CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

UNIDAD ZACATENCO
DEPARTAMENTO DE MATEMÀTICA EDUCATIVA

ANÁLISIS DEL DISCURSO DEL PROFESOR DE BACHILLERATO EN LA ENSEÑANZA DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS VERBALES-ALGEBRAICOS: ESTUDIO DE CASO

Tesis que presenta

Micaela González Lozano

Para Obtener el Grado de

Maestra en Ciencias

En la Especialidad de

Matemática Educativa

Director de la Tesis: Doctor José Guzmán Hernández

México, Distrito Federal. Julio,2011

Agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por el apoyo financiero que me otorgó a través de la Beca para cursar la Maestría en Ciencias en la Especialidad de Matemática Educativa.

Becario No. **240307**

A mis padres

Ludivina y Jesús

Agradezco y dedico de manera especial el presente trabajo a las siguientes personas:

Dr. José Guzmán Hernández, por su apoyo, dedicación, tiempo y confianza para mi formación profesional. Por su empeño y profesionalismo con el que desempeña su trabajo. Por haberme enseñado otra visión de la investigación en Matemática Educativa.

A **Dra. Gema Mercado Sánchez** y **M. en M. A. Judith Alejandra Hernández Sánchez**, por apoyarme y creer en mí para dar este gran paso en mi vida.

A mis hermanos por haberme alentado y apoyado para concluir estos estudios. A toda mi familia, Gracias.

A **Dr. José Guzmán Hernández, Dr. Luz Manuel Santos Trigo, Dr. Ernesto Alonso Sánchez Sánchez, Dr. Gonzalo Zubieta Badillo, Dr. Antonio Rivera Figueroa, Dr. Jesús Alfonso Riestra Velásquez, Dra. Ana Isabel Sacristán Rock y Dr. François Charles Bertrand Pluvinage,** por haber sido excelentes profesores durante la maestría; de cada uno de ustedes me llevo un gran aprendizaje y un gran reto.

A mis **compañeros y amigos de generación**, por su amistad, por compartir grandes experiencias y por hacerme sentir como en casa.

A **Adriana Parra** y por su eficiencia, amistad y apoyo desde el primer día en el Departamento de Matemática Educativa.

A los **Trabajadores** de la biblioteca del Departamento de Matemática Educativa por hacer de este espacio un lugar agradable para estudiar.

Al **CINVESTAV**; en particular al **Departamento de Matemática Educativa** por haberme dado la oportunidad de pertenecer a esta institución académica.

RESUMEN

El crecimiento de la investigación sobre la práctica del docente muestra la importancia de comprender los conocimientos didácticos y matemáticos de los profesores en servicio; su naturaleza y las fuentes, con la intención de mejorar la práctica que llevan a cabo en la clase de matemáticas.

El presente estudio reporta el análisis de un estudio de caso del discurso de un profesor de bachillerato en la resolución de problemas verbales-algebraicos, con el empleo de una actividad de tales problemas modelados por sistemas de ecuaciones lineales. El objetivo del estudio fue analizar las dificultades referentes al uso de la simbología y del discurso del profesor, haciendo énfasis en las dificultades referentes al uso de códigos matemáticos, así como las formas de argumentación que el profesor da a sus estudiantes. El análisis de dicho discurso se basó en los registros video-grabados y audio-grabados de las clases.

Para explicar los resultados del análisis fueron revisados trabajos relacionados con la Teoría Antropológica de lo Didáctico de Yves Chevallard (1999) y el Contrato Didáctico de Guy Brousseau (1999).

Se pretende dar evidencias de cómo el análisis de los datos deja entrever cambios en la enseñanza del profesor conforme va avanzando en la actividad propuesta, entre ellas la argumentación que el profesor da a sus estudiantes, así como la mayor participación de ellos durante las clases.

ABSTRACT

The growth of research in the teaching practice shows the importance of comprehending the didactic and mathematical knowledge of in-service teachers; its nature and the sources, with the intention to improve the practice which teachers carry out during the mathematics class.

This study reports the analysis of a case study of the discourse of a high-school teacher during the solution of verbal-algebraic problems, by means of the use of an activity of such problems modeled by linear equation systems. The objective of the study was to analyze the difficulties regarding the use of both the symbology and discourse of the teacher, emphasizing the difficulties regarding the use of mathematical codes, as well as the ways of argumentation the teacher provides his students with. The analysis of such discourse was based upon the video-recorded and audio-recorded samples of classes.

In order to explain the results from the analysis, the work related to the Anthropological Theory of Didactics by Yves Chevallard (1999) and the Didactic Contract by Guy Brousseau (1999).

We aim at providing evidences of how the analysis of the data leaves hints of the changes of the teacher's practice as the proposed activity carries on, among them the argumentation that the teacher gives to his students, as well as the greater participation of them during class.

ÍNDICE DE CONTENIDO

Capítulo 3

Metodología

Capítulo 4

Análisis de datos y discusión de resultados

Capítulo 5

Conclusiones y reflexiones finales

Anexo

Actividades implementadas

PRESENTACIÓN

El propósito de la investigación contenida en este trabajo es, justamente, analizar el discurso del profesor de bachillerato en la enseñanza de resolución de problemas verbales-algebraicos a partir de las praxeologías u organizaciones matemáticas y didácticas. En específico, analizar las dificultades referentes al uso de la simbología y del discurso del profesor, así como las formas de argumentación que él da a sus estudiantes cuando resuelven tales problemas.

De los cinco capítulos en los que está dividido este documento, el Capítulo 1 describe y documenta el problema de investigación que se abordó en esta tesis, así como los objetivos y las preguntas de investigación que guiaron el presente estudio, y la importancia de éste.

En el Capítulo 2 se hace una revisión de la literatura relacionada con el problema de investigación, mediante la cual se analizan los datos; se revisa la referente a las praxeologías matemáticas y didácticas de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) de Chevallard (1999), así como el Contrato Didáctico de Guy Brousseau (1999).

La metodología empleada en la investigación es descrita en el Capítulo 3. En éste se detallan las características del profesor participante en el estudio, así como el diseño de la actividad implementada, y los diferentes procesos de solución de los problemas de la actividad.

En el Capítulo 4 se expone el análisis de los datos recabados durante la implementación de las actividades, con base en el marco teórico utilizado en esta investigación. Este análisis pone énfasis en los tipos de argumentos dados por el profesor durante la resolución de los problemas. Se exponen partes de las clases en las que se discuten las diferentes formas de llegar a los sistemas de ecuaciones que modelan la solución del problema.

Finalmente, en el Capítulo 5 se describen las conclusiones y reflexiones obtenidas del análisis y discusión de los datos recabados. Son presentados primero, las conclusiones respecto a los objetivos de la investigación y, segundo, respecto de las preguntas de investigación, así como algunas observaciones finales que se derivan de este trabajo de tesis en torno a las futuras investigaciones que pueden continuar explorando la problemática relacionada con el discurso del profesor. Al final de presente documento, es anexada la actividad implementada en el presente estudio, tanto del alumno como la guía proporcionada al profesor.

CAPÍTULO 1

PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

1.1. Introducción

El *discurso*[1] del profesor de matemáticas constituye el espacio donde se construyen, negocian e interpretan los significados matemáticos y de los signos utilizados en la interacción social que se realiza en el salón de clases; por lo tanto, construir conocimiento en interacción requiere del lenguaje usado socialmente. El discurso matemático escolar en el salón de clases proporciona un escenario al profesor y a los alumnos con el fin de representar, pensar, hablar, estar de acuerdo o en desacuerdo con lo discutido socialmente en ese ambiente educativo.

El mensaje presente en el discurso, en las aulas de clase, funciona como mediador entre las personas que intervienen en la comunicación. Algunos mensajes, referidos a contenidos específicos, ya se encuentran semántica y sintácticamente estructurados en los libros o guías de clase. La distancia entre estos y los mensajes verbales que originan las diferentes actividades de la clase son fuente de problema en la comunicación. Muchas veces, a pesar de observar la participación de los alumnos en la interacción, la lógica generada por la interacción verbal entre ellos y el docente desvirtúa la lógica del contenido académico.

El contenido del discurso, en cambio, se refiere a la sustancia matemática de las ideas planteadas, a la profundidad y la complejidad de éstas en términos de los conceptos matemáticos que se traten (Sherin, 2002, p. 209). En el papel del docente, en una comunidad discursiva, Sherin menciona que los profesores tienen diferentes papeles a desempeñar en el salón de clases.

[1] Martínez & Pérez (2004, p. 185) definen el discurso como un conjunto de palabras y frases utilizadas para manifestar lo que se piensa o siente, las cuales permiten expresar ideas, opiniones y estados afectivos para facilitar el proceso de enseñanza-aprendizaje.

El desarrollo de una comunidad discursiva en el propio salón de clases puede ser una poderosa forma de desarrollo profesional para quienes participan en ella. En concreto, en una *comunidad de discurso*[2], no se trata sólo de los estudiantes que aprenden, sino también del profesor que aprende (Sherin, 2002). Y el hecho de que los estudiantes comparten y explican sus ideas a la comunidad, parece ser un factor clave en este aprendizaje.

En el estudio de cómo se desarrolla una comunidad, Yackel y Cobb (1996) describen la importancia de las normas establecida en el aula. En particular, sostienen la existencia de normas socio-matemáticas específicas para participar en los debates de las matemáticas. Por lo tanto, si bien las normas de justificación y explicación podrían aplicarse al discurso de cualquier tema, argumentan que "lo que cuenta como una explicación matemática aceptable y una justificación es una norma socio–matemática" (p. 461). Es decir, convertirse en un miembro de una comunidad de discurso matemático implica aprender a hablar sobre las matemáticas de tal forma que sean productivas matemáticamente hablando.

En cambio, Manghi (2010) menciona que los estudios acerca del discurso del profesor y su papel en la alfabetización escolar, tradicionalmente, han asumido dos creencias. La primera, es que el lenguaje constituye el medio principal y único para enseñar y aprender en la escuela, mientras que la segunda creencia asume que hay sólo una forma de usar el lenguaje en la escuela, y que esa forma sirve para comunicarse y aprender de manera eficiente en todas las asignaturas escolares.

En este primer capítulo, se da a conocer la justificación e importancia del problema de investigación, pues hasta ahora los estudios en torno a la resolución de problemas verbales han estado enfocados, principalmente, a los estudiantes y no a los profesores. En la actualidad, investigaciones que aborden la problemática que implica enseñar sistemas de ecuaciones lineales ha sido muy escasa. Es por ello que se orienta la presente investigación en el discurso del profesor, en la enseñanza de resolución de problemas verbales-algebraicos conducentes a sistemas de dos o tres ecuaciones lineales con dos o tres incógnitas. También, en este capítulo se da a conocer el problema de investigación y las

[2] En una comunidad del discurso los alumnos deben exponer y explicar sus ideas y responder a las ideas de sus compañeros de clase. Se les pide a los profesores facilitar estas conversaciones y de recoger ideas de los alumnos, ya que se desarrolla una nueva comprensión de contenidos, por ejemplo, en el cambio de su propia enseñanza de las matemáticas. (Sherin, 2002, p. 207)

preguntas que guiaron el presente estudio, así como los objetivos y la importancia que tiene desarrollar e implementar un estudio como el aquí reportado.

1.2. Problema de investigación

Un profesor de matemáticas tiene una gran oportunidad y responsabilidad en la enseñanza de esta disciplina a estudiantes de los distintos niveles educativos en los que trabaje. Polya (1965) menciona que si el profesor dedica parte de su tiempo a ejercitar con los alumnos operaciones rutinarias (mayoritariamente de carácter algorítmico), matará en ellos el interés e impedirá, posiblemente, su desarrollo intelectual y acabará desaprovechando su oportunidad como buen enseñante de matemáticas. Pero, si por el contrario pone a prueba la curiosidad de sus alumnos planteándoles problemas adecuados a sus conocimientos, y les ayuda a resolverlos por medio de preguntas estimulantes, podrá despertarles el gusto por el pensamiento independiente y proporcionarle ciertos recursos para resolver y plantear problemas matemáticos.

En general, el planteamiento y resolución de problemas, propuestos a los alumnos, son presentados por el profesor por medio de una ecuación que les ayudará a encontrar la solución. Es común que dicho procedimiento se muestre sin las dificultades que éste conlleva, por lo que los alumnos al momento de enfrentarse a la resolución de un problema verbal, quieren imitar el procedimiento utilizado por el profesor sin considerar las condiciones del problema; lo que puede llevar a no obtener un resultado exitoso. Esta forma de proceder puede convertirse, para los estudiantes, en una de las dificultades al momento de resolver un problema verbal; principalmente, en su fase de traducción del enunciado a la ecuación involucrada en el problema.

De acuerdo con Even y Schwarz (2003), la investigación en educación matemática comenzó a centrarse hace varias décadas en los estudiantes y en la participación de los docentes en actividades de enseñanza y de aprendizaje. Sin embargo, la práctica que lleva a cabo el profesor en el aula, ha sido investigada entre la materia de matemáticas, su papel en el aula y su formación profesional.

La enseñanza de las matemáticas, mediante la resolución de problemas verbales-algebraicos, es una actividad importante del profesor dentro del aula. En el salón de clases, no sólo se debe dar importancia a encontrar la solución a de los problemas propuestos, sino también al discurso del profesor, ya que juega un papel fundamental en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Por lo anterior, se plantea la investigación:

ANÁLISIS DEL DISCURSO DEL PROFESOR DE BACHILLERATO EN LA ENSEÑANZA DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS VERBALES-ALGEBRAICOS: ESTUDIO DE CASO

De acuerdo con Chevallard (1999), las praxeologías matemáticas y didácticas constituyen la herramienta fundamental para estudiar y modelar cualquier actividad asociada con el profesor de matemáticas y con las matemáticas. Esta investigación está centrada en el análisis del discurso del profesor en la enseñanza de problemas verbales-algebraicos, a partir de las praxeologías u organizaciones matemáticas y didácticas. En el Capítulo de 2 de esta tesis son explicados en detalle algunos de los conceptos teóricos de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) de Chevallard (1999) que sirvieron de base para la implementación de la presente investigación.

1.3. Objetivos

Esta investigación tiene el interés de analizar el discurso del profesor en una clase normal de matemáticas (analizar las dificultades referentes al uso de la simbología y del discurso) en particular en la enseñanza de resolución de problemas verbales-algebraicos, modelados por sistemas de ecuaciones lineales; así como las formas de argumentación que el profesor da a sus estudiantes cuando resuelven tales problemas. Además, inferir el impacto que se logra en la enseñanza de las matemáticas al utilizar problemas verbales-algebraicos.

1.4. Preguntas de investigación

El discurso que despliega el profesor cuando se le propone resolver problemas, puede incluir cuáles son las acciones y características que de manera más predominante tiene el profesor en relación con su discurso en el salón de clase. Para lograr los objetivos precedentes en la presente investigación, es necesario conocer la influencia que tienen los problemas verbales-algebraicos en la enseñanza. Por lo anterior, las preguntas que guiaron el presente estudio son las siguientes:

1. *¿Cómo influye en la enseñanza y el aprendizaje la resolución de problemas verbales-algebraicos, tanto en los profesores como en los alumnos?*

Para responder esta pregunta, se les proporcionó a los profesores y alumnos actividades que involucran problemas verbales-algebraicos; que pueden ser modelados por sistemas de ecuaciones lineales. Las actividades fueron diseñadas con el propósito de que los alumnos utilizaran los métodos de solución de sistemas de ecuaciones lineales de dos ecuaciones con dos incógnitas.

2. *¿Cuál es el discurso matemático y los argumentos del profesor en clase cuando aborda problemas verbales-algebraicos?*

La respuesta a esta pregunta está ligada principalmente con los indicadores verbales; sobre todo, en los códigos de comunicación matemática y no matemática del discurso utilizado por el profesor. El análisis de dicho discurso, se basó en los registros video-grabados y audio-grabados de las clases. Sin embargo, la respuesta a esta segunda pregunta se basa en la clasificación y caracterización de los distintos argumentos del profesor (en la enseñanza de la resolución de dichos problemas) de acuerdo con Robert y Rogalski (2005), así como de las praxeologías matemáticas y didácticas mencionadas en la TAD (Chevallard, 1999).

3. *¿De qué manera ayuda al profesor el hecho de proporcionarle actividades (tareas) a utilizar en sus clases ordinarias?*

La respuesta a esta tercera pregunta se ve reflejada en los diversos elementos de argumentación del profesor durante las clases en las que se aplicó la actividad, de las cuales permite obtener evidencia de la importancia que tiene la resolución de problemas verbales-algebraicos, y qué tipo de ayuda ofrece al profesor en la enseñanza de las matemáticas en las clases ordinarias.

1.5. Importancia del estudio

El crecimiento de la investigación sobre la práctica del docente muestra la importancia de comprender los conocimientos didácticos y matemáticos de los profesores en servicio; su naturaleza y las fuentes, con la intención de mejorar la práctica que llevan a cabo en la clase de matemáticas.

En realidad, la mayor parte de las investigaciones en educación matemática documenta la forma de resolución de problemas por parte de los estudiantes y muy pocos estudios se enfocan en cómo influye la enseñanza del profesor en el aprendizaje de las matemáticas vía resolución de problemas verbales-algebraicos. Desde inicios de 2000, en el campo de educación matemática, empezaron a tomar relevancia investigaciones interesadas en conocer cuáles y cómo son las diferentes formas de enseñar a resolver problemas verbales-algebraicos por parte del profesor y cómo éstas influyen en el aprendizaje de los estudiantes en los distintos niveles educativos.

En la literatura de investigación en torno a la práctica del profesor se reconoce que hay dos tipos de factores que afectan sensiblemente su práctica; estos factores son llamados externos e internos (Jaworski, 2003). De acuerdo con esta autora, los factores externos son: la situación (sistema escolar, el establecimiento de ejercicios, el grupo particular con quien trabaja, las condiciones materiales, etc.), mientras que los factores internos son: las características propias del profesor (sus conocimientos sobre el contenido a enseñar y su enseñanza, su estilo de interacción, el conocimiento de sus alumnos, y también su estado personal: vigor, estrés, fatiga, etc.).

Dado que los profesores tienen su propia didáctica, ya sea por medio de discusión con los alumnos de algún concepto, por medio de resolución de problemas o como una clase tradicional (el profesor dice qué debe hacer el alumno), es conveniente realizar investigaciones sobre el discurso del profesor en la enseñanza de conceptos matemáticos, así como la simbolización y sintaxis propia de estos.

Incluso, algunos profesores exhiben dificultades conceptuales cuando enseñan álgebra, ya sea mediante la resolución de problemas verbales-algebraicos que involucran variación de cantidades; particularmente, cuando en la resolución de tales problemas se vuelve necesario el uso de literales, o bien, cuando tratan temas en los que, desde su punto de vista, se vuelve "necesaria" la memorización de reglas o fórmulas que permiten al estudiante, por ejemplo: reducir expresiones algebraicas, resolver ecuaciones lineales y cuadráticas, etc.

En el siguiente capítulo, se exponen las principales características de la Teoría Antropológica de lo Didáctico de Yes Chevallard (1999), así como sus principales fundamentos, los cuales sirven como parte esencial para elaborar el análisis de datos de esta investigación, también se expone el Contrato Didáctico de Guy Brousseau (1999).

CAPÍTULO 2

MARCO CONCEPTUAL

2.1. Introducción

En este capítulo se hace una revisión de la literatura relevante relacionada con el problema de investigación de este estudio. En la primera parte, se revisa la referente a las praxeologías matemáticas y didácticas de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) de Chevallard (1999). En la segunda parte, se hace referencia al Contrato Didáctico de Guy Brousseau (1999).

2.2. Teoría antropológica de lo didáctico

De acuerdo con Chevallard (1999), la TAD sitúa la actividad *matemática*, y en consecuencia *la actividad del estudio* en matemáticas, en el conjunto de *actividades humanas* y de *instituciones*[3] sociales. Se establece que todo quehacer matemático tiene un componente didáctico esencial, y se parte del supuesto de que el conocimiento matemático, como una obra matemática, se construye como respuesta a determinadas tareas matemáticas y es, en el seno de una institución, un medio para realizar dichas tareas.

De esta manera, el objeto de estudio para la TAD es la actividad matemática institucional y su esencia es el hombre cuando aprende y enseña matemáticas a través de las relaciones humanas, tomando en cuenta el conocimiento matemático respecto a las instituciones dedicadas a la enseñanza.

Se admite que *toda actividad humana regularmente realizada puede* describirse con un modelo *único, que se resume aquí con la palabra de praxeología.* [Chevallard, 1999, p. 220 Cursivas en el original.]

[3] Una institución (la escuela) es un dispositivo social en el que se ofrecen e imponen distintas maneras de hacer y de pensar, y en el que las personas, convirtiéndose en *sujetos* de las instituciones, encuentran las condiciones apropiadas de desarrollo de sus actividades (Bosch & Gascón, 2009, p. 93).

Por ello, la TAD postula que toda actividad humana puede ser estudiada en términos de organizaciones o praxeologías (Chevallard, 1999), y en caso de que la actividad sea una actividad de estudio, se puede hablar de una praxeología determinada y sustentada por un proceso de estudio; esto es, de una praxeología didáctica. En este sentido, en dicha teoría antropológica, el conocimiento matemático se describe en términos de praxeologías matemáticas (objeto de estudio) y la actividad matemática en términos de praxeologías didácticas (proceso de estudio), las cuales están íntimamente relacionadas y, por esa razón, se deben tomar en conjunto. Es decir, toda praxeología didáctica contiene, al menos, una praxeología matemática y toda praxeología matemática está contenida en, al menos, una praxeología didáctica (ibídem, p. 229).

2.2.1. La noción de praxeología

La palabra praxeología se apoya en el hecho de que todo conocimiento surge a partir de la práctica. En el concepto de praxeología se identifican cuatro elementos importantes, situados en la TAD e imprescindibles para construir cualquier tipo de praxeología (Chevallard, 1999): el tipo de tarea (T), la técnica (τ), la tecnología (Θ) y la teoría (Θ). Estos cuatro elementos forman parte de la praxis y el logos, como es detallado en seguida.

Tipos de tareas

En la noción de praxeología, se encuentran las nociones solidarias de *tarea t*, y de *tipo de tareas T*. Cuando una *tarea t* forma parte de un *tipo de tareas T*, se escribirá $t \in T$. En la mayoría de casos, una tarea (y el tipo de tareas asociado) se expresa por un verbo: *limpiar* la habitación, *desarrollar* la expresión literal dada, *dividir* un entero entre otro, *saludar* a un vecino, *leer* un manual de empleo, *subir* una escalera, *integrar* la función $x \rightarrow xlnx$ entre $x = 1$ y $x = 2$, etc. Tres puntos deben ser subrayados inmediatamente (Chevallard, 1999, p. 220):

a) La noción de la tarea empleada es más amplia que la del lenguaje corriente: rascarse la mejilla, ir del sofá al armario, e incluso sonreír a alguien, son *tareas*.
b) La noción de tarea o, mejor, de *tipo de tareas*, supone un objeto relativamente preciso. Subir una escalera es un tipo de tarea, pero *subir* simplemente, no lo es. De la misma manera, calcular el valor de una función en un punto es un tipo de tareas,

pero *calcular* simplemente, es lo que se llama *un género de tareas*, que pide un determinativo.

c) Las tareas, tipos de tareas, géneros de tareas *no son datos de la naturaleza,* son "artefactos", "obras", *construcciones institucionales,* cuya reconstrucción en tal institución, y, por ejemplo, en tal clase, es un problema completo, que es el objeto mismo de la didáctica (ibídem, p. 223).

Técnicas

Sea *T* un *tipo de tareas* dado. Una praxeología relativa a *T* requiere (en principio) una manera de realizar las tareas $\tau \in T$: la manera de llevar a cabo la tarea recibe el nombre de técnica (del griego tekhnê, saber hacer).

La técnica no es necesariamente de tipo algorítmico o casi-algorítmico (Chevallard, 1999); por ejemplo, la técnica que se lleva a cabo en el tipo de tarea *pintar un paisaje* o *limpiar la habitación* no es algorítmica. Sin embargo, en el ámbito de las matemáticas, las técnicas suele ser institucionalizadas y algoritmizadas cuando se emplean para dar solución a tareas de tipo algorítmico (ibídem), excluyendo otras que pueden ser igual de efectivas.

Una praxeología relativa al tipo de tareas *T* contiene pues, en principio, una técnica τ relativa a *T*. Contiene así un "bloque" designado por $[T/\tau]$, que se denomina *bloque práctico-técnico* y que se identifica, genéricamente, con lo que se denomina *un saber-hacer:* un determinado tipo de tareas *T y una determinada manera, τ, de realizar las tareas de* este tipo.

Dentro de las técnicas se deben señalar tres puntos importantes:

a) Una técnica τ –una "manera de hacer"– no tiene éxito más que sobre una *parte $P(\tau)$ de las tareas del tipo T a la cual es relativa, parte que se denomina alcance de* la técnica: la técnica tiende a *fracasar sobre $T \backslash P(\tau)$ de manera que se puede decir que "no se* sabe, *en general, realizar las tareas del tipo T "* [ibídem, p. 223. Cursivas en el original.]

b) Una técnica τ no es necesariamente de naturaleza *algorítmica o cuasi-algorítmica: no es así más que en casos poco frecuentes.* [ibídem, p. 223. Cursivas en el original.]

c) En una institución *I dada, y a propósito de un tipo de tareas T dado, existe en* general una *sola técnica, o al menos un pequeño número de técnicas institucionalmente reconocidas, con la exclusión de técnicas alternativas posibles que pueden existir* efectivamente, pero en *otras instituciones.* [ibídem, p. 223. Cursivas en el original.]

Tecnologías

Para que la técnica tenga validez, ésta se debe poder explicar, justificar y comprender mediante un discurso racional. Se entiende por *tecnología, y se indica generalmente por* θ, *un discurso racional -el logos- sobre la técnica -la tekhnê-* τ, *discurso cuyo primer objetivo es justificar* "racionalmente" la técnica τ, para asegurarse de que permite realizar las tareas del tipo *T, es* decir, realizar lo que se pretende.

a) Se admite como un hecho que, en una institución *I,* cualquiera que sea el tipo de tareas *T, la técnica* τ *relativa a T está siempre acompañada de al* menos un *embrión o más frecuentemente aún, de un vestigio de tecnología* θ.
b) El hecho de que exista en *I una técnica canónica, en principio la única* reconocida y la única empleada, confiere a esta técnica una virtud "autotecnológica": actuar de esta manera no exige justificación, porque es la *buena manera de actuar (en I).*
c) La primera función de la tecnología es justificar la técnica; es decir, consiste en asegurar que la técnica da lo pretendido; mientras que la segunda función de la tecnología consiste en exponer *por qué es* correcta.
d) Una tercera función corresponde a un empleo más actual del término de tecnología: la función de *producción de técnicas.* Siempre hay tecnologías *potenciales, a la espera de técnicas, que no son aún tecnologías de alguna técnica o que lo son* de muy pocas técnicas (Chevallard, p. 225).

Chevallard (1999) señala que, en el contexto de las matemáticas, la *justificación* suele predominar, por la vía de la *demostración*, sobre la *explicación* de la técnica. También, indica que la técnica, relativa a un tipo de tarea, está siempre acompañada de una tecnología o elementos tecnológicos que, incluso, pueden estar integrados en la misma técnica; esto es, la técnica tiene la función de encontrar el resultado de una tarea en cuestión y, a la vez, la función de tecnología para justificar que es correcto el resultado esperado.

Teorías

El discurso tecnológico contiene afirmaciones, más o menos explícitas, de las que se puede pedir razón. Se pasa entonces a un nivel superior de justificación-explicación-producción, el de la *teoría, Θ, que retoma, en relación a la tecnología, el papel* que ésta última tiene respecto a la técnica.

En todo ámbito, la *naturaleza de la teoría puede fluctuar, y de hecho fluctúa* históricamente; como ocurre en materia técnica o tecnológica, hay aquí un *progreso teórico* que conduce en general a sustituir las evidencias "metafísicas" por enunciados teóricos positivos.

En griego, *theôria* toma a partir de Platón el sentido moderno de "especulación abstracta" Pero, en el origen, significaba simplemente la idea de contemplación de un espectáculo –el *theôros era el espectador que miraba la acción sin participar–*. De hecho, los enunciados teóricos aparecen frecuentemente como "abstractos", apartados de las preocupaciones de los "simples" tecnólogos y técnicos. Este efecto de abstracción es correlativo a lo que funda la gran *generatividad* de los enunciados teóricos –su capacidad para justificar, para explicar, para producir.

2.2.2. Praxeología puntual: saber-hacer y saber

La estructura praxeológica, que se conoce con el nombre de praxeología puntual, se compone de un *tipo* de tareas (T), de una *técnica* (τ) o manera de resolver la tarea del tipo de tareas, de una *tecnología* (θ) o discurso racional sobre la técnica y de una *teoría* (Θ) de la tecnología empleada. Así, la praxeología puntual se puede denotar como $[T/\tau/\theta/\Theta]$ y está constituida u organizada por dos bloques: el bloque *práctico-técnico* $[T/\tau]$ y el bloque *tecnológico-teórico* $[\theta/\Theta]$. El bloque $[\theta/\Theta]$ se identifica habitualmente como *un saber*, mientras que el bloque $[T/\tau]$ constituye un *saber-hacer*.

El bloque práctico-técnico se conoce como *saber-hacer* (o *praxis)* porque engloba el *tipo* de tareas y la o las *técnicas* para resolverlas, y el bloque tecnológico-teórico se define como *saber* (o *logos)* ya que sitúa la o las tecnologías y la teoría. En una praxeología matemática, el *saber* es el conocimiento matemático y el *saber-hacer* es la didáctica o conocimiento didáctico de ese conocimiento matemático. Chevallard (1999, p. 225) señala que este saber permite generar una o varias técnicas para un determinado tipo de tarea.

Así, la praxeología matemática puntual del profesor de matemáticas puede darse como un conocimiento matemático (saber) acompañado o generado de un conocimiento didáctico (saber-hacer). Es decir, que entre los factores internos que afectan la práctica docente del profesor está "el conocimiento matemático del contenido a enseñar y el contenido didáctico de ese contenido matemático"

2.2.3. Organizaciones didácticas y momentos del estudio

La práctica que lleva a cabo el profesor de matemáticas se encuentra relacionada con dos praxeologías inseparables: organizaciones o praxeologías matemáticas y organizaciones o praxeologías didácticas. Cada praxeología está constituida por su saber-hacer y su saber. De esta manera, el análisis de la práctica del profesor es apoyado en las praxeologías matemáticas y didácticas.

La praxeología matemática, que construye el profesor de matemáticas, surge siempre con una respuesta a una o a un conjunto de tareas matemáticas (Bosch & Gascón, 2009, p. 92). Para construirla, el profesor utiliza praxeologías didácticas orientadas a la "difusión social de las matemáticas" (Bosch & Gascón, 2009, p. 93).

De acuerdo con Chevallard (1999), las praxeologías didácticas son "el conjunto de tipos de tareas, de técnicas, de tecnologías etc., *movilizadas para el estudio concreto en una institución concreta"* [p. 246, cursivas en el original]. Así pues, todo proceso de estudio de las matemáticas, en cuanto actividad institucional de construcción o reconstrucción de praxeologías matemáticas, consiste en la utilización de una determinada praxeología didáctica con su componente saber-hacer (formado por tipos de tareas y técnicas didácticas) y su componente saber (formado por una tecnología y una teoría didáctica). Sin embargo, como señala Bosch y Gascón (2009, p. 93), es difícil encontrar para las praxeologías didácticas un saber que las describa, estructure y justifique de forma más o menos sistemática.

En las praxeologías didácticas se presentan dos aspectos inseparables: el proceso de construcción matemática y el resultado mismo de esta construcción. La consideración de los diversos procesos que conciernen a la construcción matemática permite identificar diferentes dimensiones o momentos que estructuran cualquier proceso de elaboración matemática. De esta manera, el proceso de estudio se sitúa en un espacio determinado por seis momentos didácticos (Chevallard, 1999):

- El momento del primer encuentro con el tipo de tarea que está en juego: hace referencia a los objetos matemáticos que constituyen un tipo de tarea.
- El momento exploratorio del *tipo* de tareas, que está relacionado con la construcción de una técnica adecuada para abordarlo.
- El momento de construcción de un entorno *tecnológico-teórico*, que explica y justifica las *técnicas* puestas en funcionamiento y permite la elaboración de nuevas técnicas.
- El momento de trabajo de la *técnica*, que provoca la evaluación de las *técnicas* existentes y la construcción de nuevas. Se refiere al dominio y a la creación de nuevas técnicas matemáticas.

  El momento de la institucionalización, que delimita y precisa aquellos elementos constituyentes de la praxeología matemática construida.
- El momento de la evaluación de la praxeología construida; relacionada con el momento de la institucionalización, examina la praxeología matemática en su conjunto.

Cada momento puede ser vivido con distintas intensidades en diversos tiempos, tantas veces como se necesite a los largo del proceso de estudio y están distribuidos de una forma dispersa a lo largo del proceso de estudio, de tal forma que no se pueden llevar todos al mismo tiempo (Chevallard, Bosch & Gascón, 2009).

2.3. Contrato didáctico

Guy Brosseau desarrolla la Teoría de Situaciones Didácticas (TSD), que trata de una teoría de enseñanza, que busca las condiciones para una génesis artificial de los conocimientos matemáticos, bajo la hipótesis de que los mismos no se construyen de manera espontánea.

Brousseau (1999) afirma que la descripción sistemática de las situaciones didácticas es un medio más directo para discutir con los maestros acerca de lo que hacen o podrían hacer, y para considerar cómo estos podrían tomar en cuenta los resultados de las investigaciones en otros campos. La TDS aparece entonces como un medio privilegiado, no solamente para comprender lo que hacen los profesores y los alumnos, sino también para producir problemas o ejercicios adaptados a los saberes y a los alumnos y para producir finalmente un medio de comunicación entre los investigadores con los profesores.

Al referirse a las *Situaciones Didácticas*, en principio se debe distinguir dos enfoques: uno, tradicional; otro, el enfoque planteado por la teoría de Brousseau. Ambos en relación con la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. En el primero, se tiene una relación estudiante-profesor, en la cual, el profesor simplemente provee (o deposita) los contenidos, instruye al estudiante, quien captura dichos conceptos y los reproduce tal cual le han sido administrados.

En el enfoque planteado por Brousseau intervienen tres elementos fundamentales: estudiante, profesor y el *medio didáctico*[4]. En esta terna, el profesor es quien facilita el medio en el cual el estudiante construye su conocimiento. Así, la *Situación Didáctica* se refiere al conjunto de interrelaciones explícita o implícitamente entre tres sujetos: profesor-estudiante-medio didáctico.

Cuando el alumno se vuelve capaz de poner en funcionamiento y utilizar por él mismo el saber que está construyendo, en una situación no prevista en cualquier contexto de enseñanza y también en ausencia de cualquier profesor, está ocurriendo entonces lo que puede ser llamada situación a-didáctica.

Dentro de la interrelación: profesor-estudiante-medio didáctico, hay dos conceptos que vienen a integrarse: la *transposición didáctica*[5] y el *contrato didáctico*. El *Contrato Didáctico* se refiere al conjunto de comportamientos del maestro esperados por el alumno, y de comportamientos del alumno esperados por el maestro. Estos comportamientos

[4] Éste constituye el espacio donde se desenvuelven los elementos. El medio no representa por ello una dimensión pasiva, sino que es sujeto dentro de las situaciones didácticas.

[5] Es la transformación del saber científico o saber sabio en un saber posible de ser enseñado; es decir, el proceso por el cual ciertos contenidos seleccionados como aquellos que se deben enseñar en un tiempo y lugar dados, son transformados en contenidos enseñables.

regulan el funcionamiento de la clase, definiendo así los roles de cada uno y distribuyendo las tareas. El contrato didáctico posee componentes explícitos e implícitos.

Las relaciones de enseñanza se pueden observar a través de las interrelaciones entre el maestro, el alumno y el saber, sin dejar de analizar el contexto. No se puede dejar de conocer cuál es el lugar que ocupa el saber dentro de la institución educativa para el profesor y para los alumnos.

De alguna manera, el concepto de contrato didáctico permite tomar conciencia de que una parte de las ideas matemáticas de los alumnos son producto de inferencias que, por provenir de lo que el profesor expresa, pero no necesariamente dice, escapan generalmente de su control. En el contrato didáctico el profesor tiene el compromiso de exponer, explicar, ejercitar diferentes trabajos, así como tener el papel de mediador y responder dudas planteadas, estar abierto al diálogo, escuchar inquietudes y responder, acompañar a los alumnos con dificultades en el aprendizaje y mantener un buen ambiente de trabajo (relación de respeto (profesor-alumno y alumno-profesor).

Los conceptos teóricos presentados y discutidos en este capítulo, permitieron diseñar y elaborar las actividades implementadas en la presente investigación, así como analizar y discutir los datos provenientes de los diferentes registros de la actividad propuesta al profesor participante en este estudio.

CAPÍTULO 3

METODOLOGÍA

3.1. Introducción

En este capítulo se describe la población participante en este estudio y la forma en que ésta fue seleccionada. De igual manera, se describe la actividad diseñada para esta investigación, así como sus diferentes componentes, características y propósitos. Al final de este capítulo, se describe la forma en que las actividades fueron implementadas; cuyo fin es el acopio de datos para analizar el discurso del profesor en la enseñanza de resolución de problemas verbales-algebraicos, además de entrevistas que se realizaron al profesor, antes y después de la aplicación de la actividad, las cuales no son analizadas, en este documento.

3.2. Descripción y selección de la población

Esta investigación es de corte cualitativo; se extraen descripciones a partir de observaciones que adoptan la forma de entrevistas, grabaciones, video-grabaciones y transcripciones. La mayor parte de los estudios cualitativos están preocupados por el contexto de los acontecimientos, y centran su indagación en aquellos contextos en los que los seres humanos se implican e interesan, evalúan y experimentan directamente. Esto es, la investigación cualitativa investiga contextos naturales, o tomados tal y como se encuentran, más que reconstruidos o modificados por el investigador (Sherman & Webb, 1988).

La investigación se llevó a cabo en nivel bachillerato con un profesor a cargo de las clases de álgebra de primer semestre. El profesor estudió Ingeniería en Electrónica en el Instituto Politécnico Nacional y realizó una Maestría en Educación en el Instituto de Ciencias y Estudios Superiores de Tamaulipas (ICEST). Cuenta con 26 años de experiencia, de los cuales los primeros 10 años trabajó en nivel secundaria, y cuenta con 16 años de experiencia como profesor de matemáticas en el nivel medio superior.

Imparte las clases de álgebra, matemáticas aplicadas, geometría analítica, geometría y trigonometría, cálculo, probabilidad y estadística, en diferentes semestres. En el semestre que se grabaron las clases sólo impartía las clases de álgebra.

No se dio ninguna orientación al profesor sobre cómo desarrollar su clase, ya que el propósito de esta investigación es analizar el discurso del profesor en su ambiente natural, poniendo énfasis en su participación y la forma de argumentar la resolución de problemas verbales-algebraicos, que permite reconocer la naturaleza de la enseñanza promovida. Se interviene en la investigación sólo al proporcionarle al profesor la guía de problemas verbales-algebraicos a trabajar en la clase (Anexo 1).

En relación con la resolución de problemas, el profesor considera que la principal dificultad de los alumnos es la competencia antropológica; es decir, es aquella que incide en la cuestión personal de los estudiantes: la motivación, los hábitos de estudio y el gusto por las matemáticas. Además, considera importante las sesiones de resolución de problemas para aprender matemáticas, ya que a través de éstas, el alumno puede definir los contenidos que puede utilizar en la solución de la situación-problema.

Su experiencia como profesor está enfatizada en relación con el aprendizaje de los alumnos en forma significativa; es decir, donde ellos a través de una situación-problema usan sus conocimientos previos, sus habilidades y competencias para dar solución a los problemas que se les plantean. Utiliza también una secuencia didáctica basada en tres momentos: apertura, desarrollo y cierre. En apertura trata de la primera aproximación al objeto de conocimiento, recuperación de los saberes previos vinculados con el tema; en desarrollo se refiere a la ampliación y profundización de la información, construcción del objeto de conocimiento, a cómo desarrollan su conocimiento previo, y es aquí donde el profesor apoya con actividades de refuerzo y retroalimentación para rescatar sus conocimientos previos, por medio de círculos de estudio y tutorías; el cierre trata de la reconstrucción del objeto de conocimiento y del todo en una nueva síntesis, síntesis final del tema y síntesis parciales de nuevos aprendizajes.

En algunas ocasiones, el profesor se apoya en diferente material didáctico para sus clases como: las presentaciones, el rota-folio, videos, entre otros, siendo estos de gran utilidad. Pero a partir de la Reforma Integral de Bachillerato 2008, el profesor sólo se encarga de 5% de la clase, que corresponde a retroalimentar a los alumnos en las actividades establecidas durante las sesiones y evaluar su desempeño y rendimiento en ellas.

Al terminar la educación media superior, todos los egresados, independientemente de la particular forma de organización curricular de cada institución, comparten una serie de competencias. Las competencias están organizadas en un Marco Curricular Común (2008) que incluye competencias genéricas, disciplinares y profesionales.

De acuerdo con la Reforma Integral de la Educación Media Superior (2008), las competencias genéricas que conforman el perfil del egresado del Sistema Nacional de Bachillerato, son aquellas que permiten a los jóvenes comprender el mundo e influir en él, continuar aprendiendo de forma autónoma a lo largo de sus vidas, desarrollar relaciones armónicas con quienes les rodean y participar eficazmente en su vida social, profesional y política.

Para cumplir este perfil, el profesor se apoya en las siguientes competencias genéricas: conocer y abordar problemas y retos teniendo en cuenta los objetivos que persigue; escuchar, interpretar y emitir mensajes pertinentes en distintos contextos mediante la utilización de medios, códigos y herramientas apropiadas, respectivamente. En esta última, el alumno debe expresar ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas, así como identificar las ideas clave en un texto o discurso oral e inferir conclusiones a partir de ellas.

3.3. Descripción y propósito de las actividades

En este apartado se muestran cómo fueron diseñados los instrumentos del estudio, así como la descripción de los mismos. Entre los instrumentos del estudio se encuentra una actividad propuesta al profesor para implementar durante la clase.

El propósito de la actividad propuesta al profesor es promover en los estudiantes la comprensión de los métodos algebraicos de sustitución, reducción e igualación, usados para resolver sistemas de ecuaciones lineales; así como dar elementos teóricos necesarios para que ellos lleven a cabo el proceso de traducción de problemas verbales-algebraicos a notación algebraica.

La estructura general de la actividad es la siguiente:

1. Parte I. Métodos a utilizar en la resolución de problemas (presentados en una tabla)
    a. Igualación
    b. Sustitución
    c. Reducción
    d. Una pregunta después de cada tabla sobre el porqué piensan que este método es llamado Método de Igualación (sustitución o reducción), es decir, en qué sentido se lleva a cabo la igualación (sustitución o reducción) en este método.
2. Parte II. Ejercicios
3. Parte III. Uso de los métodos en la resolución de problemas verbales-algebraicos
    a. Pregunta sobre qué tienen en común estos métodos y cuál es el de su preferencia.
4. Al final de cada parte de la actividad se propone una discusión de lo visto en ellas.

Muchos problemas que requieren la determinación de dos o más cantidades desconocidas pueden ser resueltos por medio de un sistema de ecuaciones lineales. Las cantidades desconocidas se representan con letras, por ejemplo $x, y,$ etc. y se establece un sistema de ecuaciones que satisface las diversas condiciones del problema. La resolución de este sistema conduce a los valores de las incógnitas.

Para resolver un sistema de ecuaciones lineales, es necesario recordar en qué consisten los métodos usados para resolverlos. Por lo que, la primera parte está conformada de una tabla por cada método, donde aparecen los pasos a seguir en cada método, respectivamente, y también un ejemplo donde se va avanzando en él conforme va pasando cada paso de dicho método (ver Tabla 3.3.1).

Seguido de la tabla se presenta la siguiente pregunta: ¿por qué piensas que este método es llamado Método de Igualación? En otras palabras, ¿en qué sentido se lleva a cabo la igualación en este método?

Y la última pregunta de reflexión de esta primera parte: ¿En qué forma estos métodos (los métodos de Igualación, Sustitución y Reducción) te permiten reducir el sistema dado en otro que ya sabes cómo abordarlo?

Tabla 3.3.1. Parte I de la actividad

MÉTODO DE IGUALACIÓN El Método de Igualación consiste en:	$\begin{cases} x + 3y = 5 \\ 7x + 6y = 20 \end{cases}$
1. Despejar la misma incógnita en cada una de las ecuaciones y, de este modo, construir dos expresiones; las cuales tienen la misma incógnita;	$y = \frac{5 - x}{3}$ $y = \frac{20 - 7x}{6}$
2. Proponer que las dos expresiones obtenidas en el paso 1 sean iguales entre ellas, y así construir una ecuación con una incógnita;	$\frac{5 - x}{3} = \frac{20 - 7x}{6}$
3. Resolver la ecuación que resulta;	$\frac{5 - x}{3} = \frac{20 - 7x}{6}$ $2(5 - x) = (20 - 7x)$ $10 - 2x = 20 - 7x$ $7x - 2x = 20 - 10$ $5x = 10$ $x = 2$
4. Sustituir el valor obtenido en una de las ecuaciones del sistema, con objeto de calcular el valor de la otra incógnita de la pareja solución.	$y = \frac{5 - x}{3} = \frac{5 - 2}{3} = 1$ La pareja solución es $(x, y) = (2, 1)$ **¡Verifique esto!**

En la segunda parte, se proponen cinco sistemas de ecuaciones con el propósito de que se resuelvan con la libertad de usar alguno de los métodos mencionados en la Parte I. En la actividad dada al profesor, se le sugiere proponer otros sistemas de ecuaciones, si es conveniente.

Al final de las partes I, II y III, se le sugiere al profesor algunas preguntas para la discusión de lo visto durante la actividad, con el propósito de que se reflexione sobre lo que se ha realizado en la resolución de problemas.

¿Cuáles son los elementos del problema verbal-algebraico que ayudan a que éste se modele mediante un sistema de ecuaciones lineales?

¿Consideras importante verificar las respuestas que obtuviste? ¿Por qué?

¿Tiene sentido la solución que obtuviste en cada problema?

En el anexo de esta tesis se muestra la actividad del alumno y la guía del profesor completas, e implementadas en este estudio.

3.3.1. Diferentes soluciones de los problemas implementados en esta investigación

Se presentan problemas verbales-algebraicos en la Parte III, de los cuales se pide determinar el sistema de ecuaciones que interviene en el problema y resolver dicho sistema. Los problemas verbales-algebraicos presentados son tomados de Ramírez (2008), Guzmán, Bednarz y Hitt (2003), Rees y Sparks (2007) y Lehmann (2009).

En el proceso de resolución de un problema pueden observarse diferentes soluciones al mismo, derivados de toda una gama de conocimientos previos que se ponen en juego y que requieren relacionarse mutuamente, por lo que a continuación se hace una revisión de los problemas verbales-algebraicos de la actividad y sus diferentes formas de solución.

1. Rosa compró cinco cuadernos y cuatro plumones y gastó en total \$63. Si cada cuaderno le costó el doble que cada plumón, ¿cuánto le costó cada cuaderno y cada plumón? (Ramírez, 2008, p. 24).

Éste puede ser resuelto de las siguientes formas:

i) Planteando una ecuación lineal que modela el problema: $4y + 5(2y) = 63$ donde y representa el precio de cada plumón y $x = 2y$ representa el precio de de cada cuaderno.

El valor del plumón es de \$4.50, pero como el cuaderno cuesta el doble de cada plumón, entonces el cuaderno cuesta **\$9**.

$$4y + 5(2y) = 63$$
$$4y + 10y = 63$$
$$14y = 63$$
$$y = \frac{63}{14}$$
$$\boldsymbol{y = 4.5}$$

ii) También, se puede plantear un sistema de ecuaciones que modela el problema: $\begin{cases} 5x + 4y = 63 \\ x = 2y \end{cases}$ donde x representa el precio de cada cuaderno y y el precio de cada plumón. Para resolver estas ecuaciones, el alumno puede auxiliarse de cualquiera de los métodos (igualación, sustitución y reducción), si usa el método de igualación sólo hace falta despejar, de la primera ecuación, la incógnita x para igualarla con la segunda ecuación.

Entonces, partiendo de $x = \frac{63-4y}{5}$ y $x = 2y$

$$\frac{63 - 4y}{5} = 2y$$
$$63 - 4y = 2y(5)$$
$$63 - 4y = 10y$$
$$-10y - 4y = -63$$
$$14y = 63$$
$$y = \frac{63}{14}$$
$$\mathbf{y = 4.50}$$

Cada plumón tiene un costo de \$4.50, ahora sólo se sustituye ese valor en la segunda ecuación del sistema $\mathbf{x} = 2y = 2(4.50) = \mathbf{9}$ por lo que cada cuaderno tiene un costo de \$9.

Para verificar los resultados obtenidos, se sustituyen los valores en las ecuaciones del sistema:

$$5x + 4y = 63 \qquad\qquad x = 2y$$
$$5(9) + 4(4.50) = 63 \qquad\qquad 9 = 2(4.50)$$
$$45 + 18 = 63 \qquad\qquad 9 = \mathbf{9}$$
$$\mathbf{63 = 63}$$

iii) Otra manera de resolver el problema es por medio de una tabla de valores (ver tabla 3.3.2), en la cual se le van dando valores a las incógnitas hasta llegar a aquellos que cumplen las condiciones del problema.

Tabla 3.3.2. Tabla de valores del problema 1

y	$2y = x$	$5x + 4y$
4	$2(4) = 8$	$5(8) + 4(4) = 40 + 16 = 56$
5	$2(5) = 10$	$5(10) + 4(5) = 50 + 20 = 70$
4.45	$2(4.45) = 8.9$	$5(8.9) + 4(4.45) = 44.5 + 17.8 = 62.3$
4.50	$\mathbf{2(4.50) = 9}$	$\mathbf{5(9) + 4(4.50) = 45 + 18 = 63}$

Cuando el costo del cuaderno es de \$4.50 y el costo de cada plumón es de \$9, se satisfacen las condiciones del problema.

2. Si el numerador de una fracción dada se aumenta en 1, la nueva fracción es $\frac{1}{2}$; si el denominador se disminuye en 1, la nueva fracción es $\frac{1}{3}$. ¿Cuál es esta fracción? (Lehmann, 2009, p. 99).

Si la fracción es $\frac{a}{b}$, este problema puede ser resuelto por las siguientes formas:

i) A partir de las condiciones del problema (ver tabla 3.3.3), se llega a las ecuaciones del sistema: $\begin{cases} 2a - b = -2 \\ 3a - b = -1 \end{cases}$. Para resolver este sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas se puede utilizar cualquier método, de los ya discutidos antes.

Tabla 3.3.3. Condiciones del problema *2*

Si $\frac{a}{b}$ la fracción buscada y el numerador se aumenta en 1, y el denominador permanece constante, entonces: $$\frac{a+1}{b} = \frac{1}{2}$$	$(2)(a+1) = 1(b)$ $2a + 2 = b$ $\mathbf{2a - b = -2}$
Si el denominador se disminuye en 1, y el numerador permanece constante, entonces: $$\frac{a}{b-1} = \frac{1}{3}$$	$(3)a = 1(b-1)$ $3a = b - 1$ $\mathbf{3a - b = -1}$

Por ejemplo, a través del método de reducción:

Se multiplica por -1 a la ecuación $3a - b = -1$ y se suma la ecuación equivalente con la otra ecuación.

$$\begin{array}{r} 2a - b = -2 \\ \underline{-3a + b = 1} \\ -a = -1 \\ \boldsymbol{a = 1} \end{array}$$

Luego, se sustituye el valor de la incógnita $a = 1$ en la ecuación $3a - b = -1$

$$\begin{array}{r} 3(1) - b = -1 \\ 3 - b = -1 \\ -b = -1 - 3 \\ -b = -4 \\ \boldsymbol{b = 4} \end{array}$$

Así es obtenido el valor de la incógnita $b = 4$, por lo que la fracción buscada $\frac{1}{4}$. Para comprobar que los valores obtenidos son los correctos, se sustiuyen en ambas ecuaciones

$$\begin{array}{rr} 2a - b = -2 & -3a + b = 1 \\ 2(1) - (4) = -2 & -3(1) + 4 = 1 \\ 2 - 4 = -2 & -3 + 4 = 1 \\ \boldsymbol{-2 = -2} & \boldsymbol{1 = 1} \end{array}$$

ii) Otra manera de encontrar los valores pedidos es por medio de una tabla de valores (Tabla 3.3.4), en la cual se van dando valores a las incógnitas hasta llegar a los valores que cumplen con las condiciones del problema.

Se puede observar en la tabla, que en la tercera fila se cumplen las condiciones del problema, por lo que el número buscado es $\frac{1}{4}$.

Tabla 3.3.4. Tabla de valores para encontrar la solución al problema 2

a	b	$\frac{a}{b}$	$\frac{a+1}{b}$	$\frac{a}{b-1}$
1	2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1+1}{2}=\frac{2}{2}=1$	$\frac{1}{2-1}=\frac{1}{1}=1$
1	3	$\frac{1}{3}$	$\frac{1+1}{3}=\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3-1}=\frac{1}{2}$
1	4	$\mathbf{\frac{1}{4}}$	$\mathbf{\frac{1+1}{4}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}}$	$\mathbf{\frac{1}{4-1}=\frac{1}{3}}$
2	2	$\frac{2}{2}=1$	$\frac{2+1}{2}=\frac{3}{2}$	$\frac{2}{2-1}=\frac{2}{1}=2$

3. Dos aeropuertos, A y B, están a 400 km uno de otro y B está situado al Este de A. Un avión voló en 45 min. de A a B y luego regresó a A en 60 min. Si durante todo el viaje estuvo soplando viento del Oeste a velocidad constante, determina la velocidad del avión y la velocidad del viento (Rees & Sparks, 2007, p. 98).

He aquí algunas formas de resolver este problema:

i) Sea v la velocidad del avión a favor del viento y u es la velocidad del viento. Se sabe que $distancia\ (d) = velocidad\ (v) * tiempo\ (t)$, de las cuales son conocidas la distancia entre los aeropuertos y el tiempo que duró cada viaje. Sustituyendo los valores conocidos se tiene $\begin{cases} 400 = 45v_1 \\ 400 = 60v_2 \end{cases}$ donde $v_1 = v + u$ es la velocidad del viaje de A a B y $v_2 = v - u$ es la velocidad del viaje de B a A.

$$\begin{cases} 400 = 45(v+u) \\ 400 = 60(v-u) \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{400}{45} = v+u \\ \frac{400}{60} = v-u \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{80}{9} = v+u \\ \frac{20}{3} = v-u \end{cases} \qquad \begin{cases} v+u = \frac{80}{9} \\ v-u = \frac{20}{3} \end{cases}$$

Se llega así al sistema de ecuaciones que modela el problema verbal. Al resolver el sistema, se obtiene que la velocidad del avión es 7.8 km/min y la velocidad del viento es de 1.1 km/min, aproximadamente.

4. Una caja registradora contiene \$50 pesos en monedas de cinco, diez y veinticinco centavos. En total son 802 monedas, siendo 10 veces mayor el número de las de cinco centavos que el de las de diez centavos. Encuentra cuántas monedas hay de cada valor (Rees & Sparks, 2007, p. 99).

He aquí algunas formas de resolver este problema:

i) Sea v el número de monedas de 25 centavos, d el número de monedas de 10 centavos y c es el número de monedas de 5 centavos. Se puede establecer el sistema de ecuaciones del problema con las incógnitas v, d y c de la siguiente manera

$$\begin{cases} 25v + 10d + 5c = 5\,000 & (1) \\ v + d + c = 802 & (2) \\ c = 10d & (3) \end{cases}$$

Donde:

(1) puesto que $\$50 = 5\,000$ centavos

(2) que es el total de monedas

(3) ya que hay 10 veces más monedas de cinco centavos que de diez centavos

Si es sustituido $c = 10d$ en las otras dos ecuaciones, se obtiene un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas:

$$\begin{cases} 25v + 60d = 5\,000 \\ v + 11d = 802 \end{cases}$$

El cual se resuelve por el método de igualación en la tabla 3.3.5.

Tabla 3.3.5. Resolución del problema 4 por el método de igualación

Despejando la misma incógnita v en cada una de las ecuaciones: $v = \frac{5000-60d}{25}$ y $v = 802 - 11d$, e igualando las expresiones obtenidas:	$\frac{5000-60d}{25} = 802 - 11d$ $5000 - 60d = (802 - 11d)25$ $5000 - 60d = 20050 - 275d$ $275d - 60d = 20050 - 5000$ $215d = 15050$ $d = \frac{15050}{215}$ $\boldsymbol{d = 70}$
Ahora, sustituyendo el valor de la incógnita d en $v = \frac{5000-60d}{25}$ o $v = 802 - 11d$	$v = \frac{5000-60(70)}{25}$ $v = \frac{5000-4200}{25}$ $v = \frac{800}{25}$ $\boldsymbol{v = 32}$

Pero, se sabe que $c = 10d$, entonces $\boldsymbol{c} = 10(70) = \boldsymbol{700}$. Por tanto, hay 700 monedas de 25 centavos, 70 monedas de 10 centavos y 32 las monedas de 5 centavos.

Para comprobar el resultado, se sustituyen los valores obtenidos en las ecuaciones iniciales.

$$25v + 10d + 5c = 5\,000 \qquad v + d + c = 802 \qquad c = 10d$$

$$25(32) + 10(70) + 5(700) = 5\,000 \qquad 32 + 70 + 700 = 802 \qquad 700 = 10(70)$$

$$800 + 700 + 3500 = 5\,000 \qquad \mathbf{802 = 802} \qquad \mathbf{700 = 700}$$

$$\mathbf{5000 = 5\,000}$$

5. Un propietario recibió $12\,000$ por pago de la renta de dos oficinas en el año de 1984. La renta mensual de una era $\$100$ mayor que la de la otra. ¿Cuál fue la renta mensual que recibió de cada una si la más cara estuvo desalquilada dos meses? (Rees & Sparks, 2007, p. 97).

Se puede encontrar la solución del problema a través de diferentes maneras:

i) Se sabe que el precio de una renta es $\$100$ mayor que la otra, donde p representa el precio de la renta más barata, entonces $12p + 10(p + 100) = 12\,000$

$$12p + 10p + 1000 = 12\,000$$
$$22p = 12\,000 - 1\,000$$
$$22p = 11\,000$$
$$p = \frac{11\,000}{22}$$
$$\boldsymbol{p = 500}$$

Entonces, la renta más barata es de $\$500$ por mes. Pero como la renta más cara es $\$100$ mayor que p, entonces la renta cara es **$\$600$** por mes.

ii) Por otro lado, m representa el precio de la renta mensual de la oficina más cara y p representa el precio de la renta mensual más barata. Se establece un sistema de ecuaciones que modela el problema (donde 12 y 10 son los meses en que estuvo rentada la oficina), entonces

$$\begin{cases} m = p + 100 \\ 10m + 12p = 12\,000 \end{cases}$$

Resolviendo por igualación, sólo se despeja m de la segunda ecuación $m = \frac{12\,000 - 12p}{10}$ e igualarla con $m = p + 100$

$$100 + p = \frac{12\,000 - 12p}{10}$$
$$10(p + 100) = 12\,000 - 12p$$
$$10p + 1\,000 = 12\,000 - 12p$$
$$12p + 10p = 12\,000 - 1\,000$$
$$22p = 11\,000$$
$$p = \frac{11\,000}{22}$$
$$\boldsymbol{p = 500}$$

El precio por mes de la renta más barata es de $\$500$. Ahora sólo resta sustituir ese valor en $m = p + 100$

$$m = 100 + 500$$

$$\boldsymbol{m = 600}$$

Por lo que la renta más cara tiene un costo de $\$600$ por mes. Para saber que los resultados obtenidos son los correctos, se comprueba sustituyéndolos en las ecuaciones del sistema que modela el problema.

$$\begin{aligned} m &= p + 100 \\ 600 &= 500 + 100 \\ \mathbf{600} &= \mathbf{600} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 10m + 12p &= 12\,000 \\ 10(600) + 12(500) &= 12\,000 \\ 6\,000 + 6\,000 &= 12\,000 \\ \mathbf{12\,000} &= \mathbf{12\,000} \end{aligned}$$

iii) Por medio de una tabla de valores (Tabla 3.3.6) se puede encontrar una solución al problema:

Tabla 3.3.6. Tabla de valores del problema *5*

$\boldsymbol{p}$	$\boldsymbol{m = 100 + p}$	$\boldsymbol{10m + 12p}$
10	$100 + 10 = 110$	$10(110) + 12(10) = 1\,100 + 120 = 1\,220$
200	$100 + 200 = 300$	$10(300) + 12(200) = 3\,000 + 2\,400 = 5\,400$
400	$100 + 400 = 500$	$10(500) + 12(400) = 5\,000 + 4\,800 = 9\,800$
$\mathbf{500}$	$\mathbf{100 + 500 = 600}$	$\mathbf{10(600) + 12(500) = 6\,000 + 6\,000 = 12\,000}$

Se van dando valores a las incógnitas del problema, hasta que encontrar valores que cumplan con las condiciones del problema, por lo que la renta más barata fue de $\$500$ por mes y la más cara de $\$600$ por mes.

6. Un número de dos cifras es igual a 8 veces la suma de sus dígitos; si los dígitos se invierten, el número resultante es 45 unidades menor que el número original. Halla el número original (Lehmann, 2009, p. 99).

Se puede encontrar la solución del problema a través de diferentes maneras:

i) Se sabe que es un número de dos cifras, por lo que se puede expresar ese número como $10x + y$, donde x representa el dígito de las centenas y y representa el dígito de las unidades, pero el problema dice que ese número es igual a 8 veces la suma de sus dígitos, entonces:

$10x + y = 8(x + y)$, o bien, $10x + y = 8x + 8y$, que puede ser reescrita como $10x + y - 8x - 8y = 0$, de modo que la primera ecuación del sistema que modela el problema es $2x - 7y = 0$.

Ahora, si los dígitos se invierten $(10y + x)$, el número es 45 unidades menor que el número original, entonces:

$$10y + x = (10x + y) - 45$$
$$10y + x - 10x - y = -45$$
$$9y - 9x = -45$$
$$y - x = -\frac{45}{9}$$

$x - y = 5$, segunda ecuación del sistema que modela el problema. Por tanto, el sistema de ecuaciones lineales que modela el problema es: $\begin{cases} 2x - 7y = 0 \\ x - y = 5 \end{cases}$ se resuelve por reducción en la tabla 3.3.7.

Se obtiene así el valor de la incógnita faltante, el dígito de las decenas. Por lo tanto, el número de dos dígitos buscado es el número 72. Para comprobar la solución del problema, se sustituyen los valores de las incógnitas en el sistema de ecuaciones:

$2x - 7y = 0$	$x - y = 5$
$2(7) - 7(2) = 0$	$7 - (2) = 5$
$14 - 14 = 0$	$7 - 2 = 5$
$\mathbf{0 = 0}$	$\mathbf{5 = 5}$

Tabla 3.3.7. Sistema de ecuaciones del problema 6

Al multiplicar la ecuación $x - y = 5$ por -2 se tiene $-2x + 2y = -10$. La suma de la ecuación equivalente con la ecuación $2x - 7y = 0$ El dígito de las unidades es 2.	$2x - 7y = 0$ $\underline{-2x + 2y = -10}$ $-5y = -10$ $y = \frac{10}{5}$ $\mathbf{y = 2}$
Una vez obtenido el valor de la incógnita y, se sustituye en una de las ecuaciones del sistema que modela el problema, en este caso en $x - y = 5$	$x - y = 5$ $x - (2) = 5$ $x = 5 + 2$ $\mathbf{x = 7}$

ii) Otra forma de resolver este problema es por medio de una tabla de valores (ver tabla 3.3.8), en la cual se le va dando valores a las incógnitas, hasta llegar con los valores que cumplen con las condiciones del problema.

Sean p y q las incógnitas del problema, donde p representa el número de las decenas y q representa el número de las unidades. Si las tres últimas columnas dan el mismo número, entonces será el número buscado. Por lo tanto, el número buscado es el número 72, ya que los dígitos de este número cumplen con las condiciones del problema.

Tabla 3.3.8. Tabla de valores del problema *6*

$\mathbf{p}$	$\mathbf{q}$	$\mathbf{10p + q}$	$\mathbf{8(p + q)}$	$\mathbf{10q + p + 45}$
1	2	12	$8(1 + 2) = 8(3) = 24$	$10(2) + 1 + 45 = 20 + 46 = 66$
6	1	61	$8(6 + 1) = 8(7) = 56$	$10(1) + 6 + 45 = 10 + 51 = 61$
7	1	71	$8(7 + 1) = 8(8) = 64$	$10(1) + 7 + 45 = 10 + 52 = 62$
7	**2**	**72**	$\mathbf{8(7 + 2) = 8(9) = 72}$	$\mathbf{10(2) + 7 + 45 = 20 + 52 = 72}$

7. En México, se necesitan 4 vagones del Metro y 7 autobuses para poder transportar a 678 personas. Si colocamos 21 personas de más en un vagón del Metro que en un autobús, encuentra el número de personas que podemos acomodar en un autobús y en un vagón del Metro (Ramírez, 2008, p. 27).

Se puede encontrar la solución del problema a través de diferentes maneras:

i) A partir de la incógnita b, que representa el número de personas que se pueden acomodar en un autobús, se establece una ecuación lineal que modele el problema

$$4(b+21)+7b=678$$
$$4b+84+7b=678$$
$$11b=678-84$$
$$11b=594$$
$$b=\frac{594}{11}$$
$$\boldsymbol{b=55}$$

El número de personas que se pueden acomodar en el autobús es de 54 personas. Como en un vagón de metro son 21 personas más, entonces se pueden acomodar **75** personas en cada vagón de metro.

ii) Para este problema se plantea el siguiente sistema de ecuaciones lineales: $\begin{cases} 4a+7b=678 \\ a=b+21 \end{cases}$ donde a representa el número de personas que se pueden acomodar en un vagón del Metro y b al número de personas que se pueden acomodar en un autobús.

Se puede resolver el sistema de ecuaciones por medio de cualquier método. Por ejemplo, por sustitución, dado que ya está despejada la incógnita a se sustituye en la primera ecuación del sistema y se resuelve la ecuación lineal obtenida.

$$4a+7b=678$$
$$4(b+21)+7b=678$$
$$4b+84+7b=678$$
$$11b=678-84$$
$$11b=594$$
$$b=\frac{594}{11}$$
$$\boldsymbol{b=54}$$

Entonces, se pueden acomodar 54 personas en un autobús. Ahora, sustituyendo ese valor en la ecuación.

$$a = b + 21$$

$$a = 54 + 21$$

$$\boldsymbol{a = 75}$$

Así, en cada vagón del metro se pueden acomodar 75 personas. Para comprobar que la solución es la correcta, se sustituyen los valores encontrados en las ecuaciones del sistema que modelan el problema.

$$\begin{aligned} 4a + 7b &= 678 \\ 4(75) + 7(54) &= 678 \\ 300 + 378 &= 678 \\ \mathbf{678} &= \mathbf{678} \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} a &= b + 21 \\ 75 &= 54 + 21 \\ \mathbf{75} &= \mathbf{75} \end{aligned}$$

iii) Se puede llegar a la solución del problema por medio de una tabla de valores (Tabla 3.3.9), dando valores a las incógnitas hasta llegar a los valores que satisfagan las condiciones del problema.

Tabla 3.3.9. Tabla de valores del problema 7

$\boldsymbol{b}$	$\boldsymbol{a = b + 21}$	$\boldsymbol{4a + 7b}$
10	$10 + 21 = 31$	$4(31) + 7(10) = 121 + 70 = 191$
51	$51 + 21 = 72$	$4(72) + 7(51) = 288 + 357 = 645$
53	$53 + 21 = 74$	$4(74) + 7(53) = 296 + 371 = 667$
54	$\mathbf{54 + 21 = 75}$	$\mathbf{4(75) + 7(54) = 300 + 378 = 678}$

Por tanto, se pueden acomodar 54 personas en un autobús y 75 personas en cada vagón del metro.

8. Un ciclista viajó en línea recta de la ciudad A a la ciudad B a una velocidad media promedio de 24 km/h. Al llegar a la ciudad B, de inmediato se volvió y viajó a la ciudad A, a una velocidad media promedio de 18 km/h. Si todo el viaje (ida y regreso) tomó 7 horas, ¿cuánto duró el viaje en cada dirección? (Guzmán, Bednarz y Hitt, 2003, p. 12).

Se puede encontrar la solución del problema a través de diferentes maneras:

i) Dado que se debe encontrar el tiempo que duró cada viaje, se considera a las incógnitas t_1 y t_2, que representan al tiempo de los viajes de ida y regreso, respectivamente; de donde el sistema de ecuaciones que modela el problema es:

$$\begin{cases} t_1 + t_2 = 7 \\ 24t_1 - 18t_2 = 0 \end{cases}$$

Al resolver el sistema por el método de sustitución, se despeja t_1 de la primera ecuación, $t_1 = 7 - t_2$ y se sustituye en la segunda ecuación:

$$24(7 - t_2) - 18t_2 = 0$$

$$168 - 24t_2 - 18t_2 = 0$$

$$-42t_2 = -168$$

$$t_2 = \frac{168}{42}$$

$$\boldsymbol{t_2 = 4}$$

El viaje de regreso duró 4 horas. Para saber cuál es el tiempo del viaje de ida, se sustituye el valor obtenido en $t_1 = 7 - t_2$

$$t_1 = 7 - 4$$

$$\boldsymbol{t_1 = 3}$$

Por lo tanto, el viaje de ida duró 3 horas. Al sustituir los valores de las incógnitas en el sistema de ecuaciones que modela el problema, se puede comprobar si los valores hallados son los correctos.

$$t_1 + t_2 = 7 \qquad\qquad 24t_1 - 18t_2 = 0$$

$$3 + 4 = 7 \qquad\qquad 24(3) - 18(4) = 0$$

$$\mathbf{7 = 7} \qquad\qquad 72 - 72 = 0$$

$$\mathbf{0 = 0}$$

iii) Otra forma de encontrar solución al problema es por medio de una tabla de valores (Tabla 3.3.10), en la cual se le van dando valores a las incógnitas hasta llegar a los valores que cumplen con las condiciones del problema.

Tabla 3.3.10. Tabla de valores del problema 8

t_1	t_2	$t_1 + t_2 = 7$	$24t_1 - 18t_2 = 0$
1	6	$1 + 6 = 7$	$24(1) - 18(6) = 24 - 108 = -84$
2	5	$1 + 6 = 7$	$24(2) - 18(5) = 48 - 90 = -42$
3	**4**	$\mathbf{1 + 6 = 7}$	$\mathbf{24(3) - 18(4) = 72 - 72 = 0}$
4	3	$1 + 6 = 7$	$24(4) - 18(3) = 96 - 54 = 42$

Cuando $t_1 = 3$ y $t_2 = 4$ se cumplen las condiciones del problema, por tanto, el viaje de ida fue de 3 horas y el de vuelta de 4 horas.

9. Un ciclista viajó de la ciudad A a la ciudad B a una velocidad media de $24km/h$. Al llegar a la ciudad B, de inmediato se volvió y viajó a la ciudad A, a una velocidad media de $18km/h$. Si el viaje de regreso fue de una hora más que el de ida, ¿cuánto duró el viaje en cada dirección? (Guzmán, Bednarz & Hitt, 2003, p. 12).

Pareciera que el problema anterior y éste son iguales, pero no lo son, ya que a diferencia del anterior, en este problema se tiene una comparación entre dos magnitudes homogéneas. Se puede encontrar la solución del problema a través de diferentes maneras:

i) Se sabe que la distancia es igual a velocidad por tiempo $d = (v)(t)$, y lo que pide el problema es encontrar el tiempo que duró el viaje de ida y regreso. Por lo que, al sustituir los valores conocidos y contemplamos la incógnita t: el tiempo del viaje de regreso, se tiene: $d = 24(t-1)$ y $d = 18t$, y como la distancia recorrida es la misma en ambos caminos, se igualan las expresiones posteriores, llegando a la siguiente expresión.

$$24(t-1) - 18t = 0$$

$$24t - 24 - 18t = 0$$

$$6t = 24$$

$$t = \frac{24}{6}$$

$$\boldsymbol{t = 4}$$

El viaje de regreso fue de 4 horas, y como el viaje de ida fue de una hora menos, entonces el viaje de ida fue de 3 horas.

ii) Dado que se debe encontrar el tiempo que duró cada viaje, se considera a las incógnitas t_1 y t_2, que representan al tiempo de los viajes de ida y regreso, respectivamente; de donde el sistema de ecuaciones que modela el problema es:

$$\begin{cases} t_1 = t_2 - 1 \\ 24t_1 - 18t_2 = 0 \end{cases}$$

Basta con sustituir la primera ecuación en la segunda para obtener el valor de una incógnita, por lo que:

$$24(t_2 - 1) - 18t_2 = 0$$

$$24t_2 - 24 - 18t_2 = 0$$

$$6t_2 = 24$$

$$t_2 = \frac{24}{6}$$

$$\boldsymbol{t_2 = 4}$$

El viaje de regreso duró 4 horas. Ahora, se sustituye el valor de la incógnita t_2 en $t_1 = t_2 - 1$, para obtener el valor de la otra incógnita:

$$t_1 = t_2 - 1$$

$$t_1 = 4 - 1$$

$$\boldsymbol{t_1 = 3}$$

El viaje de ida duró 3 horas. Para comprobar que los valores obtenidos son los correctos, estos se sustituyen en el sistema de ecuaciones que modela el problema.

$$t_1 = t_2 - 1 \qquad\qquad 24t_1 - 18t_2 = 0$$

$$3 = 4 - 1 \qquad\qquad 24(3) - 18(4) = 0$$

$$\mathbf{3 = 3} \qquad\qquad 72 - 72 = 0$$

$$\mathbf{0 = 0}$$

iii) Otra forma de encontrar solución al problema es por medio de una tabla de valores (Tabla 3.3.11), en la cual se le van dando valores a las incógnitas hasta llegar a los valores que cumplen con las condiciones del problema.

Cuando $t_2 = 4$ y $t_1 = 3$, se satisfacen las condiciones del problema, por lo tanto, el viaje de ida duró 3 horas y el viaje de vuelta duró 4 horas.

Tabla 3.3.11. Tabla de valores del problema 9

$\boldsymbol{t_2}$	$\boldsymbol{t_1 = t_2 - 1}$	$\boldsymbol{24t_1 - 18t_2 = 0}$
2	$2 - 1 = 1$	$24(1) - 18(2) = 24 - 36 = -12$
3	$3 - 1 = 2$	$24(2) - 18(3) = 48 - 54 = -6$
4	$\mathbf{4 - 1 = 3}$	$\mathbf{24(3) - 18(4) = 72 - 72 = 0}$
5	$5 - 1 = 4$	$24(4) - 18(5) = 96 - 90 = 6$

10. En ocasión de un día de asueto, un estudiante aprovechó para ir de visita con sus padres, yendo y viniendo por dos caminos diferentes. El viaje de regreso fue 4 kilómetros más corto que la mitad del viaje de ida. El recorrido total, ida y regreso, fue de 68 kilómetros. Determina la distancia recorrida en cada tramo (Rees & Sparks, 2007, p. 100).

Se puede encontrar la solución del problema a través de diferentes maneras:

i) De acuerdo con la estructura general del problema, éste puede ser resuelto de diferentes formas. He aquí una de las formas de resolverlo: sean las incógnitas s: distancia recorrida en el viaje de ida y r: distancia recorrida en el viaje de regreso. De acuerdo con los datos y relaciones del problema, es posible plantear el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} r + s = 68 \\ \frac{1}{2}s - 4 = r \end{cases}$$

Este sistema de ecuaciones puede ser resuelto por cualquiera de los métodos antes comentados. Por ejemplo, por igualación:

Despejando la incógnita r de la primera ecuación.	$r + s = 68$ $\boldsymbol{r = 68 - s}$
Igualar la expresión obtenida con la segunda ecuación y resolver la nueva ecuación lineal.	$68 - s = \frac{1}{2}s - 4$ $-s - \frac{1}{2}s = -4 - 68$ $-\frac{3}{2}s = -72$ $s = 72\left(\frac{2}{3}\right)$ $\boldsymbol{s = 48}$

En el viaje de ida, la distancia recorrida fue de 48 kilómetros. Para encontrar la distancia recorrida en el viaje de regreso, se sustituye el valor encontrado en $r = 68 - s$.

$$r = 68 - 48$$

$$\boldsymbol{r = 20}$$

En el viaje de regreso el estudiante recorrió 20 kilómetros. Para comprobar el resultado obtenido, se sustituyen los valores en las ecuaciones iniciales:

$$r + s = 68$$
$$20 + 48 = 68$$
$$\mathbf{68 = 68}$$

$$\frac{1}{2}s - 4 = r$$
$$\frac{1}{2}(48) - 4 = 20$$
$$24 - 4 = 20$$
$$\mathbf{20 = 20}$$

ii) Si sólo es considerada a la incógnita s: distancia recorrida en el viaje de ida, se tiene que $s + (\frac{1}{2}s - 4) = 68$; al resolver esta ecuación lineal se obtiene la distancia recorrida del viaje de ida.

$$s + \left(\frac{1}{2}s - 4\right) = 68$$
$$\frac{3}{2}s - 4 = 68$$
$$\frac{3}{2}s = 68 + 4$$
$$s = (72)(\frac{2}{3})$$
$$s = \frac{144}{3}$$
$$\boldsymbol{s = 48}$$

Pero como el viaje de regreso fue 4 kilómetros más corto que la mitad del viaje de ida (24 kilómetros), entonces el viaje de regreso fue de **20** kilómetros.

iii) Otra forma de encontrar la solución al problema es por medio de una tabla de valores (Tabla 3.3.12), en la que se van dando valores a las incógnitas hasta llegar a aquellos que satisfacen las condiciones del problema.

Cuando $s = 48$ y $r = 20$, se satisfacen las condiciones del problema, por lo que el viaje de ida fue de 48 kilómetros y el de regreso de 20 kilómetros.

Tabla 3.3.12. Tabla de valores del problema 10

s	$r = \frac{1}{2}s - 4$	$s + r = 68$
20	$\frac{20}{2} - 4 = 10 - 4 = 6$	$20 + 6 = 26$
50	$\frac{50}{2} - 4 = 25 - 4 = 21$	$50 + 21 = 71$
45	$\frac{45}{2} - 4 = 22.5 - 4 = 18.5$	$45 + 18.5 = 63.5$
48	$\frac{48}{2} - 4 = 24 - 4 = 20$	$48 + 20 = 68$

11. En un concierto de música moderna, el precio de los boletos es de \$75, pero si se compran con anticipación, se hace un descuento de 10% al precio del boleto. Si asistieron 1500 personas y el ingreso por concepto de entradas fue de \$105,630, ¿cuántas personas compraron el boleto a precio normal? (Ramírez, 2008, p. 28).

Se puede encontrar la solución del problema a través de diferentes maneras:

i) Si x representa el número de personas que compraron el boleto de entrada a precio normal e y representa número de personas que compraron el boleto de entrada con anticipación, entonces con esta suposición se establece el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x + y = 1\,500 \\ 75x + 67.5y = 105\,630 \end{cases}$$

De donde \$67.5 es la cantidad del boleto con descuento. Resolviendo el sistema de ecuaciones por el método de sustitución:

despejando y de la primera ecuación, se tiene $y = 1500 - x$;

se sustituye y en la segunda ecuación para obtener el valor de x

$$75x + 67.5(1500 - x) = 105\,630$$

$$75x + 101250 - 67.5x = 105\,630$$

$$75x - 67.5x = 105\,630 - 101250$$

$$7.5x = 4380$$

$$x = \frac{4380}{7.5}$$

$$\boldsymbol{x = 584}$$

El problema consiste en encontrar el número de personas que compraron el boleto a precio normal, por tanto la cantidad pedida es 584 personas. En el caso de que el problema también pidiera la cantidad de personas que compraron el boleto a precio con descuento, sólo se sustituye el valor de la incógnita x en cualquiera de las ecuaciones iniciales y se obtiene así el valor de la incógnita y.

12. Dos hermanos compraron, a partes iguales un receptor de televisión con un costo de \$2 200. El hermano mayor invirtió en esta operación la mitad de sus ahorros y el hermano menor las dos terceras partes de los suyos. Después de haber efectuado la compra todavía reunían entre los dos \$1 600 de ahorros. Determina la cantidad ahorrada por cada uno, previa a la compra (Rees & Sparks, 2007, p. 100).

Se puede encontrar la solución del problema a través de diferentes maneras:

i) Considerando la primera condición de que compraron la televisión a partes iguales y que el hermano mayor aportó $\frac{x}{2} = 1\,100\,pesos$, donde x representa la cantidad ahorrada por el hermano mayor, y que el otro hermano aportó $\frac{2}{3}y = 1\,100\,pesos$, donde y representa la cantidad ahorrada por el hermano menor, entonces, de $\frac{x}{2} = 1\,100\,pesos$, se tiene que $x = 2\,200\,pesos$ y de $\frac{2}{3}y = 1\,100\,pesos$ se concluye que $y = 1\,650\,pesos$.

Pero, la otra condición del problema dice que después de la compra reunían $\$1\,600$. Si el hermano mayor aporta la mitad de sus ahorros le restan $\$1\,100$, al hermano menor le resta un tercio de lo que tenia ahorrado, por tanto le sobró $\$550$, pero $\$1\,100 + \$550 = \$1\,650 \neq \$1\,600$, por lo que no cumple la última condición.

ii) Ahora, considerando la condición de que cada hermano aportó a la compra $\frac{1}{2}x + \frac{2}{3}y = \$2\,200$, pero después de la compra les sobró $\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y = \$1\,600$, entonces de estas dos ecuaciones es posible establecer el sistema de ecuaciones que modela el problema:

Por reducción, multiplicando la ecuación $\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y = \$1\,600$ por -1, y sumamos la ecuación $\frac{1}{2}x + \frac{2}{3}y = \$2\,200$ con $-\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}y = -\$1\,600$:

$$\begin{array}{r} \frac{1}{2}x + \frac{2}{3}y = \$2\,200 \\ -\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}y = -\$1\,600 \\ \hline \frac{1}{3}y = \$600 \end{array}$$

$$\boldsymbol{y = \$1\,800}$$

Sustituyendo el valor de y en la ecuación $\frac{1}{2}x + \frac{2}{3}y = \$2\,200$, se obtiene:

$$\frac{1}{2}x + \frac{2}{3}(1\,800) = 2\,200$$

$$\frac{1}{2}x + 1\,200 = 2\,200$$

$$\frac{1}{2}x = 2\,200 - 1\,200$$

$$\frac{1}{2}x = 1\,000$$

$$\boldsymbol{x = 2\,000}$$

Si son calculadas las cantidades aportadas para la compra, a partir de las cantidades ahorradas, se deduce que el hermano mayor aportó $1\,000\,pesos$ y el hermano menor aportó $1\,200\,pesos$, pero la primera condición dice que aportaron partes iguales.

iii) Una técnica no escolarizada que se puede utilizar para resolver este problema es la de completar. Sea x la incógnita que representa la cantidad ahorrada por el hermano mayor y y que representa la cantidad ahorrada por el hermano menor. Considerando la condición de lo aportado por cada hermano, se tiene que $\frac{1}{2}x + \frac{2}{3}y = 2\,200$.

A partir de la condición del problema de que después de la compra reunían $1600\, pesos$, se toma en cuenta la cantidad total ahorrada por ambos hermanos $(2\,200 + 1\,600)$, la ecuación quedaría de la siguiente forma:

$$x + y = 2\,200 + 1\,600$$

$$x + y = 3\,800$$

Entonces, al resolver el sistema de ecuaciones, se deduce que las cantidades ahorradas por los hermanos son $2\,000\, pesos$ y $1\,800\, pesos$, que son las cantidades obtenidas en el inciso ii, por lo que no cumplen con la primera condición del problema, respecto a que ambos aportaron la misma cantidad para la compra.

Entonces, se puede concluir que las cantidades ahorradas dependen de la condición que se tome en cuenta, ya sea que los hermanos hayan aportado cantidades iguales o que después de la compra reunían $1\,600\, pesos$.

iv) Este problema, también puede ser resuelto por medio de una tabla de valores (Tabla 3.3.13) para encontrar los valores pedidos.

En esta tabla se puede observar que en la penúltima fila se cumple la primera y tercera condición del problema, pero no cumple el que las cantidades aportadas para la compra del televisor sean iguales.

A diferencia de la última fila de la tabla, donde sí aportan partes iguales para la compra del televisor, no cumple con la condición de que al juntar el dinero que les sobra después de la compra sea de 1 600 *pesos.*

Tabla 3.3.13. Tabla de valores del problema 12

x	y	$\frac{x}{2}+\frac{2y}{3}=2\,200$	$\frac{x}{2}=\frac{2y}{3}$	$\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=\$1\,600$
100	200	$\frac{100}{2}+\frac{400}{3}=\frac{550}{3}$	×	$\frac{100}{2}+\frac{200}{3}=\frac{350}{3}$
1 000	1 100	$\frac{1\,000}{2}+\frac{2\,200}{3}=\frac{3\,700}{3}$	×	$\frac{1\,000}{2}+\frac{1\,100}{3}=\frac{2600}{3}$
2 000	**1 800**	$\frac{2\,000}{2}+\frac{3\,600}{3}=2\,200$	×	$\frac{2\,000}{2}+\frac{1\,800}{3}=1\,600$
2 200	**1 650**	$\frac{2\,200}{2}+\frac{3\,300}{3}=2\,200$	✓	$\frac{2\,200}{2}+\frac{1\,650}{3}=1\,650$

3.4. Recolección de datos

Para analizar el discurso del profesor en la enseñanza de resolución de problemas verbales-algebraicos, se diseñó una actividad con diferentes apartados con base en ejercicios y problemas de los mencionados anteriormente. La implementación de la actividad se llevó a cabo en el aula donde se imparten las clases de álgebra de la escuela donde labora el profesor participante. El tiempo dedicado a la actividad fue de 3 clases de 2 módulos cada una, de 50 minutos cada módulo.

Los materiales utilizados en cada sesión fueron: actividad impresa, videograbadora y grabadora. Cada uno de los alumnos contaba con la actividad impresa; también se le proporcionó al profesor la actividad, pero con la diferencia de que su actividad contaba con ayudas para la resolución de los problemas (ver Anexo 1).

Para lograr los objetivos, así como para responder las preguntas de investigación planteadas se recurrió a diferentes instrumentos de recolección de datos. En las investigaciones de corte cualitativo, como ésta, es necesario utilizar varios métodos de recolección de datos, como video-grabaciones, audio-grabaciones, entrevistas, entre otros.

Durante la implementación de la actividad en esta investigación, se recurrió a los siguientes instrumentos para el acopio de datos:

- Actividad: fue diseñada en tres partes, con el objetivo de analizar la resolución de los problemas verbales-algebraicos.
- Registro escrito en la actividad: este tipo de instrumento permite observar las respuestas de cada uno de los estudiantes en los diferentes momentos en que se dividió la actividad.
- Video-grabación: fueron video-grabadas las clases correspondientes a la implementación de la actividad propuesta al profesor.
- Audio-grabación: fueron audio-grabadas las clases correspondientes a la implementación de la actividad, con el fin de complementar la información obtenida en la video-grabación.

Las sesiones de trabajo llevadas a cabo en la presente investigación fueron de acuerdo con el programa de estudios del primer semestre de bachillerato en la clase de álgebra. La implementación de la actividad propuesta fue durante el tema de Sistemas de Ecuaciones establecido en el programa de estudios de bachillerato vigente en ese sistema.

El análisis de los datos recabados mediante el instrumento descrito anteriormente se explica en el capítulo siguiente.

CAPITULO 4

ANÁLISIS DE DATOS Y DISCUSIÓN DE RESULTADOS

4.1. Introducción

En este capítulo se analizan y discuten las video-grabaciones de las clases de resolución de problemas verbales-algebraicos de la actividad implementada en la presente investigación. Se exponen partes de las clases en las que se discuten las diferentes formas de llegar a los sistemas de ecuaciones que modelan el problema, así como a sus respuestas.

El análisis de los datos y la discusión de cada una de las clases se exponen en episodios, los cuales son tomados a partir de las clases en que fueron grabados.

4.2. Selección de los episodios

La participación del profesor y los estudiantes fue caracterizada por líneas (e.g., L1, L2), cada una de las cuales indica la ocasión en la que una sola persona habló, además, se hace referencia si la persona que habló es el profesor (P) o algún alumno (e.g., A1, A2, etc.) o varios alumnos al mismo tiempo (Alumnos (varios)).

En cada línea se escribe, en letra tipo *cursiva* y entre corchetes ([...]), si lo dicho por el profesor o el alumno es acompañado por algún gesto, señal o algún símbolo escrito. Algunas palabras o frases aclaratorias que sirven para dar coherencia a las elocuciones de los participantes son también escritas en ese tipo de letra.

Los puntos suspensivos (...) son utilizados para indicar breves pausas hechas por el profesor o los estudiantes. Cuando los puntos suspensivos se encuentran entre corchetes ([...]) son utilizados cuando en las participaciones se omite parte del discurso, como lo son comentarios extra-clase.

Las transcripciones son organizadas en episodios. Cada episodio contiene información sobre las tareas, técnicas, tecnologías, teoría, momentos de Chevallard o el contrato didáctico de Brousseau; es decir, cada episodio tiene información que aporta elementos en cuanto a la forma en que el profesor trabajó la actividad propuesta.

4.3. Análisis de la clase 1

La forma de iniciar las *tareas* por parte del maestro, fue tomar control inmediato del trabajo a partir de que el estudiante lee el problema, con una sucesión rápida de preguntas contestadas por él mismo. La meta del profesor sólo fue resolver los problemas que se encontraban en la actividad. En general, lo hizo sin alguna técnica, sólo tratando de llegar a la solución de los problemas y con poca participación de los alumnos.

Para dar inicio a la clase, el profesor daba una presentación de la actividad a trabajar, así como un recordatorio de lo que se evaluara en relación con las competencias que marca el perfil de egreso (genéricas y disciplinares). Una vez iniciada la clase, dejaba a los alumnos que leyeran la actividad y contestaran la primera parte de ella, donde se pedía responder preguntas acerca de los métodos de sustitución, igualación y reducción.

Cuando los alumnos trabajaban en silencio, el profesor realizaba varias intervenciones en las que hacía comentarios o respondía dudas en relación con la forma de responder las preguntas de la primera parte de la actividad, por ejemplo:

P: ...desde la clase pasada se los dije, para resolver un sistema de ecuaciones de tres incógnitas de tres ecuaciones, lo reduces a un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, y al final resulta lo que ya saben resolver (Figura 4.3.1), eso es lo que te están preguntando [...] en realidad todos los métodos al final de cuantas tienen pasos comunes y todos si ustedes ven, empezamos con tres ecuaciones con tres incógnitas después continuamos con dos ecuaciones con dos incógnitas y concluimos con una ecuación con una incógnita que ustedes ya saben cómo se resuelve.

A1: no le entiendo.

La *tecnología* del profesor tiene como propósito justificar la *técnica* de solución de sistemas de ecuaciones de tres ecuaciones con tres incógnitas; sin embargo, su tecnología es incompleta, ya que explica que todos los métodos tienen pasos comunes (en este caso los sistemas de ecuaciones), los cuales se van reduciendo hasta llegar a una ecuación lineal. Explica explícitamente cómo llegar a la ecuación lineal, y afirma que llegando a tal ecuación se concluye tal procedimiento, a pesar de que sólo se encuentra el valor de una incógnita.

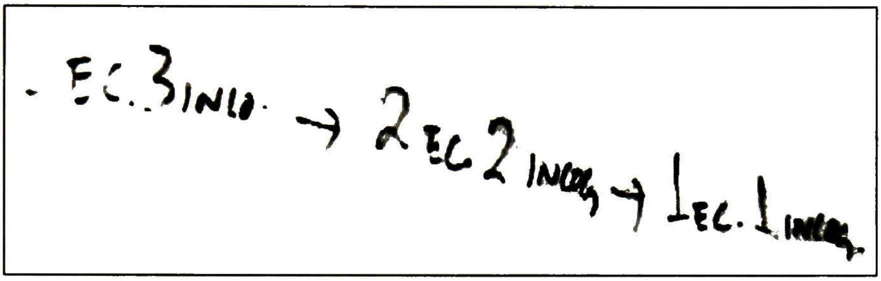

Figura 4.3.1. Secuencia del profesor para resolver un sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas

La segunda función de la *tecnología* es aclarar la *técnica*, pero A1 le hace saber al profesor que no entiende lo que dice, a lo que el profesor da una explicación a tal comentario:

P: ...o sea que al final de cuentas todo se reduce a una ecuación lineal... aquí estamos hablando de sistemas lineales, ¿sí? O sea, ¿por qué se llama sistemas de ecuaciones o ecuaciones simultáneas? porque una depende de la otra, ¿sí? Si tenemos dos ecuaciones con dos incógnitas, las dos ecuaciones dependen una de otra, porque x es la misma de una ecuación y la otra, y y es la misma en las dos, o sea son ecuaciones simultáneas. Todos los procesos de la vida están simultáneos, unos dependemos de otros, nosotros dependemos de la vegetación y ella de la tierra, o sea todo está en relación [...]

En este pequeño discurso, el profesor trata de continuar con la justificación a la *técnica*, pero con ayuda de lenguaje común para ejemplificar; sin embargo, su comunicación no tiene sentido, ya que explica en una dirección sin contemplar la dirección opuesta de la dependencia de los sujetos, la cual es necesaria para los sistemas de ecuaciones.

4.3.1. Discusión de la introducción al problema

Trata de dar una analogía con base en la explicación del porqué se llama sistemas de ecuaciones; sin embargo, no es acorde con la justificación que realiza. Tal analogía es dada como una cadena, si la comparamos con las ecuaciones, entonces solo una ecuación depende de la otra, pero no implica que ésta última dependa de la primera.

Robert y Rogalski (2005, p. 285) identifican tres categorías de respuestas del profesor dadas a las preguntas de los alumnos; entre ellas, la repetición con una redacción corregida, la respuesta con una corrección implícita (en general con una pregunta sobre el acuerdo de los demás) y la respuesta que explícitamente le corrige un error.

Después de transcurridos 24 minutos de la clase, a través de un *foro de discusión* el profesor pregunta sobre las respuestas dadas a las preguntas de la actividad. La dinámica del foro se centró en que los alumnos dieran lectura a sus respuestas, el profesor sólo realizaba repeticiones directas de las respuestas de los alumnos, siendo ésta una manera de hacer pública tal contribución, para indicar el punto alcanzado en el desarrollo de la tarea, y no necesariamente la vinculó con alguna evaluación previa o actual, sin pasar del primer momento de la teoría de Chevallard (ver p. 14 de esta tesis).

4.3.2. Episodio 1: Foro de discusión [De 24:52 a 34:50]

L1: P: Vamos a discutir lo que viene en la hoja tres [Parte I, de la Actividad: Sistema de ecuaciones lineales (Anexo 2)], entonces voy a hacer unas preguntas para que ustedes lean lo que contestaron, pero no lo vamos a hacer para todos. Entonces le voy a pedir de favor a A3 nos lea que contestó en la hoja número 1, la hoja número 1, escuchen todos los demás.

L2: A3: yo pienso que trata de igual y cambiar las expresiones que nos presentan al igualar una por la otra, las dos expresiones tienen la misma incógnita, existen más métodos al igual que [este pero todos son diferentes, con este método yo creo que aprendimos a comparar expresiones que tienen el mismo valor; es decir, la misma incógnita, en el sentido de que podamos acomodar, observar y resolver este tipo de ecuaciones.

L3: P: entonces lo que ella dijo A1, abona a la duda que tú tienes [*se dirige a un alumno*], que al final de cuentas que resulta, una ecuación lineal que se tiene que resolver como ya lo sabes por inspección, o propiedades de la igualdad o reglas de despeje, ¿sí? Ahora le voy a pedir a A7 nos lea por favor lo que respondió en la hoja 1, nada más lo vamos a hacer de tres personas cada apartado para irnos rápido, si A7, adelante.

L4: A7: yo creo que se lleva a cabo al igualar las ecuaciones resultantes del despeje de las mismas.

L5: Profesor: muy bien, en eso consiste el método de igualación, de ahí viene, se despejan las dos variables y se igualan, la ecuación resultante A1 se resuelve por el método que tú elijas, ¿sí? Y por ultimo le vamos a pedir de favor a A5, nos dé su respuesta de la hoja número 1, ¿no la anotó? [*El alumno asiente el no haber anotado la respuesta*] Bueno vamos a preguntarle a A10, me puede decir ¿qué fue lo que respondió en la hoja 1?

L6: A10: para comparar los resultados obtenidos de una ecuación.

L7: P: para comparar los resultados obtenidos de una ecuación. Ustedes valórenlo si es correcto o incorrecto. Ya escucharon dos respuestas ¿sí? La de su compañero A3 está completa, pero algo le falto ahí ¿verdad? Y lo completó su compañero A7. Vámonos a la siguiente la hoja número 2. A14 ¿me puedes leer lo que contestaste?

L8: A14: porque sustituye la expresión y al final la x, y tiene un valor igual pues se llama método de sustitución porque sustituye las letras con números y luego los resuelves para ver si está bien.

L9: P: usted habla de una palabra sustituir ¿verdad? Y la pregunta es ¿Por qué piensas que este método es llamado método de sustitución? Si, por qué es la acción la meta de sustituir la variable es lo que usted está indicando. A ver A1 ¿nos podrías decir que fue lo que respondiste ahí?

L10: A1: que para encontrar el valor de las incógnitas es necesario sustituir una de ellas para encontrar la otra y viceversa, y al sustituir y realizar la expresión que nos queda nos va a dar el valor de una de las incógnitas.

L11: P: siempre encontramos el valor de una incógnita, en cualquiera de los métodos. Viene al final hay una discusión al respecto, entonces ahí vamos a concluir eso. Pero le falto un detalle, siempre primero se tiene que despejar la incógnita y luego antes de sustituir se tiene que despejar.

4.3.2.1. Discusión episodio 1

En L1 se muestra el primer momento didáctico, la primera tarea específica, sin llegar a explorarla, y realizada a través de un foro de discusión donde se dan a conocer las respuestas de los alumnos, pero sin brindar la posibilidad de acercarse a entablar una comunicación (entendiendo comunicación como el mensaje ininterrumpido entre el emisor y el receptor).

La *técnica* en el foro de discusión, fue dar lectura a las respuestas de los alumnos y donde el profesor se limitó a repetir las respuestas de los alumnos y dejar a criterio de ellos si tales respuestas eran correctas o no, por lo que no se permitía llegar al momento de institucionalización y evaluación, dejando incompleta la *técnica*. En la actividad se sugiere realizar una discusión referente a las respuestas de esta primera parte, y en L11 el profesor afirma que se hará tal discusión, la cual no es realizada.

Para dar continuidad con la siguiente parte de la actividad, la cual corresponde a resolver ejercicios en los cuales se da el sistema de ecuaciones, el profesor no dio importancia a ellos y continuó con los problemas verbales-algebraicos con una dinámica de trabajo en equipo.

A cada equipo le dio a resolver de 2 o 3 problemas durante el resto de la clase. Al terminar por lo menos un problema de los dados a cada equipo, se pretendía que los alumnos escribieran en un papel cuadriculado, el sistema de ecuaciones y el procedimiento que realizaron para llegar a la solución. La sorpresa fue que sólo a los equipos que le correspondían los problemas 1 (referente a los cuadernos y plumones) y 2 (referente a la fracción), los resolvieron, el resto de los equipos mostraron inquietudes al no poder resolverlos.

Pasa frente a grupo un alumno por equipo de los que resolvieron los problemas, y dan a conocer su procedimiento y comprobación (pero sólo comprueban en una ecuación). Sin embargo, el profesor valida una técnica incompleta, y no da explicación ni justificación a tal procedimiento. Al realizar la comprobación del sistema, solo se comprueba en una ecuación y se da por hecho que la solución es la correcta. Para que la solución de un sistema de ecuaciones sea la correcta, es necesario y suficiente comprobar en ambas ecuaciones. Por ejemplo en el sistema $\begin{cases} x + y = 40 \\ x - y = 10 \end{cases}$, supongamos que la solución obtenía es $(20, 10)$, para comprobar sustituimos estos valores en ambas ecuaciones:

$$\begin{aligned} x + y &= 40 \\ 20 + 10 &= 40 \\ 30 &= 40 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x - y &= 10 \\ 20 - 10 &= 10 \\ \mathbf{10} &= \mathbf{10} \end{aligned}$$

Si sólo se comprobara en la segunda ecuación, se tiene que satisface la condición, pero al hacerlo en la primera no se cumple, por tanto $(20, 10)$ no es solución al sistema de ecuaciones. No se realiza un cierre de la clase, dado que termina el tiempo que dura la clase.

Respecto al discurso empleado por el profesor, se manifestaba utilizando diferentes representaciones de códigos matemáticos, los cuales no coincidían con su lenguaje natural; su discurso matemático fue débil, no maneja con seguridad diferentes conceptos matemáticos; por ejemplo, al comprobar solo e una ecuación el resultado obtenido del sistema de ecuaciones. Además, el discurso empleado se inclinaba hacia los procedimientos y cálculos al momento de diseñar los sistemas de ecuaciones que modelaban los problemas y no se preocupaba por que los alumnos desarrollaran ideas novedosas en cuanto a que éstas les pudieran ayudar a resolver los problemas propuestos, por lo que el profesor tomaba el papel principal.

En relación con el lenguaje utilizado por el profesor a lo largo de la primera clase, fue notable la utilidad del lenguaje común para responder las preguntas de la actividad a través del foro de discusión; en las intervenciones realizadas por los estudiantes, el profesor solo realizaba repeticiones directas de las respuestas de los alumnos, siendo esta una manera de hacer pública tal contribución para indicar el punto alcanzado en el desarrollo de la tarea, y no necesariamente la vinculó con alguna evaluación previa o actual.

4.4. Análisis de la clase 2

En la siguiente clase se abordaron cuatro problemas de la actividad propuesta, de los cuales resalta la poca participación de los estudiantes, y su intento por romper el contrato didáctico en uno de estos problemas. Además, trata de adaptar su técnica conforme avanza la case, y deja atrás el trabajo en equipo.

4.4.1. Análisis del problema de las velocidades del avión y del viento

En la clase anterior se presentaron algunas dificultades al momento de resolver los problemas con la *técnica* propuesta por el profesor (trabajar por equipos). Por lo que en la siguiente clase el profesor decide dejar de trabajar por equipos y ahora realiza un *foro de discusión*, en el cual se va analizando cada problema hasta encontrar el sistema de ecuaciones que lo modela y en algunos casos encontrar la solución a dichos problemas.

Este problema es un ejemplo del cómo trabaja en un *foro de discusión*, y cómo se resuelven los problemas de la actividad de esta investigación.

4.4.1.1. Episodio 2: Representación de las incógnitas [De 1:10 a 4:09]

L12: P: [...] vamos a leer el problema 3, ¿está bien? A1, problema 3 por favor.

L13: A1: Dos aeropuertos, A y B, están a 400 km uno de otro y B está situado al este de A. Un avión voló en 45 min. de A a B y luego regresó a A en 60 min. Si durante todo el viaje estuvo soplando viento del oeste a velocidad constante, determina la velocidad del avión y la velocidad del viento.

L14: P: entonces aquí estamos hablando de dos cosas importantes, ustedes tienen que aportar para sacar el sistema de ecuaciones, lo que... [*interrumpe A1.*]

L15: A1: ¿si podemos hacer dibujitos?

L16: P: si hacer dibujos y todo lo que ustedes quieran, acuérdense que con estrategia solución hay que ayudarse de esquemas, dibujitos, es más, pueden hacer un avioncito de cartón y efectivamente ver que va de A a B. Entonces aquí está diciendo el problema que, hay una velocidad del viento y la velocidad del avión, ¿sí, están de acuerdo? Entonces, ¿cómo podemos establecer..? Primero hay que establecer las incógnitas, ¿cuáles van a ser las incógnitas?

L17: A1: ¿las incógnitas?, mm pues la velocidad del avión y la del viento.

L18: P: y ¿cómo le van a llamar a la velocidad del avión?

L19: Alumnos (varios): x.

L20: P: x va a ser la velocidad del avión [*escribe en el pizarrón* $x = vel. del\ avión$ *y* $y = vel.\ del\ viento$], muy bien.

L21: A1: x la velocidad del avión.

L22: P: y la velocidad del viento. Entonces hay dos cosas muy importantes, cuando va el avión de A a B [*señala con una flecha el recorrido del avión en los puntos A y B en el pizarrón*]. Y en la velocidad del viento, dice que viene del Este, ¿verdad? o ¿qué dice el problema?

L23: A2: del Oeste.

L24: P: [...] entonces cuando va el avión de A a B, ¿el viento lo tiene en contra o a favor?

L125: Alumnos (varios): a favor.

L26: A1: profe, no pero... [*interrumpe el profesor.*]

L27: P: no, entonces el viento va al revés ¿verdad? [*Borra la flecha que señalaba la dirección del viendo y dibuja una nueva flecha indicando el sentido del punto A al punto B.*]

L28: A1: el viento es al revés, el viento es del Oeste para el Este.

L29: A3: la segunda vuelta si va para el otro lado.

L30: P: si, porque si ya el avión va de B a A, el viento si se lo encuentra al contrario, si. Entonces aquí habla de una razón muy importante, estamos hablando de suma y resta de velocidades, eso nos va a ayudar a establecer las ecuaciones. Entonces vamos a tener ¿$x + y$ que va a ser? [*Escribe en el pizarrón* $x + y =$.]

4.4.1.1. Discusión episodio 2

Al inicio de la clase se presenta como primera *tarea*, encontrar el sistema de ecuaciones que modela el problema. Para esto, el profesor da inicio a la clase mediante la lectura del problema, y sugiriendo que para llegar a la solución se puede utilizar cualquier tipo de ayuda como lo es, dibujos, esquemas, entre otros.

El profesor establece las incógnitas del problema de la siguiente manera:

$$x = vel. del\ avión$$
$$y = vel.\ del\ viento$$

El problema pide determinar la velocidad del avión y la velocidad del viento, por lo que las incógnitas del problema estarían dadas a partir de que x representa la velocidad del avión y y representa la velocidad del viento; sin embargo al usar el símbolo $=$ " se esta afirmando que x es igual a la velocidad del avión, que es la incógnita, análogo para y, por lo que se tiene una mala interpretación de los símbolos matemáticos.

Cada vez que el profesor realiza una pregunta a los alumnos, relacionada con lo que él dice dentro de su lenguaje común o matemático, por ejemplo: ¿están de acuerdo?, ¿sí o no?, ¿cuáles son las incógnitas de ...?, entre otras; dichas preguntas están guiadas a que el alumno responda un *sí* o un *no*, en otros casos (por ejemplo en L26 y L27) A1 responde a la pregunta, pero el profesor lo interrumpe y se responde sin dar oportunidad al alumno a externar su opinión respecto del problema. En otras ocasiones, el profesor inmediatamente después de hacer una pregunta, responde sin dar oportunidad a los alumnos de que contesten o den su opinión al respecto, por lo que no hay un *foro de discusión* durante la clase.

4.4.1.2. Episodio 3: Códigos de comunicación [De 4:17 a 5:16]

L31: P: $x + y$ va a ser la velocidad del viento y del avión juntos, cuando el avión va de A a B.

L32: A1: ¿del tiempo?

L33: P: si. Y $x - y$ es cuando viene de allá para acá [*señala la dirección del punto B al punto A.*]

L34: A1: ¿entonces?

L35: P: entonces, estas dos sumas y restas [*señala las expresiones $x + y$, $x - y$ escritas en el pizarrón*] nos van a ayudar para establecer las incógnitas. ¿Dice que de aquí a aquí cuánto tarda? [*Señala la dirección del punto A al punto B.*]

L36: Alumnos (varios): 45 minutos.

L37: P: 45 minutos, si son 45 minutos ¿Qué fracción son de 60 minutos? [*Escribe en el pizarrón ambas cantidades.*]

L38: Alumnos (varios): $\frac{3}{4}$.

L39: P: $\frac{3}{4}$ si, entonces, ustedes saben ¿la velocidad a qué es igual? [*Escribe en el pizarrón* $v =$.]

L40: A3: distancia sobre tiempo.

L41: P: [*completa la fórmula de la velocidad* $v = d/t$] pero ustedes aquí deben de saber el tiempo, entonces vamos a despejar el tiempo [...]

4.4.1.2.1. Discusión episodio 3

En las líneas L31 a L41, se muestra que los códigos de comunicación del profesor son incompletos y erróneos, ya que el problema pide las velocidades del avión y del viento, el profesor establece como primera expresión $x + y$ como las sumas de velocidades que se buscan en una dirección, luego en sentido contrario estarán dadas por $x - y$ (signo negativo porque el viento va en sentido contrario al avión), pero menciona en L35 que estas expresiones le serán útiles para establecer las incógnitas, a pesar de que cuando se empezó a resolver el problema se establecieron las incógnitas como x y y. Por otro lado, si $x + y$, $x - y$ son las sumas de las velocidades en ambas direcciones, entonces tendríamos una tercera y cuarta incógnita, que serían $x + y =?$ y $x - y =?$

Además, parte de que conocemos el tiempo que duró cada viaje (45 minutos ida y 60 minutos regreso), pero el hecho de conocer ciertos valores de una fórmula (en este caso el tiempo) no implica que se tenga que despejar ese valor y sin embargo lo realiza en L30.

4.4.1.3. Episodio 4: Uso de fórmula de la velocidad [De 5:35 a 8:47]

L42: P: entonces, esta ecuación [*señala la ecuación obtenida* $t = d/v$ *y la encierra en un círculo*], esta fórmula nos va a servir para establecer la ecuación. Entonces cuando el avión va de A a B, va a utilizar ¿cuánto? $\frac{3}{4}$ del tiempo, ¿están de acuerdo?

L43: A1: sí.

L44: P: ¿Qué distancia va a recorrer, distancia de aquí a acá [*señala la dirección del punto* A *al punto* B]?

L45: Alumnos (varios): 400.

L46: P: y la velocidad que va a llevar es ¿con el viento o en contra del viento?

L47: A3: es con el viento.

L48: P: entonces voy a utilizar ¿ésta o ésta [*señala las expresiones* $x + y, x - y$]?

L49: Alumnos (varios): la de arriba. [E*s la expresión* $x + y$.]

L50: P: la de arriba, entonces $x + y$, entonces ahí tienen la primera ecuación [*sustituye* $x + y$ 400 *y* $\frac{3}{4}$ *en la fórmula* $t = d/v$, *quedando su primera ecuación de la forma* $\frac{3}{4} = \frac{400}{x+y}$] ¿Cómo podemos establecer la segunda?

L51: A4: profe pero ¿por qué no se parece a ninguna de las ecuaciones que nos dio usted?

L52: P: no, pero es una ecuación fraccional, ahorita se puede acomodar y se establece como $x + y =$ a un valor, eso es lo que vamos a hacer, lo que pide aquí el problema es establecer el sistema de ecuaciones. Y ¿Cuál sería la otra?, ¿de aquí para acá cuánto tarda [*indica la dirección del punto B al punto A*]?

L53: A2: 60.

L54: P: 60 minutos, y ¿60 minutos cuánto es?

L55: Alumnos (varios): una hora.

L56: P: una hora, y aquí está marcado el tiempo que es distancia entre velocidad [*señala la fórmula* $t = d/v$] entonces el tiempo va a ser $\frac{3}{4}$ que son 45 minutos, ¿están de acuerdo?

L57: Alumnos (varios): sí.

L58: P: entonces aquí en el otro tarda una hora, ¿sí o no? en recorrer los 400 kilómetros con la velocidad en contra del viento. Ya está el sistema [*sustituye* 400, 1 *hora y* $x - y$, en la fórmula $t = d/v$, *formando así sus ecuaciones del sistema que modela el problema*]. [...] Nada más hay que resolver el sistema, como dice su compañero vamos a acomodar el sistema, ¿Cómo lo podemos acomodar? Vamos a convertir esta ecuación en una ecuación entera [*señala la primera ecuación obtenida* $\frac{3}{4} = \frac{400}{x+y}$]. [...] entonces quedaría $3x + 3y = 1600$ ... es que no nos gusta trabajar con ecuaciones fraccionarias y hacemos lo mismo [...] quedaría $x - y = 400$, o sea el sistema de ecuaciones ya lo tenemos establecido aquí [*escribe el sistema de ecuaciones encontrado*] quedaría $3x + 3y = 1600$ y $x - y = 400$, ya está. El problema aquí, es establecer el sistema de ecuaciones, ahí está establecido [...]

4.4.1.3.1. Discusión del episodio 4

El haber despejado el tiempo de la fórmula de la distancia ($t = d/v$), implicó que las ecuaciones obtenidas quedaran de la forma $\frac{3}{4} = \frac{400}{x+y}$. Si lo que se busca es la velocidad, entonces de la fórmula $v = d/t$ se obtiene la ecuación $x + y = \frac{400}{\frac{3}{4}}$ Y es por ello la inconformidad de A4 (L51) del porqué la ecuación obtenida no es como una ecuación de la forma $ax + by = c$. El profesor no da el paso de la *técnica* a la *tecnología*, ya que no justifica de manera racional la técnica, sólo responde que el problema pide establecer el sistema de ecuaciones, entonces a partir de esa primera ecuación se puede establecer una de la forma "$x + y =$ a un valor" Análogo a como se encontró la ecuación $\frac{3}{4} = \frac{400}{x+y}$, encuentra el profesor la siguiente, quedando $1 = \frac{400}{x-y}$.

Al llegar a un sistema de dos ecuaciones de la forma $ax + by = c$, se da por terminada la primera *tarea*, pero se deja inconclusa en relación con encontrar la solución al problema, ya que al final de L58, aclara que la dificultad del problema es encontrar el sistema que lo modela, pero esto no implica que el resolver el sistema de ecuaciones exista alguna dificultad. En dicha *tarea* no se utilizó alguna *técnica* específica, ya que el profesor sólo se limitó a dar una clase tradicional, es decir, el profesor trasmite información al resolver los problemas y los alumnos escuchan y reciben tal información pasivamente y en caso de ser necesario responden afirmativa o negativamente a las preguntas del profesor.

En relación con el lenguaje común, se tiene que cada vez que se habla de "el viento", se maneja el término "con viento", por ejemplo en L46, se pregunta sobre qué dirección lleva el viento en el viaje de la ciudad A a la ciudad B, pero la pregunta no tiene sentido, ya que siempre habrá viento.

Concluida la *tarea*, pero sin alguna *técnica* empleada para dar solución a la *tarea*, el profesor da oportunidad de que los alumnos transcriban los procedimientos escritos en el pizarrón.

4.4.2. Análisis del problema de las monedas

Cuando el profesor da por terminada la tarea de encontrar el sistema de ecuaciones del problema de las velocidades del avión y del viento, realiza comentarios extra-clase, para después continuar una nueva *tarea*, resolver el problema siguiente, donde resalta el uso de una técnica no institucional de completar cantidades.

4.4.2.1. Episodio 5: Uso de técnica no institucional [De 17:52 a 23:49]

L59: A5: Una caja registradora contiene \$50 en monedas de cinco, diez y veinticinco centavos. En total son 802 monedas, siendo 10 veces mayor el número de las de cinco centavos que el de las de diez centavos. Encuentra cuántas monedas hay de cada valor.

L60: A1: son 802 monedas, y son 10 veces mayor las de 5 que las de 10.

L61: P: bueno ¿de cuántos tipos de monedas hay? [E*scribe en el pizarrón las cantidades de monedas que están involucradas en el problema.*]

L62: Alumnos (varios): de tres.

L63: P: hay monedas de 5 centavos, de 10 centavos y de 25 centavos, si, ¿están de acuerdo?

L64: A6: sí.

L65: P: entonces si todo lo manejamos en términos de centavos, entonces ¿50 pesos cuantos centavos son?

L66: Alumnos (varios): 5000.

L67: P: [...] entonces 5000 centavos y entonces vamos a establecer las incógnitas, por ejemplo ¿cuántas monedas de 5 centavos tenemos?

L68: A1: tiene 10 veces mayor que las de diez.

L69: P: si, pero ¿cuántas son?

L70: A1: x.

L71: P: exactamente, vamos a establecer las incógnitas, eso es lo que les falta jóvenes, si. Entonces x van a ser cantidad de monedas de 5 centavos [*escribe en el pizarrón* x =*cant. monedas de* 5¢], y la cantidad de monedas de 10 centavos [*escribe* y =*cant. monedas de* 10¢], y z la cantidad de monedas de 25 centavos. [E*scribe* z =*cant. monedas de* 25¢.]

L72: A3: pero este, todos los sistemas eran de dos incógnitas, ¿no?

L73: P: pero este problema es de tres, entonces ya tenemos la cantidad de monedas de 5 centavos y de 25 podemos establecer una ecuación ¿sí o no? ¿Cuántas monedas son?

L74: Alumnos (varios): 802.

L75: A1: $x + z$ es. [*interrumpe el profesor.*]

L76: P: $x + y + z = 802$, ¿sí o no?, ¿sí o no alumno 3?, verdad que sí. Ahora los 50 pesos los podemos establecer de monedas de 5, de 10 y de 25 centavos, por eso los 50 pesos los convierto a centavos. Entonces, si yo multiplico x por 5 centavos, ¿Qué voy a encontrar? La porción de los 50 pesos convertidos en centavos que representa las monedas de 5 centavos [*escribe la expresión* $5x$] ¿sí o no? x es la cantidad de monedas de ¿qué? de 5 centavos, si lo multiplico por 5 centavos, no voy a saber cuánto es de los 5000 centavos, ¿están de acuerdo? Y si a ese le sumo el producto de las monedas de 10 centavos [*escribe la cantidad* 1]) por la cantidad de las monedas que son de 10 centavos [*escribe a la incógnita y*] va a ser la fracción de los 5000 centavos, ¿están de acuerdo? Más 25 por z, si yo sumo esta porción de los 50 pesos [*indica las cantidades correspondientes de cada cantidad de centavos*] más esta otra, mas esta otra, ¿voy a obtener cuánto? Pues los 5000 centavos. [*Su ecuación queda* $5x + 10y + 25z = 5000$.]

L77: A1: a.

L78: P: y la otra ecuación la encuentro con la relación de qué dice ¿qué existe 10 veces qué?

L79: A1: 10 veces más que las de 5 centavos que el de las 10.

L80: P: ¿10 veces más de qué?

L81: A1: las de 5 centavos que las de 10.

L82: A7: $10x * 50$.

L83: P: vuélvalo a leer.

L84: A1: mire es que dice que, si hago 10 veces mayor el número de las de 5 centavos que las de 10 centavos.

L85: P: que las de 10 centavos, x, la cantidad de 5 centavos, va a ser igual a $10y$, es que usted lo leyó bien, a ver léalo de nuevo.

L86: A1: ¿cómo, cómo, cómo?

L87: P: no nada más lo de, siendo ¿qué?

L88: A1: siendo 10 veces mayor el número de las de cinco centavos que el de las de diez centavos.

L89: P: o sea, la cantidad de monedas de 5 centavos, debe ser 10 veces mayor que las de 10 centavos [*señala la expresión que indica dicha cantidad y quedando su ecuación* $x = 10y$] ...este es el sistema, ¿Cómo lo podemos resolver? Lo podemos resolver por determinantes, por sustitución, o por reducción, o igualación. [*El sistema de ecuaciones que le queda es* $\begin{cases} x + y + z = 802 \\ 5x + 10y + 25z = 5000 \\ x = 10y \end{cases}$.]

L90: A1: profe, pero ahí no pude hacer nada, hasta ahí lo tengo, pero... [*interrumpe el profesor.*]

L91: P: por ejemplo, aquí hay que despejar la x [*señala la tercera ecuación*] lo sustituyes acá en estos dos [*señala las primeras ecuaciones del sistema*] y tienes un sistema de dos ecuaciones y luego ya despejas una de ese lado y encuentras el valor de una incógnita y te regresas y puedes calcular la cantidad de monedas de 5 de 10 y de 25. Cópienlo jóvenes.

4.4.2.3.1. Discusión del episodio 5

El que se haya empezado a resolver los problemas iniciando con la lectura del mismo, permite a los alumnos dar inicio a la resolución del problema, leyéndolo en voz alta sin que el profesor pida que lo hagan. Cuando se genera este tipo de situaciones, el profesor no tiene la libertad de usar alguna *técnica* en la nueva *tarea*.

En L71 se nota que las representaciones de las incógnitas, para cada problema son de la misma forma; es decir, por medio de un signo de igualdad ($x = \cdots$) y utilizando las mismas letras x, y o z para representar las incógnitas de los problemas. Cuando se le presenta a los alumnos un sistema de ecuaciones con incógnitas diferentes de las representadas comúnmente (x y y) presentan una serie de dificultades al momento de resolver el sistema.

Por otro lado, la *técnica* utilizada para llevar a cabo la *tarea*, es realizando preguntas que guían al profesor a encontrar el sistema de ecuaciones, donde orienta al alumno a responder lo que él quiere; por ejemplo, en L69 pregunta el profesor *¿cuántas [monedas] son*? A pesar de que es lo que se busca; sin embargo, lo que se está haciendo es buscar el cómo simbolizar algo que no se conoce, por lo que los alumnos responden lo que el maestro quiere escuchar (x). Además de limitar a los alumnos a responder un sí o un no como en L64, también, los alumnos muestran sus ideas en relación con las ecuaciones que se pretende modelar, pero su opinión no es tomada en cuenta, ya que el profesor estaría permitiendo romper el contrato didáctico y se romperían los roles que tiene cada uno de ellos, como en L75.

Para modelar la segunda ecuación del problema, el profesor parte de la cantidad conocida \$50 y los convierte en centavos. Realiza preguntas que él mismo contesta (no da oportunidad de que el alumno responda a ellas) o realiza preguntas que solo requieren de una respuesta negativa o positiva; así obtiene la segunda ecuación, completa la cantidad de 5000¢ siendo éste una *técnica* no institucional, pues parte de las condiciones del problema para completar tal cantidad.

Después, dada una condición del problema (siendo 10 veces el número de las de cinco centavos que las de diez centavos) se establece la tercera ecuación que modela el problema. Se llega al sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas $\begin{cases} x + y + z = 802 \\ 5x + 10y + 25z = 5000. \\ x = 10y \end{cases}$

Chevallard, Bosch y Gascón (2009) argumentan que es preciso poner en funcionamiento repentinamente los tres métodos de solución de sistemas de ecuaciones (igualación, sustitución y reducción), analizar las semejanzas y las diferencias que cada uno de ellos pone en marcha, trabajarlos hasta que dejen de ser problemáticos y llegar a rutinizarlos. Sólo entonces se pone de manifiesto la relación que hay entre ellos, qué es lo que tienen en común (eliminación de una ecuación y una incógnita), cuál es el mecanismo que cada uno de ellos pone en marcha para alcanzar ese objetivo y cuál es la forma más adecuada de extenderlos al caso de más de dos incógnitas.

Sin embargo, en L90 A1 manifiesta no saber qué hacer con un sistema de ecuaciones como al que se llegó en este problema; el profesor sólo explica que basta con despejar la incógnita x de la tercera incógnita y *sustituirla* en las otras dos ecuaciones para así obtener un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, después resolver el nuevo sistema por sustitución (*lo dice de manera implícita*). A diferencia de los problemas anteriores, el discurso no matemático disminuye y el profesor se limita a encontrar el sistema de ecuaciones y deja el sistema sin resolver.

4.4.3. Análisis del problema de renta de departamentos

De acuerdo con Sherin (2002), al inicio de una clase el profesor debe generar discusión para que el alumno dé a conocer sus ideas y participe más en las clases. En el caso de la clase del profesor, no genera discusión alguna y se limita a escribir en el pizarrón los datos del problema (incógnitas y datos conocidos), sin tomar en cuenta las ideas de los alumnos.

Dado que el profesor no permite que los alumnos den a conocer sus ideas, no existe una discusión de cómo resolver el problema y continúa realizando preguntas que requieren de una respuesta afirmativa o negativa. Para iniciar con la resolución del problema, el profesor pide a alumno 8 leer el problema.

4.4.3.1. Episodio 6: Relación entre las incógnitas [De 0:30 a 3:02]

L92: P: [...] le voy a pedir por favor que, A8 nos haga el favor de leer el problema.

L93: A8: Un propietario recibió $12 000 por pago de la renta de dos oficinas en el año de 1984. La renta mensual de una era $100 mayor que la de la otra. ¿Cuál fue la renta mensual que recibió de cada una si la más cara estuvo desalquilada dos meses?

L94: P: vuelva a leer el problema.

L95: A8: *...lee el problema... [El profesor va escribiendo en el pizarrón los datos del problema.]*

L96: P: entonces, aquí estamos hablando también, nuevamente de un sistema de ecuaciones donde tenemos que utilizar dos incógnitas [*señala las incógnitas x e y, que escribió en el pizarrón*] entonces, dos departamentos estuvieron rentados, uno diez meses y el otro doce, uno fue más caro y el otro más barato y la diferencia entre ellos fue de 100 pesos, ¿están de acuerdo?

L97: A8: sí.

L98: P: entonces, le podemos llamar a x renta más cara [*escribe en el pizarrón* $x = renta\ más\ cara$], y y la renta más barata [*escribe en el pizarrón* $y = renta\ más\ barata$), entonces como podemos relacionar x con y [*escribe en el pizarrón* $x > y$], ¿cómo podemos relacionarlas? Porque esa inecuación no nos va a servir de nada [*señala a* $x > y$], x es mayor que y, porque ésta [*señala a* x] es más cara que esta. [*Señala a* y.]

L99: A1: es $x + x + y$, ¿no?

L100: P: es $x =$. [*interrumpe A3.*]

L101: A3: no, es $x + y - 100 = 1200$ y $x + y + 100$.

L102: P: no, estamos relacionando la renta más cara con la más barata, ella lo leyó bien, A8 leyó bien, dijo que la renta más cara era 100 pesos más que la más barata... [*interrumpe alumno 1.*]

L103: A1: entonces $x = y + 100$.

4.4.3.1.1 Discusión episodio 6

Como primer momento en la resolución del problema, el profesor escribe los datos y las incógnitas del problema. Al igual que en problemas anteriores, utiliza las mismas letras (x y y) para representar los valores buscados, siendo una de las dificultades en los alumnos al momento de resolver problemas donde se sugiere utilizar como incógnitas a letras distintas de las usuales. Además, la comunicación matemática no coincide con sus códigos matemáticos, ya que expresa las incógnitas con el signo "=", es decir $x = renta\ más\ cara$, pero es lo que se está buscando; dentro de los errores clásicos de la enseñanza se encuentra el tomar a la incógnita como un objeto (*renta* de departamento) y no como lo que es (el *costo*).

Después, en L96, el profesor infiere que el problema se resuelve con un sistema de ecuaciones con dos incógnitas, lo cual, no necesariamente se necesitan dos incógnitas para resolverlo, por ejemplo en p. 34 de esta tesis, se observa que una de las forma de resolver el problema es por medio de una ecuación lineal: $12p + 10(p + 100) = 12\ 000$.

Después de darle la representación correspondiente a las incógnitas, se sigue con la interpretación del problema, buscando una relación entre las incógnitas escribe en el pizarrón $x > y$, y con un lenguaje no adecuado, realiza la pregunta ¿cómo podemos relacionarlas?, pero al escribir $x > y$, ya está estableciendo una relación entre ellas; sin embargo, argumenta "[...] porque esa inecuación no nos va a servir de nada" señala la relación ya escrita en el pizarrón.

Se presenta otra situación por parte de los alumnos en tratar de romper el contrato didáctico, en L99, L100 y L102, pero el profesor sigue sin tomar en cuenta su respuesta, hasta que A1 da una respuesta que es aceptada por el profesor sin dar alguna justificación del porqué es la respuesta correcta.

4.4.3.2. Episodio 7: Modelado del sistema de ecuaciones [De 3:04 a 4:45]

L104: P: [...] aquí tenemos la ecuación 1 jóvenes [*hace énfasis en la ecuación que da el alumno 1:* $x = y + 100$], ahí está la ecuación 1, ¿cómo puedo encontrar la ecuación número 2?

L105: Alumnos (varios): $x + y - 100$. [*interrumpe el profesor.*]

L106: P: a ver ¿un año cuántos meses tiene?

L107: Alumnos (varios): 12.

L108: P: 12 meses [*escribe en el pizarrón* 12 *meses*], pero una estuvo rentada doce meses.

L109: A1: y la otra 10.

L110: P: ¿Cuál fue la que estuvo rentada doce meses?

L111: Alumnos (varios): la más barata.

L112: P: la más barata todo el año [*escribe todo el año donde tiene la incógnita* y] y la más cara 10 meses [*escribe* 10 *meses donde se encuentra la incógnita* x], entonces la otra ecuación la voy a encontrar por los 12 000 pesos, ¿están de acuerdo?, ¿cómo voy a obtener los 12 000 pesos? [*Hace las preguntas inmediatamente una después de la otra y no da tiempo de que los alumnos respondan*] Pues multiplicando la renta de la más cara por los 10 meses que la tuvo rentada y la más barata por los 12 meses, ¿la más barata la estuvo rentada todo el año, sí o no?

L113: Alumnos (varios): sí.

L114: P: entonces, la renta y la multiplico por 12, vamos a obtener $12y$ ese va a ser el costo que le dio a esa persona que rentó el departamento, la más barata durante doce meses [*hace énfasis en la expresión* $12y$] y si le agrego yo él 10 [*le agrega* $10\ +$ *a la expresión* $12y$] porque estuvo rentado 10 meses, por la renta más cara [*escribe* x *a un lado de* 10, *quedando la expresión* $10x + 12y = 12\,000$] voy a tener los 12 000 pesos, y aquí va a estar la ecuación número 2. ¿Querías comentar algo A3? Ve tus ecuaciones y ve si la interpretaste bien, pero éstas son las dos ecuaciones.

4.4.3.2.1. Discusión episodio 7

Para encontrar la segunda ecuación, un alumno se dispuso a sugerir una ecuación que modelaba las condiciones del problema, pero el profesor al no romper el contrato didáctico, interrumpe al alumno y realiza una pregunta que le llevará a la ecuación que él quiere que se establezca.

Por un lado, a partir de los datos del problema, por ejemplo en L108, especifica en las incógnitas las condiciones que da el problema y a partir de una cantidad conocida parte para modelar dicha ecuación. Dada la cantidad a la que quiere llegar (12 000 pesos), pregunta a los alumnos cómo obtener esos 12 000 pesos, pero continua sin dar oportunidad a ellos de que den a conocer sus ideas. Para llegar a esa cantidad, suma las multiplicaciones del número de meses que estuvieron rentados los departamentos por las incógnitas que representan los costos de las rentas, para llegar así a la segunda ecuación. Realiza este procedimiento a partir del segundo miembro y de ahí al primero, pero de izquierda a derecha, siendo ésta una *técnica* no institucionalizada, pues los pasos realizados no tienen un orden.

Al llegar a la segunda ecuación del sistema, se da por terminada la *tarea* de encontrar el sistema de ecuaciones que modela el problema; afirma que son las ecuaciones correctas para encontrar las incógnitas del problema. Pero los alumnos manifiestan sus dudas, en relación con las ecuaciones del sistema.

4.4.3.3. Episodio 8: Intento por romper el contrato didáctico [De 4:45 a 9:44]

L115: A7: ¿esas son las ecuaciones?

L116: A1: y ¿así deben de estar? Nosotros lo hicimos de otra forma y sí nos dio.

L117: A3: a mí también.

L118: P: a ver, que bueno, pásale de aquel lado [*pasa al pizarrón el A1*] ...les dije al principio, en la clase pasada, podemos resolver un problema desde contextos diferentes, desde una ecuación lineal, desde un sistema de ecuaciones, o un sistema cuadrático, o una ecuación cuadrática, como quieran. Entonces, este problema lo hemos trasladado a una ecuación lineal, dice que doce por x mas doce por x más 100 [*lee la primera expresión que el alumno 1 escribe en el pizarrón*], pero y luego ¿por los diez meses que estuvo?, ahí hay un error, si, en vez de 12 es 10. [*El profesor se acerca al pizarrón y de la primera expresión de la alumna:* $12x + 12(x + 100) = 12\ 000$, *borra el* 12 *que multiplica a* $(x + 100)$ *y en su lugar escribe* 10.]

L119: A1: no profe, pero si nos sale, mire es que espéreme. Hay que comprobar y hacemos x, la más barata que son 500 pesos por los doce meses que estuvo y nos da 6000 pesos, y luego el x_2 [*las respuestas que obtiene las expresa con* x_1 *y* x_2] que son 600 pesos por diez meses que estuvo y nos salen los otros 6000, y 6000 y 6000 son doce mil [*la alumna solo explica la comprobación, el procedimiento para encontrar los valores lo deja expresado, pero sin explicación*]. Ya, sí nos salió.

L120: P: pero está mal planteado el problema por lo que les estoy diciendo.

L121: A1: bueno pues.

L122: P: Efectivamente, la renta más cara fue 600 y la más barata fue 500, ¿sí? Si lo resuelven por este método efectivamente x le va a salir 600 y $y = 500$ si. Pero, miren ¿a qué es igual x?, ¿x es igual a qué? [*no da tiempo de que los alumnos respondan y el continua hablando*] a $y + 100$, y eso es lo que hizo aquí [*señala el procedimiento de la alumna en donde escribió* $12(x + 100)$] más o menos parecido, pero con 10. Entonces está mal planteado el problema, la ecuación la debieron haberla puesto así: [*escribe la expresión en el pizarrón arriba de la expresión de la alumna*] $12(x + 100) + 100x = 12\,000$.

Perdón 10 [*borra de su expresión un cero del término* $100x$] es $10x$ igual a doce mil, ¿por qué?, porque x... [*Observa los datos iniciales del problema y se da cuenta de que la expresión que escribió tiene un error*] es igual a $y + 100$, entonces es $10y$ [*cambia la incógnita x por la incógnita y en su expresión*] donde la variable sería y, no x, o sea ese sistema de ecuaciones, si yo esta x la sustituyo va a ser $10y + 100$, perdón aquí es 10 [*vuelve a cambiar su expresión original de* 12 *por* 10]. Diez por y más 100 más 12 por y [*su expresión original era* $12(x + 100) + 100x = 12\,000$, *después cambio a* $12(x + 100) + 10x = 12\,000$, *luego a* $12(y + 100) + 10y = 12\,000$] si, doce por y igual a 12. [*Su expresión final queda de la siguiente manera:* $10(y + 100) + 12y = 12\,000$].

Vean la diferencia, o sea podemos enlazar aquello con esto [*señala el sistema de ecuaciones encontrado para dicho problema*] en el contexto de ecuaciones lineales, haciendo la sustitución. ¿Ya vieron la diferencia? [*el profesor asiente con la cabeza, pero los alumnos no responden a su pregunta, inmediatamente continua con el siguiente problema*]. Vámonos al siguiente problema.

4.4.3.3.1. Discusión episodio 8

El profesor le da más importancia a encontrar la ecuación lineal que modela el problema, por lo que al no cumplir con sus expectativas la ecuación de la alumna, realiza el comentario en L119 "...*ahí hay un error, ¿sí?, en vez de* 12 *es* 10 ..." la alumna segura de los resultados que obtiene, resuelve la ecuación para llegar a la solución del problema.

Cuando la alumna no resuelve el problema con un sistema de ecuaciones, se tiene el segundo momento de Chevallard (p. 14 de esta tesis) al explorar la tarea y realizarla mediante una técnica distinta de la del profesor, en L118 justifica este hecho:

> [...se puede resolver un problema desde contextos diferentes, desde una ecuación lineal, desde un sistema de ecuaciones, o un sistema cuadrático, o una ecuación cuadrática, como quieran]

Sin dar explicación alguna de porqué tal ecuación lineal, y sin comentar cuál es la representación de la incógnita, la alumna que pasa al pizarrón escribe una ecuación lineal que modela el problema, como se muestra en la Figura 4.4.3.3.1.1.

$$12x + 12(x + 100) = 12000$$

Figura 4.4.3.3.1.1. Primera ecuación de A1

Donde para ella la incógnita x representa la cantidad de la renta más barata, es por ello que escribe $12x$, y como la renta más cara es 100 pesos más, establece la relación $x + 100$, para ella no es necesario agregar una incógnita más. Un punto importante que el profesor no toma en cuenta, es la interpretación que la alumna le da a la incógnita, que es diferente de la de él, siendo x que representa el costo de la renta más cara.

En su segundo paso, se observa que realiza un *ajuste* a su primera expresión (ver Figura 4.4.3.3.1.2).

$$12x + 12(x + 100) = 12000$$
$$12y + 12x + 1200 - 2x - 200 = 12000$$

Figura 4.4.3.3.1.2. Ajuste al procedimiento de A1

Pero este ajuste "$-2x - 200$" se debe a que está contemplando en la primera ecuación la unidad de 12 meses de renta por departamento, lo que implica un *exceso* en sus cuentas. A pesar de este *exceso*, la alumna tiene control de lo que hace, ya que en su segunda expresión realiza ese *ajuste* restando las cantidades que corresponden a los dos meses de renta del departamento más caro que no estuvo rentado, que son dos meses de renta ($2x$) y como es 100 pesos más caro que el otro departamento, resta 200 pesos. Se tiene así una *técnica* no institucional de Chevallard (p. 11 de esta tesis), la cual se muestra en Figura 4.4.3.3.1.3.

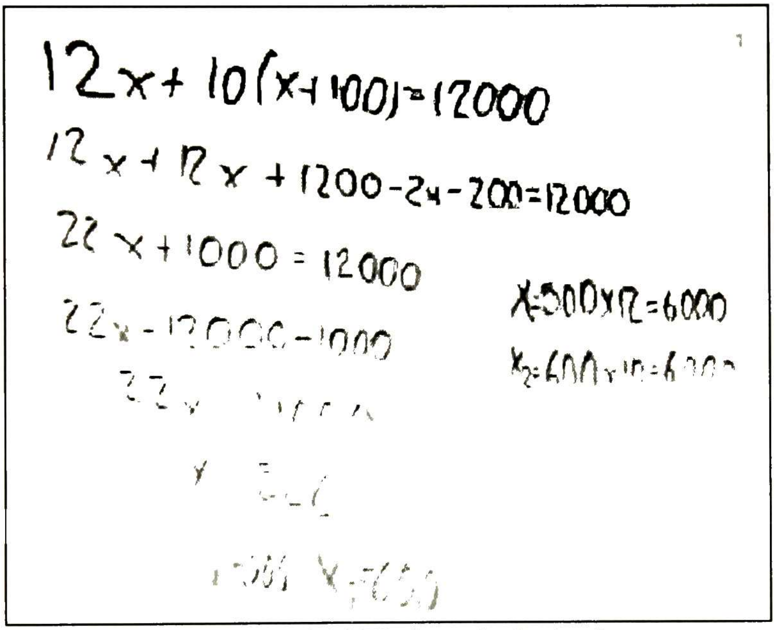

Figura 4.4.3.3.1.3.Técnica no institucional

Sin embargo, a partir de la primera expresión el profesor inmediatamente da por hecho que hay un error y que el procedimiento está mal (L118), sin detenerse a preguntar el por qué de tal *técnica.* Además, cambia la expresión de la alumna, borra lo que está mal para él, y queda la expresión de la Figura 4.4.3.3.1.4.

$$12x + 10(x + 100) = 12000$$

$$12x + 12$$

Figura 4.4.3.3.1.4. Corrección de expresión

Sin detenerse a preguntar sobre lo que está haciendo la alumna, el profesor afirma que está mal planteado el problema y, sin embargo, ella continúa resolviendo su ecuación y pretende demostrar que es correcto lo que realiza, y comprueba al multiplicar los valores obtenidos por los meses rentados en cada caso y sumar estos valores para obtener así los 12, 000 pesos (figura 4.4.3.3.1.5).

Si se tomara en cuenta que la representación de la incógnita x, es diferente para el alumno como para el profesor, se podría presentar una discusión del proceso que realiza la alumna, sin embargo, no se da el caso.

$$X = 500 \times 12 = 6000$$

$$X_2 = 600 \times 10 = 6000$$

Figura 4.4.3.3.1.5. Comprobación de valores obtenidos por A1

Dado que la solución de la alumna es correcta, el profesor pretende plantear la ecuación lineal correcta del problema en L122, pero sin contemplar la representación de la incógnita y afirmando que la ecuación lineal debe ser como se observa en la Figura 4.4.3.3.1.6.

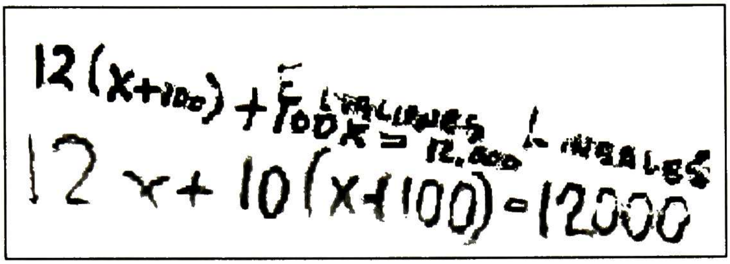

Figura 4.4.3.3.1.6. Ecuación dada por el profesor

Si se contempla que la incógnita representa la renta más cara para el profesor, entonces hay inconsistencia en su expresión, ya que en el primer término multiplica por 12, que son los meses que estuvo rentado el departamento más barato, pero lo multiplica por $x + 100$ que no es lo que vale la renta más barata, entonces la renta sería más barata de la cara. El segundo término representa el ingreso de la renta del departamento más caro, que fue 10 meses, pero especifica que son $100x$, que no es la condición del problema. Se da cuenta de un primer error e inmediatamente borra un cero del término $100x$ (*Observa los datos iniciales del problema y se da cuenta de que la expresión que escribió tiene otro error, Figura 4.4.3.3.1.7*).

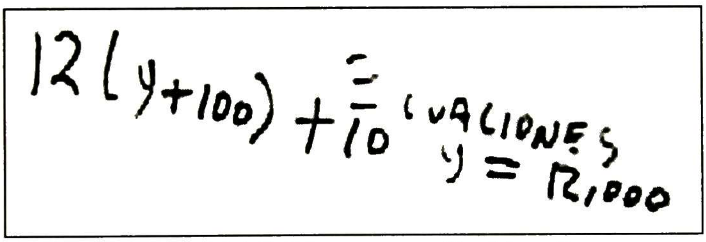

Figura 4.4.3.3.1.7. Primera corrección del profesor

Ahora, se da cuenta de que la incógnita que utiliza es la que representa la renta más cara para él, pero no para la alumna. Cambia las incógnitas, ahora el primer término $12(y + 100)$ representa el ingreso de la renta más cara, pero está contemplando los 12 meses y sólo fueron 10 meses; el segundo término $10y$ es el ingreso de la renta más barata, en este departamento la renta fue de 12 meses.

Después de haber realizado los cambios de variable se da cuenta de un error más:

P:...perdón aquí es 10 (*vuelve a cambiar su expresión final de* 12 *por* 10). Diez por y más 100, más 12 por y, ¿sí?, 12 por y igual a 12 mil.

Su expresión final es $10(y + 100) + 12y = 12\,000$, y su expresión original era $12(x + 100) + 100x = 12\,000$, después cambió a $12(x + 100) + 10x = 12\,000$, luego a $12(y + 100) + 10y = 12\,000$ y la última expresión $10(y + 100) + 12y = 12\,000$. Después de haber corregido los errores, señala:

P: ...vean la diferencia, o sea podemos enlazar aquello con esto [*señala el sistema de ecuaciones encontrado para dicho problema*] en el contexto de ecuaciones lineales, haciendo la sustitución. ¿Ya vieron la diferencia? [*El profesor asiente con la cabeza, pero los alumnos no responden a su pregunta, inmediatamente continua con el siguiente problema*].

Al comparar la expresión de la alumna con la del profesor (Figura 4.4.3.3.1.8), y mirar que las incógnitas representan lo mismo, no existe diferencia en ambas. Se observa también que el profesor pregunta sobre la diferencia de las ecuaciones lineales que ya están establecidas en el pizarrón, pero la ecuación de la alumna ya tiene la modificación que el profesor le realizó (cambio de 12 por **10**). La ecuación lineal inicial de la alumna $12x + 12(x + 100) = 12000$ a diferencia de la del profesor, es el exceso en relación al costo de una renta, pero realiza un *ajuste*, en el que su expresión es igual a la del profesor.

Si se contempla que las incógnitas no representan lo mismo, entonces se tienen dos expresiones totalmente distintas.

$10(y + 100) + 12y = 12\,000$	profesor
$12x + \mathbf{10}(x + 100) = 12\,000$	alumna

Figura 4.4.3.3.1.8. Ecuaciones lineales de alumna y profesor

4.4.4. Análisis del problema de un número de dos cifras

Al terminar de resolver el problema anterior, el profesor no da tiempo de que los alumnos comenten sobre dudas o comentarios acerca de dicho problema, y para dar continuidad con la serie de problemas, sólo se limita a continuar con el siguiente problema.

En el problema siguiente, el profesor reduce su comunicación no matemática, y sin alguna técnica por aplicar, conforme se va avanzando en la resolución del problema se va generando una nueva *tarea*.

4.4.4.1. Episodio 9: Traducción del problema con ayuda de ejemplo [De 11:57 a 14:23]

L123: P: a ver jóvenes vamos al siguiente. ¿Qué dice el inciso *g*?

L124: A1: el *g* ya lo resolvimos. [*Se refiere al problema del inciso g.*]

L125: P: ¿Quién lo resolvió?

L126: A1: falta el *f*. [*Una alumna lee el problema sin que el profesor se lo pida, luego el profesor pide a los alumnos que pongan atención y escuchen el problema. Pide a la alumna que lea el problema otra vez.*]

L127: A6: Un número de dos cifras es igual a 8 veces la suma de sus dígitos; si los dígitos se invierten, el número resultante es 45 unidades menor que el número original. Halla el número original.

L128: P: miren vamos a llamar a x, dígito de las decenas y y, ¿dígito de qué? [*El profesor escribe en el pizarrón "x = dígito de las decenas" y "y = dígito de las unidades".*]

L129: Alumnos (varios): unidades.

L130: P: ahora si yo enlazo el número así xy [*escribe la expresión* xy], pues de nada me va a servir, porque si no tendría yo, no un sistema de ecuaciones lineales, es una ecuación cuadrática [sic], ¿entonces qué tengo que hacer? [N*o da tiempo de que los alumnos respondan a su pregunta e inmediatamente continua con la clase*] trasladar este producto en una suma [*señala la expresión* xy *y agrega una flecha, quedando de la siguiente manera* "$xy \rightarrow$"] ... Entonces miren, por ejemplo, tengo un número, el 45 [*escribe el número* 45 *bajo la expresión* xy] ¿están de acuerdo? El 45 lo puedo representar como $40 + 5$ [*escribe* $45 \rightarrow 40 + 5$] ¿están de acuerdo? $40 + 5$ son 45. El 40 lo puedo representar $10(4)$, ¿están de acuerdo?, ¿sí?

L131: Alumnos (varios): sí.

L132: P: entonces [*en la expresión* $10(4)$ *le agrega* $+5$] si estamos hablando de que, $4 = x$ y $5 = y$, entonces yo puedo generalizar un número xy de dos cifras como si fuera una suma, ¿cuál sería la suma? [S*in permitir una respuesta, escribe la respuesta.*]

L133: A1: ¿suma?

L134: P: $10x$, si [*responde a la alumna*], porque el 4 no lo conozco.

L135: A2: más y.

L136: P: más y, eso lo habíamos visto desde la semana pasada A9 en el equipo de ustedes, ¿se acuerdan? Entonces un número de dos cifras es $10x + y$, ese es el número que andamos buscando. Aquí es $10x + y$ es el número buscado [*lo escribe en el pizarrón como* $10x + y$ *= el número buscado.*]

4.4.4.1.1. Discusión episodio 9

Como primer momento de Chevallard (p. 14 de esta tesis), el profesor como organizador de la clase, orienta a los alumnos hacia al número buscado (L128) y cómo representar las incógnitas del problema. El profesor continua utilizando las letras x y y, donde su representación está dada por medio de un signo de igualdad, es decir, $x =$. Dicha representación la utilizó en problemas anteriores, pero con diferencia de que ahora el contexto del problema pide encontrar un número de dos cifras, y al momento de establecer las incógnitas es de la forma $x =$ *dígito de las decenas,* y en los problemas anteriores el contexto del problema daba pie a que la representación de las incógnitas fuera de otra forma, por ejemplo, $x =$ *renta del departamento*, y lo que se quería encontrar era el costo por mes de la renta del departamento, que son cosas muy distintas.

Por otro lado, al modelar el sistema de ecuaciones el profesor pretende justificar el porqué xy no puede ser una ecuación que modele el problema; sin embargo, afirma que necesita un sistema de dos ecuaciones lineales y lo que se obtiene con xy es una ecuación cuadrática, que es falso. Una ecuación cuadrática está definida como una ecuación donde el mayor exponente es igual a dos y cuyo coeficiente es distinto de cero, normalmente la expresión se refiere al caso en que sólo aparece una incógnita y que se expresa en la forma canónica $ax^2 + bx + c = 0$, donde $a \neq 0$. El término xy no puede ser una ecuación cuadrática por definición, se puede decir que representa un dígito de dos cifras, pero no usarla como ecuación de un sistema, dado que es lo que se está buscando.

Al final de L132, el profesor afirma que el producto xy se debe trasladar en una suma y realiza ese traslado mediante el signo $\rightarrow$, el cual es usado en lógica y teoría de conjuntos como "implicación" que no es el caso. Además, para darle sentido a la traslación de producto a suma, el profesor da un ejemplo, pero realizando una comparación entre el número buscado xy y el número escogido por él 45. En tal ejemplo, representa a $45 \rightarrow 40 + 5$, haciendo un mal uso del signo matemático, dado que $45 = 40 + 5$. A partir de esta suma, parte de que $40 = 10(4)$ y por tanto concluye que $4 = x$ y $5 = y$, además de generalizar a partir de ese ejemplo, del número 45, a la suma $10x + y$ (Figura 4.4.4.1.1.1), es decir, el profesor ve al álgebra como *aritmética generalizada*[6]

[7] Mason (1996) considera la generalización como una ruta hacia el álgebra, incluso como la esencia del álgebra, y afirma que la estructura de la aritmética cuando es expresada, produce álgebra como una aritmética generalizada.

Después de obtener la expresión $10x + y$, que es el número buscado, a partir de las condiciones del problema el profesor se da la tarea de encontrar el sistema de ecuaciones, pero sin la participación de los estudiantes.

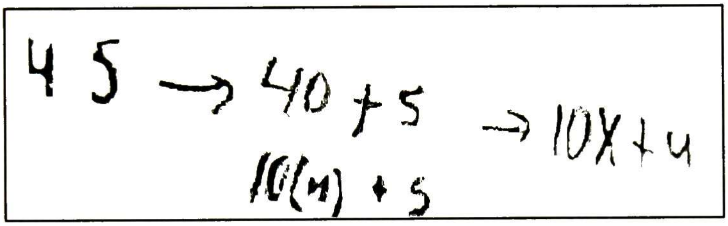

Figura 4.4.4.1.1.1. Ejemplo del que generaliza el profesor

4.4.4.2. Episodio 10: Definición de sistema de ecuaciones [De 14:30 a 16:01]

L137: P: … A6 vuélvanos a leer el problema.

L138: A6: Un número de dos cifras es igual a 8 veces la suma de sus dígitos; si los dígitos se invierten, el número resultante es 45 unidades menor que el número original. Halla el número original.

L139: P: Hallar el número original, entonces hay que establecer primero el sistema, entonces ya tenemos los datos del problema, como le llamamos enunciado verbal, hay que traer y sacar de ahí la ecuación simultanea. Entonces, dice que un número de dos cifras es 8 veces, es 8 veces la suma de sus dígitos, eso es lo que dice el problema ¿no? un número de dos cifras es 8 veces la suma de sus dígitos, entonces aquí tenemos la ecuación número 1 [Figura 4.4.4.2.1]. ¿Y qué dice el siguiente enunciado? A ver léalo A6.

L140: A6: *Un número de dos cifras es igual a* 8 *veces la suma de sus dígitos.*

L141: P: y lo demás…

L142: A6: *si los dígitos se invierten, el número resultante es* 45 *unidades menor que el número original.*

L143: P: entonces si las cifras se invierten, voy a poner $10y + x$, ¿a poco no están invertidas las cifras ahí? Ahí están invertidas ¿no? la x se pasa para acá y la y para acá [*escribe la expresión* $10y + x$ *bajo la primera ecuación* $10x + y = 8(x + y)$, *y señala la dirección que toman las incógnitas de una expresión a otra*] ¿sí?

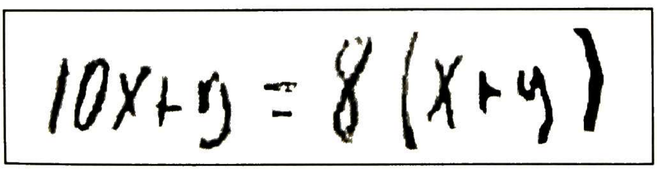

Figura 4.4.4.2.1. Ecuación 1 del sistema que modela el problema

4.4.4.2.1. Discusión episodio 10

La participación de los alumnos se limita a leer el problema o partes de él siempre y cuando el profesor lo indique, por ejemplo en L118, L140, L142. Siguiendo con la dinámica de que el alumno lee el problema y el profesor plantea las ecuaciones que modelan su solución, se da continuidad a la clase con la exploración de las condiciones del problema.

Un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas es de la forma $\begin{cases} a_1x + a_2y = f_1 \\ a_3x + a_4y = f_2 \end{cases}$ donde $a_{n=1,2,3,4\ldots}$ son coeficientes reales. La primera ecuación del sistema que establece el profesor no está dada con base en la definición formal de sistema de ecuaciones, el cual, para él basta con estar de la forma $10x + y = 8(x + y)$, pero sin cumplir con la definición de una ecuación lineal de la forma $ax + by = c$.

Para encontrar la siguiente ecuación del sistema, continua la participación de los alumnos, pero sólo al leer partes del enunciado del problema que pide el profesor, como se muestra en el siguiente episodio.

4.4.4.3. Episodio 11: Comprobación del sistema de ecuaciones [De 16:06 a 17:55]

L144: P: ...el número resultante... [*interrumpe alumno.*]

L145: A2: es el invertido.

L146: P: no, el número resultante ¿qué dice ahí?

L147: A6: 45 unidades...

L148: P: 45 unidades menor [*escribe del lado derecho de la igualdad de* $10y + x = -45$, *y deja un espacio*] que el número original [*en el espacio que deja escribe* $10x + y$], entonces aquí tengo la ecuación número 2 [$10y + x = 10x + y - 45$]. Entonces son ecuaciones que se complementan, se ponen con x y y, y se resuelven [Figura 4.4.4.3.1], ¿sí?, ¿quién encontró el número?

L149: A3: el número es 72, pero no pude resolverlo, no supe hacer la ecuación.

L150: Profesor: ¿es el 62?

L151: A3: 72.

L152: P: ¿72? A ver 72- 45 =.

L153: A3: 27.

L154: P: 27...pero estás en el campo aritmético necesitas hacerlo en el campo algebraico.

L155: A3: no sé cómo, no pude...

L156: P: aquí están las ecuaciones, ¿sí? Nada más hay que acomodarlas, sacar el resultado de x y y. Entonces $x = 7$ y $y = 2$. A ver, vamos a ver si el número es 8 veces la suma de sus dígitos, 8 por 9, 72 [*no escribe el producto que realiza, sólo señala las incógnitas*] si tiene razón [*se queda en silencio* por unos segundos]. Entonces x vale 7 y y vale 2 [*escribe los valores de las incógnitas*]. Hagan sus anotaciones señoritas y señoritos.

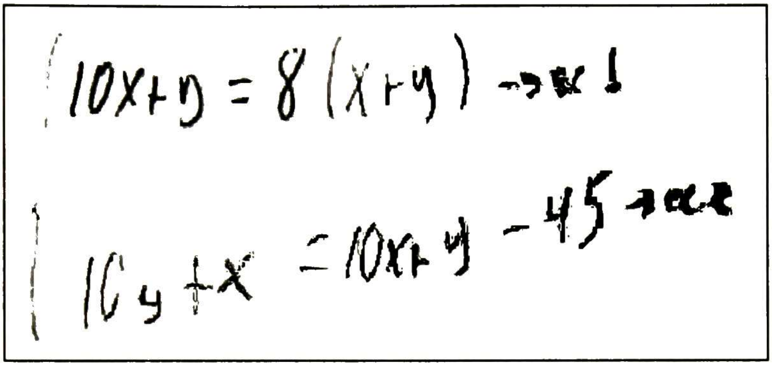

Figura 4.4.4.3.1. Sistema de ecuaciones del profesor que modela el problema

4.4.4.3.1. Discusión episodio 11

En L148 cuando el profesor llega a su segunda ecuación, afirma que para poder resolver las ecuaciones hay que ponerlas con x y y, es decir, escribirlas de la forma $\begin{cases} a_1x + a_2y = f_1 \\ a_3x + a_4y = f_2 \end{cases}$, a pesar de que en los problemas anteriores no ha escrito los sistemas de esta forma, sino como $\begin{cases} a_1x + a_2y = f_1 \\ a_3x + f_2 \;= a_4y \end{cases}$

En L149 y L155 el alumno manifiesta no saber cómo modelar un sistema de ecuaciones; sin embargo, el profesor no le da importancia, se presenta una oportunidad para que el alumno dé a conocer su manera de encontrar la respuesta, para ejemplificar que no sólo con un sistema de ecuaciones se puede resolver el problema verbal-algebraico.

Por otro lado, comparando la resolución del problema con los resueltos anteriormente, el profesor cambia de técnica, y permite dar a conocer el valor buscado, dado por un alumno y realiza su comprobación, pero sin escribir en el pizarrón y lo realiza mediante un proceso mental.

Para el cierre de la clase y después de unos minutos al terminar L156, el profesor da un discurso a cerca de los diferentes problemas verbales-algebraicos; manifiesta que se aprende álgebra para resolver problemas verbales:

P: ...lo que sí les puedo decir es que hay millones y millones de problemas de ese tipo, millones pero todos se conjuntan en ciertos esquemas que tienen una forma casi sinónima de resolución, ¿sí?... pues hay muchos tipos de problemas, entonces necesitamos aprender a resolver ese tipo de problemas ¿sí?, porque para eso estamos aprendiendo álgebra para resolver enunciados verbales.

En general, el discurso empleado por el profesor, en esta clase se manifestó utilizando diferentes representaciones de códigos matemáticos, los cuales no coincidían con su lenguaje natural y eran incompletos y erróneos, por ejemplo, cuando utiliza el signo "<" para establecer la relación que pide el problema entre las incógnitas; su discurso matemático sigue siendo débil, no maneja con seguridad diferentes conceptos matemáticos, y duda al utilizarlos. A diferencia de la clase pasada, se involucraron elementos de lenguaje común y matemático, pero esta vez con mayor énfasis en el lenguaje matemático.

Además, el profesor sigue tomando su papel de profesor tradicional, donde el alumno se limita a escuchar y a no desarrollar ideas en cuanto a que éstas les pudieran ayudar a resolver los problemas propuestos.

En relación con la *técnica* empleada durante la clase, fue análoga a la clase anterior, ya que el conjunto de procedimientos y recursos utilizados por el profesor estuvieron relacionados con encontrar las ecuaciones de los sistemas que modelaban los problemas sin pasar al momento de evaluación, sino hasta el problema de la renta de departamentos siendo ésta influenciada por la participación de A1.

A partir de la participación de A1 en tal problema, el profesor fue permitiendo la participación de los alumnos al dar a conocer sus ideas. Por lo que en el problema del número de dos cifras, en el segundo momento en L128, se inicia con la exploración de la tarea, así como la elaboración de una *técnica* relativa a ésta.

4.5. Análisis de la clase 3

En la siguiente clase se abordan los seis problemas finales de la actividad propuesta, de los cuales resaltan cambios en el *momento* de la exploración de los mismos, y en relación con la *técnica* utilizada para realizar las *tareas*.

Conforme resuelven los últimos problemas, el profesor va reduciendo su discurso no matemático, va permitiendo la participación de los alumnos y respeta su opinión y explica su respuesta del porqué es o no correcta, así como el cambio al momento de iniciar a resolver los problemas, ya que ahora pregunta y da oportunidad de que los alumnos participen; puntos importantes que no realizaba en la solución de los problemas anteriores.

4.5.1. Análisis del problema del autobús y vagón del metro

Como primera *tarea* en la resolución de este problema, es encontrar el sistema de ecuaciones que modela el problema verbal-algebraico.

De acuerdo con Shulman (1986) para enseñar, en primer lugar hay que comprender críticamente un conjunto de ideas que se enseñaran. Se espera que el profesor entienda lo que enseña y, cuando sea posible, que lo haga de diversas maneras. Sin embargo, este no es el caso, ya que el profesor muestra que no tiene claro el problema.

4.5.1.1. Episodio 12: Uso de letras como etiquetas [De 0:31 a 2:07]

L157: P: [...] a ver vamos a ver ahora el inciso g [*sin que el profesor lo pida, una alumna lee el problema*], a ver escuchen por favor, ahora si A10.

L158: A10: *En México, se necesitan* 4 *vagones del Metro y* 7 *autobuses para poder transportar a* 678 *personas. Si colocamos* 21 *personas de más en un vagón del Metro que en un autobús, encuentra el número de personas que podemos acomodar en un autobús y en un vagón del Metro.*

L159: P: ...*[El profesor escribe los datos en el pizarrón (*4 *vag,* 7 *autobuses) y* $4v + 7a =$*]* ¿cuántas personas?

L160: A11: 478, a no 678 [*Escribe el profesor* 678 *en la expresión* $4v + 7a = 678$. *Termina de escuchar a la alumna que lee el problema y borra la ecuación* $4v + 7a = 678$.]

L161: P: bueno vamos a acomodar cuantas personas, 678 ¿verdad?

L162: A10: sí.

L163: P: 678 personas [*escribe la cantidad*] en 4 vagones y en 7 autobuses [*señala las cantidades ya escritas al inicio:* 4 *vag,* 7 *autobuses*] ¿sí? Entonces ¿cuáles son las incógnitas?

L164: A6: la ecuación sería $4x$… [*interrumpe el profesor.*]

L165: P: entonces vamos a poner…

L166: A10: $4x + 7y$.

L167: P: a perfecto $4x + 7y = 678$ si [...]

4.5.1.1.1. Discusión episodio 12

El primer momento fue el contexto de este problema, el cual permite utilizar las letras v para representar las personas que viajan en el vagón del metro, y la letra a representa a las personas que viajan en el autobús; sin embargo, el profesor las toma por *letras como etiquetas*, es decir, representa al objeto del que habla el problema o más aun dando uso del que infiere a menudo con la forma en cómo se llega a entender el significado de los términos en las ecuaciones algebraicas. Por ejemplo, el uso de las letras v de **v**agones y la letra a como los **a**utobuses, dejando de lado sus códigos iniciales de utilizar como incógnitas a las letras x y y.

Los alumnos continúan con la dinámica de leer el problema. Después de escribir la primera ecuación con códigos diferentes de los problemas anteriores (figura 4.5.1.1.1.1), el profesor duda y borra la ecuación, dando inicio a la resolución del problema a partir de la cantidad a la que quiere llegar; es decir, a partir del resultado del cálculo que está usualmente del lado derecho del signo igual: $= 678$.

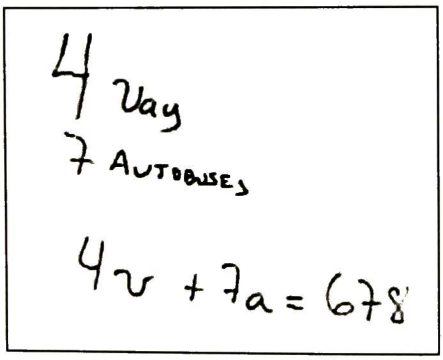

Figura 4.5.1.1.1.1. Uso de letras como etiquetas

En L163 el profesor pregunta ¿cuáles son las incógnitas?, en los problemas anteriores no realizaba esta pregunta, ya que él escribía las incógnitas x, y, y pasaba directo al sistema de ecuaciones. Influenciados por la ecuación inicial que escribe el profesor, los alumnos responden a esa pregunta, dando la ecuación, pero con las incógnitas que siempre se habían usado (figura 4.5.1.1.1.2).

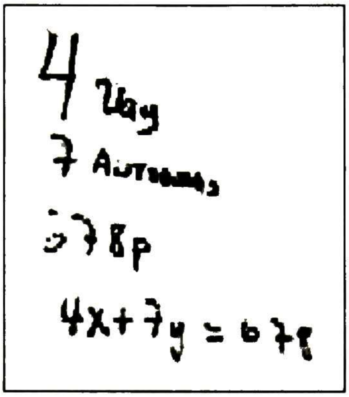

Figura 4.5.1.1.1.2. Ecuación utilizando las incógnitas x, y

Se presenta la primera vez en que un alumno no es interrumpido por el profesor y dice cuál podría ser la segunda ecuación del sistema y también, por primera vez el profesor justifica la respuesta del alumno.

4.5.1.2. Episodio 13: Uso de símbolos matemáticos y reflexión para situar al alumno en el problema [De 2:09 a 5:48]

L168: P: ...pero dice que deben de colocar 21 personas más en el vagón que en el autobús.

L169: A6: entonces x, $x + 7$... [*la interrumpe el profesor.*]

L170: P: entonces x es la cantidad de personas, cantidad de personas que van en el vagón ¿verdad? en el vagón, y y es la cantidad de personas en el qué, en el autobús [*escribe a que representan las incógnitas.*]

L171: A10: $x + y = 21$ personas.

L172: P: ¿$x + y$ igual a qué? [*Escribe la ecuación que propone la alumna, pero le agrega un signo de interrogación.*]

L173: A10: sí.

L174: P: a ver qué dice el problema, lea el problema donde dice...

L175: A10: En México se necesitan 4 vagones del Metro y 7 autobuses para poder transportar a 678 personas. Si colocamos 21 personas de más en un vagón del Metro que en un autobús, encuentra el número de personas que podemos acomodar en un autobús y en un vagón del Metro.

L176: P: fijense, si colocamos 21 personas más en el vagón que en el autobús, o sea que si yo le sumo las que tengo en el autobús más 21 me va a dar la cantidad que tengo en el vagón, no es $x + y = 21$.

L177: A1: no es...

L178: P: ahí se están equivocando.

L179: A1: $7x$...

L180: P: es $4x + 7y = 678$, y la segunda ecuación está mal, es $x = y + 21$ hay que leer bien el enunciado verbal. Entonces la cantidad de personas que hay, es que miren [*borra la ecuación propuesta por la alumna* $x + y = 21$?] en álgebra no estamos viendo desigualdades en ecuaciones, pero ¿cuántas personas hay?, debe haber más personas en el autobús, vagón que en el autobús [*escribe la desigualdad* $x > y$] ¿cuántas? Ahí el problema me lo dice, entonces para que esta desigualdad se convierta en una igualdad hay que poner $x = y + 21$, vean la diferencia. No me digan que $x + y = 21$ fijense en lo que están diciendo con $x + y = 21$, están diciendo que la cantidad de personas que hay en el autobús más el vagón son 21 y no es cierto, tan solo multipliquen eso por 4 y por 7 y ¿cuándo nos da 678? [*Señala la ecuación* $4x + 7y = 678$], entonces la cantidad de personas que hay en el vagón por 4, que hay 4 vagones ¿sí o no?, más 7 por la cantidad de personas que hay en el autobús nos debe de dar 678, porque x es la cantidad de personas en el vagón y y en el autobús. Acuérdense que en el vagón de un metro es mucho más largo que un autobús, el vagón de un metro mide más o menos que será como unos 60 metros, más o menos como 60 metros si están grandes, cada vagón del metro, quien conoce el metro de la ciudad de México si son grandes, entonces 21 personas más que en el autobús, en el autobús si acaso caben 40 más 21 son 60, en el vagón fácil caben como 100 o 150 gentes.

L181: A1: pero no... nos salió.

L182: P: por eso en los vagones parecen latas de sardina los pasajeros. Bueno jóvenes miren entonces el problema es $x = y + 21$. A3 como ya tenemos, ya aclaramos esa duda ya tengo despejado el valor de x lo sustituyo aquí y tengo una ecuación con y y la podemos resolver ¿sí o no? $4(y + 21) + 7y = 678$ y con eso resolvemos el sistema, eso ya quedaría ahí [...]

4.5.1.2.1. Discusión episodio 13

Kieran y Filloy (1989) mencionan que a los estudiantes que son capaces de resolver problemas verbales no pueden escribir las ecuaciones que representan las relaciones cualitativas de la situación del problema, por lo que, cuando escriben una ecuación, ésta representa por regla general las operaciones que habían usado para resolver el problema, y el resultado del cálculo está usualmente en el lado derecho del signo igual.

Es frecuente que los alumnos tengan dificultades en especificar relaciones entre incógnitas, lo cual influye en la habilidad de construir ecuaciones. La ecuación dada por el alumno en L171 es $x + y = 21$, y por primera vez el profesor explica en L180 el porqué ésta no puede ser una ecuación del problema.

Para llegar a la segunda ecuación, el profesor inicia con una desigualdad entre las incógnitas ($x > y$), justifica que ésta se convierte en igualdad al utilizar la condición del problema (*Si colocamos* 21 *personas de más en un vagón del Metro que en un autobús...*) que sería $x = y + 21$.

Realiza una reflexión en L180 acerca del problema (*Tecnología* de Chevallard, p. 13 de esta tesis), en la cual utiliza datos incorrectos, pero aclarando las dudas de los estudiantes.

P: ...Acuérdense que en el vagón de un metro es mucho más largo que un autobús, el vagón de un metro mide más o menos, que será como unos 60 metros, más o menos como 60 metros si están grandes, cada vagón del metro; ¿quién conoce el metro de la ciudad de México? si son grandes, entonces 21 personas más que en el autobús, en el autobús si acaso caben 40 más 21 son 60, en el vagón fácil caben como 100 o 150 gentes.

Para finalizar con la resolución del problema, y realizando lo mismo que los anteriores problemas, no resuelve el sistema de ecuaciones, pero propone utilizar el método de sustitución. Afirma, también, que al sustituir $x = y + 21$ en la primera ecuación se obtendrá una "*...ecuación en y...* que al resolverla estarían resolviendo el sistema, lo cual es falso, ya que sólo se estaría encontrando el valor de una incógnita y no se estaría realizando la comprobación de los valores encontrados.

Otro punto importante es la forma de ver un sistema de ecuaciones por parte del profesor, ya que continúa escribiéndolo de la forma $\begin{cases} ax + by = c \\ dx + f = ey \end{cases}$, la cual no es la definición formal de sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas.

4.5.2. Análisis del problema de ida y vuelta 1

Éste y el siguiente problema, son de ida y vuelta en relación con distancias, tiempo y velocidad de un ciclista, siendo estos de contexto diferente de comparación de los anteriores.

El contexto del problema permite el uso de letras distintas de las usadas como incógnitas, realizando un cambio en sus códigos matemáticos. El primer momento o encuentro con la *tarea* en el tratamiento del problema es distinto, ya que se permite la participación de los alumnos.

4.5.2.1. Episodio 14: Uso de códigos según el contexto del problema [De 5:58 a 9:38]

L183: A10: Un ciclista viajó en línea recta de la ciudad A a la ciudad B a una velocidad promedio de 24 km/h. Al llegar a la ciudad B, de inmediato se volvió y viajó a la ciudad A, a una velocidad de 18 km/h. Si todo el viaje (ida y regreso) tomó 7 horas, ¿cuánto duró el viaje en cada dirección?

L184: P: entonces el viaje de ida ¿cuánto le? El viaje de ida ¿cómo le podemos llamar?

L185: Alumnos (varios): x.

L186: P: o t_1, si estamos hablando de tiempo ¿verdad?, podemos ponerle t de tiempo ¿sí o no?

L187: A3: ¿tiempo 1?

L188: P: si, y tiempo dos el viaje de vuelta [*escribe* t_1 = *ida*, t_2 = *vuelta*], ahí tenemos las dos incógnitas ¿sí o no? porque están preguntando cuánto tardo en ir y cuánto tardo en venir.

L189: A3: de todo el viaje.

L190: P: de ida y ésta es la vuelta [*señala los tiempos* t_1 *y* t_2]. Ahora ¿cuánto tardó todo el viaje?

L191: A3: 7 horas.

L192: P: 7 horas, entonces sumamos los tiempos $t_1 + t_2 = 7$. Entonces, si nosotros sabemos que la velocidad es igual a distancia sobre tiempo [*escribe la fórmula de velocidad* $v = d/t$]. ¿Sí es distancia sobre tiempo?

L193: Alumnos (varios): sí.

L194: P: entonces la distancia que recorre va a ser la velocidad por tiempo. Dice que de ida ahí va una velocidad, ¿qué velocidad llevaba?

L195: A7: 24 kilómetros por hora.

L196: P: 24 kilómetros por hora en un tiempo de t_1 [*escribe* $24t_1 +$] y de regreso ¿cuánto tardo?

L197: Alumnos (varios): 18 kilómetros por hora.

L198: P: 18 kilómetros por hora [*completa la expresión posterior* $24t_1 + 18t_2 =$]. Y eso nos va a dar a la distancia de ida y de regreso, ¿cuánto es?

L199: A10: 7.

L200: P: no, más bien aquí tenemos que igualar las distancias. [De la expresión $24t_1 + 18t_2 =$ borra el igual y el signo +, quedando $24t_1 = 18t_2$.]

L201: A1: es lo que va a buscar ¿no?

L202: P: porque la distancia de ida y la distancia de regreso es la misma, ¿sí? ¿Qué es distancia?

L203: A8: lo que recorrió.

L204: P: lo que recorrió, entonces la velocidad por el tiempo, la velocidad por el tiempo que tarda, deben ser iguales las distancias, igualamos las distancias. Y aquí tenemos la ecuación número 2 [*señala la ecuación* $24t_1 = 18t_2$] y aquí está la ecuación numero 1 [*señala la ecuación* $t_1 + t_2 = 7$] [...] este es un problema de física, donde estamos pensando nuevamente en el movimiento uniforme. ¿sí? Ahí están ya las ecuaciones, nada más se resuelve igual que aquel [*señala las notas del pizarrón del problema anterior*], despeja este número [*señala el primer término de la primera ecuación*], sustituyen aquí [*señala la igualdad* $24t_1 = 18t_2$] y encuentras t_2. O aquí despejan t_1, 18 sobre 24, pero mejor despejen de acá para que no tengan tanto problema en resolver ecuaciones fraccionarias, ¿sí? Entonces, entiendan la distancia recorrida en los dos momentos es la misma ¿sí? [...]

4.5.2.1.1. Discusión episodio 14

Como primer *momento* en L184 con la preguntas [...] *¿cómo le podemos llamar [a las incógnitas]?*, dado el constante uso de las letras x, y en los problemas anteriores, los alumnos responden que "x" sea la incógnita, sin embargo, el contexto del problema induce al profesor a usar ciertos códigos matemáticos (las incógnitas t_1 y t_2 que representan el tiempo transcurrido al recorrer la distancia de ida y de regreso, respectivamente). Los signos usados por el profesor están cargados de significados del contexto de física, entonces, en algún momento el profesor y los estudiantes estudiaron física elemental, y en física elemental cuando se hablan de tiempo, distancia, velocidad, tienen asignadas letras, por lo que no es que el profesor las elija sino que las elije conforme al contexto del problema, es decir, en física t significa tiempo, d significa distancia y v significa velocidad, ya son códigos establecidos en esa disciplina, el profesor recurre a sus usos que ya son institucionales de esos códigos de la física y no de la matemática.

Hay una reflexión por parte del profesor, que externa a los estudiantes en L202, en cuanto a cómo relacionar el viaje de ida con el viaje de regreso y al momento de utilizar el signo de igualdad en la ecuación $24t_1 = 18t_2$ (ya que cambia el signo de + por el de =), siendo una igualdad implícita, derivada del hecho de que el viaje es en línea recta, y como el viaje de ida es de la ciudad A a la ciudad B y el de regreso de la ciudad B a la ciudad A, pero sin cambiar de trayectoria, por tanto la distancia debe ser igual, esto se deduce de la información del problema, pero no de la relación que da el problema.

Análogo a los problemas anteriores en relación con el sistema de ecuaciones, no escribe al sistema de la forma $\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}$, donde x, y son las incógnitas y a, b, c, d, e, f son constantes, sino de la forma $\begin{cases} ax + by = c \\ dx + f = ey \end{cases}$. A partir de la definición formal de sistema de ecuaciones, se puede resolver el sistema por cualquier método (igualación, sustitución o reducción) con la libertad de que el alumno lo resuelva por el método de su preferencia, donde se vería la ventaja de resolver con uno u otro método; sin embargo, a partir del sistema que establece el profesor, fija un camino a seguir para resolver el problema, el cual va con dirección a resolverse por el método de sustitución, además no resuelve el sistema que se plantea.

4.5.3. Análisis del problema de ida y vuelta 2

A simple vista el lector puede dejarse llevar por la idea de que este problema y el problema posterior son iguales o parecidos, pero son totalmente diferentes. Es por ello que este problema es trabajado partiendo del hecho de que es parecido al problema de ida y vuelta 1.

4.5.3.1. Episodio 15: Comparación de problemas [De 11:07 a 13:32]

L205: A5: Un ciclista viajó en línea recta de la ciudad A a la ciudad B a una velocidad promedio de 24 km/h. Al llegar a la ciudad B, de inmediato se volvió y viajó a la ciudad A, a una velocidad de 18 km/h. Si el viaje de regreso fue de una hora más que el de ida, ¿cuánto duró el viaje en cada dirección?

L206: P: este problema es idéntico al anterior, nada más hay una diferencia. En el problema anterior nos dijeron que duraba 7 horas el viaje de ida y de regreso, y aquí nada más nos están diciendo la diferencia entre el tiempo de ida y de regreso, que es de una hora. Nada más hay que cambiar la primera ecuación [$t_1 + t_2 = 7$], en vez de ponerle

$t_1 + t_2 = 7$, nada más que efectivamente hay una diferencia de ¿qué? de una hora, entre este tiempo y este [*señala los tiempos* t_1 *y* t_2]. ¿Y cómo lo podemos hacer?

L207: A3: $t + 1$.

L208: P: pero t_1 va a ser el tiempo de ida, t_1 es el de ida [*escribe* t_1 = *ida*], y t_2 es el de regreso [*escribe* t_2 = *regreso*], ¿sí? ¿En dónde se tardó más? En el regreso, a ver ¿qué dice él problema?

L209: A1: que el viaje de regreso fue una hora más que el de ida.

L210: P: entonces en el de ida, si al de ida le sumamos una hora va a ser igual al regreso, ¿Por qué? por qué en el de regreso se tardó una hora más, ¿están de acuerdo? [*Escribe* $t_1 + 1 = t_2$.]

L211: Alumnos (varios): sí.

L212: P: y como ven es la misma ecuación, de ida llevaba un promedio de 24 kilómetros por hora y de regreso a 18 kilómetros por hora, entonces es exactamente el mismo sistema, $24t_1 = 18t_2$ [*escribe bajo la primera expresión* $24t_1 = 18t_2$] entonces vieron, un enunciado verbal anterior, el único cambio que hay es en la ecuación 1 [*señala a la expresión* $t_1 + 1 = t_2$] que aquí fueron 7 horas [*señala la ecuación del problema posterior* $t_1 + t_2 = 7$] y acá la diferencia es una hora de ida y de regreso, ¿sí?. O la otra, podrían poner aquí (*señala la expresión* $t_1 + 1 = t_2$] $t_2 - t_1 = 1$, o [*escribe la ecuación*] $t_2 - t_1 = 1$, exactamente $t_2 - t_1 = 1$.

4.5.3.1.1. Discusión episodio 15

Como primer *momento* de este problema, se parte de la idea de que es igual al anterior, por lo que sólo se cambia la primera ecuación del sistema de las ecuaciones del problema posterior. El profesor permite la participación de un alumno (L207) y complementa su respuesta para obtener así la segunda ecuación.

Para plantear las ecuaciones del problema, frecuentemente se apoyan en la traducción directa del problema verbal, teniendo también dificultades en especificar relaciones entre las incógnitas. Lo que se puede observar en L210, es la traducción directa de la condición del problema "*...que el viaje de regreso fue una hora más que el de ida*", a la ecuación $t_1 + 1 = t_2$, pero la traducción no es la correcta. Lo que el profesor está haciendo es utilizar la *técnica* de completar el todo que es una técnica no institucional, dado que el viaje de regreso es una hora más que el de ida, le agrega esa hora al viaje de ida, sin embargo, la traducción directa es, para que el viaje de ida sea igual al de regreso hay que restar una hora al viaje de regreso, es decir $t_1 = t_2 - 1$, quedando la ecuación $t_1 - t_2 = -1$. Esta ecuación pierde su significado, pero no como signo matemático, ya que al resolverse se obtendrán valores positivos.

Otro punto importante que se manifiesta en la resolución de este problema, es la definición del profesor de un sistema de ecuaciones. Las ecuaciones del sistema obtenidas son $t_1 + 1 = t_2$ y $24t_1 = 18t_2$, pero no mantienen la forma $\begin{cases} ax + by = c \\ dx + f = ey \end{cases}$ que les había estado dando a los sistemas de ecuaciones de los problemas anteriores. Entonces, para finalizar con la resolución del problema en L212, específica que la primera ecuación también puede verse como $t_2 - t_1 = 1$, pero la segunda ecuación la deja igual, obteniendo así un sistema de la forma $\begin{cases} ax + by = c \\ dx + f = ey \end{cases}$

4.5.4. Análisis del problema del viaje del estudiante

El inicio de tratamiento de este problema es de manera distinta de los problemas anteriores, ya que en el transcurso de la resolución del problema posterior un alumno manifestó haber resuelto el problema del viaje de un estudiante, razón para cambiar la *técnica* de iniciar con la lectura del problema.

El profesor pide al A12 que escriba en el pizarrón lo que su compañero (A5) realizó, dado que el A5 no quiso pasar al pizarrón a escribir su procedimiento.

Ahora el profesor se muestra más accesible en relación con la participación de los estudiantes, pero continúa sin utilizar una *técnica* en específico, ya que conforme avanza la clase la va adaptando según sus necesidades.

4.5.4.1. Episodio 16: Participación de un alumno [De 14:23 a 17:24]

L213: P: [...] A12 pasa a hacer el problema de tu compañero. [*Le da las hojas de trabajo del A5 al A1,2 y escribe en el pizarrón lo escrito por A5 (Figura 4.5.4.1.1)* .]

L214: P: este problema también es similar a los dos anteriores, nada más que ahora está hablando de distancias no de tiempo, ¿sí? [*El profesor pasa al pizarrón y empieza a escribir la ecuación* $x + \frac{x}{2} - 4 = 68$, *y encierra la ecuación en un círculo*]. Miren, nuevamente su compañero A5 quiso resolver el problema dentro del contexto de las ecuaciones lineales, nada más que comete un error.

L215: A1: ¿si está bien Profe?

L216: A5: sí.

L217: P: cometiste un error, es que no era $x + x$, era $\frac{x}{2}$ porque dice que de regreso tardo 4 horas menos en la mitad del recorrido, ¿sí? pero hay que resolverlo por ecuaciones simultaneas ¿sí? [...]

$$
\begin{aligned}
x + x - 4 &= 68 \\
2x - 4 &= 68 \\
2x &= 72 \\
x &= \frac{72}{2} \\
x_1 &= 36 \\
x_2 &= 36 - 4 \\
x_2 &= 32
\end{aligned}
$$

Figura 4.5.4.1.1. *Técnica* de A5

4.5.4.1.1. Discusión episodio 16

Cuando en un problema se tiene una relación o transformación entre las cantidades homogéneas, los alumnos dan una ecuación lineal que modela el problema, a pesar de que el profesor les continúa pidiendo un sistema de ecuaciones lineales. La técnica de A5 es sustituir la relación entre las incógnitas en la otra ecuación que modela el problema.

Por otro lado, el profesor sólo analiza la primera ecuación de la *técnica* del alumno y como no es la ecuación esperada, escribe la ecuación lineal correcta, haciendo énfasis en el error del alumno. Afirma también, que el problema debe resolverse a través de ecuaciones simultáneas, pero sin justificar el porqué de ello.

En lo referente al contexto del problema, se pide determinar la distancia recorrida en dos tramos de camino, y realiza una comparación con el problema anterior, el profesor afirma en L214 que es un problema similar al posterior, dado que en ambos se manejan distancias, pero continúa utilizando las incógnitas x y y, si pudo utilizar las incógnitas d_1 y d_2 como las distancias recorridas en ambos tramos. Deja atrás el procedimiento del alumno, el profesor continúa con la dinámica de la lectura del problema para encontrar el sistema de ecuaciones que modela el problema.

4.5.4.2. Episodio 17: Justificación de la *técnica* del alumno (*tecnología*) [De 17:34 a 20:15]

L218: A5: En ocasión de un día de asueto, un estudiante aprovechó para ir de visita con sus padres, yendo y viniendo por dos caminos diferentes. El viaje de regreso fue 4 kilómetros más corto que la mitad del viaje de ida. El recorrido total, ida y regreso, fue de 68 kilómetros. Determina la distancia recorrida en cada tramo.

L219: P: *[El profesor escribe una incógnita del problema x = distancia recorrida de ida]*... miren aquí le vamos a llamar distancia recorrida de ida [*señalando la incógnita x*] ¿sí? y y va a ser distancia recorrida de regreso, ¿sí? ¿En ida y regreso cuánto fueron?, ¿68 qué? [*Escribe la otra incógnita lo que representa.*]

L220: A5: 68 kilómetros.

L221: P: entonces $x + y$ sería igual a 68 kilómetros [*escribe la ecuación $x + y = 68$*] ¿están de acuerdo? Pero dice que la distancia de regreso [*escribe y, y se queda en silencio*]... ¿qué dice, ahí qué dice?

L222: Alumnos (varios): El viaje de regreso fue 4 kilómetros más corto que la mitad del viaje de ida.

L223: P: o sea para establecer la igualdad entre y y x [*escribe $y <$*] fíjense nada más y tiene que ser menor que x, ¿sí? entonces ¿cómo igualamos las dos condiciones? Vuélvalo a leer A5.

L224: A5: ¿todo?

L225: P: no, donde dice que el regreso...

L226: A5: El viaje de regreso fue 4 kilómetros más corto que la mitad del viaje de ida.

L227: P: fíjense el viaje de regreso, o sea la distancia recorrida de regreso fue 4 kilómetros menos [*escribe $y = \quad -4$ deja un espacio en blanco entre el signo de igualdad y el signo menor*] ¿cómo podemos poner 4 kilómetros menos? Pues menos 4 ¿sí o no? Que la mitad de ¿qué? del viaje de ida, de la distancia de ida [*escribe $\frac{x}{2}$ en el espacio en blanco dejado, y queda la siguiente expresión $y = \frac{x}{2} - 4$*] ahí está. Aquí tengo la ecuación dos. Fíjate si tu sustituyes el valor de y aquí [*señala la primera ecuación obtenida $x + y = 68$*] ¿Qué te resulta? [Realiza *la sustitución de y en la primera ecuación.*]

L228: A1: y entonces esa ¿está mal hecha?

L229: P: si. Vean aquí está la ecuación lineal sacada de un sistema de ecuaciones, donde ustedes efectivamente deben de reconocer que cometimos aquí el error, éste. [*De la ecuación del alumno a la segunda x le agrega el* $\frac{x}{2}$.]

L230: A12: ¿Cuál es la que está bien pues?

L231: Profesor: la que está bien, esta así [*señala la expresión del alumno, pero ya con el cambio que él le realizó*] pero con el dos.

L232: A1: pues así le estoy diciendo.

L233: A12: hay así la tenia.

4.5.4.2.1. Discusión episodio 17

El hecho de que el problema hable de distancias induce al profesor a decir que es un problema similar a los anteriores (ida y vuelta 1 y 2), el hablar de distancias lo lleva a la fórmula de $d = vt$, sin embargo, dentro del contexto del problema no se habla de velocidad y tiempo, razón para no utilizar las incógnitas d_1 y d_2 como las distancias recorridas en ambos tramos. Ahora las ecuaciones están sólo dadas en relación con las distancias, pero dejando de lado el movimiento.

Cuando se utilizan incógnitas como x y y son para cualquier incógnita, pero donde no hay movimiento. El hecho de que un sujeto se desplace, eso quiere decir que hay movimiento, entonces al utilizar las incógnitas x y y el profesor les quita el movimiento y solamente los deja como objetos inertes, sin movimiento.

En cada problema, con una relación entre las cantidades homogéneas, para explicar esa relación, el profesor se ayuda de una desigualdad entre las incógnitas y realiza la pregunta *¿cómo igualamos las condiciones?* Da el cambio al signo de igualdad a través de la traducción directa de la condición del problema.

La segunda ecuación $y = \frac{x}{2} - 4$ traducción directa del problema, es uno de los cambios realizados por parte del profesor, ya que en los problemas anteriores realizaba la *técnica* no institucional de completar, es decir, la ecuación le quedaría de la forma $y + 4 = \frac{x}{2}$.

En los problemas anteriores el profesor no dio importancia a lo que el alumno opinaba o a las ecuaciones que proponía, cambio que es muy notable en este problema (L229). La segunda función de la *tecnología* es la de explicar, de aclarar la *técnica*, ahora el profesor justifica el porqué y a qué se debe el procedimiento del alumno, además de corregirlo, pero sobre lo ya escrito por parte del alumno, lo cual no da pie para que haya una comparación con ambos procedimientos de la resolución del profesor y del alumno.

4.5.4.3. Episodio 18: Corrección de la *técnica* del alumno [De 20:16 a 21:56]

L234: P: [...] entonces, esto debe ser ya corregido debe de quedar [*borra el segundo paso del alumno y cambia la expresión*] $2x + x - 8 = 136$, es que éste dos está dividiendo, pasa multiplicando a todo lo demás, a 2 al 4 y al 68. Y aquí quedaría tres x. [*Corrige el procedimiento del alumno.*]

L235: A5: escríbala toda como debe de ser.

L236: P: $3x = 136 + 8$, ¿$136 + 8$ cuánto es?

L237: Alumnos (varios): 144.

L238: P: 144, entre dos ¿cuánto queda? Digo, entre tres.

L239: Alumnos (varios): 48.

L240: P: entonces la distancia recorrida de ida fueron 48 kilómetros y la de regreso fueron ¿cuántos? 20.

L241: A12: ¿20?

L242: P: ahora, la mitad de 48 ¿Cuánto es?, ¿Cuánto es la mitad de 48?

L243: A5: 24.

L244: P: 24 y apoco no es la mitad, ¿cuántos kilómetros menos que la mitad del de ida?

L245: Alumnos (varios): 4.

L246: P: miren, la ventaja de lo que estamos haciendo el día de hoy, es que estamos viendo que un problema los podemos resolver en el contexto de las ecuaciones lineales o las ecuaciones simultaneas.

4.5.4.3.1. Discusión episodio 18

Al resolver la ecuación lineal en L234, el profesor parte de la ecuación del alumno corrigiéndola y luego resuelve la nueva ecuación ($x + x - 4 = 68$ ecuación del alumno y $x + \frac{x}{2} - 4 = 68$ ecuación del alumno corregida por el profesor).

Como primer paso para la resolución de tal ecuación, el profesor dice que *...es que este dos está dividiendo, pasa multiplicando a todo lo demás...* y queda la ecuación $2x + x - 8 = 136$ (Figura 4.5.4.3.1.1), frase que se presta a confusión para los alumnos en alguna clase futura. Por ejemplo, la ecuación $\frac{x}{3} + \frac{x}{2} - 6 = 4$, primero tendríamos que pasar multiplicando el 3 y luego el 2, pero si tenemos no sólo 2 fracciones, sino la suma de 4, 5, 6 o más fracciones, el alumno estará pasando el dividendo de cada fracción a multiplicar a todo lo demás, en cambio lo que procede desde el punto de vista escolarizado es buscar el mínimo común múltiplo de tales números. Lo correcto desde el punto de vista matemático es decir "*todo* se *multiplica por* 2", quedando de la forma $2(x + \frac{x}{2} - 4) = 2(68)$.

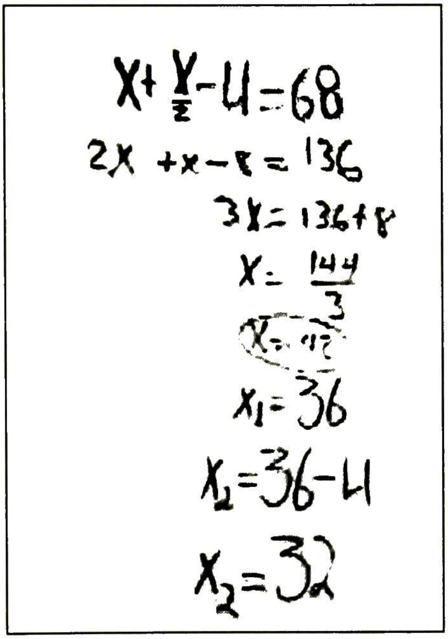

Figura 4.5.4.3.1.1. Corrección del profesor de la técnica del alumno

Al final llega a la solución de una de las incógnitas que son 48 kilómetros, pero él solo escribe el 48 siendo ahora sólo signo sin significado. Si le hubiera puesto *kilómetros* a su resultado, recuperaría el contexto del problema.

Análogo a los problemas anteriores, encuentra sólo la solución de una incógnita y la otra incógnita la encuentra mediante un procedimiento mental, pero esta vez sin utilizar las condiciones del problema, sólo completando con base en el primer resultado. Utiliza la condición del problema hasta que en L141 el alumno pregunta el porqué 20 es el valor de la otra incógnita.

Por otro lado, para terminar con este problema el profesor realiza una reflexión para los alumnos, la cual dice:

P: [...] *la ventaja de lo que estamos haciendo el día de hoy, es que estamos viendo que un problema los podemos resolver en el contexto de las ecuaciones lineales o las ecuaciones simultaneas.*

Inicia de un problema para generalizar, en relación con la forma de resolverlo, ya sea por ecuaciones lineales o por un sistema de ecuaciones. Lo correcto sería decir "*este tipo de problemas*" mas no todo los problemas pueden resolverse de esa forma.

4.5.5. Análisis del problema del concierto de música moderna

El siguiente problema se abordó de una forma rápida, pero con la particularidad de que ahora el profesor realiza una reflexión al inicio de la resolución del problema. Además, tiene cambios en relación con la incógnita, ya que esta vez se separa de la letra como objeto, así como del mal uso de signos matemáticos en la *técnica*.

4.5.5.1. Episodio 19: Uso de sintaxis no institucional [De 1:00 a 4:13]

L247: P: a ver vamos a leer el problema, le voy a pedir por favor que lo lea A13.

L248: A13: En un concierto de música moderna, el precio de los boletos es de $75, pero si se compran con anticipación, se hace un descuento de 10% al precio del boleto. Si asistieron 1 500 personas y el ingreso por concepto de entradas fue de $105 630, ¿cuántas personas compraron el boleto a precio normal?

L249: P: ¿Cuántas personas compraron el boleto a precio normal? Entonces, cuando asisten a un concierto, el día del concierto es precio normal y con anticipación es el precio con descuento. Si ustedes van a asistir a un concierto, ahorita es bueno ir a comprar los boletos con descuento y el descuento es de 10%. Primero tenemos que calcular el 10% de 75 (*mientras se leía el problema, el profesor escribía los datos en el pizarrón*) 7.5, el 10% de 75 es 7.5. Si al 75 le resto 7.5 ¿cuánto sería?

L250: A3: 67 y medio.

L251: P: 67.5, éste sería el precio con descuento y este sería el precio normal [*señala la cantidad de* $75]. Entonces, vamos a establecer dos variables x va a ser la cantidad de personas que compraron el boleto a precio normal y y va a ser la cantidad de personas que compraron el boleto con descuento. Entonces, ¿cuántas personas asistieron al concierto?

L252: A5: 1 500 personas.

L253: P: 1 500 personas. Entonces, si yo sumo $x + y$ ¿a qué va a ser igual $x + y$?

L254: A3: a 1 500.

L255: P: a 1 500 [*escribe la ecuación* $x + y = 1\ 500$]. Y la otra ecuación la voy a encontrar con este precio 105 630 [*bajo la primera ecuación deja un espacio en blanco y luego escribe* $= 105\ 630$] ¿cómo le voy a hacer?, si sé que hubo x personas que compraron el boleto a precio normal ¿cuál es el precio normal?

L256: Alumnos (varios): 75.

L257: P: entonces 75 por la cantidad de personas que lo compraron a 75 pesos me da una cantidad, una porción de 105 *mil*; y le vamos a sumar 67.5 por y que sería la cantidad de los que compraron con descuento y al sumar estas dos cantidades me debe de dar 105 630. Este sistema lo resuelven y encuentran cuántas personas en cada una. Cópienlo [sic] por favor. [*El sistema de ecuaciones quedó de la siguiente forma* $\begin{cases} x + y = 1500 \\ 75x + 67.5y = 106\ 630 \end{cases}$.]

4.5.5.1.1. Discusión episodio 19

En el primer *momento* en L249, es la reflexión, donde habla sobre el precio del boleto con descuento para que los alumnos sitúen el problema, ya que si se asiste a un concierto es recomendable comprar el boleto con anticipación y con un 10% de descuento.

Por otro lado, menciona el profesor que para iniciar se debe calcular el precio con descuento, pero es necesario mas no suficiente que sea lo primero por hacer en el problema, ya que no se tiene un orden de lo que se debería hacer al resolver un problema. Para una de las ecuaciones se necesita calcular el 10% de 75 para saber cuál es el precio con descuento.

Al calcular 10% de descuento del boleto para el concierto, el profesor utiliza una sintaxis no institucional; lo institucional tiene significado porque de manera sintáctica los signos utilizados por el profesor significan que se debe hacer $10\%\ de\ 75 = \frac{10}{100}\ x\ \$75 = \frac{1}{10}75 = 7.5$. Sin embargo, los signos que utiliza (se muestran en la figura 4.5.5.1.1.1) les da un significado diferente; por ejemplo, el profesor le da significado a la flecha (→) de "*es*", pero en realidad significa "*implica*", es un cálculo correcto, pero mediante un proceso mental, a pesar de que sabe el contexto no se apoya de la *teoría*.

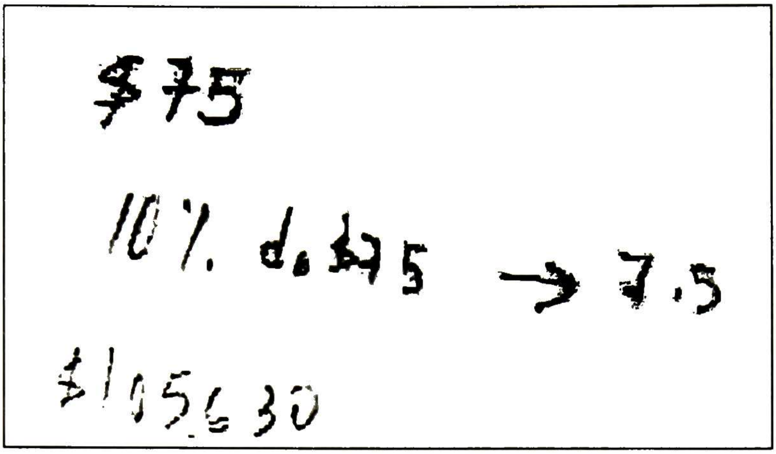

Figura 4.5.5.1.1.1. Sintaxis del profesor del problema 11

El profesor sigue trabajando sin utilizar la sintaxis apropiada de las matemáticas de acuerdo con lo que se está dado en el problema, donde puede llevar a confusiones al alumno; en particular si no sabe el significado de los símbolos matemáticos "*de*" o "→", y se utilizan de una forma no adecuada.

Otro punto importante, dentro del problema, es que el profesor pierde de vista la incógnita del problema, pareciera que las dos incógnitas que él escribe x y y tienen la misma importancia; sin embargo, en el problema sólo se pregunta por una incógnita en específico, siendo ésta una de las dificultades del profesor. También, se puede observar en L251 que le da el nombre de *variable* a la incógnita. Desde el punto de vista matemático las incógnitas no son variables; las variables tienen otro sentido, son una magnitud que puede tener un valor cualquiera de los comprendidos en un conjunto y una incógnita es una cantidad desconocida que es preciso determinar en una ecuación o en un problema por resolver.

Uno de los cambios notables en este problema, a diferencia de los anteriores, es que el profesor se separa de la letra como objeto, antes escribía la incógnita como $x =$ *las personas que compraron el boleto a precio normal*, ahora continua escribiendo el "=" después de la incógnita, pero ahora especifica qué es lo que representa la incógnita, como se muestra en L249 [...] $x =$ *la cantidad de personas que compraron el boleto a precio normal y* $y =$ *la cantidad de personas que compraron el boleto con descuento* [...]

En L255 al escribir la segunda ecuación, el lenguaje natural del profesor no es de acuerdo con el lenguaje matemático; utiliza el término "precio" como el ingreso del concepto de entradas, pero el precio es lo que cuesta un boleto y el ingreso es la cantidad acumulada por la venta de boletos.

4.5.6. Análisis del problema de la compra del televisor

Este problema tiene una relación *multiplicativa entre las magnitudes homogéneas*, en donde se presentan dificultades por parte del profesor y de los alumnos para resolverlo. Es un problema que ciertas condiciones, de las cuales no todas se pueden cumplir, por lo que para el profesor es más fácil concluir que el problema está mal escrito.

Por otro lado, el profesor da la oportunidad a los alumnos de participar y responder las preguntas realizadas por él. Además, según la creencia del profesor, para entender el problema es necesario dar lectura al problema en varias ocasiones, sin embargo, el leer un problema no implica comprenderlo.

4.5.6.1. Episodio 20: Exploración de la tarea [De 7:04 a 11:38]

L258: A14: Dos hermanos compraron, a partes iguales un receptor de televisión con un costo de $2 200. El hermano mayor invirtió en esta operación la mitad de sus ahorros y el hermano menor las dos terceras partes de los suyos. Después de haber efectuado la compra todavía reunían entre los dos $1 600 de ahorros. Determina la cantidad ahorrada por cada uno, previa a la compra.

L259: P: a ver A15 háganos el favor de leer el problema, vamos a leerlo dos personas para entenderlo, acuérdense de que hay que leer bien, leer, leer el problema para entender, léalo A15 por favor.

L260: A15: [*lee de nuevo el problema.*]

L261: P: a ver vamos a empezar a sacar los datos, ¿cuánto costó el televisor?

L262: Alumnos (varios): 2 200.

L263: P: [*escribe* $2\ 200\ =\ precio\ del\ televisor$] a ver, el primer hermano, el hermano mayor ¿cuántos ahorros tenía?

L264: A15: ¡sabe! [*Expresión coloquial de la región para indicar que no se sabe lo que se pregunta.*]

L265: P: sabe, ¿cómo le podemos llamar a eso?

L266: A15: x.

L267: P: x, ahorro del hermano mayor y el hermano menor pues vamos a ponerlo con y ¿verdad? ahorro del hermano menor [*escribe* $y = ahorro\ del\ hermano\ menor$]. Dice que los dos aportaron partes iguales por lo tanto las fracciones que dice el problema hace que las aportaciones sean iguales, si. Vuelva a leer el problema A12 por favor...

L268: A12: [*lee nuevamente el problema.*]

L269: Profesor: bueno la mitad del ahorro del hermano menor, pues hay que dividir que... el ahorro del hermano mayor, el hermano mayor aporto la mitad ¿sí o no?

L270: Alumnos (varios): sí.

L271: P: y el otro tuvo que aportar más de un medio, o sea, dos terceras partes es más que un medio ¿están de acuerdo?

L272: Alumnos (varios): sí.

L273: P: entonces, ¿cómo representamos la mitad del ahorro de x? lo vimos en lenguaje algebraico.

L274: A7: 1900 entre 2

L275: P: si x es el ahorro del hermano mayor ¿cuánto es la mitad del ahorro del hermano mayor? Si sabemos que es x, ¿cómo lo representamos en lenguaje? [*Interrumpe alumno 3.*]

L276: A3: x sobre 2. [*El profesor escribe la "mitad del ahorro* $= \frac{X}{2}$.]

L277: P: [...] ¿cómo representamos dos terceras partes?

L278: A12: x sobre tres.

L279: P: x sobre tres sería una tercera parte, pero, dice que son dos terceras partes.

L280: Alumnos (varios): dos tercios.

L281: A9: $2x$ sobre 3. [*Escribe el profesor "las* $\frac{2}{3}$ *partes del ahorro* $= \frac{2Y}{3}$".]

L282: P: [...] Ahora ¿cuánto costó el televisor?

L283: Alumnos (varios): 2 200.

L284: P: entonces, lo que aporta el hermano mayor más lo que aporta el hermano menor debe ser 2 200, ¿sí?, ¿están de acuerdo? [*Escribe la primera ecuación* $\frac{X}{2} + \frac{2Y}{3} = 2\,200$.]

L285: Alumnos (varios): sí.

4.5.6.1.1. Discusión episodio 20

El *primer momento* de estudio en este problema, diferente de los demás problemas, fue que ahora el profesor no escribió en el pizarrón mientras el alumno leía el problema, ahora da inicio al realizar preguntas sobre los datos del problema (L261), lo que antes no hacía.

En relación con las incógnitas, al igual que el problema posterior, deja atrás a la letra como objeto, pero utilizando las mismas letras para las incógnitas (x, y). Por otro lado, al final de L267, comenta sobre una de las condiciones del problema "*los hermanos aportaron partes iguales*", entonces las fracciones aportadas son iguales, es decir, $\frac{x}{2} = \frac{2}{3}y$ o $\frac{x}{2} = 1\,100\,pesos$ y $\frac{2}{3}y = 1\,100\,pesos$, sin embargo, no es tomada en cuenta, y decide nuevamente dar lectura al problema.

En la parte final de L267, el profesor explora la *tarea* (*segundo momento* de Chevallard), analizando por partes frases del problema, de las cuales va sacando las ecuaciones que modelan el mismo. Por ejemplo, en L273, pregunta a los alumnos sobre cómo representar la mitad del ahorro de x, pero esta vez deja que los alumnos respondan, lo que antes no hacía y se limitaba a escribir las ecuaciones. Análogo para el ahorro del hermano menor que se muestra en L277 y L278, dando tiempo para que respondan los alumnos. Ahora que ya tiene la representación de las condiciones que se piden en el problema, a partir de ellas modela una de las ecuaciones del sistema.

4.5.6.2. Episodio 21: Traducción del problema [De 11:41 a 16:22]

L286: P: ahora la pregunta es, ¿cuánto tenían ahorrado los dos? Entonces, hay que sumar el ahorro del hermano mayor más el hermano menor, a ¿cuánto es igual esa suma? [*Escribe la expresión* $x + y$.]

L287: A4: 1 600.

L288: P: si dice que todavía al comprar el receptor les quedaban todavía 1 600, entonces, habría que sumar 1 600 más 2 200, si, que nos darían ¿cuánto?, 3 800 ¿verdad? Entonces, x más y es igual a 3 800. Resuelvan ese sistema y está resuelto el problema.

L289: A7: profe, ¿pero no se debe tomar en cuenta la otra mitad del hermano mayor y el otro tercio?

L290: P: para resolver el problema no, porque está pidiendo cuánto tienen ahorrado cada uno de los hermanos.

L291: A7: pero lo utiliza antes de realizar la compra ¿no?

L292: A1: es lo mismo ¿no? [*El profesor lee en voz alta el problema.*]

L293: A7: y la otra mitad no se toma en cuenta.

L294: P: no, para que la queremos, no es necesario. Entonces, ya aquí [*señala la ecuación* $x + y = 1\,600$] nada mas despejan el valor de x y lo sustituyen acá [*señala la otra ecuación* $\frac{x}{2} + \frac{2y}{3} = 2\,200$] y encuentran el valor de y ¿sí?, y al revés ya con el valor de y, sustituyen en el de x y encuentran, si quieren lo resolvernos para que vean [*Borra* *la mitad del pizarrón y escribe el sistema de ecuaciones del problema*]. Lo podemos hacer por reducción ¿no?, ¿cómo resolvemos el problema por reducción? Necesitamos igualar los coeficientes [...] y va a quedar acá $-x - \frac{4y}{3} = -4\,400$, ¿sí? Ahí está. Aquí va a quedar, la voy a sumar con la ecuación dos quedaría $x + y = 3\,800$. Al sumarlas se cancela la x y queda y en tercios serian tres tercios, aquí serian tres tercios [*señala en el término y de la segunda ecuación*], tres tercios menos cuatro tercios ¿cuánto quedaría?

L295: A1: un tercio.

L296: Profesor: menos un tercio de y, igual a 4 400 menos 3 800 ¿cuánto nos da?

L297: A7: 600.

L298: P: negativos verdad, entonces y sería igual a menos 600 por 3, $-1y = -\,600(3)$

L299: A1: menos 1 800.

L300: P: $-1\,800$, entonces, y seria 1 800 entre ¿qué? entre menos uno verdad. Entonces y tiene ahorrado 1 800 pesos.

L301: P: [...] y x cuánto va a tener, si entre los dos tienen 3 800 - 1 800 ¿cuánto seria?

L302: Alumnos (varios): 2 000.

L303: A7: ¿pero no deberían ser partes iguales?

L304: P: por eso la mitad de 2 000 ¿cuánto es?

L305: Alumnos (varios): 1 000.

L306: P: y las dos terceras partes de 1 800 es 1 000 [*se queda en silencio por unos segundos*]. Multiplica 1 800 por dos y divídelo entre 3 y da 1 000.

L307: A1: 1 800 por 2 son... son 800, no 900, ¿no?

L308: P: ¿1 800 por 2?

L309: A1: a por 2, yo pensé que entre 2.

L310: P: 3 600 entre cuánto dijimos, entre 3. 1 200 está mal el problema.

L311: A1: ¿está mal el problema?

L312: P: deben de aportar partes iguales, entonces algo estamos, nos estamos equivocando en algo. Entonces, el problema si lo dice bien claro. Si es a partes iguales cada quien debió de aportar 1 100 pesos ¿sí o no?

L313: A1: ¿1 100?

L314: P: si. A ver chequen bien la solución [*el profesor realiza cálculos en su calculadora y observa los datos del pizarrón*]. Entonces no aportan en partes iguales, está mal el problema.

L315: A1: si, no le tocan a partes iguales porque entonces como los... [*interrumpe el profesor.*]

L316: P: está mal el enunciado del problema.

4.5.6.2.1. Discusión episodio 21

Este episodio se divide en varios momentos, entre ellos el momento 3, 4 y 6. En los dos primeros se inicia de establecer la otra ecuación del sistema, donde el profesor se pregunta *¿cuánto tenían ahorrado los hermanos*? (L286), sin embargo, esta vez no realiza una traducción directa del problema, ya que en él se habla sobre la cantidad ahorrada que les quedó después de la compra y no de la cantidad ahorrada total.

Los alumnos llevan al profesor a analizar más a fondo el problema, exigiendo retocar la *tecnología* elaborada hasta entonces. A pesar de que en L290 el profesor le da importancia a la cantidad que tienen ahorrada los hermanos, no toma en cuenta la opinión de A7 y afirma que no es necesario considerar las cantidades que A7 propone en L289.

A7 se confunde dado que considera una traducción directa del problema en la condición, que después de la compra les sobró $\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y = \$1\,600$, y para el profesor debe ser $x + y = \$2800$ considerando el ahorro total, que en realidad lo que está utilizando es la *técnica* no institucional de completar. Sin más justificación del porqué no utilizar la condición que plantea el alumno, al igual que el resto de los problemas el profesor infiere que éste debe resolverse por el método de sustitución. A partir de la inconformidad de A7, resuelve el problema, pero ahora por el método de reducción.

En el procedimiento del método de reducción, realiza la suma de $-4400 + 3600$, donde el profesor no respeta los signos de los números y los intercambia, y dado el resultado positivo le cambia el signo negativo, pero sin justificarlo (Figura 4.5.6.2.1.1).

Se presenta uno de los cambios en relación con los otros problemas (a partir de L303) en el *sexto momento* de Chevallard, llega el instante de hacer un balance de lo realizado y del porqué es correcto lo hecho. A7 tiene dudas sobre las ecuaciones, por lo que pregunta al profesor en L303, de manera que ésta lo lleva a encontrar el valor de las dos incógnitas.

Al llegar a los valores pedidos, por influencia de A7, el profesor realiza una comprobación por medio de un procedimiento mental, en el cual se da cuenta de que los resultados obtenidos no cumplen con la condición de que las aportaciones de los hermanos son iguales.

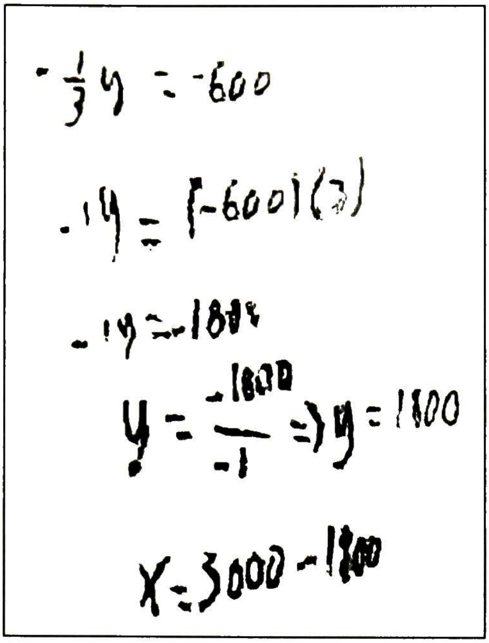

Figura 4.5.6.2.1.1. Técnica del profesor del problema 12

Dado que no se cumple la primera condición del problema, el profesor concluye que el problema está mal planteado, porque deben aportar partes iguales en la compra del televisor. Pero se puede concluir que las cantidades ahorradas dependen de la condición que se tome en cuenta, ya sea que los hermanos hayan aportado cantidades iguales o que después de la compra reunían 1 600 *pesos*.

En general, el discurso del profesor en el aula, estaba limitado por el conocimiento del contenido matemático, las creencias respecto al proceso de resolución de problemas, así como las actitudes del profesor, que no permitían romper el contrato didáctico.

Una de las cláusulas explícitas del contrato didáctico que se establece en la clase de resolución de problemas asigna al estudiante la obligación de pensar los problemas, sin embargo, el profesor en su papel de profesor tradicional, no permitía tal situación ya que él incluso les brindaba las técnicas que les permitirían resolver el problema de una forma rutinaria. Cuando el profesor permitió romper el contrato didáctico, se abre una nueva responsabilidad compartida entre el profesor y los estudiantes, la producción de nuevas técnicas.

Por otro lado, en relación con las praxeologías didácticas en el *momento del primer encuentro* en la resolución de los problemas, el profesor hacía referencia al contexto del problema, para iniciar de lo conocido y comenzar con la resolución; después en el *momento de exploración*, el profesor relacionaba el contexto del problema con la construcción de una técnica adecuada para abordarlo; luego, en el *momento del trabajo de la técnica*, el profesor se apoyaba de técnicas institucionales o no, las cuales le permitían llevar a cabo la tarea en cuestión, sin embargo, estas técnicas no tenían una justificación, sino hasta los últimos problemas, que en el momento *práctico-técnico* (saber-hacer) se realizaba una justificación de la resolución de tales problemas, así como la evaluación de los mismos.

En el bloque [T/τ] (saber-hacer), las *tareas y técnicas* del profesor están vinculadas con la gestión de la interacción entre los estudiantes y el conocimiento matemático que subyace a los problemas de la actividad y en la caracterización del discurso en el aula. Ejemplos de *tareas* a desarrollar por el profesor en este estudio, serian la gestión de los distintos episodios que constituyen la enseñanza de resolución de problemas verbales-algebraicos, la presentación de la información, la gestión de los foros de discusión, interpretar y responder a las ideas de los estudiantes, entre otros.

Conforme la actividad avanzaba, las *técnicas* que facilitaron el discurso del profesor sirvieron de base para abrir espacio a la comunicación de ideas por parte de los estudiantes. Es importante hacer notar que tales ideas jugaron un papel importante en la resolución de los problemas, para que el profesor permitiera resolverlos no sólo por un sistema de ecuaciones, sino también, por una ecuación lineal.

La presencia de la *tecnología* se nota en las respuestas y justificaciones que el profesor da a sus estudiantes; en particular, en los últimos problemas de la actividad. Por ejemplo, el conflicto que surge en el problema de la compra del televisor, los alumnos cuestionan al profesor al resolverlo de tal forma, ya que no cumple con las condiciones del problema, las cuales no eran tomadas en cuenta.

CAPÍTULO $\boxed{5}$

CONCLUSIONES Y REFLEXIONES FINALES

5.1. Introducción

En este capítulo se describen las conclusiones de la presente investigación. Tales conclusiones son resultados del análisis y discusión de los datos recabados mediante los distintos instrumentos de recolección de datos empleados en este trabajo. Se presentan primero, las conclusiones tomando en cuenta los objetivos de la investigación y, segundo, respecto a las preguntas de investigación que guiaron el presente estudio. Lo anterior, de acuerdo con lo expuesto en el Capítulo 1 de esta tesis. Al final del presente capítulo se llevan a cabo reflexiones en torno a futuras investigaciones relacionadas con la presente investigación reportada en este documento.

5.2. Respecto a los objetivos

Los objetivos de esta investigación son analizar el discurso del profesor en una clase normal de matemáticas (analizar las dificultades referentes al uso de la simbología y del discurso) en particular en la enseñanza de resolución de problemas verbales-algebraicos, modelados por sistemas de ecuaciones lineales; así como las formas de argumentación que el profesor da a sus estudiantes cuando resuelven tales problemas.

Diversos estudios han identificado el discurso como uno de los procesos más importantes para aprender matemáticas y para resolver problemas. Ramírez (2008) señala que el discurso en el salón de clase es central para que los alumnos aprendan matemáticas como un dominio de investigación humana con sus formas características del conocer.

De acuerdo con el análisis del discurso del profesor participante en este estudio, y de acuerdo con los argumentos utilizados, intervinieron los conocimientos previos del sujeto respecto de la problemática que el profesor trataba de resolver, además de jugar un papel fundamental las tareas propuestas al profesor a fin de que los alumnos se vieran comprometidos a resolver los problemas. Sin embargo, conforme las clases fueron avanzando el profesor fue mostrando cambios en su forma de enseñar a resolver los problemas verbales-algebraicos:

Al inicio de las grabaciones durante la aplicación de la actividad, se vio reflejado el constante uso del lenguaje común. Sin embargo, el discurso matemático se fue manifestando, esencialmente cuando la praxeología puntual del profesor se daba mediante un conocimiento matemático (saber) generado de un conocimiento didáctico (saber-hacer), al momento de validar respuestas de los alumnos, así como dar justificación a ellas, etc.

En cuanto al uso de códigos matemáticos no fueron constantes, por ejemplo, en la forma de establecer un sistema de ecuaciones, fue de la forma $\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}$ o $\begin{cases} ax + by = c \\ x = d + ey \end{cases}$, este último cuando las incógnitas presentaban una relación multiplicativa o aditiva entre las incógnitas; también el profesor infería que estos sistemas fueran resueltos por el método de sustitución.

En relación con la forma de representar las incógnitas, lo hacía simbolizando el objeto del que se hablaba o por medio de etiquetas, y no de lo pedido en el problema. Por ejemplo, en el problema del autobús y vagones del metro, se debe encontrar el número de personas que se pueden acomodar en un autobús y en un vagón del metro; sin embargo, las incógnitas fueron representadas como $x = vagón\, del\, metro$ y $y = autobús$, sin contemplar que no se debería utilizar el signo igual. Conforme fue avanzando en la resolución de los problemas de la actividad, el profesor continuó utilizando el signo igual, pero con la diferencia de que ahora sí contemplaba lo que el problema pedía, por ejemplo, el problema del concierto de música moderna, hay que encontrar las cantidades de personas que compraron el boleto a precio normal y a precio con descuento. Las incógnitas son representadas como *la cantidad de…* y no como *las personas que…* , de esta forma separa a la letra del objeto.

La participación de los alumnos se presentó en diferentes situaciones, ella condujo a cambios en el profesor al momento de resolver los problemas; dentro de esos cambios se encuentran:

- En la primera clase, el profesor dio a conocer los puntos importantes de la lista de cotejo que tomaría en cuenta para la evaluación del tema visto; entre ellos, identificar datos e incógnitas, establecer el sistema de ecuaciones, dar solución al sistema, y comparar el resultado con el enunciado del problema, de los cuales el profesor realizaba los dos primeros. Cada vez que iniciaba a resolver un problema, la única participación de los alumnos estaba limitada a leer el problema y contestar preguntas por medio de un sí o un no. Esto se debía a que el profesor realizaba todo los procedimientos necesarios para llegar al sistema de ecuaciones que modelaba el problema, y dejaba de tarea a los estudiantes que resolvieran dicho sistema.
- Las participaciones de los estudiantes estaban limitadas a leer el problema, y cuando se disponían a responder una pregunta abierta por parte del profesor, éste los interrumpía sin importar cuál fuese su respuesta. Conforme las clases fueron avanzando, el profesor permitió que participaran, pero no siempre tomaba en cuenta su respuesta. Además, sólo en algunas ocasiones tomó en cuenta las ideas de los alumnos, analizando las respuestas y justificó el porqué ellas eran correctas o no.
- El profesor no permitía que los alumnos resolvieran los problemas con una ecuación lineal a pesar de que su procedimiento y resultado fuera correcto. Si la ecuación lineal de los alumnos no correspondía a lo que el profesor esperaba, éste daba por hecho que todo lo realizado por los alumnos estaba mal, sin revisar ni pedir explicación del por qué dicho procedimiento, además de afirmar que sólo se podían resolver los problemas con un sistema de ecuaciones. Más tarde, en el problema referente al viaje del estudiante, un alumno resolvió el problema por medio de una ecuación lineal (que no modeló las condiciones del problema), en la cual el profesor se contradijo al afirmar que si se puede resolver con la ecuación lineal, corrigió y dio una explicación el procedimiento del alumno y así llegó a una solución, la cual es comprobada por un proceso mental, lo que antes no realizaba.

- Dado que los alumnos mostraban mayor interés al resolver los problemas con una ecuación lineal y llegar a una solución del problema, en la última clase el profesor dio oportunidad de que se resolvieran los problemas con diferentes técnicas.

Durante todas las clases, el profesor sólo mostró tener como *técnica* en cuanto a cómo encontrar el sistema de ecuaciones que modelaba el problema, pero sin utilizar alguna *tecnología* en específico.

La comunicación no matemática se presentó sólo durante las primeras clases, para apoyar lo matemático, pero la mayoría de las veces sin relación con lo que se realizaba durante la clase. En la última clase, el profesor mostró comunicación no matemática, pero esta vez haciendo alusión a reflexiones respecto al problema que se estaba resolviendo, las cuales centraban al alumno en la situación por resolver, siendo más fácil para estos llegar a una solución.

5.3. Respecto a las preguntas de investigación

A continuación se da respuesta a las preguntas de investigación que guiaron el presente trabajo, con base en el análisis expuesto en el capítulo anterior.

- ***¿Cómo influye en la enseñanza y el aprendizaje la resolución de problemas verbales-algebraicos, tanto en los profesores como en los alumnos?***

Shulman (1986) enfatiza que para enseñar en primer lugar hay que comprender críticamente un conjunto de ideas que van a enseñarse. Se espera que el profesor entienda lo que enseña y, cuando sea posible, que lo haga de diversas maneras. Además, necesita comprender el modo en que una determinada idea se relaciona con otras en la misma materia y también con ideas de otras materias.

Se debe considerar como conocimientos matemáticos para la enseñanza, los contenidos matemáticos que el profesor enseña en el grado en que desempeña su labor docente según lo indican los programas curriculares. Para ello, es conveniente que el profesor conozca el currículo y los objetivos de las matemáticas que se plantean en el grado a su cargo, para poder utilizarlos como guía de enseñanza.

La actividad propuesta al profesor participante, está compuesta de doce problemas verbales, todos de diferentes contextos. Durante el tratamiento de los primeros problemas de la actividad, el profesor no tenía una *tecnología* sobre cómo dar la clase de resolución de problemas, sino que sólo abordaba cada problema, pero entendiendo los problemas él y no los estudiantes. Sin embargo, conforme las clases de resolución de problemas avanzaban, el profesor fue relacionando contenidos no matemáticos para dar a los alumnos reflexiones que lo situaran en el problema y hacer más fácil su resolución. También, se destaca la importancia que fue dando el profesor a la participación de los estudiantes, ya que la resolución de problemas dio lugar a que los estudiantes discutieran sus ideas, hicieran conjeturas o propusieran diversos métodos para encontrar la solución de problemas.

Resolver un problema implica que el profesor entienda lo que hizo y pueda explicar porqué sus acciones son correctas; hecho que fue notable en los últimos problemas de la actividad, al justificar los procedimientos y las ideas propuestas por los alumnos del porqué o no eran correctas por medio de ejemplos.

En relación con el aprendizaje de los alumnos, se puede concluir que no es suficiente que los alumnos conozcan las diversas *tecnologías*, sino que es importante que participen en experiencias relacionadas con la resolución de problemas, dado que al inicio cuando no se permitía participar, no se puede asegurar que comprendía el cómo se llegó a resolver tal problema. Esto se podía observar cuando iniciaron a dar a conocer sus ideas, ya que no tenían sentido en relación con el contexto del problema; hecho que fue notable en los últimos problemas al hacer una traducción directa de la redacción del problema.

Al intentar encontrar las soluciones a los problemas, los alumnos no sólo se relacionaban con una situación específica a la cual ya se encontró un resultado, sino también tener que aprender algún concepto matemático; es decir, tanto a resolver un problema como al aprender un contenido, ya que el alumno tiene que discutir ideas alrededor del entendimiento de la situación o problema, así como usar representaciones y resolver o entender esa situación o problema.

Así, la resolución de problemas verbales-algebraicos se relaciona no sólo con el uso y desarrollo de habilidades para que el alumno tenga acceso a diversos recursos y los utilice, sino además con estrategias que le permitan trabajar eficientemente con tales recursos en diversas situaciones.

- ***¿Cuál es el discurso matemático y los argumentos del profesor en clase cuando aborda problemas verbales-algebraicos?***

Para Sherin (2002) es importante la forma de preguntar del profesor, así como sus comentarios respecto a las respuestas de los alumnos, por lo que en su estudio reporta la dificultad del profesor, cuando trata de mantener un equilibrio entre procesos y contenido, en la discusión en el salón de clase.

La forma de iniciar las *tareas*, por parte del profesor, fue tomar control inmediato del trabajo a partir de la lectura del problema, con una sucesión rápida de preguntas (contestadas por él mismo). También, de un control sobre las ideas de los alumnos, y determina qué ideas explicar y tomar en cuenta.

Robert y Rogalski (2005, p. 285) identifican tres categorías de respuestas del profesor dadas a las preguntas de los alumnos; entre ellas, la repetición con una redacción corregida, la respuesta con una corrección implícita (en general con una pregunta sobre el acuerdo de los demás) y la respuesta que explícitamente corrige un error.

En la primera clase, en el foro de discusión, en las intervenciones realizadas por los estudiantes, el profesor sólo realizaba repeticiones directas de las respuestas de los alumnos, siendo ésta una manera de hacer pública tal contribución, para indicar el punto alcanzado en el desarrollo de la tarea, y no necesariamente la vinculó con alguna evaluación previa o actual.

Las *técnicas* empleadas durante las siguientes clases, fueron variando conforme al contexto del problema, ya que el profesor no contaba con una técnica específica; sin embargo, se apoyaba de técnicas no institucionales como la técnica de completar, es decir, a partir de una cantidad que es un todo respecto a las cantidades establecidas en el problema, se realiza la *técnica* de la *tarea* específica, además de no realizar una traducción directa del problema; por ejemplo, en la traducción de las condiciones del problema de la compra del televisor a la ecuación $x + y = 3\,800$, donde la condición es que después de haber efectuado la compra aún reunían entre los dos $1 600 de ahorros, a esta cantidad el profesor sólo le suma la cantidad ahorrada para completar la cantidad total ahorrada por los dos hermanos ($3 800).

Respecto al discurso empleado por el profesor, de manera general, se manifestaba utilizando diferentes representaciones de códigos matemáticos, los cuales no coincidían con su lenguaje natural; su discurso matemático fue débil, no maneja con seguridad diferentes conceptos matemáticos, y duda al utilizarlos. Además, el discurso empleado se inclinaba hacia los procedimientos y cálculos al momento de diseñar los sistemas de ecuaciones que modelaban los problemas y no se preocupaba de que los alumnos desarrollaran ideas novedosas en cuanto a que éstas les pudieran ayudar a resolver los problemas propuestos, por lo que el profesor tomaba el papel principal.

Entre los marcadores utilizados por el profesor se encuentran: los de cierre, vinculados con una repetición de los resultados obtenidos, "están de acuerdo", ¿sí?, ¿verdad?, "cómo ven"; y los marcadores de apertura, "vamos a…", "ahora", "vamos a continuar", "primero vamos a…" El marcador de cierre aparecía antes o después del recordatorio del resultado obtenido, o bien estaba ausente, ya que el profesor se limitaba a repetir el último resultado obtenido.

Una de las funciones de la tecnología es *explicar,* de *hacer inteligible*, de *aclarar* la técnica, y a pesar de que los alumnos afirmaban no tener clara la técnica del profesor, no siempre se daba tiempo de explicar la técnica utilizada, sino hasta el último problema y por influencia de los alumnos y del contexto del problema.

- ***¿De qué manera ayuda al profesor el hecho de proporcionarle actividades (tareas) a utilizar en sus clases ordinarias?***

Al profesor se le proporcionó una guía (ver Anexo 1) en la cual se da una sugerencia para resolver el problema, pero no necesariamente tenía que ser utilizada. Además, de no influir en las clases que el impartió, lo único en lo que se intervino fue en dar las actividades con base en plan de estudios de la materia impartida.

Los profesores pueden construir su propio repertorio de problemas, analizando la complejidad y los elementos del problema (cantidades conocidas y desconocidas) y relaciones que involucran las condiciones del mismo. Por ejemplo, los problemas de la actividad ida y vuelta 1 y 2, los lectores pueden dejarse llevar por el enunciado de los problemas (que en este caso son parecidos pero no iguales), e incluso al tener la solución de uno de ellos se infiere que será la solución del otro; sin embargo, las condiciones de los problemas son distintas ya que en el problema de ida y vuelta 1, existe una relación binaria entre las magnitudes homogéneas y en el problema de ida y vuelta 2, se tiene una comparación entre las magnitudes homogéneas.

Se debe resaltar la importancia de que el alumno se plantee preguntas, formule conjeturas, busque argumentos que le permitan explicar la validez de sus conjeturas y comunique sus formas de razonamiento y resultados. Dado que a partir de ellos el profesor se dará cuenta de dónde se encuentran las dificultades al resolver los problemas y éstas a su vez relacionadas con la estructura del problema, quien dará a conocer en qué tipo de problemas o qué tipo de relaciones entre las magnitudes homogéneas se encuentran las dificultades al resolver los problemas verbales-algebraicos.

El perfil de egreso de los estudiantes resalta que los alumnos tienen que argumentar problemas o enunciados verbales con procesos algebraicos, en este caso sistemas de ecuaciones lineales. Sin embargo, el profesor no aporta el apoyo que los alumnos requieren para la solución de este tipo de problemas, ya que se limita a dar una clase tradicional donde el alumno no tiene gran participación.

5.4. Reflexiones finales: investigaciones futuras

El profesor que aprendió, a través de darse cuenta de la inesperada contribución de un estudiante, que es importante definir con precisión un término matemático, ha establecido una meta que puede aprovecharse para la promoción de su abstracción de la función de la asimilación de una expresión (Tzur, 2010, p. 56).

Tzur (2010) argumenta que uno de los objetivos fundamentales para el aprendizaje del profesor en la práctica, es el progreso de la manera intuitiva formal de pensar acerca de la enseñanza. Por ejemplo, cuando los profesores llegan a la conclusión de que hay diferentes maneras de resolver un problema no transforman su postura epistemológica hacia el saber de las matemáticas, por lo que es fundamental la promoción de cambios en las prácticas docentes. Un profesor en esencia aprende a través de darse cuenta de forma imprevista en la que otros (uno de los estudiantes o compañeros) reaccionan a los planes que él ejecuta. Estas reacciones pueden ser indicadores de reflexión del profesor sobre las relaciones matemáticas-efecto actividad.

Por otro lado, de acuerdo con Schön (1998, p. 50) tanto la gente común como los profesionales, a menudo reflexionan sobre lo que hacen, algunas veces incluso mientras lo están haciendo. Estimulados por la sorpresa, vuelve el pensamiento a la acción y a la complicidad que está implícita en la acción.

Como resultado de la reflexión, se puede tener una mejor comprensión de la forma de actuar en el salón de clase y poder pensar en algunos cambios para que las acciones en el aula den mejores resultados. Luego, se necesita hacer una aplicación de estas nuevas ideas para ver cómo resultan en la práctica. Maciel (2003, p. 98) afirma que si desarrollamos el hábito de reflexionar sobre nuestras experiencias, pronto nos daremos cuenta de que siempre estamos aprendiendo algo nuevo. Habremos comenzado un proceso de aprendizaje continuo con base en nuestras propias experiencias.

Dado que en esta investigación no hubo intervención en las clases del profesor participante, resulta interesante investigar qué sucede en la reflexión-en-la-acción de la práctica del profesor, a través de un análisis de su práctica como un esfuerzo deliberado de prepararse para casos futuros, pero también para que pueda reflexionar sobre la práctica mientras está en medio de ella.

REFERENCIAS

Bosch, M. & Gascón, J. (2009). Aportaciones de la Teoría Antropológica de lo Didáctico a la formación del profesorado de matemáticas de secundaria. En M.J. González, M.T. González y J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII* (pp. 89-113). Santander: SEIEM.

Brousseau G. (1999). Educación y didáctica de las matemáticas. *Educación Matemática*, México.

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 19*(2), 221-266.

Chevallard, Y., Bosch, M. & Gascón, J. (2009). *Estudiar Matemáticas. El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje.* México: Lukambanda Editorial, S.A. de C.V.

Even, R. & Schwarz, B. (2003). Implications of competing interpretations of practice for research and theory in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics, 54,* 283-313.

Guzmán, J., Bednarz, N. & Hitt, F. (2003). A theoretical model of analysis of rate problems in algebra. En N. Pateman, B. Dougherty & J. Zilliox (Eds.), *Proceedings of the 27th Annual Conference of the International Group for the psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 9-15). Hawai'i, USA.

Jaworski, B. (2003). Research practice into/influencing mathematics teaching and learning development: towards a theoretical framework based on co-learning partnerships. *Educational Studies in Mathematics 54,* 249-282.

Kieran, C. & Filloy, E. (1989). El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica. *Enseñanza de las Ciencias,* 7(3), 229-240.

Lehmann, C. (2009). *Álgebra.* México, D.F.: Limusa.

Maciel, O. C. (2003). La investigación-acción como estrategia de aprendizaje en la formación inicial del profesorado. *Revista Iberoamericana de Educación, 33,* 91-109.

Manghi, D. (2010). Recursos semióticos del profesor de matemática: funciones complementarias del habla y los gestos para la alfabetización científica escolar. *Estudios Pedagógicos XXXVI, 2,* 99-115.

Martínez, V. & Pérez, O. (2004). El discurso educativo: un nuevo modelo pedagógico. *Revista Científica Electrónica de Psicología, 2,* 184-205.

Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of algebra. En N. Bednarz, C. Kieran & L. Lee (Eds.), *Approaches to Algebra. Perspectives for Research and Teaching* (pp. 65-86). London: Kluwer Academic Publisher.

Polya. G. (1965). *Cómo plantear y resolver problemas*. Editorial Trillas: México.

Ramírez, V. M. (2008). Procesos de argumentación y de comunicación utilizados por profesores de matemáticas de secundaria en resolución de problemas verbales. Tesis no publicada. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México, D.F.

Rees, P. & Sparks, F. (2007). *Algebra.* México, D.F.: Reverté Ediciones.

Robert, A. & Rogalski, J. (2005). A cross-analysis of the mathematics teacher's activity. An example in a French 10th-grade class. *Educational Studies in Mathematics, 59,* 269-298.

Sherman, R. & Webb, R. (1988). Qualitative research in education: A focus. En R. R. Sherman & R. B. Webb (Eds.), *Qualitative research in education: focus and methods* (pp. 2-22.). New York: The Falmer Press.

Sherin, G. M. (2002). A balancing act: developing a discourse community in a mathematics classroom. *Journal of Mathematics Teacher Education, 5,* 205-233.

Schön, A. D. (1998). The reflective practitioner. How professionals think in action. Basic Books, Inc., Publishers: New York.

Shulman, L. S. (1986). Paradigms and research programs in the study of teaching. In M.C. Wittrock (Ed.), *Handbook of research on teaching (pp.* 9-91*)*. New York: MacMillan.

Tzur, R. (2010). How and what might teachers learn through teaching mathematics: contributions to closing an unspoken gap. *Learning Through Teaching Mathematics,* Mathematics Teacher Education, 5, 49-67.

Yackel, E. & Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27, 458-477.

ANEXOS

ACTIVIDADES IMPLEMENTADAS

ANEXO 1

Guía del profesor. Sistemas de ecuaciones lineales

El propósito de esta actividad es promover en los estudiantes la comprensión de los métodos algebraicos de sustitución, reducción e igualación, usados para resolver sistemas de ecuaciones lineales; así como dar elementos teóricos necesarios para que ellos lleven a cabo el proceso de traducción de problemas verbales a notación algebraica.

Parte I (con papel y lápiz): Métodos de Igualación, Sustitución y Reducción

1. He aquí el método de IGUALACIÓN para resolver un sistema de ecuaciones lineales:

MÉTODO DE IGUALACIÓN	
El Método de Igualación consiste en:	$\begin{cases} x + 3y = 5 \\ 7x + 6y = 20 \end{cases}$
1. Despejar la misma incógnita en cada una de las ecuaciones y, de este modo, construir dos expresiones; las cuales tienen la misma incógnita;	$y = \frac{5-x}{3}$ $y = \frac{20-7x}{6}$
2. Proponer que las dos expresiones obtenidas en el paso 1 sean iguales entre ellas, y así construir una ecuación con una incógnita;	$\frac{5-x}{3} = \frac{20-7x}{6}$
3. Resolver la ecuación que resulta;	$\frac{5-x}{3} = \frac{20-7x}{6}$ $2(5-x) = (20-7x)$ $10-2x = 20-7x$ $7x-2x = 20-10$ $5x = 10$ $x = 2$
4. Sustituir el valor obtenido en una de las ecuaciones del sistema, con objeto de calcular el valor de la otra incógnita de la pareja solución.	$y = \frac{5-x}{3} = \frac{5-2}{3} = 1$ La pareja solución es $(x, y) = (2, 1)$ ¡Verifique esto!

Pregunta: ¿por qué piensas que este método es llamado Método de Igualación? En otras palabras, ¿en qué sentido se lleva a cabo la igualación en este método?

Respuesta:
Se despeja la incógnita y (o bien, se puede despejar x) en las dos ecuaciones de arriba (etapa 1) para producir dos ecuaciones distintas en términos de x. Después se comparan estas dos expresiones en x por medio de una ecuación. Establecer una ecuación significa entonces hacer una comparación entre las dos expresiones. Se busca en seguida un valor de x que satisfaga las dos expresiones, si lo hay. Se encuentra, de esta forma, una pareja (x, y) que satisface las dos ecuaciones (pareja solución).

2. He aquí el método de SUSTITUCIÓN para resolver un sistema de ecuaciones lineales:

MÉTODO DE SUSTITUCIÓN	
El Método de Sustitución consiste en:	$\begin{cases} 2x + 3y = 25 \\ 5x + y = 30 \end{cases}$
1. Despejar, si es necesario, una de las incógnitas en una de las ecuaciones;	$y = 30 - 5x$
2. Sustituir la expresión obtenida, en el paso 1, en la incógnita apropiada de la otra ecuación y, de este modo, construir una ecuación con una variable;	$2x + 3(30 - 5x) = 25$
3. Resolver la ecuación obtenida en el paso 2;	$2x + 90 - 15x = 25$ $-13x = 25 - 90$ $-13x = -65$ $x = \frac{65}{13}$
4. Sustituir el valor obtenido en una de las ecuaciones del sistema, con objeto de calcular el valor de la otra incógnita de la pareja solución.	$y = 30 - 5\left(\frac{65}{13}\right) = \frac{65}{13}$ La pareja solución es $(x, y) = (\frac{65}{13}, \frac{65}{13})$ ¡Verifique esto!

Pregunta: ¿por qué piensas que este método es llamado Método de Sustitución?

Respuesta: En la etapa anterior, se despeja la incógnita y (o bien, se puede despejar x) en una de las dos ecuaciones para obtener una expresión de y en función de x. Se sustituye en seguida esta expresión de y en la otra ecuación; de hecho, se reemplaza la incógnita y en esta ecuación por la expresión obtenida al despejar la variable en cuestión. Se elimina de esta forma toda referencia explícita de y en la segunda ecuación.

3. He aquí el método de REDUCCIÓN para resolver un sistema de ecuaciones lineales:

MÉTODO DE REDUCCIÓN	
El Método de Reducción consiste en:	$\begin{cases} 3x + 5y = 3 \\ 2x + 3y = 1 \end{cases}$
1. Se multiplican las ecuaciones por números apropiados para que los coeficientes de alguna de las incógnitas sean iguales, pero con signo contrario;	$(3x + 5y)(-2) = 3(-2)$ $-6x - 10y = -6$ $(2x + 3y)(3) = 1(3)$ $6x + 9y = 3$
2. Se suman las ecuaciones del nuevo sistema equivalente;	$\begin{cases} -6x - 10y = -6 \\ \underline{\;6x + 9y = 3\;} \\ -y = -3 \end{cases}$
3. Resolver la ecuación de una incógnita que resulta;	$y = 3$

4. Sustituir el valor obtenido en una de las ecuaciones del sistema, con objeto de calcular el valor de la otra incógnita de la pareja solución.	$2x + 3(3) = 1$ $2x + 9 = 1$ $2x = 1 - 9 = -9$ $x = -\frac{8}{2} = -4$ La pareja solución es $(x, y) = (-4,3)$ ¡Verifique esto!

Pregunta: ¿por qué piensas que este método es llamado Método de Reducción?

Respuesta:
Hay que multiplicar una o ambas ecuaciones por algún(os) número(s) de forma que obtengamos un sistema equivalente al inicial en que los coeficientes de la x o de la y sean iguales, pero con signo contrario. A continuación, se suman las ecuaciones del sistema para obtener una sola ecuación de primer grado con una incógnita. Se resuelve la ecuación: primero se obtiene el valor de una incógnita; con este valor encontrado se procede como en los métodos anteriores para hallar el valor de la otra incógnita.

4. ¿En qué forma estos métodos (los métodos de Igualación, Sustitución y Reducción) te permiten reducir el sistema dado en otro que ya sabes cómo abordarlo?

Respuesta:
Los métodos permiten, esencialmente, eliminar las referencias a una de las dos incógnitas. De esta forma, se convierte el sistema de ecuaciones en una ecuación con sólo una incógnita, que ya se sabe cómo resolverlo.

Discusión en el salón de clases de la Parte I: métodos de solución y preguntas

Parte II: Ejercicios

Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones lineales por el método de tu preferencia (Igualación, Sustitución o Reducción):

$$\begin{cases} 2p - 11q = 67 \\ 2q + 5p = 20 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x - y = 7 \\ 2x + 3y = 12 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3r + 7s = 2 \\ 7r + 8s = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{2y - 6}{5} = x \\ y - x = 9 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = 4x + 2 \\ 10x + 2y = 13 \end{cases}$$

Nota: el profesor puede proponer otros sistemas de ecuaciones, si lo cree conveniente.

Discusión en el salón de clases de la Parte II

Parte III: Uso de los Métodos (Igualación, Sustitución y Reducción) en la resolución de problemas algebraicos verbales

He aquí algunos problemas verbales que debes resolver usando cualquiera de los métodos precedentes:

a) *Rosa compró cinco cuadernos y cuatro plumones y gastó en total \$63 pesos. Si cada cuaderno le costó el doble que cada plumón, ¿cuánto le costó cada cuaderno y cada plumón?*

Determina el sistema de ecuaciones que interviene en el problema y resuélvelo.

[Sugerencia para el profesor]

¿De qué manera asignarías las incógnitas del problema?

Por ejemplo, x representa el costo de cada cuaderno e y el costo de cada plumón. A partir de esta asignación de variables, determina las ecuaciones que forman el sistema.

¿Qué representa la ecuación $5x + 4y = 63$?

$5x$ representa la cantidad total pagada por los cinco cuadernos comprados y $4y$ representa la cantidad total pagada por los cuatro plumones, por lo que la suma de estos, representa el gasto total de Rosa.

¿Obtienes alguna otra ecuación del problema?

Sabemos que cada cuaderno le costó el doble que cada plumón, por lo que tenemos que $x = 2y$.

b) *Si el numerador de una fracción dada se aumenta en 1, la nueva fracción es $\frac{1}{2}$; si el denominador se disminuye en 1, la nueva fracción es $\frac{1}{3}$. ¿Cuál es esta fracción?*

Determina el sistema de ecuaciones que interviene en el problema y resuélvelo.

[Sugerencia para el profesor]

Sea $\frac{a}{b}$ la fracción que buscamos; sabemos que $\frac{a+1}{b} = \frac{1}{2}$ y $\frac{a}{b-1} = \frac{1}{3}$

¿Cómo podemos obtener el sistema de ecuaciones que modela el problema?

A partir de las ecuaciones precedentes, efectúa las operaciones pertinentes de modo que obtengas el sistema de ecuaciones que modela el problema.

$$\begin{cases} 2a - b = -2 \\ 3a - b = -1 \end{cases}$$

c) Dos aeropuertos, A y B, están a 400 *km uno de otro y B está situado al este de A. Un avión voló en* 45 *min. de A a B y luego regresó a A en* 60 *min. Si durante todo el viaje estuvo soplando viento del oeste a velocidad constante, determina la velocidad del avión y la velocidad del viento.*
Determina el sistema de ecuaciones que interviene en el problema y resuélvelo.

[Sugerencia para el profesor]
Sea *v* la velocidad del avión en el viento y *u* es la velocidad del viento.
¿De qué manera influye, en la trayectoria del avión, que el viento soplaba al oeste?
Como el viento soplaba al oeste tenemos que:

$$v + u = \textit{velocidad del avión de } A \textit{ a } B$$
$$v - u = \textit{velocidad del avión durante el regreso}$$

¿Cuál es la fórmula de la velocidad de movimiento rectilíneo uniforme?
Sabemos que distancia (*d*) = velocidad (*v*) * tiempo (*t*), entonces despejamos la velocidad y tenemos $v = \frac{d}{t}$.

$$\frac{400}{\frac{3}{4}} = v + u \quad \frac{3}{4} \textit{ es tiempo en horas empleado de } A \textit{ a } B$$
$$\frac{400}{1} = v - u \quad 1 \textit{ es tiempo en horas empleado de } B \textit{ a } A$$

De las cuales llegamos al siguiente sistema de ecuaciones: $\begin{cases} 3v + 3u = 1600 \\ v - u = 400 \end{cases}$

***d)** Una caja registradora contiene* \$50 *pesos en monedas de cinco, diez y veinticinco centavos. En total son* 802 *monedas, siendo* 10 *veces mayor el número de las de cinco centavos que el de las de diez centavos. Encuentra cuántas monedas hay de cada valor.*

Determina el sistema de ecuaciones que interviene en el problema y resuélvelo.

[Sugerencia para el profesor]
Sea v el número de monedas de 25 centavos, d el número de monedas de 10 centavos y c es el número de monedas de 5 centavos.

¿Cómo podemos establecer el sistema de ecuaciones del problema con las incógnitas v, d y c?

$$\begin{cases} 25v + 10d + 5c = 5\,000 \ (1) \\ v + d + c = 802 \ (2) \\ c = 10d \ (3) \end{cases}$$

(1) puesto que \$50 = 5 000 centavos
(2) que es el total de monedas
(3) ya que hay 10 veces más monedas de cinco centavos que de diez centavos

¿En qué nos puede ayudar la ecuación $c = 10d$?
Si se sustituye $c = 10d$ en las primeras dos ecuaciones, obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones con dos incógnitas:

$$\begin{cases} 25v + 60d = 5\,000 \\ v + 11d = 802 \end{cases}$$

e) Un propietario recibió \$12 000 pesos por pago de la renta de dos oficinas en el año de 1984. La renta mensual de una era \$100 pesos mayor que la de la otra. ¿Cuál fue la renta mensual que recibió de cada una si la más cara estuvo desalquilada dos meses?

Determina el sistema de ecuaciones que interviene en el problema y resuélvelo.

[Sugerencia para el profesor]
Tomar a m como la renta mensual de la oficina más cara y p como la renta mensual de la otra. Las ecuaciones quedarían de la siguiente forma (donde 12 y 10 son los meses en que estuvo rentada la oficina)

$$\begin{cases} m = 100 + p \\ 10m + 12p = 12\,000 \end{cases}$$

f) Un número de dos cifras es igual a 8 *veces la suma de sus dígitos; si los dígitos se invierten, el número resultante es* 45 *unidades menor que el número original. Halla el número original.*
Determina el sistema de ecuaciones que interviene en el problema y resuélvelo.

[Sugerencia para el profesor]
Sea d el número de las decenas y u el número de las unidades, entonces tenemos:

$$\begin{cases} 10d + u = 8(d + u) \\ 10u + d = (10d + u) - 45 \end{cases}$$

Efectúa las operaciones pertinentes de modo que obtengas el sistema de ecuaciones que modela el problema:

$$\begin{cases} 2d - 7u = 0 \\ -9d + 9u = -45 \end{cases}$$

g) En México, se necesitan 4 vagones del Metro y 7 autobuses para poder transportar a 678 personas. Si colocamos 21 personas de más en un vagón del Metro que en un autobús, encuentra el número de personas que podemos acomodar en un autobús y en un vagón del Metro.
Determina el sistema de ecuaciones que interviene en el problema y resuélvelo.

[Sugerencia para el profesor]
Sea k el número de personas que se pueden acomodar en un vagón del Metro y g el número de personas que se pueden acomodar en un autobús, entonces:

$$\begin{cases} 4k + 7g = 678 \\ k - g = 21 \end{cases}$$

h) *Un ciclista viajó en línea recta de la ciudad A a la ciudad B a una velocidad promedio de* $24\ km/h$. *Al llegar a la ciudad B, de inmediato se volvió y viajó a la ciudad A, a una velocidad de* $18\ km/h$. *Si todo el viaje (ida y regreso) tomó 7 horas, ¿cuánto duró el viaje en cada dirección?*
Determina el sistema de ecuaciones que interviene en el problema y resuélvelo.

[Sugerencia para el profesor]
t_1 representa el viaje de ida y t_2 el viaje de vuelta y con esta suposición se establece el siguiente sistema de ecuaciones $\begin{cases} t_1 + t_2 = 7 \\ 24t_1 = 18t_2 \end{cases}$

i) *Un ciclista viajó en línea recta de la ciudad A a la ciudad B a una velocidad promedio de* $24\ km/h$. *Al llegar a la ciudad B, de inmediato se volvió y viajó a la ciudad A, a una velocidad de* $18\ km/h$. *Si el viaje de regreso fue de una hora más que el de ida, ¿cuánto duró el viaje en cada dirección?*

Determina el sistema de ecuaciones que interviene en el problema y resuélvelo.

[Sugerencia para el profesor]
t_1 representa el viaje de ida y t_2 representa el viaje de vuelta y con esta suposición se establece el siguiente sistema de ecuaciones $\begin{cases} t_1 = t_2 - 1 \\ 24t_1 = 18t_2 \end{cases}$

j) *En ocasión de un día de asueto, un estudiante aprovechó para ir de visita con sus padres, yendo y viniendo por dos caminos diferentes. El viaje de regreso fue 4 kilómetros más corto que la mitad del viaje de ida. El recorrido total, ida y regreso, fue de 68 kilómetros. Determina la distancia recorrida en cada tramo.*

Determina el sistema de ecuaciones que interviene en el problema y resuélvelo.

[Sugerencia para el profesor]
Tomamos a $x = viaje\ de\ ida$ y a $y = viaje\ de\ regreso$, y así son obtenidas las siguientes ecuaciones:

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x - 4 \\ x + y = 68 \end{cases}$$

k) En un concierto de música moderna, el precio de los boletos es de $75 *pesos, pero si se compran con anticipación, se hace un descuento de* 10% *al precio del boleto. Si asistieron* 1 500 *personas y el ingreso por concepto de entradas fue de* $105 630 *pesos, ¿cuántas personas compraron el boleto a precio normal?*

Determina el sistema de ecuaciones que interviene en el problema y resuélvelo.

[Sugerencia para el profesor]
Si x representa el número de personas que compraron el boleto de entrada a precio normal e y representa número de personas que compraron el boleto de entrada con anticipación, entonces con esta suposición se establece el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x + y = 1\,500 \\ 75x + 67.5y = 105\,630 \end{cases}$$

l) Dos hermanos compraron, a partes iguales un receptor de televisión con un costo de $2 200 *pesos. El hermano mayor invirtió en esta operación la mitad de sus ahorros y el hermano menor las dos terceras partes de los suyos. Después de haber efectuado la compra todavía reunían entre los dos* $1 600 *pesos de ahorros. Determina la cantidad ahorrada por cada uno, previa a la compra.*

Determina el sistema de ecuaciones que interviene en el problema y resuélvelo.

[Sugerencia para el profesor]
Tenemos que x representa la cantidad del hermano mayor y y representa la cantidad del hermano menor, y con esta suposición es obtenido el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{2}{3}y = 2\,200 \\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y = 1600 \end{cases}$$

Discusión en el salón de clases de la Parte III

Sugerencias de preguntas para la discusión de la Parte III

¿Cuáles son los elementos del problema algebraico verbal que ayudan a que este se modele mediante un sistema de ecuaciones lineales?

¿Consideras importante verificar las respuestas que obtuviste? ¿Por qué?

¿Tiene sentido la solución que obtuviste en cada problema?

1. ¿Cuál de los métodos (IGUALACIÓN, SUSTITUCIÓN y REDUCCIÓN) prefieres y por qué?

2. ¿Qué tienen en común esos tres métodos? (No re-escribas sólo los pasos de los tres métodos).

El funcionamiento de los métodos obedece a una misma lógica; estos métodos tienen un objetivo común: reducir un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas a una ecuación con una sola incógnita, que ya se puede resolver fácilmente. Se determina así el valor de una de las incógnitas. El valor de la otra incógnita puede en seguida ser determinado haciendo una sustitución en alguna de las dos ecuaciones equivalentes.

ANEXO 2

Actividad para el alumno

Nombre: ____

Fecha: ____

Actividad: Sistemas de ecuaciones lineales

Parte I (con papel y lápiz): Métodos de Igualación, Sustitución y Reducción

5. He aquí el método de IGUALACIÓN para resolver un sistema de ecuaciones lineales:

MÉTODO DE IGUALACIÓN	
El Método de Igualación consiste en:	$\begin{cases} x + 3y = 5 \\ 7x + 6y = 20 \end{cases}$
1. Despejar la misma incógnita en cada una de las ecuaciones y, de este modo, construir dos expresiones; las cuales tienen la misma incógnita;	$y = \frac{5-x}{3}$ $y = \frac{20-7x}{6}$
2. Proponer que las dos expresiones obtenidas en el paso 1 sean iguales entre ellas, y así construir una ecuación con una incógnita;	$\frac{5-x}{3} = \frac{20-7x}{6}$
3. Resolver la ecuación que resulta;	$\frac{5-x}{3} = \frac{20-7x}{6}$ $2(5-x) = (20-7x)$ $10-2x = 20-7x$ $7x-2x = 20-10$ $5x = 10$ $x = 2$
4. Sustituir el valor obtenido en una de las ecuaciones del sistema, con objeto de calcular el valor de la otra incógnita de la pareja solución.	$y = \frac{5-x}{3} = \frac{5-2}{3} = 1$ La pareja solución es $(x, y) = (2, 1)$ ¡Verifique esto!

Pregunta: ¿por qué piensas que este método es llamado Método de Igualación? En otras palabras, ¿en qué sentido se lleva a cabo la igualación en este método?

Respuesta:

6. He aquí el método de SUSTITUCIÓN para resolver un sistema de ecuaciones lineales:

MÉTODO DE SUSTITUCIÓN	
El Método de Sustitución consiste en:	$\begin{cases} 2x + 3y = 25 \\ 5x + y = 30 \end{cases}$
1. Despejar, si es necesario, una de las incógnitas en una de las ecuaciones;	$y = 30 - 5x$
2. Sustituir la expresión obtenida, en el paso 1, en la incógnita apropiada de la otra ecuación y, de este modo, construir una ecuación con una variable;	$2x + 3(30 - 5x) = 25$
3. Resolver la ecuación obtenida en el paso 2;	$2x + 90 - 15x = 25$ $-13x = 25 - 90$ $-13x = -65$ $x = \frac{65}{13}$
4. Sustituir el valor obtenido en una de las ecuaciones del sistema, con objeto de calcular el valor de la otra incógnita de la pareja solución.	$y = 30 - 5\left(\frac{65}{13}\right) = \frac{65}{13}$ La pareja solución es $(x, y) = (\frac{65}{13}, \frac{65}{13})$ ¡Verifique esto!

Pregunta: ¿por qué piensas que este método es llamado Método de Sustitución?

Respuesta:

7. He aquí el método de REDUCCIÓN para resolver un sistema de ecuaciones lineales:

MÉTODO DE REDUCCIÓN	
El Método de Reducción consiste en:	$\begin{cases} 3x + 5y = 3 \\ 2x + 3y = 1 \end{cases}$
1. Se multiplican las ecuaciones por números apropiados para que los coeficientes de alguna de las incógnitas sean iguales, pero con signo contrario;	$(3x + 5y)(-2) = 3(-2)$ $-6x - 10y = -6$ $(2x + 3y)(3) = 1(3)$ $6x + 9y = 3$
2. Se suman las ecuaciones del nuevo sistema equivalente;	$\left\{ \begin{array}{r} -6x - 10y = -6 \\ \underline{6x + 9y = 3} \\ -y = -3 \end{array} \right.$
3. Resolver la ecuación de una incógnita que resulta;	$y = 3$
4. Sustituir el valor obtenido en una de las ecuaciones del sistema, con objeto de calcular el valor de la otra incógnita de la pareja solución.	$2x + 3(3) = 1$ $2x + 9 = 1$ $2x = 1 - 9 = -9$ $x = -\frac{8}{2} = -4$ La pareja solución es $(x, y) = (-4,3)$ ¡Verifique esto!

Pregunta: ¿por qué piensas que este método es llamado Método de Reducción?

Respuesta:

8. ¿En qué forma estos métodos (los métodos de Igualación, Sustitución y Reducción) te permiten reducir el sistema dado en otro que ya sabes cómo abordarlo?

Respuesta:

Discusión en el salón de clases de la Parte I: métodos de solución y preguntas

Parte II: Ejercicios

Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones lineales por el método de tu preferencia (Igualación, Sustitución o Reducción):

$$\begin{cases} 2p - 11q = 67 \\ 2q + 5p = 20 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x - y = 7 \\ 2x + 3y = 12 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3r + 7s = 2 \\ 7r + 8s = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{2y - 6}{5} = x \\ y - x = 9 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = 4x + 2 \\ 10x + 2y = 13 \end{cases}$$

Discusión en el salón de clases de la Parte II

Parte III: Uso de los Métodos (Igualación, Sustitución y Reducción) en la resolución de problemas algebraicos verbales

He aquí algunos problemas verbales que debes resolver usando cualquiera de los métodos precedentes:

a) *Rosa compró cinco cuadernos y cuatro plumones y gastó en total* \$63 *pesos. Si cada cuaderno le costó el doble que cada plumón, ¿cuánto le costó cada cuaderno y cada plumón?*

Determina el sistema de ecuaciones que interviene en el problema y resuélvelo.

b) *Si el numerador de una fracción dada se aumenta en 1, la nueva fracción es* $\frac{1}{2}$*; si el denominador se disminuye en 1, la nueva fracción es* $\frac{1}{3}$*. ¿Cuál es esta fracción?*

Determina el sistema de ecuaciones que interviene en el problema y resuélvelo.

c) Dos aeropuertos, A y B, están a 400 *km uno de otro y B está situado al este de A. Un avión voló en* 45 *min. de A a B y luego regresó a A en* 60 *min. Si durante todo el viaje estuvo soplando viento del oeste a velocidad constante, determina la velocidad del avión y la velocidad del viento.*
Determina el sistema de ecuaciones que interviene en el problema y resuélvelo.

d) Una caja registradora contiene $50 *pesos en monedas de cinco, diez y veinticinco centavos. En total son* 802 *monedas, siendo* 10 *veces mayor el número de las de cinco centavos que el de las de diez centavos. Encuentra cuántas monedas hay de cada valor.*

Determina el sistema de ecuaciones que interviene en el problema y resuélvelo.

e) Un propietario recibió $12 000 pesos por pago de la renta de dos oficinas en el año de 1984. La renta mensual de una era $100 pesos mayor que la de la otra. ¿Cuál fue la renta mensual que recibió de cada una si la más cara estuvo desalquilada dos meses?

Determina el sistema de ecuaciones que interviene en el problema y resuélvelo.

f) Un número de dos cifras es igual a 8 *veces la suma de sus dígitos; si los dígitos se invierten, el número resultante es* 45 *unidades menor que el número original. Halla el número original.*

Determina el sistema de ecuaciones que interviene en el problema y resuélvelo.

g) En México, se necesitan 4 vagones del Metro y 7 autobuses para poder transportar a 678 personas. Si colocamos 21 personas de más en un vagón del Metro que en un autobús, encuentra el número de personas que podemos acomodar en un autobús y en un vagón del Metro.
Determina el sistema de ecuaciones que interviene en el problema y resuélvelo.

h) *Un ciclista viajó en línea recta de la ciudad A a la ciudad B a una velocidad promedio de* $24\ km/h$. *Al llegar a la ciudad B, de inmediato se volvió y viajó a la ciudad A, a una velocidad de* $18\ km/h$. *Si todo el viaje (ida y regreso) tomó 7 horas, ¿cuánto duró el viaje en cada dirección?*
Determina el sistema de ecuaciones que interviene en el problema y resuélvelo.

i) Un ciclista viajó en línea recta de la ciudad A a la ciudad B a una velocidad promedio de $24\ km/h$*. Al llegar a la ciudad B, de inmediato se volvió y viajó a la ciudad A, a una velocidad de* $18\ km/h$*. Si el viaje de regreso fue de una hora más que el de ida, ¿cuánto duró el viaje en cada dirección?*

Determina el sistema de ecuaciones que interviene en el problema y resuélvelo.

j) En ocasión de un día de asueto, un estudiante aprovechó para ir de visita con sus padres, yendo y viniendo por dos caminos diferentes. El viaje de regreso fue 4 kilómetros más corto que la mitad del viaje de ida. El recorrido total, ida y regreso, fue de 68 kilómetros. Determina la distancia recorrida en cada tramo.

Determina el sistema de ecuaciones que interviene en el problema y resuélvelo.

k) *En un concierto de música moderna, el precio de los boletos es de* $75 *pesos, pero si se compran con anticipación, se hace un descuento de* 10% *al precio del boleto. Si asistieron* 1 500 *personas y el ingreso por concepto de entradas fue de* $105 630 *pesos, ¿cuántas personas compraron el boleto a precio normal?*
Determina el sistema de ecuaciones que interviene en el problema y resuélvelo.

l) *Dos hermanos compraron, a partes iguales un receptor de televisión con un costo de* $2 200 *pesos. El hermano mayor invirtió en esta operación la mitad de sus ahorros y el hermano menor las dos terceras partes de los suyos. Después de haber efectuado la compra todavía reunían entre los dos* $1 600 *pesos de ahorros. Determina la cantidad ahorrada por cada uno, previa a la compra.*

Determina el sistema de ecuaciones que interviene en el problema y resuélvelo.

Discusión en el salón de clases de la Parte III

3. ¿Cuál de los métodos (IGUALACIÓN, SUSTITUCIÓN y REDUCCIÓN) prefieres y por qué?

4. ¿Qué tienen en común esos tres métodos? (No re-escribas sólo los pasos de los tres métodos).

El jurado designado por el Departamento de Matemática Educativa, Unidad Distrito Federal del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, aprueba la tesis:

Análisis del discurso del profesor de bachillerato en la enseñanza de resolución de problemas verbales algebraicos

que presenta **Micaela González Lozano** para su examen final de Maestría en Ciencias en la especialidad de Matemática Educativa el día 22 de julio del año 2011.

Dr. José Guzmán Hernández

Dr. Ernesto Alonso Sánchez Sánchez

Dra. Martha Leticia García Rodríguez