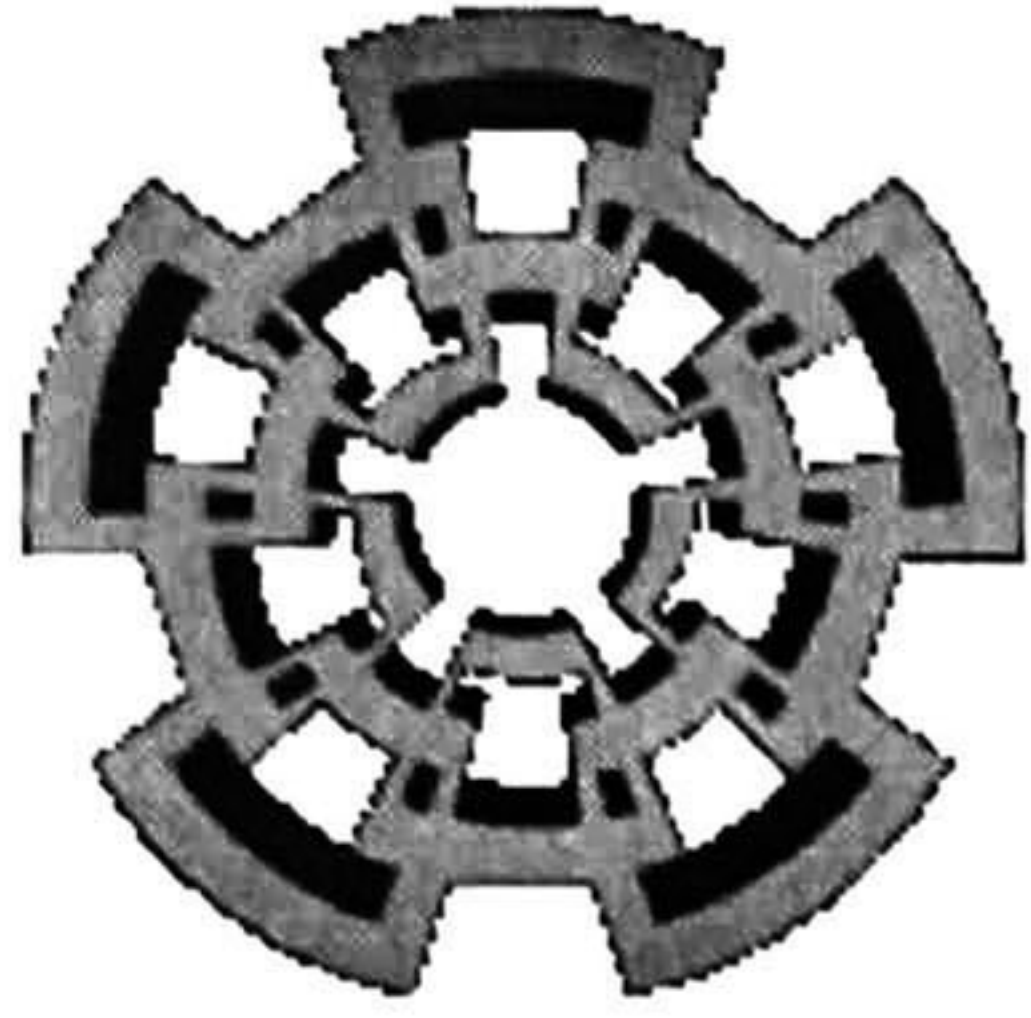




E10-17345



# CINVESTAV

Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN  
Unidad Guadalajara

---

CINVESTAV I.P.N.  
SECCION DE INFORMACION  
Y DOCUMENTACION

## **Observadores asintóticos para sistemas de eventos discretos modelados con redes de Petri**

Tesis que presenta  
**Luis Isidro Aguirre Salas**



Para obtener el grado de  
**Maestro en Ciencias**

En la especialidad de  
**Ingeniería Eléctrica**

Guadalajara, Jal., Marzo de 1999

CLASIF.: \_\_\_\_\_

ADQUIS.: TESIS-1999

FECHA: 21-IX-99

PROCED.: Depto. Serv. Bibli.

✱

# **Observadores asintóticos para sistemas de eventos discretos modelados con redes de Petri**

**Tesis de Maestría en Ciencias  
Ingeniería Eléctrica**

Por:

**Luis Isidro Aguirre Salas**

Ingeniero Electrónico en Computación  
Centro de Enseñanza Técnica Industrial 1993-1997

Becario del CONACyT, expediente no. **121164**

Directores de Tesis

**Dr. Antonio Ramírez Treviño**

**Dra. Ofelia Begovich Mendoza**

CINVESTAV del IPN Unidad Guadalajara, Marzo de 1999

# *Agradecimientos*

A mis Padres y hermanos por su apoyo incondicional durante toda mi formación académica.

A mis asesores, Dr. Antonio Ramírez Treviño y Dra. Ofelia Begovich Mendoza, por ayudarme a llevar a buen fin el presente trabajo.

Al Dr. Luis Ernesto López Mellado por su participación en las asesorías y por sus buenas ideas.

A los revisores de la tesis, Dr. Manuel Guzmán Rentería y Dr. Ricardo Raúl Jacinto Montes, por ayudarme a detectar y corregir los errores de este trabajo.

A los profesores del CINVESTAV y a todos aquellos que han ayudado a mi formación académica y personal.

A los profesores Natalia Fuldyak, Magas Taras y Carlos Vázquez por enseñarme la perseverancia.

A María Elena por permitirme usar sus resultados, sobre los cuales se basa este trabajo.

A la “rana”, sin ayuda de la cual no se hubieran encontrado varios de los conceptos aquí presentados.

A todo ellos muchas gracias.

# Índice General

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| <b>1</b> | <b>Generalidades</b>  | <b>1</b>  |
| 1.1      | Los sistemas de eventos discretos . . . . .                                   | 1         |
| 1.2      | El problema del observador y su importancia . . . . .                         | 2         |
| 1.3      | Revisión de la literatura . . . . .   | 3         |
| 1.4      | Objetivos . . . . .   | 5         |
| 1.5      | Organización de la tesis . . . . .  | 5         |
| <b>2</b> | <b>Herramientas formales para el modelado de SED</b>                          | <b>7</b>  |
| 2.1      | Introducción . . . . .  | 8         |
| 2.2      | Las redes de Petri . . . . .  | 9         |
| 2.2.1    | Las redes de Petri ordinarias . . . . .                                       | 9         |
| 2.2.2    | Las redes de Petri booleanas . . . . .  | 10        |
| 2.2.3    | Las redes de Petri interpretadas . . . . .                                    | 12        |
| 2.2.4    | Otros conceptos básicos . . . . .   | 14        |
| 2.2.5    | Propiedades de las redes de Petri . . . . .                                   | 15        |
| 2.2.6    | Clasificación de las redes de Petri . . . . .                                 | 16        |
| 2.3      | Ejemplo de modelado de un SED mediante redes de Petri interpretadas . . . . . | 18        |
| 2.4      | Conclusiones . . . . .  | 22        |
| <b>3</b> | <b>Observabilidad en los sistemas de eventos discretos</b>                    | <b>23</b> |
| 3.1      | Introducción . . . . .  | 24        |
| 3.2      | Sistemas de eventos discretos observables . . . . .                           | 25        |
| 3.3      | Observabilidad de los SED modelados con RPI . . . . .                         | 27        |
| 3.3.1    | Caracterización de la observabilidad de un SED . . . . .                      | 27        |

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| 3.3.2    | Observabilidad de los SED modelados con grafos marcados, máquinas de estado y redes de libre elección . . . . . | 31        |
| 3.4      | Algoritmos para determinar si un SED es observable . . . . .  | 35        |
| 3.5      | Conclusiones . . . . .  | 37        |
| <b>4</b> | <b>Diseño de observadores asintóticos</b>   | <b>39</b> |
| 4.1      | Introducción . . . . .  | 40        |
| 4.2      | Planteamiento del problema . . . . .  | 40        |
| 4.3      | Inferencia de los eventos incontrolables . . . . .  | 42        |
| 4.4      | Conclusiones . . . . .  | 43        |
| <b>5</b> | <b>Observadores asintóticos monolíticos</b>   | <b>45</b> |
| 5.1      | Introducción . . . . .  | 46        |
| 5.2      | Definición de observador asintótico monolítico . . . . .  | 46        |
| 5.3      | Diseño de observadores asintóticos monolíticos . . . . .  | 46        |
| 5.4      | Algoritmos para el diseño de observadores monolíticos . . . . .   | 48        |
| 5.5      | Conclusiones . . . . .  | 53        |
| <b>6</b> | <b>Observadores asintóticos desligados</b>  | <b>55</b> |
| 6.1      | Introducción . . . . .  | 56        |
| 6.2      | Definición de observador asintótico desligado . . . . .   | 56        |
| 6.3      | Diseño de observadores asintóticos desligados . . . . .   | 57        |
| 6.4      | Algoritmos para el diseño de observadores desligados . . . . .  | 61        |
| 6.5      | Conclusiones . . . . .  | 66        |
| <b>7</b> | <b>Observadores asintóticos desligados especiales</b>   | <b>67</b> |
| 7.1      | Introducción . . . . .  | 68        |
| 7.2      | Un caso especial . . . . .  | 68        |
| 7.3      | Observadores asintóticos desligados para las ME . . . . .   | 73        |
| 7.3.1    | Diseño de observadores asintóticos desligados para las ME . . . . .   | 73        |
| 7.3.2    | Algoritmo para la implementación de un observador asintótico para un SED modelado mediante una ME . . . . .     | 73        |
| 7.4      | Observadores asintóticos desligados para las LE . . . . .   | 76        |



|  |   |           |
|--|---|-----------|
| <b>ÍNDICE GENERAL</b>                      | <b>5</b>  |           |
| 7.4.1                                      | Diseño de observadores asintóticos desligados para las LE . . . . .   | 76        |
| 7.4.2                                      | Algoritmo para la implementación de un observador asintótico para un SED modelado mediante una red LE . . . . . | 78        |
| 7.5  | Conclusiones . . . . .  | 80        |
| <b>Conclusiones</b>                        |   | <b>81</b> |
| <b>Apéndice A. Análisis de complejidad</b> |   | <b>85</b> |
| .1   | Introducción . . . . .  | 85        |
| .2   | Algoritmos de observabilidad . . . . .  | 85        |
| .2.1                                       | Análisis de Complejidad de es_TObservable . . . . .   | 85        |
| .2.2                                       | Análisis de Complejidad de es_LObservable . . . . .   | 86        |
| .2.3                                       | Análisis de Complejidad de es_Observable . . . . .  | 86        |
| .3   | Algoritmos de observadores asintóticos monolíticos . . . . .  | 87        |
| .3.1                                       | Análisis de Complejidad de construye_monolitico . . . . .   | 87        |
| .3.2                                       | Análisis de Complejidad de observador_monolitico . . . . .  | 87        |
| .4   | Algoritmos de los observadores asintóticos desligados . . . . .   | 87        |
| .4.1                                       | Análisis de Complejidad de construccion_desligado . . . . .   | 87        |
| .4.2                                       | Análisis de Complejidad de observador_desligado . . . . .   | 88        |
| .5   | Algoritmos de observadores asintóticos especiales . . . . .   | 89        |
| .5.1                                       | Análisis de Complejidad de observador_me . . . . .  | 89        |
| .5.2                                       | Análisis de Complejidad de observador_me . . . . .  | 89        |
| <b>Apéndice B. Notación</b>                |   | <b>91</b> |
| .1   | Abreviaturas . . . . .  | 91        |
| .2   | Símbolos . . . . .  | 91        |
| .2.1                                       | Matemáticas . . . . .   | 91        |
| .2.2                                       | Alfabetos, cadenas y lenguajes . . . . .  | 92        |
| .2.3                                       | Redes de Petri . . . . .  | 92        |
| .2.4                                       | Redes de Petri interpretadas . . . . .  | 92        |
| .2.5                                       | Marcados . . . . .  | 93        |
| .2.6                                       | Secuencias . . . . .  | 93        |
| .2.7                                       | Conjuntos especiales . . . . .  | 93        |



# Índice de Figuras

|      |   |    |
|------|---|----|
| 1.1  | Esquema de un tanque de almacenamiento visto como un SED. . . . .   | 2  |
| 2.1  | Comparación de la evolución del marcado en una red de petri ordinaria y una red de Petro booleana. . . . .      | 11 |
| 2.2  | Una red de Petri interpretada representada gráficamente de acuerdo con la notación indicada. . . . .            | 14 |
| 2.3  | Una red de Petri y su grafo de espacio de estados. . . . .  | 15 |
| 2.4  | Una red de Petri y su grafo de espacio de estados, en el cual se muestra su espacio de atracción. . . . .       | 16 |
| 2.5  | Redes de Petri interpretadas con estructura diferente. . . . .  | 18 |
| 2.6  | Modelo en RPI de una máquina $M_x$ del taller. . . . .  | 19 |
| 2.7  | Modelo en RPI de la actividad de un trabajador $T_x$ del taller. . . . .  | 20 |
| 2.8  | Modelo en RPI del avance de una pieza a través del proceso de maquinado. . . . .                                | 20 |
| 2.9  | Modelo completo del taller en RPI después de fusionar los modelos de sus componentes. . . . .                   | 21 |
| 2.10 | Modelo del taller en RPI donde se han reetiquetado los nodos. . . . .   | 22 |
| 3.1  | Red de Petri interpretada observable. . . . .   | 26 |
| 3.2  | Una red de Petri interpretada en la cual existen algunos marcados no distinguibles. . . . .                     | 27 |
| 3.3  | Una red de Petri Interpretada viva y binaria. . . . .   | 30 |
| 3.4  | Ejemplos de subredes $G_T$ y $G_L$ observables. . . . .   | 32 |
| 3.5  | Ejemplos de subredes $G_T$ y $G_L$ que no son observables. . . . .  | 33 |
| 3.6  | Redes de Petri interpretadas observables en las que se muestran algunas de sus subredes $G_T$ y $G_L$ . . . . . | 34 |
| 3.7  | Ejemplo de una subred $G_I$ . . . . .   | 35 |
| 4.1  | Arquitectura del observador asintótico. . . . .   | 41 |

|     |  |    |
|-----|--|----|
| 5.1 | Arquitectura de un observador asintótico monolítico para un SED modelado con RPI. . . . .  | 48 |
| 5.2 | Ejemplo de RPI en la cual todos los eventos de entrada son controlables. . .   | 50 |
| 5.3 | La red S del sistema y la red O del observador. . . . .  | 51 |
| 5.4 | Un sistema representado con una RPI y la RdPB del observador asintótico monolítico para éste. Ambos con su condición inicial. . . . .          | 51 |
| 6.1 | Arquitectura del observador asintótico desligado. . . . .  | 57 |
| 6.2 | Ejemplo de una subred $G_I$ donde todas sus transiciones están habilitadas en algún marcado alcanzable. . . . .                                | 59 |
| 6.3 | Ejemplos de redes $ME+$ y $LE+$ . . . . .  | 59 |
| 6.4 | Una RPI que modela a un SED. . . . .   | 63 |
| 6.5 | Red S del sistema y red O del observador. . . . .  | 64 |
| 6.6 | Red S del sistema y red O del observador una vez que han sido fusionadas las transiciones de O y los eventos controlables del sistema. . . . . | 64 |
| 6.7 | La red S del sistema y su observador. . . . .  | 65 |
| 7.1 | Ejemplo de una RPI, la cual contiene dos subredes $G_I$ . . . . .  | 69 |
| 7.2 | Subredes $G_I$ de la red S . . . . .   | 69 |
| 7.3 | La red S y su observador asintótico desligado. . . . .   | 70 |
| 7.4 | Grafo de espacio de estados de la red S del sistema. . . . .   | 71 |
| 7.5 | Grado de espacio de estados parcial del observador. . . . .  | 71 |
| 7.6 | Una RPI observable, viva y binaria, cuyo grafo es una ME. . . . .  | 75 |
| 7.7 | La red S y su observador asintótico desligado modificado para ME. . . . .  | 75 |
| 7.8 | Ejemplo de una red LE bien formada y sus p-componentes $Q_1$ y $Q_2$ . . . . .   | 77 |
| 7.9 | La red S y su observador asintótico desligado modificado. . . . .  | 79 |

# Capítulo 1

## Generalidades

### 1.1 Los sistemas de eventos discretos

Los sistemas de manufactura, de tráfico, logísticos, de manejo de bases de datos y las redes de computadoras, entre muchos otros, pertenecen a una amplia clase de sistemas denominados sistemas de eventos discretos (SED), [6]. En este tipo de sistemas, a diferencia de los sistemas continuos, el estado del sistema y el tiempo son discretizados a valores específicos. Debido a que los SED aparecen en varias actividades del ser humano, este tipo de sistemas se han convertido en un importante campo de investigación.

Sin embargo, los sistemas continuos también pueden ser tratados como sistemas de eventos discretos. Para discretizar el estado, se definen umbrales significativos de los valores que pueden tomar las variables del sistema; así, si la variable toma un valor que cae en un intervalo comprendido entre dos umbrales se dice que está en un estado  $q_i$ . El tiempo se discretiza definiendo intervalos de muestreo de las señales del sistema. En este caso, un sistema continuo así discretizado puede estar conformado por los siguientes elementos: los actuadores, el comportamiento interno del sistema y los sensores. Las señales de los sensores y de los actuadores generalmente son modeladas como alfabetos de entrada y de salida del sistema, respectivamente [4]. Como ejemplo de lo anterior, considérese la figura 1.1, en la cual se muestra un tanque de almacenamiento. El tanque es en sí un sistema continuo, pero puede ser visto como un SED bajo las siguientes consideraciones:

- El nivel del agua en el tanque se discretiza a tres valores: vacío ( $v$ ), cuando el agua no alcanza ninguno de los sensores; normal ( $n$ ), cuando el agua rebasa sólo al sensor  $S_1$ ; y alto ( $a$ ), cuando el agua está más arriba del sensor  $S_2$ .
- Se cuenta con dos actuadores: una válvula de alimentación ( $V_1$ ), la cual está permanentemente abierta y una válvula de salida ( $V_2$ ), que se puede abrir o cerrar mediante los comandos  $A$  y  $C$ , respectivamente.

Como se aprecia, este sistema consta de tres elementos: los actuadores ( $V_1$ ,  $V_2$ ), los sensores ( $S_1$ ,  $S_2$ ) y el comportamiento interno del tanque (i.e. cambio de nivel del líquido en

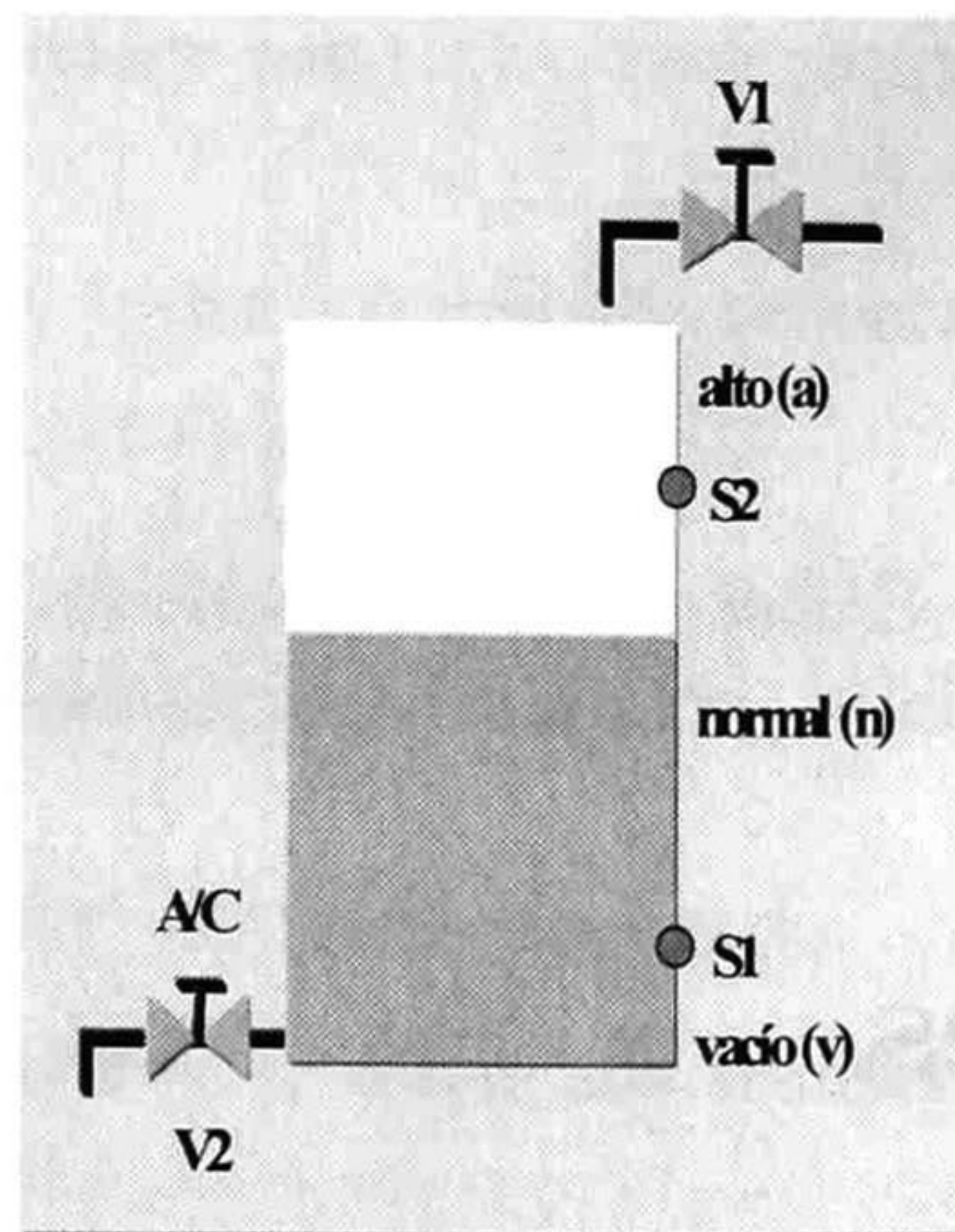


Figura 1.1: Esquema de un tanque de almacenamiento visto como un SED.

el tanque). El alfabeto de entrada para este sistema es el conjunto  $\sum_{ent} = \{A, C\}$ , mientras que el alfabeto de salida es  $\sum_{sal} = \{v, n, a\}$ . En el capítulo 2 se definen formalmente estos dos conjuntos.

## 1.2 El problema del observador y su importancia

Conocer el estado exacto de un sistema representa una gran ventaja, ya que ello facilita la aplicación de técnicas de control sobre él, monitorearlo o contar con sistemas de alarma, entre otras. Sin embargo, frecuentemente el estado del sistema sólo puede conocerse parcialmente debido a una instrumentación insuficiente del mismo ó a que algunas variables no se pueden medir directamente. Cuando las variables que se pueden medir contienen información de las variables que no son medibles, es posible determinar tal información, a esta propiedad se le conoce como **observabilidad**. De aquí se deriva la necesidad contar con criterios suficientes y necesarios para determinar cuando un SED posee esta propiedad, gracias a la cual se puede conocer completamente el estado del sistema a partir del conocimiento de sus entradas, sus salidas y su estructura interna. Si el SED bajo estudio posee esta propiedad se dice que es observable.

El conocimiento del estado de un sistema observable puede lograrse añadiendo entidades auxiliares llamadas **observadores**. Para el diseño de observadores, primeramente se determina si el sistema posee la propiedad de observabilidad, y si es así se construye un observador para éste. Dado que, sólo se conoce una parte del estado del sistema, generalmente el observador inicia su ejecución con una condición diferente a la del sistema, por lo cual es muy importante elegir una condición inicial para el observador, que garantice que su estado se igualará al estado del sistema. Hasta donde se tiene conocimiento, en la literatura no existen criterios para elegir una condición inicial para el observador de un sistema de eventos discretos.

Un tipo especial de observadores son los llamados **observadores asintóticos**. La car-

característica principal de este tipo de observadores es que su estado es equivalente al estado del sistema después de un número finito de eventos de entrada. Este trabajo está enfocado al estudio de este tipo de observadores.

El uso de observadores es importante, porque con ayuda de ellos es posible llegar a conocer por completo el estado de un sistema con un mínimo de sensores; y al haber menos señales que procesar y transmitir, desde los sistemas físicos hasta la computadora central de control o hasta los controladores locales, se reduce el cableado necesario para la transmisión y se disminuye el tráfico total en la red local.

## 1.3 Revisión de la literatura

Muchas investigaciones han sido realizadas sobre el problema de la observabilidad y el diseño de observadores para los sistemas de eventos discretos.

Por ejemplo, Cüneyt and Willsky en [2] abordan el problema de la observabilidad para los SED modelados mediante máquinas de estados finitos (autómatas finitos). En su trabajo definen la observabilidad de un SED como el tener un conocimiento exacto del estado del sistema en instantes de tiempo separados por un número finito de eventos. Ellos suponen que se realiza una observación intermitente de un subconjunto del alfabeto de eventos del sistema, en vez de hacer una medición directa del estado del sistema. Después de cada observación se produce una estimación del estado. Cada estimado es un conjunto de los posibles estados que se alcanzan a través de eventos observables. Esta ambigüedad en el estado debe corregirse después de un número finito de eventos. Si esto es posible entonces se dice que el sistema es *estable*. Esta noción de *estabilidad* se usa para caracterizar la observabilidad de un SED.

En ese trabajo, también se presenta un algoritmo para construir el observador de un sistema en tiempo polinomial, el cual es un subautómata determinista del autómata que modela al SED. Con base en este algoritmo es posible determinar el tamaño del espacio de estados del observador. Se dice que un sistema es observable si y sólo si su observador tiene estados "singulares" (estados en los cuales no hay ambigüedad) y es posible alcanzar estos estados desde cualquier otro (el observador debe ser estable).

También Cüneyt aborda el tema de la *observabilidad con retraso*, la cual es definida como el tener un conocimiento exacto del estado del sistema en algún número finito de eventos pasados en puntos intermitentes de tiempo. Para que un sistema tenga esta propiedad se pide que si en cualquier instante la estimación del observador es tal que todos los pares de estados en ella son distinguibles, entonces usando cadenas de salidas posteriores se puedan realmente distinguir esos estados en un número finito de transiciones.

Por otro lado, Cüneyt introduce el concepto de observadores "resilientes", los cuales son capaces de estimar el estado del sistema aún cuando la información que reciben contiene errores, siempre y cuando los errores sucedan en instantes de tiempo lo suficientemente separados. Se afirma que, si un sistema es observable y existe un observador resiliente para él, entonces el sistema tiene la propiedad de observabilidad resiliente.

En [3], Yong Li y Wonham también modelan los SED con autómatas finitos. Su interés principal es determinar las condiciones suficientes y necesarias para la existencia de controladores con retroalimentación de estado de un SED bajo observaciones parciales. Ellos asumen que todos los estados del autómata son distinguibles [9] y que el estado del sistema está disponible. En este contexto, el tener información parcial del estado significa que sólo algunas variables de estado son observables. Los estados del sistema son particionados en clases de equivalencia llamadas clases de observabilidad: dos estados están en la misma clase si toman el mismo valor en cada variable de observabilidad. La partición se realiza mediante un predicado  $P$  de membresía; el controlador sólo tiene acceso a la información de cada clase de observabilidad y no puede distinguir entre dos estados de una misma clase.

En base a esto, el autor introduce el concepto de predicado observable, según el cual un predicado  $P$  sobre el conjunto de estados es *observable* con respecto al sistema si la partición de los estados satisface a  $P$  y los estados alcanzables desde esos estados mediante eventos controlables también satisfacen a  $P$ . Así, los predicados observables caracterizan a los estados alcanzables de un SED sujetos a un controlador que utiliza sólo información de las clases de observabilidad y este hecho se utiliza para demostrar la existencia de tales controladores para un sistema dado.

Por otro lado, Feng Lin y Wonham, en [5], estudian el problema de observabilidad local para sintetizar supervisores descentralizados y coordinadores para SED parcialmente observados. Los SED, como en los trabajos anteriores, son modelados por máquinas de estado finito. Por observaciones parciales se entiende que sólo un subconjunto de los eventos del sistema son observables, es decir que su ocurrencia puede ser observada. El objetivo del trabajo es diseñar un controlador cuya tarea es habilitar o deshabilitar los eventos controlables del sistema en base a un registro de las ocurrencias de los eventos observables. Esto indica que trabajan en base a los lenguajes generados por la máquina de estados finitos que modela al sistema.

En ese trabajo, la observabilidad de un SED se caracteriza de la siguiente forma: si dos cadenas generadas por el sistema tienen los mismos símbolos de salida, entonces deben de ser consistentes, es decir si se les agrega cualquier otro evento del sistema, entonces las nuevas cadenas deben pertenecer al mismo lenguaje.

Con el fin de reducir la complejidad del cálculo de un controlador general para un sistema, este se divide en subtarear, para las cuales es más fácil obtener supervisores locales, con lo cual el comportamiento general deseado puede ser reducido a la satisfacción de especificaciones locales. En este marco, los autores introducen el concepto de observabilidad local: una sección del sistema posee la propiedad de observabilidad con respecto al lenguaje deseado que generaría esa sección si estuviera separada del resto del sistema. Finalmente, los autores usan el concepto de observabilidad para garantizar la existencia de los supervisores locales y del coordinador general.

En [4], Meda, a diferencia de los trabajos anteriormente mencionados, aborda el problema de la observabilidad para SED modelados por medio de redes de Petri interpretadas con el fin de encontrar condiciones suficientes y necesarias para el problema de la identificación, para lo cual propone una caracterización de la observabilidad de este tipo de sistemas. Este criterio establece que un sistema de eventos discretos modelado con redes de Petri interpretadas es



observable si y sólo si dos estados consecutivos del sistema derivados de la misma palabra de entrada son distinguibles entre sí.

## 1.4 Objetivos

Los objetivos del presente trabajo son:

1. Determinar condiciones suficientes y necesarias para caracterizar la observabilidad de los sistemas de eventos discretos modelados por medio de redes de Petri vivas, binarias y con un único espacio de atracción (home space), y
2. Diseñar algoritmos para la construcción de observadores asintóticos para sistemas de eventos discretos modelados por medio de redes de Petri vivas, binarias, con un único espacio de atracción y observables.

## 1.5 Organización de la tesis

Este trabajo está organizado de la siguiente manera:

- El capítulo II está dedicado a las redes de Petri, una herramienta formal para el modelado de los SED. Se mencionan algunas de sus propiedades, una clasificación basada en la estructura de la red y se presentan dos de sus familias: las redes de Petri interpretadas y las redes de Petri booleanas, las cuales serán utilizadas para el diseño de observadores asintóticos.
- El capítulo III se enfoca al problema de la observabilidad; se presenta una caracterización de la observabilidad en base a los conjuntos de marcados consecutivos generados por una palabra de entrada. Luego se caracteriza la observabilidad de los SED modelados con RPI en base a la estructura de la red y a su interpretación. Finalmente se presenta un algoritmo para determinar si una RPI es observable.
- En el capítulo IV se aborda el problema del diseño de observadores, mencionando dos métodos para inferir los eventos incontrolables que ocurren en el sistema.
- En el capítulo V se propone una arquitectura para observador asintótico monolítico la cual se utilizará en el diseño de observadores para los SED observables que sólo presentan eventos controlables. Con tal fin, se presentan dos algoritmos: uno para la construcción de este tipo de observadores y otro para su operación. Finalmente se ilustra el funcionamiento de estos algoritmos mediante un ejemplo.

- En el capítulo VI se propone una arquitectura para otro tipo de observadores asintóticos, los observadores asintóticos desligados, los cuales son utilizados cuando en el SED observable posee uno o más eventos incontrolables y son modelados mediante varios tipos de RPI, como se verá. También se presentan los algoritmos de construcción y operación de estos observadores. Se incluye un ejemplo de aplicación de estos algoritmos.
- En el capítulo VII se estudia un caso especial de RPI, en el cual fallan los algoritmos del capítulo anterior. Se explican las causas y se proponen algoritmos modificados para los observadores de los SED modelados mediante máquinas de estado y redes de libre elección. Para ambos casos, se presentan ejemplos de aplicación.
- En el capítulo VIII se presentan las conclusiones y trabajo futuro.
- En el apéndice A se presenta el análisis de la complejidad computacional en tiempo de los algoritmos presentados a lo largo de este trabajo.
- En el apéndice B se presenta un listado de los símbolos utilizados en el trabajo.

## Capítulo 2

# Herramientas formales para el modelado de SED

---

**Resumen:** Existen varias herramientas, con ayuda de las cuales se pueden modelar los sistemas de eventos discretos (SED). Cada una de ellas captura algunas de las características de este tipo de sistemas. Las redes de Petri (RP) son una herramienta formal de modelado que, además de tener una representación gráfica sencilla, permiten capturar y analizar las características de los sistemas que modelan. En este capítulo se presentan los conceptos básicos sobre las redes de Petri, sus propiedades, una clasificación y dos de sus familias, las redes de Petri interpretadas y las redes de Petri booleanas, las cuales serán útiles para el modelado de los SED y la construcción de sus observadores.

---

## 2.1 Introducción

Uno de los retos principales en el estudio de la observabilidad de los sistemas de eventos discretos (SED), y en general en el proceso de modelado de este tipo de sistemas, es el problema de la tratabilidad, el cual aparece debido al crecimiento exponencial del número de estados de los modelos o al incremento de la complejidad computacional de los algoritmos encargados de determinar y analizar las propiedades del sistema. Existen herramientas de modelado que logran reducir los estados del modelo a un número relativamente razonable, pero a cambio de aumentar la complejidad de los algoritmos de análisis. En cambio, hay otras herramientas que facilitan la generación y el análisis de los modelos, pero que no son capaces de capturar una buena parte de las propiedades de los SED. De aquí que surja la necesidad de utilizar herramientas de modelado eficientes, en el sentido de que además de capturar la mayoría de las propiedades de los SED, permitan una representación sencilla, fácil de comprender y de analizar.

Una de las herramientas más comunes, utilizadas en el modelado de un SED, son las máquinas de estados finitos y los autómatas finitos, los cuales representan a los sistemas en forma de grafos, donde cada nodo es un estado del SED, y los arcos están etiquetados con los eventos del sistema que provocan un cambio de un estado a otro. El análisis de las propiedades del SED se realiza a través de los lenguajes generados por el autómata o máquina de estados finitos [6]. El problema de este tipo de representación es que sólo pueden representar a los SED que generan lenguajes regulares [9], no permiten capturar la concurrencia, el número de estados crece exponencialmente para sistemas relativamente sencillos [1], con lo que la representación gráfica resulta difícil de manejar.

Otras herramientas de modelado de los SED son los grafos PERT/CPM y las redes de colas. Estas herramientas tienen un poder limitado de representación, es decir de los tipos de sistemas que pueden modelar. Además de que el análisis de las propiedades de los sistemas modelados es casi nula o muy difícil. Por otro lado, los grafos GERT permiten modelar todo tipo de SED, pero no existen metodologías de modelado y análisis.

En cambio, las redes de Petri (RP) constituyen una herramienta formal para el modelado de los SED, las cuales permiten capturar sus principales características como son la concurrencia o paralelismo, el asincronismo, las relaciones causales, la exclusión mutua y los bloqueos, entre otras. Además, los modelos en RP suelen ser compactos en comparación con los modelos generados mediante otras herramientas. Dada una interpretación adecuada de la RP, se puede determinar qué transiciones son controlables y qué estados no son medibles, lo cual permite inferir sobre la observabilidad y controlabilidad del sistema en general. A cambio de las facilidades que las RP ofrecen, es necesario realizar un estudio profundo de estas para poder obtener algoritmos eficientes que verifiquen que los SED poseen las propiedades deseadas.

Dadas las ventajas que poseen las redes de Petri en comparación con las otras herramientas de modelado y a sus facilidades para el análisis de las propiedades de los sistemas, se han elegido a las redes de Petri como herramienta de modelado de los SED y, en consecuencia, para el diseño de sus observadores.

En este capítulo se presenta una definición formal de las redes de Petri y de dos de

sus extensiones: las redes de Petri interpretadas y las redes de Petri booleanas, así como los conceptos asociados a las mismas que serán utilizados a lo largo del trabajo (otras definiciones y conceptos de las redes de Petri pueden ser encontrados en [1] y [7]). Finalmente se presenta un ejemplo de modelado de un SED mediante RPI.

## 2.2 Las redes de Petri

### 2.2.1 Las redes de Petri ordinarias

**Definición 2.1 Redes de Petri ordinarias.** Una red de Petri ordinaria (RP) es

- Un **grafo**  $G = \langle L, T, E, S \rangle$ , donde:
  - $L = \{l_1, l_2, \dots, l_n\}$  es un conjunto finito de elementos llamados **lugares**, los cuales se representan gráficamente mediante círculos,
  - $T = \{t_1, t_2, \dots, t_m\}$  es el conjunto finito de elementos llamados **transiciones**, las cuales se representan mediante barras o segmentos de línea,
  - $E : L \times T \rightarrow \{0, 1\}$  es la **función de entrada** que representa los arcos que van de los lugares hacia las transiciones, la cual se define de la siguiente forma:

$$E(l_i, t_j) = \begin{cases} 1 & \text{si el arco de } l_i \text{ a } t_j \text{ existe} \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

- $S : L \times T \rightarrow \{0, 1\}$  la **función de salida** que representa los arcos que van de las transiciones hacia los lugares, definida como sigue:

$$S(l_i, t_j) = \begin{cases} 1 & \text{si el arco de } t_j \text{ a } l_i \text{ existe} \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

- Una **función de marcado**,  $M : L \rightarrow [\mathbb{N} \cup \{0\}]^n$ , la cual asigna a cada lugar de  $G$  un número dado de elementos llamados **marcas**. Por notación,  $M = M(L)$  y  $M$  será llamado simplemente el **marcado**.
- Un **marcado inicial**  $M_0$ , el cual es una asignación arbitraria de marcas en el momento inicial.
- Y las siguientes **reglas de evolución** :
  - a) **Regla de habilitación.** Una transición  $t_k \in T$  de  $G$  está habilitada si  $\forall l_i \in L$  de  $G$ ,  $M(l_i) \geq E(l_i, t_k)$ . Si una transición  $t_k$  está habilitada, entonces se puede disparar.

- b) Regla de disparo. Si una transición habilitada  $t_j$  es disparada en un marcado  $M_k$  entonces se alcanza el nuevo marcado  $M_{k+1}$ , eliminando  $E(l_i, t_j)$  marcas de sus lugares de entrada  $l_i$  y añadiendo  $S(l_i, t_j)$  marcas a sus lugares de salida  $l_i$ .

**Definición 2.2 Marcados consecutivos**. Sean  $M_i$  y  $M_j$  dos marcados de una RP. Se dice que  $M_i$  y  $M_j$  son marcados consecutivos,  $M_i \xrightarrow{t_k} M_j$ , si  $M_j$  se alcanza disparando una transición  $t_k$  en  $M_i$ .

**Definición 2.3 Secuencia de disparos, marcados alcanzables**. Sea  $M_i$  un marcado de una RP. Si  $M_i \xrightarrow{t_i} M_{i+1} \xrightarrow{t_{i+1}} \dots \xrightarrow{t_k} M_k$  entonces  $\sigma = t_i t_{i+1} \dots t_k$  es una secuencia de disparos que lleva del marcado  $M_i$  al marcado  $M_k$  y se escribe  $M_i \xrightarrow{\sigma} M_k$  y se dice que  $M_k$  es un marcado alcanzable a partir de  $M_i$ .

**Definición 2.4 Conjunto de alcanzabilidad de una red de Petri**. Sea  $R$  una RP. El conjunto de alcanzabilidad de  $R$ , denotado como  $\mathcal{R}(R, M_o)$ , es el conjunto de todos los marcados alcanzables en  $R$  a partir su marcado inicial  $M_o$ .

**Definición 2.5 Representación matricial de una red de Petri**. Sean  $n = |L|$  el número de lugares en la red y  $m = |T|$  el número de transiciones de una RP. La estructura del grafo  $G$  de la RP se puede representar por medio de dos matrices:

- Se denomina matriz de entrada o incidencia previa a la matriz  $C^- = [c_{i,j}^-]_{n \times m}$  donde  $c_{i,j}^- = E(l_i, t_j)$ .
- Se denomina matriz de salida o incidencia posterior a la matriz  $C^+ = [c_{i,j}^+]_{n \times m}$  donde cada elemento de la matriz  $c_{i,j}^+ = S(l_i, t_j)$ .
- Se denomina matriz de incidencia a la matriz  $C = C^+ - C^-$ .

**Definición 2.6 Ecuación de estados de una RP**. Sean  $R$  una RP y  $M_k \in \mathcal{R}(R, M_o)$ . Entonces al disparar una transición  $t_j$  habilitada en  $M_k$  se alcanza un nuevo marcado  $M_{k+1}$  el cual puede ser calculado mediante la siguiente ecuación:

$$M_{k+1} = M_k + C\vec{v}$$

donde  $\vec{v}$  es el **vector de disparo** que posee un 1 en la  $j$ -ésima posición, si la transición  $t_j$  se dispara y un 0 en caso contrario.

## 2.2.2 Las redes de Petri booleanas

Una familia especial de las RP son las redes de Petri booleanas [8], este tipo de redes serán utilizadas en los diferentes tipos de observadores como se verá en capítulos posteriores.

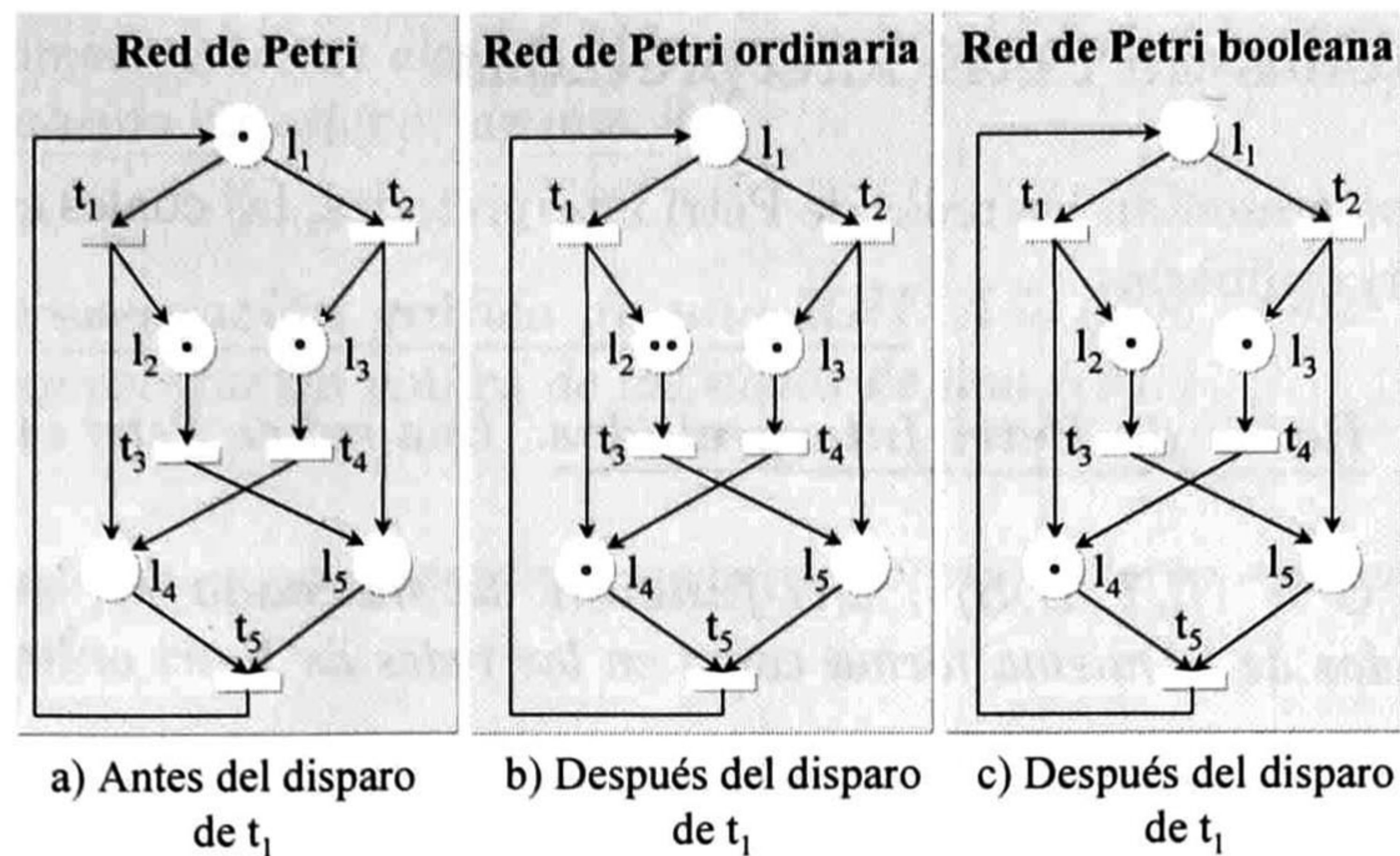


Figura 2.1: Comparación de la evolución del marcado en una red de petri ordinaria y una red de Petro booleana.

**Definición 2.7 Redes de Petri booleanas.** Una red de Petri booleana (RPB) es :

- Un grafo  $G = \langle L, T, E, S \rangle$ , una función de marcado  $M$ , un marcado inicial  $M_o$ , definidos de la misma forma como en las RP.
- Y las siguientes reglas de evolución:
  - a) Regla de habilitación. Una transición  $t_k \in T$  está habilitada si  $\forall l_i \in L, M(l_i) \geq E(l_i, t_k)$ . Si  $t_k$  está habilitada entonces puede ser disparada.
  - b) Regla de disparo. Si una transición habilitada  $t_k$  es disparada en un marcado  $M_k$  entonces el marcado  $M_{k+1}$  es alcanzado.  $M_{k+1}$  puede ser calculado mediante la siguiente ecuación :

$$\forall l_i \in L, M'_{k+1}(l_i) = \min(M_k(l_i) + C(l_i)\vec{t}_k, 1)$$

donde  $\vec{t}_k$  es el vector de disparo de la transición  $t_k$  que posee un 1 en la k-ésima posición y un cero en el resto de las posiciones.

A continuación se ilustrará la diferencia entre las reglas de disparo de una red de Petri ordinaria y de una red de Petri booleana.

**Ejemplo 2.1** Considérese la red de Petri de la figura 2.1.a. El marcado inicial  $M_o$  de la red es  $M_o = [1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0]^T$ . En este marcado, la transición  $t_1$  está habilitada, por lo cuál puede dispararse. En la figura 2.1.b se muestra el marcado  $M_1 = [0 \ 2 \ 1 \ 1 \ 0]^T$  que se alcanza al disparar la transición  $t_1$  de acuerdo a la regla de disparo de una red ordinaria. En cambio, en la figura 2.1.c, se puede observar el marcado  $M'_1 = [0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0]^T$  que se alcanza disparando la misma transición en una red booleana. Nótese que, debido a la regla de disparo de este tipo de redes, el número de marcas en el lugar  $l_2$  es igual a uno en vez de dos.

### 2.2.3 Las redes de Petri interpretadas

A continuación se presentan las redes de Petri interpretadas, las cuales son una extensión de las redes de Petri ordinarias.

**Definición 2.8 Redes de Petri Interpretadas.** Una red de Petri interpretada (RPI) es

- Un grafo  $G = \langle L, T, E, S \rangle$ , una función de marcado  $M$ , un marcado inicial  $M_o$ , definidos de la misma forma como en las redes de Petri ordinarias,
- Un alfabeto de entrada,  $\Sigma_{ent} = \{a_1, a_2, \dots, a_r\}$ ,
- Un alfabeto de salida,  $\Sigma_{sal} = \{b_1, \dots, b_p\}$ ,
- Una función de etiquetado de las transiciones,  $\lambda : T \rightarrow \Sigma_{ent} \cup \{\varepsilon\}$  que representa la asignación de los eventos del sistema a las transiciones. Si  $\lambda(t_i) \in \Sigma_{ent}$ , se dice que  $t_i$  es una **transición controlable**, en caso contrario  $t_i$  es llamada **transición incontrolable**. El símbolo  $\varepsilon$  representa un evento interno del sistema  $S_f$ .
- Una función de etiquetado de los marcados,  $\varphi : \mathcal{R}(R, M_o) \rightarrow [\Sigma_{sal} \cup \{\varepsilon\}]^n$  que representa los sensores del sistema que están activados en un marcado alcanzable  $M_k$  de la red. En este trabajo sólo se abordará el caso de las RPI binarias, para las cuales  $M(l_i) \in \{0, 1\}$  para todo  $l_i \in L$  (ver definición más adelante), por lo cual la función  $\varphi$  puede ser reescrita como sigue:

$$\varphi(M_k(l_i)) = \begin{cases} b_i & \text{si } M_k(l_i) = 1 \\ \varepsilon & \text{si } M_k(l_i) = 0 \end{cases} \quad \text{donde } b_i \in \Sigma_{sal} \cup \{\varepsilon\}.$$

Si  $\varphi(M_k(l_i)) = b_i \neq \varepsilon$ , entonces  $l_i$  es llamado **lugar medible**, en caso contrario  $l_i$  es llamado **lugar no medible**. En este caso, el símbolo  $\varepsilon$  representa un evento de salida no medible de  $S_f$ . por lo cual la función  $\varphi$  puede ser reescrita como sigue:

$$\varphi(M_k(l_i)) = \begin{cases} b_i & \text{si } M_k(l_i) = 1 \\ \varepsilon & \text{si } M_k(l_i) = 0 \end{cases}$$

donde  $b_i \in \Sigma_{sal} \cup \{\varepsilon\}$ . Si  $\varphi(M_k(l_i)) = b_i \neq \varepsilon$ , entonces  $l_i$  es llamado **lugar medible**, en caso contrario  $l_i$  es llamado **lugar no medible**. En este caso, el símbolo  $\varepsilon$  representa un evento de salida no medible de  $S_f$ .

- Y las siguientes **reglas de evolución** :
  - a) Regla de habilitación. Una transición  $t_k \in T$  está **habilitada** si  $\forall l_i \in L, M(l_i) \geq E(l_i, t_k)$ .
  - b) Reglas de disparo.
    - \* Sea  $t_j$  una transición controlable habilitada en un marcado  $M_k$ . Si el evento de entrada  $a_i = \lambda(t_j)$  está presente, entonces  $t_j$  debe dispararse,
    - \* Sea  $t_u$  una transición no controlable habilitada en un marcado  $M_k$ . Entonces  $t_u$  se puede disparar,



- \* En ambos casos se alcanza el marcado  $M_{k+1}$ , el cual puede ser calculado con la ecuación de estados de una RP.

**Notación 2.1** Representación gráfica de una RPI. A lo largo de este trabajo será utilizada la siguiente representación gráfica de los nodos de una RPI:

1. Los lugares medibles se representarán mediante círculos claros con su símbolo  $b_i$  asociado por un lado.
2. Las transiciones controlables se representarán con barras claras con su símbolo  $\lambda(t_i)$  asociado a un lado.
3. Los lugares no medibles se representarán con círculos oscuros.
4. Las transiciones incontrolables se representarán mediante barras oscuras.
5. En el caso de los lugares no medibles y las transiciones incontrolables se omitirá el símbolo  $\varepsilon$ , por efectos de visualización.

En el siguiente ejemplo se ilustran el uso de la notación anterior para representar gráficamente una RPI y algunos de los conceptos asociados.

**Ejemplo 2.2** Supóngase que se tiene una RPI cuya matriz de incidencia  $C$  es la siguiente:

$$C = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

con un marcado inicial  $M_o = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$  y con las funciones de etiquetado  $\lambda$  y  $\varphi$  dadas por:

|                |       |               |               |       |
|----------------|-------|---------------|---------------|-------|
| $t_i$          | $t_1$ | $t_2$         | $t_3$         | $t_4$ |
| $\lambda(t_i)$ | $M$   | $\varepsilon$ | $\varepsilon$ | $N$   |

|       |               |               |       |       |               |
|-------|---------------|---------------|-------|-------|---------------|
| $l_i$ | $l_1$         | $l_2$         | $l_3$ | $l_4$ | $l_5$         |
| $b_i$ | $\varepsilon$ | $\varepsilon$ | $a$   | $b$   | $\varepsilon$ |

Así, las transiciones  $t_1$  y  $t_4$  son controlables y los lugares  $l_3$  y  $l_4$  son medibles, en cambio las transiciones  $t_2$  y  $t_3$  son incontrolables y los lugares  $l_1, l_2$  y  $l_5$  son no medibles. En la figura 2.2 se muestra la representación gráfica de esta red de acuerdo a la notación 2.1. Los nodos  $l_3, l_4, t_1$  y  $t_4$  aparecen en color claro con su símbolo correspondiente al lado de ellos, dado que representan lugares medibles ó transiciones controlables. En cambio, los nodos  $l_1, l_2, l_5, t_2$  y  $t_3$ , que representan lugares no medibles ó transiciones incontrolables, aparecen en color oscuro. Por comodidad, en la figura no aparece el símbolo  $\varepsilon$  asignado a estos nodos. Note como el lugar  $l_1$  tiene una marca en él, ya que  $M_o(l_i) = 1$ .

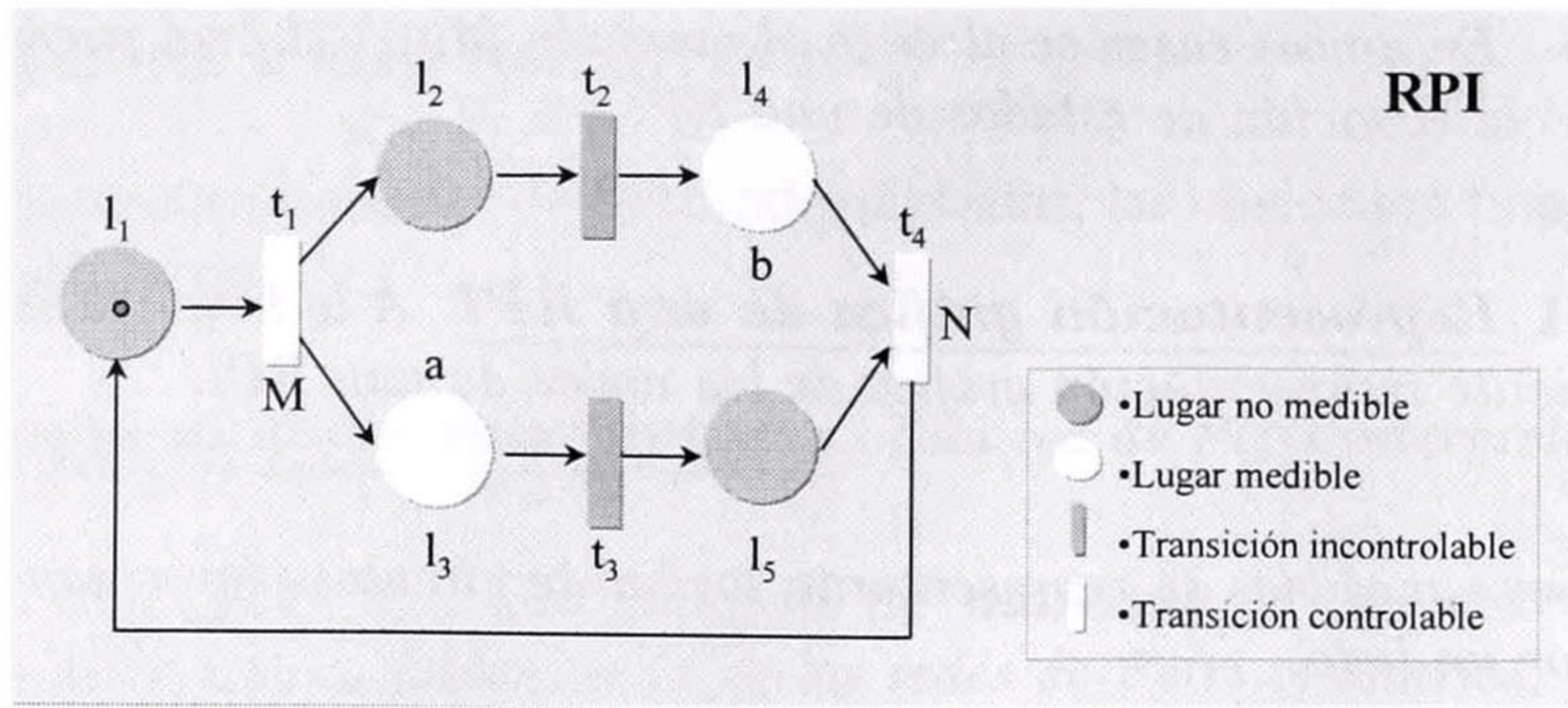


Figura 2.2: Una red de Petri interpretada representada gráficamente de acuerdo con la notación indicada.

### 2.2.4 Otros conceptos básicos

**Definición 2.9 Grafo de espacio de estados.** El grafo de espacio de estados de una RP es un grafo en el que cada nodo  $n_k$  representa un marcado  $M_k \in \mathcal{R}(RP, M_o)$  y si  $M_i \xrightarrow{t_k} M_j$ , entonces existe un arco del nodo  $M_i$  al nodo  $M_j$ , etiquetado con la transición  $t_k$ .

**Notación 2.2 Etiquetado de los nodos del grafo de espacio de estados de una RP.** En este trabajo, se usará la siguiente notación para etiquetar los nodos del grafo de espacio de estados de una RP dada: un nodo  $n_k$  correspondiente al marcado  $M_k$ , se etiqueta con la palabra  $\xi_k = u^a, v^b, \dots, z^l$ , donde  $u, v, \dots, z$  son los subíndices de los lugares marcados en  $M_k$  y  $a, b, \dots, l$  es el número de marcas en cada uno de esos lugares. Si un lugar tiene sólo una marca entonces será omitido el superíndice.

Para ilustrar el uso de la notación 2.2, se construirá el grafo de espacio de estados de una red de Petri.

**Ejemplo 2.3** Considere a la red de Petri de la figura 2.3.a. El marcado inicial de la red es  $M_o = [1\ 0\ 0\ 0\ 0]^T$ , por lo tanto el nodo  $n_o$  de su grafo de espacio de estados se etiqueta con  $\xi_o = 1$ , dado que el lugar  $l_1$  es el único lugar marcado en  $M_o$  y  $M_o(l_1) = 1$  (los superíndices iguales a 1 se omiten). En este marcado, las transiciones  $t_1$  y  $t_2$  están habilitadas. Si se dispara  $t_1$  se alcanza el marcado  $M_1 = [0\ 1\ 0\ 1\ 0]^T$ , el cual se representa con el nodo  $n_1$  etiquetado con  $\xi_1 = 2, 4$  y se unen los nodos  $n_o$  y  $n_1$  mediante un arco etiquetado con la transición  $t_1$ . Si se dispara  $t_2$  desde  $M_o$ , el marcado  $M_2 = [0\ 0\ 1\ 0\ 1]^T$  es alcanzado. Este marcado se representa con el nodo  $n_2$  etiquetado con  $\xi_2 = 3, 5$  y se une a  $n_o$  mediante un arco etiquetado con  $t_2$ . El resto del grafo de espacio de estados se construye siguiendo la misma técnica. La figura 2.3.b muestra el grafo de espacio de estados completo de la red según esta notación.

**Definición 2.10 Espacio de atracción.** Un conjunto de marcados  $\mathcal{K}(RP, M_o) \subseteq \mathcal{R}(RP, M_o)$  constituyen un espacio de atracción (home space) de una RP, si existe una secuencia de

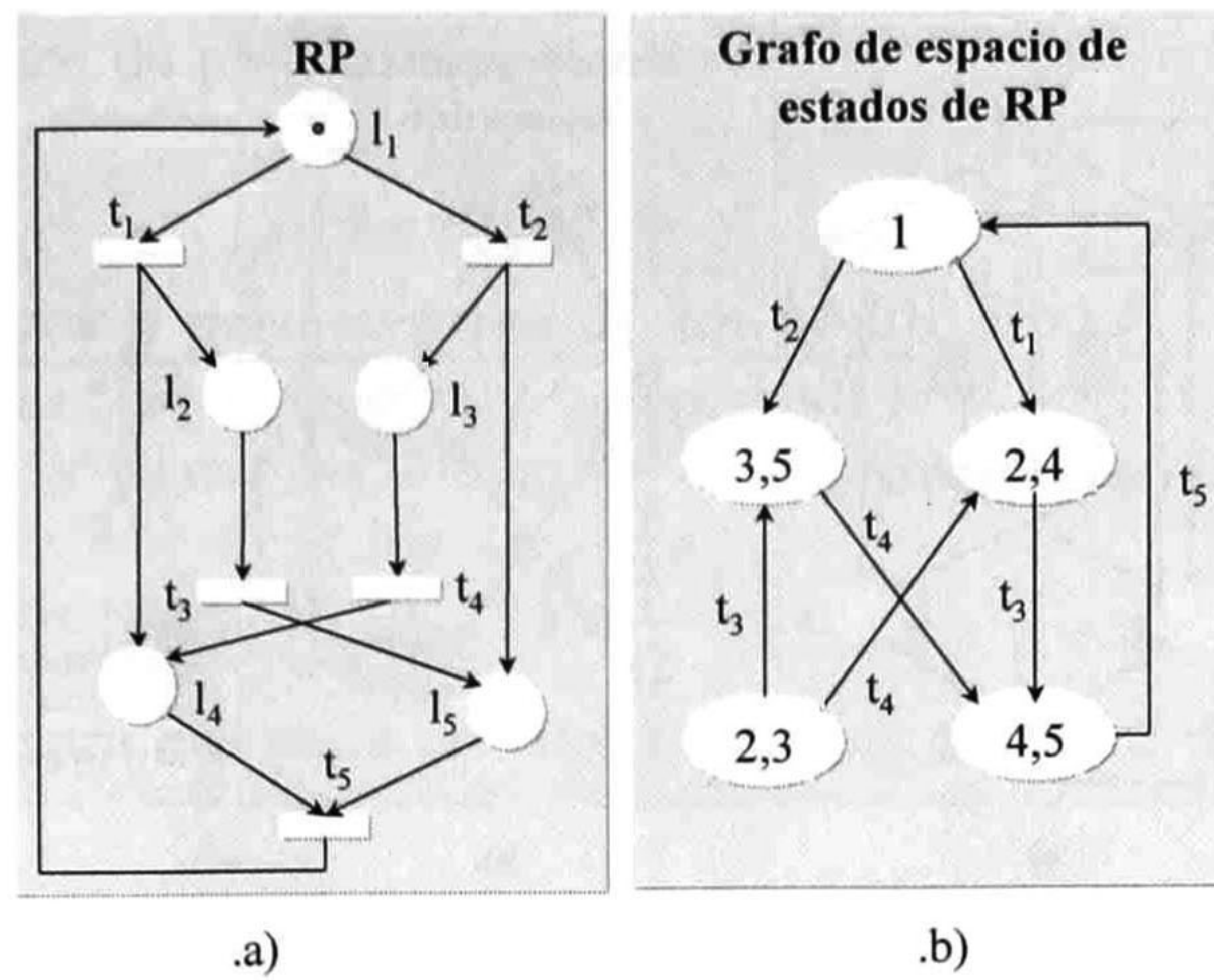


Figura 2.3: Una red de Petri y su grafo de espacio de estados.

disparos  $\sigma_i$  tal que  $M_i \xrightarrow{\sigma_i} M_{i+1}$ , con  $M_i \notin \mathcal{K}(RP, M_o)$  y  $M_{i+1} \in \mathcal{K}(RP, M_o)$  y no existe una secuencia de disparos  $\sigma_k$  tal que  $M_k \xrightarrow{\sigma_k} M_{k+1}$ , con  $M_k \in \mathcal{K}(RP, M_o)$  y  $M_{k+1} \notin \mathcal{K}(RP, M_o)$ .

Toda componente fuertemente conexa final del grafo de espacio de estados de una RP es un espacio de atracción. De aquí se obtiene que, una RP posee un único espacio de atracción, si su grafo de espacio de estados está formado por una única componente fuertemente conexa [1].

En el siguiente ejemplo se muestra el espacio de atracción de una red de Petri.

**Ejemplo 2.4** Considere la red de la figura 2.4.a, en la cual también se indica su marcado inicial  $M_o = [0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0]^T$ . En la figura 2.4.b se muestra el grafo de espacio de estados de esta red, el cual ha sido representado de acuerdo a la notación 2.2. En la figura, los marcados que constituyen el espacio de atracción de la red se representan mediante nodos oscuros. Nótese que, dado que en el grafo sólo existe una componente fuertemente conexa final, el espacio de atracción es único. En la figura, el nodo claro representa un marcado de transición, es decir un marcado que ya no puede ser alcanzado una vez que la red ha alcanzado algún marcado de su espacio de atracción.

### 2.2.5 Propiedades de las redes de Petri

Las propiedades de las RP se pueden dividir en dos tipos: las propiedades estructurales, las cuales sólo dependen de las relaciones entre los nodos de la red (i.e. de la estructura de la red); y las propiedades dinámicas, las cuales dependen del marcado inicial  $M_o$ . A continuación se mencionan algunas de estas propiedades, las cuales son de interés para el presente trabajo (otras propiedades de las RP se pueden consultar en [1] y [7]).

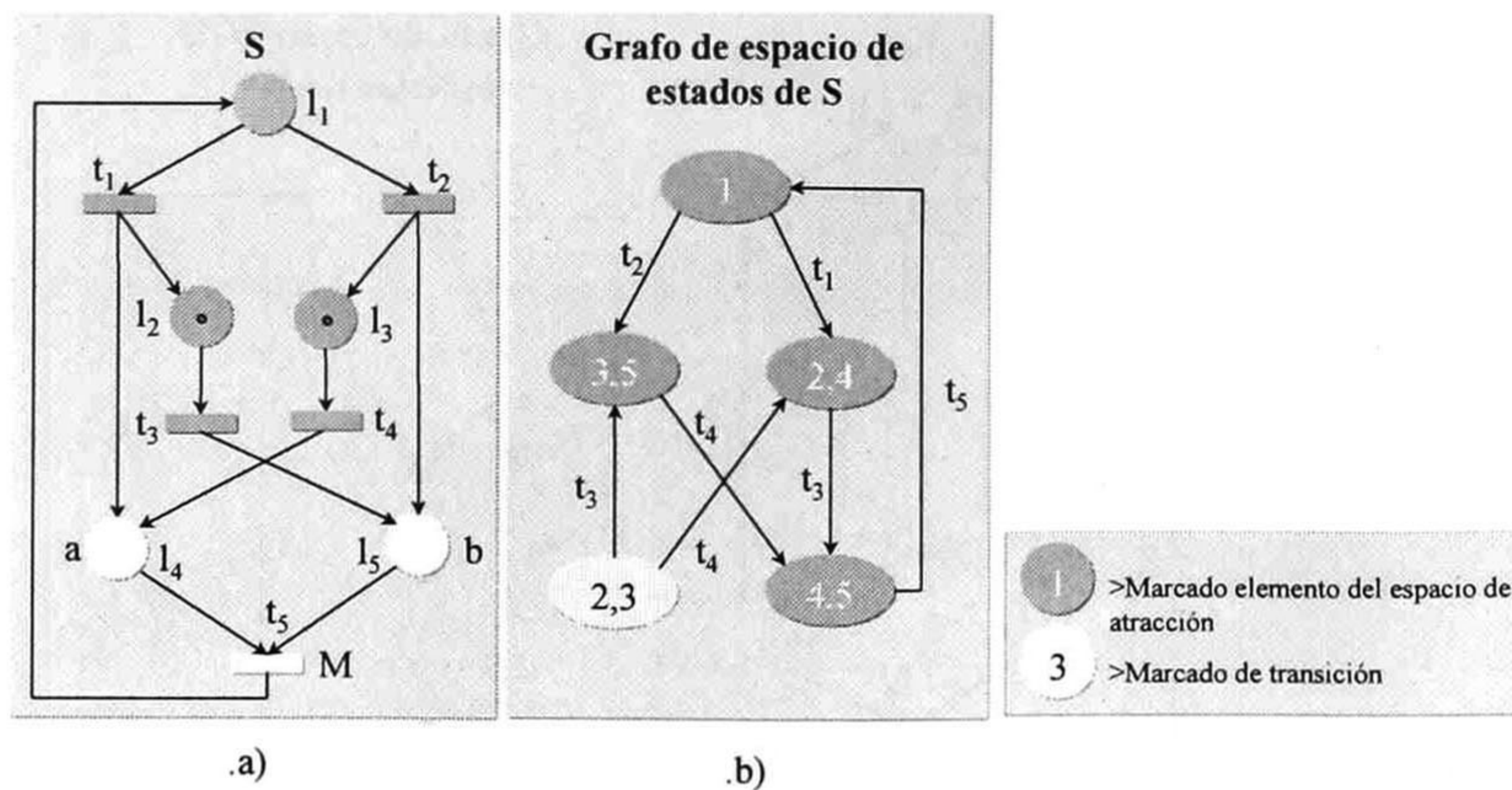


Figura 2.4: Una red de Petri y su grafo de espacio de estados, en el cual se muestra su espacio de atracción.

### Propiedades estructurales

- **Repetitividad.** Una RP es **repetitiva** ssi existe un vector  $X \in \mathbb{N}^n$  tal que  $CX = 0$ , es decir, una RP es repetitiva si el marcado inicial puede volver a ser alcanzado.
- **Conservatividad.** Una RP es **conservativa** ssi existe un vector  $Y \in \mathbb{N}^m$  tal que  $Y^T C = 0$ , es decir, una RP es conservativa si el número de marcas total de la red se mantiene constante.

### Propiedades dinámicas

- **Vivacidad.** Sea R una RP. Una transición  $t_k \in T$  es **viva**, para un marcado  $M_o$ , si  $\forall M \in \mathcal{R}(RP, M_o), \exists M_k$  sucesor de  $M$  a partir del cual  $t_k$  esté habilitada. La red R es viva si todas sus transiciones son vivas, es decir una red es viva si todas sus transiciones pueden llegar a dispararse.
- **Acotamiento.** Una red R es **b-acotada** (b-limitada) para un marcado  $M_o$ , si  $\forall l_i \in L \exists b \in \mathbb{N}$ , tal que  $\forall M_k \in \mathcal{R}(RP, M_o)$ , se cumple que  $M_k(l_i) \leq b$ , es decir si el número total de marcas en la red no crece infinitamente.
- **Binaridad.** Una red R es **binaria** (1-acotada) para un marcado  $M_o$ , si el número de marcas de cualquiera de sus lugares es igual a cero o uno en cualquier marcado alcanzable desde  $M_o$ . (i.e.  $\forall M \in \mathcal{R}(RP, M_o)$  y  $\forall l_i \in L, M(l_i) \in \{0, 1\}$ ).

## 2.2.6 Clasificación de las redes de Petri

La clasificación de las RP en subclases facilita el estudio de sus propiedades. La siguiente clasificación es muy general y se basa en la estructura de la red, la cual se puede expresar

en términos de los conjuntos de predecesores y sucesores de un nodo. Estos conjuntos son definidos a continuación.

**Definición 2.11 Sucesores y predecesores de un nodo.** Sean  $R$  una RPB y  $x \in L \cup T$  un nodo de la red, entonces  $\bullet(x) = \{y \mid y \in L \cup T, \exists \text{ un arco de } y \text{ a } x\}$  y  $(x)^\bullet = \{y \mid y \in L \cup T, \exists \text{ un arco de } x \text{ a } y\}$  son los conjuntos de predecesores y sucesores del nodo  $x$ , respectivamente.

De acuerdo a su estructura, las redes de Petri se pueden clasificar de la siguiente forma:

1. Grafos marcados
2. Máquinas de estado
3. Redes de libre elección
4. Redes simples
5. Otras redes

A continuación se caracteriza cada una de estas clases:

**Definición 2.12 Grafos marcados.** Un grafo marcado (GM) es una RP, en la que todo lugar tiene una transición de entrada y una transición de salida (i.e.  $\forall l_i \in L, |\bullet(l_i)| = |(l_i)^\bullet| = 1$ ).

**Definición 2.13 Máquina de estados.** Una máquina de estados (ME) es una RP, para la cual toda transición tiene un lugar de entrada y un lugar de salida. (i.e.  $\forall t_i \in T, |\bullet(t_i)| = |(t_i)^\bullet| = 1$ ).

**Definición 2.14 Redes de libre elección.** Una red de libre elección (LE) es una RP, tal que si dos transiciones  $t_i$  y  $t_k$  tienen un lugar de entrada  $l_i$  en común, entonces  $l_i$  es el único lugar de entrada a ellas (es decir  $\forall l_i \in L$ , si  $|(l_i)^\bullet| > 1$ , entonces  $\forall t_k \in (l_i)^\bullet, |\bullet(t_k)| = 1$ ).

**Definición 2.15 Redes simples.** Una red simple (RS) es una RP en la que toda transición tiene como máximo un lugar de entrada compartido con las demás transiciones de la red.

**Ejemplo 2.5** En la figura 2.5 algunos ejemplos de las diferentes clases de las RP. Todas las redes son redes de Petri interpretadas. Los marcados iniciales del grafo marcado, la máquina de estados y de la red de libre elección hacen a estas redes vivas y binarias. En cambio, la red simple no posee éstas propiedades.

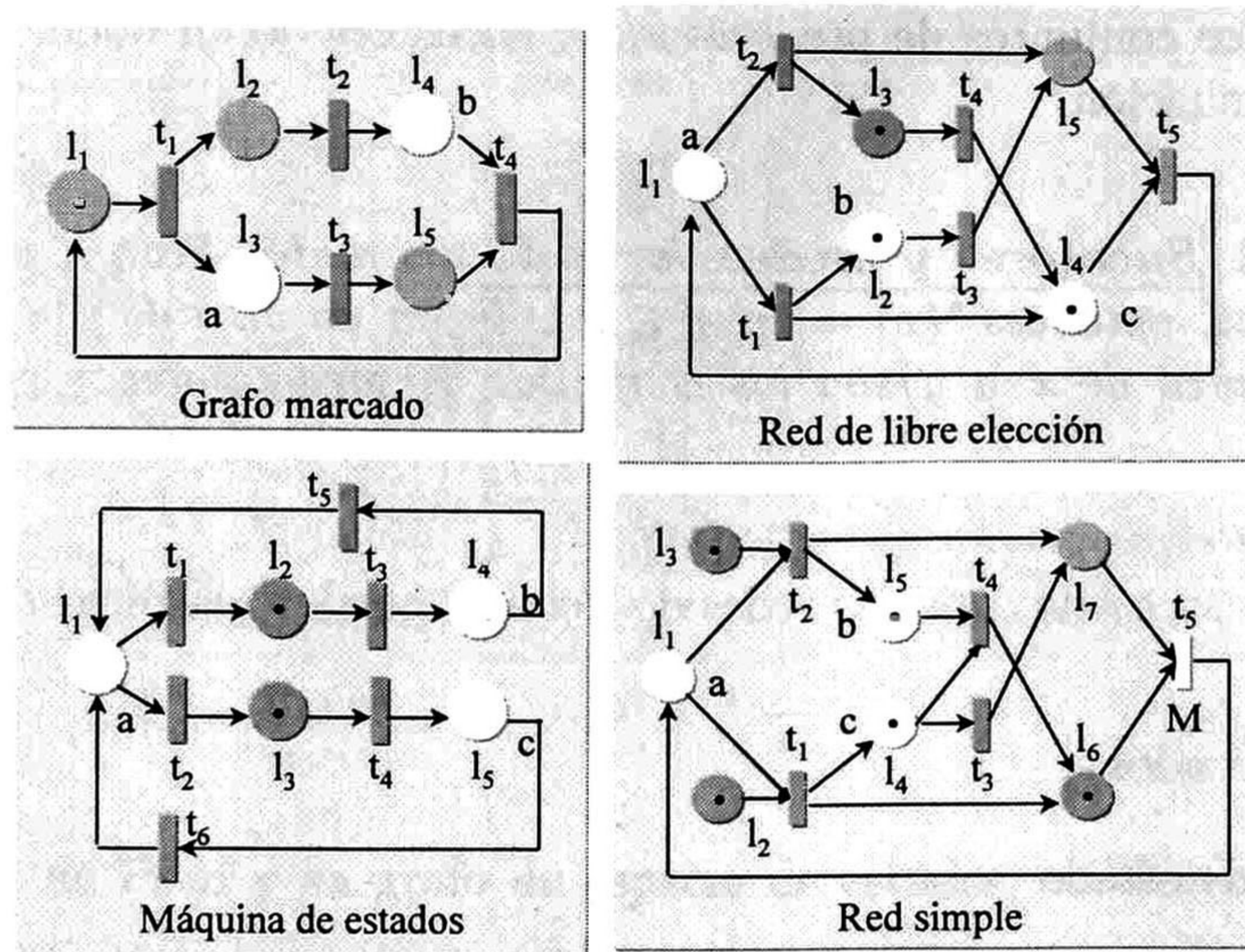


Figura 2.5: Redes de Petri interpretadas con estructura diferente.

### 2.3 Ejemplo de modelado de un SED mediante redes de Petri interpretadas

Antes de presentar el ejemplo de modelado se introducen los siguientes conceptos relacionados con los sistemas de eventos discretos.

**Definición 2.16** Alfabetos de entrada y salida de un SED. Sea  $S_f$  un SED. El conjunto  $\sum_{ent} = \{a_1, a_2, \dots, a_r\}$  es el alfabeto de entrada a  $S_f$ , donde  $a_i$  es un evento que representa la señal de un actuador de  $S_f$  y el conjunto  $\sum_{sal} = \{s_1, \dots, s_p\}$  es el alfabeto de salida de  $S_f$ , donde  $s_i$  es un evento que representa la señal generada por un sensor de  $S_f$ .

**Definición 2.17** Palabras y lenguajes de entrada y salida de un SED. El conjunto  $\mathcal{L}_e = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$  es el lenguaje de entrada de  $S_f$ ; donde  $w_i \in \sum_{ent}^*$  es una palabra de entrada aceptada por  $S_f$ <sup>1</sup>, mientras que, el conjunto  $\mathcal{L}_s = \{z_1, z_2, \dots, z_m\}$  es lenguaje de salida de  $S_f$ , donde  $z_j \in \sum_{sal}^*$  es una palabra de salida de  $S_f$ .

Para ilustrar los conceptos presentados en este capítulo, a continuación se presenta como ejemplo el modelado de un taller de maquinado usando redes de Petri interpretadas.

**Ejemplo 2.6** Se quiere modelar en RP un taller en el que se realiza el maquinado de cierto tipo de piezas utilizando tres máquinas:  $M_1, M_2, M_3$ , las cuales son manejadas por dos

<sup>1</sup>En nuestro contexto, que una palabra sea aceptada por el sistema significa que la presencia de cada uno de los símbolos que la conforman permite el disparo de una transición controlable habilitada. Si el símbolo está presente pero la transición correspondiente no está habilitada, entonces el símbolo no es aceptado.

## 2.3. EJEMPLO DE MODELADO DE UN SED MEDIANTE REDES DE PETRI INTERPRETADAS

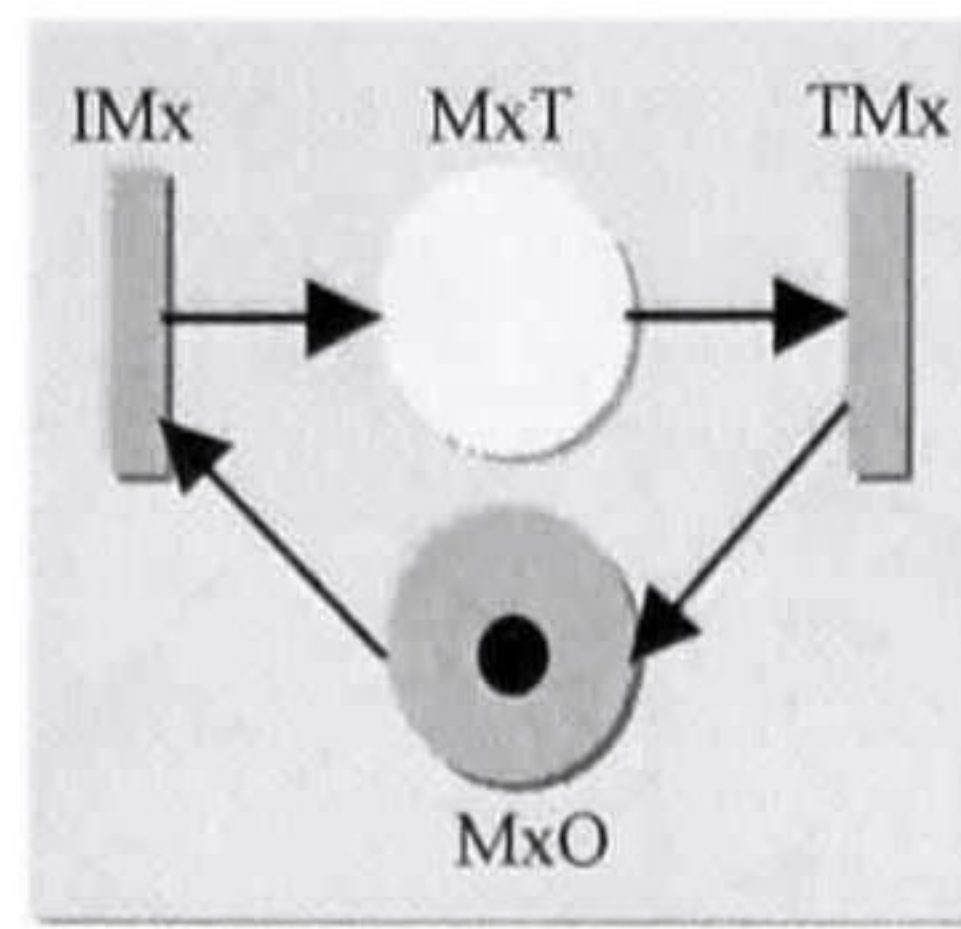


Figura 2.6: Modelo en RPI de una máquina  $M_x$  del taller.

trabajadores  $T_1, T_2$ . El trabajador  $T_1$  conoce el manejo de las máquinas  $M_1$  y  $M_2$ , mientras que el trabajador  $T_2$  maneja a  $M_1$  y a  $M_3$ . El maquinado de cada pieza se realiza en dos etapas: la primera, se efectúa en  $M_1$  y la segunda, ya sea en  $M_2$  o en  $M_3$ . Cada vez que una orden llega se mantiene en la lista de espera hasta que pueda ser atendida, entonces se colocan las piezas a procesar en una bandeja de entrada. Cuando algún trabajador está disponible espera a que se desocupe la máquina  $M_1$  para iniciar el maquinado de una de las piezas. Al terminar el procesamiento en  $M_1$ , el trabajador coloca la pieza terminada en una charola, de donde puede ser tomada por alguno de los trabajadores para iniciar su procesamiento en  $M_2$  o  $M_3$ . Una vez terminado el procesamiento en  $M_2$  o en  $M_3$ , la pieza es enviada al almacén para su envío posterior.

Una técnica de modelado consiste en construir los modelos de los diferentes elementos del sistema y después fusionarlos en un modelo único por medio de los lugares o transiciones que tengan un significado o función similar.

En el sistema del taller se pueden distinguir los siguientes elementos: las máquinas, la actividad de los trabajadores y el avance de las piezas.

### Modelado de las máquinas.

El funcionamiento de las tres máquinas es similar, por ello solo es necesario modelar una de ellas y triplicar el modelo para cada máquina. Una máquina  $M_x$  ( $x$  representa el número de la máquina) puede estar en dos estados: ociosa ( $M_xO$ ) o trabajando ( $M_xT$ ). Los eventos que provocan un cambio de estado son Inicio del maquinado ( $IM_x$ ) y Término del maquinado ( $TM_x$ ). En la figura 2.6 se muestra un modelo para una máquina  $M_x$  en RPI.

### Modelado de la actividad de un trabajador.

Ya que la actividad de los trabajadores es similar, también es suficiente construir un modelo y después duplicarlo. Un trabajador  $T_x$  puede estar ocioso ( $T_xO$ ), maquinando una pieza en  $M_1$  ( $T_xM_1$ ) o maquinando una pieza ya sea en  $M_2$  o en  $M_3$  ( $T_xM_y$ ), según el caso. El inicio o finalización de sus actividades en una máquina en particular se representan por los eventos  $T_xIM_y$  y  $T_xTM_y$  respectivamente. En la figura 2.7 se muestra un modelo general para un trabajador en RPI.

### Modelado del avance de las piezas.

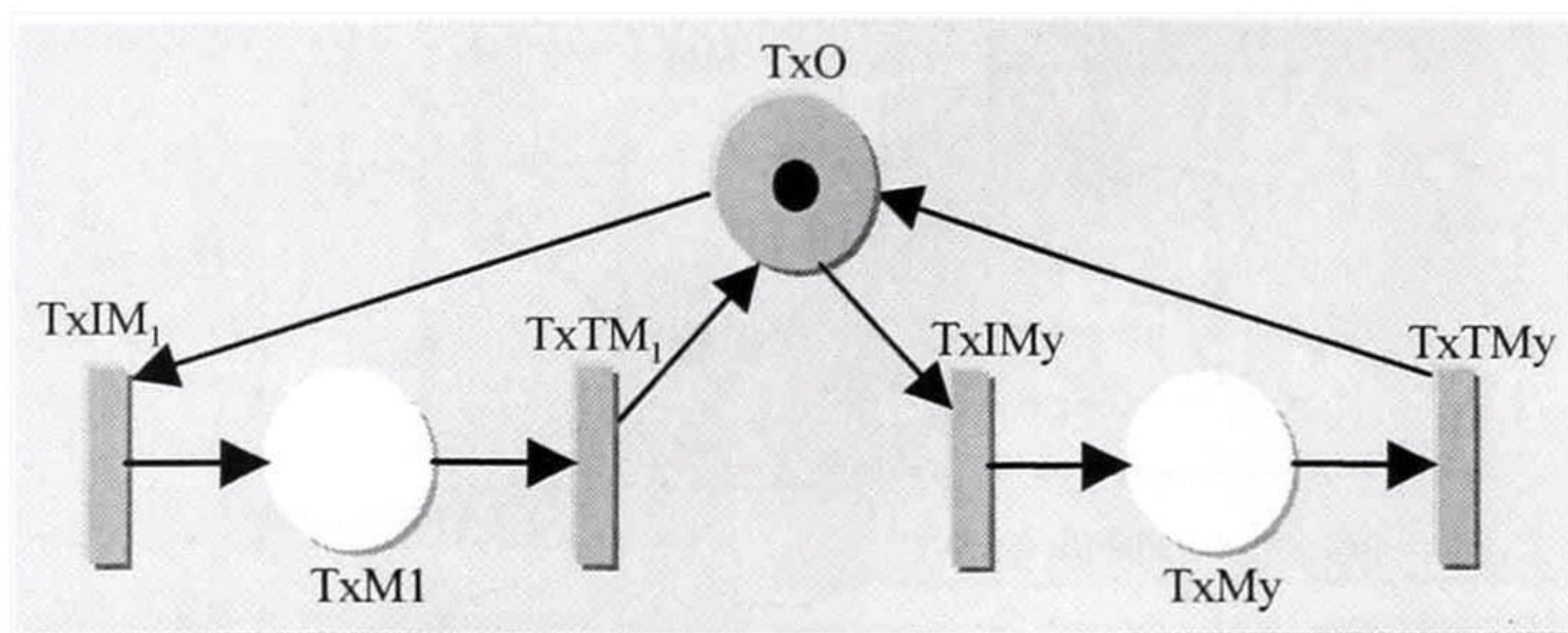


Figura 2.7: Modelo en RPI de la actividad de un trabajador Tx del taller.

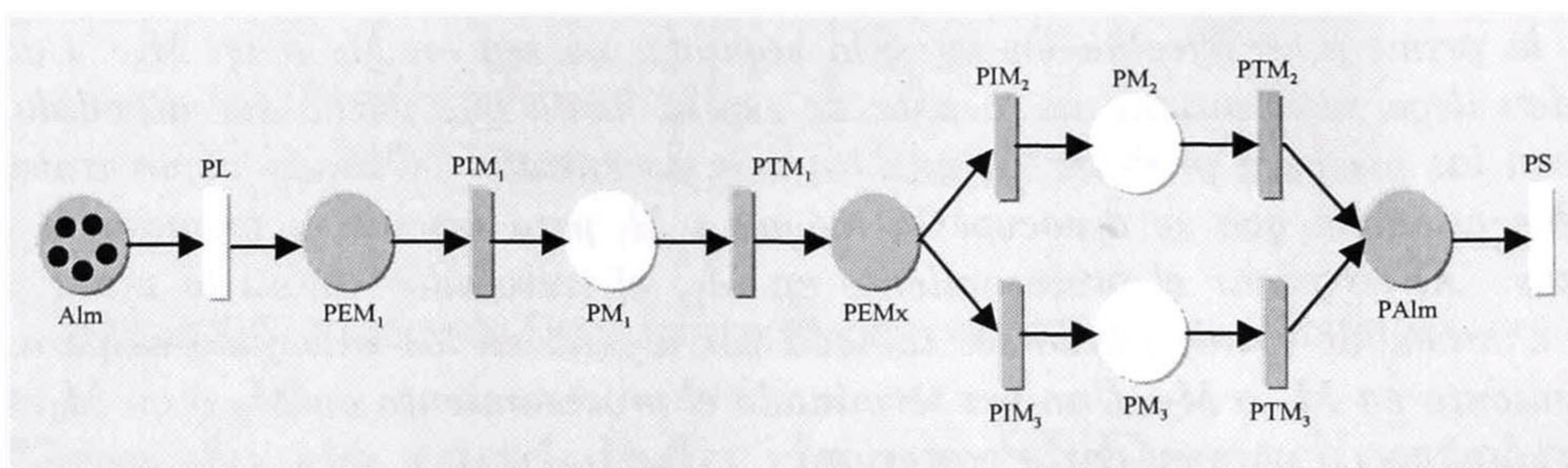


Figura 2.8: Modelo en RPI del avance de una pieza a través del proceso de maquinado.

Cada pieza puede estar en alguno de los siguientes estados: pieza en el almacén (ALM), en espera de ser maquinada en la máquina  $M_1$  ( $PEM_1$ ), maquinándose en  $M_1$  ( $PM_1$ ), en espera de ser maquinada en  $M_2$  o  $M_3$  ( $PEM_x$ ), maquinándose en  $M_2$  o  $M_3$  ( $PM_x$ ) o en espera de llevarse al almacén (PALm). Los eventos correspondientes que indican el inicio o fin de las actividades son: paso de las piezas desde el almacén a la bandeja de entrada a la máquina  $M_1$  (PL), inicio y fin del maquinado en  $M_1$  ( $PIM_1$  y  $PTM_1$ , respectivamente), inicio y fin del maquinado en  $M_2$  o  $M_3$  ( $PIM_x$  y  $PTM_x$ , respectivamente), envío de las piezas al almacén (PS). Se han añadido En la figura 2.8 se puede ver un modelo en RPI para el avance de las piezas.

### Obtención del modelo del taller.

Para obtener el modelo general del taller hay que buscar los nodos de la red que tengan el mismo significado y fusionarlos en uno solo; por ejemplo, una máquina  $M_x$  en el estado trabajando implica a un trabajador  $T_x$  maquinando una pieza que se encuentra en esa máquina. También el inicio del maquinado de una pieza en una máquina  $M_x$  implica el inicio de la actividad de esa máquina y de la actividad de un trabajador  $T_x$  en ella. En la figura 2.9 se muestra el modelo general del taller como resultado de la fusión de los modelos individuales.



## 2.3. EJEMPLO DE MODELADO DE UN SED MEDIANTE REDES DE PETRI INTERPRETADAS

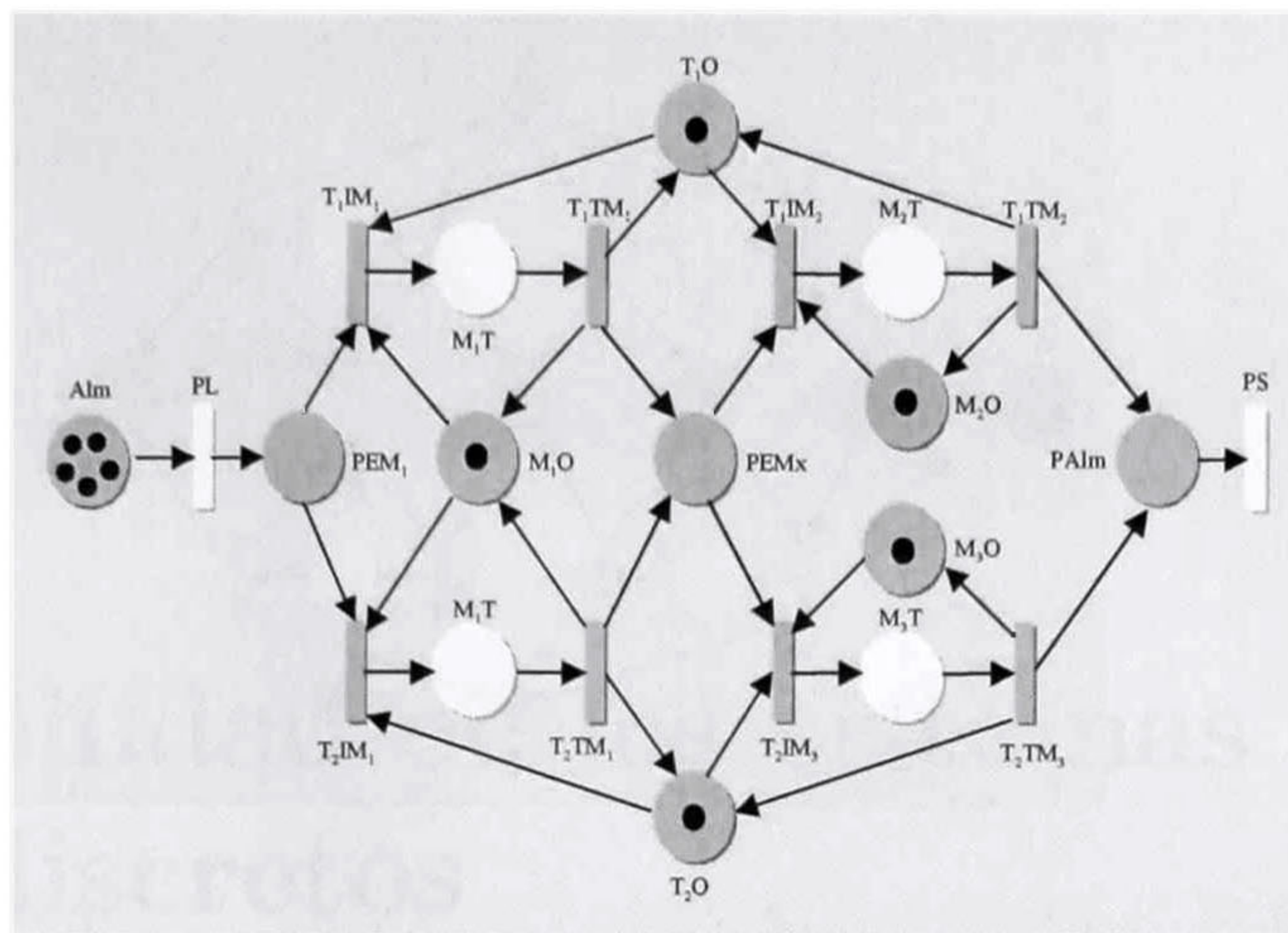


Figura 2.9: Modelo completo del taller en RPI después de fusionar los modelos de sus componentes.

*Note la forma en que se duplicaron algunos nodos de la parte de la red correspondiente a la máquina  $M_1$ , la cual es un recurso compartido. El marcado del lugar Alm depende del número de piezas solicitada en una orden.*

*Por comodidad se pueden reetiquetar los nodos de la RPI del taller de acuerdo a las siguientes tabla*

| Anterior | Actual   |
|----------|----------|
| Alm      | $l_1$    |
| $M_1T$   | $l_3$    |
| $M_1T$   | $l_5$    |
| $PEM_x$  | $l_7$    |
| $M_2T$   | $l_9$    |
| $M_3O$   | $l_{11}$ |
| PAlm     | $l_{13}$ |

| Anterior | Actual   |
|----------|----------|
| $PEM_1$  | $l_2$    |
| $M_1O$   | $l_4$    |
| $T_1O$   | $l_6$    |
| $T_2O$   | $l_8$    |
| $M_2O$   | $l_{10}$ |
| $M_3T$   | $l_{12}$ |
|          |          |

| Anterior  | Actual |
|-----------|--------|
| PL        | $t_1$  |
| $T_2IM_1$ | $t_3$  |
| $T_2TM_1$ | $t_5$  |
| $T_2IM_3$ | $t_7$  |
| $T_2TM_3$ | $t_9$  |

| Anterior  | Actual   |
|-----------|----------|
| $T_1IM_1$ | $t_2$    |
| $T_1TM_1$ | $t_4$    |
| $T_1IM_2$ | $t_6$    |
| $T_1TM_2$ | $t_8$    |
| PS        | $t_{10}$ |

*La figura 2.10 muestra la RPI del taller con la nueva etiquetación. En este caso, se ha decidido que los lugares  $l_3$ ,  $l_5$ ,  $l_9$  y  $l_{12}$  sean los únicos medibles y que las transiciones  $t_1$  y  $t_{10}$  sean las únicas controlables, es decir sólo se tiene conocimiento de cuándo una máquina está encendida (trabajando) y sólo se tiene control del momento de colocar las*

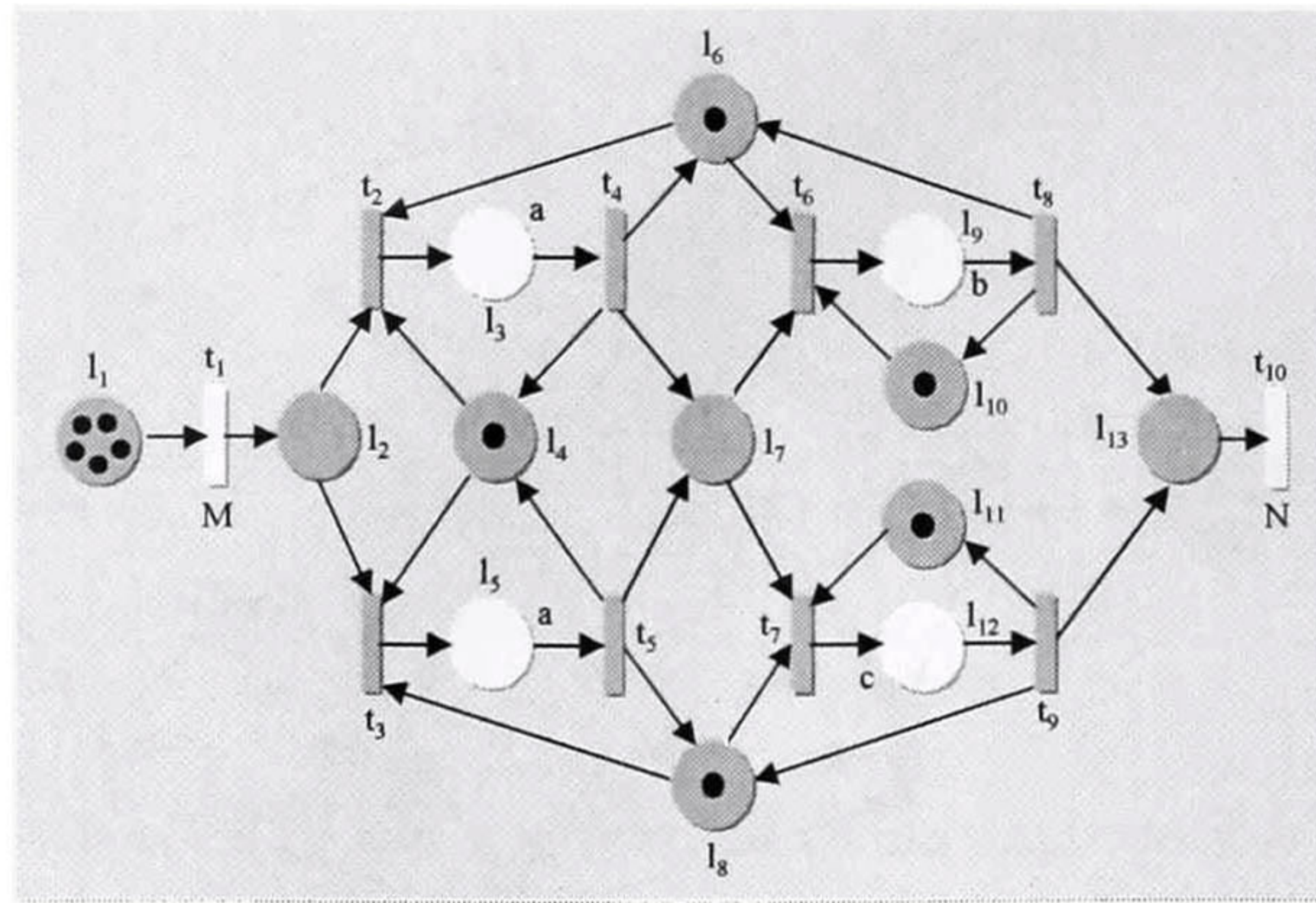


Figura 2.10: Modelo del taller en RPI donde se han reetiquetado los nodos.

piezas de una orden y del momento de enviarlas al almacén cuando están terminadas. De acuerdo a lo anterior, los alfabetos de entrada y salida del taller son  $\Sigma_{ent} = \{M, N\}$  y  $\Sigma_{sal} = \{a, b, c\}$ . En las tablas siguientes se muestran las funciones  $\lambda$  y  $\varphi$  para la red del taller:

|       |            |            |       |            |       |            |            |            |       |            |            |          |            |
|-------|------------|------------|-------|------------|-------|------------|------------|------------|-------|------------|------------|----------|------------|
| $l_i$ | $l_1$      | $l_2$      | $l_3$ | $l_4$      | $l_5$ | $l_6$      | $l_7$      | $l_8$      | $l_9$ | $l_{10}$   | $l_{11}$   | $l_{12}$ | $l_{13}$   |
| $b_i$ | $\epsilon$ | $\epsilon$ | a     | $\epsilon$ | a     | $\epsilon$ | $\epsilon$ | $\epsilon$ | b     | $\epsilon$ | $\epsilon$ | c        | $\epsilon$ |

|                |       |            |            |            |            |            |            |            |            |          |
|----------------|-------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|----------|
| $t_i$          | $t_1$ | $t_2$      | $t_3$      | $t_4$      | $t_5$      | $t_6$      | $t_7$      | $t_8$      | $t_9$      | $t_{10}$ |
| $\lambda(t_i)$ | M     | $\epsilon$ | $\epsilon$ | $\epsilon$ | $\epsilon$ | $\epsilon$ | $\epsilon$ | $\epsilon$ | $\epsilon$ | N        |

Note como los lugares  $l_3$  y  $l_5$  tienen el mismo símbolo de salida,  $\varphi(l_3) = \varphi(l_5) = a$ , esto se debe a que sólo es posible saber que la máquina  $M_1$  está trabajando, pero no es posible saber cual de los dos trabajadores la está operando.

## 2.4 Conclusiones

En este capítulo se han estudiado a las redes de Petri como herramientas de modelado de los SED. Se presentaron dos familias de las RP: las redes de Petri interpretadas y las redes de Petri booleanas, las cuales serán utilizadas para el diseño y construcción de observadores asintóticos.

También se presentaron los conceptos básicos asociados a las redes de Petri, los cuales constituyen la base para poder entender el material de los capítulos siguientes, en los cuales se abordarán el problema de observabilidad y de construcción de observadores asintóticos.

## Capítulo 3

# Observabilidad en los sistemas de eventos discretos

---

**Resumen:** La observabilidad es una propiedad deseable en los SED, ya que si un sistema la posee entonces es posible inferir su estado. Existen varios trabajos en los cuales se caracteriza a los SED observables, pero en la mayoría de ellos los SED han sido modelados en términos de máquinas de estado finitos, por lo cual la observabilidad está en términos de los lenguajes generados por los autómatas o de sus proyecciones sobre un subconjunto de su alfabeto de entrada. En este capítulo se presenta una definición de observabilidad y una caracterización de los SED observables cuando estos son modelados por medio de RPI. Además se particulariza, caracterizando la observabilidad de algunas de las subclases de RP (GM, ME y LE) en términos de su interpretación. Finalmente, se presenta un algoritmo para determinar si un SED modelado con RPI es observable.

---

## 3.1 Introducción

Como es bien sabido, la observabilidad se refiere al hecho de poder conocer el estado exacto del sistema en un momento dado en base a sus entradas, salidas y estructura interna. En la literatura técnica, existe una gran cantidad de trabajos en los cuales se menciona el problema de la observabilidad de los sistemas de eventos discretos. Por ejemplo, Cüneyt and Willsky en [2] abordan este problema para los SED modelados mediante máquinas de estados finitos (autómatas finitos). Ellos definen la observabilidad de un SED como tener un conocimiento exacto del estado del sistema en instantes de tiempo precisos, en puntos intermedios el estado es incierto, pero si esta ambigüedad se resuelve en un número finito de eventos, entonces el sistema es llamado estable. Esto garantiza la existencia de un observador para el sistema. Una vez contruido este observador, de acuerdo a sus características, se determina si el sistema es observable o no.

En [3], Yong Li y Wonham abordan el problema de la observabilidad para los SED con autómatas finitos, con el fin de determinar las condiciones suficientes y necesarias para la existencia de controladores con retroalimentación de estado de un SED bajo observaciones parciales, lo que significa que sólo algunas variables de estado son observables. Los estados del sistema son particionados en clases de equivalencia llamadas clases de observabilidad. El controlador sólo tiene acceso a la información de cada una de estas clases y no puede distinguir entre dos estados de una misma clase, es decir, en realidad nunca conoce con exactitud el estado real del sistema.

Por otro lado, Feng Lin y Wonham, en [5], estudian el problema de observabilidad local para sintetizar supervisores descentralizados y coordinadores para SED parcialmente observados modelados mediante máquinas de estado finito; su estudio de la observabilidad está basado en los lenguajes generados por el modelo del sistema. Los autores caracterizan a la observabilidad de un SED de la siguiente forma: si dos cadenas generadas por el sistema tienen el mismo símbolo de salida, entonces deben de ser consistentes, es decir si se les agrega cualquier evento del sistema, entonces las nuevas cadenas deben pertenecer mismo lenguaje. Una vez más el controlador no conoce el estado exacto del sistema.

En [4], Ma. Elena Meda aborda el problema de la observabilidad para SED modelados por medio de RPI. Meda propone un teorema, en el cual se establecen condiciones necesarias y suficientes para caracterizar la observabilidad de este tipo de sistemas, pero desafortunadamente el teorema no abarca todas las posibles configuraciones de una RP, es decir, aunque es correcto está incompleto, esto es debido a que no se consideran a las transiciones de salida de un lugar de elección como un conjunto, en cambio cada transición de la red es considerada por separado.

En este trabajo se propondrá un criterio basado en el concepto conjunto de marcados alcanzables a partir de una palabra de entrada, propuesto por Meda. Con este criterio se tratará de complementar dicho concepto [4].

## 3.2 Sistemas de eventos discretos observables

**Definición 3.1** *Sistemas de eventos discretos observables.* Un SED modelado por medio de una RPI es observable ssi dada la estructura de la RPI, existe una función

$$\Psi : \mathcal{L}_e \times \mathcal{L}_s \rightarrow \mathcal{R}(RPI, M_o), \quad \forall M_o$$

Esto es, un sistema modelado por medio de una RPI es observable ssi su estado actual (marcado actual) puede ser calculado a partir del conocimiento de su estructura, sus entradas y sus salidas.

Si en un sistema existen eventos incontrolables, cuando una palabra de entrada  $w = a_1 a_2 \dots a_n$  es aceptada por el sistema  $S_f^1$ , entonces alguna secuencia de transiciones  $\sigma_w = t_1 \sigma_1^u t_2 \sigma_2^u \dots \sigma_{k-1}^u t_k \sigma_k^u$  será disparada, donde  $t_i$  es una transición controlable tal que  $\lambda(t_i) = a_i$  y  $\sigma_i^u$  es una secuencia de transiciones incontrolables habilitadas que se disparan en el sistema. Dado que las transiciones incontrolables habilitadas pueden dispararse o no, las secuencias  $\sigma_i^u$  pueden ser diferentes cada vez que se acepta la misma palabra  $w$ , y por tanto, también son diferentes los estados (marcados) que se pueden alcanzar por ella. Entonces para construir la función  $\Psi$  es necesario el poder distinguir los estados alcanzados por el sistema entre la aceptación de dos símbolos de entrada consecutivos. En el siguiente ejemplo se ilustra este hecho.

**Ejemplo 3.1** *Considere a la red de Petri interpretada de la figura 3.1. Como se puede apreciar, los lugares  $l_3$  y  $l_4$  son medibles y las transiciones  $t_1$  y  $t_4$  son controlables. El marcado inicial de la red es  $M_o = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ , el cual la hace viva y binaria. En este marcado no hay ningún símbolo de salida presente ya que ningún lugar observable de la red está marcado. La función  $\Psi$  en este punto está dada por  $\Psi(\varepsilon, \varepsilon) = M_o$ .*

*Suponga que se introduce la palabra  $w = MN$ . El símbolo 'M' es aceptado por la red ya que la transición  $t_1$  a la cual se le ha asignado este símbolo está habilitada en  $M_o$ . Esto provoca que se alcance el marcado  $M_1 = [0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0]^T$  y que el símbolo 'a' esté a la salida. La función  $\Psi$  para este punto puede ser escrita como  $\Psi(M, a) = M_1$ .*

*En  $M_1$  hay dos transiciones incontrolables habilitadas:  $t_2$  y  $t_3$ , cualquiera de ellas puede dispararse.*

*Si se dispara  $t_2$  entonces se alcanza el marcado  $M_2 = [0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0]^T$  y se presentan los símbolos de salida 'a' y 'b', el cual indica que ha ocurrido un cambio de marcado en la red, por lo cual se puede escribir  $\Psi(M, [a, b]) = M_2$ .*

*Si en vez de dispararse  $t_2$  se dispara  $t_3$  se alcanza el marcado  $M_3 = [0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1]^T$  y no se presenta ningún símbolo de salida. En este caso, la función  $\Psi$  se escribe como  $\Psi(M, \varepsilon) = M_3$ . Como se puede observar los marcados  $M_1$ ,  $M_2$  y  $M_3$  producidos por la palabra  $w$  son distinguibles entre sí.*

<sup>1</sup>En nuestro contexto, que una palabra  $w$  sea aceptada significa que cada uno de los símbolos de  $w$  permiten el disparo de transiciones habilitadas.

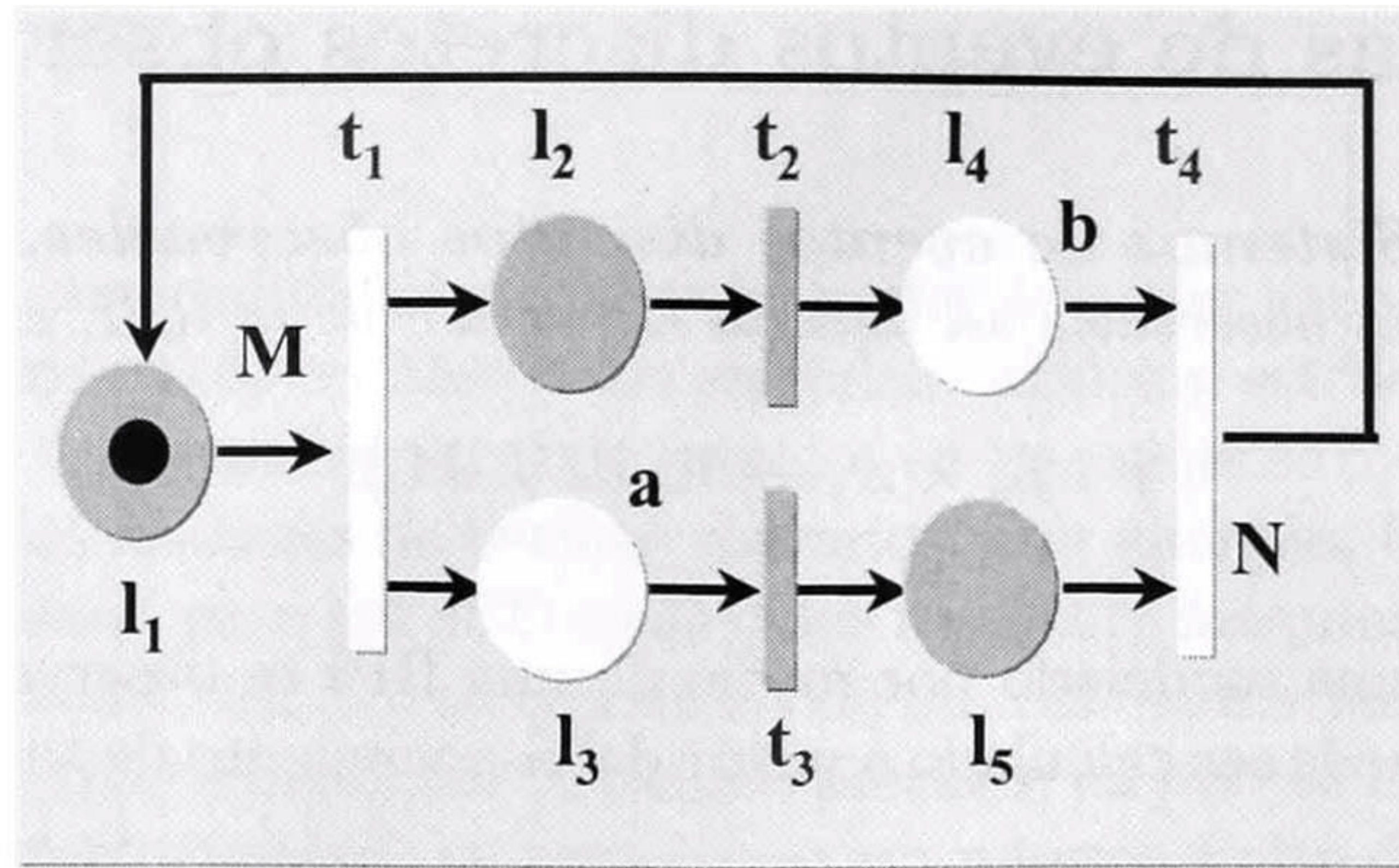


Figura 3.1: Red de Petri interpretada observable.

Ahora suponga que después de aceptado el símbolo  $M$  se disparan ambas  $t_2$  y  $t_3$ , entonces se alcanza el marcado  $M_4 = [0\ 0\ 0\ 1\ 1]^T$  en el cual el símbolo 'b' está presente y se puede escribir  $\Psi(M, b) = M_4$ . En este marcado está habilitada la transición  $t_4$ , por lo cual el símbolo 'N' ya puede ser aceptado. Al ocurrir esto se dispara  $t_4$  y se alcanza nuevamente el marcado inicial  $M_o$ .

En resumen la función  $\Psi$  para esta red está dada por la siguiente tabla:

| Entrada       | Salida        | $\Psi$                    |
|---------------|---------------|---------------------------|
| $\varepsilon$ | $\varepsilon$ | $M_o = [1\ 0\ 0\ 0\ 0]^T$ |
| M             | a             | $M_1 = [0\ 1\ 1\ 0\ 0]^T$ |
| M             | [a, b]        | $M_2 = [0\ 0\ 1\ 1\ 0]^T$ |
| M             | $\varepsilon$ | $M_3 = [0\ 1\ 0\ 1\ 0]^T$ |
| M             | b             | $M_4 = [0\ 0\ 0\ 1\ 1]^T$ |

Como la función  $\Psi$  pudo ser construida para esta red entonces se dice que la red es observable. Note como aquí la secuencia de disparos provocada por la palabra de entrada  $w$  es  $\sigma_w = t_1\ t_2\ t_3\ t_4$ , donde  $t_2t_3 = \sigma_1^u$ . Si  $w$  es introducida nuevamente a la red, entonces puede ser que ahora  $\sigma_w = t_1\ t_3\ t_2\ t_4$ , donde  $t_3t_2 = \sigma_1^u$ .

En el siguiente ejemplo se verá como un cambio en la interpretación de la red hace que esta pierda la propiedad de observabilidad.

**Ejemplo 3.2** Considere a la red de Petri interpretada de la figura 3.2. Como se puede apreciar, sólo el lugar  $l_4$  es medible y las transiciones  $t_1$  y  $t_4$  son controlables. El marcado inicial de la red es  $M_o = [1\ 0\ 0\ 0\ 0]^T$ , el cual la hace viva y binaria. En este marcado no hay ningún símbolo de salida presente ya que ningún lugar observable de la red está marcado. La función  $\Psi$  en este punto está dada por  $\Psi(\varepsilon, \varepsilon) = M_o$ .

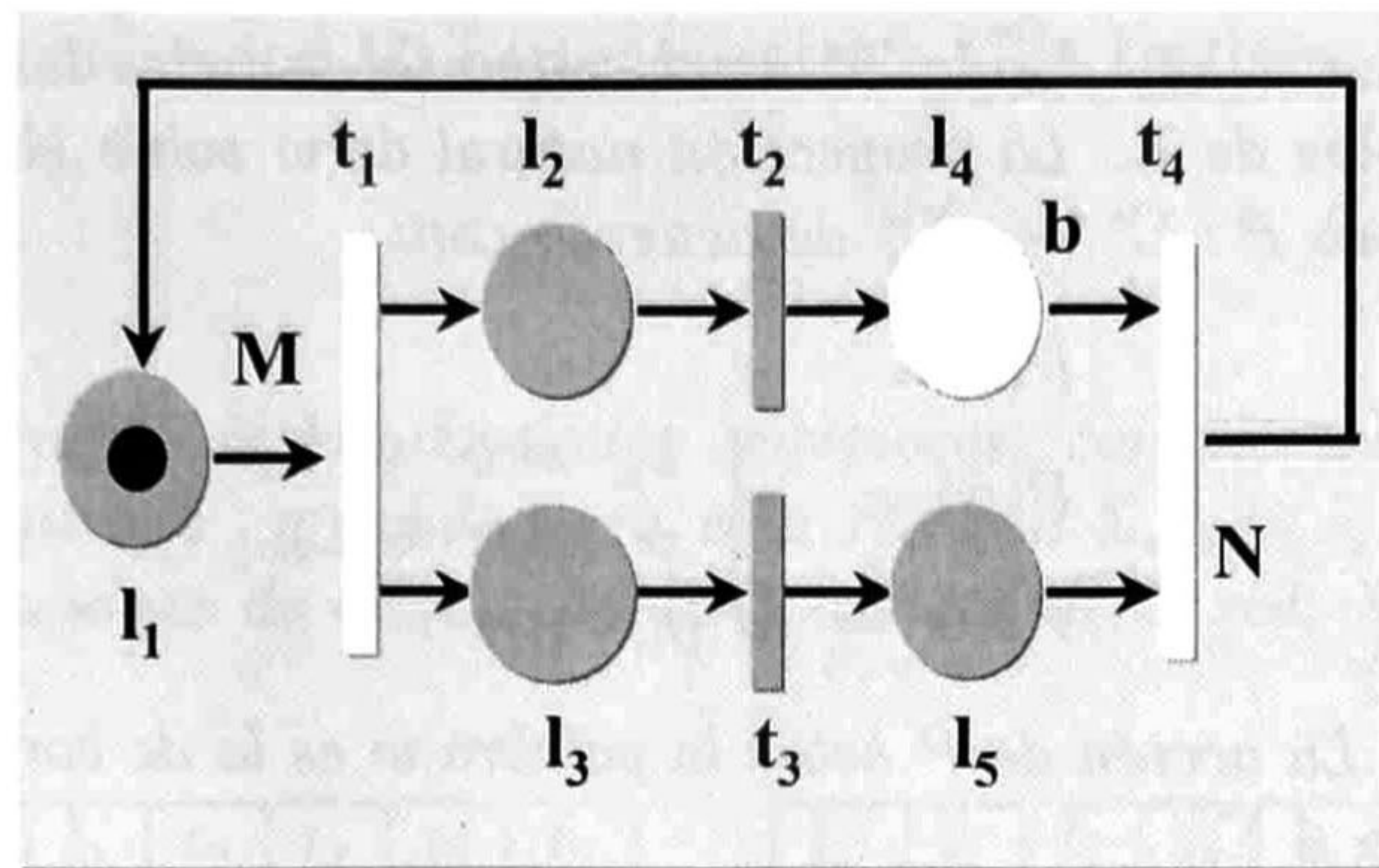


Figura 3.2: Una red de Petri interpretada en la cual existen algunos marcados no distinguibles.

Suponga que se introduce la palabra  $w = MN$ , la cual es aceptada por la red ya que la transición  $t_1$  a la cual se le ha asignado el símbolo  $M$  está habilitada en  $M_0$ . Esto provoca que se alcance el marcado  $M_1 = [0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0]^T$ . Este marcado, aunque tampoco se presentan símbolos a la salida del sistema, es distinguible del marcado  $M_0$  ya que se conoce el disparo de  $t_1$ , por lo cual se puede escribir  $\Psi(M, \varepsilon) = M_1$ .

En  $M_1$  hay dos transiciones incontrolables habilitadas:  $t_1$  y  $t_2$ , cualquiera de ellas puede dispararse.

Si se dispara  $t_2$  entonces se alcanza el marcado  $M_2 = [0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0]^T$  y se presenta el símbolo de salida 'b', el cual indica que ha ocurrido un cambio de marcado en la red, por lo cual se puede escribir  $\Psi(M, b) = M_2$ .

Si en vez de dispararse  $t_2$  se dispara  $t_3$  se alcanza el marcado  $M_3 = [0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0]^T$  y no se presenta ningún símbolo de salida. En este caso se tendría que escribir  $\Psi(M, \varepsilon) = M_3$ . Pero  $\Psi(M, \varepsilon) = M_1$ , lo que significa  $M_1$  y  $M_3$  no pueden ser distinguidos a través de las entradas y las salidas de la red, entonces la red no es observable.

### 3.3 Observabilidad de los SED modelados con RPI

#### 3.3.1 Caracterización de la observabilidad de un SED

En algunas ocasiones, contruir la función  $\Psi$ , para determinar si un sistema es observable o no, resulta un trabajo muy laborioso ya que los lenguajes de entrada y salida del SED pueden ser infinitos. Para resolver este problema, a continuación se presenta un criterio para determinar cuando un SED modelado con RPI posee la propiedad de observabilidad sin tener que contruir la función  $\Psi$ . Para ello, primero se define la operación de proyección sobre cadenas de símbolos y dos conjuntos de marcados alcanzables particulares.

**Definición 3.2** *Proyección natural.* Sean  $\Sigma, \Sigma_i$  dos alfabetos cualesquiera tales que  $\Sigma_i \subseteq \Sigma$

$\Sigma$  y sea una palabra  $w \in \Sigma^*$ , donde  $\Sigma^*$  es el conjunto de todas las palabras que se pueden formar con los símbolos de  $\Sigma$ . La proyección natural de  $w$  sobre el alfabeto  $\Sigma_i$ ,  $P(w)|_{\Sigma_i}$ , es definida como el mapeo  $P : \Sigma^* \rightarrow \Sigma_i^*$  de acuerdo con:

$$\begin{aligned} P(\varepsilon) &= \varepsilon \\ P(\alpha) &= \begin{cases} \varepsilon, & \text{si } \alpha \notin \Sigma_i \\ \alpha, & \text{si } \alpha \in \Sigma_i \end{cases} \\ P(s\alpha) &= P(s)P(\alpha) \end{aligned}$$

donde  $s \in \Sigma^*$ ,  $\alpha \in \Sigma$ . La acción de  $P$  sobre la palabra  $w$  es la de borrar todas las ocurrencias de  $\alpha$  en  $w$  tales que  $\alpha \notin \Sigma_i$ .

**Ejemplo 3.3** Sean  $\Sigma = \{t_1, t_2, t_3, t_4\}$  y  $\Sigma_i = \{t_1, t_3\}$  dos lenguajes cualesquiera y  $w = t_1 t_2 t_3 t_4 t_1$  una palabra de  $\Sigma^*$ , entonces la proyección natural de  $w$  sobre  $\Sigma_i$  es  $P(w)|_{\Sigma_i} = t_1 \varepsilon t_3 \varepsilon t_1$ , lo cual se puede reescribir como  $P(w)|_{\Sigma_i} = t_1 t_3 t_1$  dado que los símbolos  $\varepsilon$  pueden ser omitidos.

**Definición 3.3 Proyección inversa.** Sean  $\Sigma, \Sigma_i$  dos alfabetos cualesquiera tales que  $\Sigma_i \subseteq \Sigma$  y sea una palabra  $w \in \Sigma_i^*$ , donde  $\Sigma_i^*$  es el conjunto de todas las palabras que se pueden formar con los símbolos de  $\Sigma_i$ . La proyección inversa de  $w$  sobre el alfabeto  $\Sigma$ ,  $P^{-1}(w)|_{\Sigma}$ , es la imagen inversa de la proyección natural y se define como el mapeo  $P^{-1} : \Sigma_i^* \rightarrow \Sigma^*$  y de acuerdo con:

$$P^{-1}(w)|_{\Sigma} = \{s \in \Sigma^* | P(s) \in \mathcal{L}\}$$

donde  $\mathcal{L} \subseteq \Sigma_i^* \subseteq \Sigma^*$ .

**Ejemplo 3.4** Sean  $\Sigma = \{t_1, t_2, t_3, t_4\}$  y  $\Sigma_i = \{t_1, t_3\}$  dos alfabetos cualesquiera y  $w = t_1 t_3 t_1$  una palabra de  $\Sigma_i^*$ , entonces la proyección inversa de  $w$  sobre  $\Sigma$  es  $P^{-1}(w)|_{\Sigma} = \{t_1 t_2 t_3 t_1, t_1 t_4 t_3 t_1, t_1 t_3 t_2 t_1, t_1 t_3 t_4 t_1, t_1 t_2 t_4 t_3 t_1, \dots\}$ .

**Definición 3.4 Conjunto de marcados alcanzables por una palabra de entrada  $w$ .** Sea  $RI$  una RPI y sea  $w = a_1 a_2 \dots a_n$  una palabra de entrada aceptada por  $RI$ , entonces el conjunto  $\Omega_w$  de los marcados alcanzables por la palabra  $w$  es

$$\Omega_w = \{M_k | M_k = M_o + C\vec{v}_k, \vec{v}_k = \vec{\sigma}_k, \sigma_k \in P^{-1}(w)|_{t_u}, M_k \in \mathcal{R}(RI, M_o)\}$$

donde  $P^{-1}(w)|_{t_u}$  es la proyección inversa de  $w$  bajo el conjunto de las transiciones incontrolables.

**Definición 3.5 Conjunto de marcados consecutivos alcanzables con transiciones incontrolables.** Sea  $S_f$  un SED y  $RI$  la RPI que lo modela. Sea  $w$  una palabra de entrada aceptada por  $RI$  y  $M_i$  un marcado del conjunto  $\Omega_w$ . Entonces

$$C_{M_i}^{\Omega_w} = \{M_j | M_i \xrightarrow{t_j} M_j, \lambda(t_j) = \varepsilon, M_i \neq M_j\}$$

es el conjunto de los marcados consecutivos alcanzables a partir del marcado  $M_i$  a través del disparo de transiciones incontrolables habilitadas.



Nótese que todos los marcados  $M_j$  pertenecientes a  $C_{M_i}^{\Omega_w}$  también pertenecen a  $\Omega_w$ , por lo cual se tiene que  $C_{M_i}^{\Omega_w} \subseteq \Omega_w$ .

**Ejemplo 3.5** Como ejemplo de los conceptos anteriores, considérese la RPI de la figura 3.3. Los alfabetos de entrada y salida para esta red son  $\Sigma_{ent} = \{M\}$  y  $\Sigma_{sal} = \{a, b\}$ , respectivamente. Las funciones de etiquetado de los nodos de la red,  $\lambda$  y  $\varphi$ , están definidas como sigue:

|                |               |               |               |               |       |
|----------------|---------------|---------------|---------------|---------------|-------|
| $t_i$          | $t_1$         | $t_2$         | $t_3$         | $t_4$         | $t_5$ |
| $\lambda(t_i)$ | $\varepsilon$ | $\varepsilon$ | $\varepsilon$ | $\varepsilon$ | $M$   |

|       |               |               |               |       |       |
|-------|---------------|---------------|---------------|-------|-------|
| $l_i$ | $l_1$         | $l_2$         | $l_3$         | $l_4$ | $l_5$ |
| $b_i$ | $\varepsilon$ | $\varepsilon$ | $\varepsilon$ | $a$   | $b$   |

De estas tablas se puede ver que la red sólo se cuenta con una transición controlable:  $t_5$  y con dos lugares medibles:  $l_4$  y  $l_5$ . Ahora supóngase que se introduce a la red la palabra  $w = MM$ , la cual es aceptada por esta, dado su marcado inicial  $M_o = [0\ 0\ 0\ 1\ 1]$ . Entonces una posible secuencia de disparos sería  $\sigma_w = t_5 t_2 t_4 t_5 t_1 t_3$ , la cual puede ser reescrita como  $\sigma_w = t_5 \sigma_1^u t_5 \sigma_2^u$ , donde  $\sigma_1^u = t_2 t_4$  y  $\sigma_2^u = t_1 t_3$ . Además  $P(\sigma_w)|_{t_c} = t_5 t_5$ , de aquí que  $\lambda(t_5)\lambda(t_5) = MM = w$ . El conjunto de los marcados alcanzables por la palabra de entrada  $w$  es

$$\Omega_w = \left\{ \begin{array}{l} M_1 = [0\ 0\ 0\ 1\ 1]^T, \\ M_2 = [1\ 0\ 0\ 0\ 0]^T, \\ M_3 = [0\ 1\ 0\ 1\ 0]^T, \\ M_4 = [0\ 0\ 1\ 0\ 1]^T \end{array} \right\}$$

y los conjuntos de marcados consecutivos alcanzables para cada marcado de  $\Omega_w$  serían:

| Marcado $M_i$             | Conjunto $C_{M_i}^{\Omega_w}$       | Transiciones incontrolables habilitadas en $M_i$ |
|---------------------------|-------------------------------------|--|
| $M_1 = [0\ 0\ 0\ 1\ 1]^T$ | $C_{M_1}^{\Omega_w} = \{\}$         | ninguna  |
| $M_2 = [1\ 0\ 0\ 0\ 0]^T$ | $C_{M_2}^{\Omega_w} = \{M_3, M_4\}$ | $t_1, t_2$                                       |
| $M_3 = [0\ 1\ 0\ 1\ 0]^T$ | $C_{M_3}^{\Omega_w} = \{M_1\}$      | $t_3$  |
| $M_4 = [0\ 0\ 1\ 0\ 1]^T$ | $C_{M_4}^{\Omega_w} = \{M_1\}$      | $t_4$  |

El siguiente teorema caracteriza la observabilidad de un SED modelado con RPI en términos de los conjuntos  $\Omega_w$  y  $C_{M_i}^{\Omega_w}$ , indicando que si existen marcados consecutivos distintos alcanzables con una misma palabra de entrada  $w$ , entonces cada uno de ellos debe de producir una palabra de salida diferente entre sí y con el marcado  $M_i$ .

**Teorema 1** *Caracterización de la observabilidad de un SED modelado con RPI.* Sea  $S_f$  un SED y sea RI una RPI binaria la red que lo modela. Sea  $w = a_1 a_2 \dots a_n$  una palabra de entrada aceptada por RI. La red RI es observable ssi  $\forall w$  se cumple que dado un marcado  $M_i \in \Omega_w$  y cualesquiera dos marcados  $M_j, M_k \in C_{M_i}^{\Omega_w}$ , si  $M_j \neq M_k$  entonces  $\varphi(M_i) \neq \varphi(M_j) \neq \varphi(M_k)$ .

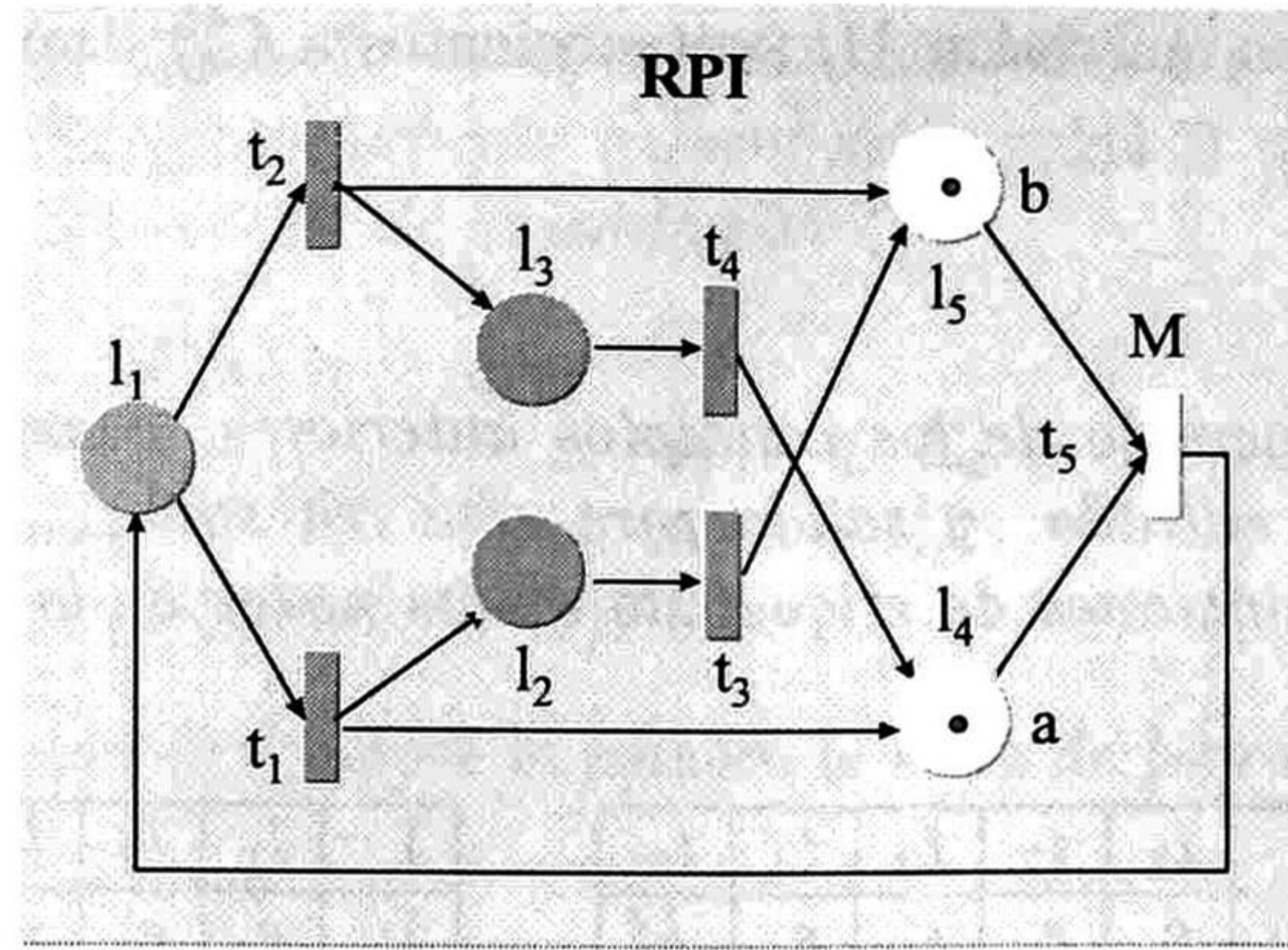


Figura 3.3: Una red de Petri Interpretada viva y binaria.

**Demostración.** ( $\rightarrow$ ). Sea  $S_f$  un SED observable y sea  $RI$  la RPI que lo modela. Entonces por definición, dada la estructura de  $RI$ , existe una función  $\Psi : \mathcal{L}_e \times \mathcal{L}_s \rightarrow \mathcal{R}(RI, M_o)$ , es decir  $\Psi(w, z) = M_i$ , donde  $w = a_1 a_2 \dots a_n \in \mathcal{L}_e$ ,  $z = s_1 s_2 \dots s_n \in \mathcal{L}_s$ , y  $M_i \in \Omega_w \subseteq \mathcal{R}(RI, M_o)$ . Sea  $M_j \in C_{M_i}^{\Omega_w}$ . Supóngase que,  $\varphi(M_i) = \varphi(M_j)$ . Esto implica que  $\Psi(w, z) = M_i$  y también  $\Psi(w, z) = M_j$ , es decir, no hay cambio en la palabra de salida  $z$  con el cambio del marcado de  $M_i$  a  $M_j$ . En este caso,  $\Psi$  ya no sería una función, y por lo tanto el sistema no es observable, lo cual es una contradicción. De aquí que, ningún marcado elemento de  $C_{M_i}^{\Omega_w}$  debe de generar la misma palabra de salida que su marcado predecesor  $M_i$ .

Ahora sean  $M_j, M_k \in C_{M_i}^{\Omega_w}$ . Supóngase que,  $\varphi(M_i) \neq \varphi(M_j)$  y  $\varphi(M_i) \neq \varphi(M_k)$ , pero que  $\varphi(M_j) = \varphi(M_k) = z_k$ . Esto implicaría que  $\Psi(w, z \cdot z_k)^2 = M_j = M_k$ , es decir que aunque los marcados  $M_j$  y  $M_k$  se pueden distinguir de su predecesor  $M_i$ , no se pueden distinguir entre sí. De aquí que,  $\Psi$  ya no sería una función y entonces  $S_f$  tampoco sería observable. Es decir ningún par de marcados que pertenezcan a  $C_{M_i}$  deben tener el mismo símbolo de salida.

( $\leftarrow$ ). Si  $\forall w \in \mathcal{L}_e, \forall M_i \in \Omega_w$  y cualesquiera dos marcados  $M_j, M_k \in C_{M_i}^{\Omega_w}$ , si  $M_j \neq M_k \rightarrow \varphi(M_i) \neq \varphi(M_j) \neq \varphi(M_k)$ , entonces la función  $\Psi$  puede ser contruida como  $\Psi(w, z \cdot \varphi(M_j)) = M_j$  y  $\Psi(w, z \cdot \varphi(M_k)) = M_k$ . ■

La siguiente proposición, consecuencia directa del teorema anterior, será útil en la construcción de observadores asintóticos. Este indica que si todos los eventos de un sistema son controlables, entonces el sistema es observable.

**Proposición 3.1** *Caracterización de la observabilidad cuando todos los eventos de un SED son controlables.* Sea  $RI$  una RPI que modela a un SED. Si  $\forall t_k \in T$  de  $G$ ,  $\lambda(t_k) \neq \varepsilon$ , entonces el sistema es observable.

**Demostración.** Si  $\forall t_k \in T$ ,  $\lambda(t_k) \neq \varepsilon$ , entonces  $\forall w \in \mathcal{L}_e$  se cumple que  $|\Omega_w| = 1$  y el teorema 1 se cumple trivialmente. ■

<sup>2</sup>La notación  $z \cdot z_k$  indica la concatenación de la palabra  $z$  seguida de la palabra  $z_k$ .

Esto implica que, cuando todos los eventos del sistema son controlables, no importa si existen o no lugares medibles en el sistema, ya que siempre se podrá conocer su estado, debido a que se tiene la información completa acerca de su evolución. Esta propiedad de este tipo de sistemas será utilizada para la construcción de observadores asintóticos monolíticos.

### 3.3.2 Observabilidad de los SED modelados con grafos marcados, máquinas de estado y redes de libre elección

Las siguientes proposiciones establecen las condiciones, bajo las cuales un SED modelado con RPI es observable. Estas condiciones también son consecuencia del teorema de observabilidad y están en términos de la estructura de la red y de su interpretación (funciones  $\lambda$  y  $\varphi$ ), cuando en el sistema se presentan uno o más eventos incontrolables.

**Definición 3.6** *Conjunto de transiciones incontrolables de salida de un lugar.* Sea  $RI$  una RPI que modela a un SED. Sea  $l_i \in L$  de  $G$ . Entonces

$$T_i^u = \{t_k \mid t_k \in (l_i)^\bullet \wedge \lambda(t_k) = \varepsilon\}$$

es el conjunto de transiciones incontrolables de salida de un lugar  $l_i$  de la red.

**Definición 3.7** *Subredes  $G_T$  de una RPI.* Sea  $RI$  una RPI. Una subred  $G_T$  es una subred del grafo  $G$  de  $RI$  formada por el conjunto de nodos  $t_u \cup (t_u)^\bullet \cup (t_u)^\circ$  y los arcos que los unen, donde la transición  $t_u \in T$ , tal que  $\lambda(t_u) = \varepsilon$ . A  $t_u$  se le denominará la base de  $G_T$ .

**Proposición 3.2** *Observabilidad de una subred  $G_T$ .* Sea  $RI$  la RPI que modela a un SED. Sea  $t_u \in T$ , tal que  $\lambda(t_u) = \varepsilon$  y  $Q$  la subred  $G_T$  cuya base es  $t_u$ . Entonces,  $Q$  es observable, ssi  $\exists l_i \in Q$ , con  $b_i \neq \varepsilon$ . Es decir, si en la subred  $Q$  existe al menos un lugar de entrada o de salida de  $t_u$  que sea medible.

**Demostración.** ( $\rightarrow$ ). Sea  $Q$  observable y sea  $t_u \in T$  su transición base. Sea  $w$  una palabra de entrada a  $RI$ ,  $w \in \mathcal{L}_e$  tal que  $\exists M_i, M_j \in \Omega_w$  y  $M_i \xrightarrow{t_u} M_j$ . Como  $Q$  es observable,  $M_i \neq M_j$  y  $\varphi(M_i) \neq \varphi(M_j)$ . Esto implica que, al menos un símbolo que no estaba en  $\varphi(M_i)$  ahora lo está en  $\varphi(M_j)$  o viceversa. Por lo tanto, se debe cumplir que, por lo menos  $\exists l_i \in (t_u)^\bullet \cup (t_u)^\circ$ , tal que  $b_i \neq \varepsilon$ .

( $\leftarrow$ ). Sea  $w \in \mathcal{L}_e$ . Sea  $t_k \in Q$  y  $\exists l_i \in Q$ , con  $b_i \neq \varepsilon$ , así que  $l_i \in (t_k)^\bullet \cup (t_k)^\circ$ . Si dispara  $t_k$  en un marcado  $M_i \in \Omega_w$ , se alcanza un marcado  $M_j$ , el cual también está en  $\Omega_w$ . Si  $M_i \neq M_j$ , dada la existencia de  $l_i$ , se garantiza que  $\varphi(M_i) \neq \varphi(M_j)$ , ya que por lo menos  $\varphi(M_i(l_i)) \neq \varphi(M_j(l_i))$ . Por lo cual, el teorema 1 se cumple y  $Q$  es observable. ■

**Definición 3.8** *Subredes  $G_L$  de una red RPI.* Sea  $RI$  una RPI. Una subred  $G_L$  es una subred del grafo  $G$  de  $RI$  formada por el conjunto de nodos  $l_i \cup T_i^u \cup (T_i^u)^\bullet$  y los arcos que los unen, donde  $l_i \in L$ , tal que  $b_i \neq \varepsilon$  y  $|T_i^u| > 1$ . Al lugar  $l_i$  se le denominará como el lugar base de  $G_L$ .

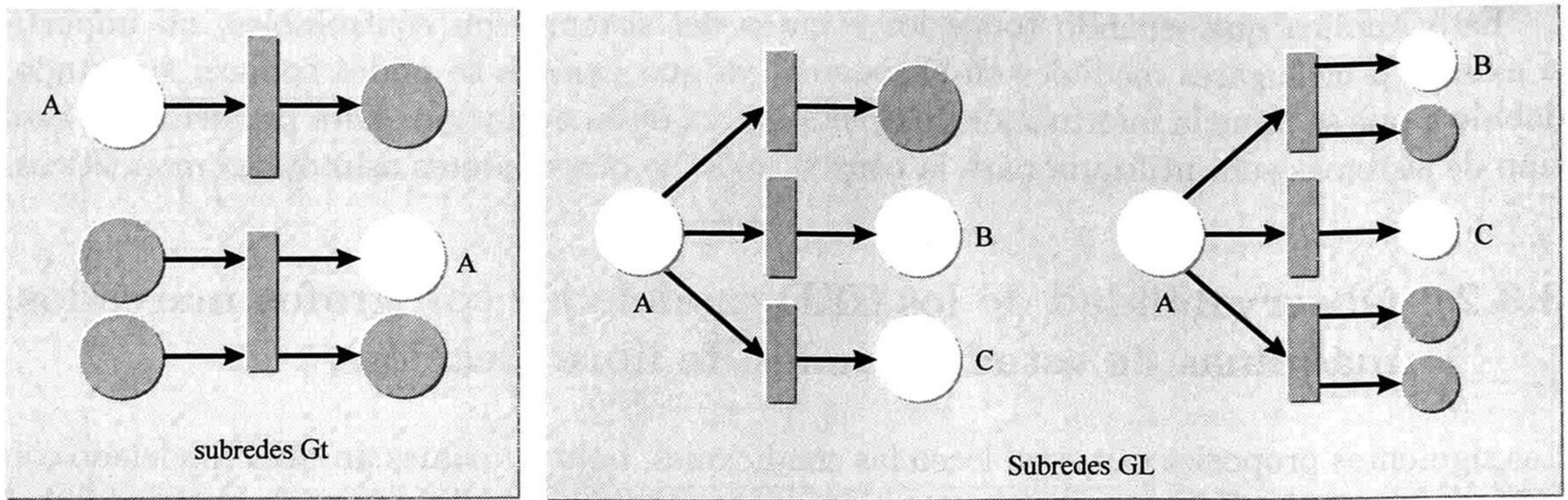


Figura 3.4: Ejemplos de subredes  $G_T$  y  $G_L$  observables.

**Proposición 3.3 Observabilidad de una subred  $G_L$ .** Sea  $RI$  la RPI que modela a un SED. Sea  $Q$  una subred  $G_L$  de  $RI$ . Entonces  $Q$  es observable, ssi  $\forall t_j, t_k \in Q, \exists l_j \in (t_j)^\bullet$  y  $\exists l_k \in (t_k)^\bullet$  tal que  $b_j \neq b_k$ . Es decir, a lo más puede existir una transición de una subred  $G_L$  que tenga todos sus lugares de salida no medibles y no hay símbolos repetidos en los lugares de salida de las transiciones de la red.

**Demostración.** ( $\rightarrow$ ). Sea  $Q$  observable y sea  $l_i \in L$  su lugar base, por lo tanto se cumple que  $\exists M_i \in \Omega_w$  para alguna  $w \in \mathcal{L}_e$ , tal que  $M_i(l_i) = 1$  y  $\exists M_j, M_k \in C_{M_i}^{\Omega_w}$ , con  $M_j \neq M_k$  y  $\varphi(M_j) \neq \varphi(M_k)$ . Como  $\varphi(M_j) \neq \varphi(M_k)$ , entonces deben de diferir en al menos un símbolo de salida. Sean  $t_j, t_k \in T_i^u$  las transiciones que se disparan para alcanzar  $M_j$  y  $M_k$  a partir de  $M_i$ . Dado que,  $l_i$  es el lugar base de  $Q$ , se tiene que  $b_i \neq \varepsilon$  y que  $l_i \in (t_j)^\bullet \cap (t_k)^\bullet$ , entonces  $\varphi(M_j)$  y  $\varphi(M_k)$  difieren en los símbolos de salida de los lugares  $(t_j)^\bullet \cup (t_k)^\bullet$ , entonces  $\exists l_j \in (t_j)^\bullet$  y  $\exists l_k \in (t_k)^\bullet$  con  $b_j \neq b_k$ .

( $\leftarrow$ ). Sean  $l_j \in (t_j)^\bullet, l_k \in (t_k)^\bullet$ , tal que  $b_j \neq b_k$ , donde  $t_j, t_k \in T_i^u$ , con  $(t_j)^\bullet \neq (t_k)^\bullet$ . Sea  $l_i$  el lugar base de  $Q$ . Sea  $\exists M_i \in \Omega_w$  para alguna  $w \in \mathcal{L}_e$ , tal que  $M_i(l_i) = 1$  y  $M_i \xrightarrow{t_j} M_j, M_i \xrightarrow{t_k} M_k$ , con  $t_j, t_k \in Q$ . Dada la estructura de  $Q$ , se tiene que  $M_j(l_i) = M_k(l_i) = 0$  y por tanto  $M_i \neq M_j \neq M_k$ ; además, como  $l_i$  es el lugar base de  $Q$  y dado que  $M_i(l_i) = 1$ , entonces  $b_i = \varphi(M_i(l_i))$  y  $b_i \neq \varphi(M_j(l_i)), b_i \neq \varphi(M_k(l_i))$ . Entonces  $\varphi(M_i) \neq \varphi(M_j), \varphi(M_k)$ . Ahora, dada la existencia de los lugares  $l_j$  y  $l_k$ , entonces  $\varphi(M_j) \neq \varphi(M_k)$ . Por lo tanto, por el teorema 1,  $Q$  es observable. ■

En la figura 3.4, se muestran algunos ejemplos de subredes  $G_T$  y  $G_L$ , las cuales cumplen con las proposiciones anteriores. Note como cada transición de una subred  $G_L$  es la transición base de una subred  $G_T$ . De aquí se deriva que, si una red  $G_L$  es observable, cada una de sus subredes  $G_T$  también debe de ser observable. Note que en ninguna configuración aparecen transiciones controlables de salida o de entrada a los lugares, esto se debe a que siempre es posible determinar su disparo cuando forman parte de alguna palabra de entrada.

Ahora considérense las subredes  $G_T$  y  $G_L$  de la figura 3.5, las cuales no cumplen con las condiciones de observabilidad de las proposiciones 3.2 y 3.3, respectivamente. En particular,

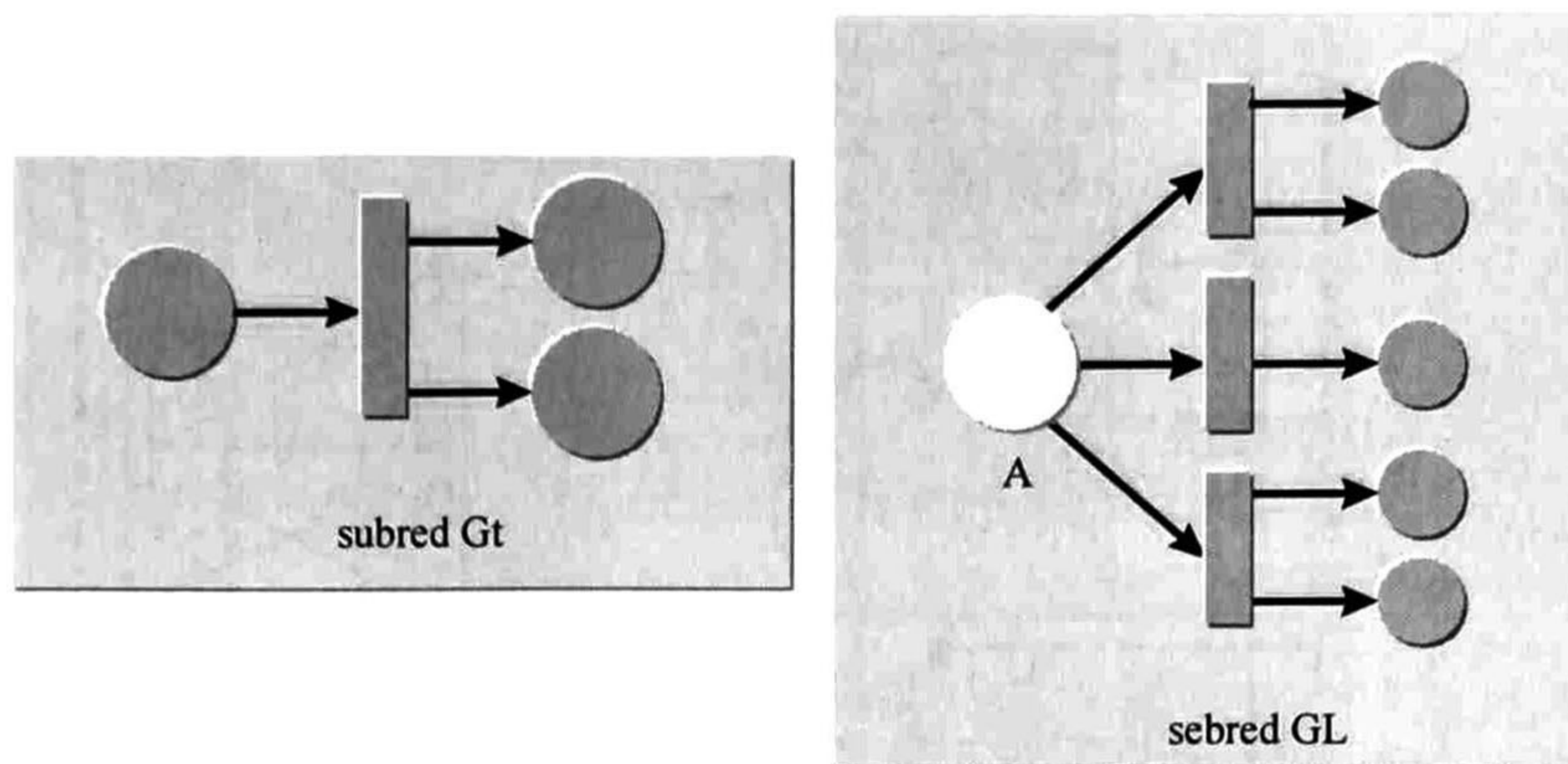


Figura 3.5: Ejemplos de subredes  $G_T$  y  $G_L$  que no son observables.

nótese aunque cada una de las subredes  $G_T$  de la subred  $G_L$  es observable, la subred  $G_L$  completa no es observable porque no cumple con la proposición 3.3.

Con base en los resultados anteriores se puede caracterizar la observabilidad de cada una de las clases de redes de Petri, como lo indican las siguientes proposiciones.

**Proposición 3.4 Observabilidad de los grafos marcados.** *Sea  $S_f$  un SED y RI la RPI que lo modela, tal que su grafo  $G$  es un grafo marcado. Entonces  $S_f$  es observable ssi cada una de sus subredes  $G_T$  es observable.*

**Demostración.** ( $\rightarrow$ ). Sea RI una RPI observable, donde  $G$  es un GM. Dada la estructura del GM, cada transición incontrolable y sus lugares de entrada y salida forman una red  $G_T$ . Como RI es observable es fácil ver que se cumple la proposición 3.2 para cada subred  $G_T$ .

( $\leftarrow$ ). Si cada subred  $G_T$  de RI es observable, entonces es posible identificar el disparo de la transición base de cada subred, debido al cambio de los símbolos de salida que provocaría, por lo tanto RI es observable. ■

**Proposición 3.5 Observabilidad de las máquinas de estados.** *Sea  $S_f$  un SED y RI la RPI que lo modela, tal que su grafo  $G$  es una máquina de estados. Entonces  $S_f$  es observable ssi cada una de sus subredes  $G_T$  y  $G_L$  son observables.*

**Demostración.** Inmediato de las proposiciones 3.2 y 3.3 dado que una máquina de estados puede dividirse en subredes  $G_T$  y  $G_L$ . ■

**Proposición 3.6 Observabilidad de las redes de libre elección.** *Sea  $S_f$  un SED y RI la RPI que lo modela, tal que su grafo  $G$  es una red de libre elección. Entonces  $S_f$  es observable ssi cada una de sus subredes  $G_T$  y  $G_L$  son observables.*

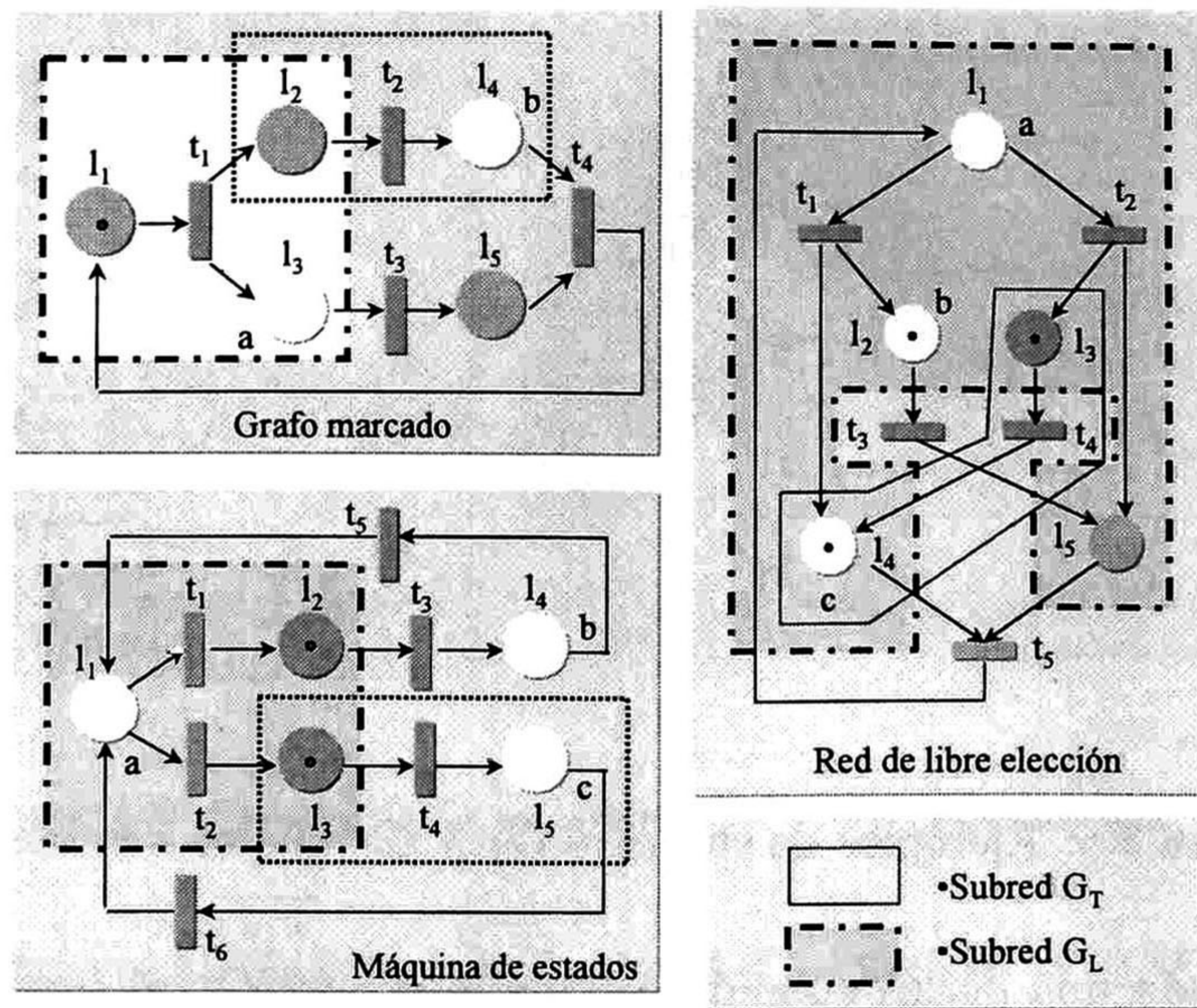


Figura 3.6: Redes de Petri interpretadas observables en las que se muestran algunas de sus subredes  $G_T$  y  $G_L$ .

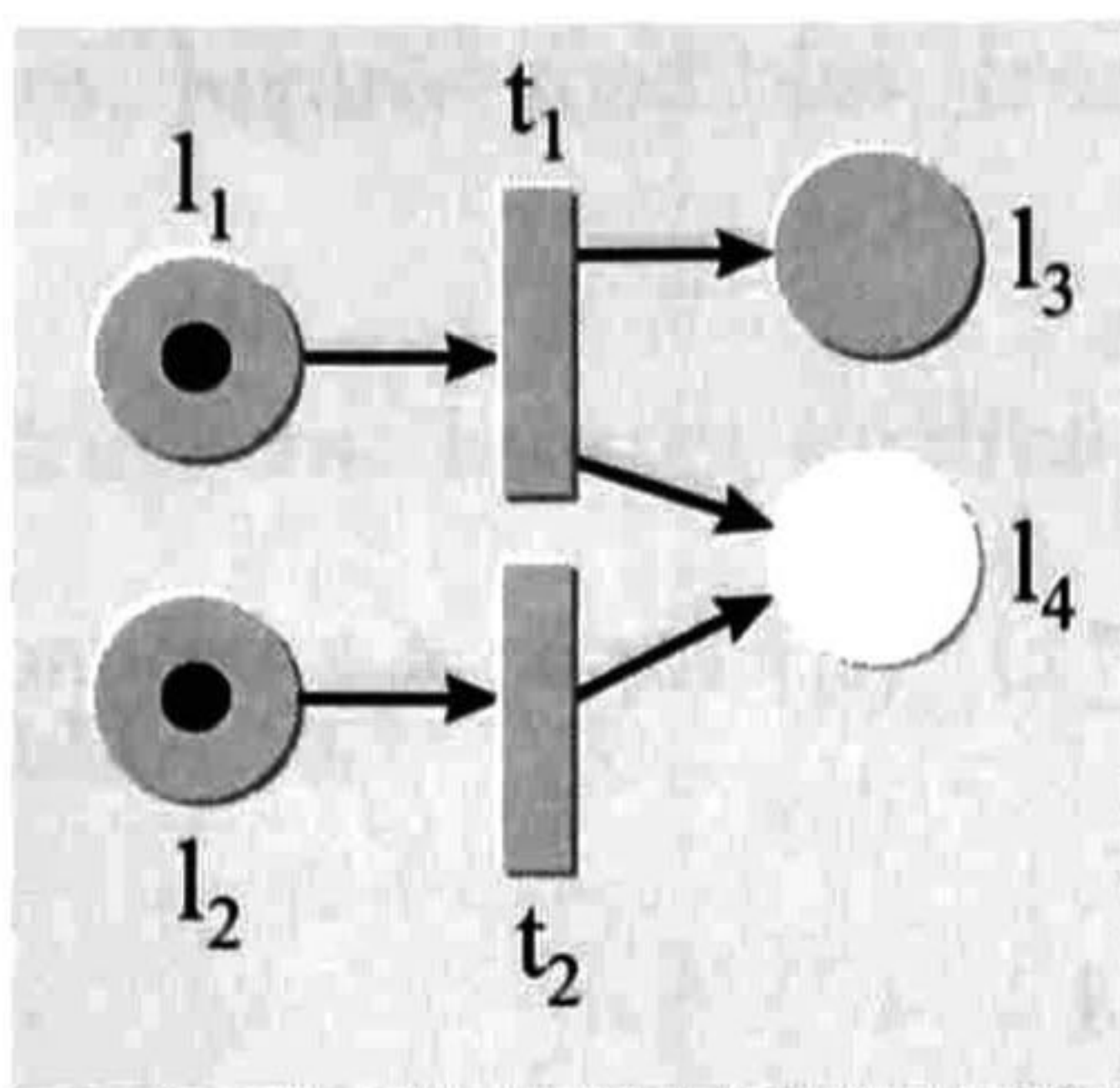
**Demostración.** Inmediato de las proposiciones 3.2 y 3.3 dado que una red de libre elección puede dividirse en subredes  $G_T$  y  $G_L$ . ■

En la figura 3.6 se muestran varios ejemplos de RPI observables. En dicha figura se han encerrado algunas de sus subredes  $G_T$  y  $G_L$  en recuadros punteados y oscuros, respectivamente. Note que cada una de ellas y el resto de las subredes  $G_T$  y  $G_L$  de cada red son observables, por lo tanto la red completa también lo es.

A continuación se definen otro tipo de subredes de una RPI, las subredes  $G_I$ : Por su estructura, este tipo de subredes solamente pueden ser parte de una RPI cuyo grafo sea una ME o una LE, por lo cual tomarán una particular importancia en el diseño de observadores para este tipo de redes, como se verá en capítulos posteriores.

**Definición 3.9 Subredes  $G_I$ .** Sea  $S_f$  un SED y RI la RPI que lo modela. Sea  $l_i \in L$  de  $G$  con  $b_i \neq \varepsilon$ . Sea  $\tau_i^u = \{t_j \mid t_j \in \bullet(l_i), \lambda(t_j) = \varepsilon, \nexists l_j \in \bullet(t_j) \cup (t_j)^\bullet, l_j \neq l_i, t.q. b_j \neq \varepsilon\}$  el conjunto de transiciones incontrolables de entrada al lugar  $l_i$ , las cuales no poseen ningún otro lugar de entrada o salida que sea medible. Si  $|\tau_i^u| > 1$ , entonces los nodos  $l_i \cup \tau_i^u \cup \bullet(\tau_i^u) \cup (\tau_i^u)^\bullet$  y los arcos que los unen forman una red  $G_i$ .

Un ejemplo de éste tipo de subredes se muestra en la figura 3.7. Recuerde que este conjunto de nodos y arcos es una subred, lo que significa que pueden existir otras transiciones de entrada al lugar observable  $l_i$  que sean incontrolables pero que su disparo pueda diferenciarse de las demás transiciones de entrada de  $l_i$  debido a la existencia de uno o más lugares medibles de entrada o salida diferentes de  $l_i$ , por lo cual no pertenecen a la subred.

Figura 3.7: Ejemplo de una subred  $G_I$ 

Es importante hacer notar que, las subredes  $G_I$  son observables debido a la forma en que han sido definidas, como lo indica la siguiente proposición.

**Proposición 3.7** *Observabilidad de una subred  $G_I$ . Una subred  $G_I$  es observable.*

**Demostración.** Sea  $Q$  una subred  $G_I$  y sea  $l_i \in Q$ , tal que  $b_i \neq \varepsilon$ . Se tiene que,  $\forall t_k \in Q$ ,  $t_k$  es la transición base de una subred  $G_T$  y que todos los nodos de  $G_T$  están incluidos en  $Q$ . Por la definición de una subred  $G_I$ , se tiene que  $\forall t_k, l_i \in (t_k)^\bullet$ . Entonces, por la proposición 3.2, cada subred  $G_T$  de  $Q$  es observable y por tanto  $Q$  también es observable. ■

### 3.4 Algoritmos para determinar si un SED es observable

De los resultados anteriores se derivan los siguientes algoritmos, los cuales determinan si un SED es observable en base a la estructura e interpretación de la RPI viva y binaria que lo modela. El primero determina si todas las subredes  $G_T$  de la RPI son observables. El segundo prueba la observabilidad de las subredes  $G_L$  de la red, si es que existe alguna. El tercer algoritmo conjunta los resultados de los dos algoritmos anteriores para determinar si la red en su totalidad es observable.

Los algoritmos trabajan bajo la hipótesis de que el sistema de eventos discretos  $S_f$  es modelado mediante una RPI viva y binaria.

**Algoritmo 3.1** *es\_TObservable (estructura, lugares medibles, transiciones controlables). Determina si todas las subredes  $G_T$  de una RPI viva y binaria son observables.*

1. tobservable = FALSE
2. tcont = 0

3.  $\forall t_i \in G$  hacer
  - (a) Si  $\lambda(t_i) = \varepsilon$  entonces
    - a.1).  $\forall l_j \in G$  hacer
      - a.1.1). Si  $\exists l_j \in (t_i)^\bullet \cup \bullet(t_i)$  t.q  $b_j \neq \varepsilon$  entonces  $tcont = tcont + 1$
  - (b) sino
    - b.1).  $tcont = tcont + 1$
4. Si  $tcont = |T|$  entonces  $tobservable = VERDADERO$
5. Retorna  $tobservable$

**Algoritmo 3.2** *es\_LObservable* (estructura, lugares medibles, transiciones controlables). **Determina si todas las subredes  $G_L$  de una RPI viva y binaria son observables.**

1.  $lobservable = FALSO$
2.  $lcont = 0$
3.  $\forall l_i \in G$  hacer
  - (a)  $cont = 0$
  - (b)  $\forall t_j \in G$ 
    - b.1). Si  $t_j \in (l_i)^\bullet$  y  $\lambda(t_j) = \varepsilon$  entonces
      - b.1.1). Si  $\exists l_k \in (t_j)^\bullet$  t.q.  $b_k \neq \varepsilon$  entonces  $cont = cont + 1$
    - b.2). sino  $cont = cont + 1$
  - (c) Si  $cont \geq |T| - 1$  entonces
    - c.1).  $lcont = lcont + 1$
  - (d) sino
    - d.1). no revisar más lugares
4. Si  $lcont = |L|$  entonces  $lobservable = VERDADERO$
5. Retorna  $lobservable$

**Algoritmo 3.3** *es\_Observable* (estructura, lugares medibles, transiciones controlables). **Determina si una RPI viva y binaria es observable.**

1. observable=FALSO



2. Si es  $\_T$ Observable (estructura, lugares medibles, transiciones controlables) = VERDADERO entonces
  - (a) Si es  $\_L$ Observables (estructura, lugares medibles, transiciones controlables) = VERDADERO entonces
    - a.1). observable = VERDADERO
3. regresa observable

## 3.5 Conclusiones

Es este capítulo se ha presentado un criterio para caracterizar la observabilidad de los sistemas de eventos discretos modelados mediante redes de Petri interpretadas. Se encontró que los SED, los cuales poseen sólo eventos controlables poseen la propiedad de observabilidad.

En base al criterio de observabilidad presentado se obtuvieron criterios adicionales para caracterizar la observabilidad de diferentes subclases de las RP, en particular de las máquinas de estado, grafos marcados y de las redes de libre elección.

También se obtuvo un algoritmo, el cual determina si una RPI posee la propiedad de observabilidad.

Una vez caracterizada la observabilidad de los SED modelados mediante RPI, en los siguientes capítulos se verá como aprovechar todas las características de los SED observables mencionadas anteriormente para contruir observadores asintóticos para diferentes tipos de SED.



# Capítulo 4

## Diseño de observadores asintóticos

---

**Resumen:** La definición de observabilidad presentada en el capítulo anterior (capítulo 3), plantea la necesidad de construir la función  $\Psi$  de un SED para poder conocer el estado del sistema. Dada la complejidad de la función  $\Psi$ , se propone un esquema para el uso de entidades denominadas observadores asintóticos. Dichos observadores se encargan de inferir los eventos incontrolables que suceden en el sistema a partir de los marcados consecutivos de la RPI que modela al sistema o en base a la información proporcionada por las salidas del sistema, esto con el fin de igualar su estado al estado del sistema.

---

## 4.1 Introducción

En la literatura técnica, existen varios trabajos en los cuales se menciona el problema de la observabilidad de los SED cuando éstos son modelados por medio de máquinas de estados finitos o autómatas finitos. Por ejemplo, en [2], Cüznet se presenta un algoritmo para encontrar el subautómata observable de un SED. Sin embargo, no se puede considerar que dicho subautómata sea un observador ya que sólo es una representación de la parte que sí es medible y no tiene posibilidad de determinar cuál es el estado real del SED.

En [3] Yong aborda el problema de la síntesis de controladores con retroalimentación del estado para SED desde el punto de vista de la controlabilidad y la observabilidad. Se demuestra que los predicados controlables y observables caracterizan a los estados alcanzables de un SED, los cuales son la base para la síntesis de controladores que utilizan solo información acerca de las clases de observabilidad. Para lo cual, se presenta una caracterización de la observabilidad de los SED; sin embargo, no se presenta ningún esquema o manera de realizar un observador para tales sistemas.

Hasta donde se tiene conocimiento, aún son pocos los trabajos enfocados al problema de diseño de observadores para SED cuando estos son modelados con RP, por lo cual es necesario formalizar los conceptos de observabilidad y establecer los criterios necesarios y suficientes para determinar cuando un SED modelado por medio de RPI es observable.

El *problema de observabilidad* de un SED modelado por medio de RPI tal como se establece en la definición 3.1 consiste en, que dada la estructura de la RPI, encontrar una función  $\Psi$ , tal que  $\Psi : \mathcal{L}_e \times \mathcal{L}_s \rightarrow \mathcal{R}(RPI, M_o)$ . Por lo tanto, para conocer el estado de una sistema observable, es necesario contruir dicha función. Desafortunadamente, el cálculo de esta función representa un trabajo muy laborioso, debido a que los alfabetos de entrada y salida del sistema pueden ser infinitos. Por lo cual, en vez de eso, se propone un esquema para la construcción de observadores asintóticos, así el problema de observabilidad de un SED se reduce al problema de diseño de este tipo de observadores.

## 4.2 Planteamiento del problema

**Definición 4.1** *El problema de diseño de observadores asintóticos.* Sea  $S_f$  un SED y sea  $M_k$  su estado cuando una palabra  $w \in \mathcal{L}_e$  es aceptada por  $S_f$ . Sea  $O$  la RPI que modela a  $S_f$  y sea  $\hat{M}_q$  su estado cuando una palabra  $v \in \mathcal{L}_e$ ,  $|v| = q$ , es aceptada por  $O$ .  $S_f$  es llamado el sistema y  $O$  es llamado el observador. El problema de diseño de un observador asintótico  $O$  para un sistema  $S_f$  se define como sigue: dada la funcional

$$f(M_k, \hat{M}_q) = \left\| M_k - \hat{M}_q \right\| = \sum_{i=1}^n |M_k(l_i) - \hat{M}_q(l_i)|, \text{ donde } n = |L|,$$

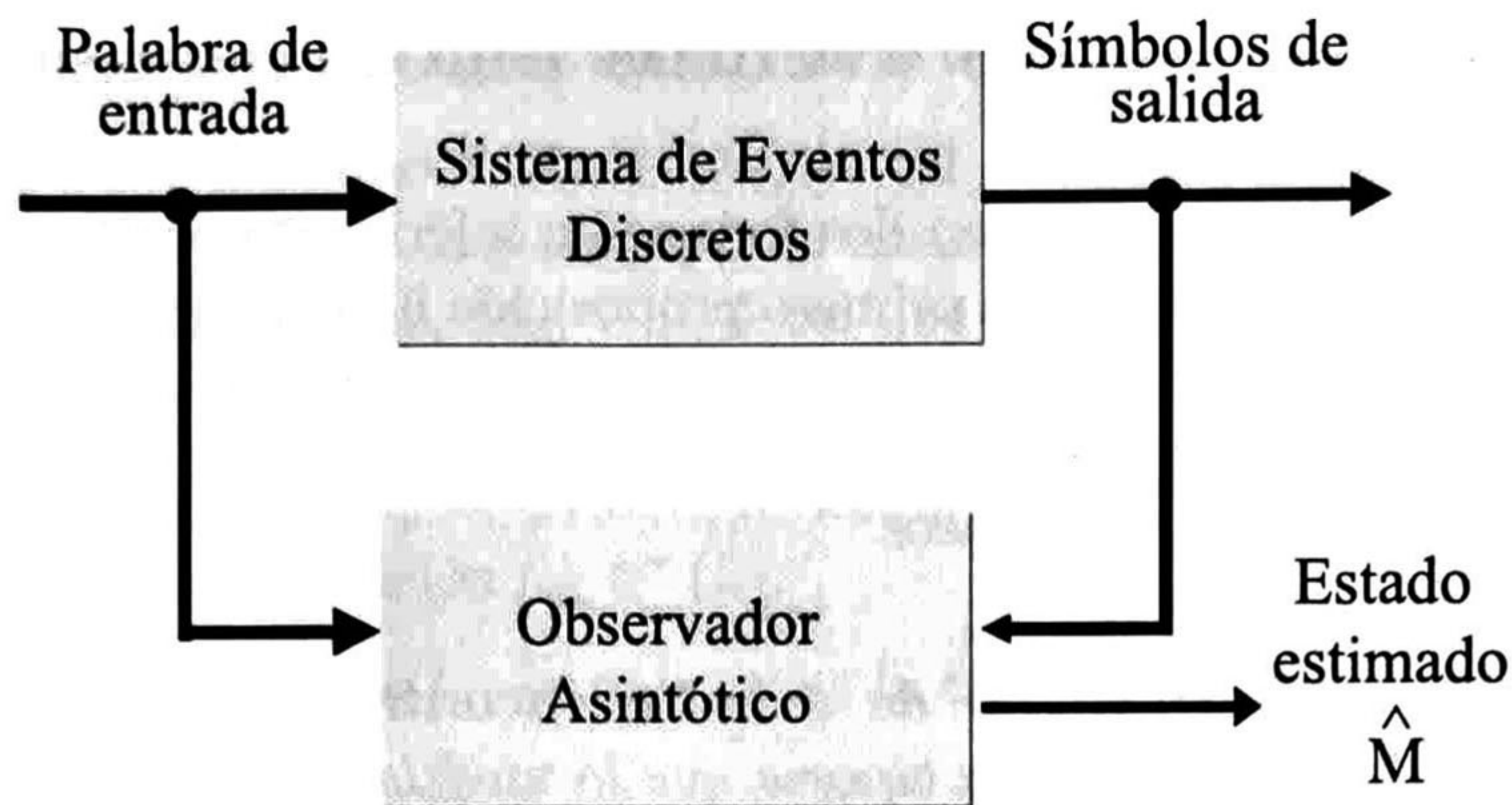


Figura 4.1: Arquitectura del observador asintótico.

encontrar una secuencia de disparos  $\sigma$ , tal que

$$\begin{aligned}
 a) \quad & \left\| M_1 - \hat{M}_{q_1} \right\| \geq \left\| M_2 - \hat{M}_{q_2} \right\| \geq \dots \geq \left\| M_i - \hat{M}_{q_i} \right\| \text{ y} \\
 b) \quad & \lim_{k \rightarrow \infty} \left\| M_k - \hat{M}_{q_k} \right\| = 0
 \end{aligned}$$

Es decir, la diferencia entre los marcados del sistema y del observador debe tender a cero conforme se van sucediendo los eventos en el sistema. En la figura 4.1 se presenta la arquitectura general del observador asintótico.

Antes de presentar el diseño de observadores asintóticos, se introducen una serie de definiciones y proposiciones que serán útiles para tal fin.

Para que el observador infiera el estado del sistema debe de saber como está evolucionando el sistema. Un sistema cambia de estado debido a dos causas:

1. La ocurrencia de eventos de entrada, los cuales provocan el disparo de las transiciones controlables habilitadas y
2. La ocurrencia de eventos incontrolables como consecuencia de la dinámica interna del sistema, los cuales provocan el disparo de transiciones incontrolables habilitadas.

Como se aprecia en la figura 4.1, el observador también es alimentado con las palabras de entrada del sistema, por tanto este sabe como evoluciona el sistema debido a la ocurrencia de los eventos de entrada. En cambio, dado que los eventos incontrolables son internos, el observador debe de inferir cual de ellos ha provocado un cambio de estado en el sistema.

### 4.3 Inferencia de los eventos incontrolables

Las siguientes proposiciones sugieren dos formas de inferir los eventos incontrolables que se disparan en un SED observable. La primera proposición indica que los eventos incontrolables pueden ser identificados a través del marcado de la RPI que modela al sistema y la segunda proposición indica que la identificación puede realizarse a través de los símbolos de salida del sistema, pero sólo en algunos casos.

**Proposición 4.1** *Identificación de eventos incontrolables a través del marcado.* Sea  $S_f$  un SED y  $RI$  la RPI viva y binaria que lo modela. Si  $S_f$  es observable entonces los eventos incontrolables que suceden en  $S_f$  pueden ser determinados mediante la ecuación de estados de la red  $RI$ .

**Demostración.** Sea  $S_f$  observable y sea  $w \in \mathcal{L}_e$  una palabra aceptada por  $S_f$ . Sean  $M_i, M_j \in \Omega_w$ , tal que  $M_i \xrightarrow{t_k} M_j$ . Como  $\forall l_i, l_j \in L$  de  $G$  se da que  $b_i \neq \varepsilon$  y  $b_j \neq \varepsilon$  con  $b_i \neq b_j$ , entonces  $\varphi(M_i) \neq \varphi(M_j)$ . Ahora, como el marcado  $M_j$  es consecutivo a  $M_i$  se puede escribir la ecuación de estados de la siguiente forma:

$$M_j = M_i + C \vec{t}_k$$

$$\Delta M_{ji} = M_j - M_i = C \vec{t}_k$$

Como  $S_f$  es observable, cuando existe un cambio en la palabra de salida este se debe a que sucedió un evento  $\lambda(t_k)$ . El disparo de  $t_k$  quita marcas de los lugares  $\bullet(t_j)$  y pone marcas en los lugares  $(t_j)^\bullet$ , lo cual corresponde a la columna  $k$  de la matriz de incidencia  $C$ . Entonces se puede escribir,

$$\Delta M_{ji} = C(\cdot, t_k)$$

Entonces  $\Delta M_{ji}$  determina de manera única la transición que se ha disparado. ■

**Proposición 4.2** *Identificación de eventos incontrolables a través de los símbolos de salida.* Sea  $S_f$  un SED observable y  $RI$  la RPI viva y binaria que lo modela la cual no contiene subredes  $G_I$ . Sea  $w \in \mathcal{L}_e$  una palabra de entrada a  $RI$ . Sean  $M_i, M_j \in \Omega_w$ , tal que  $M_i \xrightarrow{t_k} M_j$ , donde  $t_k \in T$  Entonces el disparo de  $t_k$  puede conocerse a través de

$$\Delta \varphi_{ij} = \|\varphi(M_j) - \varphi(M_i)\|.$$

**Demostración.** Sean  $M_i, M_j \in \Omega_w$ , tal que  $M_i \xrightarrow{t_k} M_j$  y  $M_i \neq M_j$ . Dado que  $RI$  es observable, se tiene que  $\varphi(M_i) \neq \varphi(M_j)$ , i.e. difieren en al menos un símbolo de salida tal que  $b_i \neq \varepsilon$ . Debido a que  $RI$  no contienen subredes  $G_I$ , se pueden distinguir los siguientes casos:

**Caso 1.** Si  $b_i = \varphi(M_i(l_i))$  y  $b_i \neq \varphi(M_j(l_i))$ , entonces  $M_i(l_i) = 1$  y  $M_j(l_i) = 0$ . Esto significa que se disparó alguna transición  $t_{k1} \in (l_i)^\bullet$

**1.a)** Si  $|(l_i)^\bullet| = 1$  entonces  $t_{k1}$  es única y es la transición disparada.

**1.b)** Si  $|(l_i)^\bullet| > 1$ , entonces  $\exists l_k \in ((l_i)^\bullet)^\bullet$  tal que  $b_k = \varphi(M_j(l_k))$  y entonces la transición  $t_{k2} \in (l_i)^\bullet \cap^\bullet (l_k)$  fue la disparada, o en caso contrario (tal lugar no existe), por observabilidad se debe cumplir que,  $\exists t_{k3} \in (l_i)^\bullet$  tal que  $\forall l_h \in (t_{k3})^\bullet$  se da que  $b_h = \varepsilon$  y así  $t_{k3}$  es la transición disparada.

**Caso 2.** Si  $b_i \neq \varphi(M_i(l_i))$  y  $b_i = \varphi(M_j(l_i))$ , entonces  $M_i(l_i) = 0$  y  $M_j(l_i) = 1$ . Esto significa que se disparó una transición  $t_{u1} \in^\bullet (l_i)$ .

**2.a)** Si  $|\bullet(l_i)| = 1$  entonces  $t_{u1}$  es única y es la transición disparada.

**2.b)** Si  $|\bullet(l_i)| > 1$ , entonces si  $\exists l_k \in (\bullet(l_i))^\bullet$  tal que  $b_k = \varphi(M_j(l_k))$  entonces la transición  $t_{u2} \in \bullet(l_i) \cap^\bullet (l_k)$  fue la disparada. ■

## 4.4 Conclusiones

En este capítulo se definió formalmente el problema del diseño de observadores asintóticos para los sistemas de eventos discretos observables modelados mediante redes de Petri interpretadas, para lo cual se propuso un esquema sistema-observador.

Con base en este esquema, se presentan dos métodos para inferir los eventos incontrolables que suceden en el sistema: a través del marcado de la red que lo modela y a través de sus símbolos de salida. Esto con el fin de hacer un seguimiento del estado del sistema entre la aceptación de dos símbolos de entrada.

En los siguientes capítulos se verá como estos métodos son utilizados por los observadores asintóticos para inferir los eventos incontrolables.





# Capítulo 5

## Observadores asintóticos monolíticos

---

**Resumen:** Existen algunos sistemas de eventos discretos, en los cuales todos los eventos son controlables. De capítulos anteriores se sabe que este tipo de sistemas son observables, sin importar la distribución de los lugares medibles, incluso si ninguno de ellos lo es. En este capítulo, se propone un tipo de observador asintótico que aprovecha esta característica: los observadores asintóticos monolíticos.

---

## 5.1 Introducción

Existen algunos sistemas de eventos discretos, en los cuales todos los eventos son controlables. Por la proposición 3.1, se sabe que este tipo de sistemas es observable, sin importar la distribución de los lugares medibles, incluso si ninguno de ellos lo es. Debido a que este tipo de sistemas sólo evoluciona (cambia de estado) cada vez que un evento de entrada ocurre, es posible seguir su evolución paso a paso. En este caso, el observador sólo necesita conocer los eventos de entrada que han sido aceptados por el sistema para inferir sus estado.

En este capítulo, se propone un tipo de observador asintótico que aprovecha esta circunstancia: los observadores asintóticos monolíticos. Este tipo de observadores trabaja bajo la hipótesis de que el SED ha sido modelado mediante una RPI viva, binaria y que posee un espacio de atracción único.

## 5.2 Definición de observador asintótico monolítico

**Definición 5.1 *Observadores asintóticos monolíticos.*** Sea  $S_f$  un SED y  $S$  la RPI viva, binaria y con un sólo espacio de atracción que lo modela. Sea  $O$  una RPI tal que  $G_o = G_s$ , es decir  $O$  tiene la misma estructura que  $S$ . Sea  $w \in \mathcal{L}_e \cap \hat{\mathcal{L}}_e$ , una palabra de entrada aceptada por ambas redes  $S$  y  $O$ . Sean  $\sigma_w, \hat{\sigma}_w$  las secuencias de disparo provocadas por la aceptación de  $w$  por las redes  $S$  y  $O$  respectivamente. La red  $O$  es un observador asintótico monolítico para  $S$  si  $\sigma_w = \hat{\sigma}_w$  y

$$\begin{aligned} a) \quad & \left\| M_1 - \hat{M}_{q_1} \right\| \geq \left\| M_2 - \hat{M}_{q_2} \right\| \geq \dots \geq \left\| M_i - \hat{M}_{q_i} \right\| \text{ y} \\ b) \quad & \lim_{k \rightarrow \infty} \left\| M_k - \hat{M}_{q_k} \right\| = 0 \end{aligned}$$

donde  $M_i$  y  $\hat{M}_{q_i}$  son los estados de las redes  $S$  y  $O$  respectivamente después de la ocurrencia del símbolo de entrada  $a_i \in w$ .

Esto significa que el estado del sistema y del observador corresponden a palabras de la misma longitud, puesto que se derivan de la misma palabra.

## 5.3 Diseño de observadores asintóticos monolíticos

Cuando todos los eventos del SED son controlables, usando una RPB, se puede implementar un observador monolítico. Los siguientes lemas indican que si existe una RPI viva y binaria, entonces también existe una RPB con la misma estructura y con un marcado inicial apropiado, tal que siempre el marcado de la RPB es mayor o igual al marcado de la RPI y que las transiciones habilitadas en RPI, también están habilitadas en la correspondiente RPB. Esta propiedad será aprovechada en la construcción de observadores asintóticos monolíticos.

**Lema 5.1** Sea  $S$  una RPI viva y binaria, en donde  $\forall t_i \in G_s, \lambda(t_i) \neq \varepsilon$ . Sea  $O$  una RPB, tal que  $G_s = G_o$ , con un marcado inicial  $\hat{M}_o(l_i) = 1, \forall l_i \in L$  de  $G_o$ . Si la misma palabra de entrada  $w$  es dada a  $S$  y  $O$ , entonces el marcado  $\hat{M}_k$  de  $O$  nunca es menor que el marcado  $M_k$  de  $S$  (i.e.  $M_k \leq \hat{M}_k$ ).

**Demostración.** Sea  $\hat{M}_o(l_i) = 1, \forall l_i \in L$  de  $G_o$ , el marcado inicial de  $O$  y  $M_o$  el marcado inicial de  $S$ . Se tiene que,  $\hat{M}_o = M_o + \hat{M}'$ , donde  $\hat{M}' > 0$  (dado que  $S$  es binaria); por tanto,  $M_o < \hat{M}_o$ . Sea  $w \in \mathcal{L}_e \cap \hat{\mathcal{L}}_e, w = \lambda(t_1)\lambda(t_2)\dots\lambda(t_k)$ , la cual es dada a  $S$  y a  $O$ . Cada vez que la red  $O$  pierde marcas es debido a que una transición  $t_i$  es disparada, esto provoca que  $M_k(l_i) = \hat{M}_k(l_i), \forall l_i \in (t_i)^\bullet \cup \bullet(t_i)$  y  $M_k(l_i) \leq \hat{M}_k(l_i), \forall l_i \notin (t_i)^\bullet \cup \bullet(t_i)$ , así que  $\nexists t_k \in T$  de  $G_o$ , tal que  $M_k \xrightarrow{t_k} M_{k+1}, M_{k+1} > \hat{M}_{k+1}$ . Por lo tanto,  $M_k \leq \hat{M}_k$ . ■

**Lema 5.2** Sea  $S$  una RPI viva y binaria, en donde  $\forall t_i \in G_s, \lambda(t_i) \neq \varepsilon$ . Sea  $O$  una RPB, tal que  $G_s = G_o$ , con un marcado inicial  $\hat{M}_o(l_i) = 1, \forall l_i \in L$  de  $G_o$ . Si la misma palabra de entrada  $w$  es dada a  $S$  y  $O$ , entonces las transiciones habilitadas en  $S$  también lo están en  $O$ .

**Demostración.** Sean  $\Upsilon_k = \{t_j | t_j \in T_s, \forall l_i \in \bullet(t_j), M_k(l_i) \geq E(l_i, t_j)\}$  y  $\hat{\Upsilon}_k = \{t_k | t_k \in T_o, \forall l_i \in \bullet(t_k), \hat{M}_k(l_i) \geq E(l_i, t_k)\}$  los conjuntos de transiciones habilitadas en los marcados  $M_k$  y  $\hat{M}_k$  de las redes  $S$  y  $O$  respectivamente. Por construcción,  $M_o \leq \hat{M}_o$ , entonces por el lema de monotonicidad, [7], se cumple que,  $\Upsilon_0 \subseteq \hat{\Upsilon}_0$ . Sea  $w \in \mathcal{L}_e \cap \hat{\mathcal{L}}_e, w = \lambda(t_1)\lambda(t_2)\dots\lambda(t_k)$ , con  $|w| = k$ . Si  $k = 1$ , entonces la transición  $t_1 \in \Upsilon_0 \cap \hat{\Upsilon}_0$  es disparada; como  $S$  es binaria y  $O$  es una RPB, el disparo de la transición  $t_1$  hace a  $M_1(l_i) = \hat{M}_1(l_i) = 1, \forall l_i \in (t_1)^\bullet$  y  $M_1(l_j) = \hat{M}_1(l_j) = 0, \forall l_j \in \bullet(t_1)$ . Así que ahora,

$$\Upsilon_1 = \Upsilon_0 \setminus (\bullet(t_1))^\bullet \cup \{t_1 | t_1 \in ((t_1)^\bullet)^\bullet, \forall l_i \in \bullet(t_1), M_1(l_i) \geq E(l_i, t_1)\}$$

El conjunto  $\hat{\Upsilon}_1$  se define de manera similar. Como los conjuntos  $(\bullet(t_1))^\bullet$  y  $((t_1)^\bullet)^\bullet$  son iguales para ambas redes ( $G_s = G_o$ ), por el lema 5.1  $M_1 \leq \hat{M}_1$ , y por el lema de monotonicidad,  $\Upsilon_1 \subseteq \hat{\Upsilon}_1$ . Inductivamente, supóngase que  $\Upsilon_{k-1} \subseteq \hat{\Upsilon}_{k-1}$  es cierto para  $M_{k-1}$  y  $\hat{M}_{k-1}$ . Siguiendo un razonamiento similar al anterior, tenemos que  $\Upsilon_k \subseteq \hat{\Upsilon}_k$  también es cierto para  $M_k$  y  $\hat{M}_k$ . ■

Con el siguiente teorema se muestra que un observador monolítico puede ser construido usando una RPB con un marcado inicial que asigne una marca a cada lugar de la red, para los sistemas donde todos los eventos son controlables.

**Teorema 2 Implementación de observadores asintóticos monolíticos.** Sea  $S$  el SED de la figura 5.1 modelado por medio de una RPI viva y binaria,  $S$ , donde  $\lambda(t_k) \neq \varepsilon, \forall t_k \in T$ , y sea  $O$  una RPB, tal que  $G_s = G_o$ . Un observador monolítico es implementado cuando el observador de la figura 5.1 se contruye usando la red  $O$  con un marcado inicial  $\hat{M}_o(l_i) = 1, \forall l_i \in L$  de  $G_o$ .

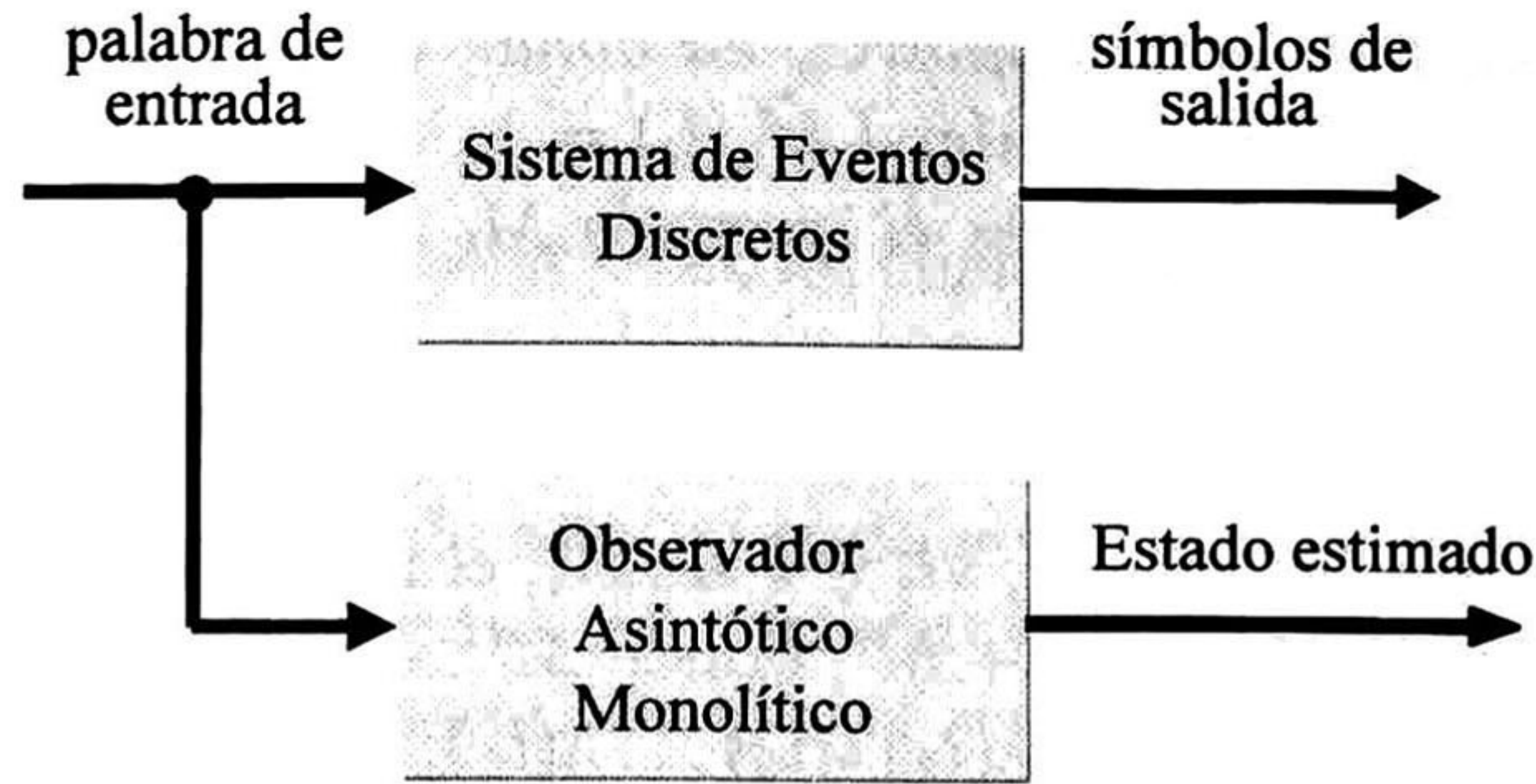


Figura 5.1: Arquitectura de un observador asintótico monolítico para un SED modelado con RPI.

**Demostración.** De los lemas 5.1 y 5.2 se sabe que  $\Upsilon_k \subseteq \hat{\Upsilon}_k$ , y  $M_k \leq \hat{M}_k$ , así que  $O$  también es una red viva (y limitada por definición). Se afirma que, si  $\exists \sigma$ , tal que  $\vec{\sigma}(i) > 1$ ,  $\forall i \in \{1, 2, \dots, |T|\}$  (i.e. todas las transiciones de la red han sido disparadas), entonces  $M_k = \hat{M}_k$ . Para probar lo anterior, supóngase que una palabra  $w_\sigma \in \mathcal{L}_e$ ,  $w_\sigma = \lambda(t_1)\dots\lambda(t_i)\dots\lambda(t_k)$ , donde  $\forall t_i \in T$ ,  $\lambda(t_i) \in w_\sigma$ , es dada tanto a  $S$  como a  $O$ . Disparando la transición  $t_i$  en  $S$ , los marcados  $M_{i+1} = M_i + C \vec{t}_i$  y  $\hat{M}_{i+1} = \min\{\hat{M}_i + C \vec{t}_i, [1]\}$  son alcanzados en  $S$  y  $O$ , respectivamente. Entonces  $M_{i+1}(l_i) = \hat{M}_{i+1}(l_i)$ ,  $\forall l_i \in (t_i)^\bullet \cup {}^\bullet(t_i)$ . Es posible entonces renombrar los lugares de  $S$  y  $O$  para reescribir el vector de marcado en la red  $O$  como:

$$\left[ \hat{M}_{i+1} \mid M_{i+1} \right]^T$$

donde el vector  $[\hat{M}_{i+1}]$  es los marcados de los lugares de  $O$ , tales que  $M_{i+1}(l_i) = \hat{M}_{i+1}(l_i)$  y el vector  $[M_{i+1}]$  es el marcado del resto de los lugares de  $O$ . En este caso,  $||[\hat{M}_{i+1}]|| \leq ||[M_{i+1}]||$ . Cuando otra transición  $t_j$  es disparada, otro nuevo conjunto de lugares es  $(t_j)^\bullet \cup {}^\bullet(t_j)$  es afectado, tal que  $M_{i+2}(p_j) = \hat{M}_{i+2}(p_j)$ ,  $\forall p_j \in (t_j)^\bullet \cup {}^\bullet(t_j)$ . Como  $t_i \neq t_j$ , entonces  ${}^\bullet(t_i) \neq {}^\bullet(t_j)$  y  $(t_i)^\bullet \neq (t_j)^\bullet$ , así que

$$||[\hat{M}_{i+2}]|| \geq ||[\hat{M}_{i+1}]||, \quad ||[M_{i+2}]|| \leq ||[M_{i+1}]||$$

Este proceso se repite hasta que la transición  $t_k$  ha sido disparada. En este caso, dado que  $||[\hat{M}_k]|| = |L|$  y  $||[M_k]|| = 0$ , entonces  $M_k = \hat{M}_k$ . La palabra  $w_\sigma$  debe existir porque  $S$  es viva. Como  $M_k = \hat{M}_k$ , entonces también  $\lim_{k \rightarrow \infty} ||M_k - \hat{M}_k|| = 0$  se cumple y la red  $O$ , construida como el teorema lo indica, califica como un observador asintótico monolítico. ■

## 5.4 Algoritmos para el diseño de observadores monolíticos

Como puede verse, es fácil implementar un observador asintótico monolítico para los sistemas en los cuales todos los eventos son controlables. Los siguientes algoritmos se desprenden del teorema anterior, el primero se usa para construir un observador asintótico monolítico para el sistema y el segundo indica su forma de operación.

Los algoritmos trabajan bajo las siguientes hipótesis:

1. El sistema de eventos discretos  $S_f$  es observable.
2. El sistema de eventos discretos  $S_f$  es modelado mediante una RPI viva y binaria.
3. Los eventos de  $S_f$  son todos controlables.
4. La red  $O$  del observador se modela como una RPB.

**Algoritmo 5.1** *contruye\_monolitico (estructura, transiciones controlables). Construcción de un observador asintótico monolítico.*

1. Duplicar el modelo del sistema, para construir la red  $O$  del observador
2. Fusionar los eventos de entrada del sistema con las transiciones de la red  $O$  del observador.
3. Asignar el marcado inicial a la red  $O$  del observador de la siguiente manera:

$$\hat{M}_o(l_i) = 1, \forall l_i \in L_o.$$

**Algoritmo 5.2** *observador\_monolitico (estructura, palabra de entrada). Operación de un observador asintótico monolítico.*

1. *longitud* =  $|w|$ ,  $w$  es una palabra de entrada
2.  $i = 1$
3. Mientras  $cont \leq longitud$  hacer
  - (a) Introducir el símbolo  $a_i \in w$  a la red  $O$ .
  - (b) Evolucionar el marcado de  $O$  según las reglas de una RPB.
  - (c)  $i = i + 1$
4. Fin

Fusionar las transiciones del observador con los eventos de entrada del sistema permite que la misma palabra sea aceptada tanto por el sistema como por el observador. Se le ha llamado "monolítico" a este tipo de observador asintótico debido a que al fusionarlo con el sistema, ambos forman un bloque único.

El ejemplo que se presenta a continuación ilustra la aplicación de los algoritmos anteriores para la construcción y operación de un observador asintótico monolítico para una red dada.

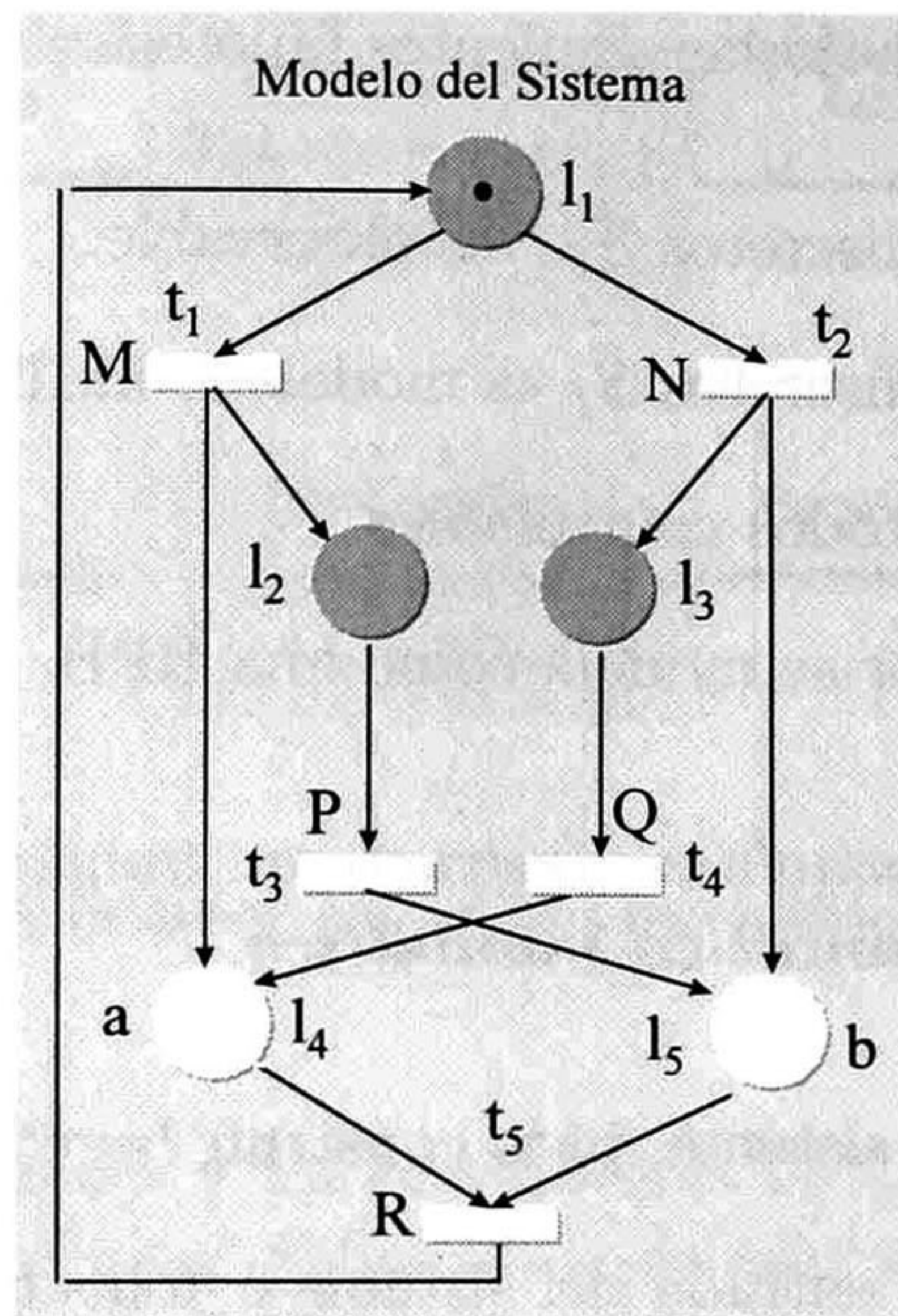


Figura 5.2: Ejemplo de RPI en la cual todos los eventos de entrada son controlables.

**Ejemplo 5.1** Considere la RPI de la figura 5.2, la cual modela a un SED. Como se puede apreciar, los lugares medibles de la red son  $l_4$  y  $l_5$ , y las transiciones controlables son  $t_1$ ,  $t_2$ ,  $t_3$ ,  $t_4$  y  $t_5$ , de acuerdo a las siguientes funciones de etiquetado:

|       |               |               |               |       |       |
|-------|---------------|---------------|---------------|-------|-------|
| $l_i$ | $l_1$         | $l_2$         | $l_3$         | $l_4$ | $l_5$ |
| $b_i$ | $\varepsilon$ | $\varepsilon$ | $\varepsilon$ | $a$   | $b$   |

|                |       |       |       |       |       |
|----------------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $t_i$          | $t_1$ | $t_2$ | $t_3$ | $t_4$ | $t_5$ |
| $\lambda(t_i)$ | $M$   | $N$   | $P$   | $Q$   | $R$   |

El marcado inicial de la red es  $M_o = [1\ 0\ 0\ 0\ 0]^T$ , el cual la hace viva y binaria.

Dado que todas transiciones de la red son controlables, la red es observable y por tanto es posible contruir un observador asintótico monolítico para el sistema.

Primero se duplica el modelo del sistema, como se muestra en la figura 5.3. A continuación se fusionan los eventos de entrada del sistema con las transiciones del observador como se muestra en la figura 5.4. En dicha figura también se muestra el marcado inicial asignado al observador de acuerdo al algoritmo 5.1. Una vez contruido el observador, puede ser puesto en operación. Como se ve en la figura 5.4 el marcado inicial del sistema es  $M_o = [1\ 0\ 0\ 0\ 0]^T$ , mientras que el marcado inicial del observador por construcción es  $\hat{M}_o = [1\ 1\ 1\ 1\ 1]^T$ . La distancia inicial entre ambos marcados es  $d_o = 4$ .

Supóngase que se introduce la palabra  $w = MPRN$  al sistema, la cual, de acuerdo al algoritmo 5.2, también debe de ser proporcionada al observador.

Primero el símbolo  $M$  es aceptado por el sistema. Ya que  $\lambda(t_1) = M$ , se dispara la transición  $t_1$ , alcanzándose en  $S$  el marcado  $M_1 = [0\ 1\ 0\ 1\ 0]^T$  y en  $O$  el marcado  $\hat{M}_1 = [0\ 2\ 1\ 2\ 1]^T$ ; pero, debido a que  $O$  es una RPB, su marcado cambia automáticamente a  $\hat{M}_1 = [0\ 1\ 1\ 1\ 1]^T$ . De aquí en adelante, esta particularidad de la red  $O$  ya no será mencionada. La distancia entre el marcado de  $S$  y de  $O$  es  $d_1 = 2$ .

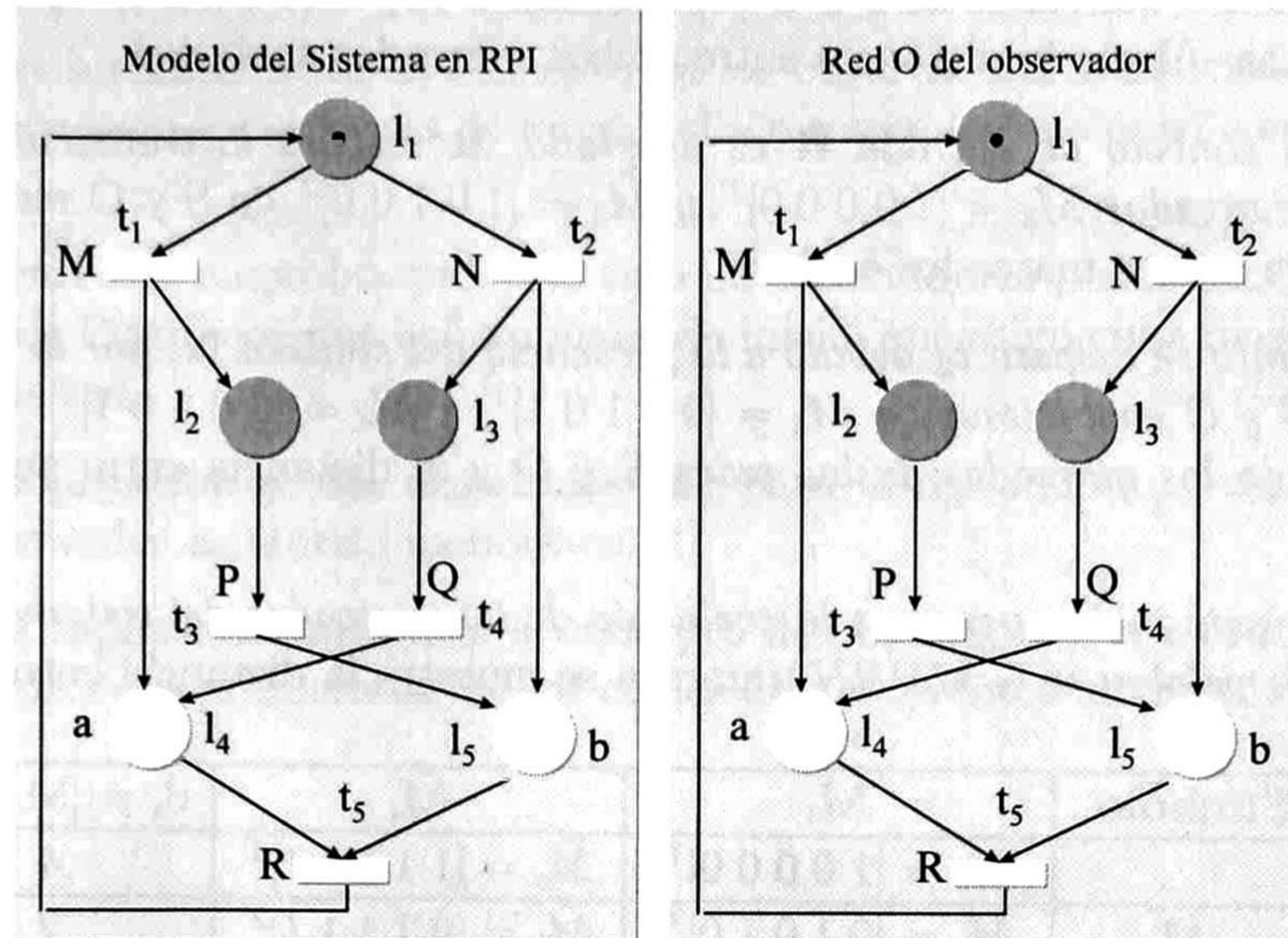


Figura 5.3: La red S del sistema y la red O del observador.

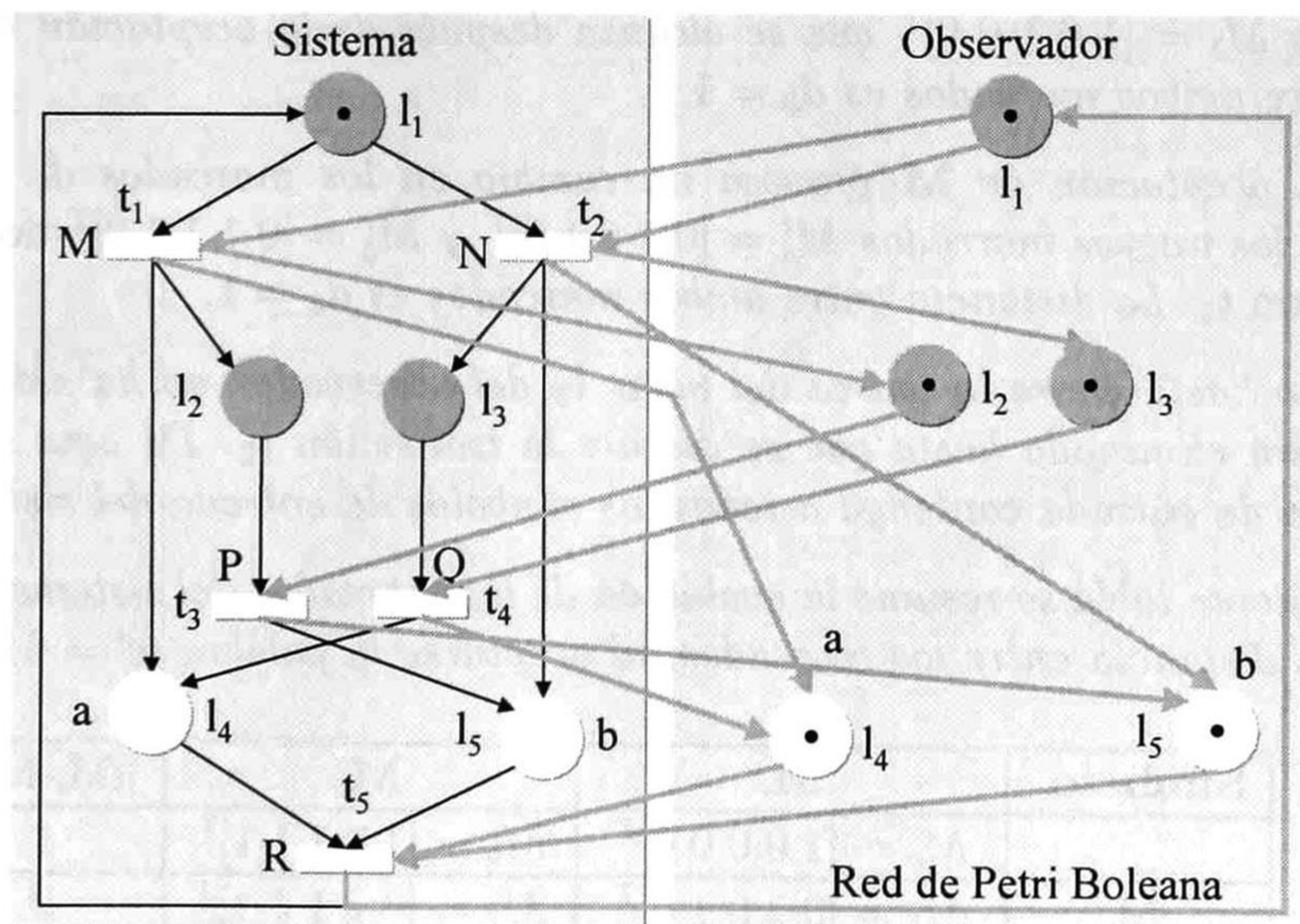


Figura 5.4: Un sistema representado con una RPI y la RdPB del observador asintótico monolítico para éste. Ambos con su condición inicial.

Ahora el siguiente símbolo de  $w$ ,  $\mathbf{P}$ , es aceptado, lo cual provoca el disparo de la transición  $t_3$ . Se tiene que los marcados de  $S$  y  $O$  evolucionan a  $M_2 = [0\ 0\ 0\ 1\ 1]^T$  y  $\hat{M}_2 = [0\ 0\ 1\ 1\ 1]^T$ , respectivamente. Ahora la distancia entre ambos marcados es  $d_2 = 1$ .

Cuando el símbolo de entrada  $\mathbf{R}$  es aceptado, se dispara la transición  $t_5$ , entonces se alcanzan los marcados  $M_3 = [1\ 0\ 0\ 0\ 0]^T$  y  $\hat{M}_3 = [1\ 0\ 1\ 0\ 0]^T$  en  $S$  y  $O$  respectivamente. La distancia entre ambos marcados es  $d_3 = 1$ .

En este punto se dispara  $t_2$  debido a la presencia del símbolo  $\mathbf{N}$ , por lo cual los marcados de las redes  $S$  y  $O$  evolucionan a  $M_4 = [0\ 0\ 1\ 0\ 1]^T$  y  $\hat{M}_4 = [0\ 0\ 1\ 0\ 1]^T$ . En este momento se han igualado los marcados de las redes  $S$  y  $O$  y la distancia entre ambos marcados es  $d_4 = 0$ .

En la siguiente tabla se resume la evolución de los marcados del sistema y del observador al aceptarse la palabra  $w = MPRN$ , también se muestra la distancia entre los marcados.

| Símbolo | $M_i$                     | $\hat{M}_i$                     | $d_i =   M_i - \hat{M}_i  $ |
|---------|---------------------------|---------------------------------|-----------------------------|
|         | $M_o = [1\ 0\ 0\ 0\ 0]^T$ | $\hat{M}_o = [1\ 1\ 1\ 1\ 1]^T$ | 4                           |
| M       | $M_1 = [0\ 1\ 0\ 1\ 0]^T$ | $\hat{M}_1 = [0\ 1\ 1\ 1\ 1]^T$ | 2                           |
| P       | $M_2 = [0\ 0\ 0\ 1\ 1]^T$ | $\hat{M}_2 = [0\ 0\ 1\ 1\ 1]^T$ | 1                           |
| R       | $M_3 = [1\ 0\ 0\ 0\ 0]^T$ | $\hat{M}_3 = [1\ 0\ 1\ 0\ 0]^T$ | 1                           |
| N       | $M_4 = [0\ 0\ 1\ 0\ 1]^T$ | $\hat{M}_4 = [0\ 0\ 1\ 0\ 1]^T$ | 0                           |

Ahora supóngase que en vez de introducir la palabra  $w$  se hubiera introducido la palabra  $w' = MPRM$ . En este caso, los marcados evolucionan igual hasta el marcado  $M_3 = [1\ 0\ 0\ 0\ 0]^T$  y  $\hat{M}_3 = [1\ 0\ 1\ 0\ 0]^T$  que se alcanza después de la aceptación del símbolo  $\mathbf{R}$ . La distancia entre ambos marcados es  $d_3 = 1$ .

Ahora, la aceptación de  $\mathbf{M}$  provoca un cambio en los marcados de las redes  $S$  y  $O$ , alcanzándose los nuevos marcados  $M'_4 = [0\ 1\ 0\ 1\ 0]^T$  y  $\hat{M}'_4 = [0\ 1\ 1\ 1\ 0]^T$  después del disparo de la transición  $t_1$ . La distancia entre ambos marcados es  $d_4 = 1$ .

Note como hasta ahora la marca del lugar  $l_3$  del observador no ha sido eliminada, y en general no será eliminada hasta que se dispare la transición  $t_2$ . De aquí la importancia de que la palabra de entrada contenga a todos los símbolos de entrada del sistema.

En la siguiente tabla se resume la evolución de los marcados del sistema y del observador, además de la distancia entre los marcados, al aceptarse la palabra  $w' = MPRM$ .

| Símbolo | $M_i$                     | $\hat{M}_i$                     | $  M_i - \hat{M}_i  $ |
|---------|---------------------------|---------------------------------|-----------------------|
|         | $M_o = [1\ 0\ 0\ 0\ 0]^T$ | $\hat{M}_o = [1\ 1\ 1\ 1\ 1]^T$ | 4                     |
| M       | $M_1 = [0\ 1\ 0\ 1\ 0]^T$ | $\hat{M}_1 = [0\ 1\ 1\ 1\ 1]^T$ | 2                     |
| P       | $M_2 = [0\ 0\ 0\ 1\ 1]^T$ | $\hat{M}_2 = [0\ 0\ 1\ 1\ 1]^T$ | 1                     |
| R       | $M_3 = [1\ 0\ 0\ 0\ 0]^T$ | $\hat{M}_3 = [1\ 0\ 1\ 0\ 0]^T$ | 1                     |
| M       | $M_4 = [0\ 1\ 0\ 1\ 0]^T$ | $\hat{M}_4 = [0\ 1\ 1\ 1\ 0]^T$ | 1                     |



## 5.5 Conclusiones

En este capítulo se ha introducido el concepto de los observadores asintóticos monolíticos, los cuales se diseñan para los sistemas de eventos discretos en los cuales sólo existen eventos controlables.

Matemáticamente se comprobó que, este tipo de observadores puede ser implementado utilizando un red de Petri booleana con un marcado inicial que asigne una marca a cada uno de los lugares de la red.

Finalmente, se presentarán dos algoritmos uno para la construcción y otro para la operación de un observador asintótico monolítico.

En el siguiente capítulo se introduce el concepto de observadores asintóticos desligados para los sistemas de eventos discretos, en los cuales existen eventos incontrolables.



# Capítulo 6

## Observadores asintóticos desligados

---

**Resumen:** Apesar de que los observadores asintóticos monolíticos son fáciles de construir y operar, generalmente no todos los eventos de un SED son controlables, por lo cual este tipo de observadores no puede ser utilizado. De aquí la necesidad de contar con otros tipos de observadores asintóticos más generales. En este capítulo se propone un nuevo tipo de observador asintótico, al cual se le ha llamado desligado (ó no monolítico). Un observador asintótico desligado se utiliza cuando en un SED hay uno o más eventos incontrolables. Sin embargo, como se verá, hay casos en los que no pueden ser utilizados.

---

## 6.1 Introducción

Cuando uno o más eventos del sistema son incontrolables, no es posible asegurar que la transición disparada en el sistema se pueda calcular por una simple diferencia de marcados consecutivos, ya que los eventos incontrolables se disparan sin que el observador pueda detectarlos directamente. Como el observador no puede conocer los eventos incontrolables disparados en el sistema, entonces debe inferirlos.

Para resolver este problema, se propone una nueva arquitectura para un observador asintótico, al cual se le ha llamado observador asintótico desligado. Este tipo de observador, además de contar con una réplica de la RPI que modela al SED, también cuenta con un algoritmo, con la ayuda del cual puede determinarse los eventos incontrolables que sucedieron en el sistema entre la aceptación de un símbolo controlable y otro.

Si se puede garantizar lo anterior, las secuencias de disparos de la red del sistema y de la red del observador llegan a ser las mismas, entonces se puede extender el teorema de la implementación de observadores asintóticos monolíticos y así garantizar que el estado del observador converge al estado del sistema. Desafortunadamente, como se verá más adelante, existen algunas configuraciones en las que el algoritmo propuesto no garantiza la convergencia, por lo cual debe ser modificado o agregar más hipótesis que limiten su cobertura.

## 6.2 Definición de observador asintótico desligado

**Definición 6.1** Observadores asintóticos desligados. Sea  $S_f$  un SED y  $S$  la RPI viva, binaria y con un sólo espacio de atracción que lo modela. Sea  $O$  una RPI tal que  $G_o = G_s$ , es decir  $O$  tiene la misma estructura que  $S$ . Sea  $w \in \mathcal{L}_e \cap \hat{\mathcal{L}}_e$ , una palabra de entrada aceptada por ambas redes  $S$  y  $O$ . Sean  $\sigma_w, \hat{\sigma}_w$  las secuencias de disparo provocadas por la aceptación de  $w$  por las redes  $S$  y  $O$  respectivamente. La red  $O$  es un observador asintótico desligado para  $S$ , si  $\hat{\sigma}_w \geq \sigma_w$  y

$$\begin{aligned} a) \quad & \left\| M_1 - \hat{M}_{q_1} \right\| \geq \left\| M_2 - \hat{M}_{q_2} \right\| \geq \dots \geq \left\| M_i - \hat{M}_{q_i} \right\| \text{ y} \\ b) \quad & \lim_{k \rightarrow \infty} \left\| M_k - \hat{M}_{q_k} \right\| = 0 \end{aligned}$$

donde  $M_i$  y  $\hat{M}_{q_i}$  son los estados de las redes  $S$  y  $O$  respectivamente después de la ocurrencia de un símbolo de entrada  $a_i \in w$  o de un evento interno  $t_i$ , es decir  $\lambda(t_i) = \varepsilon$ .

En la figura 6.1 se muestra la arquitectura propuesta para un observador asintótico desligado. Note que tanto el sistema como el observador reciben la misma palabra de entrada, pero que debido a la existencia de eventos incontrolables, el sistema evolucionará independientemente disparandose algunas transiciones entre cada símbolo de entrada aceptado. Como se parte del supuesto de que el sistema es observable, por la proposición 4.2, en algunos casos es posible determinar los eventos incontrolables que suceden en el sistema a partir de

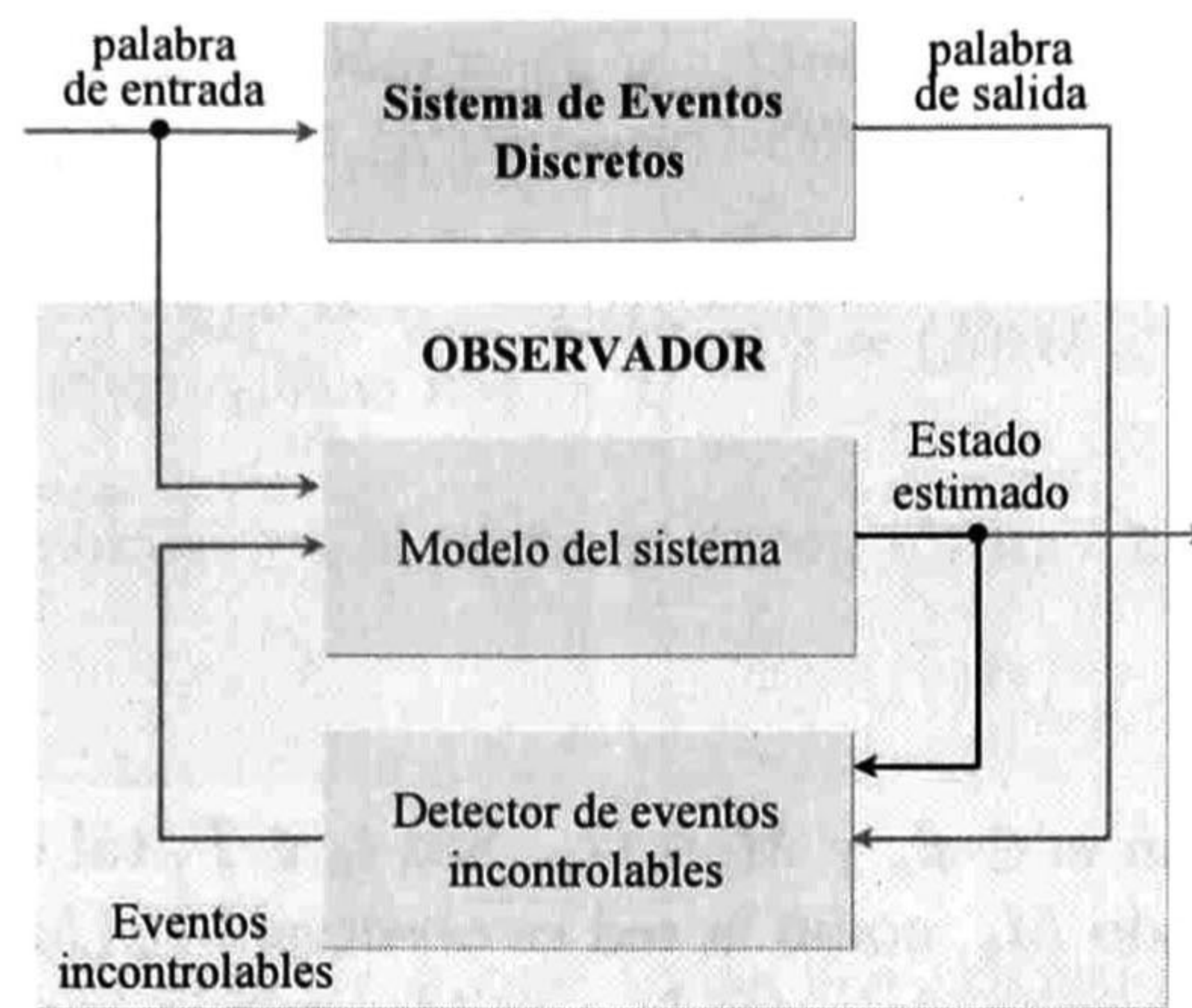


Figura 6.1: Arquitectura del observador asintótico desligado.

sus símbolos de salida. El bloque “detector de eventos incontrolables” es utilizado para ello, es decir, para inferir los eventos incontrolables que son disparados en el sistema debido a su dinámica interna. Este bloque no es modelado por una red de Petri, su funcionamiento puede expresarse como el siguiente problema de programación lineal.

$$\begin{aligned} \min \sum v_k(i) & \quad (6.1) \\ \text{s.a} & \\ \hat{M}_k = \hat{M}_{k-1} + C\vec{v}_k, & \end{aligned}$$

La solución a este problema se aplica cada vez que se detecta un cambio en los símbolos de salida del sistema debido al disparo de una transición incontrolable  $t_u$  en el sistema. El marcado  $\hat{M}_k$  es el marcado deseado en  $O$ , tal que sea igual al marcado  $M_k$  de  $S$  en su parte medible. Como se ve  $\hat{M}_k$  y  $\hat{M}_{k-1}$  son marcados consecutivos del observador, esto significa que  $\hat{M}_{k-1} \xrightarrow{t_u} \hat{M}_k$ , así que resolviendo la ecuación 6.1, la identidad de  $t_u$  llega a conocerse, esto se demostrará más adelante. Una vez detectado el evento incontrolable que ha provocado un cambio en los símbolos de salida, este es introducido en el observador para que sea disparada la transición correspondiente.

### 6.3 Diseño de observadores asintóticos desligados

Usando la arquitectura mostrada en la figura 6.1 y la ecuación 6.1, se pueden construir observadores desligados, siempre y cuando se garantice que la secuencia de disparos  $\sigma_w$  en  $S$  provocada por la aceptación de una palabra de entrada  $w \in \mathcal{L}_e$ , sea la misma que se dispara en  $O$  con ayuda de la ecuación 6.1. Los siguientes lemas establecen que esto es posible sólo cuando el grafo  $G_s$  de una RPI es un grafo marcado (GM), y para ciertas redes de Petri interpretadas, cuyo grafo es una máquina de estados (ME) o una red de libre elección (LE).

**Lema 6.1** *Sea  $S$  una RPI viva, binaria y observable, donde el grafo  $G$  de  $S$  es un GM con al menos un evento incontrolable. Sea  $O$  una RPB, tal que  $G_s = G_o$ , con un marcado inicial*

$$\hat{M}_o(l_i) = \begin{cases} M_o(l_i) & \text{si } b_i \neq \varepsilon \\ 1 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

*Entonces la ecuación 6.1 calcula correctamente la transición incontrolable  $t_u$  que ha sido disparada en  $S$ .*

**Demostración.** Sean  $w \in \mathcal{L}_e$  y  $M_i \in \Omega_w$ . Sea  $t_k \in T$ , tal que  $\lambda(t_k) = \varepsilon$ . Al dispararse  $t_k$  en  $S$  se alcanza el marcado  $M_k$ , como la red es observable  $\varphi(M_i) \neq \varphi(M_k)$ . En un GM, cada lugar sólo tiene una transición de entrada o salida, por lo cual sólo el disparo una de estas pudo generar el cambio de marcado y por tanto la aparición o desaparición del símbolo  $b_i$ . Entonces la solución de la ecuación 6.1 sólo puede ser única para estos tipos de red y es  $t_k$ . Una vez detectada,  $t_1$  debe ser disparada en  $O$ . Ahora  $\hat{M}_k(l_i) = M_k(l_i)$ ,  $\forall l_i \in L$ , t.q.  $b_i = \varepsilon$ . Siguiendo inductivamente el mismo razonamiento, cada vez que se dispare una transición incontrolable  $t_u$  en  $S$ , los marcados de los lugares medibles sólo diferirán en los lugares  $l_j \in (t_u)^\bullet \cup (t_u)$  afectados por el disparo de  $t_u$ . Así que la solución a la ecuación 6.1 siempre será única. ■

Desafortunadamente, cuando se trata de una RPI en general, en la red pueden existir un conjunto de nodos, para los cuales la ecuación 6.1 tiene más de una solución. En particular, esto puede suceder en la red  $O$  del observador, dado que su marcado inicial  $\hat{M}_o$  y algunos de sus marcados alcanzables  $\hat{M}_i \in \mathcal{R}(O, \hat{M}_o)$ , pueden habilitar a más de una transición incontrolable pertenecientes a una subred  $G_I$ .

El problema en este tipo de subredes es que sólo existe un lugar de salida de sus transiciones  $l_i$  que es medible, entonces si aparece el símbolo  $b_i$  correspondiente al lugar  $l_i$  en el vector de salida, no se puede determinar con exactitud cual de las transiciones provocó dicho cambio, ya que cualquiera de las transiciones de entrada a  $l_i$  pudo haberse disparado.

Por ejemplo, supóngase que la subred  $G_I$  de la figura 6.2 es parte de la RPI de algún sistema (y por lo tanto de la red de su observador), y que el marcado indicado es parte de algún marcado alcanzable en el observador, entonces están habilitadas las dos transiciones de entrada al lugar  $l_4$  ( $t_1$  y  $t_2$ ). Dado que por hipótesis el sistema está modelado por una RPI viva y binaria, solamente una de ellas está habilitada en su red, por ejemplo  $t_1$ . Si esta llegara a dispararse, en el vector de salida aparecería el símbolo  $b_4$  del lugar  $l_4$ . Al suceder esto, el detector de eventos incontrolables tendría que decidir cual de las dos transiciones disparar en la red del observador. Si se disparará  $t_2$ , las secuencias de disparo en ambas redes ya no serían iguales (en el sistema se disparó  $t_1$ ) y entonces no se puede garantizar la convergencia de los marcados.

De lo anterior se concluye que, para que la ecuación 6.1 calcule siempre la transición incontrolable que se disparó en la RPI del sistema es necesario que en dicha red no existan subredes  $G_I$ . Debido a su estructura, las subredes  $G_I$  sólo pueden ser parte de las RPI cuyos grafos sean ME o LE, por lo cual a continuación se introducen dos subtipos de RPI, las cuales no contienen subredes  $G_I$ .

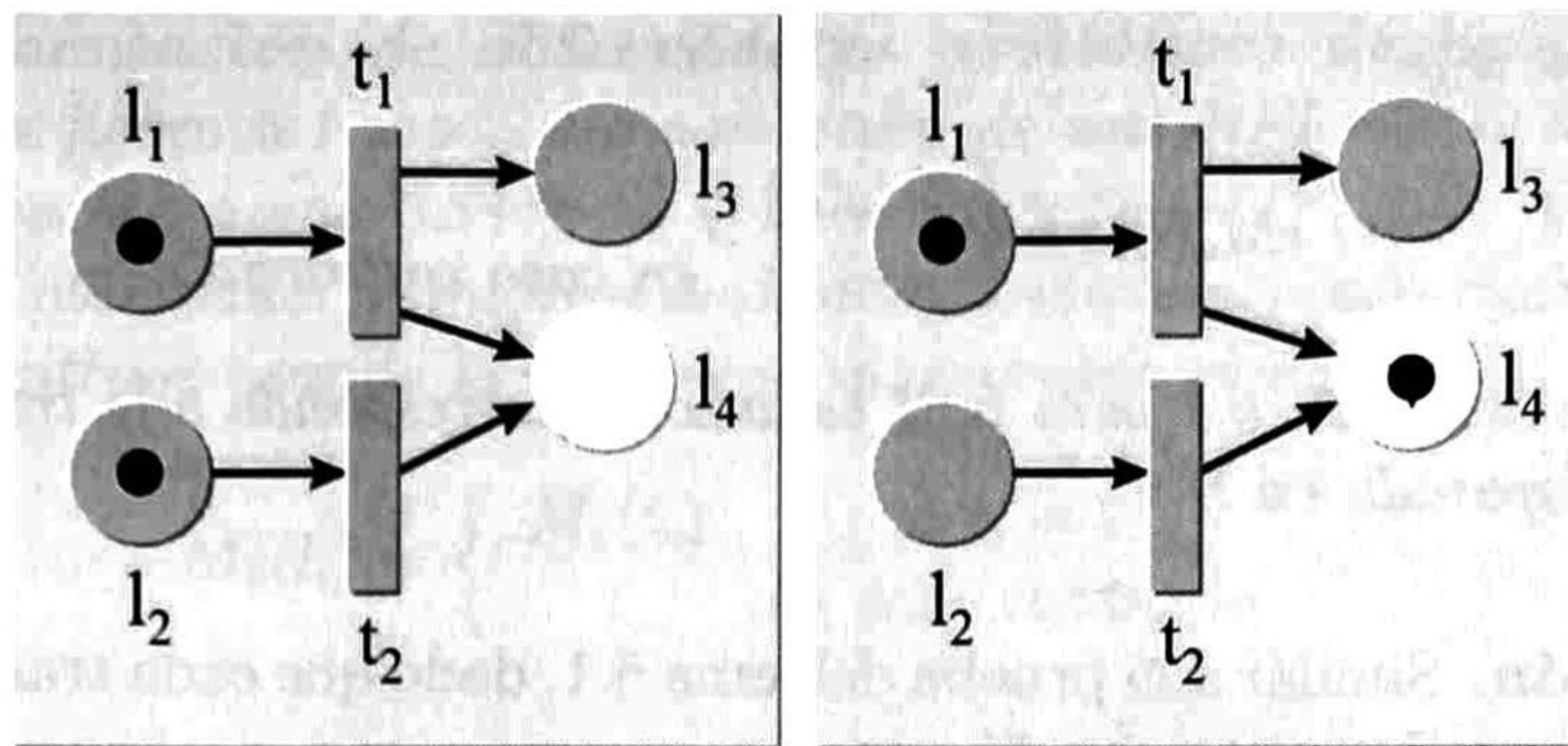


Figura 6.2: Ejemplo de una subred  $G_I$  donde todas sus transiciones están habilitadas en algún marcado alcanzable.

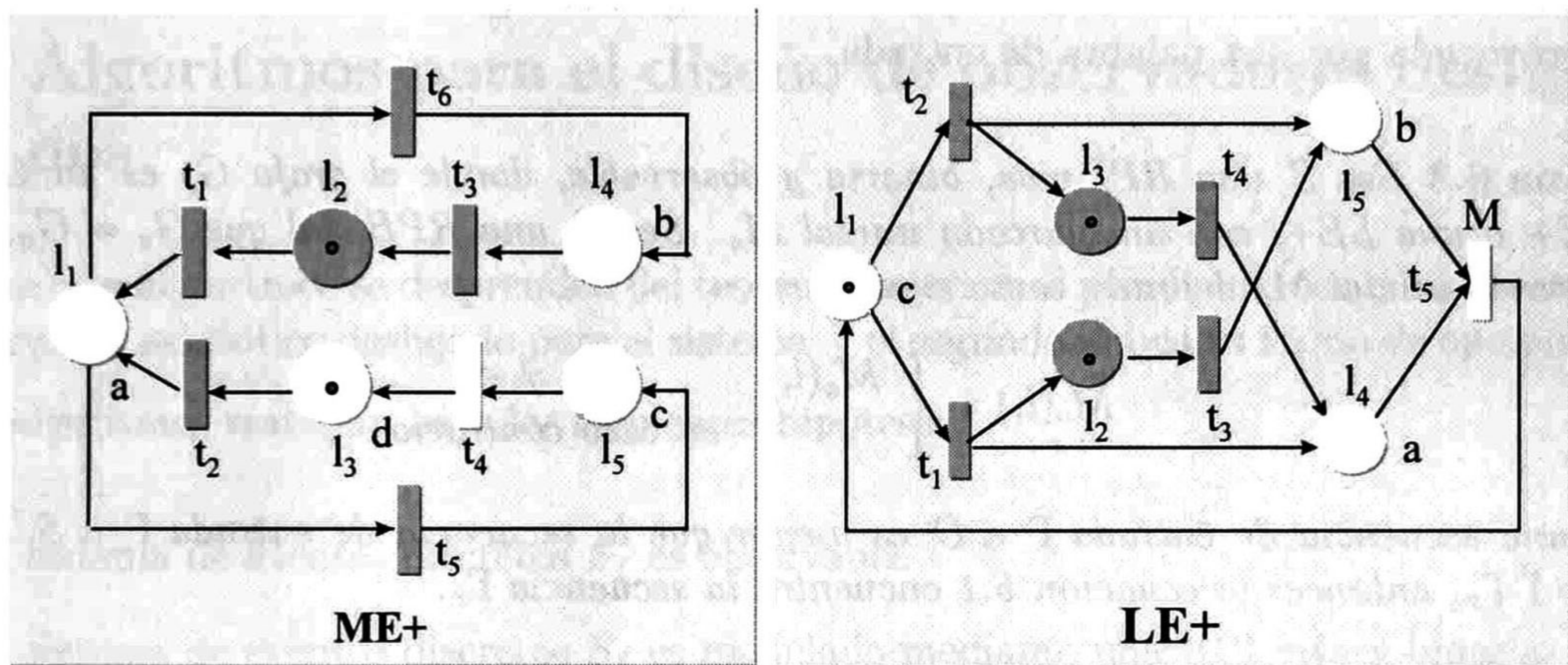


Figura 6.3: Ejemplos de redes ME+ y LE+

**Definición 6.2 Redes ME+.** Sea  $RI$  una RPI, tal que su grafo  $G_s$  es una ME.  $RI$  es llamada red ME+ si no contiene a ninguna subred  $G_I$ .

**Definición 6.3 Redes LE+.** Sea  $RI$  una RPI, tal que su grafo  $G_s$  es una LE.  $RI$  es llamada red LE+ si no contiene a ninguna subred  $G_I$ .

En la figura 6.3 se muestran dos RPI, la primera es una red ME+ y la segunda es una red LE+; en este caso, ambas redes son observables.

Es importante notar que estas redes son subtipos de RPI y no de RP, ya que están definidas con base en la interpretación que se le ha dado a la red según su estructura. Ahora, al no haber transiciones indistinguibles en este tipo de redes. Se puede garantizar que la solución a la ecuación 6.1 es única, como lo indica el siguiente lema.

**Lema 6.2** Sea  $S$  una RPI viva, binaria y observable, donde su grafo  $G_s$  es una ME+ o una LE+ con un marcado inicial  $M_o$ . Sea  $O$  una RPB, tal que  $G_s = G_o$ , con un marcado inicial

$\hat{M}_o$  definido como sigue:

$$\hat{M}_o(l_i) = \begin{cases} M_o(l_i) & \text{si } b_i \neq \varepsilon \\ 1 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

La solución de la ecuación 6.1 para RPI es única y corresponde a la transición incontrolable  $t_u$  que ha sido disparada en  $S$ .

**Demostración.** Similar a la prueba del lema 6.1, dado que cada transición es distinguible de las demás al no haber subredes  $G_I$ . ■

Dados los dos lemas anteriores, 6.1 y 6.2, y garantizando que el mismo conjunto de transiciones habilitadas en  $S$  también lo están en  $O$ , el lema siguiente establece que, utilizando la ecuación 6.1, la secuencia de disparos en  $O$  llega a ser igual a la secuencia de disparos de  $S$  provocada por una palabra de entrada.

**Lema 6.3** Sea  $S$  una RPI viva, binaria y observable, donde el grafo  $G_s$  es un GM, una ME+ o una LE+, con un marcado inicial  $M_o$ . Sea  $O$  una RPB, tal que  $G_s = G_o$ , con un marcado inicial  $\hat{M}_o$  definido como sigue:

$$\hat{M}_o(l_i) = \begin{cases} M_o(l_i) & \text{si } b_i \neq \varepsilon \\ 1 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Si una secuencia de entrada  $\hat{\Gamma}$  a  $O$  es menor que la secuencia de entrada  $\Gamma$  a  $S$ , es decir  $\Gamma = \hat{\Gamma} \Gamma_r$ , entonces la ecuación 6.1 encuentra la secuencia  $\Gamma_r$ .

**Demostración.** Sea  $w = \lambda(t_{c1}) \dots \lambda(t_{ci}) \dots \lambda(t_{ck})$  una palabra de entrada a  $S$  y a  $O$ . Sea  $\Gamma_w = t_{c1} \sigma_1^u \dots t_{ck} \sigma_{k+1}^u$ , una secuencia de disparos provocada por la entrada de  $w$ , donde  $\sigma_i^u$  es una secuencia de disparos de transiciones incontrolables y sea  $\hat{\Gamma}_w$ , la secuencia de disparos en  $O$ . Sean  $\Upsilon_k = \{t_j | t_j \in T_s, \forall l_i \in L \text{ de } G_s, M_k(l_i) \geq E(l_i, t_j)\}$  y  $\hat{\Upsilon}_k = \{t_j | t_j \in T_o, \forall l_i \in L \text{ de } G_o, \hat{M}_k(l_i) \geq E(l_i, t_j)\}$  los conjuntos de transiciones habilitadas en los marcados  $M_k$  y  $\hat{M}_k$  de  $S$  y  $O$  respectivamente. Por construcción,  $M_o \leq \hat{M}_o$ , entonces por el lema de monotonicidad, [7], se cumple que,  $\Upsilon_0 \subseteq \hat{\Upsilon}_0$ . Si  $k = 1$ , entonces la transición  $t_{c1} \in \Upsilon_0 \cap \hat{\Upsilon}_0$  es disparada en  $S$  y  $O$ , por tanto  $\hat{\Gamma}_w = t_{c1}$ ; por el lema 5.2, aún se tiene que  $M_1 \leq \hat{M}_1$  y  $\Upsilon_1 \subseteq \hat{\Upsilon}_1$ . Ahora, supóngase que en  $S$  se dispara una transición incontrolable  $t_{u1}$ ,  $t_{u1} \in \sigma_1^u$ , y se alcanza el marcado  $M_2$ , como  $S$  es observable  $\varphi(M_1) \neq \varphi(M_2)$  y, al utilizar la ecuación 6.1 se obtiene  $t_{u1}$ , por los lemas 6.1 y 6.2. Disparando  $t_{u1}$  en  $O$  se obtiene el marcado  $\hat{M}_2$  y ahora  $\hat{\Gamma}_w = t_{c1} t_{u1}$ . Entonces  $M_2 \leq \hat{M}_2$  y  $\Upsilon_2 \subseteq \hat{\Upsilon}_2$ . Este proceso se repite para todas las transiciones de  $\sigma_i^u$ ,  $\hat{\Gamma}_w = t_{c1} \sigma_1^u$ . Siguiendo un razonamiento similar al anterior, tenemos que al dispararse la última transición  $t_{uk} \in \sigma_{k+1}^u$ , se tiene que  $\Gamma_w = \hat{\Gamma}_w$ . ■

Ahora, como las secuencias de disparo en  $S$  y en  $O$  son las mismas para los GM, las ME+ y las redes LE+, el teorema 2 (implementación de observadores asintóticos monolíticos) puede ser reescrito de la siguiente forma para el caso de que en el sistema existan transiciones incontrolables.



**Teorema 3 Implementación de observadores asintóticos desligados.** Sea  $S_f$  el SED observable de la figura 6.1 modelado por medio de una RPI viva y binaria  $S$ , para la cual  $G$  es un GM, una ME o una LE+ y  $\exists l_i \in L$  de  $G_s$ , tal que  $|T_i^u| \geq 1$ , y sea  $O$  una RPB, tal que  $G_s = G_o$ . Un observador asintótico desligado es implementado cuando el observador de la figura 6.1 se contruye usando la red  $O$  con un marcado inicial

$$\hat{M}_o(l_i) = \begin{cases} M_o(l_i) & \text{si } b_i \neq \varepsilon \\ 1 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

**Demostración.** Similar a la prueba del teorema 2 (implementación de observadores asintóticos monolíticos) dado el resultado del lema 6.3 ( $\Gamma_w = \hat{\Gamma}_w$ ). ■

## 6.4 Algoritmos para el diseño de observadores desligados

Los siguientes algoritmos se desprenden del teorema anterior, el primero se usa para construir un observador asintótico desligado para el sistema y el segundo indica su forma de operación.

Los algoritmos trabajan bajo las siguientes hipótesis:

1. El sistema de eventos discretos  $S_f$  es observable.
2. El sistema de eventos discretos  $S_f$  es modelado mediante una RPI viva y binaria.
3. Existe al menos un evento de  $S_f$  que es incontrolable.
4. El grafo  $G$  de la RPI que modela a  $S_f$  es un grafo marcado, una red ME+ o una red LE+.
5. La red  $O$  del observador se comporta como una RPB.

**Algoritmo 6.1** *construccion\_desligado (estructura, lugares medibles, transiciones controlables).* **Construcción de observadores asintóticos desligados.**

1. Duplicar el modelo del sistema para contruir la red  $O$  del observador
2. Fusionar los eventos controlables del sistema con las transiciones de la red  $O$  del observador.
3. Construir el marcado inicial del observador
  - (a) Leer el vector de símbolos de salida de  $S$ ,  $z_k = \varphi(M_k)$ , donde  $l_i \in L$  de  $S$ .

(b) Calcular el marcado inicial del observador  $\hat{M}_0$ , de la siguiente forma

$$\hat{M}_0(l_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } \varphi(M(l_i)) = s_i \in z_k \\ & \text{ó } b_i = \varepsilon \\ 0 & \text{si } \varphi(M(l_i)) = s_i \notin z_k \end{cases}$$

Note que dependiendo del número de eventos incontrolables del sistema, la red del observador tendrá un mayor o menor número de transiciones compartidas con el sistema. Por lo cual, habrá casos en que el observador esté casi por completo ligado, cuando sólo exista un evento incontrolable, y otros en que el observador esté por completo desligado, cuando todos los eventos del sistema sean incontrolables.

Una vez construido el observador según lo indica el algoritmo 6.1, el lema 6.3 sugiere el siguiente algoritmo para la operación de un observador desligado.

**Algoritmo 6.2** *observador\_desligado (estructura, lugares medibles, transiciones controlables).*  
**Operación de un observador asintótico desligado.**

1. Leer los símbolos de salida de S,  $z_k = \varphi(M_k)$ .
2. Si  $z_k \neq z_{k-1}$  hacer
  - (a) Calcular "el marcado actual del sistema"  $M_e$ , correspondiente a los símbolos de salida de S, de la siguiente manera:

$$M_{ek}(l_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } \varphi(M(l_i)) = b_i \in z_k \\ 0 & \text{si } \varphi(M(l_i)) = b_i \notin z_k \\ x_i & \text{si } b_i = \varepsilon \end{cases}$$

donde  $x_i$  es una variable arbitraria.

- (b) Obterner el marcado  $\hat{M}_{k-1}$  de la red O.
  - (c) Calcular una secuencia de disparos minima  $\Gamma = t_u$  con ayuda de la ecuación 6.1.
  - (d) Disparar la secuencia  $\Gamma$  en la red O.
3. Ir al paso 1.

Ahora se muestra un ejemplo de aplicación de los algoritmos 6.1 y 6.2, en la construcción y operación de un observador monolítico desligado.

**Ejemplo 6.1** *En la figura 6.4, se muestra una RPI que modela a un SED observable. La matriz de incidencia de S es*

$$C = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

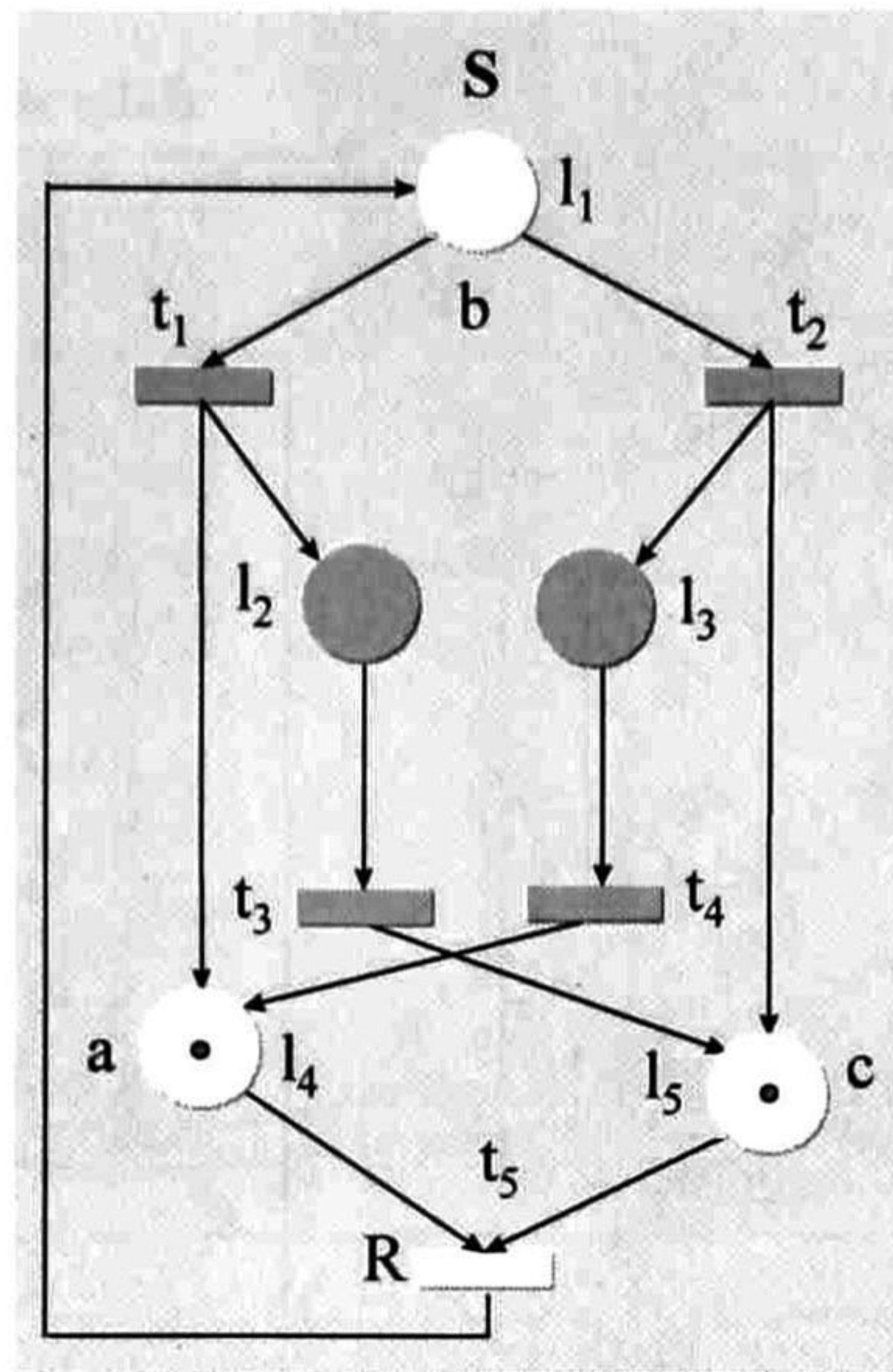


Figura 6.4: Una RPI que modela a un SED.

Por otro lado, la interpretación de la red está dada por las siguientes tablas:

|       |       |            |            |       |       |
|-------|-------|------------|------------|-------|-------|
| $l_i$ | $l_1$ | $l_2$      | $l_3$      | $l_4$ | $l_5$ |
| $b_i$ | $b$   | $\epsilon$ | $\epsilon$ | $a$   | $c$   |

|                |            |            |            |            |       |
|----------------|------------|------------|------------|------------|-------|
| $t_i$          | $t_1$      | $t_2$      | $t_3$      | $t_4$      | $t_5$ |
| $\lambda(t_i)$ | $\epsilon$ | $\epsilon$ | $\epsilon$ | $\epsilon$ | $R$   |

Por lo cual los lugares  $l_1$ ,  $l_4$  y  $l_5$  son medibles y sólo la transición  $t_5$  es controlable. Esta red es una  $LE+$  debido a que el grafo es una  $LE$  y a que no contiene ninguna subred  $G_I$ . El marcado inicial de  $S$  es  $M_0 = [0\ 0\ 0\ 1\ 1]^T$ , el cual la hace viva y binaria.

El primer paso en la construcción de la red del observador es duplicar el modelo del sistema, como se aprecia en la 6.5. En la figura 6.6 se muestra el resultado del siguiente paso, que es fusionar los eventos controlables del sistema con las transiciones del observador. Note como, al haber un evento controlable en el sistema, la red del observador está ligeramente ligada a éste. El último paso es agregar el detector de eventos incontrolables. En la figura 6.7 se pueden a la red  $S$  del sistema y al observador completo.

Sea  $M_i$  el marcado real del sistema y  $w = RR$  una palabra de entrada al sistema. Dado que, el marcado inicial del sistema es  $M_0 = [0\ 0\ 0\ 1\ 1]^T$ , se tiene que  $z_0 = [\epsilon\epsilon\epsilon\epsilon\epsilon\epsilon]$  y  $M_e = [0\ x\ z\ 1\ 1]^T$ . Por tanto el marcado inicial del observador es  $\hat{M}_0 = [0\ 1\ 1\ 1\ 1]^T$ . En la figura 6.7 se puede apreciar el marcado inicial del observador.

Al introducir el símbolo  $R$ , evolucionan tanto el sistema como el observador, dado que se dispara la transición controlable  $t_5$ . Ahora  $M_1 = [1\ 0\ 0\ 0\ 0]^T$ ,  $z_1 = [b\epsilon\epsilon\epsilon\epsilon]$ ,  $M_{e1} = [1\ x\ y\ 0\ 0]^T$  y  $\hat{M}_1 = [1\ 1\ 1\ 0\ 0]^T$ .

Supóngase que, debido a la dinámica interna del sistema se dispara la transición incontrolable  $t_2$ . Sólo el sistema evoluciona y en consecuencia  $M_2 = [0\ 0\ 1\ 0\ 1]^T$ ,  $z_2 = [\epsilon\epsilon\epsilon\epsilon\epsilon]$ ,  $M_{e2} = [0\ x\ y\ 0\ 1]^T$ . Al notar un cambio en los símbolos de salida, el detector de eventos

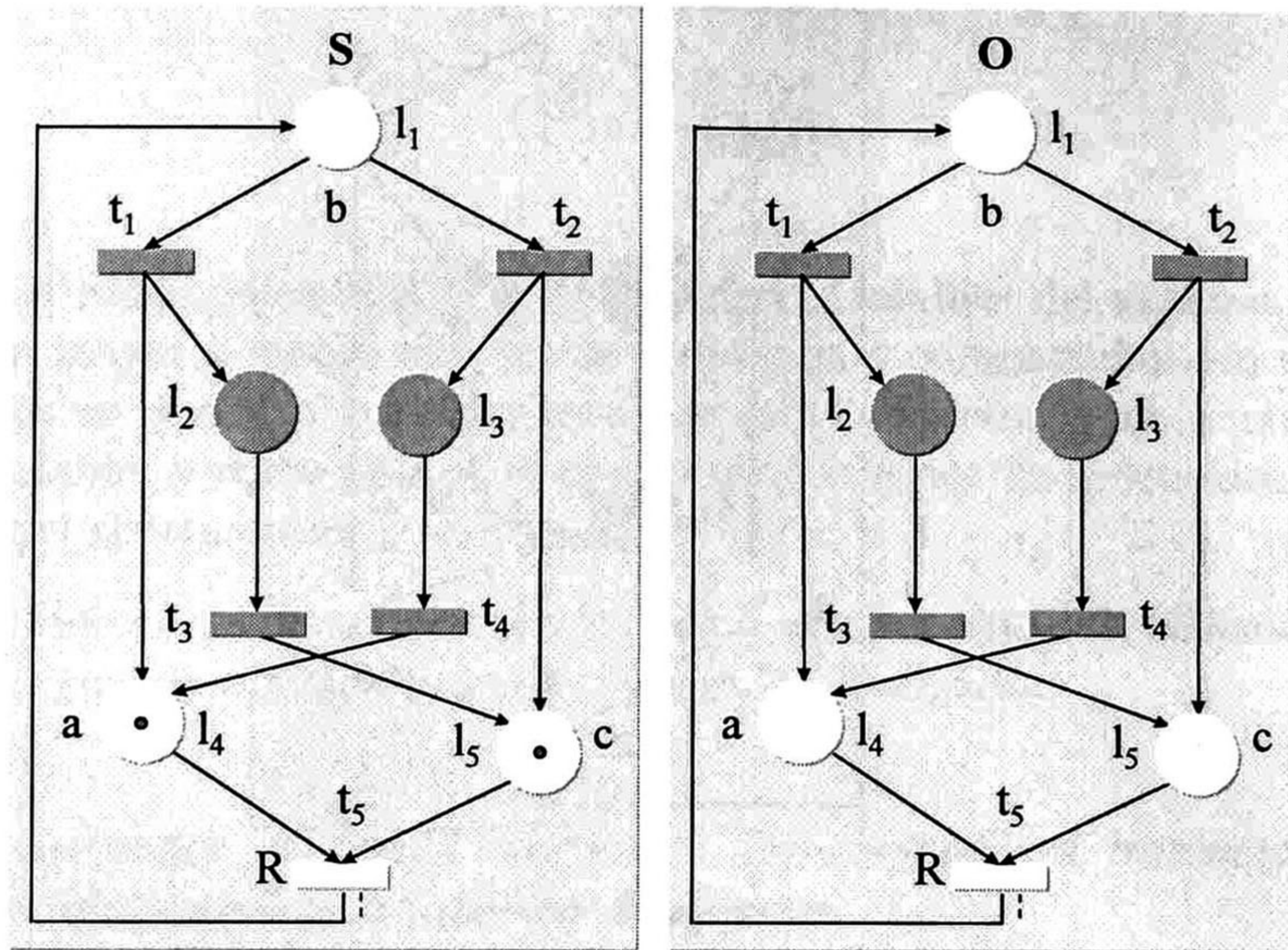


Figura 6.5: Red S del sistema y red O del observador.

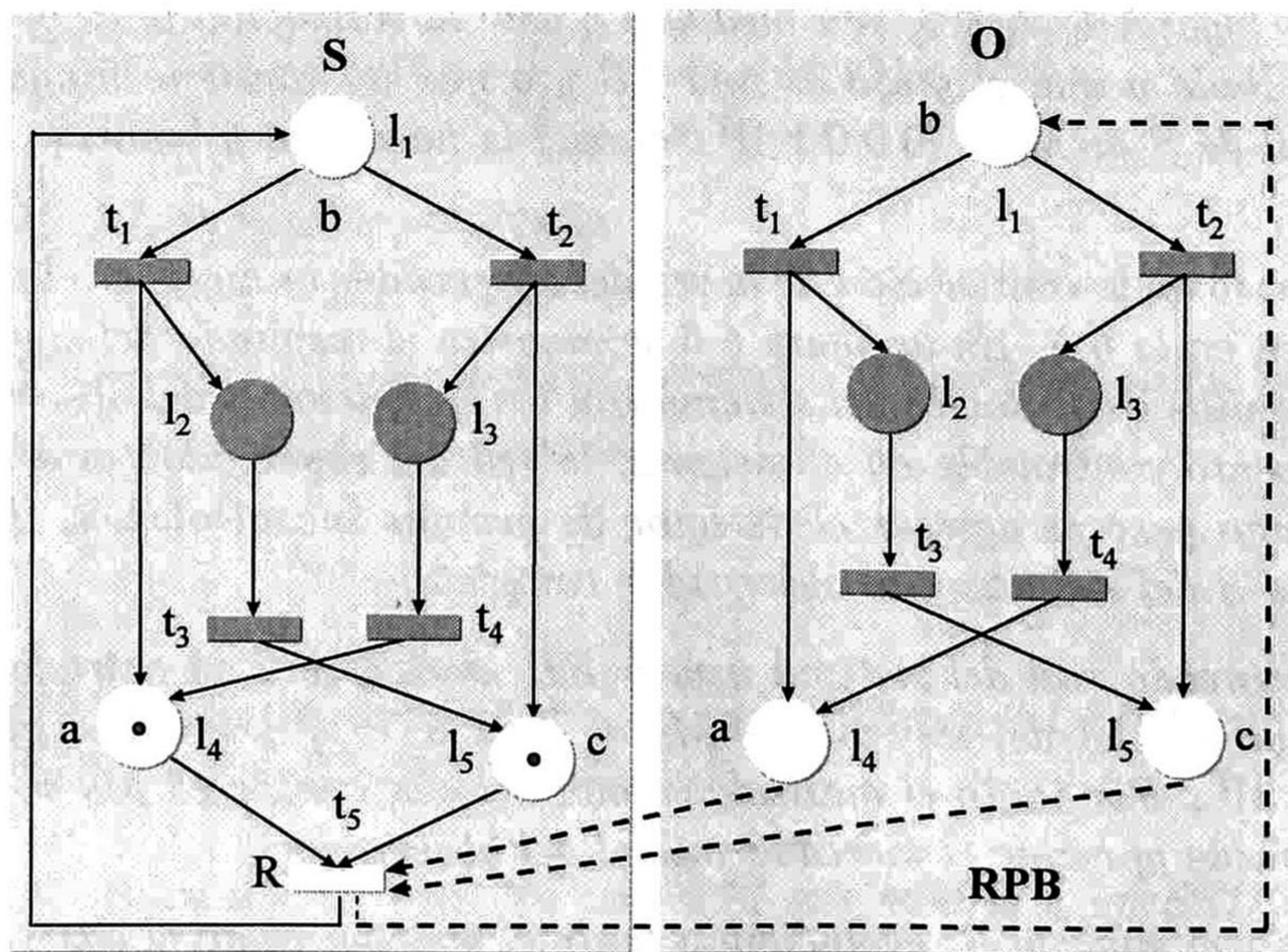


Figura 6.6: Red S del sistema y red O del observador una vez que han sido fusionadas las transiciones de O y los eventos controlables del sistema.

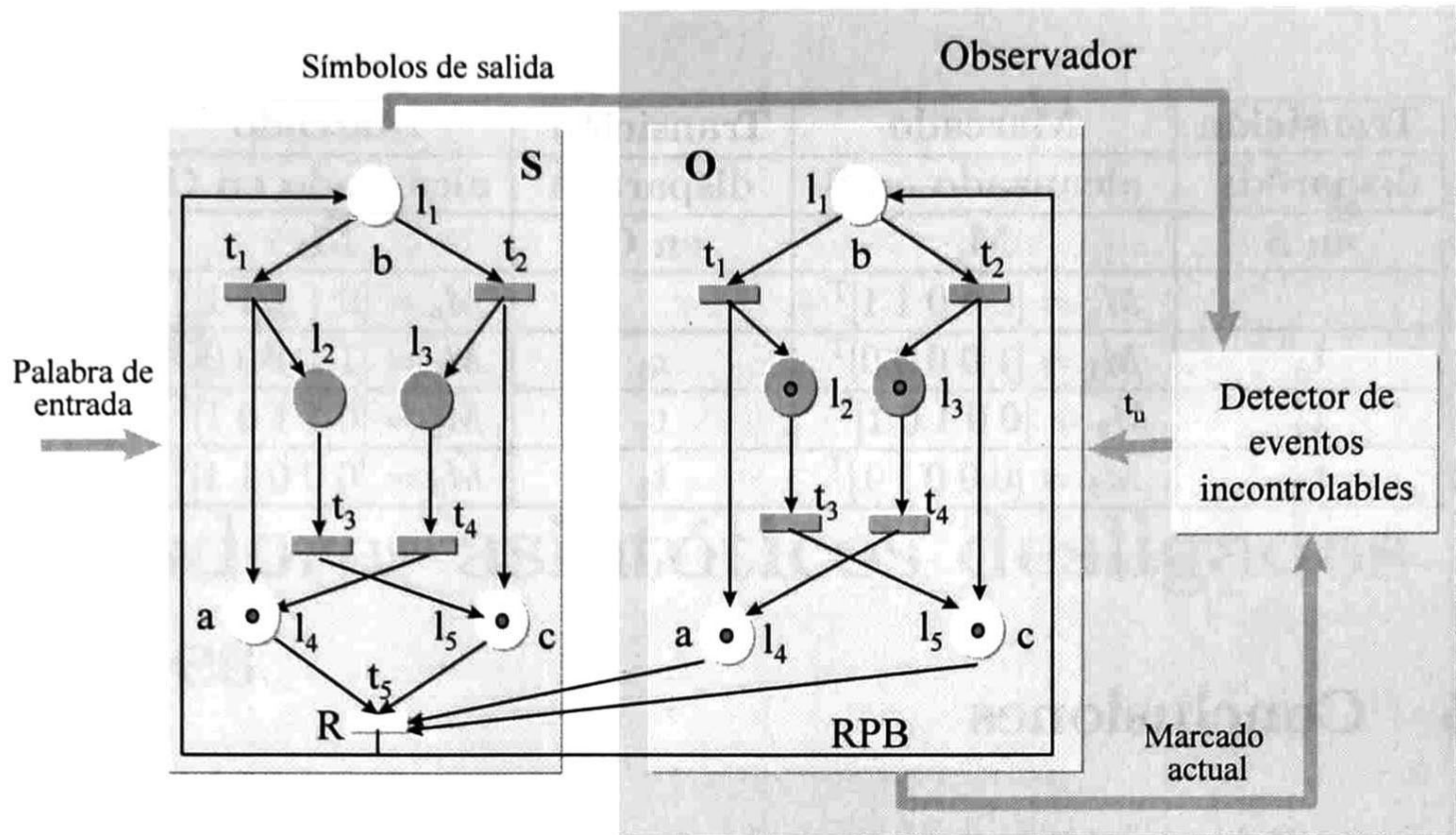


Figura 6.7: La red S del sistema y su observador.

incontrolables arroja  $\Gamma = t_2$  como la solución a la ecuación 6.1. Se introduce  $t_2$  en el observador y entonces se alcanza el marcado  $\hat{M}_2 = [0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1]^T$ .

Ahora supóngase que se dispara la transición incontrolable  $t_3$ , el marcado del sistema evoluciona a  $M_3 = [0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1]^T$  y se tiene que  $z_3 = [\epsilon \ \epsilon \ \epsilon \ a \ c]$ ,  $M_{e3} = [0 \ x \ y \ 1 \ 1]^T$ , por lo cual se calcula  $\Gamma$ , dando como resultado  $\Gamma = t_3$ . Se introduce  $t_3$  en la red del observador y se alcanza el marcado  $\hat{M}_3 = [0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1]^T$ .

Al introducir el siguiente símbolo  $R \in w$  al sistema y al observador, disparándose la transición controlable  $t_5$ , lo que provoca que el sistema evolucione al marcado  $M_4 = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$  con  $z_4 = [b \ \epsilon \ \epsilon \ \epsilon \ \epsilon]$ ,  $M_{e4} = [1 \ x \ y \ 0 \ 0]^T$  y que el observador alcance el marcado  $\hat{M}_4 = [1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ .

Supóngase que se dispara la transición incontrolable  $t_1$ , el sistema alcanza el marcado  $M_5 = [0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0]^T$  provocando un cambio en los símbolos de salida:  $z_5 = [\epsilon \ \epsilon \ \epsilon \ a \ \epsilon]$  y  $M_e = [0 \ x \ y \ 1 \ 0]^T$ . El observador calcula  $\Gamma$  con la ecuación 6.1 y obteniéndose  $\Gamma = t_1$ , la cual es introducida en el observador y ahora,  $\hat{M}_5 = [0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0]^T$ .

Nótese que en este momento los marcados del sistema y del observador son iguales. A partir de este momento, la red del observador sólo puede evolucionar como el sistema, porque en el observador se habilita el mismo conjunto de transiciones que están habilitadas en el sistema.

En la siguiente tabla se resume la evolución del sistema y del observador, así como la distancia entre sus marcados.

| Transición | Marcado                   | Transición | Marcado                         | Distancia             |
|------------|---------------------------|------------|---------------------------------|-----------------------|
| disparada  | alcanzado en S            | disparada  | alcanzado en O                  | $\ M_i - \hat{M}_i\ $ |
| en S       | $M_i$                     | en O       | $\hat{M}_i$                     |                       |
|            | $M_o = [0\ 0\ 0\ 1\ 1]^T$ |            | $\hat{M}_o = [0\ 1\ 1\ 1\ 1]^T$ | 2                     |
| $t_5$      | $M_1 = [1\ 0\ 0\ 0\ 0]^T$ | $t_5$      | $\hat{M}_1 = [1\ 1\ 1\ 0\ 0]^T$ | 2                     |
| $t_2$      | $M_2 = [0\ 0\ 1\ 0\ 1]^T$ | $t_2$      | $\hat{M}_2 = [0\ 1\ 1\ 0\ 1]^T$ | 1                     |
| $t_3$      | $M_3 = [0\ 0\ 0\ 1\ 1]^T$ | $t_3$      | $\hat{M}_3 = [0\ 0\ 0\ 1\ 1]^T$ | 0                     |

## 6.5 Conclusiones

En este capítulo se introduce el concepto de observador asintótico desligado, el cual se diseña para los sistemas de eventos discretos observables que poseen uno o más eventos incontrolables. Se propuso un esquema para resolver el problema de diseño de este tipo de observadores asintóticos.

Se probó matemáticamente que, un observador asintótico desligado puede ser implementado mediante una red de Petri booleana cuyo marcado inicial asigne una marca a cada uno de los lugares no medibles y que coincida con el marcado de los lugares medibles del sistema, además de hacer uso de un problema de programación lineal para inferir los eventos incontrolables que suceden en el sistema, pero este sólo puede ser utilizado si la RPI que modela al sistema no contiene subredes  $G_I$ , ya que en este caso el problema de programación lineal presenta varias soluciones.

Finalmente, se presentarán algoritmos para la construcción y operación de este tipo de observadores.

En el siguiente capítulo se abordará el problema del diseño de observadores asintóticos desligados para los sistemas modelados con RPI que contengan subredes  $G_I$ .

# Capítulo 7

## Observadores asintóticos desligados especiales

---

**Resumen:** En este capítulo se tratarán los problemas que se generan cuando una RPI contiene subredes  $G_I$  y se propondrán algoritmos para la construcción y operación de observadores asintóticos desligados para los SED modelados con redes que contengan este subtipo de redes, en particular para las máquinas de estado y las redes de libre elección.

---

## 7.1 Introducción

Como se vió en el capítulo anterior, cuando la RPI que modela al sistema contiene subredes  $G_I$ , la ecuación 6.1 puede tener más de una solución y de acuerdo a la implementación que se haga de la misma, el detector de eventos incontrolables elegirá alguna de ellas, con lo cual no se puede garantizar que la secuencia de disparos en la red del observador corresponda a la secuencia de eventos sucedidos en el sistema. Como consecuencia de esto, no es posible garantizar que el observador evolucionará a la par del sistema y, por lo tanto, que su estado llegará a ser equivalente al estado del sistema.

En este capítulo, se verán sus efectos negativos en el algoritmo 6.2 a través de un ejemplo de operación cuando el detector de eventos incontrolables elige una transición diferente a la que se ha disparado en el sistema. Después se propondrán algoritmos alternos al algoritmo 6.2 para la operación de un observador asintótico desligado, para el caso en que la RPI que modela a un SED sea una ME ó una LE sin importar que contenga o no subredes  $G_I$ .

## 7.2 Un caso especial

Como ya se ha visto en capítulos anteriores, cuando una RPI contiene subredes  $G_I$  en su estructura y se alcanza un marcado del observador, en el cual estén habilitadas dos o más transiciones pertenecientes a una subred  $G_I$  y se observa el símbolo de salida del único lugar medible de la red, entonces al utilizar la ecuación 6.1, el detector de eventos incontrolables se encontrará con que dicha ecuación tiene más de una solución. En este caso, el detector de eventos incontrolables del observador tiene que decidir cual de todas ellas disparar. Esta elección depende de la implementación que se haya hecho de la ecuación. Si sucede que se elige la transición que se disparó en el sistema, entonces el observador seguirá evolucionando a la par con éste, y entonces los marcados de ambas redes podrán igualarse. En cambio, si se elige una transición diferente a la realmente disparada en el sistema y se dispara en el observador, este puede quedar atrapado en un ciclo sin poder igualar su marcado al marcado del sistema. En el siguiente ejemplo se ilustrará como sucede esto.

Considérese la red  $S$  de la figura 7.1, la cual es un RPI cuyo grafo es una LE. De la figura se deduce que la interpretación de la red está dada por las siguientes tablas:

|       |               |               |               |       |       |
|-------|---------------|---------------|---------------|-------|-------|
| $l_i$ | $l_1$         | $l_2$         | $l_3$         | $l_4$ | $l_5$ |
| $b_i$ | $\varepsilon$ | $\varepsilon$ | $\varepsilon$ | $a$   | $b$   |

|                |               |               |               |               |       |
|----------------|---------------|---------------|---------------|---------------|-------|
| $t_i$          | $t_1$         | $t_2$         | $t_3$         | $t_4$         | $t_5$ |
| $\lambda(t_i)$ | $\varepsilon$ | $\varepsilon$ | $\varepsilon$ | $\varepsilon$ | $M$   |

Por lo cual los lugares  $l_4$  y  $l_5$  son medibles y sólo la transición  $t_5$  es controlable. El marcado inicial de  $S$  es  $M_o = [0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1]^T$ , el cual la hace viva y binaria.

Esta red tiene dos subredes  $G_I$ :  $Q_1$  y  $Q_2$ . La subred  $Q_1$  está formada por los lugares  $l_1, l_2, l_3, l_5$  y las transiciones  $t_2$  y  $t_3$ , mientras que  $Q_2$  está formada por los lugares  $l_1, l_2, l_3, l_4$  y las transiciones  $t_1$  y  $t_4$ . En la figura 7.2 se muestran estas subredes por separado.

La red  $S$  es observable porque todas sus subredes  $G_T$  y  $G_I$  también lo son. Así que, es posible construir un observador asintótico desligado para esta red aplicando los algoritmos



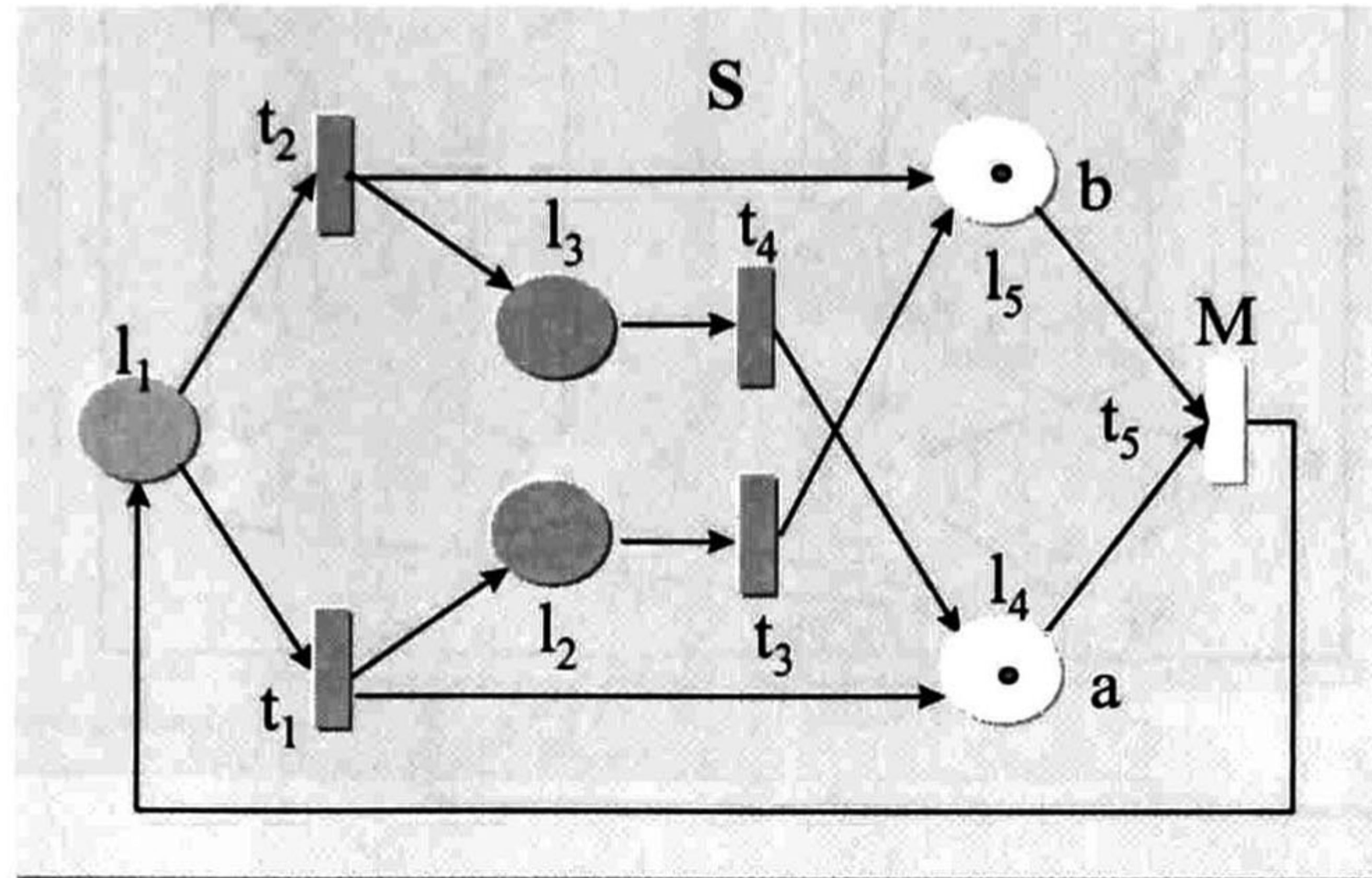


Figura 7.1: Ejemplo de una RPI, la cual contiene dos subredes  $G_I$ .

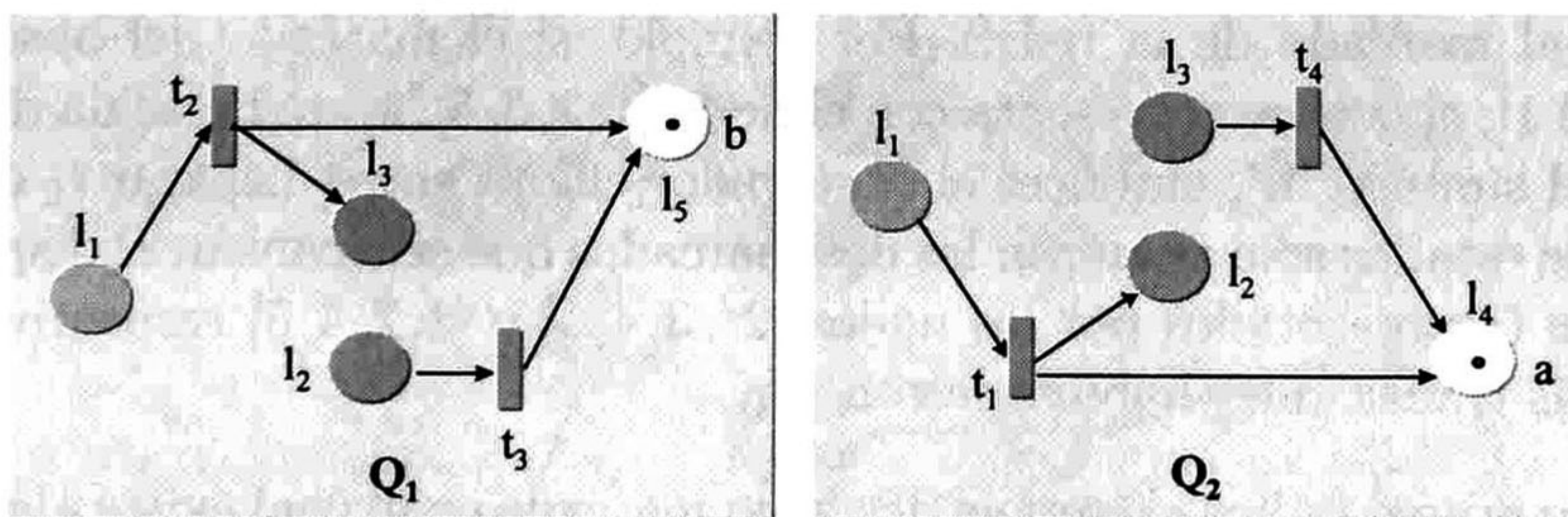


Figura 7.2: Subredes  $G_I$  de la red  $S$

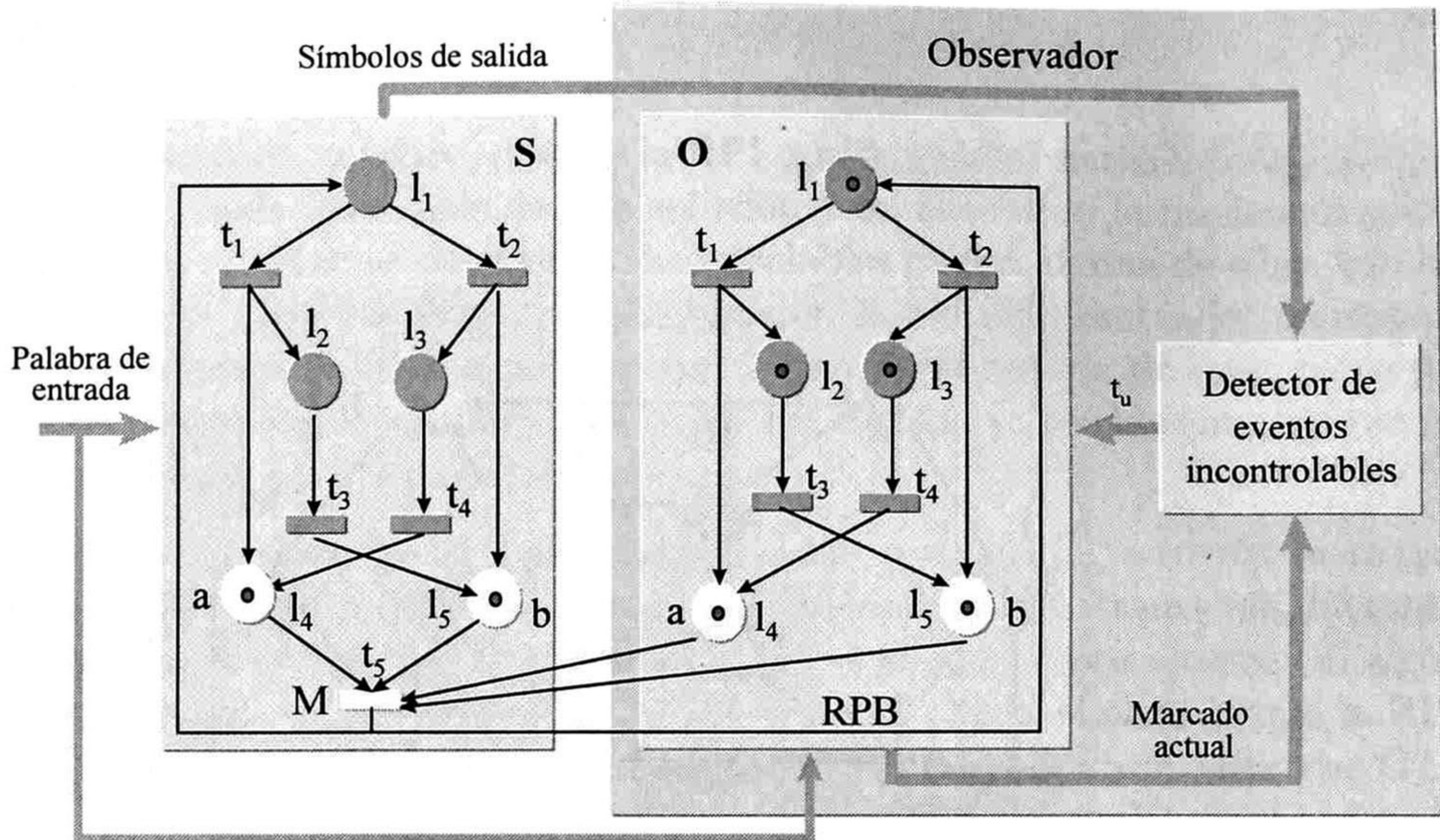


Figura 7.3: La red S y su observador asintótico desligado.

6.1 y 6.2.

En la figura 7.3 se pueden ver la red S y su observador asintótico desligado. Note como el marcado inicial  $\hat{M}_o$  del observador habilita a todas las transiciones de la red y en particular a las transiciones de  $Q_1$  y  $Q_2$ . Para ilustrar como evolucionan las redes S y O al aceptarse alguna palabra  $w$ , se hará uso de los grafos de espacio de estados de ambas redes. En la figura 7.4 se muestra el grafo de espacios de estados de la red S del sistema y en la red de la figura 7.5 se muestra un grafo de espacios de estados parcial de la red O del observador. Este último tiene las siguientes peculiaridades:

- Sólo se representan los nodos de marcados alcanzables en el observador al tratar de seguir al marcado de la red S. Por ejemplo, si el marcado del observador es  $\hat{M}_i = [1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1]$ , el cual se representa con el nodo  $[1, 2, 3, 5]$ , y en la salida del sistema se presenta el símbolo 'b', entonces el observador elegirá entre disparar  $t_1$  o  $t_4$ ; así que en el grafo de estados sólo aparecen los dos marcados que se alcanzan al disparar dichas transiciones (representados por los nodos  $[2^2, 3, 4, 5]$  y  $[1, 2, 4, 5]$  respectivamente), aunque hay más transiciones habilitadas en  $M_i$ .
- Un arco grueso indica el cambio desde un marcado en el cual existe algún lugar con más de una marca hacia un marcado donde se han eliminado las marcas extras (recuérdese que la red del observador es una red booleana). Por ejemplo, del marcado  $M_i = [0 \ 2 \ 1 \ 1 \ 1]$  se pasa al marcado  $M'_i = [0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]$ .
- Un nodo claro representa un marcado  $\hat{M}_j$  del observador tal que  $\hat{M}_j = M_k$ , donde  $M_k$  es el marcado de la red S.

Sean  $M_o = [0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1]$  y  $\hat{M}_o = [1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]$  los marcados iniciales de S y O, respectivamente,



como se muestra en la figura 7.3. A partir de este momento se usará la notación de los nodos de los grafos de espacio de estados para representar los marcados de las redes S y O.

Supóngase que se introduce la palabra de entrada  $w = MMMM$  a ambas redes. Al aceptarse el primer símbolo **M**, en ambas redes se dispara la transición  $t_5$ , alcanzándose los marcados  $M_1 = [1]$  en S y  $\hat{M}_1 = [1^2, 2, 3]$  en O, este último se convierte en  $\hat{M}_1 = [1, 2, 3]$ .

Ahora supóngase que en S se dispara la transición incontrolable  $t_1$ , el marcado de S avanza a  $M_2 = [2, 4]$  apareciendo a la salida el símbolo 'a' correspondiente al lugar  $l_4$ , el cual pertenece a  $Q_2$ . Así que ahora el observador tiene que decidir entre disparar  $t_1$  ó  $t_4$ , porque ambas están habilitadas y el disparo de cualquiera de ellas marca a  $l_4$ . Supóngase que se decide disparar  $t_4$ , lo cual representa una decisión incorrecta (en el sistema se disparó  $t_1$ ), alcanzándose el marcado  $\hat{M}_2 = [1, 2, 4]$ .

Si ahora se dispara la transición incontrolable  $t_3$  en S se alcanza el marcado  $M_3 = [4, 5]$  y aparece también a la salida el símbolo 'b' del lugar  $l_5$ . Este lugar pertenece a  $Q_1$ , al igual que las transiciones  $t_2$  y  $t_3$ , las cuales están habilitadas en O. Así, se tiene que decidir por el disparo de una de ellas. Si se decide disparar  $t_2$ , lo cual como en el caso anterior también representa una decisión errónea, se alcanza el marcado  $\hat{M}_3 = [2, 3, 4, 5]$  en O.

Ahora puede ser aceptado el siguiente símbolo de entrada **M** por las dos redes, disparándose la transición controlable  $t_5$  y alcanzándose los marcados  $M_4 = [1]$  en S y  $\hat{M}_4 = [1, 2, 3]$  en O. Se puede ver que la red O ha vuelto al marcado  $[1, 2, 3]$ .

Si a partir de este momento en S se dispara una secuencia infinita de transiciones  $\sigma = t_1 t_3 t_5 t_1 t_3 t_5 \dots$  y si el observador en respuesta decide siempre disparar la secuencia  $\hat{\sigma} = t_4 t_2 t_5 t_4 t_2 t_5 \dots$ , esto equivaldría a que el observador se quedara atrapado en el ciclo formado por los marcados  $[1, 2, 3]$ ,  $[1, 2, 4]$ ,  $[2, 3, 4, 5]$ , con lo cual nunca podría igualar su marcado al marcado de S.

En general, el observador puede quedar atrapado en cualquier ciclo del grafo de espacio de estados parcial del observador. Por ejemplo otro ciclo podría ser el formado por los marcados  $[2, 3, 4]$ ,  $[3, 4, 5]$ ,  $[1, 3]$ . Note que siempre es posible salir de estos ciclos si se elige la misma transición que se disparó en la red S.

Lo anterior sugiere la necesidad de contar en el algoritmo 6.2 con algún criterio de selección de la transición que deba dispararse en la red del observador, tal que garantice que se eligió la misma transición que se disparó en la red del sistema o que impida al observador quedar atrapado en un ciclo y que a la vez garantice que el marcado del observador se igualará al marcado de la red del sistema.

Desafortunadamente esto no es posible, ya que no se cuenta con información adicional para establecer dicho criterio, por lo cual en la siguiente sección se propondrán dos algoritmos altermos para la operación de los observadores asintóticos desligados, cuando la RPI que modela a un SED observable es una ME o una LE.

## 7.3 Observadores asintóticos desligados para las ME

### 7.3.1 Diseño de observadores asintóticos desligados para las ME

La siguiente proposición establece una forma de igualar los marcados de la red  $S$  de un sistema y de la red  $O$  de su observador, una vez que se detecta la presencia en los símbolos de salida del símbolo de algún lugar medible.

**Proposición 7.1** *Sea  $S$  una RPI viva, binaria, observable y con un único espacio de atracción, tal que su grafo  $G_s$  es una ME, con un marcado  $M_i$ , tal que  $\exists l_k \in G_s$ , donde  $b_k \neq \varepsilon$  y  $M_i(l_k) = 1$ . Sea  $O$  una RPB, tal que  $G_o = G_s$ , con un marcado  $\hat{M}_i$  definido como sigue:*

$$\hat{M}_i(l_i) = \begin{cases} M_i(l_i) & \text{si } \varphi(M(l_i)) = b_i \neq \varepsilon \\ 1 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

*Si se contruye un nuevo marcado  $\hat{M}'_i$  de la siguiente manera:*

$$\hat{M}'_i(l_j) = \begin{cases} \hat{M}_i(l_j) & \text{si } \varphi(M(l_i)) = b_i \neq \varepsilon \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

*Entonces  $\hat{M}'_i = M_i$ .*

**Demostración.** Dado que  $S$  es una ME viva y binaria, de [1], se sabe que sólo uno de sus lugares está marcado en  $M_i$ , por construcción ese lugar es  $l_k$ . De acuerdo a la forma en que fue construido  $\hat{M}_i$ , se tiene que  $\hat{M}_i(l_k) = 1$  y que  $\forall l_j \in G_o$ , t.q  $b_j \neq \varepsilon$ ,  $\hat{M}_i(l_j) = 0$ . Entonces al pasar a  $\hat{M}'_i$ , se eliminan las marcas que pudiera haber en el resto de los lugares de  $O$  y sólo  $\hat{M}'_i(l_k) = 1$ . Por tanto,  $\hat{M}'_i = M_i$ . ■

### 7.3.2 Algoritmo para la implementación de un observador asintótico para un SED modelado mediante una ME

De acuerdo a la proposición anterior, se sugiere el siguiente algoritmo para la construcción y operación de un observador asintótico para los SED bajo las siguientes hipótesis:

1. El sistema de eventos discretos  $S_f$  es observable.
2. El sistema de eventos discretos  $S_f$  es modelado mediante una RPI viva, binaria y con un único espacio de atracción.
3. Existe al menos un evento de  $S_f$  que es incontrolable.
4. El grafo  $G$  de la RPI que modela a  $S_f$  es una ME.
5. La red  $O$  del observador se comporta como una RPB.

**Algoritmo 7.1** *observador\_me* (estructura, lugares medibles, transiciones controlables).  
**Construcción y operación de observadores para los SED modelados con ME.**

1. Construir el observador de acuerdo al algoritmo 6.1.
2. Inicializar la bandera de rectificación, *rectificacion* = 0.
3. Si  $\exists l_i \in G_o$  con  $b_i \neq \varepsilon$ , tal que  $\hat{M}_i(l_i) = 1$  y *rectificacion* = 0 hacer
  - (a) cambiar el marcado  $\hat{M}_i$  de  $O$  por el siguiente:
 
$$\hat{M}'_i(l_j) = \begin{cases} \hat{M}_i(l_j) & \text{si } b_j \neq \varepsilon \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$
  - (b) *rectificacion* = 1
4. Ejecutar los pasos 1 y 2 del algoritmo 6.2.
5. Si *rectificacion* = 0 entonces ir al paso 3, en caso contrario 4.

Debido a las características de las ME, sólo es necesario hacer una corrección del marcado de la red  $O$ , así que en el algoritmo 7.1 se ha incluido una bandera para saber si la corrección ya fue hecha. Cuando esto ha ocurrido, sólo es necesario estar revisando el cambio en los símbolos de salida de  $S$  para disparar la transición correspondiente.

A continuación se presenta un ejemplo de la ejecución del algoritmo para la construcción y operación de un observador asintótico desligado para un SED modelado mediante una RPI cuyo grafo es una ME.

**Ejemplo 7.1** *Condidérese la red  $S$  de la figura 7.6. Esta red es una RPI observable viva y binaria, además de contar con al menos un evento incontrolable y de ser una ME, por lo que el algoritmo 7.1 puede ser aplicado para construir un observador para esta red. La figura 7.7 muestra el bloque red-observador para la red  $S$ , el cual fue construido de acuerdo al algoritmo 6.1. En este momento la variable **rectificacion** = 0. De acuerdo a la figura 7.7, los marcados iniciales de las redes  $R$  y  $O$  son  $M_o = [0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0]$  y  $\hat{M}_o = [0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0]$ , respectivamente, así que no es necesario hacer ninguna corrección en el marcado de la red  $O$ , dado que no hay lugares marcados en  $\hat{M}_o$ . supóngase que en la red  $S$  se dispara la transición  $t_2$  alcanzándose el marcado  $M_1 = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$  y apareciendo el símbolo  $a$ , correspondiente al lugar medible  $l_1$ . Entonces se ejecutan los pasos 1 y 2 del algoritmo 6.2, lo que da como resultado el disparo de  $t_1$  (transición incorrecta, es decir transición diferente a la que se disparó en el sistema) en la red  $O$ , alcanzándose el marcado  $M_1 = [1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0]$ . Ahora un lugar medible está marcado por lo cual se ejecuta el paso 3, eliminado la marca de  $l_3$ . El marcado de la red  $O$  cambia a  $M'_1 = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$ , con lo que los marcados de las redes  $S$  y  $O$  se han igualado y **rectificacion** = 1. De aquí en adelante, ambas redes evolucionarán de manera idéntica. El observador sigue operando para que su red  $O$  siga a la red  $S$  cuando se dispare alguna transición incontrolable en ella, pero ya no hay necesidad de hacer nuevos ajustes en el marcado, como lo indica **rectificacion***

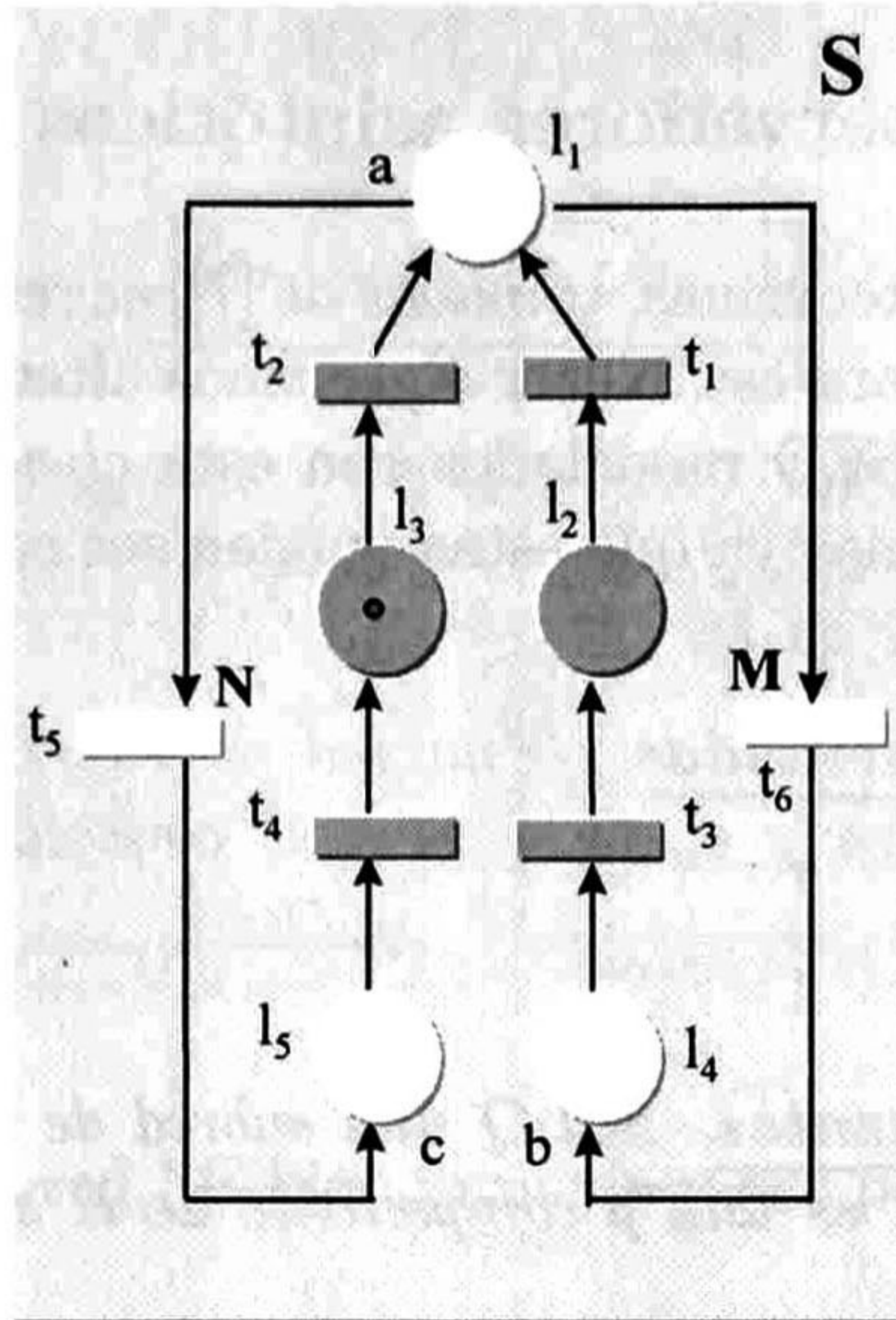


Figura 7.6: Una RPI observable, viva y binaria, cuyo grafo es una ME.

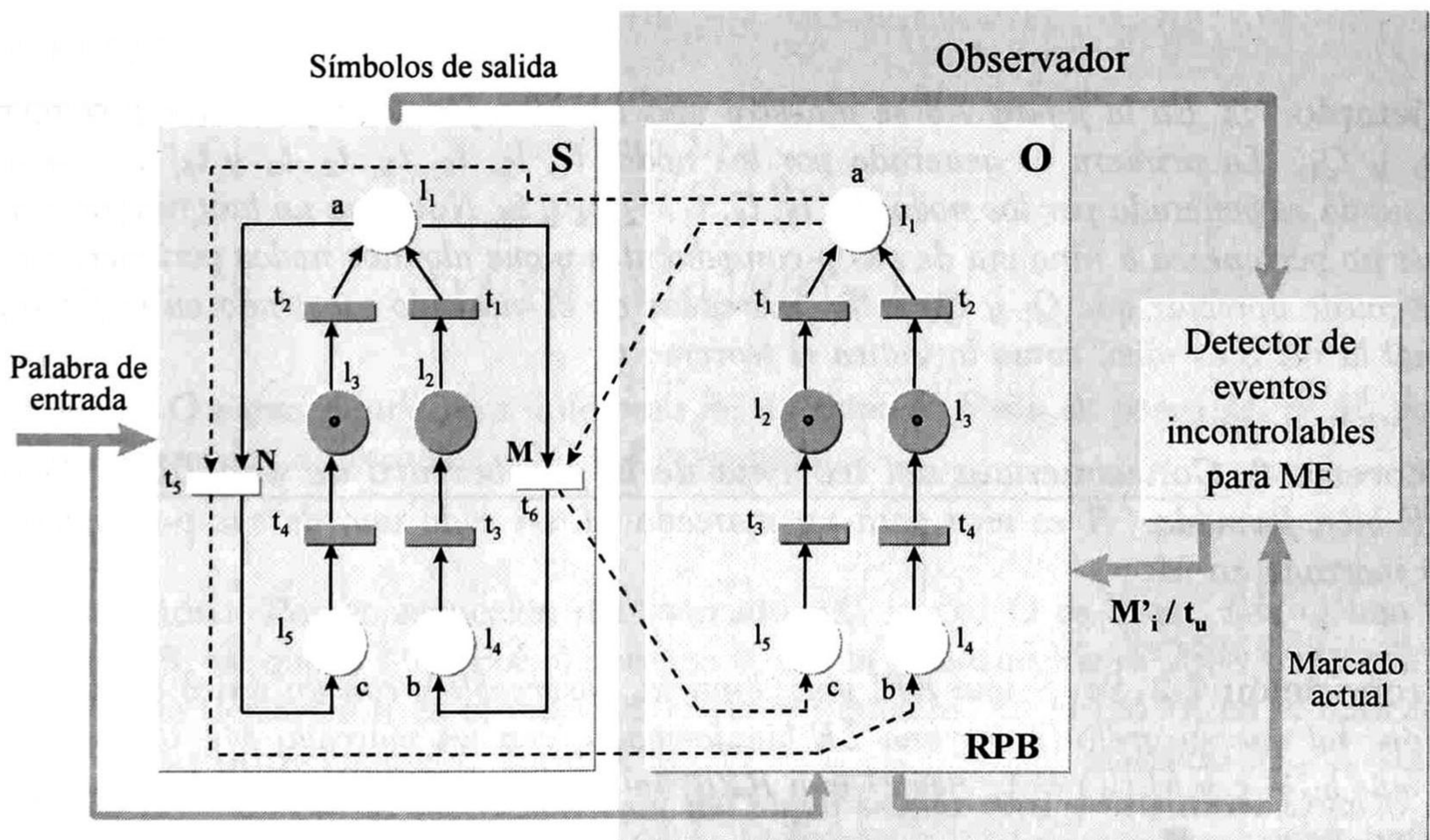


Figura 7.7: La red S y su observador asintótico desligado modificado para ME.

## 7.4 Observadores asintóticos desligados para las LE

### 7.4.1 Diseño de observadores asintóticos desligados para las LE

Las siguientes definiciones y teoremas, tomados de [7], se refieren a algunas propiedades de las LE, las cuales serán útiles para establecer algoritmos alternos de operación de observadores asintóticos desligados para SED modelados con esta clase de RPI. No se han incluido las demostraciones de los teoremas ya que estas pueden ser consultados en [7].

**Teorema 4 Redes bien formadas.** *Una red de Petri  $R$  es bien formada si existe un marcado  $M_o$  que la haga viva y acotada, y si es conectada con al menos un lugar y una transición.*

**Definición 7.1 P-componentes.** *Sea  $Q$  una subred de una red de Petri  $R$ , generada por un conjunto  $X$  de nodos.  $Q$  es una  $p$ -componente de  $R$  si:  $\bullet p \cup p^\bullet \subseteq X$  y  $Q$  es una red  $P$  fuertemente conexa<sup>1</sup>*

**Definición 7.2 P-coberturas.** *Sea  $C$  un conjunto de  $p$ -componentes de una red  $R$ .  $C$  es una  $p$ -cobertura si  $\forall l_i \in G_R$ ,  $l_i$  pertenece a alguna  $p$ -componente de  $C$*

**Teorema 5 P-cobertura en una LE.** *Las redes de libre elección bien formadas están cubiertas por  $p$ -componentes.*

**Ejemplo 7.2** *En la figura 7.8 se muestra una LE bien formada y sus dos  $p$ -componentes:  $Q_1$  y  $Q_2$ . La primera es generada por los nodos  $l_1, l_2, l_5, t_1, t_2, t_3$  y  $t_5$ ; mientras que la segunda es generada por los nodos  $l_1, l_3, l_4, t_1, t_2, t_4$  y  $t_5$ . Note que no hay ningún lugar de  $R$  que no pertenezca a ninguna de sus  $p$ -componentes y que algunos nodos pertenecen a ambas. Se puede apreciar que  $Q_1$  y  $Q_2$  están marcadas en el marcado mostrado en la figura, por lo cual la red  $S$  es viva, como lo indica el teorema 6.*

**Teorema 6 Consecuencia del teorema de la  $p$ -cobertura de una LE.** *Sea  $R$  una LE bien formada.  $R$  es viva para un marcado  $M$  ssi cada una de sus  $p$ -componentes está marcada en  $M$ .*

**Proposición 7.2** *Sea  $S$  una RPI viva, binaria, observable y con un único espacio de atracción, tal que su grafo  $G_s$  es una LE bien formada, con un marcado  $M_i$ , tal que  $\exists l_k \in G_s$ , donde  $b_k \neq \varepsilon$  y  $M_i(l_k) = 1$ . Sea  $O$  una RPB, tal que  $G_o = G_s$ , con un marcado  $\hat{M}_i$  definido como sigue:*

$$\hat{M}_i(l_i) = \begin{cases} M_i(l_i) & \text{si } b_i \neq \varepsilon \\ 1 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

<sup>1</sup>La definición de red fuertemente conexa se puede encontrar en [7].



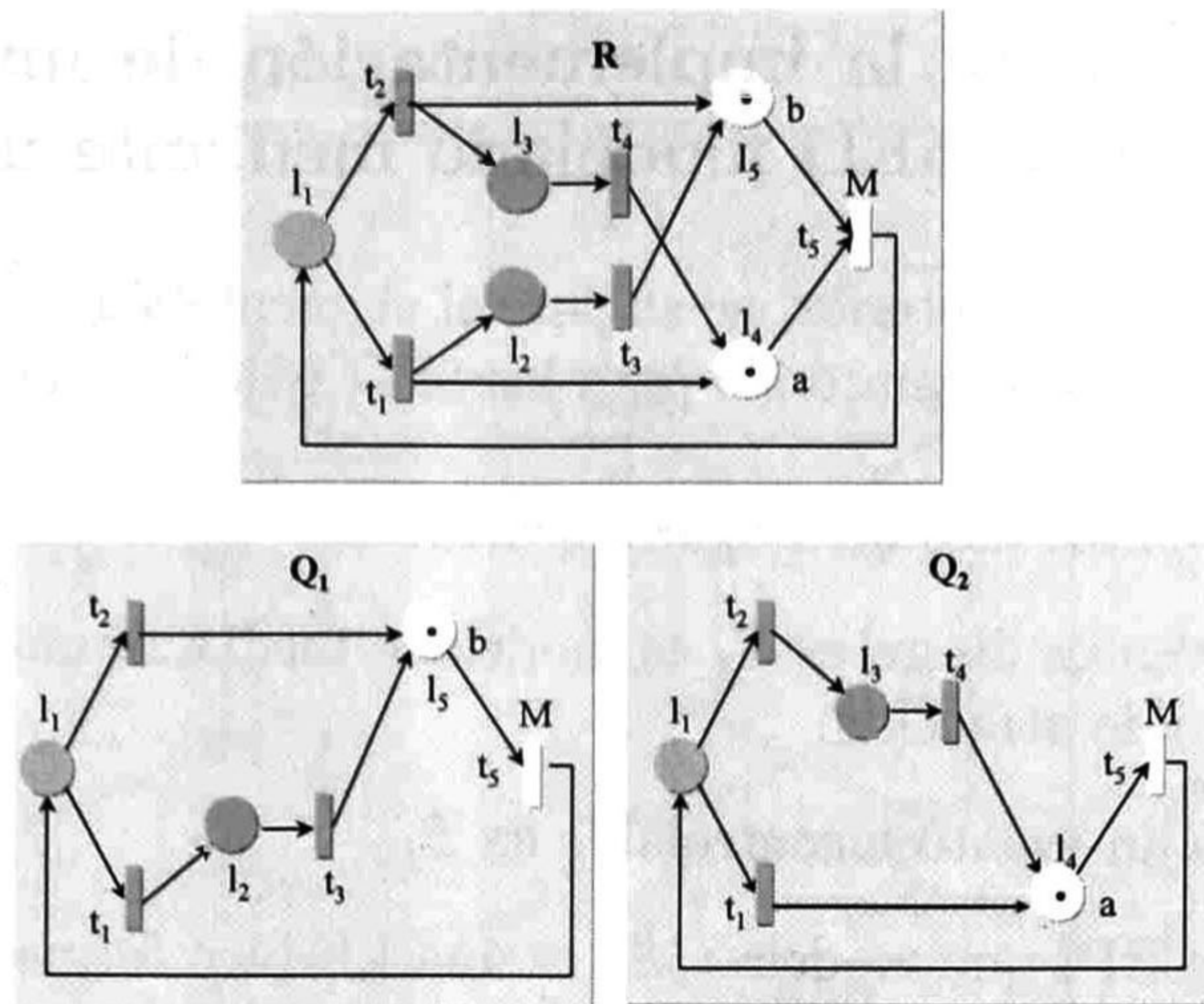


Figura 7.8: Ejemplo de una red LE bien formada y sus p-componentes  $Q_1$  y  $Q_2$ .

Si se construye un nuevo marcado  $\hat{M}'_i$  de la siguiente manera:

$$\hat{M}'_i(l_j) = \begin{cases} \hat{M}_i(l_j) & \text{si } l_j \notin ||Y_k|| \\ 1 & \text{si } l_j = l_k \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

donde  $||Y_k||$  es el soporte de  $Y_k$  tal que

$$\begin{aligned} & \min \sum Y_k \\ & \text{t.q. } Y_k^T C = 0 \\ & \text{s.a.} \\ & Y_k^T \geq 0 \text{ y } Y_k^T(l_i)M(l_i) = 1 \end{aligned}$$

Entonces la red  $O$  sigue siendo viva y después de un número finito de pasos  $\hat{M}_j = M_j$ , para algún par de marcados alcanzables de  $O$  y  $S$  respectivamente.

**Demostración.** Por construcción del marcado  $\hat{M}_i$ , la red  $O$  es viva. Sea  $Q$  una p-componente de  $S$ , tal que  $l_k \in Q$ . Por el teorema 6, por la construcción de  $M_i$  y dado que la red es binaria, se tiene que  $l_k$  es el único lugar de  $Q$  marcado. En la red  $O$ , en el marcado  $\hat{M}_i$  pueden existir otros lugares  $l_h$  tal que  $\hat{M}_i(l_h) = 1$ . Al pasar al marcado  $\hat{M}'_i$ ,  $l_k$  sigue estando marcado. Así por el teorema 6. La red sigue siendo viva y la subred  $Q$  en  $O$  es binaria. Se sabe de [7] que las p-componentes no pierden ni ganan marcas, entonces si cada vez que se marque algún lugar medible, se eliminan las marcas del p-componente mínimo al que pertenece, se tiene que cada vez se irán afectando más p-componentes de la red  $O$ , hasta que todas ellas sean binarias. Entonces se tendrá que  $\hat{M}_j = M_j$ , para algún par de marcados alcanzables de  $O$  y  $S$  respectivamente. ■

### 7.4.2 Algoritmo para la implementación de un observador asintótico para un SED modelado mediante una red LE

De acuerdo a la proposición anterior, se sugiere el siguiente algoritmo para la construcción y operación de un observador asintótico para los SED bajo las siguientes hipótesis:

1. El sistema de eventos discretos  $S_f$  es observable.
2. El sistema de eventos discretos  $S_f$  es modelado mediante una RPI viva, binaria y con un único espacio de atracción.
3. Existe al menos un evento incontrolable en  $S_f$
4. El grafo  $G$  de la RPI que modela a  $S_f$  es una LE bien formada.
5. La red  $O$  del observador se comporta como una RPB.

**Algoritmo 7.2** *observador\_le (estructura, lugares medibles, transiciones controlables). Construcción y operación de observadores para los SED modelados con LE.*

1. Construir el observador de acuerdo al algoritmo 6.1.
2. Si  $\exists l_i \in G_o$  con  $b_i \neq \varepsilon$ , tal que  $\hat{M}_i(l_i) = 1$ , entonces

(a)  $\forall l_j \in G_o$  tal que  $b_j \neq \varepsilon$  y  $\hat{M}_i(l_i) = 1$  hacer

i. Calcular

$$\begin{aligned} & \min \sum Y_k \\ & \text{t.q. } Y_k^T C = 0 \\ & \text{s.a} \end{aligned}$$

$$Y_k^T \geq 0 \text{ y } Y_k^T(l_i)M(l_i) = 1$$

- ii. Obtener el soporte de  $Y$ ,  $\|Y\|$ .
- iii. Contruir el nuevo marcado  $\hat{M}'_i$  de  $O$  de la siguiente manera:

$$\hat{M}'_i(l_j) = \begin{cases} \hat{M}_i(l_j) & \text{si } l_j \notin \|Y\| \\ 1 & \text{si } l_j = l_i \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

3. Ejecutar los pasos 1 y 2 del algoritmo 6.2.
4. Ir al paso 2.

A diferencia del algoritmo 7.1, en este algoritmo no se ha incluido una bandera para saber si ya se realizó el cambio de marcado. Esto debido a que este cambio puede realizarse más de una vez, dependiendo del tamaño y de la complejidad de la red.

A continuación se mostrará como opera el algoritmo **observador\_le** con la red de la figura 7.1, la cual es una LE, para poder comparar su desempeño con el desempeño del algoritmo **algo\_operades** del capítulo anterior (algoritmo 6.2).

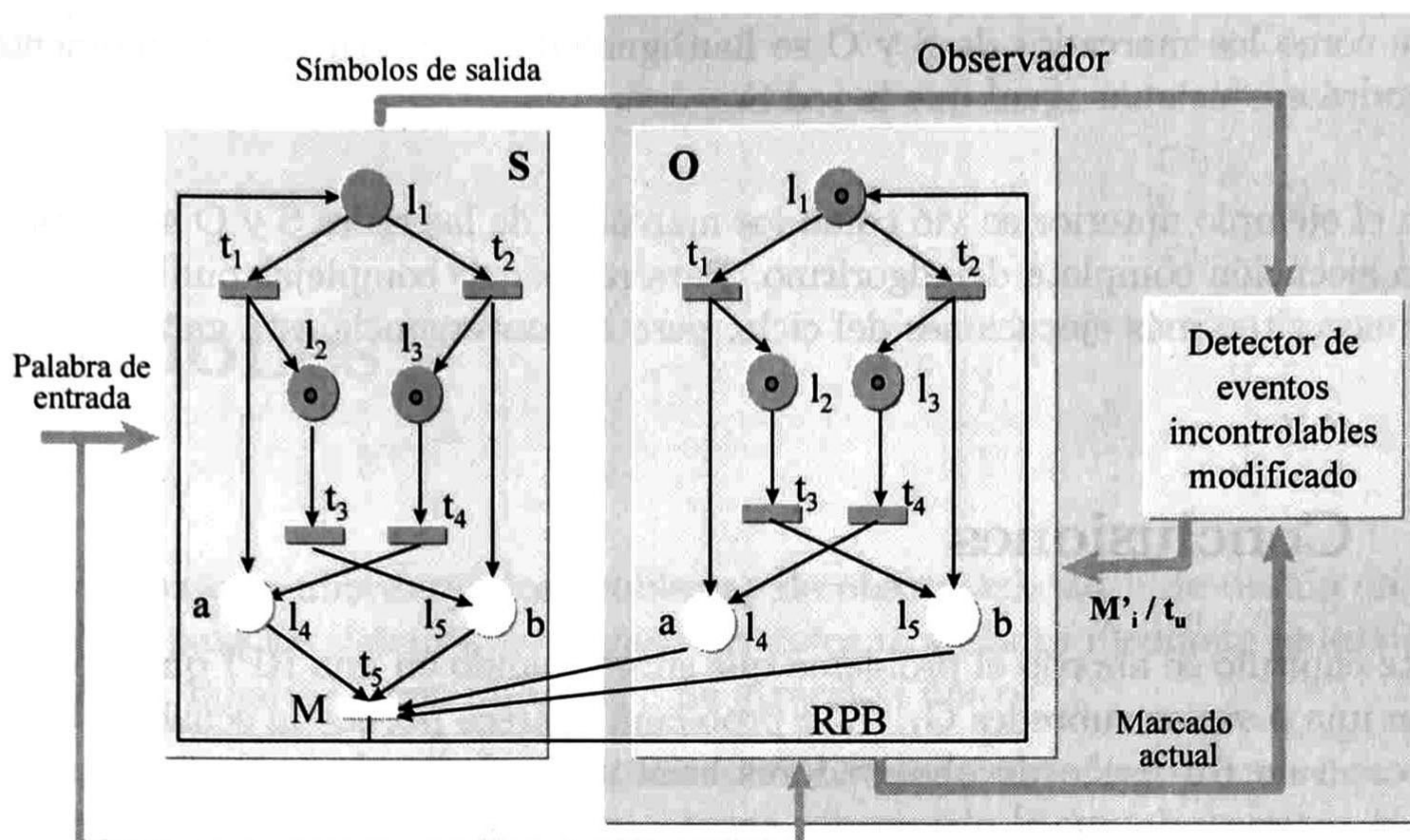


Figura 7.9: La red S y su observador asintótico desligado modificado.

**Ejemplo 7.3** *Considérese la red de Petri interpretada S de la figura 7.1. Dado que la red S es observable, viva y binaria, además de ser una LE y cumplir con las demás hipótesis del algoritmo 7.2, entonces este puede ser utilizado para construir y operar un observador para ella. En la figura 7.9 se muestra la red con su observador construido de acuerdo al algoritmo 6.1. Como puede verse la estructura es la misma que en caso de la figura 7.3, sólo que ahora el detector de eventos incontrolables opera de acuerdo al algoritmo 7.2, lo que le da la posibilidad de disparar alguna transición ó de modificar el marcado de la red O. Por comodidad, se hará uso de la notación de los grafos de espacios de estados para hacer referencia a los marcados de las redes S y O.*

Supóngase que los marcados iniciales de las redes S y O son  $M_o = [2, 3]$  y  $\hat{M}_o = [1, 2, 3]$ , respectivamente. Como no hay ningún lugar medible marcado en la red O, no se ejecuta el paso 2.

Sea  $w = MM$  una palabra de entrada introducida a ambas redes. Como la transición  $t_5$ , correspondiente al símbolo  $M$ , no está habilitada en ninguna de ellas, habrá que esperar hasta que lo este (lo cual debe de suceder porque ambas son redes vivas).

Supóngase que se dispara en la red S la transición incontrolable  $t_4$ , entonces esta alcanza el marcado  $M_1 = [2, 4]$  y aparece a su salida el símbolo 'a'. Supóngase que, al ejecutar el algoritmo 6.2 se dispara en la red O la transición  $t_1$ , la cual es una transición incorrecta (diferente a la que se disparó en la red del sistema), alcanzandose el marcado  $\hat{M}_1 = [2^2, 3, 4]$ , el cual cambia automáticamente a  $\hat{M}_1 = [2, 3, 4]$  dado que la red O es una red booleana.

Como el lugar medible  $l_4$  ahora está marcado, inicia la ejecución del paso 2, calculando un p-semiflujo mínimo que contenga a  $l_4$ . Este es  $Y_4 = [1, 0, 1, 1, 0]^T$ , donde su soporte es  $\|Y_4\| = \{l_1, l_3, l_4\}$ . En base a esto se calcula el nuevo marcado  $\hat{M}'_1$  de la red O, eliminando las marcas que pudieran existir en alguno de estos lugares. Así se tiene que,  $\hat{M}'_1 = [2, 4]$ .

Nótese como los marcados de S y O se han igualado. A partir de este momento, la red O sólo podrá evolucionar igual que la red S.

En el ejemplo anterior se vió como los marcados de las redes S y O se igualaron después de una ejecución completa del algoritmo. Para redes más complejas pudiera darse el caso de que se necesiten más ejecuciones del ciclo, pero la convergencia está garantizada.

## **7.5 Conclusiones**

En este capítulo se abordó el problema que surge cuando en una RPI que modela a un SED existen una o varias subredes  $G_I$ . Este problema aparece porque la ecuación 6.1, presentada en el capítulo 6 (diseño de observadores asintóticos desligados), puede tener más de una solución provocando que el observador entre a un ciclo de decisiones de disparo incorrectas, con lo cual no igualaría su marcado al estado del sistema.

Para solucionar este problema se añadieron mecanismos auxiliares al detector de eventos incontrolables del observador, con los cuales el marcado de la red converge al estado del sistema más rápidamente. Estos mecanismos son diferentes para el caso de las máquinas de estado y de las redes de libre elección.

En ambos casos se presentan algoritmos para la construcción y diseño de observadores asintóticos desligados modificados.

El algoritmo para las redes de libre elección presentado en este capítulo, abarca los casos que cubren los algoritmos presentados en los capítulos anteriores, pero dada su complejidad es recomendable utilizar cada algoritmo en el caso para el que fue diseñado.

# Conclusiones

En el presente trabajo se abordaron los problemas de observabilidad y de diseño de observadores asintóticos para los sistemas de eventos discretos modelados mediante redes de Petri interpretadas vivas, binarias y con un espacio de atracción único.

Se presentó un criterio para determinar cuando un sistema de eventos discretos modelado con redes de Petri interpretadas vivas y binarias es observable en base a la estructura y a la interpretación de la red. En base a este criterio se diseñó un algoritmo para determinar cuando una RPI es observable.

Se propusieron dos esquemas para el diseño de observadores asintóticos:

1. Arquitectura de un observador asintótico monolítico y
2. arquitectura de un observador asintótico desligado.

El primero es utilizado cuando el SED estudiado presenta únicamente eventos controlables, y el segundo para el caso de que el SED presente por lo menos un evento incontrolable. Para ambas arquitecturas se presentan los algoritmos de construcción y operación de los observadores.

Se comprobó que estos algoritmos efectivamente hacen converger el marcado de la red del observador con el marcado de la red del sistema y se establecieron las condiciones bajo las cuales pueden ser utilizados con éxito.

Se vio que hay casos en que el algoritmo para la operación de observadores asintóticos desligados puede quedar atrapado en ciclos infinitos sin poder converger al estado del sistema. Con el fin de solucionar este problema, se propuso un algoritmo alternativo para los sistemas de eventos discretos modelados con algunos tipos de RPI en los cuales este problema se presenta, en particular para las redes cuyo grafo es una máquina de estados o una red de libre elección.

Adicionalmente, también se incluye el análisis de la complejidad computacional en tiempo de todos los algoritmos presentados a lo largo de este trabajo. Estos algoritmos fueron implementados en MAPLE V ver. 5.0 como simulaciones.

Como trabajo futuro quedan los siguientes puntos:

- Implementar cada uno de los algoritmos presentados en ambientes visuales de simulación y en tiempo real.

- Establecer un método para determinar el número mínimo de sensores (lugares medibles) necesarios para que un sistema de eventos sea observable.
- Elaborar un algoritmo más general para el diseño de observadores asintóticos, que abarque el mayor número posible de casos.
- Extender los resultados presentados al dominio de las redes no binarias
- Estudiar el caso de las redes con más de un espacio de atracción.
- Incorporar el concepto de tiempo a los resultados obtenidos.

# Bibliografía

- [1] Manuel Silva. *Las Redes de Petri en la Automática y la Informática*. Editorial AC. Madrid 1985.
- [2] Cüneyt M. Özveren y Alan S. Willsky. *Observability of Discrete Event Dynamic Systems*. IEEE Transactions of Automatic Control, Vol. 35, No. 7, Julio 1990, pp. 797-806.
- [3] Yong Li y W.M. Wonham. *Controllability and Observability in the state-feedback Control of Discrete Event Systems*. Proceeding of the 27th Conference on Decision and Control. Austin, Texas, December 1998, pp. 203-208.
- [4] M.E. Meda y A. Ramírez. *Identification in Discrete Event Systems*. The IEEE-International Conference on Systems, Man and Cybernetics, Octubre, 1998.
- [5] Feng Lin and W.M. Wonham. *Decentralized Control and Coordination of Discrete-Event Systems with Partial Observation*. IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 35, No. 12, December 1990, pp. 1330-1337.
- [6] W.M. Wonham. *Notes on Control of Discrete-Event Systems*. Universidad de Toronto. 1996.
- [7] Jörg Desel and Javier Esparza. *Free choice Petri Nets*. 1995. Cambridge University Press.
- [8] R. Brena Pinero. *Lenguajes Formales y Autómatas*. Cap. 5. ITESM. Enero 1998.
- [9] J.E. Hopcroft y J.D. Ullman. *Introducción a la teoría de autómatas, lenguajes y computación*. CECSA. 1993.
- [10] Alessandro Giua. *Petri Nets as Discrete Event Models for Supervisory Control*. Tesis Doctoral, Rensselaer Polytechnic Institute. Troy, New York, 1992
- [11] Matthias Jantzen. *Language Theory of Petri Nets*. Universidad de Hamburgo. Reporte interno.
- [12] L.E. Holoway y B.H. Krogh. *Synthesis of feedback Control Logic for a class of controlled Petri Nets*. IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 35, No. 5, May 1990, pp. 514-523.
- [13] Antonio Ramírez Treviño. *Scheduling en redes de Petri*. Tesis doctoral. Universidad de Zaragoza. 1993.

- [14] Luis Ernesto López Mellado, "Introducción a las redes de Petri Conceptos Básicos y modelado cualitativo de sistemas", Notas de la Facultad de Ciencias Físico- Matemáticas UANL. Octubre 1997.
- [15] Ratnesh Kumar y Mark Shayman. *Formulae relating Controllability, Observability, and Co-observability*. 1997.
- [16] R.D. Brandt, V. Garg y otros. *Formulas for calculating supremal controllable and normal sublanguages*. Wayne State University, Detroit, Mi.
- [17] P.J. Ramadge. Observability of discrete event systems. en proc CDC. Diciembre 1986.
- [18] G. Brassand y P. Bratley. *Fundamentos de algoritmia*. Ed. Prentice Hall. España. 1997.



# Apéndice A. Análisis de complejidad

## .1 Introducción

En este apéndice se presenta el análisis de la complejidad computacional en tiempo de los algoritmos presentados a lo largo de este trabajo. El análisis se realiza para el caso peor, según la metodología presentada por G. Brassand en [18]. De acuerdo con esta metodología el análisis se realiza bajo las siguientes hipótesis:

1. Se consideran como operaciones elementales a las siguientes: asignación, comparación, operaciones lógicas (conjunción, disyunción, implicación, equivalencia), operaciones aritméticas (suma, resta, multiplicación, división).
2. Se consideran como operaciones de control de flujo de programa a las siguientes: saltos, retorno de función (subprograma), control de ciclos
3. Todas las operaciones elementales se ejecutan con un costo de tiempo unitario
4. El tiempo de ejecución de las operaciones de control se puede despreciar.
5. El análisis se hace sobre el caso peor, utilizando la notación  $O$ [18].

## .2 Algoritmos de observabilidad

### .2.1 Análisis de Complejidad de es\_TObservable

- Los pasos 1,2,4 y 5 son operaciones elementales, por lo cual se realizan en un tiempo constante.
- El paso a.i. corresponde a un ciclo que recorre los lugares de la red hasta encontrar un lugar medible que sea de entrada o salida a la transición en análisis. Si este se encuentra el ciclo se aborta. En el caso peor, se tienen que revisar todos los lugares de la red, por tanto la complejidad de este paso es  $O(n)$ , donde  $n$  es el número de lugares de la red.

- El paso 3. corresponde a un ciclo en el cual se analiza cada una de las transiciones de la red, ya que ellas son la base de las subredes  $G_T$ , por lo cual se realiza  $m$  veces que es número de transiciones de la red bajo estudio. Pero, como el ciclo del paso a.i). está contenido en este ciclo, la complejidad de este paso es la multiplicación de la complejidad del paso a.i) por las veces que se realiza el ciclo del paso 3, es decir  $O(nm)$ .
- Dado que el paso 3 es el de mayor complejidad, la complejidad del algoritmo es  $O(nm)$ .

## .2.2 Análisis de Complejidad de es\_LObservable

- Los pasos 1,2,4 y 5 son operaciones elementales, por lo cual se realizan en un tiempo constante.
- En el paso b.i.1 se busca los lugares medibles de salida a la transición bajo análisis. La búsqueda se realiza lugar a lugar hasta que se encuentra uno con las características mencionadas. Por lo cual, en el peor de los casos, se tienen que revisar todos los lugares de la red. La complejidad de este paso es  $O(n)$ .
- En el paso b). se buscan todas las transiciones de salida incontrollables del lugar  $l_i$  bajo consideración. Este análisis se realiza transición a transición. De aquí que el ciclo se realiza  $m$  veces ( $m=|T|$ ). Como este ciclo incluye al ciclo del paso b.i.1, la complejidad del paso b). es  $O(nm)$ .
- En el ciclo del paso 3. se analizan cada uno de los lugares para encontrar las subredes  $G_L$ . Como se analiza cada lugar de la red, las operaciones del ciclo se realizan  $n$  veces, y como este ciclo contiene al ciclo del paso b), la complejidad total es  $O(n^2m)$ .
- Dado que el paso 3. es de complejidad mayor, el algoritmo presenta su complejidad:  $O(n^2m)$ .

## .2.3 Análisis de Complejidad de es\_Observable

- Los pasos 1 y 3 son operaciones elementales, por lo cual se realizan en un tiempo constante.
- El paso 2 es una comparación en la cual se un hace llamado al algoritmo es\_TObservable, por lo cual su complejidad es  $O(nm)$ .
- Dependiendo del valor retornado por es\_TObservable se realiza la comparación del paso a). Si esto sucede, en este paso a. se realiza el llamado al algoritmo es\_LObservable. De aquí que la complejidad de este paso es  $O(n^2m)$ .
- En el peor de los casos el paso a). llega a ejecutarse. Como este es el paso de mayor complejidad el algoritmo tiene esta complejidad,  $O(n^2m)$ .

### **.3 Algoritmos de observadores asintóticos monolíticos**

#### **.3.1 Análisis de Complejidad de construye\_monolitico**

- El paso 1 consiste en duplicar el modelo del sistema, lo que significa duplicar la matriz de incidencia de la red. Un algoritmo consiste en copiar uno a uno los elementos de una matriz a otra. En este caso, la complejidad de este paso es  $O(nm)$ , donde  $n=|L|$  y  $m=|T|$ .
- En el paso 2 se fusionan los eventos de entrada con las transiciones del observador implica recorrer todas las transiciones de la red, entonces la complejidad de este paso es  $O(m)$ .
- En el paso 3, se asigna a cada lugar del observador una marca, por tanto la complejidad es  $O(n)$ .
- Dado que el paso con mayor complejidad es el paso 1, la complejidad del algoritmo es también  $O(nm)$ .

#### **.3.2 Análisis de Complejidad de observador\_monolitico**

- Los pasos 1, 2, a) y c) son consideradas operaciones elementales, por lo cual se ejecutan con un costo unitario de tiempo.
- Evolucionar el marcado de la red implica primero resolver la ecuación de la red de Petri y después una comparación. La comparación es una operación elemental, su costo es unitario. Resolver la ecuación de una red de Petri tiene un orden de  $O(nm)$  ya que la operación que requiere más tiempo es la de multiplicar la matriz  $C$  por el vector de disparo. Este paso tiene por lo tanto, complejidad  $O(nm)$ .
- Las veces que se realiza el ciclo del paso 3. depende de la longitud de la palabra de entrada. Si  $q$  es la longitud de la palabra de entrada, entonces la complejidad del paso 3 es  $O(nmq)$ , ya que el paso b) es el de mayor complejidad del ciclo.
- La complejidad del algoritmo correspondiente a la aceptación de un símbolo de entrada es  $O(nm)$ .

### **.4 Algoritmos de los observadores asintóticos desligados**

#### **.4.1 Análisis de Complejidad de construccion\_desligado**

- El paso 1 consiste en duplicar el modelo del sistema, lo que significa duplicar la matriz de incidencia de la red. Un algoritmo consiste en copiar uno a uno los elementos de

una matriz a otra. En este caso, la complejidad de este paso es  $O(nm)$ , donde  $n=|L|$  y  $m=|T|$ .

- En el paso 2 se fusionan los eventos de entrada con las transiciones del observador implica en el peor de los casos recorrer todas las transiciones de la red, entonces la complejidad de este paso es  $O(m)$ .
- En el paso 3, en cada uno de los puntos a) y b) se tienen que recorrer todos los lugares de la red del observador, por tanto la complejidad es  $O(n)$ .
- La complejidad del algoritmo es la correspondiente al paso de mayor complejidad, en este caso  $O(nm)$ .

#### .4.2 Análisis de Complejidad de observador \_desligado

- En el paso 1, leer los símbolos de salida implica leer un vector de  $n=|L|$  símbolos, por lo cual la complejidad es  $O(n)$ .
- El paso 2. es una comparación, la cual se realiza en un tiempo unitario.
- En el paso a), calcular el marcado actual implica construir un vector con un número de entradas igual al número de lugares de la red, de aquí que la complejidad sea  $O(n)$ .
- También en el paso b), se necesita construir un vector de  $n$  entradas, entonces  $O(n)$ .
- En el paso c) se calcula la secuencia de disparos mínima por medio de la ecuación 6.1. Teóricamente la complejidad del algoritmo de minimización del método simplex es  $O(m^4)$ , donde  $m$  es el número de transiciones de la red [13]. Por lo cual, la complejidad de este paso es  $O(m^4)$ .
- En el paso d), disparar la secuencia encontrada en el paso anterior, implica calcular el nuevo marcado de la red del observador, lo que significa primero resolver la ecuación de la red de Petri y después una comparación. La comparación es una operación elemental, su costo es unitario. Resolver la ecuación de una red de Petri tiene un orden de  $O(nm)$  ya que la operación que requiere más tiempo es la de multiplicar la matriz  $C$  por el vector de disparo. Este paso tiene por lo tanto, complejidad  $O(nm)$ .
- El paso 2 se realiza cada vez que se detecta un cambio en los símbolos de salida del sistema una vez que se ha introducido un símbolo de entrada. estos cambios se producen por el disparo de transiciones incontrolables, en el peor de los casos todas las transiciones del sistema son incontrolables, por lo cual este paso se realizaría  $m=|T|$  veces. De los pasos contenidos dentro del paso 2 (a,b,c,d), la complejidad máxima es  $O(m^4)$ , por lo cual la complejidad del paso 2 es  $O(m^5)$ .
- La complejidad del algoritmo es la correspondiente al paso de mayor complejidad, en este caso  $O(m^5)$ .

## .5 Algoritmos de observadores asintóticos especiales

### .5.1 Análisis de Complejidad de observador `_me`

- El paso 1, donde se construye el observador tiene la complejidad del algoritmo construcción `_desligado`,  $O(nm)$ .
- El paso 2, es una operación de asignación, por lo cual el costo es unitario.
- En el paso 3. hay que recorrer cada uno de los lugares de la red hasta encontrar alguno medible que esté marcado, en el peor de los casos hay que revisar todos los lugares, por lo cual la complejidad es  $O(n)$ .
- El paso a), sólo se realiza una vez. En el caso de que así sea, implica recorrer cada uno de los lugares de la red para cambiar su marcado, entonces la complejidad es  $O(n)$ .
- En el paso 4, se ejecuta el algoritmo `observador _desligado` sólo una vez, la complejidad es, por tanto,  $O(m^5)$ .
- El paso 5 es una operación elemental, cuyo costo es unitario.
- Como el paso 4 es el de mayor complejidad, la complejidad del algoritmo también es  $O(m^5)$ .

### .5.2 Análisis de Complejidad de observador `_me`

- El paso 1, donde se construye el observador tiene la complejidad del algoritmo construcción `_desligado`,  $O(nm)$ .
- En el paso 2. hay que recorrer cada uno de los lugares de la red hasta encontrar alguno medible que esté marcado, en el peor de los casos hay que revisar todos los lugares, por lo cual la complejidad es  $O(n)$ .
- En el paso i) hay que realizar una minimización con el método simplex cuya complejidad es  $O(n^4)$ , ya que en este caso se busca un vector  $Y$  de dimensión  $n=|L|$ .
- En el paso ii) Encontrar el soporte de  $Y$  implica recorrer cada una de las posiciones del vector, entonces la complejidad es  $O(n)$ .
- En el paso iii) se construye un marcado que implica una complejidad de  $O(n)$ .
- En el peor de los casos, el paso a) se ejecuta, revisándose cada uno de los lugares de la red, por lo cual los pasos i), ii) y iii) se repiten en el peor de los casos  $n$  veces. De estos pasos, el de mayor complejidad es el paso i). por lo cual la complejidad del paso a) es  $O(n^5)$ .
- En el paso 3, se ejecuta el algoritmo `observador _desligado` una vez, por tanto la complejidad es  $O(m^5)$ .
- La complejidad del algoritmo es la mayor entre  $n^5$  y  $m^5$ , es decir  $O((\max(n,m))^5)$ .



# Apéndice B. Notación

## .1 Abreviaturas

|     |  |
|-----|--|
| SED | Sistema de Eventos Discretos                         |
| RP  | Red de Petri   |
| RPI | Red de Petri Interpretada                            |
| RPB | Red de Petri Booleana                                |
| MEF | Máquina de Estados Finitos                           |
| ME  | Máquina de Estados                                   |
| GM  | Grafo Marcado  |
| LE  | Red de Libre Elección                                |
| RS  | Red Simple   |
| ME+ | Máquina de Estados que no contiene subredes $G_I$    |
| LE+ | Red de Libre Elección que no contiene subredes $G_I$ |

## .2 Símbolos

### .2.1 Matemáticas

|                              |  |
|------------------------------|--|
| $\mathbb{N}$                 | Conjunto de los números naturales  |
| $\mathbb{N}^m$               | Conjunto de vectores de números naturales, $\mathbb{N}^m = \{[\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m] \mid \alpha_i \in \mathbb{N}\}$ |
| $ X $                        | Cardinalidad del conjunto $X$  |
| $B = [b_{i,j}]_{p \times q}$ | Matriz de dimensiones $p \times q$   |
| $b_{i,j}$                    | Elemento $i,j$ de una matriz   |
| $B^T$                        | Matriz transpuesta de la matriz $B$  |

## .2.2 Alfabetos, cadenas y lenguajes

|                         |  |
|-------------------------|--|
| $\Sigma$                | Alfabeto, conjunto de símbolos   |
| $\Sigma^*$              | Conjunto de todas las cadenas posibles del alfabeto $\Sigma$                                   |
| $w$                     | Cadena de símbolos de un alfabeto $\Sigma$ , $w \in \Sigma^*$                                  |
| $\varepsilon$           | Cadena vacía   |
| $\mathcal{L}$           | Lenguaje, subconjunto de las posibles cadenas de un alfabeto. $\mathcal{L} \subseteq \Sigma^*$ |
| $w \cdot z$             | Concatenación de las cadenas $w$ y $z$   |
| $P(w) _{\Sigma}$        | Proyección de una cadena $w \in \Sigma_i^*$ sobre el alfabeto $\Sigma$                         |
| $P^{-1}(w) _{\Sigma_i}$ | Proyección inversa de una cadena $w \in \Sigma^*$ sobre $\Sigma_i$                             |

## .2.3 Redes de Petri

|                        |   |
|------------------------|---|
| $L$                    | Conjunto de lugares de una RP, $L = \{l_1, l_2, \dots, l_m\}$       |
| $T$                    | Conjunto de transiciones de una RP, $T = \{t_1, t_2, \dots, t_n\}$  |
| $G$                    | Grafo (estructura) de una RP  |
| $E$                    | Función de entrada de una RP, $E : L \times T \rightarrow \{0, 1\}$ |
| $S$                    | Función de salida de una RP, $S : L \times T \rightarrow \{0, 1\}$  |
| ${}^\circ(x)$          | Conjunto de predecesores del nodo $x \in L \cup T$                  |
| $(x)^\circ$            | Conjunto de sucesores del nodo $x \in L \cup T$                     |
| $C^-$                  | Matriz de entrada de una RP   |
| $C^+$                  | Matriz de salida de una RP  |
| $C$                    | Matriz de incidencia de una RP. $C = C^+ - C^-$                     |
| $\mathcal{R}(RP, M_o)$ | Conjunto de alcanzabilidad de una RP                                |
| $\mathcal{K}(RP, M_o)$ | Espacio de atracción de una RP.                                     |

## .2.4 Redes de Petri interpretadas

|                 |   |
|-----------------|---|
| $\Sigma_{ent}$  | Alfabeto de entrada del sistema   |
| $\Sigma_{sal}$  | Alfabeto de salida del sistema  |
| $a_i$           | Evento asociado a la señal de un actuador, $a_i \in \Sigma_{ent}$   |
| $s_i$           | Evento asociado a la señal de un sensor, $s_i \in \Sigma_{sal}$   |
| $\varepsilon$   | cadena vacía, la cual representa un evento interno del sistema.   |
| $w$             | Palabra de entrada aceptada por el sistema, $w \in \mathcal{L}_e \subseteq \Sigma_{ent}^*$                        |
| $z$             | Palabra de salida de $S_f$ , $z \in \mathcal{L}_s \subseteq \Sigma_{sal}^*$                                       |
| $\mathcal{L}_e$ | Lenguaje de entrada del sistema, $\mathcal{L}_e \subseteq \Sigma_{ent}^*$   |
| $\mathcal{L}_s$ | Lenguaje de salida del sistema, $\mathcal{L}_s \subseteq \Sigma_{sal}^*$  |
| $\lambda$       | Función de etiquetado de las transiciones de una RPI: $\lambda : T \rightarrow \Sigma_{ent} \cup \{\varepsilon\}$ |
| $\varphi$       | Función de etiquetado de los lugares de una RPI: $\varphi : L \rightarrow \Sigma_{sal} \cup \{\varepsilon\}$      |
| $b_i$           | Símbolo de salida asignado al lugar $l_i$ : $\Sigma_{sal}$  |
| $G_s$           | Grafo de la RPI que modela a un SED   |
| $G_o$           | Grafo de la red del observador.   |



**.2.5 Marcados**

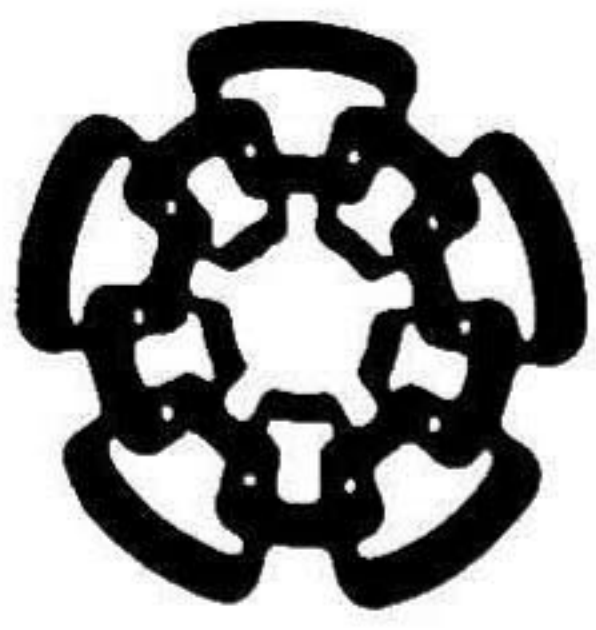
|             |  |
|-------------|--|
| $M$         | Función de marcado (marcado) de una red, $M : L \rightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$ |
| $M_o$       | Marcado inicial de una red   |
| $M_k(l_i)$  | Número de marcas del lugar $l_i \in L$ en el mercado $M_k$                         |
| $\hat{M}_k$ | Función de marcado de la red del observador  |
| $\hat{M}_o$ | Marcado inicial de la red del observador   |

**.2.6 Secuencias**

|                                      |  |
|--------------------------------------|--|
| $\sigma_i$                           | Secuencia de disparo, $\sigma_i = t_1 t_2 \dots t_n$                                   |
| $\vec{v}$                            | Vector de disparo de una secuencia de disparos $\sigma$                                |
| $\sigma_i^u$                         | Secuencia de disparo de transiciones incontrolables únicamente                         |
| $M_k \xrightarrow{t_k} M_{k+1}$      | El disparo de la transición $t_k \in T$ en el mercado $M_k$ lleva al mercado $M_{k+1}$ |
| $M_k \xrightarrow{\sigma_i} M_{k+1}$ | El disparo de la secuencia $\sigma_i$ en el mercado $M_k$ lleva al mercado $M_{k+1}$   |

**.2.7 Conjuntos especiales**

|                    |   |
|--------------------|---|
| $\Omega_w$         | Conjunto de los marcados alcanzables con la palabra de entrada $w$                          |
| $C_{M_i}$          | Conjunto de marcados alcanzables desde $M_i$ mediante transiciones incontrolables           |
| $T_i^u$            | Conjunto de las transiciones incontrolables de salida del lugar $l_i$                       |
| $\tau_i^u$         | Conjunto de las transiciones incontrolables de entrada al lugar $l_i$                       |
| $\Upsilon_k$       | Conjunto de las transiciones de la red del sistema habilitadas en el mercado $M_k$          |
| $\hat{\Upsilon}_k$ | Conjunto de las transiciones de la red del observador habilitadas en el mercado $\hat{M}_k$ |



**CENTRO DE INVESTIGACION Y DE ESTUDIOS AVANZADOS DEL IPN  
UNIDAD GUADALAJARA**

El Jurado designado por la Unidad Guadalajara del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, aprobó la tesis: "**Observadores asintóticos para sistemas de eventos discretos modelados con redes de Petri**" del Sr. **Luis Isidro Aguirre Salas**, el día 5 de Marzo de 1999.

**EL JURADO**

---

Dr. Manuel Edgardo Guzmán Rentería  
Investigador Cinvestav 3A  
CINVESTAV DEL IPN  
Guadalajara.

---

Dr. Luis Ernesto López Mellado  
Investigador Cinvestav 3A  
CINVESTAV DEL IPN  
Guadalajara

---

Dra. Ofelia Begovich Mendoza  
Investigador Cinvestav 3A  
CINVESTAV DEL IPN  
Guadalajara.

---

Dr. Ricardo Raúl Jacinto Montes  
Investigador Cinvestav 2B  
CINVESTAV DEL IPN  
Guadalajara



CINVESTAV  
BIBLIOTECA CENTRAL



SSIT000003832