

CINVESTAV - IPN
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN
Unidad Guadalajara

UNIDAD GUADALAJARA

**CINVESTAV I. P. N.
SECCION DE INFORMACION
Y DOCUMENTACION**

**CONTROL DE UN PÉNDULO
INVERTIDO GIRATORIO**

TESIS QUE PRESENTA
ALEJANDRO CARRASCO ELIZALDE
PARA OBTENER EL GRADO DE
MAESTRO EN CIENCIAS

EN LA ESPECIALIDAD DE
INGENIERIA ELECTRICA

Guadalajara, Jal., Noviembre de 1998.

CLASIF.:	
ADQUIS.:	TE26-1999
FECHA:	19-10-99
PROCED.:	Repto. Ser
	\$

Bibl.

CONTROL DE UN PÉNDULO INVERTIDO GIRATORIO

**Tesis de Maestría en Ciencias
Ingeniería Eléctrica**

Por:

Alejandro Carrasco Elizalde
Ingeniero Electrónico

Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Occidente, 1992-1996

Becario del CONACyT, expediente No. 116196

Director de Tesis:

Dr. Javier Ruiz León

CINVESTAV del IPN Unidad Guadalajara, Noviembre de 1998.

Índice General

1	Introducción	3
1.1	Estructura de la tesis	5
2	Descripción del sistema	7
2.1	Elementos del sistema	8
2.2	Procesamiento de datos .	9
3	Modelo dinámico del péndulo invertido giratorio	11
3.1	Introducción	11
3.2	Modelo dinámico no lineal del sistema	14
3.2.1	Método de Lagrange	14
3.2.2	Modelo no lineal en variables de estado.	16
3.3	Modelo linealizado	18
4	Control por retroalimentación lineal de estado	21
4.1	Introducción	21
4.2	Diseño de la ley de control	22
4.3	Regulación lineal	28
5	Control por modos deslizantes	37
5.1	Introducción	37
5.2	Condiciones para la existencia de modos deslizantes	38
5.3	Método de control equivalente	39
5.4	Diseño de la ley de control	41
5.5	Seguimiento de trayectoria	48

6 Control Difuso	53
6.1 Introducción	53
6.2 Diseño de la ley de control	54
6.3 Seguimiento de trayectoria	62
7 Conclusiones	i
A Artículo	iii
B Definiciones.	ix

Capítulo 1

Introducción

En los últimos años los sistemas de control automático han adquirido una gran importancia. Los avances en la teoría y práctica del control automático brindan medios para mejorar la productividad, lograr el funcionamiento óptimo de sistemas dinámicos, tiempos menores de producción, una mayor seguridad con sistemas de alto riesgo, etc, por nombrar algunas de las ventajas.

Aunque estas ventajas no se obtienen de manera universal, la meta primaria de un sistema de control automático es por lo general uno o más de estos efectos. Estas tareas que realizan los sistemas de control pueden ser para llevar a cabo desde una simple acción de control, hasta un conjunto de acciones de alta complejidad, haciendo que el estudio de estos sistemas sea complejo. El estudio de la mayoría de los sistemas y procesos a controlar son más dinámicos que estáticos, por lo tanto, sus comportamientos son descritas por ecuaciones diferenciales, y además la mayoría de estas son ecuaciones diferenciales no lineales.

El estudio de estos sistemas ha estado bajo estudio desde muchos puntos de vista como lo son: físicos, matemáticos, ingenieriles y otros campos. Dada la importancia de sus estudios se presentan varias técnicas para controlar este tipo de sistemas, cada una de ellas con diferentes estructuras de control.

Un aspecto fundamental del control automático es el de verificar que la teoría desarrollada sea aplicable a sistemas reales. Un primer paso en este proceso es entonces aplicar esquemas sofisticados de control a experimentos

de laboratorio, para comprobar qué tan bien funcionan en situaciones reales. Un experimento particularmente favorecido en aplicaciones de control es el llamado péndulo invertido.

Los péndulos invertidos son clásicos en aplicaciones de control por las características que presentan, como son: no linealidad, inestabilidad, fase no mínima, etc., lo cual los hace muy convenientes para probar técnicas y esquemas de control. Estudios relativos al modelado y control de péndulos invertidos pueden encontrarse en [7] y en [3]. En [7] se presenta el control de un péndulo invertido sobre un riel, haciendo desde el modelado del sistema hasta el diseño de un control óptimo por medio de retroalimentación de estado. En [3] se modela un péndulo invertido y se diseña el control por retroalimentación de estado, llevando el péndulo a la posición vertical.

Un tipo especial de péndulo invertido es el llamado péndulo invertido giratorio, el cual consiste en un experimento similar a el clásico péndulo invertido, pero en este caso la trayectoria es circular. Además de las características ya mencionadas este sistema pertenece al tipo de sistemas conocidos como subactuados, los cuales son sistemas mecánicos que tienen un mayor número de eslabones o uniones que de actuadores, y cuyo estudio es importante en aspectos de robótica, por ejemplo. Algunos resultados interesantes con respecto a este tipo de sistema se realizan en [2] que presenta el control del péndulo en base a una aproximación lineal del modelo y en [1] el cual presenta un control robusto sobre un doble péndulo invertido giratorio.

El objetivo principal del presente trabajo es probar diferentes esquemas de control sobre el péndulo invertido giratorio. Desde este punto de vista, nuestro trabajo puede considerarse como la aplicación de la teoría de control a un caso particular de estudio.

Básicamente, los objetivos de control que se persiguen son lograr la estabilización del péndulo en posición vertical y hacer seguimiento de trayectoria. Estos son objetivos básicos del cualquier aplicación de técnicas de control a un sistema real, ya que se busca hacer que la salida del sistema se comporte de un modo deseado. En el primer caso se pretende que el péndulo se mantenga en posición vertical, aún en presencia de pequeñas perturbaciones; de hecho es el mismo problema que se tiene en el lanzamiento de un cohete espacial, para el caso del péndulo clásico. El problema de seguimiento de

trayectoria es un problema clásico de control, donde se pretende que la salida del sistema siga a una señal de referencia que generalmente es generada por un sistema o un modelo externo.

Las técnicas de control que utilizamos para lograr los objetivos anteriores son: retroalimentación lineal de estado, modos deslizantes y control fuzzy. Dichas técnicas se aplicarán primeramente en simulación y después sobre el sistema real, el cual es un prototipo que fue diseñado y construido expresamente para este trabajo, en el laboratorio de control de la Unidad Guadalajara del CINVESTAV.

Como veremos en el desarrollo de la tesis, los resultados obtenidos fueron en general satisfactorios, lográndose los objetivos del trabajo. El análisis de los resultados obtenidos utilizando cada una de las técnicas de control se realiza en los capítulos correspondientes.

Un objetivo extra del presente trabajo, fue también equipar al laboratorio de control con un experimento donde los estudiantes pueden aplicar los conocimientos aprendidos en clase. También como resultado del trabajo desarrollado se publicó el artículo “ Control de un Péndulo Invertido Giratorio Usando Retroalimentación Lineal de Estado, Modos Deslizantes y Fuzzy ” el cual participó en la “IV Conferencia de Ingeniería Eléctrica (CIE 98) ” realizada en la Ciudad de México.

1.1 Estructura de la tesis

La estructura general de la tesis es la siguiente:

En el Capítulo 2 se presenta una descripción general de las partes que componen el péndulo invertido giratorio, tanto las partes mecánicas como eléctricas.

Un aspecto importante en la aplicación de esquemas de control es contar con un modelo adecuado del sistema. En el Capítulo 3 se obtiene el modelo no lineal del péndulo invertido giratorio aplicando las ecuaciones de Lagrange. Después se procede a linealizar el modelo en un punto de equilibrio, esto con objeto de diseñar las leyes de control a partir del modelo linealizado.

En el Capítulo 4 se aplica retroalimentación lineal de estado para estabilizar el péndulo en posición vertical y hacer el seguimiento de una trayectoria deseada. La ley de control se diseña sobre el modelo lineal del sistema. Se muestran aquí también los resultados obtenidos tanto en simulación como en aplicación sobre el sistema real.

Los mismos objetivos de control se persiguen posteriormente utilizando otros esquemas de control. En el capítulo 5 utilizamos modos deslizantes y en el capítulo 6 técnicas de control fuzzy. En cada uno de estos capítulos se presenta el diseño de la ley de control correspondiente y los resultados obtenidos.

En el Capítulo 7 se presentan las conclusiones generales de la tesis y algunos comentarios finales.

En el Apéndice A se presenta el artículo “ Control de un Péndulo Invertido Giratorio Usando Retroalimentación Lineal de Estado, Modos Deslizantes y Fuzzy ” presentado en la Ciudad de México.

El Apéndice B contienen algunas definiciones y conceptos generales de teoría de control que se usan en este trabajo.

Capítulo 2

Descripción del sistema

El sistema bajo estudio es el péndulo invertido giratorio mostrado en la figura 2.1. El péndulo invertido clásico consiste en un carro sobre un riel y el péndulo montado en el carro el cual tienen movimiento limitado. En el péndulo invertido giratorio, el péndulo se encuentra colocado sobre un brazo que tiene movimiento giratorio. El prototipo de este experimento, así como la tarjeta de adquisición de datos y el programa para el control del sistema, fueron diseñados y contruidos en el laboratorio de control de CINVESTAV unidad Guadalajara.

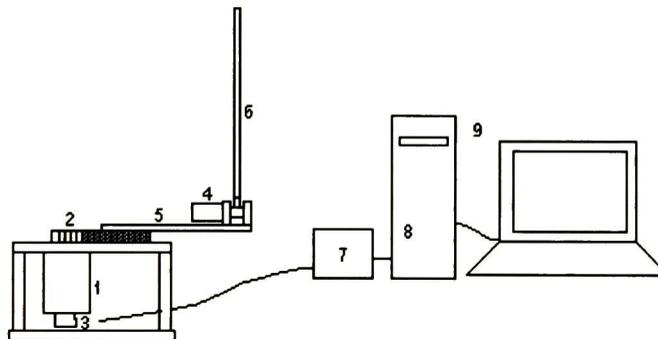


Figura 2.1

2.1 Elementos del sistema

Los elementos que componen al péndulo invertido giratorio son los que a continuación se describen:

(1). El servomotor, el cual es un motor de corriente directa con un “encoder” integrado. Este motor sirve para proporcionar el par que requiere el sistema, y tiene las siguientes características:

Par pico	350 oz-in
Resistencia	1.9 Ohms
Corriente en par pico	24 Amps

(2). Los engranes que proporcionan una ganancia al par dado por el motor.

(3). El primer “encoder” de 500 pulsos por vuelta del motor que nos da la información de la posición del brazo. Este “encoder” es bidireccional lo cual nos indica que podemos saber la dirección en el cual gira el motor y en qué posición se encuentra, esto es posible por los dos canales de salida del encoder. El “encoder” tiene las siguientes características:

Canal	A
Canal	B
Voltaje de entrada (Vcc)	-0.05 a 7 V
Voltaje de salida	-0.05 a Vcc

(4). El segundo “encoder” de 1024 pulsos por vuelta del péndulo, también este encoder es bidireccional, el cual nos dice en qué ángulo se encuentra el péndulo. Con este “encoder” podemos alcanzar una resolución de 0.351 grados, lo que nos permite determinar con una precisión aceptable la posición del péndulo. El “encoder” tiene las siguientes características:

Canal	A
Canal	B
Voltaje de entrada	5, 12 ó 15 V
Voltaje de salida	5,12 ó 15 V

(5). El brazo, es el que sostiene el péndulo y transmite el par del motor al péndulo.

(6). El péndulo, el cual nos interesa controlar y se encuentra sin actuador. Este consta de una varilla de acero-plata.

(7). Una etapa de potencia, la cual proporciona al motor el voltaje así como la corriente adecuada para su funcionamiento. Esta etapa se encuentra fuera de la computadora.

(8). Una tarjeta de adquisición de datos, la cual contiene tres puertos, contadores incrementales/decrementales para los encoders, un convertidor digital-analógico (DAC) de 8 bits para la etapa de potencia, todo esto en una tarjeta insertable en los "ISA Slots" de la computadora.

(9). Una computadora personal, la cual procesa la información de entrada que son los ángulos del péndulo y del brazo, estima las velocidades angulares y calcula la ley de control que se requiere. El desarrollo del programa está en lenguaje C.

2.2 Procesamiento de datos

El procesamiento de datos es una parte importante para el buen funcionamiento del sistema. En la figura 2.2 muestra un esquema de como se hace el procesamiento de datos. En este diagrama se muestra como se hace la transferencia de información del sistema hacia la computadora y viceversa. Básicamente, la información que se procesa son la posición del péndulo, la posición del brazo y el voltaje aplicado al motor.

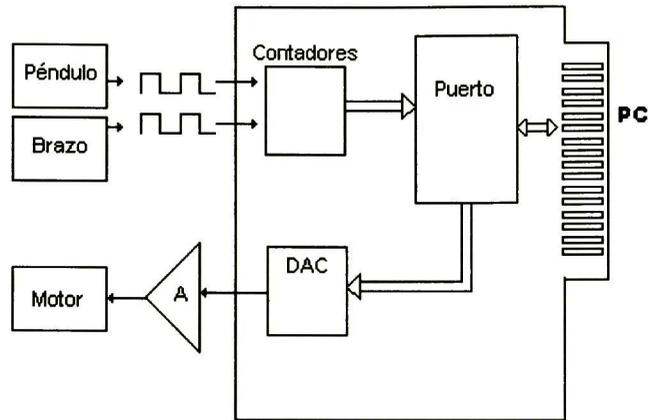


Figura 2.2

La tarjeta de adquisición de datos contiene los contadores, los puertos y el DAC. Los contadores reciben una señal cuadrada de cada uno de los “encoders” que indica en cada pulso un desplazamiento angular ya sea del péndulo o del brazo. Estos contadores tienen que ser bidireccionales y prefijables para poder dar la información de la posición de cada uno de estos “encoders”. Para dar el sentido del giro se ocupa que sean bidireccionales y para obtener una posición absoluta que sean prefijables, así el desplazamiento angular es convertido a una palabra digital la cual es procesada por el programa para proporcionar la ley de control correspondiente.

Los puertos son los intermediarios entre el microprocesador y los periféricos como lo son el DAC y los contadores. El DAC es el encargado de convertir la palabra digital de 8 bits a un nivel de voltaje. El DAC no proporciona la corriente suficiente para alimentar el motor por lo cual se requiere reforzar la corriente que el motor necesita para entregar el par requerido por el péndulo.

Capítulo 3

Modelo dinámico del péndulo invertido giratorio

El primer paso para diseñar un sistema de control es tener un modelo matemático del sistema que se va a controlar. En este capítulo se obtendrá el modelo dinámico del péndulo invertido giratorio. Primeramente se introducen aspectos generales de modelado y se mencionan las técnicas más comunes que se utilizan para obtener el modelo dinámico de un sistema. En la sección 3.2 se aplica el método de Lagrange para obtener el modelo dinámico no lineal del péndulo invertido giratorio para después tener el modelo en variables de estado. En la sección 3.3 se linealiza el modelo no lineal obtenido previamente.

3.1 Introducción

El concepto de modelo matemático se puede definir como la abstracción del objeto físico en una descripción en términos de fórmulas matemáticas. El modelo del sistema es parte importante de cualquier problema de control. Aunque un modelo matemático proporciona solo una aproximación al comportamiento de un sistema real y físico, debe representar lo suficientemente bien al sistema dinámico en estudio.

El modelo matemático de un sistema físico frecuentemente es deseado que sea lo más sencillo posible siempre y cuando pueda proporcionar la sufi-

ciente información para diseñar un control efectivo. Casi siempre se cuenta con dinámicas no modeladas que tienen efectos de orden superior y se debe asegurar que el controlador se comporte apropiadamente en presencia de estas dinámicas no modeladas. Todas las dinámicas no modeladas se pueden agrupar bajo la categoría de perturbaciones a la planta, y no importa qué tan bien se haya modelado un sistema, siempre habrá dinámicas no modeladas que produzcan perturbaciones paramétricas en la planta.

Los sistemas continuos en el tiempo generalmente se expresan en términos de ecuaciones diferenciales. De acuerdo al tipo de ecuaciones diferenciales, el modelo que describe a un sistema puede ser lineal o no lineal. En los modelos lineales podemos aplicar el principio de superposición, el cual establece que la respuesta producida por la aplicación simultánea de dos funciones excitadoras distintas a un sistema relajado, es la suma de las dos respuestas individuales. En un sistema no lineal este principio no se aplica, además de que estos sistemas constituyen la gran mayoría de los modelos físicos. El modelo lineal es más simple que el modelo no lineal, pero no es tan exacto, ya que al linealizar se desprecian términos de alto orden. El uso de un modelo, ya sea lineal o no lineal depende de la precisión que se desee y la complejidad del análisis a usar.

Un sistema lineal cuyas características no cambian con el tiempo, es decir, cuyas propiedades son invariables con traslaciones en el tiempo, se dice que es un sistema lineal invariante en el tiempo. En este tipo de sistemas, los coeficientes de las ecuaciones que describen el sistema son términos constantes, a diferencia de los sistemas variantes en el tiempo, donde dichos términos dependen de la variable de tiempo.

Nuestro objetivo es obtener un modelo lineal invariante en el tiempo para el péndulo invertido giratorio. Para ello procederemos a linealizar un modelo no lineal, el cual se obtendrá aplicando el método de Lagrange.

En la figura 3.1 se muestra el sistema a modelar, que es el péndulo invertido giratorio el cual consiste en un péndulo colocado al final de un brazo giratorio, el cual está actuado por un servo motor. Las variables involucradas se describen en la sección 3.2.1. Físicamente, este sistema es parecido al péndulo invertido clásico, excepto que la trayectoria inducida por el actuador es circular y no lineal, dándole una nueva dimensión al problema.

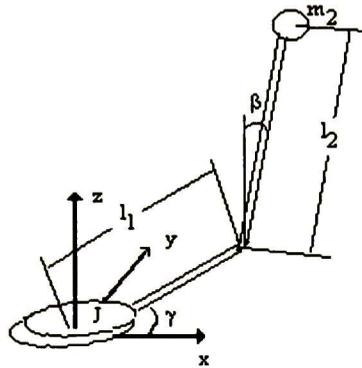


Figura 3.1

Para obtener las ecuaciones que describen el comportamiento dinámico del sistema necesitamos analizarlo con base a las leyes básicas de la dinámica, pero estas pueden ser expresadas de varias maneras diferentes. Las más importantes de estas formas son:

- a) El principio de D'Alembert
- b) Las ecuaciones de Hamilton
- c) Las ecuaciones de Lagrange
- d) El principio de Hamilton

Todas ellas son básicamente equivalentes, si se parte de las leyes de Newton y del principio de trabajo se pueden deducir cualquiera de las formas anteriores. La elección de una de las cuatro formas depende del sistema a analizar. Por ejemplo, las ecuaciones de Newton son adecuadas para la solución de muchos problemas sencillos; las ecuaciones de Hamilton han sido útiles en ciertas aplicaciones, así como en el desarrollo de la mecánica cuántica; las ecuaciones de Lagrange son aplicables a una amplia variedad de problemas, como lo son sistemas mecánicos, eléctricos, electromecánicos, etc.

3.2 Modelo dinámico no lineal del sistema

3.2.1 Método de Lagrange

El método de Lagrange [13] es de manera especial potente y notablemente sencillo como instrumento de solución de una gran variedad de problemas, por esta razón es que se escogió este método para la obtención de las ecuaciones dinámicas del sistema. La ecuación de Lagrange para un sistema está dada por:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = F_r \quad (3.1)$$

donde q y \dot{q} son coordenadas generalizadas, L es el lagrangiano formado por la diferencia entre la energía cinética y la energía potencial, y F_r se denomina fuerza generalizada. Con este método hay tantas ecuaciones, como grados de libertad se tengan.

Los grados de libertad son el número de coordenadas independientes que se requieren para especificar completamente la posición de todas y cada una de las partes componentes del sistema, que en este caso son dos.

Considerando el diagrama simplificado (figura 3.1) la energía potencial y cinética del sistema están dadas por:

$$\begin{aligned} V_{pen} &= m_2 g l_2 \cos(\beta) \\ K_{pen} &= \frac{1}{2} m_2 \left[\left(\dot{\gamma} l_1 + \dot{\beta} l_2 \cos(\beta) \right)^2 + \left(\dot{\beta} l_2 \sin(\beta) \right)^2 \right] \\ K_{base} &= \frac{1}{2} J \gamma^2 \end{aligned}$$

donde J es el momento de inercia de la base, g es la aceleración gravitacional; m_1, l_1, γ son respectivamente la masa, la longitud y el ángulo rotacional del primer eslabon, m_2, l_2, β , son la masa, la longitud y el ángulo rotacional del péndulo. Estas ecuaciones son no lineales y describen la dinámica del péndulo.

El Lagrangiano está dado por :

$$L = K_{pen} + K_{base} - V_{pen}$$

Resolviendo las derivadas parciales de la ecuación (3.1):

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\gamma}} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\gamma}} = m_2 l_1^2 \dot{\gamma} + m_2 l_1 \dot{\beta} l_2 \cos(\beta) + J \dot{\gamma}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\gamma}} \right) = m_2 l_1^2 \ddot{\gamma} + m_2 l_1 l_2 (\ddot{\beta} \cos(\beta) - \dot{\beta}^2 \sin(\beta)) + J \ddot{\gamma}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \beta} = -m_2 l_2 l_1 \dot{\gamma} \sin(\beta) + m_2 g l_2 \sin(\beta)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\beta}} = m_2 l_2 l_1 \dot{\gamma} \cos(\beta) + m_2 l_2^2 \dot{\beta}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\beta}} \right) = m_2 l_2^2 \ddot{\beta} + m_2 l_2 l_1 (\cos(\beta) \ddot{\gamma} - \dot{\gamma} \dot{\beta} \sin(\beta))$$

Las ecuaciones obtenidas son:

$$(m_2 l_1^2 + J) \ddot{\gamma} + m_2 l_1 \ddot{\beta} l_2 \cos(\beta) - m_2 l_1 \dot{\beta}^2 l_2 \sin(\beta) = \tau \quad (3.2)$$

$$m_2 l_2 \cos(\beta) \ddot{\gamma} l_1 + m_2 \ddot{\beta} l_2^2 - m_2 g l_2 \sin(\beta) = 0$$

donde τ es el par.

La ecuación del motor también se debe de incluir en el modelo, para esto se resuelve la malla del siguiente circuito:

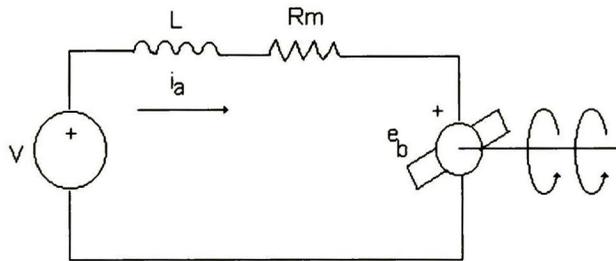


Figura 3.2

El valor de L en motores de corriente directa es pequeña comparada con R_m , por lo tanto la constante de tiempo eléctrica es pequeña y el efecto de L se puede despreciar.

entonces:

$$\begin{aligned} v &= R_m I + e_b, & \tau_m &= k_m I \\ e_b &= k_b \omega, & \tau &= k_g \tau_m \\ \omega &= k_g \dot{\gamma} \end{aligned}$$

donde k_g es la ganancia de los engranes, k_m es la constante del motor, R_m es la resistencia de armadura, k_b es la constante contraelectromotriz y v es el voltaje del motor.

Entonces el par de entrada está dado por:

$$\tau = p_1 v - p_2 \dot{\gamma}$$

con

$$p_1 = \frac{k_m k_g}{R_m} \quad p_2 = \frac{k_g^2 k_m k_b}{R_m} \text{ constantes}$$

3.2.2 Modelo no lineal en variables de estado.

Las ecuaciones dinámicas para el péndulo invertido giratorio pueden ser descritas por la ecuación:

$$D(q) \ddot{q} + C(q, \dot{q}) \dot{q} + G(q) = \tau$$

donde q son las coordenadas generalizadas, $D(q)$ es la matriz de inercias, $C(q, \dot{q})$ es la matriz de coriolis, $G(q)$ son los terminos gravitacionales.

$$\begin{bmatrix} \tau \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\gamma} \\ \ddot{\beta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\gamma} \\ \dot{\beta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix}$$

donde cada término está dado por:

$$\begin{aligned} d_{11} &= m_2 l_1^2 + J \\ d_{12} &= m_2 l_1 l_2 \cos(\beta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d_{21} &= m_2 l_2 l_1 \cos(\beta) \\
d_{22} &= m_2 l_2^2 \\
c_{11} &= c_{21} = c_{22} = 0 \\
c_{12} &= -m_2 l_1 l_2 \sin(\beta) \dot{\beta} \\
g_1 &= 0 \\
g_2 &= -m_2 l_2 g \sin(\beta)
\end{aligned}$$

Escogiendo el vector de estado como $x = \begin{bmatrix} \gamma & \beta & \dot{\gamma} & \dot{\beta} \end{bmatrix}^T$, que son los ángulos del brazo y del péndulo y las velocidades angulares correspondientes, la entrada $u = v$, que es el voltaje aplicado al motor y la salida como $y = x_2$, que es la posición del péndulo, la descripción del sistema puede ser dado en espacio de estado de la forma:

$$\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= f(x) + g(x)u(t) \\
y(t) &= h(x)
\end{aligned} \tag{3.3}$$

donde:

$$f(x) = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ \frac{R_m m_2 l_1 \sin(x_2)(l_2 x_4^2 - g \cos(x_2)) - k_g^2 k_m k_b x_3}{m_2 l_1^2 R_m + J R_m - m_2 R_m l_1^2 \cos^2(x_2)} \\ \frac{\cos(x_2) l_1 (l_1 R_m m_2 l_2 x_4^2 \sin(x_2) - k_g^2 k_m k_b x_3) - R_m g \sin(x_2)(m_2 l_1^2 + J)}{\cos^2(x_2) l_1^2 R_m m_2 l_2 - R_m l_2 m_2 l_1^2 - R_m l_2 J} \end{bmatrix}$$

$$g(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{k_m k_g}{m_2 l_1^2 R_m + J R_m - m_2 R_m l_1^2 \cos^2(x_2)} \\ \frac{\cos(x_2) l_1 k_m k_g}{\cos^2(x_2) l_1^2 R_m m_2 l_2 - R_m l_2 m_2 l_1^2 - R_m l_2 J} \end{bmatrix}$$

$$h(x) = x_2$$

3.3 Modelo linealizado

Para linealizar el sistema se requiere encontrar sus puntos de equilibrio, esto es, encontrar $(x, y) = (x^o, y^o)$, tales que $f(x^o, y^o) = 0$. Encontrando los puntos de equilibrio:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 = 0 &\implies x_3 = 0 \\ \dot{x}_2 = 0 &\implies x_4 = 0 \\ \dot{x}_3 = 0 &\implies x_2 = n\pi \\ \text{con} \\ n &= 0, 1, 2, \dots \\ \implies \dot{x}_4 &= 0 \end{aligned}$$

Esto nos dice que los puntos de equilibrio se encuentran en $x = [l \quad n\pi \quad 0 \quad 0]^T$ donde l puede tomar cualquier valor real y n definido anteriormente. Para linealizar el sistema se definen las variables incrementales:

$$\begin{aligned} \delta x &= x - x^* \\ \delta u &= u - u^* \\ \delta y &= y - y^* \end{aligned}$$

donde el par (x^*, y^*) corresponde a un punto de equilibrio del sistema, quedando la aproximación por series de Taylor como:

$$\begin{aligned} \partial \dot{x}(t) &= A\partial x(t) + B\partial u(t) \\ \partial y(t) &= C\partial x(t) \end{aligned}$$

donde:

$$\begin{aligned} A &= \left. \frac{\partial f(x)}{\partial x} \right|_{x=x^*} \\ B &= g(x^*) \\ C &= \left. \frac{\partial h(x)}{\partial x} \right|_{x=x^*} \end{aligned}$$

Quedando al linealizar alrededor del punto de equilibrio $x_0 = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T$:

$$\dot{x} = Ax + bu \tag{3.4}$$

$$y = cx$$

donde:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{-m_2 l_1 g}{J} & \frac{-k_g^2 k_m k_b}{J R_m} & 0 \\ 0 & g \frac{J + m_2 l_1^2}{l_2 J} & \frac{k_g^2 k_m k_b l_1}{J R_m l_2} & 0 \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{k_m k_g}{J R_m} \\ \frac{-k_g k_m l_1}{J R_m l_2} \end{bmatrix}$$

$$c = [0 \ 1 \ 0 \ 0]$$

Los valores de los parámetros del sistema son:

m_2 : masa del péndulo	0.50 kg
l_2 : longitud del péndulo	0.75 m
l_1 : longitud del brazo	0.12 m
J : inercia de base	0.003 kg-m ²
k_m : ganancia del motor	0.104 N-m/amp
k_g : ganancia de engranes	5.5
R_m : resistencia del motor	1.9 ohms
k_b : constante contraelectromotriz	0.104 Volts-s/rad

sustituyendo los valores se obtiene:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -128.46 & -38.11 & 0 \\ 0 & 33.63 & 6.097 & 0 \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 59.73 \\ -9.55 \end{bmatrix}$$

el cual será el modelo matemático del sistema que utilizaremos para la síntesis de los diferentes controles a implementar.

Capítulo 4

Control por retroalimentación lineal de estado

El control por retroalimentación lineal de estado es la primera técnica aplicada al péndulo invertido giratorio, teniendo como objetivo la estabilización del péndulo en posición vertical. El diseño de la ley de control se obtiene a partir del modelo linealizado. Otro problema que se resuelve es el de seguimiento de trayectoria del péndulo por medio de regulación lineal.

4.1 Introducción

La Retroalimentación de estado es una de las técnicas más ampliamente utilizadas para modificar las características dinámicas de un sistema y realizar acciones de control.

Es importante observar que a excepción de la entrada de referencia, el estado de la planta es la única información que necesita el controlador. Esto es cierto puesto que el estado, por definición, proporciona un resumen completo del pasado del sistema y cualquier otra información con respecto al futuro del sistema se puede sintetizar a partir del estado. Por ejemplo, la salida y se puede obtener siempre a partir del conocimiento del estado al usar la expresión $y = cx$ y por lo tanto, no se necesita mostrar al controlador como un ente dependiente de la salida.

La salida del controlador, es decir, la señal de control u , es en general una función de las variables de estado. Sin embargo, más que esta forma general del controlador, se considera un caso más específico conocido como retroalimentación lineal de las variables de estado. En el problema de retroalimentación del estado se asume que el vector de estado completo se mide o se estima, y está disponible para la retroalimentación.

El sistema de retroalimentación lineal de las variables de estado se ha escogido considerando tres razones básicas. Primero, la configuración da como resultado un sistema lineal, lo que permite hacer uso de las poderosas técnicas basadas en transformadas para análisis y síntesis. Segundo, esta configuración es lo suficientemente general como para obtener un desempeño satisfactorio en muchos problemas prácticos de control. Tercero, la retroalimentación lineal de las variables de estado es un enfoque que sirve como una introducción adecuada para una amplia gama de temas, tales como observadores, control óptimo, etc.

4.2 Diseño de la ley de control

Dado un sistema lineal en la forma de variables de estado, tal como en (3.4), una ley de retroalimentación lineal de estado es de la forma:

$$u(t) = -kx \quad (4.1)$$

donde $k = [k_1 \ k_2 \ k_3 \ k_4]$ es el vector de ganancias y x es el vector de estado. En otras palabras, el control está determinado como una combinación lineal de los estados del sistema. Los coeficientes de k son las ganancias a ser determinadas. Sustituyendo la ley de control (4.1) en (3.4) obtenemos:

$$\dot{x} = (A - bk)x \quad (4.2)$$

En la siguiente figura se muestra el esquema del sistema en lazo cerrado:

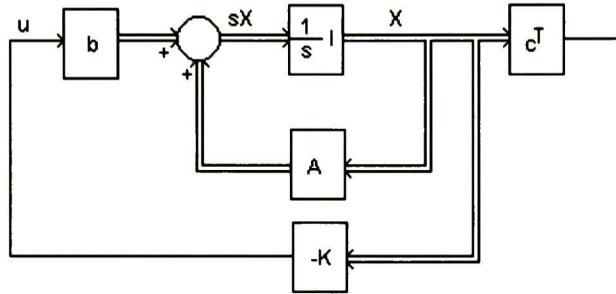


Figura 4.1

Como puede verse de (4.2), los polos del sistema en lazo cerrado están determinados por la matriz $A - bk$. El poder cambiar los polos arbitrariamente en un sistema por medio de la ley de control (4.1), requiere de que el sistema cumpla con la propiedad de controlabilidad. Controlabilidad es la propiedad que permite una ubicación arbitraria de polos en lazo cerrado mediante la retroalimentación de las variables de estado. Un sistema es controlable [4] si para cada estado inicial $x(t_0)$ y cada estado final $x(t_f)$ hay una entrada de control $u(t)$ que transfiere al sistema desde $x(t_0)$ al tiempo t_0 hasta $x(t_f)$ al tiempo t_f

Se sabe que un sistema escalar es controlable [4] si y solo si

$$\det [b \quad Ab \quad A^2b \dots \quad A^{n-1}b] \neq 0$$

donde n es el orden del sistema.

La matriz de $n \times n$ $[b \quad Ab \quad A^2b \dots \quad A^{n-1}b]$ es llamada matriz de controlabilidad para un sistema definido por el par (A, b) .

Hay muchos algoritmos que pueden ser usados para determinar las ganancias en (4.1) para obtener un conjunto de polos deseados en lazo cerrado. Esto es conocido como el problema de asignación de polos. En este caso la mayor dificultad está en escoger los polos adecuados en lazo cerrado basados en el

comportamiento deseado, límites en la entrada, etc, para obtener el objetivo de estabilización del péndulo. Una manera para diseñar las ganancias de retroalimentación es tratando de optimizar el proceso, utilizando la teoría de control óptimo. Por ejemplo, nosotros podemos escoger como nuestra meta de minimización:

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (x^T Q x + u^T R u) dt \quad (4.3)$$

donde Q es una matriz simétrica semidefinida positiva y R es una matriz simétrica definida positiva. Donde Q es la matriz que pondera los estados y R en este caso es un escalar el cual pondera la entrada. Al escoger Q y R , para tener un control lineal óptimo que minimize (4.3) está dado como $u = -kx$ donde:

$$k = R^{-1} b^T P$$

Teniendo que P es una matriz simétrica, definida positiva de $n \times n$ que satisface la llamada ecuacion de Riccati:

$$A^T P + P A - P b R^{-1} b^T P + Q = 0$$

La ecuación tienen solución si el par (A, b) es estabilizable y el par (C, A) es observable, donde la matriz $Q = C^T C$.

Las matrices obtenidas para el péndulo invertido giratorio son:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -128.46 & -38.11 & 0 \\ 0 & 33.63 & 6.097 & 0 \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 59.73 \\ -9.55 \end{bmatrix}$$

La función de transferencia del sistema queda como:

$$G(s) = \frac{s(s - .0234)}{s(s - 3.87)(s + 3.33)(s + 38.65)}$$

Por la localización de sus polos el sistema es inestable en lazo abierto, estos se localizan en:

$$P_1 = 0$$

$$P_2 = 3.87$$

$$P_3 = -3.33$$

$$P_4 = -38.65$$

Si el par (A, b) es estabilizable asintóticamente [4], entonces cualquier retroalimentación de estado, de la forma $u = -kx$ que estabiliza asintóticamente la aproximación lineal, también estabiliza asintóticamente al sistema no lineal original, entonces las ecuaciones no lineales originales tienen estabilidad local en ese punto de equilibrio, bajo pequeñas perturbaciones.

La matriz de controlabilidad es:

$$1 \times 10^3 \begin{bmatrix} 0.000 & 0.059 & -2.276 & 87.97 \\ 0.000 & -0.009 & 0.364 & -14.19 \\ 0.059 & -2.276 & 87.97 & -3399 \\ -0.009 & 0.364 & -14.19 & 548.6 \end{bmatrix}$$

la cual es invertible, por lo tanto el sistema lineal es controlable.

Escogiendo los valores de Q y R , para obtener un buen desempeño del sistema:

$$Q = \begin{bmatrix} .5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$R = 1.2$$

se obtiene P quedando:

$$P = \begin{bmatrix} 0.78 & 8.76 & 0.37 & 2.43 \\ 8.76 & 289.75 & 11.42 & 76.85 \\ 0.37 & 11.42 & 0.45 & 3.04 \\ 2.43 & 76.86 & 3.04 & 20.42 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto el vector de retroalimentación está dado por:

$$k = [-0.64 \quad -43.16 \quad -1.66 \quad -11.31] \quad (4.4)$$

La ubicación de los polos en lazo cerrado es:

$$P_1 = -1$$

$$P_2 = -3.24$$

$$P_3 = -3.94$$

$$P_4 = -38.77$$

Los resultados se prueban en el sistema no lineal teniendo las simulaciones siguientes:

La figura 4.2 muestra la posición del péndulo que parte con una condición inicial igual a 0.15 radianes (8.59 grados).

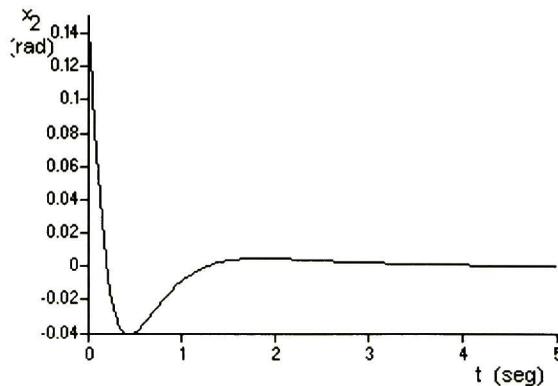


Figura 4.2

La figura 4.3 muestra la ley de control aplicada para estabilizar el sistema.

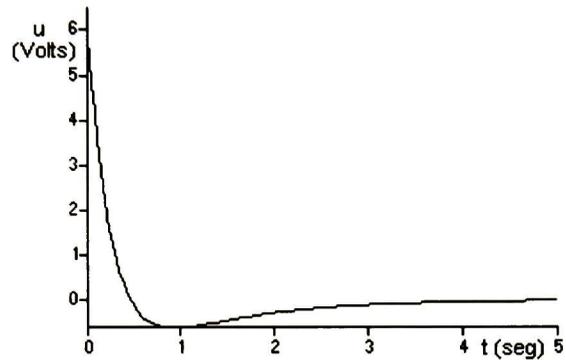


Figura 4.3

Los resultados en tiempo real fueron los siguientes:

La figura 4.4 muestra la posición del péndulo cuando se le aplica un impulso:

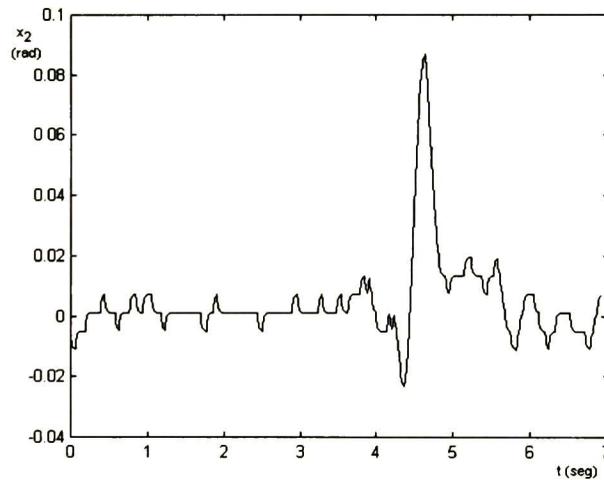


Figura 4.4

La figura 4.5 muestra el voltaje aplicado al motor:

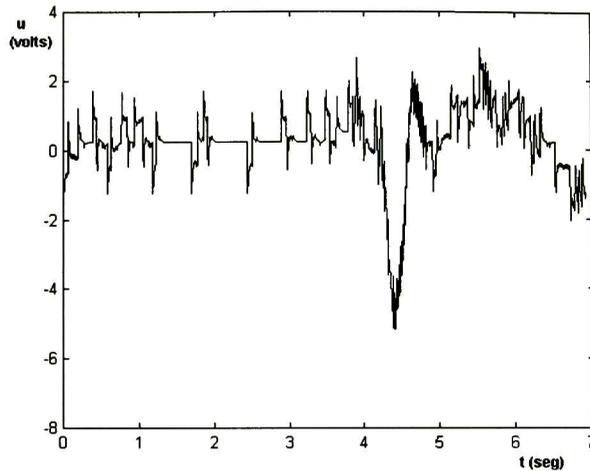


Figura 4.5

Como puede verse de los resultados obtenidos en tiempo real, la ley de control lineal logrará estabilizar el péndulo pero no tiene el comportamiento deseado como en la simulación. Esto debe esperarse ya que el modelo es solo una aproximación del sistema, además tenemos otras aproximaciones como lo son el voltaje aplicado, ya que este depende de la resolución del convertidor digital-analógico, otro inconveniente es el juego de los engranes, ya que estos presentan dinámicas extras al sistema.

4.3 Regulación lineal

Otro problema de importancia en la teoría de control es el de regular la salida de un sistema para que siga asintóticamente una trayectoria deseada, es decir, que la salida satisfaga

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|y(t) - y_r(t)\| = 0$$

donde $y(t)$ es la salida de nuestro sistema, en este caso la posición del péndulo y $y_r(t)$ es la señal de referencia que pertenezca a una familia prescrita (de funciones definidas en el intervalo $[0, \infty)$), para cada estado inicial $x(0)$. Tomando un sistema lineal del tipo

$$\dot{x} = Ax + Bu + Pw \quad (4.5)$$

$$e = Cx + Qw$$

donde $w \in \mathfrak{R}^r$ es un vector de entradas exógenas que incluye perturbaciones a ser rechazadas o referencias a ser seguidas, la entrada de control $u \in \mathfrak{R}^m$, y el error $e \in \mathfrak{R}^p$ está definido por una combinación lineal de las entradas exógenas w y los estados de la planta $x \in \mathfrak{R}^n$

Este problema se puede resolver con la teoría de regulación lineal [5]. Tomando el sistema (4.5), entonces la ley de control que genera la entrada apropiada para hacer el seguimiento está dada por:

$$u = Kx + Lw \quad (4.6)$$

Encontrando K y L tales que:

(1) la matriz $A + BK$ tenga sus valores propios en el semiplano izquierdo del plano complejo.

(2) Para cada (x^0, w^0) , la solución $(x(t), w(t))$ de

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (A + BK)x + (P + BL)w \\ \dot{w} &= Sw \end{aligned}$$

satisfaciendo $(x(0), w(0)) = (x^0, w^0)$ es tal que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (Cx(t) + Qw(t)) = 0$$

El sistema

$$\dot{w} = Sw$$

es visto como un modelo matemático de un generador de las posibles entradas exógenas, llamado exosistema.

(H1) La parte real de los valores propios de S están contenidos en el semiplano derecho cerrado del plano complejo, es decir

$$\text{Re}\{\sigma(S)\} \in \text{clos}(C^+) = \{\lambda \in C : \text{Re}[\lambda] \geq 0\}$$

Lema 1. Supongase que (H1) se satisface y existe una ley de control $u = Kx + Lw$ para la cual (1) se satisface. Entonces, la condición (2) también se satisface si y sólo si existe una matriz Π que resuelve las ecuaciones lineales matriciales.

$$\Pi S = (A + BK)\Pi + (P + BL) \quad (4.7)$$

$$C\Pi + Q = 0 \quad (4.8)$$

La ecuación (4.7) es una ecuación de Sylvester, la cual tiene solución si:

$$\sigma(S) \cap \sigma(A + BK) = \emptyset$$

y tiene solución Π (es única si $p = m$).

(H2) El par (A, B) es estabilizable, es decir, existe una matriz K tal que la matriz $(A + BK)$ tiene todos sus valores propios en el semiplano izquierdo del plano complejo.

Teorema 1. Supóngase que las condiciones (H1) y (H2) se satisfacen. Entonces el problema de regulación de la salida por retroalimentación de estado tiene solución si y solo si existen matrices Π y Γ que resuelve las ecuaciones lineales matriciales [5] :

$$\Pi S = A\Pi + B\Gamma + P \quad (4.9)$$

$$C\Pi + Q = 0 \quad (4.10)$$

donde:

$$\Gamma = K\Pi + L$$

Para una señal de referencia $y_r = \text{sen}(\alpha t)$ nuestro exosistema está dado por:

$$\begin{aligned} \dot{y}_r &= \alpha \cos(\alpha t) \\ \ddot{y}_r &= -\alpha^2 \text{sen}(\alpha t) \end{aligned}$$

donde $y_r = w_1$ y $\dot{w}_1 = w_2$ por lo tanto:

$$\dot{w} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha^2 & 0 \end{bmatrix} w$$

con $\alpha > 0$, y la matriz Q asociada a la señal de referencia es:

$$Q = [-1 \ 0]$$

con esto obtenemos que el error está dado por:

$$e = x_2 - w_1$$

El sistema cumple con (H1) y (H2), entonces las ecuaciones (4.9) y (4.10) quedan como:

$$\begin{bmatrix} \Pi_{11} & \Pi_{12} \\ \Pi_{21} & \Pi_{22} \\ \Pi_{31} & \Pi_{32} \\ \Pi_{41} & \Pi_{42} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha^2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -128.46 & -38.11 & 0 \\ 0 & 33.63 & 6.097 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Pi_{11} & \Pi_{12} \\ \Pi_{21} & \Pi_{22} \\ \Pi_{31} & \Pi_{32} \\ \Pi_{41} & \Pi_{42} \end{bmatrix} \\ + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 59.73 \\ -9.55 \end{bmatrix} [\Gamma_1 \ \Gamma_2] \\ [0 \ 0] = [0 \ 1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} \Pi_{11} & \Pi_{12} \\ \Pi_{21} & \Pi_{22} \\ \Pi_{31} & \Pi_{32} \\ \Pi_{41} & \Pi_{42} \end{bmatrix} + [-1 \ 0]$$

A partir de estas ecuaciones se obtienen los siguientes resultados:

$$\begin{aligned} \Pi_{22} &= 0, & \Pi_{21} &= 1 \\ -\alpha^2 \Pi_{12} &= \Pi_{31}, & \Pi_{11} &= \Pi_{32} \\ -\alpha^2 \Pi_{22} &= \Pi_{41}, & \Pi_{21} &= \Pi_{42} \\ -\alpha^2 \Pi_{32} &= -128.46 \Pi_{21} - 38.11 \Pi_{31} + 59.73 \Gamma_1 \\ \Pi_{31} &= -128.46 \Pi_{22} - 38.11 \Pi_{32} + 59.73 \Gamma_2 \\ -\alpha^2 \Pi_{42} &= 33.63 \Pi_{21} + 6.097 \Pi_{31} - 9.55 \Gamma_1 \\ \Pi_{41} &= 33.63 \Pi_{22} + 6.097 \Pi_{32} - 9.55 \Gamma_2 \end{aligned}$$

El exósistema genera una señal de referencia sinusoidal de frecuencia $\alpha \frac{rad}{seg}$. Supóngase que queremos que el péndulo invertido giratorio siga una señal de referencia $y_r = 0.15 \text{sen}(3t)$. En este caso $\alpha = 3$ y:

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 4.23 & -9.8 \end{bmatrix} \quad \Pi = \begin{bmatrix} -15.35 & 0.0398 \\ 1 & 0 \\ -0.3589 & -15.35 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La ley de control para seguir esta señal de referencia está dada de acuerdo a (4.6) por:

$$u = \begin{bmatrix} .64 & 43.17 & 1.66 & 11.31 & -28.51 & 4.34 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ w \end{bmatrix}$$

Los resultados en simulación fueron los siguientes:

El exosistema genera una señal de la forma $0.15 \sin(3t)$, el sistema tiene condiciones iniciales iguales a cero. La siguiente gráfica se muestra la posición del péndulo y la señal de referencia.

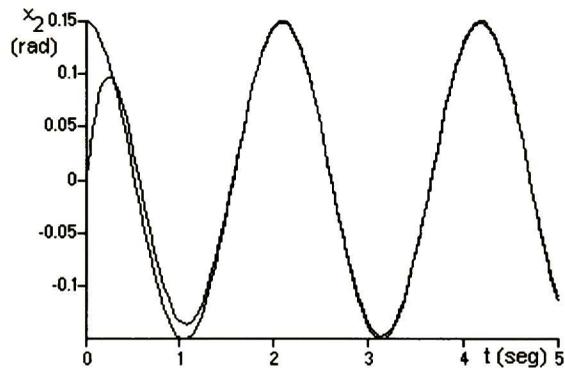


Figura 4.6

La siguiente gráfica muestra la ley de control aplicada al sistema para generar la referencia deseada.

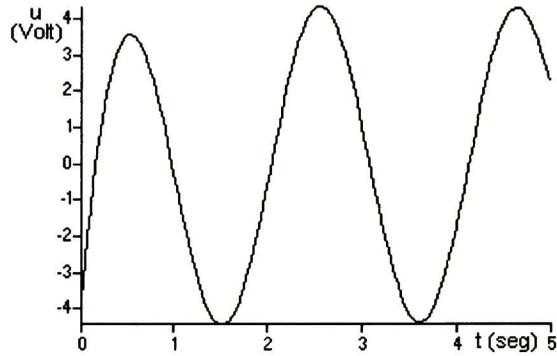


Figura 4.7

La figura 4.8 muestra el seguimiento de trayectoria para el péndulo y la señal referencia en tiempo real:

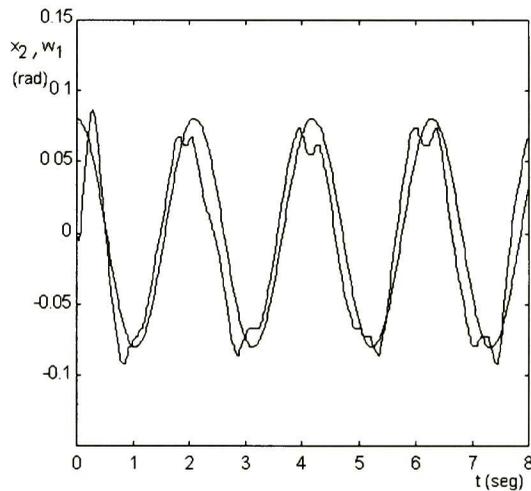


Figura 4.8

La gráfica nos muestra que el seguimiento tiene mayor dificultad en los picos de la referencia, ya que estos representan un mayor esfuerzo para el sistema para controlar la inercia que lleva el péndulo. Para lograr un

seguimiento con mayor precisión primeramente se debe obtener una buena estabilización del sistema, ya que el sistema depende de la estabilización para tener el comportamiento deseado. Como se puede observar la ley de control por retroalimentación lineal de estado es una técnica sencilla y poderosa para el control de sistemas, siempre y cuando el modelo del sistema sea una aproximación muy buena del sistema.

Capítulo 5

Control por modos deslizantes

En este capítulo aplicaremos control por modos deslizantes al péndulo invertido giratorio para realizar las mismas acciones de control del capítulo anterior, éste es, estabilización y seguimiento de trayectoria.

5.1 Introducción

Desarrollado en la ex-Unión Soviética hace más de 30 años, el control de modo deslizante difiere de un simple control de relevador en que el control por modos deslizantes depende extremadamente de altas velocidades de cambio entre valores de control. Recientemente los avances en la electrónica de potencia han hecho dispositivos de alta velocidad prácticamente implementados en muchas clases de sistemas, como motores eléctricos. La idea principal de modos deslizantes es escoger una superficie en el espacio de estados, esta superficie es llamada superficie de cambio, y el cambio depende de esta superficie. El diseño de un control de modo deslizante puede describirse en tres pasos :

1. Definir la superficie de cambio
2. Escoger una ley de control tal que las trayectorias cercanas a la superficie apunten hacia ella.
3. Determinar las dinámicas del sistema en la superficie.

Los problemas básicos son las especificaciones de las ganancias en el controlador para que las trayectorias alcancen a la superficie en un tiempo finito, la determinación de la lógica de cambio por el controlador, y la definición de la ecuación de la superficie que dictaminan el comportamiento dinámico del sistema en la superficie.

5.2 Condiciones para la existencia de modos deslizantes

Suponiendo que tenemos un sistema del tipo:

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u$$

con

$$u = \begin{cases} u^+ & \text{si } s(x) > 0 \\ u^- & \text{si } s(x) < 0 \end{cases}$$

donde $s(x)$ es la función de cambio.

Una condición suficiente para la existencia de un modo deslizante está dada por

$$\lim_{s \rightarrow 0^-} \frac{ds}{dt} > 0$$

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{ds}{dt} < 0$$

Estas dos condiciones son equivalentes a

$$\lim_{s \rightarrow 0} s \frac{ds}{dt} < 0$$

La cual es la condición para la existencia de modos deslizantes.

5.3 Método de control equivalente

El control equivalente está definido por las condiciones $s = 0$ y $\dot{s} = 0$. La primera condición nos dice que el sistema está sobre la superficie de cambio y la segunda condición nos dice que el sistema no deja a esta superficie. Considerando un sistema lineal de entrada simple (3.4) y la superficie :

$$s = c^T x \quad (5.1)$$

De la condición $\dot{s} = 0$ tenemos que

$$\dot{s} = c^T \dot{x} = c^T Ax + c^T bu = 0 \quad (5.2)$$

Si $\det(c^T b) \neq 0$ entonces el control equivalente se encuentra resolviendo (5.2) con respecto a u quedando:

$$u_{eq} = -(c^T b)^{-1} (c^T Ax) \quad (5.3)$$

Sustituyendo (5.3) en (3.4) obtenemos las ecuaciones de modos deslizantes:

$$\dot{x} = (I - b(c^T b)^{-1} c^T) Ax$$

El control equivalente depende del conocimiento de los parámetros del sistema por lo tanto es sensitivo a incertidumbres de estos parámetros. El punto principal de la filosofía de modos deslizantes es realizar u_{eq} para una estructura variable de control. Entonces tomamos una ley de control de la forma

$$u = \begin{cases} u^+ & \text{si } s > 0 \\ u^- & \text{si } s < 0 \end{cases} \quad (5.4)$$

Por lo tanto el modo deslizante existe usando la ley de control (5.4) si y solo si u^+ y u^- satisfacen [11]

$$u^- < u_{eq} < u^+ \quad (5.5)$$

Una manera de implementar la ley de control es

$$u = -M \operatorname{sgn}(s) \quad (5.6)$$

donde :

$$\operatorname{sgn}(s) = \begin{cases} +1 & \text{si } s > 0 \\ -1 & \text{si } s < 0 \end{cases}$$

y M es la ganancia para garantizar (5.5). La figura 5.1 representa el esquema de control con modos deslizantes.

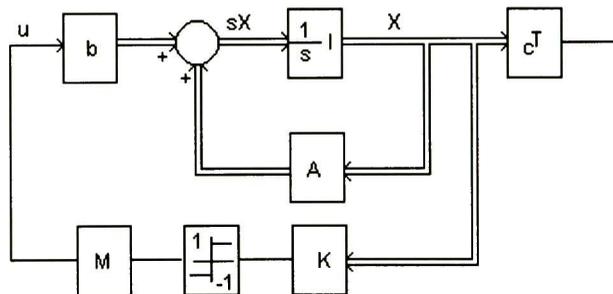


Figura 5.1

5.4 Diseño de la ley de control

Considerando un sistema lineal del tipo:

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x \in \mathfrak{R}^n, \quad u \in \mathfrak{R}^m$$

y teniendo una superficie del tipo:

$$s = Cx \quad s^T = (s_1(x), \dots, s_m(x))$$

podemos hacer una transformacion del tipo:

$$\dot{\bar{x}} = TAT^{-1} \bar{x} + TBu$$

donde

rango $B = m$ y T es una matriz no singular, tal que:

$$TB = \begin{pmatrix} 0 \\ B_2 \end{pmatrix}$$

Reescribiendo el sistema queda de la forma:

$$\dot{x}_1 = A_{11}x_1 + A_{21}x_2 \quad x_1 \in \mathfrak{R}^{n-m} \quad (5.7)$$

$$\dot{x}_2 = A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + B_2u \quad x_2 \in \mathfrak{R}^m \quad (5.8)$$

entonces la superficie respecto a las nuevas variables tiene la forma:

$$s = C_1x_1 + C_2x_2$$

donde:

$CT^{-1} = (C_1, C_2)$, C_1 y C_2 son matrices de $(m \times n)$ y $(m \times m)$ respectivamente.

Las siguientes consideraciones estarán dadas para superficies dicontinuas para las cuales $\det CB \neq 0$, es decir, las ecuaciones de modos deslizantes pueden ser escritas sin ambigüedades.

Como ahora $CB = C_2B_2$ este requerimiento equivale a la condición de $\det C_2 \neq 0$ una simple solución es la de tener $C_2 = I_m$.

Con el fin de obtener las ecuaciones de modos deslizantes resolvemos el conjunto de ecuaciones $s = 0$ y $\dot{s} = 0$ con respecto a x_2 y u , sustituyendo en (5.7) y en (5.8), el resultado es un sistema reducido en m ecuaciones. De este procedimiento obtenemos:

$$\dot{x}_1 = A_{11}x_1 + A_{12}x_2 \quad (5.9)$$

$$x_2 = -C_1x_1$$

El sistema (5.9) puede ser visto como un sistema de lazo abierto de dimensión $(n - m)$. Entonces el problema se toma como un diseño de retroalimentación lineal el cual tiene dimensión m menor que el sistema original.

Lema 2. [12] Si el par (A, B) es controlable el par (A_{11}, A_{12}) también lo es.

Teorema 2. [12] Si el par (A, B) es controlable, entonces los valores propios de la ecuación de modos deslizantes

$$\dot{x}_1 = (A_{11} - A_{12}C_1)x_1$$

pueden ser colocados arbitrariamente.

Para el modelo lineal del péndulo invertido giratorio se obtiene una transformación T para llevar al sistema a la forma regular, de tal modo que el sistema quede de la forma (5.7) y (5.8) esto es:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & .0167 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 6.2545 \end{bmatrix} \quad (5.10)$$

de donde:

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 59.73 & 0 \\ 0 & 0 & -9.55 & .159 \\ 0 & -2.15 & -38.11 & 0 \\ 0 & 81.87 & 1.397 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.11)$$

$$\bar{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Escogiendo una superficie de cambio de la forma (5.1) y resolviendo para $s = 0$ se tiene :

$$x_3 = -(c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_4) \quad (5.12)$$

Sustituyendo en (5.11) tenemos:

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} -59.73c_1 & -59.73c_2 & -59.73c_3 \\ 9.55c_1 & 9.55c_2 & 9.55c_3 + .159 \\ -1.39c_1 & 81.87 - 1.39c_2 & -1.39c_3 \end{bmatrix}$$

obteniendo el polinomio característico $\det(\lambda I - \bar{A}) = 0$ se puede obtener un sistema de ecuaciones y hacer ubicación de los polos. Otra manera sencilla

es obtener un sistema reducido eliminando x_3 , esto es por (5.12) quedando como en (5.9):

$$x' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.159 \\ 0 & 81.87 & 0 \end{bmatrix} x' + \begin{bmatrix} 59.73 \\ -9.55 \\ 1.397 \end{bmatrix} \bar{x}_3$$

donde:

$$x' = \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \bar{x}_4 \end{bmatrix}$$

Entonces se obtienen las ganancias para la ubicación de polos deseados, quedando de la forma:

$$c = [-0.0153 \quad -0.9397 \quad -0.0413] \quad (5.13)$$

Para que el sistema se comporte como un problema de retroalimentación de estado, se debe asegurar que $s \dot{s} < 0$, para esto se deriva s entonces:

$$\begin{aligned} \dot{s} &= c_1 \dot{\bar{x}}_1 + c_2 \dot{\bar{x}}_2 + c_3 \dot{\bar{x}}_4 + \dot{\bar{x}}_3 \\ \dot{s} &= c_1 59.73 \bar{x}_3 + c_2 (-9.55 \bar{x}_3 + 0.159 \bar{x}_4) - 2.15 \bar{x}_2 - 38.11 \bar{x}_3 + c_3 (81.87 \bar{x}_2 \\ &\quad + 1.39 \bar{x}_3) + u \end{aligned}$$

como $u = -M \text{sign}(s)$, $M \in \Re$

entonces

$$M > \begin{vmatrix} c_1 59.73 \bar{x}_3 + c_2 (-9.55 \bar{x}_3 + 0.159 \bar{x}_4) - 2.15 \bar{x}_2 - 38.11 \bar{x}_3 + c_3 (81.87 \bar{x}_2 \\ + 1.39 \bar{x}_3) \end{vmatrix}$$

con $\bar{x}_3 = -(c_1 \bar{x}_1 + c_2 \bar{x}_2 + c_3 \bar{x}_4)$.

Finalmente se obtiene la ley control :

$$s = -0.0153x_1 - 0.9397x_2 + 0.0167x_3 - 0.0413(x_3 + 6.2545x_4)$$

$$u = -8 \operatorname{sign}(s)$$

Los resultados en simulación son los siguientes:

La figura 5.2 muestra la posición del péndulo, donde su valor inicial es de 0.15 radianes (8.59 grados).

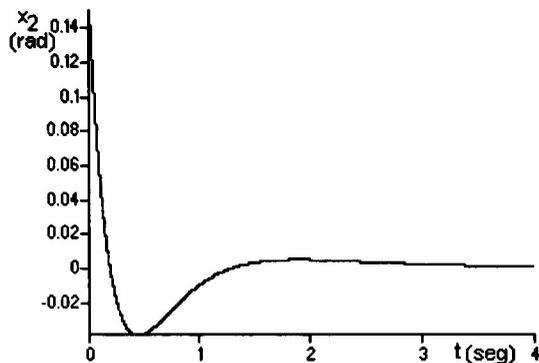


Figura 5.2

La siguiente gráfica nos muestra la ley de control aplicada al sistema, donde se puede ver los cambios dados por la superficie escogida. Estos cambios se realizan con mayor frecuencia al acercarse la superficie a cero, hasta tener una frecuencia infinita cuando la superficie es cero.

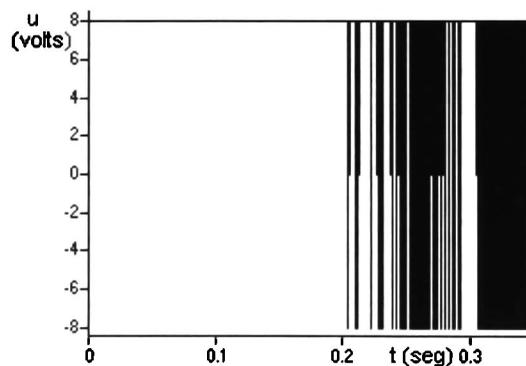


Figura 5.3

El comportamiento ideal de modos deslizantes es alcanzado en teoría cuando la frecuencia en el cambio es infinita. En la práctica se tiene pequeños tiempos de retardo cuando se efectúan los cambios, esto provocará que el control a lo largo de la superficie no sea la deseada. En algunos casos el ruido puede excitar altas frecuencias, entonces las dinámicas no modeladas van adquiriendo mayor peso sobre el comportamiento del sistema.

Para eliminar los efectos no deseados se introduce una aproximación del control discontinuo por un control continuo alrededor de la superficie deslizante [10]. La ley de control discontinua es remplazada por:

$$u = -M \text{sat}(s/\varepsilon) \quad (5.14)$$

donde la función $\text{sat}(x)$ está definida como:

$$\text{sat}(x) = \begin{cases} \text{sgn}(x) & \text{si } |x| > 1 \\ x & \text{si } |x| \leq 1 \end{cases}$$

En la siguiente figura se muestra la ley de control (5.14) con $\varepsilon = 0.05$, donde se puede ver que la ley de control es mucho más suave:

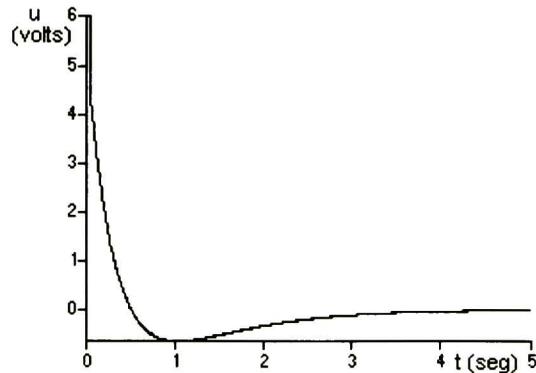


Figura 5.4

Las gráficas en tiempo real son las siguientes:

La figura 5.5 que a continuación se muestra, es la regulación del péndulo cuando se le aplica un impulso.

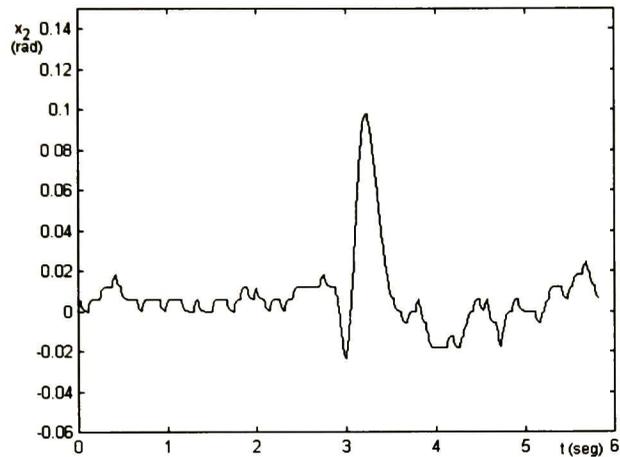


Figura 5.5

La figura 5.6 nos muestra la ley de control aplicada al sistema para alcanzar la estabilización.

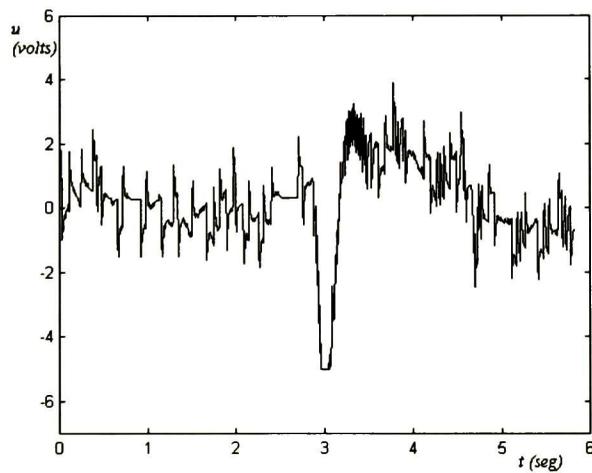


Figura 5.6

Para regular el sistema fue necesario aplicar la ley de control dada por (5.14) y colocar un observador lineal. Al colocar el observador sirvió para que las altas frecuencias estuvieran en el lazo cerrado del observador y no del sistema, con lo cual se mejoró el comportamiento del péndulo eliminando las oscilaciones provocadas por las altas frecuencias.

5.5 Seguimiento de trayectoria

Al igual que en el caso de retroalimentación de estado, la trayectoria que se desea que siga la salida es de forma sinusoidal $\text{sen}(\varpi t)$, y puede ser representada por:

$$\dot{w} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha^2 & 0 \end{bmatrix} w$$

la salida del sistema es la posición de la varilla la cual está dada por x_2 , entonces se hará un nuevo sistema que será el error que hay entre la salida y la referencia esto es:

$$z_2 = x_2 - w_1$$

entonces:

$$z_4 = x_4 - w_2$$

La posición del brazo también debe seguir una trayectoria para lograr la referencia indicada, entonces se escogen las nuevas variables como:

$$z_1 = x_1 + p_1 w_1 + p_2 w_2$$

$$z_3 = x_3 + p_1 w_2 - \alpha^2 p_2 w_1$$

donde p_1 y p_2 son constantes a determinar. El nuevo sistema tiene la siguiente forma:

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -128.46 & -38.11 & 0 \\ 0 & 33.63 & 6.097 & 0 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 59.73 \\ -9.55 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \Pi_1 & \Pi_2 \\ \Pi_3 & \Pi_4 \end{bmatrix} w$$

Los valores de Π_i son los siguientes:

$$\Pi_1 = -128.43 - 38.11p_2\alpha^2 - p_1\alpha^2$$

$$\Pi_2 = 38.11p_1 - p_2\alpha^2$$

$$\Pi_3 = 33.63 + \alpha^2 + 6.097p_2\alpha^2$$

$$\Pi_4 = -6.097p_1$$

Volviendo a tomar (5.10) para hacer la transformación el sistema queda:

$$(5.15) \quad \dot{\bar{z}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 59.73 & 0 \\ 0 & 0 & -9.55 & 0.159 \\ 0 & -2.15 & -38.11 & 0 \\ 0 & 81.87 & 1.397 & 0 \end{bmatrix} \bar{z} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0.0167\Pi_1 & 0.0167\Pi_2 \\ \Pi_1 + 6.254\Pi_3 & \Pi_2 + 6.254\Pi_4 \end{bmatrix}$$

Ahora se debe escoger la superficie y resolver para $s = 0$, tenemos que:

$$\bar{z}_3 = -(c_1 \bar{z}_1 + c_2 \bar{z}_2 + c_3 \bar{z}_4)$$

\bar{z}_3 se eliminará de (5.15) y quedará un sistema reducido, de este sistema resultante se calcula p_1 y p_2 de tal forma que el sistema quede como:

$$z' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.159 \\ 0 & 81.87 & 0 \end{bmatrix} z' + \begin{bmatrix} 59.73 \\ -9.55 \\ 1.397 \end{bmatrix} \bar{z}_3$$

con:

$$z' = \begin{bmatrix} \bar{z}_1 \\ \bar{z}_2 \\ \bar{z}_4 \end{bmatrix}, \quad p_1 = 15.35, \quad p_2 = -0.04$$

Este sistema es controlado por las ganancias dadas en (5.13), obteniendo la ley de control de la forma:

$$s = -0.0153z_1 - 0.9397z_2 + 0.0167z_3 - 0.0413(z_3 + 6.254z_4)$$

$$u = -8 \operatorname{sign}(s)$$

Las gráficas que se muestran a continuación son los resultados de la simulación realizada para el seguimiento de trayectoria. La figura 5.7 gráfica la posición del péndulo y la referencia a seguir.

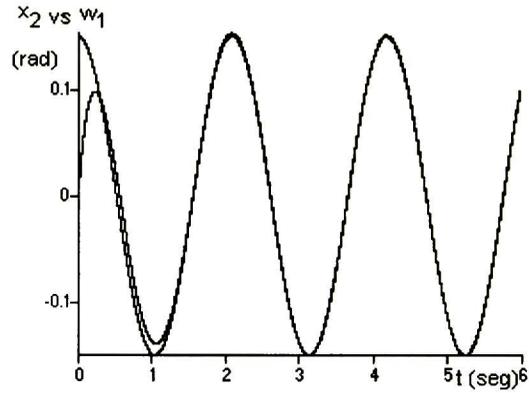


Figura 5.7

La figura siguiente muestra la ley de control dada por (5.6) para realizar el seguimiento de trayectoria de la señal deseada.

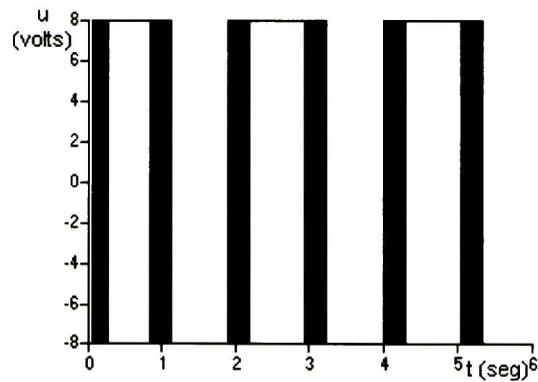


Figura 5.8

La figura 5.9 muestra la ley de control dada por (5.14), con $\varepsilon = 0.008$.

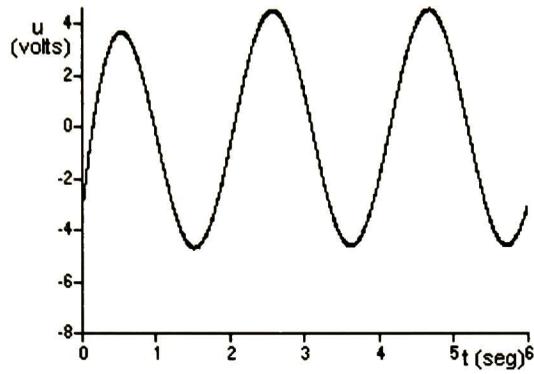


Figura 5.9

La siguiente gráfica muestra el resultado en tiempo real, el cual la ley de control dada por (5.14):

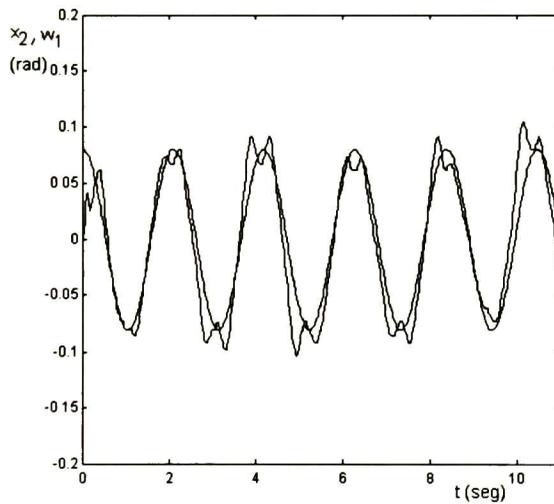


Figura 5.10

El seguimiento de trayectoria con modos deslizantes mejoró con respecto a la regulación lineal, pero sigue teniendo problemas en los picos de la

referencia. Como se muestra en la figura 5.8 en los picos de la referencia el control debe dar un mayor esfuerzo para lograr darle al péndulo el comportamiento deseado. Con esta técnica de control el sistema tiene un mejor comportamiento, ya que no presenta un desfase de la señal de referencia.

Capítulo 6

Control Difuso

El objetivo de esta sección es el de describir la estructura de un controlador fuzzy, especificar las características de los mecanismos que actúan en su construcción y describir su funcionamiento, para después hacer un control fuzzy aplicado al péndulo invertido giratorio.

6.1 Introducción

La lógica difusa (“Fuzzy”) es una alternativa a las técnicas cuantitativas convencionales de análisis y diseño de sistemas. Las principales características de este enfoque son:

Uso de las llamadas variables lingüísticas en vez de variables numéricas.

Caracterización de las relaciones simples entre variables lingüísticas por relaciones condicionales difusas.

Caracterización de relaciones complejas por algoritmos difusos.

La lógica difusa se basa en que los elementos claves del pensamiento humano no son números, sino etiquetas de conjuntos difusos, esto es, clases de objetos en los cuales la transición desde membresía total a la no membresía es gradual. Esta característica primordial de los conjuntos fuzzy son la clave para emular una actividad de un humano envuelto en soluciones de problemas. El asumir que todo diseño y análisis de control puede ser reducido a la solución de un conjunto de ecuaciones algebraicas y diferenciales ha estado progresivamente cambiando por técnicas heurísticas y estocásticas.

Este enfoque describe aproximada pero efectivamente el comportamiento de sistemas complejos o mal definidos, que no permiten análisis matemáticos precisos. Esencialmente las técnicas cuantitativas del análisis de sistemas son inadecuadas para tratar con sistemas complejos; esto se debe al principio de incompatibilidad.

La esencia de este principio es que cuando la complejidad de un sistema se incrementa, nuestra habilidad para establecer principios precisos pero claros sobre su comportamiento disminuye, hasta que se alcanza un umbral más allá del cual precisión y claridad son mutuamente excluyentes. Para muchos propósitos las tareas básicas no requieren de un alto grado de precisión numérica para su ejecución. El cerebro humano toma ventaja de esta tolerancia de imprecisión para codificar las tareas o decisiones.

La habilidad para resumir información se manifiesta en forma preponderante en los lenguajes naturales. Consideremos el color de un objeto como una variable, entonces los valores: rojo, azul, etc., pueden interpretarse como etiquetas de subconjuntos difusos de un universo de objetos; estos valores pueden ser enunciados en un lenguaje específico y se denominan variables lingüísticas. Esta técnica no solo se puede usar para controlar sistemas sino también para el modelado de ellos.

6.2 Diseño de la ley de control

La función principal de las variables lingüísticas es proveer un medio sistemático para una caracterización aproximada de fenómenos complejos o mal definidos. En métodos cuantitativos de sistemas la relación entre dos variables numéricas a y b se pueden caracterizar por una tabla, la cual se expresa en palabras como un grupo de relaciones condicionales; por ejemplo, si $a = 5$ entonces $y = 10$. La misma técnica es empleada en el método a proponer, excepto que a y b ahora son variables difusas. En particular si a y b son variables lingüísticas, la relación condicional describe la dependencia de b en a ; Si a es pequeña entonces b es grande.

En principio los controladores fuzzy son similares a los sistemas expertos. Ambos tienen en sus elementos básicos:

Un conjunto de reglas de control, las cuales forman el esquema de conocimiento del controlador.

Un mecanismo de inferencia.

Una interface de salida

Un esquema general de un controlador fuzzy es presentado en la siguiente figura:

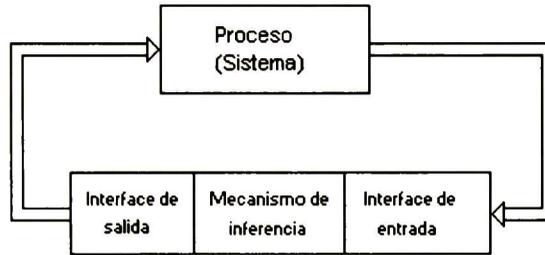


Figura 6.1

Sea U un conjunto cuyos elementos toman valores discretos o continuos. U es llamado universo de discurso; y u representa un elemento genérico de U ($u \in U$). Un conjunto difuso F , definido en un universo de discurso U , está caracterizado por una función de pertenencia F , la cual toma valores en el intervalo $[0, 1]$, y se representa por $\mu_F : U \rightarrow [0, 1]$. Las funciones de pertenencia más utilizadas en control difuso son de forma triangular y trapezoidal. Las características de estas funciones se muestra a continuación:

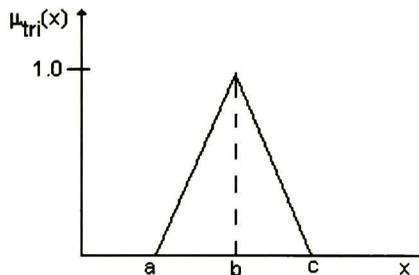


Figura 6.2

$$\mu_{tri}(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \frac{(x-a)}{(b-a)} & a \leq x \leq b \\ \frac{(c-x)}{(b-a)} & b < x < c \\ 0 & c \leq x \end{cases}$$

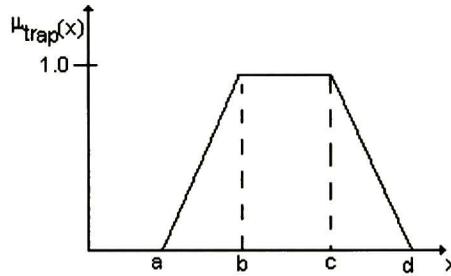


Figura 6.3

$$\mu_{trap}(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \frac{(x-a)}{(b-a)} & a \leq x \leq b \\ 1 & b \leq x \leq c \\ \frac{(d-x)}{(d-c)} & c < x < d \\ 0 & d \leq x \end{cases}$$

En la figura 6.4 se muestra el universo de discurso X , con los conjuntos difusos N, NS, Z, PS y P , la interface de entrada relaciona el parametro x con estos conjuntos difusos, este proceso es llamado difusificar, en el ejemplo x es P y SP . El parametro x , tiene un valor de pertenencia en cada uno de los conjuntos, el cual dependerá de la función de pertenencia utilizada, en este caso es triangular y el valor de pertenencia de x en SP es mayor que en P . Al utilizar las reglas de inferencia se obtiene un conjunto fuzzy como control; como un sistema requiere de un valor no fuzzy para su control, entonces se necesita una interfaz de salida llamada desdifusificación. Esta interfaz tiene varias maneras de ser implementada.

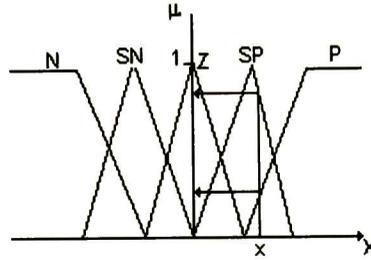


Figura 6.4

Las funciones de pertenencia para el control del péndulo invertido giratorio, requieren del error y la derivada del error para difusificar. En la figura 6.5 se muestra el esquema del controlador a utilizar.

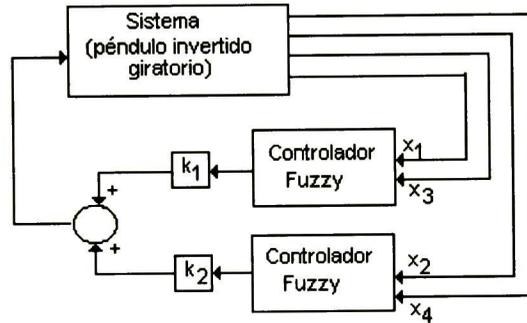


Figura 6.5

Las funciones de pertenencia para los controladores a utilizar son del tipo:

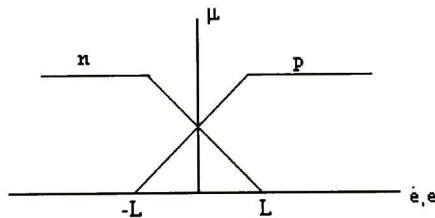


Figura 6.6

Las reglas de inferencia utilizadas para el control de este sistema son como siguen, sea $e = error$:

- Si e positivo y \dot{e} positivo entonces u positivo
- Si e positivo y \dot{e} negativo entonces u cero
- Si e negativo y \dot{e} positivo entonces u cero
- Si e negativo y \dot{e} negativo entonces u negativo

Esta reglas de inferencia son fáciles de entender, ya que la derivada del error da la pendiente del error y su signo, con esto indica si el control actual es el correcto, por ejemplo, si el error es positivo y su derivada negativa, entonces se entiende que hay error pero este tiende a disminuir, entonces el control es el correcto y no hay que afectarlo o afectarlo en menor medida según sea la pendiente.

La desdifusificación más común es la del centro de área dada por:

$$u^o = \frac{\sum_{i=1}^n \mu(u_i)u_i}{\sum_{i=1}^n \mu(u_i)}$$

para este controlador Fuzzy PD se hará una descomposición de veinte regiones [6] mostrados en la figura 6.7, donde cada región es usada para evaluar la ley de control:

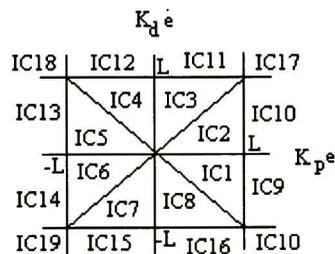


Figura 6.7

En IC1, IC2, IC5, IC6

$$u^o = \frac{L}{2(2L - k_p|e|)} [k_p e + k_d \dot{e}]$$

En IC3, IC4, IC7, IC8

$$u^o = \frac{L}{2(2L - k_d|\dot{e}|)} [k_p e + k_d \dot{e}]$$

En IC9, IC10

$$u^o = 0.5(L + k_d \dot{e})$$

En IC11, IC12

$$u^o = 0.5(L + k_p e)$$

En IC13, IC14

$$u^o = 0.5(-L + k_d \dot{e})$$

En IC15, IC16

$$u^o = 0.5(-L + k_p e)$$

En IC17

$$u^o = L$$

En IC19

$$u^o = -L$$

En IC18, IC20

$$u^o = 0$$

La ley de control estará dada por $u = ku^o$

Escogiendo las ganancias k_p, k_d , la L , y k de tal forma que el sistema se estabilice, encontrando de una manera sencilla utilizando la información apriori del capítulo 4 obtenemos k_p y k_d para cada controlador entonces la tarea es encontrar L y k , para el controlador del péndulo se tienen los siguientes valores:

$$\begin{aligned} k_p &= 43, & k_d &= 11 \\ L &= 8, & k &= 3 \end{aligned}$$

Para el controlador del brazo los valores son los siguientes:

$$\begin{aligned} k_p &= 0.65, & k_d &= 1.6 \\ L &= 8, & k &= 2.5 \end{aligned}$$

La siguiente gráfica muestra la estabilización del péndulo invertido giratorio en simulación, cuando tiene condiciones iniciales de 0.15 radianes (8.59 grados):

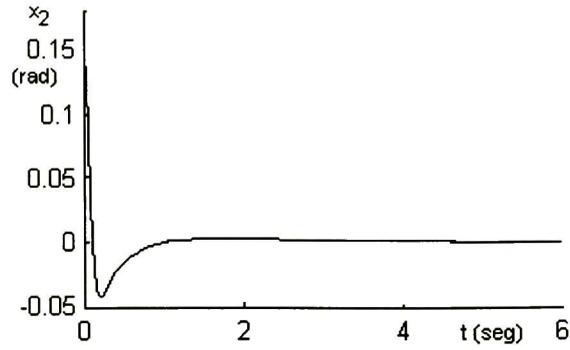


Figura 6.8

La ley de control es de la forma:

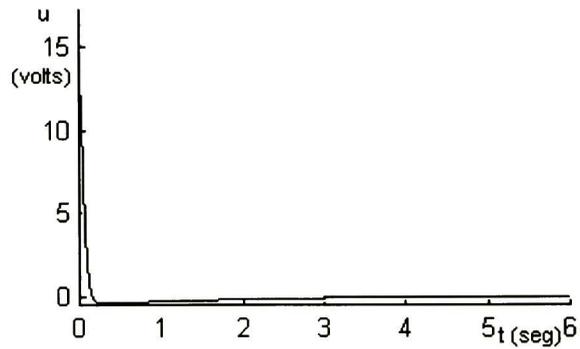


Figura 6.9

Las gráficas obtenidas en el laboratorio fueron las que a continuación se muestran:

La figura 6.10 muestra la regulación del péndulo invertido giratorio en tiempo real, cuando se le aplica un impulso:

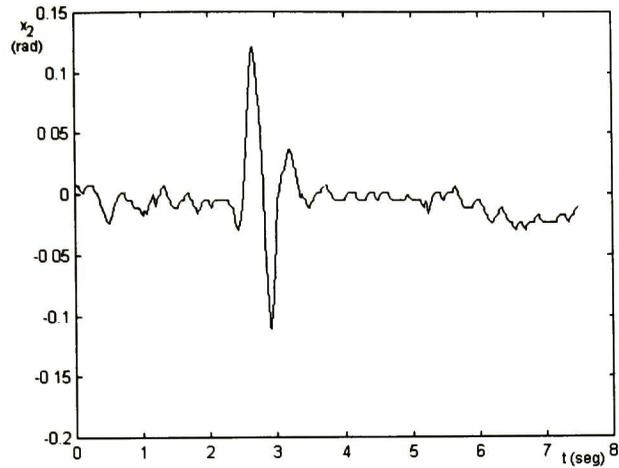


Figura 6.10

La ley de control aplicada al motor se muestra en la siguiente figura:

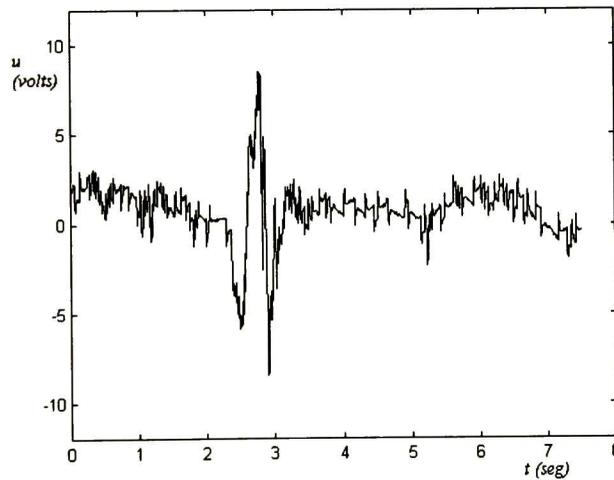


Figura 6.11

El control por medio de lógica difusa en este sistema es bueno, se tiene la ventaja que para el diseño del controlador se tomaron informaciones de

los controladores anteriores. El controlador difuso es robusto a cambios de parámetros del sistema, ya que se cambió el peso y longitud del péndulo, esto es, de 0.5 kg a 0.15 kg y de 0.75 m a 0.5m, obteniendo resultados satisfactorios.

6.3 Seguimiento de trayectoria

Para hacer el seguimiento de trayectoria de una referencia sinusoidal, la ley de control del controlador difuso será de la siguiente manera:

$$u = u_f + k_1 w_1 + k_2 w_2$$

donde u_f es la salida del control difuso para el controlador del péndulo. Las entradas se escogen de esta manera, ya que en el capítulo 4 tenemos información a priori de como son k_1 y k_2 , lo que facilitará el encontrar estos valores para obtener una respuesta deseada.

La estructura del controlador fuzzy sigue siendo la misma, entonces para seguir la referencia solo basta con encontrar los valores adecuados de k_1 y k_2 . Al encontrar los valores, se obtiene:

$$k_1 = -20$$

$$k_2 = 2$$

La siguiente simulación muestra el seguimiento de trayectoria del péndulo:

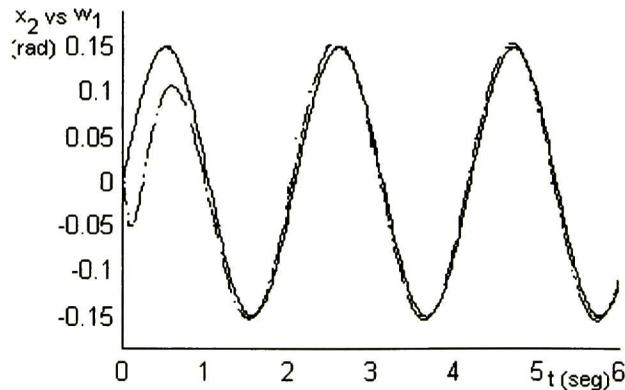


Figura 6.12

La figura 6.13 muestra el voltaje aplicado al motor para obtener el seguimiento de trayectoria:

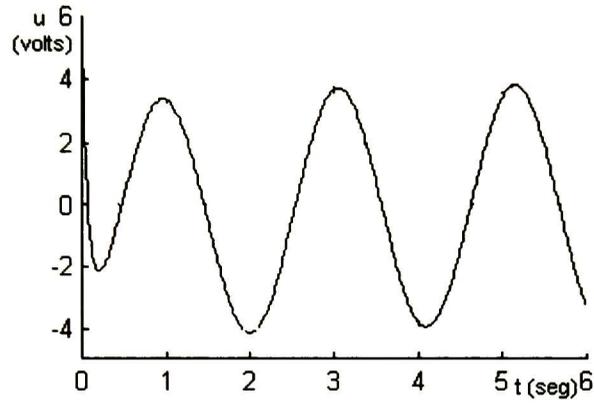


Figura 6.13

La figura 6.14 muestra la señal de referencia y la posición del péndulo en tiempo real:

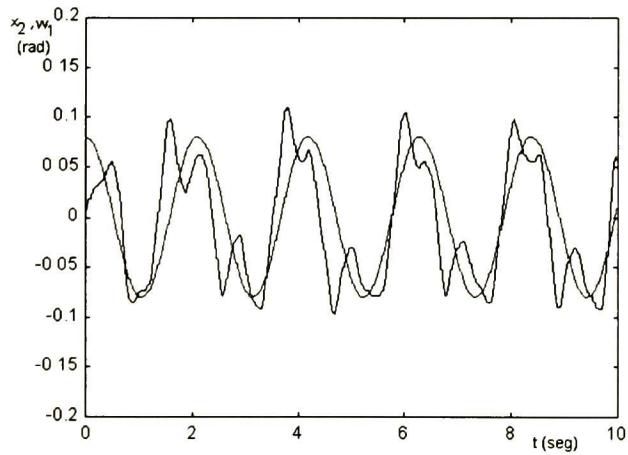


Figura 6.14

Uno de los problemas que tiene el controlador difuso para el seguimiento de trayectoria, es el de obtener las constantes requeridas para obtener el comportamiento deseado. Como se muestra en la simulación (figura 6.12) el péndulo tiene un error cuando se pretende seguir la trayectoria deseada, entonces es de esperarse que el sistema tenga un error mayor en tiempo real.

Capítulo 7

Conclusiones

En este proyecto de tesis se probaron tres diferentes esquemas de control en un sistema real, como lo es péndulo invertido giratorio, con cada uno de ellos se reguló el sistema y se hizo seguimiento de trayectoria. Es difícil comparar el desempeño del sistema con las diferentes técnicas empleadas ya que cada una de ellas presentan características muy diferentes, pero se puede ver como funcionan cada una de las técnicas de control bajo el mismo sistema real. Las ventajas y desventajas de cada tipo de controlador son subjetivas ya que dependen del sistema a controlar, y el diseñador debe seleccionar el controlador más adecuado para satisfacer las necesidades que requiere para el sistema.

Estas necesidades pueden ser: fácil análisis del control, implementación de fácil manejo, robustez en el sistema, etc. Este prototipo se construyó en el laboratorio del CIVESTAV-GDL el cual es un sistema útil para el desarrollo de nuevas técnicas de control, así como también de apoyo didáctico para la formación académica de los alumnos, la cual es importante ya que se puede mejorar la comprensión de cada una de las técnicas de control. Los trabajos futuros son el de implementar otras técnicas de control como no lineales, redes neuronales, control adaptativo, etc.

Apéndice A

Artículo

Control de un Péndulo Invertido Giratorio Usando Retroalimentación Lineal de Estado, Modos Deslizantes y PD Fuzzy.

Javier Ruiz, Alejandro Carrasco

Laboratorio de Ingeniería Eléctrica y Ciencias de la Computación
CINVESTAV-Guadalajara.
Ap. Postal 31-438, Plaza la Luna,
44550, Guadalajara, Jalisco.
Tel. (3)684-1580, Fax (3)684-1708
e-mail: jruiz@gdl.cinvestav.mx, ace@gdl.cinvestav.mx.

Resumen: En este trabajo se presenta el control de un péndulo invertido giratorio usando diferentes esquemas de control como son retroalimentación lineal de estado, modos deslizantes y PD Fuzzy. Las leyes de control se diseñan a partir del modelo linealizado sobre un punto de operación. Se presentan los resultados obtenidos así como un análisis comparativo de los diferentes esquemas.

I. INTRODUCCION.

Los experimentos con péndulos invertidos son clásicos en aplicaciones de teoría de control. Estos sistemas son bastante interesantes debido a las características que presentan, como: no linealidad, inestabilidad, fase no mínima, etc., lo cual los hace muy convenientes para probar nuevas técnicas y diferentes esquemas de control. Estudios relativos al modelado y control de péndulos invertidos pueden encontrarse, por ejemplo, en [1] y [2], además de las páginas que se les dedican prácticamente en cualquier texto sobre control de sistemas o teoría de sistemas.

Un tipo especial de experimento basado en el péndulo invertido es el llamado péndulo invertido giratorio. Además de las características dinámicas ya mencionadas, este sistema es atractivo porque pertenece al tipo de sistemas conocidos como subactuados, los cuales son sistemas mecánicos que tienen un mayor número de uniones o eslabones que de actuadores, y cuyo estudio es importante en aspectos de robótica, por ejemplo. Algunos resultados interesantes respecto al control de este tipo de sistemas pueden encontrarse en [3] y [4].

El objetivo de este artículo es probar diferentes esquemas de control sobre el péndulo invertido

giratorio y hacer una comparación del desempeño que se tiene con cada uno de ellos. Las técnicas de control que utilizamos son: retroalimentación lineal de estado, modos deslizantes y PD fuzzy. Para el diseño de las leyes de control, se considera el sistema linealizado alrededor de un punto de operación, y posteriormente se implementan las acciones correspondientes en simulación y sobre el sistema real, este último diseñado y construido en el Laboratorio de Ingeniería Eléctrica y Ciencias de la Computación, CINVESTAV-Guadalajara.

La organización del artículo es la siguiente. En la Sección II se presenta la descripción del sistema y la obtención del modelo matemático. En la parte III se introducen los tipos de control a utilizar, se explica brevemente en que consisten y como se obtuvieron para el caso de estudio. Finalmente, en la Sección IV se presentan las conclusiones.

II. DESCRIPCION DEL SISTEMA Y OBTENCION DEL MODELO

El péndulo invertido giratorio, mostrado esquemáticamente en la Fig. 1, consiste en un péndulo colocado al final de un brazo giratorio, el cual está actuado por un servo motor. Físicamente, este sistema es parecido al péndulo invertido clásico, excepto que la trayectoria inducida por el actuador no es lineal, sino circular, dándole una nueva dimensión al problema.

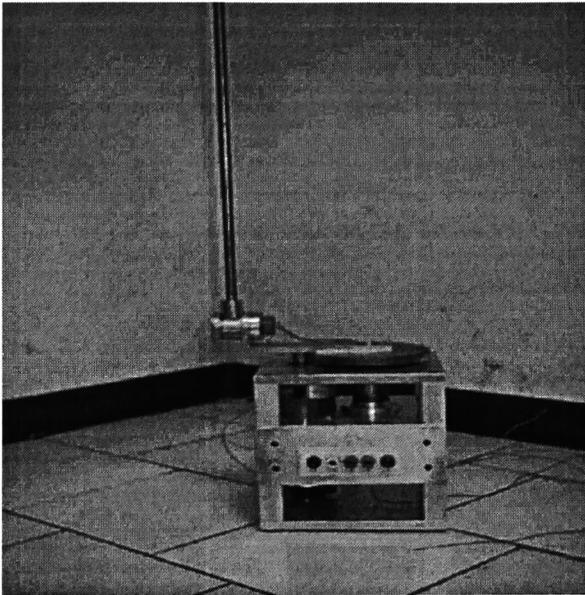


Fig. 1. Péndulo invertido giratorio

Para obtener las ecuaciones que describen el comportamiento dinámico del sistema (modelo matemático del sistema) se utilizará el método de Lagrange, esto por ser un método eficaz para modelar sistemas mecánicos.

La ecuación de Lagrange para un sistema conservativo está dada por:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = Q \quad (1)$$

donde q es una de las coordenadas generalizadas independientes, L es el Lagrangiano formado por la diferencia entre la energía cinética y la energía potencial, y Q se denomina fuerza generalizada.

Cuando se aplica este método, se obtienen tantas ecuaciones de movimiento como grados de libertad se tengan. Los grados de libertad son el número de coordenadas independientes que

se requieren para especificar completamente la posición de todas y cada una de las partículas o partes componentes del sistema. Para el péndulo invertido giratorio, tenemos 2 grados de libertad, que son los ángulos del brazo y del péndulo, especificados respectivamente como θ e ϕ (ver Fig. 2).

θ

Fig. 2

Considerando las energías cinética y potencial del sistema, y aplicando (1), obtenemos las siguientes ecuaciones de movimiento del sistema

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \quad (2)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \phi} = \tau \quad (3)$$

y la ecuación del torque generado por el motor de DC

$$\tau = K \dot{\theta} \quad (4)$$

donde cada una de las variables y los parámetros se especifican en la tabla I, así como los valores correspondientes para el sistema real.

III. DISEÑO DE LAS LEYES DE CONTROL

A. Control por retroalimentación de estado

Retroalimentación de estado es una de las técnicas más ampliamente utilizadas para modificar las características dinámicas de un sistema y realizar diversas acciones de control [5]. Para controlar el péndulo invertido giratorio, utilizaremos una retroalimentación de estado de la forma

$$u(t) = -kx(t),$$

donde $u(t)$ es la entrada del sistema, $x(t)$ es el vector de estados, y k es el vector de retroalimentación, este último a ser determinado de manera tal que el sistema en lazo cerrado tenga una dinámica específica.

A partir de (7), puede verse que el sistema es controlable en el punto de operación, ya que la matriz de controlabilidad correspondiente es no singular. Los estados del sistema (ángulos y velocidades angulares del brazo y péndulo) son medibles, por lo tanto podemos retroalimentar esta información.

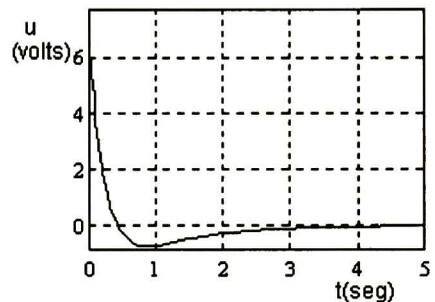
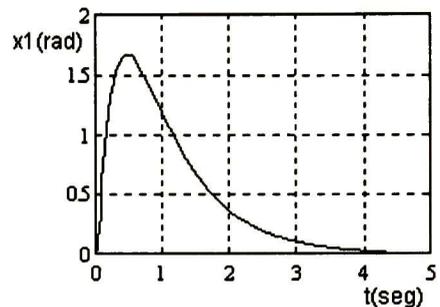
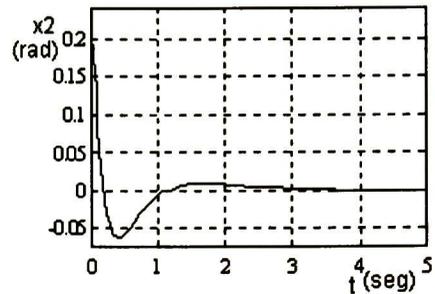
El comportamiento dinámico del sistema retroalimentado depende de la colocación de los polos en lazo cerrado, y esto depende a su vez del vector de retroalimentación k . A partir de resultados en simulación, se determinó que un comportamiento deseable del sistema (deseable en el sentido de establecer un compromiso adecuado entre la velocidad de respuesta y evitar un valor de sobreimpulso muy grande en el periodo transitorio) se obtiene con una colocación de polos en lazo cerrado en las siguientes posiciones

$$\begin{aligned} p_1 &= -32.99 \\ p_2 &= -4.63 \\ p_3 &= -3.45 \\ p_4 &= -1.2 \end{aligned}$$

El valor de k para obtener el polinomio característico correspondiente en lazo cerrado es

$$k = [-0.7 \ -31.95 \ -1.5 \ -7.76].$$

Los resultados obtenidos usando retroalimentación de estado se muestran en las siguientes gráficas, en donde se puede apreciar la evolución de los ángulos del brazo (x_2), y del péndulo (x_1), así como la ley de control (u).



B. Control por modos deslizantes

Este tipo de control [6] es discontinuo ya que es de la forma:

$$u = \begin{cases} u^+(x, t) & \text{si } s(x) > 0 \\ u^-(x, t) & \text{si } s(x) < 0 \end{cases} \quad (8)$$

donde s es una superficie de cambio. Como puede verse, en nuestro sistema la entrada afecta directamente a dos estados; para obtener un sistema más sencillo de analizar utilizamos la siguiente matriz de transformación T .

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4.615 \\ 0 & 0 & 0 & -0.0803 \end{bmatrix} \quad (9)$$

Parámetro	Valor
m_2 : masa del péndulo	0.55 kg
l_1 : longitud del brazo	0.12 m
J_b : inercia de base	0.002 kg-m ²
γ : ángulo del brazo	
β : ángulo del péndulo	
l_2 : longitud del péndulo	0.75 m
g : fuerza de gravedad	9.81 m/s ²
k_m : ganancia del motor	0.104N-m/amp
k_g : ganancia de engranes	5.5
R_m : resistencia del motor	1.9 ohms
V : voltaje de entrada	

Tabla I.

Haciendo la siguiente asignación de variables

$$x_1 = \gamma, \quad x_2 = \beta, \quad x_3 = \dot{\gamma}, \quad x_4 = \dot{\beta}$$

$$u = V \quad y = \beta$$

donde x_i son los estados, u es la entrada y y es la salida del sistema, y reescribiendo (2), (3) y (4) en forma matricial, obtenemos la siguiente representación no lineal del sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + g(x)u \\ y &= h(x) \end{aligned} \quad (5)$$

donde

$$f(x) = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ \frac{R_m m_2 l_1 \sin(x_2) (l_2 x_4^2 - g \cos(x_2)) - k_m^2 k_g^2 x_3}{m_2 l_1^2 R_m + J R_m - m_2 R_m l_1^2 \cos^2(x_2)} \\ \frac{f_1 - f_2}{\cos^2(x_2) l_1^2 R_m m_2 l_2 - R_m l_2 m_2 l_1^2 - R_m l_2 J} \end{bmatrix}$$

$$g(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{k_m k_g}{m_2 l_1^2 R_m + J R_m - m_2 R_m l_1^2 \cos^2(x_2)} \\ \frac{\cos(x_2) l_1 k_m k_g}{\cos^2(x_2) l_1^2 R_m m_2 l_2 - R_m l_2 m_2 l_1^2 - R_m l_2 J} \end{bmatrix}$$

$$h(x) = [0 \quad x_2 \quad 0 \quad 0]$$

$$f_1 = \cos(x_2) l_1 (l_1 R_m m_2 l_2 x_4^2 \sin(x_2) - k_g^2 k_m^2 x_3)$$

y

$$f_2 = R_m g \sin(x_2) (m_2 l_1^2 + J)$$

Nuestro objetivo es controlar el sistema en el punto $x_1 = 0, x_2 = 0$, es decir, en el punto cero del ángulo del brazo, y con el péndulo en posición vertical. Por tanto, procederemos a linealizar (5) alrededor del punto $x_0 = [0 \ 0 \ 0 \ 0]$. Para ello, utilizamos una aproximación en series de Taylor.

Después de algunos cálculos, obtenemos que la representación del sistema en dicho punto de operación es

$$\dot{x} = Ax + bu \quad (6)$$

$$y = cx$$

donde:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{-m_2 l_1 g}{J} & \frac{-k_m^2 k_g^2}{J R_m} & 0 \\ 0 & g \frac{J + m_2 l_1^2}{l_2 J} & \frac{k_m^2 k_g^2 l_1}{J R_m l_2} & 0 \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{k_m k_g}{J R_m} \\ \frac{-k_m k_g l_1}{R_m J l_2} \end{bmatrix}$$

$$c = [0 \ 1 \ 0 \ 0]$$

Finalmente, substituyendo los valores del sistema real, obtenemos

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -24.34 & -32.86 & 0 \\ 0 & 21.62 & 7.12 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 57.46 \\ -12.45 \end{bmatrix} u \quad (7)$$

$$y = [0 \ 1 \ 0 \ 0]x$$

el cual será el modelo matemático del sistema que utilizaremos para la síntesis de los controladores.

para obtener

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 57.47 \\ 0 & 0 & 0 & -12.45 \\ 0 & 75.44 & 0 & .013 \\ 0 & -1.74 & -0.57 & -32.86 \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$\bar{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

A continuación, escogemos una superficie del modo

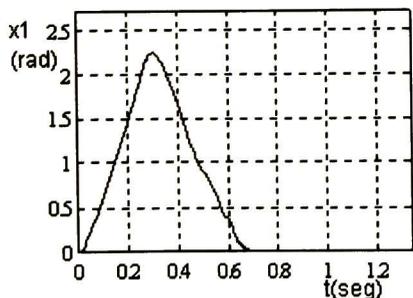
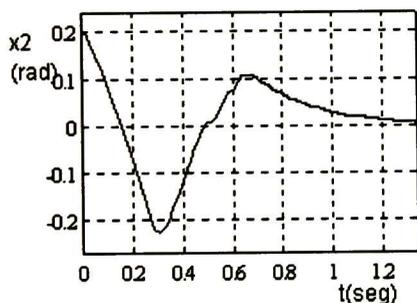
$$s = c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 + x_4 \quad (11)$$

donde c_1, c_2 y c_3 son constantes. Para este control se utilizó la superficie deslizante:

$$s = -0.55x_1 - 5.83x_2 - 0.297(x_3 + 4.61x_4) - 0.0803x_4 \quad (12)$$

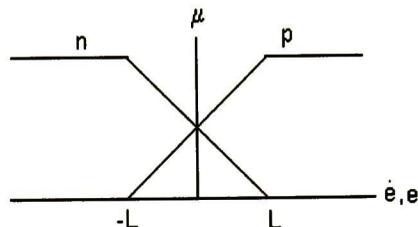
Su ley de control es $u = -k \text{sign}(s)$.

Los resultados obtenidos se muestran en las siguientes gráficas.



C. Control Fuzzy

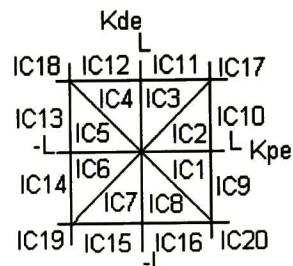
Para el control Fuzzy tenemos la siguiente función de membresía de entrada:



Las reglas utilizadas son las siguientes (e =error, de =d.error, p =positivo, n =negativo):

- 1) Si $e=p$ y $de=p$ entonces $u^* = p$
- 2) Si $e=p$ y $de=n$ entonces $u^* = \text{cero}$
- 3) Si $e=n$ y $de=p$ entonces $u^* = \text{cero}$
- 4) Si $e=n$ y $de=n$ entonces $u^* = n$

para la defuzzificación comúnmente se utiliza el centro de masa. Para este controlador haremos



una descomposición de 20 regiones [7], y el control estará dado por $u = Ku^*$, donde:

en IC1, IC2, IC5, IC6

$$u^* = \frac{L}{2(2L - K_p |e|)} [K_p e + K_d e]$$

en IC3, IC4, IC7, IC8

$$u^* = \frac{L}{2(2L - K_d |e|)} [K_p e + K_d e]$$

en IC9, IC10

$$u^* = \frac{1}{2} [L + K_d e]$$

en IC11, IC12

$$u^* = \frac{1}{2} [L + K_p e]$$

en IC13, IC14

$$u' = \frac{1}{2}[-L + K_p e]$$

en IC15, IC16

$$u' = \frac{1}{2}[-L + K_p e]$$

en IC17

$$u'' = L$$

en IC19

$$u'' = -L$$

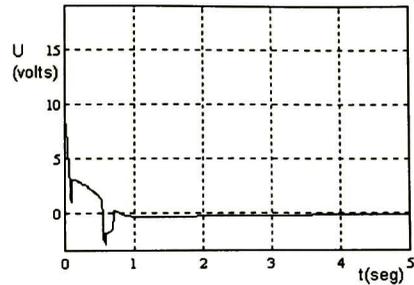
en IC18, IC20

$$u' = 0$$

donde las constantes para el primer eslabon (brazo) son $L=8$, $K=2.5$, $K_p=1.29$, $K_d=1.82$.

Para el péndulo, los valores correspondientes son: $L=10$, $K=3$, $K_p=37.9$, $K_d=9.25$.

Los resultados obtenidos se muestran a continuación.



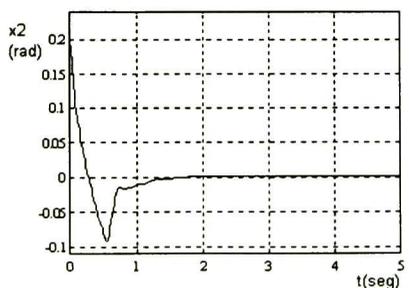
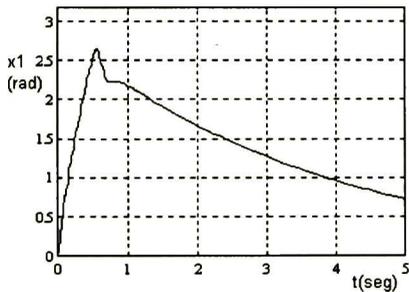
IV. CONCLUSIONES

Como podemos ver de los resultados presentados, el péndulo invertido giratorio pudo ser controlado usando los esquemas propuestos, existiendo, desde luego, diferencias entre los resultados obtenidos con uno y otro método.

En las gráficas que se muestran, puede apreciarse la evolución de los ángulos del brazo y del péndulo, así como el comportamiento de la ley de control para cada caso. De estas gráficas, pueden hacerse comparaciones entre los tiempos de respuesta para que los ángulos lleguen a la posición deseada, el rango de sobreimpulso y el valor del voltaje aplicado al servomotor.

Como puede apreciarse, el tiempo de respuesta para la estabilización y el voltaje aplicado al servo servomotor son menores en modos deslizantes en comparación de los otros dos métodos, pero el sobreimpulso es mucho mayor en este caso. Esto es lógico, si se tiene en cuenta que en general una respuesta más rápida del sistema involucra costos de energía mayores. Cabe mencionar que en todos los esquemas se trató de la misma ubicación de polos en el sistema linealizado, para poder hacer las comparaciones.

Por lo que respecta al rango de perturbación (rango en el que el sistema puede ser controlado), éste es menor para modos deslizantes y retroalimentación de estado que usando técnicas fuzzy. Una de las razones de ello puede ser debido a que la ley de control en los dos primeros casos se obtuvo a partir de la representación lineal del sistema en el punto de operación.



para obtener

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 57.47 \\ 0 & 0 & 0 & -12.45 \\ 0 & 75.44 & 0 & .013 \\ 0 & -1.74 & -0.57 & -32.86 \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$\bar{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

A continuación, escogemos una superficie del modo

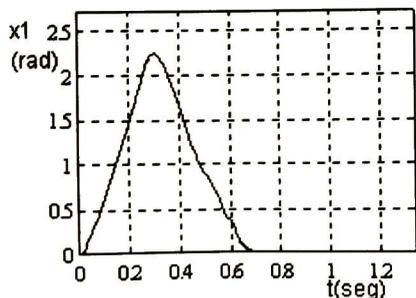
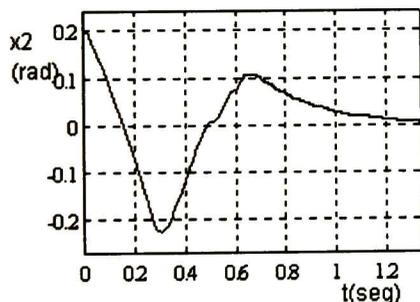
$$s = c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 + x_4 \quad (11)$$

donde c_1, c_2 y c_3 son constantes. Para este control se utilizó la superficie deslizante:

$$s = -0.55x_1 - 5.83x_2 - 0.297(x_3 + 4.61x_4) - 0.0803x_4 \quad (12)$$

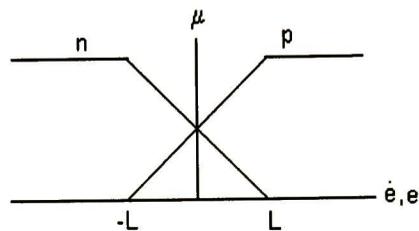
Su ley de control es $u = -k \text{sign}(s)$.

Los resultados obtenidos se muestran en las siguientes gráficas.



C. Control Fuzzy

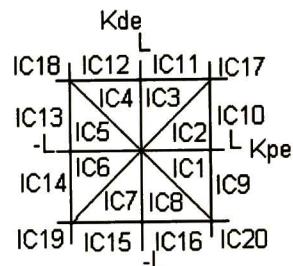
Para el control Fuzzy tenemos la siguiente función de membresía de entrada:



Las reglas utilizadas son las siguientes (e=error, de=d.error, p=positivo, n=negativo):

- 1) Si $e=p$ y $de=p$ entonces $u^* = p$
- 2) Si $e=p$ y $de=n$ entonces $u^* = \text{cero}$
- 3) Si $e=n$ y $de=p$ entonces $u^* = \text{cero}$
- 4) Si $e=n$ y $de=n$ entonces $u^* = n$

para la defuzzificación comúnmente se utiliza el centro de masa. Para este controlador haremos



una descomposición de 20 regiones [7], y el control estará dado por $u = Ku^*$, donde:

en IC1, IC2, IC5, IC6

$$u^* = \frac{L}{2(2L - K_p |e|)} [K_p e + K_d e]$$

en IC3, IC4, IC7, IC8

$$u^* = \frac{L}{2(2L - K_d |e|)} [K_p e + K_d e]$$

en IC9, IC10

$$u^* = \frac{1}{2} [L + K_d e]$$

en IC11, IC12

$$u^* = \frac{1}{2} [L + K_p e]$$

en IC13, IC14

$$u' = \frac{1}{2} [-L + K_p e]$$

en IC15, IC16

$$u' = \frac{1}{2} [-L + K_p e]$$

en IC17

$$u' = L$$

en IC19

$$u' = -L$$

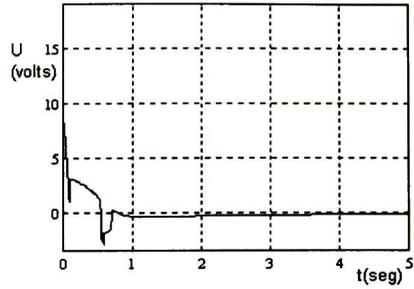
en IC18, IC20

$$u' = 0$$

donde las constantes para el primer eslabon (brazo) son $L=8$, $K=2.5$, $K_p=1.29$, $K_d=1.82$.

Para el péndulo, los valores correspondientes son: $L=10$, $K=3$, $K_p=37.9$, $K_d=9.25$.

Los resultados obtenidos se muestran a continuación.



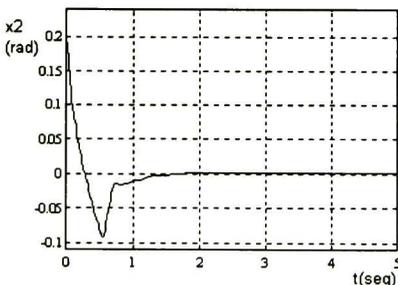
IV. CONCLUSIONES

Como podemos ver de los resultados presentados, el péndulo invertido giratorio pudo ser controlado usando los esquemas propuestos, existiendo, desde luego, diferencias entre los resultados obtenidos con uno y otro método.

En las gráficas que se muestran, puede apreciarse la evolución de los ángulos del brazo y del péndulo, así como el comportamiento de la ley de control para cada caso. De estas gráficas, pueden hacerse comparaciones entre los tiempos de respuesta para que los ángulos lleguen a la posición deseada, el rango de sobreimpulso y el valor del voltaje aplicado al servomotor.

Como puede apreciarse, el tiempo de respuesta para la estabilización y el voltaje aplicado al servo servomotor son menores en modos deslizantes en comparación de los otros dos métodos, pero el sobreimpulso es mucho mayor en este caso. Esto es lógico, si se tiene en cuenta que en general una respuesta más rápida del sistema involucra costos de energía mayores. Cabe mencionar que en todos los esquemas se trató de la misma ubicación de polos en el sistema linealizado, para poder hacer las comparaciones.

Por lo que respecta al rango de perturbación (rango en el que el sistema puede ser controlado), éste es menor para modos deslizantes y retroalimentación de estado que usando técnicas fuzzy. Una de las razones de ello puede ser debido a que la ley de control en los dos primeros casos se obtuvo a partir de la representación lineal del sistema en el punto de operación.



REFERENCIAS

- [1] S.Mori, H. Nishikara, and K. Furuta, "Control of unstable mechanical systems: Control of pendulum", *Int. J. of Control*, vol. 23, no. 5, pp.673-692, 1976.
- [2] K. Furuta, and M. Yamakita, "Swing up control of inverted pendulum", *Proc. IECON'91*, pp.2193-2198, 1991.
- [3] T. Sugie, and K. Fujimoto, "Control of inverted pendulum systems based on approximate linearization. Design and experiment", *Proc. of the 33rd CDC*, pp. 1647-1648, 1994.
- [4] S.A. Bortoff, "Robust swing-up control for a rotational double pendulum", *Proc. of the 1996 IFAC World Congress, San Fco., Cal., vol. F*, pp. 413-418, 1996.
- [5] T. Kailath, "Linear Systems", Prentice-Hall, Englewood, Cliffs, 1980.
- [6] Heck, Bonnie S., "Sliding-Mode Control for Singularly Perturbed Systems" *Int. J. of Control*, vol. 53, 1991.
- [7] H. A. Malki, H. Li, and G. Chen, "New design and stability analysis of fuzzy proportional-derivative control systems", *IEEE Trans. on Fuzzy Systems*, vol. 2, pp 245-254, 1994.

Apéndice B

Definiciones.

Estabilidad en el sentido de Liapunov.

Sea k el radio de una región esférica, alrededor de un estado en equilibrio x_e como $\|x - x_e\| \leq k$, donde $\|x - x_e\|$ se denomina norma euclidiana.

Sea $S(\delta)$ la región que contiene todos los puntos tales que:

$\|x - x_e\| \leq \delta$ y $S(\varepsilon)$ la región que contiene todos los puntos tales que:

$$\|\phi(t; x_0, t_0) - x_e\| \leq \varepsilon \quad \text{para todo } t \geq t_0$$

Se dice que un estado de equilibrio x_e , es estable en el sentido de Liapunov si, para cada rango de $S(\varepsilon)$, existe una $S(\delta)$ tal que las trayectorias que se inician en $S(\delta)$ no salgan de $S(\varepsilon)$ al crecer t indefinidamente.

Estabilidad Asintótica.

Se dice que un estado de equilibrio x_e es asintóticamente estable, si es estable en el sentido de Liapunov y si toda solución que sale desde el interior de $S(\delta)$ converge hacia x_e , sin abandonar $S(\varepsilon)$, al crecer t indefinidamente.

Inestabilidad.

Se dice que un estado de equilibrio x_e es inestable si para algún número real $\varepsilon > 0$ y para cualquier número real $\delta > 0$, por pequeño que sea, siempre hay un estado x_0 en $S(\delta)$, tal que la trayectoria que comienza en este estado sale de $S(\varepsilon)$.

Rango de una matriz.

Se dice que una matriz A es de rango m , si la máxima cantidad de renglones (o columnas) linealmente independientes es m

Valores propios de una matriz cuadrada.

Para una matriz A de $n \times n$, el determinante $|\lambda I - A|$ se denomina polinomio característico de A . Es un polinomio de n -ésimo grado de λ . La ecuación característica, está dada por

$|\lambda I - A| = 0$, las n raíces de la ecuación característica se denomina valores propios de A .

Vectores propios de una matriz cuadrada.

Cualquier vector x_i no nulo, talque $Ax_i = \lambda_i x_i$ se dice que es un vector propio asociado con un valor propio λ_i de A , donde A es una matriz cuadrada.

Matrices Similares.

Se dice que las matrices A y B de $n \times n$ son similares, si hay una matriz P tal que

$$P^{-1}AP = B.$$

Matrices Definidas Positivas y Semidefinidas Positivas.

Una matriz A de $n \times n$ es una matriz semidefinida positiva si $x^T Ax \geq 0$, para toda x , si esto se mantiene solo para $x \equiv 0$, se dice que A es definida positiva.

Prueba de valores propios.

Una matriz A de $n \times n$ es una matriz definida positiva, si todos sus valores propios λ_i son positivos.

La matriz A es semidefinida positiva si todos sus valores propio λ_i son no negativos y al menos uno de ellos es cero.

Nótese que si A es una matriz definida positiva, entonces $|A| \neq 0$, porque todos los valores son positivos. Por tanto, para una matriz definida positiva, siempre existe inversa.

Polos y Ceros.

Se dice que una función de transferencia tiene n polos y m .

$$G(s) = \frac{(s+\delta_1)(s+\delta_2)\dots(s+\delta_m)}{(s+\lambda_1)(s+\lambda_2)\dots(s+\lambda_n)}$$

Los m valores de s denominados $-\delta_1, -\delta_2, \dots, -\delta_m$, que hacen al polinomio del numerador de $G(s)$ cero, se conoce como los ceros del sistema. Los n valores de s , denominados $-\lambda_1, -\lambda_2, \dots, -\lambda_n$, que hacen al polinomio del denominador de $G(s)$ cero, o hacen infinita a la función, se conocen como los polos del sistema.

Bibliografía

- [1] Bortoff, "Robust swing up control for a rotational double pendulum", Proc. of the 1996 IFAC World Congress.
- [2] Fujimoto K. and Sugie T., "Control of inverted pendulum systems based on approximate linearization. Design and experiment" Proc. the 33rd CDC, 1994.
- [3] Furuta K. and Yamakita M., "Swing up control of inverted pendulum", Proc.IECON'91, 1991.
- [4] Kailat Thomas, "Linear Systems", Prentice-Hall, 1980.
- [5] Knobloch H., Isidori A., Flockersi D., "Topics in Control Theory" Birkhäuser Verlag, 1993.
- [6] Malki, H. Li, and G. Chen, "New design and stability analysis of fuzzy proportional-derivative control systems" IEEE Trans. on Fuzzy Systems, 1994.
- [7] Mori, H. Nishikara, and K. Furuta, "Control of unstable mechanical systems: Control of pendulum" Int. J. of Control, vol. 23, no. 5, 1976.
- [8] Ogata Katsuhiko, "Modern Control Engineering" Prentice-Hall, 1991.
- [9] Pedrycz Witold, "Fuzzy Control and Fuzzy Systems" Research Studies Press LTD, 1993.
- [10] Slotine, J- J. E., and Sastry, "Tracking Control of Nonlinear Systems Using Sliding Surfaces with Applications to Robot Manipulators" Int. J. Control, Vol. 39, 1982.

- [11] Spong Mark W., Vidyasagar M., "Robot Dynamics and Control", John Wiley & Sons, 1989.
- [12] Utkin Vadim I., "Sliding Modes in Control Optimization". Springer-Verlag, 1992.
- [13] Wells Dare A., "Dinamica de Lagrange" McGraw-Hill, 1972.



**CENTRO DE INVESTIGACION Y DE ESTUDIOS AVANZADOS DEL IPN
UNIDAD GUADALAJARA**

El Jurado designado por la Unidad Guadalajara del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, aprobó la tesis: "Control de un péndulo invertido giratorio" el día 14 de diciembre de 1998.

Dr. Alexander Loukianov
Investigador Cinvestav 3C
Guadalajara.

Dr. Antonio Ramírez Treviño
Investigador Cinvestav 2A
Guadalajara.

Dr. José Javier Ruiz León
Investigador Cinvestav 2A
Guadalajara.



CINVESTAV
BIBLIOTECA CENTRAL



SSIT000003815