CENTRO DE INVESTIGACION DEL IPN
APARTADO POSTAL 19-197
MEXICO 19, D. F.

DEPARTAMENTO DE INVESTIGACIONES EDUCATIVAS

CONCEPTUALIZACIONES Y PROCEDIMIENTOS DE MEDICION DE AREAS EN LA ESCUELA PRIMARIA

T E S I S

Que para obtener el grado de Maestro en Ciencias en la Especialidad de Educación

P r e s e n t a

Licenciada en Pedagogía
Raquel Domínguez Mora

Director de Tesis:
Irma Elena Sáiz Martín

Marzo, de 1984

AGRADECIMIENTOS

A mi esposo Francisco Alberto. Su dedicación, paciencia y apoyo, sin los cuales hubiera sido imposible la realización de esta maestría, se entregaron a costa de sacrificar y postergar su propio desarrollo. Su amor y la forma en que compartimos nuestras vidas da significado a mis actividades y logros.

Al Departamento de Investigaciones Educativas, por el estímulo que representa contínuamente la sensación de que se desearía participar en todos y cada uno de los proyectos que ahí se realizan. En especial al Laboratorio de Psicomatemática por el ambiente de creatividad y entusiasmo en el trabajo que ha compartido conmigo.

A Irma Sáiz M. que dedicó a este trabajo más tiempo y entusiasmo del que queda señalado en el título de director de tesis.

A Ma. Elena Díaz y Rosario Rodríguez, por su eficiencia en el trabajo mecanográfico y a Lucía Block por la preparación de los dibujos.

T-67

I N D I C E

I N T R O D U C C I O N

La medición, junto a las operaciones aritméticas fundamentales, constituye uno de los temas principales de la enseñanza elemental de matemáticas, y en la actualidad ocupa gran parte de los programas de primaria, bajo la forma de cálculo de perímetros, áreas, ángulos, etc.

La investigación se plantea ante este tema dos grupos de cuestiones:

1°. uno relacionado con el objetivo de enseñar a medir en la escuela primaria
2°. el otro concerniente a la explicación de las dificultades infantiles frente a las tareas de medición.

Respecto al primero, cabe preguntarse si la presencia de la medición como contenido de la enseñanza actual es solamente resultado de la tradición y la costumbre (siempre se ha enseñado eso en la primaria) o si este contenido permanece vigente al contribuir efectivamente al logro de los objetivos de la enseñanza de las matemáticas; aprender a medir, ¿proporciona o contribuye a desarrollar instrumentos intelectuales o conceptuales en el niño? ¿Puede el chico resolver mejor problemas de su vida cotidiana mediante el uso de procedimientos de medición que "aprende" en la escuela? ¿Para qué, finalmente, se le enseña a medir?.

No siendo éste el lugar apropiado para una discusión acerca de las finalidades de la educación, se pretende, sin embargo analizar el sitio de la medición en tanto que conocimiento socialmente útil y su potencial contribución al desarrollo cognoscitivo, para replantearse, en ese sentido, su enseñanza.

Respecto al segundo grupo de cuestiones, sabemos que el tema de medición representa para los alumnos dificultades que resultan frecuentes, importantes y durables. La medición constituye una "enseñanza de alto riesgo". Numerosas situaciones señalan esto:

los persistentes "errores" de los niños en la resolución de problemas escolares de medición; la dificultad expresada por los maestros para eliminar estos "errores" y su convencimiento de que los niños terminarán por confundir y olvidar las reglas, fórmulas y procedimientos de medición que aparecen en el aula, y la constatación de que los propios adultos, una vez transcurridos sus años de escuela, parecen olvidar todo lo "aprendido" sobre el tema y, ante un problema de medición, incurren en el mismo tipo de errores y confusiones que los niños, o en el mejor de los casos, recurren a procedimientos de sentido común que tienen poco o nada que ver con los contenidos escolares.

Para el caso de la medición de áreas, la escuela procede, dicho muy simplificadamente, de la siguiente manera:

Se le presenta al alumno un rectángulo y se subdivide éste en un número entero de cuadrados iguales (muy frecuentemente de centímetros cuadrados), advirtiéndole que la medida del área del rectángulo es igual al número de cuadritos en que se le ha subdividido.

En seguida se llama la atención del alumno sobre el ordenamiento espacial de esos cuadraditos, diciéndole que están acomodados en "filas" y "columnas". Por ejemplo, si hay 4 filas de 3 cuadrados cada una, el área del rectángulo es igual a 12 cuadraditos.

Se le hace observar que esos números de filas y columnas (en el ejemplo 3 y 4) son simultáneamente la medida de las longitudes de los lados del rectángulo. Se concluye entonces que para obtener el área de esa figura basta con multiplicar las medidas de su "largo" y su "ancho" y dar la medida en unidades cuadradas.

De ahí se pasa rápidamente a una representación algebraica de dicha conclusión, utilizando para el largo y el ancho las denominaciones de base y altura. Se menciona la fórmula $S = b \times h$. De ahí en adelante se emplea esa expresión algebraica para encontrar el área de cualquier rectángulo y también para encontrar las fórmulas que corresponden al área de otras figuras geométricas.

Ante una secuencia que a primera vista pudiera parecer muy lógica y simple, nos preguntamos a qué se podrían deber los reconocidos "fracasos" en la enseñanza del tema de medición de áreas. Al analizar esa secuencia se pueden observar diversas fuentes de dificultades.

En primer lugar la subdivisión del rectángulo con la que se inicia la secuencia es un recurso introducido artificialmente por el texto o por el maestro, subordinándolo a la finalidad de mostrar la aplicabilidad de la fórmula que se pretende enseñar. Pero, ¿de dónde proviene la idea o la necesidad de subdividir el rectángulo? ¿Qué es lo que obliga a subdividirlo de esa manera?

En segundo lugar, la fórmula $S = b \times h$ es mostrada a los niños para un caso (eventualmente para muchos casos) de rectángulos. Sin embargo al enseñarla se hace la suposición de que el alumno transferirá ese aprendizaje para cualquier rectángulo y de cualquier medida. El caso de la demostración es siempre el que corresponde a una medida entera, es decir, el caso en el que la unidad elegida cabe un número entero de veces en la "base" de la figura, y también un número entero de veces en su "altura". Pero la fórmula deberá ser aplicada igualmente en el caso de medidas no enteras e incluso para medidas irracionales. Es decir se pretende que el alumno acepte que una fórmula "mostrada" en el dominio de los números naturales es válida para cualquier dominio de números.

Por otro lado, el empleo de una fórmula de cálculo es la primera ocasión en que la escuela presenta una simbolización algebraica, es decir, se pasa del dominio aritmético, en el que el núme ro es la medida de un objeto o un conjunto concreto, al dominio algebraico, donde se usan letras para representar valores numéricos cualesquiera, frecuentemente desconocidos. Una tercera consideración en este análisis es el paso de las operaciones de conteo o suma, que permiten encontrar la medida del área del rectángulo mediante adición de cuadritos, y que mantienen el resultado en el mismo dominio -el de las superficies-, a un procedimiento que involucra operaciones multiplicativas que sabemos que representan mayores dificultades para los niños y que lo llevan del dominio de las longitudes -base y altura- al dominio de las áreas.

Al hacer esta observación cabe preguntarse si las situaciones de enseñanza ofrecen al niño los recursos de que necesitaría disponer para realizar las transferencias de dominio y de significado que se le exigen en las tareas de medida de áreas.

Como puede verse, las dificultades de los chicos no son gratuitas ni despreciables. Sabemos que las tareas de medición fueron de las primeras actividades matemáticas emprendidas por el hombre, y tuvieron sin embargo que pasar por un largo desarrollo y reflexiones hasta llegar a los procedimientos e instrumentos que hoy aceptamos como válidos para medir, y más esfuerzos aún para llegar a conceptualizar dichos procedimientos.

La medición aparece en la historia como respuesta a problemas concretos de un grupo humano, y es en función de esas exigencias que se van desarrollando los sistemas de medición. Así, en sociedades que viven sin grandes restricciones territoriales, el sistema de medición de superficies está poco desarrollado, mientras que entre los egipcios, por ejemplo, para quienes la tierra laborable era escasa y sujeta a control impositivo, este sistema alcanzó un gran desarrollo. Entre algunos grupos de Ghana, en cuya economía tuvo un lugar preponderante la explotación de oro en polvo, alcanzó un gran desarrollo el sistema de pesas pe queñas, y los nómadas del Sahara, para los que la exacta apre - ciación de la distancia es de importancia vital, poseen una terminología muy rica en cuanto a las medidas de longitud.

Por otro lado, como es lógico suponer, no se establecen desde un principio verdaderos sistemas organizados de medición, sino que cada sistema está referido a la actividad o problema que le dió origen, y en general están relacionados con la actividad humana para la que se emplea la medición. Los sistemas nacen para satisfacer necesidades prácticas y no objetivos teóricos. Así, para fines prácticos, dos ciudades están "más cercanas" entre más rápidamente pueda llegarse de una a otra, y un campo es "más grande" que otro si de él puede obtenerse una cosecha mayor, o si se lleva más tiempo ararlo.

Por otro lado, el ser humano recurrió generalmente en primera instancia para medir a unidades proporcionadas por su propio cuerpo. De ahí la presencia generalizada en todos los pueblos antiguos de medidas tales como el pie, la cuarta. el codo. el paso. etc. Sin embargo, el cuerpo humano no ofrece ninguna unidad conveniente de área, menos aún para las áreas grandes (te - rrenos agrícolas), que eran las que tenía mayor importancia medir. La dificultad de elegir una unidad conveniente de área fue un problema de difícil superación. En esta tesis analizaremos los problemas de los niños para elegir tales unidades.

Se sabe que en Europa Occidental se utilizaban, hasta la introducción del sistema métrico dos clases de medidas agrarias: medición por la cantidad de granos sembrados en un terreno y medición por el tiempo de trabajo humano que requieren. Una parte importante de la espectacular variedad de unidades empleadas en esa época se explica por esto. La unidad de medida era diferente si se trataba de tierra para cereales, viñedos o pastizales; es mayor o menor en relación directa con la calidad de la tie -

rra, pues no se siembra la misma proporción de semilla en una tierra fértil que en una pobre, si es de temporal o si dispone de algún sistema de riego. Las áreas son así iguales o distintas en función de su capacidad productiva y no del espacio que ocupan.

Una prueba indirecta pero bastante concluyente respecto al uso de la cantidad de semilla requerida como unidad de medida de área es el parentesco lingüístico entre las formas empleadas para referirse a la superficie y aquellas que se emplean para volumen: en Francia "boisseau" y "boiselee" o "setier" y "seteree" respectivamente; en Roma "rubbio" para ambas magnitudes; en India "kula" también para ambas; en Colombia "fanega" y "fanegada" respectivamente, y en Nepal "mana" y "pathi" para volumen, y "matomana" y "matopathi" para la superficie.

Como afirma W. Kula(*) "Es frecuente encontrar en obras históricas afirmaciones sobre el "primitivismo" y la "imperfección" de los antiguos sistemas metrológicos. Pero es ridículo considerar que los sistemas tradicionales son menos perfectos que el métrico. Todo lo contrario. Actualmente la unidad dominante para medir las superficies de cultivo es la hectárea; sin embargo, bien sabemos que social y económicamente una hectárea no es igual a otra y que por lo tanto no sirve como unidad impositiva o transaccional". Nuestro país tiene tristes ejemplos a los que ha conducido una legislación y una planeación aconómica que toma distintas hectáreas como equivalentes.

A lo largo de la historia de las sociedades, los procedimientos de medición se van orientando, no sin tropiezos, hacia una dis-

----

(*) W. Kula. Las medidas y los hombres, p. 97.

tinción cada vez más precisa de la magnitud a medir, hacia métodos de cálculo cada vez más eficientes y exactos, y hacia sistemas más organizados y generalizables a nuevas situaciones. Es como resultado de ese proceso que actualmente podemos contar ya no sólo con procedimientos prácticos y efectivos de medición, sino con consideraciones teóricas que dan cuenta de tales procedimientos y los estructuran en teorías generales de la medida y en sistemas de medición que emplean un mínimo de unidades básicas, a partir de las cuales se generan las unidades convencionales para medir cualquier magnitud física o espacial, y con uso crecientemente generalizado a las más diversas actividades humanas. Tal es el caso del sistema métrico decimal.

En este trabajo presentamos algunos aspectos de la historia de las matemáticas en lo que se refiere a la medición de superficies. Nos ha interesado conocer de cerca estos aspectos pues sabemos que las sociedades humanas, en su búsqueda de una interpretación coherente del mundo y de un manejo eficaz del mismo han tropezado con obstáculos cognitivos de carácter similar a los que enfrenta cada sujeto en su proceso de aprendizaje. Las sociedades van progresivamente construyendo acercamientos, principios o procedimientos que les permiten aprehender algún aspecto de la realidad. Este proceso de construir teorías y de rechazar las antiguas o reintegrarlas en otras más acordes con el comportamiento de la realidad o más útiles para operar en ella, es muy similar al proceso que intenta seguir cada niño, siendo muy frecuentemente obstaculizado por la escuela.

Por su parte, las investigaciones en Psicología Genética y en didáctica de las matemáticas nos han venido mostrando el complejo proceso de construcción que el propio sujeto realiza para apropiarse de las nociones e instrumentos intelectuales involucrados en cualquier tipo de medición.

Mucho más allá que el aprendizaje de una técnica de utilización de instrumentos de medida, se necesita que el niño (y las sociedades) se apropie de las condiciones lógicas que presupone cualquier medida, entre las que destacan

- La abtracción de la magnitud a medir, distinguiéndola de otras magnitudes simultáneamente presentes en un objeto.
- Para el caso de las medidas especiales, la construcción de un espacio único, común a todos los objetos y a sus desplazamientos.
- La consideración de los objetos como totalidades formadas (o pensadas como formadas) por partes que, reunidas, conservan la magnitud total del objeto considerado.
- La elección de una unidad adecuada a la magnitud a medir, y de procedimientos adecuados de cuantificación de ésta.

La investigación presenta algunas aspectos fundamentales en la construcción de estas condiciones, pero además, bajo el supuesto de que el problema de la adquisición de los conceptos matemáticos no se reduce al de la génesis de los instrumentos intelectuales, se buscó también encontrar y explicar los procesos de actualización de esos instrumentos de conocimientos específicos.

La medición del área presenta algunas particularidades que la hicieron especialmente interesante para este estudio.

En primer lugar, la medición de áreas presenta una riqueza psicológica adicional en relación a la medición de longitudes, pues para comparar dos superficies que no sean congruentes ni conte-

- - - - - - - -

(*) Hemos elegido denominar "área" a la magnitud que expresa la extensión de una región, es decir a la medida de la superficie, y dejar el término "superficie" para el objeto mismo, aunque reconocemos que la distinción es poco precisa. En el lenguaje corriente área y superficie se usan casi indistintamente; sin embargo algunas expresiones sí se usan diferencialmente. Se puede decir "calcula el área (o la superficie) de tal figura", pero no "colorea el área de ese triángulo".

nida una en la otra es necesario recurrir a un razonamiento que parta de la descomposición en partes de los objetos, y en un rearreglo de éstas que, sin modificar la magnitud, permita la comparación.

En segundo lugar las unidades convencionales de área (metro cuadrado, centímetro cuadrado, etc), a diferencia de otras muchas unidades, no existen como instrumentos de medición en el mercado. Podemos encontrar reglas, escuadras y cintas graduadas en unidades de longitud; tenemos transportadores para medir ángulos, pesas para la masa, etc., pero raramente se usa algo semejante para el área, y ésta se calcula indirectamente a partir de medidas de longitud, y con instrumentos que corresponden a esta última magnitud. Este hecho favorece algunas confusiones y errores entre la medición de longitudes y la de áreas que analizaremos en detalle. El uso de medidas de longitud para el cálculo de áreas involucra, además, un manejo multiplicativo que dificulta su adquisición a la vez que extiende el campo conceptual de la medición.

Finalmente, la medición del área se inicia como contenido escolar en México en el tercer año de la escuela primaria, y se extiende hasta el sexto, de manera que, siempre dentro de ese ciclo escolar, se ha podido indagar las concepciones y recursos de los niños anteriores a una enseñanza intencional sobre el tema, y observar luego las modificaciones introducidas por la enseñanza, y el manejo de los recursos y procedimientos propuestos por la escuela.

Finalmente puede esquematizarse la noción de medida de áreas como coordinando tres dominios cognitivos.(*)

- - - - - - - -

(*) Rogalski, J.P. Acquisition des notions... p. 347.

1. Operaciones aditivas (reuniones, particiones, etc.) aplicadas a un espacio único.
2. Operaciones multiplicativas (compensaciones cuantificables, doble proporcionalidad, afinamiento de retículos, etc.)
3. Operaciones ligadas a la continuidad y al pasaje al límite.

Así, las medidas espaciales tienen un lugar muy peculiar en la didáctica de las matemáticas, pues se encuentran en la articulación de conceptos físicos (relativos a las propiedades y transformaciones de los objetos materiales), de conceptos espaciales (relativos a la organización y propiedades del espacio) y de conceptos numéricos (relativos a la cuantificación coordinada de los dos anteriores).

Organización del Informe

Partiendo del hecho de que los niños, antes de que la escuela les proponga situaciones de aprendizaje específico, elaboran sus propias teorías e interpretaciones de diversos aspectos del mundo, y partiendo, por otro lado, de la convicción de que cualquier Pedagogía (y didáctica) que pretenda ser racional y eficaz no puede despreciar lo que los sujetos son, lo que piensan ni los instrumentos intelectuales de que disponen, se ha buscado en este trabajo conocer cuál es el repertorio de procedimientos y conocimientos que los niños ponen en acción espontáneamente ante una tarea de medición de áreas, conocer cómo usan o adaptan procedimientos o instrumentos que se les proponen desde fuera para resolver esas tareas y cómo, ante diversos obstáculos, van construyendo procedimientos alternativos o concepciones más útiles o cercanas a la realidad, todo ello con la convicción de que el conocimiento de esos procesos permitirá explicarnos mejos las dificultades enfrentadas en el aprendizaje de la medición y señalar lineamientos para una enseñanza que genere en vez de obstaculizar el desarrollo del niño y le permita a éste emplear su desarrollo y sus conocimientos en la solución de problemas reales que a su vez estimulen su interés en la comprensión de la realidad.

La presentación del trabajo está organizada de la siguiente manera:

En el capítulo I se presenta una descripción detallada de los aspectos metodológicos y su fundamentación, así como de las tareas propuestas a los niños para obtener la información en que se basa esta investigación.

En el capítulo II se analizan brevemente distintas conceptualizaciones sobre la medida y sobre el área, y se presentan las propiedades de la medida que se presuponen como condiciones lógicas en el pensamiento de quien mide.

En el capítulo III se presentan las observaciones hechas acerca de la comparación y seriación de superficies, que ponen de manifiesto el tipo de conceptualización que los niños han elaborado acerca de la magnitud área.

En el capítulo IV se encuentra el análisis de las tareas dirigidas a estudiar la conservación de superficies y su rol en el desarrollo de una métrica.

En el siguiente capítulo (V) se analiza el significado que tiene para los niños la medida del área, su utilidad así como el proceso que lleva de la diferenciación de una magnitud (el área) a su cuantificación.

El capítulo VI se refiere a los problemas específicos del manejo del cálculo de áreas y al rol de la operación de multiplicación involucrada en las ecuaciones de dimensiones y en las fórmulas.

En el capítulo VII se continúa el análisis del uso de medidas de longitud para el cálculo de áreas, ahora desde las perspectivas de la relación-diferenciación entre perímetros y áreas.

En el capítulo VIII se presentan las dificultades particulares de la construcción de una métrica del área y la relación de esas dificultades con los recursos de que disponen los niños en la escuela primaria.

Después de la sección de conclusiones se han incluído dos anexos. El primero tiene como finalidad simplemente facilitar al lector la comprensión del texto mediante una reproducción a escala de los materiales empleados durante la entrevista.

El uso de la regla como instrumento graduado apareció en casi todas las entrevistas como un índice de las dificultades de la medición; el anexo 2 es un esbozo de esas dificultades y sugiere líneas de investigación para conocer mejor las elaboraciones de los niños relativas a este instrumento.

CAPITULO I

DISEÑO DE LA INVESTIGACION

CAPITULO I

DISEÑO DE LA INVESTIGACION

I.1. Acerca de la metodología.

En virtud del tipo de cuestiones que nos interesaba investigar, se decidió emplear para este trabajo el "método clínico" de entrevistas individuales, que permitió el estudio detallado de casos, tomados en situación y en evolución, y profundizando en sus particularidades.

Esta elección multiplicó el número y tipo de variables en juego, reduciendo por otro lado la cantidad de sujetos que era posible entrevistar (*).

Se elaboró una guía de la entrevista, pero sin hacer de ella un cuestionario fijo, de tal manera que fuera posible seguir las proposiciones de los sujetos, situándolas en el contexto en que se producían y buscando su significación y su forma específica de aplicación en las tareas presentadas.

Diseñamos situaciones que favorecieran la manifestación de las concepciones de los niños en actividades y tareas concretas, antes que en expresiones verbales, de acuerdo al principio reconocido de que el sujeto es capaz de pensar y hacer mucho más de lo que es capaz de verbalizar.

- - - - - - - -

(*) "El método clínico aplicado en Psicología Genética consiste en analizar la conducta en su perspectiva propia frente a la situación, buscar establecer sus sentidos, estructura y génesis, revelar los conflictos que las motivan y los procecimientos que tienden a solucionarlos (Véase Piaget, J. "El método clínico" en Delval, J. comp. Lecturas de Psicología del niño, p.15 y ss.

Presentamos preguntas, materiales y hasta sugerencias de actividades que introducen las hipótesis y supuestos de este trabajo que se explicitan más abajo, muchos de ellos derivados de lo observado en las entrevistas preliminares. Estas hipótesis previas sirven como guía de lo que pretendemos investigar específicamente ,y se explicitan más adelante.

Se introducen también preguntas totalmente abiertas con el propósito de dejar el mayor margen posible a los niños en el uso de los recursos que resulten más naturales para ellos. En cuanto al material, en general esperamos primero que ellos solicitaran lo que les parecía mejor para la tarea en cuestión, les presentamos en segunda instancia materiales entre los que pueden elegir (o cuya presencia genera otros requerimientos de los niños) y sólo en última instancia insistimos sobre la utilización de algún material que nos permite presentar alguna pregunta específica o verificar una hipótesis particular.

En cuanto al orden de presentación de las tareas, iniciamos siempre con las situaciones de comparación de superficies, e intentamos seguir con las de conservación y luego las de medición, a menos que las ideas de los niños introduzcan otro orden, cuidando que al finalizar las entrevistas (cuyo número fluctuó entre 2 y 4 para cada niño) hubieran efectuado o intentado efectuar las tareas que se propusieron como generadoras de situaciones a investigar. Estas pueden presentarse brevemente de la siguiente manera:

I.2. Descripción de las entrevistas

TAREAS DE COMPARACION (*)

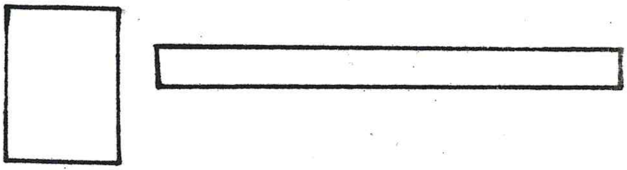
Como se analizará con detenimiento en el capítulo III, la medi-

- - - - - - - -

(*) Ver anexo 1 que reproduce a escala los materiales empleados.

ción es esencialmente una actividad que permite establecer comparaciones entre algunos objetos respecto a cierta magnitud.

Se eligieron dos tareas principales de comparación para la entrevista. En la primera se buscó diferenciar los distintos criterios de evaluación de la magnitud área que utilizan los niños. Se presentan para comparar dos cartones de igual área, uno mucho más largo que el otro, pero más angosto, con el objetivo de hacer jugar la contradicción entre los criterios de longitud que, en base a la teoría, se suponía que emplearían los niños más pequeños para evaluar el área.

1. Le entregamos 2 cartones verdes 

que representan 2 campos de pasto para que coman dos vacas(*). Las preguntas se refieren a si las 2 vacas tienen lo mismo de pasto para comer, o si alguna tiene más. Se le insiste en que puede pedir lo que necesite, y se tienen para ofrecerle papel para marcar o recortar (de forma y tamaño igual a los terrenos), hilos, reglas, etc. (**).

- - - - - - - - -

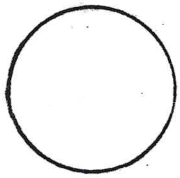
(*) Esta experiencia y la siguiente reproducen exactamente las realizadas por Piaget, Inhelder y Szeminska reportadas en "La Geometría Espontánea en el niño, caps. XI y XII.

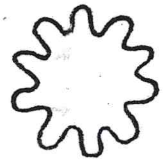
(**) Se tomó del texto "La Geometría Espontánea en el niño" la idea de usar la cantidad de pasto en un terreno para aludir al área que se considera, como un recurso que permitiera referirse a esa magnitud sin nombrarla directamente, en virtud de la dificultad que presenta asociar el área a alguna actividad, tal como se hace referencia al recorrido de un camino para el caso de las longitudes.

Se profundiza en sus respuestas mediante contra-argumentaciones, que suelen llevarlo a un intento de verificar o demostrar sus afirmaciones.

2. En la segunda tarea de comparación se eliminó la variación en el "largo" y el "ancho" de las figuras que aparecían en la tarea anterior. Se diseñaron dos figuras que tienen igual "largo" y "ancho", pero se hace jugar aquí la distinción entre la magnitud de la línea frontera y la de la superficie contenida en ella. Así, entre las figuras de esta segunda tarea de comparación de áreas, la figura que tiene mayor perímetro es la que tiene un área mayor.

Le entregamos los "terrenos"

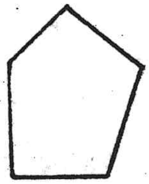




con iguales preguntas y recursos que en 1.

3. Se le dice que los propietarios desean poner una alambrada alrededor de los terrenos, preguntándoles para cuál terreno se necesitaría más alambre. Estas preguntas están basadas en la hipótesis de que el niño supone una relación directa entre área y perímetro (ver Cap. 7). Le ofrecemos estambre para verificar sus hipótesis.

TAREAS DE CONSERVACION (*)



1. Le entregamos 2 cartones de igual forma e igual superficie. El chico debe verificar y afirmar esa igualdad. Le enseñamos también cuadrados de cartón (casitas de madera o

- - - - - - - - -

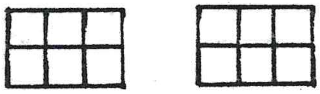
(*) De las muy variadas pruebas de conservación presentadas en ese texto se han elegido solamente las dos cuya relación con los procedimientos de medición directa de áreas es inmediata, es decir, las experiencias que se refieren a la conservación de superficies al modificar su forma mediante reacomodo de partes y a la conservación de superficies restantes.

plástico para los niños más pequeños) que representan casas que los propietarios van construyendo en su terreno. Primero construyen cada uno una casa en el mismo lugar (en el centro de su respectivo terreno). Las preguntas se refieren a la cantidad de pasto que quedó para las vacas: ¿es la misma, o alguna de las vacas tiene más que comer?

Se va aumentando de uno en uno la cantidad de casas construídas en cada terreno, pero en uno de ellos las casitas se van poniendo juntas, mientras que en el otro se colocan distribuídas por todo el campo.

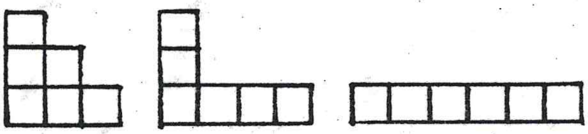
Aunque el niño afirme la igualdad se sigue así hasta 20 casas en cada lado. Al final se pregunta qué pasaría si se juntan (o se separan) todas las casas, y qué podría hacerse para que las 2 vacas tengan igual (o diferente) cantidad de pasto para comer.

2. Formamos en su presencia 2 campos iguales constituídos cada uno por 6 cuadrados de cartón iguales



Se pregunta: ¿tienen las vacas lo mismo para comer, o alguna tiene más?

Transformamos uno de los terrenos sucesivamente en

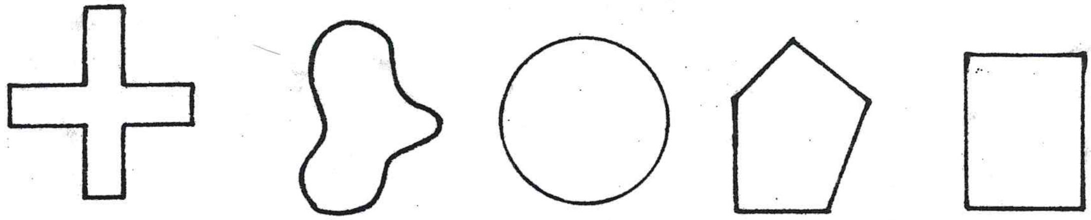


etc., y dejando el otro siempre sin transformar. En cada caso se les hace la pregunta sobre la cantidad de pasto para la vaca. Para evitar la "contaminación" que introduce en esta experiencia la cuestión numérica, se cubre la primera superficie con cubitos de madera (152) de manera que ya no recurra a contar para afirmar la igualdad, y se hacen preguntas acerca de si se podrían acomodar los mismos cubitos sobre las superficies transformadas, o si les sobran o les faltan.

TAREAS DE SERIACION DE SUPERFICIES

Además de la conservación misma de las superficies transformadas es necesario que las relaciones de igualdad o de desigualdad establecidas mediante la comparación se conserven y sean manejadas por los niños como relaciones transitivas. Es la construcción de ese manejo de transitividad lo que nos propusimos investigar en la sección relativa a la seriación de superficies. Por otro lado, se eligieron para hacer la seriación figuras que hacen jugar nuevamente en la comparación los distintos criterios que hemos mencionado -longitud de la línea frontera, largo, ancho y extensión de la superficie-, introduciendo además figuras nuevas -irregulares con lados rectos o curvos- para observar cuál o cuáles de los criterios de comparación adquieren primacía en función de las características de las figuras que se comparan.

Le ofrecemos 4 o 5 entre los terrenos

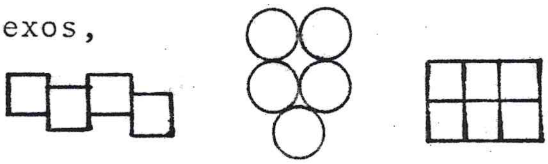


pidiéndole que los ordene de menor a mayor, y haciéndole preguntas sobre cuáles compara y por qué, cómo decide las comparaciones dudosas, etc., y registrando especialmente qué uso hace de la transitividad de las relaciones que va estableciendo en la comparación.

DOMINIO DE LO MEDIBLE

Considerando el hecho de que las conceptualizaciones y procedimientos que los niños van elaborando no se aplican de inmediato a todos los objetos y situaciones posibles, se intentó en esta sección investigar si las conceptualizaciones y procedimientos que descubrimos en las tareas de comparación y medición de los niños permanecen y se aplican de manera semejante para el caso de la medición de objetos extremadamente pequeños o muy grandes, con obstáculos sólidos sobre ellos, convexos o no, y contínuos o formados por partes.

Le preguntamos cuáles de los terrenos de la actividad anterior se pueden medir (medir su pasto) y, en su caso qué es lo que hace que no se puedan medir. [Esos terrenos consideran variables como terrenos de forma regular o irregular, con lados rectos y curvos, y de forma conocida o no].
Le preguntamos también si es posible medir terrenos formados por partes, no convexos,



y con obstáculos. Para este último caso presentamos un terreno con algunos animales de plástico encima y preguntamos si se puede medir, y también si al medirlo tendrá más o menos pasto que un terreno idéntico, pero sin animales.

Preguntamos también si se podría medir la superficie de algo muy pequeño (la uña de su dedo meñique), de algo muy grande (el pavimento de la Avenida Insurgentes, o la cancha del Estadio Azteca) y de una superficie vacía (el hueco de un marco de ventana, para saber de qué tamaño hay que comprar el vidrio). Para estos tres casos, que presentamos una vez que el niño ha "medido" ya algunos terrenos pedimos también una descripción del procedimiento que emplearía para medirlos. Hacemos lo mismo para el piso del salón donde se realiza la entrevista, pidiéndole además que estime esa medida.

TAREAS DE MEDICION DE AREAS

A partir de las respuestas obtenidas en las secciones anteriores, vamos pidiendo al niño que mida algunos de los terrenos, empezando generalmente por el terreno que él mismo elige para medir.

Es a partir de aquí que la secuencia de las entrevistas se diversifica bastante. Las preguntas que les presentamos se ajustan entonces a lo que cada niño va haciendo y lo que preguntamos se puede presentar muy esquemáticamente así:

Preguntas en cuanto a:

- las unidades elegidas (y las no elegidas) y su significado.
- la equivalencia entre distintas unidades empleadas y la utilidad o no de establecerla
- el significado de las unidades convencionales. Si las usa le pedimos que dibuje un cm y un cm^2
- el número que obtiene como resultado de medir y su significado.
- la relación entre la forma del terreno y la de las unidades elegidas.
- la validez social del procedimiento que empleó para medir, y su exactitud.
- la necesidad (o no) de aproximar la medida, buscando una mayor precisión, y los recursos empleados para lograr esa aproximación.
- el significado del uso de fórmulas y su relación con procedimientos no convencionales de medición.
- la posibilidad de generalizar el procedimiento empleado a otras formas y tamaños.
- en el caso de que utilice medidas de longitud, si considera líneas o superficies cuantificadas.
- qué recursos utiliza para medir longitudes. En el caso de que use regla o escuadra, cómo utiliza éstas y qué significado atribuye a las graduaciones.

Si no lo hace espontáneamente le sugerimos en particular:

- que use figuras para medir mediante recubrimiento
- que utilice papel cuadriculado
- que mida al menos un terreno irregular y uno con lados curvos.

Materiales

Entre los materiales que le mostramos (en el entendido de que puede solicitar o construir cualquier otra cosa que necesite), incluimos:

Reglas - de diferentes anchos y largos; con y sin graduaciones, y con graduaciones en centímetros y/o pulgadas, además de una "regla curva" (que construímos a sugerencia de una niña en las entrevistas preliminares y que después incluímos siempre entre el material disponible).

Transportadores de distintos tamaños

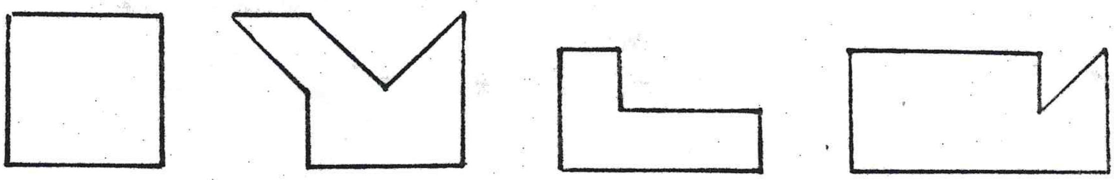
Escuadras - de distinta forma, y con las variables de las re - glas.

Figuras de cartón de distintos colores y tamaños que incluyen:
- cuadrados de 7x7 cm y de 1.5x1.5 cm.
- triángulos rectángulos construídos por particiones enteras del cuadrado de 7x7 cm, de manera que tienen respectivamente 1/2, 1/8, 1/16 y 1/32 de su área.
- círculos de diámetro igual a 5 cm y 2 cm aproximadamente.
- rectángulo de 4x3 cm.
- cinta métrica flexible, graduada en centímetros y en pulgadas.
- papel transparente cuadriculado.
- estambre.
- tijeras.
- un compás.
- papel.

TAREAS SOBRE EQUIVALENCIA DE UNIDADES

Buscamos tareas más simples en las que los terrenos se pudieran cubrir fácilmente con cuando mucho 3 tipos de unidades, para estudiar más claramente la cuestión de equivalencia de unidades.(*)

Le presentamos sucesivamente 4 terrenos:



a medir con cuadrados de 7x7 cms, rectángulos de 14x7 cm y triángulos rectángulos de área igual a medio cuadrado.

Le pedimos que mida esos terrenos y que compare sus áreas. Le pedimos también que los mida con un solo objeto-unidad.

TAREA DE PARTICION DE LA UNIDAD

En las tareas anteriores se consideraron los casos de medición de superficies mayores que las unidades de medida, y el uso de partes de la unidad solamente con fines de aproximación. Aquí se diseñó una situación que exigiera desde un principio la consideración de partes de la unidad empleadas a su vez como unidades de medida. Para esto, a partir de las situaciones anteriores pedimos a los niños que midan un terreno muy pequeño (3.5x7 cm) con una unidad mayor (7x7 cm).

(*) Estas tareas están inspiradas en las presentadas en el Capítulo de la Geometría Espontánea en el niño, en cuanto al uso de unidades de fácil acomodo y equivalencias enteras y simples, pero aquí se simplificaron aún más las figuras para observar particularmente lo relativo a equivalencia entre unidades y analizar adicionalmente la aceptación de unidades no convencionales en estas mediciones simples.

TAREA DE DUPLICACION DEL CUADRADO

Finalmente le pedimos al niño que dibuje o recorte un terreno que sea cuadrado y que tenga el doble (2 veces) el pasto que uno dado (7x7 cm). Esta tarea es una parte de la realizada por Piaget en la Geometría Espontánea en el niño, cap. XII.

Nos hemos concentrado en la duplicación del cuadrado porque esta actividad ofrece la oportunidad de observar con claridad los aspectos multiplicativos del cálculo de áreas que se reportan en el capítulo VI. Las experiencias reportadas en La Geometría Espontánea en el niño sobre duplicación del triángulo, el círculo y la recta ofrecen resultados similares.

En cada caso se intentó que para cada una de las tareas presentadas las preguntas fueran lo menos directivas y sugestivas posible, dejando un amplio margen para que los niños eligieran el procedimiento y el material que mejor les pareciera, alentando sus proposiciones y esperando su decisión sobre la validez de los resultados obtenidos.

Después de las entrevistas preliminares se decidió tomar 3 grupos escolares (2o, 4o. y 6o de primaria), aproximadamente correspondientes a 3 grupos de edad (6:6-8 años, 8-10 años y 11-13 años), y se entrevistó a un total de 21 niños, distribuídos según la tabla de la siguiente página.

- - - - - - - - -

NOTA: En la presente tesis se hace referencia a las observaciones hechas en el taller para maestros "Sistemas decimales de medición" diseñado e impartido por M. en C. Irma Sáiz y M. en C. Irma Fuenlabrada, del DIE, en el curso de verano de la Maestría en Matemática Educativa (UAG-CINVESTAV-IPN, realizado en Ayotzinapa, Gro. en julio de 1981 y también a algunas clases observadas del Programa Experimental de Enseñanza de las Matemáticas (DIE-Laboratorio de Matemáticas) correspondientes al tema de medición de perímetros y superficies en cuarto, quinto y sexto grados. Ambas experiencias tuvieron lugar durante la realización de esta tesis y constituyen únicamente materiales de apoyo a ésta.

TABLA 1

RELACION DE SUJETOS ENTREVISTADOS

1er. Grupo	2o. Primaria
Erika	7:6
Ana Isela	7:6
Giordana	7:11
Santiago	6:9
Víctor	7:6
Ma. Elena	8:0

2o. Grupo	3o. y 4o. Primaria (*)
Rubén	8:0
Rodrigo	8:7
Claudia	9:1
Ricardo	8:9
Gerardo	10:0
Oswaldo	8:9
Víctor Noé	9:6

3er. Grupo	6o. Primaria
Rocío	12:6
Dolores	11:11
Phen	11:2
Oscar	11:6
Marta Angélica	11:8
Yoatzin	11:3
Ireri	11:6
Manuel	11:11

- - - - - - - - -

(*) Como para la época en que se tomaron las últimas entrevistas el año escolar estaba ya muy avanzado y los niños de 4o. año estaban trabajando en tema de área, se decidió tomar a algunos sujetos de final de 3er. año.

CAPITULO II

DIVERSOS CONCEPTOS DE MEDICION DE AREA

CAPITULO II

DIVERSOS CONCEPTOS DE MEDICION DE AREA

Medir es un proceso usado para responder a la pregunta ¿cuánto?. Comienza con la definición de una cantidad o propiedad a ser determinada, es decir con la definición de una magnitud.

La definición de la magnitud o cualidad mensurable puede ser conceptual u operacional. Esto último sucede cuando la cualidad no está claramente definida y el proceso de medición deviene él mismo una parte esencial de la definición. En nuestro estudio, si tratamos de definir qué es la magnitud que llamamos área en sí misma (conceptualmente), la definición resultará demasiado compleja y abstracta. Sin embargo podemos definir el área como el número de figuras (de tamaño y forma conocida) que podemos acomodar sobre una figura. La definición (operacional) implica en este caso también el procedimiento que empleamos para medirla.

II.1. Medida como cociente de dos magnitudes.

La medición es siempre una comparación de alguna cualidad del objeto en cuestión con referencia a una cantidad del mismo tipo y se expresa como el cociente o razón entre la magnitud del objeto y la de la cantidad de referencia.

Dienes nos menciona (*) que "los hechos o sucesos que se observan en la naturaleza pueden ser clasificados desde un cierto punto de vista en dos categorías: contínuos y discontínuos" y que "para medir una cantidad que cambia de manera contínua -como es el caso de las medidas espaciales- se elige una cantidad unita-

- - - - - - - - -

(*) Dienes, los primeros pasos en matemáticas 3 Exploración del espacio y práctica de la medida, p. 12.

ria arbitraria y se mide el crecimiento o la ceriación en función de esa unidad elegida". Como ya se dijo, la medida es la relación entre la magnitud de una cualidad del objeto y la de la unidad elegida, y es por lo tanto un número real.

II.2. Medida como función

Desde otro punto de vista, podría definirse la medida de la superficie como una función aditiva con ciertas propiedades, que asigna a cada superficie uno -y sólo un- número real que es su medida. Esta definición de la medida como función corresponde más bien a un modelo teórico (matemático) de la medición, pues en la práctica se pueden asignar una serie de números reales a la misma superficie, en función de qué tantas veces fraccionemos la unidad para lograr una mayor aproximación, Así, para la misma superficie A podríamos obtener medidas de 2 dm^2; 2.1 dm^2, 2.136 dm^2... etc., y todas ellas representan el área de A a un cierto nivel de aproximación. En este sentido la medida nunca es exacta pues depende de la precisión (siempre relativa) de los instrumentos y procedimientos empleados.

A lo largo de este trabajo se observarán diferencias y a menudo contradicciones entre lo que se propone matemáticamente acerca de la medición de superficies (a lo que hemos llamado modelo matemático) y lo que sucede cuando efectivamente medimos éstas (modelo físico). Reflexionaremos posteriormente sobre la introducción escolar de estos dos modelos y su aparición en las concepciones de los niños (Véase espacielmente la sección sobre aproximación y precisión de la medida).

II.3. Area como medida unidimensional

En ambos conceptos de medida (como relación entre la magnitud en cuestión y la magnitud de la unidad o como función aditiva), el área puede ser considerada como una magnitud espacial unidimensional que se presta a comparaciones, estimaciones, transformaciones, operaciones de medición, sumas, diferencias, etc., en situaciones diversas de la vida cotidiana del niño.

La adquisición de esta noción de área y de la posibilidad de medirla directamente es un proceso largo y complejo en el desarrollo del chico. Requiere construir conceptualmente la diferenciación de la magnitud "área" respecto a otras magnitudes del objeto (tales como su ancho y su largo, la longitud de su línea frontera, etc.) y la consideración de las operaciones de transformación que la conservan (particiones, reacomodos).

La posibilidad de asignar medidas a las áreas lleva aparejado problemas tales como la elección de la unidad, la noción de que el número que expresa el área es inversamente proporcional al tamaño de la unidad elegida, la noción de precisión relativa de la medida, la extensión del dominio de aplicación de los procesos de medición a cualquier forma y cualquier tamaño, etcétera.

II.4. Area como producto de medidas

Sin embargo, estas consideraciones de la superficie como magnitud unidimensional no agotan la noción de área. Esta puede ser considerada también como una magnitud bidimensional, resultado de un producto de medidas de longitud, que pone en juego la proporcionalidad de una magnitud (área) en relación a otras magnitudes independientes entre ellas (longitudes de los lados) que la determinan.

La concepción de la superficie como magnitud bidimensional o producto de medidas permite la resolución de problemas de medición de superficies cuya solución es imposible bajo la conside ración unidimensional.

II.5. Propiedades de la medida de áreas.

En todo caso la medida cumple ciertas propiedades derivadas de las de los números reales que actúan como supuestos de los procedimientos de medición, entre ellas:

1. Toda figura en el espacio puede ser subdividida en partes y la suma de las áreas de éstas equivale al área de la figura total.
2. Las medidas son además de aditivas, ordenables.
3. El área es siempre positiva (o nula).
4. Las medidas son ordenables y el orden asignado a los objetos por la medida es el mismo que se obtiene con la operación empírica en cuestión, es decir que el orden que puede establecerse entre objetos por procedimientos válidos de comparación (por ejemplo partición y reacomodo de partes) corresponde al orden que existe entre sus medidas. A área mayor corresponde una medida mayor.
5. Cualquier igualdad (o desigualdad) numérica involucrada en la medición es transitiva.
6. Cualquier área puede ser acotada superior e inferiormente por un múltiplo entero de la unidad considerada, por pequeña que ésta sea. Es así, encuadrando por un sistema de magnitudes discretas que se miden magnitudes contínuas.

El uso de todas estas propiedades de la medición es exigido por los procedimientos convencionales de medición de superficies, pero no necesariamente existen espontáneamente como condiciones lógicas en el pensamiento del niño.

Su adquisición requiere de un largo y complejo proceso de construcción que seguramente no ha sido recorrido al iniciarse la enseñanza de la medición. Así para un niño el área de una figu ra no es desde siempre equivalente a la suma de áreas de las partes que lo componen, menos aún si se reacomodan en una configuración perceptiva diferente; no es necesario tampoco para él que a una superficie mayor le corresponda una medida mayor, ni considera transitiva desde siempre las relaciones de orden establecidas durante una comparación, etcétera.

Este trabajo pretende dar cuenta de algunos aspectos sobresalientes en este proceso de adquisición de la medida de superficies, así como reconocer aspectos de la enseñanza escolar que intervienen (sea apoyando o sea obstaculizando), este desarrollo.

Tal análisis se refiere a dos aspectos fundamentales:

1) DIFERENCIACION DE LA MAGNITUD.- El desarrollo de la noción de área como tal; es decir, qué tipo de magnitud o magnitudes son vinculadas, en el desarrollo, a este concepto.
2) ASIGNACION DE LA MEDIDA.- El desarrollo del proceso de asignación de un número que sea la medida del área, y el uso efectivo de esa operación.

Ambos aspectos aparecen por supuesto de manera sincrónica en las acciones de los niños y es sólo mediante una reflexión teótica que pueden deslindarse.

CAPITULO III
COMPARACION Y SERIACION DE AREAS

CAPITULO III

COMPARACION Y SERIACION DE AREAS

III.1. Comparación-Medición

Comparar es establecer una relación de orden entre dos o más objetos respecto a cierta magnitud o cualidad. La actividad de comparación de superficies nos permite establecer un orden entre ellas, al informarnos cuál es mayor que cuál respecto a su área.

Medir es fundamentalmente una actividad de comparación de magnitudes. De hecho, la idea de medir involucra una comparación: la que se establece entre el objeto en cuestión y la unidad elegida para medirlo.

Se puede comparar sin medir, pero lo contrario es imposible.

Al proponer en la entrevista tareas de comparación de áreas se tuvo como objetivo conocer y analizar los procedimientos que emplean los chicos para comparar superficies, y sus condiciones de aplicación, bajo el supuesto de que la elección de un cierto procedimiento obedece a 3 aspectos:

- Por un lado, a los requerimientos de la situación misma (es decir, de las características propias de las figuras que le pedimos que compare).
- En segundo lugar y en gran medida de la conceptualización que el chico ha elaborado sobre el área, es decir qué es lo que piensa que hay que comparar, que se manifiesta en el criterio de comparación que emplea en relación al área.

  Estos criterios pueden referirse a:

  <u>Consideraciones lineales</u> -que incluyen la comparación basada en la longitud de una sola dirección (largo o ancho) o en la de dos o más direcciones privilegiadas (largo y ancho, diagonal, etc.) o aún en la longitud del perímetro.

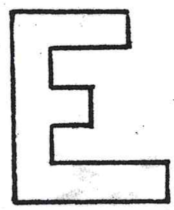
Consideraciones de superficie - que basan la comparación en la extensión misma de la superficie, es decir en el área de las regiones consideradas.

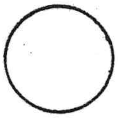
-En tercer lugar, y finalmente, a los instrumentos cognoscitivos que el niño ha construído a un cierto nivel de desarrollo, es decir, a las operaciones (en sentido Piagetano) de que dispone y a la forma de estructuración existente entre ellas.

Presentar a los chicos tareas de comparación permitió adicionalmente conocer en qué situación los chicos consideran indispensable medir para establecer una comparación, mientras que las tareas de medición propiamente dichas dejaron ver en qué condiciones la medida, a su vez, les resulta útil para establecer una comparación.

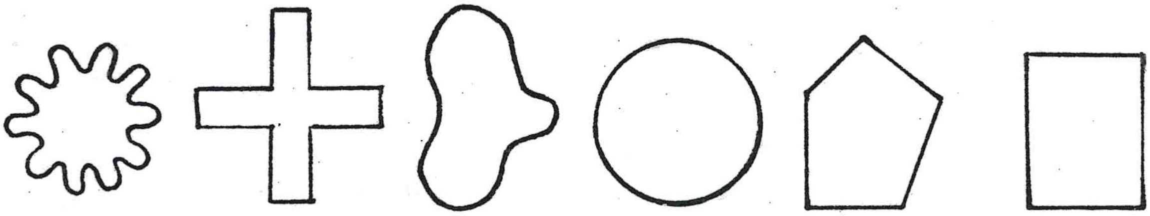
Aunque a lo largo de la entrevista aparecen diversas manifestaciones de lo que los niños entienden por comparar áreas y de los recursos que utilizan para ello, se prepararon tres situaciones especialmente destinadas a investigar la comparación de superficies, que se presentaron a los chicos en el siguiente orden:

1. Comparación de dos superficies rectangulares de igual área (21 x 28 cm y 7 x 84 cm), donde la mera percepción es engañosa y es necesaria la descomposición en partes del objeto para lograr una buena comparación de áreas. En algunas ocasiones se introdujo la comparación del terreno de 21 x 28 cm con un terreno en forma de E (11/12 del anterior) con características similares



2. Comparación de superficie circular  y en forma de engrane  donde no existe contradicción perceptiva en cuanto al área, pero la figura con mayor perímetro tiene menor área. Aquí la superposición es suficiente para comparar con seguridad las áreas. A partir de esta situación se analizaron también las relaciones que el chico presupone entre perímetro y superficie, que se presentan en el Capítulo 7.

3. Seriación de 4 ó 5 terrenos seleccionados entre los siguientes:



donde aparecen incluso mezclados diversos criterios de comparación y se manifiesta con toda claridad si se maneja o no la transitividad de las relaciones establecidas en la comparación de áreas.

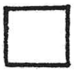
Es importante hacer notar que la tarea de seriación no exigía ni sugería ninguna verificación y que no buscábamos analizar qué tanto se acerca el chico a la serie correcta, sino el criterio que usa para comparar y el proceso lógico que lo dirige en la construcción de la serie.

III.2. Procedimientos posibles de comparación

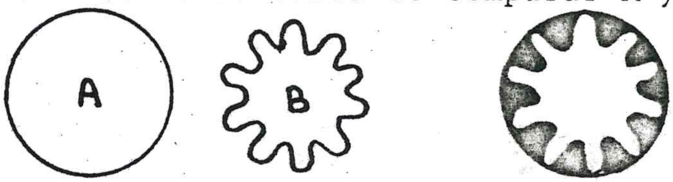
Existen distintos procedimientos susceptibles de emplearse para establecer una comparación de áreas, que se describen a continuación:

I. TRANSPORTE VISUAL. Se refiere a usar únicamente la apreciación global, -visual o táctil- de los objetos por separado para establecer su comparación. Este procedimiento resulta eficaz cuando las diferencias entre áreas son muy grandes, o cuando se trata de figuras semejantes con diferencias fácilmente apreciables, como entre  y , pero lleva a resultados muy riesgosos cuando las diferencias son mínimas o cuando las ilusiones perceptivas tienen mucha influencia, como entre

. En estos casos el resultado de la comparación puede ser cualquiera, puesto que alguien percibirá

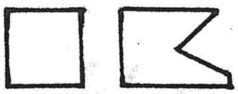
 como mayor mientras otro percibe  como el más grande. Incluso un mismo sujeto en diferentes momentos llegará a resultados distintos y contradictorios.

II. SUPERPOSICION. Consiste en poner una superficie sobre la otra, verificando así sus diferencias. Este procecimiento resulta muy eficaz cuando una de las superficies entra completamente dentro de la otra en su forma original, sin necesidad de modificarla, como en el caso de la tarea de comparar A y B superponiéndolos.

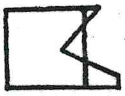


Se usa aquí la propiedad siguiente: Si A está contenida en B entonces el área de A es menor que el área de B.

III. COMPENSACION. Podría considerarse una combinación de I y II, reduciendo en parte los errores inducidos por la percepción. Así entre

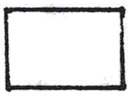


es muy riesgoso decidir la comparación, pero al superponerlos se puede apreciar

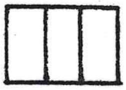


con mucha mayor seguridad que lo que sobresale del cuadrado no alcanza a compensar lo que le sobra a la otra figura.

La compensación se refiere pues a superponer, y comparar perceptivamente lo que sobresale de una figura con lo que no quedó cubierto de la otra.

IV. EL REACOMODO DE PARTES. Consiste en partir en pedazos una de las superficies y en superponerlas, reacomodadas sobre la segunda superficie. Así, para comparar  y 

se puede partir  y acomodar los pedazos

sobre 

Se obtiene así una comparación muy precisa, basada en el hecho de que si todas las partes de A equivalen a todas las partes de B, entonces área (A) = área (B) y si la suma de las partes de A están contenidas en una parte de B, entonces área (A) $<$ área (B).

$$\text{Si } A = \sum_{i=1}^{n} A_i \quad \text{entonces área } A = \sum_{i=1}^{n} \text{área } (A_i)$$

En este procedimiento la mayor dificultad reside en encontrar una manera apropiada de partir una superficie de manera que sus partes sean fácilmente reacomodables en la otra.

Una variante de estos últimos procedimientos se presenta cuando la situación impide el acercamiento de los objetos a comparar con lo cual se hace necesario construir (copiando, calcando, etc.) un tercer objeto que representa o simboliza a uno de los objetos a comparar y que, éste sí, puede acercarse al segundo objeto para superponerlo o reacomodarlo. Y finalmente

V. MEDICION. Llamaremos aquí medir a la actividad que conduce a una expresión numérica o cuantificación de la comparación. La medida se refiere entonces a la relación numérica o cociente entre la magnitud de una unidad elegida para medir y la magnitud del objeto en cuestión. Puede elegirse como unidad precisamente alguno de los objetos a comparar, en cuyo caso la medida de éste será igual a 1.

Por ejemplo, puede elegirse el área de un cuadrado como unidad, iterar esa unidad sobre cada una de las superficies a comparar, obteniendo así sus respectivas medidas (dos números), y al comparar esos números, decidir cuál de las superficies es mayor. El procedimiento de medir llega a ser necesario para comparar cuando la situación real impide o dificulta la comparación directa y también cuando además de comparar deseamos cuantificar las diferencias entre las áreas.

Este procedimiento implica, como en el caso anterior, una partición de la superficie, pero que adquiere aquí características especiales: las partes elegidas son todas iguales y la unidad elegida no forma parte como tal de ninguno de los objetos a medir, sino es un tercer objeto independiente, intermediario en la comparación.

Investigaciones en Psicología Genética nos han permitido conocer algunos aspectos del desarrollo de los procedimientos espontáneos de comparación. Presentamos muy brevemente los aspec tos principales de este proceso: (*)

Sin duda el punto de partida son las comparaciones perceptivas sin ningún recurso hacia una medida común ni desplazamiento que no sea el de la vista.

Se da por hecho que cualquier sujeto puede iniciar la comparación que lo llevará a la medida por una simple estimación visual, y que según el grado de confianza que le atribuye a su evaluación perceptiva se ahorrará medir si dispone de puntos de referencia suficientes.

Sin embargo lo que caracteriza este primer nivel de desarrollo es la exageración del valor de la percepción y el rechazo a cualquier otro método de comparación, dominado por un contexto de comparación global y sincrético.

Es quizá el descubrimiento de la insuficiencia de la apreciación perceptiva lo que permite el inicio de la medida. En un segundo nivel se observa en los sujetos que comienzan a desconfiar de las comparaciones perceptivas a distancia una necesidad de aproximar o juntar materialmente los objetos o comparar. El subnivel II A introduce el "transporte manual" consistente en el intento de acercar los objetos a comparar. El II B se sirve de un término medio, pero no todavía de una medida común independiente (no es un 3er. objeto independiente) sino el cuerpo mismo del sujeto que imita al objeto (transporte corporal).

- - - - - - - -

(*) Esta presentación se hace siguiendo las conclusiones de Piaget y colaboradores en relación a la tarea de construir con bloques de madera sobre una mesa una torre de igual tamaño que otra que se le presenta construída sobre una mesa de mayor altura. El chico no puede acercar las dos torres, y la situación lo obliga a desarrollar estrategias para comparar la altura de las dos torres.

Entre los niveles II B y III A el niño se sirve de un tercer objeto móvil simbólico construido a partir del primero para comparar con el segundo. Pero este objeto está limitado por la condición de ser desde el principio simbólico en el sentido de que imita siempre al modelo o lo copia (a uno de los objetos a comparar), no es independiente de los objetos a comparar.

Sin embargo, estos niveles (II A, II B, intermedio II B-III A) manifiestan ya un contexto de comparación analítico (vs global y sincrético) en el que comienza a manifestarse un tipo de transporte que se diferencia de la percepción receptiva del nivel I para tomar la forma de una actividad propiamente dicha, buscando más o menos conscientemente retener algo del primer objeto para aplicarlo al segundo y recíprocamente. Esta comparación analítica es para Piaget una condición de la medida, pues en vez de atender al objeto total el sujeto atiende ahora a una sola de sus cualidades o magnitudes.

El tercer nivel está caracterizado por el manejo de la transitividad y el uso de un tercer objeto intermediario en la comparación con lo que se accede a utilizar un objeto cualquiera como "medidor" común.

Veamos ahora el aspecto del manejo de la transitividad a través de una tarea de seriación de superficies propuesta a los niños durante la entrevista.

Es posible que algunos de los procedimientos sean usados de acuerdo a criterios de comparación diferentes, y es por esto que más que el procedimiento es el criterio de comparación lo que más nos habla de la noción de área que ha construído un niño.

Por ejemplo, el procedimiento I, que llamamos transporte vi -

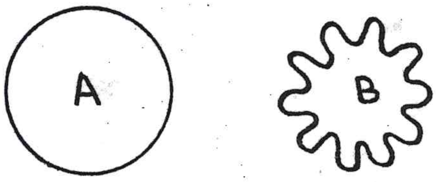
sual, puede referirse lo mismo a la superficie como tal (espacio ocupado) que a la longitud del perímetro. En el primer caso el niño dirá quizá que una superficie le parece mayor porque está "más extendida", señalando toda la superficie, mientras que en el segundo caso nos dirá que es mayor porque es muy largo, señalándonos el perímetro.

En el caso del procedimiento de medición, un chico podría medir el largo de la figura, mientras que otro decide medir el largo y el ancho, y un tercero mide la superficie, utilizando los tres chicos las medidas obtenidas para comparar áreas.

Por otro lado, lo más común es encontrar una mezcla de procedimientos en un mismo niño, y aún para una misma tarea.

A continuación se presenta, a partir de los resultados obtenidos en las entrevistas, el desarrollo de la noción de área que puede inducirse teniendo en cuenta el criterio de comparación manifestado en las tareas de comparación de áreas que hemos descrito.

III.3. Comparación del terreno circular y en forma de engrane



La tarea más simple de comparación de áreas que presentamos a los chicos fue la de comparar A con B, ya que por simple superposición se llegaba fácilmente a la respuesta correcta y a una apreciación clara de las diferencias entre ambas superficies. Las figuras fueron elaboradas de tal manera que una está contenida en la otra, pero ambas tienen longitudes máximas iguales (*) Todos los chicos llegan a la respuesta correcta por superposición; entre ellos sólo Ana (7:6) no recurre espontáneamente a la superposición, pero sí se sirve de ella para comparar:

Ana: Tiene más el redondo porque está más ancho.
Exp. ¿De dónde está más ancho?
Ana: De lo ancho tiene más (señala el diámetro horizontal)
(Lo superpongo mostrándole que tiene igual de ancho).
Ana: Entonces los dos tienen igual.
Exp: Pero éste (B) parecía más chico ¿no?
Ana: Sí, está más chico. El redondo tiene más porque está más grande.
Exp: ¿De dónde?
Ana: De aquí tiene más pasto. Por eso está más grande (señala lo que sobresale del redondo).

El resto de los niños de la muestra llega directamente a la superposición afirmando que hay más pasto en el redondo "porque la vaca se come todos estos pedazos de más", "porque en los hoyos no hay pasto", "le sobran (o le faltan) todos estos pedacitos", etc.

Es claro que la propiedad de la medición aquí implicada:

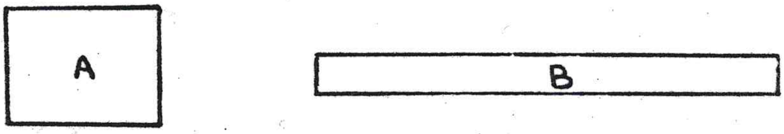
$$\text{Si B es una parte de A} \Longrightarrow \text{área (B)} < \text{área (A)}$$

es más fácil y se presenta antes en el desarrollo que las comparaciones que exigen una partición (real o mental), más aún si las partes en que se subdivide un todo adquieren por reacomodo

---

(*) De esta experiencia se analizaron adicionalmente las relaciones que el chico supone entre perímetro y superficie. Ver Capítulo 7.

una configuración perceptiva distinta del todo que originalmente formaban.

III.4. Comparación de 

Es por eso que la tarea de comparación de los rectángulos de igual área (21x28 cm y 7x84 cm) resulta más complicada y permite una mayor diferenciación entre los niveles de conceptualización de los chicos.

Entre nuestros niños, la respuesta de primer nivel (I) es la que considera como criterio de comparación de áreas alguna de las longitudes del objeto, revelándonos con ello su concepción del área como determinada por magnitudes lineales. Así Ana (7:6) y Giordana (7:11) afirman que en el terreno A hay más pasto porque "está más ancho" y "es más grueso", mientras que Erika (7:6) nos dice que es en B donde hay más pasto porque "está más estirado" y "porque es muy largo".

Ninguno de estos chicos recurre espontáneamente al acercamiento de los objetos ni a su superposición. La dimensión a la que dan prioridad (largo o ancho) no es única, y cambia fácilmente de una a la otra por sugerencia del entrevistador.

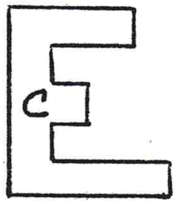
En ese primer nivel econtramos un solo caso, muy interesante, del uso de la longitud del contorno como criterio de comparación:

<u>Giordana</u> (7:11) que afirmó "a ojo" que A tiene más pasto porque "es más grueso" y a quien le muestro lo muy largo del otro terreno, toma A y lo va girando descuidadamente sobre el largo

de B (comparando así el perímetro de A con el largo de B), y afirma entonces que ambos terrenos son iguales.

Cuando las figuras a comparar son otras, aparecen otros argumentos adaptándose a la nueva situación. Aparece entonces la convexidad (*) de la figura como un factor muy importante en la comparación de superficies.

Rodrigo, al comparar A con C dice que A es mayor (a pesar de que la E es más alta) porque "aquí está angostito (las secciones de la E) y tiene huecos, y el otro está todo lleno de pasto, y aquí no".

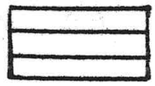


II. En un segundo nivel los chicos, que siguen sin duda partiendo de su apreciación perceptiva, recurren ahora a procedimientos de superposición de los objetos recurriendo a criterios que atienden coordinadamente a ambas dimensiones (largo y ancho) y que se refieren propiamente a las áreas respectivas.

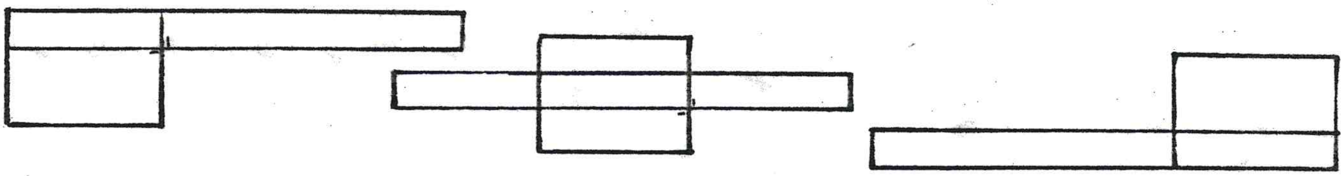
Santiago (6:9) nos dice que "hay más pasto en A, porque está más ancho y aunque sea que sea más corto, y no tan largo, es más ancho y tiene un poco más de cantidad, y ya ví que si lo

---

(*) Se dice que una figura es convexa cuando dados 2 puntos cualquiera que pertenecen a la figura, éstos pueden unirse mediante un segmento que NO sale de la figura. La E (ver arriba) no es una figura convexa, pues para unir algunos pares de los puntos que le pertenecen mediante una recta hay que salirse de la figura.

corto así (señala con los dedos ) ... y los pongo todos los pedazos juntos lo harían más largo que el otro"

Al pedirle que lo haga, Santiago va marcando en el cartón, poniendo una marca para el largo que ha considerado en B, y otra para lo ancho que ha cubierto en A:

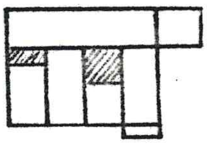


y rectifica: "no, son los dos igualitos de pasto".

<u>Rubén</u> (8:0) que empezó con consideraciones lineales y luego por reacomodo de partes revela su idea sobre área, nos dice cómo le mostraría a otro niño: (Divide B en tres pedazos del largo de A), y los coloca sobre éste: Rubén "Tienen igual de pasto.... no, yo digo que B tiene más (había dicho eso por ser más largo), pero como puse los 3 pedazos, ¡Tienen igual!

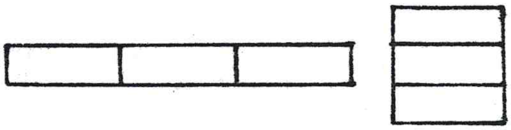
Exp: Pero B es muy largo ¿no?
Rubén: No se... ¡Tienen igual, tienen igual!

Oswaldo (8:9) es menos afortunado en la elección de los pedazos, pero sigue el mismo procedimiento: Corta B en 6 pedazos cualesquiera y trata de formar con ellos sobre A un rectángulo de igual forma:



acomodándolos de distintas maneras para aproximarse a la forma de A, sin lograrlo del todo. El problema de Oswaldo es que habiendo considerado una vez la comparación de las partes con el todo, no puede extender el procedimiento repitiéndolo (cortando a su vez los pedazos que sobresalen para reacomodarlos).

Víctor (7:6) marca el ancho de B 3 veces sobre el de A, y luego el largo de A 3 veces sobre el

largo de B  y nos dice:

"Son bien iguales. Solo tuve que rayar estos y ver si eran del mismo tamaño los pedazos de B y de A", dejándonos ver muy claramente la comparación a través de pedazos congruentes de ambas superficies.

Todo estos intentos tienen en común un avance bastante importante respecto al primer nivel: A través del acercamiento de los objetos a comparar por superposición ponen claramente de manifiesto la idea de que ambas dimensiones del terreno "cuentan" para el área, y de que lo que hay que comparar son los pedazos o partes que forman (que son equivalentes al total de) una superficie.

Esta consideración del objeto como constituído por, y equivalente a la suma de las partes en que podría subdividirse, es la conquista conceptual más importante en el camino hacia la medición del área, pues sin partición (sea real o mental) no hay comparación posible entre 2 superficies no congruentes ni contenidas una en la otra, y por lo tanto no hay medición posible.

La tarea de comparar A con B de hecho no exige nada más que dicha partición.

De los ejemplos anteriores en adelante el desarrollo se observa en una afinación de la partición y en una confianza plena en el procedimiento de superposición más allá de cualquier apariencia perceptiva.

Podríamos llamar a éste un nivel II B.

Martha Angélica (11:8) "creo que hay más en A, porque lo veo más grande... pero segura, solamente que lo señalemos". Señala de la misma manera que Santiago hasta verificar la igualdad.

Yoatzin (11:3) mismo procedimiento.

Dolores (11:11) "para mí que hay más en A... o más bien iguales. Hay que medirlos". Marca con igual procedimiento que los anteriores" :Sí, son iguales".

Exp: ¿Así ya mediste?
Dolores: No, pero ya estoy segura de que son iguales.

Para los chicos de 6o. grado en particular es muy común encontrar que intenten recurrir en primera instancia a medir el área y hacer la comparación entre los números que resulten. Es claro que en esta situación particular, como en muchas de la vida cotidiana, no se requiere medir para obtener una comparación, y la comparación directa resulta más simple y económica. Volveremos más adelante sobre esta primacía de los procedimientos escolares en la resolución de tareas.

III.5. Seriación de superficies.

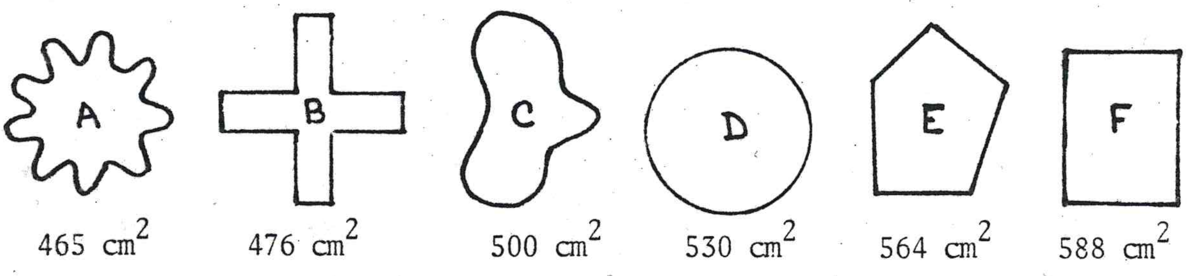
Como ya se mencionó, esta tarea tenía como objetivo, además de conocer las formas de conceptualizar el área que han construído los chicos, y de los criterios de comparación a través de los cuales se manifiestan dichas conceptualizaciones, investigar el manejo -o no- de la transitividad de las relaciones de orden establecidas en la comparación.

Estas observaciones se basan por lo tanto en investigaciones previas sobre las operaciones de seriación y clasificación, expuestas detalladamente en Piaget "La Génesis de las Estructuras Lógicas elementales", y revisadas teóricamente en "La equilibración de las estructuras cognitivas" (p. 135-140)

El problema de la transitividad tiene una dificultad extra para el caso de superficies (en relación a longitudes), pues el objeto tal como es (sin transformarlo) sólo es útil como "objeto intermedio simbólico" cuando las superficies a comparar son congruentes, o una entra completa en la otra. En cualquier otro caso el objeto tendrá que ser partido y reacomodado para servir a la comparación, con lo cual su función de símbolo o representante del objeto se diluye, pues entre el primer objeto y el intermediario no hay equivalencia sino en función de una operación que haga a las partes reacomodadas equivalentes al todo original.

En las figuras a ordenar hemos introducido distintas variables para hacer aparecer una mayor gama de criterios empleados en la compración. Así, hemos presentado figuras regulares e irregulares, con lados rectos y curvos, figuras convexas y no convexas, así como distintas relaciones entre perímetro y áreas.

El orden real entre las áreas de los objetos que le presentamos es el siguiente (designaremos con A, B, C,...etc. a las superficies en orden creciente de área).



Presentamos algunos ejemplos obtenidos de la muestra organizados de la siguiente manera:

NIVELES

- I — Niños sin manejo de transitividad, que atienden a consideraciones lineales.
- II — Niños sin manejo de transitividad pero que atienden a la magnitud de la superficie.
- III — Niños que manejan la transitividad, atendiendo a criterios de área.

I. Niños que recurren a consideraciones de longitud sin ningún empleo de transitividad.

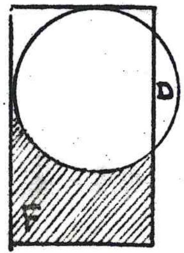
<u>Ma.Elena</u> (8:0) Sólo en base a una estimación visual los coloca:

$$B < F < D < C$$

Luego pone uno encima del otro y los mira "éste (B) es el más chico, porque es una cruz y está delgadita".

Exp: ¿Y ahora?

Ma: El redondo (D) tiene menos, porque a este (F) le sobra (señala la parte que sobresale de F -en largo).



Rocío (12:6)

Ro: Este (B) tiene más (señalando el perímetro)

Exp: ¿Dónde tiene más?

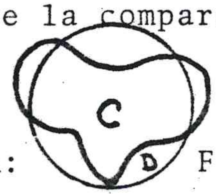
Ro: (señala la superficie)

Exp: ¿Y ahora?

Ro: (pone C sobre D) Este (C) tiene más porque tiene muchas curvas.

Exp: Cuando las pones así encima ¿te sirve para saber cuál tiene más pasto?

Ro: A veces... porque lo pongo así y se ve que éste (C) tiene más curvas, y por eso es más grande. (Es decir, superpone para facilitarse la comparación de perímetros).



Rocío deja el orden: F < D < C < B sin hacer nuevas comparaciones.

II. En un segundo nivel los niños logran hacer comparaciones que se refieren ya a las superficies como tales, mediante compensaciones entre espacios libres y ocupados pero, faltas de transitividad, estas comparaciones no le permiten hacer toda la serie ordenada.

Gerardo (10:0) superpone B sobre E, señalando compensaciones, y decide el resto "a ojo", colocando:

A < D < E < B

Exp: Si te doy éste (F) para colocarlo ¿dónde iría?
("a ojo" lo coloca entre A y D)

Exp: ¿F tiene menos pasto que E?

Ge: (superpone F y E y por compensación dice) Ah, no, tiene más (F) coloca ahora

$$A < D < F < E < B$$ y lo quita

(E) para superponer D con E.

Ge: Sí, así está bien.

Exp: ¿Dijiste que F tiene más que E?

Ge: No, tiene un poquito menos. Así ya están todos bien.

<u>Rodrigo</u> (8:7) pone "a ojo" sin superponer

$$B < C < A$$

como si estuviera muy seguro del orden de esos 3, y superpone E con D, dejando

$$B < C < A < E < D$$

Exp: ¿Y F, dónde iría?

Ro: (lo superpone al E) Es más chico (F) (deja

$$B < C < A < F < E < D$$

Exp: Entre F y C ¿Cuál tiene más pasto?

Ro: (Lo superpone y señala compensaciones) Es más grande C. (los intercambia en la serie, sin comparar con la figura intermedia -A- dejando)

$$B < F < A < C < E < D$$

<u>Ricardo</u> (8:9) superpone D con F y señala compensaciones

Ri: Si este pedazo lo ponemos aquí, y luego todo esto acá, le sobra mucho, tiene más este (F). ($F > D$)

Ri: (superpone B con C) Tiene más C, porque si le cortamos lo que se sale de C y lo ponemos acá adentro (en los pedazos que sobresalen de B) no cabe todo ($C > B$)

Tiene acomodados F y C como grandes, juntos, y D y B como pequeños, también juntos.

Exp: ¿Cuál es el más chiquito?

Ri: (Superpone D con B y por compensaciones dice que B es el más pequeño. Ahora superpone F con C y dice que F es más grande. Entonces acomoda).

$B < D < C < F$ -sin comparar D con C-

Exp: ¿Cómo supiste cuál era más grande entre D y C?.

Ri: (superpone y "justifica" ese orden por compensaciones)

En el nivel III, en cambio, aparece el uso de la transitividad como propiedad a emplearse en la construcción de la serie, aunado a consideraciones de superficie en el procedimiento de superposición.

Yoatzin (11:3) superpone D con E, y por compensaciones afirma $D < E$. Por otro lado superpone B con C y llega a $B < C$ señalando compensaciones. Entonces pone la serie

$B < C < D < E$

depositando su confianza en la percepción para la comparación entre (B, C) y (D,E).

Yo: Entre esos se ve bien que estos dos (B, C) son más chicos que cualquiera de estos (D, E).

Exp: ¿Y éste (F) dónde lo colocarías?

Yo: (superpone E con F y por compensaciones afirma que $F < E$, compara ahora F con D, afirmando que $D < F$, y dejando la serie

$B < C < D < F < E$

Al intercalar un nuevo elemento se ve muy claramente que Yoatzin no hace todas las comparaciones posibles, sino solamente las que corresponden en función del orden anteriormente establecido, empeando la transitividad de las relaciones de desigualdad.

<u>Martha Angélica</u> (11:8) superpone F con C para "ver si con los pedazos que se salen (C) caben todos en los que sobran de F" ..."Yo creo que son más o menos iguales" (señalando compensaciones).
Superpone F con D y concluye que $F < D$, pero sin estar muy segura.
Acomoda

$$B < \underbrace{CF}_{\text{iguales}} < D$$

(B lo coloca diciendo "a ojo" que es el menor, sin superponerlo con ningún otro).

Como Martha dudó de la comparación entre F y D, superpone ahora D con C "porque como F y C dije que son iguales, se me hizo más fácil comparar D con C" (Es decir, si dos figuras son equivalentes, da lo mismo comparar una tercera figura con cualquiera de ellas). Concluye que $D < C$ (y por lo tanto $D < F$), y cambia la serie a:

$$B < D < \underbrace{C < F}_{\text{iguales}}$$

CAPITULO IV

CONSERVACION DE SUPERFICIES

CAPITULO IV.
CONSERVACION DE SUPERFICIES

IV.1. Significado de la conservación

El estudio de la conservación de superficies se refiere a saber si, independientemente de toda medición, el área de una superficie es una realidad estable, susceptible de permanecer a través de los cambios de forma.

Al respecto nos dice Piaget (*) que "El descubrimiento de una noción de conservación por el niño es siempre la expresión de la construcción de un agrupamiento (lógico o infralógico) o de un grupo (matemático) de operaciones", Es por eso que la investigación sobre la elaboración de esas invariantes operatorias es importante en todos los dominios en que se aborda el estudio, pues ponen en evidencia el modo de composición de los conceptos que uno analiza.

La conservación de superficies equivale a concebir la suma de las partes como independientes de su arreglo, e iguales al todo que constituyen. En superficie, un arreglo diferente de las partes, a pesar de mantener su suma constante, engendra una superficie cualitativamente diferente (un cuadrado puede transformarse en un triángulo, un trapecio en un rectángulo, etc.) aunque tenga un valor cuantitativo equivalente (su área). Además, al modificar la forma se aumenta o disminuye la longitud de la línea frontera, misma que juega un rol importante desde el punto de vista de las intuiciones topológicas de las que parte el niño. Así, la noción de "superficie igual" entre los estados sucesivos engendrados por una transformación permanece singularmente abstracta, y constituye una laboriosa construcción del chico, sin la cual toda la medida posible carece de sentido.

- - - - - - - -

(*) Piaget et al. La geometría espontánea, p. 337.

En "La Geometría Espontánea en el niño", Piaget y colaboradores presentan sus investigaciones sobre distintos aspectos o manifestaciones de esta construcción, que son:

- Sustracción de superficies parciales iguales a superficies totales iguales, (conservación de las superficies restantes)
- Conservación de superficies formadas por partes iguales, al modificar su arreglo.
- Conservación de superficies mediante transformaciones debidas a la partición y al rearreglo de partes.
- Conservación de superficies interiores y exteriores a una frontera cerrada (superficies complementarias)

De entre ellas hemos elegido introducir en la entrevista las dos primeras por estar muy directamente relacionadas con los procedimientos posibles de medición de superficies.

IV.2. Conservación de superficies al transformar su forma.

Veamos inicialmente la 2a. tarea que resultó ser más sencilla. En un primer nivel de nuestra muestra (correspondiente al nivel II A en Piaget) los chicos se basan en su apreciación perceptiva de los estados para juzgar el efecto de la transformación, sin atender a ésta.

Rubén (8:0) Situación 1

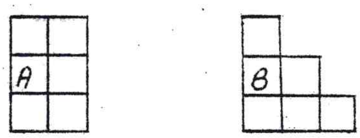
Ru: Los dos tienen igual

Situación 2

Ru: Tiene más A porque están juntitos.

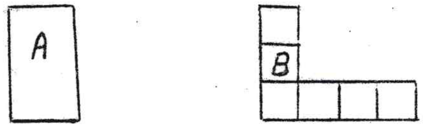
Situación 1

Situación 2



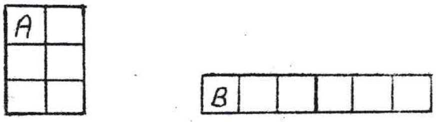
Exp: ¿Qué pasa cuando están juntitos?
Ru: Que tienen más pasto.
(Situación 3)

Situación 3



Ru: B tiene más porque está de otra forma.
Exp: ¿Esta vaquita tiene más para comer? (B)
Ru: Sí, mucho más.
Exp: Pero A tiene todos juntitos, ¿no importa?
Ru: No, pero en esa figura (B) tiene más pasto.
Exp: Y los pedazos (cuadros) ¿son todos iguales?
Ru: Sí, son iguales.
(Situación 4)

Situación 4



Ru: Tiene más B porque están juntitos pero largo.

(le recuerdo a Rubén su primera tarea -comparar el terreno de 21 x 28 cm con el de 7 x 84 cm- en la que mediante superposición llegó a que eran iguales) (ver pág 46)

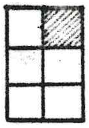
Exp: Y estos que tienes ahora (situación 4) ¿podrían ser iguales de pasto?
Ru: Sí, iguales porque tienen igual de cuadritos.
Exp: ¿Y de pasto?
Ru: Iguales

Pero modificando nuevamente el terreno B (volviendo a la Situación 2) Rubén afirma que A tiene más pasto "porque no están separados y tiene más pasto así"

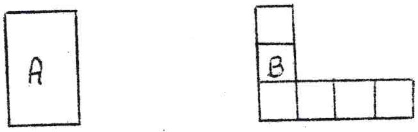
Rodrigo (8:7) Situación 1

Ro: En los dos igual

Situación 2

Ro: Hay más aquí (A) porque en este  le sobra y acá (B) no le sobra. Sólo si se puede cambiar este cuadro para acá (regresar la transformación) estarían igual.

Situación 3

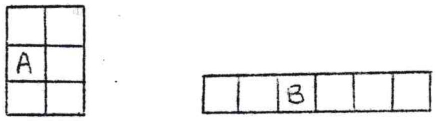


Ro: En las dos. Porque aquí hay 6 y acá también 6.

Esp: ¿Las dos vacas comen lo mismo de pasto?

Ro: No, en A comen más porque acá (B) está más angostito y tiene menos pasto.

Situación 4



Ro: Tienen la misma cantidad en las dos, pero en este (B) se ve menos.

Exp: ¿Cuál vaca tiene más pasto?

Ro: La de aquí (A)

Exp: Pero tienen igual de cuadritos ¿no?

Ro: Sí, tienen igual de cuadros, pero come más pasto en A.

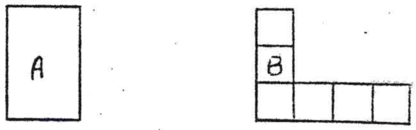
Erika (7:6) Situación 1

E: Iguales, porque tienen 6 y 6. Tienen igual espacio los dos terrenos.

Situación 2

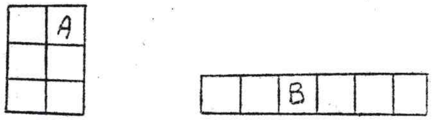
E: Iguales, las dos comen igual.

Situación 3



E: Igual, porque había tres y pasaste una para acá y dos para acá, pero sigue siendo igualito de pasto.

Situación 4



E: En B hay más pasto porque está más extendido, entonces hay más.

Exp: Pero aquí hay 6 y aquí también ¿no?

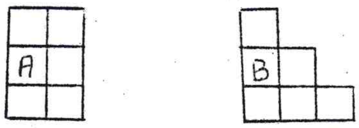
E: Sí, pero porque está más largo y más extendido por eso tiene más.

En un segundo momento (IIB) los sujetos comienzan a liberarse de la forma del conjunto y de la longitud de la línea frontera para mantener el área invariante. Tienden a igualar las superficies en función del número de partes y a comparar entre ellas a través de una correspondencia de cuadrito a cuadrito.

Ana (7:6) Situación 1

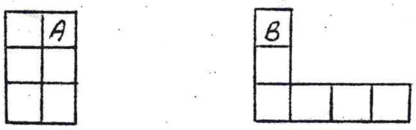
A: Los dos igual

Situación 2

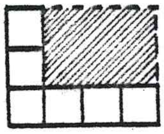


A: Tienen igual otra vez, pero sólo lo cambió.

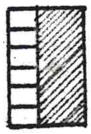
situación 3



A: De pasto tienen igual, pero este señor dejó más espacio para que los niños jugaran.
¿Dónde?



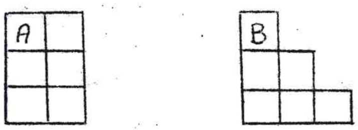
A: Señala lo sombreado
Exp: Y de pasto ¿cómo dejó?
A: De pasto tienen igual, porque sólo cambió sus pedazos de lugar.
Situación 4
A: De pasto igual, pero ahora dejó muchísimo espacio para que jugaran los niños.



Ana Isela, que no considera la superficie verde como transformada por el rearreglo de las partes, supone una especie de superficie complementaria que, esa sí, varía según se acomoden los espacios verdes.

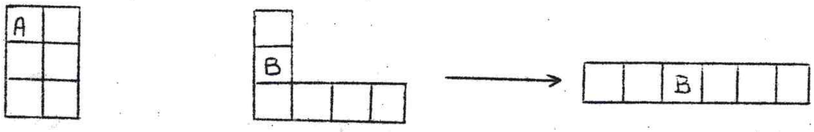
<u>Ricardo</u> (8:9) Situación 1

Ri: Lo mismo
Situación 2



Ri: Lo mismo porque la vaca se puede comer uno-dos, uno-dos, uno-dos (señalando los cuadritos de A en forma horizontal) y acá uno-dos, uno-dos, uno-dos (señalando los cuadritos de B en forma irregular), entonces come lo mismo.

Situación 3 y 4



Ri: Tienen lo mismo porque la vaca se come éste (señalando un cuadrito) luego éste (señalando otro cuadrito), y así se va acabando el pasto aunque esté en otro lugar.

Exp: ¿Cómo harías para que no tengan lo mismo?

Ri: Sólo que a éste (B) le quitemos un pedazo y así A tiene más.

Santiago (6:9) Afirma ante todas las transformaciones que los dos terrenos tienen igual.

Exp: ¿Por qué siempre tienen lo mismo?

S: Porque son los mismos cuadros y porque no se diferencian porque sea otra forma, sino sólo porque sean menos o más.

En el siguiente nivel (III A) se logra totalmente la conservación. El sujeto parte de la transformación misma y concibe la superficie transformada como el producto de esa operación y no como otra superficie a comparar con la primera. Por lo tanto considera que la nueva superficie resulta de otro arreglo de las mismas partes.

Oscar (11:6)

O: Son iguales porque el pedazo que le quitaste aquí lo pusiste acá, y el otro también lo puedes mover y no cambia ...Porque como son iguales los terrenos no importa cómo estén agrupados, en cambio si uno es más grande que otro, entonces sí importaría, pero esos siempre son iguales, aunque se cambie de forma.

Phen (11:2)

P: Siempre son iguales porque la materia no se va, sólo cambia de lugar.

Exp: Y de espacio ¿ocupan igual?

P: Unos son más largos y otros más anchos, pero de pasto, o sea la superficie, es igual.

IV.3. Conservación de superficies restantes.

Este estudio es de mucha importancia para la verificación de conservación de superficies, pues, como nos dice nuevamente Piaget, la adición y sustracción de superficies constituyen la operación cuyo agrupamiento lleva a la conservación, antes de permitir la medida por fusión operatoria con el desplazamiento.

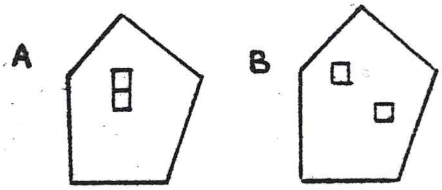
Durante la realización de las entrevistas cambiamos la distribución de las casas propuesta por Piaget, pues aparecía muy frecuentemente la afirmación de que "en la orillita" las casas no estorban o no quitan espacio, sin que quedara muy claro el significado que para el chico tiene que se coloquen las casas en la orilla, así que optamos por colocar las casas juntas cerca del centro del terreno, sin que apreciaran diferencias respecto a lo relatado por Piaget, excepto en la formulación de los argumentos.

En las entrevistas encontramos ejemplos de los niveles propuestos en el libro de "La Geometría Espontánea del Niño".

Un primer nivel (correspondiente al nivel II A en Piaget) en el que hay una evaluación perceptiva y una completa ausencia de adición o sustracción operatorias. La igualdad de las superficies restantes es negada frecuentemente desde que la primera pareja de casas es dispuesta de manera distinta, por la incapacidad del sujeto de mantener la invariancia ni de las partes quitadas ni de las restantes, con lo que tanto la operación de sustracción como la de adición o reunión de superficies pierden toda significación. Si el niño considerara las operaciones de adición y sustracción de superficies -en realidad una sola y la misma operación- como reversibles, esta reversibilidad implicaría o engendraría, según el punto de vista, la conservación en cuestión. Veamos algunos ejemplos:

Rubén (8:0), después de verificar (superponiendo) la igualdad de los terrenos y de las casitas observa:

R: A éste (B) le queda más porque esta casita ocupa menos porque está más abajo.
Exp: ¿Cómo harías para que las dos tengan igual de pasto?
R: Poner las dos igual de arriba (las coloca a la misma altura)
(Ponemos dos casitas juntas en A y separadas en B)



R: En B hay más porque están separadas
Exp: ¿Esa vaca tiene más pasto para comer?
R: Sí, tiene más pasto porque están separadas las casitas y hay más espacio... porque separadas ocupan menos espacio.
(mismas respuestas para 3, 4, 5, 6 y 7 casitas. Con 8 casas juntas en A y separadas en B).
R: En esta (A) porque ocupan menos porque están juntitas y tienen menos espacio (las casas) y la vaquita tiene mucho, todo esto para comer.
(lo mismo para 9, 10 y 11 casas)
Exp: ¿Qué podemos hacer para que tengan lo mismo?
R: Juntarlas todas igual (junta todas las de B con la misma disposición que en A).

Rodrigo (8:7)

(con una casa en B en medio y una casa en A en una esquina)

Ro: Hay más acá (A) porque esta es más grande (señala la zona verde) porque la casita no quita casi espacio y acá sí (B) porque está en medio y estorba.

(mismas respuestas hasta 6 casas juntas en una esquina de A, y 6 esparcidas en B.

Exp: ¿Y si juntas todo el pasto de aquí (B)?

Ro: Es más poquito porque las casas estorbar mucho.

Exp: ¿Y las casitas son iguales?

Ro: Sí, todas son iguales, pero éstas no ocupan casi espacio (A).

Erika (7:6)

Sigue el mismo razonamiento que Rodrigo, con las casas de A juntas pero ahora en el centro del terreno en vez de en la esquina

E: Porque usó menos espacio.

Exp: ¿Las casas son iguales?

E: Sí, son iguales pero acá (A) deja más espacio. Cuando las va poniendo juntitas así (A) ocupa espacio, pero no tanto y por eso le queda más pasto.

Ana (7:6)

(Con dos casas separadas en B y juntas en A)

A: Más en esta (A) porque éstas no están juntas y ésta sí.

Exp: ¿Y qué pasa cuando están separadas?

A: Le quitan más pasto a la vaca... porque deja un espacio (señala el corredor entre las casas). La de aquí (B) tiene más porque las casas dejan un espacio (intermedio entre ellas) y la vaca se lo comió, y aquí no (no hay espacio entre las casas de A).

(Sigue así hasta 8 casas en cada lado)

A: Aquí le quedó tantito pasto (B) y en éste (A) mucho pasto porque no dejaron ni un hueco... porque en medio de estas casitas no hay pasto (A) y entonces a la vaca le quedó todo esto para comer (señala el espacio de B) y aquí (B) dejaron muchos huecos y a la vaca le quedó poquito.

En el nivel (II B) tenemos reacciones intermediarias como las siguientes:

Santiago (6:9) afirma con mucha seguridad la igualdad hasta que hay trece casas juntas en A y separadas en B.

S: El de éste (A) tiene más porque éste (B) tiene puros pedacitos chicos de pasto, y las casitas cuando están juntas no ocupan tanto lugar, y acá como no están juntas se hace más chiquito para el pasto.

Aquí, el sujeto acepta hasta un cierto número de casas la igualdad hasta que la configuración perceptiva llega a ser demasiado contradictoria. Hay una articulación intuitiva que le permite anticipar compensaciones debidas a un débil desplazamiento, una cierta movilidad del pensamiento (contra la imagen estática del nivel II A) pero sin generalización de dichas compensaciones.

Ricardo (8:9) que comienza con una plena confianza en la igualdad "porque si este señor la pusiera acá (cambia una casa de lugar) le quedaría igual, y acá también, en todas partes quedaría igual. Sólo si esta casa fuera más grande, como así (pone dos casas juntas) esa vaca tenía menos"

(Con dos casas en cada terreno)

Ri: Lo mismo, igual porque si estuviera otra casa, aquí tres y acá dos, la de tres tenía menos pasto, pero si tienen dos tienen lo mismo para la vaca.

(Sigue así, sin titubear hasta 14 casas en cada terreno. Le pongo 15 juntas en A y separadas en B).

Ri: Este (A) tiene más pasto porque tiene más espacio, porque tienen igual de casas, pero aquí la vaca tiene más porque se pasa por aquí (pedazo grande, continuo de pasto) y la otra tiene que venir por aquí y darle la vuelta a la casa, y a otra casa y le toca menos de pasto.

Exp: ¿Qué podemos hacer para que tengan lo mismo?

Ri: Juntarlas aquí también (B)
(Acerco las casas de B aproximadamente 7 mm de distancia entre ellas)

Ri: No, sólo así (las junta completamente en B)

En el nivel III, finalmente se logra la composición operatoria inmediata por reunión de todas las superficies restadas y sustracción de esta reunión de un mismo todo inicial, de donde la igualdad de las superficies restantes es concebida como necesaria.

Oswaldo (8:9) afirma siempre la igualdad.

O: Siempre es igual porque aunque lo pusieras en cualquier lado, las casas son iguales y le quitan igual de pasto cada vez.

Exp: Pero mira, este pedazo es muy grande (región verde continua en A) y acá son puros cachitos.

O: Pero si juntamos todos los pedacitos se hace lo mismo, siempre es igual. Sólo si uno de los dos construye más, ese tendría menos pasto.

Dolores (11:11) se ríe de la pregunta. Afirma sin dudar que siempre queda lo mismo.

Exp: Pero esto (A) es muy grande y esto (B) son sólo pedacitos.

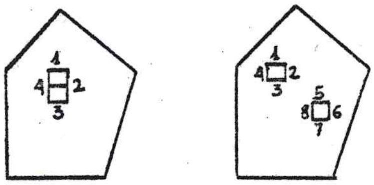
D: Sí, parece poquito, pero es igual porque quitaste igual de cada lado.

Ireri (11:6)
(Con una casa en cada lado)

I: Solamente que una casa fuera más grande (verifica superpo niendo las casas). No, son iguales entonces tienen los dos igual de pasto.

(Con dos casas juntas en A y separadas en B)

I: Tiene más en A porque aquí tiene cuatro lados y allá ocho (cuenta los lados en B)...



...Ah, no, es que me confundí. Mas bien los dos tienen igual de pasto, porque tienen igual de área y las casitas también. Es que yo pensaba que aquí como están los dos lados juntos (A) yo pensé que iban a ocupar menos, pero no, ocupan lo mismo (a partir de ahí ya no duda de la igual - dad). Es igual porque es como si lo juntáramos todo el pasto... es que las apariencias hacen que éste (B) parezca menos pasto, pero en la realidad es igual.

Las razones de la no conservación se refieren a que:

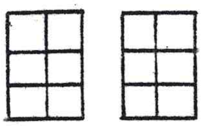
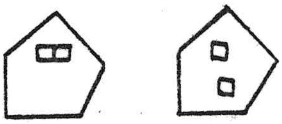
1) Un todo partido no es igual porque ha perdido su continui - dad, incluso si conserva su forma.
2) El desplazamiento de una parte altera la superficie total por falta de compensación entre el espacio vacío y el ocupa do.
3) Las partes separadas dan lugar a una confusión entre el espacio global que ocupan, considerando los intervalos, y la superficie total (sin intervalos).
4) La transformación modifica la forma y la longitud de la línea frontera.
5) La igualdad numérica de partes no establece la equivalencia si están arregladas en configuraciones perceptivas diferentes.

Estas razones pueden resumirse en una falta de composición aditiva de las partes y una falta de coordinación en el plano, entre los espacios libres y los ocupados o entre las partes móviles y los espacios inmóviles e invariantes.

Los procedimientos de medicón, convencionales o no, presuponen que una superficie permanece constante al hacer un rearreglo de sus partes, que la superficie unidad elegida no cambia de medida al ser desplazada y que la superficie total es igual a la suma o reunión de sus partes. En estas condiciones lógicas de la medición está claramente involucrada la conservación de superficies, y es por esto que la hemos estudiado.

TABLA II

CUADRO COMPARATIVO DE DIFICULTAD DE LAS TAREAS DE CONSERVACION

C O N S E R V A C I O N			
Erika	7:6	No	No
Rubén	8:0	No	No
Rodrigo	8:7	No	No
Ana Isela	7:6	Si, pero no de espacio "complemento"	No
Ma. Elena	8:0		No
Giordana	7:11	Si	No
Santiago	6:0	Si	No
Claudia	9:1	Sí (límite)	No
Ricardo	8:9	Si	No (15 casas)
Gerardo	10:0	Si	No
Víctor	7:7	Si	Si
Oswaldo	8:9	Si	Si
Víctor Noé	9:6	Si	Si
Dolores	11:11	Si	Si
Phen Bolio	11:2	Si	Si
Oscar Saúl	11:6	Si	Si
Marta Angélica	11:8	Si	Si
Yoatzin	11:3	Si	Si
Ireri	11:6	Si	Si

CAPITULO V

EL SIGNIFICADO DE LA MEDIDA DE AREAS

CAPITULO V.

SIGNIFICADO DE LA MEDIDA DE AREAS

¿Qué es medir áreas?

Paralelamente al desarrollo del concepto de área que hemos analizado especialmente en la sección anterior, tiene lugar un proceso de adquisición de las conceptualizaciones sobre medición de superficies que se refieren particularmente al objetivo o utilización de la actividad de medir, y a lo que se obtiene como resultado de esa operación.

Presentamos aquí algunos aspectos generales de la concepción de medir superficies que ponen de manifiesto los chicos en sus procedimientos de medición.

V.1. Medir es asignar un número.

Un aspecto que destaca inmediatamente es el hecho de que para todos los chicos que hemos entrevistado (entre 7 y 12 años) la idea de medir está estrechamente vinculada a la asignación de un número. Para ellos medir es encontrar un número (o varios) que representan al objeto en cuestión. Sin embargo las características de ese número varían muchísimo de un sujeto a otro.

Otro aspecto relacionado con el anterior y muy interesante es el de la utilidad o no del procedimiento de medición, y de su resultado numérico, para establecer una comparación entre áreas. Aunque para la mayoría de los chicos medir es un recurso que consigue hacer comparaciones que de otra manera resultan muy difíciles, para muchos niños medir y comparar son simplemente dos actividades que no tienen nada en común. Así Ana Isela (7:6) que para medir ha superpuesto figuras a dos superficies recurre nuevamente a las argumentaciones de "más largo" y "más ancho" para validar su comparación.

Santiago (6:9), que utiliza la regla para cubrir superficies ha llegado a la conclusión de que el cuadrado de 7x7 cm mide "6 y cacho" mientras que el triángulo obtenido cortando por la diagonal ese mismo cuadrado mide "7 y cacho", admitiendo simultáneamente que dos triángulos equivalen a un cuadrado. Al cuestionársele si algo más pequeño puede medir más que algo más grande él no encuentra contradicción alguna: "no importa porque así midió" (y muestra de nuevo el procedimiento empleado para medirlos).

Gerardo (10:0) a su vez atribuye al mismo objeto, medido con las mismas unidades (centímetros) dos medidas diferentes obtenidas por dos procedimientos distintos, con lo cual la comparación carece de sentido.

V.2. ¿Qué magnitud se mide?

Pero es en lo que se refiere al tipo de magnitud asociado a la superficie donde los procedimientos de medición empleados por los chicos resultan más interesantes y reveladores. Hemos optado por distinguir tres grupos de procedimientos, que a pesar de presentar muy grandes diferencias internas apuntan a modos considerablemente distintos de concebir el área y de proceder a la asignación de números que sean sus medidas.

Estos tres grupos se representan en el siguiente cuadro:

CONCEPCION DE área / medida	determinada por longitudes	determinada por superficies
se miden longitudes	1	2
se miden áreas		3

En el grupo I localizamos a niños que tienen una concepción del área como determinada por longitudes y consecuentemente, asignan un número que representa longitudes. Incluye procedimientos tales como la medición del perímetro, la del largo o el ancho de la figura (o ambos) y la medición de líneas o direcciones que se definen a partir de la forma de la figura (longitud mayor, diagonal, etc.)

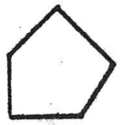
En el grupo II localizamos a los niños que consideran a la superficie determinada por las superficies que la forman o que la cubren, pero que, no sabiendo cómo asignar medidas que correspondan a las áreas, miden longitudes de las superficies en las que subdividen o con las que cubren el objeto a medir.

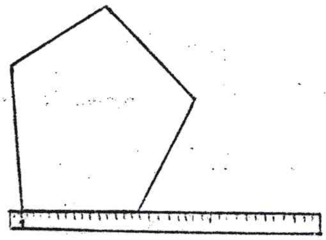
En el grupo III hallamos finalmente a chicos que no sólo suponen a la superficie como determinada por las superficies que la componen, sino que asignan a su vez la medida a través de alguna forma de contar esas superficies parciales. Se incluyen también aquí los procedimientos que utilizan una fórmula de cálculo (tal como Bxh/2) pero que hacen referencia al significado del número de unidades de superficie contenidas en una figura.

Es importante hacer notar aquí que entre el grupo I y el II hay un avance en la conceptualización del área, mientras que entre el grupo II y el III hay fundamentalmente un avance en los procedimientos de la asignación de la medida.

A continuación se relatan algunos aspectos generales de las entrevistas que ejemplifican estos grupos de procedimientos, pero no se analiza aquí el detalle del procedimiento usado en cuanto al significado de las unidades empleadas, uso de la regla, etc., que serán analizados separadamente en los capítulos siguientes.

Grupo I -Consideraciones meramente lineales; medida de longitudes.

<u>Ricardo</u> (8:9) elige el terreno  para medir. Me pide una regla y dice que eso es lo único que le sirve. Mira las graduaciones (la regla, de 30 cm de largo, está graduada en centímetros y en pulgadas) y dice "aquí está el cero"(en el lado de los centímetros) . Coloca la regla en un lado del terreno (por fuera) y hace coincidir el número 1 con la orilla del terreno.

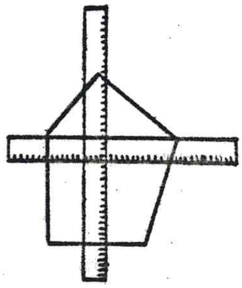


Sigue con la mirada ese lado hasta la otra orilla y dice "este 18". Gira el cartón dejando la regla en la misma posición para medir de la misma manera otro lado "este 22". Anota 18+22 y hace la suma. Sigue así hasta completar los 5 lados y va anotando: 40+19=59; 59+22=81; 81+16=97; diciendo cada vez en voz alta lo que midió y el nuevo resultado.

Le pregunto si ya midió todo el pasto, todo lo verde.

Ri: Deja ver de ancho cuánto es.

(Ahora coloca la regla por dentro y con el mismo procedimiento mide el largo -34- y el ancho -20- del terreno).



Ri: (suma 20+34) 54.
Exp: ¿Mide 54?
Ri: Sí.
Exp: ¿54 ó 97, o cuánto mide todo el pasto?
Ri: Es que de adentro mide menos, porque medí del ancho y del largo nada más.
Exp: ¿Cómo será mejor medir?
Ri: Por la orillita.
Exp: ¿Así se mide ya todo lo de adentro?
Ri: Sí, ya todito.
Exp: ¿Y así con el largo y el ancho (le coloco dos reglas simultáneamente) ya mediste los pedazos de adentro?
Ri: Ya, por eso fueron 54 y 97.
Exp: El pasto todo ¿cuánto mide?
Ri: (suma 54+97=151) un metro y 51 cm.

<u>Ma. Elena</u> (8:0) para medir el terreno en forma de cruz toma una regla. La pone en el centro de uno de los brazos (Fig. 1) y marca con su dedo a donde llegó. Luego corre la regla hasta su marca y mide el pedazo que le falta (Fig. 2). Hace lo mismo para el otro brazo.

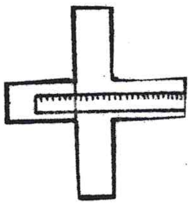


Fig. 1

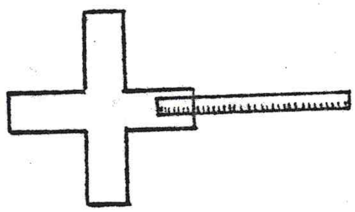


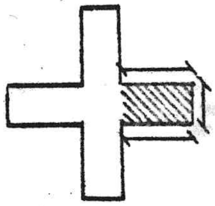
Fig. 2

Escribe la suma de las medidas que tomó: 40=33=73 y dice que mide 73.

Para el terreno circular procede similarmente midiendo dos diámetros perpendiculares (horizontal y vertical) y sumando ambas cantidades.

Exp: ¿Qué es lo que mediste?
Ma: El pasto, el pasto que mide el redondo.

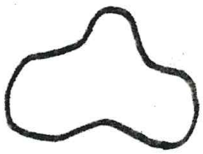
Giordana (7:11) para medir el pasto del terreno en forma de cruz va midiendo con la regla por fuera de la figura los pedazos del perímetro.



Exp: ¿Así mides el pasto o el alambre?

G: El pasto porque si mido estos lados, ya medí ese pedazo de pasto (sombreado) y así los mides todos.

Para medir



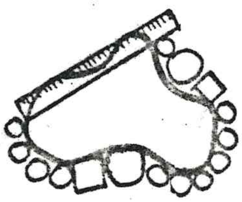
G: ¿No tienes figuras de esas (me señala los cuadrados, triángulos y círculos) pero con número 5.

Exp: ¿No te sirven como están?

G: Quiero que sean figuras de regla, que tengan números. Si no, no me sirven para medir.

Exp: ¿Sin números no sirven?

G: Necesito cuadrados y círculos grandes y chiquitos y la regla también.



Exp: ¿Estás midiendo el pasto?

G: Sí, así ya está todo... o por ejemplo aunque no tengan números puedo contar (va contando señalando alrededor de la figura con pequeñas marcas).

G: Son 19, 19, 19 (por cada círculo chico) y 20, 20 (por cada círculo grande) y 15 y 15 (los cuadrados). Y ahora lo sumaría todo y ya se cuánto mide.

Exp: ¿Te serviría poner las figuras adentro? (le coloco algunas).

G: No, así como lo hice se mediría.

Grupo II -Consideraciones de superficie pero a través de medidas de longitud.

<u>Gerardo</u> (10:0) Elige el terreno circular para medirlo.

Exp: ¿Cómo lo medirías?

Ge: Ah, pues con círculos.
(Le doy los de la caja)

Ge: Sí, sabiendo cuanto miden estos, lo llenaría todo el terreno y contaba (acomoda círculos de ambos tamaños, sin salirse ni encimarlos, cubriendo lo más posible). Ya.

Exp: ¿Cuánto mide?

Ge: ¿Cuánto miden estos? (los que usó para cubrir)

Exp: ¿Cómo podrías medirlos?

Ge: Ah, con el estambre.

Exp: Pero estamos midiendo el pasto, no el alambre.

Ge: Sí, por eso lo llené todo.
(Gerardo nos muestra muy claramente que está pensando en términos de pedazos de superficies; sin embargo pone el hilo alrededor de un círculo chico (2.2 cm de diámetro) y lo corta.

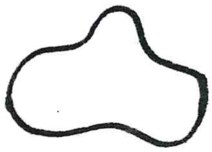
Mide su longitud con la regla).

Ge: Son 7 y medio. Ahora los cuento (cuenta el número de círculos pequeños que usó para cubrir) son 30x7 1/2 (hace la multiplicación) son 225 de la mitad del terreno.

Exp: ¿De la mitad?

Ge: Bueno, no de la mitad, de los huecos que llené con chiquitos.

(Mismo procedimiento para los círculos grandes: al final suma los dos resultados. Más adelante usa cuadrados y triángulos para cubrir el terreno y sigue el mismo procedimiento de medir el perímetro de cada figua, esta vez directamente con la regla).

<u>Santiago</u> (6:9) para medir  lo cubre casi totalmente con cuadrados, triángulos y círculos de diferentes tamaños.

Sa: Ahora lo voy a medir con la regla.

Exp: ¿Las figuras no te sirvieron?

Sa: Sí, sí me sirvieron para ponerlo todo así, y ahora ya puedo medir cada parte con la regla (toma la regla y va midiendo un ejemplar de cada figura).

Para el cuadrado grande mide dos lados consecutivos, el ancho del cuadrado -por en medio- y la diagonal -a la que llama esquina- (Fig. 1). Para el cuadrado chiquito (1.5x1.5 cm) toma solo dos lados consecutivos y la diagonal, en cada ocasión dice en voz alta la medida) tres, tres y cachito, siete y cacho grande. A los triángulos chicos les mide la hipotenusa y la distancia del punto medio de ésta al vértice opuesto. A los círculos les mide así (Fig. 2).

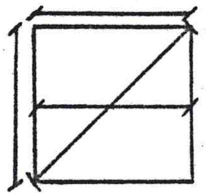


Fig. 1

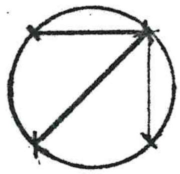


Fig. 2

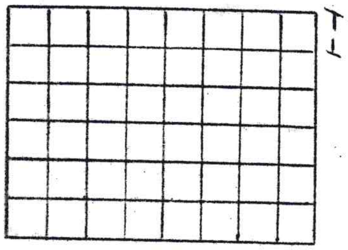
A los triángulos más grandes les mide los tres lados y la altura correspondiente a la hipotenusa. Está pendiente que yo anote todos los números que él dice).

Sa: Ahora lo juntaría todo, tres veces lo del cuadrito porque hay tres, cuatro lo del círculo porque hay cuatro... para saber lo que mide todo el pasto.
(Había colocado para cubrir la figura 3 cuadritos, 4 círculos... etc).

<u>Víctor</u> (7:6) para medir el terreno rectangular de 21x28 cm:

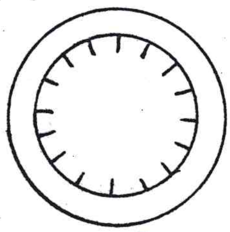
Vi: Tendría que ir poniendo puras rayitas así (pone la regla a lo ancho muy cerca del borde, empezando del cero, y cuenta hasta el 21; la corre un poquito -3 mm- hacia adentro y sigue) 22, 23, 24... 42 (la vuelve a correr dos milímetros y sigue contando). Así tengo que ir subrayando y ya llego... mediría como 900.

Exp: Y los cuadritos estos que tú hiciste (antes había cuadriculado el terreno) ¿no sirven para medir el pasto?



Vi: No, porque me falta medir todo lo de adentro (señala lo verde contenido en cada cuadrado que marcó) (*).

Para medir el terreno circular, Víctor pide del material un círculo grande (6.5 cm de diámetro) y uno pequeño (2.1 cm de diámetro) y me pregunta si no hay círculos más grandes. Le doy algunas tapas redondas de distintos diámetros. Víctor coloca una de ellas en el centro del terreno y marca su circunferencia. Esta tapa tiene marcas alrededor, a distancias regulares.



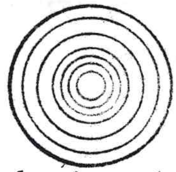
(*) Puede apreciarse en esto último una confusión derivada del manejo escolar de las figuras geométricas que al presentarlas como contornos dibujados en papel, no permite distinguir entre los bordes que limitan una figura y el plano que queda definido por esos bordes. En el lenguaje sólo existe esa distinción entre el círculo y la circunferencia.

Víctor cuenta las marcas.

Vi: Van 54 (toma una segunda tapa, la coloca en el centro marcando su circunferencia, le pone marquitas aproximadamente cada 7 mm alrededor de la tapa y va contando).

Exp: ¿Cuando cuentas así, mides la orillita o todo el pasto de adentro?

Vi: No, medí la orillita, por eso con la otra tapa medí un poco de pedazo y ahora con esta le cuento más pedazo (prosigue el método de marcar y contar con todos los círculos de que dispone, dibujándolos concéntricos).



Ahora me falta lo de hasta adentro, este pedacito (señala el espacio dentro de la circunferencia más pequeña. Suma todas las cantidades que ha anotado).

Exp: ¿Ya mediste todo el pasto?

Vi: Sí, casi todo.

Exp: ¿Y el pedazo que está aquí (entre la circunferencia de la tapa más grande y el borde del terreno)?

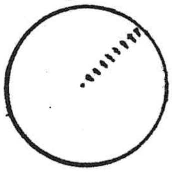
Vi: Ese no lo medí, necesitaría un círculo de este tamaño (señala una circunferencia de tamaño intermedio entre el terreno y la tapa más grande).

Exp: ¿Y este pedacito? (en el centro del terreno)

Vi: No, necesitaría un círculo chiquitito.

Exp: ¿Cuántos diferentes necesitas para medir todo el pasto?

Vi: A ver cuántos (hace marquitas pequeñas y va contando)



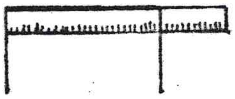
Vi: Necesitaría como 20 círculos de todos los tamaños. Uno bien chiquitito como una pulga y uno casi tan grande como éste (el borde del terreno) así ya no me faltaría ni un pedacito.

Exp: ¿Y no te serviría poner estos así adentro? (le coloco círculos de cartón).

Vi: Sí, un poco...¿Cuánto midió este? (El círculo grande de 6.5 cm. de diámetro que estaba en el material, medido con el sistema de las marcas en el perímetro) 34... serían 34 + 34 + 34 +... y los chiquitos miden la parte chiquita (los coloca cubriendo los espacios verdes que le quedaron)

Grupo III -Procedimientos referidos a superficies que logran asignar un número que corresponde a consideraciones de superficie.

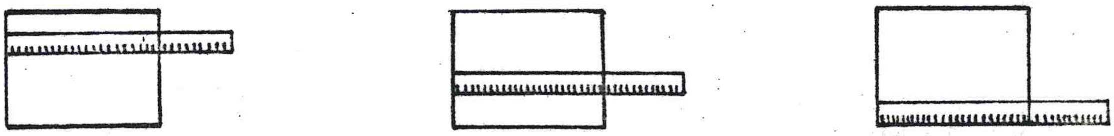
Rodrigo (8:7) para medir el terreno de 14 x 21 cm. pone la regla a lo ancho, por dentro del terreno



Ro: Mide 21 centímetros.

Exp: ¿No importa que sobre esto? (Le señalo la parte verde sin cubrir por la regla.

Ro: Sí (pone la regla más abajo -corriéndola 3.5 cm., que es el ancho de la regla, registrando cada vez 21 cm y sumando).



$$\begin{array}{r} 21 \\ +21 \\ \hline 42 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 21 \\ +21 \\ 21 \\ \hline 63 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 21 \\ +21 \\ 21 \\ 21 \\ \hline 84 \end{array}$$

En el procedimiento de Rodrigo puede verse claramente que, aunque la medida que obtiene es la de una longitud, él la considera como la medida del pedazo de la superficie que queda cubierto por la regla.

Erika (7:6)

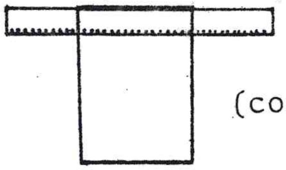
Exp: Las reglas y las escuadras ¿sirven también para medir el pasto?

(Erika ha medido ya varios terrenos cubriéndolos con figuras).

E: Sí, pero se me hace más fácil con figuras.

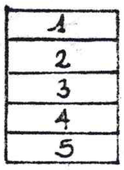
Exp: ¿Cómo podrías medir este terreno (21 x 28 cm) con la regla?

(Pone la regla encima del terreno, sin hacer coincidir ningún número, ni la orilla de la regla, marcando solamente su ancho)



(corriéndola hacia abajo y contando)

E: Son cinco



Exp: ¿Cinco qué son los que contaste?

E: Cinco... rectángulos... mide 5.

(Describe procedimiento similar para el uso de la escuadra)

Rodrigo y Erika, son ejemplos muy claros de adaptación del instrumento (regla) para considerar superficies (cubiertas por ella) y no sólo longitudes. La regla es utilizada por ellos como instrumento que cubre y mide superficies.

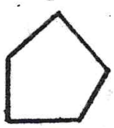
De manera semajante, Oswaldo emplea las escuadras y las reglas para evaluar superficies, tomando en cuenta en cada lectura de la graduación la sección cubierta por la regla o por la escuadra, y tomando en cuenta, por lo mismo, tanto el largo como el ancho de la sección respectiva.

Algunos otros chicos dentro de este grupo recurren a figuras geométricas para cubrir las superficies a medir. Veamos algunos ejemplos:

Victor Noé (9:6) Usa por sugerencia del experimentador las figuras del material para cubrir el terreno rectangular

(21 x 28 cm). Lo cubre con cuadrados de 7 x 7 cm.

Vi: Sí, mide 3 por 4, para más rápido si lo ponemos son 12.

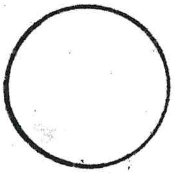
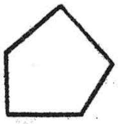
Para medir  coloca distintas figuras y dice

Vi: Mide 8 cuadrados, 4 triángulos rosa, 5 triángulos café

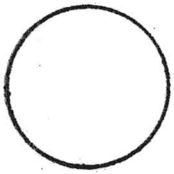
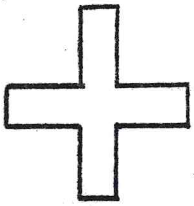
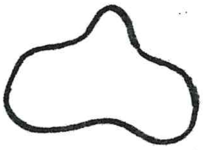
5 triangulitos naranja.

(El color indica diferencia de tamaño, como puede verse en el Anexo 1)

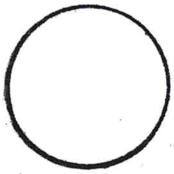
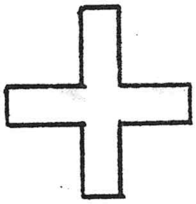
Claudia (9:1) mide cubriendo con figuras los terrenos

 y  , contando separadamente cada tipo de figura, y estableciendo equivalencias entre ellas para comparar los terrenos. Usa también (por sugerencia) el papel cuadriculado (contando los cuadritos contenidos en el terreno) y al preguntarle si se podría usar la regla para medir el pasto nos contesta: "No sé... no sé cómo".

Ana Isela (7:6) recurre también al recubrimiento para medir

  y 

(sin establecer equivalencias) : "Sí, le pongo cuadrados y figuras para medirlo, cuando tape todo el pasto". Lo mismo hace Erika (7:6) para medir

  y 

Por último tenemos en este grupo a niños que utilizan las fórmulas enseñadas por la escuela, reconociendo en ellas procedimientos que hacen referencia a número de unidades de superficie que caben en la figura a medir.

Ireri (11:6) calcula la superficie del terreno rectangular (21 x 28 cm) multiplicando la medida de su base ("la que tomé como base") por la de su altura.

Multiplica 21 x 27.9, y obtiene 585.9

I: Entonces mide quinientos ochenta y cinco punto nueve centímetros.

Exp: ¿Qué significa?

I: O sea, que son quinientos ochenta y cinco centímetros cuadrados, o sea que una partecita de esto es un cuadrado, o sea un cuadrado de un centímetro de cada lado.

Le pido que dibuje un cm^2

I: (Dibuja con ayuda de la escuadra un cuadrado de 1 cm por lado) O sea que 585 de esos cuadros caben en el rectángulo.

Le pido explicación de fórmula

I: Porque aquí (base) cabrían 21 cuadritos y acá hay 27.9 o sea casi 28 cuadritos, y al multiplicar esos cuadritos quiero decir que se va cubriendo todo completo, toda el área.

Oscar Saúl (11:6). Para medir el terreno en forma de cruz.

O: Tengo que medir la base y la altura de las cuatro puntas, y luego multiplicarlas, y también el cuadrado de en medio, y sumarlo todo. (Lo hace y da el resultado en cm^2).

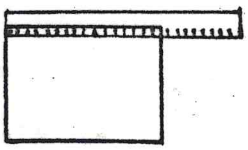
Exp: Dibuja un cm^2

O: (Dibuja un cuadrado de 1 cm por lado)

Oscar explica la fórmula del rectángulo igual que Ireri. Sin embargo, Oscar no recuerda la fórmula del círculo, pero usa entonces papel cuadriculado y también figuras (cuadrados) para medir su área.

Phen (11:2) Calcula también el área del rectángulo multiplicando la longitud de la base (28 cm) por la de su altura,(21 cm) y da el resultado en centímetros cuadrados.

P: Porque aquí en esto (señala lo verde) no pueden ser así los centímetros (dibuja un segmento de 1 cm de la longitud) sino que tienen que ser cuadrados... porque si no son cuadrados no podrías saber por ejemplo, si pones la regla así



son 28 cm, y luego otros 28 y otros 28 (va corriendo la regla hacia abajo) y no sabrías cuántas veces 28.

Exp: ¿Con la cuenta ya sabes?

P: Sí, porque son 21 cm.

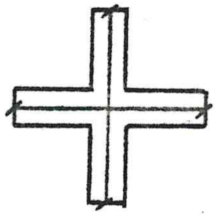
Exp: ¿Caben 588 de esos cuadritos aquí?

P: Sí.

Phen acepta también medir usando figuras para cubrir, suponiendo la equivalencia entre ambos procedimientos.

Sin embargo, no todos los chicos que optan por la utilización de fórmulas tienen idea del significado de éstas, y en consecuencia no las recuerdan correctamente, y en ocasiones no encuentran otro recurso de medición de superficie.

<u>Manuel</u> (11:11) Mide el "largo" y el "ancho" del terreno en forma de cruz y multiplica (39 x 39 = 1511)



Exp: ¿1511 qué?

Ma. 1511 centímetros.. ah no, metros cuadrados

Exp: Esta regla ¿en qué mide?

Ma: Ah... entonces son centímetros cuadrados.

Le pido que dibuje uno

Ma: No sé dibujarlo (me señala en la regla la distancia de 1 mm). A ver espérame ¿cuáles son los centímetros, aquí del 18 hasta el 19, o el que está a la mitad?

Exp: Tú, ¿cuál crees que sea?

Ma: Del 18 al 19... entonces es un cuadrito que mide eso (dibuja un rectángulo de 1 cm x ½ cm)

Exp: ¿Es un cuadrado?

Ma: Sí.

Exp: ¿Por qué se llamarán cuadrados?

Ma: Porque midiendo este cuadrado... Ah, no, porque también mide el redondo... no sé por qué se llamará cuadrado.

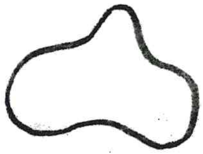
Manuel mide también el pasto del terreno circular y el del terreno en forma de cruz multiplicando largo por ancho. (En el ca so del círculo tomando las medidas de un diámetro vertical y otro horizontal.

Exp: ¿Y siempre multiplicando largo por ancho puedes saber cuánto pasto hay? ¿para cualquier figura?

Ma: No, para cualquiera no.

Exp: ¿Para cuáles no sirve?

Ma: Para el triángulo no... porque para ése hay que hacer base por altura sobre dos.

Exp: Y  ¿cómo se mediría?

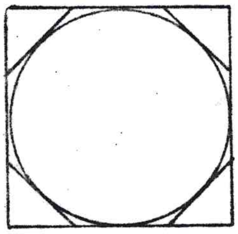
Ma: No, este no porque no es una figura (!), no tiene un nombre de figura, no es un círculo o cruz o cuadrado o algo. Le ofrezco las figuras para cubrir.

Ma: No, no sirven para medir, se necesita regla y que estén derechos.

Dolores (11:11) diseña un método muy original para calcular el área del círculo:

Do: Es que yo pienso que para saber el área del círculo podemos imaginarnos un cuadrado encerrando el círculo, y ese cuadrado mide casi la misma área que el círculo, y como el círculo es redondo nos imaginamos el cuadrado y después le quitamos unos centímetros de donde empieza a hacerse redondo el círculo.

Dolores traza un cuadrilátero (intenta que sea un cuadrado con lado igual al diámetro del círculo) y traza triángulos en las esquinas (para restar del área del cuadrado los triángulos que se salen del círculo). Para calcular el área de un triángulo usa la fórmula (bxh)/2. ("Porque así me enseñaron") pero, en vez de restarlo del área del cuadrado, calcula el perímetro de éste (midiendo 2 lados consecutivos y sumando 2 veces cada medida), con lo que la cantidad a restar es mayor que el minuendo.



Dolores nos muestra en su razonamiento una conceptualización avanzada acerca del área, y un uso muy apropiado de la propiedad aditiva de ésta (el cuadrado es igual a las partes que lo componen: un círculo más cuatro esquinas), y aún de la aproximación (las esquinas no son exactamente triángulos), pero al llevar esas concepciones a fórmulas que no comprende cae en errores que a primera vista aparecerían como consideraciones lineales, tales como medir el perímetro para conocer el área.

<u>Marta Angélica</u> (11:8). Utiliza bxh para calcular el área del rectángulo.

Exp: ¿Por qué?

Ma: Porque las veces que cabe la base y la altura... no, la base... las veces que cabe la base en lo que cabe la altura.

Exp: ¿Las veces que cabe la base en dónde?

Ma: No sé... en el área.

Le muestro que puede medir 28 (la "base") todas las veces que quiera en el rectángulo. Interrumpe.

Ma: Es que me equivoqué, porque ¿es un rectángulo, verdad?... ¿El rectángulo no se dividiría entre dos?...

Los tropiezos de estos chicos nos muestran cómo un "aprendizaje" sin comprensión conduce a procedimientos estereotipados que impiden y obstaculizan el razonamiento y el uso de las nociones generadas en el curso del desarrollo sustituyéndolo por mecanismos más o menos memorizados pero carentes de significado y, por lo tanto, imposibilitados para ajustarse a nuevas situaciones.

Por los procedimientos que emplean podríamos afirmar que estos niños se encuentran en el primer nivel y, en algunos casos, en el segundo. Sin embargo, cuando resuelven tareas menos escolares, sus razonamientos son mucho más avanzados y se refieren a consideraciones no lineales, sino de superficie (como puede verse en los capítulos de conservación, seriación y medida no convencional de superficie). En seguida analizaremos a qué pueden deberse entonces sus terribles tropiezos con las fórmulas.

CAPITULO VI

EL PROCESO DE CONSTRUCCION DEL CALCULO DE AREAS

VI. EL PROCESO DE CONSTRUCCION DEL CALCULO DE AREAS

Como se ha venido mencionando, y se puede ver claramente en los ejemplos citados, la adquisición de la noción de área y de la posibilidad de medirla implica un complejo proceso de construcción por parte del sujeto. En particular, este proceso requiere del paso de consideraciones lineales a consideraciones propiamente de superficies, y de la adquisición de procedimientos que permitan asignar números (medidas) que correspondan a la magnitud de las áreas.

Si, ignorando la complejidad de este proceso, la enseñanza pasa muy pronto a procedimientos fijos o fórmulas de cálculo del área se corren dos riesgos muy importantes:

VI.I. Riesgos de la introducción prematura de fórmulas en la enseñanza.

I) El primer riesgo es suponer como adquiridas las propiedades y características de esas nociones y en consecuencia arribar a un uso mecánico y frecuentemente a una memorización incorrecta de las fórmulas. Las propiedades de la medida de áreas que hemos mencionado en el Cap. 2 son utilizadas y presupuestas en la justificación de las fórmulas para el cáculo del área de figuras regulares (que por otro lado son siempre las que aparecen en la escuela), sin que haya un trabajo previo dirigido a su adquisición, o al menos a conocer si ya existen como condiciones lógicas en el pensamiento de los niños. Nos referimos aquí a las propiedades "lógicas" de la noción de área a las que aludimos en el capítulo 2, tales como el reconocimiento de la composición aditiva de áreas, la correspondencia del orden entre sus magnitudes y el que se establece con sus medidas, etc.

Por ejemplo al introducir la fórmula de cálculo de área del triángulo (Bxh)/2 se dice, y en el mejor de los casos se muestra, que duplicando cualquier triángulo se obtiene un paralelogramo (o un rectángulo) de igual base y altura que el triángulo. Para comprender esto es necesario suponer, por un lado, que al poner una figura en una nueva posición su área no varía, y que el área de dos figuras iguales es igual que el doble del área de una de ellas.

Al introducir la fórmula para los paralelogramos y los polígonos regulares se da por supuesto que el área de una figura es igual a la suma de las áreas de las partes que la componen, y que estas partes pueden ser reacomodadas sin alterar su área. Y todavía se va más lejos al introducir la fórmula para el cálculo del área del círculo (considerado como un polígono de número infinito de lados), pues en este caso se requiere pensar que dichas propiedades permanecen ciertas cuando la partición es contínua y el número de partes infinito.

La falta de manejo de todas estas propiedades se pone claramente de manifiesto en la imposibilidad del niño de reconstruir por sí mismo las fórmulas cuando éstas han sido olvidadas o de recurrir a procedimientos similares cuando se enfrenta a figuras para las cuales el maestro no ha proporcionado la fórmula indicada.

II) El segundo riesgo del paso apresurado a las fórmulas es que éstas suelen favorecer una aritmética errónea para las áreas al alimentar ciertas representaciones "tipo perímetro" de la superficie tales como calcular la suma de los lados de una figura para determinar su área. Como hemos observado en las páginas anteriores los chicos pasan por un período largo en el cual consideran que la superficie depende de la longitud de las líneas que la determinan y por otra etapa en la que ya las superficies quedan determinadas por superficies, pero su medida es asignada ob teniendo números que representan longitudes. Vergnaud y sus colaboradores han mostrado en múltiples estudios sobre las estructuras multiplicativas (*) que al introducir el manejo de longitudes como procedimento para calcular áreas, lo que se obtiene es un manejo aditivo de tales longitudes en correspondencia con las representaciones antes mencionadas y con la enseñanza del modelo de "suma abreviada" como significado único de la multiplicación, ("las veces que cabe la base en el área")que a su vez puede, en el caso de las medidas espaciales, constituir un obstáculo en la comprensión de las fórmulas, según lo analizaremos en las siguientes líneas.

VI.2. ¿No hay que enseñar los fórmulas?

Las consideraciones presentadas hasta aquí pueden hacer pensar que lo que se propone es eliminar las fórmulas para el cálculo de áreas de los programas escolares de la primaria, o al menos retrasar su aparición cuanto sea posible; sin embargo, debemos analizar cuál es el interés de la presencia de las fórmulas en los contenidos escolares, y si su presentación lleva más lejos el desarrollo conceptual acerca de la medida de áreas, o si simplemente abrevia y facilita el proceso de cálculo.

Los problemas del manejo de fórmulas para el cálculo de áreas y volúmenes remiten a la adquisición de RELACIONES entre las diferentes cantidades o magnitudes espaciales. Estas relaciones ponen en juego -como lo afirma J. Rogalski (**) un doble proceso de diferenciación y de coordinación:

- - - - - - - - -

(*) Ver bibliografía de los autores Vergnaud, Ricco, Rogalsky.

(**) La adquisición de la noción de dimensionalidad de las medidas espaciales, pág.

-Diferenciación de diversas propiedades simultáneamente presentes en un objeto o figura (su longitud, su forma, la longitud de su contorno, su área, etc.)

-Coordinación de esas propiedades de manera no solamente cualitativa, sino cuantitativa, arribando a las llamadas "ecuaciones de dimensiones":

$$S = L \times L, \quad V = L \times L \times L = S \times L$$

Rogalski aborda el trabajo sobre esta apropiación de la "dimensionalidad" de las medidas espaciales a través del estudio de las invariantes de ciertas transformaciones -las semejanzas- (que forman un grupo) que actúan de manera diferencial para las 3 medidas espaciales:

> "A una semejanza de razón 'r' se puede asociar una invariante propia de cada magnitud... que es la razón de la medida transformada a la medida de la figura inicial. Para la longitud esta invariante es r, para la superficie la invariante es r^2 y para el volumen la invariante es r^3, (esta propiedad es equivalente a la aplicación de las ecuaciones de dimensiones)"(*)

Pero, ¿qué tanto esta noción de dimensionalidad de las medidas espaciales es accesible a los chicos en la presentación escolar de la medida de áreas?

VI.3. Presentación tradicional del tema de área.

Esquemáticamente, se puede decir que la presentación tradicional del tema es la siguiente: (seguimos aquí los estudios de

- - - - - - - -

(*) Rogalski, J. Acquisition des notions... 350

J. Rogalski, y el análisis hecho sobre los textos oficiales de la SEP, por Ma. del Carmen Alvarez (*)

A partir del procedimiento de subdivisión exacta de rectángulos en figuras-unidad (casi siempre cuadrados y aún cm^2) se lleva a los alumnos al cálculo del área de rectángulos por medio de medidas lineales enteras (con una unidad de longitud ad hoc), con el caso particular del cuadrado. Se pasa entonces al cálculo del área del triángulo rectángulo (como mitad de un rectángulo), de cualquier triángulo (como compuesto por dos triángulos rectángulos), del trapecio y del rombo (como rectángulos transformados), de cualquier polígono (como suma de triángulos) y del círculo (como polígono de muchos lados, sin ninguna referencia al proceso contínuo), basándose en la propiedad aditiva de la medida de áreas.

En todos estos pasos que utilizan la fórmula básica de Bxh = S, se da por supuesto que cualquier superficie limitada por lados rectos es descomponible en figuras con las cuales se puede finalmente construir un rectángulo, pero nada garantiza que así sea, menos aún en el pensamiento de los chicos.

Estos refieren el reticulado del cuadrado y del rectángulo al producto lógico y a la multiplicación numérica, y es a través del recurso de imaginar filas de cuadritos que suelen tener éxito en las tareas que se refieren al cálculo de superficies de esas dos figuras. Pero la experiencia muestra que ese punto de apoyo se utiliza poco para la construcción de un conocimiento más elaborado y para la extensión del dominio de validez de esta

- - - - - - - -

(*) Alvarez, Ma. del Carmen, ¿aprender a medir o aprender fórmulas? DIE, documento interno, 1983.

adquisición. El recurso mencionado no es ya utilizado por los niños para otras figuras y otras tareas. Así, frente a situaciones menos estereotipadas (figuras con límites curvos, o no regulares) los chicos se hallan sin recursos de solución, al menos sin recursos disponibles y operacionales de inmediato.

De esta manera, los niños nos dicen que figura no la pueden medir porque "para ésa no sé la fórmula" o "no hay fórmula", o incluso que a algunas figuras no puede medírseles el área porque "no son una forma" (en el caso de figuras muy irregulares o curvilíneas).

VI.4. La multiplicación en las fórmulas de cálculo de área.

A todos estos problemas se agrega el del significado mismo de la operación de multiplicar, involucrada en todas las fórmulas para el cálculo de área,

Este aspecto, que podría parecer como obvio, representó un obstáculo difícil de superar en el desarrollo de la matemática griega. Los griegos se cuestionaron por qué los resultados de la ley de composición del producto no estaban definidos sobre el mismo conjunto de origen cuando se trataba del producto de longitudes. Es decir, ellos sabían que al sumar números reales obtenían como resultado un número real. También sucedía esto cuando multiplicaban números reales. Por otro lado, cuando sumaban longitudes obtenían longitudes, pero observaban que al multiplicar longitudes lo que obtenían no era una longitud, sino una cierta área.

Es en gran parte debido a este problema y a sus complicaciones cuando intervienen más dimensiones, que se observa en Grecia una absoluta preponderancia de la geometría (que permitía obtener resultados prácticos) sobre el álgebra (que no lograba explicar teóricamente estas "extrañezas").

Como mencionamos antes, Vergnaud (*) sostiene que el empleo único del modelo ADITIVO en la enseñanza como significado de la multiplicación puede, en el caso del volumen y la superficie, constituir un obstáculo a la comprensión de las fórmulas y al análisis de su significación.

En efecto, si revisamos los textos de la escuela primaria lo mismo que si preguntamos a los maestros, e incluso a los niños, el significado que se atribuye comúnmente al producto es el de ser una suma abreviada de sumandos iguales. Incluso en algunos intentos de introducir la multiplicación con el significado del producto cartesiano (formación de pares ordenados), la multiplicación pasa rápidamente a ser un recurso para el conteo ágil del número de pares ordenados que pueden obtenerse a partir de dos conjuntos de elementos, pasando así a ser otra vez una suma abreviada.

La búsqueda de este significado (suma abreviada) crea gran confusión en los niños frente al caso del producto de medidas, como lo hemos podido observar muy explícitamente con Marta Angélica que al tratar de justificar la fórmula (Bxh) para calcular el área del rectángulo, nos decía: "Porque es las veces que cabe la base y la altura... no, la base... las veces que cabe la base es lo que cabe la altura". ¿Las veces que cabe la base en dónde?. "No se... en el área", etc.

\- - - - - - - -

(*) Vergnaud, G. Didáctica y adquisición del concepto de volumen, p. 67.

VI.5. La multiplicación como proporcionalidad

Pero el producto tiene otros posibles significados, tales como el de proporcionalidad simple (en el caso del isomorfismo de medidas) o el de doble o múltiple proporcionalidad, como en el caso del Producto de Medidas, que es el que nos ocupa.

En efecto, tal como se mencionaba en la parte introductoria, el área es también una magnitud bidimensional, resultado de un producto de medidas de longitud, es decir proporcional a ellas. Para Vergnaud, el producto de medidas no es bien comprendido por los niños sino cuando se le analiza como una doble proporcionalidad.

Esta nueva concepción de la multilicación da pleno sentido a las fórmulas de cálculo de superficies apuntando no solamente (como lo haría la concepción unidimensional) a la aditividad de la medida, sino particularmente al significado del producto de medidas, extendiendo así también la noción del producto mismo, considerado tradicionalmente en la enseñanza solamente como una suma abreviada de factores iguales para observarlo ahora bajo el aspecto de doble proporcionalidad.

Si el producto fuera siempre una suma abreviada, (se suman a veces una magnitud) al sumar abreviadamente longitudes obtendríamos como suma longitudes, lo que jamás nos conduciría a una medida de superficie. Sin embargo, al considerar el producto de medidas como una doble proporcionalidad, obtenemos una nueva magnitud, cualitativamente distinta de las magnitudes de los factores, y cuantitativamente proporcional a ellas. Así, el producto de una longitud por otra es definido como una nueva magnitud (área) que es proporcional a ambas longitudes. En particular el metro cuadrado queda definido no ya como un cuadrado de un metro por lado, sino como el producto de un metro por un metro.

Esta consideración del producto de medidas como doble proporcionalidad no se restringe al dominio espacial (superficie y volumen) sino que se extiende como concepto fundamental en el dominio de la física, en el que la mayoría de las magnitudes son definidas como productos (o cocientes) entre otras magnitudes básicas: El trabajo es definido como fuerza por distancia; la velocidad como distancia entre tiempo: la fuerza como masa por aceleración, etc.

La doble (o triple) proporcionalidad se presenta también en muy diversas situaciones de la vida cotidiana (consumo = función del número de personas, y del tiempo; salario: proporcional al tiempo que se trabaje y a la categoría laboral, etc.) que pueden a su vez ser aprovechadas en la enseñanza.

Esta consideración bidimensional o multiplicativa del área permite solucionar problemas de medida de áreas tales como:

- Encontrar una figura del doble (triple, etc.) de área que una dada.
- Reconocer que si la razón de semejanza entre la longitud de los lados de dos figuras es de 1 a n, la razón de semejanza entre sus áreas será de 1 a n^2.
- Conociendo el área de una figura, obtener información sobre las longitudes en juego.

Las investigaciones de Piaget y colaboradores apuntan al conocimiento psicogenético de esta noción bidimensional del área. (*)

- - - - - - - - -

(*) La Geometría espontánea, Cap. XIII.

Para Piaget, las operaciones que implican las nociones de conservación de superficies, elección de la unidad e iteración de la misma, es decir las operaciones implicadas en la medición directa de áreas son reductibles a adiciones, sustracciones y multiplicaciones lógicas. Sin embargo... "cuando hay que poner en relación los lados de un cuadrado y su área, no se trata ya de una simple multiplicación aritmética (del tipo 3 filas de 4 cuadritos en cada una) ni aún hablando con propiedad, de una aplicación de ésta al espacio: interviene un cálculo de la superficie como tal en función de elementos lineales, y es a ese pasaje de lo lineal a la superficie lo que constituye un problema esencial" (*)

Para Piaget este pasaje involucra la partición del espacio como un contínuo, por oposición a la multiplicación aritmética sobre conjuntos discontínuos y proviene de concebir la superficie como una serie ilimitada de líneas infinitamente cercanas.

VI.6. Bidimensionalidad en el problema de la "duplicación del cuadrado".

La comprensión o no de esas relaciones multiplicativas entre la longitud de los lados y el área es lo que Piaget se propuso estudiar en el capítulo dedicado a la duplicación de las figuras (cuadrado, triángulo, círculo y cubo) (**)

Los problemas de la duplicación del cuadrado y del cubo fueron problemas clásicos de la geometría griega, como puede leerse en

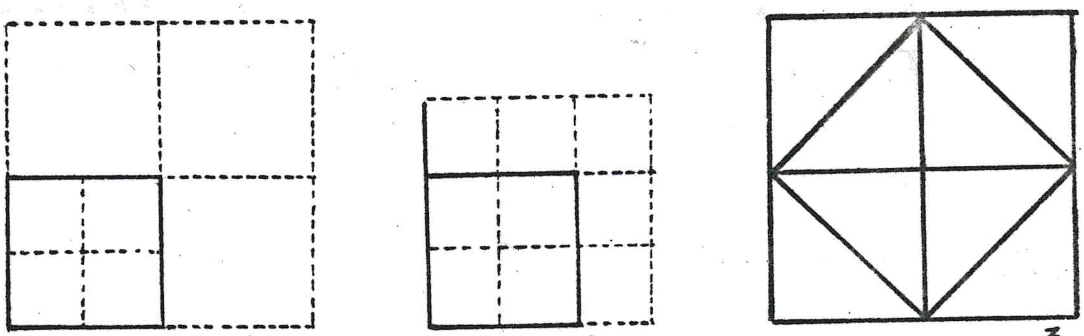
----

(*) La Geometría espontánea, p. 421.

(**) La Geometría espontánea, Cap. XIII.

el siguiente relato (*)

"En un conocido párrafo del diálogo "Menón" de Platón, Sócrates pregunta a un esclavo ignorante cómo duplicar el área de un cuadrado de dos unidades de lado manteniendo la forma del cuadrado. Para evitar malos entendidos, Sócrates dibuja la figura del cuadrado de dos unidades por lado: consecuentemente, el cuadrado está formado por cuatro pequeños cuadrados. La cuestión es, entonces, cómo construir un cuadrado con el doble de área. Al principio el esclavo piensa que, al duplicar el área, los lados del cuadrado también se duplicarán y propone entonces cuatro unidades para cada lado. Al obtener esta respuesta, Sócrates dibuja un cuadrado de cuatro unidades por lado (Fig. 1.) El dibujo, sin embargo, muestra que el nuevo cuadrado tiene un área no doble, sino cuádruple del área original".



1 2 3

"El esclavo tiene que admitir que ha fracasado en su primer intento: su respuesta es incorrecta porque al duplicar la longitud de los lados ha incrementado el área del cuadrado no en dos si-

- - - - - - - -

(*) Tomado de: Moreno, Luis y Guillermina Waldegg. Geometría, fase de captación.

no en cuatro. El razonamiento que continúa es el siguiente: el cuadrado buscado, como es mayor que el original, debe tener lados más grandes, luego, la longitud de cada lado es mayor que dos porque dos es la longitud de los lados del cuadrado original. Sin embargo, nuestro experimento muestra que la longitud buscada no puede ser cuatro. Tendrá que ser un número menor que cuatro pero mayor que dos, es decir, tres.

Un cuadrado de tres unidades por lado tendrá el doble del área del original?Nuevamente Sócrates contesta a esta sugerencia por medio de un dibujo (Fig. 2) que muestra de inmediato que el área del cuadrado original no se duplica tampoco de esta manera. El área del cuadrado agrandado tiene nueve cuadritos en lugar de los ocho que debe tener el cuadrado buscado. Observando el dibujo, el esclavo tiene que admitir que, de nuevo, su respuesta no es correcta. Finalmente Sócrates resuelve el problema trazando otra figura y mostrando en ella que el área del cuadrado original se cuadruplica al duplicar los lados como lo había hecho el esclavo, sin embargo, si cada uno de los cuatro cuadrados así obtenidos se parte en dos triángulos trazando su diagonal, las diagonales mismas forman un cuadrado que tiene cuatro triángulos iguales (Fig 3). Es obvio que el área de este nuevo cuadrado es exactamente el doble del área del cuadrado original que tiene dos de estos triángulos iguales. Así, logramos duplicar el área del cuadrado y mantener su forma".

El problema tuvo inicialmente soluciones gráficas (como la presentada) y sólo después del descubrimiento de los números irracionales, tuvo soluciones numéricas que establecían claramente la relación entre la medida de los lados del cuadrado y su área.

Piaget pide a los chicos la duplicación de distintas figuras para introducir una forma poco escolar del problema que le permitirá observar de qué manera el sujeto pone en relación la longi tud de los lados con el área, y cómo pasa a sustituir la simple multiplicación lógica de las relaciones en juego del tipo 'lo que aumenta de ancho compensa lo que disminuye de largo' por operaciones matemáticas de naturaleza multiplicativa. (Tal como sería la raíz cuadrada).

En el nivel II (4-5 a 7:6) encontramos que la acción de duplicar se reduce a la de agrandar ligeramente, pero de forma arbitraria. "Las primeras intuiciones topológicas proporcionan la intuición de una superficie en tanto que cerrada por una línea". Las superficies son por lo tanto concebidas al principio en función de las curvas que las rodean y es por eso que el factor lineal adquiere primacía. (*)

Cuando se trata de construir las estructuras euclideanas por puesta en relación de las figuras entre ellas o entre los elementos de las figuras, esta construcción se basará en primer lugar sobre las líneas como tales, es decir sobre sus longitudes y las superficies y los volúmenes serán concebidos como dependiendo directamente de las longitudes.

La reacción del nivel II da testimonio de una indiferenciación completa entre la duplicación de segmentos lineales y la de las superficies como tales. Así se explica que el sujeto, al llegar a la duplicación exacta de los segmentos de recta (en el nivel III A) comenzará también por duplicar las superficies duplicando sin más sus lados o sus diámetros. Este nivel no se distingue del II sino en que el sujeto ha llegado a ser capaz de duplicar una recta. Esto ya constituye una verdadera opera-

- - - - - - - -

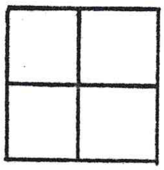
(*) Piaget et al. La Geometría espontánea en el niño, p. 408.

ción consistente en reportar la misma longitud, haciendo intervenir el mecanismo esencial de la medida: la iteración de la longitud inicial tomada como unidad. Pero para llegar a la duplicación de superficies hace falta, además, partir mentalmente esa unidad para lograr una transformación que conserve la forma de la figura inicial.

Las conductas características de este nivel consisten en yuxtaponer simplemente una supérficie igual (reacción que permanece a medio camino entre la iteración de la unidad de superficie y la simple reproducción en doble de una misma figura), sacrificando la forma demandada, o en duplicar simplemente todas las dimensiones.

Veamos algunos ejemplos de las entrevistas (en ellas sólo se pidió a algunos niños la duplicación del cuadrado).

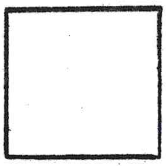
Víctor (7:6) Le pido que dibuje un cuadrado del doble de área del de 7x7 cm. Marca alrededor de ese cuadrado, calcándolo. Nuevamente explico la consigna. Rápidamente dibuja entonces otro cuadrado de 7x7 cm, junto al anterior... "pero sería un rectángulo".

Dibuja ahora  14X14 cm.

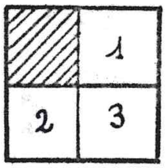
Vi: Así es cuadrado... pero no, no tendría lo mismo de pasto (que el 7X14).

Santiago (6:9) Le pido que duplique el área del cuadrado de 7x7 cm, pero conservando la forma cuadrada.

Sa: No, un cuadrado no se puede... no sé cómo

Exp: (Le enseño  14x14 cm) ¿es del doble?

Sa: No, es el triple, porque mira (coloca 7x7) en una esquina y cuenta el resto.



Exp: ¿Cabe 3 veces o cabe 4?

Sa: Ah, sí cabe cuatro porque éste también cuenta.

Exp: ¿Y cómo le hacemos para que sea de 2 veces?

Sa: Sólo un rectángulo. (Dibuja con ayuda del cuadrado un rectángulo de 14x7 cm).

Le construyo cuadrados mayores que 7x7 cm, pero menores que 14x14 cm, pero no parece seguirme.

Oscar (11:6) Le pido construir un cuadrado del doble de área que el de 7 x 7 cm.

O: Pues si, sí se puede... éste son 49, el doble serían (hace la cuenta mentalmente) 98 cm^2 y 98 dividido entre dos son 49 de cada lado. (Pone la regla para ver los 49)... ah, no, está grandísimo.

Exp: ¿No es el doble?

O: No, es mucho... entonces sería de... No, no lo puedo hacer porque es como el cuadrito verde (4x4 cm) porque no se puede saber cuántas partes del verde hacen el amarillo (1.5x1.5 cm) no tiene la mitad ni nada, y así aquí no se puede tampoco. (Oscar hace referencia a una situación ante rior, en la que no pudo determinar qué parte del cuadrito verde (4x4 cm) es el cuadrito amarillo (1.5x1.5 cm). Insisto

O: Sólo que sea un rectángulo. (Dibuja 7x14 cm), pero no, cua drado no se puede, porque no se sabe de cuánto tiene que ser.

<u>Rubén</u> (8:0) Le pido que dibuje un cuadro del doble de pasto que el cuadrado de 7 x 7 cm.

Ru: Es como éste (me da un rectámgulo de 14x7 cm).

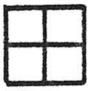
Exp: Bueno, ese terreno sí tiene el doble de pasto. Le caben 2 cuadros amarillos, pero yo quiero que le entren 2 cuadros, que tenga lo doble que éste, pero que tenga forma cuadra - da.

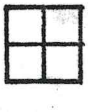
Ru: ¿Lo puedo hacer?

Exp: Sí.

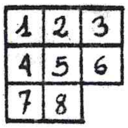
Ru: (Dibuja, con ayuda del rectángulo, un cuadrado de 14x14 cm) no, no puedo (antes de terminarlo niega poder hacerlo).

Exp: ¿Por qué no?. Trata de imaginarte una forma.

Ru: (Toma 2 cuadros amarillos y con el dedo, señala 2 cortes perpendiculares  en cada uno de ellos con- tando las partes -hasta 8-). Sería uno de 8. (Dibuja, sin conservar la dimensión, una figura cuadrada -de aproxima- damente 2.5x2.5 cms.



Vuelve a contar hasta 8 y ahora dibuja



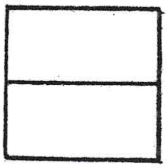
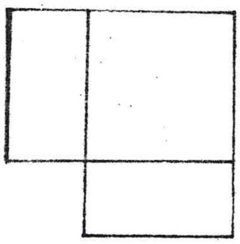
Ru: Le faltaría un pedacito, pero así es de 8.
Exp: ¿Cómo le harías para que quede bien cuadrado?
Ru: Sólo que así (completa el cuadrado, con 9 pedacitos) pero así queda un poco más que 2 (2 cuadros).

El nivel III B marca una vuelta interesante, sin solución operatoria del problema y con simple búsqueda empírica. Hay un intento de puesta en relación entre la longitud del perímetro y la superficie a duplicar, basada especialmente en una creencia de proporcionalidad simple entre Perímetro y Area.

El sujeto toma conciencia de que duplicar los lados lo conduce a una superficie de más del doble, y utiliza la experiencia adquirida en los primeros intentos, de tal manera que las construcciones siguientes testimonian la anticipación que le permite acercarse cada vez más a una intuición exacta. El sujeto de este nivel busca descomponer y recompensar las totalidades (superficies) en función de sus partes.

Marta Angélica (11:8) Le pido que haga un cuadrado del doble de área que el 7x7 cm.
Ma: (Dibuja 14x14 cm -con regla, por fuera-; le pone el cuadrado de 7x7 encima). No, tiene 4 veces... No podemos, porque sólo que sea un rectángulo así (señala la mitad de su cuadrado -14x14- mostrando que entra dos veces el cuadrito).

Le digo que si no podría hacer un cuadrado mediano, no tan chico como 7x7 cm, ni tan grande como 14x14 cm, para que quepa sólo 2 veces.

Ma: No, porque se haría un rectángulo... si lo partimos a la mitad (el 2° cuadrado de 7x7 cm)... cortaría a la mitad (dibuja  en el cuadrito). Si éste tiene 49, el doble sería 98. (Construye  con el corte en el 2° cuadrado).

No, no me sale.

Exp: Sin usar los cuadritos, ¿te sirve saber que mide 98 el del doble?

Ma: Sí... 98 lo divido entre 2,... es 49... No,... haría uno que tenga 49 de lado... No, mejor 98 entre 4, porque son 4 lados (hace la división) Haría un cuadrado con 24 de cada lado,como son 24 por 24 (hace la multiplicación) son 576... No, tienen que ser 98, no sé cómo hacerlo de 98.

<u>Dolores</u> (11:11) Le pido que haga un cuadrado del doble de área del cuadrado de 7x7 cm.

D: (Dibuja un rectángulo de 14x7 cm)... ¿un cuadrado?

Exp: Sí, porque ese tiene el doble de área pero no es cuadrado, ¿no?

D; (Piensa largo rato) Podría dibujar uno que tuviera 49 centímetros de un lado y 49 del otro.

Exp: Si lo dibujamos ¿de qué área de saldría?

D: Muy grande.

Exp: ¿Sería de la misma área que el rectángulo que dibujaste?

D: No, sería mucho más grande... Es más grande que el doble de este.

Exp: ¿Cómo le podemos hacer?

D: Su perímetro lo "doblegamos" (en vez de duplicamos).

Exp: ¿Cómo lo harías?

D: Lo multiplico por 2...

Exp: ¿Cuál es el perímetro de éste?

D: Es 7 cm.

Exp: ¿El perímetro?

D: No, eso mide la base. Duplicaría la base y la altura. (Dibuja un cuadrado de 14x14 cms usando la regla).

Exp: ¿Ese tiene el doble de área que este?

D: Sí.

Exp: ¿Cabe 2 veces?

D: No, cabe 4, es el "cuádruple".

Exp: ¿Cómo le hacemos para que sea el doble?

D: Lo dividimos entre 2 para que sea 2 veces.

Exp: ¿Qué dividimos?

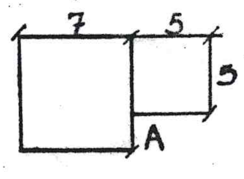
D: La base y la altura... (pone $2\overline{)14}$) Ah! no porque sale uno igual a ese (cuadrado de 7x7 cm)... le podría sumar siete de lo largo y lo ancho... No, pero me saldría igual a este (14x14 cm). Dividir todo el perímetro entre 2... me va a dar un rectángulo aunque quiera yo un cuadrado (señala el cuadrado de 14x14 cm dividido en 2 rectángulos).

Exp: A ver, tenías el cuadrado de 7 cm en cada lado. Si le aumentas 7 de largo y 7 de ancho te sale muy grande ¿qué podrías hacer para que no te quede tan grande?

D: (Se queda callada)

Exp: ¿Y si le aumentas menos de 7?

D: Sí, le puedo aumentar 5 (marca con la regla).

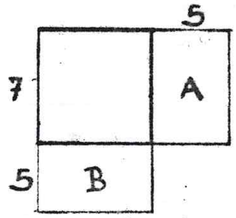


Exp: ¿No le aumentarías hasta aquí (A)?

D: Sí, le aumentaría 5 de largo, pero 7 de ancho. Pero me sale un rectángulo (de 12 x 7)

Exp: ¿Cómo hacer para que sea un cuadrado?

D: (Vuelve a dibujar, de otro lado de la hoja, el cuadrado de 7 x 7 cm. Le marca 5 cm de largo y 5 cm de ancho más) No, no me sale.



Exp: (Con ayuda mía dibuja el cuadrado de 12 x 12 cm sobre eso) ¿Ya es el doble?

D: (Pone el cuadrado de 7 x 7 cm sobre el pedazo A que aumentó, marcando la parte que sobra.
(Coloca luego esa parte sobre B). No, es más del doble (es decir que le sobra una parte de B).

Exp: ¿Qué podemos hacer?

D: Aumentarle un poco menos.
(Le dibujo encima el de 11 x 11 cm) ¿Es el doble?

D: (Repite el procedimiento de comparar el cuadrado 7 x 7 cm con los pedazos que aumentó)

Exp: ¿Entonces?

D: Le seguimos reduciendo, que sean 3 centímetros aquí (lo que aumentó), hasta que nos dé el doble.

<u>Phen</u> (11:12) Le pido un cuadrado del doble del área que el cuadrado de 7 x 7 cm.

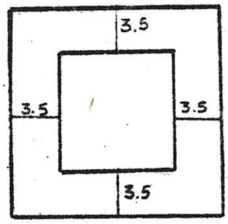
P: (Recuerda que ése medía 49 cm^2 de área). Sí, sí se puede. (Dibuja uno de 14 x 14 cm -lo dibuja con ayuda del cuadrito, poniéndolo 2 veces cada lado. Cuando lleva 2 lados dibujados señala con el dedo, visualizando que cabría 4 veces) ¿el doble?

Exp: Sí, el doble de área.

P: (Dibuja un rectángulo de 7 x 14 cm -con ayuda del cuadrito) ¿Así?

Exp: Bueno, ese es un rectángulo del doble de área, pero yo quisiera un cuadrado ¿se puede?

P: Sí... (pone la regla sobre el cuadrado de 7 x 7 cm. Señalando la marca de 3.5 cm; dibuja un cuadrado de 7 x 7, y a partir de sus lados marca 3.5 cm más).

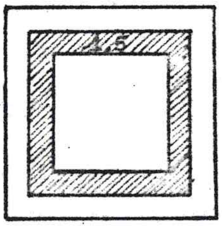


Exp: ¿Por qué marcas así?

P: Porque la mitad de 7 cm son tres punto cinco, entonces lo hago así para que sea la mitad de cada lado. (Cuando lo acaba pone la regla en uno de los lados y dice) No, mide mucho más del doble.

Exp: ¿Cómo harías uno del doble?

P: (Señala con el dedo un cuadrado inscrito en el que acaba de trazar. Marca ahora 1.5 cm fuera de cada lado)



Exp: ¿Ese es del doble del área que este? (7 x 7 cm)

P: Sí, porque con todo esto (sombreado), se podría hacer un cuadrado igual, y entonces es el doble.

Finalmente es preciso mencionar que en el gran avance conceptual que representa para la medida de superficies el paso de las consideraciones lineales a consideraciones propiamente de superficies interviene también el fenómeno observado por Vinh-Bang y Lunzer(*) relativo a la existencia de un momento en el desarrollo en el cual la conservación de una de las magnitudes del objeto (por ejemplo su perímetro) está asociada a la conservación de otra de sus magnitudes (por ejemplo su área).. Este desarrollo se considera detalladamente en la sección sobre Relaciones entre Perímetro y Superficie (Cap.7)

- - - - - - - - - - -

(*) Conservations spatiales: XIX.

CAPITULO VII

LA RELACION PERIMETRO-SUPERFICIE

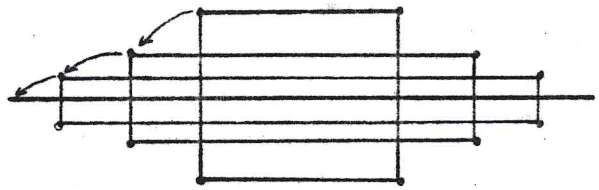
VII. RELACION PERIMETRO-SUPERFICIE

VII.1 Las experiencias de Vinh-Bang y Lunzer. (*)

Vinh-Bang y Lunzer observaron que cuando el niño llega a elaborar sus primeras nociones de conservación se construyen además falsas conservaciones, tales como la de la superficie de una figura que se modifica al tiempo que se deja constante su perímetro, o la del perímetro de figuras distintas que se obtienen por reacomodo de partes de una superficie. Estudiaron pues, la construcción operatoria de las relaciones entre la conservación y la variación para el caso de P-S.

Los dispositivos empleados consisten en:

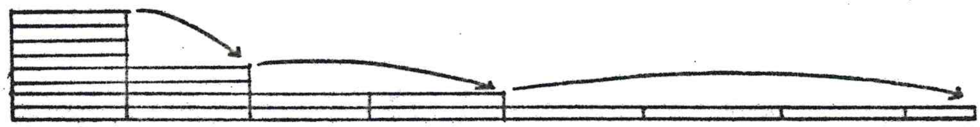
I. Partiendo de un hilo de algodón que inicialmente forma un cuadrado y desplazando los clavitos que mantienen el hilo en los cuatro ángulos, se transforma el cuadrado en rectángulos cada vez menos anchos hasta alcanzar la superficie límite nula.



(*) Bang, Greco, et.al. La epistemología del espacio/Trad. Jorge A. Sirolli. Buenos Aires: Ateneo, 1971.

NOTA: Un análisis detallado del tipo de funcionamiento propio de estos razonamientos se puede encontrar en: Bronckart y Rappe du Cher. Relations entre surfaces et périmétres des rectangles, en Piaget, et.al. Recherches sur l'abstraction réflechissante. Vol. II. Paris: PUF, 1977.

II. Partiendo de un cuadrado formado por bandas de cartón, se le transforma paulatinamente en rectángulos de igual área, pero cada vez más angostos y largos.



Las preguntas hechas se refieren en ambos casos a la conservación, aumento o disminución de la superficie y de la longitud del contorno de las figuras consideradas.

Una vez conseguida la conservación de una de estas propiedades, los niños actúan como si existiera una necesidad lógica de que otras propiedades del objeto también se mantengan constantes (o en cierta etapa se compensen una a la otra).

Lunzer formuló la hipótesis de que en la etapa de compensaciones cualitativas, que consisten en compensar lo que es agregado en un lado quitándolo en el otro, (sin recurso alguno de la cuantificación) el niño generaliza su tendencia a las conservaciones, aplicándola a casos de transformaciones no conservadoras, como las descritas, y observó que la disociación de las propiedades en juego (longitud y superficie) se efectúa por influencia de las medidas desde el fin de las operaciones concretas y por anticipación deductiva apenas hacia el término de las operaciones formales.

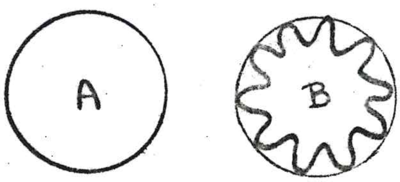
VII.2 La relación Perímetro-Superficie en la entrevista.

En la presente investigación hemos tratado de analizar si las relaciones supuestas por el niño entre la conservación del perímetro y la de la superficie están particularmente favoreci -

das por la situación de transformación en la que una de las propiedades sí se conserva (como es el caso en la de Vinh-Bang) o si esta suposición de relación se da con igual fuerza fuera de las situaciones de transformación parcialmente conservadoras empleadas por Vinh-Bang y Lunzer.

La hipótesis específica era que, ante 2 superficies A, B, para las que se establece claramente que área (A) > área (B) el chico supondría que, análogamente, perímetro (A) > perímetro (B), y que por lo tanto encontraría contradictorio que si el área (A) es mayor que el área (B), el perímetro de B sea mayor que el perímetro de A.

La experiencia consistía en presentarles los terrenos



(ya descritos), pedir que compararan sus áreas, y una vez hecho esto, predecir cómo sería la comparación entre sus perímetros, verificar la predicción y analizar los resultados.

Además, en cualquier otra situación durante la entrevista, hemos seguido las suposiciones sugeridas por afirmaciones o procedimientos empleados por los niños que involucren suposiciones del tipo "a mayor área corresponde mayor perímetro".

VII.2.1."A mayor perímetro corresponde mayor área".

Para los niños más pequeños de la muestra hemos encontrado que se presupone una correspondencia de proporcionalidad simple en tre las 2 propiedades (superficie-perímetro) de los objetos en juego: El objeto que es juzgado como "más grande" debe, para ellos, ser también "más grande" respecto a la otra magnitud.

Ma. Elena (8). Después de afirmar que el círculo es más grande porque tiene más pedazos de pasto para que coma la vaca" (su - perponiendo).

Exp: ¿En cuál necesitará más alambre (para poner una alambrada en el borde).

Ma: En éste (círculo) se necesita más porque está más grande.

Exp: ¿Dónde pondrías el alambre?

Ma: (Señala el perímetro de ambos).

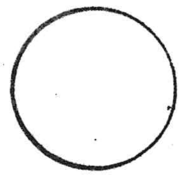
Exp: ¿Y en cuál necesitarías más alambre?

Ma: El redondo.

Exp: Mira, este tendría que dar todas estas vueltas ¿no?

Ma: Sí, pero no importa, porque este (círculo) es más grande, y necesita más alambre.

Erika (7:6)

Le presento  y 

E: Este (círculo) tiene más pasto.

Exp: ¿Y si yo dijera que éste (engrane) tiene más pasto? ¿cómo me podrías enseñar?

E: (Los superpone). Este tiene más pasto porque la estrellita deja espacios.

Exp: ¿Y aquí no comió la vaca? (señalando los espacios)

E: No, aquí no.

Exp: ¿Y si les fueran a poner una alambrada? ¿sabes qué es?

E: Si los señores quisieran poner una alambrada alrededor.
Exp: ¿En cuál necesitaría más alambre?
E: (Señala el círculo) porque es más extendido.
Exp: Y si quieres estar bien segura ¿te sirve un hilo?
E: Sí (coloca el hilo sobre el borde del círculo) ¿Lo puedo cortar? (deja los extremos superpuestos).
Exp: ¿No importa que aquí tenga 2 veces alambre?
E: Sí, (los deja superpuestos, pero bien colocaditos).
E: (Coloca un hilo alrededor del terreno en forma de engrane y deja los dos hilos puestos alrededor de las 2 figuras)
Exp: ¿Cuál necesitó más alambre?
E: (Señala el engrane)
Exp: ¿Por qué?
E: Porque ésta tiene más partes...
Exp: ¿Más partes como cuál?
E: (Señala las curvas)
Exp: ¿Aunque ésta tenga más pasto,
E: Sí, no importa.
Exp: ¿Y se ocupa más alambre o menos?
E: Creo que son iguales.
Exp: ¿Son iguales de alambre o de pasto?
E: De alambre.
Exp: ¿Y de pasto?
E: Este es más grande (el círculo)
Exp: ¿Te sirvió el hilo para saber cuál necesita más alambre?
E: Sí.
NOTA: Erika no compara la longitud de los hilos entre ellos.

Ana Isela (7:6) Le doy el terreno circular y el de "engranes"
A: Tiene más éste (círculo) porque está más ancho que éste (engrane).
Exp: ¿Segura está más ancho? ¿De dónde?
A: De así (señala el diámetro), de lo ancho tiene más. (los superpongo para mostrarle que son iguales de ancho)

A: Entonces los dos tienen igual.

Exp: Pero, este (engrane) te parecía más chiquito, ¿no?

A: Sí, está más chico. El redondo tiene más porque está más grande.

Exp: ¿De dónde está más grande?

A: De aquí tiene más pasto (señala ) por esto está más grande.

Historia del alambre (le muestro dónde se podría).

A: Necesita más alambre este (redondo) porque está más grande.

Exp: ¿Porque tiene más pasto?

A: No, porque está más grande, por lo redondo (señala el perímetro).

Exp: ¿Cómo podrías estar muy muy segura?

A: Recortando.

Exp: ¿Cómo lo recortarías?

A: No, recortando no sirve (se queda pensando).

Exp: ¿Te serviría un hilo?

A: Sí, un hilo o un estambre. (Pone un hilo alrededor del círculo manteniendo toda la figura y corta al terminar, pone otro hilo alrededor del engrane y corta. Compara los dos hilos, pero pierde cuál era cuál. Vuelve a acomodar y ya ve que el del engrane tiene más).

Exp: ¿Y puede ser si el redondo tiene más pasto?

A: Sí, pero este (engrane) ocupa más alambre porque tiene más orillitas.

En este caso, la acción de colocar el estambre ha servido a Ana Isela para rechazar su hipótesis original y distinguir mejor la magnitud-perímetro de la magnitud-área.

VII.2.2. Diferenciación de las magnitudes Perímetro y Area.

En un segundo grupo encontramos a chicos que empiezan a diferenciar las dos magnitudes, suponiendo sin embargo una relación entre ellas. Se presenta a continuación un ejemplo largo pero sumamente ilustrativo de la búsqueda sistemática de regularidades o "leyes" a las que debieran obedecer esas relaciones.

<u>Yoatzin</u> (11:3) Le damos el terreno circular y el de forma de engrane.

Exp: ¿Cuál tiene más pasto?

Y: (Los superpone y dice) Claro que en este (círculo) es más pasto. Es como si midieran igual pero aquí le faltan estos pedazos (señalando las diferencias)
Historia del alambre.

Y: En éste (engrane) se necesita más porque el otro es una rueda, y en este le tienen que ir dando vuelta a las ondas.

Exp: Pero este (círculo) era más grande ¿no?

Y: Sí.

Exp: ¿Y no importa que sea más grande, el otro necesita más alambre?

Y: (Duda) No... pues el redondo.

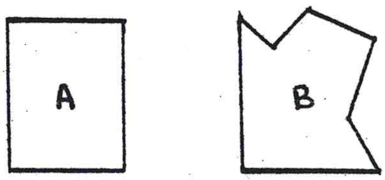
Exp: ¿Cómo podrías estar segura?

Y: Pues midiéndolo con un hilito o algo así. (Pone el hilo cuidadosamente sobre el cartón circular; al acabar de rodearlo lo corta. Extiende el estambre y lo mide con regla).
Ahora iría poniendo este hilo (lo va poniendo sobre el borde del engrane. Antes de acabar). Sí, ocuparía más este (engrane) porque todavía me falta todo esto (señala la parte del perímetro que falta de rodear).

Exp: ¿Por qué pensaste que el círculo podía ocupar más?

Y: Porque tiene más área, y yo creí...

Más adelante en la entrevista le pedimos que compare (en área) los terrenos A y B, donde el perímetro de B es mayor que el de A.

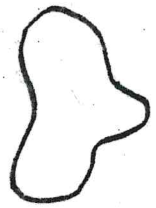


Exp: ¿Cuál tendrá más pasto?
Y: (Sin superponerlos) Este (B)

Para estar segura de las comparaciones dice que hace falta medir. Trata de recordar la fórmula -para el rectángulo- pero no la recuerda.

Y: Si no, le haría con el hilito, como lo hice el otro día (usa estambre para el rectángulo) Sí, el B es más grande, porque ocupa más alambre; le sobra hilo, quiere decir que si se ocupa aquí más hilo va a tener más área.
Exp: ¿Qué mediste con el hilo? ¿Mediste el área con el hilo?
Y: Sí... (duda).
Exp: ¿Y no habrá más pasto acá (rectángulo) que acá (heptágono)?
Y: (Superpone los terrenos y señala algunas compensaciones. Opta por dividir el heptágono en triángulos y usar la fórmula (Bxh)/2 y calcular el área del rectángulo -Bxh-. Llega a que el heptágono tiene menos área, pero más perímetro.)
Exp: Pero se necesita más alambre para éste y el área es más chica ¿eso puede ser?
Y: Sí, yo creo que es porque sus medidas que tiene en las esquinas son más grandes (señala el perímetro en los vértices)

Le doy ahora a comparar el mismo rectángulo y el terreno en

forma de "lago". 

Exp: ¿En cuál terreno habrá más pasto?

Y: (Compara los perímetros) Yo creo que también es más grande el rectángulo porque si antes me pasó que el heptágono necesitaba más alambre y era más chico, y ahora el este (lago) necesita más alambre, y entonces el rectángulo debe ser más grande.

Yoatzin busca, claramente, una norma que le permita relacionar siempre de la misma manera el área con el perímetro, aunque distingue claramente entre esas dos magnitudes.

VII.2.3. El área independiente del perímetro.

Finalmente los chicos llegan a distinguir ambas magnitudes, sin presuponer una relación cuantitativa entre ellas.

Gerardo: (10:0) le doy el círculo y la rueda ¿cuál tiene más pasto?

G: (Pone la rueda sobre el círculo y señala las diferencias) El redondo porque éste tiene estos huecos y ahí no hay pasto, y en el otro sí.
(Historia del alambre)

G: Más alambre en este (engrane) porque éste tiene bajadas y el alambre no se puede seguir así (por la circunferencia) sino por la bajada. Si el círculo tuviera bajadas, entonces necesitaría alambre en las bajadas (Verifica con el estambre). Sí, necesita más, por las bajadas.

Exp: Pero esto tenía menos pasto ¿no?

G: Sí, también por las bajadas, porque aquí no hay pasto.

Rubén (8:0) Le enseño el terreno circular y el de forma de engrane. ¿Cuál tiene más pasto?

Ru: El redondo tiene más (sin superponer). Porque no tiene estas cositas (señala curvas). Si no tuviera esas tendría más pasto y serían iguales. Sólo si los dos eran redondos.

Exp: ¿Cómo le podrías enseñar a otro niño?

Ru: (Los superpone). Es que mira, en estos pedazos la vaquita no puede comer, porque no hay pasto.
Historia del alambre.

Ru: En este (engrane) porque así en las cositas va ocupando más y si el que es redondo nomás se va así derechito.

Exp: Pero el redondo tiene más pasto.

Ru: Sí, pero pasto, pero el alambre da todas estas vueltas.

Muchos de los chicos que en esta experiencia llegan fácilmente a distinguir la comparación de áreas de la de perímetros, recurren sin embargo a procedimientos "tipo perímetro" en la medición de superficies, como si medir los perímetros fuera suficiente para calcular las áreas.

El problema es demasiado frecuente para pasar desapercibido.

Interpretaciones simplistas de la psicología genética podrían afirmar que lo que sucede es una de tantas "curiosidades" en el pensamiento del chico que se "corrigen" por sí mismas con el paso del tiempo.

Sin embargo, hemos observado que estos "errores" se presentan también muy comúnmente en el pensamiento adulto. Por ejemplo en Ayotzinapa, Gro. Escuela de Verano, Julio, 1981).

VII.3. Las situaciones de variación de perímetro y superficie.

Aunque a los adultos se les puede hacer ver fácilmente su error, recurren nuevamente a las concepciones antes descritas cuando se enfrentan a situaciones un poco distintas. ¿A qué puede deberse esto?

Seguramente estos adultos y los niños de los grados escolares más avanzados han realizado múltiples experiencias de medición y comparación de perímetros y superficies. Algunos incluso han comprendido los procedimientos de medición o hasta han memorizado correctamente algunas fórmulas. Sin embargo, ante situaciones que ponen en juego la relación entre perímetro y superficies caen en las concepciones que hemos observado y que fueron presentadas por Vinh-Bang.

Pensamos que el factor más importante que incide en este hecho es la poca frecuencia con que se presentan situaciones que pongan en contradicción tales concepciones. La escuela, que ha observado las confusiones de los niños entre las dos magnitudes al calcular perímetros y superficies, procura separarlas cuanto sea posible, como intentando que no se mezclen en la mente del chico, evitando poner en relación ambas magnitudes a través de transformaciones de una u otra.

Por otro lado, la realidad cotidiana no ofrece tampoco muchas situaciones que obliguen a reconsiderar la concepción según la cual a perímetro mayor corresponde una mayor superficie, y si hay, en cambio, situaciones que refuerzan esa suposición; por ejemplo, al comparar superficies de igual forma, la de mayor perímetro será también la de mayor área.

Este hecho ejemplifica muy claramente un principio de aprendizaje: la repetición de tareas o el sometimiento a varias experiencias no conduce necesariamente a una reorganización del sistema cognoscitivo, y puede, por el contrario contribuir a su rigidez y paralización.

Como se ha mostrado en los trabajos de M. Sinclair y Bovet (*) el aprendizaje de las estructuras lógicas o aprendizaje operacional sólo se produce cuando las experiencias a las que son sometidos los sujetos generan un conflicto o perturbación que hace posible (y a la vez necesaria) una reorganización del sistema en un sentido a la vez más abarcativo (asimilación de nuevas experiencias) y de mayor equilibrio (menos susceptible a la perturbación).

Para generar experiencias de este tipo es necesario operar sobre transformaciones de figuras o de objetos, y no sobre figuras fijas, y reflexionar sobre esas transformaciones. Construir la figura de mayor área que se puede hacer con perímetro fijo, o la de menor área; construir con un área fija figuras de mayor o menor perímetro, etc. son actividades que, además de contribuir a la diferenciación de las magnitudes en juego, hacen posible la construcción conceptual de sus relaciones o coordinaciones. Nuevamente aparece aquí el doble juego de la diferenciación-coordinación entre las magnitudes presentes en el objeto.

Puede afirmarse que el trabajo escolar con transformaciones de figuras favorecería en los niños tanto la diferenciación de las magnitudes perímetro-área, como su coordinación a través del es

- - - - - - - - -

(*) Aprendizaje y estructuras del conocimiento.

tablecimiento de relaciones tales como:

- Entre polígonos regulares de igual perímetro, el de mayor número de lados encierra un área mayor. En la situación límite se encuentra que
- Con perímetro fijo, la figura de mayor área que se puede construir es un círculo.
- Entre polígonos de igual número de lados e igual perímetro, el regular es el que define un área mayor.

VII.4. Diferenciación Perímetro-Superficie en la historia.

El problema de la disociación de la medida de áreas con respecto a la de perímetro fue un problema en la historia de las matemáticas.

Gow dice sobre el relato de Herodoto acerca de la medición de superficies en las orillas del Nilo:

> "Imagino que el primer intento de cálculo numérico exacto de áreas fue la medición de la periferia, un método que era suficientemente útil mientras las superficies fueran aproximadamente de la misma forma. Pero con el tiempo (con las inundaciones) las superficies fueron cambiando de forma y entonces fue descubierto por primera vez que figuras de igual perímetro no tienen necesariamente la misma área". (*)

La suposición errónea de que figuras de igual perímetro son de la misma área aparece en los autores clásicos. Por ejemplo, se sabe que Tucídides estimó el área de la isla de Sicilia midiendo el tiempo empleado en circunnavegarla (es decir, estableciendo una medida de su periferia).

- - - - - - - -

(*) Gow, James. A. Short history of Greek Mathematics p. 125-126.

El trabajo de Ahmes contiene muchos ejemplos del mismo error (*)

La dificultad de disociar las longitudes de las áreas es muy manifiesta. Aún siendo magnitudes distintas de un objeto, e independientes (en realidad, un perímetro dado sólo establece el área máxima que tal perímetro puede rodear), los distintos pueblos fueron estableciendo relaciones entre el área y las longitudes de las figuras que medían. Estas relaciones, aunque aproximadas, eran prácticas en los problemas cotidianos mientras la forma de la figura se mantuviera, pero iban siendo cada vez menos precisas cuando la figura variaba mucho.

- - - - - - - -

(*) También Bourbaki, N. Elements d'Histoire des Mathématiques

CAPITULO VIII

LAS DIFICULTADES EN LA MEDICION DE AREA Y LOS RECURSOS INFANTILES

CAPITULO VIII
LAS DIFICULTADES EN LA MEDICION DE AREAS Y LOS RECURSOS INFANTILES.

Dificultades en la actividad de medir y recursos disponibles en los niños.

En este capítulo se presentan los problemas intrínsecos a la actividad de medir una superficie y su relación con los recursos concretos movilizados por los niños frente a dicha tarea.

Los problemas considerados son:

1) Partición del contínuo
2) Elección de la unidad
3) Cuantificación de las unidades y equivalencias
4) Aproximación, precisión y exactitud
5) Convencionalidad de la medida

VIII.I. Partición del contínuo

Un primer problema al que ya nos hemos referido muy brevemente es el da la necesidad, para el caso de las medidas espaciales, de considerar al objeto como constituído por partes diferenciables. Esta consideración (la partición del contínuo) es una construcción del sujeto, puesto que en la experiencia los objetos (en nuestro caso los objetos a medir) se muestran como totalidades contínuas, y es el sujeto quien debe crear artificialmente partes discretas que no existen por sí mismas para poder medir los objetos. Se habla entonces de una "resistencia del objeto a discretizarse".

La operación inversa a la partición es la "composición aditiva de las partes", que permite equiparar la totalidad con las partes que la constituyen y hacer comparaciones "intensivas" entre algunas de esas partes y el todo.

La constitución de la operación de partición y su inversa, la composición partitiva (que en realidad constituyen una misma operación) puede ser un muy buen recurso de comparaciones cualitativas (mayor que, menor que, etc.) pero no constituyen todavía una métrica. Para que ésta exista se requiere aún que se fusionen con las operaciones de desplazamiento, dando lugar a la verdadera construcción de una unidad de medida, es decir, algo equivalente a una parte del todo que se elige para ser desplazada, iterándola sobre el objeto a medir hasta que se cubra la totalidad, que se considera entonces como un múltiplo de la parte elegida como unidad.

El recurso de cubrir con algo la superficie a medir resulta especialmente ilustrativo de las dificultades de la partición.

8.1.1. Recubrimiento y la partición

A la edad en que iniciamos las entrevistas (7:0) resulta muy natural y espontáneo recurrir a algún proceso de recubrimiento para medir una superficie. Los niños piden o utilizan figuras de cartón para cubrir la superficie, recortan pedazos de papel que la cubran o adaptan la regla o escuadra (cuyo uso ha sido seguramente privilegiado por la escuela), utilizándolas como superficies para cubrir los "terrenos" que intentan medir.

Dado que los procedimientos para cubrir se expusieron extensamente en la sección sobre significado de la medición, sólo mencionaremos aquí que al utilizar estos procedimientos de recubrimiento los niños hablan de "saber cuántos pedazos tiene", "ver cuántas partes de pasto caben", o "contar todos los pedazos", haciendo una clara alusión a su consideración de las superficies como formadas por partes, que, sin ser unidades, anuncian ya una métrica.

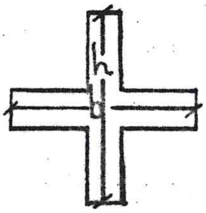
Sin embargo, los distintos procedimientos de recubrimiento que podrían dar lugar al desarrollo de la medición son usados espontáneamente cada vez menos por los chicos, conforme avanzan en edad y grado escolar, y van siendo sustituídos por procedimientos estereotipados enseñados en la escuela, que abandonan la consideración de las partes o la van volviendo inaccesible a la mente del niño.

8.1.2. Fórmulas y partición.

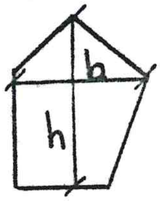
Así, para la mayoría de los niños de 6° grado, la forma más espontánea, si no la única manera de medir bien una superficie es utilizando la fórmula que corresponde a dicha superficie, y solamente son válidas las unidades convencionales de medida, incluso si éstas no tienen para ellos un significado preciso. Solamente para dos de los chicos entrevistados (Ireri y Phen) el significado de la fórmula es de inmediato atribuído a una manera de calcular con cuántas unidades cuadradas (cm^2) se cubriría el terreno, y de ellos solamente Ireri ve como equivalente medir cubriendo con otras unidades, mientras que Phen niega la validez de ese procedimiento, porque entonces "no sabemos cuánto mide". Cubrir con figuras distintas de las unidades convencionales sólo sirve como recurso para medir por partes la superficie total, cubriendo con esas figuras y sumando la medida de cada una de las partes, a su vez calculada en unidades convencionales mediante el empleo de las fórmulas. Además de su memorización carente de comprensión, los problemas más importantes en relación a las fórmulas de cálculo de áreas han sido ya expuestos en el capítulo sobre la bidimensionalidad en la medida de áreas.

Sin embargo, presentamos a continuación una relación de hechos que aparecieron en las entrevistas como fuentes muy significativas de error, y que sugieren el interés de investigaciones y atención didáctica específica sobre estos problemas:

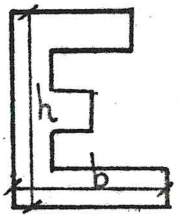
-La fórmula b x h, traducida a veces en largo por ancho, es sobregeneralizada. En las entrevistas fue utilizada para calcular el área del terreno.



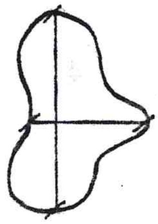
del



y de



e incluso para el



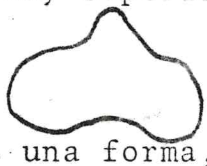
-En un caso (Gerardo) niega la validez de la fórmula para el círculo porque "ese no tiene ni base ni altura". Se observa aquí que, además de los factores de desarrollo que hemos descrito en el capítulo 6 que atribuyen relevancia a la medida lineal de dos direcciones privilegiadas, el largo y el ancho, hay un total desconocimiento del significado de los conceptos de base y altura, que sería necesario trabajar escolarmente.

-La base es tratada como uno (y sólo uno) de los lados de la figura, generalmente el que el niño ve como horizontal. En cuanto a la altura predomina la concepción de que ésta es la longitud máxima de la figura en el sentido vertical, pero también se le considera como alguno de los lados de la figura, el que el niño ve como vertical.

Cuando se le pregunta a Oscar por el significado de la fórmula b x h, nos dice "Porque la base es cualquiera de los lados, y la altura también, sólo que tienen que estar así como en una L (ele) y ya luego las multiplicas y te da el área".

Estas concepciones son reforzadas por la actividad escolar que le da a la fórmula B x h un tratamiento de fórmula principal (todas las demás fórmulas se derivan de ésta) y es la única fórmula que se introduce (o al menos se sugiere introducir) con un significado concreto: la del conteo del número de cuadritos-unidad que caben en el rectángulo.

-Las fórmulas tienden a ser consideradas el único camino para medir una superficie. Así, sólo se puede medir algo si se recuerda la fórmula apropiada, y aún más, hay superficies que no se pueden medir, tal como el terreno



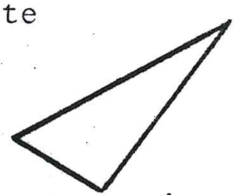
porque, como nos dice Manuel, "eso no es una forma, no tiene nombre de figura, no es un cuadrado o círculo, o cruz o algo" y "se necesita regla y que estén derechos".

Esta consideración se encuentra muy presente en la mayoría de los adultos, incluyendo por supuesto a los maestros. Recordamos aquí el caso de algunos maestros que durante el curso de verano de la maestría en matemática educativa (Ayotzinapa, Gro, 1981), habiendo usado durante el taller el recurso de cubrir con figuras para medir áreas, frente a la tarea de medir una superficie irregular con fronteras curvas, no recurren ya a ese procedimiento, y buscaron en cambio a los "matemáticos" (es decir a los maestros de niveles superiores) para obtener la fórmula de cálculo del área de dicha figura. A su vez los "matemáticos" respondieron tratando de encontrar la ecuación de dicha curva, para encontrar el área por integración.

En este mismo sentido, se observa que superficies "que no son formas", es decir, que no tienen un nombre escolar, no aparecen en la escuela para ser medidas. Las que aparecen son siempre formas regulares o, cuando mucho, irregulares pero de lados rectos.

-Para el caso del triángulo la fórmula hace aparecer nuevos problemas: En primer lugar, el "entre dos" de la fórmula (Bxh)/2 es un verdadero misterio para los niños. Las explicaciones van desde "porque así me lo enseñaron", hasta la insólita teoría de Marta Angélica, que nos dice que hay que dividir entre dos "porque quedan dos lados que no medí" (Es decir, que si tomó un lado como base, y una "altura" que no coincide con ninguno de los lados del triángulo, hay 2 lados del triángulo que no ha medido). A partir de esta observación, Marta Angélica cae en cuenta de que la altura mide diferente que los otros dos lados, lo que le causa gran sorpresa.

En segundo lugar, la "altura" del triángulo es para los niños la línea que une el punto medio del lado que consideraron como la base con el vértice opuesto, con lo cual convierten a la "altura" en una mediana. Puede aventurarse al respecto la hipótesis de que esto también está determinado escolarmente, pues los triángulos que aparecen en los textos y ejercicios escolares son generalmente triángulos equiláteros o isósceles, con un lado horizontal, y, en estos casos, la altura de dicho lado coincide con la mediana. Si pidiéramos a los niños de 6° año que midan la altura de un triángulo como éste



es probable que muchos de ellos no la encontrarían.
A estos problemas se agrega, como factor muy importante, el "accidentado" uso de la regla graduada para medir longitudes al que nos referiremos un poco más adelante. (ver Anexo 2).

VIII.2. Elección de la Unidad.

Parte-Unidad

Como ya se mencionó, para que exista verdadera unidad de medida se requiere un objeto equivalente a una parte que se itera sobre la totalidad del objeto. La unidad debe ser:
-Una superficie plana (para el caso del área)
-De tamaño práctico en relación al objeto a medir. De acuerdo a la teoría (matemática) cualquier tamaño de la unidad es igualmente útil para medir, pero en términos prácticos (modelo físico) es mejor elegir una unidad adecuada a las dimensiones del objeto. Cuando los niños utilizan figuras para cubrir la superficie a medir eligen de entre las disponibles las figuras (unidades) de mayor tamaño que entran varias veces en el objeto, y sólo después de ellas eligen unidades más pequeñas para los espacios restantes.

-Para el caso del área, preferentemente la unidad debe ser de forma adecuada para cubrir el plano. Aquí, nuevamente, vemos que en términos matemáticos la forma de la unidad puede ser cualquiera, pero en la práctica la elección de unidades que cubren totalmente (o de manera continua) el plano facilita mucho la operación de medir, puesto que no van quedando espacios intermedios sin cubrir.

La selección de la unidad convencional cuadrada para medir áreas de entre muchas posibles, implicó seguramente en la historia un largo período de observación y construcción. Gow(*) piensa que la utilidad de la unidad cuadrada fue quizá sugerida por el aspecto de las construcciones de piedra o ladrillo. Sin

- - - - - - - - -

(*) Gow, James. A Short history of Greek mathematics, p. 126.

embargo se sabe que los pitagóricos estudiaron otras figuras y mostraron que un entorno a un punto se llena completamente con 6 triángulos equiláteros, 4 cuadrados o 3 hexágonos regulares, (también con otras figuras no regulares) y por tanto esas formas facilitaban la medición de áreas.

En todo caso, debe tomarse en cuenta que la construcción de una unidad cuadrada o rectangular requiere de la consideración del ángulo recto, y de alguna forma de verificar la perpendicularidad.

Recientemente se han estudiado códices de la época de la conquista (*) que revelan que los aztecas utilizaban unidades cuadradas de área para los terrenos agrícolas y, aunque se desconocen procedimientos para el cálculo de áreas, éstas se acercan mucho y en la mayoría de los casos coinciden con las que pueden calcularse mediante el producto de la longitud de los lados de los terrenos, suponiendo o verificando que éstos formaban ángulos rectos. Estas unidades cuadradas fueron seguramente desarrolladas por los pueblos nahuas pues, en la misma época, los españoles se refieren a los terrenos agrícolas solamente por su longitud, señalando además algún indicador del ancho.

Una de las observaciones más interesantes y reiteradas durante las entrevistas es el hecho de que los niños busquen espontáneamente utilizar figuras semejantes al objeto a medir para cubrir éste, particularmente que usen círculos de todos tamaños para intentar cubrir el terreno circular y cualquier otro con línea frontera curva. Esta elección no es cambiada por los niños a pesar de las dificultades que implica pretender cubrir con círculos un plano.

- - - - - - - - -

(*) Harvey, H.R. y B.J. Williams. Aritmética Azteca... p. 29.

Además de las figuras circulares los niños se inclinan, en estos casos, por el uso de los transportadores(*) y de la "regla curva" (que incluímos en el material disponible después de que un niño lo solicitó durante las entrevistas preliminares).

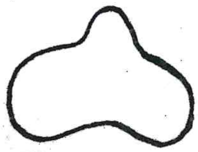
Los transportadores y la "regla curva" se abandonan rápidamente al observar que su curvatura es fija, y por lo mismo no se adapta para cubrir cualquier objeto.

La explicación de la búsqueda de unidades con forma similar al objeto a cubrir se encuentra en los estudios realizados por Piaget con relación a la forma de las partes obtenidas al dividir segmentos o figuras y a la posibilidad de realizar contínuamente tal partición. Ese estudio muestra que durante un muy largo período la parte es solidaria de la forma de la figura o segmento de la que fue obtenida, e incluso el punto, que en cierto momento del desarrollo se postula como el límite de la partición posible, es un punto que conserva la forma de la figura original. Bajo estos hallazgos es lógico suponer que el niño buscará que las partes-unidad conserven la forma de la totalidad o al menos algunas de sus características importantes. Así, particularmente los niños más pequeños de la muestra, rechazan el uso de cuadrados y triángulos para medir el círculo y otras figuras de lados curvos porque "estos están derechos y se necesita que sean redondos" o "porque con cuadros y triángulos siempre sobra o falta una parte"

- - - - - - - -

(*) Un transportador es un acompañante inútil por varios años de los "juegos de geometría" que se exigen como materiales escolares desde 2° grado, sin que nadie lo use, ni hable sobre su uso, hasta los últimos grados de la escuela primaria. Los niños parecen encontrar en la medida de superficies con línea frontera curva una oportunidad para usar ese objeto misterioso.

Un problema en cierto sentido inverso es el que se presenta entre los niños mayores, una vez que han adoptado unidades cuadradas (convencionales o no) para medir áreas. Cuando utilizan el proceso de recubrimiento para medir el círculo o el terreno,



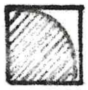
estos chicos observan que, por más particiones que hagan de la unidad elegida, nunca llegan a cubrir la figura hasta el límite curvo que la define, dudando entonces de la utilidad de las unidades cuadradas para medir este tipo de superficies. Un caso especialmente significativo a este respecto es el de Oscar, que ha medido sin mayores problemas figuras rectilíneas usando las fórmulas. Cuando se le da el círculo para medirlo, Oscar se queda pensando largo rato, "No, no sabría ...es que ya no me sé la fórmula".

Exp: ¿De qué otra manera se te ocurriría medirlo?

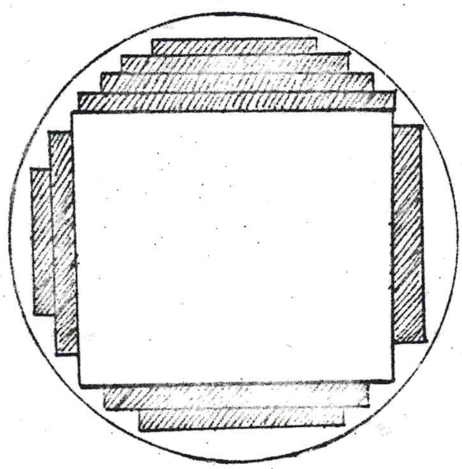
O: No, no se me ocurre nada.

(Se le ofrece papel cuadriculado transparente y figuras de cartón).

Exp: ¿Te sirve algo de todo esto?

O: No, no sé como...poniendo el papel (cuadriculado) así encima voy a marcar el círculo y ver adentro cuántos cuadros son, y luego los que sobran, por ejemplo este que sobra aquí  , más este pedacito de acá  ya formaría otro cuadrado.

Señala de la misma forma tres parejas bien compensadas. Marca el círculo en el papel cuadriculado y dentro de él marca los vértices de un rectángulo (el mayor posible formado por cuadritos completos) y repasa las líneas que lo forman. Mide con regla los lados de este rectángulo y dice que "los multiplicaría y a eso le iría sumando los pedazos que me faltan". Me explica que formaría rectángulos (sombreados en el dibujo) y les mediría su base y su altura.

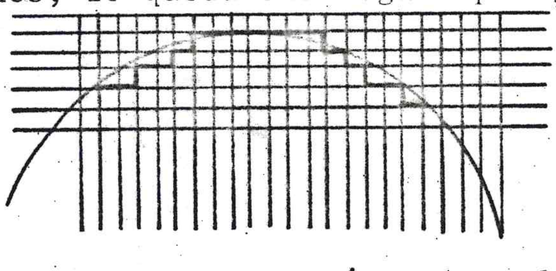


Exp: ¿Y los pedazos que faltan?

O: Así, por ejemplo con estos dos (pareja que compensa) se lo juntaría al cuadrado, como haciendo un cuadrado más grande (se refiere a su rectángulo) y cada vez ir formando el círculo... pero no, es que no sirve, porque se haría un cuadrado y no un círculo, y no sirve.

Exp: Con esta parte y esta, harías otro cuadrito entero, y ese, ¿se puede medir?

O: Sí (toma una regla y le mide un lado -2 cm- luego mide el otro lado y calcula mentalmente) Son 4 centímetros cuadrados, pero no se puede, porque me quedaría una figura como cuadrada, no un círculo, mira. (Me señala que, al hacer las compensaciones, le queda una figura poligonal



Exp: Y esa figura, ¿no tiene la misma área que el círculo?

O: No, porque es como cuadrada, no son iguales.
Exp: ¿Entonces los cuadritos no sirven para medir el área de éste?
O: No, sólo para los que son un cuadro o un rectángulo.

Problemas similares a los de Oscar se planteaban los griegos en lo que hoy conocemos como problemas relativos a la cuadratura del círculo. Los geómetras griegos se preguntaban si era posible encontrar un cuadrado con área igual a la de un círculo dado, y este problema (junto con otros similares) ocuparon muchas páginas y hombres de la época. Hoy se puede demostrar que el problema no tiene solución con regla y compás, pero el problema de fondo era saber si las figuras curvilíneas (círculos, medias lunas, etc.) podrían ser transformadas con exactitud en figuras rectilíneas y podían, por lo tanto, medirse con iguales unidades.

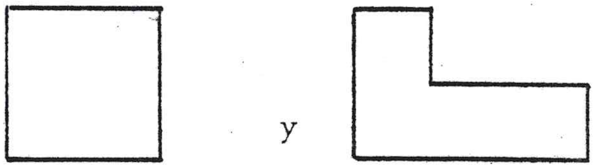
La enseñanza de la fórmula para el cálculo del área del círculo ($\pi \times r^2$) no hace sino ignorar y ocultar esos problemas. En la escuela, en el mejor de los casos, se justifica dicha fórmula hablando del círculo como un polígono con un número infinito de lados, pero ese pasaje al "infinito", lo mismo que las peculiaridades del número "π" (pí) son un problema conceptual que la escuela ignora.

La fórmula del área del círculo es el único pasaje al infinito que encontramos en los contenidos de la escuela primaria y aunque la construcción de ese concepto fue un obstáculo fundamental que detuvo durante siglos el desarrollo de las matemáticas, la escuela lo trata como una definición más a memorizar.

VIII.3. Cuantificación de las unidades y equivalencias.

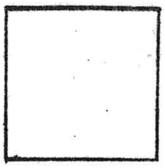
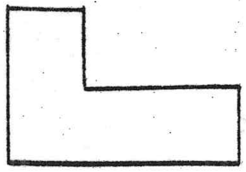
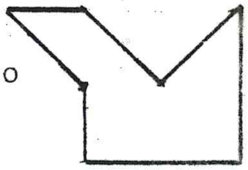
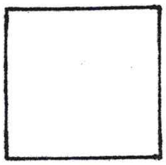
Paralelamente al proceso de partición del objeto debe darse una cuantificación de las partes para obtener, como resultado, una medida. La actividad de recubrimiento no garantiza en sí misma la apropiación de la medida, ya que ésta involucra la asignación de un número que represente la magnitud del objeto en relación a la magnitud de la parte-unidad.

Para algunos de los niños más pequeños que integraron la muestra, cubrir y asignar un número no significa cuantificar la magnitud área. Dos terrenos pueden "medir" lo mismo, pero no por eso ambos tienen lo mismo de área en la mentalidad de los niños. En esta etapa ante los terrenos



dicen que ambos miden 4 cuadrados, pero, por ejemplo, el terreno tiene más pasto porque "está más estirado".
Estos niños al cubrir reconocen la congruencia simple entre el objeto y las partes que lo forman, pero no han logrado apropiarse de la denominada congruencia compuesta que se deducirá del manejo de la transitividad de una medida común. Pero como los pedazos reunidos que sirven para cubrir una superficie dejan de ser iguales a ella tan pronto como se les desplaza, no puede hablarse aquí de métrica alguna.

En un segundo momento, el conteo de las figuras con que se cubre es considerada ya por el niño como una cuantificación de la magnitud: a medida mayor corresponde un área mayor. Sin embargo, el niño cuenta todas las unidades que ha usado como siendo de la misma magnitud. En este nivel el niño aceptará que el terre-

no  es igual al terreno  (mide lo mismo, tiene igual de pasto, etc.) pero dirá que el terreno  tiene más pasto que el terreno  pues éste mide sólo cuatro (cuadrados) mientras el primero mide 7 (sin importar que sean triángulos de la mitad del área del cuadrado).
Veamos algunos ejemplos.

Ma. Elena (8:0) cubre el terreno rectangular de 21 x 28 cm con cuadrados (12) y el terreno circular con cuadrados, triángulos y rectángulos de diversos tamaños (37 figuras en total).

Exp: ¿Cuál es más grande? ¿Cuál tiene más pasto para la vaca?
Ma: Este (círculo) porque tiene más.
Exp: Pero al redondo le pusiste pedacitos muy chiquitos.
Ma: Pero no importa, porque acá son muchos, son 37, y acá sólo caben doce.
Exp: ¿Y cuál tiene más pasto?
Ma: Pues este (círculo) porque le caben más pedazos de pasto.
Exp: ¿No importa que sean chiquitos?
Ma: No, no importa porque son más, y este (círculo) tiene más pasto.

Rodrigo (8:7) mide los terrenos rectangular (14 x 21 cm) y heptagonal para compararlos. Cubre el rectángulo con 6 cuadrados y el otro con 4 cuadrados y 3 triángulos, pero le sobre todavía mucho espacio, quita entonces los 3 cuadrados y acomoda 11 triángulos en total.

Exp: ¿Ya sabes cuál es más grande?

Ro: Este (heptágono) porque le caben muchos. Son once y aquí y allá (rectángulo) son 6: éste es más grande.

Exp: ¿Son iguales el cuadrado y el triángulo?

Ro: No... ah! (entonces coloca 2 triángulos sobre un cuadrado, verificando la equivalencia. Cuenta ahora los cuadrados de 2 en 2 -es decir, cada cuadrado vale 2- y compara las medidas 11 y 12 triángulos. Pero como no ha terminado de cubrir el heptágono, usa ahora pequeños cuadritos -1.5 x 1.5 cm- para cubrir el espacio restante).

Exp: (Al terminar) ¿Cuánto midió?

Ro: (Cuenta indistintamente triángulos y cuadraditos) 16.

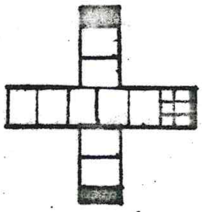
Exp: ¿Diez y seis qué?

Ro: 16 cuadros.

Exp: ¿Todos son cuadros?

Ro: No, estos son rectángulos (señala los triángulos)... es más grande este porque aquí son 16 (heptágono = 11 triángulos + 5 pequeños cuadrados) y en este 12 (rectángulo = 12 cuadrados). (Sigue comparando de esa manera a pesar de pedirle nuevamente que vea cuántos triángulos caben en el cuadrado, y cuántos cuadrados pequeños).

Erika (7:6) Para medir el terreno en forma de cruz coloca los cuadrados de 7 x 7 cm en la cruz. No entran justo. Busca otros en la caja. Toma los amarillos chicos (1.5 x 1.5 cm) y completa. Los cuenta 1 a 1 sin tener en cuenta el tamaño.



E: (Señala lo que falta -espacios sombreados en el dibujo-) ¿No tienes unos chiquitos?

(Corre los cuadros grandes hasta arriba, con lo que le queda sólo un espacio verde. Le doy papel y tijeras. Corta una tira larga que cubre el espacio que le sobra. Para cortarla mide -marca en papel- el ancho del espacio que debe cubrir antes de cortarlo. Luego cuenta todo hasta 16 -hay 9 cuadros grandes, 6 cuadros pequeños amarillos y una tira de papel).

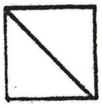
Exp: ¿Te acuerdas cuánto medía éste (21x28 cm)?
E: Si, 12. Entonces la cruz tiene más pasto. (Compara 16 con 12).
Exp: ¿Segurísima?
E: Sí.
Exp: Pero acá pusiste puros grandes. ¿Por qué acá pusiste unos más grandes, otros más chicos? ¿no importa?
E: No, (vuelve a contar, pero cuenta los 6 cuadrados chicos como 1 y cuenta 11 en total para la cruz).
Exp: ¿Estos 6 chiquitos hacen uno grande?
E: No, como un rectángulo, como la mitad de un cuadrado.
Exp: Bueno pero ahora si lo cuentas así, te da 11, y del otro modo te daba 16, entonces ¿cuánto mide?
E: Once, mide once... entonces es más chico que éste porque es once y doce.

Entre estos procedimientos y la verdadera métrica hay reacciones intermediarias que anuncian la consideración de la magnitud de las unidades empleadas. Esta consideración se hace de dos maneras: O bien atendiendo a la equivalencia entre unidades únicamente cuando durante el cubrimiento se forma efectivamente con unidades pequeñas una unidad mayor, por ejemplo al colocar 2 triángulos rectángulos formando un cuadrado, o bien, en un momento mucho más cercano a la construcción de la iteración métrica, se supone una equivalencia sin verificarla. Observemos algunos ejemplos:

<u>Rubén</u>: (8:0) Mide el terreno en forma de cruz cubriéndolo con

9 cuadrados naranjas y 15 pequeños triángulos cafés, hasta llenarlo casi totalmente.

¿Cuánto mide?

Ru: 17 (cuenta hasta 9 los cuadros naranjas, y también por uno cada par de triángulos que están acomodados formando un cuadrado  pero de tamaño más grande que el naranja, y finalmente un triángulo suelto también por uno. 17 = 9 cuadrados + 7 pares de triángulos formando pequeños cuadrados + 1 -triángulo solo).

Exp: ¿17 qué son?

Ru: 17 cuadrados

Exp: ¿Son todos del mismo tamaño?

Ru: No, estos son más chiquitos.

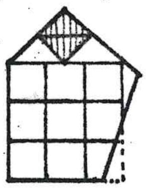
Exp: ¿Se cuentan igual?

Ru: Sí.

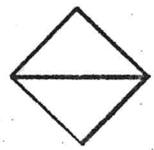
Exp: Si alguien tiene un terreno que mide 10 cuadros naranjas, (se lo armo) ¿tiene más o menos pasto que la cruz?

Ru: Este (cruz) porque está de esta forma, y tiene todos estos (triángulos) y son 17 y en el tuyo sólo son 10...

Más adelante mide el terreno pentagonal cubriéndolo con cuadrados y triángulos, contando de uno en uno los cuadrados, también como uno los dos triángulos sombreados en el dibujo y de uno en uno los triángulos restantes.



Exp: ¿Por qué estos dos triángulos los cuentas juntos?

Ru: Porque están... hacen un cuadro. 

Exp: Y estos dos (los dos que están en los extremos) ¿no po - drían hacer un cuadro?

Ru: Sí, pero si estuvieran juntos como aquí (señala los que forman el cuadrado).

Exp: Así, separados ¿no miden como un cuadro?

Ru: No, (cuenta nuevamente) mide 12 cuadros.

Exp: ¿Todos los que contaste son cuadros?

Ru: No, unos son triángulos y otros cuadros.

Al hacer la comparación con el terreno rectangular (21x28 cm) que mide 12 cuadros, Rubén dice que entonces son iguales: pues los dos miden 12.

Dolores (11:11) Mide el terreno circular cubriéndolo con 16 círculos grandes y 28 chicos. Cuenta los grandes y luego, sin verificar equivalencia, cuenta uno más por cada cuatro círculos chicos.

Exp: ¿Cómo contaste los chiquitos?

Do: Es que yo pienso que 4 chiquitos son uno grande.
(Pone 4 chicos sobre uno grande y le sobra mucho espacio)

Do: ...Pero ahorita que veo no, son más, son como 8.
(Va haciendo grupos de 8 circulitos y los cuenta como uno grande).

Do: Son 19, y la mitad (le sobraron 4 chicos).

En las actividades que siguen establece las equivalencias ya verificandolas siempre.

Finalmente, y como culminación de este desarrollo, los equivalencias entre unidades son consideradas sistemáticamente, y con independencia de la configuración perceptiva que adquieran durante la actividad de recubrimiento.

Oscar (11:6) va a medir el terreno en forma de "lago"

O: No, no se cómo, no se me ocurre con qué.
(Le propongo cubrirlo -le cubro una parte).

O: (Sigue cubriendo con figuras de diferentes tamaños, tratando de cubrir todo, pero sin salirse. Al terminar cuenta cada figura por separado). Para ver cuántos cuadros se pueden hacer, porque estos dos triángulos (rosas) forman otro cuadrado, entonces, ya van 7, y estos dos van ocho, y luego estos tres triángulos cafés forman... (los acomoda así )... y así lo deja*. Luego forma con cuatro triángulos naranja uno de los cafés y los cambia por un café, luego cambia ocho triángulos cafés por un cuadrado naranja.

(Tiene en otro lugar un rectángulo de área igual a 1/2 cuadrado, formado con triángulos. Le acerca un triángulo rosa, de igual área pero no se anima a cambiarlos.

Cambia todo lo demás a cuadros naranjas, luego cambia los cuatro triángulos cafés por un triángulo rosa. Después de ver equivalencia por superposición)

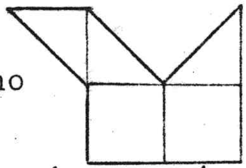
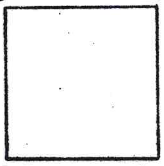
Exp: ¿Ya sabes cuánto midió?

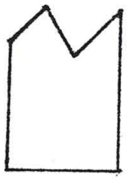
O: Son 10 cuadros (toma la regla y mide ambos lados de un

- - - - - - - - -

(*) Ver anexo 1.

cuadrado buscando traducir esa medida a unidades del sistema métrico decimal).

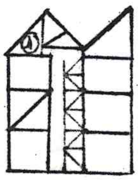
Cabe hacer notar aquí que la necesidad de establecer o no la equivalencia entre unidades es un realidad función de la tarea. Así, es una "buena medida" decir que el terreno  mide dos cuadrados y tres triángulos, o simplemente siete triángulos. Pero si el objetivo es comparar las magnitudes de ese terreno y el terreno  = 4 cuadritos, y más aún si deseo cuantificar la diferencia, sí necesito saber qué relación hay entre la magnitud del triángulo y la del cuadrado. Por ejemplo:



Claudia: (9:1) Le doy para medir el pasto de

Exp: ¿Qué serviría para medirlo?

C: Los triángulos (pone un triángulo rosa en 1) y los cuadrados.



(Uno de los triángulos café claro se sale y lo cambia por triángulos rosas chicos. Los espacios verdes pequeños los va llenando con triángulos de diferentes tamaños, tratando de cubrir totalmente. Deja encima o salidos sólo pedacitos muy pequeños. Al terminar).

C: Ya está

Exp: ¿Ya lo mediste?

C: (Cuenta los triángulos rosas y sigue con todas las figuras, contando de 1 en 1) Son 30.

Exp: ¿30 qué?

C: Treinta de todas las figuras.

Exp: ¿Y son iguales todas?

C: No, son (cuenta otra vez) 16 triángulos rosas chicos, 7 triángulos naranjas chiquitos, 1 triángulo mediano café, 3 cuadros naranja y 4 triángulos rosa grandes.

Exp: Y si alguien tiene un terreno que mide 7 cuadros naranja, ¿sería más grande o más chiquito que este?

C: Tendría que poner unos triángulos (empieza a acomodar triángulos café en el naranja. Después de varios ensayos no encuentra cómo cubrirlo totalmente; le cubro uno). Con 8 cafés se hace uno naranja, pero yo sólo tenía uno café. (Pone ahora triángulos rosa chicos en el triángulo grande -8- y triángulos naranja sobre el rosa chico -2-. Interrumpe para contar).

Van 5 cuadros porque con 2 triángulos rosa se hace uno, y con estos 2 se hace otro (enseñándomelos en el terreno).

Exp: ¿Y con los otros? ¿cuántos rosas chicos necesitas para un cuadro?

C: (Pone 2 triángulos rosas grandes formando un cuadrado, y acomoda 16 triángulos rosa en la misma forma que antes). Entonces ya son 6 cuadros. Sería éste más chiquito que el de 7 cuadros.

Exp: ¿Cómo sabes que más chiquito?

C: Porque sólo me quedaron el café y 7 chiquitos naranjas y sólo tengo 6 cuadros y no me alcanza para 7.

En la actividad de Claudia puede observarse con claridad que ella no estableció la equivalencia entre unidades sino cuando la tarea se lo "exigió". En las tareas escolares es común encontrar ejercicios que piden conversiones de unas unidades a otras, sin presentar tareas que por sí mismas exijan el establecimiento de equivalencias.

VIII.4. Aproximación, precisión y exactitud.

Las mediciones de propiedades físicas, dado el carácter contínuo de la mayoría de esas magnitudes, sólo pueden ser aproximaciones, tanto más precisas cuanto menor sea la unidad de medida empleada. Así, la precisión de una medida espacial depende la Unidad empleada, así como de los instrumentos mismos que se usan para medir.

Una vez encontrado el número entero de veces que la unidad elegida cabe en el objeto, para los espacios restantes existen varias posibilidades:

1. Considerar los espacios sobrantes como insignificantes y por lo tanto no medirlos.
2. Considerarlos cualitativamente (un poco más de...)
3. Buscar una unidad más pequeña para cubrir los espacios sobrantes. Esta nueva unidad puede tener una equivalencia entera con la unidad original o ser una superficie cualquiera. Este proceso se puede repetir varias veces, en función de la precisión deseada.
4. Rechazar la necesidad de la aproximación, y pretender cubrir totalmente la superficie.

Por supuesto la validez de cada una de estas posibilidades no puede evaluarse en sí misma, pues depende del objetivo con el cual se mide. Sin embargo, algunos niños muestran en las entrevistas una necesidad imperiosa de llegar al cubrimiento total para dar validez a la medición. Algunos de ellos no se detienen en partir y volver a partir la unidad para cubrir cada vez mejor, negándose a aceptar alguna de las aproximaciones logradas. Otros en cambio, sacrificando el significado de la uni -

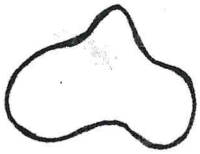
dad como parte (fija, conocida), colocan unas figuras trasla - pándose con otras hasta lograr el cubrimiento total. Veamos al gunos ejemplos:

Claudia (9:1) Para medir el terreno circular utiliza círculos grandes y pequeños. Utiliza los más pequeños cerca del borde y los grandes en el centro. Cuando ve que no logra cubrir totalmente pregunta:

C: ¿Se puede ponerlos encimados?

Exp: Tú qué piensas, ¿te sirve mejor para medir?

C: Sí, para poder medirlo bien todo (me enseña que encimándo los logra tapar todo el terreno)

Más adelante, para medir el terreno  repite el procedimiento, encimando los círculos hasta cubrir casi todo lo verde. Cuenta los círculos grandes por un lado y los pequeños por otro.

C: Mide 48 chicos y 20 grandes.

Exp: Cuando los pones así encimados, ¿no importa?

C: No, es para medirlo bien todo.

Exp: Pero así encimados, este pedazo que está encimado lo cuentas dos veces, uno con este círculo y una con este otro ¿no?

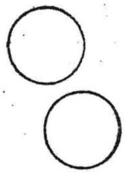
C: Sí, se cuenta cada vez, pero no importa porque para que se tape bien todo todo.

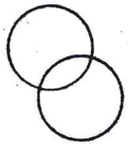
Erika (7:6) Utiliza cualquier figura para medir el terreno circular. Mientras coloca cuadrados y triángulos, cubre totalmente sin encimar, pero al poner círculos coloca 29 en un pedazo donde cabrían 9 ó 10, tapando hasta el más pequeño huequito.

Exp: ¿Y no importa que esta bolita esté encima de la otra, que le tape un pedazo?

C:

E: Es lo mismo.

(Le pongo círculos afuera del terreno, 2 separados 

y 2 encimados. 

¿Hay lo mismo de pasto en los dos?

E: Sí, pero así (encimados) no dejan pedacitos sin medir.

La interpretación de las palabras de Erika no puede ser concluyente, porque cuando hablamos de figuras "encimadas", los objetos en cuestión siguen existiendo completos como tales y no puede distinguirse claramente aquí si Erika ha comprendido nuestra objeción, aunque por la forma en que cuantifica las partes se puede suponer que no está considerando la unidad como tal, sino que se centra en el objetivo de cubrir totalmente.

<u>Marta Angélica</u> (11:8) Trata de medir el círculo, pero no recuerda la fórmula. Acepta medirlo con figuras, pero siempre con la reserva de que necesita saber lo que mide cada figura, y repitiendo:

M: Pero me va a dar un número que no es muy exacto porque siempre me quedan huequitos, entonces no queda mucho muy aproximado la medida.

Más adelante está midiendo el área de las figuras que usó para cubrir. Con regla y fórmula establece que el cuadrado (7x7 cm) mide 49 cm^2. Le pregunto:

Exp: ¿Cuál será entonces el área del triángulo rosa? (1/2 del cuadrado).

E: Se supone que la mitad del cuadrado, o sea 24.5 (hace la cuenta 49/2), pero lo voy a medir para que sea más exacto. (Mide entonces la hipotenusa del triángulo y su "aultura", y usando la fórmula (Bxh)/2 concluye que mide 25 cm^2).

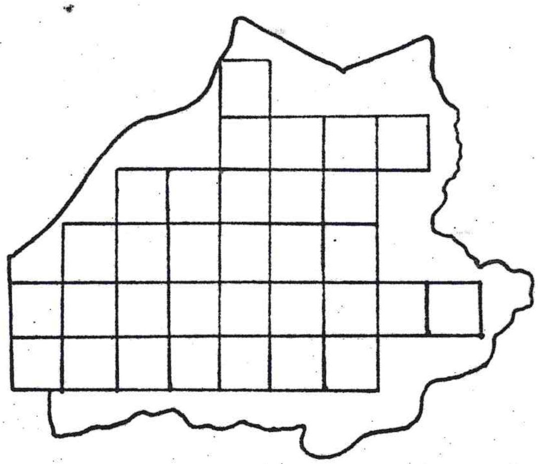
Exp: ¿Cuál será la medida?

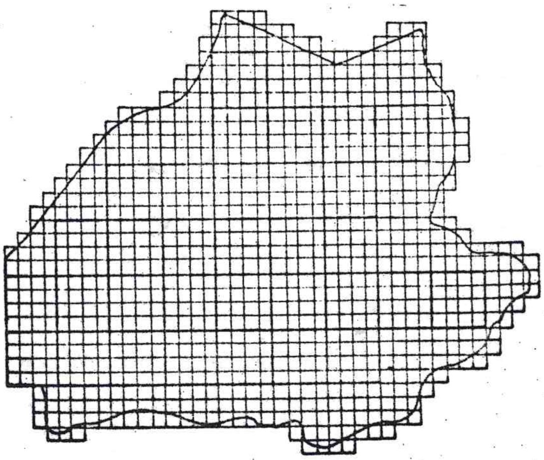
M: 25 centímetros cuadrados, porque con figuras no es muy exacto y con la regla si,... lo más exacto es con la regla.

No es de extrañar que los niños tengan tantos problemas con el asunto de la exactitud, pues la escuela ha exigido siempre resultados exactos y rechazado las respuestas aproximadas. Difícilmente en la escuela se escuchará al maestro aprobar una respuesta del tipo: "Este terreno mide un poco más de 25 metros cuadrados", o "este segmento mide entre 9 y 10 centímetros". Se presenta aquí nuevamente la contradicción entre un modelo matemático, que asigna a cada objeto uno y sólo un número real, y un modelo físico, el de las mediciones reales y concretas, que está imposibilitado para dar una medida única exacta.

El problema en la escuela es que se pretende llevar de las mediciones concretas del modelo físico a la exactitud del modelo matemático sin ninguna mediación.

Algunos textos de enseñanza básica de matemáticas (no el oficial) sugieren introducir el concepto de aproximación de la medida mediante encuadramientos cada vez más precisos. Así, para medir un terreno irregular se van estableciendo las cotas superiores e inferiores de la medida respectiva, mediante retículos cada vez más finos.





Esta idea nos parecía interesante y pedimos a los niños en las entrevistas que utilizaran un papel cuadriculado transparente para medir alguna superficie. Pero en ningún caso apareció referencia a la cota superior; en cambio, establecer la cota inferior y hacer compensaciones aproximadas para los cuadritos restantes sí les parecía un buen procedimiento para medir. Pensamos que este último recurso sería muy útil para introducir el carácter aproximativo de la medición y también una equivalencia entre unidades. Sin embargo el papel cuadriculado no fue elegido en primera instancia por los niños en ninguna ocasión, y seguramente resulta mucho más natural introducir la medida de áreas mediante recubrimiento con figuras aisladas.

VIII.5. Convencionalidad de la medida.

Otro aspecto muy importante en la construcción de la medida es el que se refiere al carácter convencional de la unidad, es decir al hecho de que la unidad de medida puede ser cualquiera mientras que se refiera a la magnitud que se desea medir. Este carácter convencional queda expresado en documentos europeos previos a la instauración del sistema métrico decimal cuando se habla de "grandes pasos", "pasos razonables", etc. y a la firma de los contratos cada una de las partes recibe un patrón de madera de la unidad empleada en el documento.

El carácter convencional de la unidad aparece también en las transacciones sobre granos y harina de esa época. Se tenía conciencia de que se pueden medir esos productos con cualquier unidad siempre que se sepa cuál es y se emplee siempre de la misma manera. Esto favorece la proliferación de unidades de medida distintas para cada ciudad o región, e inlcuso para cada producto. Al extenderse el comercio esta situación crea innumerables conflictos y necesidad de establecer conversiones de una unidad a otra. Es por eso que trata de implantarse el sistema métrico decimal, buscando la adopción de un sólo patrón con uso universal. Pero el carácter convencional de la unidad sigue presente: dado que las mediciones empíricas de la diezmillonésima parte del cuadrante del meridiano terrestre están sujetas a demasiadas variaciones se adopta un sólo patrón, el patrón del metro de Sévres, elaborado en una aleación de platino e iridio para evitar al máximo las deformaciones, que es guardado con sistema de alarmas y lujo de protecciones para ofrecer al mundo la tranquilidad de que no se quedará sin metro.

Más adelante, la variabilidad de ese patrón ya no resulta útil para cálculos muy exactos. Se adopta entonces una nueva manera de definir el metro, completamente ajena a los primeros intentos de definir una unidad en relación con los objetos y las dimensiones cotidianas.

El "verdadero" metro equivale a 1,650 763.73 longitudes de onda en el vacío de la radiación equivalente al paso del nivel 2p 10 al 5d 5 de un átomo de criptón 86, mismo que puede ser reproducido con exactitud en cualquier laboratorio convenientemente equipado. ¿Hay algo más convencional que la elección de "ese" metro?.

Sin embargo, el carácter claramente convencional de este patrón se va perdiendo en el uso cotidiano del sistema. La imposición de un sistema de medidas, organizado desde fuera y sin comprensión por parte de los sujetos que lo usan de la forma en que surge y funciona, nos ha llevado a que para la gente común sea inaceptable medir una longitud con popotes, una superficie con triangulitos, o pesar un objeto con canicas.

En los niños de la muestra, el sistema "legal" (*) de medidas va siendo, conforme más grados escolares se hayan recorrido, cada vez más el único sistema de medidas aceptable.

Las figuras, tales como cuadrados, triángulos, etc., no sirven para medir áreas porque, dicen los niños, no tienen números, "no tienen centímetros" (es decir, no tienen una marca cada centímetro) o porque "no sé cuánto miden". En el mejor de los casos esos objetos sirven para medir a condición de que ellos sean a su vez medidos, ahora sí, con unidades del sistema métrico. (**)

Pero, paradójicamente, los niños tienen ideas imprecisas y erróneas acerca de las unidades del sistema métrico decimal. De ambas cosas (rechazo a unidades de medida que no sean las legales y confusión respcto a éstas) veremos ejemplos a continuación:

- - - - - - - -

(*) Es más común llamar "convencionales" a las unidades de medida del sistema métrico decimal o de otros sistemas organizados, y de uso muy generalizado tales como el sistema inglés. Se adopta aquí la denominación francesa de "legales" para caracterizar a esas unidades y destacar el hecho de que toda unidad de medida es necesariamente convencional, aunque la convención de su uso se reduzca a un pequeño grupo de personas. Las medidas "legales" alcanzan, en cambio en su convención a un muy amplio grupo de personas.

(**) Concepciones similares se han observado entre los maestros. Por ejemplo en el taller "Medición de Longitudes y Perímetros" impartido por Irma Saiz y Dilma Fregona (DIE, Laboratorio de Psicomatemática, Cuernavaca, Mor. Julio de 1982) los maestros afirmaban que sólo las unidades del sistema métrico decimal eran válidas, e incluso las unidades del sistema inglés (millas, pulgadas, etc.) eran rechazadas como unidades de medida válidas en nuestro medio.

Víctor (7:6) Está midiendo el cuadrado de 14x14 cm. Coloca figuras, pero eso es sólo "para medir más fácil con la regla". Coloca la regla encima de las figuras, como se relató en el capítulo V.

Bueno, pero vamos a guardar un ratito las reglas (*) y me dices si sólo con las figuras puedes medir todo el pasto o todo el papel que hay dentro ¿Te sirve acomodarlas así? (acomodo un rectángulo de 7x14 cm sobre el terreno de 14x14 cm).

Vi: (Acomoda cubriendo 2 rectángulos) Pero antes tendría que saber cuánto miden estos (los rectángulos)... Sí, miden... doscientos, son doscientos, y doscientos son treinta... treinta centímetros... ah, no, son trescientos, treinta es muy poquito.

Exp: ¿Y se puede decir que mide 2 rectángulos el terreno?

Vi: Sólo si sabemos cuánto midieron.

Exp: Y con cuadros, ¿se puede? (7x7 cm)

Vi: (Acomoda 4 cuadrados) Los contaría como rectángulos. Serían como 90 y 90 son 200, porque 2 son igual que el rectángulo (2 cuadros = 1 rectángulo), mide igual que 2 de estos.

Exp: Entonces estas figuras ¿sirven para medir? (el cuadrado, el triángulo, el rectángulo).

Vi: Sí, me sirven porque si las pongo así como están me sirve para pensar bien cuánto mide, entonces ya lo sumo.

Exp: ¿Se te hace más fácil que sin las figuras?

Vi: Sí, porque puedo pensar mejor.

- - - - - - - - -

(*) Como las dificultades propias del uso de la regla resultaron en sí mismas muy ricas e interesantes, proporcionando mucha información sobre los problemas de la medición, se ha incluído un anexo que se refiere a la utilización de este instrumento (ver Anexo 2).

Exp: ¿Pero las figuritas miden el terreno?

Vi: No, lo tengo que medir con los números y con la regla.
Le pregunto por qué usa el lado de los centímetros y no el de las pulgadas, señalándolas.

Vi: Porque aquí están por grandes, están muy separados.

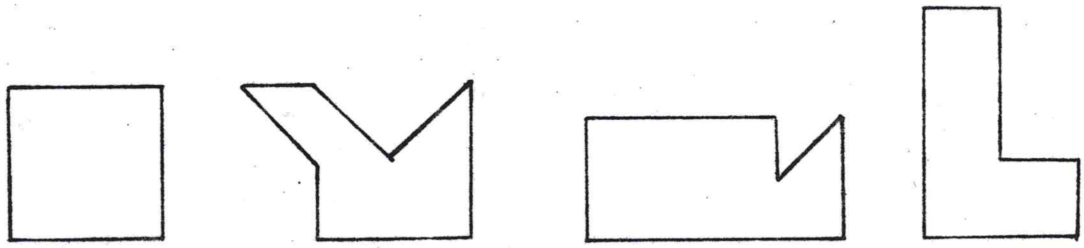
Exp: ¿Y no sirven esos para medir?

Vi: Para mi no, porque están muy separados.

Exp: ¿Para medir tienen que estar muy juntitos?

Vi: Un poco

Marta Angélica (11:8) Cubre los terrenos:



con figuras, e inmediatamente usa la regla para calcular, con fórmula, el área de cada figura con la que cubrió.

Exp: ¿No serviría decir que este (cuadrado de 14x14 cm) mide 4 cuadrados?

M: No, porque así no decimos su medida.

Oscar (11:6) Usa la fórmula Bxh y da el resultado en centímetros cuadrados:

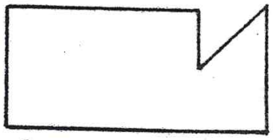
O: Porque si no, serían del perímetro, y el área da en centímetros cuadrados.

Exp: ¿Cómo sabes que da en centímetros cuadrados?

O: Sería en centímetros cuadrados o también en otras unidades más grandes.
¿Cómo cuál?

O: El milímetro... no se podría medir éste, pero serían el metro, el kilómetro, el decámetro y el decímetro... pero serían cuadrados, por el área.

Exp: ¿Podrías dibujar un centímetro cuadrado?
O: (Dibuja, con ayuda de la regla, un cuadrado de 1 centímetro por lado).
Exp: ¿Y un centímetro?
O: (Dibuja una recta de un centímetro -0 al 1 en la regla).
Más adelante, al insistirle que use las figuras para medir, Oscar marca los cuadrados en el terreno



Como antes calculó el área del cuadrado (49 cm^2) multiplica 49x7 y divide 49/2 (el triángulo es de la mitad) y suma ambos resultados:
O: Mide 367.5 centímetros cuadrados.
Exp: ¿Y se puede decir que este terreno mide 7 cuadros y medio?
O: Pero si me preguntaran cuánto miden los cuadrados, yo no sabría qué decirles.

Los niños tienen la sensación de que, en cambio, si dicen cuánto mide en centímetros cuadrados o en decímetros cuadrados la medida es totalmente válida. A este respecto puede hacerse también la hipótesos de que para los niños las unidades convencionales son medidas por sí mismas, y por lo tanto, no es necesario medirlas, a diferencia de las unidades no convencionales.

Manuel (11:11) Mide el terreno en forma de cruz multiplicando su largo por su ancho.

Ma: Mide 1511

Exp: ¿1511 qué?

Ma: 1511 centímetros... ah, no, 1511 metros... cuadrados.

Exp: ¿En qué está marcada la regla que usaste?

Ma: Ah, entonces son centímetros cuadrados.

Exp: ¿Puedes dibujar un centímetro cuadrado?

Ma: No sé dibujarlo (señala en su regla la distancia de un milímetro...) Es un cuadrito así, de este tamaño.

Exp: ¿Ese sería un centímetro cuadrado?

Ma: A ver espérame, ¿cuáles son los centímetros, aquí el del 18 hasta el 19 es un centímetro o el que está a la mitad?

Exp: ¿Cuál crees?

Ma: El del 18 al 19... Ah, entonces es un cuadrito que mide eso, un centímetro.
(Dibuja con la ayuda de la regla un rectángulo de 1 centímetro x el ancho de las marcas de su regla, que es de aproximadamente 0.5 cm).

Exp: ¿Ese es un centímetro cuadrado?

Ma; Sí.

Exp: ¿Por qué se llamará cuadrado, centímetro cuadrado?

Ma: Porque midiendo este campo (toma el cartón 21x28)... Ah no, porque también mide el redondo... no sé por qué se llamará cuadrado.

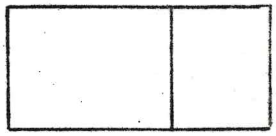
Se ve aquí también la tendencia infantil por definir los objetos de acuerdo a su funcionalidad, e independientemente de su estructura o constitución. De acuerdo a este criterio harían falta también centímetros redondos para medir áreas circulares.

<u>Gerardo</u> (10:0) Nos dice que el terreno circular mide 483 centímetros cuadrados. Lo midió cubriendo con grandes y pequeños círculos y sumando los perímetros de esos círculos.

Exp: ¿Me puedes dibujar un centímetro cuadrado?

Ge: ¿Sólo uno?

Exp: Sí, uno solito.

Ge: (Dibuja sin usar la regla un rectángulo partido  de 1.5x1 cm aproximadamente- luego en otro lugar, una línea de un centímetro con ayuda de la regla, y me la enseña). Aquí está.

Exp: Y el otro que dibujaste ¿qué es?

Ge: Nada.

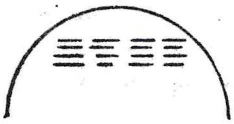
Exp: ¿Entonces este es un centímetro cuadrado (——)?

Ge: Sí.

Exp: ¿Piensas que caben 483 de esas rayitas aquí en el círculo?

Ge: Sí, porque eso mide.

Le pido que me enseñe dónde están. Dibuja dentro del círculo:



Exp: ¿Así cabrían 483?

Ge: Sí.

Exp: ¿Y un centímetro cómo será?

Ge: Pues igual.

Exp: ¿Para qué le llaman a uno centímetro cuadrado?

Ge: (Levanta los hombros) Es igual.

<u>Yoatzin</u> (11:3) Ha medido algunos terrenos con fórmula y otros cubriendo con figuras. Calcula el área del rectángulo (21x28) con fórmula y contesta:

Y: Mide 588... centímetros... cuadrados.

Exp: ¿Es lo mismo un centímetro que un centímetro cuadrado?

Y: No.

Exp: ¿Puedes dar o dibujar o enseñar un centímetro?

Y: (Dibuja con la regla un segmento horizontal de un centímetro -del 0 al 1 en la regla).

Exp: Ahora un centímetro cuadrado.

Y: (Marca un segmento vertical de un centímetro y le escribe junto 1 cm^2 y se queda muy pensativa).

Exp: ¿Se parecen el centímetro y el centímetro cuadrado?

Y: Sí, se parece. Repite el primer dibujo correspondiente al cm pero para representar ahora un cm^2.

Exp: ¿Se parecen tanto que son iguales?

Y: No, debe ser distinto.

Más adelante calcula con fórmula el área del cuadrado de 7x7 cm.

Y: Mide 49 centímetros cuadrados... o sea que son cuadrados. Son 49 centímetros y como es un cuadrado, cuadrado... ¿No? ... porque tienen forma de cuadrado (el terreno).

Exp: Los 49 centímetros, ¿son cuadrados porque es cuadrado el que mediste?

Y: No... porque en el rectángulo también serían centímetros cuadrados...

Hacia el final de la entrevista Yoatzin recibe un cuadrito de 1x1 cm para medir su área. Ella mide los lados y dice muy sorprendida que "mide uno,... un centímetro cuadrado... ¡entonces ese cuadrito sí es el centímetro cuadrado!".

C O N C L U S I O N E S

Este trabajo se inscribe en una corriente de investigación que Jean Brun (*) ha llamado Psicopedagogía de las Matemáticas y que centra sus esfuerzos en el estudio de los procedimientos empleados por los alumnos para conseguir apropiarse del conocimiento matemático.

En este esfuerzo intervienen como apoyo fundamental las investigaciones en Psicología Genética. Sin embargo, se intenta evitar aquí el reduccionismo que identifica la problemática del desarrollo cognitivo con la de la adquisición de contenidos particulares en el ambiente escolar. Es decir, se buscó conocer las formas específicas de acceso a ciertos conceptos y su manejo a través de las situaciones que la enseñanza propone.

Bajo estos supuestos se plantearon los objetivos del presente trabajo de investigación. Se ha buscado analizar el modo de funcionamiento de las estructuras intelectuales en relación a un contenido matemático -el de la medición de áreas- que se considera valioso no solamente por el tipo de problemas reales que permite solucionar, sino también por las repercusiones que el proceso de su aprendizaje puede tener en el desarrollo intelectual.

Queda sin embargo pendiente el problema didáctico, es decir, el diseño y análisis de situaciones que tiendan a favorecer la evolución de las representaciones y nociones que los niños van construyendo a lo largo del desarrollo. Este aspecto no constituye parte de los objetivos de esta investigación, pero debe quedar señalado como una mediación necesaria para proponer prác

---

(*) "Pedagogía de las matemáticas y psicología: análisis de algunas relaciones". En Infancia y Aprendizaje No. 9 Enero, 1980. p. 44-56.

ticas de aprendizaje más racionales y eficientes.

Como se mencionó al principio de este trabajo, la investigación se proponía observar los recursos y procedimientos que los niños despliegan frente a ciertas tareas de medición de áreas, así como observar la posibilidad que tienen de adaptar dichos recursos a nuevas situaciones. Se buscó analizar estas observaciones en relación a:

- -Los aspectos estructurales de desarrollo involucrados en las tareas presentadas y
- -El manejo de las nociones y procedimientos que la escuela se plantea como objetivos de aprendizaje.

Es oportuno presentar aquí una breve síntesis de las cuestiones más interesantes que esta investigación ha puesto de manifiesto.

Existen al menos tres concepciones posibles de la medida de áreas. Estas son:

- -la medida como cociente de dos magnitudes, (razón entre la magnitud del objeto a medir y la de la unidad elegida).
- -la medida como función (que asigna a cada superficie un número real).
- -la medida de áreas como producto de medidas de longitud.

Ninguna de estas concepciones basta para resolver cualquier situación de medida de áreas. En particular, el modelo de conteo ordenado de cantidades enteras de filas y columnas de unidades de área, que pertenece a la primera concepción, es insuficiente para abarcar todo el campo conceptual de la medida de áreas.

El aprendizaje de las propiedades de la medida que se han enunciado en el Capítulo 2 es condición y a la vez componente básico de cualquier procedimiento de medición de áreas. Su adquisi ción representa un complejo proceso de desarrollo al que es necesario poner atención. En este trabajo se muestra claramente que la memorización y aplicación de las "fórmulas" de cálculo de áreas carece de sentido si no cuenta con la comprensión de las propiedades que hemos mencionado. Por ejemplo, las demostraciones de las fórmulas para las distintas figuras geométricas involucran tres supuestos básicos: que al partir una superficie y reacomodar sus partes el área no se altera; que el área de la superficie así obtenida es igual a la suma de las áreas de las partes; y que a una superficie mayor le corresponde una medida (área) mayor. Pero es un hecho que el niño no comparte desde siempre supuestos como éstos y es fundamentalmente por ello que cuando olvida una fórmula le resulta imposible reconstruirla por sí mismo.

En este proceso de construcción tienen un lugar sumamente importante las actividades de medición directa de áreas. Medir diversas superficies con unidades de tamaños y formas distintas a las de las unidades convencionales no es una simple iniciación al tema, sino que constituye un proceso fundamental en la apropiación de las propiedades de la magnitud área y de su cuantificación. La realización de mediciones directas de figuras de formas diversas, regulares o no, de lados curvos o rectos, convexas o no, etc. es un proceso fundamental en el aprendizaje de la medida y <u>no</u> constituye en el desarrollo la repetición de casos equivalentes o simples extensiones de la medición del rectángulo y el cuadrado con que suele conformarse la enseñanza.

En el proceso de construcción de la medida de áreas pueden distinguirse dos aspectos fundamentales:

- el de diferenciación o abstracción de la magnitud área
- el de cuantificación o asignación de un número a dicha magnitud.

Esta distinción resultó de una gran utilidad en la comprensión de los procedimientos y dificultades de los niños en medición de áreas. Observando esta distinción categorizamos a los niños en tres grupos:

1. Niños que conciben el área como determinada por longitudes y que, en consecuencia, le asignan una medida que corresponde a dichas longitudes. Ubicamos en este grupo a los niños que pretendiendo medir áreas obtienen una medida del perímetro, o del largo y/o el ancho de la figura a medir, etcétera.

2. Niños que conciben el área como determinada por las superficies que la componen o que la cubren pero que, no sabiendo cómo cuantificar éstas, asignan una medida que corresponde a ciertas longitudes de las partes que constituyen la superficie. En este grupo tenemos como ejemplo a los niños que para medir cubren la superficie con figuras que representan unidades de área pero que asignan la medida mediante la suma de los perímetros de esas unidades. Ubicamos también aquí a los niños que emplean la graduación de la regla para asignar una valor numérico a la porción de la superficie a medir que queda cubierta por la regla.

3. Finalmente existe un grupo de niños que además de considerar a la superficie como determinada por superficies, tiene recursos para asignar medidas que corresponden al área. Se incluyen aquí los niños que utilizan procedimientos de recubrimiento con conteo de las partes necesarias para cubrir y también a los que utilizan fórmulas enseñadas por la escuela atribuyéndoles el significado de cuantificación del número de unidades de área que podrían cubrir la superficie a medir.

A través de esta distinción entre los aspectos de diferenciación de la magnitud y los de cuantificación de la misma hemos constatado que existen niños que a pesar de haber desarrollado una concepción avanzada de la magnitud área (que muestran principalmente frente a las tareas de comparación y seriación de superficies), recurren a fórmulas que no comprenden y parecen retroceder hacia consideraciones de longitud cuando se trata de asignar una medida del área.

Dado que para los niños más pequeños que analizamos resulta bastante natural recurrir a procedimientos de recubrimiento para medir áreas, se puede formular la hipótesis de que la introducción prematura de las fórmulas en la enseñanza tiende a hacer desaparecer esos procedimientos conforme se avanza en grado escolar, y a sustituirlos por procedimientos empleados en forma estereotipada que obstaculiza el desarrollo espontáneo hacia la cuantificación de las áreas al acentuar la atención sobre las medidas de longitud.

Se postula también en este trabajo que la consideración del producto de medidas como una relación de proporcionalidad múltiple da un nuevo significado a las "ecuaciones de dimensiones" (del tipo superficie = largo x ancho), a las fórmulas de cálculo de áreas y a las unidades legales de medidas de áreas y volúmenes. Se puede suponer que el trabajo sobre producto de medidas como proporcionalidad múltiple permitiría aprovechar este concepto como modelo para interpretar magnitudes que son proporcionales a otras magnitudes. Me refiero particularmente a nociones físicas tales como la velocidad (= distancia entre tiempo), fuerza (= masa por aceleración), etcétera.

El modelo de doble o múltiple proporcionalidad permitiría ampliar, por otro lado, el concepto mismo de multiplicación, posibilitando la superación de algunas dificultades inherentes al modelo de "suma abreviada", particularmente la dificultad que se observa en relación al cambio del dominio de las unidades ($m \times m = m^2$)

Se observaron en los niños múltiples procesos que hacen suponer que al paso de los años escolares se va estrechando el campo de los procedimientos que los niños aceptan como válidos en relación a la medición del área. Algunos ejemplos de este proceso son:

*El niño que en los primeros años escolares utiliza procedimientos plausibles de comparación de superficies, tales como la superposición, el reacomodo de partes o la compensación, abandona progresivamente esos procedimientos hasta llegar a afirmar que únicamente midiendo se puede comparar, incluso en los casos en que la tarea no exige una medida.

*Asimismo, en los últimos grados escolares de la primaria se tiende a reconocer como válidos para establecer una medida de áreas únicamente los procedimientos que emplean "fórmula" y que calculan el área a través de medidas de longitud. Se llega a la insólita conclusión de que si una superficie "no tiene fórmula" (o no se le conoce), no se puede medir.

*Hay también una progresiva desacreditación de unidades de medida que no sean las legales, creándose la imagen persistente de que tales unidades poseen validez especial, fuera de cualquier convención. "Medir, medir, sólo se puede con metros y centímetros".

Parece haber en todos estos ejemplos una evidencia de que el aprendizaje que se logra se refiere más a las formas escolares constituídas que a sus significados en situaciones reales.

Se observó también una gran dificultad en los niños para elegir una forma adecuada para la unidad de medida. Los niños parecen actuar bajo el supuesto de que la parte-unidad debe conservar la forma del todo, o al menos ciertas características de éste.

De esta manera, para medir rectángulos y otros polígonos aceptan unidades de lados rectos (cuadrados, triángulos o rectángulos), pero se inclinan por unidades de forma circular cuando se trata de medir superficies de lados curvos, y esto aún después de constatar las dificultades que implica pretender cubrir el plano con figuras circulares.

La medida de superficies de forma circular presenta todavía otro problema interesante. En los textos de primaria se justifica la fórmula para el cálculo del área del círculo ($\pi \times r^2$) presentando a éste como un polígono regular con un número infinito de lados. Pero se puede afirmar, según observamos en el Capítulo 8, que ese pasaje al infinito ofrece dificultades de comprensión para los niños (y los adultos) que deben extender el dominio de validez de la fórmula básica de B x h, pasando de un modelo de particiones finitas y poco numerosas al concepto de límite en la partición, mismo que representó un período de varios siglos en el desarrollo histórico de las matemáticas.

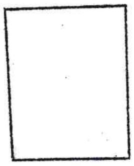
La adquisición de las relaciones de conservación-variación, incremento-decremento, etc. entre diversas magnitudes presentes en un mismo objeto (tales como su perímetro y su área), se obtiene como resultado del trabajo y la reflexión sobre ciertas transformaciones de los objetos y sus magnitudes respectivas. Se puede suponer que la búsqueda sistemática de reflexiones acerca de las transformaciones apropiadas contribuiría paralelamente al doble proceso de diferenciación y coordinación de las magnitudes en juego.

Las observaciones presentadas en esta tesis hacen suponer que la presentación tradicional de los temas de perímetro y área en la escuela contribuye a reforzar la suposición de una relación directa entre perímetro y área, y no ofrece situaciones que obliguen a poner en duda esta concepción. Mientras las com paraciones se hacen entre figuras de igual forma, la suposición de que a mayor perímetro corresponde mayor área opera correctamente. Para ponerla en duda se requiere de comparaciones que pongan en juego el cambio de forma, y no solamente de tamaño.

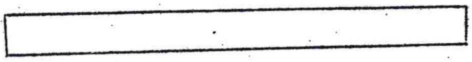
Se presentan finalmente observaciones diversas que muestran que el uso de la regla vehiculiza no solamente las dificultades de la medición de longitudes, sino además las dificultades propias del instrumento graduado. Sería recomendable un estudio más específico al respecto, pero este trabajo muestra suficientemente la urgencia de atender a las concepciones que desarrollan los niños en relación a este instrumento de uso tan generalizado en la escuela primaria.

ANEXO 1

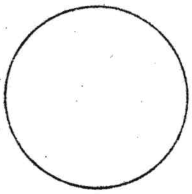
1) Terrenos para medir, comparar o seriar (Escala 1:14)



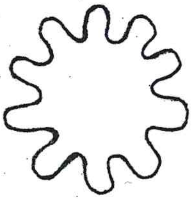
588 cm^2
21 x 28 cm



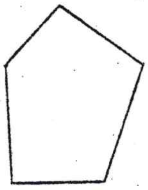
588 cm^2
7 x 84 cm



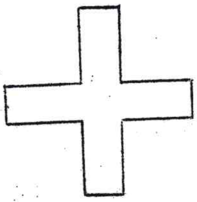
580 cm^2
"circular"



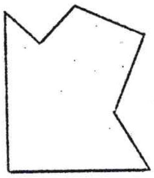
465 cm^2
"engrane"



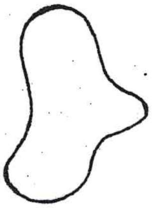
564 cm^2
"pentágono"



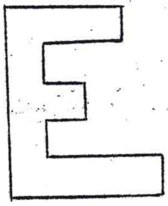
476 cm^2
"cruz"



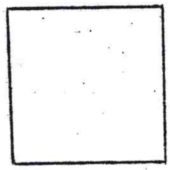
570 cm^2
"heptágono"



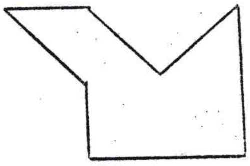
500 cm^2
"lago"



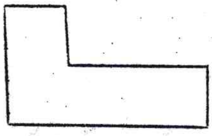
539 cm^2
"E"



196 cm^2
4 u

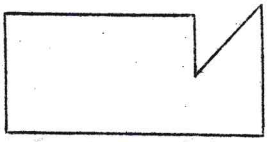


171.5 cm^2
3.5 u



196 cm^2

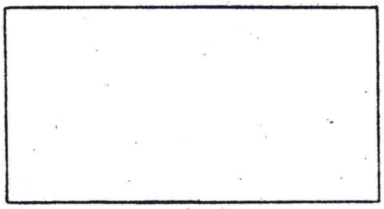
4 u



367.5 cm^2

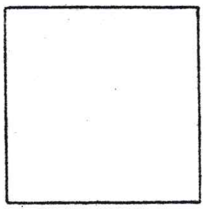
7.5 u

2) Unidades no convencionales (Escala 1:2.8)



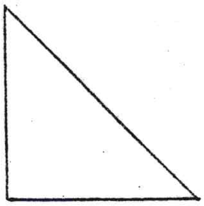
2 u

café



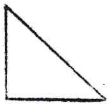
1 u

naranja



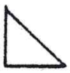
$\frac{1}{2}$ u

rosa



1/8 u

café

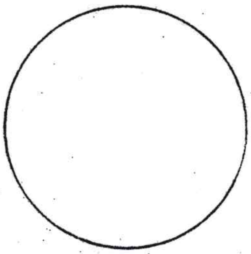


1/6 u

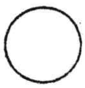
Naranja

1/32 u

Rosa



Diam= 6 cm



Diam = 2.2 cm

ANEXO 2.

LAS DIFICULTADES EN EL USO DE LA REGLA

La regla graduada es el instrumento de medición por excelencia en la escuela. Se exige entre los útiles escolares desde primero hasta sexto grado y los niños recurren a ella frecuentemente. Pero para usar este instrumento eficientemente sería necesario entender la forma en que se construye su graduación.

Durante las entrevistas, como se ha venido señalando, los niños recurren muy frecuentemente al empleo de la regla, sea para medir longitudes (en los procedimientos de cálculo de áreas o fuera de éstos), sea para medir directamente áreas mediante procedimientos inesperados.

Sin embargo, la forma en que la utilizan manifiesta diversas dificultades y errores provenientes del desconocimiento de la manera en que está construída la graduación y del significado de las unidades que la constituyen.

Aunque las dificultades observadas son tan interesantes e ilustrativas que debemos sugerir un estudio específico sobre el particular, aquí se presenta una síntesis de las observaciones más interesantes hechas durante las entrevistas (*).

La regla es considerada por los niños de varias maneras distintas:
La primera es considerarla como patrón o unidad, formando un to

- - - - - - - - -

(*) En algunas de estas observaciones se siguieron los criterios de análisis sugeridos en la investigación presentada en "Analyse d'une sequence de Leçons sur la mesure des longueurs en CE1", de Annie Bessot y Madelein Eberhard.

do sin tener en cuenta nada que se refiera a las graduaciones.

La segunda manera es considerarla como un conjunto de números, a los que corresponden marcas, pero sin tomar en cuenta la relación de distancia entre las marcas.

Una tercera forma es la consideración de la regla como iteración de una unidad (en general el centímetro).

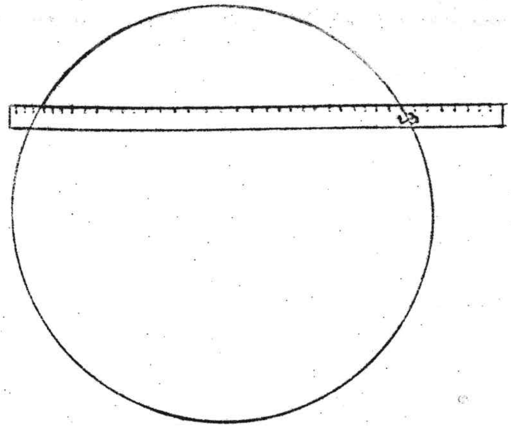
No hay ninguna duda de que estos modelos coexisten en la mente del niño, pero algunos procedimientos nos hablan de la utilización privilegiada de algunos de esos modelos.

Así, se distingue claramente la segunda concepción de la tercera por la utilización no sistemática de la marca del cero al principio de lo que se desea medir. Este es uno de los problemas más comúnmente observados. Los niños hacen coincidir algunas veces la orilla de lo que miden con la marca del cero, otras con la del número uno y otras más con la orilla misma de la regla (las reglas suelen tener un pedacito libre antes de la primera marca) y a veces ignoran las marcas y hacen coincidir el lugar donde está impreso el número. Veamos algunos ejemplos:

<u>Rubén</u> (8:0) Para medir el terreno circular ¿Qué te haría falta?

Ru: (toma una regla y mide varias cuerdas paralelas) Veintiseis, veintisiete, veintiocho, veintisiete, veintitres (intenta correr en cada ocasión el ancho de la regla, pero sin marcarlo).

Le pido que me señale cada vez cuál pedazo está midiendo. En cada ocasión me señala el pedazo que queda cubierto con la regla. Algunas veces hace coincidir el cero con la orilla, y otras veces sube o baja la regla un poco, para hacer coincidir el número con la otra orilla del terreno;



le pregunto por qué lo hace así.

Ru: No importa, porque el que mide es acá (señala el número en en otro extremo)

Puede notase en este ejemplo la importancia dada a la graduación, independientemente de la distancia implicada.

Exp: ¿Qué harías con esos números?

Ru: (Se queda callado)

Exp: ¿Crees que serviría sumarlos?

Ru: No... digo sí para que se junte todo.

Exp: ¿Qué son esos numeritos? Por ejemplo aquí, ¿qué midió 27? ¿qué con los 27?

Ru: Son rectángulos.

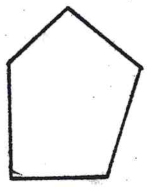
Exp: ¿De qué tamaño?

Ru: De un centímetro. (Dibuja con ayuda de la regla un rectángulo de medio centímetro de largo y muy angostito:)

(Le hago la suma. Le pregunto si con 153 de los rectángulos que me dibujó se llenaría todo el terreno).

Ru: No.

Ricardo (8:9)
Le pido que elija un terreno para medir y elige



Exp: (Me pide una regla) ¿Te sirve alguna otra cosa?

Ri: Sólo eso me sirve. (Mira las graduaciones y dice:)

Ri: Aquí está el cero (en el lado de los centímetros. Entonces la coloca en la orilla del terreno -por fuera- y hace coincidir el número uno con la orilla del terreno, mirando hasta dónde llega).

Ri: Este diez y ocho. (Gira el cartón, dejando la regla en la misma posición para medir otro lado).

Ri: Este midió 22 (Anota el 18 y el 22 y los suma. Sigue así hasta medir los cinco lados y va anotando las sumas: 40 + 19 = 59; 59 + 22 = 81; 81 + 16 = 97, diciendo cada vez en voz alta la medida y el nuevo resultado).

Exp: ¿Por qué empiezas en el uno? (cuando tiene colocada la regla)

Ri: Porque si lo pongo acá (señala el cero) entonces me como un centímetro. Mide noventa y siete.

Exp: ¿97 qué?

Ri: 97 centímetros... Si tuviera... (cuenta con los dedos)... si tuviera tres sería un metro.

Exp: ¿Cómo un metro?

Ri: Porque si llegara a cien tuviera un metro.

Víctor (7:6) es un caso muy ilustrativo del permanente conflicto entre iniciar con la marca del cero, con la del uno o con el principio de la regla, además de mezclar la medida de longitudes con las consideraciones de superficie. Para medir el terre no rectangular (21x28 cm.) le pregunto: ¿qué te sirve?

Vi: Una regla.

Le doy una regla, y le muestro las dos cajas con materiales. (Pone la regla a lo largo -por dentro-, haciendo coincidir el cero con el principio del terreno. Usa la graduación en centímetros; luego hace lo mismo con el ancho).

Vi: Mide 28 de ese lado y 21 de este.

Exp: ¿28 qué?

Vi: 28 metros... no, no son metros.

Exp: ¿Por qué no? ¿Qué son?

Vi: (No me contesta) Y son 21 de este lado.

Exp: ¿Y ahora ya sabemos cuánto pasto?

Vi: Es que necesito rayarlo así (señala líneas paralelas por dentro)

(Marca tiras a lo largo del terreno, del ancho de la regla. Le sobra una tira más angosta que la regla que está usando. Toma entonces una regla más angosta, pero no la usa en el espacio que le sobró, sino que la pone sobre las líneas que trazó antes. Hace coincidir ahora el número uno con la orilla del terreno y marca hasta el 20 -la regla angosta mide un poco más de 20 cms,-; luego la corre, haciendo coincidir el número uno con su marca. La orilla de la hoja está a los 9.7 cms., pero Víctor reacomoda la hoja para que llegue al número diez).

Vi: Son como diez centímetros más

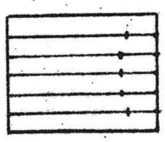
Exp: ¿Por qué aquí pones el uno al principio?

Vi: A mi me gusta empezar desde el uno, se me hace más fácil

Exp: ¿Y el pedacito de aquí (le señalo del 0 al 1), no cuenta?

Vi: No, es más fácil desde el uno.

Repite el procedimiento para cada una de las líneas que trazó. En cada caso dice que mide 20 y diez:



Vi: Ahora tengo que medir este lado (el ancho del terreno. Coloca la regla angosta -de 20 cms- transversalmente y observa)

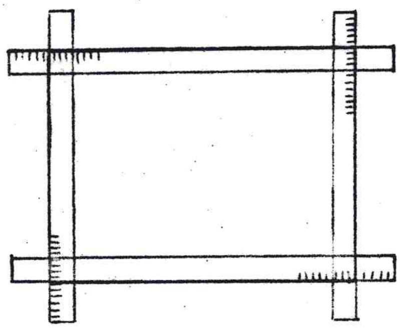
Vi: No, ahora me sirve mejor la otra (regla ancha de 30 cms que usó antes.

Usa nuevamente el ancho de la regla, hasta cuadricular el terreno. Luego mide cada línea, empezando ahora en el cero).

Vi: Mide 21 (Lo va diciendo cada vez que mide una línea).

Exp: (Al terminar) ¿Ya sabes cuánto mide el pasto?

Vi: No, necesito ponerlas así (Coloca la regla de 30 cms a lo largo, la regla de 20 cms perpendicularmente, y luego busca otras dos reglas hasta obtener



(Hace coincidir indistintamente el cero o el uno sea con la orilla del terreno, sea con el lado interior de la úlrima regla que colocó. Cuenta los centímetros, siguiendo el conteo al llegar a las esquinas, comenzando por el número uno de la siguiente regla, de manera que a veces cuenta centímetros encima de la regla que ya contó y a veces no).

Vi: Mide 94 metros.

Otro problema grave en la utilizacipon de las reglas es el que se refiere al conocimiento y comprensión de las unidades ahí utilizadas, de lo cual hemos hablado en la sección sobre convencionalidad de la medida. Veamos a continuación algunos ejem plos específicos de las unidades de longitud:

Oswaldo (8:9) Para este terreno 28x21 cms ¿con qué lo quieres medir?

O: (Coloca una escuadra por fuera, midiendo el largo del terreno. Voltea la escuadra para que quede en el borde del terreno el lado de la escuadra graduado en pulgadas. Como la escuadra es más corta que el terreno, pone su dedo en la marca del siete y corre la escuadra. El pedazo restante mide aproximadamente 3 pulgadas)

O: Mide diez pulgadas.

Exp: ¿Diez pulgadas?

O: ... diez... centímetros.

Exp: ¿Son pulgadas o son centímetros?

O: Centímetros.

Exp: Estos (le señalo en la graduación de la escuadra) ¿son pulgadas o centímetros?

O: No, son centímetros.

Exp: ¿Y con este lado (le señalo el graduado en centímetros), puedes medirlo?

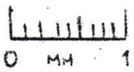
O: No, estas (pulgadas) son centímetros, y los chiquitos son pulgadas. Mira, de aquí a aquí (me señala una pulgada) es un centímetro, y aquí otro, y así.

Exp: Mira qué dice aquí (Le muestro en la escuadra; junto a la graduación dice "pulgadas" y "centímetros"

O: ¡Ah!... entonces éstos son centímetros... y las pulgadas son más grnades que los centímetros... entonces con los centímetros (continúa midiendo, pero ahora con el lado gradudado en centímetros)

Rocío (12:6)

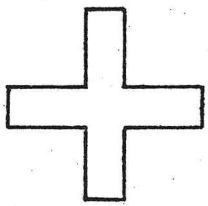
Exp: ¿Me podrías dibujar un centímetro?

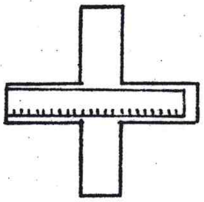
Ro: (Dibuja sin utilizar la regla una serie de marcas sin considerar el número de marcas ni tomar en cuenta la distancia) 

Exp: ¿Y cuál es ahí el centímetro?
Ro: (Me señala en la regla) De aquí, donde empieza, hasta el uno, y del uno al dos, y de aquí (2) aquí (2.5).
Le pregunto si el espacio entre el uno y el dos es igual al 2 - 2.5 (señalándoselo en la regla).
Ro: Sí

Víctor (7:6) ha estado cubriendo los terrenos con figuras, para después medir con la regla.
Exp: ¿Pero las figuritas miden el terreno?
Vi: No, lo tengo que medir con números y con la regla.
Le pregunto por qué usa el lado de los centímetros y no el de las pulgadas, señalándoselos en la regla.
Vi: Porque aquí (pulgadas) están por grandes, están muy separados
¿Y no sirven esos para medir?
Vi: Para mi no, porque están muy separados.
Exp: ¿Para medir tienen que estar muy juntitos?
Vi: Un poco
Exp: (Le enseño las marcas de la "regla curva") ¿De ese tamaño sí sirven? (Las marcas están separadas aproximadamente un centímetro y medio)
Vi: Sí, pero para uno redondo

Manuel (11:11) Le pregunto cómo mediría el terreno



Pone la regla así  pone una marca en el

número 30, corre la regla y mide el pedazo restante

M: Mide siete punto dos, entonces son treinta y nueve (30 + 7 + 2)

(Mide de la misma manera el otro brazo. Anota 39 x 39 y hace la cuenta)

M; Mide 1511

Exp: ¿1511 qué?

M: 1511 centímetros... Ah, no, 1511 metros... cuadrados.

Exp: Esta regla, ¿en qué mide?

M: ¿Cómo en qué mide?

Exp: Si, lo que marca la regla, ¿qué son?

M: Ah, entonces son centímetros cuadrados

Exp: ¿Me podrías dibujar uno?

M; No se dibujarlo (Me señala en la regla la distancia de un milímetro)... Es un cuadrito así, de este tamaño

Exp: ¿Ese sería un centímetro cuadrado?

M; A ver, espérame... ¿cuáles son los centímetros?... aquí, el del 18 hasta el 19 es un centímetro? ¿o el que está a la mitad?

Exp: ¿Tú cuál crees que sea?

M: El del 18 al 19

Exp: Ajá

M: Ah, entonces es un cuadrito que mide eso, un centímetro (Dibuja un rectángulo de un centímetro por aproximadamente medio centímetro)

Exp: ¿Por dónde mide un centímetro?

M: Por aquí ¿No? (señala el lado de 1 cm)
Exp: ¿Ese es un centímetro cuadrado?
M: Si

Como puede verse aquí, no sólo hay problemas con las unidades cuadradas de área, sino que las dificultades se inician con las unidades legales de longitud.

Rodrigo (8:7) (ha mencionado los centímetros; le pido que me dibuje uno)
Ro: Aquí mide 27 centímetros (me señala en la regla el número 27)
Exp: Pero quiero que me dibujes un centímetro solito.
Ro: Ese tiene 100 (me señala el metro)
Exp: ¿Cien qué?
Ro: Centímetros.
Exp: (Le señalo en la regla un centímetro comprendido entre mis uñas) ¿Cuánto mide ese cachito?
Ro: Diez (cuenta los milímetros)
Exp: ¿Diez qué?
Ro: Diez centímetros.

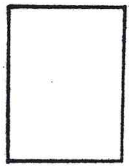
Desde otro punto de vista, hemos analizado ya que la regla puede ser utilizada por los niños lo mismo como un instrumento de medida de longitud que como uno que mide directamente áreas cuando se le usa para cubrir una superficie.

En este segundo caso, se observó que la regla se utiliza como un patrón-unidad (primera concepción), sea sin tomar en cuenta las graduaciones o bien utilizando éstas, según puede distinguirse en los ejemplos siguientes (algunos de ellos ya citados)

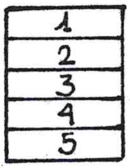
Erika (7:6)
¿Cómo podrías medir este (21x28 cm) con la regla?
E: Es que ya me enseñaron, pero no me acuerdo.

Erika utilizó anteriormente la regla para otros terrenos, pero al pedirle uno de los que supone que ya le enseñaron a medir en la escuela, se resiste a utilizar sus propios recursos.

Al insistirle, superpone la regla, sin hacer coincidir un número en particular ni la orilla de la regla:



Luego marca



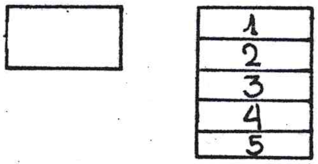
E: Son 1, 2, 3, 4, 5 (Los pedazos 1 al 4 tienen el ancho de la regla; el 5 le quedó más angosto)

Exp: ¿Cinco qué son los que contaste?

E: Cinco rectángulos

Exp: ¿Son iguales todos los rectángulos que contaste?

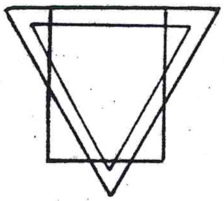
E: No, son más delgaditos (señala el 5) (Toma un rectángulo que usó antes para cubrir y lo coloca al lado del terreno marcado. Observa que esos rectángulos tienen el doble de ancho que sus marcas).



E: Mide dos de estos... Si mido con esos serían 2 (señala rectángulo 1 y 2)... 2 (3 y 4) y este pedazo, serían como dos y medio.

Exp: ¿Y las escuadras, cómo las usarías? (Le muestro una) ¿Te sirven para medir el pasto?

E: Pues igual. (Toma la escuadra y la coloca)



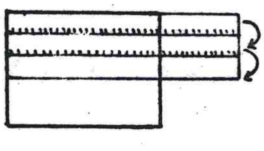
(Marca con el lápiz el ancho de la escuadra, y la baja esa distancia, y así sucesivamente, contando el número de veces que corre la escuadra hasta cubrir toda la superficie)

Rubén (8:0)

Por ejemplo el terreno rectangular (21x28 cms) ¿con qué te gustaría medirlo)

Ru: Con una regla (elige una ancha, de 30 cms de largo. Hace coincidir la orilla del terreno con la marca del 30, luego mira hacia atrás, hasta el uno.
Ahora coloca la regla en la orilla -antes del cero-)

Ru: Mide 27 (Va girando la regla -sobre su largo- y cada vez dice:)



Ru: Mide 27... también 27... también 27 (hasta llegar al otro extremo del terreno.

Exp: ¿Cuántas veces midió 27?

Ru: Tres (en realidad fueron cuatro)

Exp: ¿Y ya lo mediste todo?

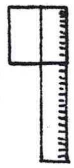
Ru: Si, todo su pasto

Rodrigo (8:7) ¿Y si midieras este terrenito? (4 x 5 cms.)

Ro: (Pone la regla graduada en centímetros encima; la regla tiene 3.5 cms de ancho, de manera que le queda sin cubrir solamente un espacio de 0.5 cms por 5 cms)

Ro: Mide cinco metros chiquitos

Exp: (Le doy un terreno de 7 x 7 cms) ¿Cuánto mide su pasto?



Ro: (Pone la regla encima, a partir de cero, y lee:)

Ro: Siete (Marca el ancho de la regla, y la vuelve a colocar abajo, es decir cubriendo la parte que le faltaba) Mide siete y siete, son catorce centímetros.

Exp: ¿centímetros?

Ro: Metros chiquitos

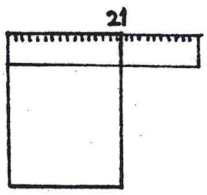
Exp: ¿Los centímetros son metros chiquitos?

Ro: Sí, mira (me señala en la regla la graduación en cms) están chiquitos

Exp: Y en este terreno (14 x 21 cms) ¿Cuánto mide el pasto?

Ro: (Pone la regla, igual que antes) Mide 21 centímetros

Exp: ¿Y no importa que sobre esto? (Le muestro la parte sin cubrir por la regla)



Ro: Sí, sí importa

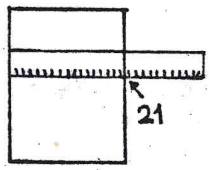
Exp: ¿Entonces cuánto mide el pasto?

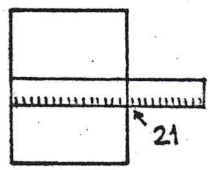
Ro: (Corre la regla hacia abajo, marcando su ancho; lo repite hasta llegar al otro extremo del terreno. Registra 21 + 21 = 42; 42 + 21 = 63; 63 + 21 = 84

Ro: Ochenta y cuatro

Exp: ¿Ochenta y cuatro qué?

Ro: Metros... ¡centímetros!





También utilizada como patrón para medir longitudes la regla ofrece nuevas dificultades. Difícilmente el objeto a medir mide lo mismo que la regla. Si el objeto es menor que la regla se requiere considerar solamente una parte del patrón, y si en cambio el objeto es mayor, se requiere iterar el patrón, todo lo cual exige el conocimiento de la forma en que se construyó la graduación. Si la regla midiera lo mismo que el objeto, la cosa sería mucho más fácil, como lo ilustra el caso de Rocío (12:6)

Exp: ¿Y este (21 x 28) lo podrías medir con la regla?
Ro: Sí, este sí se puede. Ponía aquí la regla y vería cuánto hacía de ancho.
Le doy la caja con reglas y otros instrumentos. Toma una regla angosta y la coloca sobre el lado de 28 cms. La cambia por otra regla más gruesa y luego por una tercera.
Exp: ¿Por qué no te sirven?
Ro: Porque no miden exacto los treinta centímetros (Todas las reglas que ha usado hasta ese momento son de treinta centímetros; se entiende que está buscando una regla de 28 centímetros de largo -para que coincida con el largo del terreno- o una que marque treinta centímetros en el límite del terreno, para que el terreno mida treinta centímetros)
Ro: Estas se pasan,no me resulta, da 27 (Ro coloca la orilla del terreno en el número 1)
Prueba con una escuadra -con el lado graduado de 18 centímetros.
Ro: No, esta no me sirve, es de 18.
Toma una regla rota -le falta del cero al ocho-, pero no le alcanza para todo el ancho; la quita
Ro: Lo que quisiera aprender es a medir el este, mira (me muestra el transportador) el este de aquí (señalando la graduación)
Prueba varias escuadras en el ancho del terreno
Ro: No, nadie me mide exacto

Toma una regla de 20 cms, la pone, y sin marcar hasta dónde llegó la corre lo necesario para que marque 10 -30 en total- al final del terreno. Usa una escuadra con el lado marcado de 13 centímetros y la corre hasta el final del terreno.

Ro: Trece, trece... no, no me da tampoco la escuadra (no en la marca del 13)

Vuelve a tomar la regla angosta y la pone.

Ro: Mide 27...28, son 28 (Ahora la coloca a lo ancho y dice:) Mide 21.

Exp: ¿Y estas reglas, aunque estén más largas que el terreno, sirven para medirlo?

Ro: (Toma otra regla de 30 centímetros y verifica sus mediciones (-28, 21-)

Ro: Sí, miden lo mismo

Exp: ¿Aunque le sobren pedazos de la regla?

Ro: Sí, porque ninguna me da exacto.

Exp: Y una regla más cortita como esta (20 cms) ¿Te sirve para medir el terreno?

Ro: (La pone sobre uno de los lados) No, no sirve porque no alcanza para los 30 para medirlos, y si por ejemplo aquí me resulta 20 (pone una marca en el 20) y luego la volvemos a poner, son ocho ¿Ves?

Exp: ¿Cuánto midió con esa chiquita?

Ro: (Repite el procedimiento) Da 28

Exp: Entonces esa, ¿sirve? ¿da lo mismo cualquier regla?

Ro: Con unas da, pero con otras no.

Exp: ¿Por qué con algunas no?

Ro: Por ejemplo con esta escuadra (graduada 13 cms) da 13, y 13 no me da, no se puede.

Exp: ¿Por qué?

Ro: Porque no tiene los centímetros exactos

Exp: ¿Y cómo se mide algo larguísimo, como el patio de la escuela? ¿cómo lo harías?

Ro: Sólo con un metro

Exp: ¿como de qué tamaño es un metro?
(Me enseña con los brazos, buena aproximación)
Exp: ¿Y eso alcanza para todo el largo del patio?
Ro: No
Exp: ¿Entonces cómo le harías?
Ro: Dejaba una marquita donde ya había medido, y con ese metro lo ponía otra vez y lo vuelvo a medir, y otra marquita y lo vuelvo a medir.
Exp: ¿Y con esa regla no se puede hacer lo mismo?
Ro: No, no se puede

Es claro que Rocío tiene un gran conflicto en medir con un instrumento que no mide lo mismo que el objeto, y que no tiene presente la interación de unidades en el uso de la regla.

Finalmente, al medir con regla también se presenta el problema del conteo y la aproximación. Veamos qué hacen los niños cuando el objeto no mide un número entero de unidades:

<u>Manuel</u> (11:11), como citamos un poco más arriba, pone las reglas sobre la cruz para medir su largo y marca hasta el número 30, corre la regla y mide el pedazo restante y dice:

Ma: Mide siete punto dos... entonces son 39 (30 + 7 + 2)

En este caso se da el conteo de unidades como iguales, sin considerar sus diferencias, exactamente como lo hemos descrito para el caso de unidades de área. Un caso muy similar es el de:

<u>Oswaldo</u> (8:9). Para medir el terreno rectangular (21 x 28 cm) mide el largo colocando una escuadra por el lado graduado en centímetros. Marca a los 19 centímetros y corre la escuadra para medir el resto (8.5 cm) y dice:
O: Mide 24 (19 cm + 5mm)
Exp: Pero a ver, aquí tienes 1, 2,... 8.
O: (Interrumpe) Pero aquí cuando está en medio es cinco.

Exp: Entonces en total...
O: Veinticuatro
Exp: ¿19 + 5?
O: Si, son veinticuatro.
Exp: ¿Y este pedazo no se suma? (0-8 cm)
O: Sí, si se suma, entonces son 19 y 5, 24 y tengo que sumarle los 10 de aquí (10 de cada uno de los 8 centímetros), son 10, 20, 30...70. (Registra 70 + 24 = 94). Son 94.
Exp: ¿Entonces ese campo mide 94, o todavía no terminas?
O: Ah no, me falta (pone la escuadra a lo largo del otro lado del terreno. No lo mide, sólo pone la escuadra). Son 94 y 94 (los suma) Son 188.
Exp: ¿Ya?
O: No, me faltan estos (señala los dos lados cortos. Pone la escuadra, marca hasta el 19 y la corre. Mide 20.4). 19 + 10 (de 1 centímetro más) son 29 + 4 (de 4 mm más) son 33.
Exp: ¿Cuándo mediste acá (19) contaste los chiquitos?
O: Sí, si las conté, son 19 pulgadas de esas... digo centímetros.
Exp: ¿Había 19 chiquitas?
O: No, las chiquitas no las conté, son 19 de las grandes.

Como se ve hay conciencia de las diferencias entre las unidades pero esta diferencia no es considerada para efectos de cuantificación de la magnitud.

Las observaciones aquí relatadas son más que suficientes para evidenciar las insólitas situaciones a las que conduce el empleo de la regla anterior a la construcción de las nociones que ese instrumento vehiculiza. La regla es un instrumento de medición que concretiza una serie de convencionalidades respecto a la medición de longitudes, convencionalidades que el niño asimila adaptándolas y deformándolas en función de sus propias ideas de la longitud y sobre la medición.

Trabajar escolarmente sobre las nociones de longitud y medición de la longitud, así como sobre el uso mismo de un instrumento graduado se hace claramente indispensable, más aún el trabajo de construcción de un instrumento graduado implica un proceso de reflexión sobre la magnitud considerada y sobre la actividad de medirla.

B I B L I O G R A F I A

BIBLIOGRAFIA

AEBLI, Hans. Una didáctica fundada en la psicología de Jean Piaget. Buenos Aires: Kapeluz, 1958.

BESSOT, Annie y M. Eberhard. Analyse d'une séquence de leçons sur la mesure des longueurs en CE1. --Séminaire de Recherche Pédagogique.-- no. 22 (marzo 1981). -- (IREM DE GRENOBLE)

BOURBAKI, N. Eléments d'Histoire des Mathématiques. Paris : Press Universitaires de France, 1969.-- (Histoire de la Pensé IV).

BRUN, Jean. Pedagogía de las matemáticas y psicología : análisis de algunas relaciones. En Infancia y aprendizaje. -- no. 9 (enero, 1980).

DANIAU, Jean y Suzanne. Initiation mathématique. Activités mathématiques des enfants de 5 à 6 ans. Paris : CEDIC, 1975.

DIENES, Z.P. La mathématique vivante 2 : relations et fonctions. Paris. OCDL, 1972.

DIENES, Z.P. y E.W. Golding. Los primeros pasos en matemáticas 3 : exploración del espacio y práctica de la medida. México : Varazen.

FLAVELL, J.H. The developmental psychology of Jean Piaget. Buenos Aires : Paidós, 1968.

GALVEZ, Grecia y Edwin Salazar. La medición espontánea de distancias por niños de 5 a 10 años. En: Revista Orbita, 8. Santiago de Chile, 1971.

GOW, James. A short history of greek mathematics. Nueva York : Chelsea.

HARVEY, H.R. y B.J. Williams. Aritmética azteca : notación posicional y cálculo del área. En Science 210, octubre 1980 pp. 499-505.

HIRSTEIN, J.J. y otros. Students misconceptions about area measure. En Arithmetic teacher.--Vol. 25, no. 6 (1978).

Institut National de Recherche Pédagogique, ERMEL. Apprentissages mathématiques a l'ecole elementaire. Paris : (Cycle Moyen, Vol. 2).

Instituto de Investigaciones en Epistemología y Psicología. El aprendizaje de la métrica y el espacio : perímetro y superficie. Buenos Aires : IPSE, 1975. --(Serie Ateneos, 1).

KULA, Witold. Las medidas y los hombres. 2ed. México, Siglo XXI, 1980.

Ministerio de Educación del Gobierno de Québec. Guide pédagogique. Fascicule G: Mesures. Montreal : El Ministerio, 1980.

MORENO, Luis y Guillermina Waldegg. Geometría : fase de captación. México : CIEA-IPN, Sección matemática educativa, 1983.

MYX, Andrés. 6 thèmes pour 6 semaines. Paris : CEDIC, 1975.

National Council of Teachers of Mathematics. Medida. México : Trillas, 1974. --(Temas de matemáticas, 15).

OBUJOVA, L.P. Análisis experimental de algunos "fenómenos Piaget". Moscú : Facultad de Psicología de la Universidad de Moscú, 1967.

PASTERNAC, Marcelo. El método experimental y el método clínico. --En Psicología : ideología y ciencia. México : Siglo XXI, 1977.

PIAGET, Jean y otros. La géométrie spontanée de l'enfant. Paris: PUF, 1973.

------. El método clínico. --En Lecturas de psicología del niño/comp. Juan Delval.-- México : Alianza, 1978.

------. Observaciones sobre la educación matemática. --En La enseñanza de las matemáticas modernas.-- México : Alianza,

------. Psicología de la inteligencia. Buenos Aires : Psiqué, 1960.

PIAGET, Jean y otros. Relations entre surfaces et périmètres des rectangles. En Recherches sur l'abstraction réfle-chissante. --Vol. II.-- Paris : PUF, 1977.

PIAGET, Jean y B. Inhelder. La représentation de l'espace chez l'enfant. Paris : PUF, 1977.

PIAGET, Jean. Introducción a la epistemología genética. El pensamiento matemático. Buenos Aires : Paidós, 1978.

Primary mathematics : A further report for the Mathematical Association. -- (Proyecto Nuffield, s.p.i.)

PUIG ADAM, Pedro. Curso de geometría métrica : (Tomo I : Sus Fundamentos). Madrid : Biblioteca Matemática, 1969.

RICCO G., Rouchier. Mesure du volume : difficultés et enseignement dans les premières anées de l'enseignement secondaire. En Actas del Quinto Coloquio del Grupo Internacional PME. -- Grenoble, 1981.

ROGALSKY, Janine. Acquisition des notions relatives a la dimensionalité des mesures spatials (longueur, surface). En Recherches en didactiques des mathématiques. -- Vol. 3, no. 3 (1982). -- Paris : Le Pensée Sauvage.

SAIZ, Irma y otros. Sistemas decimales de medición. Departamento de Investigaciones Educativas. Curso para la maestría en matemática educativa, Tixtla, Gro. México, julio 1981.

SINCLAIR, H. y M. Bovet. Aprendizaje y estructuras del conocimiento. Madrid : Morata, 1981.

VERGNAUD, Gerard. Acquisition des "Structures multiplicatives" dans le prémier cycle du second degré. RO no. 2, marzo 1979. -- (IREM-Orleans).

VERGNAUD, Gerard y otros. Didactique et acquisition du concept de volume. En Récherches en didactique des mathématiques. -- Vol. 4, no. 1 (1983). -- (Grenoble, Francia).

VERGNAUD, Gerard. L'enfant, la mathématique et la realité. Berna : Peter Lang, 1981.

VINH-BANG y Eric Lunzer. Conservations spatiales : XIX. Paris: PUF, 1965.

El jurado designado por el Departamento de Investigaciones Educativas del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, aprobó esta tesis el día 16 de marzo de 1984.

M. en C. Irma Elena Sáiz Martín
Director de Tesis y
Profesor Adjunto del Departamento de Investigaciones Educativas

Dra. Emilia Beatriz María Ferreiro Schiavi de García
Profesor Titular del Departamento de Investigaciones Educativas

Lic. en Psc. Grecia María Gálvez Pérez.
Profesor Titular del Departamento de Investigaciones Educativas

Dr. Jesús Alarcón Bortolussi.
Coordinador de Maestría Abierta
Sección de Matemática Educativa,
CINVESTAV-IPN.