resultado buscado, aunque ese camino no suministrara una prueba como lo exigía la epistemología matemática de su época.

Arquímedes imaginaba que los cuerpos geométricos estaban elaborados todos del mismo material. Eso significa que tenían la misma densidad así que si dos cuerpos *pesaban* lo mismo, debían tener el mismo volumen (si sólidos) o igual área si eran cuerpos planos. Entonces, para comprobar que dos cuerpos tenían el mismo peso, Arquímedes los colocaba en equilibrio en una balanza (imaginaria) y aplicaba su regla de equilibrio en la balanza, principio establecido por él mismo. Por ejemplo, en la figura 2 el punto A colocamos el cilindro (base de radio 2r y altura2r) y en el punto B la esfera (de radio r) y el cono (base de radio 2r y altura 2r) de manera que la balanza quede en equilibrio.

Figura 2. Balanza

Para ello habrá que aplicar el resultado ya demostrado por Arquímedes mismo, sobre el equilibrio de una balanza; los pesos colocados en A y B están en proporción inversa a la longitud de los brazos de la balanza. Arquímedes mostró que la esfera y el cono estaban en equilibrio con el cilindro si se sitúan los sólidos geométricos anteriormente mencionados en cada lado de la palanca tal y como se muestra en la figura 3.

Figura 3. Esfera y cono en equilibrio



El punto O es el punto de apoyo de la balanza. Intuitivamente podemos considerar finos cortes verticales en el cilindro (a una distancia x arbitraria del punto de apoyo) y finos cortes horizontales en el cono y la esfera (ambos cortes a distancia x del punto P de la vara) cuyos momentos (distancia al punto de apoyo por sus respectivas áreas) estarán en equilibrio. Entonces, la circunferencia cortada en el cilindro se equilibra con la suma de las circunferencias cortadas en la esfera y en el cono. Aquí yace la clave del asunto: imaginar que el cilindro está formado por (una infinidad) de secciones planas circulares e igual cosa con la esfera y el cono. De allí emerge la conocida fórmula: volumen de la esfera es 2/3 del volumen del cilindro de igual radio y altura el diámetro de la esfera. El tercio restante es el volumen del cono. Para llegar a este resultado mediante el método mecánico, Arquímedes supone, reiteramos, que los sólidos se pueden descomponer en secciones planas bidimensionales (es decir, *planas*). Para ello necesitaríamos una infinidad de estas secciones planas para lograr un sólido. Podemos hacer la siguiente analogía: un grueso volumen de matemáticas escrito sobre hojas muy, pero muy delgadas. Esta situación de carácter sensorio-motriz (la del libro) es la que da lugar, mediante un traslado metafórico, a imaginar (y aceptar) que el sólido matemático puede descomponerse de la manera descrita.

No vamos a entrar más en detalle sobre *El Método*. Nos interesa aquí señalar la idea de la descomposición de una figura sólida en secciones planas (o una plana en secciones lineales). Nos interesa hacer esta observación porque *allí está la idea implícita de un infinito*: se requerirían una infinidad de secciones planas para "armar" un sólido. En la cultura matemática griega de su tiempo, o más precisamente, en la *epistemología matemática de su tiempo,* los griegos contemporáneos de Arquímedes sentían lo que se ha llamado un "horror al infinito". Esto fue llamado así por Aristóteles, quien impulsó la concepción del infinito exclusivamente como *infinito potencial*. Es decir, como el infinito de los números naturales cuando empezamos a contar: 1,2, 3, 4, … y esos puntos suspensivos indican "así sucesivamente" es decir, uno puede seguir contando si así lo desea. Es un infinito incompleto, no había un infinito completo. El infinito griego era *lo inacabado*. Si los matemáticos del siglo XVII hubiesen leído las palabras que ofrecemos a continuación, habrían empezado a entender el pensamiento arquimediano:

> …por lo demás estoy convencido, que no es en absoluto menos útil en orden a la demostración de los teoremas mismos. Pues algunos de los que primero se me hicieron patentes por la mecánica, recibieron luego demostración por geometría, *habida cuenta de que la investigación por ese método queda lejos de una demostración*; como que es más fácil construir la demostración después de haber adquirido por ese método cierto conocimiento de los problemas, que buscarla sin la menor idea al respecto... (cursivas añadidas). (Arquímedes, sf/1986, p. 35)

Ninguno de los precursores del cálculo de los siglos XVII en adelante, (hasta 1909), tuvo conocimiento del trabajo heurístico de Arquímedes, aunque al ver lo que había sido capaz de demostrar sospecharan que Arquímedes había llegado a sus descubrimientos *por otra vía*, como en efecto ocurrió. Solo hemos querido llamar la atención que era patente en Arquímedes ese doble tratamiento matemático: la elaboración de la justificación y otro acercamiento que podríamos calificar como *corporizado*.

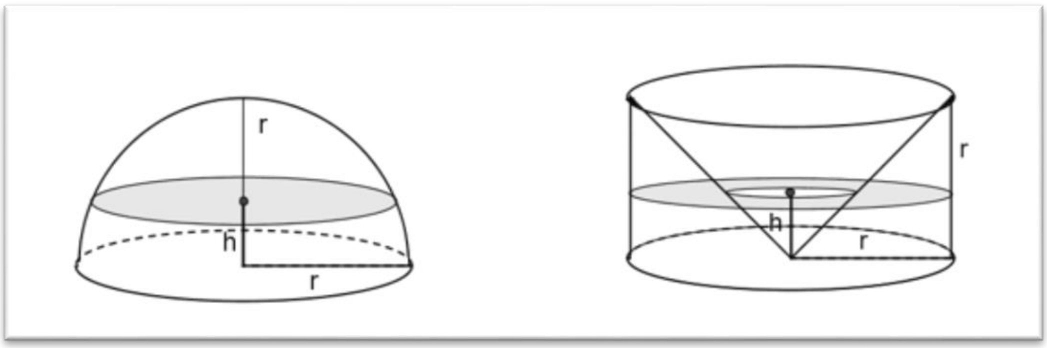
A comienzos del siglo XVII, Cavalieri (Edwards, 1979) generó con independencia del griego, ideas semejantes a las de Arquímedes desplegadas ya en su *Método Mecánico*. La idea central es imaginar un sólido como constituido por varias secciones planas o una superficie constituida por varios segmentos de rectas. La figura 4 ilustra este *Principio de Cavalieri*:

Figura 4. Cuerpos de igual área

Este principio puede aplicarse, **en el caso de sólidos**, para hallar la fórmula correspondiente al volumen de la esfera. Es decir, $4\pi r^3/3$. Para ello, consideramos un cilindro de altura y radio de su base ambos iguales a r. Consideremos también media esfera de radio r y un cono de igual base y altura que el cilindro e “incrustado” en dicho cilindro (como en la figura 5); se puede comprobar que la media esfera tiene un volumen igual a

$2\pi r^3/3$. Las zonas sombreadas en ambas figuras tienen igual área en cada altura intermedia respectiva.

Figura 5. Volumen de la esfera



Por ello, la media esfera tiene un volumen igual a la diferencia entre el cilindro y el cono que se muestran en la figura 5.

En ambos autores, y tal vez allí radica lo que más nos interesa de su obra, *hay un infinito escondido*. Arquímedes (287-212, a. C.) escribe su obra después del trabajo euclidiano de sistematización de las matemáticas. Casi toda ella, con la excepción del Método, responde a esa nueva epistemología que constituye la infraestructura euclidiana. De modo que su carta a Eratóstenes es, en cierto sentido, una reacción al modo axiomático, deductivo. Arquímedes considera que este método *legaliza* los resultados, pero no constituye una vía para llegar a ellos. Arquímedes estaba distinguiendo *hechos* de *demostraciones*. Establecer un hecho, articulando una línea de razonamiento que lo tornara verosímil, era distinto a comprobar su veracidad mediante una demostración. Es ya una larga tradición matemática la consideración de la tensión entre razonamiento inductivo y razonamiento deductivo. Hasta hoy, la epistemología dominante en matemáticas traza una dura línea entre estos aspectos y a favor de lo deductivo. Desde un punto de vista de las matemáticas escolares, hay espacio, aquí, para *no aceptar* quedarse de ese lado de la línea, sino, más bien, *vivir entre dos aguas*.

La vida de Cavalieri transcurre en una atmósfera intelectual más proclive a la aceptación del razonamiento inductivo. La historia del Cálculo durante los siglos XVII y XVIII (Newton, Liebniz y Euler) impulsa esta forma inductiva de razonamiento y lo lleva hasta fronteras inimaginadas en aquellos tiempos.

Arquímedes y Cavalieri. Dos nombres que hemos elegido por "esconder el infinito". Dos pensamientos de épocas tan diversas pero que coinciden en una idea: *descomponer un cuerpo en cuerpos de una dimensión menor*. Pero esto solo será posible si las secciones mediante las que se van a "armar" los cuerpos totales forman una colección infinita así: como un libro de hojas muy finas cuyo gran número permite apreciar el grosor del libro. Esa sería la versión sensorio-motriz del principio de Cavalieri.

Las matemáticas no pueden abordarse desde un solo punto de vista. La historia de la disciplina nos enseña cómo a periodos de pensamiento inductivo (razonamiento informal, por analogía) siguen periodos más sosegados de organizaciones deductivas y posteriormente se regresa a un nuevo nivel inductivo. Y así continúa el vaivén.

Debe aclararse que no pretendemos desarrollar una tesis sobre la historia de las matemáticas sino recurrir a algunas ideas para desarrollar una tesis en el marco de la didáctica, para hacer tangible, visible, un problema profundo: la tensión permanente entre el pensamiento inductivo y el deductivo. Esto toma distintos rostros en el desarrollo del **aprendizaje: es allí donde nos interesa explorar el problema**.

La experiencia didáctica nos ha revelado las dificultades cognitivas para asimilar, para apropiarse de las ideas que tienen que ver con el infinito. La idea de ilustrar este tema con una mención a los trabajos de Arquímedes y Cavalieri, *NO es para establecer una comparación automática con las dificultades de los estudiantes de hoy*. Es, en otros contextos socioculturales, donde personajes que han sido protagonistas de la historia de la disciplina, han revelado la necesidad de imaginar un objeto matemático (un cuerpo sólido y una superficie plana) como objetos materiales susceptibles de una descomposición como la que ya hemos explicado. Hay muchas lecciones válidas para la didáctica en estos pasajes.

Una de ellas es que los intentos de establecer una única visión matemática, en este caso la que va de la mano del rigor euclidiano, se contrapone a desarrollos que en un principio están más cercanos a nuestra experiencia sensoriomotriz.

CAPÍTULO 1

Delineando una visión teórica sobre la experiencia y su interiorización

Hoy resulta casi innecesario afirmar que nuestra especie es el resultado de un larguísimo proceso evolutivo. Hubo un tiempo en que nuestros ancestros ni siquiera poseían un lenguaje oral. Como resultado del proceso evolutivo, nuestra especie logró, hace ya millones de años (Donald, 2001) un control fino sobre los movimientos del cuerpo, en particular, manos y rostro. Ese control que hoy apreciamos en las manos de un pianista permitió, en un pasado remoto, la elaboración de las herramientas para la supervivencia. En nuestra vida cotidiana, entre cientos de actividades, escribimos cartas y manejamos el teclado de nuestras computadoras como algo *natural*. Pero no siempre fue así. Hubo un tiempo en que apenas asomaba a nuestra inteligencia la capacidad de reconocer formas y pequeñas cantidades. La forma y la numerosidad que posteriormente dieron lugar a la geometría y a los sistemas numéricos. Estas líneas pretenden arrojar un poco de luz sobre los esfuerzos de constitución cognitiva de una especie que hoy concibe formas de inteligencia artificial, pero que ayer no sabía contar ni escribir.

El mundo de la escritura es reciente: de los primeros pictogramas nos separan unos cinco mil años. Hoy, cuando escribimos y volvemos después a lo escrito podemos reconocer nuestro pensamiento y posiblemente podemos refinarlo. La escritura nos ofrece una especie de *espejo cognitivo* donde vemos reflejado nuestro pensamiento.

En su obra *Oralidad y Escritura,* W. Ong, nos dice, en las primeras líneas de la introducción a su obra:

> Muchas de las características que hemos dado por sentadas en el pensamiento y la expresión dentro de la literatura, la filosofía y la ciencia, y aun en el discurso oral entre personas que saben leer, no son estrictamente inherentes a la existencia humana como tal, sino que se originaron debido a los recursos que la tecnología de la escritura pone a disposición de la conciencia humana. Hemos tenido que corregir nuestra comprensión de la identidad humana. (Ong, 1987, p11)

Estas palabras contienen una reflexión sobre el poder transformador de la escritura. Es posible entonces que el desarrollo de las matemáticas griegas haya estado impulsado por la forma de escritura alfabética desarrollada en esta cultura.

Desde las primitivas herramientas de piedra elaboradas por nuestros lejanos ancestros, hasta los teléfonos celulares, el GPS y otras formas de tecnología digital, nuestra especie se ha desarrollado social y culturalmente a través de la mediación de instrumentos materiales y simbólicos como la escritura. Somos una especie con lenguaje y hemos prolongado esta capacidad con la escritura, con el telégrafo, el teléfono. Sería casi interminable hacer una lista de los recursos inventados para potenciar la capacidad de comunicación humana. El desarrollo de la capacidad cognitiva de las personas ha ido de la mano de su capacidad de interiorización de los recursos que el medio social puede poner a su alcance.

La capacidad de elaborar *modelos simbólicos* (las matemáticas son un ejemplo central) ha sido el origen de nuestras maneras de entender científicamente el mundo que nos rodea. Nuestros modelos son resultado de la sistematización, en términos simbólicos, de la *interiorización de la experiencia*. La capacidad de simbolización ha sido determinante en nuestras vidas. Nuestro lenguaje oral nos ha permitido pasar de compartir información sobre el entorno, a compartir información sobre nosotros mismos —sobre lo que sabemos por experiencia. Pero no termina aquí: toda esa experiencia interiorizada y transformada crea para nosotros un *mundo virtual* cosido, por así decirlo, al mundo de las experiencias sensoriales, sociales y del movimiento. El eminente investigador Alexander Luria (1981) ha escrito:

> En ausencia de lenguaje, los seres humanos solo podían (inter)-actuar con aquellas cosas que podían percibir y manipular directamente. Con la ayuda del lenguaje, podían tratar con cosas que ni siquiera habían percibido indirectamente y con cosas que formaban parte de las experiencias de generaciones pasadas. Así que la palabra añade otra dimensión al mundo humano...Otras especies tienen solamente un mundo, el mundo de los objetos y situaciones inmediatas. Los seres humanos tenemos un mundo duplicado (p. 35).

Esto arroja un poco de luz sobre el problema central de la relación entre nuestro cuerpo y la capacidad humana para *traducir* toda nuestra experiencia sensorio-motriz en modelos simbólicas. Nos interesa tomar esta dirección para indagar cómo los estudiantes tratan de apropiarse o de entender ideas matemáticas, en especial ideas sobre los límites y sobre el infinito matemático. Son ideas que a lo largo del tiempo han ido sufriendo cambios y transformaciones profundas. Los modelos simbólicos terminan teniendo un fuerte impacto sobre lo que pensamos y cómo lo pensamos.

El mundo humano no está hecho solamente de objetos materiales. En ese mundo existen teorías científicas, las novelas, la música e instituciones como la corte suprema de justicia. Y ninguna de estas "cosas" tiene en sí misma, peso, volumen o temperatura. Están hechas de símbolos. Cuando algún antepasado hizo una serie de incisiones sobre un hueso para *representar* piezas de caza, por ejemplo, reveló que estaba en posesión de esta capacidad. Una incisión no es un conejo, pero toma el lugar del (posible) conejo. Un símbolo puede ser, por ejemplo, un trazo sobre una hoja, sobre una pantalla digital, un sonido u otro recurso que toma el lugar de aquello que posiblemente se encuentra ausente. Cuando conversamos con una persona y nos cuenta sus experiencias de los últimos días lo que recibimos es una versión simbólica de experiencias vividas por esa persona.

Las palabras del lenguaje materno son símbolos. El significado de un símbolo puede resultar de la existencia de un parecido estrecho entre lo que se representa con ese símbolo y lo representado. Por ejemplo, cuando el oficial de migración en un aeropuerto internacional ve la fotografía de nuestro pasaporte y luego nos mira detenidamente, comprueba que esa fotografía "somos nosotros". La fotografía toma nuestro lugar. Sin embargo, no todos los símbolos tienen una interpretación tan directa. Una palabra, por ejemplo, *pencil* tiene significado si uno conoce algo de inglés. No parece haber una correspondencia tan clara entre la palabra lápiz (o pencil) y lo que significa ese término. Diríamos que ha sido mediante una *convención* que aquellos que hablan una lengua han *heredado* ("porque sí") el significado de cada palabra. Así aprendemos el significado de las palabras de nuestra lengua materna. Sin embargo, los estudiosos de la etimología de una lengua rastrean el pasado de las palabras y descubren que los significados actuales tienen una raíz, una historia que ha ido cambiando a lo largo del desarrollo de esa lengua. Las palabras no son como las fotos del pasaporte: el carácter simbólico de ellas, las intenciones con las cuales fueron elaboradas, no son del todo claros hoy en día.

Hay un recurso muy valioso para generar nuevos significados que empleamos casi a diario. Ese recurso es la *metáfora*. Por ejemplo, si decimos que la discusión que tuvo un empleado con el gerente de su empresa fue *una pelea de perros*, entendemos las circunstancias de ese altercado. Entonces la frase completa “la discusión fue una pelea de perros” tiene un significado que resulta de una traslación de significado. Eso significa la palabra metáfora: *traslado*. Traslado de un contexto a otro, con el propósito de trasladar un significado. Observando detenidamente veremos que las metáforas están siempre presentes en el ejercicio de una lengua. De una persona decimos que es muy sólida en sus convicciones morales. Pero...las convicciones no son sólidas. Es la metáfora la que traslada el significado de *sólido.* La lengua es metafórica en su día a día. ¿Y qué ocurre en las matemáticas?

1.1 La sustancia simbólica de los objetos matemáticos

Con el propósito de lograr una interacción más fructífera con los estudiantes nos y les preguntamos: ¿qué es un objeto matemático? Los *objetos* matemáticos no son objetos en el sentido en que sí lo son las manzanas o las sillas. Aquí nos enfrentamos con entender qué clase de objetos son, cómo están constituidos. El problema estriba en el empleo de la palabra “objeto”. Las sucesiones numéricas, por ejemplo, no tienen peso, ni volumen, ni se degradan...por lo que concluimos de inmediato que, si las vamos a llamar *objetos* matemáticos tendremos que identificar la sustancia de la que están hechas. Los objetos matemáticos están hechos de símbolos. Y ¿quiénes fabrican esos objetos? Los seres humanos.

Hace tiempo ya que se viene luchando en el terreno de la educación con las versiones del “realismo platónico” que concibe los objetos matemáticos como anteriores a los seres humanos, como si fuesen eternos. Esta manera de pensar lleva a situaciones contradictorias sobre las que no se da respuesta al problema de su existencia. Por ejemplo, si existen desde siempre, tendríamos que suponer que desde *antes* de la gran explosión (Big-Bang), esto es, desde *antes* del origen del universo. Seguir esta línea de pensamiento en las instituciones escolares equivale a confundir las matemáticas con algo que está más allá de la razón humana. Abandonamos esa línea: los objetos matemáticos están creados por los seres humanos a partir de una condición de su capacidad cognitiva: *simbolizar y crear con símbolos modelos virtuales (refinados) de nuestras experiencias sensorio-motrices.* ¿Cómo lo hacemos? Esta pregunta requiere responder cómo vamos a dar significado a los objetos virtuales de las matemáticas. La respuesta es corta (lo que no significa simple): mediante metáforas conceptuales.

La raíz de todo símbolo reside en nuestra capacidad cognitiva, ——capacidad sensorio-motriz. Desde allí podemos *proyectar* el significado hasta los modelos simbólicos de las matemáticas. Por ejemplo, todo el cálculo básico alcanza su primer nivel de significación a través de metáforas del movimiento. De una sucesión, por ejemplo, se dice que es creciente, oscilatoria, divergente; de una función se dice que es creciente, periódica, y así sucesivamente. Cada uno de estos términos *creciente, oscilatoria, periódica* y todos los demás, traen un primer significado de nuestras experiencias cognitivas previas a las matemáticas. Sin embargo, como ilustraremos más adelante, el aparato formal, riguroso del análisis, basado en la aritmetización de la recta geométrica, es atemporal. Por lo tanto, *allí nada se mueve* y, en consecuencia, en las versiones del cálculo a las que con frecuencia se enfrentan nuestros estudiantes, hay un divorcio entre sus estructuras cognitivas y las estructuras lógico-formales del (nuevo) cálculo que les llegan de repente. Los pioneros de la aritmetización, guiados por un afán de estructuración desde las demandas de la lógica, intentaron "olvidar" las raíces cognitivas de su materia y generaron un divorcio que no era necesario: presentaron el cálculo como algo sin vida, sin movimiento. Tratando de alejarlo de las visiones intuitivas. Estamos escribiendo desde nuestros intereses educativos y no desde un desarrollo matemático que puede ser justificado históricamente. Pero no, de inicio, como un camino necesario para el aprendizaje de las matemáticas. Desde luego, no intentamos ignorar las matemáticas como objeto de conocimiento. Comentamos, más bien, la adopción acrítica de parte de muchos sistemas educativos de un formalismo que rompe un camino más natural (aunque no libre de dificultades) hacia el aprendizaje.

1.2 La cognición matemática

Reiteramos que cuando empleemos el término *cognición,* lo vamos a entender como las capacidades que permiten *apropiarnos* de un (fragmento de) conocimiento ya establecido por generaciones anteriores o para *generarlo, entenderlo, reproducirlo o transformarlo*. Esas capacidades emergen en mayor o menor grado del desarrollo de una persona en un medio sociocultural. Esta es una *definición guía*, una guía que servirá para recorrer el camino que estamos intentando explorar en este trabajo.

Ahora bien, el *acceso* a los “objetos” matemáticos necesariamente debe ser mediante una forma de representación simbólica. Aquí hay que ser prudentes para distinguir dos niveles de interpretación de la expresión *representación de un objeto matemático*. Una de ellas, la que tiene que ver con la naturaleza del objeto, afirma que los objetos matemáticos se materializan a través de sus representaciones. Usando un lenguaje figurado diríamos que el objeto matemático es como una sonrisa: la sonrisa queda representada y existe siempre y cuando exista un rostro que sonríe.

La otra interpretación ocurre en la escuela. Allí *ya están dadas* de antemano una o más representaciones de un objeto y se trataría de que los estudiantes se apropien de él mediante esta(s) representación(es) del objeto. Por ejemplo, que lo puedan manipular, mediante las operaciones aritméticas, que lo puedan graficar o derivar si se trata de una función.

Los objetos matemáticos son producto de una toma de conciencia gradual a partir de nuestra experiencia, mediante la ayuda que nos da una metáfora conceptual. Por ejemplo, tenemos la idea de introducir algo en una máquina y obtener el resultado de lo que hace la máquina. Es una idea que se emplea a menudo para introducir la noción de función como una fórmula con variable independiente, lo que se introduce en la máquina y variable dependiente, lo que sale de la máquina. Una vez tenemos la fórmula podemos graficar la función lo que nos da un segundo sistema de representación. En este ejemplo, el *traslado metafórico* de una experiencia tiene como destino la noción de función.

Muchas veces tenemos la impresión de que las representaciones simbólicas son independientes de la experiencia que les dio origen ya que dichas representaciones tienen sus propios sistemas de manipulación como si fuesen cosas materiales. Pensemos por ejemplo en el álgebra. Tenemos una ecuación de segundo grado, y mediante una serie de operaciones sintácticas encontramos las raíces de la ecuación. Podemos hacer esto sin necesidad de interpretar la ecuación, sin saber qué está representando. Hay una *relativa* autonomía de las operaciones matemáticas con respecto los orígenes de las representaciones. Algo similar a lo que ocurre con una lengua. Podemos hablar el español sin conocer las raíces etimológicas de las palabras ni estar plenamente conscientes de su gramática. Pero, así como el uso del lenguaje y su estudio nos da una mayor independencia lingüística, así también puede ocurrir que al familiarizarnos con la operatividad de un sistema matemático sintamos que estamos conociendo mejor la "intimidad" del sistema.

Un sistema simbólico en matemáticas desarrolla una *autonomía relativa* con relación a las experiencias que lo originaron. La vida (relativamente) independiente del sistema produce objetos de "segunda generación" dentro del sistema simbólico y entonces podríamos perder de vista sus raíces experienciales. La historia de las matemáticas ilustra esta situación con bastantes ejemplos. Uno de ellos fue la resistencia a la aceptación de los números negativos. En ese momento un número era interpretado a partir de una experiencia sobre la cantidad. Entonces, un número negativo no podía representar una "cantidad negativa": no existía una cantidad negativa y, por lo tanto, no había nada que representar. Con el desarrollo del comercio se vio que los números negativos eran la representación simbólica adecuada de una deuda. Fue pues el reconocimiento de una segunda experiencia social (una deuda) lo que abrió el camino a los negativos.

Estamos tan familiarizados con los números enteros, los números primos, las congruencias y muchos otros temas, que no parecen tener una raíz en nuestra experiencia. Si los números son muy pequeños digamos cuatro, cinco o siete, podemos representarlos, por ejemplo, como frutas. Pero si el número, por ejemplo, es siete mil trescientos siete (7307) la representación simbólica se impone como una necesidad para trabajar con estos números. Si queremos ver si es divisible entre cuatro, digamos, tendremos que operar a través de las operaciones aritméticas y posiblemente aplicar criterios de divisibilidad asociados. Empezamos a trabajar (y pensar) con números muy pequeños de los cuales es relativamente sencillo tener una imagen concreta: tres manzanas, cinco dedos...pero a medida que los números crecen, se impone un trabajo casi exclusivamente con sus representaciones simbólicas. Poco a poco vamos dejando de pensar en los objetos que se pudieron representar con esos números (¿quién piensa en 7307 como 7307 manzanas?)

Resaltemos que debemos tener en cuenta que la experiencia humana, al hablar de las matemáticas, no se restringe a esas primeras experiencias a partir del dominio de lo sensorio-motriz, sino que, trabajando dentro de un campo matemático, vamos generando una *experiencia simbólica*. No debemos olvidar que el mundo humano es un mundo doble: material y simbólico. Podríamos decir que las matemáticas son una forma de realidad virtual con una raíz muy fuerte en el mundo de nuestras (primeras) experiencias sensorio-motrices. Allí, en el mundo simbólico, nuestra cognición encuentra maneras de generar comprensión, entendimiento matemático. Entonces, lo que podría haber empezado con la noción de *numerosidad* —cuando solo podíamos indicar objetos materiales e irlos contando—, termina en un nivel mayor de sofisticación, con la teoría de números primos y su distribución en la "recta numérica".

Podemos *describir* una idea matemática, pero es justamente cuando logramos *capturarla* mediante una representación simbólica que alcanzamos un nivel en el que podemos *operar* la idea (operaciones matemáticas) y llegar a lo que denominamos *objetos* matemáticos. Lo que queremos destacar es que independientemente de la noción matemática que vayamos elaborando, habrá la necesidad de tener una representación simbólica. Si no lo logramos, nuestro pensamiento "regresa al reino de las sombras" como lo dice el poeta Ossip Mandelstam en su poema *La Gaviota*.

Cada persona guarda en su memoria una serie de experiencias de origen sensoriomotriz que, si es el caso, las puede imaginar en movimiento. Los fenómenos elementales de la numerosidad, de la continuidad, de la variación y acumulación, van sirviendo de sustrato para el refinamiento gradual de estas ideas en nuestra vida diaria y especialmente en nuestros estudios de matemáticas en los diferentes grados escolares. Todas esas experiencias, en la vida de una persona, tienen lugar en su ámbito social y cultural. Cuando un estudiante ha tenido la oportunidad de observar a través de un microscopio o de un telescopio, entonces, los mundos de lo muy pequeño y de lo muy grande o muy lejano, adquieren otro sentido. Y al mismo tiempo se tornan experiencias más concretas, es decir, ya no hay que imaginarlas. Percibir el mundo que nos rodea, sentir el movimiento y la aceleración en nuestro cuerpo, presenciar un rayo en medio de la tormenta...es ese mundo material y sociocultural —el mundo humano en su conjunto—el que nos llena de experiencias que al ser simbolizadas constituyen ese doble mundo del que nos habla Luria. Los seres humanos tenemos la tendencia, una vez que hayamos generado modelos simbólicos, a vivir con ellos o, incluso, vivir *dentro* de ellos. Hay personas que norman su vida de acuerdo con un código religioso, otras ven el mundo a través de su práctica musical, otras más a través de la ciencia. Los ejemplos abundan.

Desde pequeños aprendemos a distinguir singular de plural. Es nuestra primera idea de numerosidad y, a lo mejor, la usamos posteriormente para la elaboración (cada vez más) formal del número natural (Dehaene, 2011).

La manera como nos *apropiamos* de todo este caudal de experiencias pasa por el filtro de nuestra cultura. Eso es importante resaltarlo pues eso que llamamos el mundo de experiencias sensorio-motrices tiene lugar en medio de una cultura. Una cultura es como una gigantesca red cognitiva con la que mantenemos una relación estrechísima e inevitable. Somos seres profundamente sociales y eso tiene mucho que ver con nuestra capacidad de simbolizar y comunicar. En culturas tempranas, la experiencia de un trueno se podía interpretar como el malestar de un dios de un ser poderoso del que no habíamos visto su rostro. Atribuir malestar es atribuir un rasgo humano y de allí solo hay un paso para atribuirle un rostro humano. Los dioses (seres simbólicos) están hechos a nuestra imagen y semejanza. Pero toda esa experiencia acumulada sería poco si permaneciera pasiva. El *conocer* es un proceso continuo que no se detiene.

Cuando hablamos de la noción de función, antes de acceder a un nivel más formalizado, solemos ilustrar la idea como si una función fuese una máquina que recibe como “materia prima” la variable independiente y después de “procesarla” se obtiene como resultado la variable dependiente. Es una descripción que nos resulta casi siempre familiar. Esto lo ubicamos en una narrativa que empieza a generar una idea dinámica de la noción de función. Luego está la gráfica de la función en un plano cartesiano, la tabla de valores asociada, etc. La noción de función se va enriqueciendo de esta manera (aquí descrita brevemente) al ir sumando diversos aspectos de nuestra experiencia (material y simbólica) que poco a poco se van integrando alrededor de experiencias previas. Aún en un ejemplo tan simplificado como lo hemos presentado aquí, se percibe el papel importante que juega la noción de *metáfora* en la constitución de los conceptos matemáticos (Lakoff y Núñez, 2000).

Es importante resaltar que lo simbólico no necesariamente se refiere a una representación escrita con símbolos reconocidos propiamente como matemáticos. Puede ser que, por ejemplo, si nos estamos refiriendo a una función creciente o periódica, lo simbolicemos con un movimiento ascendente u ondulante de la mano. Sin embargo, la escritura y la graficación terminan siendo claves para la representación simbólica. En otros sistemas de representación es demasiado complejo instalar las reglas de operación propias del campo. Además, lo escrito fija la memoria, fija lo que se está pensando.

Mucho del vocabulario matemático ha resultado de una apropiación de términos que ya tenían un significado en otros ámbitos. Por ejemplo, *creciente, periódico, tiende a,* *convergente, límite, abierto, cerrado* etc., son términos que, al pasar a los textos matemáticos más formales, adquieren un significado que no concuerda siempre con el que ya tenían. Ese es un efecto (involuntario) de la formalización: *ocultar la raíz sensorio-motriz* que puede tener una idea al describirla a través de un vocabulario ya muy refinado.

Aquí veremos surgir una idea que ha resultado muy fructífera, a saber, la diferencia que S. Vinner (2018) ha descrito en términos de *imagen conceptual* y *definición conceptual* (concept image y concept definition). Vale la pena recordar este diálogo:

> **Estudiante** (dirigiéndose al profesor): El coche lleva una velocidad de 50 km por hora. ¿Eso qué significa?
>
> **Profesor**: Significa que dado $\varepsilon>0$ podemos hallar $\partial>0$ tal que si $|t_2-t_1|<\partial$ entonces $|((d_2-d_1)/(t_2-t_1)) - 50|< \varepsilon$
>
> **Estudiante:** ¿Cómo es posible que alguien que haya pensado en tal respuesta? (Grabiner, 1983, p 185).

Estas son las primeras líneas del artículo de J. Grabiner (1983) *Who Gave You the Epsilon? Cauchy and the Origins of Rigorous Calculus*, e ilustra una situación que no es infrecuente en los salones de clase. Ocurre cuando se confunde el razonamiento matemático con su formalización. Todo parece indicar que esta situación ha ocurrido y sigue ocurriendo ante la falta de conocimiento didáctico del profesor. Ha ocurrido incluso a nivel de la historia más reciente de la enseñanza. En 1931, Mark Vygodskii publicó un libro *Fundamentos del Cálculo infinitesimal* (Demidov y Shenitzer, 2000) allí, el autor hacía uso de los infinitésimos (al estilo euleriano), pues deseaba rescatar el pensamiento inductivo y el papel de la intuición ya que le parecía equivocado presentar las ideas fundamentales de la disciplina de manera formalizada. Vygodskii continuaba diciendo que no importaba cuánto se intentara simplificar el enfoque formalizado y simplificar las demostraciones del análisis, así no se lograba evitar el hecho deprimente que todo ese aparato permanecía como un cadáver en las manos de los estudiantes. Vygodskii recibió airados ataques de sus colegas en Moscú por el enfoque *informal* que daba a su curso.

Ha habido desde hace mucho tiempo un enfrentamiento entre lo formal y lo intuitivo que, más que un enfrentamiento que tenga como interés central el aprendizaje, plantea la discusión en términos rígidos: o sea, identifica las matemáticas con sus versiones de rigor formal. Más recientemente encontramos el trabajo de Kyeong H. Roh (2008) que sintetiza una cantidad considerable del trabajo que se había hecho hasta ese momento (incluyendo el suyo propio) en el tema de límites de sucesiones. Roh afirma que en ese momento había una escasez de estudios que trataran el tema de cómo las concepciones intuitivas *afectaban* la definición formal de límite, y por ello se interesaba en ese problema de enseñanza y aprendizaje. Ella pensaba que la definición formal debía tener prioridad sobre las imágenes intuitivas que jugaban el papel de *obstrucciones* para el acceso a la definición formal. En su texto ya citado se puede leer (p. 218) que las palabras empleadas por los estudiantes como “se aproxima”, “se acerca”, de acuerdo con Roh, *no contienen el significado formal de la definición de límite.* Uno se pregunta: ¿por qué tendría que ocurrir eso? Es como si la formalización no surgiera de un refinamiento a nivel simbólico-conceptual de ideas sensorio-motrices en un curso de cálculo. Debemos decir, sin embargo, que este trabajo sintetiza lo hecho hasta ese momento y por ello podremos afirmar que era un fenómeno persistente en la enseñanza aquella desvinculación de las intuiciones nacidas de experiencias sensorio-motrices y de las correspondientes formalizaciones rigurosas.

Estas últimas aun cuando tengan una filiación muy estrecha con lo intuitivo, traducen para la formalización *un aspecto* del nivel intuitivo, aquel aspecto que quienes formulan la definición rigurosa, intentan extraer del “caos de la intuición”.

Cuando pasamos a considerar las matemáticas de la variación, los procesos dinámicos como los límites de sucesiones, las derivadas, las integrales impropias y los nuevos objetos matemáticos como los números irracionales y los conjuntos infinitos, entonces, las representaciones simbólicas adquieren un papel aún más decisivo. En efecto, esto ocurre así porque nos empezamos a alejar en casi todos estos temas de las raíces sensorio-motrices inmediatas. Lo que hemos denominado *el vaivén entre la intuición y la formalización* sigue siendo fundamental, pues hay que entender que éstas son dos formas de manifestarse que tienen los procesos cognitivos. Una, respecto a los esfuerzos de los estudiantes para apropiarse de unos fragmentos de conocimiento matemático que son el objeto de una enseñanza y, por otra parte, desde las necesidades mismas de las matemáticas para ir dando cuerpo (simbólico) a las ideas que van siendo refinadas.

A nivel de las instituciones escolares, R. Duval (2008) ha reconocido una dificultad esencial de la enseñanza: *cómo lograr que el estudiante se dé cuenta de que se está hablando del mismo objeto matemático a través de sus diversas representaciones.* La pregunta es oportuna porque no hay instrumentos materiales como telescopios o microscopios matemáticos, digamos, que nos permitan percibir directamente los objetos matemáticos. La única forma de percibirlos es, insistimos, a través de una representación simbólica. Y, a partir de allí, cómo se puede empezar a generar una síntesis entre las diversas representaciones de un objeto que lleve a un estudiante a un entendimiento más estable. *He ahí un problema cognitivo y educativo básico*. Por ello, hay que enfatizar, si bien al objeto matemático solamente puede accederse mediante la puerta de entrada que nos da una representación, el objeto mismo no debe identificarse con una sola representación. Tendríamos muchos problemas si, por ejemplo, identificamos la circunferencia exclusivamente con la representación visual producida mediante un compás y no pudiésemos emplear la representación que nos ofrece la geometría analítica, *porque no reconociéramos que estaríamos hablando del mismo objeto*.

Ninguna representación en particular captura todos los aspectos significativos de una noción. Cada representación es como un capítulo de la biografía de una persona. Una biografía que nunca terminamos de escribir, pues siempre existe la posibilidad de añadir un capítulo más a los que en ese momento tengamos.

En el salón de clases hay que elegir las representaciones que emplearemos, pocas en realidad, pero el docente debe tener clara esa decisión: que el objeto ha sido presentado a través de pocas representaciones y, por lo tanto, aunque esa decisión sea suficiente para los objetivos de un programa escolar, siempre será posible en un grado posterior, aumentar el conocimiento previo mediante aspectos que quedan mejor expresados a través de nuevos sistemas de representación.

1.3 Las Teorías cognitivas y la cultura

La investigación más reciente en el campo de la cognición matemática provee una base de sustentación para las afirmaciones que hemos desarrollado en páginas anteriores. En su libro *A Mind so Rare*, Merlin Donald (2001) presenta una síntesis del estado de la investigación sobre la cognición humana y abre una vía para *empezar* a explicar el problema de la cognición matemática. Allí se argumenta que la mente humana es resultado de un *proceso de hibridación* entre biología y cultura. A diferencia de las demás especies, se afirma, *la mente humana tiene una contraparte colectiva que es la cultura*. Para una persona reflexiva no es muy difícil advertir que los procesos cognitivos (mediante los cuales generamos y nos apropiamos del conocimiento) están articulados con procesos colectivos. De una conversación, de una conferencia, de la lectura de un texto, podemos extraer una idea y apropiarnos de ella. Mañana esa idea puede enhebrarse con una que ya teníamos y a partir de allí generar un concepto novedoso. Ese concepto es ahora un instrumento para pensar por cuenta propia. Nuestra mentalidad se va desarrollando así en permanente interacción con el pensamiento de una colectividad en la que vivimos y con la que interactuamos a todos los niveles. Hoy, esa comunidad ha extendido sus alcances por la vía digital así que la interacción es aún más intensa.

Las disciplinas que se ocupan de los orígenes y desarrollo de nuestra mente sostienen que en algún momento del desarrollo evolutivo de nuestro sistema nervioso (Donald, 2001) dicho sistema alcanzó la capacidad de comunicarse gestualmente con los demás. Para que un gesto sirva como vehículo de comunicación debe ser capaz de *transportar* un significado. Es decir, que sea un símbolo. Ahora bien, si un gesto *significa* es porque quienes lo emplean de alguna manera *se han puesto de acuerdo* para compartir ese significado—emisores y receptores. Es lo que ocurre con la lengua materna. La vida social nos indica, desde la infancia, como ir interpretando las palabras según los demás las entienden. Terminamos así compartiendo significados. El lenguaje —en realidad todos los sistemas simbólicos que usamos—va generando una realidad *aumentada*.

Además de vivir en un mundo material, vivimos sumergidos en un mundo cultural. Esa especie de *realidad aumentada* transforma nuestra capacidad cognitiva a través de los instrumentos de mediación que nos provee. Por ejemplo, los sistemas de escritura, los sistemas numéricos y muchos otros. ¿Si no tuviéramos el sistema numérico, cómo podríamos distinguir un conjunto de sesenta manzanas de uno de sesenta y dos manzanas? Esos instrumentos simbólicos “trabajan” en consonancia con nuestra intuición sensorio-motriz.

Si queremos comprender la noción de *la recta tangente a una curva*, por ejemplo, es importante que lleguemos a dominar los procedimientos algorítmicos asociados (que vienen en un lenguaje simbólico particular) pero todo eso va de la mano de una imagen mental, eventualmente dibujada sobre una superficie, que podemos imaginar en movimiento y llegar así a la idea que, en un máximo, la recta tangente tiene una posición horizontal. Construimos nuestros conocimientos mediante una actividad que conjuga nuestras experiencias sensorio-motrices con la realidad simbólica aumentada. Las “proporciones” de una u otra pueden variar según la tarea en que estemos interesados.

Sumergidos en una cultura, *casi sin darnos cuenta* adquirimos una concepción del mundo, de la sociedad, de sus valores. Nada ocurre fuera del terreno social y cultural. En realidad, así transcurre el aprendizaje.

Capítulo 2

Hacia la didáctica de las matemáticas

2.1 El trabajo precursor de Klein

Las ideas de Felix Klein respecto a la necesaria vinculación entre el entendimiento intuitivo y el formal derivado de la aritmetización de las matemáticas nos demuestran lo importante de esa relación y más aún en el terreno de la didáctica. La toma de conciencia sobre la tensión entre intuición y formalismo en el seno de la cognición (matemática) pasaba por los cambios conceptuales que Klein veía ante sí con respecto a la naturaleza del conocimiento; parecía que el impulso hacia la organización deductiva dejaba atrás el método inductivo/empírico como la fuente del conocimiento matemático. Afirmó explícitamente en una de sus conferencias que no respaldaba que la ciencia aritmetizada sea la esencia de las matemáticas y alzaba la voz para que no fuera olvidado que las matemáticas tienen un sustrato intuitivo fundamental (Klein, 1896).

Klein insiste en su proyecto del no-abandono del punto de vista intuitivo al presentar ejemplos de trabajos matemáticos con alta carga intuitiva, pero respetando el nuevo paradigma, toma por ejemplo a Riemman y a Gauss quienes, aunque pertenecían a una generación que había puesto en marcha un espíritu más crítico dentro del quehacer matemático empleaban su intuición del espacio como base de sus demostraciones (Moreno-Armella, 2014).

Las preocupaciones que Klein exhibe en sus textos se pueden ver reflejada hoy, parcialmente, en lo que se conoce como *Conocimiento Matemático del Profesor*. La propuesta de Klein no era que los profesores aprendiesen (tal vez superficialmente) nuevos teoremas de matemáticas, sino que *profundizaran* sus conocimientos sobre las matemáticas que debían enseñar. Esto es, que desarrollaran una mejor comprensión de los conceptos que iban a enseñar en el salón de clases— y *a quién* se le iba a enseñar.

A Klein le preocupaba sobremanera que hubiese una grieta que separase el desarrollo de las matemáticas del pensamiento matemático cuando este pensamiento se instalaba en el salón de clases. Por ello volvía a la historia de las matemáticas como una oportunidad de reflexionar sobre la constitución del conocimiento y tal vez hallar algunas claves que permitieran aliviar los problemas de la enseñanza. En la introducción al volumen I de su libro “Elementary Mathematics from a Higher Standpoint”puede hallarse la siguiente reflexión:

> El proceso normal de desarrollo de una ciencia es el siguiente: las partes superiores y más complejas se tornan gradualmente más elementales debido al incremento de la capacidad para comprender los conceptos y a la simplificación de su exposición. La escuela tiene entonces la tarea de verificar, debido a los requerimientos de la educación general, si la introducción de la versión ahora elemental de los conceptos en el currículo es necesaria. (Klein, 1908, 2017, Introducción, p. ix).

Estas líneas sugieren que debajo del proceso de desarrollo histórico de las matemáticas se encuentra un proceso de reestructuración, de *compresión* de ejemplos en conceptos y teorías. Un concepto está a un nivel superior de organización, de abstracción con respecto a los ejemplos que quedan *incrustados*, por así decirlo, en ese concepto. Bajo el efecto de este proceso emerge una nueva arquitectura del contenido matemático, más general, más abstracta. Entonces ¿cómo conciliar esta nueva arquitectura con las demandas de la enseñanza?

Las matemáticas llamadas *elementales* quedan señaladas como un *campo de reflexión* que, lejos de ser superficial, está orgánicamente vinculado con las matemáticas superiores. Klein desarrolla su concepción didáctica sin dejar de señalar lo que nosotros hoy llamaríamos el *teorema de existencia del estudiante*, en otros términos, la presencia de la experiencia cognitiva del estudiante durante el proceso de enseñanza/aprendizaje.

Por lo anterior podemos decir que *el conocimiento matemático del profesor debe fluir* condicionado por su conocimiento didáctico. En este volumen I están expuestos los elementos de una didáctica que no ignora el carácter multidimensional de la disciplina. En ese momento hay que traer a la atención del profesor un hecho central: que lo simple desde el punto de vista lógico no coincide necesariamente con lo familiar o natural desde el punto de vista intuitivo. Klein (1908, 2017) dice algo cercano, así:

> Con frecuencia se escucha decir que las matemáticas consisten en extraer conclusiones de premisas explicitas, sin importar lo que estas puedan significar, bajo la condición, claro, que dichas premisas no sean contradictorias entre sí… quien así piensa está restringiéndose al aspecto *cristalizado* de las matemáticas (p. 207)

Pero, continúa Klein, en la práctica de las matemáticas, como la de cualquier otra ciencia, se recurre al razonamiento inductivo auxiliado por la heurística. Uno puede dar multitud de ejemplos de matemáticos que han descubierto resultados de mayor importancia que no pudieron demostrar formalmente (1908, 2017, p. 207). La pertinencia educativa de los vínculos inducción/deducción, descubrimiento/formalización como instrumentos didácticos, toma cuerpo entonces, como parte de una reorganización conceptual.

Cuando Klein escribió su obra señalaba la pertinencia de tomar en cuenta futuros estudios sobre la cognición con el fin de refinar sus intuiciones sobre la naturaleza del proceso enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. Hay una insistencia en su acercamiento entre la enseñanza y los estudios sobre la cognición. “Es justamente en el descubrimiento y el desarrollo del cálculo infinitesimal que el proceso inductivo, construido sin recurrir a pasos lógicos, juega un gran papel; **la ayuda heurística se traduce aquí a menudo como percepción sensorial**.” (1908, 2017, p. 226)

La sensibilidad pedagógica mostrada por Klein ha encontrado eco en las investigaciones modernas relativas a la naturaleza corporizada (embodied) de las nociones matemáticas básicas (véase, por ejemplo, Lakoff y Nuñez: Where Mathematics Comes From: How the Embodied Mind Brings Mathematics into Being, 2000). Sin embargo, con el paso del tiempo, la corriente de rigor formalista fue ganando terreno en el territorio de la enseñanza confundiendo la claridad lógica con la claridad cognitiva, partes diferenciadas pero presentes ambas en nuestra naturaleza híbrida.

El investigador, nos dice Klein (1908, 2017) no trabaja de manera lineal mediante un exclusivo proceso deductivo. Por el contrario, recurre a su imaginación y procede de manera inductiva, heurística. Se pueden dar ejemplos, como ya hemos dicho, de matemáticos que no lograron demostrar formalmente un resultado (según los criterios modernos de rigor), pero cuya contribución tuvo tanto valor como la de una demostración rigurosa. Un ejemplo, desde esta perspectiva, es Euler. El famoso *Problema de Basilea* que lo lanzó a la fama en Europa, es un ejemplo de razonamiento informal, pero de alto valor epistémico. Es decir, no alcanza a ser, por lo menos hoy en día, una demostración formal pero sí constituye un argumento suficientemente sólido para generar certidumbre sobre la validez del resultado. Lo que Euler demostró fue que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Se sabía que la serie era convergente pero no se sabía cuál era el valor del límite. Hallar el valor del límite fue visto como una hazaña de primer orden.

Los libros de Klein recogen una larga experiencia orientada a la preparación de profesores del nivel secundario. Klein fue pionero en el estudio de la cognición matemática enfatizando la necesaria vinculación entre el entendimiento intuitivo y el formal derivado de la aritmetización de las matemáticas. Visto desde la investigación y desde la perspectiva de la formación de profesores (proyecto que ocupó una parte considerable de la energía de Klein) aquel impulso alrededor del enfoque deductivo a ultranza insinuaba la presencia de un obstáculo insalvable para la enseñanza si ésta fuese colonizada sin más.

La resistencia ante la subordinación de la enseñanza a la organización deductiva de las matemáticas señala un hecho importante: no se trata solamente de conocer las matemáticas que se van a enseñar sino de conocer *a quién* se le va a enseñar.
Muchos académicos notables, por ejemplo Y. Vygodsky (no el famoso psicólogo) recibió, en la década de los treinta del siglo pasado, fuertes críticas del mundo académico de Moscú por el enfoque que daba en su libro a la enseñanza del cálculo. Basándose en su experiencia docente, Vygodsky escribió:

> Escribí este libro pues es mi profunda convicción que ninguno de los textos existentes presenta las ideas de los infinitésimos con la necesaria claridad para los estudiantes. La razón para ello es que comparten en el fondo un enfoque que considero equivocado y perjudicial. Específicamente, en todos ellos, los *conceptos fundamentales del cálculo* se presentan de manera lógica y formal. No importa qué tanto intenten simplificar las demostraciones para evitar el rigor formal, qué tanto recurran a las imágenes intuitivas, en el fondo intentan explicar el esquema moderno del análisis…Como resultado los conceptos fundamentales del análisis aparecen, no en su evolución sino congelados. Esta es la razón detrás del hecho deprimente que el análisis aparece como un cadáver en manos de los

> estudiantes...las demostraciones son incontrovertibles y a pesar de ello…*no logran convencer*. (itálicas añadidas). (Demidov y Shenitzer, 2000, p.65).

Este texto fue escrito hace 90 años. Han cambiado los textos, pero los problemas que enfrentan los estudiantes parecen congelados en el tiempo. Vygodsky añade entonces que el punto de vista que subyace a su texto toma en cuenta una perspectiva que nosotros aquí denominamos *corporizada* en lugar del esquema de rigor lógico. Vygodsky coincidía, *como matemático*, con el acercamiento lógicamente riguroso a las matemáticas, pero sostenía que eso no respondía a las necesidades cognitivas de los estudiantes, es decir, de quienes intentan acceder a un fragmento–por lo menos– del conocimiento matemático.

René Thom, en una conferencia pronunciada en 1972, afirmó que: *el verdadero problema al que se enfrenta la enseñanza no es el rigor, sino el problema del desarrollo del significado y de la existencia de los objetos*.

La crítica de Thom no es a ese proceso de refinamiento progresivo que ha ido sufriendo las matemáticas a través de su historia, sino a la *subordinación acrítica de la didáctica de las matemáticas al nuevo estado de conocimiento matemático*.

2.2 Cómo entender la realidad matemática: Los humanos somos seres híbridos

Durante siglos la geometría euclidiana fue concebida como una representación simbólica exacta del espacio físico. Es decir, el mapa (la geometría) coincidía con total exactitud con el territorio (el espacio físico). Las matemáticas, en general, eran concebidas de la misma manera y por lo tanto la intuición y la experiencia de la forma, la cantidad, la variación y la acumulación, por ejemplo, precedían sus versiones simbólicas, versiones simbólicas cuyo manejo y algoritmia estaban controlados por las interpretaciones intuitivas.

Basta recordar los más de veinte siglos que tomó aceptar que por un punto exterior a una recta podía pasar más de una paralela. La intuición de una recta y su comportamiento, *extraído de nuestra intuición y experiencia* espacial local, indica que solo es posible una paralela. Llega un momento cuando la descripción intuitiva que tengamos de una situación entra en conflicto con las definiciones formales de dicha situación. A veces hay que cambiar la definición, a veces habrá que restringir nuestra intuición, pero cuando estamos en la institución escolar, tenemos frente a nosotros un cuerpo de conocimientos matemáticos ya elaborado: *Tenemos que reeducar nuestra intuición,* Partiendo ahora de una versión formalizada de ese conocimiento. Esto nos lo enseña, en particular, el trabajo de Cantor sobre el que habremos de abundar más adelante.

El investigador en neurociencias, Merlín Donald, ha expresado (2001) esta *aparente* separación de las experiencias intuitivas e informales de sus versiones posteriores articuladas simbólicamente de este modo:

> Los seres humanos han tendido un puente entre dos mundos: somos híbridos, mitad *analógicos* –con acceso directo al mundo de nuestras experiencias– y mitad *simbolizadores* sumergidos en una red cultural. De alguna manera, durante el proceso evolutivo extendimos la capacidad analógica instalada en nuestro cerebro después de cientos de millones de años de evolución añadiendo nuestra capacidad simbólica y cultural. (p. 157, cursivas nuestras).

Si bien los símbolos tienen un impacto profundo sobre cómo sentimos el mundo, ellos terminan generando la ilusión de ser siempre la fuente de la experiencia misma. Tal es la fuerza que tienen sobre nosotros, sumergidos, como lo estamos, en un mundo oral, escrito, visual. Sin embargo, los símbolos no son la fuente exclusiva de la experiencia. Mas bien, como en un telar, los símbolos y la experiencia son como la trama y la urdimbre de nuestros conocimientos. Aquí surge una tensión entre los niveles analógicos de la experiencia y los niveles simbólicos de la experiencia. El matemático norteamericano J. Pierpont (1899) lo describe, entrando al siglo XX así:

> Tenemos dos mundos: el mundo de nuestros sentidos y de nuestra intuición y el mundo del número [...] el análisis de hoy [está] construido sobre la noción de número, y sus verdades son las más sólidamente establecidas dentro del conocimiento humano. Sin embargo, no hay que pasar por alto que el precio que debemos pagar por ello es terrible: *la total separación del mundo de los sentidos*. (cursivas añadidas, p. 406).

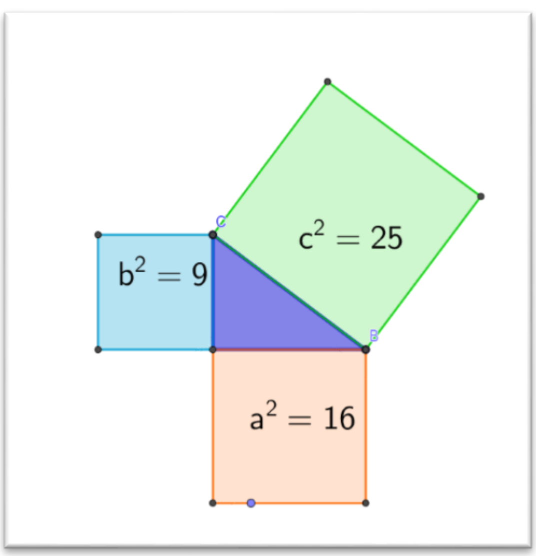
El trabajo de Cantor sobre el infinito matemático es un ejemplo certero de esta transformación de las matemáticas. En su obra, las matemáticas corresponden a un universo abstracto, cristalizado simbólicamente pero que conserva una raíz intuitiva: *el recurso a la correspondencia biunívoca*, idea de repartir equitativamente, digamos, una caja de chocolates entre dos niños ("uno para ti, uno para mí"). El mundo híbrido en el que tenemos experiencias físicas/sensoriales y experiencias simbólicas es *bidireccional*. La lectura de una novela, por ejemplo, puede tener un impacto definitivo en la vida de una persona; una palabra pronunciada en determinado contexto nos puede ayudar a entender su significado profundo; el contacto intenso con la música puede transformar *cómo escuchamos* sonidos provenientes del mundo natural.

Las matemáticas tienen también esa doble naturaleza. En sus primeras etapas, las matemáticas emergieron casi siempre–si no es que siempre–de procesos de representación simbólica de hechos naturales observados. Posiblemente encontremos los orígenes del número en la observación de la numerosidad del mundo que nos rodea. Así como vemos la diversidad, también vemos la forma, la variación de fenómenos naturales, la repetición de fenómenos periódicos y podemos continuar la lista. A partir del sentido básico de *cantidad*, el ser humano emplea su capacidad simbólica para ir elaborando un complejo sistema numérico (véase M. Tomasello *The cultural origins of human cognition*, Harvard Univ. Press, 1999 cap. 6).

2.3 La transición hacia la didáctica: importancia de la relación bidireccional intuición ↔ formalización

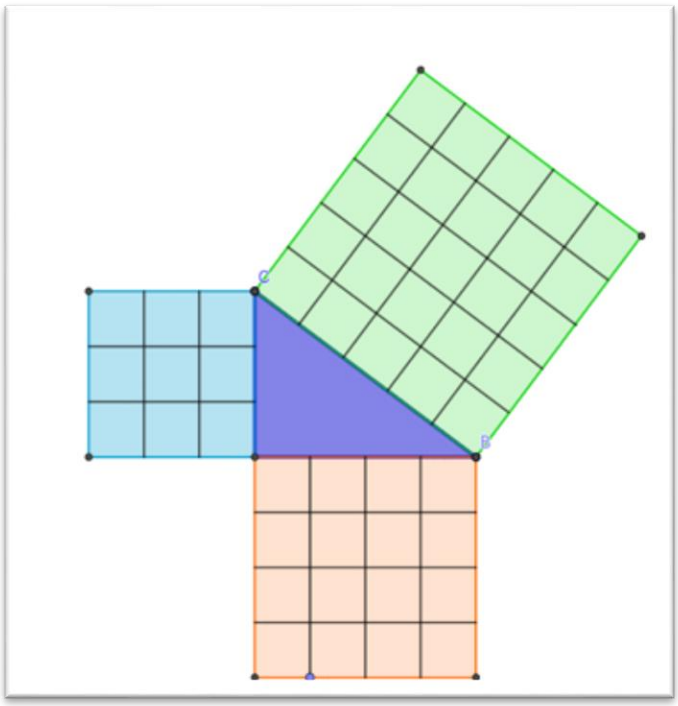
El acercamiento, en los primeros cursos de matemáticas, a conceptos más abstractos puede darse a través de contextos encaminados hacia el nivel de significados obtenidos desde la intuición sensorio motriz. Esta forma de introducir las matemáticas se hace de manera regular en etapas iniciales del estudio (primaria y secundaria) sin embargo, en el nivel medio superior y superior, no siempre es posible abordar los temas desde contextos sensorio motrices y por el contrario, en lugar de reforzar el tránsito entre el mundo intuitivo y el mundo simbólico y formal se crea una especie de ruptura y la actividad cognitiva entre esos dos mundos, se queda falta de fundamentos sólidos sobre los cuales desarrollarse. Veamos un sencillo ejemplo mediante el teorema de Pitágoras.

Figura 6. Teorema de Pitágoras



Si dividimos cada cuadrado en tantos cuadraditos como unidades tenga los cuadrados originales nos podemos dar cuenta que la suma de los cuadraditos del cuadrado de lado a más los cuadraditos del cuadrado de lado b nos dan la cantidad de cuadraditos que está en el cuadrado de lado c (figura 6).

Figura 7. Área de los cuadrados



De esta forma es fácil ver en la figura 7 que el cuadro verde tiene 25 unidades cuadradas de superficie, representadas por los cuadros pequeños, escrito siguiendo la simbología que adoptamos al inicio del planteamiento de problema

$Área\ del\ cuadrado\ verde = 25 = (5)^2 = c^2$ (c es la hipotenusa del triángulo rectángulo).

Los cuadros azul y naranja tienen 9 y 16 unidades cuadradas de superficie respectivamente y siguiendo la simbología anterior $Área\ del\ cuadrado\ azul = 9 = 3^2 =$

a^2 y el $\acute{A}rea\ del\ cuadrado\ naranja = 16 = 4^2 = b^2$. Sumando las áreas de los cuadros azul y naranja tendremos $a^2 + b^2 = 9 + 16 = 25 = c^2$. De forma que al análisis visual de las áreas de los cuadrados nos puede llevar a escribir $c^2 = a^2 + b^2$ que algebraicamente corresponde al teorema de Pitágoras.

La línea de razonamiento corresponde a la cognición híbrida, sin embargo, no siempre es posible abordar los temas desde contextos visuales o reales e incluso existen temas que desde la perspectiva lógica rompen la intuición sensorio motriz y no queda más que aferrarse a las verdades matemáticas y definiciones lógicas. Como en el tema del infinito. Surge entonces la incógnita hasta qué momento el profesor puede recurrir a conocimiento híbrido del estudiante para abordar un tema más abstracto.

2.4 La integral impropia como uno de los ejemplos matemáticos para la transición a lo más abstracto (el infinito)

Hay ejemplos que permiten tener un mejor reconocimiento de las formas correctas en la regla formal, como es el ejemplo que expusimos para la geometría euclidiana, la prueba del teorema de Pitágoras. En la que la prueba corporizada está apoyada en la cognición visual y las relaciones son relaciones simbólicas por lo que hay un tránsito explicito entre la corporización, cimentada sobre una intuición más sensorio motora, al simbolismo que se encamina las descripciones más formales. La virtud que posee la geometría euclidiana para poder identificar esos ejemplos no siempre es reconocida en materias como análisis matemático por la carga de conceptos abstractos y formales que en esta se manejan, sin embargo, al identificar la estrecha relación que existe entre los temas de análisis matemático y cálculo puede ser posible encontrar conceptos que nos ayuden a hacer explícito el tránsito de lo intuitivo a lo formal y viceversa.

La integral impropia puede ser uno de esos conceptos que ayuden a explotar los beneficios de la cognición híbrida en el estudio de temas relacionados con el infinito que llevan a generar contextos de mayor rigor matemático. De inicio la definición de integral ha sido dada para funciones que son continuas en un dominio de integración, sin embargo, se fue extendiendo para funciones no continuas e incluso se llegó a definir la integral impropia.

El concepto de integral es útil para algunas representaciones geométricas o cantidades físicas con un integrando (f(x)) no continuo en todo el dominio de integración. Situaciones geométricas y físicas hacen adecuar las matemáticas y específicamente la definición de integral se extiende para incluir una clase de integrandos que no eran considerados de inicio. Tal procedimiento tiene sentido si, primero, conduce a una definición matemáticamente cuantitativa, es decir a un valor, en el caso de la definición de integral y, segundo, si la definición extendida sirve para un propósito útil (Klein,1977).

Por ejemplo, si un objeto en movimiento lleva una velocidad de $t/2$ desde el tiempo t= $0\ al\ t = 1$ y repentinamente incrementa su aceleración la velocidad se modifica a $2t$ desde $t = 1\ hasta\ t = 2$. La situación se puede describir con un modelo matemático a través de siguiente función:

$$f(x) = \begin{Bmatrix} \dfrac{x}{2}\ para\ 0 \leq x < 1 \\ 2x\ para\ 1 \leq x \leq 2 \end{Bmatrix}$$

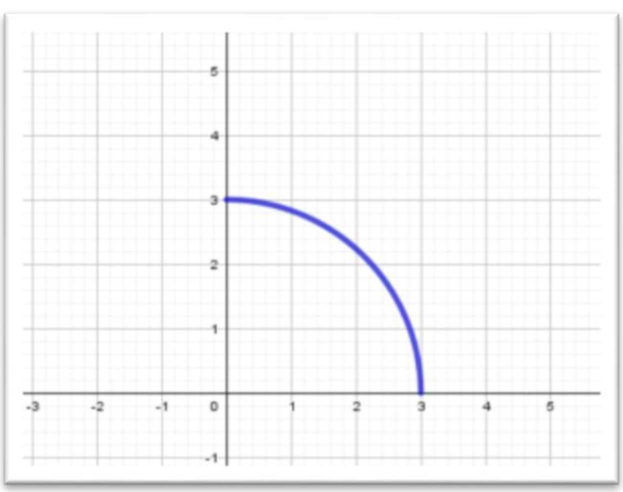
La función$f(x)$ no es continua en $x = 1$ pues al aproximarse por la izquierda $f(x)$tiende a ½ y por la derecha tiende a 2, por lo que no cumple la condición de continuidad. La integral $\int_0^2 f(x)$ no tendría sentido sobre la base de la definición de integral para funciones continuas para el dominio de (0,2), sin embargo, si la integral se analiza partiendo el domino de la función en (0,1) y (1,2) las funciones para cada nuevo dominio son continuas y las integrales $\int_0^1 \frac{x}{2} dx$ y $\int_1^2 2x\, dx$ se calculan y su resultado tiene sentido matemáticamente cuantitativo y su suma representa la distancia recorrida por el objeto.

$$\int_0^1 \frac{x}{2} dx + \int_1^2 2x\, dx = 3\frac{1}{4}$$

La intuición física nos lleva a pensar que si un objeto está en movimiento a determinada velocidad este deberá recorrer cierta distancia y que debe estar relacionada a la función con la que la definimos. Entonces el resultado de la integral de la función definida por partes coincide con lo que obtenemos físicamente.

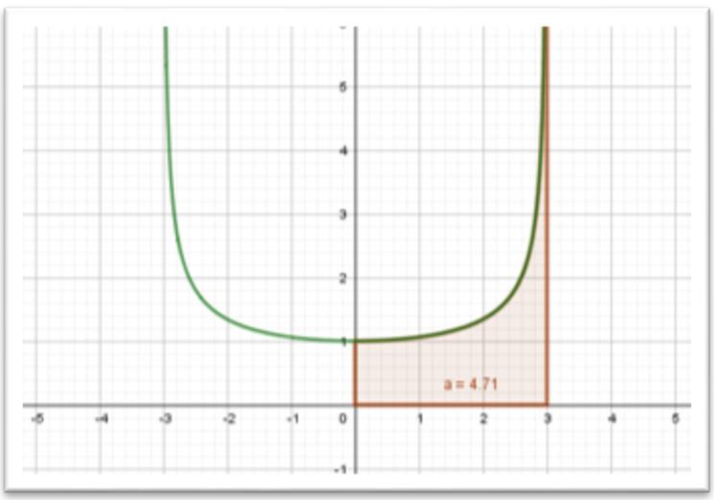
Si ahora nos fijamos en el caso cuando se busca conocer la longitud de arco del circulo $x^2 + y^2 = 9$ (figura 8) en el intervalo cerrado $0 \leq x \leq 3$ el cual es dado por la integral $s = \int_0^r \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}}\, dx$ podemos tener un ejemplo que acerca las reflexiones sobre bases geométricas encaminadas al concepto de integral impropia que puede ayudar fomentar la intuición matemática más fina. La integral que se calcula será $\int_0^3 \frac{3}{\sqrt{9 - x^2}}\, dx$.

Figura 8. Un cuarto de circunferencia de radio 3



Por ser la cuarta parte de la circunferencia de un círculo de radio 3, sabemos que esa longitud es $\frac{6\pi}{4}$ por lo que calcular la integral $\int_0^3 \frac{3}{\sqrt{9-x^2}}\, dx$ será equivalente. Sin embargo, si analizamos la función que se busca integrar podemos observar que no se encuentra definida en el valor de $x = 3$ (figura 9), por lo que el cálculo de la integral definida en ese intervalo debe realizarse tomando en cuenta esa indeterminación.

Figura 9. Grafica de la función 3/√(9-x^2)



El intervalo $0 \leq x \leq 3$ no se puede considerar cerrado para la función $\frac{3}{\sqrt{9-x^2}}$ por lo que es necesario usar el concepto de límite por la izquierda. Calcular el límite de la integral cuando el intervalo superior tiende a 3 por la izquierda $\lim_{b\to 3^-} \int_0^b \frac{3}{\sqrt{9-x^2}}\, dx$. La convergencia de ese límite asegura que la integral existe y se define como integral impropia.

$$\lim_{b\to 3^-} 3sen^{-1}\left(\frac{x}{3}\right)\Big|_0^b = \lim_{b\to 3^-} 3sen^{-1}\left(\frac{b}{3}\right) - 3sen^{-1}\left(\frac{0}{3}\right) = \frac{3}{2}\pi$$

que la intuición física y geométrica nos advertía se ve fundamentada, también, sobre la base matemática más precisa del cálculo de la longitud de arco de la función.

Las integrales impropias han llevado objetos sumamente intuitivos a hechos teóricamente validos que se despegan de la intuición física, pero que su veracidad es indudable por la base lógica sobre la que se sostienen. Ejemplo de eso es la llamada Trompeta de Torricelli o Cuerno de Gabriel que es un sólido de revolución que se genera al girar una rama de la hipérbola equilátera alrededor de su asíntota horizontal (el eje de abscisas).

El volumen del sólido de revolución engendrado por la superficie plana comprendida entre la hipérbola y el eje x al girar alrededor de este eje es:

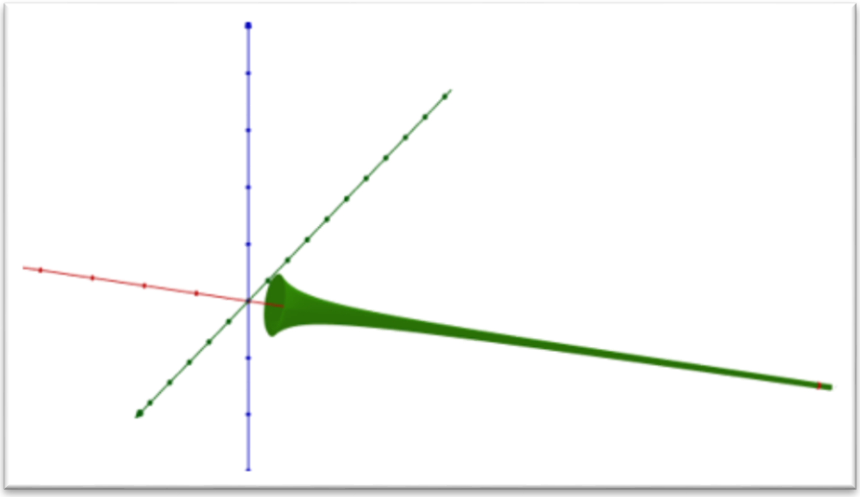
$$V = \lim_{t \to \infty} \pi \int_1^t \frac{1}{x^2} dx$$

$$V = \pi \lim_{t \to \infty} \left[-\frac{1}{x} \right]_1^t$$

$$V = \pi \lim_{t \to \infty} \left[-\frac{1}{t} + 1/1 \right]_1^t = \pi$$

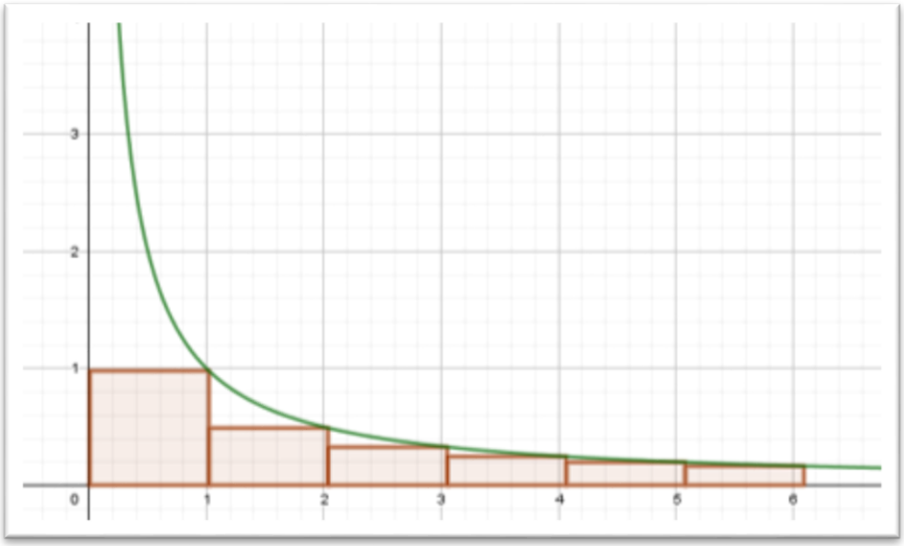
Tenemos así un cuerpo de volumen finito igual a π y área lateral infinita.

Figura 10. Grafica 3D del solido de revolución



El físico y matemático italiano Evangelista Torricelli resalta la propiedad paradójica de la figura 9 que consiste en tener un volumen finito y una superficie lateral infinita. Para poner de manifiesto el resultado paradójico, probó que la superficie de revolución engendrada al girar la hipérbola sería mayor que la suma de las áreas laterales de los cilindros que generaban los rectángulos de base la unidad y altura $1/x$ al girar en torno al eje x (figura 9).

Figura **11**. *Áreas laterales de los cilindros que generaban los rectángulos de base la unidad y altura 1/n*



Si acotamos el volumen por cilindros de radio 1/*x* (*x* = 1, 2, 3, …, *n*, …) y altura 1, se tiene que

$$V < \pi * 1^2 * 1 + \pi\left(\frac{1}{2}\right)^2 * 1 + \pi\left(\frac{1}{3}\right)^2 * 1 + \cdots = \pi\left(1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \cdots\right)$$

La suma de la serie de los inversos de los cuadrados se sabía que era finita, ya que Mengoli había calculado la suma de la serie telescópica en 1650 y sabía que la serie $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$ era convergente.

Y con ella se pudo concluir que la suma de los inversos de los cuadrados era convergente, porque se podía acotar superiormente por una serie convergente (la serie telescópica) de la siguiente forma:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2} < 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = 2$$

Con lo que se probó que el volumen de la trompeta de Torricelli era finito. Esas características de la integral impropia son las que pueden ser explotadas con el fin de generar mejor comprensión en torno a la adquisición de *conocimiento híbrido* de temas relacionados con el infinito.

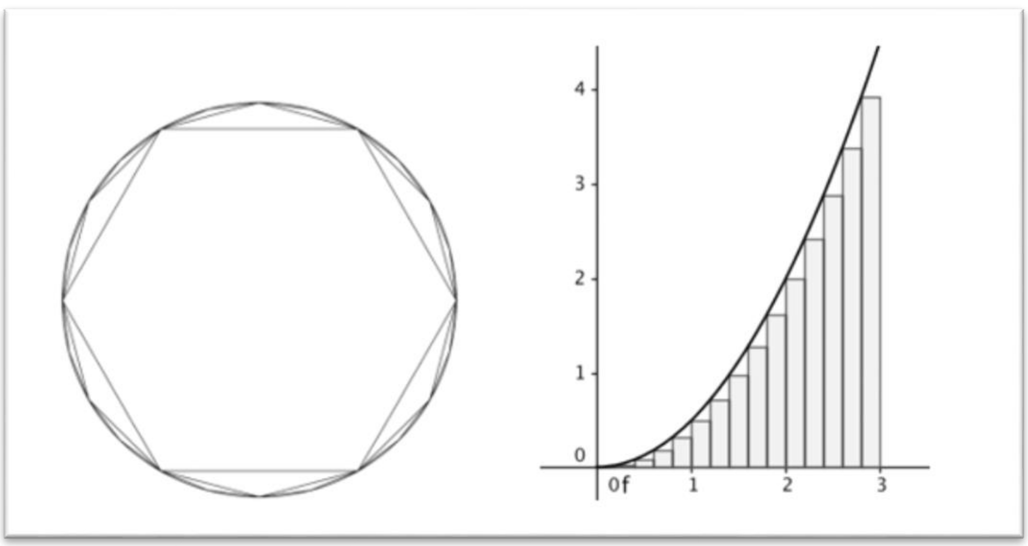
La mecanización de procedimientos para resolver tareas introduce en muchos casos una confusión con relación a si los resultados obtenidos tienen algún sentido, práctico o teórico, o si los procedimientos usados son adecuados en cada caso. Cuando se propone calcular la integral de una función sobre $(-\infty, \infty)$ o en un intervalo finito que contenga alguna singularidad de la función, el cálculo de la integral no se puede realizar de igual manera que en el caso de la integral definida, sin tener presente el comportamiento al infinito. El infinito abre otras puertas...

Capítulo 3

3.1 Perspectiva histórica y regreso al proceso de hibridación

En la figura 12 la imagen de la izquierda ilustra cómo podemos aproximarnos al área encerrada por el círculo mediante el proceso de inscribir polígonos regulares de seis lados, después de doce, luego veinticuatro y sucesivamente duplicando en cada paso el número de lados de la sucesión de polígonos inscritos. La imagen de la derecha pertenece a otra cultura matemática**.**

Figura 12. Método exhaustivo



En ambos casos, se trata de aproximar un área mediante las áreas de figuras más simples. Pero la imagen de la derecha tiene un recurso del que carece la de la izquierda: Los ejes de coordenadas.

Hoy en día la idea de aproximación, aquí ilustrada, ha viajado y se ha organizado después de la geometría analítica, dando lugar a figuras como la de la derecha: el método de aproximación al área bajo una curva que está presente en el cálculo. Los ejes de coordenadas son el resultado de la fusión del álgebra y la geometría. A partir de esta fusión, se puede representar gráficamente una ecuación y en especial, la gráfica de una función.

Cuando vemos tanto la figura de la izquierda como la del lado derecho, podemos *imaginar* dinámicamente el proceso de aproximación. Imaginar quiere decir representar mentalmente, en esa especie de pantalla virtual que todos poseemos. Tenemos que imaginar pues que los objetos considerados son objetos conceptuales, no materiales. Damos movimiento (imaginario) a las representaciones simbólicas, y "vemos" en nuestra mente cómo se "llena" el área de cada figura. Aquí conviene detenernos en una idea importante: la idea de proyección metafórica.

En 1980, G. Lakoff, y M. Johnson publicaron el libro *Metaphors we live by e*n él, mostraron el carácter profundamente metafórico del lenguaje ordinario. Recordemos que metáfora significa *traslado*. Cuando decimos "en estos días el tiempo vuela" bien sabemos que volar no es una característica del tiempo, pero le añadimos, metafóricamente, esta característica. Vemos el tiempo como algo que se mueve, que vuela. Cuando decimos "el profesor debe ser un jardinero", de nuevo, no interpretamos la frase literalmente sino así: la jardinería es un trabajo en el que se cultiva la tierra, se la prepara para que cuando el jardinero siembre una semilla, crezca un árbol. Entonces el sentido de la frase "el profesor debe ser un jardinero" hay que interpretarla pensando que el estudiante es tierra fértil para sembrar ideas que luego generen buenos resultados. En una metáfora hay entonces un dominio (en este último ejemplo: la jardinería) y un dominio meta, la enseñanza. Allí, en el dominio meta, *el profesor hace lo que el jardinero: siembra*. Es decir, la metáfora traslada también las acciones que se hacen el en dominio inicial.

Dicho en otras palabras: la proyección metafórica crea un dominio nuevo y traslada a él las reglas de operación del dominio inicial. Pero, y este es un gran "pero", las operaciones trasladadas, aunque se parecen a las del dominio inicial, no son idénticas: *tienen su propia autonomía*. Por ejemplo, cuando decimos “el tiempo es oro”, de nuevo estamos proyectando sobre el tiempo una característica del oro: su valor. Por eso hablamos de una *proyección metafórica*. Y no solo eso, hablamos de “ahorrar” tiempo, cosa que se puede hacer con el oro. Ahorrar tiempo es similar a ahorrar el metal, pero no es igual, solo similar.

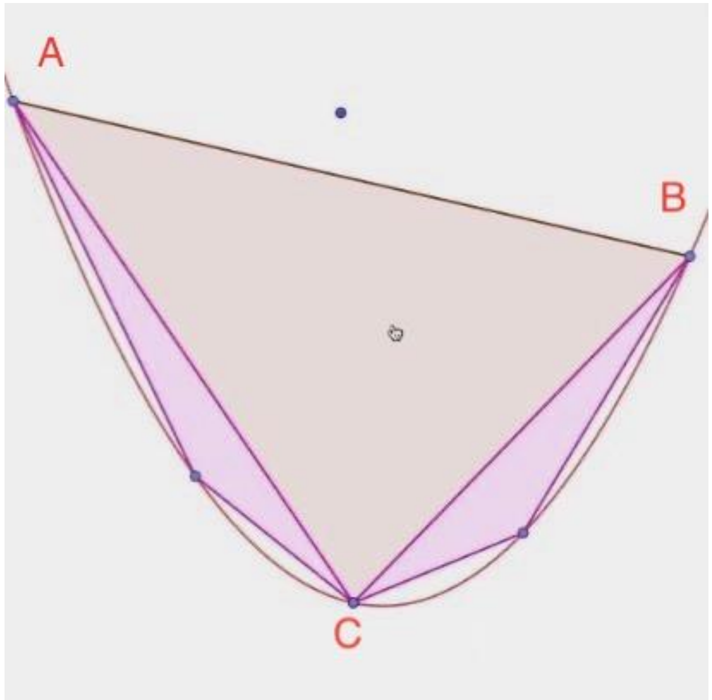
La noción de proyección metafórica es muy útil para entender lo que ocurre con las matemáticas, como ya anotamos en el capítulo uno. Nuestra experiencia sensorio-motriz es la que permite decir sin que nadie se asombre que “la carretera de dirige a la costa”. Nuestra experiencia nos ha permitido entender lo que significa dirigirse. Muchas veces nos hemos dirigido a la escuela, al banco, a nuestra casa. Y esa experiencia la proyectamos metafóricamente cuando decimos que la carretera *se dirige* a la costa.

Cuando hemos intentado la enseñanza de esta idea de proyección metafórica, hemos hablado de la diferencia que existe entre un territorio y un mapa de ese territorio. Nadie confunde el mapa con el territorio, pero si el mapa está bien elaborado, podemos aprender muchas cosas sobre el territorio estudiando el mapa. Podemos deslizar nuestros dedos sobre el valle que el mapa (tridimensional) indica entre dos cadenas montañosas e imaginar el río que corre en esa zona. Nuestras experiencias sensorio-motrices están a aquí al servicio de la lectura del mapa. Deslizar nuestro dedo entre las cadenas montañosas es similar pero no igual a lo que ocurre con el curso del río genuino.

Las líneas siguientes reflejan la frustración de un profesor con los textos que, para introducir la noción de límite, lo ilustran primero con un ejemplo de aproximación de una raíz polinómica y a continuación escriben: dado $r>0$ existe N, natural tal que para todo $m>N$, se cumple que $|a_n - L| < r$. La definición formal de límite de una sucesión. Mientras se calculaba mediante aproximaciones el valor numérico de la raíz del polinomio, uno podía ver un *proceso* en acción: cada vez mejor aproximación. Y enseguida, la definición atemporal de límite. Desde luego, hay una fisura profunda entre los dos acercamientos. Esa definición formal no corresponde al proceso vivo de aproximación durante el cual el estudiante puede ir realizando cálculos y mejorando su aproximación. Este fenómeno de disociación de un acercamiento sensorio-motriz y una formulación atemporal ha sido observado reiteradamente. El eminente matemático L. Pontryagin cuando habla de que el cálculo diferencial e integral están entre las áreas matemáticas establecidas antes que la teoría de límites y destaca que esta última se originó sobre una teoría ya existente. Pontryagin hace énfasis en la idea de los físicos quienes no creen necesaria la definición rigurosa para la comprensión del cálculo (Zeldóvich y Yaglom,1982)

Traigamos de vuelta a Cavalieri. Imagina que un cuerpo está hecho de láminas planas en número infinito. Enuncia un principio para determinar cuándo dos cuerpos tiene igual volumen. Esos cuerpos ya no son de este mundo material que habitamos las personas. Esos cuerpos son matemáticos y de sustancia simbólica. En el mundo que habitamos no podemos tener una infinidad de láminas constituyentes del cuerpo sólido. Cavalieri ha trasladado desde su experiencia sensorio-motriz la idea de un libro de hojas muy finas que componen ese muy grueso libro. Ha realizado una proyección metafórica. Esto es característico de las matemáticas. No es un hecho aislado. Regresemos a Arquímedes. Cuando calcula el área encerrada por un segmento de parábola (ver figura 13).

Figura 13. Método geométrico



Se *imagina* que puede descomponer el segmento de parábola en triángulos como se indica en la figura 13. De nuevo, esos triángulos y esa parábola son objetos matemáticos y la descomposición que se imagina Arquímedes es sobre el objeto matemático. Si la parábola fuera material, de madera, por ejemplo, no podría descomponerla en una infinidad de triángulos. De modo que estamos ante una situación metafórica. Uno siempre traslada como punto de partida, una manera de operar sobre los objetos matemáticos que *imita*, pero no coincide del todo, aquello que hace sobre las experiencias sensorio-motrices.
El área encerrada por el segmento de parábola equivale a 4/3 del área del triángulo cuyo tercer vértice C, es el punto por donde pasa la tangente paralela al segmento AB —que determina el segmento de parábola.

Hay pues dos mundos: el mundo de nuestras experiencias sensorio-motrices y el mundo matemático. Esta es una versión parcial de la cita de Luria que dimos anteriormente.

Sin embargo, la presencia *prematura* de la noción aritmetizada de límite genera momentos de angustia cierta a muchos estudiantes. Por ejemplo, cuando se pasa a contextos que no son geométricos, genera daños en el proceso de aprendizaje: cuando se introduce la ε solo como parte de la descripción de la definición de límite de una función en un punto: lim f(t) cuando t tiende a t_1. Escribimos "dado un $\varepsilon > 0$, podemos hallar un $\partial > 0$ tal que si $|t - t_1| < \partial$ entonces: $|f(t) - f(t_1)| < \varepsilon$".

Más allá del cuidado que se dedique a explicar los términos que aparecen en esta definición, sabemos que su entendimiento casi es inalcanzable para la mayoría de los estudiantes. Constituye lo que usualmente se llama un obstáculo didáctico. Es decir, una manera de presentar una idea que la hace "inconquistable" para quienes tratan de aprenderla y que solamente consiguen, mediante la idea que se hayan formado, de hacer aún más complejo lo que sigue más allá de esa idea mal formulada.

Ese lenguaje alejado de la intuición sensorio-motriz de los estudiantes produce una *ruptura en la comunicación* pues la lógica subyacente no hace aflorar el significado que se intenta transmitir y que permanece oculto. Lo que explicamos mediante "épsilon y delta", como usualmente se dice, no corresponde plenamente a lo que explicamos mediante el recurso geométrico. Vale la pena en este momento recordar la acotación del gran matemático Luzin, aparecida en una carta de apoyo a Vigodskii (no el psicólogo sino un profesor, homónimo de matemáticas) que escribió un libro de cálculo elemental basado en ideas intuitivas cuando, en ese momento —década de los 30 del siglo pasado, en Moscú— había una especie de aceptación generalizada sobre la conveniencia de adoptar para la enseñanza los métodos rigurosos del análisis, **métodos que se estaban tornando en ideología dominante**. En esa carta, que se puede leer íntegra (en versión al inglés) en la revista *American Mathematical Monthly* del año 2000, Luzin escribe:

> Veo las cuestiones de la fundamentación del análisis infinitesimal sin tristeza, enojo o irritación. Lo que hicieron Weierstrass y Cantor fue muy bueno. Así tenía que hacerse. Pero si ello se corresponde con lo que tenemos en nuestra consciencia, eso es otro asunto. Me salta una brutal contradicción entre las fórmulas intuitivamente claras del cálculo integral con el incomparablemente artificial y complejo trabajo invertido en las justificaciones y demostraciones. Se debe ser muy estúpido para no ver esto de inmediato, y muy irresponsable si, habiendo percatado de ello, uno se acomoda a esta atmosfera lógica artificial olvidándose de esa brutal contradicción. (Demidov y Shenitzer, 2000, p. 80)

En este nivel inicial de aprendizaje las interpretaciones posibles están fuertemente vinculadas a los contextos donde se está trabajando. Hay que reconocer que nuestro aprendizaje es contextualizado es una manera de resaltar que cualquier cosa que aprendamos se apoya en un conocimiento o en una experiencia previa. Pero, como en el caso de un barco, no se trata de quedar anclados en el puerto sino de navegar más allá de la seguridad y cobijo que ofrece ese puerto. En otros términos, de ir logrando *trasladar una idea, un fragmento de conocimiento a otros contextos*. Algunas veces se habla de *descontextualizar* una pieza de conocimiento en lugar de pensarlo, como preferimos, un proceso aditivo (de contextos). De allí que una fuente de dificultades para el aprendizaje provenga de suponer que se trata de lo mismo solo que "dicho de otra manera". Dos historias sobre el mismo hecho pueden diferir tanto que llegaremos a la conclusión que en realidad se trata de dos hechos distintos.

Cada idea puede tener su propio *mensaje* y es la responsabilidad del profesor ir *decodificando*, como parte de su discurso escolar, el sentido y significado de cada una de las situaciones en las que se presentan, intentando seriamente articularlas en una narrativa coherente.

Recuperar ideas germinales para ir delineando una atmósfera de matemáticas de la variación y la acumulación, de procesos y objetos, además de identificar el vaivén de lo intuitivo a lo riguroso–formal en la construcción de los conceptos matemáticos puede ser parte de las herramientas del profesor para llevar a cabo esa decodificación.

Las ideas matemáticas, los objetos matemáticos, nos son accesibles a través de sus representaciones simbólicas. Sin embargo, dichas representaciones no se limitan a las representaciones escritas, aunque estas son las más frecuentes e importantes. Para dar un ejemplo simple de lo que tratamos de decir, podemos imaginar la idea subyacente al concepto de función creciente cuando una persona traza con un movimiento una línea sobre un pizarrón o sobre una hoja de papel. Incluso, si simplemente hace un movimiento hacia arriba con una mano como un avión cuando va alcanzando altura. Todas esas (y otras) son formas de representar ideas matemáticas que a diferencia de los objetos materiales no tienen peso, ni volumen; no podemos olerlos ni saborearlos... entonces, ¿cómo lograríamos conocerlos?

Nuestra cognición, es decir nuestros recursos para entender la realidad en la que estamos inmersos, tienen dos canales: como ya hemos mencionado, un sistema sensorio-motriz y un sistema de representación simbólica. El canal sensoriomotor nos permite percibir la realidad a través de nuestros sentidos y del movimiento. Si vemos un objeto en movimiento en el aire, por ejemplo, podemos adelantar dónde va a caer. Los beisbolistas, por ejemplo, al escuchar el contacto de la pelota con el bate instantáneamente *saben* cuál será la trayectoria que seguirá la pelota. Sin embargo, no cualquier persona tiene originalmente esa capacidad: los beisbolistas la adquieren partiendo de su sistema sensoriomotor, pero sometiendo el sistema a un entrenamiento intenso. Ese entrenamiento transforma el sistema sensoriomotor original en uno que tiene un *funcionamiento modificado* por el entrenamiento.

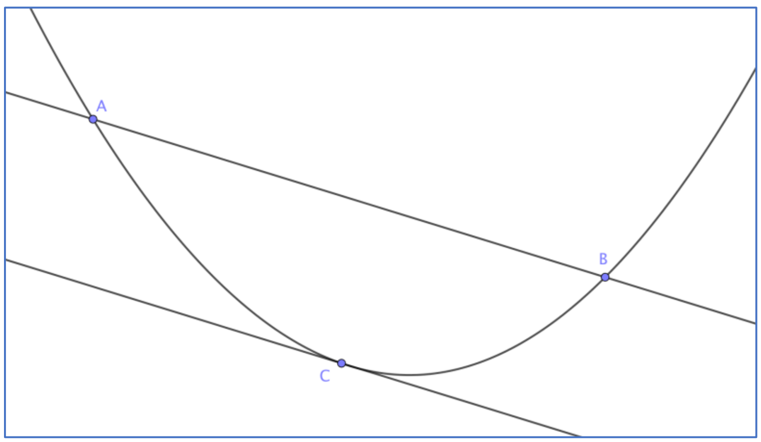
Esto es un ejemplo de cómo una adquisición de orden biológico es transformada por su inmersión en la cultura, en una capacidad biológica-cultural. Es fácil suministrar de inmediato otros ejemplos: un músico profesional llega, como espectador, a una sala de conciertos cuando ya está en marcha la ejecución del concierto. Desde su lugar, casi cerca de la entrada a la sala, puede percibir que un violinista, colocado a la izquierda, digamos, está imperceptiblemente desafinado. Los asistentes al concierto no lo perciben, aunque estén en una mejor posición dentro de la sala. Esto ocurre porque el músico tiene una sensibilidad auditiva *educada* que el común de las personas no tiene.

En general puede decirse que todo el sensorio *humano* es resultado de la intensa interacción del sensorio biológico con la cultura. Vemos lo que nos rodea y casi siempre vemos un mundo material humanizado, saturado por la acción humana. Luego, un biólogo fija su vista en lo que le arroja el microscopio que tiene ante sí y ve un mundo que no es accesible sin ese microscopio: su realidad visual es ahora otra distinta a la del novelista que saluda diariamente. Una mano que *sabe* escribir ha aprendido movimientos que corresponden a la cultura de la escritura.

La conclusión es que la capacidad sensoriomotriz del ser humano ha sido transformada por nuestra inmersión en la cultura. *Esa capacidad transformada, es la que ponemos en juego en el aprendizaje y enseñanza (posibles) de las matemáticas*.

El cálculo elemental encuentra en nuestra capacidad sensorio-motriz un importante recurso. La hipótesis de Vygodskii y de Luzin de que esto debía ser tomado en cuenta para la educación ha mostrado su pertinencia. Por ejemplo, el teorema del valor medio para las derivadas afirma que *existe* una recta tangente paralela a la cuerda sobre la gráfica de la función que conecta dos puntos cualesquiera sobre esa gráfica (figura 14):

Figura 14. Teorema del valor medio



Hay muchos otros resultados del cálculo que nuestra capacidad sensorio-motriz los hace verosímiles. Por ejemplo: la existencia de una raíz de una función continua que cambia de signo, la existencia de un punto donde una función continua alcanza su máximo valor.

Desde luego, por razones que en su momento habría que explicar, resultados como los aquí descritos, fueron adquiriendo a lo largo del desarrollo del cálculo, bases de sustentación conceptuales más amplias. Sin embargo, *todo el cálculo básico construye sus primeros significados mediante una colección de metáforas sobre el movimiento*. La derivada es una recta tangente que *viaja* sobre la curva, la integral es un *área acumulada* debajo de la gráfica de una función, etcétera. Asociada a esta manera sensoriomotriz de interpretar las ideas centrales del cálculo, existen mecanismos algebraicos como la "regla de la cadena" para derivar funciones compuestas, "teorema fundamental del cálculo" para hallar la acumulación de una función. Todo esto constituye un cuerpo conceptual que viene acompañado de unas reglas algorítmicas y el conjunto, constituye básicamente lo que llamaremos ***cálculo sensoriomotor.***

La intuición matemática aparece íntimamente vinculada con las capacidades motoras y visuales. Por otro lado, existe una tendencia hacia la abstracción que busca cristalizar las relaciones lógicas inherentes al material bajo estudio para organizarlo sistemáticamente. En la introducción a la obra *Matemáticas Superiores* de Ya. Zeldóvich e I.M. Yaglom, MIR, puede leerse:

> Las definiciones precisas de tales conceptos como, por ejemplo, el número real, límites, la continuidad y otros, representan el resultado de un análisis lógico prolongado y además nada trivial, de las teorías *ya creadas e intuitivamente claras* a un nivel de rigurosidad propio de las ciencias naturales. Dichos conceptos, nada fáciles para principiantes, se empezaron a *usar de manera irracional*: en los libros de texto precedían a la exposición de la teoría substancial y de la aplicación de ésta, *complicando artificialmente la comprensión de cosas intuitivamente claras*. (Zeldóvich, et. al, 1982, p. introducción)

Por su parte, Merlin Donald, en su obra *A Mind so Rare* (2001), arroja luz sobre el problema intuición/formalización, desde una perspectiva evolutiva y concluye observando que:

> Hemos sido capaces de construir lenguajes y símbolos, como los que encontramos en las narraciones, en el arte, y en las matemáticas. Estas tipifican el modo

simbólico…y este lado simbólico de nuestras mentes crea un universo abstracto, finamente definido, que es en gran medida de nuestra propia invención. (p. 154-155)

Los objetos matemáticos son de nuestra invención. Se parecen a los modelos materiales de ellos, pero hasta ahí. Cuando pongo una mano sobre la otra quedan en contacto, pero son dos manos distintas que no tienen ninguna célula en común. Pero si digo que dos curvas se tocan en un punto ese punto pertenece a ambas curvas. Ahora bien, señalando la indisociabilidad del conocimiento analógico (implícito, intuitivo) y del conocimiento simbólico, puede advertirse que si bien los símbolos tienen un impacto cristalizador profundo sobre cómo sentimos el mundo ellos terminan generando la ilusión de ser la fuente de la experiencia misma.

Sin embargo, insistimos en esto, los símbolos no son la fuente exclusiva, primordial, de la experiencia. Más bien, como en un telar, los símbolos y la experiencia son como la trama y la urdimbre de nuestros conocimientos. Todo ello pone de relieve que la fisura que hemos observado entre los participantes en nuestros trabajos (nos parece justa la denominación de *laboratorio* didáctico), entre un nivel de desarrollo matemático controlado por nuestra experiencia sensorio-motriz y los desarrollos posteriores que se conocen como la *aritmetización de las matemáticas.* Sin embargo, esa fisura no es inamovible.

Durante el siglo XIX las matemáticas sufrieron una transformación profunda. Tres episodios centrales en esa transformación lo constituyen la creación de las geometrías no-euclidianas, la aritmetización de la recta y la incorporación del *infinito actual* a las matemáticas.

Trataremos de esta última transformación tema en el siguiente capítulo, por su importancia para nuestro trabajo. La geometría euclidiana era concebida como una disciplina que reflejaba fielmente la estructura del espacio material. Gradualmente, mediante el estudio de la organización axiomática de esta geometría, fue creciendo la convicción que, si bien la geometría euclidiana describía adecuadamente el espacio, en realidad era un excelente *modelo* del espacio de la experiencia humana. Es decir, del espacio que nos rodea y que nuestro aparato sensorial nos permite experimentar. La geometría euclidiana es un ejemplo extraordinario de cómo la experiencia sensorial y nuestra intuición se organizan en una estructura axiomática. Claro los axiomas de esta versión de la geometría, hasta ese momento del siglo XIX, seguían siendo verdades "evidentes por sí mismas".

Cuando se dice que una recta es *continua*, esa noción refleja la experiencia corporizada cuyo posible origen está en haber deslizado la mano sobre el filo de una mesa, por ejemplo. Que dos puntos determinan una recta se apoya en tensar una cuerda entre nuestras manos. Un origen posible. El modelo era tan adecuado que se convirtió (¡y lo sigue haciendo!) en un instrumento insustituible. No sorprende entonces que se le haya visto como un cuerpo de conocimientos que arrojaba *conocimientos verdaderos* sobre el espacio de nuestras experiencias. Era como un mapa que coincidía con el territorio del que era mapa o como una fotografía de una persona que coincidía con la persona misma. En el siglo XIX se llegó a la conclusión que la geometría euclidiana no era el territorio: era un mapa muy fiel, pero mapa al fin. Nos interesa señalar esta conclusión (no entraremos al estudio fino de las geometrías en este trabajo) que dejó abierta la puerta para una interpretación nueva de las matemáticas.

Las ideas tienen un origen primigenio en nuestras experiencias sensorio-motrices, pero luego construimos representaciones simbólicas de estas experiencias que, aunque llegan a tener una independencia relativa no se desvinculan totalmente de nuestro razonamiento intuitivo. Por ejemplo, pensamos en la recta tangente a la gráfica de una función y luego pasamos al estudio de las propiedades de la función derivada. Allí vemos esa especie de hibridación del razonamiento intuitivo con un razonamiento que parte de las propiedades formales de la función.

La formalización tiene la virtud de dejarnos ver con otros ojos aquello que no vemos o no podemos ver directamente. El teorema de Pitágoras no lo vemos directamente. Podemos *interpretarlo* una vez que lo conocemos. Es fácil percibir que desde un punto exterior a una recta podemos "bajar" solamente una perpendicular, pero no resulta así saber que la suma de los ángulos interiores del triángulo equivale a 180 grados. Pero nuestro razonamiento no tiene que ser excesivamente riguroso de inicio. Tiene que haber un diálogo, ojalá permanente, entre nuestro razonamiento intuitivo y el impulso a una progresiva generalización. Los problemas particulares, por ejemplo, el cálculo de la tangente a una curva está en el núcleo de la definición general de derivada. Desde luego, este ejemplo no es único. El diálogo o tensión entre lo particular y lo general ha estado presente en toda la historia de las matemáticas y refleja un hecho profundo sobre su naturaleza. Entender cabalmente esta afirmación es parte del conocimiento didáctico del profesor o profesora.

Merlin Donald reflexiona sobre estas ideas cuando escribe:

> Los seres humanos han tendido un puente entre dos mundos: somos híbridos, mitad analógicos –con acceso directo al mundo de nuestras experiencias– y mitad simbolizadores sumergidos en una red cultural. De alguna manera,

> durante el proceso evolutivo extendimos la capacidad analógica instalada en nuestro cerebro después de cientos de millones de años de evolución, añadiendo nuestra capacidad simbólica y cultural. (2001, p. 57)

Si bien los símbolos tienen un impacto cristalizador profundo sobre cómo sentimos el mundo, ellos pueden generar la ilusión de ser siempre la fuente de la experiencia misma. Sin embargo, los símbolos no son la fuente exclusiva de la experiencia. Más bien, como en un telar, los símbolos y la experiencia son como la trama y la urdimbre de nuestros conocimientos explícitos.

Esta doble naturaleza del conocer y del conocimiento, no es exclusiva del pensamiento en matemáticas. El mundo híbrido en el que tenemos experiencias físicas/sensoriales y experiencias simbólicas tiene presencia plena. La lectura de una novela, por ejemplo, puede tener un impacto muy intenso en la vida de una persona; una palabra pronunciada en determinado contexto nos puede iluminar profundamente sobre su significado; el contacto intenso con la música transforma nuestras maneras de escuchar, incluso puede transformar cómo escuchamos sonidos provenientes del mundo natural.

3.2 Una ruptura crucial: el infinito cantoriano

Las ideas de variación y acumulación tal como se desarrollan en el cálculo temprano, presuponen una noción de continuidad heredada de nuestras experiencias sensoriomotrices de tiempo y espacio. Cuando pensamos en la *recta numérica* invocamos una experiencia igual o semejante a deslizar nuestra mano sobre una superficie lisa o recorrer con nuestros dedos el filo de una mesa o cualquier otra línea producida por el encuentro de dos planos. Entonces, decimos que esa idea de lo continuo es una idea *corporizada*, en el siguiente sentido: es resultado de la *interiorización* de experiencias sensoriomotrices, y por otra parte, la continuidad queda anclada al contexto de la recta euclidiana y es de allí de desde donde la interiorizamos. No es la única idea o noción que podamos llamar corporizada. De hecho, las ideas matemáticas tienen una raíz corporizada. Sin embargo, hay ideas matemáticas cuyas raíces corporizadas son difíciles de identificar–sin que ello implique que no existan. Una de esas ideas es la de *infinito matemático.*

Podemos imaginar un universo en expansión casi infinito con lugares a miles de años luz de la Tierra, pero no podemos omitir el *casi*. Si pensamos que estamos viendo un filme de esa expansión, podemos detenerlo y sabremos que en ese instante el universo es finito a pesar de la inmensa distancia que puede haber entre nuestro planeta y una galaxia extremadamente alejada de nosotros. Una vez que el filme continúe, presenciamos un crecimiento ilimitado. Otra experiencia común es *contar* 1, 2, 3, …que nos da una idea de un conjunto que no termina aun cuando sabemos que podemos *nombrar* números enormes por ejemplo 2^{1000}. Experiencias con ejemplos como estos nos ayudan a entender la idea de *infinito potencial*, a saber, *procesos de crecimiento temporal que no terminan*.

Pero hay otro infinito: el *infinito actual*. Si pensamos en el conjunto de los números naturales como un todo, empezaremos a vislumbrar la idea de un infinito actual. Queda claro que si usamos los números naturales para contar podremos ir avanzando: 1, 2, 3, 4, ….siempre consumiendo poco o mucho tiempo según hasta donde lleguemos. Reiteremos: contar es un proceso temporal. Es una acción que no puede agotar al conjunto de los números naturales pues siempre hay un sucesor una vez que hayamos nombrado un número. Entonces, concebir el conjunto como un todo ya acabado, es algo que *no puede ocurrir en el tiempo*. No es resultado de un proceso temporal. El infinito actual *es una* *noción atemporal.* Lo actualmente infinito está *dado*, no se puede construir paso a paso aún si esos pasos son muchos.

Uno puede imaginar que el *proceso de contar* va generando el conjunto de los naturales y si *imaginamos* que este proceso llega a su fin entonces tendremos el conjunto *completo* de los números naturales. Pero esta suposición es tan solo eso: no podemos *tener* el conjunto total de los números naturales de esta manera. El proceso de contar o añadir sucesivamente el siguiente número natural muestra que el conjunto de números naturales es *potencialmente* infinito.

Por otra parte, podemos decir: sea N el conjunto de *todos* los números naturales. Es decir, de alguna manera, el conjunto está ante nosotros sin que le falte nada: existe como una entidad en sí misma. Ahora bien, ¿tiene sentido formular esa afirmación?

En este momento fue oportuno plantear –en el laboratorio– una discusión sobre la existencia matemática, a saber, qué significa que un objeto matemático *exista*. Desde luego, la pregunta es muy profunda porque entendemos que esa forma de existencia es muy distinta a la forma de existencia de los objetos materiales.

Mediante la experiencia matemática –poca o mucha–uno va desarrollando una *intuición* de lo que significa existencia matemática. Por ejemplo, si en los diarios de mañana aparece la noticia *"los números naturales han desaparecido"* tendremos la seguridad de que eso no es posible. Pero muy probablemente no podremos explicar *formalmente* esa certeza. Uno de los participantes aseguró que esa desaparición no era posible pues ella podía seguir contando sus pasos al caminar: 1, 2, 3, etcétera–en voz alta, además. Otros añadieron que siguiendo ese argumento tampoco podrían desaparecer las circunferencias porque con un compás o con un disco compacto, podían trazar las que quisieran. Aún más, el disco compacto ya viene con una circunferencia incorporada. Otros continuaron afirmando que, puesto que podían dibujar rectas y otras curvas, tampoco podrían desaparecer las funciones. ¿Y las palabras del español? Preguntamos. Tampoco porque seguimos hablando...se nos tendría que olvidar el idioma a todos, concluyeron.

Casi sin darnos cuenta, sumergidos en la dinámica de nuestro medio social y cultural, somos *iniciados* en los números, los *vemos* aparecer ante nosotros por todas partes en el espacio cotidiano donde transcurre nuestra vida y terminan, esos números, teniendo una presencia incluso más estable que objetos materiales como las sillas de nuestra oficina. Si profundizamos en su estudio, descubrimos que hay, por ejemplo, números *primos*. Son aquellos que no tienen divisores mayores que el número uno y que cualquier número que no sea primo se puede expresar como producto de números primos. Ahora bien, este tipo de resultados son posibles porque tenemos una representación simbólica de los números perfectamente adaptada para la manipulación operatoria de los mismos. Tenemos una suma y una multiplicación y una forma de representar los números coherente con aquellas operaciones. Esto desde luego, no ocurrió "de repente" sino que es resultado del trabajo de generaciones incontables que a lo largo de la historia fueron encontrando cada vez mejores formas de representar las cantidades y de operar con ellas. Ese sistema que hoy denominamos *sistema decimal* es la cristalización de más de cinco mil años de esfuerzos. No habíamos respondido en el grupo el interrogante sobre existencia matemática, pero habíamos avanzado, según nuestra perspectiva, en abandonar la posición que afirma que los objetos matemáticos existen con independencia de los seres humanos. La reflexión sobre el sistema decimal nos ayudó a *debilitar* esa creencia sobre ideas matemáticas cuya existencia nada debe a los seres humanos.

A partir de aquí empezamos a explorar cuál podría ser la definición de un conjunto infinito actual. Si algo es muy grande (pero finito) se puede disminuir. Si se tiene una colección de 2^{200} elementos – aproximadamente el número de partículas elementales en el universo visible– y le quitamos un elemento, lo que queda es obviamente menor que lo original, aunque es una diferencia insignificante. Si el conjunto original tiene $2^{20000000000}$ elementos, al quitarle uno, prácticamente no apreciamos la diferencia, aunque en sentido estricto disminuye el número de elementos. Entonces, a medida que el conjunto considerado tiene muchos más elementos va revelando una cierta *insensibilidad a la pérdida* de "pocos" elementos –un número pequeño con respecto al tamaño original del conjunto. Sin embargo, si el conjunto original es pequeño, digamos que tiene 5 elementos, perder uno es una pérdida sensible.

Ahora bien ¿qué ocurre si de la lista de los naturales borrásemos todos los números impares? Sobreviven los pares, es decir los que pueden expresarse como múltiplos de 2, esto es son de la forma 2m, siendo m un natural arbitrario. La correspondencia $2m \rightarrow m$ que divide entre 2 cada número par (expresado como 2m), permite afirmar que tenemos tantos números pares como naturales. Una participante en el laboratorio sugirió que la correspondencia $2m \rightarrow m$ podía interpretarse como una lluvia: los pares "caen" sobre los naturales (pares e impares) y todos, sin excepción, quedan "mojados". No puede por lo tanto haber "menos" pares que naturales.

Esta es la característica esencial de un conjunto *actualmente* infinito: tiene subconjuntos propios con los que puede establecerse una correspondencia biunívoca. En el ejemplo previo, aún quitándole una parte infinita al conjunto de los naturales, la parte que queda, o sea el subconjunto de los pares, es "mismo tamaño" que el conjunto completo de los naturales ya que se pueden poner en correspondencia biunívoca, como las parejas en un baile: si ningún caballero se queda sentado, solo, sabremos de qué tamaño es el conjunto de caballeros: igual que el conjunto de sus parejas. Esta idea de establecer una correspondencia biunívoca puede parecer un tanto artificial, pero vemos que no es así: tantos obsequios para tantas personas allegadas. No necesitamos contar para saber que ambos conjuntos son de igual tamaño.

Esta idea que en realidad es una fuerte intuición cognitiva, sirvió de base a Cantor para encontrar la definición adecuada de conjunto infinito. Una idea traída de nuestra experiencia y llevada al mundo virtual de las matemáticas. Esta discusión generó un interés pronunciado entre los participantes del laboratorio cuyos conocimientos y reflexiones previas no habían estado orientadas a tomar conciencia de cómo una idea tan (aparentemente) simple como es correspondencia biyectiva entre dos conjuntos traía *encerrada* la llave para acceder al infinito actual que existe en esa realidad virtual llamada matemáticas.

Entender genera entusiasmo: por su propia iniciativa los participantes del laboratorio hallaron que los cuadrados de los naturales también eran susceptibles de ponerse en correspondencia biyectiva con los naturales; que los pares y los impares también eran conjuntos infinitos *equipotentes*–es decir, que tenían igual número (infinito) de elementos. Era el momento de reflexionar sobre cómo las intuiciones originales, que ellos tenían sobre el número de elementos de un conjunto, que se obtenía contando, debían ser "olvidadas" cuando se trataba de conjuntos infinitos.

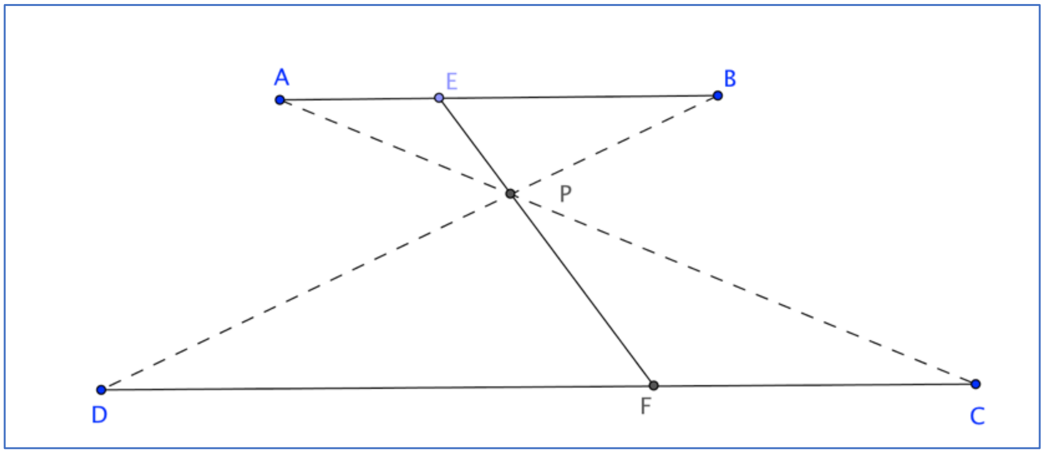
Lo veo, pero no lo creo escribió G. Cantor en una carta a R. Dedekind frente a este fenómeno de los conjuntos infinitos. Los participantes, como le había ocurrido a Cantor, lo veían, pero se sentían forzados a aceptar (aunque no lo creyeran) este comportamiento de los conjuntos infinitos, que rompía con la añeja intuición de que el todo era siempre mayor que cada una de sus partes.

Las intuiciones son instrumentos cognitivos que adquirimos a través de nuestra experiencia–cada uno tiene la suya–aunque no podamos hacerlas explícitas. No las podemos cambiar a voluntad. Ocurre que nuestras intuiciones (sobre un tema más o menos conocido, por ejemplo) no están sometidas a un estricto control lógico-deductivo y por ello, su nivel de coherencia es local. Si decimos el todo es mayor que cada una de sus partes, nos parece aceptable hasta que recordamos o aprendemos que podemos poner en correspondencia los naturales con los pares. Entonces tenemos que fijar límites para esa proposición que parecía tan natural como para tomarla como universal.

Empero, a través de la educación llega el momento cuando la parte lógica de nuestro pensamiento– de nuestra racionalidad–se *impone* sobre nuestras intuiciones, si se nos permite decirlo así. Aunque esta parte lógica de nuestro pensamiento esconde casi siempre (posiblemente siempre) una intuición que anda fragmentada o separada del tren inicial de nuestro pensar.

La discusión sobre el infinito actual nos llevó a considerar entonces otro tipo de conjunto infinito, distinto claro está, al de los números naturales. Un ejemplo iluminador surgió cuando comparamos dos segmentos de diferente longitud. El de mayor longitud parece tener “más puntos” que el otro. Sin embargo, no es la longitud lo que determina el número de puntos como indica la figura 15.

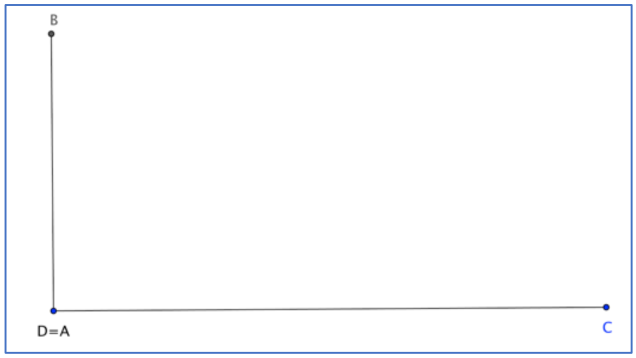
Figura 15. Segmentos de diferente longitud: Correspondencia biyectiva



En la figura 15 al punto A le hacemos corresponder C y al punto B le hacemos corresponder D. Eso determina al punto P. Para todo punto E en el segmento AB le hacemos corresponder F del segmento DC obtenido como intersección de DC con la recta determinada por E y P. Con la figura está "viva" en una pantalla de GeoGebra podemos deslizar E sobre todo el segmento AB y apreciar como el punto F recorre todo el segmento DC y observar que acada punto sobre AB le corresponde un punto en CD.

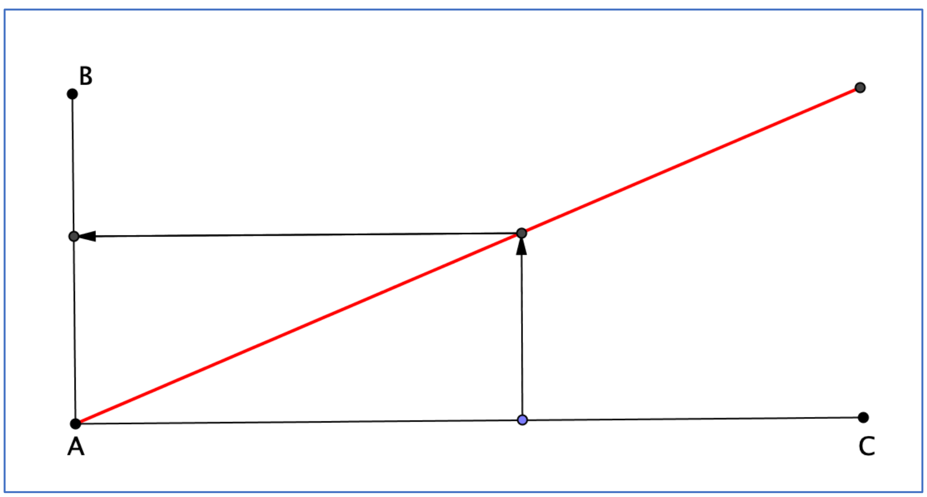
Cuando se discutió esta situación con los participantes en el laboratorio, les *incomodaba* que la correspondencia no viniese dada mediante una *fórmula* (expresión analítica) que era la manera como habían trabajado la noción de función en su labor docente. Se tomó en cuenta esta circunstancia para ampliar la discusión sobre cómo a lo largo del desarrollo del cálculo y del análisis uno de los motores que dinamizó ese desarrollo fue justamente la evolución de la noción de función. En el caso presente propusimos a los participantes hallar *explícitamente* una correspondencia entre los puntos de los dos segmentos dados. Para ello, colocamos los segmentos de la manera que se muestra en la figura 16 (como ejes de coordenadas).

Figura 16. Segmentos AD y CD de forma perpendicular



Colocar los segmentos así era una sugerencia implícita para que pensaran en una función inyectiva de dominio AC y recorrido AB. Las respuestas, después de algunas indicaciones variaron de funciones dadas mediante sus gráficas. La más elaborada– tal vez por eso mismo, la más sencilla, quedan ilustradas en la figura 17

Figura 17. Función Biyectiva



Es decir, a cada valor de la variable independiente (un número entre cero y uno) le correspondía un número en el eje de las ordenadas de acuerdo con la expresión y=2x para la correspondencia. Aquí, hay que decirlo, la aparente facilidad para mostrar que la "cantidad" de puntos de un segmento (conjunto infinito) no depende de su longitud resultó si bien incontrovertido, de difícil aceptación. La intuición, como manifestación cognitiva que vincula longitud con riqueza de puntos, quedaba una vez más, refutada. En otras palabras, lo que resulta más simple desde un punto de vista lógico, no necesariamente es lo más simple desde un punto de vista cognitivo. Recordemos la frase de Cantor: *lo veo, pero no lo creo*. Lo veía con los ojos de la razón, pero su intuición, le decía otra cosa. En esa ocasión Cantor había *demostrado* con un alto grado de rigor lógico que un segmento y el cuadrado son *equipotentes*, es decir, que tienen igual número (infinito) de puntos, pero en su intimidad tenía lugar una lucha entre su razonamiento deductivo y su intuición.

Para apreciar el esfuerzo de Cantor, para luchar contra la corriente al introducir su definición de infinito *actual*, recordemos lo que escribió varias décadas antes una de las figuras cumbres de las matemáticas: C.F. Gauss, en 1831 (véase T. D, Dantzig, *Number: The Language of Science*, p. 211, 4th ed., Free Press, N. York, 1954) escribió a su amigo Schumacher:

> …debo protestar vehementemente contra tu empleo del infinito como algo consumado, lo cual nunca es permitido en matemáticas. El infinito no es sino una figura del discurso; una forma abreviada para indicar que los límites existen…que otras magnitudes pueden aumentar sin cotas…no aparecerá ninguna contradicción mientras el Hombre Finito no entienda en infinito como algo fijo, mientras no sea llevado por un hábito adquirido de su mente a pensar el infinito como algo completo. (Dantzig, 1954, p. 211)

La cultura de una época nos provee de instrumentos para pensar y al mismo tiempo, nos encierra dentro de un mar de concepciones del que puede ser muy difícil escapar. Por ello decimos cuando estamos frente a un innovador que se ha *adelantado a su tiempo,* ha escapado de su tiempo. Cantor se adelantó a su tiempo.

En medio de la atmósfera creada por estas reflexiones, lanzamos entonces la pregunta a los participantes del laboratorio:

¿*Hay acaso un único tamaño de infinito actual –representado por el infinito de los números naturales*?

La pregunta resultó desconcertante. ¿Conjuntos infinitos de diferente tamaño? si un conjunto infinito *resiste* el que se le extraiga un subconjunto infinito sin perder su tamaño infinito ¿cómo podríamos entonces *aumentarlo para generar un infinito más grande*?

Parecería que ser infinito es algo absoluto. Las líneas que siguen recogen la sensación general que se percibía en el grupo y que ahora resumimos: uno de los participantes trajo a la atención colectiva, que ya habíamos explorado las correspondencias biyectivas entre segmentos de longitud diferente, y que estos segmentos (cualquiera de ellos) admitía una biyección con una parte propia y por lo tanto habría que admitirlo en la familia de los conjuntos infinitos... ¿pero *todos del mismo tamaño*? Los segmentos sí. Entonces ¿dónde buscar conjuntos infinitos de diferente tamaño? Preguntas encadenadas… Si bien era claro que infinito podía entenderse como potencial (proceso) y como actual (objeto) no había un indicio que llevara a pensar que se podía ir más allá de esta disyuntiva. No se veía cómo distinguir si dos conjuntos infinitos tenían el mismo tamaño. ¿No podía construir se acaso un criterio para distinguir tamaños de infinitos?

Para abrir un poco la discusión, en este momento aprovechamos el trabajo que ya habíamos hecho con la representación binaria de los números/puntos de la recta numérica. Habíamos mostrado que las expresiones periódicas correspondían a números racionales y las no periódicas a los irracionales. Si nos limitamos a los números entre cero y uno y los escribimos en notación binaria tendremos que la expresión: $0.a_1a_2a_3a_4...a_n...$, representa cualquier punto del segmento entre cero y uno, donde cada a_i es cero o uno. Por ejemplo, la expresión 0.0111111...representa al número ½ –punto medio del segmento.

La situación era propicia para explicar a fondo qué era una demostración por el absurdo. La geometría elemental había provisto de ejemplos, pero ahora estábamos tratando con una idea que no parecía tener una base intuitiva para sostener el razonamiento del grupo. Planteamos entonces una hipótesis que íbamos a intentar refutar. Es decir, íbamos a tratar de mostrar que esa hipótesis era *inaceptable* y, por lo tanto, tendríamos que aceptar como válida su negación.

La hipótesis era la siguiente: *se asegura que los naturales 1, 2, 3, 4, … y el segmento entre cero y uno tienen el mismo número (infinito) de elementos*. Esto significaba–hubo que trabajar para que fuese claro–que podemos enumerar los puntos del segmento como una lista: a1, a2, a3, …, donde a cada uno de estos puntos, digamos a a1, le corresponde el 1, al punto a2 le corresponde el 2 y así sucesivamente. Si esto es así, entonces los puntos del segmento entre cero y uno se pueden *contar,* esto es, *se pueden enlistar*. Esta sería la lista completa de estos puntos (cada a_{ij} es cero o uno):

$a_1= 0.a_{11}a_{12}a_{13}\ldots$

$a_2= 0.a_{21}a_{22}a_{23}\ldots$

$a_3=0.a_{31}a_{32}a_{33}a_{34}$

y así se continúa con a_4, a_5, …, a_n, etc. De acuerdo con nuestra hipótesis, allí están enlistados todos los puntos (números) entre 0 y 1.

Lanzamos entonces la pregunta: ¿podrían señalar un número/punto que no esté en la lista a_1, a_2, a_3, ...? la hipótesis inicial de que la lista era completa indicaba que no se podría encontrar un número fuera de la lista. Formular esta pregunta ejerció entonces como un *inhibidor*. Parecía una *trampa.*

A pesar de nuestros esfuerzos, habíamos llegado a un punto insalvable. Los participantes no lograron avanzar un paso. La experiencia que habían podido desarrollar no era suficiente para transferirla a un escenario muy alejado de la intuición o experiencia–de cada uno de ellos.

El salón de clases retomó una atmósfera tradicional: los *alumnos* esperando que los profesores revelaran el secreto. Una actitud pasiva. Una explicación posible es que la intuición del infinito actual es muy frágil: un conjunto infinito como el de los números naturales tiene un comportamiento sustancialmente diferente al que presenta un conjunto con un número muy grande de elementos. La fisura entre finito e infinito la revela la existencia de una biyección con un subconjunto propio, en el caso del infinito. De modo que el razonamiento de corte inductivo que solemos aplicar cuando se pasa de un caso particular al caso general, no funciona. Si esto ocurre es apenas explicable que genere una desconfianza cognitiva, si podemos emplear esta expresión.

Hubo entonces que explicar cómo se podía construir un número b, ausente de la lista: b=0.b1b2b3..., donde: si a_{11} es cero, elegimos b1=1 y si a_{11} es 1 elegimos b1=0. Eso garantiza que b es diferente de a_1 pues difieren en el primer dígito. Seguimos: si el segundo dígito de a_2 o sea a_{22} es cero, elegimos b2 igual a 1. Si a_{22} es 1, elegimos b2=0. De esta manera b es diferente de a_2 ya que el segundo dígito de b es diferente al segundo dígito de a_2. (b2 es diferente de a_{22}) . Continuando de este modo, construímos un número b entre 0 y 1 diferente a los de la lista donde se suponía que estaban *todos* los números que representan a la totalidad de los puntos del segmento entre 0 y 1.

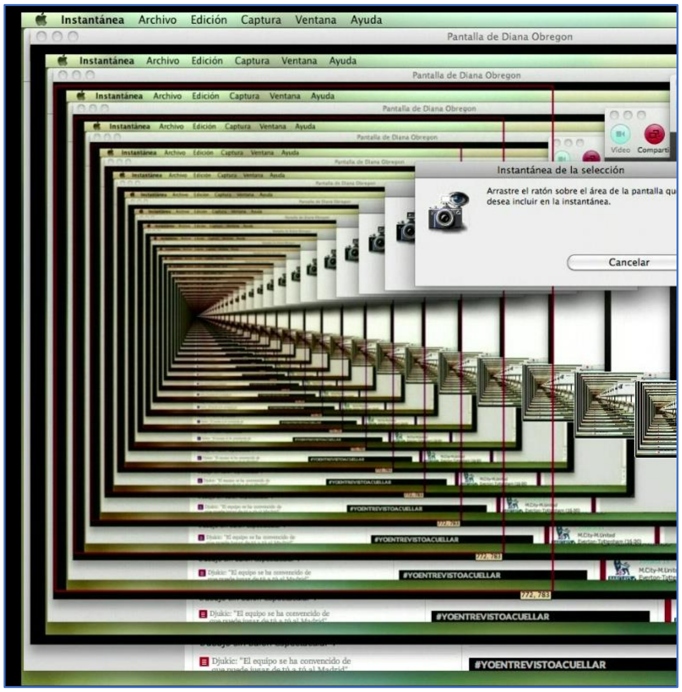
La conclusión es estremecedora: ninguna lista agota los números entre 0 y 1. Es absurdo entonces suponer que podemos enlistar los puntos del intervalo entre 0 y 1. Por lo tanto estamos en presencia de un conjunto infinito más grande que el conjunto infinito de los números naturales.

Podemos afirmar que este es uno de los resultados que marcaron un nuevo rumbo para las matemáticas –ya cerca del siglo XX– pero se constituye en una *obstrucción cognitiva* para los participantes en nuestro laboratorio didáctico. Siguieron cada uno de los pasos para construir el número b pero tenían la sensación de estar *caminando al lado de un barranco*–fue la expresión que empleó una participante.

Estas exploraciones, desde el punto de vista didáctico, dejaron en claro, insistamos, las dificultades de orden cognitivo que se crean ante los participantes cuando transitan de unas ideas que prolongan otras previas con las que tienen un buen nivel de familiaridad o ideas nuevas que pueden ser entendidas con lo que hemos llamado inteligencia sensoriomotriz–experiencias corporizadas aún si ya están representadas simbólicamente. *Se enfrentaron con dificultades matemáticas que no (siempre) pudieron superar*.

Los nuevos conceptos tienen un aura más abstracta y sobre ellos se razona reconociendo que hay que seguir un camino marcado por las definiciones, pues estas son nuestra guía en el camino deductivo. Ahora bien, lo abstracto y lo concreto son relativos a la persona que intenta conocer: no son cualidades intrínsecas al conocimiento sino al conocer de la persona. Vimos que Cantor necesitó *definir* lo que iba a entender por conjunto infinito; sin esa definición no habría podido *demostrar* que el intervalo [0, 1] representaba un infinito mayor que el del conjunto de los números naturales...y esto era así…aunque él no lo creyera. Finalicemos esta sección con la ilustración 1.

Ilustración 1



3.3 Una perspectiva reiterativa

Iniciando el siglo XX, el matemático norteamericano J. Pierpont publicó un trabajo: *On the Arithmetization of Mathematics* en el que explicaba el impacto extraordinario que él consideraba que tendría el *proceso de aritmetización* en las matemáticas. Ese proceso había causado una transformación tan profunda en el Cálculo que ya costaba trabajo reconocer esa disciplina en su nuevo estado. En realidad, aunque se seguía tratando con funciones, derivadas, integrales y demás ideas cuyos nombres eran familiares, se estaba en presencia de una nueva disciplina. Nueva porque sus métodos de validación y la manera de conceptualizar los términos —cuyos nombres resultaban familiares, era distinta. A lo largo de su artículo, Pierpont muestra un entusiasmo mayúsculo por el nivel de rigor deductivo que ofrecía la nueva versión de las matemáticas y afirma que los resultados obtenidos *son los más sólidamente establecidos en el amplio espectro del conocimiento humano*. Pero él mismo se encarga de lanzar una advertencia que llama a la prudencia pues a continuación añade: sin embargo, el precio que hay que pagar por esa claridad meridiana es enorme y consiste en *la total separación del mundo de [nuestra intuición y] nuestros sentidos*.

Se ha ganado, reflexiona Pierpont (1899), claridad lógica con el paso de un cálculo basado en la continuidad geométrica a un cálculo (análisis) aritmetizado, pero en el camino hemos creado una fractura. Esa preocupación final revela una inquietud por la enseñanza, sin duda, más allá del entusiasmo que su educación alcanzó en Europa. Pierpont tuvo una destacada trayectoria como profesor en la universidad de Yale, a su regreso de Europa. Seguramente sintió en sus clases las dificultades de sus estudiantes al intentar apropiarse de la versión aritmetizada del cálculo (*análisis real* es el nombre usual) y confrontar esa situación con al cálculo intuitivo.

Las inquietudes didácticas de Pierpont no eran un caso aislado. Felix Klein ya había sido claro en su interés por el mejoramiento de la enseñanza. Escribió una obra en tres volúmenes bajo el título general de *Matemáticas Elementales desde un Punto de vista Superior* —publicados recientemente por Springer-Verlag en una nueva traducción al inglés.

Una preocupación permanente de Klein era la manera de lograr que en la educación matemática se lograra un diálogo adecuado entre los niveles universitarios y la educación secundaria. Para eso, se esforzó en el diseño de planes de estudio para los profesores de enseñanza secundaria teniendo en cuenta lo que llamó *la doble discontinuidad* (p. 1, vol. 1). Con ello se refería básicamente a la ruptura que había entre la educación que recibían los profesores en la universidad y lo que tenía lugar cuando regresaban a enseñar al nivel secundario. Entonces, podrían intentar *trasladar* mecánicamente lo que habían estudiado en la universidad con los efectos negativos que podemos imaginar. O bien, olvidar lo que habían estudiado en la universidad y regresar a su trabajo como si nunca hubiesen asistido a la universidad.

Ambas alternativas, que aún hoy tienen lugar, son contraproducentes. De acuerdo con Klein, había que trabajar para que las presentaciones intuitivas, informales y las presentaciones de carácter formal se encontraran en un *espacio de conciliación*. Cuando Klein escribe “desde un punto de vista superior” en el título de su obra se refiere a cómo la autonomía del profesor que le permite *reconocer* el germen de una idea que posteriormente será importante. No para desarrollarla prematuramente, desde luego, sino para darle un tratamiento valioso por sí mismo a esa idea tal que si el estudiante continúa por ese camino, podrá en el futuro servirle de fundamento.

En otras palabras, el profesor debe estar capacitado para reconocer la profundidad de una idea y estar en condiciones de desarrollar una estrategia didáctica en concordancia con el nivel en el que desempeña su trabajo profesional. Hoy en día, su obra puede verse como un ejemplo de lo que se denomina *conocimiento matemático del profesor* y también, como complemento inseparable, *conocimiento pedagógico* del profesor (por ejemplo, véase *Mathematical Knowledge in Teaching***,** editado por Tim Rowland and Kenneth Ruthven, 2001). Esto nos lleva a afirmar, casi como una síntesis, que, si bien el profesor debe saber matemáticas, c*ómo las sabe* no puede ignorar *a quién* se pretende enseñarlas. Ese es el sentido de la expresión “conocimiento matemático del profesor”: tener un conocimiento que se enseña que está controlado por un conocimiento del tema que permanece implícito (ante los ojos de los estudiantes) pero que es explicito para el profesor durante su trabajo pedagógico y durante la planeación de sus actividades.

Usando un término familiar hoy en día, diríamos que ese conocimiento del profesor que permanece "callado" es como parte integrante de su GPS profesional. Con él se orienta en la complejidad del conocimiento.

En su artículo Klein (1896), *The Arithmetizing of Mathematics* fija su posición sobre "el vaivén entre la intuición y el rigor". Allí recuerda que, aunque Gauss pertenecía a una generación que había introducido gradualmente un espíritu más crítico dentro del quehacer matemático empleaba su *intuición del espacio* como base de sus demostraciones.

Digamos que, para Klein, la historia de las ideas era una componente importante de su reflexión educativa. Sobre Gauss añade que éste no consideraba necesario argumentar críticamente sobre la validez de la proposición: *si una función continúa definida en un intervalo cerrado [a, b] cambia de signo, es decir, si f(a)*f(b)<0, entonces debe existir c entre a y b tal que f(c)=0*. Este enunciado conocido como *teorema del valor intermedio*, se considera una pieza fundamental de los cursos de análisis matemático y su demostración se apoya en el principio de continuidad (o completez) aritmética. Sin embargo, su contenido intuitivo lo hace plausible. Klein es explícito en su posición educativa. Afirma en el artículo mencionado que "*No respaldo que la ciencia aritmetizada sea la esencia de las matemáticas" (p.242).*

Viniendo de un matemático que había incursionado exitosamente en temas de la mayor abstracción y complejidad, esta afirmación no podía tomarse a la ligera. Ante la fuerza que ya había tomado en los últimos años del siglo XIX el programa de rigor aritmético Klein parecía lanzar una voz de alerta para que no se olvidara que las matemáticas tenían un sustrato intuitivo fundamental. Líneas más adelante (mismo artículo) afirma: *"Debo ser muy enfático al afirmar que no es posible tratar a fondo las matemáticas* *exclusivamente mediante el método deductivo, sino que aún hoy en día, la intuición tiene su provincia especial."*

Klein entendía que los problemas a los que se enfrentaba la educación no dependían exclusivamente de un tratamiento sensible de los contenidos matemáticos. En el artículo de 1896, afirma:

> La psicología moderna distingue entre nuestras capacidades visuales, motoras y auditivas; la intuición matemática está más cercana a las capacidades visuales y motoras y el razonamiento lógico a lo auditivo" (p.247).

Podría decirse hoy, que Klein fue pionero en el estudio de la cognición matemática enfatizando la necesaria vinculación entre el entendimiento intuitivo y el formal derivado de la aritmetización de las matemáticas. La toma de conciencia sobre la tensión entre intuición y formalismo en el seno de la cognición (matemática) pasaba por los cambios conceptuales que Klein veía ante sí con respecto a la naturaleza del conocimiento; parecía que el impulso hacia la organización deductiva dejaba atrás el método inductivo/empírico como fuente del conocimiento matemático.

A Klein le preocupaba sobremanera, y nos preocupa hoy, que hubiese una grieta que separase el desarrollo de las matemáticas del pensamiento matemático que se instalaba en el salón de clases. Por ello volvía a la historia de las matemáticas como una oportunidad de reflexionar sobre la constitución del conocimiento y tal vez hallar algunas claves que permitieran aliviar los problemas de la enseñanza. En la introducción al volumen I ya mencionado puede hallarse la siguiente reflexión:

> El proceso normal de desarrollo de una ciencia es el siguiente: las partes

superiores y más complejas se tornan gradualmente más elementales debido al incremento de la capacidad para comprender los conceptos y a la simplificación de su exposición. La escuela tiene entonces la tarea de verificar, debido a los requerimientos de la educación general, si la introducción de la versión ahora elemental de los conceptos en el currículo es necesaria. (p. ix, 1908,2017)

Estas líneas nos hacen ver que subyacente al proceso de desarrollo histórico de las matemáticas se encuentra un proceso de reestructuración, de *compresión* (no comprensión) de los conceptos y teorías. Bajo el efecto de este proceso emerge una nueva arquitectura del contenido matemático. Entonces ¿*cómo conciliar esta nueva arquitectura con las demandas de la educación*?

Klein desarrolla su concepción didáctica sin dejar de señalar lo que nosotros hoy llamaríamos el *teorema de existencia del estudiante*, en otros términos, el conocimiento matemático del profesor debe *fluir* condicionado por su conocimiento didáctico. Por primera vez, de manera prolija, están expuestas en este volumen I, los elementos de una pedagogía (nos atrevemos a pensar que muy probablemente Klein estaba concibiendo las líneas generales de una didáctica) que no ignora el carácter multidimensional de esta disciplina: lo simple desde el punto de vista lógico no coincide necesariamente con lo familiar o natural desde el punto de vista intuitivo.

Klein rescata la *inseparabilidad* de los procesos heurísticos/inductivos del estado final de un desarrollo que se presenta organizado deductivamente. En el momento histórico cuando Klein escribió su obra, señalaba la pertinencia de tomar en cuenta futuros estudios sobre la cognición con el fin de refinar sus intuiciones sobre la naturaleza del proceso enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. Hay una insistencia en este acercamiento entre la enseñanza y los estudios sobre la cognición. Para Klein, es en el descubrimiento y el desarrollo del cálculo infinitesimal cuando el proceso inductivo, construido previamente a los pasos lógicos, juega un gran papel: *La ayuda heurística se traduce aquí a menudo como percepción sensorial* (p. 226, vol I).

La sensibilidad pedagógica mostrada por Klein ha encontrado eco en las investigaciones modernas relativas a la naturaleza corporizada (embodied) de las nociones matemáticas básicas (véase, por ejemplo, Lakoff y Nuñez, 2000).

René Thom, matemático y epistemólogo francés expresó de modo más conciso este dilema entre el rigor y el entendimiento intuitivo. En 1972, en su conferencia plenaria del ICME afirmó que la enseñanza de las matemáticas no tenía, no debería tener el rigor como punto de partida sino la *elaboración del significado* y el modo de existencia de los objetos matemáticos. La construcción del significado y los modos de existencia de los objetos matemáticos están profundamente vinculados, vemos entonces una coincidencia, que hay que resaltar, entre Vygodsky, Luzin y Thom con el punto de vista impulsado por F. Klein durante las primeras décadas del siglo XX.

Capítulo 4

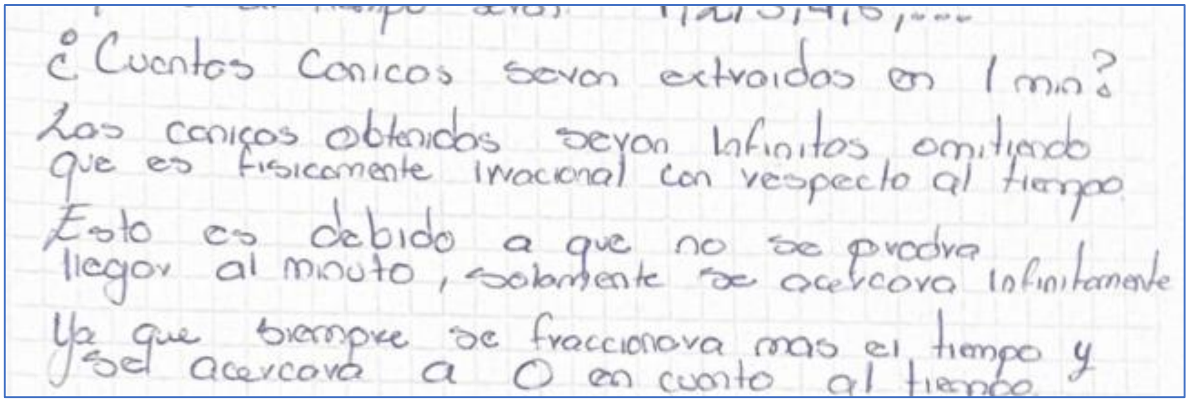
4.1 Primera parte experimental: actual y potencial

Cuando los estudiantes tienen que analizar procesos infinitos que se determinan en un contexto físico, como suele ser el tiempo, se crea una barrera determinada por las características físicas asociadas a los contextos. Esto lo hemos podido observar en el siguiente *experimento*:

Una persona tiene numeradas una colección de pelotas marcadas 1, 2, 3, 4, ... (una colección infinita) y cuenta con un minuto exacto para desarrollar la siguiente actividad: coloca las diez primeras pelotas en un saco y a continuación extrae la marcada con el número 1. Esto le toma la mitad del tiempo disponible (equivalente a un minuto en total). A continuación, deposita el siguiente grupo de diez pelotas y extrae la marcada con el número 2. Esto le toma la mitad del tiempo restante. Continuando, deposita el siguiente grupo de diez pelotas y ahora extrae la marcada con el número tres. Esto le toma la mitad del tiempo que quedaba. El proceso continúa hasta que se agota el tiempo. La pregunta: ¿cuántas pelotas quedan por fuera?

Cuando se les formuló la pregunta más de uno de los estudiantes contestó que el proceso no terminaría porque *nunca se llegaría al minuto*, a pesar de que reiteradamente se les dijo que el minuto se debe cumplir. En esta pregunta la idea de convergencia de la serie que genera la sucesión del tiempo no es simple de entender, pues, aunque explícitamente se dice que el minuto trascurre y se completa el proceso con el que se mide el tiempo que es cada vez la mitad del tiempo restante este es un proceso infinito y la primera intuición que se tiene del concepto de infinito es que *no termina* (figura 18).

Figura 18. Respuesta común entre los estudiantes


¿Cuantos Conicos seran extraidos en 1 min?
Los conicos obtenidos seran Infinitos omitiendo que es fisicamente irracional con respecto al tiempo
Esto es debido a que no se prodra llegar al minuto, solamente se acercara Infinitamente
ya que siempre se fraccionara mas el tiempo y se acercara a 0 en cuanto al tiempo

Solo aquellos estudiantes que logran establecer el puente conceptual para transitar entre *el infinito como un proceso que no termina* y un *conjunto completo* son los que logran responder al cuestionamiento.

Para Heira, uno de los estudiantes de la licenciatura en matemáticas, quien contesta que el número de pelotas que está fuera de la bolsa después de trascurrir el minuto es infinito “igual a los naturales” asegura que necesita dejar de pensar en cómo está trascurriendo el tiempo para poder llegar a esa respuesta. Se puede observar en la transcripción de la conversación entre Heira y Karina (su compañera) cuando le explica que “hay una biyección entre n/10 y los naturales”. Se entiende que con n/10 indica la décima parte de los naturales.

Heira: Creo que el problema ahí es que estas contando los que metes y los que sacas, pero son con cierto tiempo, y cada cierto tiempo vas a meter

Karina: Y al hacerlo muchas veces, pues no le puedes sacar el 10 por ciento a los naturales, por eso si tienen que ser los naturales.

Heira: Pero hay una biyección entre n/10 y los naturales.

Karina: Sí pues sí, pero por eso digo tiene sentido que sean los naturales, porque no se le saca el 10 % a los naturales, pero, no se puede, pero…

La aritmética no funciona igual cuando se trata del infinito. Aunque es común comenzar a construir la idea de cómo funcionan una sucesión o una serie infinita calculando los primeros términos o sumas asociadas y trasladar esas primeras intuiciones a hacia el infinito no es suficiente información para llegar a una conclusión certera e incluso pueda llegar a ser más confuso. Karina identificó que al sacar las canicas se tiene un conjunto que representa el 10% de las que se encontraban dentro de la bolsa, por lo que su primera respuesta fue que las canicas que se habrían sacado, una vez que transcurre el minuto, serían el 10% de las que estaban adentro, pero al tratar de comunicar su respuesta a su compañero ella misma reflexiona y caen en la cuenta de que no tiene sentido decir que *10% del infinito* es la respuesta. A continuación, un extracto de la conversación que mantuvo con su compañera.

> Karina: Es que éstas metiendo 10 y sacas 1. Bueno lo hice yo como 14 veces, entonces metiste 140 (porque las tienes que meter y luego sacas una) y de esas 140 que metiste al final dejaste afuera 14 y 14 es el 10 % de 140.
>
> Heira: ¿Pero en infinito?
>
> Karina: Lo mismo, pero …
>
> Heira: ¿El 10% de infinito?
>
> Karina: O sea, sí son los naturales, *pero no son los mismos naturales* …tiene que ver con los naturales porque estas sacando 1 de cada 10 y lo estás haciendo infinitas veces, porque el tiempo nunca se va a acabar, porque siempre está la mitad, la mitad, le mitad, la mitad…, pero no sé, está raro.

Fue común escuchar frases como “no sé, está raro”, “parece que sí, pero quien sabe”. Los estudiantes de ingeniería o de niveles inferiores en la licenciatura de matemáticas presentaron mayor dificultad para transitar de la idea del *proceso infinito* y el infinito como un conjunto completo.

Los objetos matemáticos llegan a sentirse tan concretos que se puede perder de vista su naturaleza de objetos ideales.

Presentemos ahora otro ejemplo para ilustrar este tipo de dificultades cognitivas. En la discusión que se presenta entre estudiantes de la licenciatura en matemáticas al pedirles que nos dijeran si era posible tener una varilla de acero de longitud π metros exactos, se revelan posturas que defienden que los números irracionales son *idealizaciones teóricas* y aquellas que aseguran poder tener objetos físicos con longitudes igual a números irracionales.

El estudiante Andrés trata de convencer a su compañero que puede obtener una varilla de longitud π si toma como patrón una circunferencia de medio metro de radio exacto, pero su compañero Benjamín no se convence y argumenta que cuando corte la varilla ***cortará los decimales***. A continuación, mostramos un fragmento de la trascripción de la discusión.

> Andrés: Con una circunferencia de radio ½ metro. ¿Cómo calculas el perímetro de un círculo?
>
> Benjamín: Pi (π) por diámetro
>
> Andrés: Para hacer esa varilla de π, agarras un hilito rodeas el circulo (de radio ½) le cortas exactamente donde se junten, extiendes el hilo y con esa medida haces tu varilla de acero.
>
> Benjamín: Pero es que cómo, cuando la cortes *ya valió* (expresión que usa para referirse a que no funciona ese método).

A la conversación se unieron Carlos y Daniel.

Andrés y Carlos: ¿Por qué?

Daniel: Puede haber margen de error

Carlos: No, no, pero porque puedes tener la de un metro

Benjamín: al cortarla vas a *cortar los decimales*

Carlos: Entonces no tendrías ninguna medida exacta

Benjamín: Pues no…

Benjamín no encuentra las palabras adecuadas para defender su punto; él sabe que al realizar algún corte en la varilla...algo ocurrirá, algo tendrá lugar con respecto a la longitud, pero lo expresa con aquello de ***cortar los decimales***: como si la acción física de cortar tuviese una consecuencia sobre un "número teórico" (en nuestra discusión). El estudiante parece mostrar que entiende que dentro de la definición de número irracional se encuentra al concepto de infinito y el sentido de la idealización teórica que involucra, por lo que es para él imposible tener una varilla de longitud π. En el siguiente extracto de la conversación que mantiene Benjamín con Carlos y Andrés se puede ver cómo Carlos cuestiona a Benjamín sobre la posibilidad de hacer una cinta métrica de número irracionales.

Carlos: A ver si hicieras una cinta de números irracionales ¿Por qué no se puede y una de racionales sí?

Benjamín: Es que no puedes medirlo

Carlos: ¿Por qué no?

Benjamín: pues porque no campeón…

Andrés y Carlos argumentan que la forma de establecer una cinta métrica con números enteros y racionales será igual a que se establezca una cinta métrica con números irracionales recurriendo a la vista y a la idea de unir y *cortar con exactitud*. Dejan de lado que los números irracionales se definen justamente como aquellos que no se pueden escribir como el cociente de dos números enteros. Desde luego, se eligió π en la pregunta, pero hubiésemos podido elegir √2.

Andrés: Cortaste la varilla exactamente de un metro ¿no? y puedes cortarlo exactamente dónde termina

Benjamín: Pero no sabes dónde termina

Andrés: Sí, sí sabes porque ya le disté la vuelta

Carlos: Cortaste la varilla y luego hiciste la circunferencia de un metro de diámetro

Andrés: Si pudiste cortar la varilla de un medio, también puedes cortar ahí (hace un gesto con la mano formando un círculo), porque lo estás viendo ahí donde termina.

Benjamín: Pero ¿cómo?

Andrés: *Porque lo estás viendo*, ahí, ¿y cómo vas a cortar la varilla de un metro? Viendo donde es un metro, ahí cortas, igual puedes cortar π.

Benjamín: No, no puedes

A pesar de la insistencia de sus compañeros Benjamín estaba seguro de que no era posible tener de manera física una longitud igual a un número irracional. La discusión dentro del salón de clase llevó a la búsqueda de los detalles físicos que podrían determinar si sería posible tener una longitud del tamaño de un número irracional. Por ejemplo, Daniel expresa lo siguiente después de que Carlos asegura que puede cortar la varilla de longitud igual a π:

Carlos: Si puedes cortar un metro exactamente, entonces también puedes cortar π

Daniel: Pero si lo quieres medir no se puede, porque imagina que mides 3.159 y otro poquito, entonces avanzas otro poquito, pero no es ese, es otro poquito y avanzas, pero no es ese ¿y cuando vas a acabar? Agarrando 3.159 (hace un ademán con la mano como para indicar que hay más). Por eso no puede ser como dice Andrés viéndolo con el circulo, **pero qué pasa si lo ves como número** ¿Cuándo acabas? *No puedes medir un irracional.*

Incluso surgió el ejemplo de una varilla de acero de longitud raíz de 2, la cual construyen con la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos midan un metro de longitud. Aquellos estudiantes que defienden la postura de no poder tener un objeto físico de longitud igual a un número irracional cuestionaron a sus compañeros respecto a cómo asegurar que los cortes son exactos si las herramientas que se usan para cortar tienen cierto espesor y eso llevaría a la incapacidad de cortar exactamente donde se completa el numero irracional.

Benjamín: A ver tráeme la varilla que mida raíz de dos, puedes traer una de metro, pero ¿de raíz de dos?

Andrés: Tú sabes que la hipotenusa de un triángulo rectángulo de catetos igual a uno es de 2 *porque tú tienes herramientas matemáticas que te prueban eso*. Tú no la puedes medir porque no tenemos la herramienta necesaria.

Benjamín: ¿Con cuál herramienta la puedes medir?

Andrés: Que no la pueda medir no quiere decir que no esté ahí

Daniel: ¿y para que utilizas esto en la vida real?, cuando tú quieres unir esto, no mides el pedazo, lo unes y ya.

Carlos: Por eso ¿pero ¿cuánto va a medir?

Daniel: No te interesa, ¿para qué?

Andrés: Pero que no te interese no quiere decir que no se pueda obtener

Benjamín: No, no puedes

…

Andrés: Esta bien. Haz dos varillas de un metro, las acomodas a noventa grados. Que, si no puedes obtener una varilla de raíz de dos, dudo que puedas obtener un ángulo de noventa, pero bueno, supongamos que lo obtienes. Entonces tienes un triángulo rectángulo de catetos uno y uno. ¿Cuánto mide del vértice de arriba al de abajo, el que se va a formar? Raíz de dos ¿no?, entonces unes esas dos puntas con otra varilla y la cortas exactamente donde acaben ¿Cuánto va a medir esa varilla?

Daniel: Va a medir el error que tenga aquí (se levanta a señalar en el dibujo del triángulo). Esta cosa va a tener un grosor y va a medir casi raíz de dos, 1.4142 así, o sea todo lo de acá (señala donde irían los decimales después de 42) o sea todo lo que esta acá ya no lo va a medir *por el error que se perdió aquí*.

Carlos: Pero por qué puedes obtener de un metro y porque de raíz de dos no. Debe ser la misma lógica para los números racionales que para los irracionales.

Daniel: Pues porque un metro es algo cerrado y el otro es abierto

El hecho de no poder tener un objeto con la longitud de un número irracional no determina la inexistencia de dicho objeto.

Benjamín: Ya no va a ser el número completo

Carlos: Es lo mismo ¿cómo sabes que va a ser exacto? Si dices que es exacto estas diciendo que no existen los números irracionales y en la métrica usual tienes puros números racionales

Benjamín: No, *sí existen los números irracionales, pero no los puedes traer aquí como una medida.* El numero si existe, los irracionales si existen, pero no puedes traérmelo aquí como diciendo, ah mira esto mide un número irracional...no se puede.

Carlos: Si ahí se está viendo, es algo físico.

Benjamín: No al dar un número como una medida ahí van a seguir los decimales infinitos.

Carlos: Pero ahí porque se ve, por las herramientas que tienes de medición están limitadas

Benjamín: Pero entonces ¿tienen una herramienta que te corte exactamente la longitud de un número irracional?

Carlos: No

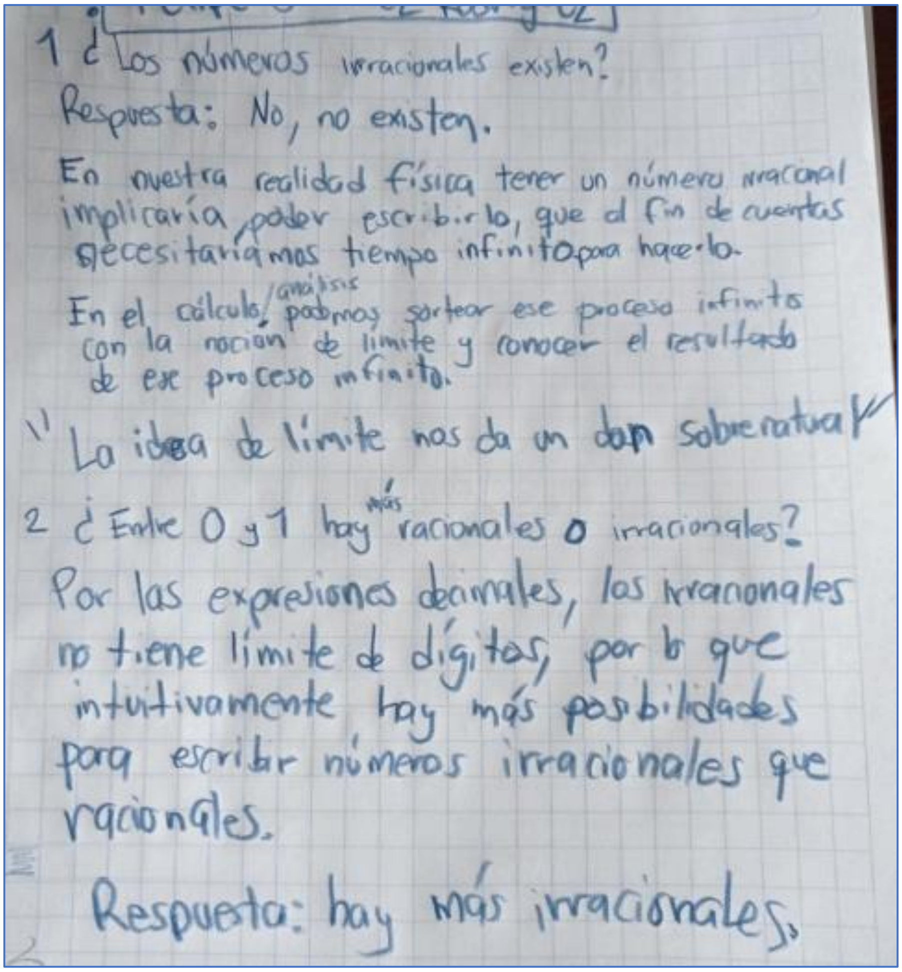
Benjamín: ¿entonces, como lo vas a cortar?

Carlos: No, porque no es tan exacto la medida de medición que tienen es…

Benjamín: Cortándola vas a tener ya una medida y no van a seguir los infinitos decimales.

En otra entrevista que se le hizo a otro grupo de estudiantes respecto a la existencia de los números irracionales identificamos algunas respuestas que van en el sentido que las que se originaron con la discusión de la varilla de longitud pi. En seguida mostramos algunos pasajes.

Figura 19.Respuestas de Sergio en relación con los números irracionales


1 ¿Los números irracionales existen?
Respuesta: No, no existen.
En nuestra realidad física tener un número irracional implicaría poder escribirlo, que al fin de cuentas necesitaríamos tiempo infinito para hacerlo.
En el cálculo/análisis podemos sortear ese proceso infinito con la noción de límite y conocer el resultado de ese proceso infinito.
"La idea de límite nos da un don sobrenatural"
2 ¿Entre 0 y 1 hay más racionales o irracionales?
Por las expresiones decimales, los irracionales no tiene límite de dígitos, por lo que intuitivamente hay más posibilidades para escribir números irracionales que racionales.
Respuesta: hay más irracionales.

Nota: Se agrega la transcripción de lo escrito en la figura 19.

1. ¿Los números irracionales existen?

Respuesta: No, no existen. En nuestra realidad física tener un número irracional implicaría poder escribirlo, que al fin de cuentas necesitamos tiempo infinito para hacerlo.

En el cálculo/análisis podemos sortear ese proceso infinito con la noción de límite y conocer el resultado de ese proceso infinito.

"La idea de límite nos da un don sobrenatural"

2. ¿Entre 0 y 1 hay más racionales o irracionales?

Por las expresiones decimales, los irracionales no tienen límite de dígitos, por lo que intuitivamente hay más posibilidades para escribir números irracionales que racionales.

Respuesta: Hay más irracionales.

Las respuestas de **Sergio,** nuestro estudiante, (figura 19) llaman la atención, pues en una misma página escribe que los números irracionales no existe y asegura que hay más números irracionales que racionales en un intervalo especifico. El ***modo de existencia*** concebido por él está relacionado con la capacidad de escribir los decimales "completos" de los números es decir que está sujeto a una representación simbólica *pero física*, producida en el mundo cotidiano. La *imagen conceptual* que se refleja en esa primera respuesta no identifica al número irracional como un objeto terminado sino como un proceso incompleto.

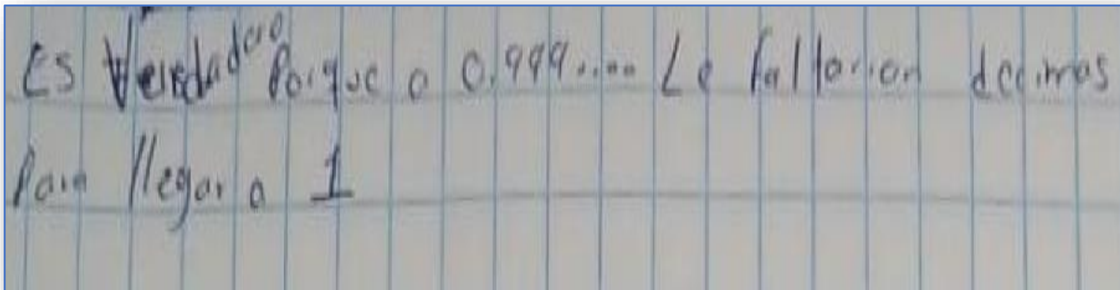
En la respuesta de la segunda pregunta al afirmar que hay más números irracionales que racionales entre cero y uno muestra que el ver la expansión decimal de los irracionales como ese proceso incompleto le invita a poder escribir más números irracionales que racionales en el intervalo. En esta segunda respuesta el estudiante no considera la imposibilidad de escribir completa su expansión decimal, lo que había mencionado antes, o simplemente no considera su existencia. Es decir que "en teoría" se pueden escribir más irracionales incluso si no existen en *"nuestra realidad física".* La posibilidad de ir escribiendo más dígitos en una expresión decimal de un número entre cero y uno (en realidad entre dos números cualesquiera) lleva a pensar a Sergio que hay más irracionales que racionales entre 0 y 1. Sin embargo, esta conclusión contradice su primera respuesta sobre la inexistencia de los irracionales. Sin embargo, *podemos interpretar esta "contradicción" como una manifestación de la tensión entre infinito potencial e infinito actual*.

El de los irracionales es un terreno menos familiar que haber preguntado por los números naturales: ¿son un infinito en potencia o un infinito en acto? De alguna manera esta disyuntiva, presente en la respuesta de Sergio estaba presente en el diálogo de Galileo cuando no puede decidir si el conjunto de los pares es del *mismo tamaño* que el conjunto total de los números naturales. La respuesta de Galileo es que ***no hay comparación entre conjuntos cuando estos son infinitos***. Sergio nos dice por un lado que no existen los irracionales porque no se pueden completar sus expresiones decimales y un momento después que son más numerosos que los racionales precisamente porque hay más libertad para generar sus expresiones decimales. No es un "error". Su pensamiento está sometido a una tensión entre "no puedo escribir completa su expresión decimal" y "tengo más libertad para escribir los dígitos de la expresión de un irracional". Tensión entre la imposibilidad temporal y la posibilidad, teórica, de expresar un desarrollo infinito. En otros términos, su pensamiento está tensionado entre la imposibilidad temporal y la posibilidad teórica. Siempre una tensión…

4.2 Ideas ingenuas del infinito

Cuando se les preguntó a los estudiantes: ¿Es 0.9999999… estrictamente MENOR que 1? Emergieron puntos de vista contrapuestos. Aunque parece una pregunta simple genera respuestas que no dejan de sorprender ya sea por cómo el estudiante *decodifica* la notación al interpretar la pregunta o por la dependencia de recurrir a un proceso de aproximación que, en este caso, no pareciera terminar (Figura 20). Recordemos que la notación "captura" un concepto que tiene una historia, que allí está depositado el pensamiento de muchas generaciones. Pasar desde la *diagonal* del cuadrado unitario (cantidad inconmensurable, sin representación numérica) al *número* irracional involucra la emergencia de la notación decimal. Esto tiene una larga historia. En cierto momento, en el siglo XVI, M. Stiefel sostenía que los irracionales (ya se tenía la notación decimal) eran una especie de "nube del infinito" ya que no podía determinar con precisión su expresión decimal. Cosa que sí se podía hacer con los racionales. Reflexionando sobre estos asuntos tuvimos la intuición que esta pregunta, muy socorrida, de todas formas, arrojaría luz sobre el infinito.

Figura 20. Respuesta de Eduardo a la pregunta ¿Es 0.9999… estrictamente menor que 1?

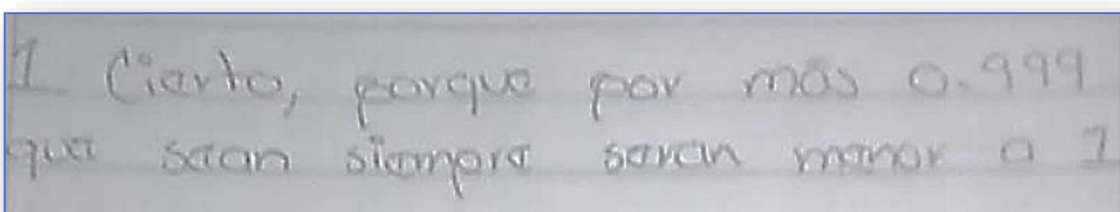


Nota. Se agrega la transcripción de lo escrito en la figura 20

Es Verdadero porque a 0.999… le faltan decimas para llegar a 1

Esta respuesta refleja que la expresión 0.999...es concebida como *estática*. No se identifica que hay un proceso infinito *debajo* de la notación. Los estudiantes que parecían tener menos experiencia con el manejo de expresiones matemáticas contestaban de manera simple, sin darle a los puntos suspensivos de la expresión decimal periódica el significado del proceso infinito que le corresponde (figura 21).

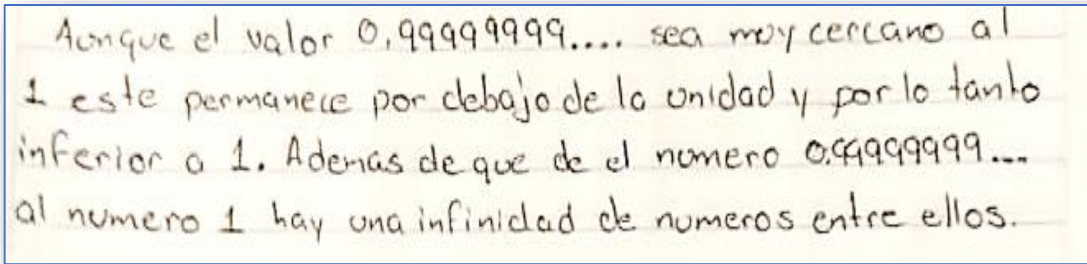
Figura 21.Respuesta de Carlos a la pregunta ¿Es 0.9999… estrictamente menor que 1?



Nota. Se agrega la transcripción de lo escrito en la figura 14.

Cierto, porque por más 0.999 que sean siempre serán menor a 1

Figura 22.Respuesta de Pancho a la pregunta ¿Es 0.9999… estrictamente menor que 1?


Aunque el valor 0,99999999.... sea muy cercano al
1 este permanece por debajo de la unidad y por lo tanto
inferior a 1. Ademas de que de el numero 0,99999999...
al numero 1 hay una infinidad de numeros entre ellos.

Nota. Se agrega la transcripción de lo escrito en la figura 22.

Aunque el valor 0.99999999…. sea muy cercano al 1 este permanece por debajo de la unidad y por lo tanto inferior a 1. Además de que del número 0.99999999… al número 1 hay una infinidad de números entre ellos.

En la figura 22 se muestra que, al igual que las respuestas anteriormente expuestas, que no se perciba el proceso infinito que está sugerido por la notación. No ha resultado sencillo para los estudiantes extraer (decodificar) de la notación 0.999… el proceso dinámico, el proceso infinito subyacente. Se concibe el número 0.999… como estático. Eso puede explicar por qué queda *oculto* el mensaje: "continúe añadiendo más nueves e interprete esa representación como: $9\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{10^k}=1$. Esto es, como la suma de una serie geométrica.

Hasta ese momento, la experiencia más arraigada entre los estudiantes era que la expresión 0.999…indicaba que hay un proceso de aproximación, pero NO de toma de límite. En otras palabras: La imagen mental que parece tener el estudiante es la de una sucesión infinita de números decimales y aunque no alcanza a concretar la idea de límite, de aproximación: *su intuición se instala en la aproximación dando la espalda al infinito potencial subyacente en la representación decimal.*

Algo parecido sucede con el estudiante que responde haciendo referencia a números infinitamente pequeños (figura 23). En esa respuesta el estudiante identifica el número n al cual califica como infinitamente pequeño.

Figura 23.Respuesta de Sofía a la pregunta ¿Es 0.9999… estrictamente menor que 1?

R: considero que $0.999999999 \ldots < 1$ ya que existe un número n infinitamente pequeño tal que $n + 0.999999999 \ldots = 1$

La respuesta no deja lugar a dudas: existe la certeza sobre la existencia de números infinitamente pequeños. La siguiente respuesta (figura 24) también indica que se concibe (i*magen conceptual*) la existencia de infinitésimos.

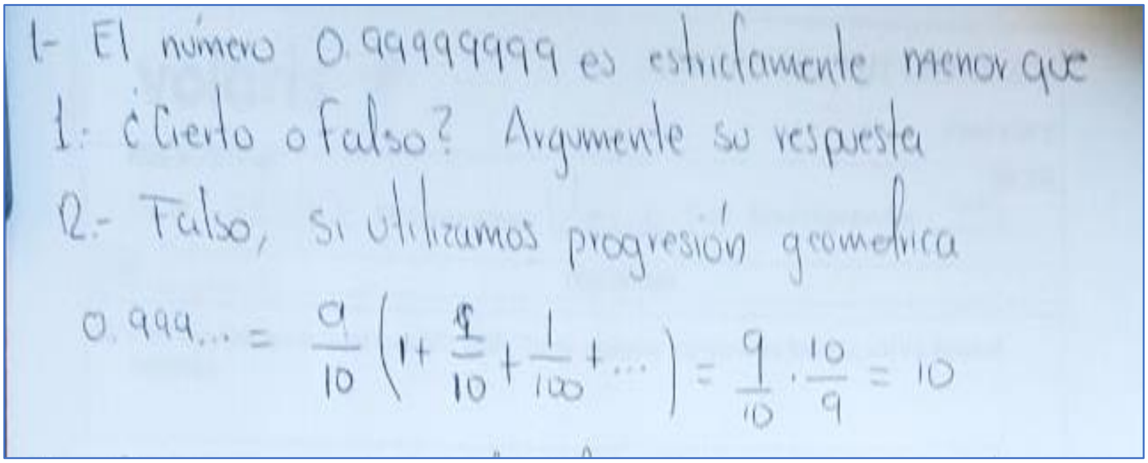
Es de lamentar que haya cometido un error aritmético al indicar el valor final igual a 10 en lugar de 1. No sabemos cómo hubiese enfrentado su convicción previa (“falso”) con la contundencia de la respuesta aritmética

Figura 24.Respuesta de Paty a la pregunta ¿Es 0.9999… estrictamente menor que 1?

Pregunta 1: si es menor que uno porque aunque tenga muchos decimales a su derecha siempre será una cantidad aunque sea mínima de 1

Es de lamentar que haya cometido un error aritmético al indicar el valor final igual a 10 en lugar de 1. No sabemos cómo hubiese enfrentado su convicción previa (“falso”) con la contundencia de la respuesta aritmética (figura 25).

Figura 25.Respuesta de Silvia a la pregunta ¿Es 0.9999… estrictamente menor que 1?



Nota. Se agrega la transcripción de lo escrito en la figura 25.

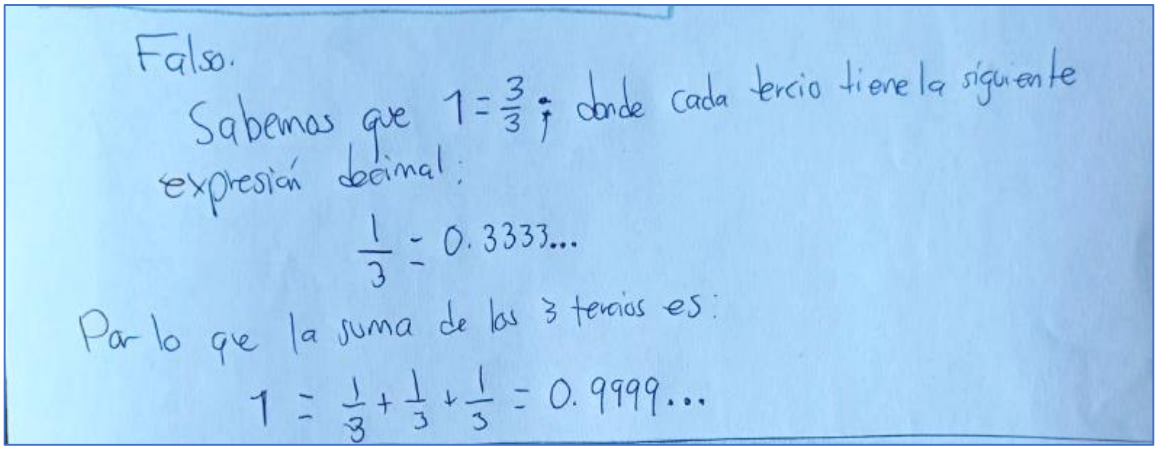
1- El número 0.99999999 es estrictamente menor que 1. ¿Cierto o falso?

R.- Falso, si utilizamos progresión geométrica

$0.999\ldots = \frac{9}{10}\left(1+\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\cdots\right) = \frac{9}{10} * \frac{10}{9} = 10$

La respuesta del estudiante, que se muestra en la figura 26, se apoya en su experiencia previa. Hay una diferencia palpable con aquellos quienes muestran menos experiencia matemática y que no logran ver el proceso de aproximación infinita (límite) señalado con los puntos suspensivos. En estos casos, como hemos visto aparecen ideas vinculadas a los infinitésimos. Su intuición los lleva a sentir la necesidad de completar con algo, aunque sea muy pequeño.

Figura 26. Respuesta de Pancho a la pregunta ¿Es 0.9999… estrictamente menor que 1?


Falso.
Sabemos que $1 = \frac{3}{3}$; donde cada tercio tiene la siguiente expresión decimal:
$\frac{1}{3} = 0.3333\ldots$
Por lo que la suma de los 3 tercios es:
$1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 0.9999\ldots$

Nota. *Se agrega la transcripción de lo escrito en la figura 26.*

Falso. Sabemos que $1 = \frac{3}{3}$; donde cada tercio tiene la siguiente expresión decimal.

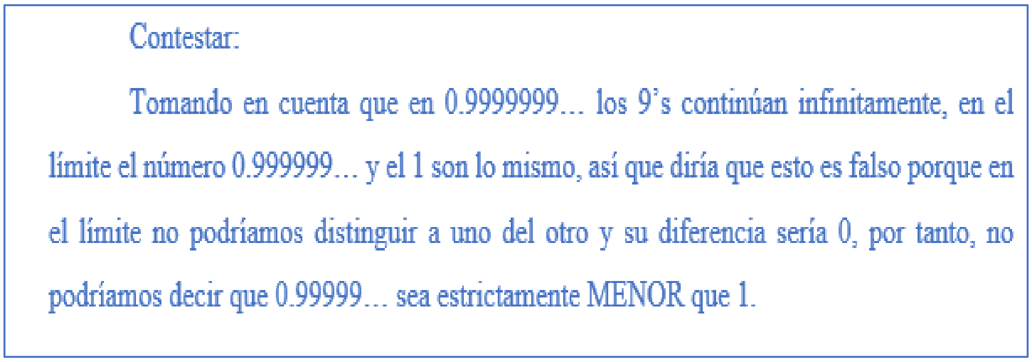
$$\frac{1}{3} = 0.333\ldots$$

Por lo tanto, la suma de los 3 tercios es:

$$1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 0.9999\ldots$$

La respuesta que se muestra en la figura 27 es una idea que surge de la experiencia de una *aritmética finita*, digamos, en la cual prácticamente es imposible distinguir diferencias tan pequeñas. Por ello, recurrimos al *redondeo* de cantidades.

Figura 27.Respuesta de Sergio a la pregunta ¿Es 0.9999… estrictamente menor que 1?

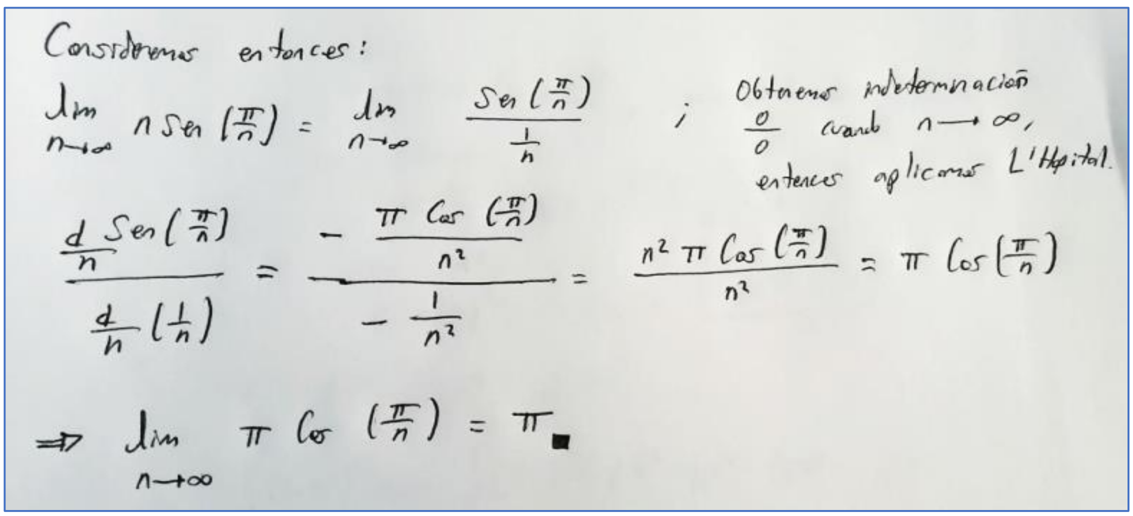

Contestar:

Tomando en cuenta que en 0.9999999… los 9's continúan infinitamente, en el límite el número 0.999999… y el 1 son lo mismo, así que diría que esto es falso porque en el límite no podríamos distinguir a uno del otro y su diferencia sería 0, por tanto, no podríamos decir que 0.99999… sea estrictamente MENOR que 1.

Cuando se les pidió a los alumnos: *Demuestre que el área de la circunferencia de radio uno es π usando polígonos inscritos.*

Nuestro estudiante Pablo sabe que el área de la circunferencia es π por la experiencia matemática del cálculo de áreas y recurre a la regla de L´Hopital para probarlo (figura 28). Él visualiza la sucesión como una función continua (lo cual, estrictamente, es incorrecto), sin embargo, la idea de que la sucesión "viaja" sobre la función correspondiente es muy recurrente y puede generar un vínculo más cercano entre la imagen y la definición conceptuales.

Figura 28. Respuesta Pablo para demostrar que el área de la circunferencia de radio uno es pi usando polígonos inscritos.



Nota. Se agrega la transcripción de lo escrito en la figura 21.

Consideremos entonces:

$$\lim_{n\to\infty} nsen\left(\frac{\pi}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{sen\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\frac{1}{n}} \quad ;$$

$$\frac{\frac{d}{n} sen\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\frac{d}{n}\left(\frac{1}{n}\right)} = \frac{\frac{-\left(\pi\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\right.}{n^2}}{-\frac{1}{n^2}} = \frac{n^2\pi\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)}{n^2} = \pi\cos\frac{\pi}{n}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \pi\cos\frac{\pi}{n} = \pi$$

Obtenemos indeterminación

$\frac{0}{0}$ cuando $n \to \infty$

Entonces aplicamos L'Hopital

Pablo es “insensible” a la naturaleza de la variable (extiende al ámbito de lo continuo el contexto discreto de la actividad) y aunque la idea de fondo que tiene el estudiante es buena desde el punto de vista del rigor es *incorrecta* —pues no es posible “derivar” una sucesión.

Figura 29. Respuesta de Sonia a la pregunta ¿Dónde hay más números en el intervalos [0,1] o en el intervalo [0, 0.000…(un billón de ceros) 1]?

> Entendemos la cantidad de números como el número de elementos en cada intervalo. Podemos ver que $[0,0.0000\ldots 1] \subseteq [0,1]$ y esto podría sugerirnos que el intervalo [0,1] tiene mayor número de elementos, sin embargo, en ambos intervalos, la cantidad de elementos es infinita, con lo que también sería posible que tuvieran la misma cantidad de elementos.

La respuesta expone Sonia (figura 29) de alguna manera ese “rompimiento de la intuición” que se presenta al hablar del infinito actual. De inicio presenta la idea de que una cantidad de elementos contenida en otra sería más pequeña, pues es una sugerencia “natural”, de que algo que puede contener a otra cosa sea más grande. Esta es una idea que adquirimos de la experiencia física (finita) en nuestra vida cotidiana. La experiencia recoge esta intuición en la expresión “el todo es siempre mayor que una parte”. Al comparar las longitudes de dos intervalos automáticamente creemos que mayor longitud implica mayor número de elementos.

Cuando Sonia se percata que ambos intervalos contienen una infinidad de puntos concluye que deberían tener igual número de elementos. No busca hacer comparaciones entre conjuntos infinitos. Respuesta que nos lleva de vuelta a la discusión que plantea Galileo en el pasaje referido a los subconjuntos de números naturales y sus correspondientes cuadrados.

El razonamiento intuitivo (sensoriomotriz) abre una ruta para para lograr, mediante su organización inicial, una versión más rigurosa, más formal de concepciones matemáticas que se tornan eventualmente en nuevos conceptos. Es el caso del “número de elementos” de un conjunto. Allí rompemos con la idea de que *el todo es mayor que cada una de sus partes*.

Capítulo 5

La experiencia con la idea de límite de sucesiones

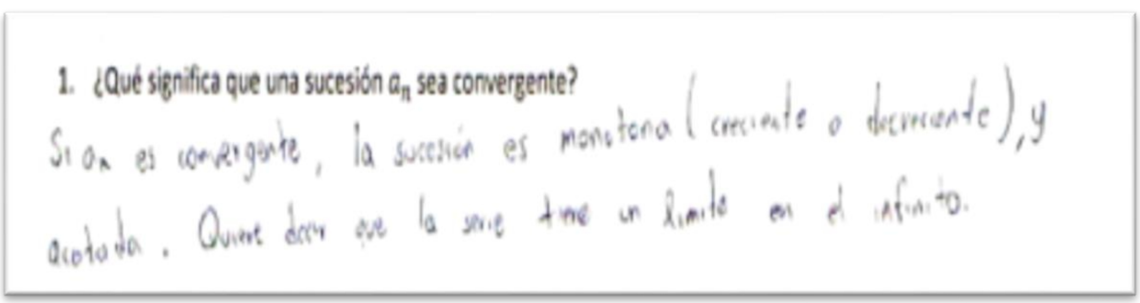
El vaivén entre lo intuitivo y lo formal puede generar dificultades a las cuales se enfrentan los estudiantes para entender y manipular los objetos y conceptos matemáticos. En particular, se genera una tensión entre la interpretación desde el polo intuitivo al polo formal. Cuando se dice que una sucesión (a_n) converge a L, intuitivamente se entiende esta expresión como una descripción de un fenómeno de acercamiento gradual pero sostenido de a_n al límite L. Sin embargo, la definición formal dice: *"Dado r>0 existe N, número natural, tal que si m>N entonces la distancia entre L y a_m es menor que r"*. ¿Cómo traducir la descripción intuitiva de acercamiento casi físico de a_n al número L a esta declaración formal en la cual intervienen los cuantificadores existencial y universal? Se produce una especie de ambigüedad cognitiva cuando se introduce la distinción entre la *imagen conceptual* y la *definición formal* (Tall, D y Vinner, 1981).

En la situación que acabamos de comentar líneas arriba, la idea dinámica de acercamiento permanente a un límite L corresponde a la imagen conceptual de límite de una sucesión. Podríamos imaginar (o ver sobre una pantalla digital) que una circunferencia es el límite de la sucesión de polígonos regulares que se van "acercando" cada vez más a la circunferencia, que cada vez se "parecen" más a ella. Esta situación dinámica ilustra lo que ocurre en general: de una imagen de nuestra cognición sensoriomotriz a la definición formal. Sin embargo, la formalización ignora, si se me permite decirlo así, el nivel sensoriomotriz y se concentra en esa parte de la estructura cognitiva que es la parte lógico–formal. Debemos recordar que lo más simple desde el punto de vista lógico no coincide necesariamente con lo más simple desde el punto de vista intuitivo. El caso de límites, en efecto, no coinciden.

Marius Ghergu (2017) en su investigación destaca cuatro interpretaciones del concepto de límite de una sucesión que pueden generar conflictos frente a la definición formal. Trabajando con los estudiantes hemos podido reconocer la emergencia de algunas de esas interpretaciones en el tratamiento de las *imágenes conceptuales* correspondientes:

La interpretación del límite de una sucesión como el *último término* de la sucesión, como una barrera que no se puede sobrepasar, pero que se puede alcanzar.
Podemos observar el papel que juegan la cognición sensoriomotriz en la creación de las interpretaciones del concepto de límite cuando se ve como el *último término* de una sucesión infinita. La respuesta de **Daniel** determina que el límite es *un lugar al cual se llega* (figura 30). Cuando el estudiante expresa que la sucesión tiene un límite *en el infinito* revela que, para él, el límite es el último término de la sucesión.

Figura 30.Respuesta de Daniel a la pregunta sobre el significado de una sucesión convergente


1. ¿Qué significa que una sucesión a_n sea convergente?
Si a_n es convergente, la sucesión es monotona (creciente o decreciente), y acotada. Quiere decir que la serie tiene un limite en el infinito.

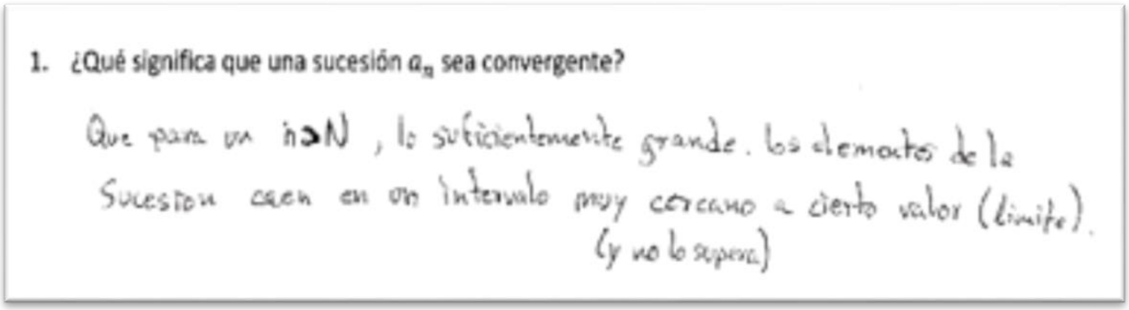
Nota. Se agrega la transcripción de lo escrito en la figura 30.
¿Qué significa que una sucesión a_n sea convergente?

Si a_n es convergente, la sucesión es monótona (creciente o decreciente), y acotada, quiere decir que la serie tiene un límite en el infinito.

La respuesta de **Daniel** refleja la *fragilidad* de la noción de convergencia que él maneja. Suponer que la convergencia implica que la sucesión sea monótona será fuente de errores formales posteriores si se incorpora a esta concepción. El estudio de límites de sucesiones como ha sido tradicional, entre los estudiantes entrevistados, ha quedado incompleto por una *introducción prematura de la definición formal*. Con ello queremos reiterar que el proceso de desarrollo del concepto ha sufrido la carencia de una idea sensoriomotriz adecuada que sirva de base para la transición *necesaria* hacia la definición formal. Es la *organización interna* en este caso del análisis matemático, lo que requiere eventualmente del tratamiento formal. La enormidad del saber matemático heredado impuso, ya para mediados del siglo XIX, la conveniencia de organizar en estructuras axiomáticas (lógico-formales) el caudal de conocimiento recibido. Pero *y este es un gran "pero"*, ese punto de vista no coincide, como ya lo hemos hecho explícito, con una respuesta desde el punto de vista educativo. La cognición humana es híbrida: sus "componentes" básicos son la estructura sensoriomotriz y nuestra estructura simbólica en la que se apoya el razonamiento lógico. Continuemos:

Ricardo al responder la pregunta: ¿Qué significa que una sucesión sea convergente? expresa literalmente que el límite es un cierto valor *que no se puede superar* (figura 31).

Figura 31. Respuesta Ricardo sobre el significado de sucesión convergente.



1. ¿Qué significa que una sucesión a_n sea convergente?

Que para un n>N, lo suficientemente grande. los elementos de la Sucesion caen en un intervalo muy cercano a cierto valor (límite). (y no lo supera)

Nota. Se agrega la transcripción de lo escrito en la figura 31.

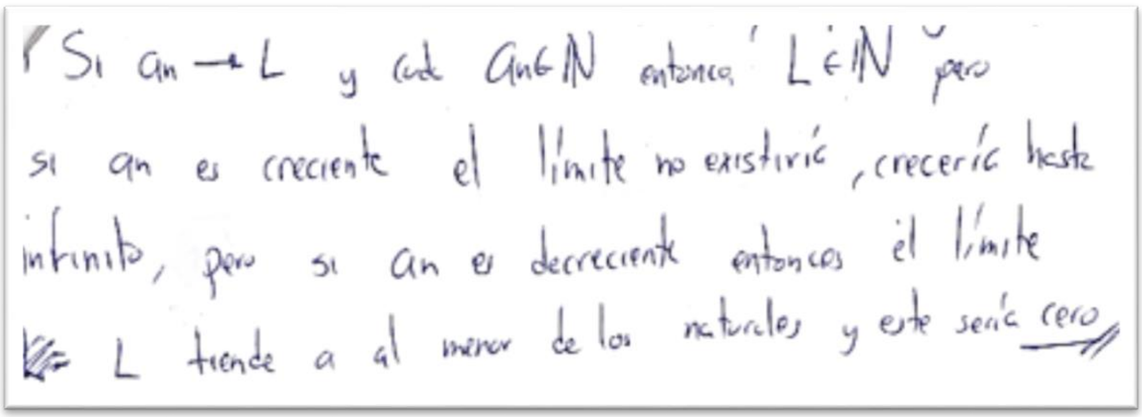
¿Qué significa que una sucesión a_n sea convergente?

Que para un n>N, lo suficientemente grande, los elementos de la sucesión caen en un intervalo muy cercano a cierto valor (límite), (y no lo supera)

La interpretación de ver al límite como una barrera que usa **Ricardo** está influenciada por la manera en que se utiliza la palabra coloquialmente. Puede ser *normal* que esta idea de límite sea evocada, pues en general, la experiencia previa relacionada a la palabra sugiere la frontera en una región. La prohibición de sobrepasar un límite lleva a pensar que la acción (de tomar un límite) implica *detenerse* y fijar esa idea de barrera. La situación descrita muestra que Ricardo ha interpretado un término “límite” que tiene un significado formal en matemáticas (definición conceptual), como si se le estuviese preguntando por un término informal (imagen conceptual). De nuevo, vemos aquí el posible resultado de una *deficiencia didáctica* según la cual antes de la introducción y discusión de un término digamos *técnico* en el cálculo/análisis no se ha trabajado con la experiencia sensoriomotriz (o con la imagen conceptual) para que pueda internalizarse la definición formal y eventualmente razonar a partir de ella.

En su respuesta **José** (figura 32) expresa con sus palabras que el límite no existiría si la sucesión fuese creciente y afirma que *crecería hasta infinito*. Al ver el caso contrario en el cual la sucesión es decreciente expresa que el límite L “tiende al menor de los naturales” y concluye diciendo que el límite sería cero. Los argumentos están basados en la idea de que la sucesión es un proceso el cual, teóricamente, tendrá que llegar a un número que nombra como “infinito”. Podemos pensar que el infinito es para José *el último* número.

Figura 32. Respuesta de José para definir el límite



Si $a_n \to L$ y cad $a_n \in N$ entonces $L \in N$ pero
si a_n es creciente el límite no existiría, crecería hasta
infinito, pero si a_n es decreciente entonces el límite
L tiende a al menor de los naturales y este sería cero

Nota. Se agrega la transcripción de lo escrito en la figura 32.

Si $a_n \to L$ y cada $a_n \in N$ entonces $L \in N$ pero si a_n es creciente el límite no existiría, crecería hasta el infinito, pero si a_n es decreciente entonces el límite L tiende a al menor de los naturales y este sería cero.

La interpretación en el sentido de ver al límite como un número que eventualmente será alcanzado es un ejemplo de la difícil transición de lo intuitivo a lo formal, pues, en sentido estricto la palabra *alcanzar* se refiere a llegar a tocar algo que “va por delante”, lo cual no corresponde a la definición formal de límite de una sucesión. En realidad, lo que la definición formal intenta capturar, entresacar de la imagen conceptual, es la parte que pudiese *operarse* formalmente. Sin embargo, en el caso presente, si la sucesión converge a un natural y todos los términos de la sucesión naturales, lo que se espera es que, si hay claridad conceptual sobre la definición de convergencia, la respuesta sería que, a partir de cierto término, la sucesión es constante. En efecto, en la definición formal de límite de una sucesión se considera al elemento enésimo (y los que le siguen) dentro de un intervalo de radio $\varepsilon>0$; no necesariamente el límite es un número que es *alcanzado* por los elementos de la sucesión. De hecho, el límite no coincide con algún término de la sucesión, como es el caso de las sucesiones de racionales que convergen a un irracional. Estamos en presencia de una *separación cognitiva* entre la experiencia sensoriomotriz y la formalización del conocimiento. Podríamos aquí preguntarnos: ¿*Cuándo y en qué condiciones es necesario insistir en la (posible) instalación de la definición formal*?

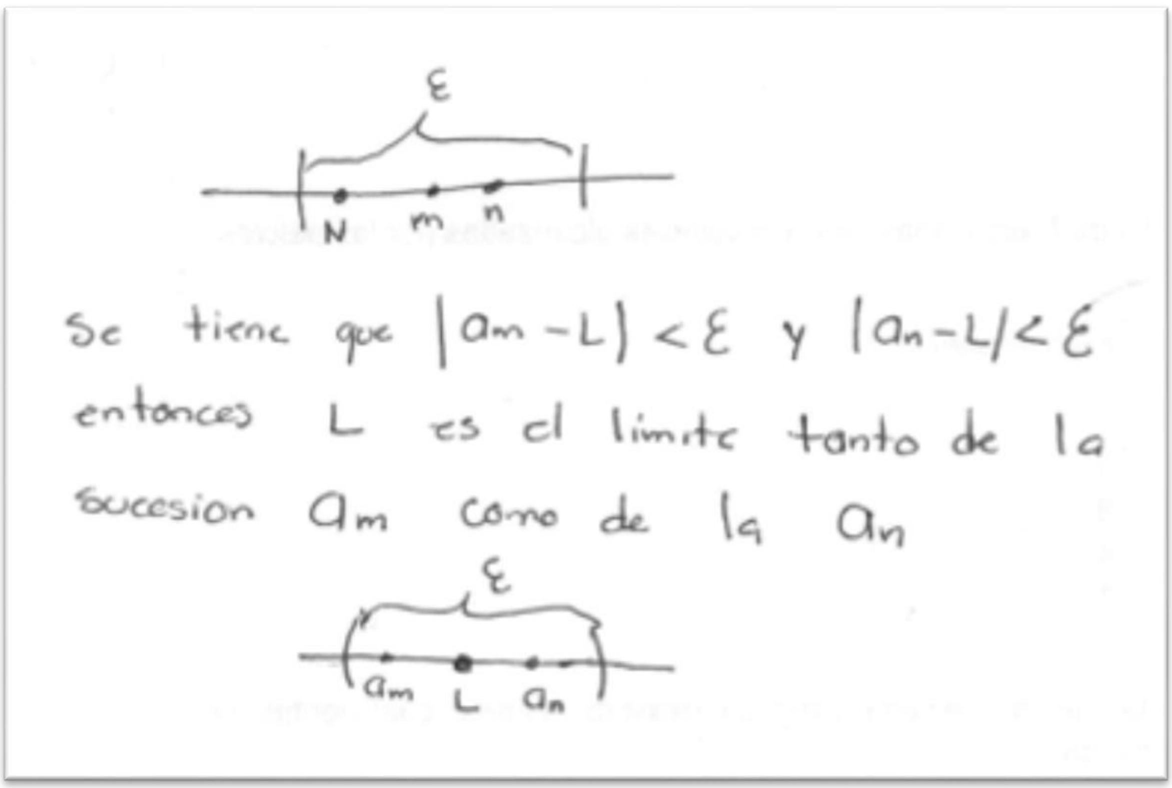
Pensar en el infinito como una cantidad muy grande y buscar trasladar la operatividad de lo finito a lo infinito *ayuda* a dar sentido al trabajar el infinito de manera semejante a las ideas usadas por Euler. La manera en que Euler entendía el concepto de cantidad infinita puede ser un buen exponente del acercamiento hacia ese concepto de forma “natural”. Euler expone en su trabajo ideas sobre lo infinitamente grande, lo infinitamente pequeño, el principio de divisibilidad infinita, los diversos órdenes del infinito y sobre resultados contradictorios que surgen en el manejo de las series infinitas (Fernández, 2016). Aunque en general lleva a una *buena y aceptable* interpretación del infinito que se encuentra relacionado con resultados correctos (por ejemplo, la prueba euleriana de que la serie de los recíprocos de los cuadrados de los naturales converge a $\pi^2/6$) también puede generar errores si no se tiene cuidado en las sutilezas de sus condiciones, el hecho de que *el infinito no es un número*. Con estas palabras queremos insistir en que si bien es válido el movimiento histórico que introdujo mayores grados de rigor, las condiciones que lo hicieron posible no coinciden con los procesos escolarizados que pretenden inyectar mayores niveles de rigor—sin que los estudiantes comprendan esa *necesidad.*

Al tener en cuenta que las intuiciones suelen formarse desde el entorno material y cultural en donde vivimos, es natural que las referencias que se usan para entender sean cosas comunes como caminos o carreteras para llegar a un lugar. Cualquier referencia al mundo físico-cultural en el que los seres humanos nos desarrollamos es en esencia finito por lo que es natural pensar que la idea de infinito sea *contraintuitiva* en principio cuando aparece en las matemáticas escolares. Es a través de las sentencias lógicas y las formalizaciones matemáticas que se va generando una nueva *intuición refinada* (cuando se exploran los límites de la experiencia sensoriomotriz y se contrastan con las definiciones formales), sobre nuevas bases la cual ya no está apoyada solo en la intuición que viene de las experiencias sensorio-motrices. Es importante no olvidar que esas experiencias constituyes una *primera intuición* y que a través de ellas se van desarrollando con el tiempo nuevas estrategias cognitivas. El vaivén entre lo intuitivo y lo formal en realidad se torna (sin dejar de ser un vaivén) en una interacción que va subiendo de complejidad a medida que lo que era formal en un nivel ahora se incorpora como parte de un superior nivel intuitivo. Esa realidad cognitiva la podemos apreciar, por ejemplo, cuando vemos a un matemático profesional o a un estudiante avanzado fijar su vista en una afirmación de un colega y…pensar en voz alta: "no creo que esa afirmación sea cierta…" lo dice basado en su experiencia que en ese momento no es ni totalmente intuitiva no totalmente lógico–formal.

La intuición, insistimos, se va modificando respecto a las experiencias vividas y a las reflexiones sostenidas. Esa *nueva* intuición debe ser desarrollada, también, sobre las definiciones formales, pues las distintas formas de pensar que va integrando el estudiante son parte de las herramientas que tendrá para poder apropiarse del conocimiento matemático.

En una de las preguntas planteadas a nuestros estudiantes se les pedía demostrar que si una sucesión es convergente entonces es de Cauchy. En la respuesta de la estudiante Estela, ella realiza un dibujo para apoyar su conclusión con el cual podemos acercarnos a la imagen conceptual que tiene acerca de las sucesiones de las cuales se le cuestionó. Figura 33.

Figura 33. Dibujo de Estela para demostrar que si una sucesión es convergente entonces es de Cauchy.



Nota. Se agrega la transcripción de lo escrito en la figura 33

Se tiene que $|a_m - L| < \varepsilon$ y $|a_n - L| < \varepsilon$ entonces L es el límite tanto de la sucesión a_m como de la a_n.

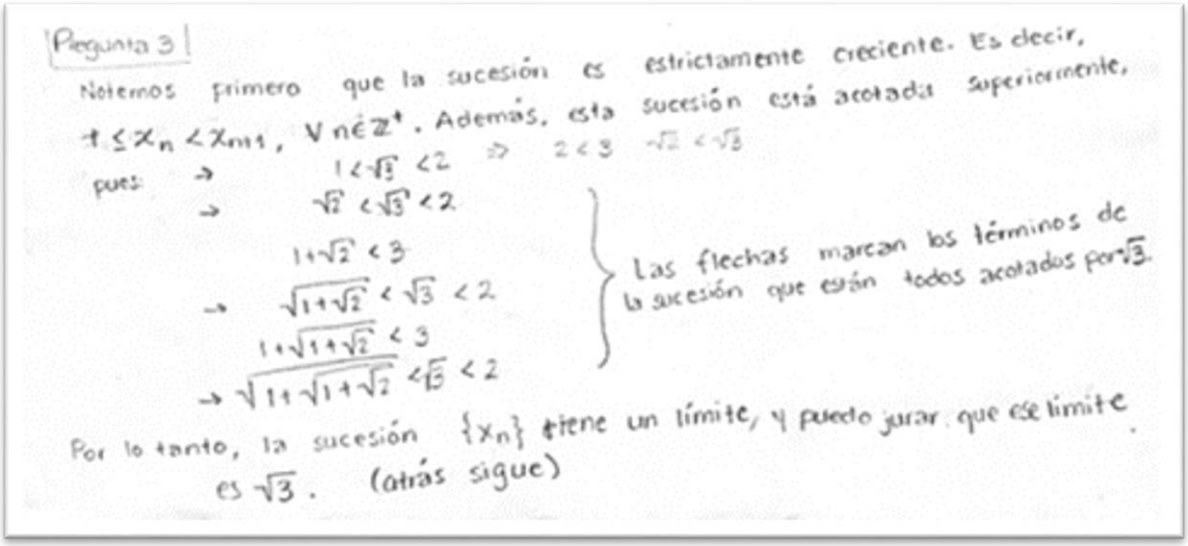
La explicación que escribe la usa para aclarar lo que manifiesta en sus dibujos: "se tiene que $|a_m - L| < \varepsilon\ y\ |a_n - L| < \varepsilon$ entonces L es el límite tanto de la sucesión a_m como de a_n". Los dibujos y su explicación no presentan una explicación de por qué la sucesión es de Cauchy. Sin embargo, permite apreciar rasgos de su entendimiento de la definición, más allá del nivel sensoriomotriz. Hay indicios de que la estudiante ha interiorizado la definición formal parcialmente (tal vez sea mejor: tiene clara la imagen conceptual).

La conceptualización no se limita a *tener una idea* de la problemática a la que nos enfrentamos. **Estela** interpreta la definición de límite y puede realizar dibujos indicativos sobre las ideas que fueron generadas, pero eso no le es suficiente para llegar a demostraciones formales. Aún más refleja que su idea de sucesión es *frágil* desde el momento que habla de la sucesión a_n y de la sucesión a_m como si fuesen dos sucesiones distintas. Esto nos puede sugerir que ella se guía por su conocimiento corporizado —muy cercano a las intuiciones físicas, como la visual y apoya sus conjeturas en la ***re -descripción representacional*** que realiza del lenguaje escrito, como se le proporcionó, a un diagrama visual. Con dicho diagrama muestra que casi-comprende y aplica la definición de límite de una sucesión. Sin embargo, no manifiesta por escrito la prueba formal de lo que planteó en el esquema que dibujó.

Se puede proceder con argumentos plausibles o intuitivos para calcular y mostrar que es natural el resultado al que se llega, sin embargo, no es suficiente pues queda sin poder llegar a las afirmaciones que determinan la demostración lógica matemática. Esto revela una falta de lenguaje formal que permita expresar las ideas siguiendo el desarrollo lógico.

Examinemos la pregunta sobre la sucesión $\{x_n\}$ que está definida por la siguiente fórmula de recurrencia: $x_1 = 1$, y $x_{n+1} = \sqrt{1 + x_n}$. Se pide que demuestre que la sucesión converge y hallar su límite, **Daniel** describe claramente cómo su intuición le va proporcionando la información que sugiere una respuesta aceptable, pero no logra con esa sola intuición probar su hipótesis. Daniel identifica que para llegar a concluir que la sucesión es convergente en este caso ésta debe cumplir con ser monótona y acotada. Al examinar la relación de los elementos de la sucesión $1 \leq x_n < x_{n+1}$ observa que la sucesión es creciente y construye con las desigualdades $1 < \sqrt{3} < 2$ y $2 < 3$ una prueba de que la sucesión es acotada por $\sqrt{3}$. Pero no considera esta una *demostración suficiente* como para utilizarla como fundamento formal (Figura 34). El no poder escribir en términos usados en el lenguaje formal le resta confianza para usarlo como demostración.

Figura 34. Respuesta de Daniel al demostrar la sucesión $1 \leq x_n < x_{n+1}$


Pregunta 3

Notemos primero que la sucesión es estrictamente creciente. Es decir, $1 \leq x_n < x_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{Z}^+$. Además, esta sucesión está acotada superiormente,

pues: $\rightarrow$ $1 < \sqrt{3} < 2 \Rightarrow 2 < 3$ $\sqrt{2} < \sqrt{3}$

$\rightarrow \sqrt{2} < \sqrt{3} < 2$

$1 + \sqrt{2} < 3$

$\rightarrow \sqrt{1+\sqrt{2}} < \sqrt{3} < 2$

$1 + \sqrt{1+\sqrt{2}} < 3$

$\rightarrow \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{2}}} < \sqrt{3} < 2$

Las flechas marcan los términos de la sucesión que están todos acotados por $\sqrt{3}$.

Por lo tanto, la sucesión $\{x_n\}$ tiene un límite, y puedo jurar que ese límite es $\sqrt{3}$. (atrás sigue)

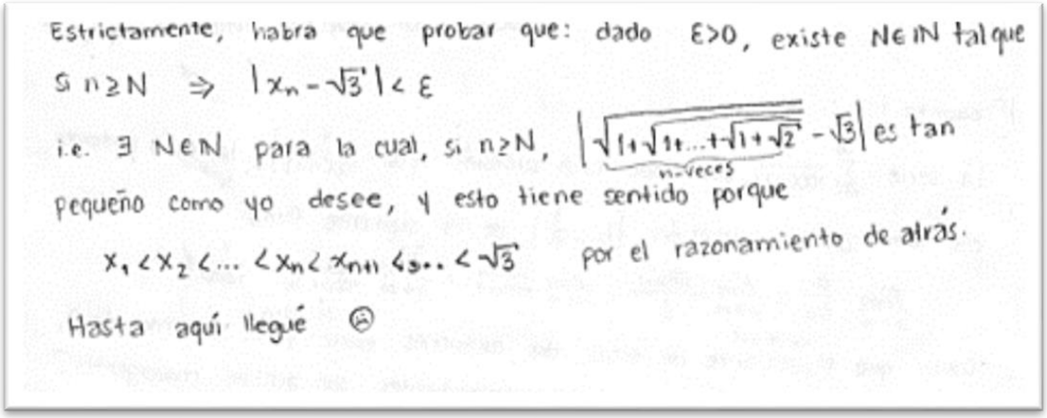
Nota. Se agrega la transcripción de lo escrito en la figura 34
Pregunta 3
Notemos primero que la sucesión es estrictamente creciente, es decir $1 \leq x_n < x_{n+1}, \forall n \in \mathbb{Z}^+$. *Además, esta sucesión esta acotada superiormente, pues*

$$\left.\begin{array}{c} \rightarrow 1 < \sqrt{3} < 2 \;\; \rightarrow \;\; 2 < 3 \\ \sqrt{2} < \sqrt{3} \rightarrow \sqrt{2} < \sqrt{3} < 2 \\ 1 + \sqrt{2} < 3 \\ \rightarrow \sqrt{1 + \sqrt{2}} < \sqrt{3} < 2 \\ 1 + \sqrt{1 + \sqrt{2}} < 3 \\ \rightarrow \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{2}}} < \sqrt{3} < 2 \end{array}\right\} \text{Las flechas marcan los términos de la sucesión que están acotados por } \sqrt{3}$$

Por lo tanto, la sucesión $\{x_n\}$*tiene un límite y puedo jurar que ese límite es* $\sqrt{3}$. *(atrás sigue)*

Con la definición de límite, Daniel, busca probar que $\sqrt{3}$ es el valor al que converge la sucesión. En la expresión que propone: $\underbrace{\sqrt{1 + \sqrt{1 + \cdots + \sqrt{1 + \sqrt{2}}}}}_{n-veces}$ no la logra operar. A pesar de que él mismo acepta que su razonamiento es correcto y la sucesión debe ser convergente abandona la tarea por ver su incapacidad de demostrarlo (figura 35).

Figura 35. La propuesta de Daniel con la que decide abandonar



Estrictamente, habra que probar que: dado $\varepsilon>0$, existe $N\in\mathbb{N}$ tal que si $n\geq N \Rightarrow |x_n-\sqrt{3}|<\varepsilon$

i.e. $\exists\, N\in\mathbb{N}$ para la cual, si $n\geq N$, $\Big|\underbrace{\sqrt{1+\sqrt{1+\dots+\sqrt{1+\sqrt{2}}}}}_{n\text{-veces}}-\sqrt{3}\Big|$ es tan pequeño como yo desee, y esto tiene sentido porque

$x_1<x_2<\dots<x_n<x_{n+1}<\dots<\sqrt{3}$ por el razonamiento de atrás.

Hasta aquí llegué ☹

Nota. Se agrega la transcripción de lo escrito en la figura 35

Estrictamente, habrá que probar que: dado $\varepsilon > 0$, *existe* $N \in \mathbb{N}$*tal que si* $n \geq N \rightarrow |x_n - \sqrt{3}| < \varepsilon$

$\exists\, N \in \mathbb{N}$ *para la cual, si* $n \geq N$, $\left|\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots+\sqrt{1+\sqrt{2}}}}-\sqrt{3}\right|$ *es tan pequeño como yo desee, y esto*

tiene sentido porque $x_1 < x_2 < \cdots < x_n < x_{n+1} < \cdots < \sqrt{3}$ *por el razonamiento de atrás.*

Hasta aquí llegué ☹

Daniel es un estudiante seguro, con cierto grado de autonomía, aunque en este momento parecía carecer de una formación suficiente. En efecto, si hubiese podido detenerse un poco en la definición recursiva

$$x_{n+1} = \sqrt{1 + x_n}$$

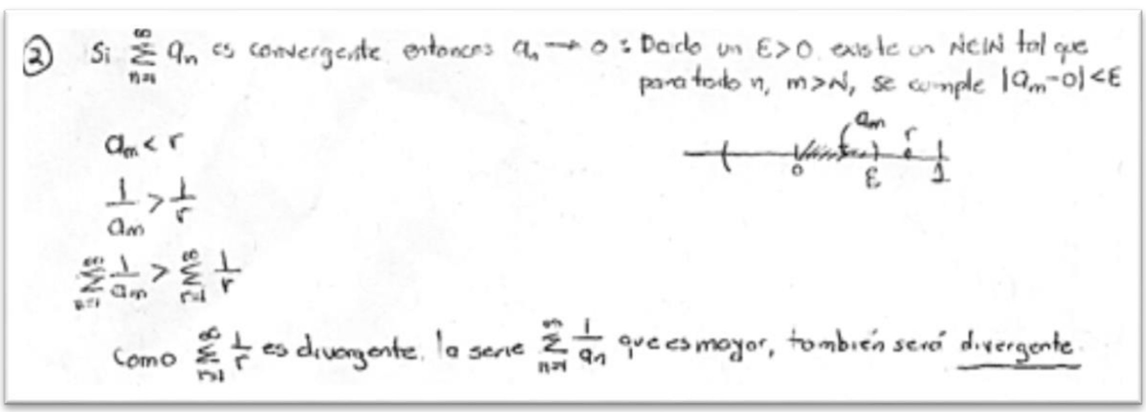
Suponiendo que la sucesión converge a un número L, se tiene:

$$L^2 = L + 1$$

De donde: $L = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, pues la otra raíz es negativa. Hay un cierto "modo de proceder" que es difícil adquirir al margen de una instrucción formal. Aquí percibimos una cierta insuficiencia del razonamiento basado exclusivamente en el nivel sensoriomotriz. Nos parece que este tipo de ejercicios marca una frontera entre lo sensoriomotriz y lo formal. En otras palabras: Estudiar sucesiones numéricas sin abandonar la idea dinámica de límite invita a ir un poco más allá de las ideas que surgen de la experiencia física y se empiezan a experimentar ideas nuevas razonadas desde definiciones y axiomas para las cuales no se tiene una experiencia previa que nos respalde ni lenguaje formal con el cual expresar sus ideas.

En uno de los cuestionarios que se les aplicó a los participantes se les pidió demostrar que si $\sum_1^n a_n$ es una serie convergente entonces $\sum_1^n \frac{1}{a_n}$ es una serie divergente. Nuestra estudiante **Rosa** contesta señalando la definición de límite y dibuja un esquema donde establece un r>ε donde ε es el radio de la vecindad alrededor de 0. (figura 36).

Figura 36. Respuesta de Rosa para la sucesión



Nota. Se agrega la transcripción de lo escrito en la figura 36.
2) Si $\sum_1^\infty a_n$ *es convergente entonces* $a_n \to 0$: *Dado un* $\varepsilon > 0$ *existe un* $N \in \mathbb{N}$ *tal que para todo* $n, m > N$, *se cumple* $|a_m - 0| <$ *donde* ε

$$a_m < r$$

$$\frac{1}{a_m} > \frac{1}{r}$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{a_m} > \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r}$$

Como es$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r}$ *divergente, la serie* $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{a_m}$ *que es mayor también será <u>divergente.</u>*

Rosa, a través de evocar la definición formal de límite y del dibujo que realiza, muestra su entendimiento del problema y con eso el tránsito de una primera intuición a lo más formal al relacionar el enfoque más intuitivo con el dibujo y lo formal con la definición (figura 36). Aunque parece olvidar que r es una constante positiva de modo que la serie

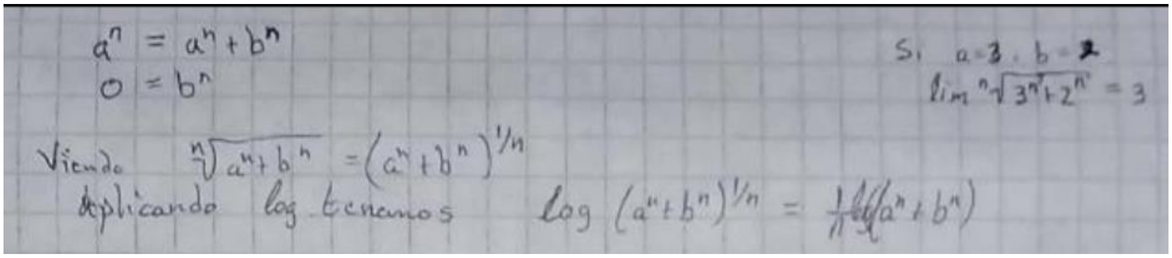
$$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r}$$

No es la serie armónica sino una serie infinita de término constante $1/r$. Rosa presenta un *estado cognitivo* intermedio entre una visión estrictamente sensoriomotriz y una visión formal. Muestra un buen entendimiento (aunque insuficiente) sobre la operatividad de la definición formal. Casi afirmaríamos que ese estado cognitivo está más cercano a la definición formal.

Hemos querido *ilustrar* (no demostrar) cómo dentro de nuestro propio sistema educativo, los estudiantes revelan en sus respuestas una falta de atención educativa: para enseñar matemáticas hay que saber matemáticas y saber *a quién* se le enseña.

Para demostrar que Si $a > b$ el $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n + b^n} = a$ el estudiante **Beto** busca la manera de comprender el problema mediante un caso particular. En el momento en el que observa que el ejemplo particular no le ha permitido concluir claramente, busca otros métodos conocidos como aplicar logaritmos para *simplificar* el problema, quedando nuevamente en algo difícil de interpretar bajo los conocimientos obtenidos con anterioridad.

Figura 37. Demostración de Beto de Si $a > b$ el (lim)┬(n→∞)⁡√(n&a^n+b^n) =a



Nota. Se agrega la transcripción de lo escrito en la figura 37

$$a^n = a^n + b^n$$

$$0 = b^n \qquad Si\ a = 3, b = 2$$

$$\lim \sqrt{3}\, n + 2\, n\, n = 3$$

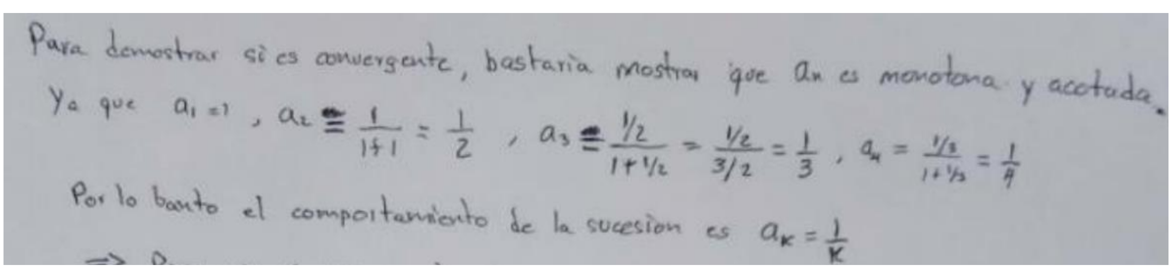
$$Viendo \sqrt[n]{a^n + b^n} = (a^n + b^n)^{\frac{1}{n}}$$

$$Aplicando \log tenemos \quad \log(a^n + b^n)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}\log(a^n + b^n)$$

Posteriormente, se le pide a **Beto** demostrar la convergencia de la sucesión descrita por $a_1 = 1,\ a_{n+1} = \frac{a_n}{1+a_n}$ (figura 38)

Él inicia su demostración apoyándose en el teorema: toda sucesión creciente (decreciente) y acotada superiormente (inferiormente) de números reales es convergente. Por lo cual, trata de asegurar que la sucesión descrita cumpla las premisas del teorema y así ver su convergencia. Es aquí donde vemos como el estudiante busca la forma de los primeros elementos para llegar a la generalización del n-ésimo término.

Figura 38. Demostración de Beto para: Se tiene que a_1=1, 〖a〗_(n+1)=a_n/(1+a_n) . Demuestre que es convergente y determinar el límite.



Nota. Se agrega la transcripción de lo escrito en la figura 40

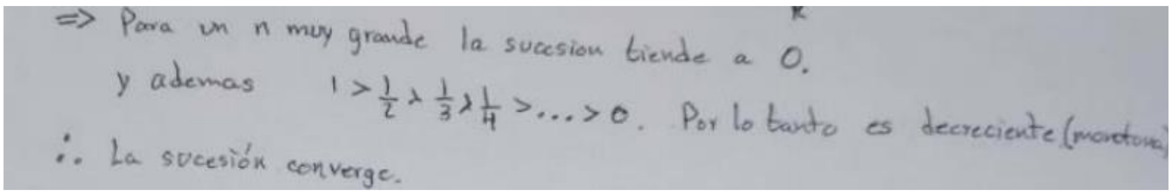
Para demostrar si es convergente, bastaría mostrar que a_n es monótona y acotada.

Ya que $a_1 = 1, a_2 = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}, a_3 = \frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}, a_4 = \frac{\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}} = \frac{1}{4}$

Por lo tanto, el comportamiento de la sucesión es $a_k = \frac{1}{k}$.

Nuevamente **Beto** aborda el problema buscando una sucesión conocida como lo hace con la pregunta anterior, pero en esta ocasión le va mejor trabajando con la sucesión $(1/k)_k$. Una vez que concluye que la sucesión es decreciente y está acotada determinan que implica que la sucesión es convergente, al hacer uso directamente del teorema que hemos mencionado (Figura 39).

Figura 39. Conclusión de Beto para el teorema



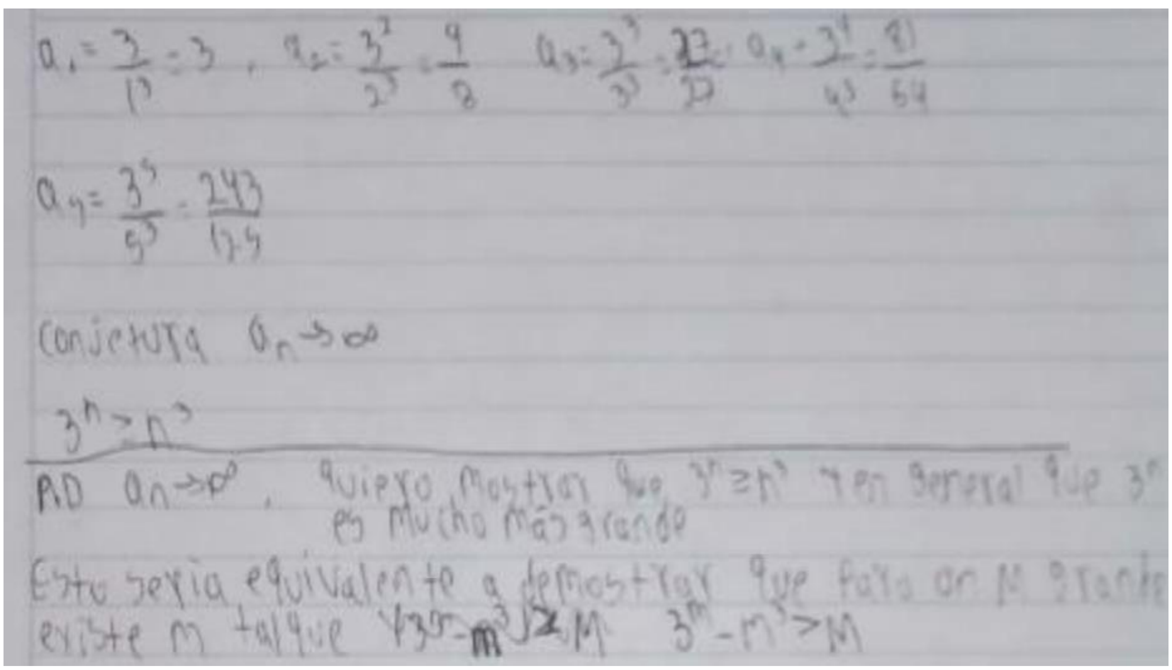
Nota. Se agrega la transcripción de lo escrito en la figura 39
⟹Para un n muy grande la sucesión tiende a 0. Y además $1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \frac{1}{4} > \cdots > 0$. Por lo tanto es decreciente (monótona)
∴La sucesión converge.

Consideraríamos que una vez que el estudiante hizo uso del teorema, el problema casi ha concluido, pero como vemos en la figura 39 Beto no queda satisfecho con el uso del teorema. Beto realiza esfuerzos adicionales por buscar una demostración más formal ahora usando la definición de límite de una sucesión y termina haciendo "doble trabajo" en este problema. Sorprende que haya podido recurrir a un teorema tan especial en este ejercicio y haya mostrado tal nivel de confusión en la primera pregunta. Pero tal vez no debería sorprendernos pues la presencia de una raíz y una suma $a^n + b^n$ parecen constituir una fuerte inhibición. Aquí se *presiente* una instrucción deficiente.

Hemos observado que el teorema de convergencia tiene en el enunciado la noción dinámica del concepto de infinito potencial y es esta noción más dinámica más cercana a las intuiciones sensoriomotrices lo que hace que Beto no la considere lo "suficientemente formal". Por eso el recurrir a la definición de límite, la cual no genera esta noción dinámica, más bien es una noción estática del concepto le da a Beto la sensación de que ahora si su respuesta es formal. Uno se podría preguntar: ¿por qué le inquieta que su respuesta no sea *suficientemente formal*?

Para **Alejandro** al calcular el límite de $a_n = \frac{3^n}{n^3}$, busca un acercamiento numérico al calcular algunos de los elementos de la sucesión, con lo cual espera vislumbrar el comportamiento de la sucesión. Esto le permitiría tener una idea de que es lo que tendría que hacer para resolver su problema. Todo esto antes de proceder formalmente. Podemos ver, sin embargo, que el tener una intuición buena acerca del problema no permite concluir adecuadamente si no tenemos una apropiación de las definiciones formales (figura 40).

Figura 40. Respuesta de Alejandro para calcular el límite de a_n=3^n/n^3


$a_1 = \frac{3}{1^3} = 3$, $a_2 = \frac{3^2}{2^3} = \frac{9}{8}$ $a_3 = \frac{3^3}{3^3} = \frac{27}{27}$ $a_4 = \frac{3^4}{4^3} = \frac{81}{64}$

$a_4 = \frac{3^5}{5^3} = \frac{243}{125}$

Conjetura $a_n \to \infty$

$3^n \geq n^3$

P.D. $a_n \to \infty$, quiero mostrar que $3^n \geq n^3$ y en general que 3^n es mucho más grande

Esto sería equivalente a demostrar que para un M grande existe m tal que $3^m - m^3 \geq M$ $3^n - n^3 > M$

Nota. Se agrega la transcripción de lo escrito en la figura 40

$$a_1 = \frac{3}{1^3} = 3\,, \qquad a_2 = \frac{3^2}{2^3} = \frac{9}{8}, \quad a_3 = \frac{3^3}{3^3} = \frac{27}{27}, \quad a_4 = \frac{3^4}{4^3} = \frac{81}{64}, \qquad a_5 = \frac{3^5}{5^3} = \frac{243}{125}$$

Conjetura $a_n \to \infty$

$3^n \geq n^3$

P.D. $a_n \to \infty$ quiero mostrar que $3^n \geq n^3$ y en general que 3^n es mucho más grande Esto sería equivalente a demostrar que para un M grande existe m tal que $3^m - m^3 > M$.

Alejandro señala una buena idea: $3^n \geq n^3$ lo cual está bien, aunque para justificarlo elige un camino incierto: mostrar que $3^m - m^3 > M$ para una constante M grande, cuando lo que sería más sencillo sería a partir de la conjetura $3^n \geq n^3$ tomar logaritmos y obtener así:

$$nlog(3) \geq 3log(n)$$

lo que es válido a partir de cierto n ya que entonces n>log(n). Sin embargo, este razonamiento parece estar aún lejos del arsenal de posibilidades de Alejandro.

Capítulo 6

Tercera parte experimental: primero & séptimo

6.1 Secuencia de actividades

La secuencia se aplicó a un grupo de primer semestre y a uno de séptimo de la licenciatura de matemáticas. La elección de estos dos grupos se basó en la premisa según la cual el grado escolar determinaría el grado de uso de argumentos intuitivos o matemáticos: los estudiantes de primer semestre usarían más su intuición que el formalismo matemático, mientras que, por el contrario, los estudiantes de séptimo semestre privilegiarían el formalismo sobre la intuición.

En el grupo de primer semestre se formaron tres equipos de cuatro integrantes: el equipo de Hilda, el de Marco y el de Omar. Los nombremos así pues Hilda Marco y Omar en general fueron los voceros de sus equipos.

En el grupo de séptimo semestre eran cinco personas que generalmente iniciaba las actividades en dos equipos: uno de dos personas y otro de tres, pero con el desarrollo de las discusiones los cinco participaban, aquí no hubo vocero por equipo.

La secuencia consta de cuatro actividades que fueron nombradas de la siguiente manera:

1. El infinito en el espejo
2. La torre
3. El triángulo de Sierpinski
4. La bolsa de pelotas

El diseño de cada una de las actividades tuvo un propósito específico. La actividad de "El infinito en el espejo" permite que la experiencia visual sea la que proporcione los argumentos a los estudiantes para explicar por qué el número de reflejos de los espejos puede considerarse infinito. En otras palabras, con esta actividad se pretende la intuición física dirija la noción del concepto de infinito potencial. Esta actividad es una adaptación de la propuesta hecha en el artículo de Prieto Sánchez, J.A. y Fernández Escalona, C. (2017) *Estudio del infinito actual siguiendo el modelo de inclusión de Bolzano con la ayuda de una experiencia física de espejos paralelos*.

El objetivo de las actividades "La torre" y "El triángulo de Sierpinski" es observar cómo los estudiantes usan sus intuiciones geométricas y los procesos algorítmicos para calcular el área, el perímetro y el volumen, involucrados en cada actividad. La actividad de La torre es una adaptación de la propuesta de Codes, M., Delgado, M.L., González Astudillo, M.T. y Monterrubio, M.C. (2013) en su artículo *Comprensión del concepto de serie numérica a través del modelo de Pirie y Kieren* y la de El triángulo de Sierpinski se toma del artículo de Villabona, D. y Roa, S. (2016*) Procesos iterativos infinitos y objetos trascendentes: un modelo de construcción del infinito matemático desde la teoría APOE*.

Por último, en la actividad "La bolsa de pelotas" se pretende que los estudiantes requieran integrar, en su solución, las nociones de infinito potencial e infinito actual. Esta última actividad se retoma de experimentaciones anteriores donde se propuso de forma aislada.

Con la secuencia de actividades se espera que aparezca-el vaivén entre la concepción intuitiva del concepto de infinito y la formalización que genera la necesidad de concretar una respuesta matemática, sustentada sobre hechos teóricos o experiencias empíricas.

La aplicación de la secuencia de actividades requirió que los estudiantes tuvieran conocimientos previos de sucesiones, series y convergencia. La autora de esta tesis pidió al profesor de asignatura del grupo de primer semestre que abordara estos temas en salón de clases.

A continuación, se detallan las cuatro actividades:

El infinito en el espejo

Material: Dos espejos de tamaño mediano, 10 canicas del mismo color y base de madera o de cartón para colocar los espejos.

Se coloca una fila de canicas en medio de los dos espejos y se les pide que escriban las respuestas de forma individual en una hoja de papel.

¿Cuántas canicas hay (se ven, son) si consideramos las del reflejo en el espejo?

¿las puedes contar?

Retira unas de las canicas y acomoda los espejos para no dejar espacio entre la fila y los espejos

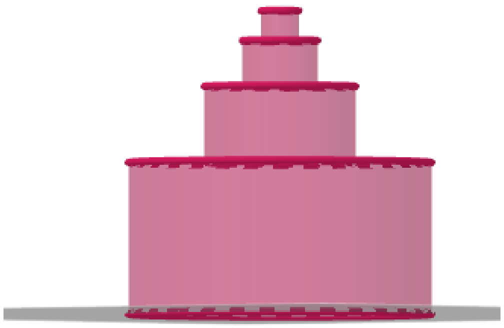
¿ahora cuantas canicas hay (se ven, son) si consideramos las del reflejo en el espejo?

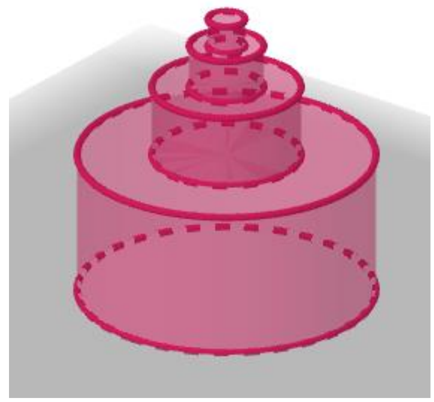
¿las puedes contar ahora?

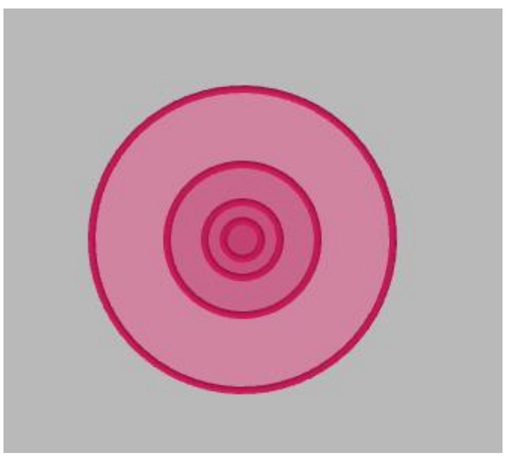
Reunirse en equipos de 4 y discutir sus respuestas explicando claramente sus posturas y tratar de justificarlas.

La torre

Se quiere construir una torre formada por cilindros de altura igual al radio de la base. El radio de la base es inversamente proporcional a la posición del cilindro en la torre, de modo que el radio del primer cilindro es 1, el del segundo es $\frac{1}{2}$, el del tercero $\frac{1}{3}$ y así sucesivamente. Si no hay restricciones en el número de piezas para construir la torre, es decir, que tiendan a infinito ¿cuál es la altura y el volumen de la torre así construida?

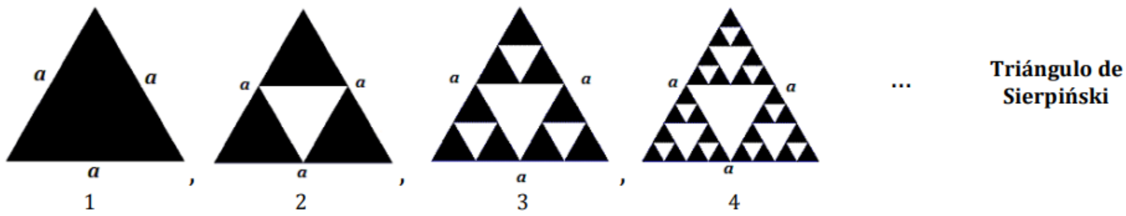






El triángulo de Sierpinski

Se tiene inicialmente un triángulo equilátero relleno de lado a, se unen los puntos medios de los lados que forman el triángulo de modo que el triángulo inicial queda dividido en cuatro triángulos equiláteros y congruentes, de los cuales se elimina el triángulo central, de esta forma quedan 3 triángulos cada uno de lado a 2. Se repite el mismo procedimiento en cada uno de los triángulos resultantes y así sucesivamente al infinito. La curva resultante es llamada triángulo de Sierpinski. (versión adaptada de Sabogal y Arenas, 2011)



1. Calcula el perímetro de la curva fractal, es decir, de la suma de los perímetros de los triángulos blancos.
2. Calcula el área de la suma de los triángulos que se van eliminando.

La bolsa de pelotas

Una persona tiene numeradas una colección de pelotas marcadas 1, 2, 3, 4, ... (una colección infinita) y cuenta con un minuto exacto para desarrollar la siguiente actividad: coloca las diez primeras pelotas en un saco y a continuación extrae la marcada con el número 1. Esto le toma la mitad del tiempo disponible. A continuación, deposita el siguiente grupo de diez pelotas en el mismo saco y se extrae la marcada con el número 2. Esto le toma la mitad del tiempo restante. Continuando, deposita el siguiente grupo de diez pelotas y ahora extrae la marcada con el número tres. Esto le toma la mitad del tiempo que quedaba. El proceso continúa hasta que se agota el tiempo. La pregunta: ¿cuántas pelotas quedan por fuera?

El grupo de primer semestre se dividió en cinco equipos de 4 o 5 estudiantes para realizar las actividades; el grupo de séptimo, en 3 parejas. La implementación de las actividades se llevó a cabo en varias sesiones y durante estas se hicieron grabaciones de los comentarios y de reflexiones que hacían los estudiantes.

6.2 El infinito en el espejo

Reflexión de Omar.

Mientras los estudiantes realizaban la actividad *El infinito en el espejo* la profesora preguntaba a algunos estudiantes cómo responderían a las preguntas de la actividad. Uno de ellos, Omar, al reflexionar sobre cómo serían los reflejos de las bolas en el espejo si se van quitando de una en una, hace la comparación directa entre las cantidades de bolas que se reflejan. Él comenta:

> Intuitivamente, los infinitos son más grandes y eso depende, si es uno (se refiere a una bolita) entonces va a ser más chiquito que un infinito de nueve (se refiere a nueve bolas), pero al mismo tiempo no puede ser más grande porque al ser números naturales siguen perteneciendo a un mismo infinito.

En esta afirmación, Omar especifica claramente que su intuición le hace pensar en que serían dos infinitos de distintos tamaños: el que se forma con los reflejos de una sola bola y el del reflejo de nueve bolas. Para Omar el primer infinito se forma por múltiplos de uno; el segundo, por múltiplos de nueve. Le resulta intuitivo pensar en que tendrán distintos tamaños, cuando dice “va a ser más chiquito…”. Al reconocer que en ambos casos la cantidad de bolas está relacionada con los números naturales, se observa cómo su conocimiento matemático formal lo lleva a la conclusión de que serían infinitos del mismo tamaño (“pero al mismo tiempo no puede ser más grande porque al ser números naturales siguen perteneciendo a un mismo infinito”).

Omar continúa con su reflexión en voz alta, haciendo énfasis en diferenciar el conocimiento intuitivo del conocimiento formal:

> O sea, intuitivamente parece que es más grande, pero si le metemos matemáticas, no. Sigue siendo el mismo infinito de números naturales y no puede haber infinitos diferentes de números naturales porque es un mismo infinito.

Cuando Omar dice "pero si le metemos matemáticas", deja entrever cómo él busca la justificación desde la lógica que le brinda su formación matemática formal. Esta búsqueda le permite dar sentido a su respuesta.

Omar, motivado por las preguntas de la investigadora, habla de la existencia de distintos tamaños de infinitos, diferentes al de los números naturales:

> Había dicho que hay infinitos más grandes como el de los números reales. Que es (más grande) porque hay números irracionales como pi y fracciones como 1/4 que cada uno se dispara a infinito. Entonces cada uno tiene sus infinitos y por eso es un infinito más grande. Porque son como muchos infinitos combinados en uno solo, entonces es más grande que un solo infinito de una sola cosa: los números naturales.

Omar expresa de forma intuitiva lo que para él son los números reales. Explica brevemente que en los números reales están incluidos los irracionales, como pi, y los fraccionarios o racionales, como un cuarto, y aclara que en cada número está inmerso el infinito. Omar, al expresar "hay números irracionales", da a entender que conoce a varios de ellos, aunque solo da como ejemplo a π puede asegurarse entonces que conoce más, como $\sqrt{2}\ o\ e,$ y los une al conjunto de números racionales (o fraccionarios, como él lo dice). Con esto, Omar muestra que conoce cómo se forma el conjunto de números reales.

Además, al dar como ejemplo a π (un número irracional) y mencionar que "cada uno se dispara a infinito", hace referencia a que el infinito está inmerso en cada uno de los números irracionales. Esto es así porque, para Omar, la característica de la expansión decimal e irrepetible de los números irracionales muestra la existencia de un infinito. Pero Omar no termina aquí su reflexión sobre el infinito. Para él, como cada número irracional tiene su propio infinito, el conjunto de los irracionales tiene un infinito más grande que el infinito de los números naturales. El razonamiento de Omar se basa en su intuición de que la parte decimal de los números irracionales no termine provoca que no sean identificables con la misma claridad que los números naturales. En otras palabras, los números irracionales no son tan asequibles como los naturales, pues cada uno de estos no tiene un infinito asociado. Por ejemplo, para Omar, el número 3 no tiene un infinito asociado, pues no tiene dígitos distintos de cero no repetibles; sin embargo π sí tiene un infinito asociado, pues la parte decimal tiene dígitos no repetibles. De esta forma, la intuición de Omar hace que a los naturales se les asocie un solo infinito, cuantitativamente más pequeño que el infinito de los números irracionales.

La forma coloquial en que Omar se expresa para describir la cardinalidad del conjunto de números reales ("son como muchos infinitos combinados en uno solo") nos lleva a pensar nuevamente en cómo se apoya en su intuición para darse a entender verbalmente. Desde esa sensibilidad escolarizada, Omar refuerza su intuición respecto a la cantidad de números que componen a los reales. Su intuición sensoriomotora, al expresar palabras como "muchos" o "combinados", busca dar una explicación cercana a las experiencias de la vida común; cercana a esa idea de infinitos más grandes. Se puede observar el vaivén de la intuición a lo formal en los argumentos que usa Omar para explicar la existencia de distintos tamaños de infinitos, en el ir y venir entre las ideas intuitivas, que se desarrollan a través de las experiencias, y la certeza que dan las definiciones formales, como el que los irracionales están inmersos en el infinito.

Ahora bien, paradójicamente, este argumento, basado en la intuición, también se basa en un conocimiento formal, adquirido por Omar durante sus años escolares. Las definiciones de número racional e irracional forman parte del lenguaje matemático de Omar. Ante la observación de los reflejos de las bolas, Omar debe, entonces, hacer uso de su intuición y, a la vez, uso de sus conocimientos académicos.

> Omar: Entonces, intuitivamente, si pones más bolas es un infinito más grande, pero si les pones matemáticas pues no. Pero después de lo que discutimos ahorita, pues no, sigo en conflicto pensando que la teoría puede funcionar, si es teórico es posible.

Omar basa su respuesta en la intuición ("si pones más bolas es un infinito más grande"), así como en lo formal ("pero si les pones matemáticas pues no"). Este vaivén entre lo intuitivo y lo teórico le resulta difícil de asimilar ("sigo en conflicto pensando que la teoría puede funcionar"). Aun así, él busca separar lo que identifica visualmente en los reflejos de las bolas de lo que acepta en la teoría (los conceptos abstractos). Al hacer esa separación, Omar hace depender la existencia matemática de los objetos de la existencia física material.

Para concluir su reflexión, Omar comenta lo siguiente:

> Es que no es factible que exista un infinito material, ni siquiera el espacio que sabemos que se está expandiendo, puede que vaya creciendo a cierto ritmo, pero no sabemos si es infinito o no, porque si sigue creciendo significa que no ha parado y si

> para, no sabremos nunca porque no nos daríamos cuenta. Entonces por eso no es factible medir un infinito porque no tenemos un infinito material.

En la reflexión que lleva a cabo Omar se ve el vaivén entre lo intuitivo y lo formal, pues él identifica la necesidad de explicarlo por medio de las matemáticas o como él lo expresa al hablar del infinito de los números naturales "meterle matemáticas". Podemos ver que para él no es suficiente la intuición física para explicar lo que ve de manera material, si esto se proyecta a un proceso infinito. También se observa la necesidad de herramientas cognitivas que lo ayuden a interpretar y conjugar su experiencia física con sus conocimientos matemáticos acerca de los números naturales y los reales.

Reflexiones de miembros del Equipo de Marco.

Mientras los miembros del equipo de Marco están respondiendo las preguntas ¿cuántas bolas hay (se ven, son) si consideramos las del reflejo en el espejo?, ¿las puedes contar?, Se observa, en su conversación, cómo buscan dar sentido a lo que sus ojos ven y lo que se puede proyectar en los reflejos de los espejos.

> Marco: ¿… los puedes contar ahora?, yo creo que es como dijo Erick, hay un límite visible para los reflejos.
>
> Erick: Yo creo que, si pudiéramos decir que hay un infinito entre los espejos, pero ¿para nuestra vista…?
>
> Sara: No podríamos contar la totalidad de ellas, porque en cierto punto no sabes dónde empieza una canica y termina otra

Los estudiantes de este equipo reconocen que su percepción visual les da información que consideran limitada al expresar "hay un límite visible para los reflejos" refiriéndose a límite de visión o al expresar que “en cierto punto no sabes dónde empieza una canica y termina otra”. Ellos distinguen la idea de infinito como una generalización teórica que surge de la repetición de los reflejos en los espejos cuando mencionan “si pudiéramos decir que hay un infinito entre los espejos, pero ¿para nuestra vista…?” al hacer esta pregunta se nota que los estudiantes separan la percepción visual de lo que ellos están entendiendo respecto al infinito.

Al continuar con la siguiente instrucción: retira unas de las canicas y acomoda los espejos para no dejar espacio entre la fila y los espejos ¿ahora cuántas canicas hay (se ven, son) si consideramos las del reflejo en el espejo? ¿las puedes contar ahora? Los estudiantes reflexionan acerca del tamaño de los infinitos.

Erick: O sea, ¿no dejar espacio entre la fila y los espejos?

Marco: Pues… A mí se me hace que sería la misma cantidad. Porque, ¿cómo decirlo? a cada bolita del reflejo de la primera (habla de las bolas que se ven en cada reflejo del espejo) le podemos asignar una bolita del reflejo de la segunda (cuenta la segunda bolita que se refleja en cada espejo), así que creo que los infinitos son iguales, tienen la misma cardinalidad. O sea, pusimos más bolitas en una, pero creo que con los reflejos va a ser igual.

Erick: ¿crees? Porque un espejo no puede reflejar dos bolitas de una, o sea tiene que ser las mismas siempre en cada reflejo.

Marco: La cuestión es que si sigue siendo indefinidamente si podríamos asignarle una a cada una.

La idea de asignar elementos de un conjunto a otro como una biyección, se usa aquí de la misma forma que la usa Cantor para comparar el tamaño de los infinitos y concluir que son iguales. Un recurso que resultó importante para estos estudiantes es interpretar que cada vez que se refleja el espejo en el otro espejo es un proceso indefinido como un infinito potencial.

En la plenaria de la actividad el equipo de Marco dio la siguiente conclusión al responder la pregunta de ¿Cuántas canicas hay? Considerando las del reflejo de los espejos.

> …contestamos que hay una cantidad indeterminada en los reflejos. Si suponemos que nuestra visión es limitada para ver los reflejos, entonces, teóricamente habría infinitos reflejos de canicas, entonces las canicas serían incontables, serían infinitas.

Seguimiento de Hilda.

En la actividad de *El infinito en el espejo* con el grupo de primer semestre de la carrera de matemáticas se trabajó en pequeños grupos y mientras se ponían de acuerdo en equipos para contestar la pregunta de ¿Cuántas bolas hay? se puede observar en la conversación que mantiene Hilda con sus compañeras de equipo, que reconoce que al ser las canicas en los reflejos una cantidad infinita la que se observa en el reflejo de los espejos quitar una no cambia la situación. Ella comenta:

> …¿las puedes contar? Pues tampoco. Es que son infinitas porque se reflejan infinitamente y no las puedes contar y aunque quites una siguen siendo infinitas.

Al reconocer Hilda que seguirán siendo infinitas las bolas en el reflejo, aunque se retire una se puede notar que entiende que el infinito no es sensible a la pérdida de cantidades finitas, esta idea es con la que según Prieto y Fernández (2017) el concepto de conjunto infinito se construye como lo hizo Bolzano. De ese artículo de Prieto y Fernández es del que se toma esta actividad.

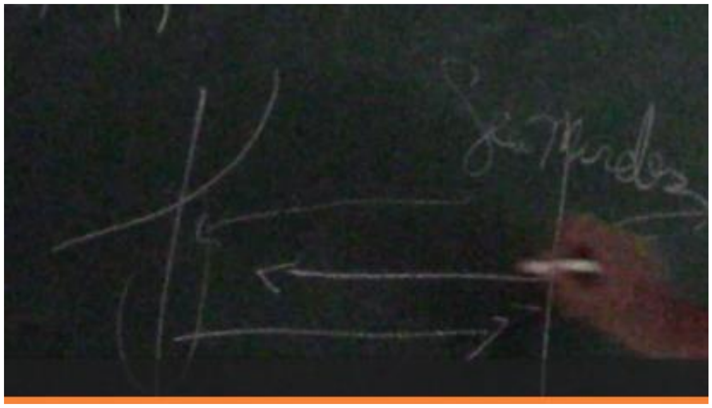
Reflexión de la actividad del infinito en el espejo de los alumnos de séptimo semestre.

Solo tres estudiantes de séptimo semestre (Eloy, Roberto y Pedro) realizaron la actividad de *El infinito en el espejo* y cada uno muestra distintas maneras de entender la situación. Por un lado, Pedro está convencido que los reflejos de las bolas son finitos y por el otro lado Eloy y Roberto creen que son infinitos, pero Eloy con elementos discretos porque identifica por separado cada bola y sus reflejos y Roberto al ver una línea que se forma con los reflejos de las bolas asegura que el infinito del que se trata es continuo.

Pedro asegura que la cantidad de canicas en el reflejo es finita y explica la razón física basada en la pérdida de fotones.

> Es una propiedad. Cuando pasa un fotón a un espejo se refleja, pero hay cierta cantidad que se queda aquí (señala en el pizarrón la línea que dibujó como espejo), cuando pasa al otro espejo y se vuelve a reflejar, igual se queda otra cierta cantidad aquí (señala de nuevo el dibujo en el pizarrón). Entonces llega un momento en el que ya no se vuelve a reflejar porque está en el otro espejo

Figura 41. Bosquejo de Pedro para las canicas en el espejo



Pedro explica que existe una pérdida de fotones cada vez que hay un reflejo en el espejo tomando como base esa información él asegura que los reflejos de las canicas son finitos. Se puede notar en el dibujo que Pedro hace en el pizarrón (figura 30) como los flechas que agrega para describir el reflejo de los espejos no llegan a tocar las líneas que hacen la función de espejo tratando de explicar lo que está viendo y razonando a través de los hechos teóricos que conoce y su experiencia visual. Los argumentos que Pedro usa para su explicación de la cognición híbrida de su experiencia sensorial y el conocimiento teórico acerca del funcionamiento de los fotones.

Cuando los compañeros hacen la observación de que los reflejos de las canicas convergen en un solo punto Pedro explica con argumentos físicos porque es que sucede de esa manera.

> El número de pelotas (*canicas*) siempre va a ser nueve, bueno múltiplo de nueve, pero el reflejo en si va a converger a un solo punto, lo que pasa es que a la vista se va haciendo más pequeña. Y bueno como en los espejos se está haciendo el reflejo del reflejo del reflejo del reflejo va a llegar a un punto donde no se va a distinguir cuántos espejos hay, pero van a ser múltiplo de dos.

Al hablar de que la vista se va haciendo más pequeña, habla de los límites de visión que tiene el ser humano. Pero al concluir que las bolas (como él llama a las canicas) serán múltiplos de nueve hace notar que son un número finito.

Investigadora: ¿Usted puede decir que la cantidad que se refleja es infinita?

Pedro: No, ¿Bueno la que se ve en el reflejo? Sí, porque el final no se puede determinar cuántas veces se refleja en el espejo. Bueno, infinita o no determinable, porque al final no se puede determinar cuántas veces se repitió, entonces no se podría dar un número exacto. Entonces, no es determinable.

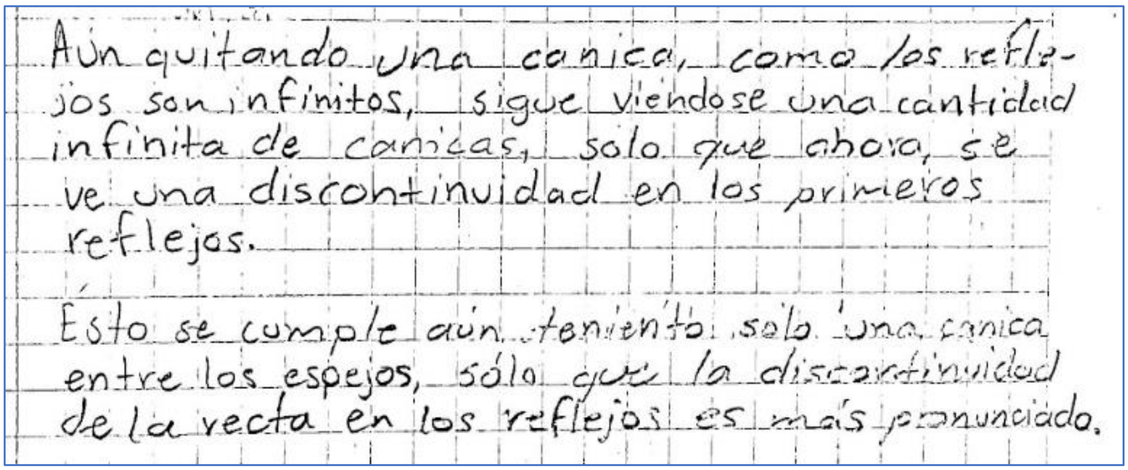
Investigadora: ¿Y qué significa no determinable con respecto a infinito? ¿No es lo mismo?

Pedro: No, no determinable es que no se sabe la cantidad exacta e infinito es que no se puede… no termina.

Pedro concluye que el número de canicas será no determinado y aclara que es diferente a decir que sean infinitos los reflejos. Para llegar a expresar esa diferencia Pedro duda sobre si los reflejos serían infinitos o no, al destacar el hecho de no poder saber cuántas veces se refleja en el espejo como un sinónimo de infinidad y muestra la tensión que se origina entre las ideas que la información teórica le da y su intuición de infinito (algo que no se puede contar) cuando contesta "No, ¿Bueno la que se ve en el reflejo? Sí, porque el final no se puede determinar cuántas veces se refleja en el espejo. Bueno, infinita o no determinable…". Tensión que supera al contestar la pregunta de la investigadora e identificar la diferencia entre no determinable e infinito.

Dentro de la conversación que sostenían los tres estudiantes, Eloy y Roberto coincidían en que los reflejos de las canicas son infinitos, pero se distingue que Eloy lo concibe como una la sucesión de elementos y Roberto habla de los reflejos de las canicas como una línea continua o discontinua que depende de las canicas que se van quitando y dejan huecos en los reflejos. En la explicación que da Roberto por escrito hace énfasis en que el percibe como una recta por ser infinita la cantidad de canicas en el reflejo (figura 42). La intuición de Roberto lo lleva a conjugar la idea de infinito como una recta o curva continua.

Figura 42.Descripción de Roberto de la actividad El infinito en el espejo



Aún quitando una canica, como los refle-
jos son infinitos, sigue viéndose una cantidad
infinita de canicas, solo que ahora, se
ve una discontinuidad en los primeros
reflejos.

Esto se cumple aún tenientó sólo una canica
entre los espejos, sólo que la discontinuidad
de la recta en los reflejos es más pronunciado.

Nota. Se agrega la transcripción de lo escrito en la figura 42.

Aun quitando una canica, como los reflejos son infinitos, sigue viéndose una cantidad infinita de canicas, solo que ahora se ve una discontinuidad en los primeros reflejos.

Esto se cumple aun teniendo solo una canica entre los espejos, sólo que la discontinuidad de la recta en los reflejos es más pronunciada.

La idea de infinito que muestra Roberto está relacionada a la continuidad sobre la cual sustenta su razonamiento corporizado el cual exhibe en distintas ocasiones. Al pedir la investigadora su último comentario Roberto explica como siempre llega a ser algo continuo en el reflejo, aunque se hayan retirado canicas, con el siguiente comentario:

> Hay un momento en que en el primer reflejo se ve un hueco, en el segundo también se ve un hueco y el tercero se ve menos, o sea entre más avanza ese hueco va a desaparecer, ya en el último reflejo se ve todo continuo. Ya no se ve que exista ese hueco, entonces en algún momento va a ser donde ya se ve todo continuo.

La idea corporizada de infinito que tiene Roberto del infinito está basada en la continuidad de una línea. Podemos decir que esa idea proviene de una intuición escolarizada al recordar cómo se enseña la recta real. Para conocer mejor la manera en que Roberto está relacionado el infinito con la continuidad la investigadora le pregunta ¿Siempre tiende a ser continuo? A lo que Roberto contesta:

> Mi cámara no miente, mi cámara dice que hay muchas pelotas (*canicas*) y se van haciendo menos, así como el dibujo, están pegaditas, pegaditas y se van alejando más, al momento que solo se ve una pelota (*canica)* por espejo.

Cuando Roberto habla de su cámara él hace referencia a lo que puede ver en la foto que tomó y dice que "están pegaditas, pegaditas" describe lo que entiende por "continuó". Su cognición híbrida lleva a justificar su idea de continuidad con lo que empíricamente está viendo en la fotografía.

Eloy quien identifica que los reflejos llegan a ser infinitos, pero que si hay menos canicas que reflejar se verán como bloques o elemento no continuos expresa lo siguiente cuando se le pide un último comentario:

> Depende cómo acomodemos los espejos. Si lográramos acomodar los espejos de cierta manera que al tomar la foto se siguiera viendo infinitamente, pues si habría una cantidad infinita de bolas (*canicas*), no importa que fueran nueve bolas

> (*canicas*), porque iba a ser infinito, pero si la cantidad de espejos que se alcanzan a ver es finita, la cantidad de bolas (*canicas*) que se ve es múltiplo de nueve, si quitamos una bola va a ser ocho, lo mismo, pero múltiplo de ocho.

Eloy determina que los reflejos infinitos dependen de la posición de los espejos y concibe potencialmente el reflejo infinito de conjuntos múltiplos de la cantidad de canicas que se están reflejando. Menciona las condiciones que deben tener los espejos para reflejar bolas infinitamente y las incapacidades físicas del experimento.

> Pero como aquí no podemos ver a través del espejo pues por eso hace esa curva y hay un momento donde se dejan de ver los espejos, si tuviéramos alguna herramienta que nos permita ver a través de los espejos entonces a lo mejor sí sería una cantidad infinita.

Eloy expresa que no es posible ver a través del espejo y que es necesaria una herramienta para evitar la curva que hace que los reflejos se pierdan y lograr reflejo de cantidades infinitas.

> Y de hecho se debe de cumplir cada vez que lo reflejemos exactamente desde el centro y que estén alineados (*los espejos*) a una misma altura, que los espejos sean paralelos. Se va a ver una cantidad infinita de espejos proyectados hacia el centro, entonces va a ser una línea infinita y va a converger a un punto en el centro del espejo.

Eloy imagina que en condiciones ideales los reflejos serán infinitos y menciona en su explicación la idea de convergencia como un punto en el centro de los espejos. Dentro de este discurso notamos el vaivén que va de sus intuiciones hacia la generalización en una situación ideal en la cual surge la convergencia. De las idealizaciones teóricas surgen los modelos matemáticos y en este caso la convergencia es un objeto teórico que nos ayuda a describir cómo Eloy concibe el infinito.

6.3 Calculando el volumen de la torre infinita

En el segundo día de aplicación de la secuencia de actividades, los estudiantes resolvieron la actividad *La Torre.* La solución de esta actividad involucra la construcción de dos series infinitas, una para calcular la altura de la torre y, otra, para el volumen. Debemos hacer notar que la serie con la que se calcula la altura diverge y la del volumen converge, además que el cálculo del valor al que converge el volumen no es sencillo y, en general, los estudiantes no lograron obtenerlo, sin embargo, las observaciones y análisis que hacen los estudiantes al construir y comparar las dos series es suficiente para el propósito que planteamos para nuestro estudio.

Las discusiones que se llevaron a cabo en los grupos de estudiantes de primer semestre muestran el uso del lenguaje matemático para describir sus intuiciones y no desde la base formal de las definiciones matemáticas. Por ejemplo, en la discusión del equipo de Marco se destaca cómo él manifiesta su intuición al tratar de identificar que es necesario usar límites para llegar a una conclusión. Al acercarse la investigadora, Marco comenta:

> Maestra, ¿tenemos que usar límites o algo así por el estilo?... como que me suena… esto de la tendencia al infinito, digo: ¿Hay límites?

Marco identifica una relación entre la tendencia al infinito y la necesidad de calcular límites. Él reconoce que la manera de analizar o calcular algo que lleva a infinito es solo mediante la herramienta que proporciona el cálculo de límites. Sin embargo, esa herramienta no parece estar corporizada por Marco, pues la idea surge como una noción aislada y no propone un plan de acción para llevarla a cabo. La noción de cálculo de límites es parte de los conceptos que Marco usa para explicar su intuición sobre el posible incremento del área y del volumen de la torre. Marco tiene la necesidad de usar el cálculo de límites a partir de la lógica matemática formal como método para calcular las series.

Marco al tratar de construir la expresión matemática que define la serie de la suma de las alturas escribe $\frac{1}{n}$ como parte de la suma y comenta: "quedaría así la expresión (*señala su libreta*): $\frac{1}{n}$ al final". Con el término $\frac{1}{n}$, él trata de expresar la noción de seguir indeterminadamente. Con esto, Marco busca llevar a la representación simbólica su noción de la suma de elementos que se siguen agregando de manera indeterminada (la serie infinita).

Esa idea intuitiva, que lleva a Marco a definir la serie infinita al agregar $\frac{1}{n}$ en la expresión, ~~es~~ rechazada por el acuerdo consensuado en el equipo de Marco. En dicho acuerdo, el equipo comentó que usar $\frac{1}{n}$ significaría que la altura de la torre tendría un fin, lo cual va en contra del significado "tiende a infinito" que sugiere la expresión. Sara (miembro del equipo de Marco) explica por qué no deben usar uno sobre n de manera contundente cuando expresa: "decir uno sobre n quiere decir que hay un número final y, al decir infinito, significa que no hay un número final".

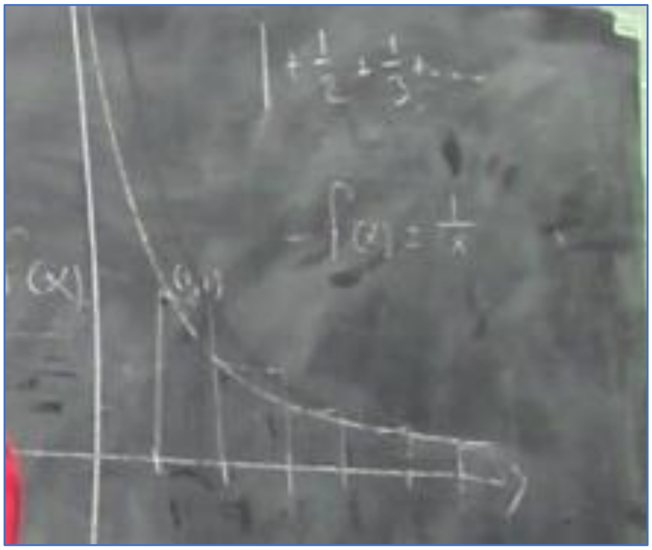
La sugerencia de Marco de escribir la suma con $\frac{1}{n}$ se presenta desfragmentada e incompleta aun cuando su intuición le hace sentido y le encamina a buscar orden o conexión entre la tendencia a infinito y lo que eso representa en la serie de $\frac{1}{n}$. Marco deja de lado la sugerencia por no contar el fundamento lógico matemático para defenderla ante sus compañeros de equipo.

La tensión que se mantiene entre la intuición de buscar sentido en la noción de límite y la concepción del término $\frac{1}{n}$ como el fin de la suma provoca la necesidad de proponer nuevas formas de abordar el problema. De esta manera, surgen ideas de algunas técnicas y conceptos vistos en clases anteriores. Emerge lo que podemos llamar residuos cognitivos: ideas que no son concretas ni claras, pero que se entienden como un recuerdo de algo que se comprendió en algún momento. Un ejemplo es la propuesta de Paco:

> Había en Cálculo un método que se llamaba el método de los discos en donde una función se representaba con varios discos y se calculaba el área desde donde estaba hasta donde tendía y puede ser que tienda indefinidamente y puede ser la expresión de cómo sacar el área, …, el volumen, perdón.

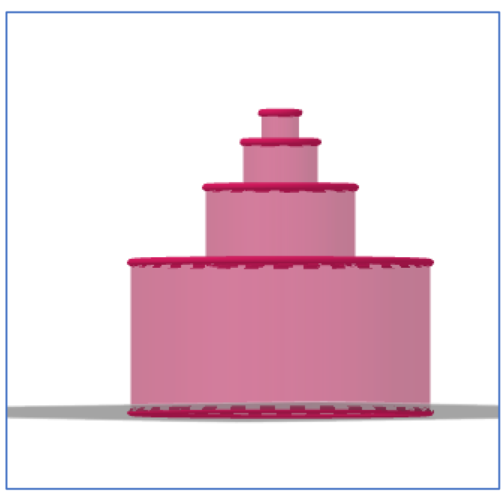
El método de discos es uno de los métodos que se estudian en clase de precálculo de preparatoria para calcular algunas superficies de revolución. Esta propuesta de Paco revela que se trata de un residuo cognitivo al no presentarla bien definida o estructurada. Sin embargo, la idea que Paco plantea involucra dos acciones importantes: la primera es que él lleva la construcción de la torre vertical a una configuración horizontal en donde la altura de la torre ahora está representada sobre el eje de la x en un plano cartesiano (figura 43). Paco rota la imagen mental que él ha construido de la torre de tal manera que encuentra similitudes con la gráfica de una función.

Figura 43. La integral de la torre que propone Paco



La segunda apreciación importante de Paco es que sugiere ver la torre como una función continua. La propuesta es calcular el volumen del sólido que se formará alrededor del eje x con una integral impropia que está definida desde uno hasta infinito. Si consideramos la torre vertical como la sobreposición de cilindros cada vez más pequeños, se genera una figura escalonada (figura 44) que, al rotar sobre la horizontal, dibujara la gráfica de una función discreta en la que los valores de x serán las longitudes de los radios.

Figura 44. La superposición de cilindros



Notemos entonces que Paco muestra el vaivén que va de lo discreto a lo continuo cuando da la sugerencia de ir de la versión discreta de los cilindros superpuestos a la versión continua de la función que rota alrededor del eje x.

El cómo utilizan las herramientas digitales y dan sentido a las intuiciones

Las herramientas digitales fueron utilizadas por algunos estudiantes para realizar cálculos o gráficas, así como para dar sentido a lo que su intuición les decía en la búsqueda de las respuestas a las distintas actividades. Exponemos aquí el caso del equipo de Hilda (del grupo de primer semestre) y el de un grupo de séptimo semestre al resolver la actividad de la Torre.

En la forma en que el equipo de Hilda analizó el problema de la Torre, destaca el uso de los cálculos con Excel respecto a la interpretación del volumen de la torre. Durante la clase plenaria en la cual los estudiantes explican sus resultados por equipo, las integrantes del equipo de Hilda muestran cierta frustración al reconocer que no han podido calcular el volumen a pesar de hacer varias aproximaciones con Excel. Con ayuda de los resultados obtenidos después de 1000 iteraciones, las estudiantes pasan de una idea intuitiva sobre de la existencia de un valor para el volumen a tener certeza de que el volumen es finito y se debe calcular de alguna forma, aunque fue imposible determinarlo con Excel. La idea intuitiva se ve reforzada y surge la necesidad de métodos o algoritmos matemáticos formales con los cuales encontrar el resultado especifico.

Las integrantes del equipo de Hilda comienzan la exploración del problema siguiendo un procedimiento de las sumas que tienden a infinito que su profesor les había enseñado recientemente. Este es un resultado teórico al cual recurren las integrantes del equipo de Hilda y de donde surgen las intuiciones acerca de las sumas de las alturas y los volúmenes. Karla, compañera de Hilda, comenta:

> Nosotras estábamos usando un procedimiento que nos enseñó el profe Oscar para nuestra presentación de las sumas que tienden a infinito y cuándo debemos usarlas y cuándo no. Nos dijo que las sumas se podían hacer cuando sabíamos a qué tiende. Entonces nosotras estamos buscando si la suma tendía a 1 a 2 o a 3, pero llegamos a que no siempre sigue creciendo; bueno, de las alturas sí, pero del volumen, no.

En su análisis con Excel, las estudiantes parten de la convicción de buscar regularidades para saber si es posible hacer la suma de las alturas y de los volúmenes. Encuentran que pueden catalogar el cálculo de alturas y volúmenes como sumas infinitas y que la altura de la torre de cilindros superpuestos siempre va a seguir creciendo, es decir que siempre se siguen sumando elementos cada vez más pequeños. El uso de Excel para realizar los cálculos de los volúmenes ayudó a reflexionar acerca de la posibilidad de que una torre de altura infinita pueda tener un volumen finito.

Cuando las sumas que realizaron con Excel comenzaron a repetir el resultado, Hilda y sus compañeras deciden que la serie tiene que converger a un valor cercano al que la computadora muestra, pero no pueden asegurar la cantidad que suma el volumen. En el extracto de la conversación mencionan 300, 600 y 999 sumandos.

> Hicimos primero hasta 300 y luego hasta 600 y en 600 la suma era 3.77 y dijimos que se parece mucho a la de 300 y luego lo hicimos con 999, y salía lo mismo. Entonces el volumen sí está definido

De la tensión que se forma entre la experiencia empírica de hacer los cálculos con Excel y la búsqueda de la justificación teórica con el cual logren calcular el volumen surge la necesidad de alguna otra herramienta matemática con la cual calcular el volumen. Hilda y compañeras están conscientes que los 999 sumandos que agregaron a la suma no está ni cerca de ser infinito, por lo que el valor que les da Excel no lo consideran como el resultado que buscan. La noción de infinidad mantiene en el vaivén las estudiantes cuando van del hecho teórico que conocen por su profesor hacia la intuición que confirman cuando reflexionan con los resultados de los cálculos en Excel. El conocer que, los 999 sumandos no son suficiente las lleva a la necesidad de algoritmos matemáticos formales con los cuales calcular el volumen exacto de la torre.

En el grupo de séptimo semestre, las propuestas de los estudiantes para abordar el problema de *La Torre* incluían alguna herramienta digital. A diferencia del grupo de primer semestre, los estudiantes de séptimo las usan como un apoyo para generar conjeturas y establecer argumentos que se sustentan en hechos teóricos. Por ejemplo, Eloy, con ayuda del buscador de su computadora, reconoce la serie que quiere calcular como una serie armónica y busca información en videos acerca de ese tipo de series. Encuentra que, al cumplir con ciertas características, las series convergen. Así lo explica a su compañera

> …porque la (*serie*) que converge a dos es la de uno entre dos a la n, y esa incluso tiene todas las partes aquí (señala su libreta) en esta, esta que estamos calculando tiene más partes, tiene que converger a algo más grande.

La intuición de Eloy le lleva a asegurar que el valor al que converge la serie será mayor al de la serie armónica que encontró en internet. La investigación en internet de Eloy le permite conjeturar que la serie que describe el volumen de la torre es convergente. Y a partir de ahí, con base en la información recabada, le da sentido a sus intuiciones sobre las dos series infinitas: la que describe la suma de las alturas y la del volumen de la torre. Su razonamiento comienza desde la información formal y se dirige hacia la búsqueda de sentido de manera que coincida con su intuición.

El equipo formado por Pedro, Joaquín y Roberto comenzó su análisis calculando las sumas de los volúmenes con ayuda de una aplicación de calculadora del celular que tiene capacidad para sumar hasta 2600 sumandos. La experiencia empírica de hacer los cálculos lleva al equipo a la conjetura de que ambas series no convergen. Ahora bien, comenzar su reflexión solo sobre la base empírica no les permite ver las diferencias entre la serie de la altura y la del volumen, como sucedió con el equipo de Hilda, que se ~~a~~poyó en lo que aprendieron con su profesor, o como sucedió con Eloy y su compañera, quienes usaron la información de internet para reconocer las características que son diferentes en las series.

Joaquín hace la suma de 2600 sumandos de la serie de las alturas y de esa serie solo generaliza para la serie de los volúmenes, intuitivamente el reconoce que lo único que será diferente es el exponente.

> Joaquín: No converge. Esta es la misma sucesión que la otra, pero al cuadrado, al cubo (*rectifica)*

> Pedro: Pero esta sube muy, muy lento. Al final va a terminar siendo igual que la otra (*se refiere a la serie de la altura)*

El ver el exponente más grande en el denominador solo les sugirió que el crecimiento sería más lento, pero nunca que la serie es convergente. La intuición de Pedro y Joaquín se desarrolla desde la comparación de los elementos de cada suma y no se muestra una reflexión de qué sucede con esos elementos cuando n tiende a infinito. El no moverse a la parte teórica o formal de los procesos infinitos provoca que los estudiantes generen una idea errónea de los posibles resultados y por tanto buscan darles sentido a conjeturas equivocadas.

Cuando Joaquín comentó en voz alta que la serie del volumen no converge, Eloy (miembro de otro equipo) se acercó a preguntar a sus compañeros qué era lo que ellos creían que no converge. A partir de ese momento comienza una discusión entre Joaquín y Eloy en la cual cada uno defiende su postura.

La búsqueda de información le da a Eloy otra perspectiva, pues no solo se basa en las intuiciones que le dan los resultados de las operaciones ni en la idea de comparar solo con la serie $\sum_1^\infty \frac{1}{n}$, como les sucede a sus compañeros. Aunque no logra hacer el cálculo, muestra la necesidad de encontrar las herramientas formales que le den sentido a la información que tiene.

El equipo de Joaquín y Pedro usan la calculadora como el instrumento para definir si la serie no es convergente y se lo plantean a Eloy, quien no acepta esa conjetura pues tiene información acerca de las series armónicas, aunque los valores que da la calculadora sean una suma muy grande. Eloy está seguro de que debe dar un valor específico, es decir que el volumen converge.

Pedro: No es que converja a algo, bueno sí y no. Porque sí lo va a rebasar.

Joaquín: Sí, porque como que se estanca en un valor, pero…

Pedro: El problema es que es muy poco, no hay mucha diferencia.

La indecisión que muestra Pedro esta influenciada por su intuición según la cual la acción de sumar significa agregar siempre más y, por consiguiente, el valor de la suma debe ser cada vez mayor, aunque sea “muy poco”. Ahora bien, Pedro pierde de vista que el proceso infinito puede llegar a converger si lo que se suma tiende a cero más rápido; reafirma su concepción de que la suma infinita $\frac{1}{n^3}$ se obtiene de generalizar $\frac{1}{n}$ y de que ambas sumas serán divergentes. Aun viendo en sus cálculos que hay una especie de estancamiento de los valores que sugiere la convergencia, a Pedro no le hace sentido que esa serie pueda converger.

Pedro concibe la multiplicación como un crecimiento directo y no toma en cuenta que los factores que está multiplicando son cocientes 1/n que implican un decrecimiento de los elementos de la suma. Lo anterior se refleja en el extracto de la conversación de Pedro que se presenta a continuación:

> …porque esta misma de aquí no converge *(señala la serie de $\sum_1^\infty \frac{1}{n}$),*entonces esta que es un múltiplo es como si multiplicara la anterior … (inaudible) puede que se acerque al uno punto veintiuno, pero puede que en diez millones pase de uno punto veintiuno.

Cuando Pedro habla de los múltiplos de algún número, lo hace con base en que el resultado de multiplicar arroja, siempre, un número mayor, sin tomar en cuenta que la multiplicación de una fracción dará como resultado un número más pequeño. Las intuiciones que surgen de la experiencia empírica de Pedro son más fuertes que los hechos teóricos que su compañero Eloy le muestra. Para llevar a una confrontación de las ideas de Eloy y Pedro la Investigadora pregunta por sus conclusiones. Eloy responde como sigue:

> Está converge *(señala la serie para el volumen)* y esta no (*señala la serie de la altura).* Este no porque un criterio de convergencia para las series armónicas es que

el denominador esté elevado a un exponente mayor a uno y este es exactamente uno. Entonces ya había visto antes que la serie que consta de todos los números de uno entre n no convergía, que divergía, más bien. Y este sabemos que converge porque sabemos que el exponente de n es mayor a uno, pero no sabemos a qué converge.

La investigadora recalca a Pedro y a Eloy que los dos llegaban a distintas conclusiones respecto al volumen de la torre aun teniendo como base la misma serie que representa la suma de los volúmenes. La investigadora pidió a los dos equipos (tanto el de Eloy como el de Pedro) que expusieran sus conclusiones y la justificación de ellas en plenaria grupal. Ahí comenzó una discusión en la cual Pedro defiende la idea de que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{n^3}$ no converge y Eloy que converge.

La concepción de Pedro de generalizar de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{n}$ a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{n^3}$ por tomar la segunda sucesión como un producto de la primera como sucederá en el álgebra con elementos finitos se está basada en la intuición que da la aritmética y no toma en cuenta que los algoritmos no funcionan igual en los procesos o conjuntos infinitos. El argumento de Pedro nos hace recordar al de Karina (la alumna del laboratorio didáctico, mencionada en el capítulo 4) que su primera intuición fue hablar de que las pelotas fuera del saco serian el 10 % de las que estaban originalmente dentro hasta que cayó en cuenta que no tiene sentido hablar del 10 % del infinito.

Eloy defiende su punto con el siguiente argumento:

…aquí *(encierra en un círculo $\frac{1}{n}$)* estas tomando valores más grandes que acá *(encierra en un círculo $\frac{1}{n^3}$).* Cada uno de estos es mayor *(señala $\frac{1}{n}$ y agrega el símbolo de mayor que entre las dos expresiones).* Hay un criterio de convergencia con el que puedes encontrar una cota y es lo que estoy tratando de buscar, una cota. Entonces voy a buscar una sucesión que yo sepa a dónde converge y eso va a ser una cota para esta sucesión, entonces esta cota va a converger.

Cuando Eloy comienza a hablar de criterios de convergencia, muestra que su cognición está influenciada por los hechos teóricos y busca un método conocido para argumentar que la serie converge. Eloy propone $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n} \backsim 2$ y se retira a su mesa a trabajar en su computadora.

Pedro explica cómo entiende $\frac{1}{2^n}$ respecto a la sucesión $\frac{1}{n}$.

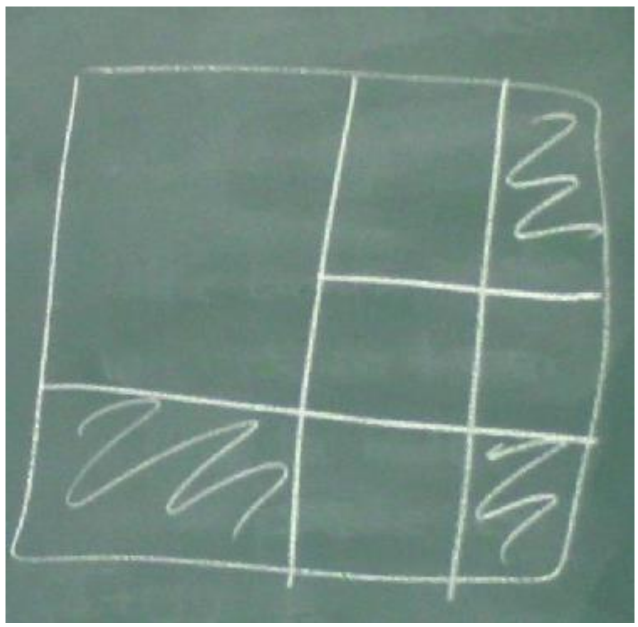
> No se sobrepone (*se refiere a los elementos de la sucesión* $\frac{1}{2^n}$). En cambio $\frac{1}{n}$ sí se sobrepone porque en primero corta en la mitad y el siguiente corta en un tercio y hay un pedazo del tercio que va a quedar en la mitad (*la que se cortó primero*). Y luego se corta en un cuarto y puede que no haya nada del tercio que quede ahí, pero después corta en un quinto y muy a fuerzas va a quedar una parte de un medio y una parte de un cuarto en ese.

Con esa explicación Pedro muestra porque no puede considerar el comportamiento de la sucesión $\frac{1}{n}$ parecido al de la sucesión $\frac{1}{2^n}$ y tomarla en cuenta para acotar la sucesión según la sugerencia de Eloy. Pedro comprende bien que la sucesión $\frac{1}{n}$ no diverge y tiene una imagen mental de ella que puede representar con la suma de los cortes de un recuadro que incluso dibuja. La explicación a su compañero Eloy:

> … Es lo que te digo que el uno sobre n no converge porque cuando empiezas a hacer la partición empieza a tomar pedazos muy a fuerza (*algo que debe suceder)* de

los anteriores *(señala el dibujo del pizarrón, figura 45)* pero un tercio va a tomar (un) pedazo del medio y un quinto va a tomar pedazo de un medio, o de un tercio a de un cuarto y es por eso por lo que esa sucesión no converge porque estas tomando pedazos de más y la de uno sobre dos a la n no, esa corta pedazo y luego corta en otro nuevo y así.

Figura 45. Sucesión 1/n



Pedro usa el razonamiento corporizado al plasmar el diagrama en el pizarrón de la representación de la sucesión $\frac{1}{n}$ y hace las comparaciones adecuadas respecto a la suma de sus elementos; pero esta comparación no es suficiente para usar ese mismo razonamiento y analizar la sucesión $\frac{1}{n^3}$. Al no identificar las diferencias significativas entre las sucesiones no tiene conflicto al generalizarla conclusión de $\frac{1}{n}$ $para \frac{1}{n^3}$. Simplemente no es necesario para él hacer un análisis especial para los elementos de $\frac{1}{n^3}$.

Por su parte Eloy muestra el vaivén entre lo discreto y lo continuo cuando las sucesiones las propone como funciones. Él entiende claramente que al graficar en GeoGebra debe usar la expresión de una función continua y que la gráfica dibujada es un apoyo visual que utiliza para ver el comportamiento de los elementos de la sucesión que solo son puntos discretos sobre la curva de la función.

> Eloy: (*Se levanta para mostrar la gráfica que hizo en su computadora*) Mira, aquí grafiqué la función $\frac{1}{2^x}$ y $\frac{1}{x^3}$ (figura 46). La uno entre x al cubo es la azul y la uno entre dos a la x es la rosa. La azul está siempre por debajo a partir del punto… como de 1.4 (figura 47). Eso quiere decir que, como esta área que está por debajo de las curvas es finita, podemos calcularla y, a partir de aquí, como todo está por debajo *(señala la gráfica azul)*, va a tener una cota y ¿Cuál es la cota? Esta *(señala la gráfica rosa)* entonces yo pienso que sí converge.

Figura 46. graficas de las funciones 1/2^x y 1/x^3

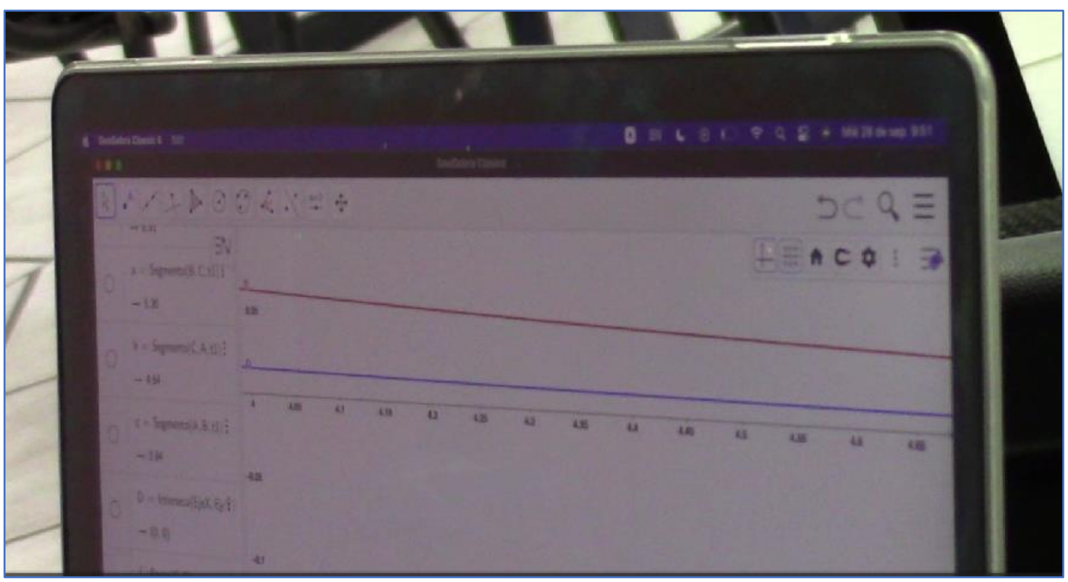
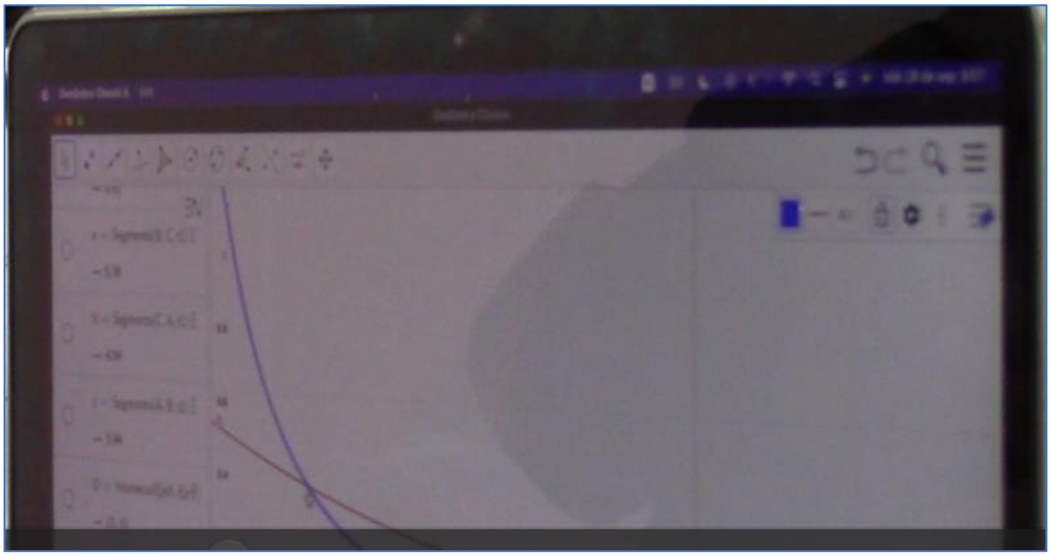


Figura 47. Grafica por debajo a partir de 1.4



Eloy analiza las gráficas al mismo tiempo que escucha el argumento de su compañero Pedro. Eso le ayuda a identificar que la función que propone no es la adecuada. Él sí manifiesta en un conflicto cognitivo que lo obliga a buscar mejores argumentos. Su intuición está fundamentada en la información teórica que obtuvo y en la experiencia empírica que les muestra a sus compañeros Pedro y Kasaandra.

Eloy: Ya sé lo que quieres hacer (*le dice a su compañero Pedro que está escribiendo otra función en su computadora)*, si lo que yo digo es cierto, entonces $\frac{2}{x}$ es una cota superior de esa ¿verdad? Y está por debajo, entonces contradice lo que yo estoy diciendo porque aquí no converge y uno entre x tampoco, … tienes razón. Entonces estoy argumentando mal.

Los estudiantes usan distintos recursos para tratar de explicar sus argumentos. Eloy usa GeoGebra para graficar funciones que asoció con las sucesiones que está comparando y utiliza el área bajo la curva para referirse a la serie con la que relaciona la sucesión (figura 46). Por su parte, Pedro dibuja en el pizarrón un cuadrado que va dividiendo para hacer referencia a las particiones que representan cada elemento de la sucesión y la suma de ellos. Muestra que la suma de todos los elementos de la sucesión será mayor al área del cuadrado del que divide. Ambos buscan una representación visual de lo que están tratando de exponer para darse a entender.

6.4 El triángulo de Sierpinski

En la actividad El triángulo de Sierpinski se les solicito a los estudiantes que, en equipos calcularan el perímetro del triángulo de Sierpinski y la suma del área de los triángulos que se van eliminando.

La experiencia de buscar la suma del área de los triángulos cada vez más pequeños deja mostrar en los estudiantes de primer semestre la confusión de concebir el significado de los infinitesimales. Del proceso de ir dividiendo y eliminando triángulos de manera infinita implica que el área de los triángulos sea cada vez es más pequeña y tiende a cero. La primera idea, que los estudiantes discuten, decidir si las pérdidas de área de los triángulos negros llevaran a la pérdida total de área. Intuitivamente, la pérdida hace pensar que hay un momento dentro del proceso que no habrá más área que perder. Como lo expresa Sergio (estudiante de primer semestre y miembro del equipo de Omar) se pierde toda el área:

> … se va haciendo más chica no sé si hay un momento en el que el triángulo negro no pierda más área o en el que la pierda toda.

Sergio distingue dos acciones en la pérdida del área: una es que los triángulos no puedan perder más área y otra que la pierda toda en cierto momento y aunque puedan parecer conclusiones similares la confusión que él expresa al decir “no sé si hay un momento…” nos muestra que él está pensando en este proceso infinito que lleva el significado implícito de no terminar. Físicamente, la experiencia de ir perdiendo área lleva a pensar en un momento en el que se perderá todo, lo cual implica un fin en el proceso infinito. Cuando Sergio expresa “no puede perder más área”, él entiende que el proceso no termina, sin embargo, también entiende que el área que se divide será tan pequeña que prácticamente no hay área que perder. Esto muestra que Sergio tiene conciencia de un área finita está implicada en un proceso infinito dentro de este problema.

Esta disposición de un proceso infinito que lleva a pensar en cantidades infinitesimales resulta contra intuitivo y surge la necesidad de pensar en el límite del proceso cuando este tiende a infinito. La necesidad de argumentos formales o definiciones matemáticas que den sentido a la experiencia teórica que se construye con este ejemplo surge en los estudiantes.

Mientras Sergio se convence que el área de los triángulos negros llegará a ser cero en algún momento (el límite), Omar insiste en que eso no es algo que se pueda asegurar.

> Omar: Pero es que arbitrariamente se va haciendo más chiquito, pero ¿cómo sabes que va a llegar a cero?... pero puede decrecer al infinito

Omar expone que “decrece al infinito” y exhibe de nuevo que su intuición al hablar de un proceso infinito significa que siempre lleva a ser más área, más volumen, mayor cantidad. De lo que se esté hablando, el infinito para Omar es algo más grande, al igual que en la reflexión acerca de los reflejos de las bolas en el espejo cuando expresa “intuitivamente parece que es más grande, pero si le metemos matemáticas”. Omar, al hablar de las bolas en los reflejos, destaca la necesidad de "meterle matemáticas" para encontrarle un sentido lógico a su argumento y concluir que no puede haber infinitos diferentes de números naturales. Sin embargo, esta reflexión no encuentra el sentido lógico que le ayude a describir lo que ocurre en el proceso infinito que se analiza para el área de los triángulos, pues el proceso lleva a tener cada vez menos área, a decrecer.

La respuesta de Omar, cuando la investigadora le pregunta ¿Qué significa decrece al infinito? Describe cómo los decimales para él representan un proceso de decrecimiento.

> Omar: Que entre más decimales vayamos poniendo más chiquito es el número, entonces puede decrecer a infinito… O sea, va bajando en torno a que se va haciendo más chiquito por cada decimal que pones, entonces siempre se va a ir acercando a algo, pero nunca va a llegar porque si agregas un decimal más se está haciendo más chiquito.

Omar describe cada uno de los números que están implicados en el proceso infinito de decrecimiento y tiene claro que siempre habrá otro más pequeño. Al igual que en el pasaje de Galileo, al contar cada uno de los cuadrados de los números, se involucran en una acción que no tendrá fin ni sentido. Al concebir el proceso como una acción completa, la intuición de límite como la suma que tiende a cero surge en Omar al igual que en Sergio que describe ese proceso. La concepción de los procesos infinitos y los límites de procesos infinitos implica un vaivén entre identificar cada elemento implicado agregándose al conjunto uno a uno por separado y el proceso como un todo, tener el conjunto infinito completo, concebir el infinito potencial y el infinito actual.

Para Marco fue más sencillo identificar el límite como una herramienta conceptual en este problema que en el de La Torre. En la suma de los volúmenes de la torre solo sugiere que podrían ser límites los que le ayudarían a llegar a una respuesta, pues idéntifica en la redacción del problema que está implicado el infinito. En este problema de calcular el área de los triángulos encuentra la relación y lo explica de la siguiente forma:

> Se va a seguir reduciendo indefinidamente, pero consideramos que en caso de existir un punto donde ya no hay nada. Es como los límites. O sea, los límites es que quieres llegar a cierto punto, pero nunca vas a llegar, pero consideras que, si vas a llegar, como preguntarte ¿y si llegas qué pasaría? Es como una suposición, por así decirlo. Para darle un sentido. Para más o menos explicar cómo es el último punto. Sí, solo que, en la praxis, por así decirlo, no llegas, es algo meramente teórico.

La intuición de Marco, respecto al concepto de límite cuando se tiende a infinito, encuentra sentido lógico al reflexionar cómo el proceso de reducir el área de los triángulos será convergente. Marco describe el proceso como "meramente teórico". Con esto observamos cómo su cognición se dirige a la parte formal. La idea de límite para Marco es más clara cuando su cognición muestra esa forma híbrida en la que la intuición conecta con la descripción formal de límite en la cual él mismo califica como algo teórico.

Por otro lado, el equipo de Hilda reconoce que al ser infinito el proceso con el que se forma el triángulo de Sierpinsky es un fractal cuyo perímetro será infinito. Las estudiantes de ese equipo comprenden que el calcular el perímetro conlleva la búsqueda de un valor especifico que determina la longitud y, al expresar que no es posible calcular el perímetro, muestra que ellas son conscientes que el infinito no es un valor especifico. Su imagen conceptual de infinito está direccionada a la definición conceptual y tienen claras características importantes como que el infinito no es un número muy grande. En la siguiente transcripción de la explicación que da Hilda en la plenaria grupal podemos ver cómo abordaron el problema:

> En los fractales tiene perímetro infinito, entonces el perímetro va a ser infinito y no lo podemos calcular en sí, pero el área de la suma de los triángulos que se van eliminando sí se puede calcular. Llegamos a la conclusión de que se va a eliminar toda el área, entonces lo comprobamos.

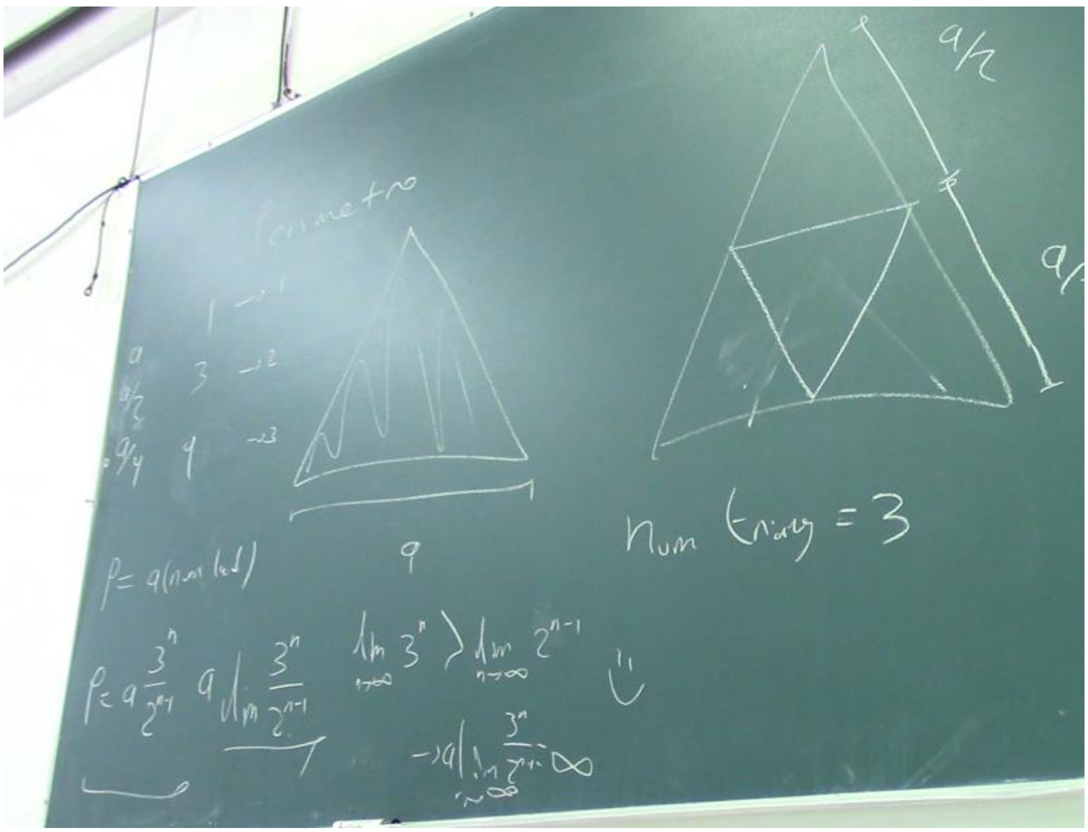
Hilda y sus compañeras parten de la intuición de que el área de los triángulos se elimina por completo y, movidas por la cognición híbrida, buscan la forma de comprobarlo con argumentos algorítmicos e identificarlo con patrones matemáticos. Van de lo intuitivo a lo formal. El de Hilda comentó el procedimiento que usa para hacer los cálculos:

> Primero sacamos el área que se elimina. Del primero es un cuarto, del segundo se eliminan tres dieciseisavos de la primera y así fuimos viendo que se seguía un patrón para la sucesión. Entonces son fracciones; el término de arriba se sacaba tres a la n menos uno y el término de abajo se sacaba de cuatro a la n. Entonces ya lo sacamos en un Excel. Lo sumamos y en cierto punto todos daban cero porque ya no quedaba más área de donde eliminar.

Hilda y sus compañeras son del grupo de primer semestre de la carrera, por lo que no conocen herramientas matemáticas para buscar la convergencia de un límite de sucesiones o series. Así que el determinar la fórmula general de la sucesión y realizar los cálculos con Excel representa esa formalidad matemática que da sentido a sus argumentos. Ellas usan la palabra “comprobar” y parecen conscientes de que no es una demostración.

El grupo de séptimo semestre tiene más herramientas matemáticas, pero también tiene la necesidad de ser más rigurosos en sus argumentos. Los estudiantes de séptimo semestre usan el pizarrón para expresar el límite de la sucesión y concluyen que el perímetro tiene a infinito debido al análisis que hacen de los términos de la fracción (figura 48).

Figura 48. Dibujos de los estudiantes de séptimo semestre



En el procedimiento que usan los estudiantes de séptimo semestre (principalmente Pedro y Eloy, quienes la mayoría de las veces se involucran en la discusión) siempre se incluye la búsqueda de criterios formales para la convergencia o divergencia de las sucesiones que establecen. Y para este problema del triángulo de Sierpinski, al no encontrar el criterio que dé sentido a sus argumentos no afirman que el área converja a cero. Esto se muestra cuando Eloy comenta:

> Eso es más fácil de ver (se refiere al perímetro) porque al final se va aumentado todo, pero ¿el área?... el criterio que podemos utilizar aquí, porque yo no lo veo tan claro, es que los triángulos se van haciendo tan chiquitos, tan chiquitos que al último se desprecien.

El criterio de despreciar los triángulos que se van haciendo cada vez más pequeños no es suficiente para Eloy, por lo que no concluyen si será convergente o no la serie hasta que en la plenaria lo discuten y entre todos los miembros del grupo de séptimo y llegan a un consenso.

6.5 La bolsa de pelotas

La actividad lleva en su proceso de solución la necesidad de integrar la noción de infinito potencial y la de infinito actual. Los estudiantes de ambos grupos dieron evidencia con su argumentación (principalmente cuando lo expresan de manera oral) de identificar ambas nociones del infinito.

La intuición de la noción de infinito potencial en general es la idea con la que se comienza a discernir la situación descrita en el problema. Los estudiantes de primer semestre fueron identificando con las actividades anteriores que ver el infinito desde un enfoque más teórico les ayuda a comprender cómo es el comportamiento de los procesos. Andrés, quien es miembro del equipo de Omar, lo muestra en el siguiente comentario:

> Como que lo va haciendo más rápido…. ¿se podría que llegará a tardar menos de un segundo? O sea ¿realmente se podría? Sería una función infinita, pero acotada también, pero ¿entonces? ... Si teóricamente se pudiera tardar la mitad de un segundo y luego el cuarto de un segundo y el octavo de un segundo entonces las

> pelotas también serían infinitas porque siempre tendería a llegar al minuto, pero siempre se estaría haciendo más pequeño el tiempo en el que tarda …

Cuando Andrés argumenta que "si teóricamente se pudiera tardar la mitad de un segundo…" abre la posibilidad de analizar una acción que físicamente no puede suceder y lo que para Andrés la idea de función infinita, pero acotada, resulta contra intuitivo y confuso, sin embargo, el plantearse un enfoque del infinito teórico lleva a Andrés a concluir que la cantidad de pelotas que estarían afuera de la bolsa serán infinitas. Contestar de esta forma nos permite ver que él usa la noción de infinito actual, un infinito completo. Andrés continua:

> …llegaría a un punto tan cercano al minuto, pero nunca llegaría y seguiría sacando pelotas… o si llegaría, pero serían infinitas pelotas afuera porque estaría partiendo el tiempo que le queda para llegar al minuto.

La cognición híbrida se muestra en los comentarios de Andrés y, aunque no tiene las herramientas matemáticas que le ayuden a sustentar su reflexión, las nociones se van aclarando en el vaivén de su intuición a lo que considera más teórico.

Por su parte, Hilda se apoya en un ejemplo visual, que le es conocido, para explicar a sus compañeras por qué el minuto termina. Compara el minuto de tiempo que trascurre con el área de un cuadrado que divide por la mitad y la mitad de la mitad cuadrado de manera infinita con lo que asegura que la suma del tiempo se acerca al minuto. En la explicación que ella proporciona, muestra la necesidad de vincular el proceso infinito con la experiencia física que da el bosquejo del área del cuadrado y dibujar los cortes. Asegura que lo que ella está entendiendo lo comprendan sus compañeras desde la experiencia sensoriomotora.

> Hilda: Sí se acerca al minuto al final, porque es como un cuadrito que es un minuto y te queda la mitad y la mitad ya la mitad y se va a acercar al final hasta uno, pero va a ser infinita la suma de las mitades se puede partir en mitad infinitamente. Pero sí van a quedar infinitas pelotas afuera.

Cuando Hilda concluye que “van a quedar infinitas pelotas afuera” lo hace con base en la intuición que se refina con la reflexión del proceso de sumar el tiempo. Ella no da una justificación formal de su conclusión porque para ella es suficiente vincular el proceso del tiempo con la extracción de pelotas. Si seguimos el desarrollo que llevó Hilda en la resolución de las actividades se nota cómo junto con sus conocimientos previos el apoyarse con Excel para calcular y reflexionar acerca de los procesos infinitos le va dando una intuición más refinada de la noción de infinito. Con esa intuición más refinada Hilda no duda al determinar que las pelotas serán infinitas como un conjunto completo, es decir lo expresa como el infinito actual.

Los estudiantes de séptimo semestre muestran un concepto imagen de las nociones de infinito potencial y actual más cercanas a la idea de infinito matemático Para ellos fue sencillo entender que la solución de la actividad puede ser algo que en el mundo físico resulta imposible replicar, como lo expresa Joaquín:

> Vamos a tener infinito de canicas (pelotas) afuera y adentro también…Podemos estar poniendo algo que físicamente es imposible.

Las herramientas matemáticas que mostraron tener los estudiantes cuando discutían las actividades anteriores dan cuenta que su concepción de convergencia orienta su intuición respecto al proceso infinito que se desarrolla respecto al tiempo en esta actividad. Roberto lo dice así:

> En el tiempo sí llegas porque dice que es en un minuto, en algún momento se va a acabar el minuto.

Cuando Roberto menciona “en algún momento se va a acabar el minuto” denota que el proceso infinito de ir sumando la mitad del tiempo restante se completa cuando pasa el minuto. La cognición híbrida permita pasar de la intuición que brinda la noción de infinito potencial a la idea teórica de convergencia la cual da sentido a la situación de poder realizar un proceso infinito en un tiempo finito y buscar las herramientas matemáticas con las cuales poder demostrarlo.

La actividad para los estudiantes de séptimo los llevo a la reflexionar respecto de cómo demostrar que al pasar el minuto se tendrán infinitas canicas (o bolas) dentro y fuera del saco. Con la idea de biyección le dan orden y sentido a la intuición que les dicta que se tendrán dos conjuntos infinitos de canicas (uno dentro del saco y otro con las canicas que se extraen). Lo explica Eloy de la siguiente forma:

> Supongamos que la cantidad la podemos biyectar con los naturales, porque son números enteros, entonces tomamos los que se ven como 10n y esos son los que vamos sacando los otros no y es una explicación lógica. Se pueden biyectar esos con los naturales también y son una cantidad infinita, pero aparte los que se quedan dentro del saco también son una cantidad infinita.

La experiencia que Eloy al elegir el conjunto de números Naturales para hacer la biyección y el uso de conectores como “supongamos y entonces” demuestra que hay en su cognición un formalismo corporizado. La interiorización de herramientas matemáticas hace que se agreguen a sus herramientas cognitivas y Eloy las apropia como parte de su lenguaje. El vaivén de ir de la noción de infinito potencial a la de infinito actual le da sentido a la experiencia contraintuitiva que sugiere tener el infinito completo en el conjunto de los números Naturales. Incluso les da a los estudiantes la capacidad de poder comparar los conjuntos de canicas que quedan dentro del saco y las que quedan fuera.

> Joaquín: Son de la misma cardinalidad… una crece más rápido, pero son de la misma cardinalidad, la de los naturales

Cuando Joaquín menciona que el conjunto de canicas dentro de la bolsa y el que queda fuera son de la misma cardinalidad asegura que son la misma cantidad de elementos, pero además menciona una diferencia entre los dos conjuntos de canicas que será la rapidez con la que crece uno con respecto del otro haciendo uso de la concepción de su experiencia sensorio motriz en el mundo físico para explicar una situación completamente hipotética. El vaivén de la intuición física a la certeza que da la descripción formal da sentido y genera una comprensión más clara.

Reflexiones finales

Dentro de la experimentación llevada a cabo con los estudiantes de la licenciatura en matemáticas aplicadas se puede distinguir ya la tensión entre las intuiciones y el acercamiento formal vía la correspondencia biunívoca al explorar el infinito actual. Nuestro trabajo se localiza en el campo de la cognición corporizada, tal como ha sido desarrollada por M. Donald y Lakoff-Núñez en los libros referenciados en este trabajo. La noción de infinito actual vive su vida conceptual entre la experiencia sensoriomotriz y las formulaciones simbólicas propias de las matemáticas. Pero el reemplazo prematuro de las ideas intuitivas —que en realidad son consecuencias inarticuladas de la corporización, por la formalización cantoriana genera obstrucciones cognitivas difíciles de superar para los estudiantes. Allí emerge como una necesidad didáctica, la noción de metáfora conceptual (Lakoff-Núñez) que vincule las intuiciones con su eventual formalización. Todos los casos de infinito en matemáticas, de acuerdo con Lakoff-Núñez (p. 158) por ejemplo, límites, series infinitas, conjuntos infinitos y demás, corresponden a procesos que no terminan pero que nosotros los conceptualizamos como si en efecto, tuviesen un final. De nuevo: los seres humanos podemos imaginar el resultado de un proceso que no termina. Es el caso de la existencia de los números irracionales definidos mediante una colección infinita de dígitos que ni siquiera podemos conocer completamente, excepto en esa otra dimensión de nuestras experiencias cognitivas como lo es la realidad virtual de las matemáticas y demás mundos simbólicos creados.

Las nociones de los estudiantes respecto al infinito se van formando y consolidando a través del ir y venir entre las experiencias que llevan a sus intuiciones y las experiencias que tienen de su quehacer en las matemáticas.

La experiencia física de ver “reflejado” el infinito en el espejo lleva a los estudiantes a la reflexión de la necesidad de objetos teóricos y discutir la existencia y modo de existir del infinito matemático.

Referencias

Arquímedes (1986). El método. (Puertas, M. y Vega, L., trans) Alianza Editorial (Trabajo original escrito entre los siglos XII y XIV).

Codes, M., Delgado, M.L., González Astudillo, M.T. y Monterrubio, M.C. (2013) Comprensión del concepto de serie numérica a través del modelo de Pirie y Kieren, Enseñanza de las Ciencias 31 (3), pp. 135-154

Dantzig, G., Fulkerson, R. y Johnson, S. (1954). Solution of a Large-Scale Traveling-Salesman Problem. HomeJournal of the Operations Research Society of AmericaVol. 2, No. 4 Published Online:1 Nov 1954https://doi.org/10.1287/opre.2.4.393

Dehaene, S. (2011). *The number sense: How the mind creates mathematics* (Rev. and updated ed.). Oxford University Press.

Demidov, S. y Shenitzer, A. (2000). Two letters by N.N. Luzin to M.Ya. Vigodskii. The American Mathematical Monthly, 107(1), 64–82.

Donald, M. (2001). A Mind so Rare. Norton, New York.

Duval, R. (2008). *Eight Problems for a Semiotic Approach in mathematics education.* L.Radford, G. Schubring and F. Seeger (eds): Semiotic in Mathematics Education, Epistemology, History, Classroom, and Culture, Sense Publishers. pp. 39-61

Edwards, C.H. (1979). The Historical Development of Calculus. New York: Springer-Verlag.

Fernández, J. (2016). Un acercamiento a los fundamentos del cálculo el infinito y los números reales. Ciudad de México.

Grabiner, J. V. (1983). Who Gave You the Epsilon? Cauchy and the Origins of Rigorous Calculus. The American Mathematical Monthly, 90(3), 185–194. https://doi.org/10.2307/2975545

Ghergu, M. (2017). Difficulties in teaching calculus concepts in undergraduate courses: the notion of limit of a sequence. Curtis, F. (Ed.) Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics 37 (2).

Klein, F. (1896). The arithmetizing of mathematics. Bulletin of the American Mathematical Society (BAMS), 3, 241-249.

Klein, F. (1908, 2017). Elementary Mathematics from a Higher Standpoint, (nueva traducción al inglés de G. Schubring. New York: Springer-Verlag.

Moreno-Armella, L. (2014). Intuir y formalizar: procesos coextensivos. Educación Matemática, 185-206.

Lakoff, G., y Johnson, M. (1980). *Metaphors we live by*. Chicago University of Chicago Press.

Lakoff, G. y Nuñez, R. (2000). *Where Mathematics Comes From: How the Embodied Mind Brings Mathematics into Being*. New York.

Luria, A. R. (1981). Fundamentos de neuropsicología. *São Paulo: EDUSP*, 223-44.

Ong, W. (1987). Oralidad y escritura Tecnologías de la palabra. Fondo de cultura económica.

Pierpont, J. (1899). On the arithmetization of mathematics. Bulletin of the American Mathematical Society, 5(8), 394-406.

Prieto, J. y Fernández, C. (2017). Estudio del infinito actual siguiendo el modelo de inclusión de Bolzano con la ayuda de una experiencia física de espejos paralelos. En Codina, A (Coord.), Puig, L. (Coord), Arnau, D., Sánchez, M.T., Montoro, A. B., Claros, J., Arnal, M., Baeza, M. A. (Eds.) (2017). Investigación en pensamiento numérico y algebraico: 2017 (pp. 11-18). Madrid: Universidad Rey Juan Carlos, SEIEM. Lugar: SEIEM

Roh, K.H. (2008). Students' images and their understanding of definitions of the limit of a sequence. Educ Stud Math 69, 217–233. https://doi.org/10.1007/s10649-008-9128-2

Rowland, T. y Ruthven, K. (2011). Mathematical Knowledge in Teaching. 10.1007/978-90-481-9766-8.

Tall, D. y Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limit and continuity. Educational Studies in Mathematics, 12, 151–169.

Thom, R. (1972). Modern mathematics: does it exist? In A. G. Howson (Ed.), Development in mathematical education. Proceedings of the second international congress on mathematical education (pp. 159–209). Cambridge: Cambridge Univ. Press

Vinner, S. (2018). Mathematics, Education, and Other Endangered Species: From Intuition to Inhibition. Springer.

Villabona, D. y Roa, S. (2016). Procesos iterativos infinitos y objetos trascendentes: un modelo de construcción del infinito matemático desde la teoría APOE. Educación Matemática, 28(2), 119-150.

Zeldóvich, Y. y Yaglom, Y. (1987). Matemáticas superiores para los físicos y técnicos principiantes. Editorial Mir, Moscú.