



Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del
Instituto Politécnico Nacional

Unidad Distrito Federal

Departamento de Matemática Educativa

Un Enfoque Dinámico en el Estudio de Curvas en Coordenadas Polares

Tesis que presenta

Arturo Velasco Pelayo

para obtener el Grado de

Maestro en Ciencias
especialidad Matemática Educativa



CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y
DE ESTUDIOS AVANZADOS DEL
INSTITUTO POLITÉCNICO
NACIONAL

COORDINACIÓN GENERAL DE
SERVICIOS BIBLIOGRÁFICOS

Director de la Tesis:

Dr. Hugo Rogelio Mejía Velasco

CINVESTAV
IPN
COORDINACIÓN
GENERAL DE
SERVICIOS
BIBLIOGRÁFICOS

México, Distrito Federal

Septiembre 2011

CL. NO.:
AC. NO.: BCI-17759
REG. NO.: 25/01/2012
PROCESO: Don - 2012

ID 1810 34-1001

Agradezco al Consejo Nacional de Ciencias y Tecnología el apoyo económico brindado para realizar mis estudios de maestría, apoyo sin el cual no hubiera sido posible concluir.

Número de Becario: 192131

Agradezco todo el apoyo que me proporcionó el M. en C. Vicente Carrión Miranda, puesto que había empezado la tesis de maestría con él, y debido a un problema contractual que tuvo, no pudo seguir oficialmente dirigiendo mi indagación. El Dr. Mejía Velasco pasó a ser mi director de tesis para continuar con la investigación, utilizando lo anteriormente realizado con el M. en C. Carrión. Lamentablemente las circunstancias no permitieron que el M. en C. Carrión fuese mi codirector de tesis.

Resumen

El objetivo principal de este trabajo es presentar un acercamiento dinámico de las curvas en coordenadas polares y de sus curvaturas respectivas. Para esto, se realiza una revisión de los libros de texto de Cálculo Diferencial e Integral. Se continúa con una breve explicación de los elementos teóricos sobre las coordenadas polares desde el punto de vista geométrico; en particular, los problemas de las intersecciones de dos curvas en coordenadas polares y la recta tangente a una curva polar. También se clarifica el uso del Cálculo Diferencial en las coordenadas polares, con respecto a las derivadas de curvas polares y del radio vector de la tangente.

Se describe los elementos técnicos necesarios para generar páginas electrónicas con un *software* de geometría dinámica y se especifican los elementos de control creados para estas hojas; dichas hojas fueron creadas para sustentar el presente trabajo y nos permiten estudiar una curva polar y su curvatura. Además, se trata de cómo generalizar las fórmulas de las curvas polares y la forma de mezclar la Geometría Analítica y la Euclidiana para crear el círculo osculador, la recta normal y la tangente a la curva polar.

Finalmente, se dan aplicaciones de las páginas electrónicas elaboradas, como la construcción de algunos lugares geométricos a partir de una curva polar. También puede verse la evolución del círculo osculador al entrar a un lazo de la curva y al acercarse a un punto cúspide o a un punto de inflexión. Para terminar, se trata a la hodógrafa y la forma de usar las fórmulas generalizadas para hacer piezas de mecanismos y máquinas virtuales con ellas.

Abstract

The primary target of this work is to present a dynamic approach of the curves in polar coordinates and their respective curvatures. For this, it is made a revision from text books of Differential and Integral Calculus. It is continued with a brief explanation of theoretical elements about polar coordinates from the geometric point of view; in particular, the problems of the intersections of two curves in polar coordinates and the tangent line to a polar curve. Also, the use of the Differential Calculus is clarified in the polar coordinates, with respect to differentiation of polar curves and vector radius of the tangent.

It is described the technical elements necessary to generate pages electronic with dynamic geometry software and the created elements of control for these pages are specified; these pages were created to sustain the present work and they permit us to study a polar curve and its curvature. In addition, it is showed about how to generalize the formulas of the polar curves and the form to mix the Analytical Geometry and the Euclidian to create the osculating circle, the normal and the tangent line to the polar curve.

Finally, it is given applications for the elaborated electronic pages, like the construction of some geometric places from a polar curve. Also it can see the evolution of the osculating circle incoming a curve loop and approaching a peak point or an inflexion point. At last, it is showed to the hodograph and the how to use the formulas generalize to make pieces of mechanisms and virtual machines with them.

Índice

Introducción.	1
Capítulo 1. Revisión Bibliográfica de Libros de Cálculo	7
1.1 Introducción.	7
1.2 Libros Inadecuados para los Temas de Nuestro Interés.	7
1.3 Libros de Cálculo de una Variable que trabajan las Coordenadas Polares.	8
1.4 Libros de Cálculo de una Variable que estudian la Curvatura.	11
1.5 Libros con un Enfoque Vectorial sobre la Curvatura.	12
Capítulo 2. Coordenadas Polares.	15
2.1 Introducción a las Coordenadas Polares.	15
2.2 Transformaciones entre los Sistemas Cartesiano y Polar.	16
2.3 Trazado de Curvas en Coordenadas Polares.	18
2.4 Ejemplos de Curvas Polares.	19
2.4.1 Líneas Rectas.	19
2.4.2 Círculos.	22
2.4.3 Cónicas.	23
2.5 Intersecciones en Coordenadas Polares.	24
2.6 Recta Tangente a una Curva Polar.	32
2.6.1 La Tangente de una Curva.	32
2.6.2 Las Derivadas en Coordenadas Polares.	34
2.6.3 El Ángulo γ del Radio Vector de la Tangente.	35
Capítulo 3. Generación de Páginas Electrónicas con un <i>Software</i> Dinámico.	39
3.1 Elementos de Control.	39
3.1.1 Deslizadores.	39
3.1.2 Generación de Botones para Movimientos.	40
3.1.3 Función Delimitadora.	41
3.2 Curvas Polares Generalizadas.	43
3.3 La Mezcla de dos Tipos de Geometrías.	51
3.4 Algunos Inconvenientes con el <i>Software</i> .	53
3.5 Curvas Complicadas.	53

Capítulo 4. Aplicaciones de las Páginas Electrónicas.	59
4.1 La Evoluta y la Curvatura.	59
4.2 Puntos de Inflexión.	60
4.3 La Geometría Dinámica al Rescate de las Intersecciones.	63
4.4 Construcciones Geométricas Euclidianas sobre Curvas generadas con Fórmulas.	66
4.5 Obtención de los Puntos de Inflexión por medio de las Curvas Paralelas.	68
4.6 Hodógrafas.	69
4.7. Construcción de piezas para mecanismos.	71
Resultados y Conclusiones.	73
Apéndices	77
A. Longitud de un Arco	77
B. Curvas Polares Estudiadas.	78
C. Curvatura.	83
C.1. Círculo Osculador.	85
C.2. Fórmula de la Curvatura.	86
C.3 Centro de Curvatura y la Evoluta.	90
C.4 Curvatura en Polares.	91
C.5 Aceleración.	93
C.6 Fórmulas Generales.	97
Bibliografía.	99
Libros de Historia.	99
Tesis.	99
Libros de Geometría.	100
Libros de Cálculo.	100
Libros de Teoría de Curvas.	101
Libros de Física.	102
Artículos	102

Introducción

De manera general, al estudiar una curva en coordenadas cartesianas se utilizan la primera y la segunda derivada; después se encuentran los puntos de inflexión, los máximos, los mínimos y se determinan los intervalos en donde dicha curva es cóncava hacia arriba o hacia abajo. Todo lo anterior se efectúa con el objetivo de contar con un estudio, lo más completo posible, del comportamiento de la curva para usar esta información en la construcción de una gráfica.

En la actualidad, con un *software* de geometría dinámica puede trazarse una curva; además, por las características de este *software*, es posible construir una recta tangente a un punto de la gráfica que se mueva sobre la curva sin dejar de ser tangente a dicha curva.

Sin embargo, con utilizar sólo lo básico de un curso de cálculo diferencial se tiene toda la información requerida para trabajar las propiedades de una curva. A pesar de esto, en muy contadas ocasiones los estudiantes calculan la curvatura, y es aquí donde se tiene la oportunidad para empezar un trabajo interesante, desde un punto de vista reflexivo.

Ahora, es conveniente presentar algunas preguntas para poder definir el tema a tratar. La primera pregunta es: ¿qué elementos están asociados a la curvatura?, la respuesta es el **radio de curvatura** y el **círculo osculador**, pero estos conceptos son generalmente tratados en textos de Geometría Diferencial. La segunda pregunta formulada es: ¿qué es un círculo osculador? Para dar una respuesta a esta pregunta se realizó una encuesta oral dirigida a profesores de nivel universitario, y los comentarios encontrados se resumen a continuación.

Los profesores de matemáticas respondieron que conocen el concepto de círculo osculador, pero cuando imparten cursos de cálculo diferencial nunca hablan de él, pues no está en el programa de la materia, y para estudiar una curva son suficientes la primera y la segunda derivada; así como los puntos de inflexión, los máximos y los mínimos. Asimismo, comentaron que calcular el círculo osculador es complejo para las aplicaciones que un estudiante de ingeniería le puede dar y además no lo necesitará en su profesión.

También se preguntó a los profesores de Física e Ingeniería, y se incluyó a maestros especializados en computación. La mayoría de ellos desconocían la existencia del círculo osculador; por ello se les preguntó sobre la curvatura y radio de curvatura, y se encontró que sí conocían estos conceptos.

Con base en lo anterior, nuestro interés es mostrar la importancia del círculo osculador. No es común hablar de un radio de curvatura y que nadie se pregunte sobre el círculo al que corresponde dicho radio. Cabe reflexionar ¿qué puede esperarse de un alumno promedio de licenciatura que ya llevó los cursos de cálculo diferencial e integral, si sus profesores han dado ya las respuestas mencionadas anteriormente?

Finalmente, la última pregunta es: ¿qué información se obtiene de la curvatura, del radio de curvatura y del círculo osculador? La respuesta se presenta en otra parte de este escrito.

Es necesario señalar que la encuesta informal se realizó a profesionales con grado de maestría e incluso doctorado, los cuales están comprometidos con la educación y la investigación. Por lo tanto, de acuerdo con lo encontrado, se tiene una situación en donde se ha perdido el significado del círculo osculador y su utilidad para una parte de la comunidad de profesionales. Sin embargo, ellos conocen el concepto de radio de curvatura. Todo lo anterior, pone de manifiesto la necesidad de trabajar el círculo osculador en las aulas de clase.

Por otra parte, es conveniente elegir el tipo de curvas para analizar con el círculo osculador. Las curvas del tipo polinomial no son las apropiadas por ser sencillas; en cambio, curvas más complicadas pueden despertar el interés de los alumnos y de los profesores, como por ejemplo: la cisoide, la concoide y la cardioide.

Es necesario considerar antes cómo debe analizarse el tema. En general las expresiones algebraicas de estas curvas en coordenadas cartesianas son relativamente complicadas, como el caso de la espiral de Arquímedes; por otra parte, una cardioide no puede representarse en coordenadas cartesianas como una función, lo cual genera problemas dependiendo del tipo de *software* usado.

Utilizar las coordenadas paramétricas puede complicar demasiado el trabajo, pues no existe una regla general para pasar de coordenadas cartesianas a

paramétricas. Sin embargo, las coordenadas polares son un término medio, pues una curva interesante puede escribirse por medio de una función sencilla; por ejemplo: la cisoide $r = \text{Sec}(\theta) - \text{Cos}(\theta)$, la cardioide $r = A + B\text{Cos}(\theta)$ y la espiral de Arquímedes $r = B\theta$

En muchas ocasiones las funciones en coordenadas polares no están explícitamente en los programas oficiales, aunque implícitamente siempre el docente las trabaja con sus alumnos aunque sea de forma superficial. En un curso de cálculo integral se explica un poco más sobre el tema, pues se necesita cambiar de coordenadas cartesianas a polares para integrar de forma más fácil algunas funciones. En los cursos de cálculo de varias variables, cálculo avanzado o cálculo vectorial se utilizan las coordenadas polares en ejercicios para derivadas parciales e integrales dobles, pero se tiene un vacío en cuanto a su tratamiento e importancia.

Lamentablemente, es común recortar los temas a lo imprescindible y elemental; así, las coordenadas polares sólo se usan para simplificar los cálculos. En las materias de matemáticas de ingeniería se emplean hasta el curso de Variable Compleja donde se trabaja más con las coordenadas polares, pero a un nivel básicamente operativo.

A pesar de todo este tratamiento, las coordenadas polares son indispensables a nivel licenciatura para la Mecánica Clásica y el Electromagnetismo, pero creemos que se ha generado un vacío en los cursos sobre el tema, dejando las cosas simplemente a un nivel operacional.

Aparte, muchos de los libros utilizados por los profesores no tratan el tema de las coordenadas polares adecuadamente (aunque tengan una sección acerca de él) y las explicaciones dadas son insuficientes, como si el tema se considerará obvio, o el alumno dominara el tema y sólo requiriere un resumen para tener algunas fórmulas a la mano.

Por lo tanto, en lugar de trabajar un tema ahora son dos: el círculo osculador y las curvas en coordenadas polares; ambos temas están íntimamente ligados. Se tiene ahora el núcleo del presente estudio. Es así como surge esta tesis de Maestría en Ciencias con especialidad en Matemática Educativa, cuyo título es **“Un enfoque dinámico en el estudio de curvas en coordenadas polares”**

En esta propuesta son diseñadas hojas electrónicas para auxiliar la comprensión de las coordenadas polares, la curvatura y el círculo osculador en un *software* de geometría dinámica (*The Geometer's Sketchpad*).

A través del presente trabajo son recuperados temas matemáticos que no se ven explícitamente en los cursos de licenciatura, pero son necesarios para el desarrollo del alumno de ciencias o ingeniería. Además, estos contenidos ayudarían a los estudiantes a contar con los antecedentes para los cursos de mecánica clásica (el movimiento planetario, movimiento de satélites artificiales, mecanismos, etc.), electromagnetismo (radiación electromagnética, antenas, etc.) y óptica (lentes, espejos, telescopios, caústicas, etc.), y favorecer la comprensión de los conceptos estudiados. En otras palabras, no se trata de que el alumno solucione un problema sólo trabajando de manera mecánica (usando una "receta de cocina"), sino que al contar con la información completa y comprenderla, el estudiante pueda resolver de forma natural los problemas planteados.

A continuación se menciona de manera el contenido de cada capítulo de esta investigación.

En el primer capítulo se hace una revisión bibliográfica de libros de Cálculo. El segundo capítulo se explica los elementos teóricos, de una forma breve y concisa sobre las coordenadas polares desde un punto de vista geométrico; se empieza a tratar el problema de las intersecciones de dos curvas en coordenadas polares; también se clarifica el uso del Cálculo Diferencial en las coordenadas polares.

El tercer capítulo versa sobre la generación de las páginas electrónicas con un *software* dinámico, se especifican los elementos de control creados para estas hojas. En este se generalizan las fórmulas de las curvas polares, se explica la forma de mezclar la Geometría Analítica y la Euclidiana para crear el círculo osculador, la recta normal y la tangente a la curva polar. Para terminar el presente capítulo se dan algunas explicaciones sobre algunas curvas complicadas.

Para el cuarto capítulo se ven las posibles aplicaciones de las páginas electrónicas elaboradas, como la construcción de los siguientes lugares geométricos a partir de una curva polar: la evoluta, la pedal, la radial, la isotópica y la paralela. Además, se explica cómo encontrar las intersecciones auxiliándose por medio de la

geometría dinámica; así mismo, se muestra las gráficas para el radio de curvatura y la curvatura en coordenadas cartesianas y polares. También se trata la evolución del círculo osculador al entrar a un lazo de la curva y al acercarse a un punto cúspide o a un punto de inflexión. Para terminar se habla de la hodógrafa y la forma de usar las fórmulas generalizadas para hacer piezas de mecanismos y máquinas virtuales con ellas.

Finalmente se dan las conclusiones y se presenta tres apéndices, el primero trata sobre la obtención de la longitud del arco en coordenadas polares. En el segundo se dan las fórmulas de las curvas polares estudiadas. Mientras que en el tercer apéndice se estudia la curvatura y el círculo osculador; también se tiene una pequeña introducción de la aceleración, cuya componente normal está relacionada con el radio de curvatura.

Capítulo I

Revisión Bibliográfica de Libros de Cálculo

1.1 Introducción.

Uno de los objetivos principales de este trabajo es presentar un acercamiento dinámico de las curvas en coordenadas polares y de sus curvaturas respectivas. Un aspecto importante es la forma de cómo se tratan estos temas en los libros de texto, los cuales fueron escritos para enseñar el Cálculo Diferencial e Integral; donde las curvas en coordenadas polares se analizan con las herramientas propias del cálculo.

A pesar de contar con muchos libros de cálculo para la enseñanza a nivel universitario surge el problema de elegir uno de ellos de acuerdo con sus contenidos y la manera en cómo los explica.

Por otra parte, el material bibliográfico que fue seleccionado tiene capítulos que introducen algunos temas propios del Cálculo Vectorial (o de Cálculo de Varias Variables, o de Cálculo Avanzado); por esta razón se tomó la decisión de incluir algunos libros de Cálculo Vectorial, pues tienen secciones donde ven la curvatura como un concepto importante.

1.2. Libros Inadecuados para los Temas de Nuestro Interés.

A continuación se da una breve lista de libros, los cuales son inadecuados por la forma de cómo tratan a las coordenadas polares y a la curvatura de las curvas; estas obras son Ostrowski (1968), Lang (1976, 1979), Hassler (1979), Marsden (1991), Spivak (1992), Pita (1998) y Apóstol (2001). A pesar de que Spivak (1992) y Apóstol (2001) están considerados como obras clásicas en Cálculo, no son de gran ayuda para los temas antes mencionados.

Sin embargo, hay textos donde se trabaja alguno de los dos temas; como Marsden (1995) y Riddle (1974) quienes hablan de las coordenadas polares, aunque

no mencionan la curvatura; en cambio Kudriávtssev (1983) y Pita (1995) sí estudian la curvatura, pero no las coordenadas polares.

1.3. Libros de Cálculo de una Variable que trabajan las Coordenadas Polares.

Para empezar, es conveniente mostrar la lista de libros seleccionados sobre coordenadas polares: Woods (1972), Fraileigh¹ (1972, 1984), Gillman (1973), Riddle (1974), Taylor (1977), Kline (1977), Swokowski (1979), Granville (1981), Courant (1982), Leithold (1982), Kitchen (1986), Edwards (1986), Larson (1986), Marsden (1995) y Stewart (1998).

Como un caso aparte, en el Piskunov (1977. Tomo I) se describen las coordenadas polares de forma muy sintética, pero no se estudia las intersecciones de las curvas polares, por lo tanto puede utilizarse como un buen resumen del tema.

En la lista anterior de libros se encuentran algunos en donde las coordenadas polares son estudiadas de forma muy superficial, pues sólo se explica lo más básico: a) la definición de coordenadas polares, b) cómo pasar del sistema de coordenadas cartesianas a polares y viceversa, y c) cómo graficar curvas en coordenadas polares.

Los tres contenidos antes mencionados se considerarán como *los subtemas básicos* de ahora en adelante. Los libros con estos subtemas son Woods (1972), Fraileigh (1972, 1984), Gillman (1973), Riddle (1974), Taylor (1977), Kline (1977), Swokowski (1979), Leithold (1982), Edwards (1986), Larson (1986), Marsden (1995) y Stewart (1998). Por otra parte, Granville (1981) y Kitchen (1986) presuponen que el lector sabe lo básico de las coordenadas polares.

En seguida se presentan las obras con ejemplos de las versiones de curvas polares más conocidas por los estudiantes (como las cónicas): Woods (1972) y Courant (1982) cuentan con ejemplos dispersos de curvas polares destacadas en secciones diferentes; en cambio Fraileigh (1972, 1984) tiene toda una sección para

¹ Es importante aclarar que Fraileigh (1984) es una copia de su libro anterior (1972) con una tendencia a simplificar; pues sólo redujo el contenido, resumiendo los temas que antes eran tratados de una forma más completa.

los ejemplos de curvas polares importantes. Otros libros que continúan con esta forma de trabajo son Riddle (1974), Kline (1977), Swokowski (1979), Granville (1981, aunque sólo menciona los ejemplos en un Apéndice), Leithold (1982), Edwards (1986), Larson (1986) y Kitchen (1986, explica bien la cardioide como una epicicloide).

Acerca de la intersección de curvas en coordenadas polares, Fraileigh (1972, 1984) sólo trae un ejemplo ilustrativo acerca de la intersección de dos curvas polares. Gillman (1973) y Stewart (1998) también cuentan con un sólo ejemplo. Riddle (1974) tiene varios ejemplos sencillos. En Edwards (1986) se encuentran ejemplos que requieren de un tratamiento no tan complejo para su resolución. Leithold (1982) y Larson (1986) poseen los mejores ejemplos de los libros ya referidos con antelación, pero no aclaran de una manera adecuada las intersecciones. Únicamente los textos mencionados en este párrafo ven el tema de las intersecciones

Todas las obras ven el área para las coordenadas polares y la longitud de arco de una curva polar excepto en el libro de Stewart (1998), el cual tiene la parte de coordenadas polares en un Apéndice. En contraste, el área limitada por dos curvas polares no se menciona en los libros de Kline (1977), Granville (1981), Courant (1982) y Kitchen (1996).

La literatura en donde se presentan las explicaciones de la derivada en coordenadas polares, la ecuación de la recta tangente a la curva polar y el ángulo desde el radio vector a la tangente a la curva es Woods (1972), Fraileigh (1972, 1984), Gillman (1973), Riddle (1974, quien maneja el último tema en los ejercicios), Kline (1977), Granville (1981, ve las derivadas como lo hace Woods, 1972), Leithold (1982), Marsden (1995) y Larson (1986, sólo tiene el primer tema).

Algunos autores incorporan temas adicionales, los cuales están relacionados con aplicaciones en Física, dichos temas son parte importante del contenido y permiten darle un enfoque específico de acuerdo con la visión particular del autor y sus intereses. Fraileigh (1972, 1984) tiene una sección opcional sobre campos de fuerzas centrales y las leyes de Kepler, en donde los relaciona con la velocidad y la aceleración en coordenadas polares; por otra parte, en el libro de Edwards (1986) se trabaja un poco sobre el movimiento planetario. El tratamiento de Kline (1977) para

estos temas es más profundo, porque explica la fuerza centrípeta, el movimiento de los satélites y los proyectiles, e incluso las ecuaciones paramétricas polares, en un capítulo aparte, usando el ángulo como un parámetro. Granville (1981) ve las longitudes de la subtangente y la subnormal, así como las ecuaciones paramétricas polares; Gillman (1973) también estudia las ecuaciones paramétricas de una curva polar. Finalmente, Stewart (1998) analiza la graficación por medio de *software* para las curvas polares.

En conclusión, las obras de Leithold (1982), Edwards (1986), Larson (1986) y Marsden (1995) explican correctamente las coordenadas polares pero no de una forma completa. En particular sólo Leithold (1982) y Larson (1986) muestran de una manera adecuada la intersección de curvas polares. Los libros de Fraileigh (1972) y Woods (1972) son más extensos que los anteriores.

Por su parte, Kline (1977) estudia de forma más amplia las coordenadas polares; además de las paramétricas y las paramétricas polares; pero sólo le faltó hablar de las intersecciones de dos curvas polares y el área entre éstas, aunque es el mejor y el más completo.

Es necesario leer las obras referidas en los dos párrafos anteriores para tener una visión total del tema. Es lamentable que en ninguno de ellos se ofrezca una explicación correcta y completa respecto de cómo actuar cuando dos curvas polares se intersecan.

Para terminar esta sección se hablará de los libros de apoyo para las coordenadas polares: Bluman (1984), quien cuenta con una serie de ejercicios interesantes sobre el tema; el texto de Bressoud (1991), fue pensado para alumnos de segundo año de cálculo, el cual trata acerca de las leyes de Kepler, las leyes de Newton, la velocidad y la aceleración en coordenadas polares, y Lax (1976) trabaja con las coordenadas polares a partir de variable compleja, para entrar inmediatamente a la mecánica de dos dimensiones.

1.4. Libros de Cálculo de una Variable que estudian la Curvatura.

Para empezar esta sección, se enlista los libros que hablan sobre la curvatura: Woods (1972), Fraileigh (1972, 1984), Gillman (1973), Piskunov (1977, Tomo I), Kline (1977), Swokowski (1979), Granville (1981), Courant (1982), Kudriávstsev (1983, Tomo I), Edwards (1986) y Larson (1986). En todos estos textos se da la definición de la curvatura, del círculo osculador y del radio de curvatura; además, presentan expresiones en forma cartesiana (salvo Gillman, quien las expresa en su forma paramétrica), y parten de la longitud de arco (excepto Piskunov y Larson) para deducir la expresión de la curvatura.

Por el interés particular sobre las coordenadas polares y la curvatura, es importante mencionar el estudio de la curvatura en su forma polar efectuado por Woods (1972), Piskunov (1977, Tomo I), Kline (1977), Granville (1981), Courant (1982) y Kudriávstsev (1983, Tomo I).

Aunque las coordenadas paramétricas no forman parte de esta investigación bibliográfica, también existen coordenadas paramétricas polares, a continuación se da la lista de los textos que estudian la curvatura en su forma paramétrica: Woods (1972), Fraileigh (1972, 1984), Gillman (1973), Piskunov (1977, Tomo I), Kline (1977), Swokowski (1979), Granville (1981) y Kudriávstsev (1983, Tomo I).

En cuanto a la literatura donde se trata explícitamente el centro de curvatura se tienen las siguientes obras: Gillman (1973), Piskunov (1977, Tomo I), Kline (1977), Swokowski (1979), Granville (1981), Courant (1982), Kudriávstsev (1983, Tomo I), Edwards (1986) y Larson (1986).

A continuación, se hablará sobre temas adicionales de la curvatura: a) la evoluta de una curva, b) los vectores tangente y normal, y por último c) los vectores de velocidad y de aceleración. Gillman (1973) ve la parte del círculo de curvatura con los vectores unitarios para indicar la recta tangente y la normal a la curva en un punto dado. Con una intención parecida Courant (1982) asocia la curvatura con las componentes normal y tangencial de la aceleración; continuando con esta secuencia de ideas Swokowski (1979) incluye las leyes de Kepler. Kline (1977) estudia estos subtemas de una forma más profunda; Edwards (1986) trabaja con las órbitas de

planetas y satélites, además da una aplicación opcional para computadora. Kudriávstsev (1983, Tomo I) define la evoluta de una curva y utiliza la asociación de la curvatura con las componentes transversal y radial de la velocidad. En un Apéndice de la obra de Courant (1982, Tomo I) se presenta la evoluta y sus propiedades; Piskunov (1977, Tomo I) también trata los mismos temas que Courant, junto con las envolventes. Granville (1981) ve la construcción mecánica, la importancia de la curvatura en las curvas de ferrocarril y las curvas de transición (lo cual ningún otro libro lo menciona).

Finalmente, la mejor referencia es el Piskunov (1977, Tomo I) de la lista original de libros para estudiar la curvatura, y se requiere completarlo con Fraileigh (1972), Kline (1977), Edwards (1986) y Larson (1986). Sin embargo, el contenido de los textos anteriores es poco e incluso más incompleto comparándolo con él de las obras que hablan de las coordenadas polares.

1.5. Libros con un Enfoque Vectorial sobre la Curvatura.

Algunos de los libros de Cálculo Diferencial e Integral analizan la curvatura con un enfoque vectorial, aunque es más propio para libros de Cálculo Vectorial, porque son de un mayor nivel de abstracción comparados con los dos primeros cursos de cálculo de una variable.

La importancia de estos textos estriba en el tratamiento de los temas adicionales; en particular los vectores tangente, normal y binormal, la velocidad, la aceleración y la evoluta de una curva. La lista de estas obras es breve: Taylor (1977), Courant (1982, Tomo II), Leithold (1982), Kitchen (1986), Pita (1995) y Stewart (1998). A continuación se da un resumen de subtemas adicionales encontrados en ellos.

Taylor (1977) en su capítulo de aplicaciones estudia la curvatura, el radio y el centro de curvatura de forma paramétrica, y pasa a la forma cartesiana, también ve la evoluta de forma escueta.

Courant (1982, Tomo II) en el capítulo de vectores, matrices y transformaciones lineales tiene la sección de nociones vectoriales en el análisis con una subsección de familia de vectores, aplicación a la teoría de las curvas en el espacio y al movimiento

de partículas. En el capítulo de desarrollo y aplicaciones del cálculo en la sección de curvas y superficies, trabaja con una subsección de curvas planas en forma implícita y estudia la curvatura.

En el capítulo de vectores en el plano, Leithold (1982) ve la curvatura, el círculo osculador, el radio de curvatura de forma cartesiana y paramétrica, así como la normal y la tangente de la aceleración.

Kitchen (1986) tiene un capítulo de curvas planas donde está la sección de la curvatura, el círculo osculador, el radio de curvatura en coordenadas cartesianas, continua con la velocidad y aceleración asociadas a la curvatura, los vectores unitarios tangente y normal hasta llegar a ver las fórmulas de Frenet y las evolutas.

El libro de Cálculo Vectorial de Pita (1995) tiene una sección de curvatura en el capítulo sobre curvas en el espacio, donde habla de la curvatura, del centro de curvatura, de la curvatura en paramétricas y de los vectores tangente y normal.

En el capítulo de funciones vectoriales, Stewart (1998) trata el círculo osculador; define la curvatura (incluso en coordenadas paramétricas) y utiliza los vectores normales y binormales.

Como libro de apoyo se usa la obra de Bressoud (1991), donde se ve un poco acerca de la curvatura y el radio de curvatura asociándolos con la velocidad y la aceleración.

Capítulo 2

Coordenadas Polares.

En este capítulo se presenta en forma resumida los contenidos principales sobre las coordenadas polares. En particular, nos interesa aclarar la forma de trabajar con la gráfica de una curva en coordenadas polares, se dan algunos ejemplos sencillos para curvas ya conocidas (como la línea recta, el círculo y la elipse) y se trata las intersecciones de dos curvas polares. Además, se habla sobre la recta tangente a una curva polar, desde un punto de vista geométrico. Finalmente, se da una explicación de las derivadas de curvas polares y del radio vector de la tangente.

2.1 Introducción a las Coordenadas Polares.

Se escoge cualquier punto O en el plano euclidiano como el polo para el sistema de coordenadas polares y cualquier semirrecta emanada desde O como el eje polar, pero por convención se establece este eje con una semirrecta horizontal la cual se extiende a la derecha con una escala escogida (Figura 2.1.a).

Sea P un punto cualquiera del plano, si al girar el eje polar un ángulo θ para hacerlo pasar por dicho punto P (cuando la rotación es en contra del sentido de las manecillas del reloj, θ tiene valores positivos, como se muestra en la Figura 2.1.a). El punto P cae en un número r en la escala del eje rotado, el par ordenado de números (r, θ) constituye las coordenadas polares para el punto P .

En el sistema de coordenadas cartesianas, a cada punto del plano le corresponde un único par ordenado de números (x, y) ; en cambio, las coordenadas polares de un punto P son (r, θ) mientras no sea el polo O , pero también pueden darse de la forma $(r, \theta + 2\pi n)$ o $(-r, \theta + \pi + 2\pi n)$ para un entero n (ver Figura 2.1.b). En otras palabras, hay un número infinito de pares de coordenadas polares para cada punto. Es importante recordar que las coordenadas del polo O son $(0, \theta)$ para cada número real θ . Por otra parte, el uso de una r negativa se justifica en la siguiente sección.

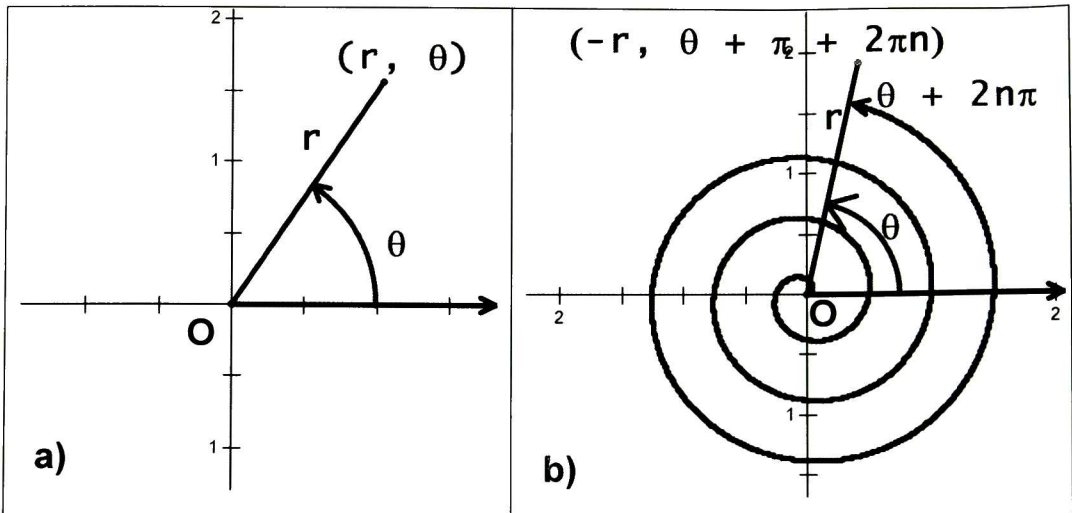


Figura 2.1. Un punto en coordenadas polares.

2.2 Transformaciones entre los Sistemas Cartesiano y Polar.

Para empezar, se considerará simultáneamente un sistema coordenado cartesiano y uno polar para el plano. Por convención se toma como polo al origen del sistema cartesiano $(0,0)$ con el eje polar sobre la parte positiva del eje x (siempre se usará esta convención para un sistema polar). Las coordenadas cartesianas x y y se expresan en términos de las coordenadas polares r y θ por medio de las ecuaciones de transformación $x = r\cos(\theta)$ y $y = r\sin(\theta)$ (ver Figura 2.2), a partir de estas ecuaciones se llega a las siguientes relaciones

$$r^2 = x^2 + y^2$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right),$$

donde $x \neq 0$, $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$. Cuando $x=0$, no puede usarse $\tan^{-1}(y/x)$ pero $\theta = \pi/2$ si $y > 0$, y para $y < 0$ se tiene $\theta = -\pi/2$ o $\theta = 3\pi/2$. Con las ecuaciones de transformación se cambia de un sistema de coordenadas a otro. También es conveniente reescribirlas como

$$\text{Sen}(\theta) = \frac{y}{r} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\text{Cos}(\theta) = \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Al reemplazar el ángulo θ por $\theta + 2\pi n$ se regresa a las ecuaciones de transformación originales, pues las funciones seno y coseno son periódicas

$$x = r\text{Cos}(\theta + 2\pi n) = r\text{Cos}(\theta)$$

$$y = r\text{Sen}(\theta + 2\pi n) = r\text{Sen}(\theta).$$

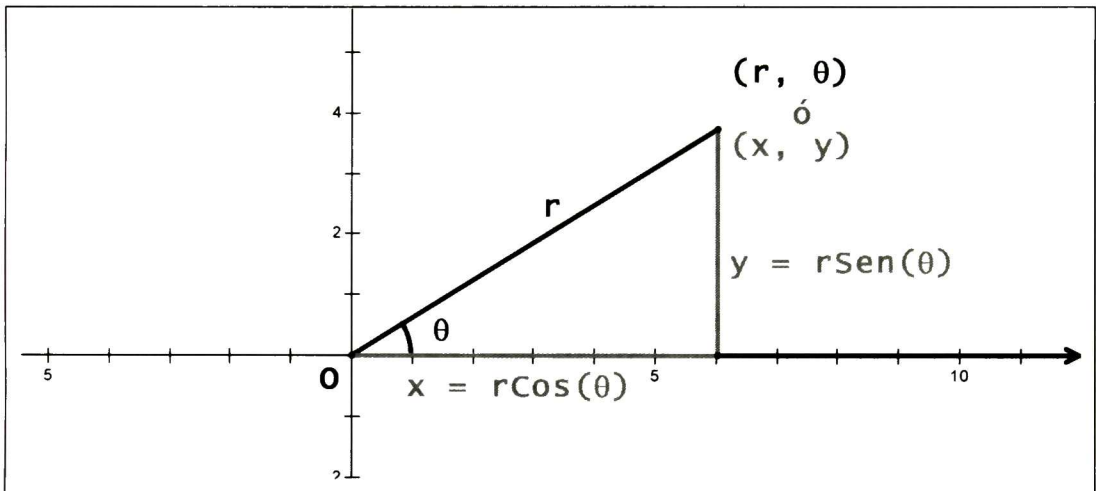


Figura 2.2. Transformación del sistema cartesiano al polar.

Es posible hablar de una r negativa, cuando se sustituye el ángulo θ por un ángulo $\theta + \pi + 2\pi n$ en las ecuaciones de transformación se obtiene

$$x = r\text{Cos}(\theta + \pi + 2\pi n) = r\text{Cos}(\theta + \pi) = -r\text{Cos}(\theta)$$

$$y = r\text{Sen}(\theta + \pi + 2\pi n) = r\text{Sen}(\theta + \pi) = -r\text{Sen}(\theta),$$

el punto original (r, θ) está rotado π radianes y para recuperar el punto original es necesario cambiar el ángulo θ por $\theta + \pi + 2\pi n$ y r por $-r$ regresando a las ecuaciones de transformación originales (Quadling, 1991).

2.3 Trazado de Curvas en Coordenadas Polares.

En coordenadas polares, el lugar geométrico $r = a$ es un círculo alrededor del polo con un radio a constante y el lugar geométrico $\theta = \beta$ es una línea recta que pasa por el polo con un ángulo de inclinación β constante (ver Figura 2.3). El uso de círculos concéntricos con centro en el origen y líneas rectas, las cuales pasan por el polo, es un entramado muy útil cuando se gráfica las curvas polares a mano o por medio de *software*.

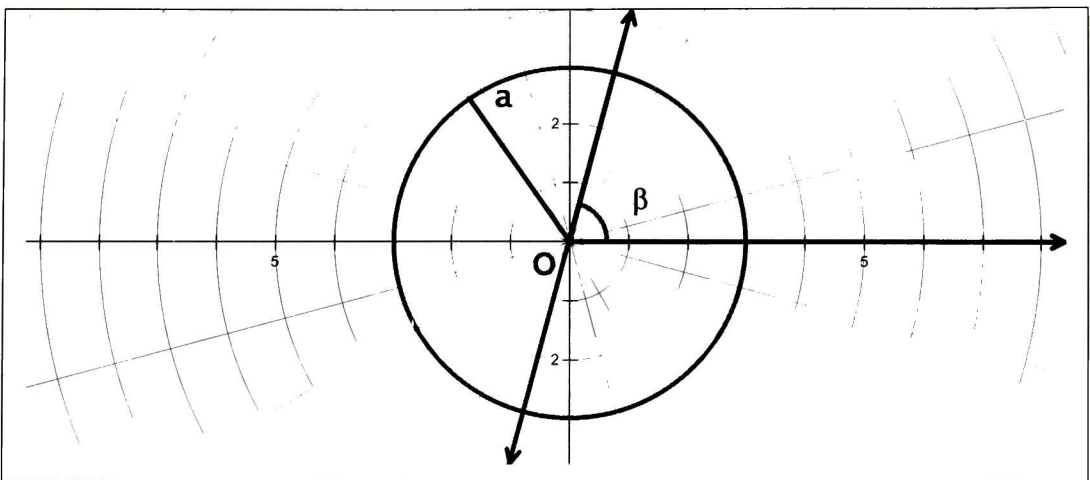


Figura 2.3. Coordenadas polares.

Una función de variable real $r = f(\theta)$, se interpreta como una función tal que a cada ángulo θ se le asocia un radio r y su gráfica representa todos los puntos del plano cuyas coordenadas polares (r, θ) satisfacen esta relación. En otras palabras, $r = f(\theta)$ es el conjunto de todos los puntos representados de la forma $(r, \theta) = (f(\theta), \theta)$.

A las gráficas de las funciones anteriores se les llama curvas polares y como f es una función periódica, su gráfica se construye al variar θ en el intervalo $[0, 2\pi]$. Actualmente, es muy fácil visualizar las curvas polares gracias a los programas de graficación pero no siempre es sencillo determinar dónde empieza la curva (e incluso

como continúa). Afortunadamente, con la geometría dinámica es posible crear un punto móvil sobre la curva, cómo si se estuviese trazando la figura con un lápiz.

La función f tiene varias propiedades de simetría, las cuales se observan en su gráfica; por ejemplo, la gráfica es simétrica con respecto al eje x cuando $f(\theta) = f(-\theta)$ (ver Figura 2.4.a); ésta es simétrica con respecto al eje y si $f(\pi - \theta) = f(\theta)$, como se muestra en la Figura 2.4.b; finalmente es simétrica con respecto al origen si $f(\theta) = f(\theta + \pi)$ (ver Figura 2.4.c). No obstante, conviene formular los criterios de simetría por medio de las coordenadas polares (Figura 2.4.d); así, la gráfica es simétrica con respecto:

1. Al polo si la función permanece igual cuando
 - a) r se sustituye por $-r$. o
 - b) θ se cambia por $\pi + \theta$.
2. Al eje polar si la función no es alterada al
 - c) sustituir θ por $-\theta$. o
 - d) usar $\pi - \theta$ en lugar de θ y $-r$ en lugar de r .
3. A la recta vertical $\theta = \pi/2$ si la función no cambia al
 - e) reemplazar θ por $\pi - \theta$. o
 - f) cambiar θ por $-\theta$ y r por $-r$.

2.4 Ejemplos de Curvas Polares.

Hasta ahora se han tratado los puntos básicos de las coordenadas polares (definidos en el Capítulo 1). Antes de continuar con otros temas es pertinente dar algunos ejemplos de curvas conocidas como la línea recta, el círculo y la elipse, escribiéndolas en su forma polar.

2.4.1. Líneas Rectas.

La ecuación de una línea recta en coordenadas cartesianas es

$$y = mx + b,$$

donde m es la pendiente de la recta y b es la ordenada al origen. En contraste: sea $P(r, \theta)$ cualquier punto en la recta y (p, α) son las coordenadas polares de la normal a esta recta que pasa por el polo, por inspección de la Figura 2.5, la forma polar normal de la ecuación de la línea recta se escribe como

$$r \cos(\theta - \alpha) = p$$

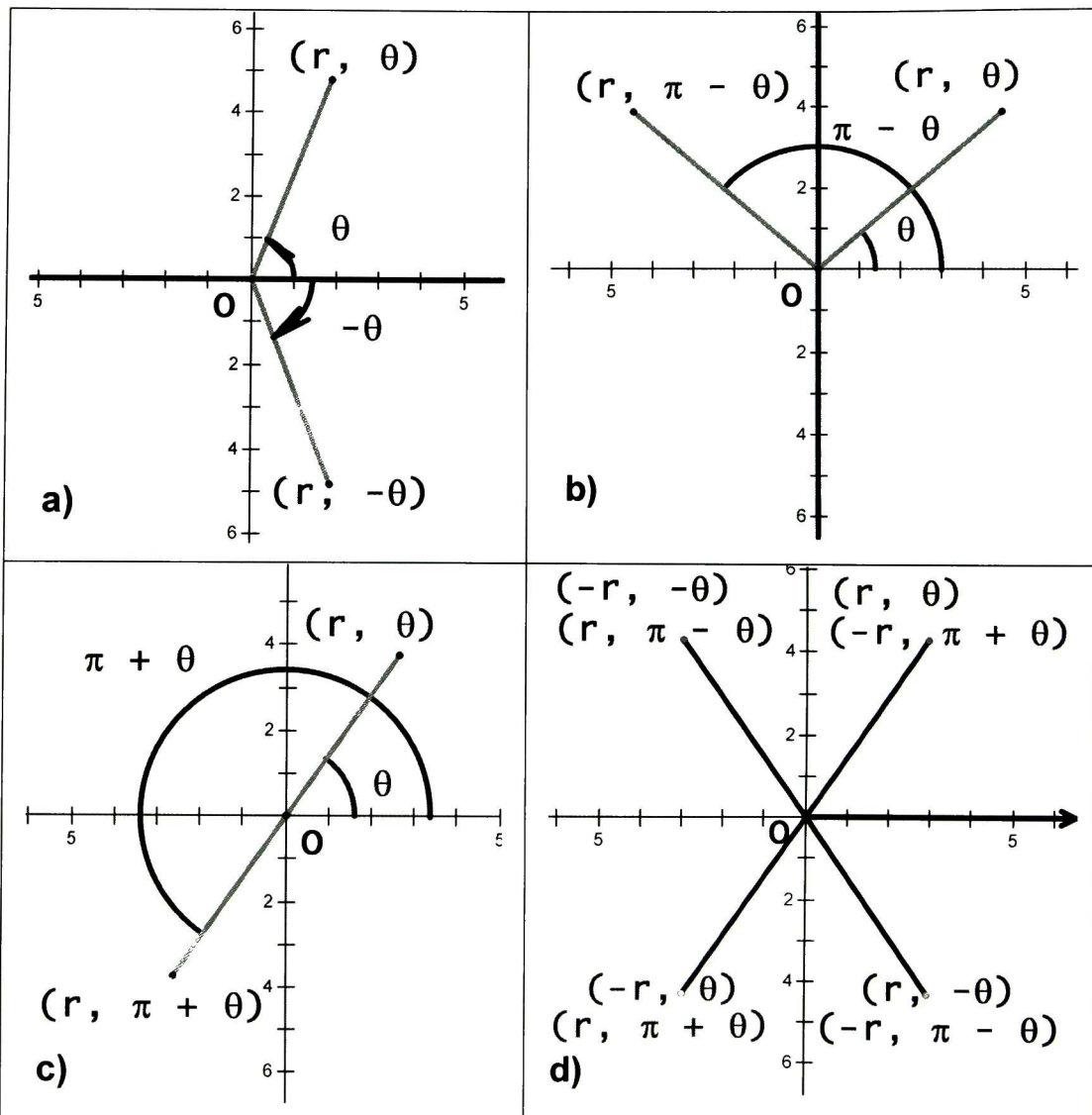


Figura 2.4. La gráfica es simétrica con respecto a) al eje x , b) al eje y y c) al origen; d) criterios de simetría por medio de las coordenadas polares.

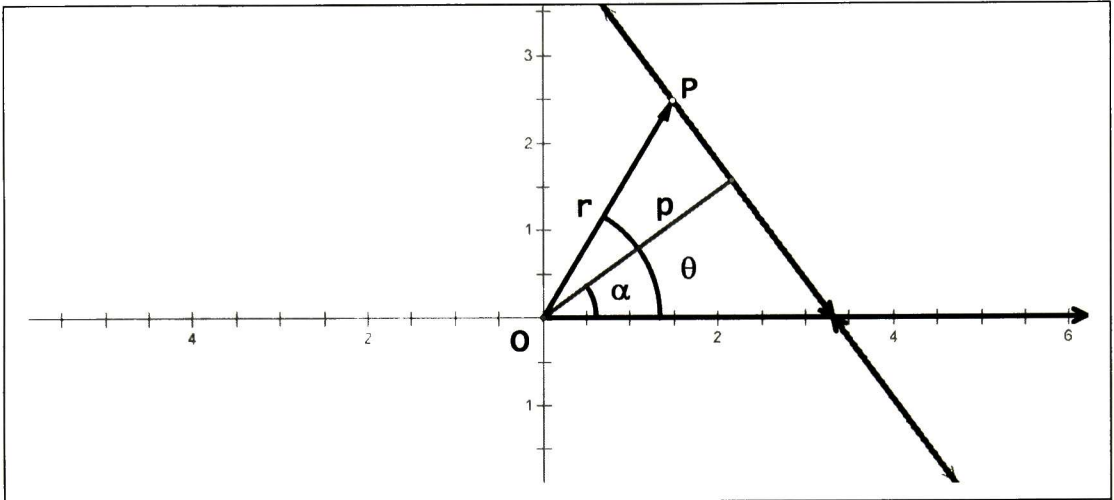


Figura 2.5. Línea recta.

Otra manera alternativa de definir a la recta es por medio dos puntos dados en la línea recta $A(r_1, \theta_1)$ y $B(r_2, \theta_2)$. Aparte, se necesita un punto cualquiera $P(r, \theta)$ para formar con los dos anteriores un triángulo APB (Figura 2.6.a), si el área de esta figura se iguala a cero (Figura 2.6.b) entonces las áreas de los triángulos AOB , AOP y POB son

$$A_{AOB} = \frac{1}{2} r_1 r_2 \text{Sen}(\theta_2 - \theta_1)$$

$$A_{AOP} = \frac{1}{2} r_1 r \text{Sen}(\theta - \theta_1)$$

$$A_{POB} = \frac{1}{2} r r_2 \text{Sen}(\theta_2 - \theta),$$

por lo tanto, al sustituir estas tres relaciones en $A_{AOB} - A_{AOP} - A_{POB} = A_{APB} = 0$ se tiene

$$r_1 r_2 \text{Sen}(\theta_2 - \theta_1) - r_1 r \text{Sen}(\theta - \theta_1) - r r_2 \text{Sen}(\theta_2 - \theta) = 0.$$

La ecuación de una línea recta en coordenadas polares dada en términos de la función seno es

$$\frac{\text{Sen}(\theta_2 - \theta_1)}{r} + \frac{\text{Sen}(\theta_1 - \theta)}{r_2} + \frac{\text{Sen}(\theta - \theta_2)}{r_1} = 0.$$

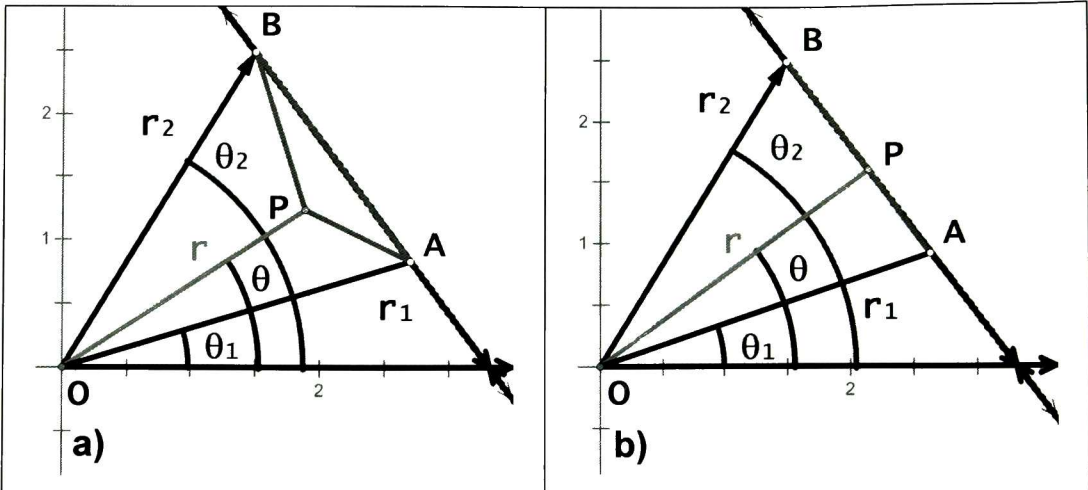


Figura 2.6. Línea recta.

2.4.2 Círculos.

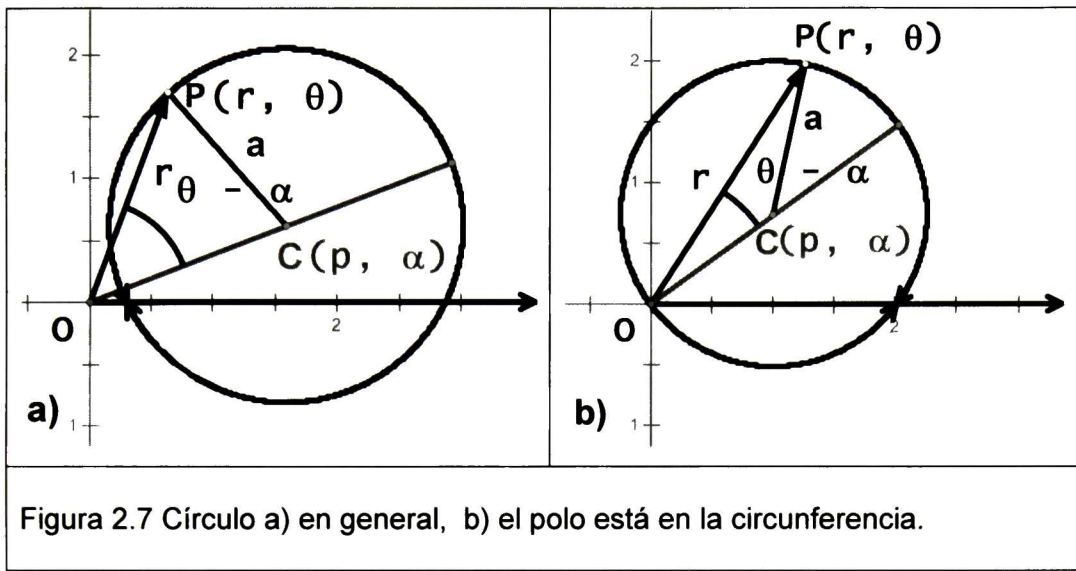
La ecuación de un círculo en coordenadas cartesianas es

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

su centro se encuentra en el punto (a,b) y su radio es r . Sea P un punto del círculo (r,θ) en coordenadas polares con centro C igual a (p,α) y por medio de la regla del coseno se tiene la ecuación polar del círculo (Figura 2.7.a).

$$r^2 - 2rp\text{Cos}(\theta - \alpha) + p^2 - a^2 = 0.$$

Cuando el polo está en la circunferencia $a = p$ (Figura 2.7.b) entonces $r = 2a\text{Cos}(\theta - \alpha)$; si el eje polar pasa por el centro del círculo, la igualdad anterior queda como $r = 2a\text{Cos}(\theta)$.



2.4.3 Cónicas.

La ecuación polar de la elipse puede deducirse a partir de la ecuación en coordenadas cartesianas si se sustituye $x = r\cos(\theta)$ y $y = r\sin(\theta)$ en

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

pero la relación obtenida por este método

$$\frac{\cos^2(\theta)}{a^2} + \frac{\sin^2(\theta)}{b^2} = \frac{1}{r^2},$$

no es la forma más apropiada; es preferible escribirla como la fórmula polar de las cónicas

$$r = \frac{l}{1 - e\cos(\theta)} \tag{2.1}$$

Pero pasar de la primera expresión a la igualdad (2.1) no es sencillo, por eso muchos autores de libros prefieren deducir directamente la fórmula en coordenadas polares. Una forma alternativa (Buckley, 1951) es a partir de la expresión (2.1), al reescribirla como $r - er\cos(\theta) = l$ se llega a

$$r = l + er\cos(\theta).$$

Elevando todo al cuadrado y usando $x = r\cos(\theta)$ y $y = r\sin(\theta)$ se tiene

$$x^2 + y^2 = (l + ex)^2 \quad (2.2)$$

Para $e \neq 1$ y $\theta = 0$ en la Ecuación (2.1)

$$r_0 = \frac{l}{1-e}$$

por otra parte, si $\theta = \pi$ en la igualdad (2.1)

$$r_\pi = \frac{l}{1+e}$$

Como $r_0 + r_\pi = 2a$ se puede escribir

$$r_0 + r_\pi = \frac{2l}{1-e^2} = 2a,$$

al despejar l

$$l = a(1-e^2).$$

Este resultado se sustituye en la ecuación (2.2), y efectuando un poco de álgebra se encuentra que

$$\frac{(x-ae)^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2(1-e^2)} = 1,$$

pero $a^2(1-e^2) = b^2$ entonces la expresión anterior queda como la ecuación de la elipse con centro en $(ae, 0)$:

$$\frac{(x-ae)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

2.5 Intersecciones en Coordenadas Polares.

Aparentemente, encontrar las intersecciones de dos curvas polares es un problema más complicado que cuando se usan coordenadas cartesianas, pues un punto del plano polar es representado por muchas coordenadas polares. Es conveniente graficar ambas curvas para ver las posibles soluciones a este problema, antes de resolver el sistema de las dos ecuaciones polares.

En ocasiones se observa más de dos soluciones para algunas parejas de curvas polares, pero no todas resultan ser intersecciones. Es más grave cuando las ecuaciones son diferentes pero sus gráficas son exactamente iguales, pues por inspección visual, las intersecciones son todos los puntos de las curvas; esto pone en dificultad al estudiante que sólo ha mecanizado el método de resolver este tipo de problemas sin entender cómo funciona (Aran Rodríguez. 1993).

La importancia de la geometría dinámica para resolver de forma sencilla este tipo de problemas estriba en poder efectuar una animación de un punto sobre la curva; para las curvas cuyas gráficas se cruzan, puede usarse dos puntos móviles en cada una para encontrar las intersecciones reales de ambas gráficas. Es conveniente reflexionar acerca de lo anterior y dar un pequeño salto hacia atrás, regresar al conocido sistema de coordenadas cartesiano para analizar los dos siguientes ejemplos.

El primero consiste en una línea recta paralela al eje X que pasa por dos puntos de una parábola donde se desea saber cuáles son los puntos de intersección de las curvas. Aparentemente es un problema simple de geometría analítica; sin embargo, es posible darle otra interpretación muy diferente: considérese un avión en pleno vuelo siguiendo una trayectoria en forma de línea recta paralela al suelo y súbitamente se dispara un proyectil desde el suelo con una trayectoria parabólica. El proyectil no necesariamente abatirá al avión aunque las trayectorias de ambos se intersecan, como se ve al oprimir el botón de animar de la hoja electrónica (Figura 2.8.a, ZPola2.gsp).

En el segundo ejemplo hay dos parábolas que se cruzan en dos puntos. Para encontrar sus intersecciones debe tomarse un enfoque diferente; nuevamente se da otra interpretación al problema: si se considera el caso de lanzar dos proyectiles cuyas trayectorias parabólicas se intersecan en dos puntos. Lo anterior no implica una colisión de los misiles en el aire, como se observa al oprimir el botón de animar de la segunda hoja electrónica (Figura 2.8b, ZPola2.gsp).

Las curvas de los ejemplos anteriores se toman como imágenes o trayectorias de puntos que dependen del tiempo y no son gráficas de funciones reales. En otras palabras, se han mezclado dos cosas diferentes: los puntos donde se intersecan las

trayectorias de los cuerpos y considerar la posibilidad de que éstos colisionen. La colisión depende de la simultaneidad de los objetos en un punto, pero es esta la semilla que permite resolver el problema de las intersecciones en coordenadas polares.

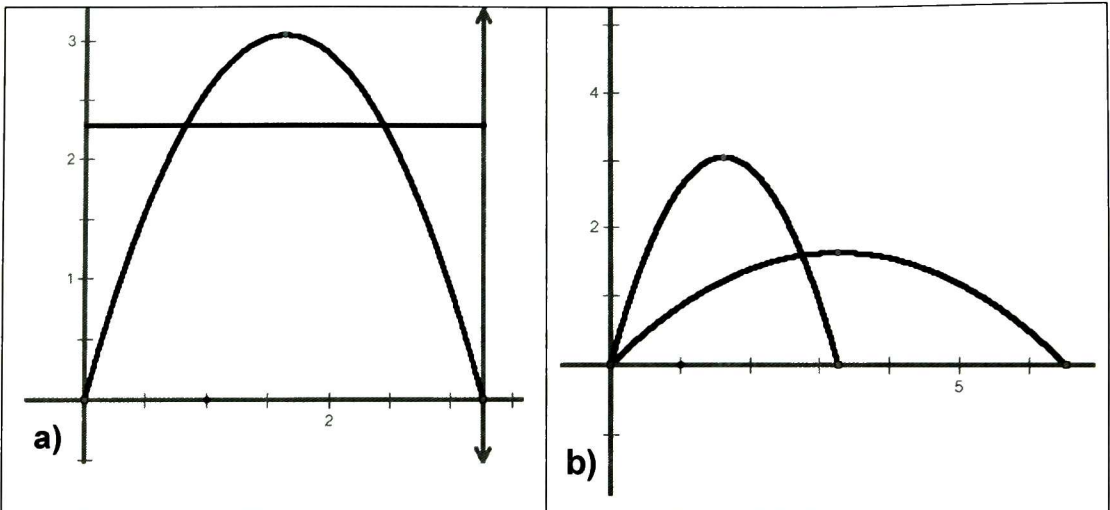


Figura 2.8. Intersecciones de una parábola con a) una línea recta paralela al eje x , b) otra parábola.

Ahora regresemos al problema original: dos puntos móviles deben coincidir en un punto fijo para el mismo ángulo donde las trayectorias se intersecan, esto sólo sucede con las intersecciones de dos funciones polares; la confusión se origina por las intersecciones de sus gráficas. En otras palabras, en realidad son dos problemas diferentes a) la intersección de las funciones y b) la intersección de las gráficas de dichas funciones. A continuación, se presentan una serie de ejemplos resueltos de forma correcta.

Ejemplo 1. Encuentre los puntos de intersección de $r = \text{Sen}(\theta)$ y $r = \text{Cos}(\theta)$. Al eliminar r de las dos ecuaciones, se obtiene $\text{Cos}(\theta) = \text{Sen}(\theta)$, por lo tanto $\text{Tan}(\theta) = 1$ (para $\text{Cos}(\theta) \neq 0$) y $\theta = \pi/4 + n\pi$

En el intervalo $0 \leq \theta \leq 2\pi$ las intersecciones son $(1/\sqrt{2}, \pi/4)$ y $(-1/\sqrt{2}, 5\pi/4)$ pero realmente son diferentes representaciones para el mismo punto. En la Figura 2.9 se

observan los dos puntos de intersección. El polo se representa de muchas formas diferentes pero en la curva $r = \text{Sen}(\theta)$ está representado por $(0, n\pi)$ y en la curva $r = \text{Cos}(\theta)$ se le representa por $(0, \pi/2 + n\pi)$. El polo es un punto común en ambas curvas pero no tiene una representación que satisfaga ambas ecuaciones para un mismo ángulo, pues $0 \neq \pi/2$. Por lo tanto, el polo no es un punto de intersección.

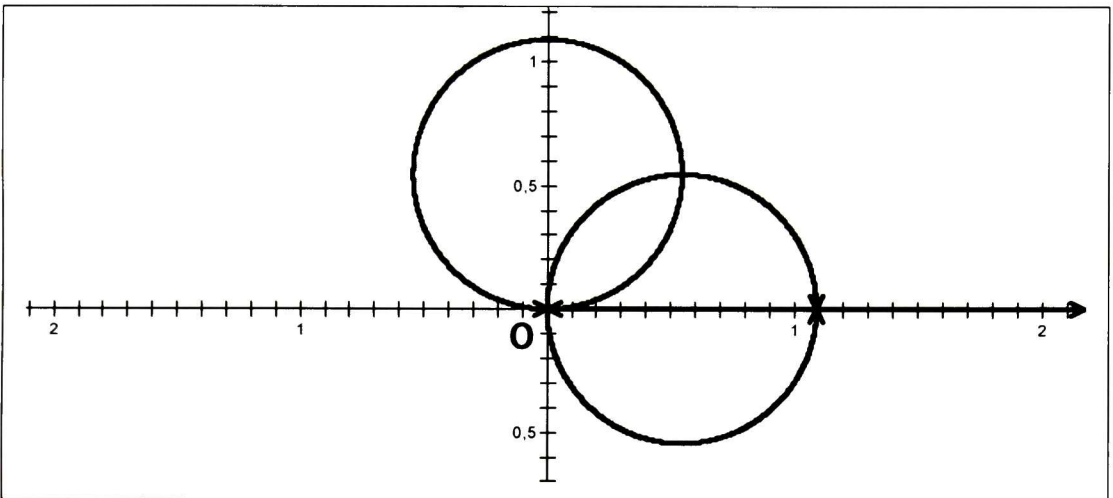


Figura 2.9. Intersección de dos círculos, el polo esta sobre las dos circunferencias y una esta rotada $\pi/2$ con respecto a la primera.

Si se toman las dos curvas como trayectorias trazadas por puntos móviles; cuando θ se incrementa uniformemente con el tiempo, ambos puntos pasan por el origen en diferentes tiempos.

El punto $(1, \pi/4)$ es una intersección de las dos funciones y de las gráficas de ambas funciones.

Nota. En los siguientes ejemplos se resuelven sistemas de ecuaciones simultáneas para encontrar las intersecciones de las gráficas como conjuntos de puntos.

Ejemplo 2. Encontrar los puntos de intersección de $r = 2\text{Sen}(2\theta)$ y $r = 1$.

La gráfica de $r = 2\text{Sen}(2\theta)$ es una rosa de cuatro hojas. La gráfica de $r = 1$ es un círculo con centro en el polo y radio igual a uno. Resolviendo las dos ecuaciones

simultáneamente se tiene $2\text{Sen}(2\theta)=1$ o $\text{Sen}(2\theta)=1/2$. Así $\theta = \pi/12, 5\pi/12, 13\pi/12, 17\pi/12$ sólo se encontraron cuatro puntos de intersección $(1, \pi/12), (1, 5\pi/12), (1, 13\pi/12)$ y $(1, 17\pi/12)$; pero la Figura 2.10 muestra ocho puntos donde las gráficas se cruzan.

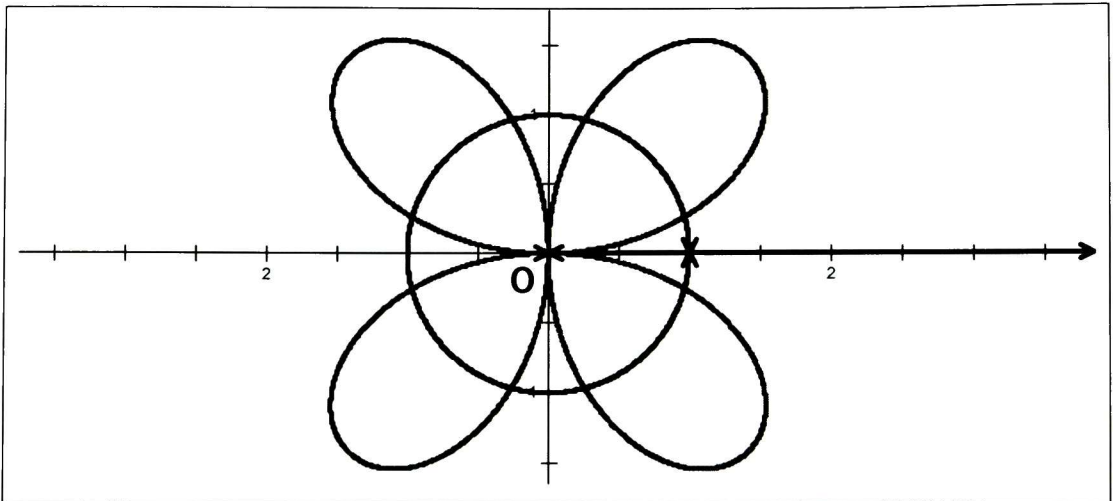


Figura 2.10. Intersección de un círculo con centro en el polo con una rosa de cuatro hojas.

Para encontrar los otros cuatro puntos se usa la otra forma de la ecuación del círculo $r = -1$. Resolviendo esta ecuación simultáneamente con la ecuación de la rosa de cuatro hojas se llega a $\text{Sen}(2\theta) = -1/2$. Así $\theta = 7\pi/12, 11\pi/12, 19\pi/12, 23\pi/12$. Los cuatro puntos faltantes son $(-1, 7\pi/12), (-1, 11\pi/12), (-1, 19\pi/12)$ y $(-1, 23\pi/12)$; y se reescriben como $(1, 19\pi/12), (1, 23\pi/12), (1, 7\pi/12)$ y $(1, 11\pi/12)$, respectivamente. El conjunto de los puntos de intersección de las dos gráficas es la unión de todas las intersecciones obtenidas por medio de las funciones.

Los puntos de intersección de dos curvas pueden calcularse directamente por sus gráficas.

A continuación se presenta un método aparentemente general:

Si f es una función periódica dada por $r = f(\theta)$, entonces

$$(-1)^n r = f(\theta + n\pi), \quad (2.3)$$

donde n es un entero (Smart, 1920; Wagner, 1948; Lariviere, 1955; Essary, 1982; Murty, 1984). Considérese las dos curvas del ejemplo anterior, la gráfica de $r = 2\text{Sen}(2\theta)$ también es representada por la ecuación (2.3), para $n = 1$,

$$\begin{aligned} -r &= 2\text{Sen}(2(\theta + \pi)) \\ r &= -2\text{Sen}(2\theta). \end{aligned}$$

Cuando $n = 2$

$$\begin{aligned} (-1)^2 r &= 2\text{Sen}(2(\theta + 2\pi)) \\ r &= 2\text{Sen}(2\theta). \end{aligned}$$

La gráfica de la ecuación $r = 1$ también se escribe como (para $n = 1$)

$$\begin{aligned} -r &= 1 \\ r &= -1. \end{aligned}$$

Entonces, en una función cíclica sólo se necesita considerar dos casos, $n = 1$ y $n = 2$, mientras la función pueda escribirse en términos de funciones periódicas.

Nota. El método descrito anteriormente se usa en los siguientes ejemplos.

Ejemplo 3. Encontrar los puntos de intersección de las curvas $r = 2 - 2\text{Cos}(\theta)$ y $r = 2\text{Cos}(\theta)$, entonces

$$\begin{aligned} -r &= 2 - 2\text{Cos}(\theta + \pi) \\ r &= -2 - 2\text{Cos}(\theta) \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} y \quad (-1)^2 r &= 2 - 2\text{Cos}(\theta + 2\pi) \\ r &= 2 - 2\text{Cos}(\theta), \end{aligned} \quad (2.5)$$

la cual es la ecuación original de la primera curva.

De forma similar, se encuentra otras ecuaciones de la curva dada por $r = 2\text{Cos}(\theta)$:

$$\begin{aligned} -r &= 2\text{Cos}(\theta + \pi) = -2\text{Cos}(\theta) \\ r &= 2\text{Cos}(\theta) \end{aligned} \quad (2.6)$$

y ésta última es la ecuación original.

Así hay dos posibles ecuaciones para la primera curva, $r = 2 - 2\text{Cos}(\theta)$ y $r = -2 - 2\text{Cos}(\theta)$; la ecuación para la segunda curva es $r = 2\text{Cos}(\theta)$. Al igualar las Ecuaciones (2.5) y (2.6) se tiene

$$2\cos(\theta) = 2 - 2\cos(\theta)$$

$$\cos(\theta) = \frac{1}{2}.$$

Entonces $\theta = \pi/3, 5\pi/3$ y los puntos de intersección son $(1, \pi/3)$ y $(1, 5\pi/3)$.

Ahora se resolverá el sistema de Ecuaciones (2.4) y (2.6)

$$2\cos(\theta) = -2 - 2\cos(\theta)$$

$$\cos(\theta) = -\frac{1}{2}.$$

Por lo tanto, $\theta = 2\pi/3, 4\pi/3$ y los puntos de intersección son $(-1, 2\pi/3)$ y $(-1, 4\pi/3)$ pero pueden reescribirse como $(1, 5\pi/3)$ y $(1, \pi/3)$, respectivamente (Figura 2.11).

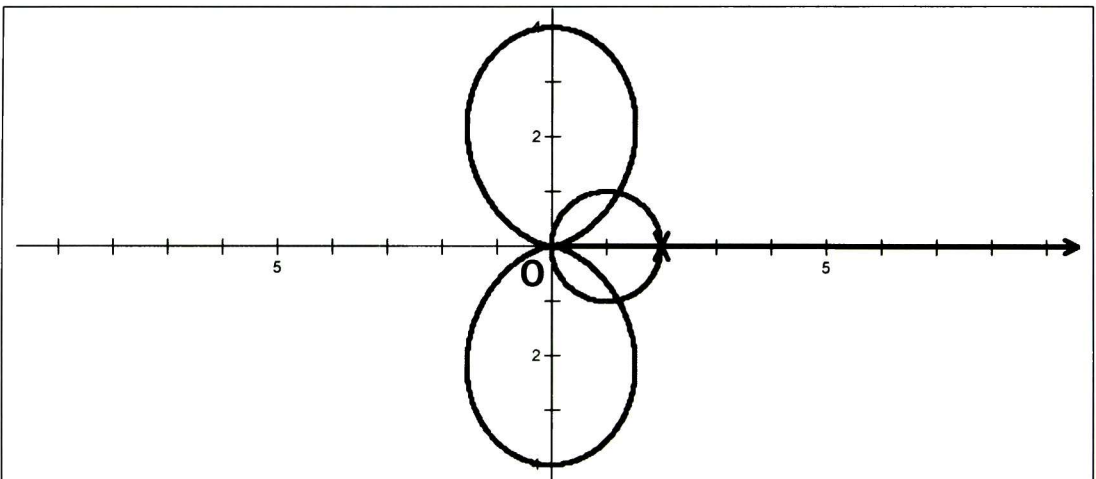


Figura 2.11. Intersección de un círculo que pasa por el polo con una curva polar de dos hojas.

Para verificar si la primera curva pasa por el polo se sustituye $r = 0$ en la Ecuación (2.5),

$$0 = 2 - 2\cos(\theta)$$

$$\cos(\theta) = 1.$$

La primera curva pasa por el polo en $\theta = 0$. De forma similar, al sustituir $r = 0$ en la Ecuación (2.6) se tiene

$$0 = 2\text{Cos}(\theta)$$

$$\text{Cos}(\theta) = 0.$$

La segunda curva pasa por el polo para $\theta = \pi/2, 3\pi/2$.

Los puntos de intersección son únicamente $(1, \pi/3)$ y $(1, 5\pi/3)$.

Ejemplo 4. Calcular los puntos de intersección de las gráficas de

$$r = 1 + 3\text{Cos}(\theta) \tag{2.7}$$

$$r = \frac{2}{2 - \text{Cos}(\theta)}. \tag{2.8}$$

Para resolver el sistema de ecuaciones se igualan las dos ecuaciones anteriores

$$1 + 3\text{Cos}(\theta) = \frac{2}{2 - \text{Cos}(\theta)}$$

$$-3\text{Cos}^2(\theta) + 5\text{Cos}(\theta) + 2 = 2$$

$$(5 - 3\text{Cos}(\theta))\text{Cos}(\theta) = 0.$$

El primer factor no llega a anularse nunca y el segundo sólo es nulo si $\theta = \pi/2$ o $\theta = 3\pi/2$, donde se está considerando el intervalo $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Por lo tanto, los dos puntos de intersección son $(1, \pi/2)$ y $(1, 3\pi/2)$. Para buscar otros posibles puntos de intersección, se sustituye r por $-r$ y θ por $\theta + \pi$ en la Ecuación (2.7).

$$-r = 1 + 3\text{Cos}(\theta + \pi)$$

$$r = -1 + 3\text{Cos}(\theta). \tag{2.9}$$

Entonces al igualar las Ecuaciones (2.8) y (2.9)

$$-1 + 3\text{Cos}(\theta) = \frac{2}{2 - \text{Cos}(\theta)}$$

$$-3\text{Cos}^2(\theta) + 7\text{Cos}(\theta) - 2 = 2$$

$$-3\text{Cos}^2(\theta) + 7\text{Cos}(\theta) - 4 = 0$$

$$(4 - 3\text{Cos}(\theta))(\text{Cos}(\theta) - 1) = 0.$$

Nuevamente el primer factor no se anula, pero el segundo factor se hace cero para $\theta = 0$; entonces $(2, 0)$ es el otro punto de intersección, obsérvese que $(2, 0)$ coincide con $(-2, \pi)$. Finalmente, en la Figura 2.12 se ven tres puntos de intersección.

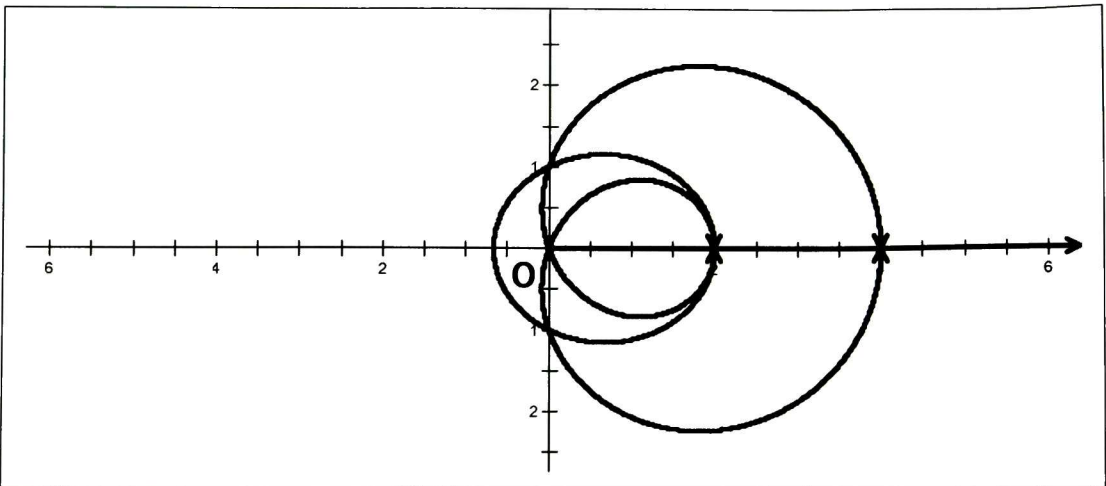


Figura 2.12. Intersección de una elipse con una limaçon de Pascal.

2.6 Recta Tangente a una Curva Polar.

Es importante conocer la recta tangente a la curva polar (Thurston, 1969, 1993; Johnson, 1993; Wilkins, 2003; Flores, 2006), pues gracias a ella se hacen varias construcciones geométricas del tipo euclidiano como se verá en el siguiente capítulo.

También se necesita distinguir entre la pendiente de la línea recta tangente a una curva con la derivada en las coordenadas polares; por esto estudiaremos los dos conceptos de forma separada (ver Secciones 2.6.1 y 2.6.2).

2.6.1 La Tangente de una Curva.

A continuación se muestra la deducción de la ecuación de la recta tangente a la curva polar sin usar el cálculo diferencial, pero aplicando la idea de límite (Lodge, 1923, Fay, 1986): cualquier punto en una curva puede definirse en términos de sus coordenadas polares (r, θ) y la distancia perpendicular p del polo a su tangente (Figura 2.13).

Sea ϕ el ángulo entre el segmento p y el segmento $r + \Delta r$. Trazando un segmento perpendicular al segmento $r + \Delta r$ que pase por el punto P el ángulo entre

este nuevo segmento y la línea recta tangente es ϕ . Sea $\Delta\theta$ muy pequeño, el cateto adyacente del nuevo triángulo rectángulo es $r\Delta\theta$ y el cateto opuesto es aproximadamente Δr . por lo tanto la hipotenusa es $\sqrt{r^2(\Delta\theta)^2 + (\Delta r)^2}$ (ver Apéndice A), entonces

$$\cos(\phi) = \lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} \frac{r\Delta\theta}{\left[r^2(\Delta\theta)^2 + (\Delta r)^2\right]^{1/2}}$$

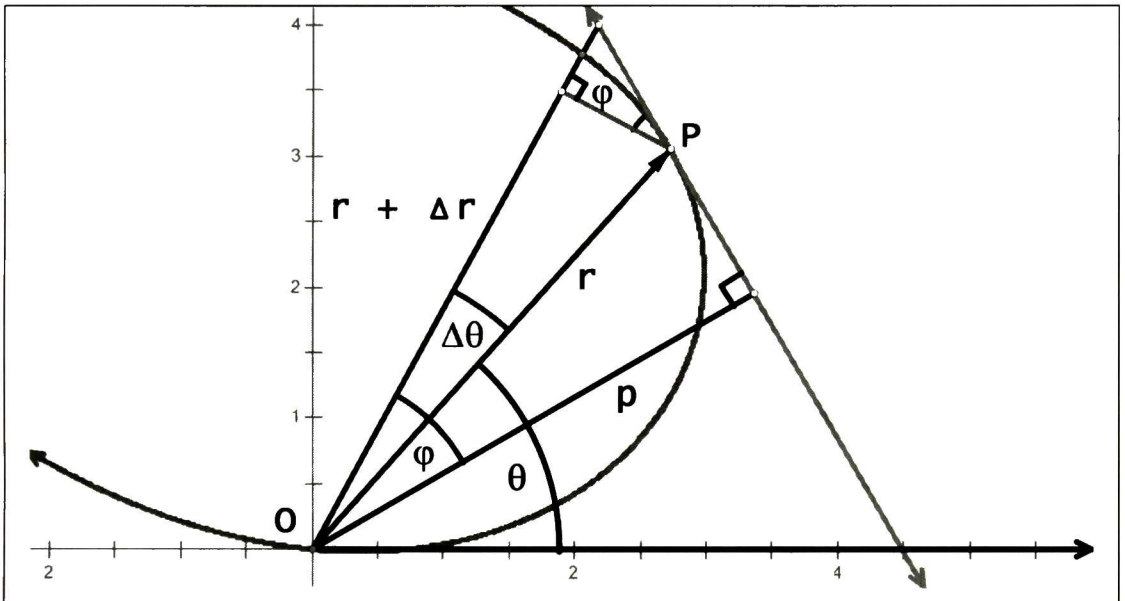


Figura 2.13. Recta tangente a la curva polar.

Al dividir el numerador y el denominador por $\Delta\theta$ en el lado derecho de la igualdad se tiene

$$\cos(\phi) = \lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} \frac{r}{\left[r^2 + \left(\frac{\Delta r}{\Delta\theta}\right)^2\right]^{1/2}}$$

ahora al tomar el límite $\Delta\theta \rightarrow 0$

$$\text{Cos}(\varphi) = \frac{r}{\left[r^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial \theta} \right)^2 \right]^{1/2}}$$

Pero como $\text{Cos}(\varphi) = p/r$ lo anterior puede reescribirse como

$$\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^4} \left(\frac{dr}{d\theta} \right)^2 = \frac{1}{p^2}$$

la cual es la ecuación polar de la tangente de una curva cualquiera.

2.6.2 Las Derivadas en Coordenadas Polares.

Para la ecuación polar $r = f(\theta)$, puede encontrarse la derivada $dr/d\theta$ de una manera simple pero su significado es diferente a la derivada dy/dx ; esta última derivada representa la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $y = g(x)$. Si se desea hallar la pendiente de una recta tangente a una curva en polares, es necesario expresar la ecuación $r = f(\theta)$ en coordenadas rectangulares; primero se usa las relaciones de transformación $x = r\text{Cos}(\theta)$ y $y = r\text{Sen}(\theta)$, al reemplazar $r = f(\theta)$ se tiene las ecuaciones paramétricas polares $x(\theta) = f(\theta)\text{Cos}(\theta)$ y $y(\theta) = f(\theta)\text{Sen}(\theta)$; entonces se genera el vector $(x(\theta), y(\theta))$ y al derivarlo con respecto a θ se obtiene $(x'(\theta), y'(\theta))$.

Sin embargo, la idea original es trabajar con las coordenadas polares sin haber visto las paramétricas (o en el peor de los casos, utilizarlas de forma implícita); por lo tanto el camino a seguir es semejante al de un estudiante que aún no sabe nada sobre ecuaciones paramétricas (Seery, 1998)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\theta} \frac{d\theta}{dx} = \frac{f'(\theta)\text{Sen}(\theta) + f(\theta)\text{Cos}(\theta)}{f'(\theta)\text{Cos}(\theta) - f(\theta)\text{Sen}(\theta)} = \frac{r\text{Cos}(\theta) + r'\text{Sen}(\theta)}{r'\text{Cos}(\theta) - r\text{Sen}(\theta)}. \quad (2.10)$$

dónde $dx/d\theta \neq 0$ (este resultado se usa en la siguiente subsección para calcular el ángulo γ del radio vector de la tangente). Al dividir el numerador y el denominador por $\text{Cos}(\theta)$ se encuentra

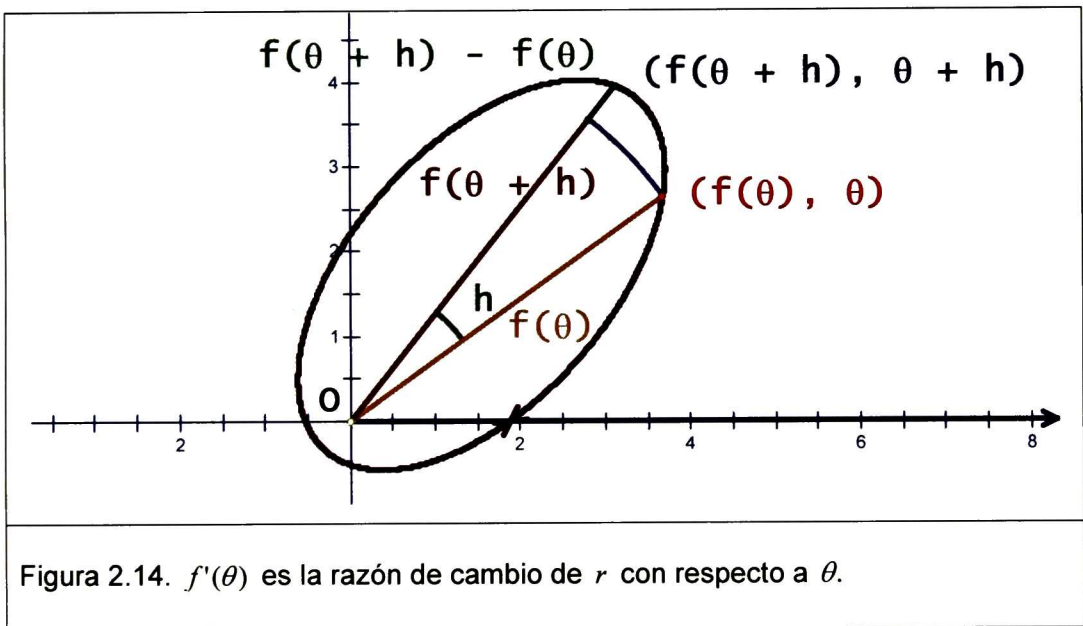
$$\frac{dy}{dx} = \frac{r' \tan(\theta) + r}{r' - r \tan(\theta)} \quad (2.11)$$

La Ecuación (2.11) sirve para dibujar (con papel y lápiz) las líneas tangentes a las curvas en coordenadas polares, lamentablemente la $\tan(\theta)$ se indetermina para $\theta = (2k+1)(\pi/2)$, donde $k = 0, 1, 2, 3, \dots$. Es preferible usar la Ecuación (2.10) para los paquetes de graficación.

Ahora es más claro ver la diferencia entre la pendiente en el punto (r, θ) y la $f'(\theta)$, pues $f'(\theta)$ es la razón de cambio de r con respecto a θ (Figura 2.14)

$$\frac{dr}{d\theta} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\theta + h) - f(\theta)}{h}$$

y la pendiente es la razón de cambio de y con respecto a x .



2.6.3 El Ángulo γ del Radio Vector de la Tangente.

Se usa generalmente la ψ para representar el ángulo del radio vector de la tangente (Ettlinger, 1922) pero como el *software* de geometría dinámica utilizado en este trabajo no tiene definida la ψ , se ha sustituido por la γ .

Para encontrar la dirección de la línea tangente a una *curva suave* es necesario saber el ángulo γ del radio vector a la tangente, entonces se busca el ángulo φ que forma la recta tangente con el eje x , por la Figura 2.15

$$\varphi = \theta + \gamma$$

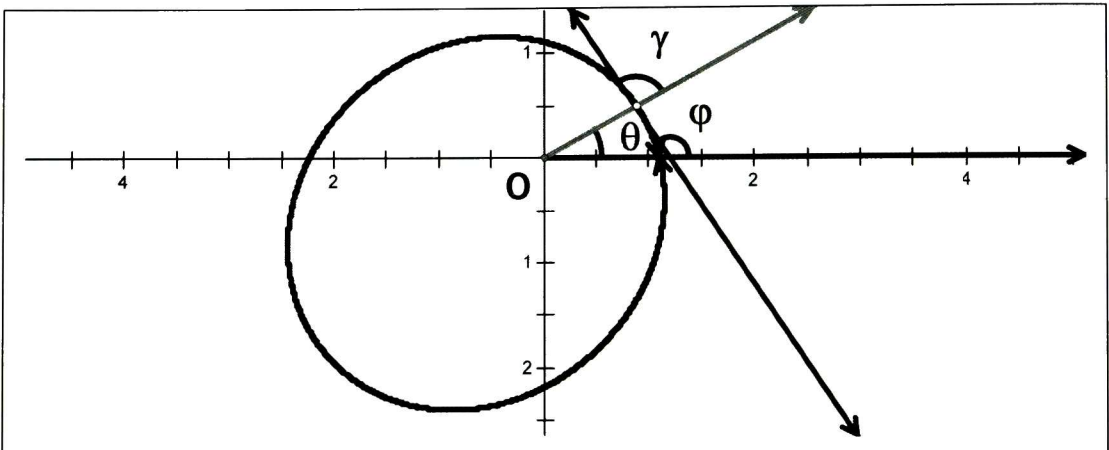


Figura 2.15. Ángulo del radio vector de la tangente γ y su relación con los ángulos θ y φ .

Sea $r = f(\theta)$, donde f es una función diferenciable, para un punto (r, θ) de la curva y tomando dr y $d\theta$ pequeños, los lados del “triángulo” son aproximadamente de longitudes dr y $r d\theta$ (ver Figura 2.16), obteniendo

$$\text{Tan}(\gamma) = \frac{r(d\theta)}{dr} = \frac{r}{dr/d\theta} = \frac{f(\theta)}{f'(\theta)}, \quad (2.12)$$

donde el denominador debe ser diferente de cero. Por lo tanto

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{r(\theta)}{\text{Tan}(\gamma)} \quad (2.13)$$

Una forma alternativa para deducir lo anterior es a partir de la identidad trigonométrica para la suma de ángulos de la tangente

$$\text{Tan}(\gamma) = \text{Tan}(\varphi - \theta) = \frac{\text{Tan}(\varphi) - \text{Tan}(\theta)}{1 + \text{Tan}(\varphi)\text{Tan}(\theta)}$$

Como $\text{Tan}(\varphi) = dy/dx$ y usando la Ecuación (2.10) se tiene que

$$\tan(\varphi) = \frac{r \cos(\theta) + r' \sin(\theta)}{r' \cos(\theta) - r \sin(\theta)}$$

Escribiendo explícitamente $\tan(\theta) = \sin(\theta)/\cos(\theta)$ en $\tan(\gamma)$ y al sustituir la igualdad anterior también en $\tan(\gamma)$ se llega a la igualdad (2.12)

$$\tan(\gamma) = \frac{r \cos^2(\theta) + r' \sin(\theta) \cos(\theta) + r \sin^2(\theta) - r' \sin(\theta) \cos(\theta)}{-r \sin(\theta) \cos(\theta) + r' \cos^2(\theta) + r \sin(\theta) \cos(\theta) + r' \sin^2(\theta)} = \frac{r}{r'}$$

Una primera aplicación de este resultado es la construcción de la recta tangente a la curva polar (ver Figura 2.16). Primero se toma la recta que pasa por el polo y el punto de la curva; después se usa el punto sobre la curva como centro de la rotación cuyo ángulo será γ . de esta forma se obtiene la recta tangente a la curva. Sin embargo, pueden tenerse problemas por usar la primera derivada de r y la función arcotangente para calcular el ángulo γ

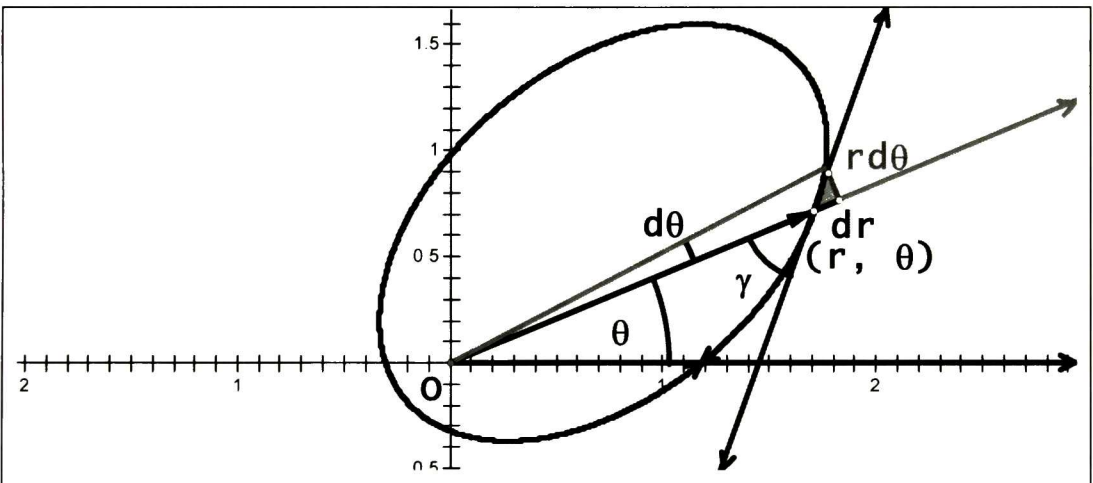


Figura 2.16. Relación de la $\tan(\gamma)$ con r y r'

La segunda aplicación es para calcular el ángulo entre dos curvas que se intersecan (Figura 2.17), el ángulo β entre las curvas $r_1 = f_1(\theta)$ y $r_2 = f_2(\theta)$ se calcula por medio de la siguiente relación

$$\tan(\beta) = \tan(\gamma_2 - \gamma_1) = \frac{\tan(\gamma_2) - \tan(\gamma_1)}{1 + \tan(\gamma_2)\tan(\gamma_1)}$$

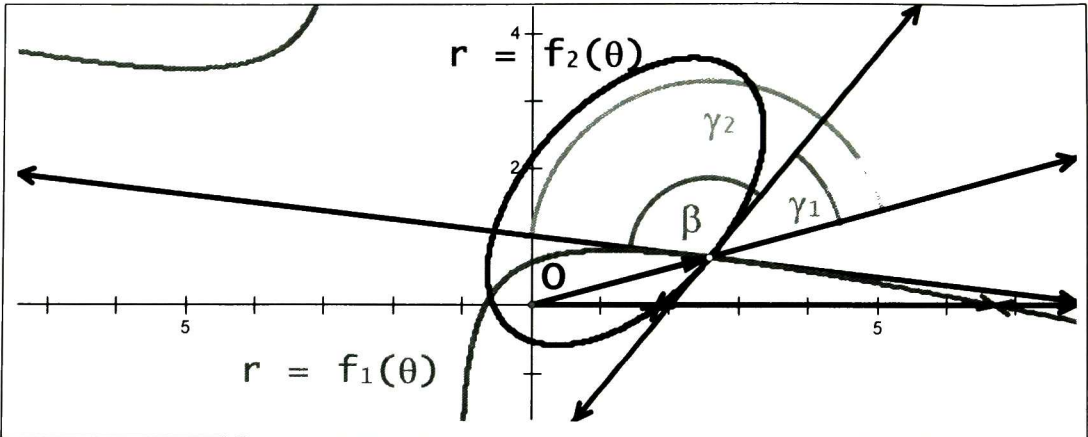


Figura 2.17. Ángulo entre dos curvas polares las cuales se intersecan.

Capítulo 3

Generación de Páginas Electrónicas con un Software Dinámico.

En este capítulo se explicarán los elementos técnicos necesarios para crear páginas electrónicas con un *software* de geometría dinámica; estas hojas fueron hechas para sustentar el presente trabajo y nos permitirán estudiar una curva polar y su curvatura. Además, fue necesario construir algunos nuevos recursos matemáticos para mejorar la forma de controlarlas. Las figuras sólo muestran una representación estática de lo que realmente se tiene.

Se describe las ideas para mezclar dos tipos de geometría (la analítica y la euclidiana) y gracias a esto se construyen las rectas tangente y normal a las curvas. Además, se generalizan las fórmulas de las curvas polares y se habla de los inconvenientes del *software*. Finalmente, se ven algunas curvas polares complicadas.

3.1 Elementos de Control.

En las hojas electrónicas se crearon barras de control o deslizadores para modificar los coeficientes de las fórmulas generalizadas de curvas polares; además de botones para poder cambiar las potencias y los parámetros controladores de la periodicidad de las funciones estudiadas, así como para rotar la curva polar y dar movimiento a un punto sobre ella. También fue conveniente generar una función delimitadora.

3.1.1. Deslizadores.

Para construir un deslizador en una página electrónica, se hace un segmento de línea recta y luego se coloca un punto móvil en él. La siguiente fórmula genera una escala invariante sobre el segmento

$$g(x) = \left(\frac{(-1)^n}{100} \right) Trunc \left(100c \left| \frac{x_a - x}{x_a - x_b} \right| \right), \quad (3.1)$$

donde x_a y x_b son las abscisas de los puntos que forman el segmento de línea y x es la abscisa del punto móvil con un paso de 0.01; donde la longitud del paso es suficiente para trabajar de acuerdo con las limitaciones del tamaño de la pantalla de la computadora.

Así, la función $g(x)$ nos proporciona los valores del deslizador con una precisión de dos dígitos después del punto decimal (Figura 3.1). Por otra parte, se creó un botón para cambiar el valor de la n ; la n es igual a cero para un valor dentro del intervalo $[0, c]$; si $n=1$ entonces se trabaja en $[0, -c]$.

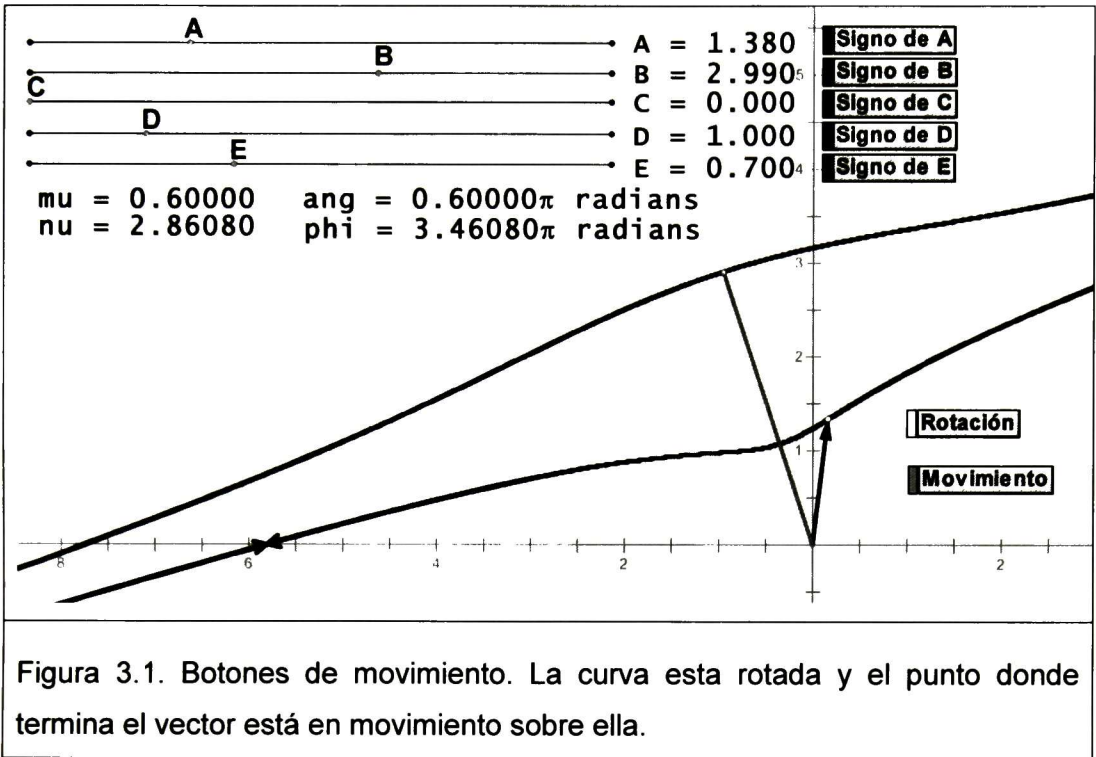
3.1.2 Generación de Botones para Movimientos.

Como toda construcción geométrica debe ser invariante ante rotaciones, empecemos definiendo un parámetro μ el cual puede tomar valores dentro del intervalo $[0, 2]$, por medio de un botón creado con el *software*; así se tiene un ángulo de rotación para las gráficas de $\mu\pi$ radianes.

Tomando como ejemplo una curva polar sencilla como la conoide de Nicomedes $r = A + B/\text{Cos}(\theta)$ (Heath, 1960), para girar la gráfica de esta función en sentido antihorario se utiliza la función auxiliar $f_1(\theta) = f(\theta - \pi\mu)$, o si se prefiere una rotación a favor de las manecillas del reloj se usa $f_1(\theta) = f(\theta + \pi\mu)$ (ver Figura 3.1).

Por otra parte, para crear un punto en movimiento sobre la gráfica de la curva (Figura 3.1) es necesario definir un nuevo parámetro ν en el intervalo $[0, 2]$ para funciones del tipo $f(\theta) = A + B\text{Cos}^n(\theta)$; de esta forma se trabaja con un ángulo asignado al punto móvil en concordancia con la rotación de toda la curva y se escribe como $\varphi = (\nu + \mu)\pi$ radianes. Finalmente, se gráfica el punto $(f_1(\varphi), \varphi)$.

En las hojas electrónicas, el movimiento es en contra de las manecillas del reloj para el punto móvil y la rotación de la curva.



3.1.3. Función Delimitadora.

En matemáticas es suficiente definir una función $f(x)$ en $[a,b]$, al graficarla puede observarse en un intervalo más amplio que el original. En cambio, la gráfica de $f(x)$ multiplicada por la función de Heaveside da la apariencia de existir sólo dentro del intervalo deseado; pues fuera de éste toma el valor de cero, confundiendo esta parte de la gráfica con el eje de las x .

No obstante, cuando se necesita un control para los extremos del intervalo resulta inadecuado para el *software*. Con el fin de delimitar la región de interés $[a,b]$ se necesita crear una nueva función para la geometría dinámica:

$$s(x) = \sqrt{x-a} - \sqrt{x-a} + \sqrt{-x+b} - \sqrt{-x+b} + 1, \quad (3.2)$$

$s(x)$ parece ser una función constante igual a uno; pero el uso de las raíces cuadradas define un intervalo $[a,b]$ en las gráficas y por medio de los deslizadores se pueden modificar los valores de a y b

Al multiplicar $f(x)$ por la función delimitadora $s(x)$, la función original queda definida en el intervalo deseado (Figura 3.2). Esta función también es útil para cualquier sistema de coordenadas, pues gracias a ella pueden graficarse secciones de cualquier curva y examinarlas sin tener el problema de una interferencia visual cuando la curva es complicada.

Haciendo un pequeño paréntesis, es conveniente resaltar que en la mayoría de libros de matemáticas se usa un arco de círculo en la representación del ángulo en una figura; sin embargo, cuando un punto móvil da más de una vuelta alrededor del polo para formar una curva, la figura del arco del círculo se convierte en un círculo completo. Lo anterior se presta a confusiones de interpretación dependiendo de cómo estén diseñadas las figuras, aunque lo más correcto es usar una espiral de Arquímedes (Coolidge, 1963; Collette, 1986; Boyer, 1991; Gross, 1998; Boyadzhiev, 2007) multiplicada por la función delimitadora para reemplazar el arco de circunferencia en este tipo de situaciones (Figura 3.2).

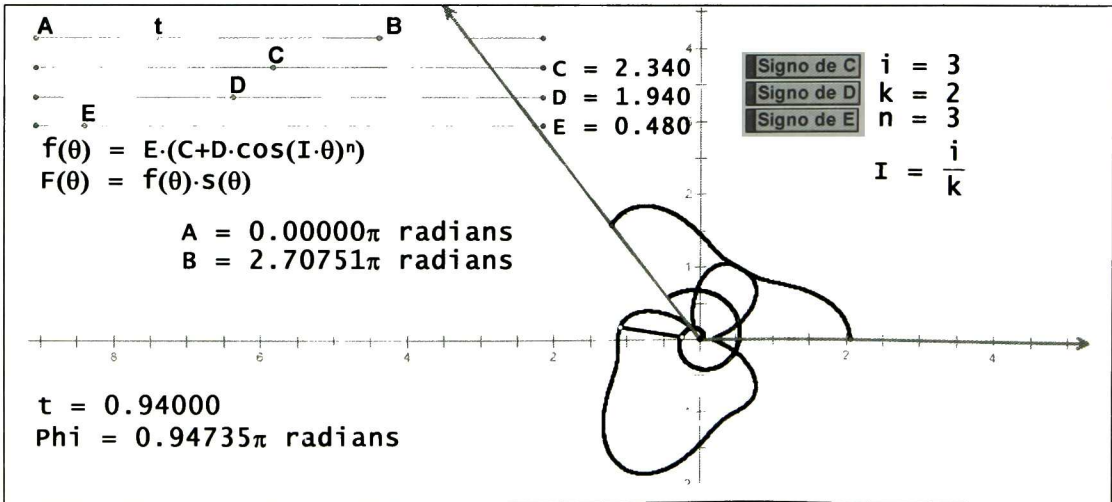


Figura 3.2. Función delimitadora con los extremos variables de su dominio.

Otra aplicación práctica de la función delimitadora consiste en simular el trazo de una curva, a diferencia de usar el rastro de un punto móvil para dibujar una figura ahora se cuenta con un lugar geométrico para interactuar por medio de la geometría dinámica. Por ejemplo: al colocar dos deslizadores a y b en un misma barra de control para unirlos por medio de un segmento, y en dicho segmento se coloca un nuevo deslizador, el cual sirve para controlar el movimiento de otro punto sobre la curva en sí. También pueden ponerse otros puntos sobre la figura y construir nuevos lugares geométricos, y de esta forma analizar un problema determinado.

Recapitulando para terminar, con la función de Heaveside es posible unir partes de curvas diferentes a fin de crear nuevas curvas y por ello, la función delimitadora sólo está definida en un intervalo; por ejemplo, el cambio de órbita (Lawden, 1957. ver Figura 3.3), o si se prefiere, una aplicación a la arquitectura (Phillips, 1926).

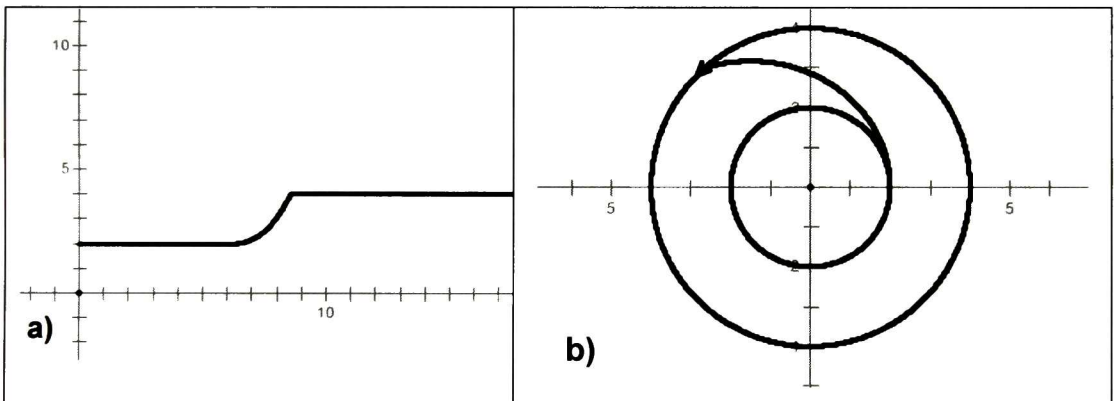


Figura 3.3. Cambio de órbita, sistema a) cartesiano y b) polar.

3.2 Curvas Polares Generalizadas.

En algunos libros ya mencionados en la Sección 1.3 hay una pequeño selección de curvas; por ejemplo, la cisoide de Diocles (ver Figura 3.4.a; Heath, 1960; McCarthy, 1941) es una función fácil de graficar

$$r = \frac{\text{Sen}^2(\theta)}{\text{Cos}(\theta)}.$$

Por otra parte, la parábola de Neil (Figura 3.4.b; Boyer, 1991; Bains, 2007), cuya fórmula es

$$r = \frac{\text{Sen}^2(\theta)}{\text{Cos}^3(\theta)}$$

Si ahora se escoge el bifolio (ver Figura 3.4.c) se expresa como

$$r = \text{Sen}(\theta)\text{Cos}^2(\theta),$$

la única diferencia al comparar las ecuaciones anteriores se encuentra en las potencias del seno y el coseno.

Todas estas funciones pueden escribirse por medio de una sola fórmula

$$r = \text{Sen}^m(\theta)\text{Cos}^n(\theta),$$

para $m=2$ y $n=-1$ se recupera la cisoide de Diocles, con $n=-3$ recobramos la parábola de Neil, si $m=1$ y $n=2$ volvemos con el bifolio. En una sola igualdad se ha logrado incorporar tres curvas aparentemente diferentes (ver Figura 3.4.d).

Otro ejemplo es la cicloide de Ceva (Collette, 1986), dada por $r = 1 + 2\text{Cos}(2\theta)$, pero la limaçon de Pascal (Scarpello, 2005) tiene una expresión más general $r = A + B\text{Cos}(\theta)$, la cual define una familia de curvas debida a los posibles valores de A y B (Rigge, 1919; Janes, 1937; Grossman, 1982; McAllister, 1983; Cundy, 1990).

Se debe tener cuidado al modificar la ecuación de la cicloide de Ceva como $r = A + B\text{Cos}(2\theta)$, pues si $A=0$ lo que se obtiene es una rosa (May, 1981; Fay, 1983; Maurer, 1987; Althoen, 1990; Hall, 1992; Urban, 1992; Gordon, 1992; Shepard, 1997).

La existencia de fórmulas particulares y generales de las curvas en diferentes libros de Geometría Analítica, de Cálculo Diferencial e Integral y de Teoría de Curvas nos hace pensar que algo falta por definir.

En el pasado, era necesario graficar con lápiz y papel (Bettinger, 1937; Hammer, 1941; Andree, 1951; Essary, 1982; Germain-McCarthy, 1994, 1995; Pritikin, 1995; Denson, 1995); por esto se usaban fórmulas particulares y cuando una curva era más importante se escribía de una forma más general; por ejemplo, los óvalos de Cassini (Kline, 1990; Boyer, 1991; Sánchez, 2001).

Tal vez, de esa forma, empieza a surgir la idea de las familias de curvas. Siguiendo con esta línea de pensamiento, la cicloide de Ceva terminó rezagada en

esta evolución natural; por lo tanto, es más fácil encontrarla con una fórmula particular en lugar de una general.

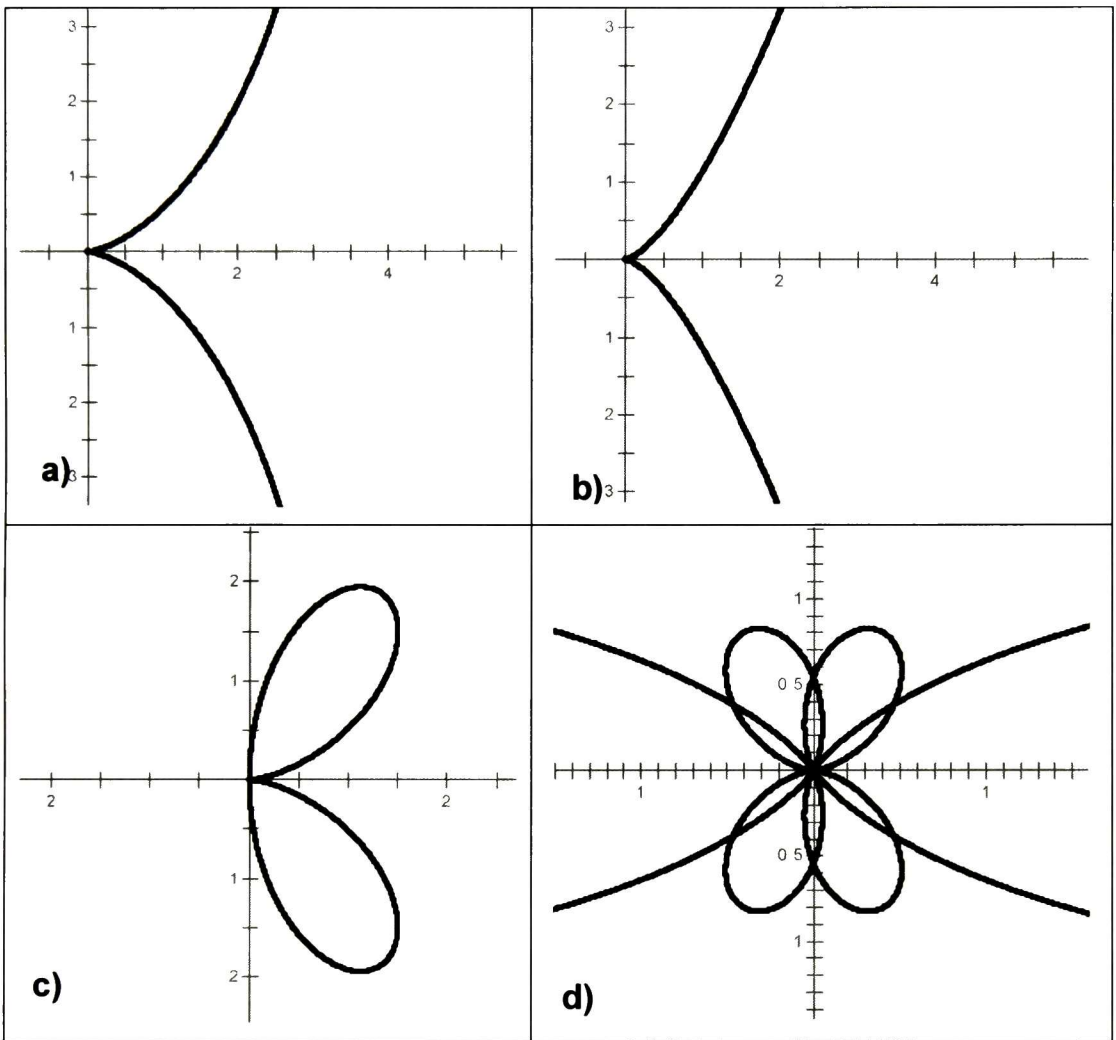


Figura 3.4. a) La cisoide de Diocles, b) la parábola de Neil, c) el bifolio y d) la fórmula generalizada con $i = 3$, $m = k = 2$ y $n = j = 1$.

Anteriormente a nuestra era digital, era difícil tratar de dibujar las curvas por medio de la regla y el compás, por esto fue necesario construir un mecanismo complicado como el espirógrafo para poder trazar algunas curvas (Rigge, 1919, 1920 y 1922; Simpson, 1966; Nash, 1977; Simoson, 1997; Oliveros, 1999; Deck, 2000;

Boychev, 2002); incluso se requería un mecanismo para poder graficar la limaçon de Pascal (Rigge, 1919; Janes, 1937).

A principios del siglo pasado, se escribían artículos sobre este tipo de curvas en revistas de investigación en matemáticas (Moritz, 1917; Rigge, *Óp. cit.*)

En contraste, ahora este tipo de artículos sólo se publican por revistas de matemática educativa y divulgación matemática (Maurer, 1987; Fay, 1989; Hall, 1992; Gordon, 1993; Bange (1993); Simoson, 1997; Fay, 1997; Brannen, 2001; Breman, 2006; Bains, 2007; Kalman, 2007).

Afortunadamente, no se requiere hacer este trabajo a mano pues gracias a la tecnología se puede graficar una gran cantidad de curvas.

Regresando a los ejemplos, la “cúbica de Tschirnhausen” (Boyer, 1991; Eidswick, 1993) fue generalizada por MacLaurin como una curva de la forma $r^n = a\text{Cos}(n\theta)$, para una n racional (Winger, 1934; Stratton, 1936; Aucoin, 1970; Boyer, 1991; Scarpello, 2005; Levrie, 2007). La idea de expresar una curva de la forma $r = a\text{Cos}(n\theta)$ subyace en la partición del ángulo (Little, 1964; Rees, 1965; Graef, 1969).

Yates (1960) conoce lo anterior y abre la posibilidad de agrupar algunas curvas polares diferentes en una sola forma más general cuando sus expresiones son muy parecidas; pero no tuvo mucho eco, tal vez porque no encontró ningún resultado importante al continuar con esta idea; además del inconveniente de graficar a mano.

Al continuar con la propuesta de MacLaurin para cambiar la periodicidad de las funciones, tenemos una fórmula alternativa para la rosa (ver Apéndice B y la Figura 3.5.a; se trata de generalizar usando los coeficientes A y B , como en el artículo de Grant, 1985)

$$r = A\text{Sen}(j\theta) + B\text{Cos}(j\theta)$$

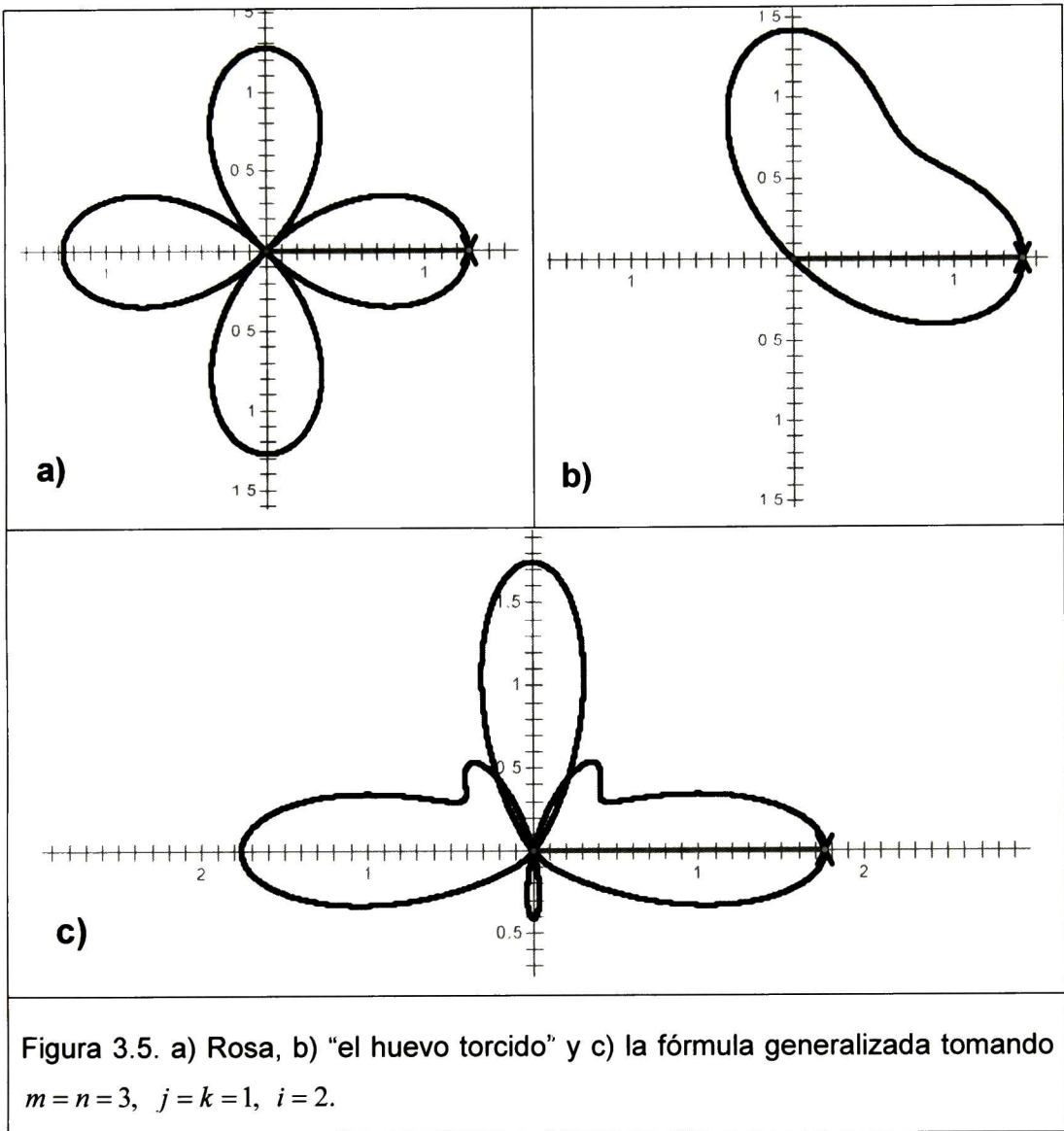
y por otra parte está “el huevo torcido” (Figura 3.5.b)

$$r = \text{Sen}^3(\theta) + \text{Cos}^3(\theta).$$

Estas dos curvas pueden incluirse en una sola igualdad

$$r = A\text{Sen}^m\left(\frac{i\theta}{k}\right) + B\text{Cos}^n\left(\frac{j\theta}{k}\right),$$

para los valores adecuados se recupera la rosa o “el huevo torcido”; además de obtener una gran cantidad de nuevas curvas (ver Figura 3.5.c).



Hasta ahora se ha mostrado como agrupar diferentes curvas por medio de las semejanzas encontradas en sus fórmulas, por ende, la primera propuesta de este trabajo consiste en juntar varias curvas en una sola expresión, como es el caso de las cónicas (la elipse, la parábola, la hipérbola y el círculo); donde se tiene una sola

ecuación en coordenadas polares (Gulasekharam, 1943; Coffman, 1963; Drucker, 1996; Brozinsky, 1984; Teets, 1998)

$$r = \frac{B}{C + D \cos(\theta)},$$

es por esto que se les considera una familia de curvas. Apostol (2007) propone la fórmula de una cónica generalizada como

$$R(\theta) = \frac{R_0}{1 + \lambda \text{Sen}(k\theta)}$$

La segunda propuesta es crear una ecuación más general a partir de una igualdad sencilla, para ejemplificar lo anterior se usa la crunodal cúbica (Figura 3.6.a)

$$r = \frac{(\text{Tan}^2(\theta) - 1)}{\text{Cos}(\theta)}.$$

haciendo unos pequeños cambios (ver Figura 3.6.b, donde se usan valores arbitrarios)

$$r = D \left(A \text{Tan}^n \left(\frac{i\theta}{k} \right) - B \right) \text{Sec}^m \left(\frac{j\theta}{k} \right) + C$$

Se recupera la crunodal cúbica dando los valores adecuados a los coeficientes A , B , C y D ; a los factores i , j y k ; así como las potencias n y m (ver Apéndice B).

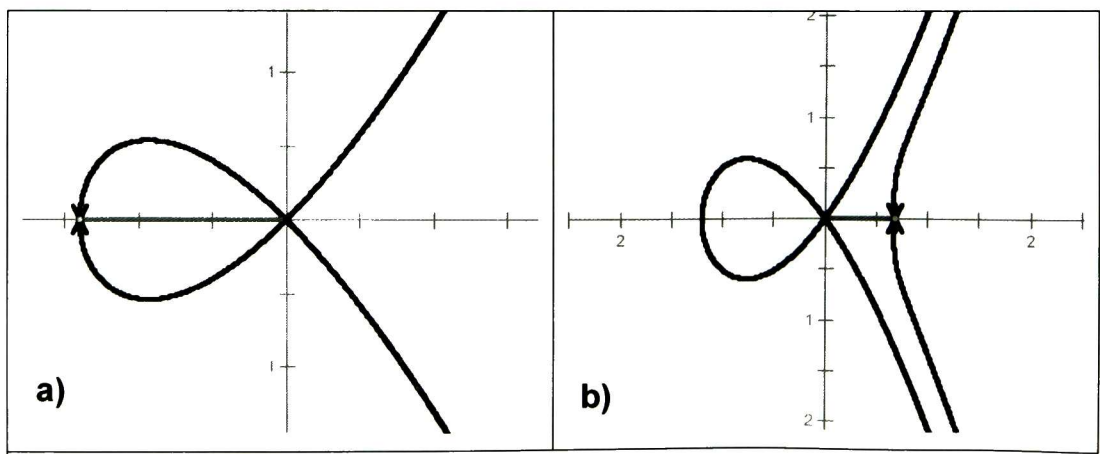


Figura 3.6. a) Crunodal cúbica y b) la fórmula generalizada.

Para empezar, se sustituyen los coeficientes constantes por coeficientes variables, como éstos son cantidades continuas es conveniente modificarlos mediante deslizadores. Por otra parte, se sustituye θ por $j\theta/k$ con el propósito de cambiar el período de la función, donde j/k sea un número racional y además, se cambian las potencias de las fórmulas dadas en los libros con un parámetro variable n . La potencia y los parámetros que controlan la periodicidad de la función se cambian con los botones, pues son usados como cantidades discretas que varían de uno en uno.

La geometría dinámica nos da la posibilidad de trabajar con muchas curvas al cambiar los coeficientes, las potencias y los parámetros (los cuales determinan la periodicidad de una fórmula generalizada); ya sea por medio de botones o deslizadores. También, podemos llevar al límite el *software* al complicar las gráficas tanto como se desee.

Así se abren nuevas puertas para explorar la geometría; si bien es cierto, no hay nuevos descubrimientos sobre las curvas ya estudiadas durante siglos; en cambio, pueden conseguirse resultados interesantes para las recientes formas de describir las curvas en un contexto más cercano a la didáctica y la pedagogía. Además, de poder generar material didáctico en forma de hojas electrónicas para apoyar a los alumnos en su proceso de aprendizaje.

Para concluir se verá dos últimos ejemplos.

Volviendo a los ejemplos, la siguiente ecuación recopila de forma natural un conjunto de curvas diferentes:

$$r = A + BCos^n\left(\frac{j\theta}{k}\right),$$

la limaçon de Pascal, la rosa, la cicloide de Ceva, concoide de Nicomedes, la espiral de Epi, la kampyle de Eudoxo (Heath, 1960), la acnodal cúbica, la sextica de Cayley (Garret, 1930), la nefroide de Freeth, la trisectrix de MacLaurin (Eidwick, 1993) y la cúbica de Tschirnhausen; todo depende de los valores que tomen los coeficientes A y B , los factores j y k , así como la potencia n (ver Apéndice B).

La fórmula anterior aún puede modificarse para incluir a las cónicas (ver Figura 3.7):

$$r = A + \frac{B}{C + D \cos^n\left(\frac{j\theta}{k}\right)} \quad (3.3)$$

Como se observa, el argumento se dividió entre k y por ello el ángulo debe ir de 0 a $2\pi k$, para que el punto inicial coincida con el punto final pues las funciones son periódicas. Asimismo, al multiplicar por j el intervalo es realmente $[0, 2\pi k/j]$, así se llegan a tener curvas muy complejas (como se muestra en la Figura 3.7.b).

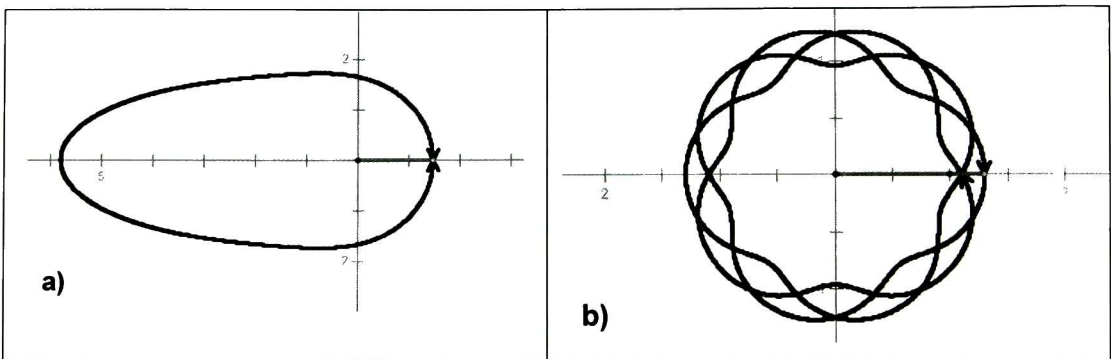


Figura 3.7 Fórmula generalizada para catorce curvas conocidas dando los valores apropiados.

Como último ejemplo se usará la scarabeus (Figura 3.8.a), la cual no puede agruparse con otras curvas,

$$r = \cos(\theta) - \cos(2\theta)$$

pero siguiendo la propuesta de MacLaurin puede reescribirse la fórmula como

$$r = A \cos(i\theta) + B \cos^n\left(\frac{j}{k}\theta\right) + C$$

para darle una mayor riqueza geométrica (Figura 3.8.b). Se recupera la scarabeus para $i = k = n = 1$, $j = 2$, $A = -B = 1$ y $C = 0$. Por supuesto, no es la única forma para tomar los valores anteriores (ver Figura 3.9).

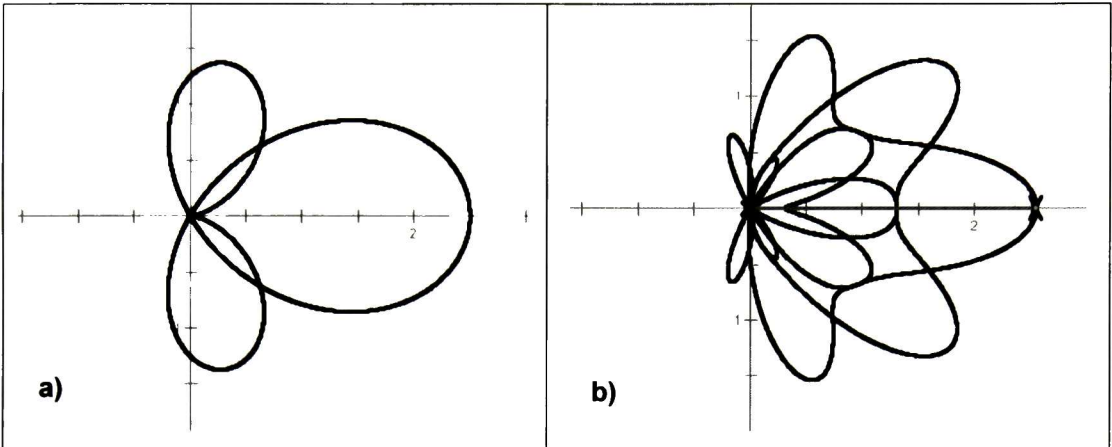


Figura 3.8. a) La scarabeus, y b) su fórmula generalizada.

3.3 La Mezcla de dos Tipos de Geometrías.

La Geometría Analítica se utiliza para graficar una curva polar por medio de una fórmula, un punto móvil sobre ésta y el centro del círculo osculador como una construcción inicial (ver Apéndice C.4); después se usa la Geometría Euclidiana (regla y compás) para construir el círculo de curvatura, así como las rectas normal y tangente a la curva (en este orden). Se debe resaltar la dualidad de los puntos geométricos de un paquete de geometría dinámica, pues se crean por medio de una ecuación y después se reutilizan para construir lugares geométricos por medio de regla y compás.

Esto nos sugiere un nuevo camino para trabajar la geometría con este tipo de *software*. Ahora una figura puede modificarse por medio de los deslizadores y sobre ella es posible construir un lugar geométrico usando las propiedades de la curva. Si sólo se usa regla y compás, no se tendría un verdadero control ni los resultados numéricos que nos da el *software*; aunado a ello, existen curvas difíciles de generar por estos medios.

En contraparte, escribir una fórmula de una curva resulta sencillo; sin embargo, no necesariamente es fácil hacer nuevas construcciones sobre ella usando ecuaciones. El álgebra puede complicarse demasiado, por esto cabe la posibilidad de perder la

parte dinámica de la construcción e incluso sobrecargar el *software*, y el resultado es una página trabada, donde no se puede hacer nada.

Así, con el punto móvil sobre la curva polar y el centro del círculo osculador, obtenidos por fórmulas (ver Apéndice C.4), se crea este círculo usando las instrucciones para la construcción de tipo euclidiano; también se traza una línea recta perpendicular a la curva al unir dichos puntos. Finalmente, se genera una recta normal a la anterior que pase por el punto móvil, ésta es la recta tangente a la curva polar.

Es importante hacer la corrección pertinente para el ángulo de rotación cuando se construye el centro del círculo osculador y la recta tangente a la curva, esta última de forma directa, o sea, usando la Ecuación (2.10). Para esto último se usa

$$X(\theta) = x(\theta)\text{Cos}(\mu\pi) - y(\theta)\text{Sen}(\mu\pi)$$

$$Y(\theta) = x(\theta)\text{Sen}(\mu\pi) + y(\theta)\text{Cos}(\mu\pi),$$

con $\theta = \nu\pi$ también debe realizarse para $r = r(\theta)$.

La idea de usar un *software* de geometría dinámica da la oportunidad de tener un auxiliar fácil de usar para trabajar con los estudiantes, sin necesidad de recurrir a un lenguaje de programación para crear construcciones dinámicas. Aprender a programar correctamente lleva tiempo; pues una interface gráfica requiere una gran cantidad de líneas en el programa, con el cual se pueda interactuar, modificar y animar de una forma sencilla. Una vez terminada esta labor, los resultados no necesariamente son los deseados por el programador.

El poder manejar los elementos geométricos con la geometría dinámica nos da las pautas convenientes para generar un programa el cual satisfaga al usuario o le dé las soluciones buscadas sin necesidad de llevar a cabo un trabajo complicado y excesivo. También le sirve a un programador para explorar las opciones y darse cuenta de los elementos necesarios para hacer su programa, así como las dificultades que puede encontrar tanto en su elaboración y su uso.

En resumen, al mezclar de forma cuidadosa la Geometría Analítica con la Euclidiana nos permite tener control, resultados numéricos y facilidad de generar los

elementos deseados para trabajar. El límite nos lo da la capacidad de la máquina y del *software* usado.

3.4 Algunos Inconvenientes con el *Software*.

Sin embargo, a pesar de las ventajas descritas en las secciones anteriores, aún hay inconvenientes; por ejemplo, como que el punto móvil se pierde visualmente cuando la figura es muy complicada (Figura 3.9.a); para solucionar este obstáculo no es suficiente construir un radio vector del polo a dicho punto. Tampoco se resuelve al graficar las rectas tangente y normal a la curva en punto móvil, como se observa en la Figura 3.9.b.

No obstante, es aquí donde encontramos otra justificación para crear el círculo osculador, visualmente se tiene los elementos para seguir al punto móvil de forma consciente (ver Figura 3.9.c).

También es importante mencionar que la curva anterior tiene un problema con el dominio del botón del punto móvil. En estos casos no es posible usar como variable la cota superior del dominio; por lo tanto, se toma el intervalo $[0, 2k/j]$ calculado para el mayor valor que pueda tener $2k/j$. Como un efecto secundario, el punto da un mayor número de vueltas en la curva para $j = k = 1$.

3.5 Curvas Complicadas.

En esta sección se hablará sobre cuatro curvas cuyas gráficas son complicadas: el crisantemo, la mariposa, la curva del diablo (Smith, 1958) y la superforma.

En el caso del crisantemo (Figura 3.10.a) y de la mariposa (Figura 3.10.b; Fay 1989, 1997; Leinbach, 1996) a pesar de tener gráficas complicadas, no existe ningún obstáculo para crear sus hojas electrónicas; aunque se calculan las derivadas para obtener su curvatura (ver Apéndice C.4), y esto último puede generar páginas "muy pesadas" las cuales requieren un mayor número de *bytes* para su existencia y buen funcionamiento.

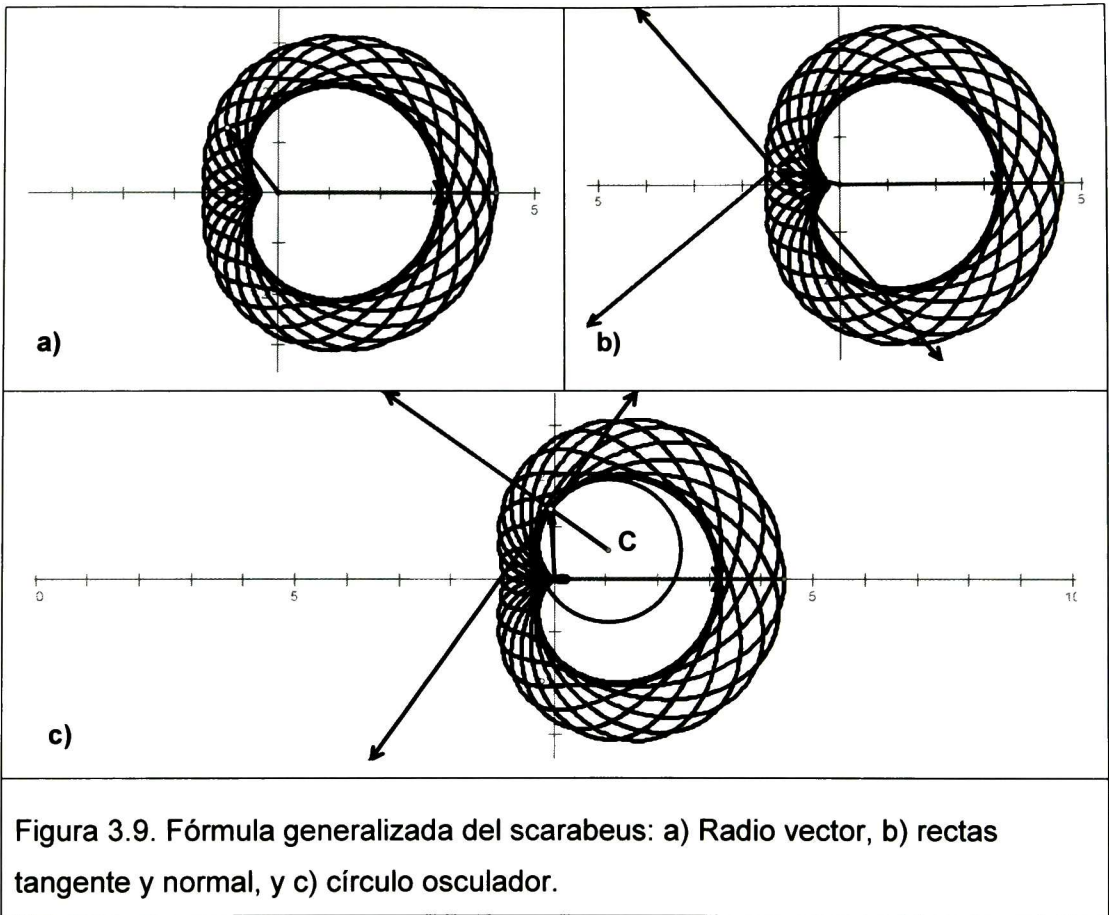


Figura 3.9. Fórmula generalizada del scarabeus: a) Radio vector, b) rectas tangente y normal, y c) círculo osculador.

En contraste, la curva del diablo representa un problema, a pesar de tener una forma sencilla en apariencia (Figura 3.10.c), esto se debe a la manera de obtener las derivadas por medio del CAS del *software* de geometría dinámica; lo cual origina que los deslizadores se traben, el funcionamiento dinámico por medio de los botones de animación sea lento y no se den adecuadamente las animaciones. Estos problemas se presentan para algunas curvas cuyas fórmulas incluyen divisiones o raíces de cualquier orden.

Las dificultades al mover un deslizador para la página de la curva del diablo, se deben a que el *software* calcula todo nuevamente para el valor actual hasta terminar. Pero como el punto pasaba por valores intermedios, esto representa demasiados procesos para la computadora. Lo mismo sucede para las animaciones.

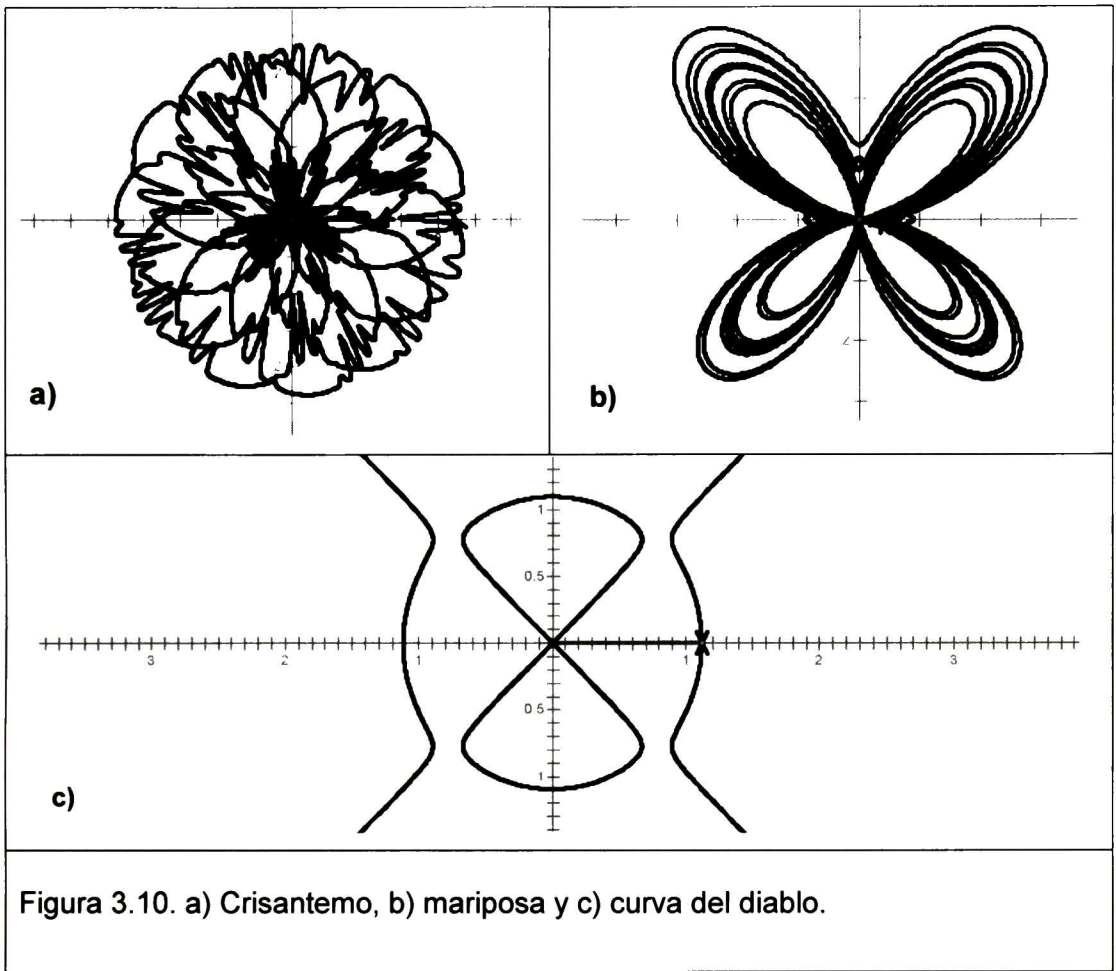


Figura 3.10. a) Crisantemo, b) mariposa y c) curva del diablo.

Se encontró que hay un límite para el *software* utilizado y fue necesario darle la vuelta a este obstáculo. Una posible solución era quitar los parámetros que multiplicaban al ángulo θ pero esto significaba ir en contra de los objetivos de este trabajo.

A continuación se ahondará más sobre cómo se resolvieron estos inconvenientes con la curva del diablo:

Para empezar la fórmula usada en la hoja electrónica es la siguiente

$$r = E \sqrt{\frac{A - B \tan^m \left(\frac{i\theta}{k} \right)}{C - D \tan^n \left(\frac{j\theta}{k} \right)}}$$

Si se deriva por medio del CAS del *software* empleado se tiene una expresión muy grande; además se requiere una segunda derivada para sustituirla en las expresiones del Apéndice C.6.

El CAS calcula mecánicamente las derivadas, no simplifica ni factoriza las expresiones algebraicas obtenidas; esto debe hacerlo el usuario del *software*. Por lo que se propuso reescribir la curva del diablo como

$$r(\theta) = E \sqrt{\frac{s(\theta)}{t(\theta)}},$$

donde las funciones auxiliares son

$$s(\theta) = A - B \tan^m \left(\frac{i\theta}{k} \right)$$

$$t(\theta) = C - D \tan^n \left(\frac{j\theta}{k} \right).$$

Ahora, se calcula la primera y la segunda derivadas para $s(\theta)$ y $t(\theta)$, pues se desea encontrar la primera y la segunda derivada de $f(\theta) = \sqrt{v(\theta)}$ para $v(\theta) = s(\theta)/t(\theta)$. Es aquí donde se sustituyen las primeras y segundas derivadas de las funciones auxiliares.

Finalmente, hay que sustituir todos los resultados en las ecuaciones del Apéndice C.6, tomando en cuenta lo explicado en la Sección 3.4 sobre la rotación de la curva polar y de los elementos generados a partir de ella. Sólo así, se optimiza su funcionamiento y se evita los inconvenientes de la animación con el círculo osculador.

El resultado para la curva del diablo es una página electrónica con “menor peso” y con expresiones más pequeñas para la primera y la segunda derivadas. Además, ya no hay obstáculos con los elementos para controlar y cambiar cualquier parámetro. Sin embargo, para otras curvas puede tener el efecto contrario, de aumentar el “peso” de la hoja electrónica; por ejemplo las formas generalizadas de la curva cruciforme, la hippopede de Proclus (Heath, 1960), el frijol, la bifoliada, la curva de Lamé, etc. (ver Apéndice B), sin que esto cause ningún revés.

No obstante, el funcionamiento de los elementos de control sigue siendo óptimo, es probable que los cambios efectuados mejoren la situación cuando se usa

computadoras con recursos limitados de memoria y procesador. Así, después de trabajar con esta curva, puedo afirmar de forma personal que el nombre de curva del diablo está plenamente justificado.

Aunque la superforma (Gielis, 2003), no genera dificultades con el *software*, tiene características interesantes pues puede hacerse un triángulo equilátero por medio de una fórmula, así como un cuadrado, un pentágono, etc. Su igualdad es

$$r = \left[\sqrt[4]{\left| \frac{1}{a} \cos\left(\frac{i\theta}{k}\right) \right|^m + \left| \frac{1}{b} \sin\left(\frac{j\theta}{k}\right) \right|^m} \right]^{-1}$$

Por ello merece una mención aparte (Figura 3.11). Lamentablemente la forma de manejar esta curva no es la más adecuada, pues fue necesario crear demasiados elementos de control; además de usarlos para generar nuevos parámetros para situaciones extremas. Por lo tanto, la página electrónica es complicada de utilizar, lo cual justifica incluirla en esta sección.

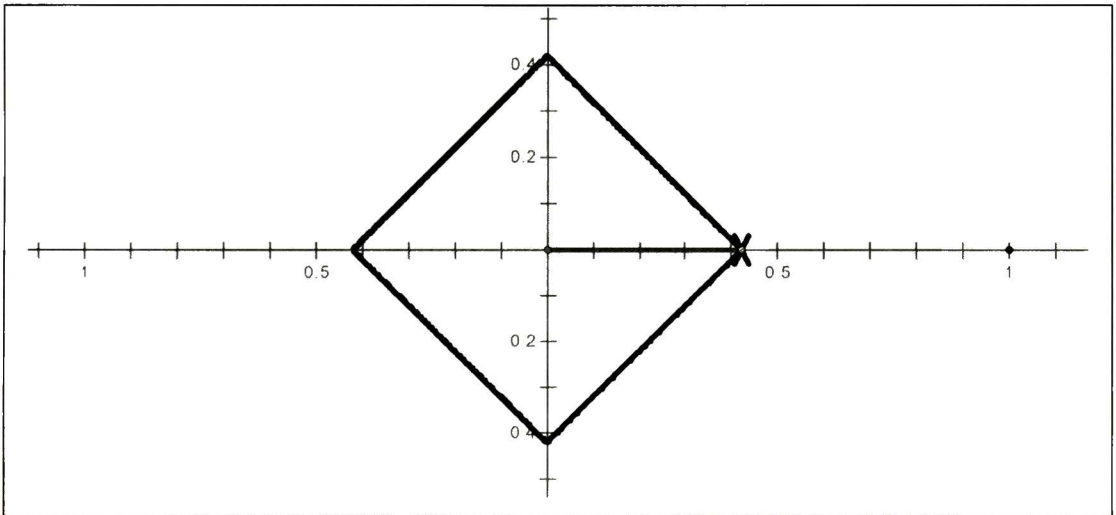


Figura 3.11. Superforma para $i = j = k = 4$, $m = n = L = 1$, y $a = b$.

Capítulo 4

Aplicaciones de las Páginas Electrónicas.

En este capítulo se explicarán el uso de las páginas electrónicas ya referidas anteriormente, las cuales nos permitirán estudiar la curvatura de una curva polar, su evoluta y los puntos de inflexión, así como encontrar las intersecciones de dos curvas polares. Estas hojas virtuales fueron creadas para sustentar el presente trabajo. Las figuras muestran sólo una representación estática de lo que realmente se tiene. Aquí se trata las construcciones geométricas euclidianas sobre curvas ya generadas por una fórmula analítica; además, se habla un poco de la velocidad y aceleración, como antecedentes de la hodógrafa. Se finaliza el capítulo con la construcción de piezas para mecanismos.

4.1 La Evoluta y la Curvatura.

El lugar geométrico generado por el centro de curvatura es la evoluta (ver Figura 4.1 y Apéndice C.3). Esta última se esboza por medio del “comando” para generar el rastro del punto, o al hacer una construcción por medio de un punto t en uno de los deslizadores, entonces se mide su posición en x y se le utiliza para calcular el ángulo donde se evalúan las coordenadas del centro del círculo osculador

$$\Phi = \left(\mu + 2k \left| \frac{x_a - x_t}{x_a - x_b} \right| \right) \pi ,$$

la k es por la periodicidad de una función $r = f(\theta/k)$, y se tiene μ para compensar la rotación de la curva, finalmente x_a y x_b son los extremos del deslizador.

El mismo método se usa para graficar la curvatura y el radio de curvatura de una curva polar en el eje vertical y el ángulo θ en el eje horizontal (Figuras 4.2.a y 4.2.b), otra opción es graficar ambos en coordenadas polares (Figuras 4.2.c y 4.2.d).

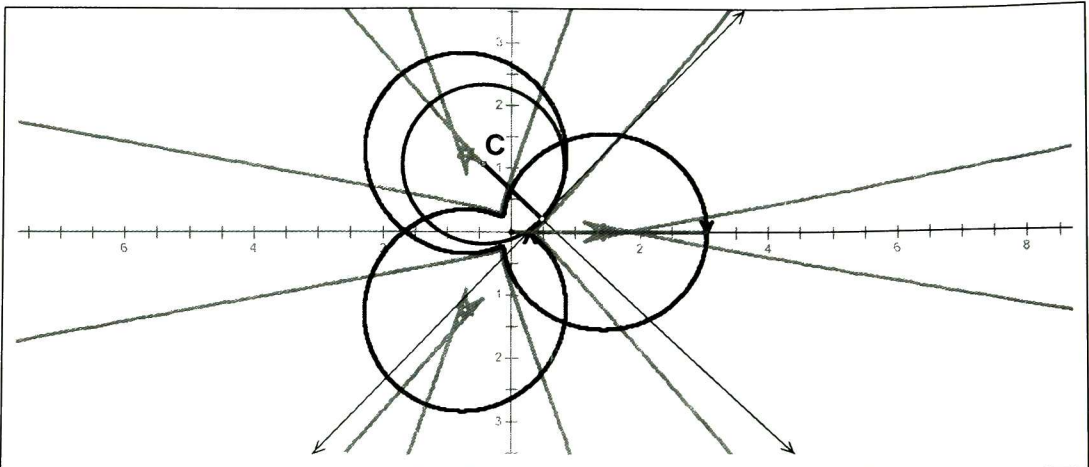


Figura 4.1. Evoluta.

Es interesante observar el punto móvil pasar por un lazo de la curva polar y como éste va recorriéndolo y adaptándose a su forma (Figura 4.3.a). Otra característica de esta construcción se presenta cuando el círculo osculador pasa por un punto cúspide de la curva original (Maravall, 1965); o sea, cuando se tiene un pico en la curva polar. Se puede distinguir que el círculo osculador un poco antes de llegar al punto cúspide empieza a empequeñecerse, entonces al alcanzarlo desaparece de improviso y vuelve a surgir de repente al alejarse de él (Figura 4.3.b).

Para una curva abierta puede cortarse el plano siguiendo su gráfica y obtener dos partes (ver Figura 3.6.a). La dificultad se encuentra cuando existe un lazo, pues se obtienen tres partes; así entre mayor cantidad de lazos se obtienen más partes aisladas entre sí (Figura 4.3.a) o gráficas más complejas en su forma (Figura 3.9).

4.2 Puntos de Inflexión.

Para el punto de inflexión, nuevamente nos vemos restringidos por el hecho de trabajar con lápiz y papel y no contar con una figura en movimiento como en una hoja electrónica; con el fin de compensar esta situación se da una secuencia de eventos en la Figura 4.4, la cual se explica a continuación de forma breve.

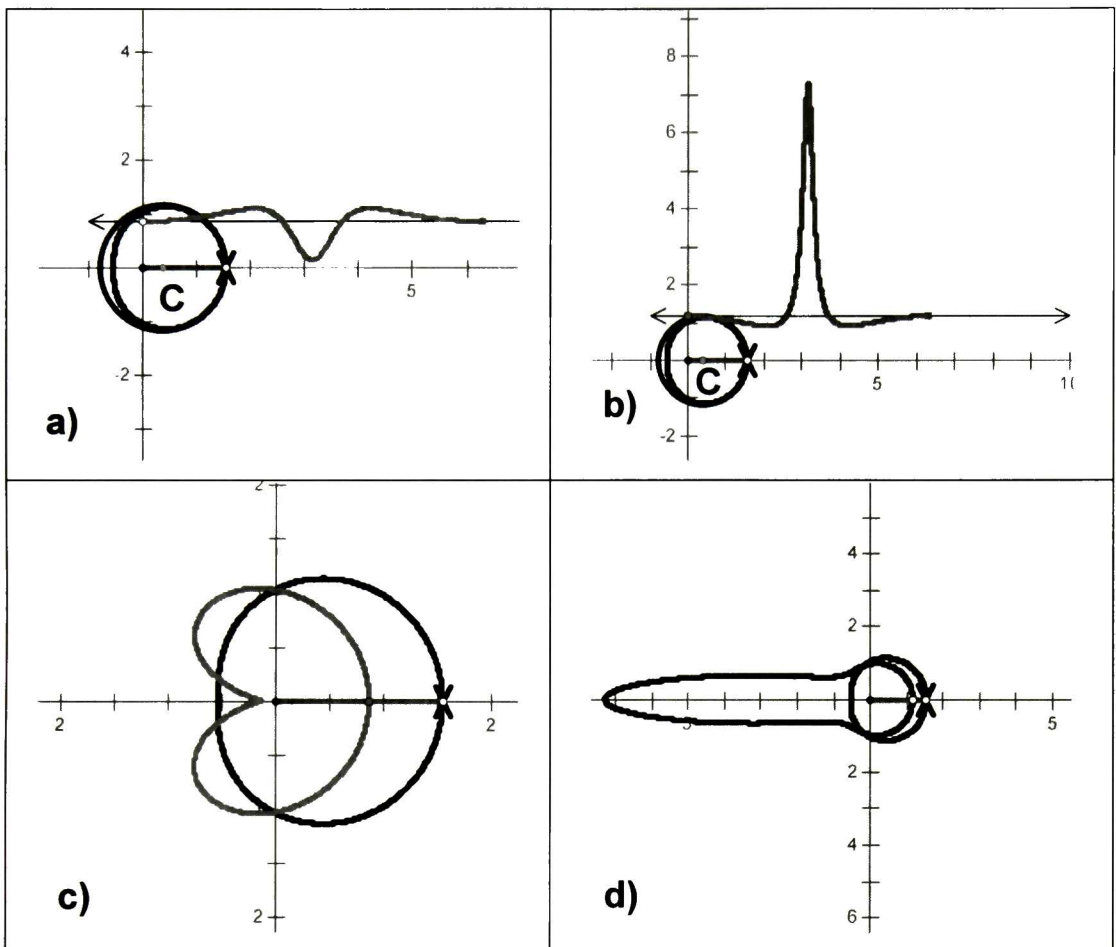


Figura 4.2. Limaçon de Pascal, su curvatura en coordenadas a) cartesianas y c) polares; su radio de curvatura en coordenadas b) cartesianas y d) polares.

La Figura 4.4.a muestra cómo el círculo osculador se adapta a la curva polar y básicamente está dentro de ella; mientras que en la Figura 4.4.b el círculo osculador crece hasta convertirse casi en una línea recta al acercarse al punto de inflexión, en otras palabras se convierte en un círculo de radio infinito. Finalmente, en la Figura 4.4.c el círculo se encuentra afuera de la curva polar.

Una de las ventajas de un software dinámico de geometría se encuentra en el análisis del punto de inflexión en el plano polar. En este proceso, la recta normal a la curva cambia su sentido en el punto de inflexión, pues antes el círculo se pegaba por

dentro de la curva polar cerrada y después de pasar por este punto se adhiere por la parte externa de la curva.

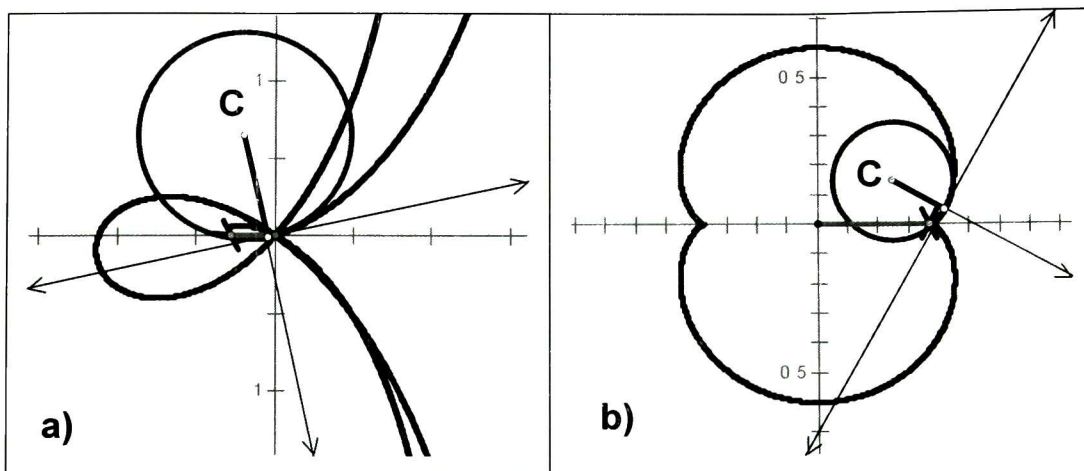


Figura 4.3. Obsérvese el círculo osculador cerca del a) doble lazo para la fórmula generalizada de la trisectrix de McLaurin (Eidwick, 1993), b) punto cúspide de la nefroide (Slogan, 1962; Scarpello, 2005).

Una forma de aprovechar lo anterior es generar un deslizador para apoyarse y encontrar el punto de inflexión cuando se acerca a él, entonces se observa al círculo osculador casi convertirse en una línea recta. El problema es la precisión que puede obtenerse con los deslizadores, pues nos dan pocas cifras después del punto decimal. Una variante de esto, es usar varios deslizadores para ayudarse a obtener las demás cifras. Sin embargo, este proceso es engorroso.

Otra opción es usar un botón de control y tratar de parar el movimiento cuando se está en el punto de inflexión. Si la velocidad del punto es alta, se dificulta oprimir el botón para detenerse en el punto de inflexión; por otra parte, con una velocidad media o baja es muy tardado llegar al punto de inflexión.

También hay otra alternativa, la cual consiste en usar las curvas paralelas, pero es más conveniente discutirla en la Sección 4.5.

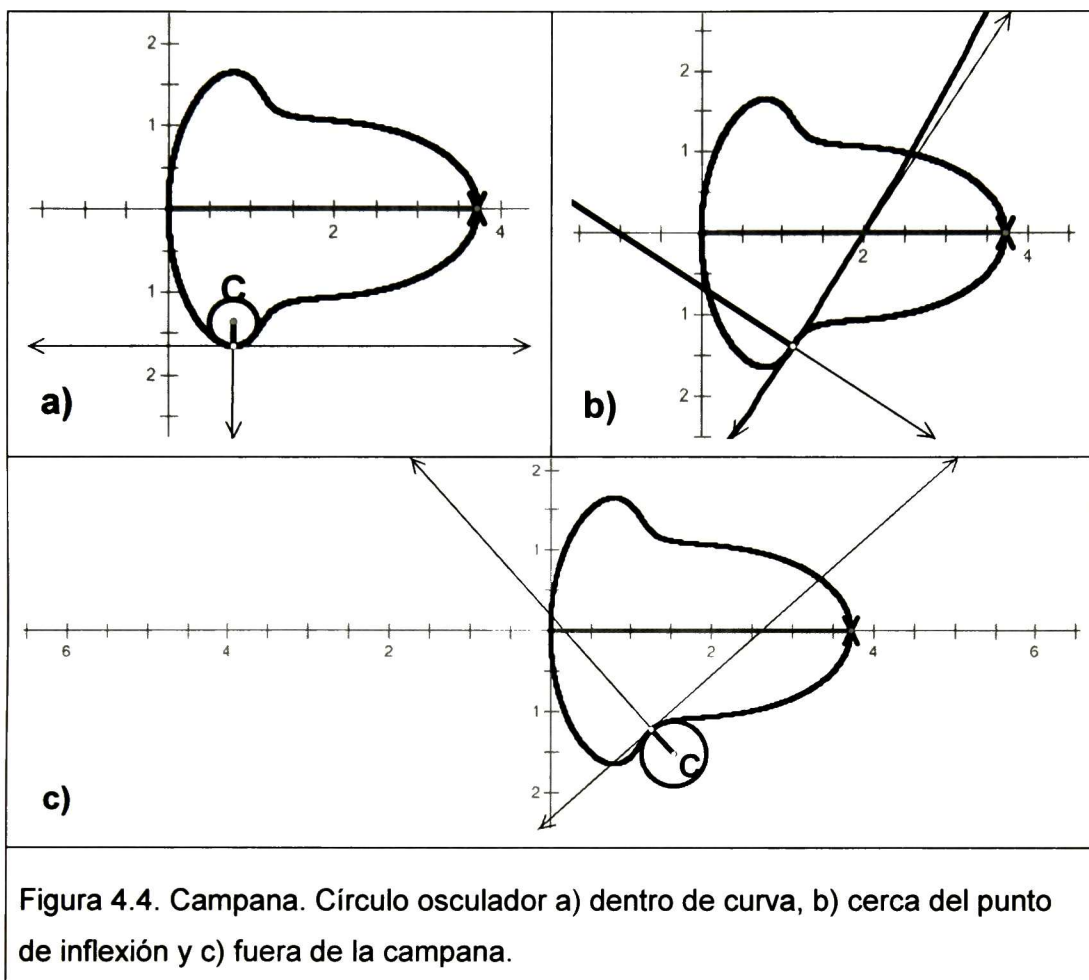


Figura 4.4. Campana. Círculo osculador a) dentro de curva, b) cerca del punto de inflexión y c) fuera de la campana.

4.3 La Geometría Dinámica al Rescate de las Intersecciones.

En cuanto a la parte de las intersecciones de dos curvas polares (ver Sección 2.5), sólo resta trabajar con páginas electrónicas preparadas para clarificar este tema.

En esta sección se explican algunos detalles técnicos para el estudio de dos curvas a la vez; no es conveniente sobrecargar la página electrónica con demasiados botones y deslizadores, pues se requiere una gran cantidad de líneas en la hoja electrónica; por lo tanto, la forma más conveniente de escribir las ecuaciones es con pocos coeficientes, potencias y parámetros controladores de frecuencia.

Empecemos con un ángulo igual a cero: se construyen los puntos móviles de cada curva y se animan con la misma velocidad para que recorran el mismo ángulo

en tiempos iguales. Los puntos móviles no coinciden necesariamente donde las curvas se cruzan, en otras palabras, pasan a diferentes instantes de tiempo.

Para encontrar explícitamente todas las intersecciones de las curvas se crearon las páginas electrónicas tomando en consideración la periodicidad de la función $r = f(\theta)$; entonces se usó su forma alterna de $(-1)^n r = f(\theta + n\pi)$ donde n es un número entero (ver Ejemplos 2, 3 y 4 de la Sección 2.5).

Fue conveniente reescribir lo anterior como $r = (-1)^q f(\theta + q\pi)$, donde q puede tomar los valores de cero o uno. El cambio de nombre de la constante de fase se debe a la gran cantidad de parámetros, variables y constantes ya utilizados. En las Figuras 4.5 y 4.6 se aprecian todos los elementos que constituyen la hoja electrónica. Se puede rotar cualquiera de las dos curvas, variar los coeficientes de sus fórmulas, así como los parámetros q , i y j donde estos dos últimos controlan la periodicidad de la función.

Cuando dos curvas se cruzan, se tiene posibles intersecciones pero sólo se intersecan si los puntos móviles coinciden para el mismo ángulo (o sea, en el mismo instante de tiempo).

El mayor inconveniente para una curva es poder representarla por medio de dos ecuaciones diferentes (Figura 4.6); el botón para p da la posibilidad de ver la otra curva, pues la rota 180° o se oculta la curva verde usando el botón correspondiente. Aparentemente se tiene la misma curva pero con ángulos diferentes, como lo muestran los segmentos de rectas. Esto puede observarse al apretar el botón para cambiar el valor de q

Claro está, todo lo anterior no modifica la necesidad de resolver el sistema de ecuaciones correspondiente a las curvas, y verificar sus soluciones. Después, los alumnos pueden comparar sus resultados con los de las páginas electrónicas y corregir por sí mismos sus errores.

Mientras que la generalización de las fórmulas de las curvas polares nos permite explorar los aspectos más complicados de las figuras, en las intersecciones se ha optado por tener cierta simplicidad en las fórmulas pues el objetivo es diferente. De requerirse, las expresiones pueden complicarse tanto como sea necesario.

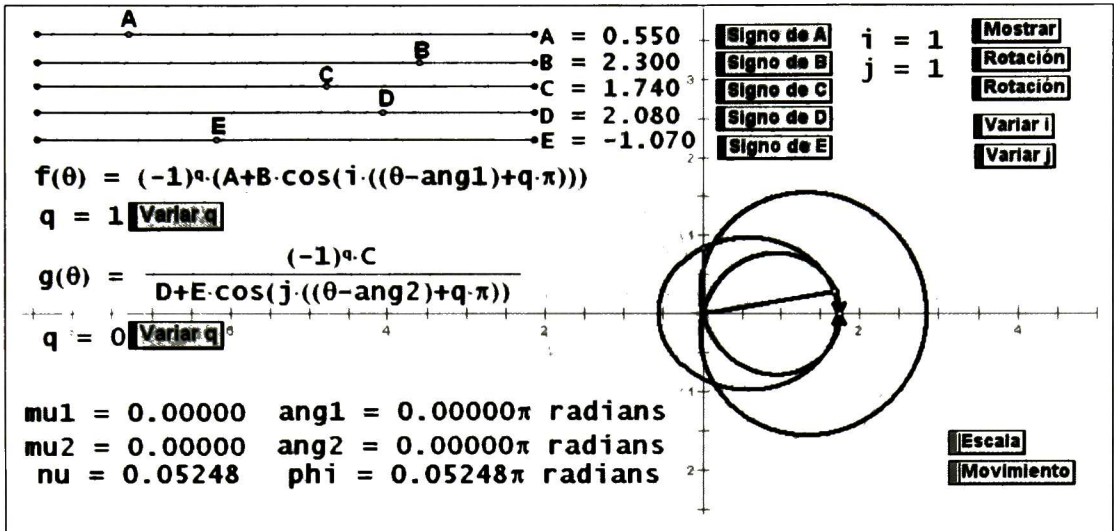


Figura 4.5. Intersección de dos curvas polares diferentes en su gráfica.

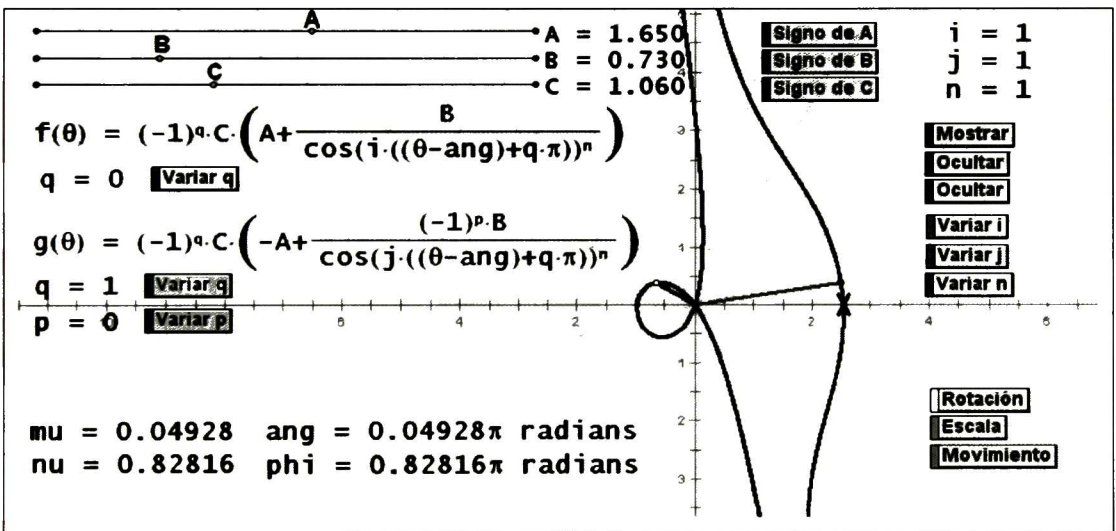


Figura 4.6. Intersección de dos curvas polares iguales en su gráfica.

4.4 Construcciones Geométricas Euclidianas sobre Curvas generadas con Fórmulas.

En la Sección 3.3 se habló de mezclar dos cosas que aparentemente no tienen relación en la geometría dinámica: la Geometría Analítica y Euclidiana, y se resaltó la dualidad de los puntos geométricos en el *software* de geometría dinámica, pues se construyen por medio de una ecuación y después son reutilizados para construir lugares geométricos por medio de regla y compás. En las construcciones geométricas, al mezclarse de forma cuidadosa ambas geometrías nos permite tener el control y la facilidad de generar nuevos elementos para trabajar con ellos, así como los resultados numéricos. En esta sección se dan algunos ejemplos de este tipo de construcciones.

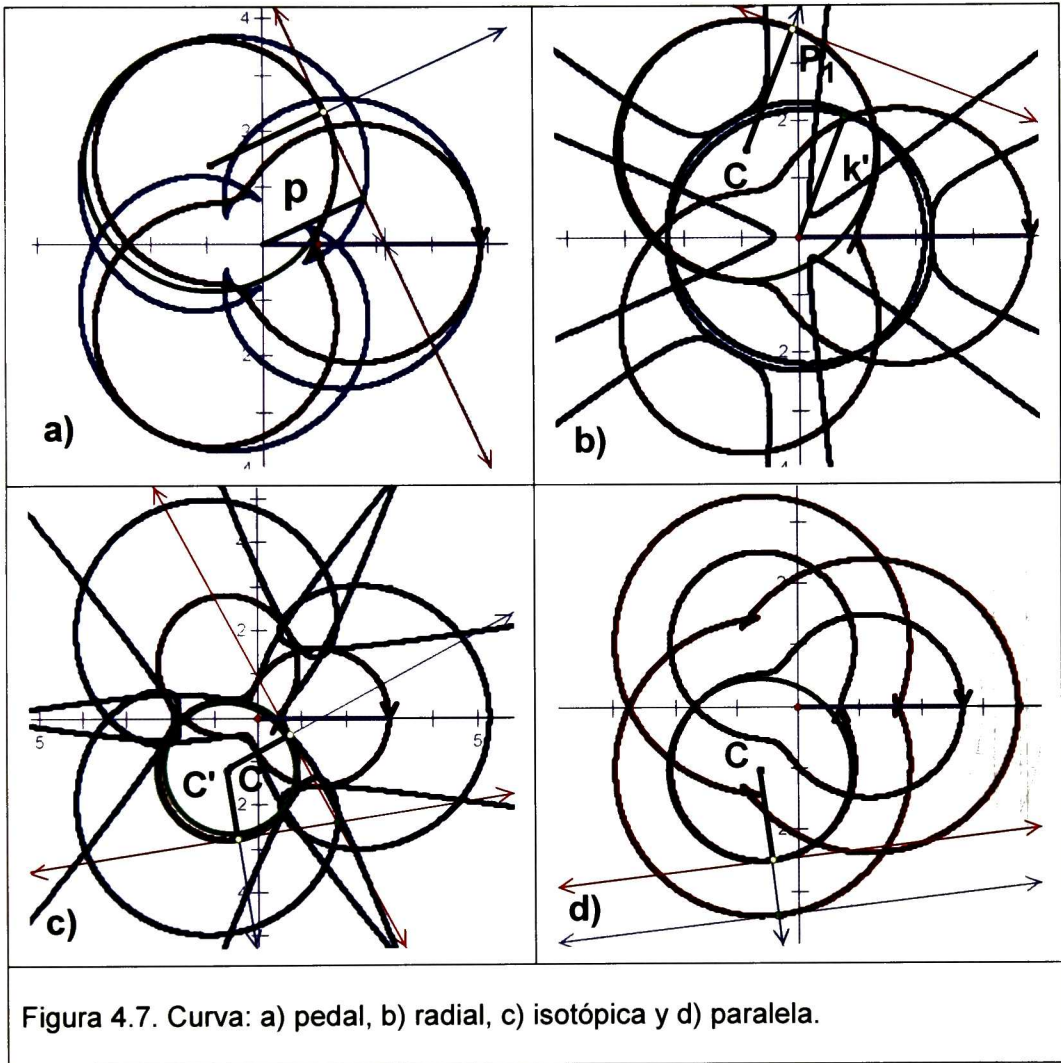
El primer ejemplo consiste en aprovechar la recta tangente a la curva, para crear una recta perpendicular a esta última que pase por el polo (Smith, 2000). El punto donde se intersecan ambas líneas rectas al moverse genera la curva pedal de la curva original (ver Figura 4.7.a; de la Borbolla, 1957; Maravall, 1965; Schot, 1978; Berman, 2006). La recta normal generada es siempre paralela al radio de curvatura como se observa al usar la página virtual.

El segundo ejemplo es la construcción de una curva radial (de la Borbolla, 1957; Maravall, 1965). Se traza una línea recta que pase por el polo y sea paralela a la línea normal a la curva original. Se toma la medida al radio de curvatura para crear un segmento con esta longitud sobre la nueva línea cuyo extremo sea polo, el otro extremo genera la curva radial a la original al oprimir el botón de movimiento (ver Figura 4.7.b).

El tercer ejemplo es de las curvas isotópicas (Maravall, 1965). Dado un parámetro E para desfazar la construcción de un segundo círculo osculador por medio del cual se obtiene una segunda línea recta tangente a la curva; el punto de intersección de las dos rectas tangentes genera la curva isotópica (ver Figura 4.7.c).

El cuarto ejemplo es de las curvas paralelas (de la Borbolla, 1957; Maravall, 1965; Kroopnick, 1982; Boyd, 1998; Banchoff, 1994), dado un parámetro w para trazar una línea paralela a la línea tangente a una distancia w de la curva. El punto de

intersección de esta nueva línea con la normal de la curva original, forma la curva paralela a esta última (ver Figura 4.7.d).



Los cuatro ejemplos anteriores se basan en las indicaciones de cualquier libro de geometría sobre la construcción de la curva pedal, la radial, la isotópica y la paralela; pero con la diferencia de poder cambiar los parámetros en la fórmula generalizada donde las curvas resultantes también se modifican automáticamente de forma consistente con la construcción realizada por medio de un punto t en uno de los deslizadores; incluso al usar los botones, dicha estructura sigue siendo correcta.

4.5 Puntos de Inflexión obtenidos con las Curvas Paralelas.

Otra forma de determinar el punto de inflexión de una curva es por medio de la construcción de dos curvas paralelas a la curva original. La primera curva paralela se crea a una distancia w del punto sobre la curva y la segunda a la misma distancia pero en sentido contrario a la primera.

La construcción antes descrita tiene el defecto de tener las dos curvas paralelas discontinuas; sin embargo, es precisamente esta característica la que nos ayuda a encontrar el punto deseado como se ve en la Figura 4.8 (es conveniente utilizar sólo una parte de la curva cercana a los puntos de inflexión, esto se logra gracias a la función delimitadora mencionada en la Sección 3.1.3). Al disminuir el valor de w poco a poco las curvas se unirán con un segmento de línea recta, el cual es un defecto de cómo se grafican del software. Por medio de un punto móvil sobre una de las curvas puede aproximarse a la unión de la curva con el segmento de recta, después se vuelve a disminuir el valor de w , y se repite el proceso hasta obtener el valor del punto de inflexión en la pantalla.

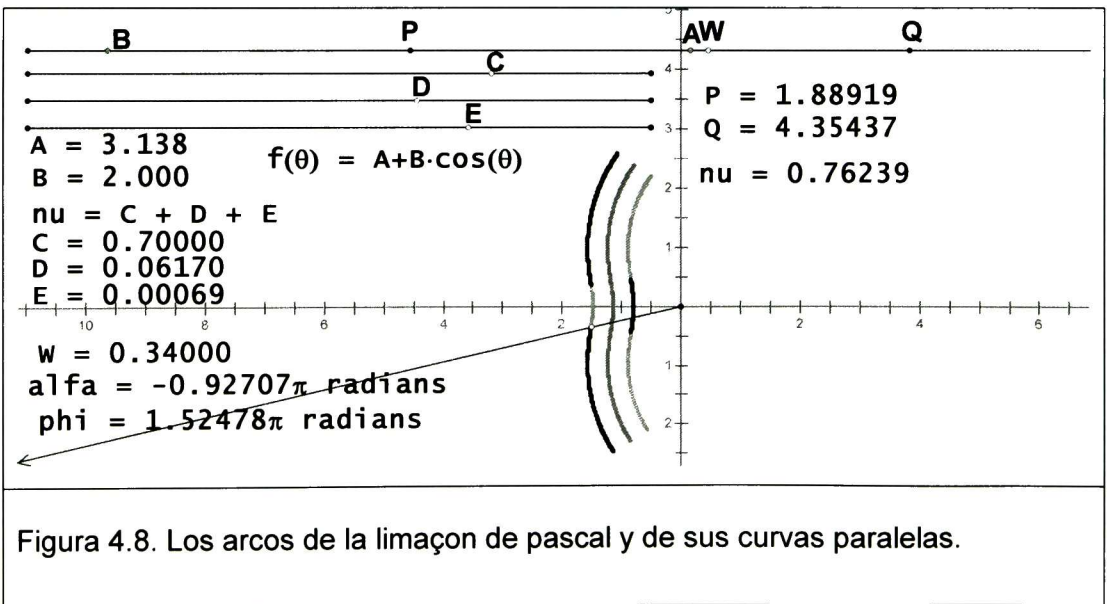


Figura 4.8. Los arcos de la limaçon de pascal y de sus curvas paralelas.

4.6 Hodógrafas.

Aunque el software de geometría dinámica no fue diseñado para construir animaciones reales con respecto al tiempo, esta deficiencia puede suplirse usando como parámetro el tiempo en las coordenadas paramétricas. Sin embargo, el principal obstáculo consiste en no tener un método general para parametrizar una función y en muchas ocasiones hay que calcular integrales difíciles de resolver; por ejemplo, para el movimiento planetario se tienen integrales elípticas (Hauser, 1966; Barger, 1973; Fernández, 2005). Para una simulación del movimiento real es más apropiado programarla con el Visual Estudio.

Una manera de resolverlo es usar vectores que varíen sus valores de acuerdo con su posición. Gracias a la geometría dinámica pueden construirse vectores normales y tangentes, cuyo punto inicial es el punto móvil sobre la curva; dando vida a todo lo explicado en la Sección 3.3 por medio de las rectas normal y tangente generadas con centro del círculo osculador. Al oprimir el botón de animación, el vector de velocidad tangencial sobre la trayectoria se moverá cambiando su dirección y su magnitud mientras se traslada (ver Figura 4.9).

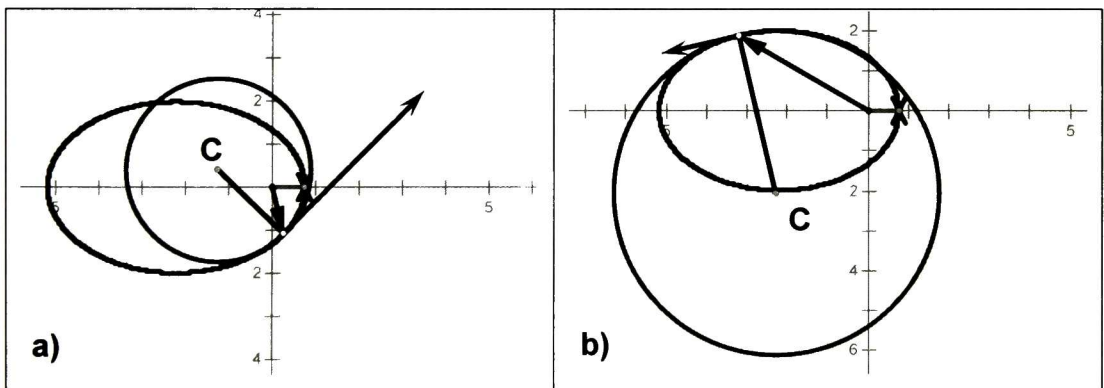


Figura 4.9. Vectores de velocidad tangencial a la trayectoria de una elipse de acuerdo a una ley de movimiento.

La definición polar de la recta tangente a una curva es particularmente útil; por ejemplo, para el problema del vuelo de un cohete en el cuál las fuerzas de propulsión

y de arrastre actúan tangencialmente a la trayectoria del vuelo, mientras las fuerzas centrípeta y de vuelo actúan normalmente a ésta. Además, gracias a esta definición es posible dibujar los vectores de las fuerzas en un esquema gráfico donde se incluyen la trayectoria del cohete y las cantidades vectoriales importantes en el análisis dinámico del problema (Patterson, 1935; Yates, 1951, ver Apéndice C.5).

De esta forma se da una idea correcta del movimiento por medio del vector de velocidad tangencial; además, se relaciona de manera visual el concepto vectorial de la velocidad, el cual no es claro para muchos estudiantes a nivel de educación media y media superior.

Los diagramas vectoriales de la velocidad en los libros muestran sólo una representación estática de la realidad (ver Apéndice C.5), y por otra parte, las animaciones donde el movimiento sucede como en la realidad, no son suficientes para afianzar el concepto de velocidad como una cantidad vectorial. Sin embargo, el trabajar en una página electrónica con vectores los cuales varíen su magnitud y dirección al moverse sobre una curva de acuerdo a una ley de movimiento ayuda al estudiante a comprender que la velocidad y la aceleración son vectores. Además, pueden hacerse los diagramas de las fuerzas involucradas, las cuales sean consistentes con el movimiento del punto sobre la curva.

Otra ventaja de la representación dinámica reside en crear un factor de escala para la velocidad, de esta forma puede observarse la sobreposición de dos espacios diferentes: el espacio de posiciones donde se llevan a cabo las acciones y el espacio de velocidades. En un libro sólo se tiene un dibujo sin movimiento en el espacio de la trayectoria que genera el cuerpo al trasladarse y se sobreponen los vectores de velocidad a cierta escala adecuada para la representación de algunos puntos de interés. Un factor de escala en el vector permite aclarar el hecho de que existe un espacio de posiciones y un espacio de velocidades; pues al variar este factor en la velocidad, la magnitud visual del vector no coincidirá con la escala de los ejes coordenados del espacio de posiciones. A partir de esto el profesor puede explicar los hechos de una forma didáctica.

Para concluir esta sección es conveniente hablar sobre la hodógrafa, la cual se forma al copiar el vector de velocidad sobre la trayectoria de un nuevo punto, y al

oprimirse el botón de movimiento, la copia del vector velocidad en el punto fijo forma una nueva curva que es “la hodógrafa” y que existe en el espacio de las velocidades dependiendo únicamente de las leyes de movimiento utilizadas (ver Figura 4.10; Cronin, 1968; Abelson, 1975; Shore, 1987; Sivardière, 1988, 1992; Krpić, 1993; González-Villanueva, 1996, 1998; Núñez-Yépez, 1998, 2000; Corbishley, 2000; Butikov, 2000; Derbes, 2001; Chakerian, 20001; Kowen, 2003; Apostolatos, 2003; Nauenberg, 2005).

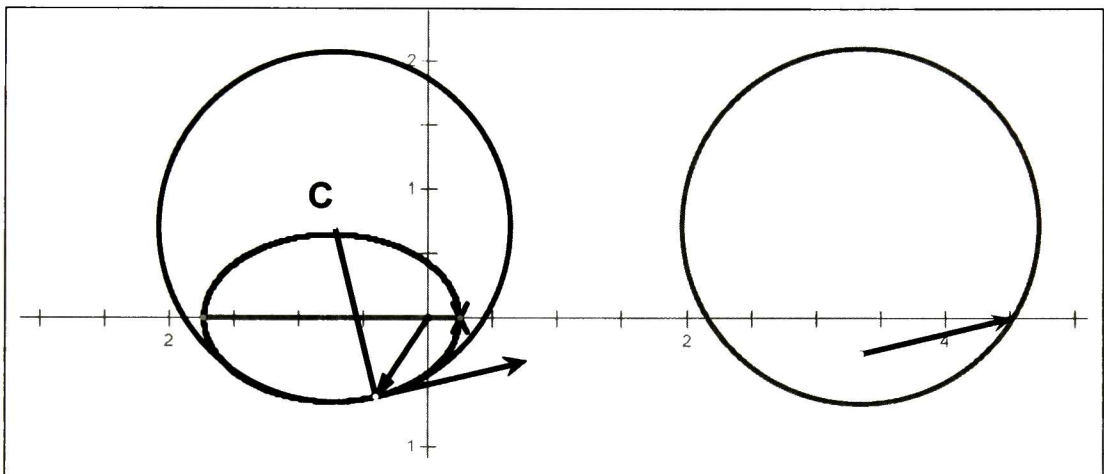
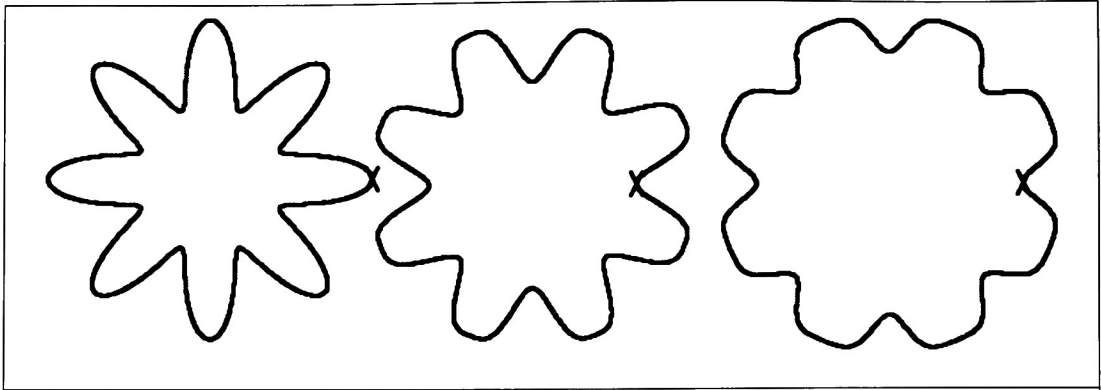


Figura 4.10. Hodógrafa con un origen arbitrario.

4.7 Construcción de Piezas para Mecanismos.

Para terminar con el presente capítulo, se verá un último uso de las fórmulas generalizadas; con ellas es posible construir piezas para mecanismos, esto tal vez no sea de gran ayuda para un ingeniero mecánico, pero son útiles para hacer simulaciones en la computadora y páginas electrónicas educativas. Pueden construirse piezas que corresponden a relojes; por ejemplo, engranes que roten con una velocidad angular constante (ver Figura 4.11), y así hacer una animación correcta de varios engranes interconectados, los cuales giren adecuadamente con las velocidades angulares correspondientes a cada uno. También se pueden unir piezas por medio de bandas (Sekino, 2001).



4.11. Engranajes hechos con la fórmula generalizada (3.3), fue conveniente usar $j \neq 1$ y $n = 2\ell$ donde $\ell = 1, 2, 3, \dots$, pues n debe ser diferente de cero.

Además de crear máquinas como pistones y émbolos, donde una de las piezas tenga “forma de corazón” (Figura 4.12; Braden, 1985), la cual se genera con dos piezas de la espiral de Arquímedes y se usa en la maquinaria para transformar una velocidad angular constante a una velocidad lineal en una dirección que oscila, por ejemplo, para los rollos de algodón en el carrete de una máquina de costurera (Heath, 1960). Por último, cabe resaltar el diseño de cuerpos que flotan para estudiar su estabilidad (Gilbert, 1991; Oliveros, 1999).

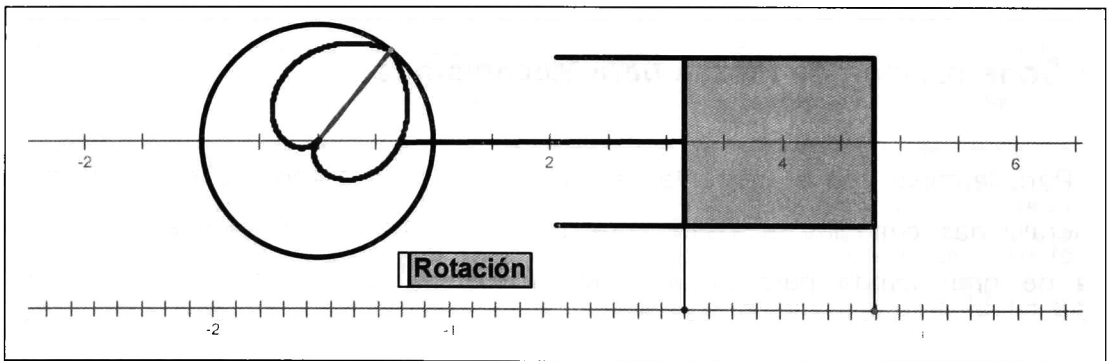


Figura 4.12. Máquina.

Resultados y Conclusiones.

El propósito de las páginas electrónicas diseñadas es ayudar a comprender algunos puntos de interés en el estudio de las curvas polares y la curvatura.

Uno de los resultados obtenidos fue la determinación de las intersecciones de dos curvas en coordenadas polares, aún en el caso extremo cuando estas dos curvas presentan la misma gráfica pero están representadas con expresiones diferentes. La mejor forma de observarlo fue por medio de dos puntos móviles en cada una de las curvas y ver sus posiciones cuando varía el ángulo. También se obtuvieron resultados satisfactorios con una función delimitadora para mostrar cómo se forman las dos curvas y dónde se intersecan.

El realizar un estudio de las curvas polares generalizando sus expresiones nos permitió encontrar toda una gama de nuevas curvas, las cuales pueden servir para trabajos *a posteriori*. Por ejemplo, pueden generarse muchos billares con curvas polares cerradas, la sección transversal de la cabeza de un palo de golf o piezas para mecanismos (como engranes, hélices de avión, incluso rehiletos, etc.).

Una de las ventajas de las hojas virtuales es poder trabajar con muchas curvas al cambiar los parámetros los cuales determinan la periodicidad, los coeficientes y las potencias de una fórmula generalizada; ya sea por medio de botones o deslizadores.

Mediante un paquete de graficación puede realizarse todo el trabajo de dibujar una curva por complicada que sea; sin embargo, el usuario no tiene conciencia de lo que realmente sucede. Por ello resulta de gran ayuda tener un punto móvil sobre la curva dando la idea correcta de cómo se forma en las páginas electrónicas. Sin embargo, aún puede existir confusión en el usuario cuando dicho punto recorre una curva muy complicada y el observador se pierda en la gráfica. Tampoco es suficiente poner un vector de posición del punto móvil con origen en el polo (el radio vector).

Por medio del centro del círculo osculador se traza la recta normal y la tangente a la curva que se muevan con el punto sobre ella, pero sigue siendo insuficiente para resolver el problema visual.

El hecho de utilizar, como herramienta, un paquete de geometría dinámica facilita al profesor y a los estudiantes trabajar con el círculo osculador, pues fue posible ver

cómo evoluciona el círculo cuando cambia el ángulo correspondiente al punto móvil sobre la gráfica por complicada que ésta sea; así se tiene un seguimiento visual de cómo se forma la curva. Otra manera de obtener resultados similares es usar la función delimitadora con sus puntos extremos variables por medio de un deslizador.

En las coordenadas cartesianas se distingue una curva cóncava hacia arriba de una cóncava hacia abajo, pero en las polares lo anterior carece de sentido. En este aspecto, la utilidad del círculo osculador consiste en dar una interpretación análoga a la de la concavidad al moverse sobre la curva, pues para una curva polar cerrada sin lazos puede decirse que es cóncava hacia dentro y cóncava hacia afuera.

La obtención del centro del círculo osculador, por medio de las fórmulas del cálculo, nos permitió construir nuevos lugares geométricos como la evoluta, la pedal, la radial, la isotópica y la paralela a una curva polar generalizada, al mezclarse la Geometría Analítica y la Euclidiana.

También, con el círculo osculador pueden determinarse visualmente los puntos de inflexión en una curva polar, porque cuando el círculo pasa por el punto de inflexión se convierte en una línea recta pues su radio tiende a infinito. Otra manera de determinar el punto de inflexión es usar las curvas paralelas a la curva polar; por ser una construcción defectuosa la posición de los puntos que forman las curvas paralelas se intercambian en los puntos de inflexión generando curvas discontinuas con un salto, pero se completan mutuamente.

Los puntos cúspide pueden determinarse cuando el círculo osculador es cercano, ya que su radio tiende a cero y éste se hace muy pequeño; sin embargo, esta forma de hacerlo no fue muy eficiente para obtener resultados numéricos y también puede tener problemas el estudiante si existen lazos cercanos a los puntos de interés.

Un resultado importante se encontró con la curva del diablo, pues fue necesario dar una forma alternativa para generar el círculo osculador, debido a los problemas del CAS en su forma de generar los resultados de las derivadas. Esta solución sirve cuando las hojas electrónicas se traben por hacer los cálculos para una animación.

La determinación de las rectas normal y tangente al punto de interés de la curva polar permitió crear las componentes normal y tangencial de la velocidad y la aceleración a la curva en su forma vectorial; con lo cual, es posible pasar al estudio

de problemas de cinemática y dinámica. La aceleración normal está relacionada con el radio de curvatura.

Aunque tener la recta tangente a la curva y el radio vector al punto móvil nos ayuda a trabajar con la derivada en coordenadas polares y el ángulo del radio vector de la tangente, no se llevó a cabo. Otro punto pendiente es rehacer la página de la superforma para controlarla de la forma más eficiente y sencilla; así se podrá hacer uso de su gran riqueza geométrica.

Esta tesis es una propuesta didáctica sobre las curvas polares y la curvatura de éstas, pero puede continuarse en la siguiente dirección:

La posibilidad de desarrollar vectorialmente el movimiento de un cuerpo sobre la trayectoria correspondiente a una curva polar, así como trabajar con las fuerzas que actúan sobre dicho cuerpo. Aparte, pueden realizarse estudios de electromagnetismo y óptica con las curvas polares.

Otra línea importante a seguir sería la de generar estrategias de resolución de problemas de Variable Compleja, en particular del mapeo conforme.

Diseñar las hojas electrónicas para curvas paramétricas con todas las ventajas que tienen las páginas ya creadas de las curvas polares.

Apéndices.

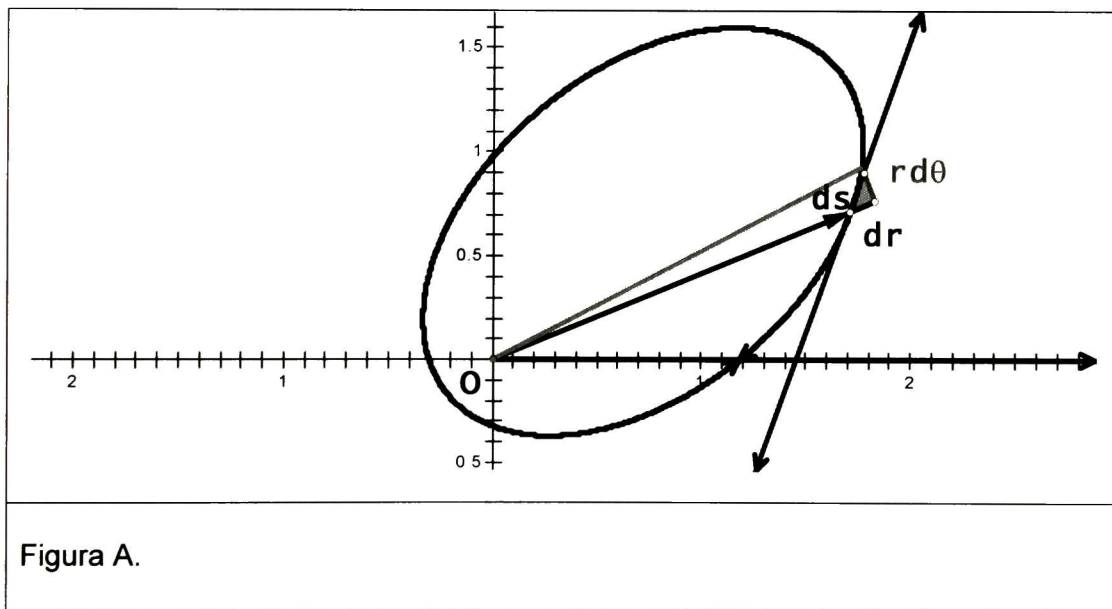
A. Longitud de un Arco.

Al tomar el "triángulo" (ver Figura A), se obtiene

$$ds = \sqrt{(dr)^2 + (rd\theta)^2} = \sqrt{(r')^2 + r^2} d\theta$$

para la longitud del segmento de línea tangente a la curva (Lewis, 1986). Para encontrar el arco de longitud se agrega las longitudes de los segmentos de las líneas tangentes. De la ecuación anterior se toma la longitud del arco de una curva polar suave $r = f(\theta)$ de (r_1, θ_1) a (r_2, θ_2) como

$$s = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{(r')^2 + r^2} d\theta.$$



La deducción alterna se encuentra por medio de la fórmula en coordenadas cartesianas de la longitud del arco

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2} d\theta.$$

como la curva polar $r = f(\theta)$ se define paramétricamente por las igualdades $x = f(\theta)\text{Cos}(\theta)$ y $y = f(\theta)\text{Sen}(\theta)$ entonces

$$\frac{dx}{d\theta} = -f(\theta)\text{Sen}(\theta) + f'(\theta)\text{Cos}(\theta),$$

$$\frac{dy}{d\theta} = f(\theta)\text{Cos}(\theta) + f'(\theta)\text{Sen}(\theta),$$

al sustituir lo anterior en ds se obtiene

$$ds = \sqrt{(f(\theta))^2 (\text{Sen}^2(\theta) + \text{Cos}^2(\theta)) + (f'(\theta))^2 (\text{Sen}^2(\theta) + \text{Cos}^2(\theta))} d\theta$$

$$ds = \sqrt{(f(\theta))^2 + (f'(\theta))^2} d\theta = \sqrt{r^2 + (r')^2} d\theta$$

B. Curvas Polares Estudiadas.

En este apéndice se presenta una lista de las ecuaciones de las curvas estudiadas, se decide juntar algunas por medio de una fórmula generalizada. Es conveniente usar $\text{Sec}(\theta) = 1/\text{Cos}(\theta)$ y $\text{Csc}(\theta) = 1/\text{Sen}(\theta)$. Principalmente se utiliza Smith (1958), Lawrence (1972), Yates (1974) y Rutter (2000).

El primer grupo constará de las siguientes curvas:

1. La limaçon de Pascal (1650), la cardioide (Koërsma, 1689):

$$r = A + B\text{Cos}(\theta)$$

2. La rosa o Rhodonea

$$r = \text{Cos}(j\theta)$$

3. La cicloide de Ceva

$$r = 1 + 2\text{Cos}(2\theta)$$

4. La concoide de Nicomedes (225 A. C.)

$$r = A + B\text{Sec}(\theta)$$

5. La espiral de Epi

$$r = \text{Sec}(j\theta)$$

6. La kamyple de Eudoxo

$$r = \text{Sec}^2(\theta)$$

7. La acnodal cúbica

$$r = \text{Sec}^3(\theta)$$

8. La sextica de Cayley (MacLaurin, 1718)

$$r = 2\text{Cos}^3\left(\frac{\theta}{3}\right)$$

9. La nephroide de Freeth

$$r = 1 + 2\text{Cos}\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

10. La trisectrix de MacLaurin también puede escribirse como

$$r = -\text{Sec}\left(\frac{\theta}{3}\right)$$

11. La cúbica de Tschirnhausen (trisectrix de Catalan o cúbica de L'Hospital).

$$r = -\text{Sec}^3\left(\frac{\theta}{3}\right)$$

Podemos recopilar todas las fórmulas en una igualdad más general:

$$r = A + B\text{Cos}^n\left(\frac{j\theta}{k}\right)$$

Todas las cónicas están representadas por

$$r = \frac{B}{C + D\text{Cos}(\theta)}$$

Pero el primer grupo y las cónicas pueden ser agrupadas como

$$r = A + \frac{B}{C + D\text{Cos}^n\left(\frac{j\theta}{k}\right)}$$

Una segunda colección se construye con las siguientes curvas:

1. La cisoide de Diocles (200 A. C.)

$$r = \text{Sec}(\theta) - \text{Cos}(\theta)$$

2. La estrofoide derecha

$$r = \text{Sec}(\theta) - 2\text{Cos}(\theta)$$

3. La trisectrix de MacLaurin (1742)

$$r = \text{Sec}(\theta) - 4\text{Cos}(\theta)$$

4. La conchoide de De Sluze (1662)

$$r = a \operatorname{Sec}(\theta) + \frac{k^2}{a} \operatorname{Cos}(\theta)$$

Entonces puede juntarse la cisoide de Diocles, trisectrix de MacLaurin, la estrofoide derecha y la conchoide de De Sluze en la siguiente igualdad

$$r = A \operatorname{Sec}(\theta) + B \operatorname{Cos}(\theta)$$

La tercera lista está constituida por:

1. El bifolio

$$r = \operatorname{Sen}(\theta) \operatorname{Cos}^2(\theta)$$

2. La cisoide de Diocles también puede escribirse como

$$r = \operatorname{Sen}^2(\theta) \operatorname{Sec}(\theta)$$

3. La cúspidal cúbica o parábola de Neile

$$r = \operatorname{Sen}^2(\theta) \operatorname{Sec}^3(\theta)$$

El bifolio, la cisoide de Diocles y la parábola de Neile se agrupan

$$r = \operatorname{Sen}^k(\theta) \operatorname{Cos}^n(\theta)$$

El cuarto grupo es dado por las siguientes curvas:

1. La rosa

$$r = A \operatorname{Sen}(j\theta) + B \operatorname{Cos}(j\theta)$$

2. El huevo torcido

$$r = \operatorname{Sen}^3(\theta) + \operatorname{Cos}^3(\theta)$$

Estas dos pueden incluirse en la fórmula siguiente

$$r = A \operatorname{Sen}^n(j\theta) + B \operatorname{Cos}^n(j\theta)$$

Como un conjunto aparte se trataron las espirales, en donde se realiza otra agrupación:

1. La espiral de Arquímedes (Sacchi, 1854)

$$r = B\theta$$

2. La neoid (forma de cisne, oleada, espiral de Cotes)

$$r = A + B\theta$$

3. La espiral hiperbólica

$$r = B\theta^{-1}$$

Las igualdades anteriores se concentran en

$$r = A + B\theta^n$$

4. La espiral logarítmica (Descartes, 1638; Grumman, 1936)

$$r = Be^\theta$$

5. La espiral de Poinsot

$$r = \text{Sech}(\theta)$$

$$r = \text{Csch}(\theta)$$

Las dos últimas curvas que se unen en una sola fórmula son

1. La curva cruzada (cruciforme)

$$r = \sqrt{a^2 \text{Sec}^2 \theta + b^2 \text{Csc}^2 \theta}$$

2. La nariz de toro (Shoute)

$$r = \sqrt{a^2 \text{Sec}^2 \theta - b^2 \text{Csc}^2 \theta}$$

Se generalizan como

$$r = \sqrt{A \text{Sec}^2 \theta + B \text{Csc}^2 \theta}$$

A continuación se da las fórmulas de las curvas que no fueron concentradas por medio de sus igualdades:

1. La estrofoide derecha (Barrow, 1670)

$$r = \text{Sec}(\theta) \pm \text{Tan}(\theta)$$

$$r = \text{Cos}(2\theta) \text{Sec}(\theta)$$

2. La curva kappa (Curva Gutschoven) está dada por

$$r = \text{Cot}(\theta)$$

3. La folium de Kepler (folia, 1609) es pedal de la dentoide

$$r = (B \text{Sen}^2(\theta) - 1) \text{Cos}(\theta)$$

4. La scarabaeus

$$r = A \text{Cos}(\theta) - B \text{Cos}(2\theta)$$

5. La campana

$$r = \text{Cos}(5\theta) \pm 5 \text{Cos}(\theta)$$

6. La ophiuride

$$r = (A \text{Sen}(\theta) - B \text{Cos}(\theta)) \text{Tan}(\theta)$$

7. El lazo

$$r = (1 + \tan^2(\theta)) \tan(\theta) \sec(\theta)$$

8. La bifoliada

$$r = \frac{\sin(\theta) \cos^2(\theta)}{A + B \cos(4\theta)}$$

9. El folium de Descartes (1638)

$$r = \frac{B \sin(\theta) \cos(\theta)}{\sin^3(\theta) + \cos^3(\theta)} \quad B=3A$$

10. El frijol

$$r = \frac{\cos(\theta)}{\cos^4(\theta) + \sin^4(\theta) + \cos^2(\theta) \sin^2(\theta)}$$

11. La arácnida

$$r = \sin(j\theta) \csc((j \pm 1)\theta)$$

Un caso especial de la arácnida es la trisectrix de MacLaurin

$$r = -\sin(3\theta) \csc(2\theta)$$

12. La crunodal cúbica

$$r = (\tan^2(\theta) - 1) \sec(\theta)$$

13. La cuadratrix de Hippias

$$r = \frac{2A}{\pi} \theta \csc(\theta)$$

14. El crisantemo

$$r = 5 \left(1 + \sin\left(\frac{11\theta}{5}\right) \right) - 4 \sin^4\left(\frac{17\theta}{3}\right) \sin^8(2\cos(3\theta) - 28\theta)$$

15. La mariposa (Fay, 1989, 1997)

$$r = \exp(\sin(\theta)) - 2\cos(4\theta) + \sin^5\left(\frac{2\theta - \pi}{24}\right)$$

$$r = \exp(\cos(\theta)) - 2\cos(4\theta) - \sin^5\left(\frac{\theta}{12}\right)$$

16. La hippopede de Proclus (75 A. C.)

$$r = 2\sqrt{b(a - b\sin^2\theta)}$$

17. La curva del diablo

$$r = 2a \sqrt{\frac{25 - 24 \tan^2(\theta)}{1 - \tan^2(\theta)}}$$

18. La tacnodal cuartica

$$r = \frac{1}{2} \left[\cos^2 \theta \pm \sqrt{\cos^4 \theta + 4 \sin^4 \theta} \right] \cos \theta \csc^4 \theta$$

19. Las curva de Watt (1784)

$$r = \sqrt{a^2 - \left(c \sin \theta \pm \sqrt{b^2 - c^2 \cos^2 \theta} \right)^2}$$

29. Los óvalos de Cassini

$$r = \sqrt{a^2 \cos(2\theta) \pm \sqrt{b^4 - a^4 \sin^2(2\theta)}}$$

21. La nefroide

$$r = 2a \left(\sin^{2/3} \left(\frac{\theta}{2} \right) + \cos^{2/3} \left(\frac{\theta}{2} \right) \right)^{3/2}$$

22. La astroide (Kalman, 2007)

$$r = \frac{|\sec(\theta)|}{\left(1 + \tan^{2/3}(\theta)\right)^3}$$

23. La superforma (Gielis, 2003)

$$r = \left[\sqrt{\left| \frac{1}{a} \cos \left(\frac{i\theta}{k} \right) \right|^m + \left| \frac{1}{b} \sin \left(\frac{j\theta}{k} \right) \right|^n} \right]^{-1}$$

C. Curvatura.

La curvatura o curvatura con signo C de una curva suave en uno de sus puntos (Wiseman, 1944) se define como la razón de cambio de la recta tangente al girar respecto a la longitud de arco s

$$C = \frac{d\varphi}{ds}.$$

donde la longitud de arco es medida a lo largo de la curva; así cuando φ se incrementa s se incrementa.

La curvatura absoluta de la curva en un punto es el valor absoluto $|C|$ de la curvatura en ese punto. El valor absoluto de la curvatura es una medida de que tan rápidamente la curva gira. Si la curva gira rápidamente posee una gran curvatura absoluta; en cambio si lo hace muy lentamente, su forma se aproxima a una línea recta y tiene una pequeña curvatura absoluta. La curvatura de una línea recta es igual a cero.

La curvatura de la dirección de un camino afectará la velocidad máxima de aquellos vehículos que pueden viajar sin patinar, y la curvatura de la trayectoria de un aeroplano será afectada si el piloto sufriera un desmayo como resultado de las fuerzas g involucradas.

Una curva orientada es una curva con una dirección a lo largo de ésta. Se mide esa razón de cambio de la dirección respecto a la longitud del arco s . Sea φ el ángulo medido contra la dirección de las manecillas del reloj desde la dirección de la semirrecta que coincide con el eje X en su parte positiva a la tangente del vector (ver Figura C.1). La curvatura de una curva que gira hacia la izquierda es positiva y si el giro es hacia la derecha está será negativa.

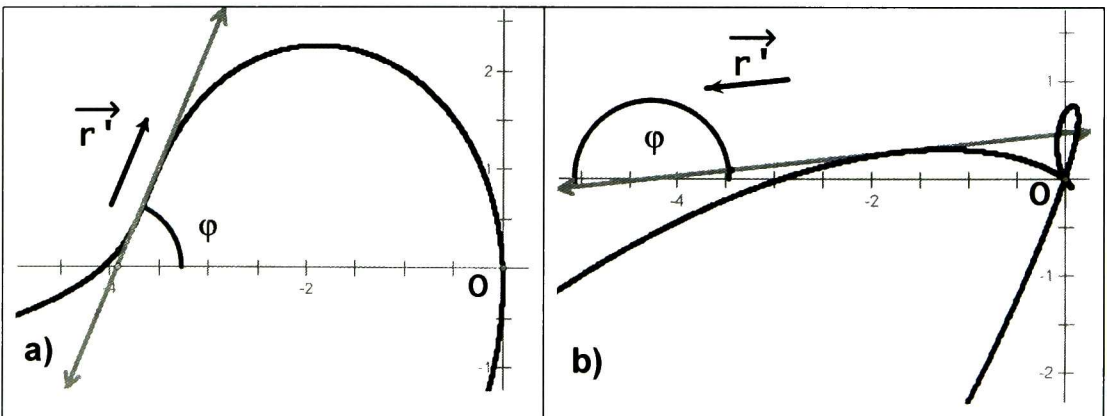


Figura C.1. Curvas orientadas, el ángulo θ se incrementa, la curva se forma: a) a favor de las manecillas del reloj, b) en contra de las manecillas del reloj.

En el caso de la circunferencia, la curvatura es determinada por la magnitud $C=1/R$, donde R es el radio de la circunferencia. Si φ es el ángulo central correspondiente al arco de circunferencia s , la relación entre R , φ y s es $s = R\varphi$.

C.1 Círculo Osculador.

El círculo osculador (o de curvatura) de una curva en un punto A es la posición límite de la circunferencia que pasa por el punto A y otros dos puntos B_1 y B_2 al acercarse estos al punto A (Figura C.2; Zeitlin, 1981). El radio del círculo osculador nos da el radio de curvatura de la curva en el punto A , y el centro de este círculo es el centro de curvatura de la curva para el mismo punto A .

Empecemos con trazar las rectas tangentes en los puntos B_1 y B_2 de la circunferencia, $\overline{B_1D}$ y $\overline{B_2E}$, entonces los segmentos normales a estas tangentes, $\overline{B_1C}$ y $\overline{B_2C}$ se intersecan en el centro C de la circunferencia de radio R . El ángulo $\Delta\varphi$ entre las normales $\overline{B_1C}$ y $\overline{B_2C}$ es igual al ángulo entre las tangentes $\overline{B_1D}$ y $\overline{B_2E}$. De acuerdo a la fórmula

$$R = \frac{\Delta s}{\Delta\varphi}.$$

donde Δs representa el arco de circunferencia $arc(B_1AB_2)$. Cuando $\Delta s \rightarrow 0$, el radio de la circunferencia determinará el radio de curvatura de la curva en el punto A . Así, el radio de curvatura de la curva se escribe como

$$R = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta\varphi} = \frac{ds}{d\varphi}$$

La magnitud inversa de R es la curvatura en el punto dado (Olds, 1940)

$$C = \frac{1}{R}$$

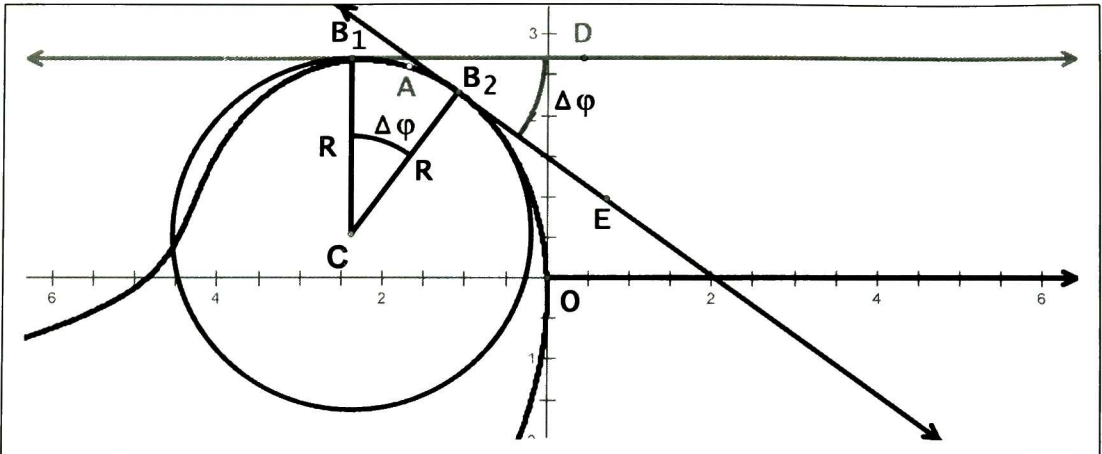


Figura C.2. Círculo osculador.

C.2 Fórmula de la Curvatura.

La curvatura y el radio de curvatura de una curva generalmente cambian progresivamente de punto a punto. La curvatura C es comúnmente escrita

$$\frac{1}{R} = \frac{d\varphi}{ds} \quad \text{o} \quad R = \frac{ds}{d\varphi},$$

donde φ es el ángulo de la tangente a la curva que hace la recta paralela al eje X (Figura C.3), pero

$$\text{Tan}(\varphi) = \frac{dy}{dx} = y'$$

Al derivar la expresión anterior con respecto a s se obtiene

$$\frac{d}{ds}(\text{Tan}(\varphi)) = \text{Sec}^2(\varphi) \frac{d\varphi}{ds} = \frac{d}{ds} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) \cdot \frac{dx}{ds} = \frac{d^2y}{dx^2} \cdot \frac{dx}{ds}.$$

por lo tanto

$$\text{Sec}^2(\varphi) \frac{1}{R} = y'' \cdot \frac{dx}{ds}.$$

Despejando el radio de curvatura R se encuentra

$$R = \frac{\text{Sec}^2(\varphi)}{y''} \cdot \frac{ds}{dx}, \quad (\text{C.1})$$

pero como la longitud de arco para esta función es

$$s = \int_{t_0}^x \sqrt{1 + f'(t)^2} dt,$$

se tiene que

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + y'^2} = \text{Sec}(\varphi). \quad (\text{C.2})$$

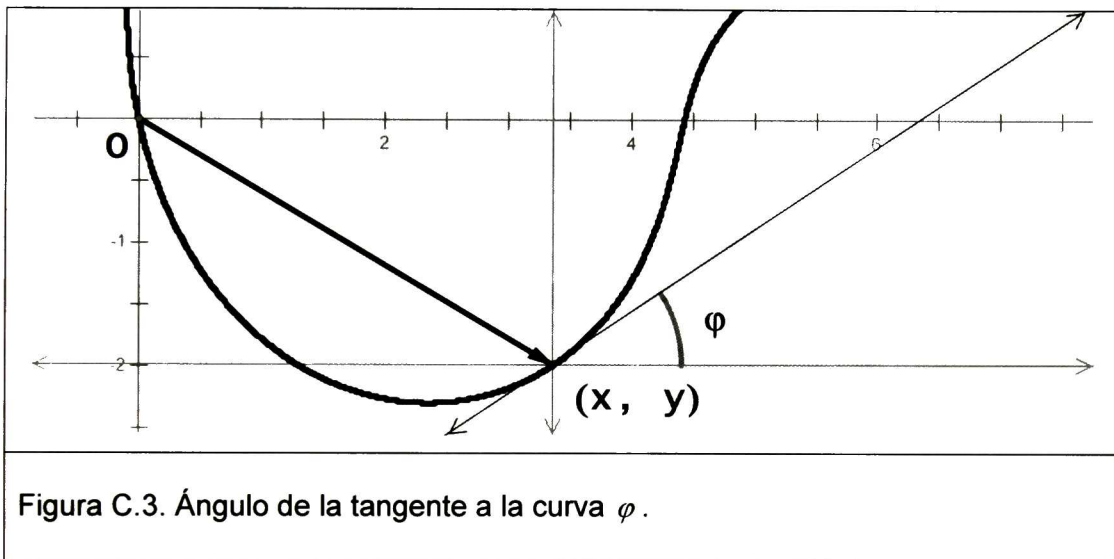


Figura C.3. Ángulo de la tangente a la curva φ .

Al sustituir la Ecuación (C.2) y además como $\text{Sec}^2(\varphi) = 1 + \text{Tan}^2(\varphi) = 1 + (y')^2$ en el radio de curvatura (C.1) se encuentra la expresión

$$R = \frac{[1 + (y')^2]^{3/2}}{y''}. \quad (\text{C.3})$$

donde R es positivo cuando la curva es cóncava hacia arriba y negativa si la curva es cóncava hacia abajo (Dean, 1901; de la Borbolla, 1957; Gans, 1957; Seiner, 1966; Schot, 1978; Smith, 2000; Gordon, 2002; Lodder, 2003; Robin, 2005).

Una segunda forma de obtener la curvatura se describe a continuación:

De acuerdo con Jiang (1994) y Moll (2002) en una curva definida por la igualdad $y = f(x)$, donde f es dos veces diferenciable, y la longitud de arco para esta función es

$$s = \int_{x_0}^x \sqrt{1 + f'(t)} dt$$

Para el ángulo φ

$$\text{Tan}(\varphi) = f'(x)$$

en cualquier punto (x, y) de la gráfica. Así, en una vecindad de (x, y) se tiene

$$\varphi = b + \text{Tan}^{-1}(f'(x)),$$

donde la constante b aparece porque φ no puede caer en el rango de los valores principales de la inversa de la función tangente. Como f es una función de x , dos veces diferenciable, y en la igualdad anterior φ es una función diferenciable respecto de x .

También s es una función derivable en x ; puede demostrarse que x aparece como una función derivable de s en una vecindad de un punto donde $ds/dx \neq 0$. Bajo estas condiciones φ aparece como función diferenciable de s , y por la regla de la cadena

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{d\varphi}{dx} \cdot \frac{dx}{ds}$$

Entonces al derivar φ con respecto a s es:

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{f''(x)}{1 + (f'(x))^2} \tag{C.4}$$

y como

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + (f'(x))^2}$$

Por lo tanto

$$\frac{dx}{ds} = \frac{1}{\sqrt{1 + (f'(x))^2}} \tag{C.5}$$

Finalmente, la curvatura es igual a la multiplicación de las Ecuaciones (C.4) y (C.5)

$$C = \frac{d\varphi}{ds} = \frac{f''(x)}{\left[1 + (f'(x))^2\right]^{3/2}}$$

Una tercera forma de encontrar la curvatura es usando el círculo de curvatura, se considera al círculo osculador de una curva como el círculo que tiene en común con dicha curva los siguientes elementos:

- a) el punto (x, y) ,
- b) la pendiente de la recta dada por y' y
- c) la curvatura en términos de y''

La ecuación del círculo osculador es $(x-h)^2 + (y-k)^2 = R^2$ y la curvatura de la curva está dada por $C = 1/R$, así:

$$C = \frac{1}{\sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2}} \quad (C.6)$$

Al sustituir $(x-h)$ y $(y-k)$ en la igualdad anterior por expresiones en términos de y' y y'' donde $y = f(x)$. Para encontrar estas expresiones es necesario derivar implícitamente la ecuación del círculo osculador:

$$(x-h) + (y-k)y' = 0, \quad (C.7)$$

despejando y' , se tiene

$$y' = -\frac{x-h}{y-k}$$

Calculando la segunda derivada de y

$$y'' = \frac{-(y-k) + (x-h)y'}{(y-k)^2} \quad (C.8)$$

Ahora se despeja $x-h$ de la Ecuación (C.7)

$$x-h = -(y-k)y' \quad (C.9)$$

y sustituyendo este resultado en (C.8)

$$y'' = -\frac{1+(y')^2}{y-k}$$

Es conveniente despejar $y-k$

$$y-k = -\frac{1+(y')^2}{y''} \quad (C.10)$$

Al colocar la igualdad (C.9) en la curvatura (C.6) se obtiene

$$C = \frac{1}{\sqrt{(y-k)^2(y')^2 + (y-k)^2}} = \frac{1}{|y-k| \sqrt{1+(y')^2}}$$

Sustituyendo la expresión (C.10) en la ecuación anterior se llega al resultado buscado

$$C = \frac{y''}{(1+(y')^2)^{3/2}}$$

C.3 Centro de Curvatura y la Evoluta.

La evoluta de una curva fue considerada primero por Apolonio por el año 200 A. C. y se define como el lugar geométrico de los centros de los círculos osculadores.

El círculo no tiene una curva evoluta pero la parábola, la elipse y la hipérbola si tienen curvas evolutas, como se muestra en las Figuras C.4 (de la Borbolla, 1957; Yates, 1951; Freitag, 1967; Escudero, 2007), respectivamente.

Las coordenadas del centro de curvatura son

$$h = x - R\text{Sen}(\varphi) \quad k = y + R\text{Cos}(\varphi), \quad (\text{C.11})$$

donde φ es el ángulo definido en las figuras antes mencionadas y R es el radio de curvatura. Como $y' = \text{Tan}(\varphi)$, se tiene

$$\text{Sen}(\varphi) = \frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}}, \quad \text{Cos}(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{1+(y')^2}}.$$

Al sustituir las dos igualdades anteriores y el radio de curvatura (C.3) en las Ecuaciones (C.8), las coordenadas del centro de curvatura quedan como

$$h = x - \frac{y'(1+(y')^2)}{y''} \quad (\text{C.12.a})$$

$$k = y + \frac{1+(y')^2}{y''}. \quad (\text{C.12.b})$$

Estas coordenadas h y k son las ecuaciones paramétricas de la evoluta de la curva (Dean, 1901).

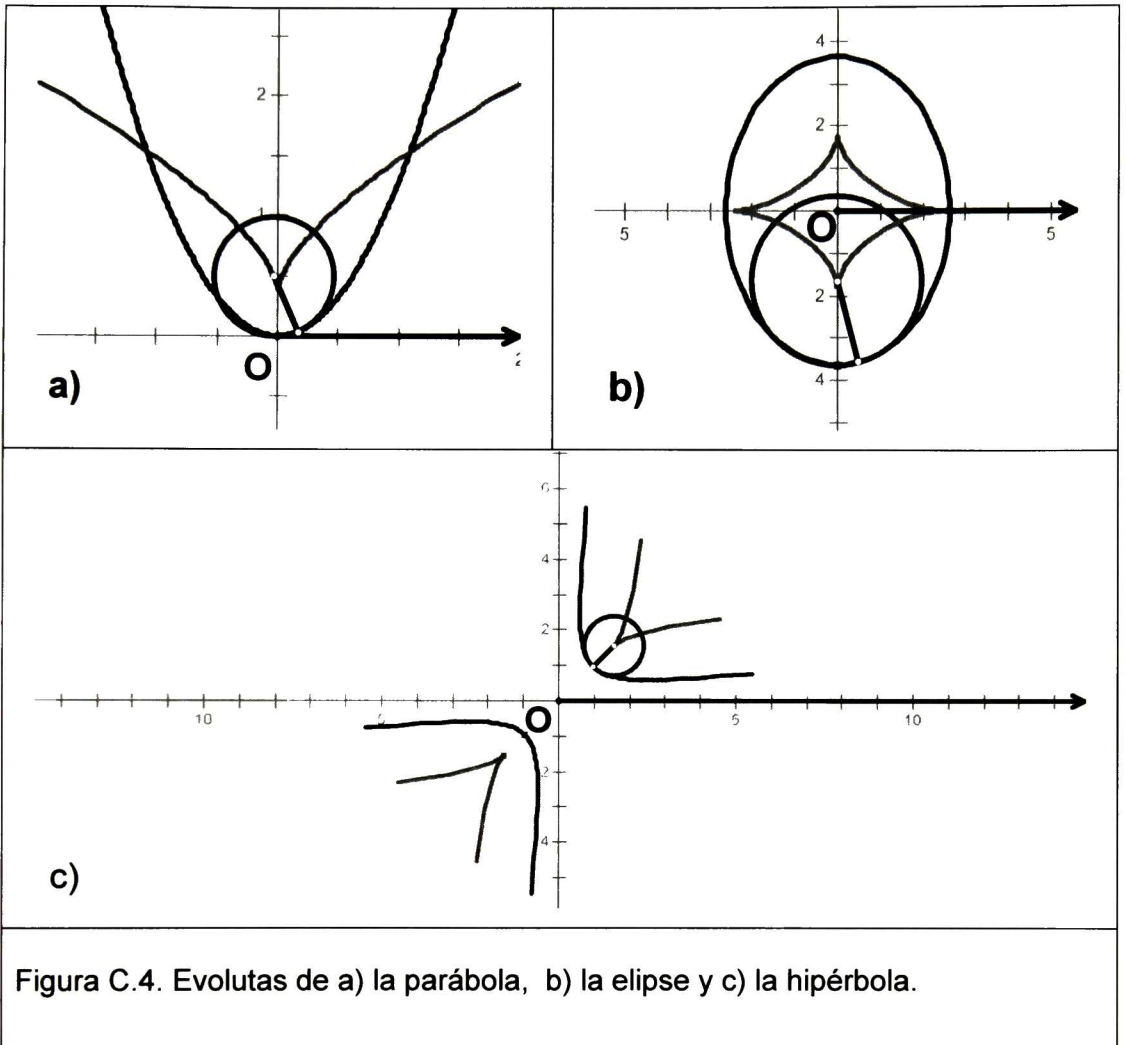


Figura C.4. Evolutas de a) la parábola, b) la elipse y c) la hipérbola.

C.4 Curvatura en Polares.

A partir de la Ecuación (3.1) puede escribirse (Todhunter, 1958)

$$1 + (y')^2 = \frac{r^2 + (r')^2}{(r' \cos(\theta) - r \text{Sen}(\theta))^2} \quad (\text{C.13})$$

Aparte como

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{d}{d\theta} \left(\frac{dy}{dx} \right) \cdot \left(\frac{d\theta}{dx} \right) = \left[\frac{d}{d\theta} \left(\frac{r \cos(\theta) + r' \text{Sen}(\theta)}{r' \cos(\theta) - r \text{Sen}(\theta)} \right) \right] \cdot (r' \cos(\theta) - r \text{Sen}(\theta))^{-1}$$

Entonces

$$y'' = \frac{r^2 + 2(r')^2 - rr''}{(r' \cos(\theta) - r \operatorname{Sen}(\theta))^3}. \quad (\text{C.14})$$

Al sustituir (C.13) y (C.14) en la fórmula de la curvatura, ver Ecuación (C.3),

$$C = \frac{y''}{(1 + (y')^2)^{3/2}}, \quad (\text{C.15})$$

finalmente la curvatura de la curva (de la Borbolla, 1957) $r = r(\theta)$ es

$$C = \frac{r^2 + 2(r')^2 - rr''}{(r^2 + (r')^2)^{3/2}}. \quad (\text{C.16})$$

El parámetro usado para este resultado es θ y la curva tiene la orientación dada por el incremento de θ . Además, el signo de la curva es positivo si la curva gira a la izquierda al aumentar el valor de θ . Nótese que la fórmula para $C(\theta)$ no cambia si r es reemplazado por $-r$ y θ se cambia por $\theta + \pi$ (ver Sección 2.2).

Por otra parte, usando las Ecuaciones (C.13) y (C.14) se tiene

$$\begin{aligned} \frac{1 + y'^2}{y''} &= \left(\frac{r^2 + (r')^2}{(r' \cos(\theta) - r \operatorname{Sen}(\theta))^2} \right) \cdot \left(\frac{(r' \cos(\theta) - r \operatorname{Sen}(\theta))^3}{r^2 + 2(r')^2 - rr''} \right) \\ \frac{1 + y'^2}{y''} &= \frac{(r' \cos(\theta) - r \operatorname{Sen}(\theta)) \cdot (r^2 + (r')^2)}{(r^2 + 2(r')^2 - rr'')} \end{aligned}$$

Al sustituir el resultado anterior y la Ecuación (C.1) en las coordenadas del centro de curvatura (C.12) se tiene

$$\begin{aligned} h &= \frac{[(r')^2 - rr''] r \cos(\theta) - [r^2 + (r')^2] r' \operatorname{Sen}(\theta)}{r^2 + 2(r')^2 - rr''} \\ k &= \frac{[(r')^2 - rr''] r \operatorname{Sen}(\theta) - [r^2 + (r')^2] r' \cos(\theta)}{r^2 + 2(r')^2 - rr''} \end{aligned}$$

donde $r = r(\theta)$, $r' = dr/d\theta$ y $r'' = d^2r/d\theta^2$

C.5 Aceleración.

Esta sección trata sobre la velocidad y la aceleración, los cuales están relacionadas con el círculo osculador, y son los antecedentes para la Sección 4.6.

El vector velocidad cambia de dirección y magnitud en el movimiento curvilíneo no uniforme. La variación de la velocidad $\Delta \vec{v}$ en el intervalo de tiempo de t hasta $t + \Delta t$ es la diferencia de las velocidades \vec{v}_1 y \vec{v}_2 del cuerpo en los instantes respectivos de tiempo; entonces la magnitud de la aceleración es

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\Delta \vec{v}|}{\Delta t},$$

donde $|\Delta \vec{v}|$ es la magnitud de la variación de la velocidad; la variación de la velocidad y la aceleración tienen la misma dirección (Hauser, 1966; Timoreva, 1973); por lo tanto, la igualdad anterior se escribe de forma vectorial como

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \quad (\text{C.17})$$

A continuación se ve con detalle la aceleración de un cuerpo al desplazarse sobre una curva en el plano. Sean \vec{v}_1 y \vec{v}_2 los respectivos vectores de velocidad en los puntos A y B de la curva (Figura C.5). La velocidad \vec{v}_2 es diferente de \vec{v}_1 en magnitud y dirección. Se traza el segmento \overline{AC} paralelo a \overline{BD} con la misma magnitud, este representa \vec{v}_2 ; entonces el segmento \overline{EC} es igual a la variación de la velocidad $\Delta \vec{v}$ en la trayectoria AB . Cuando el punto B se acerca al punto A , el tiempo Δt que invierte el cuerpo de A hasta B tenderá a cero. Así se obtiene la ecuación de la aceleración en punto A de acuerdo a la Ecuación (C.17).

Ahora se crea en \overline{AC} el segmento $\overline{AF} = \vec{v}_1$ y $\Delta \vec{v}$ se descompone en dos componentes $\Delta \vec{v}_1$ y $\Delta \vec{v}_2$ donde $\Delta \vec{v}_1$ es la variación de la dirección de la velocidad (McMillan, 1956; Schwartz, 1994; Finn, 2002) y $\Delta \vec{v}_2$ es la variación de la magnitud; al sustituir $\Delta \vec{v} = \Delta \vec{v}_1 + \Delta \vec{v}_2$ en la aceleración, se tiene

$$\bar{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{v}_1 + \Delta \bar{v}_2}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{v}_1}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{v}_2}{\Delta t}$$

Por lo tanto, la velocidad correspondiente a la dirección es

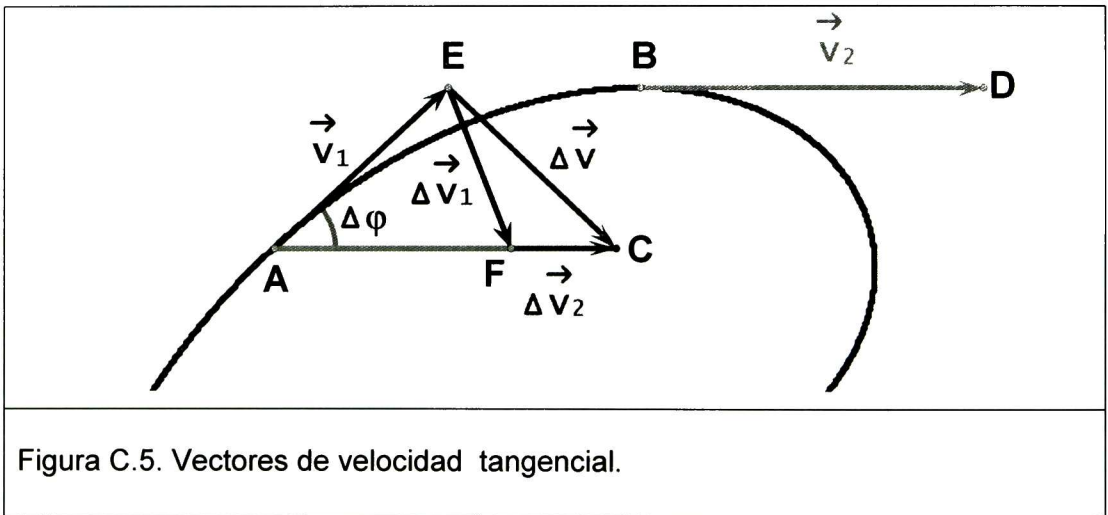
$$\bar{a}_n = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{v}_1}{\Delta t} \quad (\text{C.18})$$

Sea $\Delta\varphi$ el ángulo entre los segmentos \overline{AE} y \overline{AC} . Por construcción, este ángulo está formado por \bar{v}_1 y \bar{v}_2 las cuales son tangentes a la curva en los puntos A y B respectivamente. Para un ángulo $\Delta\varphi$ pequeño (Figura C.5), puede escribirse como

$$\overline{EF} = \overline{AE} \cdot \Delta\varphi,$$

pero como $\overline{EF} = \Delta v_1$ y $\overline{AE} = v_1$, entonces

$$\Delta v_1 = v_1 \Delta\varphi.$$



Sustituyendo esta última igualdad en (C.18), se encuentra la magnitud de la componente de la aceleración

$$a_n = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(v_1 \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \right).$$

Multiplicando y dividiendo esta magnitud por la longitud del arco, $\text{arc}(\Delta s) = \text{arc}(AB)$, cuando $\Delta t \rightarrow 0$, el $\text{arc}(\Delta s)$ también tiende a cero

$$a_n = \lim_{\substack{\Delta\varphi \rightarrow 0 \\ \Delta s \rightarrow 0}} \left(v_1 \frac{\Delta\varphi}{\text{arc}(\Delta s)} \cdot \frac{\text{arc}(\Delta s)}{\Delta t} \right) = v_1 \left[\lim_{\Delta\varphi \rightarrow 0} \frac{\text{arc}(\Delta s)}{\Delta t} \right] \cdot \left[\lim_{\text{arc}(\Delta s) \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\text{arc}(\Delta s)} \right]. \quad (\text{C.19})$$

Pero

$$\lim_{\Delta\varphi \rightarrow 0} \frac{\text{arc}(\Delta s)}{\Delta t} = v_1 \quad \text{y} \quad \lim_{\text{arc}(\Delta s) \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\text{arc}(\Delta s)} = \frac{1}{R}.$$

Al sustituir estas dos expresiones en la Ecuación (C.19) para a_n se tiene

$$a_n = \frac{v_1^2}{R}$$

donde v_1 es la velocidad del cuerpo en el punto A , y R es el radio de curvatura en el mismo punto (Yates, 1951; Agnew, 1987; Nauenberg, 1994; Newton, 2005).

Cuando $\Delta\varphi \rightarrow 0$, $\angle AEF \rightarrow 90^\circ$ entonces $\overline{\Delta v_1}$ será perpendicular a la velocidad $\overline{v_1}$ de acuerdo a la recta tangente a la curva en el punto A ; por lo tanto, $\overline{a_n}$ tiene la misma dirección de $\overline{\Delta v_1}$ es normal a la velocidad y apunta hacia el centro de círculo osculador de la curva en el punto dado. La componente de la aceleración $\overline{a_n}$ se denomina aceleración normal o centrípeta.

Además, si $\Delta\varphi \rightarrow 0$, \overline{AC} coincide con la dirección de $\overline{v_1}$; entonces $\overline{\Delta v_2}$ y $\overline{a_t}$ tienen la misma dirección que la velocidad $\overline{v_1}$. Por eso, la componente de la aceleración $\overline{a_t}$ se denomina aceleración tangencial y está sobre la recta tangente a la trayectoria en A (Yates, 1951)

$$\overline{a_t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overline{\Delta v_2}}{\Delta t}$$

En resumen, la aceleración en el movimiento curvilíneo puede descomponerse en sus dos componentes: 1) la aceleración tangencial, la cual se origina por la variación de la magnitud de la velocidad, y 2) la aceleración normal es determinada por la variación de la dirección de la velocidad y apunta hacia el centro de curvatura de la curva en el punto dado; en otras palabras, es normal a la curva en este punto. Recuérdese que

$$a_n = \frac{v^2}{R} \quad (\text{C.20})$$

donde R es el radio de curvatura de la trayectoria en el punto dado y v es la rapidez del cuerpo en este punto.

La aceleración normal y la tangencial son perpendiculares entre sí (Figura C.6), entonces la magnitud de la aceleración es

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_t^2}$$

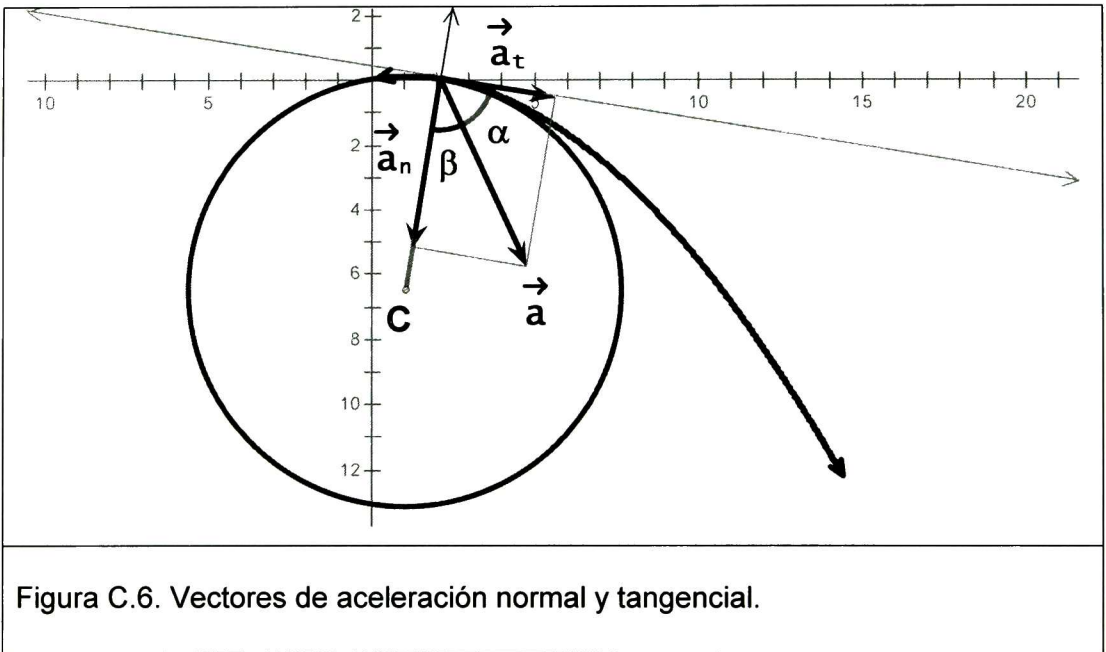


Figura C.6. Vectores de aceleración normal y tangencial.

La dirección de la aceleración se determina en función del ángulo β que forma \vec{a} con el radio de curvatura, o el ángulo α formado por \vec{a} con la recta tangente (ver Figura C.6)

$$\text{Tan}(\beta) = \frac{a_t}{a_n} \quad \text{Tan}(\alpha) = \frac{a_n}{a_t}$$

En el movimiento rectilíneo uniforme $a_t = 0$ y $a = a_n$; entonces para el movimiento curvilíneo uniforme, la aceleración tangencial es igual a cero, y la aceleración total coincide con la normal y está dirigida hacia el centro de curvatura, en cada punto de la trayectoria; así, la aceleración refleja el hecho de que la velocidad aunque

permanece constante en su magnitud, todo el tiempo esta variando de dirección (Coffman, 1963; Corbishley, 2000).

C.6 Resumen de Fórmulas Generales.

En esta sección se presenta un resumen de los resultados obtenidos para la curvatura (de la Borbolla, 1957). Sea una curva cuya ecuación es $y = f(x)$ en coordenadas rectangulares, entonces su curvatura se expresa como

$$C = \frac{y''}{\left(1 + (y')^2\right)^{3/2}}.$$

El centro de curvatura esta dado por las ecuaciones paramétricas

$$h = x - y' \frac{1 + (y')^2}{y''}, \quad k = y + \frac{1 + (y')^2}{y''}.$$

la ecuación del círculo osculador es $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$

Para $r = f(\theta)$, la curvatura es

$$C = \frac{r^2 + 2(r')^2 - rr''}{\left(r^2 + (r')^2\right)^{3/2}}.$$

donde $r' = dr/d\theta$ y $r'' = d^2r/d\theta^2$ Las coordenadas del centro de curvatura son

$$h = \frac{\left((r')^2 - rr''\right)r \cos(\theta) - \left(r^2 + (r')^2\right)r' \sin(\theta)}{r^2 + 2(r')^2 - rr''}$$

$$k = \frac{\left((r')^2 - rr''\right)r \sin(\theta) - \left(r^2 + (r')^2\right)r' \cos(\theta)}{r^2 + 2(r')^2 - rr''}$$

Bibliografía

Libros de Historia.

Smith, D. E. History of Mathematics Vol. I and II. Dover. 1958.

Smith, D. E. A Source Book in Mathematics. Dover. 1959.

Heath, T. A History of Greek Mathematics Vol. I and II. Oxford. 1960.

Coolidge. J. L. A History of Geometrical Methods. Dover. 1963.

Struik, D. J. A Source Book in Mathematics, 1200-1800. Harvard University Press. 1969.

Collette, J. P. Historia de las Matemáticas Tomo I y II. Siglo XXI. 1986.

Ribnavok, K. Historia de las Matemáticas. Ed. Mir Moscú. 1987

Dugas, R. A History of Mechanics. Dover. 1988.

Kline, M. Mathematical Thought from Ancient to Modern Times. Oxford University Press. 1990.

Boyer, C. B., Merzbach, U. C. A History of Mathematics. Second Edition. John Wiley & Sons. 1991.

Chandrasekhar, S. Newton's Principia for the Common Reader. Clarendon Press. 1995.

Dunham, W. Euler, el Maestro de todos los Matemáticos. Nivola. 2001.

Sánchez Fernández, C., Valdés Castro, C. Los Bernoulli, Geómetras y Viajeros. Nivola. 2001.

Newton, I. Tratado de Métodos de Series y Fluxiones. Traducción Iztaccíhuatl Vargas. Mathema, UNAM. 2001.

Tesis.

Aran Rodríguez, E. Desarrollo Conceptual de la Trigonometría en el Contexto de la Enseñanza. Matemática Educativa. Director de Tesis. Carrión Miranda, V. Cinvestav. 1993.

Libros de Geometría.

De la Borbolla y Monterrubio, F., De la Borbolla y Monterrubio, L. Problemas y Ejercicios de Geometría Analítica. UTEHA. 1957.

De la Borbolla y Monterrubio, F., De la Borbolla y Monterrubio, L. Geometría Analítica y Cálculo Problemas Escogidos. UTEHA. 1957.

Maravall Cassesnoves, D. Geometría Analítica y Proyectiva del Plano. Ed. Dossat, S. A. 1965.

Wexler, C. Geometría Analítica un Enfoque Vectorial. Montaner y Simón, S. A. 1977.

Lehman, C. H. Geometría Analítica. Limusa. 1980.

Steen, F. H., Ballou, D. H. Geometría Analítica. Publicaciones Cultural, S. A. 1982.

Gasson, M. C. Geometry of Spatial Forms. John Wiley & Sons. 1983.

Libros de Cálculo.

Ostrowski, A. Diferencial and Integral Calculus with Problems, Hints for Solutions, and Solutions. Scott, Foresman and Company. 1968.

- Fraleigh, J. B. Calculus a Linear Approach. Vol. II. Addison Wesley. 1972.

- Woods, F. S., Bailey, F. H. Geometría Analítica y Cálculo Infinitesimal. UTEHA. 1972.

- Gillman, L., McDowell, R. H. Calculus. W. W. Norton Company. 1973.

- Riddle, D. F. Calculus and Analytic Geometry. Wadsworth Publishing Company. 1974.

- Lang, S. Cálculo I y II. Fondo Educativo Interamericano. 1976.

- Lax, P., Burstein, S., Lax, A. Calculus with Applications and Computing Vol. I. Springer Verlag. 1976.

→ Taylor, H. E., Wade, T. L. Cálculo Diferencial e Integral. Ed. Limusa 1977.

↔ Piskunov, N. Cálculo Diferencial e Integral Tomo I. Ed. Mir Moscú. 1977

→ Kline, M. Calculus An Intuitive and Physical Approach. Second Edition. John Wiley and Sons. 1977.

↔ Hasser, N. B., Lasalle, J. P., Sullivan, J. A. Análisis Matemático Tomo I y II. Editorial Trillas. 1979.

Lang, S. Calculus of Several Variables. Second Edition. Addison Wesley. 1979.

- Lang, S. Análisis Matemático. Fondo Educativo Interamericano. 1979?
- Swokowski, E. Calculus with Analytic Geometry. Second Edition. Prindle, Weber y Schmidt. 1979.
- Granville, W. A. Cálculo Diferencial e Integral. Limusa. 1981.
- Courant, R., John, F. Introducción al Cálculo y al Análisis. Vol. I y II. Limusa. 1982.
- Leithold, L. The Calculus with Analytic Geometry. Fourth Edition. Harper & Row, Publishers. 1982.
- Kudriáv'tsev, L. D. Curso de Análisis Matemático Tomo I. Ed. Mir Moscú. 1983.
- Fraleigh, J. Cálculo con Geometría Analítica. Fondo Educativo Interamericano. 1984.
- Bluman, G. W. Problem Book for First Year Calculus. Springer Verlag. 1984.
- Kitchen, J. W. Cálculo. McGraw-Hill. 1986.
- Edwards, C. H., Penney, D. E. Cálculo con Geometría Analítica, Prentice-Hall. 1986.
- Larson, R. E., Hostetler, R. P. Cálculo y Geometría Analítica. McGraw-Hill. 1986.
- Bressoud, D. M. Second Year Calculus from Celestial Mechanics to Special Relativity. Springer Verlag. 1991.
- Marsden, J. E., Tromba, A. J. Cálculo Vectorial, Tercera Edición. Addison-Wesley. 1991
- Spivak, M. Cálculo Infinitesimal. Ed. Reverté. 1992.
- Marsden, J., Weinstein, A. Calculus I. Second Edition. Springer Verlag. 1995.
- Pita Ruiz, C. Cálculo Vectorial. Prentice Hall. 1995.
- Pita Ruiz, C. Cálculo de una Variable. Prentice Hall. 1998
- Stewart, J. Cálculo, Conceptos y Contextos. Internacional Thomson Editores. 1998.
- Apóstol, T. Calculus Vol. I y II. Segunda Edición. Ed. Reverté. 2001.

Libros de Teoría de Curvas.

- Lawrence, J. D. A Catalog of Special Plane Curves. Dover. 1972.
- Yates, R. C. Curves and their Properties. The National Council of Teachers of Mathematics. 1974.
- Rutter, J. W. Geometry of Curves. Chapman & Hall. 2000.

Libros de Física.

- Blass, G. A. Theoretical Physics. Appleton Century Crofts. 1962.
- Hauser, W. Introducción a los Principios de Mecánica. UTEHA. 1966.
- Spiegel, M. R. Theory and Problems of Theoretical Mechanics. Schaum. 1967.
- Frish, S., Timoreva, A. Curso de Física General. Tomo I. Editorial Mir. 1973.
- Barger, V., Olsson, M. Classical Mechanics A Modern Perspectiva. McGraw-Hill. 1973.
- Bath, M., Dzhnelidze, G., Kelzón, A. Mecánica Teórica en Ejercicios y Problemas Tomo I y II. Editorial Mir, Moscú. 1990.
- Fernández Rañada, A. Dinámica Clásica Segunda Edición. FCE. 2005.

Artículos

- Dean, G. R. American Mathematical Monthly, Vol. **8**, No. 1 (1901). Note on Radius of Curvature.
- Dean, G. R. American Mathematical Monthly, Vol. **8**, No. 2 (1901). Note on Center of Curvature.
- Moritz, R. E. American Mathematical Monthly, Vol. **24**, No. 5 (1917). On the construction of certain curves given in polar coordinates.
- Archibald, R. C. American Mathematical Monthly, Vol. **25**, No. 4 (1918) The Logarithmic Spiral.
- Rigge, W. F. American Mathematical Monthly, Vol. **26**, No. 1 (1919). Concerning a new method of tracing cardioids.
- Rigge, W. F. American Mathematical Monthly, Vol. **26**, No. 8 (1919). Cuspidal Rosettes.
- Rigge, W. F. American Mathematical Monthly, Vol. **27**, No. 4 (1920). Envelope Rosettes.
- Smart, E. H. Mathematical Gazette, Vol. **10**, No. 146 (1920). Intersections of Curves in Polars.

- Dunkel, O. American Mathematical Monthly, Vol. **28**, No. 4 (1921). The Relation of Caustics to Certain Envelopes.
- Rigge, W. F. American Mathematical Monthly, Vol. **29**, No. 1 (1922). Cuspidal Envelope Rosettes.
- Ettliger, H. J. American Mathematical Monthly, Vol. **29**, No. 10 (1922). Slope of a Curve in Polar Coordinates at the Pole.
- Whittemore, J. American Mathematical Monthly, Vol. **30**, No. 1 (1923). The effect of change of scale on curvature.
- Lodge, A. Mathematical Gazette, Vol. **11**, No. 163 (1923). Differentials as the Basis for Teaching the Calculus.
- Phillips, E. C. American Mathematical Monthly, Vol. **33**, No. 7 (1926). Some Applications of Mathematics to Architecture Gothic Tracery Curves.
- Garret, W. H. American Mathematical Monthly, Vol. **37**, No. 2 (1930). The problem of two bodies and a related Sextic.
- Winger, R. M. American Mathematical Monthly, Vol. **41**, No. 6 (1934). Note on Rational Curves with Trigonometric Parameter.
- Patterson, B. C. American Mathematical Monthly, Vol. **42**, No. 9 (1935). The Components of Velocity and Acceleration.
- Stratton, W. T. American Mathematical Monthly, Vol. **43**, No. 7 (1936). A Study of General Polar Tangent Curves.
- Grumman, H. R. Mathematics Magazine, Vol. **10**, No. 5 (1936). Theory of the Keufel and Esser Logarithmic Spiral Curve.
- Janes, W. C. Mathematics Magazine, Vol. **12**, No. 3 (1937). Garrett's Mechanism.
- Bettinger, A. K. Mathematics Magazine, Vol. **12**, No. 7 (1937). An Easy Method for Drawing Curves in Polar Coordinates.
- Olds, E. G. Mathematics Magazine, Vol. **14**, No. 8 (1940). We Discover the Meaning of Curvature.
- Patterson, B. C. American Mathematical Monthly, Vol. **47**. No. 1 (1940). The Triangle: Its Deltoids and Foliates.
- Singer, J. American Mathematical Monthly, Vol. **48**, No. 1 (1941). Some Remarks on Coordinate Systems.

- Hammer, P. C. American Mathematical Monthly, Vol. **48**, No. 6 (1941). Plotting Curves in Polar Coordinates.
- Rollet, A. P. Mathematical Gazette, Vol. **25**, No. 263 (1941). Road and Railway Curves.
- McCarthy, J. P. Mathematical Gazette, Vol. **25**, No. 263 (1941). The Cissoid of Diocles.
- Gulasekharam, F. H. V. Mathematical Gazette, Vol. **27**, No. 277 (1943). The General Conic.
- Wiseman, C. L. Mathematical Gazette, Vol. **28**, No. 282 (1944). The Sign of ρ and Related Topics.
- Fettis, H. F. Mathematics Magazine, Vol. **19**, No. 7 (1945). Geometric Properties of the Deltoid.
- Wagner, R. W. American Mathematical Monthly, Vol. **55**, No. 6 (1948). Equations and Loci in Polar Coordinates.
- Boyer, C. B. American Mathematical Monthly, Vol. **56**, No. 2 (1949). Newton as an originator of polar coordinates.
- Newell, A., Baez, A. V. American Journal of Physics, Vol. **17**, No. 4 (1949). Caustic Curves by Geometric Construction.
- Kasner, E. De Cicco, J. American Mathematical Monthly, Vol. **58**, No. 4 (1951). Physical Families in the Gravitational Field of Force.
- Yates, R. C., Nicholas, C. P. American Mathematical Monthly, Vol. **58**, No. 4 (1951). Normal and Tangential Acceleration.
- Andree, R. V. Mathematics Magazine, Vol. **24**, No. 5 (1951). Sketching Loci in Polar Coordinates.
- Yates, R. C. Mathematical Gazette, Vol. **35**, No. 311 (1951). Centre of Curvature for the Conics.
- Buckley, A. Mathematical Gazette, Vol. **35**, No. 314 (1951). On the Polar Equation of a Conic.
- Coolidge, J. L. American Mathematical Monthly, Vol. **59**, No. 2 (1952). The Origin of Polar Coordinates.

- Coolidge, J. L. American Mathematical Monthly, Vol. **59**, No. 6 (1952). The Unsatisfactory Story of Curvature.
- Adams, L. J. Mathematics Magazine, Vol. **25**, No. 4 (1952). The Use of Conics in Airplane Design.
- Lariviere, R. American Mathematical Monthly, Vol. **62**, No. 4 (1955). The Period of Polar Curves.
- Lariviere, R. Mathematics Magazine, Vol. **28**, No. 5 (1955). Polar Symmetry.
- MacMillan, R. H. Mathematics Gazette, Vol. **35**, No. 331 (1956). Curves of Pursuit.
- Gans, D. Mathematics Magazine, Vol. **31**, No. 1 (1957). Angle of inclination and curvature.
- Lawden, D. F. Mathematical Gazette, Vol. **41**, No. 337 (1957). Mathematical Problems of Astronautics.
- Todhunter, V. I. Mathematical Gazette, Vol. **42**, No. 339 (1958). Radius of Curvature in Polars.
- Hoggatt, V. E. Mathematics Magazine, Vol. **34**, No. 5 (1961). Satellite Mechanics.
- Sloyan, S. M. S. Mathematics Magazine, Vol. **35**, No. 3 (1962). On the Family of Curves $z = (t - t^n)/2$.
- Coffman, R. T. Mathematics Magazine, Vol. **36**, No. 1 (1963). The "Reflection Property" of the Conics.
- Coffman, R. T. Mathematics Magazine, Vol. **36**, No. 5 (1963). A Study of Conic Section Orbits by Elementary Mathematics.
- Little, J. C., Harris, V. C. Mathematics Magazine, Vol. **37**, No. 5 (1964). Simultaneous Solution of the Three Ancient Problems.
- Rees, W. A. Mathematics Magazine, Vol. **38**, No. 3 (1965). Angle Partition.
- Seiner, J. A. Mathematics Magazine, Vol. **39**, No. 3 (1966). Curvature by Normal Line Convergence.
- Simpson, E. J. Mathematical Gazette, Vol. **50**, No. 374 (1966). Spirography.
- Freitag, H. T., Freitag, A. H. Mathematics Magazine, Vol. **40**, No. 3 (1967). Constructions for Certain Circles of Curvature and Related Extreme Problems.
- Cronin, Jr., J. L., Jones, L. C. American Journal of Physics, Vol. **35** (1967). Invariant Velocity Components: A Key to Newton's Analysis of Keplerian Planetary Motion.

- Vinh, N. X., Zirakzadeh, A. *Mathematics Magazine*, Vol. **41**, No. 1 (1968). On a Property of Logarithmic Spirals.
- Cronin, Jr., J. L., Jones, L. C. *American Journal of Physics*, Vol. **36** (1968). Velocity Hodograph of Inverse-Square Central Force Motion.
- Thurston, H. *Mathematics Magazine*, Vol. **42**, No.1 (1969). Tangents: An Elementary Survey.
- Graef, E. V. *Mathematics Magazine*, Vol. **42**, No.1 (1969). On the Solutions of Three Ancient Problems.
- Aucoin, A. A. *Mathematics Magazine*, Vol. **43**, No.3 (1970). On the Leaf Curves.
- Brooks, F. *Mathematics Magazine*, Vol. **44**, No.1 (1971). Corn Rows and Convex Curves.
- Shapiro, A. E. *Archive for History of Exact Sciences*, Vol. **11**, No 2 (1973). Kinematic optics: a study of wave theory of light in the seventeenth century.
- Whiteside, D. T. *Archive for History of Exact Sciences*. Vol. **1**, No. 3 (1975). Patterns of Mathematical Thought in the later Seventeenth Century.
- Bachmakova, I. G. *Archive for History of Exact Sciences*. Vol. **2**, No. 2 (1975). Les méthodes différentielles d'Archimède.
- Motz, L. *American Journal of Physics*, Vol. **43**, No. 7 (1975). The conservation principles and Kepler's laws of planetary motion.
- Abelson, H., diSessa, A., Rudolph, L. *American Journal of Physics*, Vol. **43**, No. 7 (1975). Velocity space and the geometry of planetary orbits.
- Karioris, F. G., Mendelson, K. S. *American Journal of Physics*, Vol. **44**, No. 8 (1976). Some Geometrical Features of Fields.
- Nash, D. H. *Mathematics Magazine*, Vol. **50**, No. 2 (1977). Rotary Engine Geometry.
- Haines, C. R. *Mathematical Gazette*, Vol. **61**, No. 418 (1977). Old Curves in a New Setting.
- Schot, S. H. *Mathematics Magazine*, Vol. **51**, No. 5 (1978). Aberrancy: Geometry of the Third Derivative.
- Bruce, J. W., Giblin, P. J., Gibson, C. G. *American Mathematical Monthly*, Vol. **88**, No. 9 (1981). On caustics of plane curves.

- Zeitlin, J. *Mathematics Magazine*, Vol. **54**, No. 2 (1981). Nesting Behavior of Osculating Circles and the Fresnel Integrals.
- May, K. C. *Mathematical Gazette*, Vol. **65**, No. 434 (1981). A Exercise in Polar Coordinates.
- Grossman, J. T., Grossman, M. P. *College Mathematics Journal*, Vol. **13**, No. 1 (1982). Dimple or No Dimple.
- Kroopnick, A. J. *The Two Years College Mathematics Journal*, Vol. **13**, No. 1 (1982). A Note on Parallel Curves.
- Essary, A. W. *The Two Years College Mathematics Journal*, Vol. **13**, No. 3 (1982). Rectangular Aids for Polar Graphs.
- Milnor, J. *American Mathematical Monthly*, Vol. **90**, No. 6 (1983). On the Geometry of the Kepler Problem.
- McAllister, B. L. *The Two Years College Mathematics Journal*, Vol. **14**, No. 5 (1983). Products of Sets of Complex Numbers.
- Fay, H. T., O'Neal, E. *Mathematics and Computer Education*. Vol. **17**, No. 1, Winter 1983. Counting the Petals of Rose Curves.
- Brozinsky, M. K. *College Mathematics Journal*, Vol. **15**, No. 2 (1984). Reflection Property of the Ellipse and the Hyperbola.
- Murty, V. N. *Mathematics and Computer Education*, Vol. **18**, No. 1, Winter 1984. Polar Equations and Points of Intersection.
- Braden, B. *Mathematics Magazine*, Vol. **58**, No. 1 (1985). Design of an Oscillating Sprinkler.
- Grant, M. A. *Mathematical Gazette*, Vol. **69**, No. 448 (1985). A Locus Problem.
- Fay, H. T. *Mathematics and Computer Education*, Vol. **19**, No. 3, Fall 1985. Reflections on the Bottom of a Teacup.
- Lewis, F. W. *College Mathematics Journal*, Vol. **17**, No. 5 (1986). Defining Area in Polar Coordinates.
- Fay, H. T. *Mathematics and Computer Education*, Vol. **20**, No. 1, Winter 1986. Asymptotes in Polar Coordinates.
- Shore, F. J. *American Journal of Physics*, Vol. **55**, No. 2 (1987). The Kepler problem recast: Use of a transverse velocity transformation and the invariant velocities.

- Maurer, P. M. *American Mathematical Monthly*, Vol. **94**, No 7 (1987). A Rose is a Rose...
- Agnew, J. L., Choike, J. R. *College Mathematics Journal*, Vol. **18**, No. 5 (1987). Transitions.
- Boyd, J. N., Farley, R. W., Raychowdhury, P. N. *Mathematical Gazette*, Vol. **72**, No. 462 (1988). Loci and Rolling Circles.
- Sivardière, J. *American Journal of Physics*, Vol. **56**, No. 2 (1988). A simple look at the Kepler motion.
- Evans, J. *American Journal of Physics*, Vol. **56**, No.11 (1988). The Division of the Martian Eccentricity from Hipparchus to Kepler: A History of the Approximation to Kepler Motion.
- Fay, T. H. *American Mathematical Monthly*, Vol. **96**, No. 5 (1989). The butterfly curve.
- Althoen, S. C., Wyneken, M. F. *American Mathematical Monthly*, Vol. **97**, No. 10 (1990). The Width of a Rose Petal.
- Cundy, H. M. *Mathematical Gazette*, Vol. **74**, No. 468 (1990). The Bascule Bridge – an Unexpected Cardioid.
- Gilbert, E. N. *American Mathematical Monthly*, Vol. **98**, No. 3 (1991). How Things Float.
- Quadling, D. *Mathematical Gazette*, Vol. **75**, No. 472 (1991). What is the Matter with Negative r ?
- Temple, B. Tracy, C. A. *American Mathematical Monthly*, Vol. **99**, No. 6 (1992). From Newton to Einstein.
- Hall, L. M. *College Mathematics Journal*, Vol. **23**, No. 1, (1992). Trochoids, Roses, and Thorns - Beyond the Spirograph.
- Urban, M. M. *The Mathematics Teacher* Vol. **85**, No. 2 (1992). A Circle is a ... Rose.
- Smith, J. D. *Mathematical Gazette*, Vol. **76**, No. 475 (1992). The Remarkable Ibn al-Haytham.
- Gordon, K. S. *Mathematics and Computer Education*, Vol. **26**, No. 1 (1992). Investigating the Petals of Hybrid Roses.
- Sivardière, J. *European Journal Physics* Vol. **13** (1992). Comments on the dynamical invariants of the Kepler and harmonic motions.

- Needham, T. *American Mathematical Monthly*, Vol. **100**, No. 2 (1993). Newton and the Transmutation of Force.
- Thurston, H. *Mathematics Magazine*, Vol. **66**, No. 4 (1993). On Tangents.
- Johnson, J. *College Mathematics Journal*, Vol. **24**, No. 3 (1993). Tangent Vectors and Orthogonal Projections.
- Gordon, S. P. *College Mathematics Journal*, Vol. **24**, No. 4 (1993). Taylor Polynomial Approximations in Polar Coordinates.
- Bange, D., Host, L. *College Mathematics Journal*, Vol. **24**, No. 4 (1993). Does a Parabola Have an Asymptote?
- Eidswick, J. *College Mathematics Journal*, Vol. **24**, No. 5 (1993). Two Trisectrices for the Price of One Rolling Coin.
- Eisner, M. P. *The Mathematics Teacher*, Vol. **86** No. 5 (1993). The Shape of a Baseball Field.
- Krpić, D. K., Aničin, I. V. *European Journal Physics*, Vol. **14** (1993). The Planets, after all, may run only in Perfect Circles –but in the velocity space!
- Banchoff, T., Giblin, P. *American Mathematical Monthly*, Vol. **101**, No. 5 (1994). On the Geometry of Piecewise Circular Curves.
- Jiang, H., Nunemacher, J. *Mathematics Magazine*, Vol. **67**, No. 5 (1994). On Length and Curvature.
- Lenard, A. *College Mathematics Journal*, Vol. **25**, No. 2 (1994). Kepler Orbits More Geometric.
- Nauenberg, M. *College Mathematics Journal*, Vol. **25**, No. 3 (1994). Newton's Principia and Inverse-Square Orbits.
- Schwarz, M. *College Mathematics Journal*, Vol. **25**, No. 4 (1994). On the Distance from a Point to a Curve.
- Germain-McCarthy, Y. *The Mathematics Teacher*, Vol. **87** No. 9 (1994). Demystifying Polar Graphing.
- Nauenberg, M. *Archive for History of Exact Sciences*, Vol. **46**, No. 3 (1994). Newton's Early Computational Method for Dynamics.
- Pritikin, D. *College Mathematics Journal*, Vol. **26**, No. 4 (1995). Rectangular-to-Polar Folding Fans.

- Kolpas, S. J. Mathematics and Computer Education. Vol. **29** No. 1, Winter 1995. A Classroom Note on Descartes' Derivative.
- Germain-McCarthy, Y. Mathematics and Computer Education, Vol. **29** No. 3, Fall 1995. A Classroom Note on Graphing Polar Conics from Cartesian Graphs.
- Germain-McCarthy, Y. The Mathematics Teacher, Vol. **88**, No. 1 (1995). Circular Graphs: Vehicles for Conic and Polar Connections.
- Denson, P The Mathematics Teacher, Vol. **88**, No. 8 (1995). Trigonometric Polar Graphs.
- González-Villanueva, A., Núñez-Yépez, H. N., Salas-Brito, A. L. European Journal Physics. Vol. **17** (1996). In velocity space the Kepler orbits are circular.
- Speiser, D. Archive for History of Exact Sciences. Vol. **60**, No. 3 (1996). The Kepler Problem from Newton to Johann Bernoulli.
- Stein, S. The Mathematical Intelligencer, Vol. **18**, No. 2 (1996). Exactly how did Newton deal with his planets?
- Drucker D., Locke, P. Mathematics Magazine, Vol. **69**, No. 4 (1996). A Natural Classification of Curves and Surfaces with Reflection Properties.
- Leinbach, L. C. College Mathematics Journal, Vol. **27**, No. 4 (1996). Scientific WorkPlace for Windows.
- Pourciau, B. American Mathematical Monthly, Vol. **104**, No. 1 (1997). Reading the Master: Newton and the Birth of Celestial Mechanics.
- Danby, J. M. A. American Mathematical Monthly, Vol. **104**, No. 7 (1997). The Sheer Joy of Celestial Mechanics.
- Fay, T. H. Mathematics Magazine, Vol. **70**, No. 2 (1997). A Study in Step Size.
- Shepard, M. College Mathematics Journal, Vol. **28**, No. 1 (1997). A Rose Is a Rose Is a Rose...
- Simoson, A. College Mathematics Journal, Vol. **28**, No. 2 (1997). An Envelope for a Spirograph.
- Loe, B. J., Beagley, N. College Mathematics Journal, Vol. **28** No. 4, (1997). The coffee cup caustic for calculus students.
- Flores, A. Mathematics and Computer Education. Vol. **31** No. 1, Winter 1997 Curves as Envelopes with the Geometer's Sketchpad.

- Katz, V. J. American Mathematical Monthly, Vol. **105**, No. 4 (1998). Force and Geometry in Newton's Principia.
- Gross, C., Strempel, T. K. American Mathematical Monthly, Vol. **105**, No. 8 (1998). On Generalizations of Conics and on a Generalization of the Fermat-Torricelli Problem.
- Seery, M. J. College Mathematics Journal, Vol. **29**, No. 3 (1998). Pursuit and Regular N-gons.
- Teets, D. A., Whitehead K. College Mathematics Journal, Vol. **29**, No. 5 (1998). Computation of Planetary Orbits.
- González-Villanueva, A., Núñez-Yépez, H. N., Salas-Brito, A. L. Revista Mexicana de Física Vol. **44** (1998). The Coulomb problem and Rutherford scattering using the Hamilton vector.
- González-Villanueva, A., Guillaumin-España, E., Núñez-Yépez, H. N., Salas-Brito, A. L. Revista Mexicana de Física Vol. **44** (1998). Scattering in a Coulomb potential: a velocity space point of view.
- Núñez-Yépez, H. N., Guillaumin-España, E., González-Villanueva, A., Martínez y Romero, R. P., Salas-Brito, A. L. Revista Mexicana de Física Vol. **44** (1998). Newtonian approach for the Kepler-Coulomb problem from the point of view of velocity space.
- González-Villanueva, A., Guillaumin-España, E., Núñez-Yépez, H. N., Salas-Brito, A. L. European Journal Physics Vol. **19** (1998). From circular paths to elliptic orbits: a geometric approach to Kepler's motion.
- Boyadzhiev, K. N. College Mathematics Journal, Vol. **30**, No. 1 (1999). Spirals and conchospirals in the flight of insects.
- Deever, D. L. College Mathematics Journal, Vol. **30**, No. 3 (1999). The Average Distance of the Earth from the Sun.
- Oliveros, D. Montejano, L. Ciencias, 1999. De Volantines, Espirógrafos y la Flotación de Cuerpos.
- Butikov, E. I. European Journal Physics, Vol. **21** (2000). The velocity hodograph for an arbitrary Keplerian motion.
- Núñez-Yépez, H. N., Salas-Brito, A. L. European Journal Physics, Vol. **21** (2000). The velocity hodograph for an arbitrary Kepler motion.

- Corbishley, H. R. *Mathematical Gazette*, Vol. **84**, No. 499 (2000). The Hale-Bopp comet explored with a level mathematics.
- Smith, K. C. *College Mathematics Journal*, Vol. **31**, No. 1 (2000). Normal Lines and Curvature.
- Newton, I. Heny, R. C. *American Journal of Physics*, Vol. **68**, No. 7 (2000). Circular Motion
- Deck, K. M. *College Mathematics Journal*, Vol. **31**, No. 2 (2000). Spirograph Math.
- Osserman, R. *American Mathematical Monthly*, Vol. **108**, No. 9 (2001). Kepler's Law, Newton's Laws, and the Search for New Planets.
- Chakerian, G. D. *Mathematics Magazine*, Vol. **74**, No. 1 (2001). Central Force Laws, Hodographs, and Polar Reciprocals.
- Sekino, J. *College Mathematics Journal*, Vol. **32**, No. 2 (2001). The Band Around a Convex Set.
- Brannen, S. *College Mathematics Journal*, Vol. **32**, No. 4 (2001). The Sun, the Moon, and Convexity.
- Derbes, D. *American Journal of Physics*, Vol. **69**, No. 4 (2001). Reinventing the Wheel: Hodographic solutions to the Kepler Problems.
- Gordon, A. R., Ferguson, C. *Mathematics Magazine*, Vol. **75**, No. 1 (2002). Counterintuitive Aspects of Plane Curvature.
- Moll, V., Nowalsky, J., Roa, G., Solanilla, L. *Mathematics Magazine*, Vol. **75**, No. 3 (2002). Bernoulli on Arc Length.
- Finn, D. L. *College Mathematics Journal*, Vol. **33**, No. 4 (2002). Can a Bicycle Create a Unicycle Track?
- Boychev, P. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, Vol. **7** (2002). North Pole Adventures.
- Apostolatos, T. A. *American Journal of Physics*, Vol. **71**, No. 3 (2003). Hodograph: A useful geometrical tool for solving some difficult problem in dynamics.
- Kowen, M., Mathur, H. *American Journal of Physics*, Vol. **71**, No. 4 (2003). On Feynman's Analysis of the Geometry of Keplerian Orbits.
- Pourciau, B. *Archive for History of Exact Sciences*. Vol. **57**, No. 4, (2003). Newton's Argument for Proposition 1 of the Principia.

- Lodder, J. American Mathematical Monthly, Vol. **110**, No. 7 (2003). Curvature in the Calculus Curriculum.
- Wilkins, D. College Mathematics Journal, Vol. **34**, No. 4 (2003). The Tangent Lines of a Conic Section.
- Burgette, L. F., Gordon, R. A. College Mathematics Journal, Vol. **35**, No. 2 (2004). On Determining the Non-Circularity of a Plane Curve.
- Edwards, S., Gordon, R. A. American Mathematical Monthly, Vol. **111**, No. 1 (2004). Extreme Curvature of Polynomials.
- Gordon, R. A. Mathematical Gazette, Vol. **89**, No. 516 (2005). The Aberrancy of Plane Curves.
- Robin, A. C. Mathematical Gazette, Vol. **89**, No. 516 (2005). A Global Measure of Curvature.
- Suzuki, J. Mathematics Magazine, Vol. **78**, No. 5 (2005). Tangency and Optimization without Limits
- Scarpello, G. M., Scimone, Archive for History of Exact Sciences. Vol. **59**, No. 3 (2005). The Work of Tschirnhaus, La Hire and Leibnitz on Catacaustics and the Birth of the Envelopes of Lines in the 17th Century.
- Nauenberg, M. American Journal of Physics, Vol. **73**, No. 4 (2005). Curvature in Orbital Dynamics.
- Berman, L. W. College Mathematics Journal, Vol. **37**, No. 3 (2006). Folding Beauties.
- Bertoloni Meli, D. Archive for History of Exact Sciences. Vol. **60**, No. 3 (2006). Inherent and Centrifugal Forces in Newton.
- Simoson, A. J. College Mathematics Journal, Vol. **37**. No. 5 (2006). Playing in a Space Station.
- Chrysafi, L., Gordon, S. Mathematics and Computer Education. Vol. **40** No. 2, Spring 2006. On the Curvature Function: Where does a Curve Bend the Fastest?
- Gil, S. Reisin, H. D., Rodríguez, E. E. American Journal of Physics, Vol. **74**, No. 9 (2006). Using a Digital Camera as a Measuring Device.
- Flores, L., Flores, A. Primus, Vol. **16**, No. 4 (2006). Calculus, Paper, Scissors.
- Apostol, T. M., Mnatsakanian, M. A. American Mathematical Monthly, Vol. **114**, No. 5 (2007). Unwrapping Curves from Cylinders and Cones.

- Escudero, C. A., Reventós, A. *American Mathematical Monthly*, Vol. **114**, No. 7 (2007). An Interesting Property of the Evolute.
- Kalman, D. *Mathematics Magazine*, Vol. **80**, No. 3 (2007). Solving the Ladder Problem on the Back of an Envelope.
- Boyadzhiev, K. N. *College Mathematics Journal*, Vol. **38**, No. 4 (2007). Equiangular Surfaces, Self-Similar Surfaces, and Geometry of Seashells.
- Bains, M. S., Thoo, J. B. *College Mathematics Journal*, Vol. **38**, No. 4 (2007). The Normals to Parabola and the Real Roots of a Cubic.

El jurado designado por el Departamento de Matemática Educativa, Unidad Distrito Federal del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, aprueba la tesis:

Un enfoque dinámico en el estudio de curvas en coordenadas polares

que presenta **Arturo Velasco Pelayo** para su examen final de Maestría en Ciencias en la especialidad de Matemática Educativa el día 22 de septiembre del año 2011.


Dr. Gonzalo Zubieta Badillo


Dr. Hugo Rogelio Mejía Velasco


Dr. Carlos Armando Cuevas Vallejo