CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS DEL

INSTITUTO POLITECNICO NACIONAL

Unidad Distrito Federal

Departamento de Matemática Educativa



# Estrategia de formación para profesores de secundaria en la enseñanza del álgebra escolar

Tesis que presenta

**María Isabel García Torreblanca**

para obtener el Grado de

**Maestra en Educación en Matemáticas**



Directores de la Tesis: Dra. Sonia Ursini Legovich

Dr. José Antonio Juárez López

México, Distrito Federal Febrero 2011

Agradecimiento
a los
Servicios Educativos Integrados al Estado de México
por el apoyo brindado durante mis estudios en el programa
Maestría en Educación Especialidad Matemáticas
en el
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN

Agradecimientos:

A la Dra. Ursini por el apoyo brindado

A la Dra. Mirela y al Dr. Zubieta por sus comentarios

A mis profesores de la maestría

A Delia por su valiosa ayuda

A José Antonio por su apoyo

A los profesores que participaron en el taller

A Yedy y Ben por su aportación

Y a todos los que de alguna u otra forma contribuyeron para que se concretara este trabajo.

Dedicatoria:

Al Profesor Arturo García Jiménez mi padre, por todas sus enseñanzas.

A Maribel, mi hija.

Resumen

Después de hacer el análisis de los resultados del diagnóstico que se aplicó a profesores y a estudiantes de secundaria para identificar el manejo que tienen de los tres usos de las variables en el álgebra escolar, como número general, como incógnita y en una relación funcional y tomando en cuenta que tanto profesores como alumnos presentaron un deficiente manejo de estos, fue lo que motivó el dar a conocer a los maestros una alternativa para su enseñanza.

En este trabajo se presenta la alternativa para la enseñanza del álgebra escolar, para lo cual se diseñó, se elaboró y se implementó un taller para profesores de matemáticas de secundaria. Aquí se presenta el cuadernillo guía del taller, en el que se describen los propósitos y las actividades de cada una de las sesiones que lo conforman. En el taller participaron 57 profesores de matemáticas de secundaria, y los resultados al término del taller muestran el interés de los profesores por encontrar alternativas viables para desarrollar mejor su trabajo docente.

**Abstract**

After analysing the results from a diagnostic test taken by secondary school students and teachers, which was designed to identify the use the three main uses of variable in elementary algebra: specific unknown, general number, as missing data, and related variables, and taking into account that teachers as well as students presented a deficient use of these, was the primary motivator to develop an alternative to what is currently being taught.

In this project an alternative to the current teaching method used in elementary algebra is presented, for which a workshop was designed, developed and implemented for secondary school Teachers. You will find in the present work a booklet, which served a project guide, in which its purposes are explained, and the activities that conform it are described. Fifty-seven secondary school Mathematics professors participated in the workshop, and the findings show that professors are interested in finding new, better and viable alternatives to the teaching method that is currently used in elementary algebra.

INDICE

# INTRODUCCIÓN

Los profesores, como parte fundamental del proceso educativo y consciente de que no basta con poner en juego los conocimientos logrados en nuestra formación inicial para realizar nuestra tarea y aplicar la experiencia adquirida durante el desempeño profesional, reconocemos la necesidad de mantenernos en permanente actualización.

En particular sobre las aportaciones de la investigación acerca de alternativas que mejoren nuestro trabajo didáctico, en este caso, la enseñanza del álgebra, tema que está presente en los tres grados del programa de estudio en la escuela secundaria. (Programa de Matemáticas 2006. SEP).

El trabajo realizado en esta tesis se concentra en el diseño de un taller para profesores de matemáticas, en el cual se presenta una alternativa didáctica para la enseñanza del álgebra escolar, y que al utilizarla, favorece una mejor comprensión en los estudiantes. Dicho trabajo fue el producto de una revisión bibliográfica sobre la enseñanza y el aprendizaje del álgebra, en especial con respecto a la variable, un análisis de algunas actividades resueltas por estudiantes, y de unas actividades resueltas por profesores de matemáticas, así como del análisis de libros de texto.

El capítulo 1 contiene una revisión bibliográfica donde se presentan los errores más frecuentes que cometen los estudiantes de secundaria e incluso los que inician en el nivel universitario cuando trabajan con variables, así como las interpretaciones que algunos autores le dan a éstas. También se presentan los principales usos de la variable en el álgebra escolar que de acuerdo con Ursini (1994) son: como número general, como incógnita y en relación funcional. Se describe en qué consiste el modelo "Tres Usos de la Variable (3UV)", el sustento teórico y su propuesta didáctica.

En el capítulo 2 se presenta la metodología con la que se realizó el trabajo, la justificación del taller para profesores que se propone, la estructura del mismo, la distribución de las actividades y las sesiones de trabajo. Se describen las características de los participantes en el taller y el cuestionario que se utilizó como instrumento para evaluar a los profesores que participaron en él.

El capítulo 3 contiene el resultado del diagnóstico aplicado a estudiantes y a profesores, y se presenta el análisis de los resultados obtenidos.

En el capítulo 4 se presentan los resultados cuantitativos y cualitativos que se obtuvieron en las seis sesiones del taller para profesores de matemáticas, los aciertos y las dificultades que se presentaron para su implementación, así mismo se realiza un análisis de los resultados obtenidos en el taller, y se proponen algunas sugerencias.

Tomando en cuenta los resultados obtenidos, en los capítulos 3 y 4 se presentan las conclusiones y reflexiones del trabajo.

Se incluye la bibliografía que fue el soporte de éste trabajo y que pretende dar al lector las referencias que se utilizaron en esta tesis.

En el anexo 1, se presenta el cuadernillo guía titulado "Taller para profesores de matemáticas: La enseñanza del álgebra escolar a través del Modelo 3UV" que se elaboró en el transcurso de la maestría y se implementó con 57 profesores de matemáticas de secundaria.

En el anexo 2, se presenta una tabla que contiene las preguntas que los profesores contestaron correctamente y las que contestaron incorrectamente, las preguntas que no contestaron, y los porcentajes de las respuestas correctas y de las respuestas incorrectas, también contiene el porcentaje de omisiones.

El anexo 3 contiene las respuestas correctas a las preguntas del cuestionario aplicado a los profesores así como el porcentaje de aciertos, errores y omisiones de cada pregunta.

# CAPÍTULO 1. ANTECEDENTES

## 1.1 Interpretación de las literales y dificultades de los estudiantes.

Es innegable la dificultad que los estudiantes de secundaria tienen en el estudio del álgebra, y que ésta continúa en la preparatoria y hasta los primeros años de la universidad. Esta afirmación se sustenta en diversos estudios que se han hecho en los últimos treinta años, Küchemann (1980); Matz (1980); Booth (1988); López, (1996); Lozano (1998); Ursini y Trigueros (1998).

Küchemann (1980) y Booth (1988) señalan explícitamente que las literales pueden y deben ser interpretadas de diferentes maneras. La investigación de Küchemann realizada en escuelas secundarias, consistió en aplicar un cuestionario con problemas típicos del álgebra que se estudian en este nivel, con preguntas que le permitieron observar las diferentes interpretaciones que los estudiantes hacían de las literales a partir de expresiones algebraicas en donde tenían que manipular y resolver problemas con símbolos literales. A partir de este estudio, Küchemann identificó seis interpretaciones distintas que los estudiantes hacen de las literales:

1) Letra evaluada: El alumno asigna un valor a la literal. En ocasiones determina el valor de la literal según el lugar que ocupa ésta en el alfabeto. Por ejemplo en la expresión $a+b$, los estudiantes tienden a interpretar como 1 + 2.

2) Letra no usada o ignorada: El alumno no toma en cuenta a la literal, opera solo con los números. En caso de usarla, la añade al resultado numérico sin asignarle significado alguno. Como en la expresión $2x + 1$ la interpretan como 2 + 1.

3) Letra como objeto: el alumno considera que la literal representa un objeto o es ella misma un objeto. Para estos estudiantes "*m*" son metros; "*l*" son litros; "*b*" es la base, etc.

4) Letra como incógnita específica: el alumno considera a la literal como una incógnita y puede operar sobre ella.

5) Letra como número general: el alumno considera que la literal representa o puede asumir diversos valores.

6) Letra como variable: el alumno considera que la letra representa un rango de valores no determinados y que existe una relación bien definida entre dos conjuntos de valores.

En estos resultados destaca el hecho de que los alumnos tienen diferentes maneras de interpretar las letras usadas para representar las variables, lo cual indica que quienes se inician en el estudio del álgebra consideran que los símbolos literales pueden interpretarse de diferentes formas, y que su significado puede variar con el problema. Esto muestra que la interpretación dada no es siempre la apropiada, y frecuentemente es la fuente de respuestas erróneas.

Küchemann (1980) consideraba que estas interpretaciones de los símbolos literales reflejan un grado de dificultad creciente: afirmaba que un niño habrá comprendido perfectamente el uso de los símbolos literales en álgebra cuando sea capaz de trabajar con la "letra en una relación funcional". El orden que Küchemann propone sugiere que es más fácil para el niño trabajar con la "letra como incógnita específica" que con la "letra como número generalizado", y que es más fácil trabajar con la "letra como número generalizado" que con la "letra en una relación funcional".

Por su parte, Booth (1984), tenía el propósito de identificar los errores más comunes que cometían los estudiantes al resolver problemas algebraicos y detectar el por qué cometían dichos errores. En esta investigación se encontró que la mayoría de los estudiantes tienen algunas dificultades como las siguientes:

- La transición de la aritmética al álgebra. Como los estudiantes lo primero que aprenden en matemáticas es aritmética, y las respuestas son numéricas, pretenden hacer lo mismo en los problemas algebraicos, es decir, siempre quieren obtener un número como resultado.

- Aceptar expresiones abiertas como respuestas. Para ellos $2n$ no es una respuesta.

- El uso de la notación y la convención en álgebra. En este caso los estudiantes trasladan sus conocimientos de aritmética al álgebra. Por ejemplo, como en aritmética tener 2 ½ es igual a 2 + ½, ellos tienden a considerar que $a+b = ab$, ó que $2a+5b = 7ab$.

- El significado de las letras y variables. Es muy común que los estudiantes interpreten a las variables como etiquetas o abreviaturas, y es que, aunque en la primaria en aritmética se usan letras, por ejemplo, 3 *m* es 3 metros, *A* es área, *t* es tiempo; en álgebra éstas representan valores.

- Los tipos de relaciones y métodos utilizados en aritmética. Muchas de las dificultades de los estudiantes se relacionan con las diferencias entre aritmética y álgebra; sin embargo, el álgebra no está separada de la aritmética, es en muchos aspectos una aritmética generalizada (Booth, 1984). Otra dificultad que tienen los estudiantes es no ver al signo igual como un indicador de equivalencia entre dos partes y lo ven únicamente como el indicador de que hay que escribir un resultado numérico (Montes, 2003).

En estudios realizados en México se han encontrado resultados similares (Guevara, 1999); estos resultados llevan a reconocer que el manejo e interpretación de las letras en el álgebra, utilizadas como símbolos algebraicos y a los que llamaremos variables (Phillipp, 1992), resultan ser un concepto importante en su aprendizaje.

En investigaciones más recientes se ha señalado que a los estudiantes les cuesta mucho trabajo apropiarse de la esencia del concepto de variable y, en consecuencia, desarrollar la capacidad de pasar de manera flexible entre los distintos usos que ésta tiene (Trigueros y Ursini, 1999; Usiskin, 1988).

Algunos factores que hacen que las variables sean un tanto fáciles de usar pero difíciles de entender, tienen que ver con el hecho de que:

1) Las variables son como los números pero tienen algunas características diferentes

2) Las variables son como palabras pero tienen algunas características diferentes, es decir, las variables tienen características de los números, características de las palabras y características propias (Wagner, 1983). Otra razón tiene que ver con lo que significan o representan las variables, ya que este significado puede cambiar de acuerdo con el contexto en el cual aparece. Usiskin (1988) menciona cuatro diferentes usos de la variable que resultan de las diferentes concepciones que se tienen del álgebra:

| CONCEPCIONES DEL ALGEBRA | USO DE LA VARIABLE |
| --- | --- |
| Aritmética Generalizada | Generalizadores de patrones (Traduce, generaliza) |
| Medio para resolver problemas | Incógnitas, constantes (Resuelve, simplifica) |
| Estudio de relaciones | Argumentos, parámetros (Relaciona, grafica) |
| Estructura | Marcas arbitrarias en papel (Manipula, justifica) |

De aquí puede verse que las causas de esta dificultad en la comprensión del concepto de variable, estriban en que una variable tiene caracterizaciones que varían de acuerdo al problema en el cual está inmersa. Por ejemplo, una variable puede representar una incógnita específica, esto es, un número desconocido pero específico que puede ser calculado considerando las restricciones dadas; también puede representar un número generalizado, es decir un número indeterminado comprendido dentro de un método general; o también puede ser utilizado para representar una relación funcional entre dos cantidades cuyos valores cambian.

Más aún, una variable puede utilizarse de diferentes formas en momentos distintos dentro de un mismo problema, es decir, puede tener distintas caracterizaciones, por ejemplo: "Encuentra la ecuación de la línea que pasa por el punto (6, 2) y cuya pendiente es 11", (Usiskin, 1988, p. 14). Para resolver este problema, se parte de la relación general que existe entre los puntos de una recta y su pendiente: $y = mx + b$: queda implícito que se espera que el estudiante sea capaz de concebir las variables como números generales. En efecto, esta expresión describe una línea general y las variables involucradas representan números generales que pueden, por lo tanto, asumir cualquier valor. Sin embargo, para una línea particular, $m$ y $b$ no representan números generales, sino constantes. En el ejemplo arriba mencionado el valor de la pendiente está dado y tiene que substituirse a $m$; $b$ es una incógnita que puede determinarse usando los datos. La $x$ y la $y$ son dos variables vinculadas por una relación funcional: $x$ puede considerarse un argumento al que se le puede asignar cualquier valor mientras que los valores de $y$ cambian en correspondencia. Así pues, el concepto de variable se utiliza en diferentes contextos con diferentes significados y dependiendo del contexto lo tratamos de diferente manera (Usiskin, 1988).

Históricamente se ha observado que en general la enseñanza actual no produce los resultados deseados, pues no forma en el estudiante nociones y operaciones nuevas, es decir el estudiante solo repite de manera mecánica lo que el profesor resuelve en el pizarrón, incluso frecuentemente origina un conjunto de ideas confusas que difícilmente asimila y retiene el estudiante, lo cual provoca una serie de dificultades para la correcta comprensión de las nociones y conceptos matemáticos.

Como ya se ha mencionado, el concepto de variable resulta ser muy importante tanto en la enseñanza como en el aprendizaje de las matemáticas. Así mismo es un concepto de difícil comprensión para los estudiantes. Las razones de su dificultad residen entre otras, porque es difícil de definir (Ursini y Trigueros, 1998). Este concepto es tan importante que su invención constituye un punto de partida en la historia de las matemáticas (Rajaratnan, 1957 en Morales y Díaz, 2003), y es una de las ideas fundamentales de las matemáticas desde la escuela elemental hasta la universidad (Davis, 1964, Hirsch y Lappan, 1989).

La comprensión del concepto de variable proporciona la base para la transición de la aritmética al álgebra y es necesaria para el uso significativo de toda la matemática avanzada (Philipp, 1992).

Las variables se usan generalmente en los textos escolares sin proporcionar una experiencia introductoria que pudiera servir como base, en la cual la idea de variable pueda desarrollarse en sus diferentes significados (Ursini, 1993). El aprendizaje del concepto de variable logrado por los estudiantes a través de su paso por el sistema escolar es poco significativo; aunque son capaces de reconocer el papel que juega la variable en expresiones y problemas muy simples, un ligero aumento en la complejidad de los mismos provoca generalizaciones inadecuadas y la búsqueda de soluciones memorizadas o por inspección, que no son acordes al nivel requerido para el estudio de matemáticas más avanzadas (Morales y Díaz, 2003).

Las estrategias de los estudiantes están dominadas por procedimientos que no han sido interiorizados, lo cual los deja anclados a un nivel de acción que se manifiesta, por ejemplo, en la necesidad de hacer explícitos los pasos que siguen en el proceso mental de solución y usarlos como soporte para continuar, sin ser capaces de analizarlos, y detectar posibles errores (Ursini y Trigueros, 1997).

El no reconocer las diferencias que caracterizan los distintos usos de la variable se torna frecuentemente un obstáculo que bloquea el aprendizaje de las matemáticas. En otras palabras, los estudiantes no sólo deben aprender a trabajar con muchos tipos de símbolos literales en un problema, sino que deben aprender que un símbolo literal puede asumir más de un papel dentro de un problema dado (Morales y Díaz, 2003).

Algunas dificultades que resaltan son las experimentadas por los alumnos cuando se avanza a un sistema de representación más abstracto, en el cual aumenta tanto el poder del lenguaje simbólico, con respecto a la etapa anterior, como el grado de abstracción. Esto se manifiesta cuando los números, elementos básicos, materia prima de las matemáticas escolares, dejan de ser percibidos como objetos, cosas, elementos concretos del pensamiento matemático, y son representados por letras, ya sea como incógnita, números generalizados, parámetros ó variables (Enfedaque, 1990). El momento crítico del paso de los estudiantes al nivel de la simbología algebraica se ubica en nuestro sistema educativo al inicio del álgebra (Morales y Díaz, 2003).

## 1.2 Los usos de las variables en el álgebra escolar

A menudo los estudiantes tendrán que resolver problemas en los que aparece más de un uso de las variables, por lo que según Ursini (1994) los estudiantes deben ser capaces de trabajar con números generales, con constantes, con incógnitas, con variables en una relación funcional y poder pasar de una a otra interpretación, aún cuando estas diferentes caracterizaciones de la variable tengan la misma representación simbólica. Esto llevó a Ursini a plantear que dentro de lo que consideramos el álgebra escolar existen tres principales usos de la variable: como incógnita, como número general y la variable en una relación funcional.

En otro estudio, Benítez (2004) encontró que en los libros de texto de matemáticas utilizados en la secundaria se privilegia el uso de la variable como incógnita específica, y aunque hay ejercicios donde se maneja la variable como número general y en relación funcional, a los estudiantes no se les proporcionan actividades encaminadas a lograr la flexibilidad para pasar de uno a otro de los usos de la variable. Por otro lado, Juárez (2002) reporta que los profesores muestran incapacidad para aceptar que una expresión abierta representa un valor indeterminado y que se puede operar con ella; también aprecia en los profesores la incapacidad de plantear una ecuación para un problema dado y para simbolizar la incógnita adecuadamente, recurriendo también en este caso a procedimientos aritméticos. Y sobre el manejo de la variable en relación funcional los resultados muestran que los profesores son capaces de reconocer la correspondencia entre cantidades en cualquiera de sus formas de representación, sin embargo la variación conjunta resulta poco comprendida cuando se presenta en problemas que involucran determinar intervalos de variación o describir el comportamiento en conjunto de las variables. En resumen, Juárez observó que los profesores mostraron un buen desempeño en el uso de la variable como incógnita específica, pero que tienen dificultades para simbolizarla, para aceptar las expresiones abiertas como válidas y muestran que tienden a evitar métodos algebraicos, en la resolución de problemas.

El programa de matemáticas para la escuela secundaria que se mantuvo vigente desde el año 1993 hasta el 2005, año en que empezó el Proyecto de Desarrollo, tenía como propósito general el desarrollo de las habilidades operatorias, comunicativas y de descubrimiento de los alumnos, para lo cuál tenían que desarrollar sus capacidades para adquirir seguridad y destreza en el empleo de técnicas y procedimientos básicos a través de la solución de problemas. En particular, en los temas de álgebra, los programas estaban concebidos de manera que los alumnos tenían la oportunidad de revisar y utilizar constantemente las nociones y procedimientos básicos del álgebra. También se resaltaba la importancia que tiene para el aprendizaje de las matemáticas que los alumnos aprendan a resolver problemas utilizando el lenguaje y los procedimientos del álgebra; en ningún momento se mencionaban los diferentes usos de la variable, por lo cual, en los libros de texto utilizados no se contemplaba esto; la tendencia de las actividades planteadas en los temas de álgebra era la de visualizar a la variable sobre todo como incógnita, y casi no se presentaban actividades de la variable en sus otros dos usos (número general y relación funcional). Las tareas y problemas no presentan contextos ni se plantean preguntas adecuadas para que los estudiantes reconozcan, interpreten y manipulen a la variable.

Sin embargo, con la Reforma a la Educación Secundaria (RES), el planteamiento sobre la enseñanza del álgebra y la importancia del concepto de variable se ve reflejado en el programa de matemáticas 2006 en donde se plantea entre lo más relevante en el estudio de la aritmética y del álgebra: por un lado, encontrar el sentido del lenguaje matemático, ya sea oral o escrito; y por otro, tender un puente entre la aritmética y el álgebra. Por medio del eje temático Sentido numérico y pensamiento algebraico, los alumnos profundizan en el estudio del álgebra con los tres usos de las literales conceptualmente distintos: como número general, como incógnita y en relación funcional.

### 1.3 El modelo 3UV

A partir de todo lo anterior, nuestro Proyecto de Desarrollo se enfoca al proceso de enseñanza y aprendizaje del álgebra en secundaria tanto en estudiantes como en los profesores de matemáticas, haciendo énfasis en el concepto de variable, vista ésta como una entidad multifacética, para lo cual se toma como marco de referencia el modelo 3UV (tres usos de la variable) propuesto por Ursini et al. (2005). En este modelo se presentan en forma detallada los tres principales usos de la variable que más frecuentemente encontramos en el álgebra elemental: como incógnita específica, como número general y variables en relación funcional; además presenta una propuesta de enseñanza en la cual el profesor tiene un papel fundamental para propiciar, por un lado, un ambiente adecuado de aprendizaje y por otro, proponer y llevar a cabo actividades que logren en los alumnos la comprensión del concepto de variable y por lo tanto del álgebra elemental. Estamos conscientes de que las dificultades que los estudiantes manifiestan para entender el concepto de variable se deben en gran medida a la forma de enseñanza del álgebra, que se ha enfocado principalmente a manipular y operar la variable sin darle un significado o interpretación a la letra. Nos parece muy importante que los profesores conozcan la propuesta de enseñanza del modelo 3UV para que tengan una alternativa más en la enseñanza del álgebra.

El propósito de nuestro trabajo es diseñar e implementar un taller dirigido a profesores con la finalidad de que conozcan el modelo 3UV y su propuesta de enseñanza para que puedan integrarlo a su práctica docente.

Como ya se ha mencionado anteriormente, en el álgebra de secundaria se manejan básicamente tres usos de la variable: como incógnita, como número general y en relación funcional, para lo cual es necesario que los estudiantes desarrollen algunas capacidades básicas, que implican:

- Realizar cálculos sencillos operando con las variables.
- Comprender por qué es posible operar con las variables y por qué estas operaciones permiten llegar a un resultado, sea éste numérico o no.
- Darse cuenta de la importancia que tiene lograr la capacidad de usar las variables para modelar matemáticamente situaciones de distinto tipo.
- Distinguir entre los distintos usos que se les da a las variables en álgebra.
- Pasar con flexibilidad entre los distintos usos de las variables.
- Integrar los diversos usos para verlos como caras distintas de un mismo objeto matemático, que se revelan dependiendo de la situación particular.

(Ursini, et al. 2005, p. 23)

Para lograr lo anterior, es primordial que los profesores de matemáticas tengan una total comprensión del concepto de variable y de sus diferentes usos. El modelo 3UV hace una descripción detallada de aspectos que tienen que ver con los diferentes niveles de conceptualización que los alumnos y profesores tienen que lograr para resolver problemas que involucren los diferentes usos de la variable que se presentan con más frecuencia en el álgebra escolar.

A continuación se presentan en forma esquemática los aspectos que es necesario dominar para una mejor comprensión del concepto de variable, como se menciona en Ursini et al. (2005).

LA VARIABLE COMO INCÓGNITA

I1 Reconocer e identificar, en una situación problemática, la presencia de algo desconocido que puede ser determinado considerando las restricciones del problema.

I2 Interpretar la variable simbólica que aparece en una ecuación, como la representación de valores que hacen de la ecuación un enunciado verdadero.

I3 Sustituir la variable por el valor o los valores que hacen de la ecuación un enunciado verdadero.

I4 Determinar la cantidad desconocida que aparece en ecuaciones o problemas, realizando operaciones algebraicas, aritméticas o de ambos tipos.

I5 Simbolizar las cantidades desconocidas identificadas en una situación específica y utilizarlas para plantear ecuaciones.

LA VARIABLE COMO NÚMERO GENERAL

G1 Reconocer patrones y percibir reglas y métodos, en secuencias y en familias de problemas.

G2 Interpretar la variable simbólica como la representación de una entidad general, indeterminada, que puede asumir cualquier valor.

G3 Deducir reglas y métodos generales, en secuencias y en familias de problemas.

G4 Manipular (Simplificar, desarrollar) la variable simbólica.

G5 Simbolizar enunciados, reglas o métodos generales.

LAS VARIABLES EN UNA RELACIÓN FUNCIONAL

F1 Reconocer la correspondencia entre variables relacionadas, independientemente de la representación utilizada (Tablas, gráficas, problemas verbales, expresiones analíticas).

F2 Determinar los valores de la variable dependiente, dados los valores de la independiente.

F3 Determinar los valores de la variable independiente, dados los valores de la dependiente.

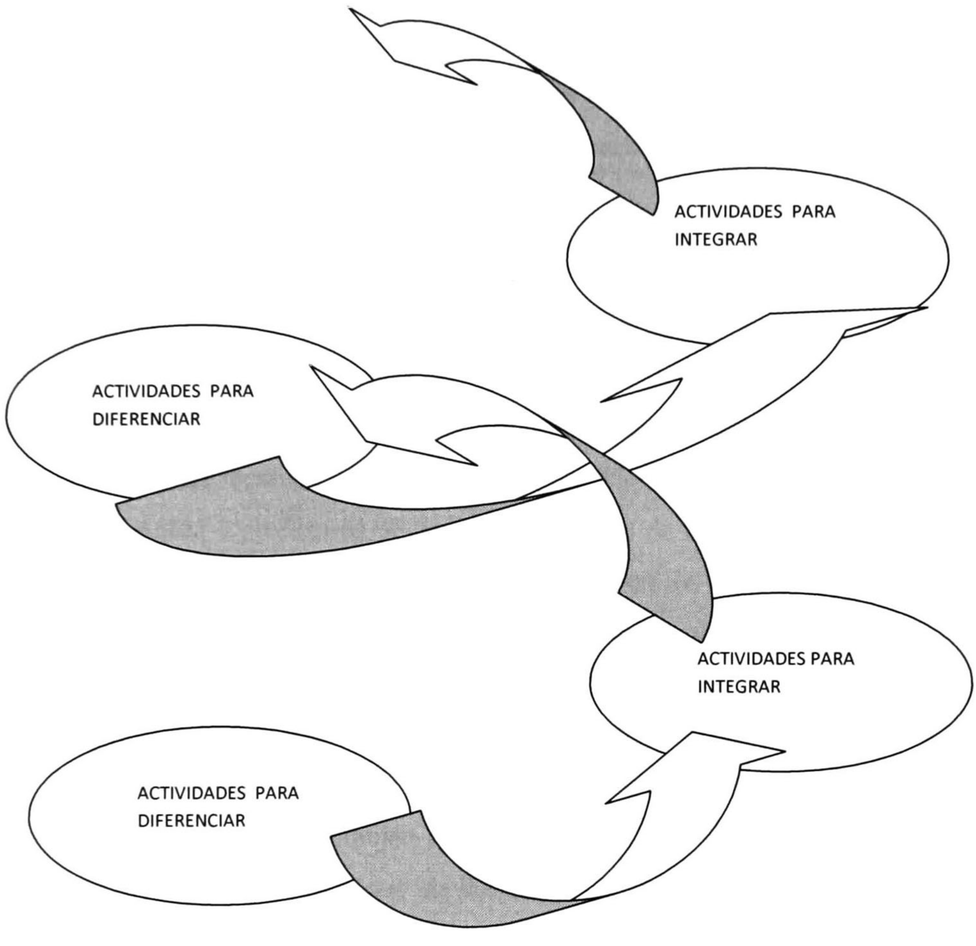
F4 Reconocer la variación conjunta de las variables involucradas en una relación funcional, independientemente de la representación utilizada (tablas, gráficas, problemas verbales, expresiones analíticas).

F5 Determinar los intervalos de variación de una de las variables, dado el intervalo de variación de la otra.

F6 Simbolizar una relación funcional, con base en el análisis de los datos de un problema.

Como se mencionó anteriormente, el modelo 3UV propone un modelo de enseñanza, una enseñanza en espiral, es decir, ir acercando a los estudiantes de manera gradual al trabajo con los distintos usos de la variable, e ir elevando la complejidad de las actividades. Se proponen actividades para diferenciar cada uno de los tres usos de la variable y actividades para integrar estos usos; las primeras son con el objetivo de que se trabaje con uno solo de los tres usos de la variable y los estudiantes logren una mejor comprensión de cada uno; las segundas actividades involucran los tres usos de la variable cuyo propósito es que los estudiantes desarrollen la capacidad de pasar entre los distintos usos de la variable de manera flexible (Ursini et al. 2005).

A continuación se presenta un esquema que muestra la enseñanza en espiral que propone el modelo 3UV (Montes, 2003).




En lo que respecta al papel del profesor, Ursini et al. (2005) consideran que es fundamental, y por lo tanto será él quien, por un lado, deberá organizar el entorno social de tal manera que se logre el acercamiento de los alumnos al concepto de variable; por otro lado, deberá guiar a los estudiantes en el trabajo y las discusiones de grupo para propiciar el desarrollo de las habilidades para la comprensión de los usos de la variable.

Lo anterior está relacionado con la teoría desarrollada por Vygotsky y el concepto de Zona de Desarrollo Próximo (ZDP), definida como "la distancia entre el nivel de desarrollo actual determinado por la capacidad de resolver independientemente un problema y el nivel de desarrollo potencial determinado a través de la resolución de un problema bajo la guía de un adulto o en colaboración con compañeros más capaces" (Hernández, 1986). Además Vygotsky consideró que la ZDP no es algo que se encuentre en el niño en espera de que sea despertada sino que es algo que se crea en la interacción social.

### 1.4 Propuesta de trabajo

Nuestra propuesta es poner al alcance de los profesores de educación secundaria los resultados de las investigaciones que se han realizado en materia de la enseñanza del álgebra en la escuela secundaria, en particular el modelo 3UV, mediante la implementación de un taller dirigido a profesores de matemáticas, pues de acuerdo a Sánchez (2006), son contados los investigadores que trabajan directamente con los profesores y los que lo hacen, no siempre tienen una propuesta para mejorar la práctica docente. Nuestro propósito es que este trabajo sea de utilidad para los profesores y que sea en su práctica docente donde los resultados se vean reflejados, logrando un mejor aprendizaje de los estudiantes y una mayor comprensión del álgebra. Es de gran importancia que las investigaciones que se realizan, y que son el fruto del trabajo y del esfuerzo de los investigadores y de los recursos económicos de las instituciones que las sustentan, cumplan su objetivo final: llegar a los salones de clase e impactar en el proceso de enseñanza y aprendizaje.

Como lo reportan las investigaciones antes descritas, a lo largo de mi práctica docente, he constatado que los estudiantes tienen una gran dificultad para comprender el álgebra, muchos de ellos no reconocen a las variables como valores, tampoco reconocen por ejemplo, que una variable puede ser una medida de longitud, y se les dificulta operar con literales.

# CAPÍTULO 2. METODOLOGÍA

En este capítulo se presenta la planeación del trabajo, la descripción del diagnóstico, la descripción del taller, propósitos y sesiones que lo forman, la población participante, así como la estrategia para llevarlo a la práctica.

## 2.1 Diagnóstico de Estudiantes y Profesores

Para iniciar este trabajo, se hizo un diagnóstico a estudiantes y a profesores de matemáticas de secundaria para reconocer cómo manejan e interpretan la variable en problemas que requieren de un manejo algebraico para resolverlos. El propósito fundamental de este diagnóstico fue, por un lado, identificar algunas de las dificultades que presentan los alumnos en el estudio del álgebra y si éstas coinciden con lo que se ha reportado en la literatura y en las diversas investigaciones mencionadas en el capítulo anterior. Por otro lado, reconocer el manejo de las variables que tienen los profesores y constatar si hay relación entre los resultados del diagnóstico aplicado a los estudiantes y el aplicado a los profesores, pues según Vigotsky (Hernández, 1986), el profesor resulta ser el instrumento mediador entre el alumno y el objeto de conocimiento, que en este caso es el álgebra.

El diagnóstico de los estudiantes se aplicó a 14 alumnos de primer grado de secundaria y a 16 de segundo grado seleccionados al azar, ambos grupos del turno vespertino; para lo cual se diseñaron dos hojas de trabajo, una para cada grado.

Para que los profesores resolvieran la actividad diagnóstica, primero les planteamos de manera individual la finalidad de ésta, también les explicamos de manera verbal que describieran detalladamente los conocimientos matemáticos necesarios para resolver el problema; la hoja de trabajo se les entregó a 6 profesores, de dos escuelas secundarias, cabe mencionar que solamente 5 maestros entregaron la actividad resuelta.

Cada profesor resolvió dos problemas diferentes, los profesores que participaron en el diagnóstico son compañeros de trabajo, lo que nos permitió pedirles el apoyo para la realización de la actividad.

## 2.2 El Taller para Profesores de Matemáticas

Este trabajo forma parte del Proyecto de Desarrollo *El Álgebra Escolar: Hacia Una Mejor Comprensión a través del Concepto de Variable*. Este proyecto se concibió con dos líneas de trabajo: Una enfocada a los estudiantes en donde se pretende diseñar secuencias de actividades haciendo énfasis en el modelo 3UV. La segunda línea de trabajo estuvo dirigida a profesores, porque para trabajar las actividades diseñadas bajo la perspectiva del modelo 3UV es necesario que los profesores que lo impartan lo conozcan. Así pues, este trabajo tiene la finalidad de acercar a los profesores de matemáticas de secundaria la propuesta del modelo 3UV como una alternativa para mejorar su conceptualización de la variable y en su trabajo de enseñanza del álgebra.

Se escogió la modalidad de *Taller breve* porque es una estrategia que permite la participación activa de los docentes. Las características de esta modalidad de taller son:

- Que tienen una duración entre 20 y 30 horas, aunque la duración finalmente dependerá de que los objetivos se hayan cubierto y puede ser que se alargue o que se acorte (4, 8 o 12 hrs.)
- El aprendizaje es el resultado de una integración entre reflexión y práctica, como se mencionó anteriormente, que los profesores participen activamente haciendo comentarios y realizando las actividades propuestas en el cuadernillo del taller.
- Existe la alternativa de trabajar en forma grupal o individual
- Se tiene la opción para seleccionar los instrumentos, los medios de trabajo y los criterios de acción
- Son unidades o módulos de actualización autosuficientes, pues en cada uno de ellos se aborda por completo un tema o asunto central, desde los contenidos disciplinarios que implica y el enfoque para su enseñanza hasta el diseño de actividades y secuencias didácticas para aplicarlas en el aula (Lucarelli, & Correa, 1994).

En general los propósitos de los talleres breves son:

i) Ofrecer a los maestros la posibilidad de realizar un taller de actualización en torno a problemas específicos del quehacer docente en un lapso breve y con la obtención de productos útiles para su desempeño cotidiano.
ii) Impulsar en la práctica las competencias necesarias para participar en colectivos docentes vinculados con su centro de trabajo, que analizan y reflexionan sobre sus experiencias y generan, con base en ellas, estrategias, materiales y propuestas didácticas (Ander-Egg ,1999).

Los propósitos específicos de este taller breve son los siguientes:

- Propiciar una reflexión más a fondo sobre los enfoques adoptados para la enseñanza del álgebra en la educación básica, y su aplicación en el aula (Modelo 3UV, énfasis en el concepto de variable).
- Profundizar en el manejo del concepto de variable que por su carácter multifacético resulta complejo y de difícil manejo en el aula.
- Contribuir en la resolución de problemas concretos relacionados con la práctica docente, es decir, mejorar el manejo del concepto de variable, mejorar el diseño de actividades de trabajo, mejorar las estrategias de enseñanza y como consecuencia de todo eso, mejorar la comprensión del álgebra.

Con base en lo anterior, este taller para profesores de matemáticas *La Enseñanza del Álgebra Escolar a través del Modelo 3UV* (Anexo 1) tiene actividades encaminadas a:

Dar a conocer investigaciones relacionadas con las dificultades que tienen los estudiantes para el aprendizaje del álgebra y, en particular el concepto de variable. Esto con la finalidad de conocer y reconocer los problemas más comunes a los que se enfrenta el profesor en el aula.

Dar a conocer los fundamentos y la propuesta de enseñanza del modelo 3UV.

Realizar análisis de actividades basado en el modelo 3UV.

Trabajar algunas actividades ya diseñadas con los alumnos y realizar un análisis de los resultados obtenidos

Rediseñar actividades para cada uno de los grados de secundaria tomando como base el modelo 3UV

Elaborar un plan de trabajo para la enseñanza del álgebra, que contemple secuencias de actividades que los profesores puedan llevar a cabo con sus alumnos en un ciclo escolar.

El taller *La Enseñanza del Álgebra Escolar a través del Modelo 3UV* es una propuesta de actualización, dirigida a profesores de matemáticas de secundaria frente a grupo como una estrategia fundamentada en la reflexión de su propia práctica; esta reflexión supone la comprensión crítica de las características de su quehacer docente y de sus supuestos teóricos y metodológicos. A partir de ello es posible la reconstrucción colectiva y autónoma de dicha práctica y de nuevos referentes que contribuyan al logro de mejoras significativas en los resultados que se obtienen en la enseñanza del álgebra escolar.

## 2.3 Características de la población que participó en el taller

En el taller participaron 57 profesores de matemáticas que están adscritos a 24 escuelas secundarias técnicas públicas que pertenecen a las zonas escolares 13, 18 y 21 del Sector Escolar V del Estado de México. El taller se llevó cabo en la escuela Secundaria Técnica número 49 que está ubicada en la comunidad de Santa María Tianguistengo del municipio de Cuautitlán Izcalli.

Los profesores que asistieron al taller fueron convocados por las autoridades del Sector Educativo en el área de matemáticas de la zona antes mencionada por lo que se tuvo una numerosa asistencia de profesores, cabe mencionar que es difícil que los profesores asistan a algún taller o curso fuera de su horario de trabajo.

Por problemas de tiempo el taller no se llevó a cabo como estaba previsto, es decir una sesión por día, se llevaron a cabo dos sesiones por día. De esta forma el taller se realizó en tres días y no en seis.

## 2.4 La estructura del taller. Descripción de las sesiones

Se diseñó y elaboró un cuadernillo guía (anexo 1) que contiene los guiones de las seis sesiones de trabajo de las que consta el taller. La duración aproximada de cada sesión es de tres horas.

La estructura del taller fue la siguiente:

| Sesión | Actividades | Propósito | Producto | Tiempo |
|---|---|---|---|---|
| Primera | Cuestionario diagnóstico. Lectura comentada (Children's Difficulties in Beginning Algebra. Booth, L.) | Reconocer los errores que cometen los estudiantes y las dificultades al aprender álgebra, así como las dificultades que tienen los profesores en su enseñanza. | Cuestionarios resueltos. Preguntas contestadas. | 3 horas |
| Segunda | Lectura comentada (What are these things called variables? Wagner, S. Los usos de las variables algebraicas, Philipp, R.) Presentación del modelo 3UV. | Definir e identificar los errores que cometen los estudiantes al iniciar el estudio del álgebra. Reconocer el modelo 3UV y su propuesta para la enseñanza del álgebra escolar. | Preguntas contestadas. Comentarios y preguntas de los profesores. | 3 horas |
| Tercera | Análisis y rediseño de un problema tomando a la variable como número general en base al modelo 3uv | Analizar y rediseñar una actividad del uso de la variable como número general. | Actividades diseñadas por los profesores. | 3 horas |
| Cuarta | Análisis y rediseño de un problema tomando a la variable como incógnita en base al modelo 3uv | Analizar y rediseñar una actividad del uso de la variable como incógnita. | Actividades diseñadas por los profesores. | 3 horas |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Quinta | Análisis y rediseño de un problema tomando a la variable como relación funcional en base al modelo 3uv | Analizar y rediseñar una actividad del uso de la variable como relación funcional. | Actividades diseñadas por los profesores. | 3 horas |
| Sexta | Análisis y rediseño de un problema que integre los tres usos de la variable tomando como base el modelo 3uv | Analizar y diseñar una actividad integradora, en el cual se manejen los tres usos de la variable. | Actividades diseñadas por los profesores. | 3 horas |

### 2.4.1 Cuestionario diagnóstico

El cuestionario se utilizó como instrumento para detectar de manera general la comprensión del concepto de variable en la población de profesores que participaron en el taller. Esto nos sirvió para mostrarles el modelo 3UV y su alternativa de enseñanza, también para que los profesores tomaran conciencia de estos conceptos que conocen pero que con los estudiantes no se enfatizan, también para que se dieran cuenta de los errores que cometen en la enseñanza del álgebra. Se realizaron 32 preguntas, que son parte de un cuestionario de 65 preguntas abiertas, diseñado y validado previamente en una investigación con estudiantes universitarios (Ursini y Trigueros, 1998) y que fue utilizado en investigaciones con profesores de matemáticas de secundaria (Juárez, 2002; Sánchez, 2006). El antecedente del diseño de este cuestionario se encuentra en el trabajo: Diseño de un cuestionario Diagnóstico acerca del manejo del concepto de variable en el álgebra. (Trigueros et al, 1996). Un criterio que se tomó en cuenta para reducir el número de preguntas fue el tiempo disponible para el taller. La resolución del cuestionario se programó para una hora, y el cuestionario original tiene 65 preguntas y se resuelve en aproximadamente dos horas.

El cuestionario de 32 preguntas aplicado para este trabajo, contiene preguntas que involucran los tres diferentes usos de la variable: incógnita específica, número general y en relación funcional (Anexo 3). Las preguntas se eligieron tomando en cuenta la proporción de preguntas de cada uso que tiene el cuestionario original, otro criterio fue el porcentaje de aciertos de cada pregunta de acuerdo con Juárez (2002), es decir, se tomaron preguntas con alto porcentaje de respuestas correctas, (más del 80%); medio (entre el 60%-80%) y bajo (menos del 60%).

El cuestionario contiene 7 preguntas relativas al uso de la variable como incógnita especifica, que aparecen en el cuestionario como preguntas: 1, 4, 6, 7, 8, 21 y 22; las preguntas relativas al uso de la variable como número general son 10 y aparecen en el cuestionario como: 2, 3, 5, 9, 10, 11, 12, 13, 14, y 15; las preguntas relativas al uso de la variable en relación funcional son 15, y aparecen con los números: 16, 17, 18, 19, 20, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31 y 32. Se incluyeron mas preguntas de la variable en relación funcional porque de acuerdo con Juárez (2002), es con este uso de la variable donde los profesores tienen más problemas pues es donde se obtuvieron los porcentajes de respuestas correctas más bajos. Para ésta actividad se estimó un tiempo de una hora, el cuestionario se resolvió de forma individual.

A continuación se describen las actividades de cada una de las seis sesiones del taller.

## Primera sesión: Las dificultades de los niños en el inicio del álgebra.

Se iniciaría con la aplicación del cuestionario diagnóstico, posteriormente se mostraría al grupo las respuestas correctas y se realizaría el análisis de éstas.

Posteriormente se realizaría la lectura del artículo "Children's Difficulties in Beginning Álgebra de Lesley R. Booth, esta se haría de forma individual y se contestarían algunas preguntas basadas en dicha lectura que se incluyeron al final del artículo. Finalmente en plenaria los profesores darían su opinión sobre el contenido del artículo.

## Segunda sesión: ¿Qué son esas cosas llamadas variables? y el Modelo 3UV

En la primera parte de la sesión se realizaría la lectura y el análisis de los artículos "What are these things called variables?" de Sigfrid Wagner, y "Los usos de las variables algebraicas" de Philipp Randolph. Esta actividad se llevaría a cabo de manera individual y se contestarían las preguntas que se incluyeron al final de los artículos, posteriormente en plenaria se comentaría la lectura y las respuestas de las preguntas planteadas. En la segunda parte de la sesión se presentaría al grupo, mediante diapositivas, el modelo 3UV. Se les presentarían las causas que motivaron el diseño de esta herramienta teórica, cuáles fueron los pasos que se siguieron para desarrollarla y como se está aplicando.

## Tercera sesión: La variable como número general

En ésta sesión se presentaría un problema planteado de acuerdo al modelo 3UV donde el uso de la variable es como número general. Se analizaría detalladamente cada una de las preguntas planteadas para resolver el problema y posteriormente se pediría a los profesores que en equipo rediseñaran un problema que se les plantea en el cuadernillo siguiendo los pasos que propone el modelo 3UV. Posteriormente los equipos expondrían al grupo su trabajo.

## Cuarta sesión: La variable como incógnita específica

En ésta sesión se presentaría un problema planteado de acuerdo al modelo 3UV donde el uso de la variable sería como incógnita específica. Se analizaría detalladamente cada una de las preguntas planteadas para resolver el problema y posteriormente se pediría a los profesores que en equipo rediseñaran un problema cuyo uso de la variable sería como incógnita específica que aparece en el cuadernillo, siguiendo los pasos que propone el modelo 3UV. Finalmente los equipos expondrían su trabajo al grupo.

## Quinta sesión: La variable en relación funcional

En ésta sesión se presentaría un problema planteado de acuerdo al modelo 3UV donde el uso de la variable sería en una relación funcional. Se analizaría detalladamente cada una de las preguntas planteadas para resolver el problema y posteriormente se pediría a los profesores que en equipo rediseñaran un problema cuyo uso de la variable sería en relación funcional que aparece en el cuadernillo, siguiendo los pasos que propone el modelo 3UV. Posteriormente los equipos expondrían al grupo su trabajo.

## Sexta sesión: Actividades integradoras

En esta sesión se presentaría una actividad integradora planteada de acuerdo al modelo 3UV donde la variable tuviera los tres usos (número general, incógnita específica y en relación funcional). Se analizaría detalladamente cada una de las preguntas planteadas para resolver el problema y posteriormente se pediría a los profesores que en equipo rediseñaran un problema que aparece en el cuadernillo, donde la variable tuviera los tres usos y siguiendo los pasos que propone el modelo 3UV. Posteriormente los equipos expondrían al grupo su trabajo.

Se consideró importante repartir, antes de iniciar el taller el cuadernillo a cada uno de los profesores ya que contiene el cuestionario, los propósitos de cada una de las sesiones, las lecturas propuestas, así como las actividades que se llevarán a cabo durante las seis sesiones.

# CAPÍTULO 3. RESULTADOS DEL DIAGNÓSTICO DE ESTUDIANTES Y PROFESORES

En este capítulo se presentan los resultados de las actividades que resolvieron los alumnos y profesores como parte de un diagnóstico previo al diseño del taller. Se hace un análisis de sus respuestas para identificar algunas de las dificultades que presentan.

## 3.1 Diagnóstico de los estudiantes

Lo que se observó en este diagnóstico es que la mayoría de los alumnos que participaron en el diagnóstico cometen los mismos errores que han sido reportados en los trabajos de investigación relacionados con el aprendizaje del álgebra. Consideramos que al conocer las dificultades de los estudiantes, tenemos evidencias de los aspectos que, en consecuencia, tienen dificultades para su enseñanza. El hecho de que un alumno cometa un error, por ejemplo de interpretación de la variable, es evidencia de que en clase no se hace un trabajo suficiente sobre este punto. Esto nos permitirá plantear actividades que vayan encaminadas a fortalecer el conocimiento algebraico de los maestros y por consiguiente, mejorar sus estrategias de enseñanza.

A continuación se presentan los resultados en porcentajes de cada una de las preguntas de las hojas de trabajo que resolvieron para el diagnóstico los estudiantes de primer grado. En la exposición se presenta primero la consigna del ejercicio y después se exponen los resultados obtenidos en la aplicación del instrumento.

INSTRUCCIONES: Observa la figura, después contesta las preguntas.

RECUERDA: El perímetro de una figura se calcula sumando la medida de sus lados.

Figura a:

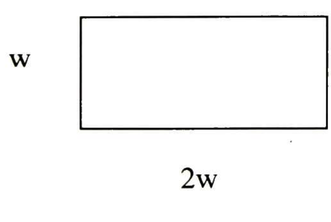
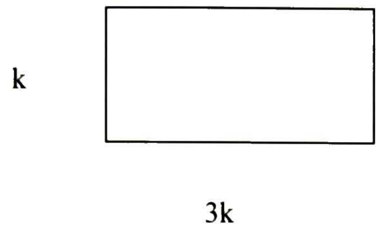


Figura b:




RECUERDA: El área de un rectángulo se obtiene multiplicando la base por la altura.

| Pregunta | % de respuestas correctas | % de respuestas incorrectas | Ejemplos de respuestas incorrectas | Respuestas correctas |
|---|---|---|---|---|
| 1.- Obtener el perímetro de la figura a | 0% | 100% | 52, 10, 18, 26, 58, 5.4, 8w,Sumando todos sus lados, lado + lado | 6w |
| 2.- ¿Qué representa la letra w en la figura a? | 7% | 93% | 3, w3, n° 3 | La altura, el ancho |
| 3.- Si w = 3¿cuánto mide el largo de la figura a? | 14% | 86% | 3, 5, 23, 12w | 6 |
| 4.- Si w = 3, ¿cuánto mide el perímetro de la figura a? | 14% | 86% | 11, 2 cm, 52, 9, 12 w, 6, 26, 10, 58. | 18 |
| 5.- Obtener el área de la figura b | 0% | 100% | 136, 9, 12k, 7.5, 42 cm, bxh | $3k^2$ |
| 6.- ¿Qué representa la letra k en la figura b? | 14% | 86% | 4, kilómetros, base. | La altura, ancho |
| 7.- Si k = 4, ¿cuál es el valor de la base de la figura b? | 14% | 86% | 34, 3, 16k, 29, 9 cm, 7, unidades y decenas. | 12 |
| 8.- Si k = 4¿cuál es el área de la figura b? | 14% | 86% | 136, 12, 4, 8, 28, 16k | 48 |

Tabla 1. Respuestas de los estudiantes de primer grado a las preguntas del diagnóstico

De acuerdo a la tabla 1, podemos observar que la mayoría de los estudiantes tienen dificultades para reconocer, simbolizar, y operar con las variables. Cabe señalar que en la pregunta 2 y en pregunta 6, se les mostró en la figura a qué letra se refería la pregunta.

A continuación se presentan los resultados en porcentajes de cada una de las preguntas de las hojas de trabajo que resolvieron los estudiantes de segundo grado. Como en el caso anterior, se presenta primero la consigna del ejercicio y después el concentrado de respuestas.

CONSIGNA: observa la figura y contesta las preguntas. La expresión que aparece es el área de cada porción.

Recuerda que para obtener el área de cualquier rectángulo se utiliza la expresión:

A= b x h (b: base; h: altura)

Figura 1

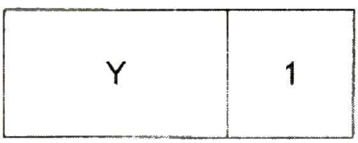



Figura 2

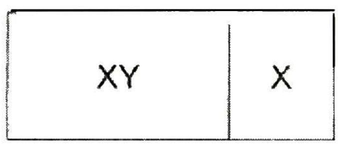
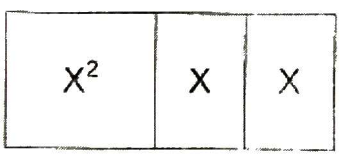



Figura 3



| Pregunta | % de respuestas correctas | % de respuestas incorrectas | Ejemplos de respuestas incorrectas | Respuestas correctas |
|---|---|---|---|---|
| A) ¿Cuánto mide la base de la figura 1? | 44% | 56% | Y1, Y, 5.2 cm, 5 cm, 5.3 cm | Y + 1 |
| B) ¿Cuánto mide la altura de la figura 1? | 25% | 75% | 2 cm, Y, Y+1, 6 | 1 |
| C) ¿Qué operación se debe realizar para obtener el área de esta figura? | 0% | 100% | Multiplicación, bxh, división, suma, yx1 | (Y + 1) (1) |
| D) Expresa algebraicamente el área de la figura 1 | 13% | 87% | 1Y, Yx1, 1x | Y + 1 |
| E) ¿Cuánto mide la base de la figura 2? | 0% | 100% | XY +X, 5 cm, X4, 2xy | Y + 1 |
| F) ¿Cuánto mide la altura de la figura 2? | 37% | 63% | 2 cm, xy, xy - x | X |
| G) ¿Qué operación se debe realizar para obtener el área de esta figura? | 0% | 100% | Bxh, multiplicación, XYxX, xy+x, suma, división | (Y + 1) (X) |
| H) Expresa algebraicamente el área de la figura 2 | 37% | 63% | $xy \cdot x$ | XY + X |
| I) ¿Cuánto mide la base de la figura 3? | 0% | 100% | 4.6 cm, 4.2, 4.7, $x^2+2x$, $x^2$, x, $x^4$ | X + 2 |
| J) ¿Cuánto mide la altura de la figura 3? | 31% | 69% | 2 cm, x+x, x, $x^2$, y, $x^2 +x-x$ | X |
| K) Expresa algebraicamente el área de la figura 3 | 31% | 69% | 3x2 , $x^2 +2x \cdot y$, $x^2$ x x ÷ x, x+x+x | $X^2+ 2X$ |

Tabla 2. Respuestas de los estudiantes de segundo grado a las preguntas del diagnóstico

Como podemos observar en la tabla 2, los estudiantes de segundo grado siguen teniendo dificultad para interpretar, simbolizar y operar con las variables.

Cabe señalar que en las preguntas C y G, se les recalcó a los alumnos que escribieran la operación para obtener el área de esa figura en particular, no la de cualquier rectángulo.

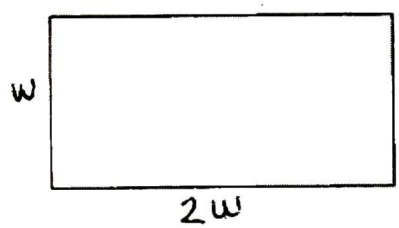
A continuación se presentan algunas evidencias de las actividades resueltas por los estudiantes de primer grado, donde se identifican algunos errores que coinciden con los que se reportan en la literatura especializada.

1. **Letra evaluada con diferentes criterios (Kücheman, 1980) y el significado de la variable (Booth, 1984).**

INSTRUCCIONES: Lee y observa cuidadosamente, después contesta las preguntas.

RECUERDA: El perímetro de una figura se calcula sumando la medida de sus lados.

Fig. a




$$\begin{array}{r} \overset{1}{2}3 \\ +23 \\ 6 \\ \hline 52 \end{array}$$

1.- Obtener el perímetro de la figura a Resp. 52

2.- ¿Qué representa la letra w en la figura a? Resp. 3

3.- Si w = 3 ¿Cuánto mide de largo la figura a? Resp. 23

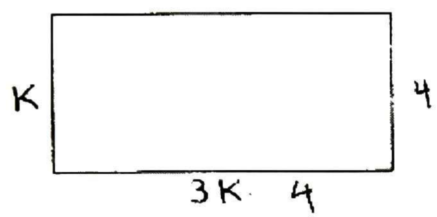
4.- Si w = 3 ¿Cuánto mide el perímetro de la figura a? 52

En la pregunta 2, el alumno no reconoce la representación del valor del ancho del rectángulo con una literal. No logra hacer una interpretación de *w* en el contexto que se le presenta. Para los estudiantes, todas las preguntas tienen que tener una respuesta numérica.

En la pregunta 3, no visualiza a $2w$ como un producto, le asigna el número 3 a $w$ y su respuesta que es $2w$ es igual a 23. Es decir, evalúa la expresión bajo algún criterio que para el tenga sentido y da su respuesta basada en ella. En este caso simplemente sustituye el valor que se le da a $w$ en la expresión, por lo que, el cálculo del perímetro, también será equivocado.

2. **Las letras utilizadas como etiquetas. (Booth, 1984)**

Fig. b




RECUERDA: Que el área de un rectángulo se obtiene multiplicando la base por la altura.

5.- Obtener el área de la figura b. Resp. 12 K

6.- ¿Qué representa la letra k en la figura b? Kilometros

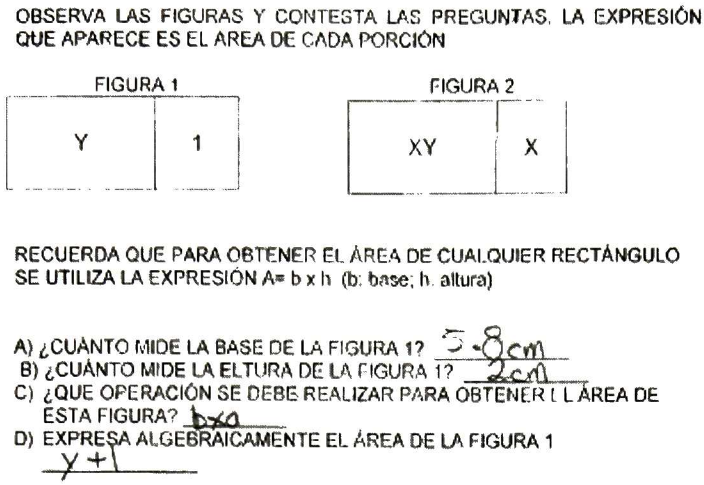
7.- Si k = 4 ¿Cuál es el valor de la base de la figura b? Resp 16 K

8.- Si k = 4 ¿Cuál es el área de la figura b? Resp 16 K

Como se observa, la interpretación de la variable es un problema recurrente en los alumnos. En la pregunta 6, el alumno responde de acuerdo a lo que en otros contextos utiliza la letra *k*, por ejemplo en la letra inicial de kilómetros.

La siguiente es una evidencia de los estudiantes de segundo grado:

**3. No aceptan expresiones abiertas como respuesta (Booth, 1984)**



OBSERVA LAS FIGURAS Y CONTESTA LAS PREGUNTAS. LA EXPRESIÓN QUE APARECE ES EL AREA DE CADA PORCIÓN

FIGURA 1

| Y | 1 |
|---|---|

FIGURA 2

| XY | X |
|---|---|

RECUERDA QUE PARA OBTENER EL ÁREA DE CUALQUIER RECTÁNGULO SE UTILIZA LA EXPRESIÓN A= b x h (b: base; h: altura)

A) ¿CUÁNTO MIDE LA BASE DE LA FIGURA 1? 5.8cm

B) ¿CUÁNTO MIDE LA ELTURA DE LA FIGURA 1? 2cm

C) ¿QUE OPERACIÓN SE DEBE REALIZAR PARA OBTENER EL ÁREA DE ESTA FIGURA? bxa

D) EXPRESA ALGEBRAICAMENTE EL ÁREA DE LA FIGURA 1

y+1

Los alumnos tienden a dar respuestas numéricas, midieron las figuras, lo que nos indica que no conciben a las variables o expresiones algebraicas como respuesta.

Como puede observarse, los estudiantes tienen dificultades en la interpretación de la variable. Esto es entendible ya que la enseñanza del álgebra tiende a enfocarse más a la manipulación y operación algebraica y no a la interpretación y significado de las variables.

## 3.2 Diagnóstico de profesores

Los resultados de este diagnóstico nos muestran que si bien los profesores resolvieron correctamente las actividades planteadas, no mostraron una conciencia clara de lo que realizaron. Los profesores a la hora de explicar su procedimiento en forma escrita, no mencionaron que la variable tenía un uso específico y que primero habría que identificarla para posteriormente manipular y simbolizar. Se concretaron a describir las operaciones aritméticas y algebraicas que realizaron para resolver los problemas. Juárez (2002) menciona que los profesores de matemáticas de secundaria no tienen un buen manejo de los tres usos de la variable. Si bien son capaces de reconocer el papel de la variable en expresiones y problemas simples, en problemas complejos tienden a buscar soluciones memorizadas o a utilizar procedimientos aritméticos. Sánchez (2006) reporta que los profesores de secundaria son capaces de reconocer el papel de la variable en diferentes tareas, pero cuando la complejidad de éstas aumenta, provoca interpretaciones y simbolizaciones inadecuadas. Asimismo concluye que debido a la poca comprensión que tienen los profesores de secundaria de los diferentes aspectos de la variable que intervienen en problemas de álgebra esto hace que sus alumnos cometan los mismos tipos de errores. Esto se constató en los resultados del diagnóstico, pues en ningún momento los profesores mencionaron o manejaron los usos de la variable, y no porque los desconozcan, sino porque en la mayoría de los casos durante el proceso de enseñanza dan por entendido aspectos que en realidad los alumnos no han comprendido.

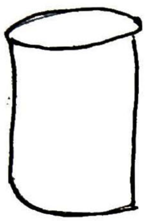
A continuación se presentan las evidencias de las actividades resueltas por los profesores de matemáticas. Ambas actividades se tomaron del Libro para el Maestro, Educación Secundaria que edita la SEP (p. 151 y 153).

La consigna se comunicó a cada uno de manera verbal, y fue que ellos explicaran qué es lo que se necesita saber y hacer para resolver el problema: "*Resuelve el problema, y escribe todos los procedimientos y los contenidos matemáticos que se necesitan desarrollar*"

Con lo cual se pretendía que los profesores pudieran desglosar todos los conocimientos y habilidades que se ponen en juego al resolver el problema y poder reconocer los aspectos de la variable que están involucrados.

ACTIVIDAD 1

**UN TINACO DE FORMA CILINDRICA TIENE UN DIAMETRO DE 1.5 m Y SU VOLUMEN ES 4.4 $m^3$. ¿CUÁNTO MIDE LA ALTURA?**



$D = 1\ 5\ m$

$V = 4.4\ m^3$

$V = A \times h$

$V = \pi r^2 h$

$A = \pi r^2$

$V = A \times h$

$A h = V$

$h = \frac{V}{A}$

$A = 3.14\ (.75)^2$

$A = 3.14\ (.5625)$

$A = 1\ 76\ m^2$

$h = \frac{4.4\ \cancel{m}^3}{1.76\ \cancel{m}^2}$

$\frac{m^3}{m^2} = m$

$h = 2.5\ m$

OBTENEMOS EL ÁREA DEL CILINDRO CON LA MITAD DEL DIÁMETRO

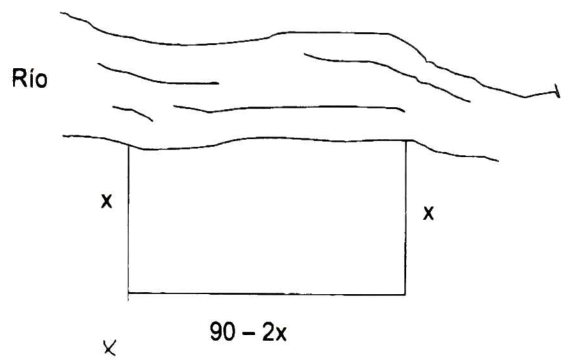
SE DESPEJA LA ALTURA APLICANDO EL ÁREA DEL CILINDRO

El profesor resuelve correctamente el problema, sin embargo lo hace en forma mecánica, es decir, enfatizando los procedimientos operatorios. Lo primero que escribe son las fórmulas para obtener el área y el volumen del cilindro, pero en ningún momento especifica lo que representa cada una de las variables que intervienen en ellas, tampoco especifica que las diferentes literales representan valores, que la letra *h* representa la altura del cilindro y que en este caso es un valor desconocido pero que se puede determinar, es decir representa una incógnita específica.

Suponemos que esta forma de resolver el problema, refleja la forma de enseñar: énfasis en el manejo de la fórmula y los cálculos. El maestro tiende a dar por hecho que los estudiantes entenderán el problema y lo podrán resolver, sin embargo de acuerdo a los resultados del diagnóstico realizado con estudiantes constatamos que no es así.

## ACTIVIDAD 2

**Se va a cercar una parte de un terreno que colinda con un río y solo se dispone de material para construir 90 m de barda. Si se quiere que la parte cercada tenga forma rectangular, ¿Cuáles serán las dimensiones del terreno de mayor área que se puede bardar?**




| | $90-2x$ | $x$ |
|---|---|---|
| A | 80 | 5 |
| B | 70 | 10 |
| C | 60 | 15 |
| D | 50 | 20 |
| E | 40 | 25 |
| F | 30 | 30 |
| G | 20 | 35 |
| H | 10 | 40 |
| I | 0 | 45 |

AL TABULAR LOS DATOS ENCONTRAMOS QUE LOS RECTANGULOS SON LOS MAS LÓGICOS QUE SE PUEDEN BARDAR CON 90 m

Cabe mencionar que el profesor tuvo muchas dificultades para resolver este problema. Al igual que en el problema anterior, el profesor no es explícito a la hora de tabular, es decir no especifica que hay una relación entre el área del rectángulo y el valor de la variable *x*; que el área del rectángulo depende del valor de *x*, tampoco se especifica que la variable *x* representa la altura del rectángulo y que la expresión *90-2x* es la medida de la base del rectángulo. Tampoco señala que los valores de *x* caen dentro de un intervalo, el profesor no escribe el área que resulta al sustituir los diferentes valores de x.

Como resultado del diagnóstico realizado con los profesores concluimos que, en la enseñanza del álgebra, los maestros enseñan resolviendo los problemas sin ser explícitos en cuanto al uso que tienen las variables ni a los aspectos que se tienen que manejar para resolver exitosamente el problema: (reconocer, interpretar, simbolizar), de tal manera que dan por entendido aspectos de la variable que ellos manejan, aunque no de manera explícita, pero que en el momento de la enseñanza los estudiantes difícilmente comprenden.

Los resultados de estos diagnósticos, nos permitirán conducir de mejor manera el taller dirigido a profesores, pues nos señalan algunas ideas o dificultades que pueden surgir durante el trabajo de las sesiones y en los que hay que poner énfasis durante las discusiones que se generen.

# CAPÍTULO 4. RESULTADOS DEL TALLER

En este capítulo se presentan los resultados de la implementación del taller. Se hace un análisis a partir de las observaciones hechas en cada sesión, de la participación activa de los profesores y de los productos que se obtuvieron en cada una de ellas.

Los resultados se presentan en dos apartados. El primero es un análisis cuantitativo de los resultados obtenidos en el cuestionario aplicado al inicio del taller y que da cuenta de la comprensión y manejo de la variable que hacen los profesores. El segundo apartado es un análisis cualitativo del trabajo desarrollado en el taller y que nos permite ver el impacto que tuvo esta propuesta en los maestros.

## 4.1 Análisis del cuestionario

El cuestionario aplicado en la primera sesión constó de 32 preguntas.

El análisis se realizó a partir del porcentaje de respuestas correctas, incorrectas y omisiones para cada pregunta. (Ver Anexo 2).

Se esperaría que el porcentaje de respuesta correcta para cada pregunta fuera más alto y que como profesores pudieran contestar correctamente todo el cuestionario, sin embargo no fue así. Contrario a lo que se esperaba, ningún profesor contestó correctamente todas las preguntas. El número más alto de respuestas correctas fue 27 y el más bajo fueron 4 respuestas correctas, lo que nos muestra el nivel de conocimientos matemáticos que tienen algunos profesores.

De la tabla, Anexo 2 se puede obtener la siguiente gráfica de acuerdo con el uso de la variable.

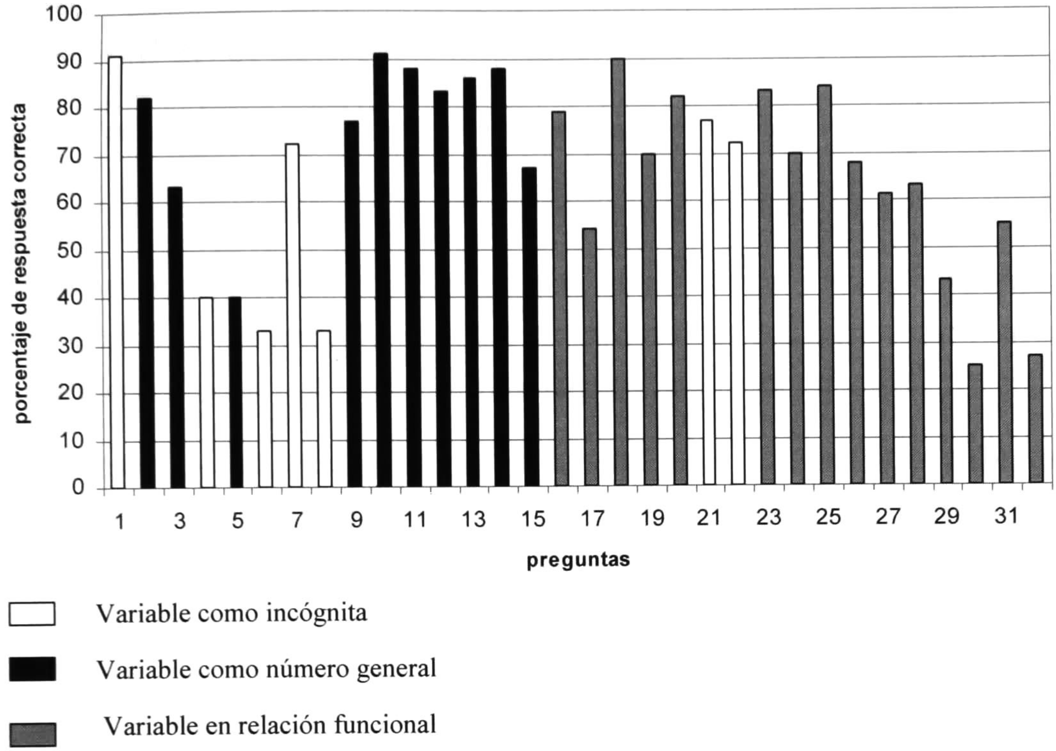



Figura 1. Porcentaje de respuesta correcta de acuerdo al uso de la variable.

Las preguntas que obtuvieron el porcentaje más alto de aciertos (91%) son la pregunta 1 y la 10:

Pregunta 1. *Escribe una fórmula que exprese: Un número desconocido multiplicado por la suma del mismo número desconocido con 2 es igual a 6.*

La mayoría de la profesores contestaron correctamente y escribieron la expresión $x(x+2)=6$

Esta pregunta implica el uso de la variable como incógnita específica. Para contestarla correctamente es necesario reconocer e identificar en la expresión algo desconocido que se puede llegar a determinar, también hay que interpretar la incógnita y representarla simbólicamente en una ecuación. En expresiones sencillas como la anterior la mayoría de los profesores lo hace correctamente.

Pregunta 10. *Reduce las siguientes expresiones a una equivalente:*

$y^2 + 2y + 4y^2 - 5y - 8$

La mayoría de los profesores contestaron correctamente la expresión

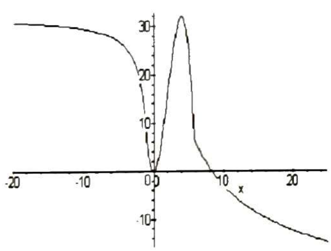
$5y^2 - 3y - 8$

Esta pregunta implica manipular a la variable como número general y ocurre lo mismo que en la anterior: en expresiones sencillas, la mayoría de los profesores resuelve correctamente, aunque se esperaría que todos lo hicieran, pero no fue así.

Ambas preguntas implican interpretar, representar y manipular a la variable en problemas sencillos. La manipulación de la variable es un aspecto muy trabajado en la escuela y en el que generalmente se pone énfasis en la enseñanza.

La pregunta con el más bajo porcentaje de aciertos (25%) es la pregunta 30.

*Dada la siguiente gráfica:*




Pregunta 30. *¿Entre qué valores de x, los valores de y decrecen?*

Para contestar esta pregunta es necesario reconocer la variación conjunta de las variables a partir de la gráfica y determinar los intervalos de variación en los que la función crece o decrece.

Los profesores presentan dificultades para identificar y determinar los intervalos de variación. Algunos profesores confunden la noción de función creciente con la de función positiva.

Este tipo de problemas y de preguntas es poco común que se trabajen en el aula, en consecuencia, es de esperarse que los profesores tengan un pobre manejo en estos aspectos.

En la figura siguiente se muestran los porcentajes promedio de respuestas correctas de acuerdo con cada uno de los tres usos de la variable

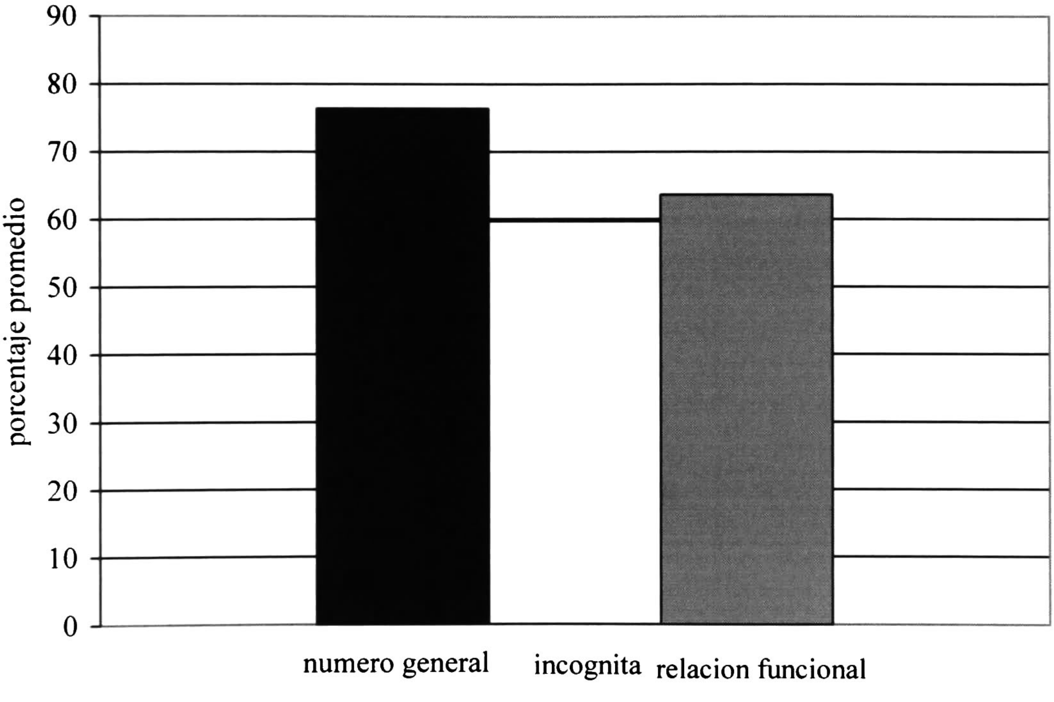



Figura 2. Porcentaje promedio de aciertos por uso de la variable.

Se observa que el porcentaje más alto (76.4%), corresponde al uso de la variable como número general, un porcentaje menor es para la variable como relación funcional (63.6%) y el más bajo se refiere a la variable como incógnita específica (59.7%). Estos resultados hacen suponer que los profesores presentan mayores dificultades cuando se enfrentan a este último uso de la variable. Si bien el porcentaje promedio de aciertos no es el más bajo en el uso de la variable en relación funcional, las preguntas del cuestionario donde se obtuvo el menor número de aciertos son las que se refieren a este uso, específicamente en las que se tiene que interpretar la gráfica de una relación funcional para obtener valores de la variable independiente, la variable dependiente o intervalos de variación.

A continuación se presenta el análisis del cuestionario por cada uso de la variable

## La variable como número general.

El cuestionario presentó diez preguntas de la variable como número general. A continuación se presentan los porcentajes de respuesta correcta a cada una de estas preguntas.

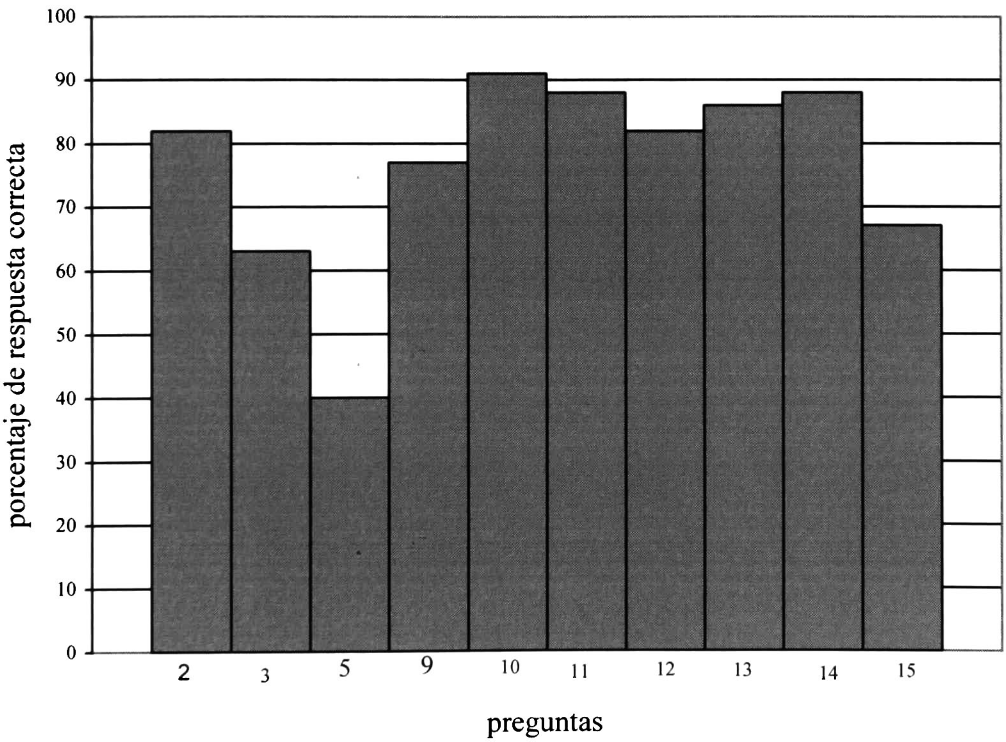



Figura 3. La variable como número general

En este uso de la variable podemos observar que la mayoría de las preguntas tiene un porcentaje de acierto por encima del 60%, esto demuestra que los profesores tienen un adecuado manejo de este uso de la variable a excepción de la pregunta 5, donde los profesores muestran más dificultades para contestar correctamente. Esta pregunta tiene el 40% de respuesta correcta e implica determinar cuántos valores puede tomar la variable en la siguiente expresión:

$$(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$$

La mayoría de los profesores contestó que puede tomar sólo dos valores. La respuesta correcta es que la variable puede tomar infinidad de valores ya que se trata de una identidad. Con esta respuesta que dieron la mayoría de los profesores, nos damos cuenta que como se trata de una expresión cuadrática ellos automáticamente contestan que la variable solo puede tomar dos valores sin analizar la expresión. Los profesores consideran que se trata de una ecuación de segundo grado, por lo tanto ven a la variable como una incógnita que sólo puede tomar dos valores.

## La variable como incógnita específica

Con respecto a este uso de la variable, como ya se mencionó, los profesores obtuvieron, en promedio, los porcentajes de respuestas más bajos, cabe mencionar que las preguntas donde se obtuvieron más altos porcentajes en este uso de la variable, son muy sencillas y en las preguntas con un poco de mayor dificultad, los profesores tuvieron muchos problemas para contestar correctamente.

Consideramos que otra razón es que no reflexionan sobre la pregunta, y en automático resuelven la ecuación, como en la pregunta 4 que dice: en la expresión $7x^2 = 2x - 5$¿cuántos valores puede tomar la letra? la mayoría resolvió la ecuación. Creemos que todo lo anterior contribuyó para que los resultados en este uso de la variable fueran diferentes a lo que reporta la literatura especializada.

La siguiente gráfica muestra el porcentaje de respuesta de las siete preguntas de este uso de la variable.

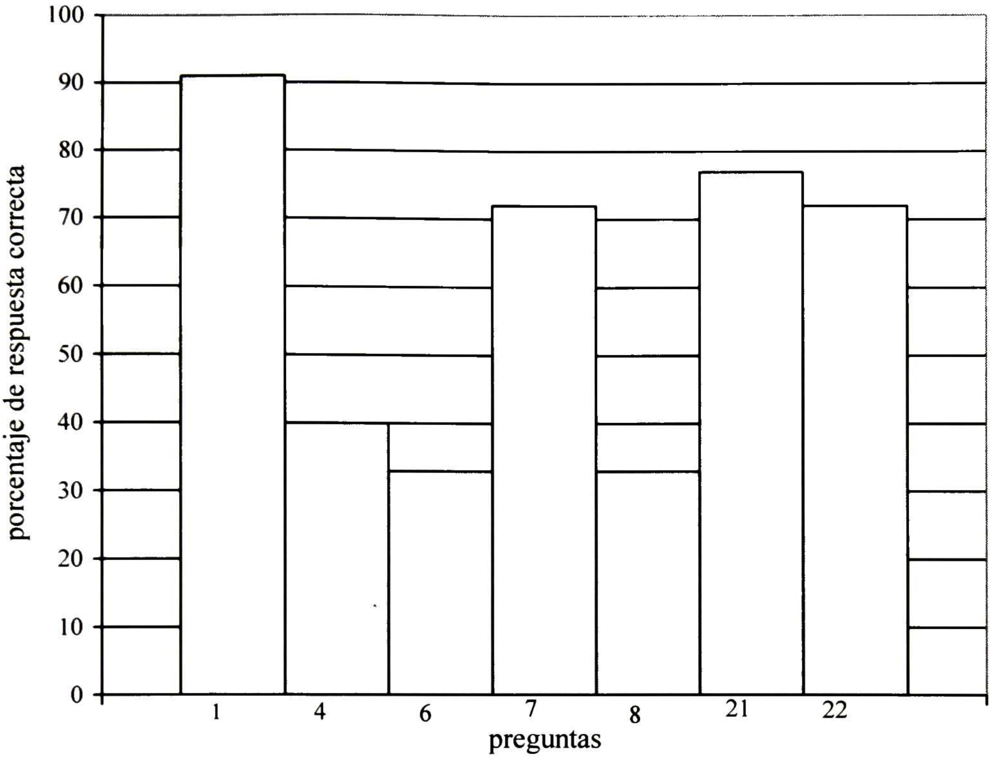



Figura 4. La variable como Incógnita específica

La gráfica nos muestra que en el uso de la variable como incógnita especifica, los profesores tuvieron mayores problemas, puesto que las preguntas 4, 6 y 8 muestran porcentajes por abajo del 40% .

*Para cada una de las siguientes expresiones ¿cuántos valores puede tomar la letra?*

4. $7x^2 = 2x - 5$

Algunas respuestas incorrectas que dieron los profesores fueron:

Infinito

Uno

$$7x^2 - 2x + 5 = 0$$

*Para cada una de las siguientes expresiones escribe los valores que puede tomar la letra:*

6. $(x + 3)^2 = 36$

Algunas respuestas que dieron los profesores fueron:

3

No tiene solución real

Un valor

$X = \sqrt{27} = 5.$

Infinito

$x^2 + 6x - 27 = 0$

8. $\dfrac{10}{1 + x^2} = 2$

Las respuestas que dieron los profesores fueron:

Uno

Dos

$x = 2$

$x = -\frac{1}{2}$

$10 = 2(x^2 + 1) = -2x^2 + 9$

Los profesores aunque intentaron resolver las ecuaciones, la mayoría de ellos lo hicieron de forma equivocada.

Se observa que los profesores tienden a resolver inmediatamente las ecuaciones, sin hacer un análisis de lo que se pregunta y de las expresiones mismas. Generalmente esto es lo que se hace en la enseñanza, plantear problemas donde el propósito es buscar los valores que tiene la incógnita. Los profesores no analizan que en el caso de las pregunta 4 la variable se presenta como incógnita y que por lo tanto ésta tomará dos valores; que pueden ser reales o no. En las preguntas 6 y 8 se percibe que se les dificulta la manipulación de las expresiones algebraicas.

## La variable en relación funcional

El cuestionario presentó quince preguntas de la variable en relación funcional. A continuación se presentan los porcentajes de respuesta correcta a cada una de estas preguntas.

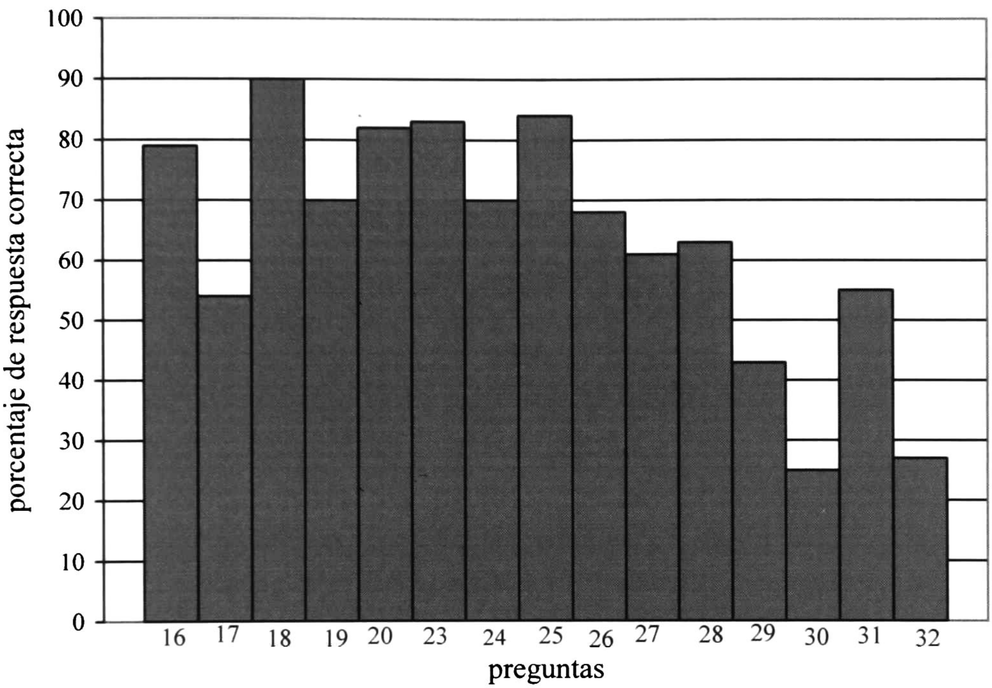



Figura 5. La variable en relación funcional

En este uso se observaron mayores dificultades en los profesores, pues como se muestra en la figura 5 las preguntas con un porcentaje de acierto menor a 60% son la 17, 29 30, 31 y 32. En las tres últimas se requiere que se reconozca la relación entre las variables dependiente e independiente y que se identifique el intervalo de variación entre las variables, que en este caso están representadas en una gráfica. Sin embargo, es en este uso de la variable donde hay un mayor número de preguntas con porcentaje mayor al 80%, como la 20, 23 y 25 en las que se requiere que reconozcan la correspondencia entre las variables y la variación conjunta entre éstas. En estos casos la relación funcional está representada mediante una expresión analítica y mediante una tabla de valores. Podemos mencionar entonces que los profesores presentan mayor dificultad cuando la relación funcional se representa mediante una gráfica.

El siguiente cuadro nos permite ver la distribución de las preguntas con respecto a su uso y su grado de dificultad a partir de los porcentajes de respuesta de los maestros.

| Rango de porcentajes de aciertos | Variable como incógnita | Variable como número general | Variable en relación funcional | Total |
|---|---|---|---|---|
| 100%-80% MUY FÁCIL | 1 | 6 | 4 | 11 |
| 80%-60% FÁCIL | 3 | 3 | 7 | 13 |
| 60%-40% REGULAR | 1 | 1 | 2 | 4 |
| 40%-20% DIFÍCIL | 2 | | 2 | 4 |
| 20%-0% MUY DIFÍCIL | | | | |

Tabla 3. Rangos de aciertos para los tres usos de la variable

Se puede apreciar que las preguntas que se localizan con más del 80% de aciertos son 11, de las cuales 6 corresponden al uso de la variable como número general, 4 a la variable en relación funcional y 1 a la variable como incógnita. 13 preguntas se encuentran en el rango del 60 al 80% de aciertos, de las cuales 7 corresponden a la variable en relación funcional, 3 a la variable como número general y 3 como incógnita. Cabe destacar que la mayoría de las preguntas están por arriba del 60% de aciertos, por debajo de este porcentaje solo se encuentran 8 preguntas de las cuales 4 corresponden al uso de la variable en relación funcional, sin embargo, los porcentajes indican que es la variable como incógnita específica la que tiene preguntas con porcentaje de respuesta correcta menores al 60% dándonos indicio de que los profesores presentan mayores dificultades con este uso de la variable.

Podemos decir que el 25% de las preguntas tiene un porcentaje de respuesta correcta menor del 60% y si este porcentaje lo tomamos como un puntaje podemos decir que los profesores no aprueban. Lo que nos muestra que se tienen serias dificultades para identificar a la variable en sus diferentes usos, así como para interpretarla, representarla y manipularla, sobre todo cuando se trata de incógnitas.

Con base en el resultado cuantitativo de este diagnóstico podemos darnos cuenta que los profesores tienen las siguientes dificultades al trabajar con la variable:

La tendencia a no desarrollar expresiones algebraicas y realizar operaciones, o tienden a determinar el valor por simple inspección.

No reconocer los diferentes usos de la variable, sobre todo cuando se trata de incógnitas específicas y de relaciones funcionales.

- No interpretar y manejar una relación funcional expresada mediante una gráfica.

También encontramos que los profesores conocen y manejan los conceptos algebraicos que les enseñan a sus alumnos solo que en la mayoría de las ocasiones no se reflexiona acerca de la forma en que éstos se enseñan, para que los estudiantes los comprendan, en este caso las variables.

La identificación de las dificultades que presentan los profesores, nos permitirán entender de mejor manera sus respuestas, opiniones y participaciones en el desarrollo de las sesiones del taller.

## 4.2 Análisis cualitativo de los resultados

En este punto se presentan los resultados del taller a partir del desarrollo de las sesiones. Para realizar el análisis se tomó en cuenta:

- las respuestas a las preguntas planteadas al final de las lecturas
- las participaciones y comentarios que los profesores realizaban en cada una de las sesiones
- el análisis de las actividades que los profesores rediseñaron utilizando el modelo 3UV.
- las preguntas planteadas por los profesores en cada una de las actividades que rediseñaron utilizando el modelo 3UV.

Los resultados y el análisis se presentan por sesión.

### Sesión 1. Las dificultades de los niños en el inicio del álgebra.

Al iniciar la primera sesión se repartió el cuadernillo guía del taller a cada uno de los 57 profesores. Cabe mencionar que al principio los profesores estuvieron expectantes, no preguntaban ni comentaban nada, solo escuchaban a la coordinadora del taller. El ambiente se sentía un poco tenso, la coordinadora supuso que esta situación se debía sobre todo a que los profesores no sabían exactamente si se les evaluaría y si los resultados de dicha evaluación las tendrían sus directores.

La coordinadora leyó el índice y los propósitos de las sesiones. Se les aclaró que el propósito del cuestionario era una autoevaluación de conceptos matemáticos, específicamente de álgebra y del manejo de la variable. Se les comentó que los resultados servirían para el trabajo que estábamos realizando, que nadie más iba a tener acceso a ellos e inclusive se les mencionó que no era necesario que escribieran su nombre en el cuestionario. Después de estas aclaraciones los profesores se relajaron y empezaron a contestar las preguntas. Este trabajo lo concluyeron en dos horas.

Una vez que terminaron de contestar el cuestionario se analizaron en plenaria cada una de las preguntas y respuestas de dicho cuestionario. A continuación se presentan algunas de ellas.

En la pregunta 2: *Para la siguiente expresión, ¿cuántos valores puede tomar x?*

$$x+2 = 2+x$$

La respuesta correcta es infinito número de valores. Poder responder esta pregunta implica ver a la variable como un número general; reconocer que en esta expresión puede representar una infinidad de valores y que no es necesario sustituir ningún valor ni obtener una respuesta numérica. Sin embargo un profesor comentó:

*Si a x le pongo un número por ejemplo 4+2 y hago la igualdad es un único valor, estarás de acuerdo que al alumno generalmente se le traduce en un problema que tiene una solución única.*

En este caso, la respuesta del profesor refleja su tendencia a ver el álgebra como la solución de ecuaciones, donde siempre hay que encontrar un valor numérico. El uso que el profesor le da a la variable es como incógnita y según lo reportado en algunas investigaciones, es el mayor uso que también se trabaja en los libros de texto (Landeros, 2003).

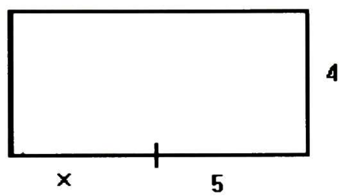
En la pregunta 5 del cuestionario: *¿cuántos valores puede tomar la letra en la siguiente expresión?*

$$(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$$

Muchos profesores contestaron que solamente puede tomar 2 valores y al comentar que la respuesta correcta es infinito número de valores, un profesor respondió que *el exponente nos da el número de resultados.* Esto obedece a que los profesores defienden sus creencias aunque éstas sean erróneas. Su análisis de la expresión se limita a inspeccionar los exponentes y la tendencia a resolver cualquier expresión algebraica. No reparan que es una identidad y que cualquier valor que se le asigne a la variable, la hará válida.

En la pregunta 11:

*El perímetro de una figura se calcula sumando la longitud de sus lados. Escribe la fórmula que expresa el perímetro de la siguiente figura.*




Tanto los profesores como los alumnos, siempre quieren dar una respuesta numérica, pues se tiene la tendencia a asignar un valor a $x$, lo cual se puede apreciar en los siguientes comentarios:

Ante la respuesta

$$P=2(x+5)+8 \quad ó \quad 2(x+5)+8$$

Un profesor dijo: *esa sería una respuesta parcial porque no conocemos el valor de x.*

Otros profesores preguntaron: *¿cuál es el valor de x?*

En la pregunta 20: *Considera la siguiente expresión*

$$y = 3+x.$$

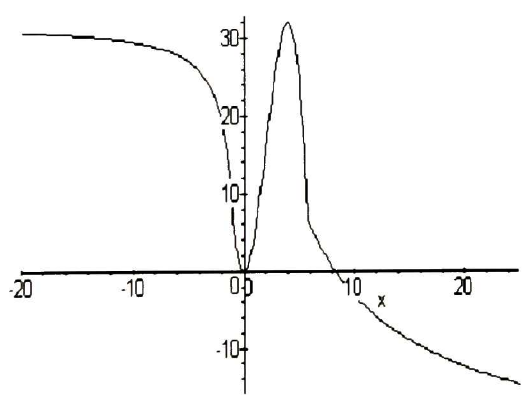
*Si x toma valores entre 8 y 15, ¿entre qué valores caerán los valores de y?*

La respuesta correcta es el intervalo $11 \leq y \leq 18$ sin embargo hubo respuestas de profesores como la siguiente:

*Si nos vamos con los chavos, el papel del maestro para poder calificar es estricto, y no nos vamos a poner a revisar cada uno de los valores.*

Lo que el profesor quiso decir con esta respuesta es que con los alumnos solamente se deben manejar los valores 11 y 18, es decir sólo los valores extremos del intervalo, no todo el intervalo. Lo cual nos deja ver que el trabajo con intervalos no es algo que los profesores trabajen en clase. Se limitan a determinar el valor de una variable a partir del valor de la otra. Esto coincide precisamente con las preguntas relacionadas con intervalos de variación en este cuestionario donde se presentaron mayores dificultades.

En la pregunta 31 y 32. *Dada la siguiente gráfica:*




*31. ¿Para qué valor de x, se obtiene el valor máximo de y?*

*32. ¿Para qué valor de x se obtiene el valor mínimo de y?*

Un profesor comentó:

*La gráfica representa una función cúbica, pero como no se conoce la función no se puede decir cual es el valor máximo y cuál es el valor mínimo.*

Otro profesor comentó:

*No se aprecian bien los valores de la gráfica, por lo que no se puede determinar con exactitud los valores máximos y mínimos.*

Como se observa, los maestros siempre tendrán un argumento para justificar su desconocimiento. Reconocer que no se sabe algo es muy difícil de aceptar cuando se tiene la creencia que como maestros, y de matemáticas, debemos saber todo.

El jefe del área técnica de la asignatura de matemáticas de la zona comentó:

*Hablando honestamente la parte de funciones nos la saltamos porque es un tema que nos cuesta mucho trabajo.*

Este comentario, en este taller, cuyo propósito es que los profesores reflexionen sobre su práctica, nos permite ver que efectivamente es muy importante que los maestros acepten sus limitaciones y que hagan algo por resolverlas. Los profesores no abordan el tema relacionado con funciones que marca el programa porque es un tema difícil para muchos de ellos.

El papel del profesor como el poseedor del conocimiento y además infalible se refleja en las actitudes que tomaron los profesores al ir revisando el cuestionario ya que al ir leyendo las preguntas la mayoría de los profesores contestaban en voz alta la respuesta numérica, como hacen los estudiantes, un tanto para demostrar ante los demás sus conocimientos.

Algunos profesores decían que algunas preguntas eran confusas y no se entendía lo que se preguntaba, pues no se podía dar una respuesta numérica. Ellos solamente conciben las respuestas numéricas, esta concepción que tienen los profesores se refleja en los estudiantes.

La segunda actividad de la primera sesión consistió en la lectura del artículo que habla de los errores que con más frecuencia cometen los estudiantes de secundaria en el álgebra. Esta lectura se realizó de manera individual.

Después de la lectura los comentarios de los profesores coincidieron con lo que plantea la lectura, algunos comentarios fueron:

*Los niños siempre quieren dar una respuesta numérica.*

*Los muchachos, al resolver una ecuación simple y si el valor de **x** es 1, siempre quieren dar el mismo valor a x, para ellos x siempre va a valer 1.*

*Cuando aplicamos la propiedad distributiva, cuando lo hacen con números no se les hace difícil pero si le ponemos letras se pierden.*

Finalmente, los profesores tomaron conciencia de los errores que cometen los estudiantes, pues otro profesor comentó: *nosotros ya estamos contaminados y no visualizamos o no nos preguntamos porqué los alumnos tienen esos errores*

Como podemos ver, esta lectura ayudó a los profesores a reconocer que las dificultades que tienen sus alumnos no son propias de ellos, ni sólo de los niños mexicanos. Son dificultades que se presentan comúnmente en cualquier estudiante cuando inicia el estudio del álgebra. Lograr que los profesores se hagan la pregunta *¿por qué los alumnos tienen esos errores?* Es el primer paso para reconocer que hay algo en el proceso de enseñanza aprendizaje que es necesario modificar.

**Sesión 2. ¿Qué son esas cosas llamadas variables? y el modelo 3UV**

Esta sesión empezó con la lectura del artículo "Qué son esas cosas llamadas variables" de S. Wagner, que los profesores hicieron de manera individual, posteriormente contestaron las preguntas planteadas en el cuadernillo. Después de la lectura no hubo comentarios al respecto, y nos dimos cuenta que algunos profesores volvieron a leer el artículo, por lo que creemos tuvieron dificultad para comprender la lectura, lo que les generó inseguridad para expresar sus opiniones.

Finalmente los profesores empezaron a hacer comentarios sobre la lectura: *en matemáticas las letras representan valores, la diferencia entre las letras y los números es que cada número tiene un único valor y las letras o literales pueden tomar valores diferentes, hay letras que solo asumen un valor como $\pi$ o como e.*

Con el propósito de ayudarlos, la coordinadora les planteaba preguntas como *¿que diferencia hay entre la expresión 3mn y el número 345?*, los profesores contestaron: *la expresión significa que hay que multiplicar el 3 con el valor de m y de n y en el número pues cada dígito toma un valor de acuerdo a su posición, pero no se trata de una multiplicación entre ellos.*

Otros comentarios fueron: *Lo primero es que cada uno de nosotros tendremos que volver a leer el artículo para asimilar mejor su contenido; lo que hay que aceptar es que no estamos acostumbrados a leer y mucho menos lo relacionado con nuestra materia.*

Los profesores poco a poco fueron aceptando que se tienen carencias y debilidades con respecto al concepto de variable. El aceptar que no se tiene todo el conocimiento, es fundamental para empezar a indagar o investigar eso que se desconoce y para explorar nuevas alternativas que hay para la enseñanza de las matemáticas; sobre todo aquellas que faciliten su aprendizaje.

Los contenidos de los talleres y/o cursos que la Secretaría de Educación Pública imparte a los profesores en servicio, difícilmente se incluyen temas matemáticos; dichos cursos generalmente se utilizan para hacernos llegar los programas institucionales que se implementan a nivel nacional por parte de las autoridades educativas. Hace falta una oferta de formación y actualización que permitan al profesor adquirir mejores conocimientos matemáticos y estrategias didácticas que puedan implementar en su salón de clases.

Posteriormente se hizo la presentación del Modelo 3UV (mediante una presentación de power point), como un modelo que describe a la variable como un concepto matemático que tiene diferentes facetas que se muestran dependiendo del contexto en el que esté presente. Se señaló además que en el álgebra elemental aparecen esencialmente 3 usos de la variable: como número general, como incógnita específica y en relación funcional. Se estableció que cada uso está asociado a una serie de aspectos que están presentes en cualquier actividad algebraica. Se precisó que el Modelo 3UV consiste en una descripción detallada de los aspectos básicos de cada uso de la variable y que son necesarios para resolver los problemas que tiene que ver con el álgebra elemental y que requiere capacidades como: reconocer, interpretar, simbolizar y manipular las variables.

Se explicó que cuando hablamos de reconocer nos referimos a las acciones como percibir ya sean patrones, reglas y métodos en secuencias y en familias de problemas; percibir en una situación problemática la presencia de algo desconocido que puede ser determinado tomando en cuenta las restricciones del problema; la correspondencia entre variables; la variación.

Cuando decimos interpretar nos referimos a que debemos ser capaces de expresar de forma oral o escrita el significado de una representación simbólica de un número general, o del símbolo que represente un valor específico, o del símbolo que represente un número cuyo valor depende de otra variable.

Cuando hablamos de simbolizar nos referimos a tener la capacidad de representar expresiones, enunciados, métodos, reglas utilizando símbolos o cantidades desconocidas que pueden ser identificadas en problemas y utilizarlas para plantear ecuaciones o para simbolizar una relación funcional basada en el análisis de los datos.

Cuando hablamos de manipular nos referimos a la habilidad para operar con los símbolos que constituyen las expresiones algebraicas. Durante toda la presentación los profesores estuvieron en silencio y atentos a la exposición. Volvemos a destacar que para los profesores no fue sencillo comprender los conceptos que se estaban exponiendo; pero son temas que les resultaban interesantes, pues algunos comentaron, *sería más benéfico que en los TGA (Talleres Generales de Actualización), se abordaran temas que nos aporten algo nuevo, como éstos y no los que casi siempre se nos brindan.* A partir del ciclo escolar 2010 -2011, hubo cambio en el nombre, ahora se llama Curso Básico de Formación Continua para Profesores en Servicio, sin embargo el contenido no cambió.

**Sesión 3. La variable como número general**

La sesión empezó con la lectura del artículo "Los niños y las variables" de Ursini (1994), que se refiere al uso de la variable como número general. Posteriormente se leyeron los cinco aspectos que se consideran para este uso de la variable (Anexo 1). Estas actividades se realizaron de manera individual.

Después se presentó y analizó un problema geométrico en el cual el uso de la variable es como número general. (Anexo 1) De acuerdo al Modelo 3UV, se trata de que los profesores sean concientes de lo que implica poder resolver correctamente el problema. También se presentaron las posibles preguntas guía que el profesor podría plantearles a los estudiantes para comprender y resolver correctamente el problema.

En seguida, los profesores organizados en equipo modificaron una actividad de acuerdo al modelo 3UV. En el cuadernillo guía del taller están planteados dos problemas, así cada equipo decidió qué problema trabajar. También se les dio la opción de que ellos plantearan algún problema nuevo, sin embargo ningún equipo lo hizo.

Uno de los equipos trabajó el siguiente problema:

*En las orillas de un río crecen dos palmeras, una mide 30 metros y la otra 20 metros de altura, en la parte alta de cada palmera hay un pájaro. De pronto los dos pájaros ven un pez que aparece en la superficie del río. Los dos pájaros se lanzan sobre el pez y lo pescan al mismo tiempo. Encuentra las expresiones algebraicas que permitan calcular las distancias que recorren los pájaros. La distancia entre las palmeras es de 50 metros.*

Un profesor pasó al pizarrón para explicar cómo en su equipo resolvieron el problema. Después de varias operaciones algebraicas, resultó que las distancias eran de 20 metros, porque supuso que las distancias eran iguales. La coordinadora intervino, pues ningún profesor cuestionó el resultado. La coordinadora sugirió que volvieran a leer el problema, pues la pregunta del problema era encontrar una expresión algebraica y no el valor de las distancias.

Los profesores se mostraban un tanto confundidos, por lo que se les mostró otro ejemplo para esclarecer sus dudas.

Así mismo se volvió a puntualizar que la dificultad para definir la variable está en su carácter multifacético, que los estudiantes no logran apropiarse de la esencia de este concepto y desarrollar la capacidad de pasar de manera flexible entre sus distintos usos (Matz, 1982; Usiskin, 1988; Trigueros and Ursini, 1999).Que las dificultades con la variable puede ser una de las causas de sus dificultades para aprender álgebra.

Que lo que subyace a una buena comprensión de la variable es la capacidad de:

Calcular y operar con los símbolos literales, comprender porqué son necesarias estas operaciones, darse cuenta de la importancia que tienen las variables para modelar situaciones de distinto tipo, distinguir entre sus diferentes usos, y pasar entre los distintos usos de manera flexible. Integrar los distintos usos de la variable como caras distintas de un mismo objeto matemático, que se revelan dependiendo de la situación particular.

Que para lograr lo anterior, el Modelo 3UV propone el planteamiento de preguntas guía que permitan al estudiante la mejor comprensión de cada uno de los usos de las variables.

Por un lado ellos se daban cuenta de sus errores, sin embargo, estamos tan acostumbrados a no ser reflexivos, y además, tenemos ideas que hemos aplicado por años en nuestra labor docente que son difíciles de cambiar, y tampoco estamos acostumbrados a que nos cuestionen o a cuestionarnos la manera en que enseñamos. A pesar de que como profesores no aceptamos la crítica y tampoco aceptamos que nos evalúen, ellos descubrieron que existen trabajos de investigación de temas matemáticos en los que difícilmente habían reflexionado, y lo más importante, como en el caso del Modelo 3UV que se trata de una propuesta que se puede aplicar en el aula.

Finalmente los profesores presentaron las expresiones algebraicas que resuelven el problema.

Una vez que pudieron comprender y resolver el problema, los profesores pudieron plantear algunas preguntas que acompañarían al problema y que ayudarían a los estudiantes a comprenderlo y resolverlo. A continuación se presentan las consignas y preguntas que los profesores plantearon:

*Realiza el esquema que represente la situación del problema*

Esta consigna ayuda a que los estudiantes hagan una representación de la situación que se les plantea y reconocer que se comprende lo que se dice y lo que se busca. Sería conveniente que desde esta representación los estudiantes utilizaran variables para representar las distancias que no se conocen

*¿Cómo representas la distancia de la palmera al pez?*

*¿Cómo representas la distancia de la otra palmera al pez?*

*¿Qué representa la x?*

Preguntas directas como éstas, exigen del estudiante que haga una representación algebraica de la situación. Para representar, el alumno tiene que haber hecho una interpretación de los datos. Reconocer que hay datos que no conocen su valor y al representarlos con una literal, sabe que existe, que es, que no lo conoce pero que tiene un valor

En el segundo problema planteado:

*En la siguiente secuencia deduce una regla para encontrar el número de cuadrados de la enésima figura.*

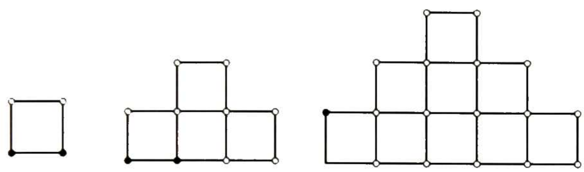


figura 1 figura 2 figura 3 figura 4 figura 5

Las preguntas guía propuestas por los profesores fueron las siguientes:

*-De acuerdo a la figura 1,2 y 3, ¿que número de cuadros le corresponden a la figura 4 y a la figura 5?*

*¿Cuáles son las variables que intervienen?*

*- ¿Cómo identificas a las variables?*

*-¿Qué relación existe entre el número de figura y el número de cuadros?*

Al plantear estas preguntas se trata que los estudiantes reconozcan que hay una secuencia entre las figuras y que éstas siguen un patrón, que reconozcan e interpreten a la variable simbólica como la representación de una entidad general.

*-¿Cuál es la regla general?*

Una vez que reconocieron la secuencia y el patrón, con esta pregunta los estudiantes podrán establecer la expresión algebraica que define el patrón que siguen las figuras.

En este problema, algunos profesores al plantear las preguntas, utilizaron los símbolos que sugiere el modelo 3UV para identificar los aspectos de la variable que se estaban utilizando, en este caso, G2, G3 y G5.

-*¿Qué representa el No. Fig. en relación al No. de cuadros? (G2)*

*¿Qué figura contiene 10,000 cuadrados? (G3)*

- *¿Cuál es la expresión que define el resultado? (G5)*

-*¿Existe alguna diferencia de la regla entre una figura par e impar? (G3) (G5)*

En un primer intento para plantear las preguntas guía se observa que algunas de ellas no son adecuadas para que los estudiantes puedan resolver el problema y a su vez que interpreten a la variable simbólica como la representación de una entidad general, indeterminada, que puede asumir cualquier valor (G2); que deduzcan reglas y métodos generales, en secuencias y en familias de problemas (G3); y que simbolicen enunciados, reglas o métodos generales (G5). Dado que el diseño de actividades, y la elaboración de preguntas no es una tarea sencilla, de ahí la importancia que los profesores conozcan esta herramienta teórica (El Modelo 3UV) y la utilicen para el rediseño de las actividades que trabajan en el aula.

**Sesión 4. La variable como incógnita**

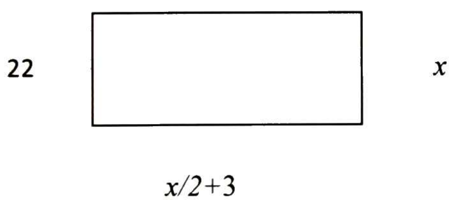
Esta sesión al igual que la anterior inició con la lectura del fragmento del artículo "Los niños y las variables" de Ursini (1994), que se refiere al uso de la variable como incógnita específica. También se leyeron los cinco aspectos que se consideran para este uso de la variable, de acuerdo al modelo (Anexo 1). Las lecturas se realizaron de manera individual.

La siguiente actividad consistió en la presentación y análisis de un problema geométrico en el cual el uso de la variable es como incógnita específica (Anexo 1). Al igual que en la sesión anterior, se trata que los profesores tomen conciencia de lo que implica para los estudiantes resolver correctamente el problema, basados en esto, también se presentaron las posibles preguntas guía que el profesor puede plantear a los estudiantes para guiarlos en su proceso de aprendizaje.

En seguida, los profesores organizados en equipo rediseñaron una actividad de acuerdo al modelo 3UV. En el cuadernillo guía del taller están planteados dos problemas, así cada equipo decidió que problema trabajar. También se les dio la opción de que plantearan algún problema, sin embargo ningún equipo lo hizo. El problema que los profesores expusieron fue el siguiente:

*¿Cuáles son las dimensiones de un rectángulo (base y altura), cuyo perímetro es de 72 cm, si la base es 3 cm mayor que la mitad de la altura?*

Uno de los equipos presentó el siguiente trabajo:




El dibujo que los profesores presentaron no representa correctamente la situación que plantea el problema. Se comentó que es importante tener cuidado y verificar los datos antes de presentarlos a los estudiantes, pues errores como éstos los confunden todavía más. Sin embargo las preguntas que plantearon fueron adecuadas para solucionar el problema.

*¿Cómo obtienes el perímetro del rectángulo?*

Esta pregunta hará que los estudiantes utilicen sus conocimientos previos, y el profesor podrá darse cuenta del dominio que éstos tienen del concepto de perímetro.

*¿Cómo representas la altura del rectángulo?*

Esta pregunta hará que los estudiantes representen mediante una variable el valor de la altura del rectángulo, ellos están reconociendo que hay un valor desconocido pero que se puede conocer.

*¿Qué expresión representa la base de la figura?*

*¿Qué haces para obtener la base del rectángulo?*

Al plantear estas preguntas se trata que los estudiantes traduzcan a un lenguaje matemático representado por una expresión algebraica la situación del problema.

*¿Cómo expresas el perímetro del rectángulo?*

*Desarrolla la expresión para obtener el valor de la incógnita*

Una vez que reconocieron que las medidas del rectángulo estan dadas por expresiones algebraicas, los estudiantes podrán plantear la ecuación y finalmente operar para encontrar el valor de la incógnita.

Pudimos darnos cuenta que en esta sesión los profesores se llevaron menos tiempo para plantear y redactar las preguntas guía que en la sesión anterior, lo que nos llevó a pensar que les resultó menos difícil el desarrollo de la actividad. Sin embargo, se observó que no todos los profesores tienen la habilidad aún de usar el modelo para plantear preguntas adecuadas, pues hubo quienes plantearon preguntas que no resultan relevantes para el aprendizaje de los estudiantes.

*¿Cuánto mide la altura del rectángulo?*

*-¿Cuánto mide la base del rectángulo?*

*-¿Con que fórmula obtienes el perímetro de un rectángulo?*

Esto nos demuestra que es necesario que a los profesores se nos ofrezcan cursos – talleres como el que se implementó, con el objeto de hacernos llegar el resultado de las investigaciones. Pero un solo taller no es suficiente para un cambio total. Este primer taller es el agente que puede lograr que el maestro se interese y se motive en continuar con su actualización. Un esfuerzo aislado es muy probable que no logre un buen impacto tanto en el conocimiento de los maestros como en su trabajo en el aula y por supuesto en el aprendizaje de los estudiantes.

**Sesión 5. La variable en relación funcional**

Al inicio de la sesión los profesores leyeron el fragmento del artículo "Los niños y las variables" de Ursini (1994), que se refiere al uso de la variable en relación funcional. También se leyeron los cinco aspectos que se consideran para este uso de la variable (Anexo 1). Las lecturas se realizaron de manera individual.

La siguiente actividad consistió en la presentación y análisis de un problema geométrico en el cual el uso de la variable está en relación funcional. (Anexo 1). La dinámica de trabajo fue la misma que en la sesión anterior. Los profesores escogieron trabajar con el siguiente problema:

*Un tinaco se llena de agua a razón de 4 litros por minuto. Se quiere saber cuántos litros tendrá el tinaco en cierto tiempo. Encontrar la función que representa dicha actividad.*

Las preguntas que los profesores plantearon son las siguientes:

-*¿Cuántos litros de agua tendrá el tinaco en 3 minutos?*

-*¿Cuántos litros de agua tendrá el tinaco en 7 minutos?*

-*¿Cuántos litros de agua tendrá el tinaco en 15 minutos?*

Son estas preguntas las que harán que los estudiantes reconozcan que hay una relación entre el tiempo transcurrido y el volumen de agua del tinaco y tendrán que obtener los valores de la variable dependiente dados los valores de la variable independiente.

-*¿De qué depende la cantidad de agua que tenga el tinaco?*

-*¿Cuáles son las variables que intervienen en este problema?*

Al plantear estas preguntas los alumnos podrán reconocer que hay dos variables una dependiente (volumen de agua) y otra independiente (tiempo).

- *¿Cuántos litros de agua tendrá el tinaco en n minutos?*

-*¿Qué expresión algebraica se obtiene si relacionas la cantidad de agua que cae en el tinaco y el tiempo?*

Para los estudiantes será más sencillo plantear la expresión algebraica si ya reconocieron cual es la relación entre las variables

En esta actividad los profesores estuvieron muy participativos y plantearon un mayor número de preguntas guía.

Un profesor comentó al término de la actividad que *ahora ya podemos volver a contestar el cuestionario.* Este comentario nos deja ver que el maestro está viendo al modelo como una herramienta que le permite reflexionar en el problema algebraico que resuelve. Le permite ir más despacio y analizar lo que realiza y no "dejarse llevar" por la inercia de contestar por contestar sin analizar el problema.

Las evidencias obtenidas en cada una de las sesiones nos muestran lo que cotidianamente ocurre en los salones de clase de las escuelas secundarias.

Por un lado los profesores tenemos creencias fuertemente enraizadas con respecto al álgebra, algunas de ellas erróneas, estas creencias nos limitan a no analizar las causas por las que los estudiantes tienen tantas dificultades para comprender el álgebra y que ésta deficiente comprensión los lleva a cometer errores que van arrastrando desde los niveles básicos hasta incluso niveles universitarios. También encontramos que en los niveles básicos de la educación, los estudiantes cometen los mismos errores en el manejo de la variable que cometen sus profesores.

Por lo que estamos convencidos de la utilidad que tiene el curso- taller que se elaboró y se implementó y lo consideramos una buena opción de actualización para los profesores, que están interesados en conocer y aplicar alternativas ya probadas en la enseñanza del álgebra que den como resultado una mejor comprensión de las matemáticas.

**Sesión 6. Actividades Integradoras**

Los profesores leyeron el contenido de la sexta sesión del cuadernillo guía del taller, allí se explica que en las actividades integradoras se trabaja con los usos de la variable de forma conjunta, es decir, se pasa de uno a otro durante la resolución del problema y el propósito es que los estudiantes desarrollen la capacidad de pasar entre los distintos aspectos y los distintos usos de la variable de manera flexible. Se les presentó un ejemplo de una actividad integradora para que observaran cómo se plantean preguntas de cada uso de la variable.
Por cuestiones de tiempo, en esta actividad no hubo oportunidad para que los profesores expusieran su trabajo ante el grupo.

Lo que se observó en esta sesión fue que los profesores tuvieron dudas acerca del orden de las preguntas para ir trabajando cada uso de la variable, así mismo algunos maestros no tenían mucha claridad respecto a cómo integrar los tres usos en un sólo problema, pero sus dudas se fueron esclareciendo al presentarles el ejemplo, y con la participación del grupo.

# CAPITULO 5. CONCLUSIONES Y REFLEXIONES

Una vez concluído el Taller para profesores de matemáticas La enseñanza del álgebra escolar a través del modelo 3UV, y después de analizar los productos obtenidos en cada una de las sesiones, se presentan las siguientes conclusiones.

Los profesores que participaron en el taller:

- Tienen dificultades en el manejo de los tres usos de las variables : para reconocer los diferentes usos y sobre todo cuando se trata de incógnitas específicas y de relaciones funcionales.
- Tienen la tendencia a realizar operaciones y tratar de encontrar siempre un valor numérico como respuesta y no aceptar expresiones algebraicas como tal al resolver un problema
- Tienen dificultad para interpretar y manejar una relación funcional expresada mediante una gráfica.
- Muchos de los participantes, se muestran reacios ante la crítica sobre todo cuando se trata de su trabajo docente.
- Dificilmente aceptan que se evalúen sus conocimientos matemáticos.
- Reconocieron y recapacitaron acerca de los errores que cometen los estudiantes y ellos mismos en el manejo de las variables.
- Reconocieron sus debilidades en la enseñanza del álgebra.
- Reconocieron que no lo saben todo y que es importante mantenerse actualizados.
- Reconocieron al modelo 3UV como un apoyo en su trabajo de enseñanza del álgebra. Sobre todo en el rediseño de problemas, planteando mejores preguntas que puedan promover una mejor reflexión del problema a resolver y por lo tanto, una mejor comprensión del álgebra.

En el transcurso de las seis sesiones del taller, se presentaron algunas de las investigaciones que se han realizado en relación con el uso y manejo de la variable; de los errores que se cometen al trabajar con la variable y su conceptualización, al leer estos trabajos los profesores tomaron conciencia de sus limitaciones, reconocieron una de las causas por lo cual sus alumnos tienen tantas dificultades para comprender el álgebra, y conocieron una estrategia alternativa para enseñar el álgebra. Lo anterior creemos será de gran utilidad para los profesores pues en la medida que ellos tengan más información tendrán la posibilidad de presentar actividades mejor diseñadas que facilite el aprendizaje del álgebra a sus estudiantes.

Una limitante del taller fue la cantidad de profesores y el tiempo que se destinó a cada una de las sesiones, consideramos que con grupos más reducidos se tendrían mejores resultados, y trabajar una sesión por día como se planeó inicialmente.

Aún cuando los profesores se muestran reacios a ser evaluados, a ser cuestionados en sus conocimientos matemáticos y didácticos, siempre están esperando que alguien les ofrezca recursos y apoyos para su trabajo docente. Motivarlos a actualizarse y a conocer y utilizar otras estrategias o modelos en el aula, diferentes a lo que siempre han hecho, es todo un reto. Un taller de 15 Horas, no es suficiente para que el profesor conozca a fondo el modelo 3UV. Es importante que el profesor lo siga estudiando y vaya desarrollando esa habilidad de plantear mejores preguntas que son las que guían el proceso de enseñanza y aprendizaje. Esperamos que los profesores participantes en este taller sigan motivados en el estudio y en el uso del modelo como una estrategia que puede apoyar su trabajo. Sería muy valioso que también se pudieran implementar talleres exclusivamente para el rediseño y análisis de actividades y lograr que cada colectivo docente pudiera elaborar cuadernillos de actividades, bien planeadas, que pudieran trabajar en su salón de clases, de acuerdo a las necesidades de su escuela y de sus grupos.

Finalmente, como parte del gremio de profesores de matemáticas en escuelas secundarias del Estado de México, y después de haber cursado esta maestría, nuestra recomendación es que se sigan implementando talleres de este tipo a los profesores que desempeñan su labor en los niveles básicos tanto en primaria como en secundaria. Que las autoridades ofrezcan los espacios y el tiempo para que los maestros tengan la oportunidad de conocer los resultados de las investigaciones en matemática educativa para que estos esfuerzos se reflejen en el aprendizaje de los estudiantes mexicanos.

El haber cursado la maestría me dejó una serie de enseñanzas en muchos aspectos: aprendí primero a ser más analítica y a ser reflexiva sobre todo con las respuestas erróneas que dan los estudiantes a los cuestionamientos matemáticos, esto me ha servido para buscar y elaborar actividades que fomenten un mejor entendimiento de los conceptos matemáticos en los estudiantes.

El Proyecto de Desarrollo, también me dejó una gran enseñanza, específicamente sobre el álgebra escolar, con toda la bibliografía especializada que no conocía, y que me ha sido de gran utilidad en mi trabajo docente.

# REFERENCIAS

Ander-Egg, E. (1999). *El taller: una alternativa de renovación pedagógica.* Argentina. Editorial Magisterio del Río de la Plata.

Benítez, (2004). *Los usos de la Variable en Libros de Texto de Matemáticas para Secundaria.* Tésis de Maestría. CINVESTAV. México

Booth, L. (1984). Algebra: Children's Strategies and Errors. Windsor, England: NFER-Nelson.

Booth, L. (1988). Children's Difficulties in Beginning Algebra. *The Ideas of Algebra,* K-12. NCTM, pp. 20- 32.

Davis, R. B. (1964). Discovery in Mathematics: A text for teachers. Reading. Mass.: Addison-Wesley Publishing Co.

Enfedaque, J. (1990). De los números a las letras. Revista Semana 5.

Hirsch, C., Lappan, G. (1989). Transition to High School Mathematics. Mathematics Teacher 82 (November): 614- 18.

Juárez, L. J. (2002). *La comprensión del concepto de variable en profesores de matemáticas de secundaria.* Tesis para obtener el grado de maestría. CINVESTAV. México.

Küchemann, D. (1980). *The Understanding of Generalizad Arithmetic (Algebra) by Secondary School Children,* PhD Thesis, University of London.

Landeros, J. C. (2003). *Dificultades que tienen los alumnos de 6° grado de primaria para interpretar las fórmulas geométricas.* Tesis para obtener el grado de maestría. CINVESTAV. México.

López, A. L. (1996). *Construcción de la noción de variable algebraica en alumnos de nivel medio superior.* Tesis de maestría. UAQ. México.

Lozano, D. (1998). *El concepto de variable: evolución a lo largo de la instrucción matemática.* Tesis de licenciatura. ITAM. México.

Lucarelli, E., Correa, E. (1994). *Cómo hacemos para enseñar a aprender*. México: Santillana.

Matz, M. (1980). Towards a computational Theory of Algebraic Competent, Journal of Mathematical Behavior, 3, 1, pp. 93 – 166.

Montes, H. D. (2003). *Iniciación al álgebra a través de la variable: una aplicación didáctica del modelo 3UV.* Tesis para obtener el grado de maestría. CINVESTAV. México.

Morales, P L., Díaz, G. J. (2003). Concepto de variable: *Dificultades de su uso a nivel universitario.* Tesis de maestría. Universidad de Sonora.

Philipp, R. A. (1992). The many uses of algebraic variables. *Mathematics Teacher* 85 (October): 557 – 61

Rajaratnan, N. A. (1957). A study of some concepts of Algebra as used by writters of High School Text Books. Ph. D.:diss. University of Illinois at Urbana – Champaign

Rosnick, P. (1981). Some misconceptions concerning the concept of variable, *Mathematics Teacher 74* (September): 418 – 20.

Sánchez, M. L. (2006). *Estableciendo un vínculo entre investigadores y profesores: el caso de la variable multifacética.* Tesis de Maestría. CINVESTAV. México.

Secretaría de Educación Pública. Subsecretaría de educación básica (2006). Plan de Estudios de Matemáticas. México.

Secretaría de Educación Pública. Subsecretaría de educación básica y normal (2001). Libro para el maestro. Educación Secundaria. México.

Trigueros M., Reyes A., Ursini S., y Quintero R., (1996). Diseño de un Cuestionario de Diagnóstico acerca del manejo del concepto de variable en el álgebra, en enseñanza de las Ciencias, 14 (3), pp. 351 – 363.

Trigueros, M. & Ursini, S. (1999). Does the Understanding of Variable Evolve Through schooling?, en Zaslavsky, O. (Ed.), Proceedings of the XXIII PME International Conference, Haifa, Israel, p. 4 – 273, 4 – 280.

Usiskin, Z. (1988). Conceptions of School Algebra and Uses of Variables. *The Ideas of Algebra,* K – 12. NCTM, pp. 8 – 19.

Ursini, S. y Trigueros, M. (1998). Dificultades de los estudiantes universitarios frente al concepto de variable, Hitt F. (Edit), Investigaciones en Matemática Educativa II, (pp.445-459). México, Grupo Editorial Iberoamérica S.A. de C.V.

Ursini, S. & Trigueros, M. (1997). Understanding of Different Uses of Variable: A Study with Starting Collage Students, in Pehkonen, E. (Ed.), Proceedings of the XXI PME International Conference, Lahti, Finland, p. 4 – 254, 4 – 261.

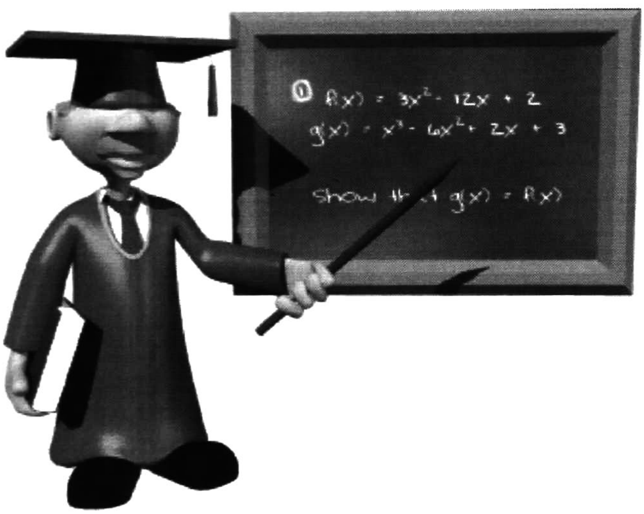
Ursini, L. S. (1994). Los niños y las variables. Educación Matemática. México, Grupo Editorial Iberoamérica, 6, 3 dic. Pp. 90- 108.

Ursini, S., Escareño, F., Montes, D., & Trigueros, M., (2005). *Enseñanza del álgebra elemental una propuesta alternativa.* México: Trillas.

Wagner, S. (1983). What are these things called variables?, *Mathematics Teacher 76* (October): 474 – 79. University of Georgia, Athens, GA.

# ANEXO 1

# TALLER PARA PROFESORES DE MATEMÁTICAS: LA ENSEÑANZA DEL ÁLGEBRA ESCOLAR A TRAVÉS DEL MODELO 3UV




## CINVESTAV

Profa. María Isabel García Torreblanca

Prof. Héctor Hugo Luna Rojas

# Índice



## Primera sesión



## Segunda sesión



## Tercera sesión

## Cuarta sesión



## Quinta sesión



## Sexta sesión

# Presentación

Pedagogos, matemáticos y profesores trabajamos para concebir las matemáticas más como "una forma de pensar" que como "una forma de hacer" el reto para nosotros como formadores de una disciplina es lograr que nuestros estudiantes desarrollen habilidades de pensamiento y el uso de herramientas que les permitan resolver problemas de su vida cotidiana y, más aun, les motiven la curiosidad innata que cada uno de nuestros niños tiene por descubrir y explicar el mundo que les rodea. El "Taller la Enseñanza del Álgebra Escolar a través del Modelo 3UV" se desarrolla en 18 horas de trabajo distribuidas en 6 semanas. A lo largo del taller se presentan algunas lecturas que nos darán fundamentos teóricos para nuestro taller y que tienen el propósito de hacernos reflexionar y revalorar nuestra visión sobre la enseñanza del álgebra. El propósito del taller es que los profesores de matemáticas frente a grupo, conozcan una alternativa más para la enseñanza del álgebra escolar; para que las y los estudiantes a su cargo, logren a su vez conocimientos significativos que les sean útiles en su proceso de aprendizaje del álgebra. Durante el desarrollo del taller los profesores podrán compartir experiencias exitosas, que han despertado el interés y gusto a nuestros estudiantes por esta disciplina, y estamos seguros que muchos de ustedes, que forman parte de esta comunidad, tienen grandes ideas que les gustaría compartir ya que lo sustantivo de este taller lo constituye el deseo de los profesores por hacer bien su trabajo, el reconocimiento de cuánto saben, de cuánto pueden aportar y escuchar, para enriquecer las formas propias de enseñar.

# Introducción

La enseñanza y aprendizaje del álgebra elemental puede centralizarse en el concepto de variable (Schoenfeld y Arcavi, 1988), éste concepto es multifacético e intentar definirlo en una sola concepción complicaría la idea de cómo utilizarla para tal fin, y a su vez, desviaría los propósitos del álgebra, es necesario comprenderlo para su uso significativo en todas las matemáticas y para lograrlo se tienen que remontar una serie de obstáculos que necesitan ser superados, y que puede depender, directamente, de la manera en que se introduce la iniciación temprana al pensamiento algebraico. El concepto de variable esta implícito en el conocimiento del álgebra de cualquier nivel e interpretarla adecuadamente como un ente multifacético que puede aparecer con dos o más usos en un mismo problema, puede ser fundamental en la comprensión del álgebra elemental.

El modelo 3UV (Tres Usos de la Variable), es un marco teórico que presentan Trigueros y Ursini (2001) como una alternativa que analiza la problemática de la enseñanza del álgebra elemental a través del concepto de variable y donde se resaltan los tres usos más significativos: como incógnita, como número general y como relación funcional de la misma, además el modelo analiza los problemas que comúnmente surgen en el aula, ideas para el diseño de estrategias que se pueden usar como actividades en la práctica docente y como un apoyo para el diseño, diagnóstico y evaluación de materiales didácticos.

El taller "La Enseñanza del Álgebra Escolar a través del Modelo 3UV" se propone para profesores de matemáticas frente a grupo como una estrategia fundamentada en la reflexión de su propia practica. Esta reflexión supone la comprensión crítica de las características de su quehacer docente y que a partir de ello es posible la reconstrucción colectiva y autónoma de dicha práctica y de nuevos referentes que contribuyan al logro de mejoras significativas en los resultados que se obtienen en la enseñanza del álgebra escolar.

# Descripción del taller

## Propósitos generales

A través de la realización de las actividades de este taller se espera que los profesores:

1). Tomen conciencia de las dificultades que presentan los estudiantes en la comprensión de la variable en álgebra elemental.

2). Conozcan el modelo 3UV, como una alternativa para la enseñanza del álgebra elemental.

3). Realicen análisis de actividades basadas en el modelo 3UV y diseñen secuencias didácticas tomando como referencia dicho modelo.

## Propósitos de las sesiones

- Reconocer las dificultades y errores que cometen los estudiantes al aprender álgebra, así como las dificultades que tienen los profesores en su enseñanza.
- Definir e identificar los errores que cometen los estudiantes al iniciar el estudio del álgebra escolar.
- Reconocer el modelo 3UV, y su propuesta en la enseñanza del álgebra a través de la comprensión del concepto de variable.
- Analizar una actividad donde se presente a la variable como número general.
- Analizar alguna actividad donde se presente a la variable como incógnita.

- Analizar alguna actividad donde se presente a la variable en relación funcional.
- Analizar y diseñar una actividad integradora, en la cual se manejen los tres usos de la variable.

## Distribución de actividades

| Sesión | Actividades | Tiempo |
|---|---|---|
| Primera | Lectura de la presentación, introducción y resolución de cuestionario. Lectura comentada (Children's Dificulties in Beginning Álgebra. Booth, L.) | 3 horas |
| Segunda | Lectura comentada (What are these things called variables? Wagner, S.). Presentación del modelo 3UV. | 3 horas |
| Tercera | Análisis y rediseño de un problema tomando a la variable como número general en base al modelo 3UV | 3 horas |
| Cuarta | Análisis y rediseño de un problema tomando a la variable como incógnita en base al modelo 3UV | 3 horas |
| Quinta | Análisis y rediseño de un problema tomando a la variable como relación funcional en base al modelo 3UV | 3 horas |
| Sexta | Análisis y rediseño de un problema que integre los tres usos de la variable tomando el modelo 3UV | 3 horas |

## Simbología


**Individual**


**Equipo**


**Plenaria**

# Primera sesión

# LAS DIFICULTADES DE LOS NIÑOS EN EL INICIO DEL ÁLGEBRA

## Propósitos

- Que los participantes del taller reconozcan las dificultades y errores que cometen los estudiantes al aprender el álgebra.
- Que reconozcan las dificultades que tienen los profesores en la enseñanza del álgebra.

## Materiales

- Hojas blancas tamaño carta
- Hojas para rotafolio
- Cuaderno de notas
- Marcadores
- Cinta adhesiva
- Cuestionarios

## Actividades

**PARA EMPEZAR... Trabajemos en taller**

Tengan presente que esta guía debe ser desarrollada en taller, lo que implica un trabajo en colectivo en un ambiente de respeto, tolerancia y comunicación entre los participantes; esto favorecerá el logro de los propósitos ya que la modalidad de trabajo, propicia el diálogo, la discusión y debate de las ideas, la toma y establecimiento de acuerdos y metas para alcanzar la calidad educativa.

Se iniciará el taller con una plenaria para dar la bienvenida a todos los maestros y las maestras participantes.

Para tener un conocimiento del contenido de este taller, exploren de manera individual los apartados que conforman esta guía; lean los títulos y subtítulos que presenta e identifiquen los contenidos por abordar en las sesiones.

Realicen una lectura comentada de la Presentación y de la Introducción, haciendo las pausas necesarias para comentar lo leído; a continuación analicen el propósito general y los propósitos de las sesiones a fin de establecer la relación que existe entre ellos.

Con base en la revisión anterior y tomando en cuenta la pregunta que se formula enseguida, escriban en sus cuadernos las expectativas personales que tienen respecto al taller:

> ¿Qué espero me aporte este taller acerca de la tarea que tengo como profesor de matemáticas?
>
> Compartan sus textos personales y obtengan las expectativas del colectivo; anótenlas en una hoja para rotafolio. Peguen la hoja en un lugar visible del salón para contrastarlas con los logros que alcanzarán durante y al final de las actividades del taller.

De manera individual los profesores resolverán el siguiente cuestionario que tiene como finalidad diagnosticar el dominio de los tres usos de la variable que propone el modelo 3UV (tres usos de la variable).

# CUESTIONARIO

**En los ejercicios que a continuación se proponen, solamente escribe una fórmula. NO CALCULES el número.**

1. Escribe una fórmula que exprese: Un número desconocido multiplicado por la suma del mismo número desconocido con 2 es igual a 6

__________________________

**Para cada una de las siguientes expresiones ¿cuántos valores puede tomar la letra?**

2. $x + 2 = 2 + x$ ____________

3. $a + a + a + a + 10$ ____________

4. $7x^2 = 2x - 5$ ____________

5. $(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$ ____________

**Para cada una de las siguientes expresiones escribe los valores que puede tomar la letra:**

6. $(x + 3)^2 = 36$ ________________

7. $4 + x = 2$ ________________

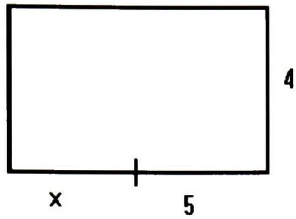
8. $\dfrac{10}{1 + x^2} = 2$ ________________

**Reduce las siguientes expresiones a una equivalente:**

9. $(x^2 + 1)(x^2 - 2) =$ ____________________

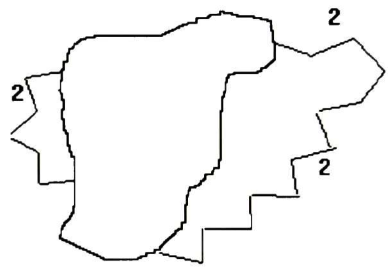
10. $y^2 + 2y + 4y^2 -5y -8 =$ ____________________

11. **El perímetro de una figura se obtiene sumando la longitud de sus lados. Escribe la fórmula que expresa el perímetro de la siguiente figura.**



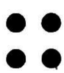
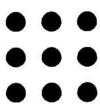

_______________________________________

12. **En la siguiente figura, el polígono no es completamente visible. Debido a que no sabemos cuántos lados tiene el polígono en total diremos que tiene N lados. Cada lado mide 2 centímetros de longitud. Escribe una fórmula para calcular el perímetro del polígono.**




_______________________________________

**Observa la siguiente tabla:**

| | | Número de puntos |
|---|---|---|
| Figura #1 |  | 1 |
| Figura #2 |  | 4 |
| Figura #3 |  | 9 |
| Figura #4 | | |

13. ¿Cuántos puntos habrá en la figura # 4?

_______________________

14. Dibuja la figura # 6 y da el número total de puntos.

_______________________________________________________________

15. Imagínate que puedes seguir dibujando figuras hasta la figura # m. ¿Cuántos puntos en total tendrá la figura # m?

______________________

**Si** $\mathbf{x + 3 = y}$

16. ¿Qué valores puede tomar **x**?

______________________

17. ¿Qué valores puede tomar **y**?

______________________

18. Si **y = 7 + x,** ¿qué les pasa a los valores de **y** cuando los valores de **x** aumentan?

______________________

**Considera la siguiente expresión y=3+x.**

19. Si queremos que los valores de **y** sean mayores que 3 pero más pequeños que 10, ¿qué valores puede tomar **x**?

________________

20. Si **x** toma valores entre 8 y 15, ¿entre qué valores caerán los valores de **y**?

________________

21. Juan es 15 años mayor que Santiago. La suma de las dos edades es 41.¿Cuáles son las edades de Juan y Santiago?

____________________

22. Rentar un automóvil cuesta $25por día, más $0.12 por kilómetro. ¿Cuántos kilómetros puede manejar Diego en un día, si sólo dispone de $40?

________________

**Observa los datos de la siguiente tabla**

| x | y |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 10 | 100 |
| -15 | 225 |
| 25 | 625 |
| 20 | 400 |
| -10 | 100 |
| 15 | 225 |
| -20 | 400 |

23. Determina qué pasa con el valor de **y** cuando el valor de **x** va creciendo

____________________________

24. ¿Para qué valor de **x,** alcanza **y** su valor máximo?

____________________________

25. ¿Para qué valor de **x**, alcanza **y** su valor mínimo?

______________________

26. Escribe la regla general que relaciona a la variable **x** con la variable **y**.

____________________________________

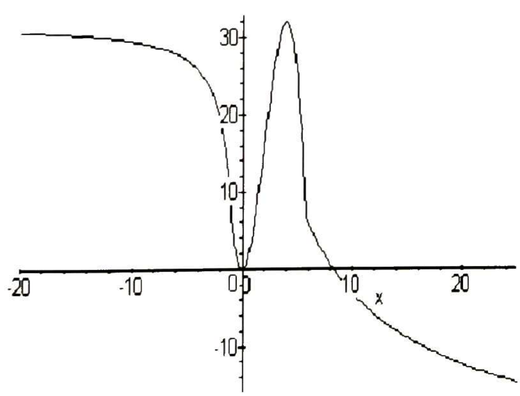
27. Si queremos que el valor de **y** esté entre 256 y 10000 ¿entre qué valores tiene que estar **x**?

__________________________________

28. Si **x** toma valores entre -2 y 26 ¿entre qué valores estará **y**?

____________________________________

**Dada la siguiente gráfica:**



29. ¿Entre qué valores de **x**, los valores de **y** crecen?

____________________

30. ¿Entre qué valores de **x**, los valores de **y** decrecen?

______________________________

31. ¿Para qué valor de **x**, se obtiene el valor máximo de **y**?

____________________

32. ¿Para qué valor de **x** se obtiene el valor mínimo de **y**

____________________

En plenaria se hará la revisión del cuestionario mostrando las respuestas correctas y los resultados que arrojo el mismo, aplicado a otro grupo de profesores en una investigación realizada por Juárez (2002).

Lean el siguiente texto, en donde se expresan algunas ideas en torno a las dificultades y errores que cometen los estudiantes en el aprendizaje del álgebra.

# LECTURA

## ¿POR QUÉ ES DIFÍCIL APRENDER ÁLGEBRA?

Una manera de intentar averiguar qué es lo que hace que el álgebra sea difícil aprender, es identificar los errores más comunes que cometen los estudiantes e investigar las razones de estos errores. Un proyecto de investigación retomó este enfoque y fue el conducto para verificar en álgebra las Estrategias y Errores en Matemáticas en la escuela secundaria (SESM). El proyecto fue dirigido en el Reino Unido de 1980 a 1983 (Booth 1984). Los estudiantes involucrados en esta investigación estaban en los grados de octavo a décimo (edades entre 13 y 16) y habían estado estudiando el álgebra en un programa integrado desde el séptimo grado. Por consiguiente los estudiantes más jóvenes ya habían realizado trabajos típicos como; simplificación de expresiones algebraicas, factorizaciones simples, resolución de ecuaciones lineales simples, la sustitución en fórmulas, y otros. Los estudiantes más avanzados, también habían estudiado fracciones algebraicas, ecuaciones cuadráticas y simultáneas, gráficas de igualdades y desigualdades, factorizaciones y simplificaciones más complejas. A pesar de las diferencias en edad y experiencia en el álgebra, los errores que cometían los estudiantes de los diferentes grados eran similares en cada nivel. En las entrevistas con los estudiantes se mostró que muchos de estos errores podrían ser por las ideas que ellos tienen en aspectos como:

a) El enfoque de la actividad algebraica y la naturaleza de las "respuestas";
b) El uso de la notación y convención en el álgebra;
c) El significado de las letras y las variables;
d) Los tipos de relaciones y métodos usados en aritmética.

## EL ENFOQUE DE LA ACTIVIDAD ALGEBRAICA Y LA NATURALEZA DE LAS RESPUESTAS

En aritmética, el objetivo de las actividades es encontrar respuestas numéricas específicas. En álgebra, sin embargo, esto no es así. En álgebra el objetivo son los procedimientos que derivan en relaciones, así como la expresión de éstos en una forma general y simplificada. Una razón para derivar tales relaciones generales es usarlas como "reglas de procedimientos" para resolver apropiadamente los problemas y de ahí encontrar respuestas numéricas, pero el enfoque inmediato está en la derivación, expresión, y manipulación de la propia relación en general. Muchos estudiantes no comprenden esto; ellos todavía asumen que lo que se les está requiriendo es una respuesta numérica. Por consiguiente, los estudiantes pueden acudir a varias estrategias para derivar una respuesta numérica, incluso estudiantes que obtienen un correcta expresión algebraica no pueden verla como la respuesta apropiada (una observación particularmente vista por Chalouh y Herscovics [1984]).

Algunos estudiantes aparentan aceptar la posibilidad de una respuesta algebraica, pero ellos tienden a asumir que por lo menos lo que se requiere como respuesta es un "solo término" La idea sobre las respuestas de un solo-término parece estar dentro de los errores que normalmente son observados en los estudiantes al "simplificar" una expresión como 2a + 5b es igual a 7ab. Este problema puede ocurrir porque los estudiantes tienen una dificultad cognitiva en "aceptar una falta en el procedimiento" (Collis 1975), o simplemente puede reflejar lo que se espera en aritmética que involucra esto como una respuesta "correcta" (Matz 1980).

Hay también otro aspecto en este problema: No sólo es reconocer a las expresiones algebraicas como "respuestas," si no que también la expresión puede representar el procedimiento o relación, por lo que la respuesta obtenida es tomada como la propia respuesta. Por ejemplo, "n + 3" puede ser como una "instrucción" (o procedimiento) relacionando que 3 serán agregados a la variable n y como "respuesta," al haber efectuado la suma. En el primer caso, la expresión puede interpretarse como "agregue 3 a n"; y en el segundo, como "otro número n con 3 unidades más". Este "dilema del nombre-proceso" (Davis 1975) puede ser una fuente de dificultad considerable para el estudiante. Sin embargo, este problema puede relacionarse más estrechamente a la dificultad de que los estudiantes estén aceptando respuestas algebraicas, al hecho de que ellos tengan la misma expresión, la cual representa el procedimiento y a la vez la respuesta.

## LA NOTACIÓN Y CONVENCIÓN EN ÁLGEBRA

La interpretación de los Símbolos por los estudiantes.

Parte del problema de los estudiantes al intentar simplificar expresiones tales como 2a + 5b tiene que ver con su interpretación en la operación simbólica. En aritmética, símbolos como (+) y (=) se interpretan típicamente en términos de las acciones a realizar, para el símbolo (+) se interpreta la acción de operar y el símbolo (=) quiere decir escribir la respuesta (Behr, Erlwanger, y Nichols 1980; Ginsburg 1977). Semejante interpretación no se restringe a los niños de la escuela elemental. Así Kieran (1981) mostró dentro del contexto de ecuaciones que los estudiantes de doce a catorce años consideran típicamente al signo de igual como un símbolo unidireccional que precede una respuesta numérica, como hizo Wagner (1977) en estudiantes de diecisiete años. La idea de que el símbolo de suma pueda ser la señal de la acción de sumar para obtener el resultado, así como, el signo de igual puede verse como el indicador de una relación de equivalencia en lugar de un "escribir la respuesta", puede no ser apreciado rápidamente por el estudiante aunque ambas nociones son necesarias en la comprensión algebraica. La manera en que está restringida la lectura de la operación del símbolo también está dentro del dilema del "nombre-proceso" descrito anteriormente.

En ejemplos como 2a + 5b, la acción actual asociada con el símbolo de suma es a menudo obtener un conjunto de los términos, produciendo 7ab como una respuesta. Esto quizás no les sorprende, debido a esas ideas tempranas de suma donde se involucra el conjunto físico de dos relaciones. Además, el hecho de que la conjunción de términos denota adición aparece en aritmética; como en fracciones mixtas (ej. 21/2 = 2 + 1/2) y también implícitamente en lugares como un valor relativo (ej., 43 = 4 decenas + 3 unidades) pueden llevar a los estudiantes a ver una situación semejantemente en álgebra (Matz 1980). Ciertamente hay evidencia para mostrar que los niños que nunca antes han estudiado álgebra muestran una tendencia fuerte a "simplificar" una expresión como "a + b" es equivalente a "ab" (Booth 1984).

La confusión en el aspecto "espacio valor ", puede llevar a otro tipo de errores, como se evidencia por alumnos de quince años: que en la expresión 5y sustituyen la "y" por un número por ejemplo 4 y lo consideran como 54. Estos hallazgos llevan a varias sugerencias.

El primero relaciona las ideas acerca del significado de las operaciones y del símbolo igual que los niños adquieren durante sus experiencias aritméticas tempranas. Así los niños necesitan tener hechos conscientes que "2 + 3" no sólo representa una instrucción para agregar 2 y 3, si no también que el resultado se obtiene realizando la suma. Esto podría hacerse, por ejemplo, no sólo leyendo la expresión como "2 más 3" o "adicione 2 y 3" si no también como "el número que es 3 más 2" Así mismo se necesita enfatizar el valor bidireccional del signo igual, ambos requieren una lectura apropiada del símbolo (ejemplo "es igual a" en lugar de "hace," como en" 2 más 3 hacen 5") y dando a los alumnos experiencia con expresiones de la forma 5 = 2 + 3 (así como 1 + 4 = 2 + 3, etc.).

La segunda sugerencia se relaciona con la introducción en álgebra de unir términos para representar multiplicación (ej., 3n) - aparentemente la tendencia fuerte que los niños tienen es ver esto como la suma en lugar del producto (o como un representación del espacio-valor) puede indicar que la introducción debe retardarse y que el producto debe escribirse totalmente (n x 3 o 3 x n) por un periodo sustancial cuando los estudiantes empiezan con el álgebra. Incluso cuando la forma abreviada se introduce, puede ser sabio el continuar escribiendo el producto también en su forma extendida, por lo menos en el periodo de su introducción.

Tercero, con la expresión "2 manzanas más 5 plátanos" se puede aprovechar el problema para obtener una representación como 2m + 5p, la cual les puede ser útil. Pero no sólo es incongruente y erróneo, si no anima a ver incorrectamente el significando de las letras, pero también puede ser usado por los estudiantes para justificar su simplificación de 7mp. Así en la investigación de SESM, el mismo número de estudiantes usó esta ilustración para explicar por qué 2m + 5p eran igual a 7mp (2 manzanas más 5 plátanos son 7 manzanas y plátanos) como aquéllos que lo usaron para explicar por qué 2m + 5p no puede ser simplificada más allá.

Versión tomada y traducida exclusivamente para este taller de:
**Children´s Difficulties in Beginning Algebra**
Lesley R. Booth.

# LECTURA

**¿QUÉ SON ESAS COSAS LLAMADAS VARIABLES?**
**Por SIGFRID WAGNER, Universidad de Georgia, Atenas, GA 30602,**

Una de mis historias favoritas acerca de otra concepción errónea sobre las variables: "el tema de la lección era enteros consecutivos", el maestro estaba intentando preparar a los estudiantes para el x, x+1,...simbolizado con literales para empezar con un ejemplo numérico. "¿cuál es el siguiente entero consecutivo después de 17?", preguntó. Un estudiante contestó "dieciocho" conociendo que la representación para agregar 1 sería un problema para los estudiantes, el maestro preguntó "que tenemos que hacer al 17 para que sea 18?" "agregar 1", respondieron."Bien", dijo el maestro. "ahora supongamos que usamos x para representar un número entero desconocido. Como podemos escribir el siguiente número estero después de x? es decir como podemos representar el número que obtenemos cuando agregamos 1 a x?", sin vacilación la respuesta fue "y." Esta confusión entre el orden lineal del alfabeto y el orden lineal de los números enteros es un error común de los estudiantes que se están iniciando en los símbolos literales Wagner 1981).

Versión tomada y traducida exclusivamente para este taller de:
**¿Qué son esas cosas llamadas Variables?**
**Por SIGRID WAGNER, Universidad de Georgia, Atenas, GA 30602,**

Al concluir la lectura, contrástenla con su experiencia personal y contesten las siguientes preguntas.

- ¿Cuál es la diferencia entre un enfoque aritmético y un enfoque algebraico en matemáticas?
- De acuerdo a la lectura, ¿Cuáles son los errores más comunes que cometen los estudiantes en el inicio del álgebra?

Organizados nuevamente en equipos, comenten la lectura, discutan sus reflexiones y compartan las respuestas que dieron individualmente a las preguntas planteadas. Analicen los diferentes puntos de vista que surjan y lleguen a acuerdos en torno a lo discutido. Establezcan un modo de presentar la información a los demás compañeros.

En plenaria, compartan sus conclusiones y rescaten las ideas principales que se expresen acerca de los errores más comunes que cometen los estudiantes cuando se inician en el álgebra.

# Segunda sesión

# ¿QUÉ SON ESAS COSAS LLAMADAS VARIABLES? Y EL MODELO 3UV

## Propósitos

- Conocer algunas de las definiciones del concepto de variable.
- Identificar los usos de la variable que con más frecuencia se manejan en el álgebra escolar y que propone el modelo 3UV
- Que conozcan el modelo 3UV, el sustento teórico y su propuesta en la enseñanza del álgebra.

## Materiales

- Hojas para rotafolio
- Cuaderno de notas
- Marcadores
- Cinta adhesiva
- PC, cañón
- Presentación del modelo 3UV

## Actividades

Lean el siguiente texto, en donde se expresan algunas ideas en torno al concepto de variable.

# LECTURA

## ¿QUE SON ESAS COSAS LLAMADAS VARIABLES?

La pregunta es ¿por qué los símbolos literales son fáciles de usar para los estudiantes elementales y pueden causar problemas en los estudiantes avanzados?, investigaciones recientes han identificado varios factores que hacen a los símbolos literales fáciles de usar pero difíciles de entender. Algunos de estos factores pueden agruparse en dos títulos principales:

1. Los símbolos literales son como números, pero diferentes.
2. Los símbolos literales son como palabras, pero diferentes.

**Letras como números pero diferentes.**

Similitudes. Además de las coincidencias entre letras y números, hay otras similitudes y es que algunas letras como "π" y "e" actúan como numerales porque son símbolos estándar de números que no tienen una representación simple de dígitos. Otra similitud entre letras y números es que en ocasiones aparecen juntos en expresiones matemáticas. De hecho una de las primeras formas que los estudiantes ven a las literales es en expresiones abiertas como: $n+3=17$ ó $46-x=28$, en la cual las letras aparecen en toda la expresión con números, signos de operaciones y símbolos de relaciones. En otras palabras las letras se ven como si ellas solo fueran números. Resolviendo esas expresiones abiertas para el "(verdadero) valor" de n ó x puede ser la similitud más contundente entre letras y números, es decir, que una letra puede actuar como un número temporalmente, el símbolo que se escriba hasta deducir cuál es el número perdido y se pueda escribir el número real. Es cuando los estudiantes aprenden acerca de los reemplazos, donde las limitaciones de la interpretación de letras como números parecen obvias. Es entonces que los estudiantes deben comenzar a comprender que los símbolos literales son más que solo números elegantes.
Diferencias. Matemáticamente hablando, las diferencias más significativas entre letras y números, es que unos solo aluden a que los numerales representan a un solo valor y las letras pueden representar simultáneamente e individualmente, diferentes valores, como en $0<n<20$ ó $y= 3x+2$. Esta propiedad de representación simultanea que referimos es cuando nosotros

llamamos variables a los símbolos literales, sabiendo que algunos de estos símbolos dependiendo del contexto pueden representar un número desconocido o incluso una constante, esta propiedad de representación simultanea, en combinación con alguna otra característica de los símbolos literales que mencionaremos en la siguiente sección, es lo que le da al lenguaje matemático la capacidad para realizar expresiones generales definiciones, axiomas, teoremas, fórmulas y otras - en una forma concisa y precisa.
Matz (1979), puntualizó otras dos diferencias entre letras y numerales. Una es la yuxtaposición, convención que usamos con letras y numerales para indicar una multiplicación, como en 3mn, en contraste con el valor posicional que tienen los numerales solos, como en 347. Claro, la razón de la yuxtaposicíon, es que las letras y los numerales vienen de diferentes sistemas de símbolos, y las letras pueden representar números de un solo dígito o números con muchos dígitos. De esta forma en una expresión como 3mn se puede interpretar como el producto de 3 m y n.

**Sugerencias para la enseñanza**

¿Como podemos como maestros ayudar a los estudiantes a desarrollar una mejor comprensión de los símbolos literales? primero necesitamos estar concientes de las diferentes formas en que esos símbolos son utilizados y reconocer sus características en los diferentes contextos. Después, necesitamos alertar a los estudiantes de las propiedades de los símbolos literales y puntualizar que las características pueden ser similares a palabras o numerales y qué características son únicas de los símbolos literales.
Si queremos que los estudiantes tengan una apreciación real del poder de los símbolos literales y ahora no ser aplastado por un largo y probablemente discurso sin sentido sobre sus características, entonces necesitamos introducir esas ideas gradualmente como los diferentes usos de los símbolos literales aparecen en la curricula. Por ejemplo en los primeros grados, cuando usamos p como la etiqueta de un punto o n para denotar un número, podemos decir que esas letras son como abreviaciones de palabras. Posteriormente, cuando usamos arbitrariamente letras como etiquetas, podemos explicar que esas letras son como nombres de cosas. Cuando empezamos a usar arbitrariamente letras en contextos numéricos, debemos mencionar que no hay una conexión entre el orden alfabético y el orden numérico.

## ¿QUE SON ESAS COSAS LLAMADAS VARIABLES?

Como los estudiantes vayan avanzando en el álgebra, pueden empezar a darse cuenta que las letras se pueden comportar como numerales cuando representan a un solo número y que puede ser sujeto de operaciones numéricas y relaciones; ellos también pueden darse cuenta que una letra se comporta de forma diferente que un número considerando la convención de la yuxtaposición y el signo de los números. Ellos reconocen que una letra es similar a una palabra cuando significan diferentes cosas en diferentes contextos, pero que una letra es diferente a una palabra en que se refiere a la

misma cosa a través de todo el contexto.
Considerando la analogía del espacio vacío entre palabras y símbolos literales puede ayudar a los estudiantes a apreciar que las letras hay veces representan números diferentes en forma simultanea. Es en este punto que podemos discutir la propiedad de los símbolos literales, la libertad de la delimitación, y nosotros podemos contrastar la generalidad de las letras con la pobre connotación de las expresiones verbales.
Más adelante debemos señalar a los estudiantes que la delimitación del campo de un símbolo literal no es solamente una prerrogativa sino una obligación- una obligación que algunos autores de libros de texto lo pasan por alto o no lo hacen explicito. Podemos ayudar a los estudiantes delimitando el campo de los símbolos literales que se utilizan en los ejercicios de los libros de texto y explicar que un campo sin especificar generalmente se asume dentro de los números reales.
La libertad de escoger los símbolos literales parece ser una idea que los estudiantes rápidamente repiten, pero lentamente lo internalizan. Algunos estudiantes quienes dicen que diferentes letras se pueden usar para representar la misma cosa en ocasiones creen que diferentes letras pueden representar cosas diferentes.
Por ejemplo, en estudiantes de preálgebra y los que empiezan en el álgebra piensan que cambiando la incógnita en una ecuación se puede cambiar también la solución (Wagner 1981). Podemos checar esta concepción errónea, preguntando a los estudiantes cual es la solución de la ecuación, y a un lado escribir la misma ecuación con una incógnita diferente y preguntándoles la solución de la segunda ecuación sin resolver.
Posteriormente, en el curso de álgebra, cuando demos ejemplos numéricos de las propiedades de los números, como la ley asociativa o la ley distributiva, podemos usar ejemplos en los cuales letras diferentes tengan el mismo valor. Naturalmente, nosotros queremos enfatizar la generalidad de las propiedades de los números tomando en forma arbitraria (y usualmente diferentes) valores para cada letra en una expresión matemática. Pero si siempre evitamos los casos especiales en donde dos o mas letras tengan el mismo valor, podemos inadvertidamente reforzar la falsa creencia que letras diferentes representan números diferentes.

Versión tomada y traducida exclusivamente para este taller de:

**¿Qué son esas cosas llamadas variables?**

**Sigfrid Wagner, University of Georgia**

## LOS USOS DE LAS VARIABLES ALGEBRAICAS

El concepto de variable es una de las ideas fundamentales en matemáticas desde la escuela elemental hasta la universidad (Davis 1964; Hirsch y Lappan 1989). Este concepto es tan importante que su invención ha constituido un parteaguas en la historia de las matemáticas (Rajaratnam 1957).
Sin embargo, las investigaciones indican que los estudiantes experimentan dificultades con el concepto de variable, estas dificultades se explican en parte por el hecho de que en matemáticas, las variables son usadas en diferentes formas (Rosnick 1981; Schoenfeld y Arcavi 1988; Wagner 1983).

### Definición de variable

La noción de variable representando una cantidad que varía la introdujeron por primera vez los inventores del cálculo infinitesimal, Gottfried Wilhelm Leibnitz (1646 – 1716) y Sir Isaac Newton (1643 – 1727). El concepto de variable se relaciona con el concepto de función. De hecho, fue Leibnitz el que introdujo el término de función y variable (Kline 1972).
El enlace entre el concepto de variable y el concepto de función continuó a lo largo de la primera mitad del siglo XX, como se puede ver en la siguiente definición: "Relaciona números que cambian juntos, como x y y en una ecuación, son llamadas variables. Cuando una variable depende de otra para su valor se dice que está en función de la otra variable" (Upton 1936, 239). La mayoría de los libros de texto distinguían entre cantidades representando valores únicos, los cuales fueron llamados constantes, cantidades representando muchos valores, los cuales fueron llamados variables. La definición dada por Osborne (1909) es típica para ver esta diferenciación: "Una cantidad la cual puede asumir un número ilimitado de valores es llamada variable. Una cantidad cuyo valor no cambia, es llamada constante. Por ejemplo, en la ecuación del círculo $x^2 + y^2 = a^2$, la "x" y la "y" son variables, y "a" es constante (Osborne, 1909, 1).
La reforma matemática, movimiento que se dio a finales de los 1950s y principios de los 1960s, trajo un cambio sustancial en la definición de variable, un cambio que ahora sigue predominando.
Buscando unificar conceptos en el currículo de matemáticas, el concepto de variable se enseñó desde el principio en una forma más general, resultando que todos los símbolos literales se denominaran como variables (Kieran 1989).
La variable no siempre estuvo asociada con el concepto de función, y en vez de eso se le asoció con colección. En un estudio sobre libros de texto de matemáticas publicado a finales de los 1950s y principios de los 1960s, Tonnessen (1981) encontró que casi cada libro de texto definió a la variable ya sea explicita o implícitamente como un símbolo que refiere a una colección que consta por lo menos de dos elementos. Así, casi todos los usos de los símbolos literales fueron variables. Incluso la literal x en la expresión x+3 =7 es una variable, porque x representa cualquiera de los elementos de la colección, no manifestada, pero implícitamente asumida en el dominio, que está en los números reales, los números racionales, los enteros, los números naturales y

más. Con tal de que el dominio tenga por lo menos dos elementos, x es una variable. Los únicos ejemplos de una no variable pueden ser numerales o símbolos de números específicos, tales como la base del logaritmo natural, el número e; la velocidad de la luz, c; y $\pi$. Un ejemplo típico de la definición de variable en libros de texto escritos durante los últimos 30 años, la encontró Dolciani et al. (1967), en la cual una variable se define como "un símbolo que puede representar alguno de los miembros de una colección específica, llamada colección sustituto o dominio de la variable"

Versión tomada y traducida exclusivamente para este taller de:

**LOS USOS DE LAS VARIABLES ALGEBRAICAS**
**Philipp Randolph A**

Al concluir la lectura, de manera individual registren en su cuaderno las ideas principales que plantea el texto en torno a la problemática planteada. Contrástenlas con su experiencia personal, además, tomen en consideración las siguientes preguntas como guía de reflexión:

- ¿Qué similitudes hay entre las letras usadas en álgebra y los números?
- ¿Qué diferencias hay entre las letras (literales) y los números?
- Después de la lectura, ¿cambió su concepto de variable? Explique.

Organizados nuevamente en equipos, comenten la lectura, discutan sus reflexiones y compartan las respuestas que dieron individualmente a las preguntas planteadas. Analicen los diferentes puntos de vista que surjan y lleguen a una definición del concepto de variable por equipo. Establezcan un modo de presentar la información a los demás compañeros.

En plenaria, compartan sus definiciones del concepto de variable.

En plenaria, se hará la presentación del Modelo 3UV en una presentación Power Point.

# Tercera sesión

## LA VARIABLE COMO NÚMERO GENERAL

### Propósitos

- Que analicen una actividad donde se presente a la variable como número general
- Que rediseñen una actividad donde se presente a la variable como número general utilizando el modelo 3UV

### Materiales

- Hojas para rotafolio
- Cuaderno de notas
- Marcadores
- Cinta adhesiva
- PC, cañón
- Libro de texto

## Los alumnos y la variable como número general.

La habilidad para generalizar es una de las características más importantes de la inteligencia (Krutetskii). Es una habilidad general, esto es, se usa en diferentes campos y aparece desde edades muy tempranas. Sin embargo Krutetskii y su grupo encontraron que la habilidad para generalizar en matemáticas es una habilidad específica: es la habilidad de generalizar relaciones numéricas y espaciales, expresadas a través de números o símbolos literales. Encontraron además que existe una relación muy estrecha entre la habilidad para generalizar material matemático y la habilidad para estudiar matemáticas. Argumentan, por ejemplo, que los alumnos que tenían facilidad para las matemáticas, podían detectar rápidamente cuales eran los rasgos generales que caracterizaban situaciones exteriormente distintas, mientras que los alumnos menos hábiles necesitaban mucho entrenamiento y práctica para poder generalizar. Un punto enfatizado por Krutetskii es que la habilidad matemática y en particular la habilidad para generalizar en matemáticas, no son habilidades innatas sino adquiridas. Este es un hecho crucial que hay que tomar en cuenta cuando se diseñan ambientes de enseñanza para ayudar a los alumnos a desarrollar la habilidad para generalizar en matemáticas. Distintos estudios que investigaron la capacidad que tienen los alumnos para trabajar con la variable como número general cuando aparece en tareas algebraicas tradicionales, encontraron que la gran mayoría tenía dificultades para trabajar con esta caracterización de la variable. Se encontró (Küchemann, 1980; Booth, 1984), por ejemplo, que los alumnos tienden a interpretarla de varios modos distintos dependiendo del problema: la ignoran; la interpretan como una incógnita específica asignándole un valor específico; la interpretan como un objeto. Resultados similares se obtuvieron en un estudio desarrollado en México con alumnos de secundaria (Ávila, et al., 1990).
Estos resultados muestran que ante la necesidad de interpretar un símbolo literal usado para representar un número general los estudiantes están bastante desorientados. Booth (1984), por ejemplo, sugiere que los alumnos tienden de manera "natural" a interpretar las letras como números específicos. Tanto Booth (1984) como Küchemann (1980) sugieren que la dificultad para interpretar la letra como un número general puede depender del desarrollo cognitivo.

**Los niños y las variables**
***Sonia Ursini Legovich***
Departamento de Matemática Educativa
CINVESTAV – IPN

## Número general

De acuerdo con el modelo 3UV, la variable como número general considera los siguientes aspectos:

- **G1** Reconocer patrones, percibir reglas y métodos en secuencias y en familias de problemas.
- **G2** Interpretar la variable simbólica como la representación de una entidad general, indeterminada, que puede asumir cualquier valor.
- **G3** Deducir reglas y métodos generales en secuencias y familias de problemas.
- **G4** Manipular (simplificar, desarrollar) la variable simbólica.
- **G5** Simbolizar enunciados, reglas o métodos generales.

## Actividades

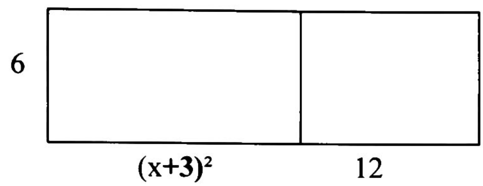
Presentación y análisis de un problema geométrico donde se trabaja a la variable como número general.

Se plantean problemas para que, tomando como base el modelo 3UV los profesores los rediseñen. Dichas actividades las podrán utilizar para el diseño de secuencias didácticas. Esta actividad se trabajará por equipo de 4 personas.

## Actividad 1

## Para el diseño de actividades se analizará el siguiente problema.

- Calcular el perímetro y el área de la siguiente figura.




- ¿Qué implica resolver este problema?
- ¿Qué preguntas se podrían hacer para guiar al estudiante?

## Resolver este problema implica:

- Interpretar x como un número general y la expresión $(x+3)^2$ como una expresión que representa una medida.
- Operar con $(x+3)^2$, como si fuera un número, para expresar la base del rectángulo $(x+3)^2 + 12$.
- Manipular las expresiones para obtener una expresión más simple de las ecuaciones de 2° grado $x^2 + 3x - 7 = 0$ y $x^2 + 3x - 27 = 0$.

## Posibles preguntas guía para este problema:

- ¿Qué representa x?
- ¿Cuántos valores puede tener?
- ¿Cómo expresas la medida de la base del rectángulo?
- ¿Cómo expresas su área?

## Actividad 2

Diseñar la siguiente actividad de acuerdo con el modelo 3UV

En las orillas de un rio crecen dos palmeras una mide 30 metros y la otra 20 metros de altura, en la parte alta de cada palmera hay un pájaro. De pronto los dos pájaros ven un pez que aparece en la superficie del río. Los dos pájaros se lanzan sobre el pez y lo pescan al mismo tiempo. Encuentra las expresiones algebraicas que permitan calcular las distancias que recorren los pájaros. La distancia entre las palmeras es de 50 metros.

En la siguiente secuencia deduce una regla para encontrar el número de cuadrados de la enésima figura.

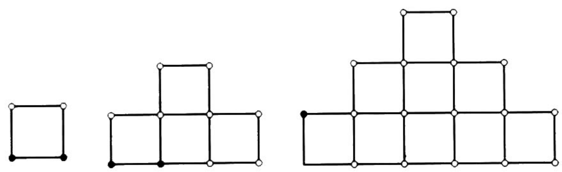


figura 1 figura 2 figura 3 figura 4 figura 5

# Cuarta sesión

## LA VARIABLE COMO INCÓGNITA

### Propósitos

- Que analicen una actividad donde se presente a la variable como incógnita
- Que rediseñen una actividad donde se presente a la variable como incógnita utilizando el modelo 3UV.

### Materiales

- Hojas para rotafolio
- Cuaderno de notas
- Marcadores
- Cinta adhesiva
- PC, cañón
- Libro de texto

# Los alumnos y la variable como incógnita específica

Los niños que inician en el estudio del álgebra son capaces de razonar con incógnitas y encontrar el valor correcto cuando éstas aparecen en problemas verbales simples y también son capaces de trabajar con la variable como incógnita específica cuando ésta aparece en ecuaciones de un paso de la forma $ax = b$, $a + x = b$ y $x + a = b$ (Kieran, 1984). De lo anterior se muestra que frente a problemas verbales simples o ecuaciones algebraicas de un paso, los niños que inician el estudio del álgebra son capaces de conceptualizar una incógnita específica y determinar su valor, deshaciendo las operaciones, o empleando el "ensayo- error" Sin embargo, cuando una incógnita específica aparece en ecuaciones con una estructura más complicada, los niños tienen serias dificultades para trabajar con ellas. Para resolver estas ecuaciones es necesario realizar primero ciertas operaciones numéricas, operar con la incógnita o ambas cosas. Esto implica la capacidad de percibir la ecuación de manera global a fin de reordenar los términos, antes de intentar calcular el valor de la incógnita específica (Hercovics y Linchevski, 1991b). Cuando se enfrentan a este tipo de ecuaciones, los novatos usan diferentes estrategias a fin de evitar operar con los números y con las incógnitas. Por ejemplo una de las estrategias es cortar la ecuación después del signo de igualdad cuando la ecuación tiene más de un término, e ignorarlos otros. (p. ej. Resolver la ecuación $4 + x - 2 + 5 = 11 + 3 - 5$ como si fuera la ecuación $4 + x - 2 + 5 = 11$ (Kieran, 1984). Los niños también tienen dificultades para determinar el valor de la incógnita específica cuando esta aparece en ambos lados del signo de igualdad (Kieran, 1984; Filloy y Rojano, 1984, 1989; Herscovics y Linchevski, 1991a). Filloy y Rojano (1984, 1989), por ejemplo, encontraron que el paso de la resolución de ecuaciones de la forma $x + a = b$ a la resolución de ecuaciones de la forma $ax + b = cx + d$, no es inmediato ni espontáneo. Para resolver este tipo de ecuaciones, es muy frecuente que los niños que inician el estudio del álgebra usen el ensayo y error y asignen diferentes valores a las diferentes apariciones de la incógnita específica en una misma expresión ('polisemia'). La "polisemia", sin embargo, puede evitarse cuando se aclara a los alumnos de manera explicita que todas las apariciones de la incógnita específica representan el mismo valor (Herscovics y Linchevski, 1991a).

Estos resultados ponen en evidencia las dificultades que los niños tienen para operar con o sobre la incógnita específica. La enseñanza tradicional que tiende a desarrollar y fortalecer las habilidades manipulativas no parece ser adecuada para ayudar a los niños a superar estas dificultades. Además, parece ser que algunos de los acercamientos a las incógnitas específicas usados en la escuela primaria pueden ser los que originan algunas de las estrategias incorrectas que usan los niños para resolver ecuaciones.

## Los niños y las variables

***Sonia Ursini Legovich***
Departamento de Matemática Educativa
CINVESTAV – IPN

## Incógnita

De acuerdo con el modelo 3UV, la variable como incógnita considera los siguientes aspectos:

- **I1** Reconocer e identificar en una situación problemática la presencia de algo desconocido que puede ser determinado considerando las restricciones del problema.
- **I2** Interpretar las variables simbólicas que aparecen en una ecuación como la representación de valores específicos.
- **I3** Sustituir la variable por el valor o los valores que hacen de la ecuación un enunciado verdadero.
- **I4** Determinar la cantidad desconocida que aparece en ecuaciones o problemas realizando las operaciones algebraicas y/o aritméticas.
- **I5** Simbolizar las cantidades desconocidas identificadas en una situación específica y utilizarlas para plantear ecuaciones.

## Actividades

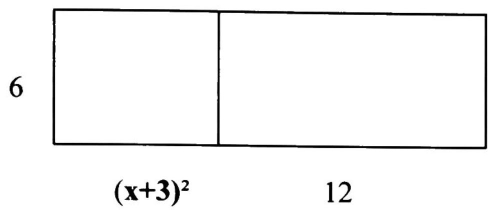
Presentación y análisis de un problema geométrico donde se trabaje a la variable como incógnita.

Se plantearán problemas para que, tomando como base el modelo 3UV los profesores los rediseñen. Dichas actividades las podrán utilizar para el diseño de secuencias didácticas. Esta actividad se trabajará por equipo de 4 personas. Tiempo estimado 1 hr.

## Actividad 1

# Para el diseño de actividades

Cual es el valor de x  si el área del rectángulo total mide 456




- ¿Qué implica resolver este problema?
- ¿Qué preguntas se podrían hacer para guiar al estudiante?

# Resolver este problema implica:

- Operar con $\mathbf{(x+3)^2 + 12}$ para expresar el área $6[\mathbf{(x+3)^2 + 12}] = 456$
- Sustituir los valores dados para el área y obtener las ecuaciones:
- Interpretar la **x** como una incógnita.
- Realizar las operaciones algebraicas y aritméticas necesarias para determinar el valor de **x.**

# Posibles preguntas guía para este problema:

- ¿Cómo expresarías la medida de la base del rectángulo?
- ¿Cómo expresarías su área?
- ¿Para qué valor de **x** el área mide 456?

## Actividad 2

Diseñar la resolución de los siguientes problemas de acuerdo con el modelo 3UV

¿Cuáles son las dimensiones de un rectángulo (base y altura), cuyo perímetro es de 72 cm, si la base es 3 cm mayor que la mitad de la altura?

Calcular las dimensiones de un rectángulo si la altura es 8 m menor que el doble de la base y el perímetro es de 108m.

# Quinta sesión

# LA VARIABLE EN RELACIÓN FUNCIONAL

## Propósitos

- Que analicen una actividad donde se presente a la variable en relación funcional
- Que rediseñen una actividad donde se presente a la variable en relación funcional utilizando el modelo 3UV.

## Materiales

- Hojas para rotafolio
- Cuaderno de notas
- Marcadores
- Cinta adhesiva
- PC, cañón
- Libro de texto

## Los alumnos y las variables en una relación funcional.

Las variables pueden ser empleadas para expresar una relación funcional entre dos cantidades cuyos valores pueden estar cambiando. Lo que caracteriza este uso de las variables es, por un lado, su movimiento dentro de ciertos rangos de valores (aspecto dinámico) y, por el otro, el hecho de que el valor que se asigna a una de las variables afecta el valor de la otra variable (aspecto estático). El aspecto dinámico es enfatizado cuando se considera una relación funcional como una manera de expresar la variación. Si bien anteriormente la definición para introducir la idea de función reflejaba una visión dinámica de la relación funcional, en los currículos actuales las funciones se suelen definir por medio de dos conjuntos y una regla de correspondencia que asigna a cada elemento de un conjunto exactamente un elemento del otro conjunto. En esta definición "moderna", que aparece en consecuencia del desarrollo de la teoría de conjuntos, se resalta el aspecto estático de una relación funcional, mientras la idea de variación y la relación entre el movimiento de las variables, o sea, el aspecto dinámico queda relegado. Se encontró que cuando se usa la definición moderna para introducir la idea de función, los alumnos tienen dificultades con las ideas de dominio y de rango de variación, tanto si se representa la función de forma gráfica como analítica. Markovits y sus colegas (1986) sugieren que estas dificultades pueden ser una consecuencia de esta definición "moderna" de función en la que la idea de variación ya no se enfatiza. Sin abogar por un regreso a un acercamiento más tradicional, estos investigadores sugieren que los alumnos deberían ser ayudados a relacionar la vieja y la nueva definición de función. Esto implica que para auxiliarlos a trabajar con las funciones y con las nociones subyacentes, como por ejemplo, las ideas de dominio, rango, monotonicidad, máximos y mínimos, habría que ayudarlos por un lado, a percibir las variables como entidades cuyos valores cambian bajo restricciones dadas, y por el otro, a fijarse en la regla de correspondencia que las une.

## Los niños y las variables

***Sonia Ursini Legovich***
Departamento de Matemática Educativa
CINVESTAV – IPN

## Relación funcional

De acuerdo con el modelo 3UV, la variable en relación funcional considera los siguientes aspectos:

- F1 Reconocer la correspondencia entre variables relacionadas, independientemente de la representación utilizada (tablas, gráficas, problemas verbales, expresiones analíticas).
- F2 Determinar los valores de la variable dependiente, dados los valores de la independiente.
- F3 Determinar los valores de la variable independiente, dados los valores de la dependiente.
- F4 Reconocer la variación conjunta de las variables involucradas en una relación funcional, independientemente de la representación utilizada (tablas, gráficas, problemas verbales, expresiones analíticas).
- F5 Determinar los intervalos de variación de una de las variables, dado el intervalo de variación de la otra.
- F6 Simbolizar una relación funcional, con base en el análisis de los datos de un problema.

## Actividades

Presentación y análisis de un problema geométrico donde se trabaja a la variable en relación funcional.

Se plantearán problemas para que, tomando como base el modelo 3UV los profesores los rediseñen. Dichas actividades las podrán utilizar para el diseño de secuencias didácticas. Esta actividad se trabajará por equipo de 4 personas. Tiempo estimado 1 hr.

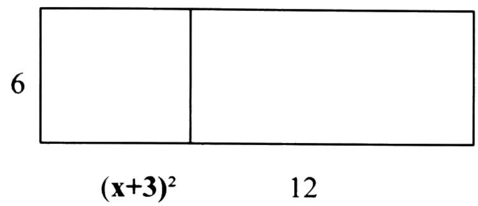
**Actividad 1**

## Para el diseño de actividades

El área de la siguiente figura varía entre 168 y 288

¿Qué valores debe tomar x?

Si el valor de x crece o decrece ¿qué pasa con el área?




- ¿Qué implica resolver este problema?
- ¿Qué preguntas se podrían hacer para guiar al estudiante?

## Resolver este problema implica:

- Operar con $\mathbf{(x+3)^2 + 12}$ para expresar el área $6[\mathbf{(x+3)^2 + 12}] = A$. o y
- Sustituir los valores dados para el área y obtener las ecuaciones:
  $6[\mathbf{(x+3)^2 + 12}] = 168$
  $6[\mathbf{(x+3)^2 + 12}] = 288$
- Realizar las operaciones algebraicas y aritméticas necesarias para determinar los valores de **x**
- Determinar los intervalos de variación de **x** **[-9, -7]** , **[1, 3]**.
- Reconocer que los valores de **x** y del área están en correspondencia, que varían de manera conjunta y determinar cual es esa variación.

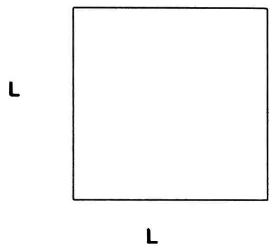
## Posibles preguntas guía para este problema:

- ¿Para qué valor de **x** el área mide 168? ¿Y 288?
- ¿Cuáles son todos los valores de **x** que hacen que el área esté entre 168 y 288?
- Cuándo el valor de **x** crece en los intervalos determinados ¿cómo varía el área?

## Actividad 2

Diseñar la resolución de los siguientes problemas de acuerdo al modelo 3UV

Encontrar una correspondencia entre el lado de un cuadrado y su área




Un tinaco se llena de agua a razón de 4 litros por minuto. Se requiere saber cuántos litros tiene el tinaco en cierto tiempo. Encontrar la función que representa dicha actividad.

# Sexta sesión

# ACTIVIDADES INTEGRADORAS

## Propósitos

- Análisis y rediseño de un problema que integre los tres usos de la variable con referencia al modelo 3UV.
- Que rediseñen una actividad donde se presenten los tres usos de la variable.

## Materiales

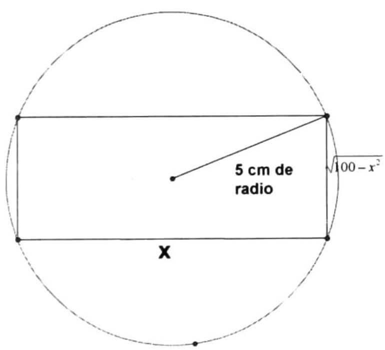
- Hojas para rotafolio
- Cuaderno de notas
- Marcadores
- Cinta adhesiva
- PC, cañón
- Libro de texto

## Actividades integradoras

- Actividades en las que aparece cada uno de los usos de la variable en forma diferenciada.
- Actividades que integren los tres usos de la variable para desarrollar la capacidad de pasar entre los distintos aspectos y los distintos usos de manera flexible.

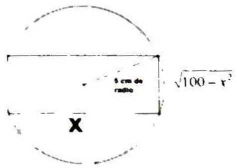
## Actividad 1

Observa detenidamente el siguiente dibujo y contesta las preguntas




En la circunferencia de 5 cm. de radio, esta inscrito un rectángulo, cuya base es **x**, y de altura $\sqrt{100-x}$

| | |
|---|---|
| ¿Cuánto mide la base? | R = x |
| ¿Cuánto mide la altura? | R = $\sqrt{100-x^2}$ |
| ¿Qué valores puede tomar x | R = Cualquier valor |

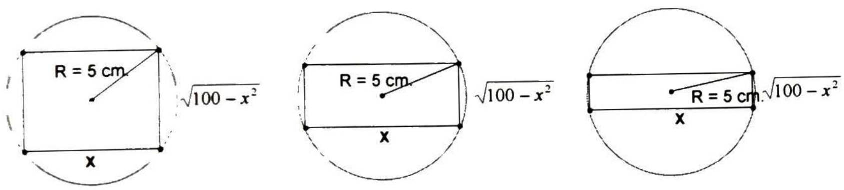



¿La formula para encontrar el área de cualquier rectángulo es $A = b \times h$, con la formula anterior, podrías expresar el área del rectángulo inscrito el la circunferencia?

Para el rectángulo inscrito en la circunferencia
¿Cuánto vale b ? R . X

¿Cuánto vale h? R $\sqrt{100-x^2}$

¿Cómo quedaría expresada el área del rectángulo inscrito en la circunferencia? R. $A = (\mathbf{X})\ (\sqrt{100-x}\ )$




Observa las figuras anteriores.

Cuándo la base disminuye, ¿Qué le pasa a la altura?

Cuando la base aumenta, ¿Qué le pasa a la altura?

¿Cuál es la relación entre la base y la altura cuando aumenta o disminuye la base?

¿Cuándo aumenta o disminuye la base que pasa con el área del rectángulo?

¿El área del rectángulo depende de la longitud de la base?

¿Cuál es la función para encontrar el área del rectángulo en términos de la base?

Cuándo x = 0 ¿Cuanto vale el área?

Cuando x = 2 ¿Cuánto vale el área?

Realizar una tabla con la función cuando x toma los valores de 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10

| X | A = (X) $(\sqrt{100-x^2})$ |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 1 | 9.9 |
| 2 | 19.6 |
| 3 | 28.6 |
| 4 | 36.7 |
| 5 | 43.3 |
| 6 | 48 |
| 7 | 49.9 |
| 8 | 48 |
| 9 | 39.2 |
| 10 | 0 |

¿De quien depende el valor del área?

¿Qué pasa con el valor del área al aumentar la longitud de la base?

Si el valor del área esta entre 19 y 48. ¿Cuál es la longitud de la base?

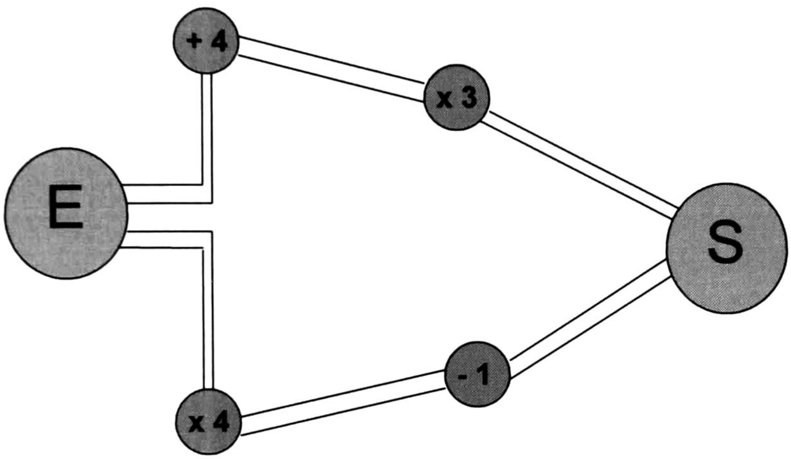
¿Cuál es la ecuación que determina el área del rectángulo inscrito?

¿Para qué valor de x el área del rectángulo inscrito en la circunferencia es 30?

## Actividad 2

Diseñar la resolución del siguiente problema como una actividad integradora de acuerdo con el modelo 3UV.

En la siguiente máquina de calcular, al introducir un número (E) por la entrada puede seguir cualquiera de los dos caminos (superior o inferior) y llegará a un número (S) de salida.




Encontrar las expresiones que siguen los caminos superior e inferior

# ANEXO 2

RESULTADOS DE LOS CUESTIONARIOS APLICADOS A PROFESORES

| Pregunta | Profesores que contestan correctamente | Profesores que contestan incorrectamente | Omisiones | % de Respuesta correcta | % de Respuesta incorrecta | % Omisiones |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 52 | 4 | 1 | 91.0 | 7.0 | 2.0 |
| 2 | 45 | 6 | 4 | 82.0 | 11.0 | 7.0 |
| 3 | 36 | 16 | 5 | 63.0 | 28.0 | 9.0 |
| 4 | 23 | 23 | 11 | 40.0 | 41.0 | 19.0 |
| 5 | 23 | 24 | 10 | 40.0 | 42.0 | 18.0 |
| 6 | 19 | 35 | 3 | 33.0 | 62.0 | 5.0 |
| 7 | 41 | 11 | 5 | 72.0 | 19.0 | 9.0 |
| 8 | 19 | 35 | 3 | 33.0 | 62.0 | 5.0 |
| 9 | 44 | 10 | 3 | 77.0 | 18.0 | 5.3 |
| 10 | 52 | 3 | 2 | 91.0 | 5.0 | 4.0 |
| 11 | 51 | 5 | 2 | 88.0 | 9.0 | 3.0 |
| 12 | 47 | 3 | 7 | 83.0 | 5.0 | 12.0 |
| 13 | 49 | 8 | 0 | 86.0 | 14.0 | 0 |
| 14 | 50 | 6 | 1 | 88.0 | 11.0 | 1.0 |
| 15 | 38 | 17 | 2 | 67.0 | 30.0 | 3.0 |
| 16 | 45 | 9 | 3 | 79.0 | 15.0 | 5.0 |
| 17 | 31 | 22 | 4 | 54.0 | 39.0 | 7.0 |
| 18 | 51 | 4 | 2 | 90.0 | 7.0 | 3.0 |
| 19 | 40 | 14 | 3 | 70.0 | 25.0 | 5.0 |
| 20 | 47 | 8 | 2 | 82.0 | 14.0 | 4.0 |
| 21 | 44 | 11 | 2 | 77.0 | 19.0 | 4.0 |
| 22 | 41 | 10 | 6 | 72.0 | 18.0 | 11.0 |
| 23 | 47 | 7 | 3 | 83.0 | 12.0 | 5.0 |
| 24 | 40 | 12 | 5 | 70.0 | 21.0 | 9.0 |
| 25 | 48 | 5 | 4 | 84.0 | 9.0 | 7.0 |
| 26 | 39 | 12 | 6 | 68.0 | 21.0 | 11.0 |
| 27 | 34 | 9 | 13 | 61.0 | 16.0 | 23.0 |
| 28 | 35 | 8 | 13 | 63.0 | 14.0 | 23.0 |
| 29 | 24 | 20 | 12 | 43.0 | 36.0 | 21.0 |
| 30 | 14 | 30 | 12 | 25.0 | 54.0 | 21.0 |
| 31 | 31 | 11 | 14 | 55.0 | 20.0 | 25.0 |
| 32 | 15 | 28 | 13 | 27.0 | 50.0 | 23.0 |

# ANEXO 3

# PORCENTAJES DE ACIERTOS, ERRORES Y OMISIONES PARA LAS PREGUNTAS DEL CUESTIONARIO CON RESPUESTAS CORRECTAS INCLUIDAS

**En los ejercicios que a continuación se proponen, solamente escribe una fórmula. NO CALCULES el número.**

1. Escribe una fórmula que exprese: Un número desconocido multiplicado por la suma del mismo número desconocido con 2 es igual a 6. *X(X+2)=6*

| aciertos | errores | omisiones |
|---|---|---|
| 91.0 | 7.0 | 2.0 |

**Para cada una de las siguientes expresiones ¿cuántos valores puede tomar la letra?**

2. $x + 2 = 2 + x$ Infinitos

| aciertos | errores | omisiones |
|---|---|---|
| 82.0 | 11.0 | 7.0 |

3. $3 + a + a + a + 10$ Infinito

| aciertos | errores | omisiones |
|---|---|---|
| 63.0 | 28.0 | 9.0 |

4. $7x^2 = 2x - 5$ Dos

| aciertos | errores | omisiones |
|---|---|---|
| 40.0 | 41.0 | 19.0 |

5. $(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$ Infinito

| aciertos | errores | omisiones |
|---|---|---|
| 40.0 | 42.0 | 18.0 |

**Para cada una de las siguientes expresiones escribe los valores que puede tomar la letra:**

6. $(x + 3)^2 = 36$ 3 y –9

| aciertos | errores | omisiones |
|---|---|---|
| 33.0 | 62.0 | 5.0 |

7. $4 + x = 2$ -2

| aciertos | errores | omisiones |
|---|---|---|
| 72.0 | 19.0 | 9.0 |

8. $\dfrac{10}{1+x^2} = 2$ 2 y -2

| aciertos | errores | omisiones |
|---|---|---|
| 33.0 | 62.0 | 5.0 |

**Reduce las siguientes expresiones a una equivalente:**

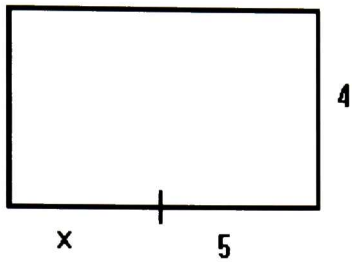
9. $(x^2 + 1)(x^2 - 2) =$ $x^4 - x^2 - 2$

| aciertos | errores | omisiones |
|---|---|---|
| 77.0 | 18.0 | 5.0 |

10.. $y^2 + 2y + 4y^2 - 5y - 8 =$ $5y^2 - 3y - 8$

| aciertos | errores | omisiones |
|---|---|---|
| 91.0 | 5.0 | 4.0 |

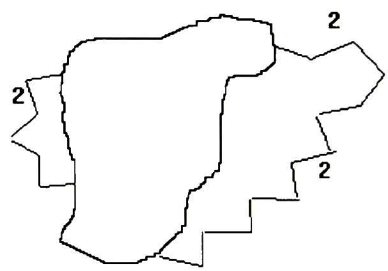
11.. **El perímetro de una figura se calcula sumando la longitud de sus lados. Escribe la fórmula que expresa el perímetro de la siguiente figura.**




P=2(X+5) + 8   ó   2(X+5) + 8

| aciertos | errores | omisiones |
|---|---|---|
| 88.0 | 9.0 | 3.0 |

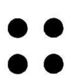
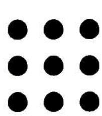
12. **En la siguiente figura, el polígono no es completamente visible. Debido a que no sabemos cuántos lados tiene el polígono en total diremos que tiene N lados. Cada lado mide 2 centímetros de longitud. Escribe una fórmula para calcular el perímetro del polígono.**




P = 2N   ó   2N

| aciertos | errores | omisiones |
|---|---|---|
| 83.0 | 5.0 | 12.0 |

**Observa las siguientes figuras:**

| | | Número de puntos |
|---|---|---|
| Figura #1 |  | 1 |
| Figura #2 |  | 4 |
| Figura #3 |  | 9 |
| Figura #4 | | |

13. ¿Cuántos puntos hay en la figura # 4?

| aciertos | errores | omisiones |
|---|---|---|
| 86.0 | 14.0 | 0 |

16

14. Dibuja la figura # 6 y da el número total de puntos.

| aciertos | errores | omisiones |
|---|---|---|
| 88.0 | 11.0 | 1.0 |

36

15. Imagínate que puedes seguir dibujando figuras hasta la figura # m. ¿Cuántos puntos en total tendrá la figura # m?

| aciertos | errores | omisiones |
|---|---|---|
| 67.0 | 30.0 | 3.0 |

$m^2$

**Si x + 3 = y**

16. ¿Qué valores puede tomar **x**?

| aciertos | errores | omisiones |
|---|---|---|
| 79.0 | 16.0 | 5.0 |

Infinitos

17.¿ Qué valores puede tomar **y**?

| aciertos | errores | omisiones |
|---|---|---|
| 54.0 | 39.0 | 7.0 |

Infinitos

18. Si **y = 7 + x,** ¿qué les pasa a los valores de **y** cuando los valores de **x** aumentan?

| aciertos | errores | omisiones |
|---|---|---|
| 70.0 | 25.0 | 5.0 |

Aumentan

**Considera la siguiente expresión y=3+x.**

19. Si queremos que los valores de **y** sean mayores que 3 pero más pequeños que 10, ¿qué valores puede tomar **x**?

| aciertos | errores | omisiones |
|---|---|---|
| 90.0 | 7.0 | 3.0 |

**$0 < x < 7$**

20. Si **x** toma valores entre 8 y 15, ¿entre qué valores caerán los valores de **y**?

| aciertos | errores | omisiones |
|---|---|---|
| 82.0 | 14.0 | 4.0 |

**$11 \leq y \leq 18$**

21. Juan es 15 años mayor que Santiago. La suma de las dos edades es 41.¿Cuáles son las edades de Juan y Santiago?

| aciertos | errores | omisiones |
|---|---|---|
| 77.0 | 19.0 | 4.0 |

**$(x + 15) + x = 41$**

22. Rentar un automóvil cuesta \$25por día, más \$0.12 por kilómetro. ¿Cuántos kilómetros puede manejar Diego en un día, si sólo dispone de \$40?

**0.12x + 25 = 40**

| aciertos | errores | omisiones |
|---|---|---|
| 72.0 | 17.0 | 11.0 |

**Observa los datos siguientes**

| x | y |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 10 | 100 |
| -15 | 225 |
| 25 | 625 |
| 20 | 400 |
| -10 | 100 |
| 15 | 225 |
| -20 | 400 |

23. Determina qué pasa con el valor de **y** cuando el valor de **x** va creciendo

**aumenta cuando los valores de x crecen de 0 a 25**

| Aciertos | errores | omisiones |
|---|---|---|
| 83.0 | 12.0 | 5.0 |

**disminuye cuando los valores de x crecen de –20 a 0**

24. ¿Para qué valor de **x,** alcanza **y** su valor máximo?

**Para x = 25 y x = -25**

| aciertos | errores | omisiones |
|---|---|---|
| 70.0 | 21.0 | 9.0 |

25. ¿Para qué valor de **x**, alcanza **y** su valor mínimo?

| aciertos | errores | omisiones |
|---|---|---|
| 84.0 | 9.0 | 7.0 |

**Para x = 0**

26. Escribe la regla general que relaciona a la variable **x** con la variable **y**.

| aciertos | errores | omisiones |
|---|---|---|
| 68.0 | 21.0 | 11.0 |

**$y = x^2$**

27. Si queremos que el valor de **y** esté entre 256 y 10000 ¿entre qué valores tiene que estar **x**?

| aciertos | errores | omisiones |
|---|---|---|
| 61.0 | 16.0 | 23.0 |

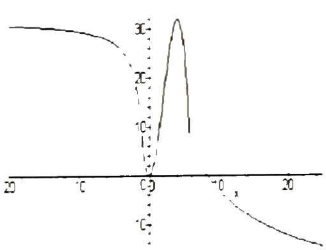
**Entre $-100 \leq x \leq -16$ y $16 \leq x \leq 100$**

28. Si **x** toma valores entre -2 y 26 ¿entre qué valores estará **y**?

| aciertos | errores | omisiones |
|---|---|---|
| 63.0 | 14.0 | 23.0 |

**En $0 \leq y \leq 676$**

**Dada la siguiente gráfica:**



29. ¿Entre qué valores de **x**, los valores de **y** crecen?

| aciertos | errores | omisiones |
|---|---|---|
| 43.0 | 36.0 | 21.0 |

**En $0 \leq x \leq 5$**

30. ¿Entre qué valores de **x**, los valores de **y** decrecen?

| aciertos | errores | omisiones |
|---|---|---|
| 25.0 | 54.0 | 21.0 |

**En -20≤ x ≤ 0 y 5≤ x ≤ 25**

31. ¿Para qué valor de **x**, se obtiene el valor máximo de **y**?

| aciertos | errores | omisiones |
|---|---|---|
| 55.0 | 20.0 | 25.0 |

**Para x = 5**

32. ¿Para qué valor de **x** se obtiene el valor mínimo de **y**

| aciertos | errores | omisiones |
|---|---|---|
| 27.0 | 50.0 | 23.0 |

**Para x = 25**

El jurado designado por el Departamento de Matemática Educativa, Unidad Distrito Federal del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, aprueba la tesis:

**Estrategia de formación para profesores de secundaria en la enseñanza del álgebra escolar**

que presenta **María Isabel García Torreblanca** para su examen final de Maestría en Educación en Matemáticas el día 24 de febrero del año 2011.

Dra. Sonia Ursini Legovich

Dr. Gonzalo Zubieta Badillo

Dra. Mirela Rigo Lemini

Dr. José Antonio Juárez López