Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del
Instituto Politécnico Nacional

Unidad Distrito Federal

Departamento de Matemática Educativa

Introducción de prerrequisitos de Cálculo en un curso de Geometría Analítica del Bachillerato

Tesis que presenta

Yazmin Castañeda Segura

para obtener el Grado de

Maestra en Ciencias
especialidad Matemática Educativa

Director de la Tesis: Dr. Jesús Alfonso Riestra Velázquez

México, Distrito Federal Diciembre 2011

...

Como un testimonio

de gratitud ilimitada: a mi hijo.

Porque su presencia ha sido y será siempre

el motor más grande que me ha impulsado

para lograr esta meta

y porque hoy la veo llegar a su fin.

Gracias Yeray por todo tu amor.

Te amo.

A quien me ha heredado el tesoro más valioso

que puede dársele a un hijo: Amor.

A quien sin escatimar esfuerzo alguno

ha sacrificado gran parte de su vida

para formarme y educarme.

A quien la ilusión de su vida

ha sido convertirme en persona de provecho.

A quien nunca podré pagar todos sus desvelos

ni aun con las riquezas mas grandes del mundo.

Por eso y más, gracias mamá.

Agradecimientos

Mi más sincero y profundo agradecimiento a mi director de tesis, una de las personas que más admiro por su inteligencia y conocimientos, el **Dr. Jesús Alfonso Riestra Velázquez**, por ser un pilar muy importante durante mi formación académica, por sus grandes enseñanzas, por su guía, apoyo, tiempo y dedicación para esta investigación.

Gracias al **Dr. Gonzalo Zubieta Badillo** y al **Dr. Hugo Rogelio Mejía Velasco**, por sus valiosas sugerencias que hicieron para enriquecer y mejorar este trabajo de investigación, por haber sido excelentes profesores durante mi formación académica, de ustedes me llevó un gran aprendizaje.

A toda mi familia por apoyarme en todo momento, especialmente a mi hermana **Nallely Castañeda Segura**, sin su gran ayuda no habría podido invertir el tiempo que necesite para lograr esta meta.

Gracias a la **M. en C. Micaela González Lozano,** por ser mi compañera, gran amiga y cómplice en este camino.

A todos mis compañeros y profesores de estos tiempos.

Al personal del Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav de los cuales siempre obtuve su ayuda y apoyo, especialmente a **Adriana Parra** por ser siempre tan profesional en su trabajo.

Al personal de la biblioteca *Jerzy Plebański*", por su apoyo durante mi estancia en el Departamento de Matemática Educativa.

Al **CINVESTAV**; en particular al **Departamento de Matemática Educativa** por haberme dado la oportunidad de pertenecer a este centro de investigación.

Agradecimiento

Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología

Por el apoyo económico recibido durante la realización de mis estudios de maestría, en el Departamento de Matemática Educativa del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional; sin el cual, hubiera sido muy difícil concetar esta meta.

Atentamente

Yazmin Castañeda Segura

Número de Registro: 233179

Resumen

La meta original del proyecto de tesis era poder presentar y justificar la propiedad focal de la reflexión en un espejo parabólico (parábola de revolución). Haciendo un corte con un plano que pase por el eje común de las parábolas, el problema se reduce a mostrar que un rayo paralelo al eje de una parábola se refleja pasando por el foco de la misma. Para ello, el Cálculo Diferencial explica la propiedad de que con un gran acercamiento (un zoom in con centro en el punto de incidencia) la parábola se ve como su tangente, lo que permite deducir la reflexión sobre la parábola de la ley de reflexión ordinaria para superficies planas. Se requiere una fórmula que dé la pendiente de la tangente en cada punto (en función de la abscisa del mismo), lo que presupone ver a la parábola como una función y si, como es el caso, hay necesidad de obviar el concepto de limite, se pueden utilizar ventajosamente los desarrollos de Taylor algebraicos que aparecen en las tesis de maestría de Aguilar (2007) y Calderón (2009) ambas realizadas en el DME. En nuestro caso, dichos desarrollos de Taylor, alrededor de la abscisa del punto en cuestión, sólo se requieren para funciones cuadráticas simples que corresponden a parábolas con vértice en el origen y, por lo mismo, son hasta grado 2. De este modo, su parte lineal, que se obtiene despreciando la parte cuadrática, corresponde a la recta tangente, lo que simultáneamente explica cómo funciona el zoom in .y nos provee de una fórmula para la pendiente de la tangente en función de la abscisa del punto (dicha fórmula no es otra que la función derivada obtenida por medios algebraicos).

La tesis se abocó entonces al diseño de una serie de actividades en el contexto de un curso de Geometría Analítica de nivel bachillerato para cubrir los prerrequisitos para la meta mencionada que incluyen importantemente la introducción de la noción de función como una relación entre dos variables. El diseño de las actividades se fundamentó teóricamente en la didáctica de Aebli (basada en la teoría de aprendizaje de Piaget) y en la teoría de Duval de los registros de representación semiótica. Las guías de las actividades fueron experimentadas a lo largo del desarrollo del curso de Geometría Analítica en condiciones reales de aula. La tesis reporta tal experimentación y una serie de observaciones incluyendo cierta autocrítica. En términos generales, puede decirse que los alumnos mostraron deficiencias no sólo de naturaleza algebraica, sino incluso aritmética, que les impidieron completar cabalmente algunas de las actividades propuestas. De todas formas, creemos que destacar tales deficiencias resulta relevante para la investigación en Matemática Educativa.

Abstract

The original goal of this thesis project was to present and justify the focal property of the reflection on a parabolic mirror (parabola of revolution). Upon making a cut with a plane through the common axis of the parabolas, the problem is reduced to showing that a parallel ray to the axis of a parabola is reflected passing through the focus of the parabola itself. In order to do that, Differential Calculus can explain the property that with a great close up (a zoom in with its center in the incidence point) the parabola is seen as its tangent line, which allows deducing the reflection upon the parabola from the ordinary law of reflection for flat surfaces. A formula is required for the slope of the tangent line at each point's abscissa, which presupposes seeing the parabola as a function and if, as is the case, there is a need for obviating the concept of limit, the algebraically obtained Taylor's developments, which appear in the MS thesis of Aguilar (2007) and Calderón (2009) can be profitably used; both theses were carried out at DME. In our case, such Taylor´s developments, in the neighborhood the abscissa of the point in question, are merely required for simple quadratic functions that correspond to parabolas with vertex in the origin and, in so being, up to grade 2. In this way, its linear part, which is obtained by disregarding the quadratic part, corresponds to the tangent line, which simultaneously explains how the zoom in works and, at the same time, provides us with a formula for the slope of the tangent in terms of the abscissa of the point (such formula is no other than the derived function obtained by algebraic means).

The thesis then focused on the design of a series of activities within the context of a High-School Analytic Geometry course in order to comply with the prerequisites of the goal mentioned above which mainly include the introduction of the notion of function as a relationship between two variables. The design of the activities was theoretically founded upon the didactics of Aebli (based upon Piaget's learning theory) and on Duval's theory of registers of semiotic representation. The guides for the activities were experimented throughout the development of the Analytical Geometry course in real classroom conditions. The thesis reports such experimentation and a series of remarks including certain self-criticism. In general terms, it can be said that students showed deficiencies not only of algebraic nature, but also of arithmetic one, which prevented them from successfully completing some of the proposed activities. Nevertheless, we believe that pointing out such deficiencies results relevant for researching in Mathematics Education.

Índice general

Capítulo 1

Introducción y fundamentación

1.1. Planteamiento del problema

Originalmente el proyecto de tesis se inscribía en una línea que pretendía ofrecer una alternativa teórica para introducir el concepto de derivada reflejada en tesis anteriores (Andreu 2006, Aguilar 2007 y Calderón 2009) con estudiantes de nivel superior. Sin embargo, los grupos que se lograron conseguir, de hecho para impartir, fueron dos cursos de Geometría Analítica a nivel bachillerato. Lo que se trataba era de adaptar y aplicar alguna de las ideas de Cálculo Diferencial de la línea mencionada para dicho curso. Para tal fin se escogió el fenómeno de reflexión en un espejo parabólico (parábola de revolución). Aplicando las leyes de reflexión ordinarias en un corte vertical (el cual resulta ser una parábola) y "viendo muy de cerca" el fenómeno se "ve" como si el rayo de incidencia chocara contra su tangente. Para introducir estas ideas necesitábamos ver a la parábola como una función.

Un problema fundamental fue introducir el concepto de función en el curso de Geometría analítica como la relación entre dos variables, la variable independiente que determina los valores de la otra variable, dependiente, esto incluía ver a las rectas como funciones.

1.2. Antecedentes

El Cálculo Diferencial es una materia muy importante de las matemáticas, se encuentra presente en los planes de estudio de escuelas de nivel medio superior y superior. Los índices de aprobación son muy bajos, por ejemplo Andreu (2006) cita a Tall (1996) quien menciona citando a su vez a Anderson & Loftsgaarden (1987) y a Peterson (1987) "*que a pesar de que los alumnos se someten a un régimen pesado de ejercicios de cálculo, el porcentaje de fracasos en este tema oscila entre el 30 % y 50 %*". Esto debido a muchas posibles causas, una de ellas *"la carencia de un planteamiento educativo adecuado en la* *enseñanza de las matemáticas y del cálculo diferencial en particular"*, (Andreu, 2006, p. 3). Polya (1965) menciona que si el profesor dedica parte de su tiempo a ejercitar con los alumnos operaciones rutinarias, matará en ellos el interés e impedirá, posiblemente, su desarrollo intelectual y acabará desaprovechando su oportunidad como un buen enseñante de matemáticas. Pero, si por el contrario pone a prueba la curiosidad de sus alumnos planteándoles problemas adecuados, y les ayuda a resolverlos por medio de preguntas estimulantes, podrá despertarles el gusto por el pensamiento independiente y proporcionarles ciertos recursos para resolver problemas. Por otro lado Aebli (1958) menciona que la tarea del maestro consiste en construir situaciones tales que conduzca a los estudiantes a descubrir y construir operaciones por investigación personal. Más adelante se describirá el modelo que intentamos seguir que es la didáctica contructivista de Aebli, fundada en la teoría de aprendizaje de Piaget (Aebli, 1958) reforzada con la teoría de registros de representaciones semióticas de Duval (1998).

La propuesta de tesis de Aguilar (2007) para introducir el concepto de derivada en el contexto de máximos y mínimos (será referida como la propuesta Aguilar- Riestra), constituye una variante de la introducción de la derivada en la tesis doctoral de Andreu (2006) y en los artículos de la misma autora con su director (Andreu y Riestra, 2005 y 2007). Esta última propuesta será referida como la propuesta Andreu- Riestra.

La función derivada aparece implícitamente por primera vez en los problemas isoperimétricos de máximos y mínimos de Fermat. Dichos problemas se modelan como funciones algebraicas. La derivada algebraica, surge en el contexto de máximos y mínimos en situaciones similares a las del método de Fermat en la propuesta Andreu- Riestra. Ahí se plantea una versión moderna de dicho método para la determinación de valores extremos de funciones algebraicas y el método de Fermat se justifica apelando a que la ecuación $f(x+h) - f(x) = 0$ tiene a $h = 0$ como raíz doble cuando en x hay un extremo.

En la propuesta Aguilar - Riestra (2007) se ofrece un método alternativo, puramente algebraico, para la determinación de máximos y mínimos que se basa simplemente en el signo de la función diferencia $f(x+h)-f(x)$, a saber, que se mantenga positivo para un mínimo (relativo), o bien, se mantenga negativo para un máximo (relativo) cuando $|h|$ es "pequeña". Para esto se desarrolla en potencias de h, es decir, con $f(x+h)-f(x) = E_0(x)h + E_1(x)h^2 + \cdots$ Pues para h suficientemente pequeña ($|h| \ll 1$) se tiene $f(x+h) - f(x) \approx E_0(x)h$, donde $E_0(x)$ no es otra que la función derivada (o sea la derivada en x).

Otra ventaja del método propuesto es que al expresar la diferencia en la forma $f(x) - f(x_0) = E_0(x_0)(x-x_0)+E_1(x_0)(x-x_0)^2+\cdots$ valuada en el punto x_0 con un incremento $h = x - x_0$, nos pemite comprobar que al mirar realmente muy de cerca a la gráfica de la función diferencia $(f(x) - f(x_0))$, con centro en el punto $(x_0, f(x_0))$, solo se puede apreciar su parte lineal: $f(x) - f(x_0) = E_0(x_0)(x - x_0)$ (es decir la parte que domina), la cual es precisamente la ecuación de la recta tangente a la curva en x_0 cuya pendiente es $E_0(x_0)$ (i.e. $f'(x_0)$, la derivada de la función en x_0). Más precisamente, en la notación clásica, la ecuación de la recta tangente en el punto $(x_0, f(x_0))$ está dada por $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$.

Siguiendo estas propuestas de introducir a la derivada como una función (*función derivada*), nos planteamos introducir la noción de función en términos de la relación entre variables, como lo menciona Hitt (1996): *"Nicholas (1969. Pág. 757) sugiere que la definición más apropiada para efectos de enseñanza preuniversitaria es la que está en términos de relación entre variables"*

1.3. Fundamentación Teórica

En esta sección realizaremos una revisión de los fundamentos teóricos que sustentan la metodología de esta tesis. Como ya hemos mencionado nos apoyaremos para la enseñanza de un concepto en la didáctica fundada en la psicología de aprendizaje de Jean Piaget (Aebli 1958).

Para la formación de conceptos de acuerdo a la didáctica de Aebli es necesario que el estudiante realice una actividad que esté vinculada con el concepto, los sistemas semióticos y registros de representación permiten que el estudiante pueda acceder al concepto e interiorizarlo dentro de la actividad, los objetos matemáticos no son directamente accesibles por la percepción, como son los objetos reales o físicos, luego para ello nos apoyaremos también en la teoría de Duval sobre Registros de Representaciones Semióticas.

1.3.1. Una didáctica fundada en la psicología de Piaget

La psicología genética de Jean Piaget, analiza la formación de operaciones intelectuales[1] y nociones durante el desarrollo del niño, considera que *"todo acto intelectual se construye progresivamente a partir de reacciones anteriores y más primitivas"* (Aebli, 1958, p.91).

La didáctica Piagetiana, dice Aebli, *"debe arrancar de la tesis fundamental según la cual el pensamiento no es un conjunto de téminos estáticos, sino un juego de operaciones vivientes y actuantes. Pensar es actuar..."*(ibid, p.90)

[1]Para Piaget una operación constituye el elemento activo y fundamental del pensamiento. Un conjunto de operaciones estructuradas forman un concepto.

Así, Piaget concibe la formación del pensamiento como un desarrollo progresivo que parte de operaciones intelectuales elementales para formar sistemas cada vez más complejos haciendo un especial énfasis en la importancia de la actividad del sujeto. Según el autor, cuando un alumno no es capaz de justificar una operación intelectual en conjunto, es porque solamente tiene una comprensión parcial del concepto y estar expuesto a toda clase de errores, ya que simplemente ha memorizado fórmulas o mecanizado procesos, es decir ha constituido un simple hábito (sensorio-motor). Para conseguir un aprendizaje verdadero, conviene tomar en cuenta dos propiedades características de las operaciones intelectuales que desempeña un papel importante en la práctica de la enseñanza: la movilidad y la asociatividad. La primera, tiene que ver con la habilidad de efectuar una operación en sentido directo como en inverso y la segunda con la posibilidad de llegar a un mismo resultado por distintas vías (ibid, pp. 119-121). Entonces, de acuerdo con Aebli, *"la tarea del maestro consiste entonces en crear situaciones psicológicas tales para que el niño pueda construir las operaciones que debe adquir"*(ibid, p.91), es decir, seleccionar actividades significativas que provoquen en el alumno la construcción del concepto deseado (y no de un hábito), apelando desde luego, a los conocimientos anteriores que tiene dicho alumno.

A través de un proyecto de investigación planteado al estudiante se busca *"...conducir a los alumnos a descubrir por investigación personal el conjunto de sistemas de operaciones* (ibid, p.72), aunado a ello la cooperación de los estudiantes como dice Aebli *"...la educación social y moral puede resultar favorecida por el trabajo de los alumnos en equipo y por la discusión entre ellos"* (ibid, p. 74), así pues cuando los estudiantes proponen diferentes métodos de solución se crea la posibilidad de encarar operaciones asociativas, es por ello que en esta tesis es muy importante fomentar la cooperación de los estudiantes y el trabajo en equipo.

Para abordar la noción hay que plantear al estudiante una serie de actividades, las actividades se diseñan a través de problemas que involucren la noción o algunos aspectos de ella, los cuales constituyen una pequeña investigación por parte del estudiante. Los problemas que guían las actividades deben ser planteados como un *proyecto de acción práctica* es decir referido a satisfacer necesidades vitales y recreativas (Aebli, 1958, p. 101).

En nuestro trabajo se plantea a los estudiantes de preparatoria una serie de problemas de acción práctica con respecto a algunos aspectos de la noción de función (que de hecho constituyen diferentes registros como el verbal, el algebraico, el tabular y el gráfico). Veamos el ejemplo de la Actividad II llamada "Viaje a la universidad", cuyo informe detallado se leerá más adelante en la subsección 2.3.2.

El enunciado se plantea de modo de que a los alumnos les parezca un caso real, muy parecido a el contexto en el que viven y se desenvuelven, de esta manera el ejercicio es atractivo, recreativo y con sentido vital para ellos.

En la actividad I (apéndice 2.3.1) se muestran cuatro gráficas del recorrido (gráfica distancia vs tiempo) de cuatro alumnos hipotéticos[2], Antonio, Brenda, Carlos y Alicia. Se pone en juego la interpretación verbal de los primeros tres "alumnos" acerca de su recorrido (viaje a la universidad) para que los estudiantes determinen de entre las gráficas cual le corresponde a cada uno de ellos. En el caso de Alicia (la 4ta "alumna"), se hace un planteamiento inverso, se les dice que le corresponde la Gráfica 1 para después pedirles que enuncien con sus propias palabras el medio en que ellos creen que viajó (un fenómeno inverso pero "suavizado" no se les pide tanto como la descripción verbal del movimiento asociado a la gráfica).

Este ejemplo de interpretación induce a los estudiantes a un primer acercamiento con la operación nueva por medio de una aplicación a su vida cotidiana, evitando así el empleo de un simbolismo especial para después transferirlo a un problema de tipo escolar, contribuyendo de este modo a la formación de su pensamiento (Aebli, 1958, p. 102).

1.3.2. Registros de Representación Semiótica

El hombre además de crear instrumentos para modificar la naturaleza, crea herramientas semióticas que se refiere a todo tipo de signos convencionales: el lenguaje, sistemas para contar, esquemas, diagramas, etc. En nuestro contexto, debemos tener en cuenta dos aspectos de ellas: su representación semiótica y su representación mental, donde cada una de ellas es inseparable la una de la otra, Duval(1998) las define de la siguiente manera: *"Las representaciones mentales cubren el conjunto de imágenes y, globalmente, a las concepciones que un individuo pueda tener sobre un objeto, sobre una situación y sobre lo que les está asociado. Las representaciones semióticas son producciones constituidas por el empleo de signos que pertenecen a un sistema de representación, el cual tiene sus propios constreñimientos de significancia y de funcionamiento"*

Para que un sistema semiótico pueda ser un registro de representación (Duval, 1998), debe permitir las siguientes tres actividades cognitivas fundamentales ligadas a la sémiosis:

1. La presencia de una *representación identificable...*

[2]Los alumnos hipotéticos del ejemplo serán referidos como "alumnos" y con "estudiantes" nos referiremos a los sujetos de experimentación.

2. El *tratamiento* de una representación que es la transformación de la representación dentro del mismo registro donde ha sido formada.

3. La *conversión* de una representación que es la transformación de la representación en otra representación de otro registro en la que se conserva la totalidad o parte del significado de la representación inicial.

Si un objeto tiene dos representaciones diferentes en el mismo registro, el paso de una a otra será *tratamiento.* Si un objeto tiene una representación en un registro y una representación en un segundo registro, el paso de una a otra será una *conversión.*

Surge la necesidad de obtener un aprendizaje significativo para el proyecto de acción, para lo cual nos apoyamos en la teoría de Duval (1998): "*... no puede haber aprendizaje significativo verdadero en tanto las situaciones y las tareas propuestas no tomen en cuenta la necesidad de varios registros de representación para el funcionamiento cognitivo del pensamiento...*"(p. 199). En la experimentación realizada pretendemos explotar las bondades de la conversión efectiva entre varios registros de representación ya que se complementan entre sí.

Si consideramos el concepto de función asociados a él existen registros verbales, algebraicos, tabulares y gráficos. Retomando el ejemplo de "Viaje a la universidad", en una segunda parte, se presentó a los estudiantes gráficos del movimiento (distancia vs tiempo) que constituyen un registro gráfico de una función cuya interpretación requiere *tratamiento*, el cual se hace inicialmente con simple apoyo aritmético y mas adelante con *conversión* al registro tabular que cuantifica recorridos a intervalos de tiempo iguales. Se ve la necesidad de manejar dos registros simultáneamente. De igual manera más adelante se aborda la *conversión* del registro gráfico al registro tabular. En una tercera parte del problema se plantea el *tratamiento* de un registro verbal con apoyo aritmético para llegar a la conversión del registro gráfico del recorrido que realizó Carlos.

Duval (1992) plantea tres tratamientos de las representaciones gráficas:

1. *La vía del punteo.* Es a través de esta vía que se introducen y se definen las representaciones gráficas. Po referencia a dos ejes graduados, una pareja de números permite identificar un punto.

2. *Una vía de extensión del trazo efectuado.* Esta vía corresponde a las actividades de interpolación y de extrapolación.... Frecuentemente, esta vía de extensión permanece puramente mental...

3. *Una vía de interpretación global de las propiedades de las figuras.* El conjunto de trazo/ejes forma una imagen que representa un objeto descrito por una expresión algebraica.

Los *tratamientos* de las representaciones gráficas que se abordan por lo menos son *la vía del punteo* y *una vía de extensión del trazo efectuado.*

Capítulo 2

El proyecto

Empezaremos describiendo el objetivo final de esta tesis el cual nos determinó los pasos a seguir, en particular, los prerrequisitos, los contenidos instrumentales y estrategias que necesitábamos para introducir las ideas del Cálculo Diferencial.

2.1. Reflexión en espejos parabólicos

Para introducir nociones de cálculo diferencial en el curso de Geometría Analítica, se escogió el fenómeno de reflexión en espejos parabólicos (parábola de revolución). Como consecuencia de la ley de reflexión resulta (aunque no es para nada evidente[1]) que si una fuente luminosa "puntual" se coloca en el foco de una parábola de revolución[2] (ver figura 2.1), los rayos inciden sobre la superficie parábolica y se reflejan en rectas paralelas al eje de la parábola.

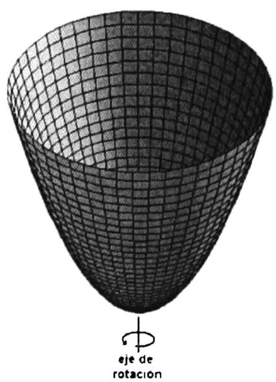


Figura 2.1: Parábola de revolución

[1]No es evidente porque para empezar no es claro como se aplica la ley de reflexión en una superficie no plana. Otra razón, es que, la propiedad del foco de una parábola se utiliza en el curso de Geometría Analítica en la construcción de la parábola como lugar geométrico. De hecho el foco sirve para construir la parábola como lugar geométrico.

[2]Es la superficie generada por la rotación de una parábola alrededor de su eje de simetría.

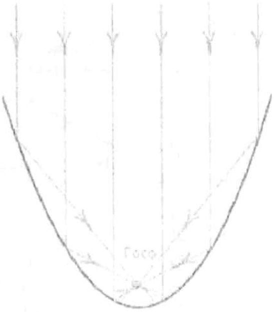


Figura 2.2: Rayos incidentes sobre un reflector.

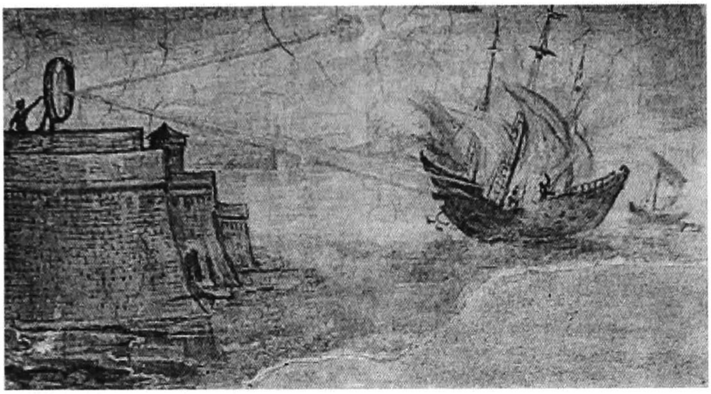


Figura 2.3: Naves Romanas incendiadas por Arquímedes durante la defensa de Siracusa.

Los rayos del sol que inciden sobre la tierra son prácticamente paralelos entre sí. Si un reflector se coloca de tal manera que su eje sea paralelo a los rayos del sol, los rayos incidentes sobre el reflector se reflejan de tal manera que todos pasan por el foco de la parábola de revolución (ver figura 2.2).

Esta concentración de rayos solares en el foco de un espejo parabólico, permitió a Arquímedes (287-212 a.c), según la leyenda incendiar las naves romanas durante la defensa de Siracusa (figura. 2.3). En la actualidad esta propiedad se utiliza para los radares, las antenas de televisión y micrófonos direccionales.

Veamos el fenómeno de reflexión: si un rayo de luz que incide sobre una superficie reflectora (plana) en un punto O, el haz incidente queda representado por una línea (l_1) que es el rayo incidente, por otro lado, el haz reflejado está representado por la línea (l_2) Los ángulos de incidencia (θ_i) y de reflexión (θ_r) se miden entre la normal a la superficie y el rayo correspondiente, como se muestra en la figura 2.4. La ley de reflexión estipula que el ángulo de reflexión es igual al ángulo de incidencia $\theta_i = \theta_r$.

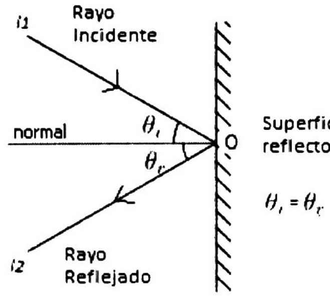


Figura 2.4: Ley de Reflexión.

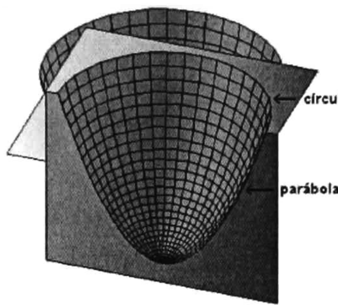


Figura 2.5: Parábola de revolución cortada por un plano vertical y un plano horizontal.

Dicha ley no solo funciona para rayos luminosos, también se aplica en el rebote de una banda de una bola de billar.

¿Cómo se ve la ley de reflexión cuando una superficie es curva?

Nos interesa el caso de la superficie parabólica (parábola de revolución). Nos apoyaremos en la intersección de la parábola de revolución cortada por un plano vertical (es decir paralelo al eje de simetría) se obtiene lógicamente una parábola, mientras que si se corta por un plano horizontal (ortogonal al eje mencionado) se obtiene un círculo (ver figura 2.5).

Un rayo paralelo al eje de la parábola de revolución incide en el espejo parabólico. Hacemos un corte con el plano determinado por el eje y el rayo. Dicho corte es una parábola (ver figura 2.6), donde se trata de demostrar que el rayo reflejado está en el mismo plano y se refleja pasando por el foco de dicha parábola. De momento aceptemos que el rayo reflejado está en el mismo plano lo cual se puede ver por simetría

Partiremos de la ecuación general de la parábola con origen en el vértice, la cual vamos a leer como y en función de x.

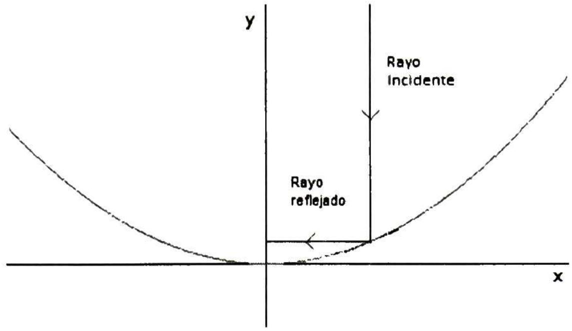


Figura 2.6: Corte vertical de un rayo que incide en un punto y se refleja pasando por el foco de la parábola.

$$y(x) = ax^2$$

Vamos a mirar de cerca a la parábola en el punto de incidencia para descubrir que se ve como una recta y determinar su pendiente.

Para encontrar la pendiente de la curva, en este caso, de la parábola para un punto dado (x, ax^2) tenemos en general, dado un incremento "pequeño"h, el incremento correspondiente de la ordenada $\triangle y$:

$$\triangle y = y(x+h) - y(x) = a(a+h)^2 - ax^2$$

$$y(x+h) - y(x) = a(x^2 + 2xh + h^2) - ax^2$$

$$y(x+h) - y(x) = 2axh + ah^2$$

Si $|h| \ll 1$, (léase "magnitud de h mucho menor que 1"), se desprecia h^2 en favor de h (i.e, si $|h| \ll 1$ " h^2es mucho menor que la magnitud de h") y la relación anterior nos queda como:

$$y(x+h) - y(x) \cong 2axh$$

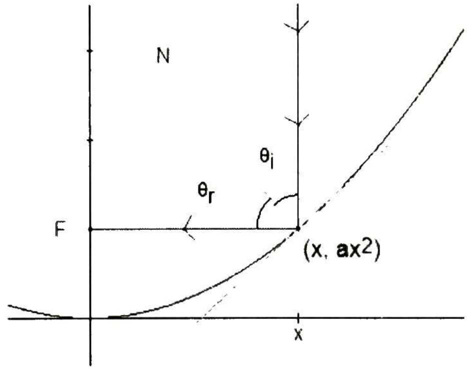


Figura 2.7: Rayo reflejado en un punto de la parábola de acuerdo a la ley de reflexión ordinaria.

(léase "$\cong$" como aproximadamente). El incremento de la función $\triangle y$ es muy aproximadamente proporcional al incremento h siendo la constante de proporcionalidad igual a $2ax$ que no es otra que la pendiente de la recta tangente. En efecto vista muy de "cerca" en el punto (x, ax^2), la parábola se ve como su tangente[3] cuya pendiente es $2ax$. El rayo por lo tanto se reflejará de acuerdo a la ley de reflexión ordinaria (ver figura 2.7), donde la normal es perpendicular a la tangente en dicho punto.

En vez de utilizar la igualdad de los ángulos de incidencia y reflexión, utilizaremos la igualdad de los ángulos complementarios respectivos a saber 90°-θ_i = 90°-θ_r.

Para establecer nuestro candidato a foco, hallaremos x_0 tal que la pendiente sea igual a la unidad (ángulo 45°) porque en ese caso el rayo vertical se reflejará horizontalmente. Planteamos entonces $m = 1$ o sea $2ax_0 = 1$ luego $x_0 = \frac{1}{2a}$ (figura. 2.8).

Así obtenemos la abscisa del punto buscado sobre la párabola por donde pasa la recta tangente de pendiente 1. Para determinar la ordenada correspondiente a la curva,

$$y(x_0) = a\left(\frac{1}{2a}\right)^2$$

$$y(x_0) = \frac{1}{4a}$$

Por lo tanto, el punto P de la recta tangente con pendiente $m = 1$ esta dado por $P = \left(\frac{1}{2a}, \frac{1}{4a}\right)$. El rayo reflejado en el punto es horizontal y tiene una altura de $y = \frac{1}{4a}$ y

[3]Para verlo geométricamente se había pensado hacer uso del *"zoom in"* del Derive. La parábola se "rectifica" alrededor del punto de interes.

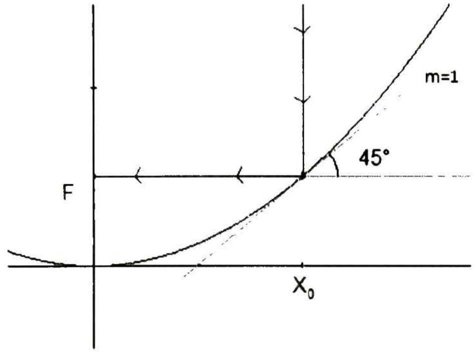


Figura 2.8: Rayo incidente vertical en un punto x_0 de la parábola que se refleja horizontalmente pasando por el punto F.

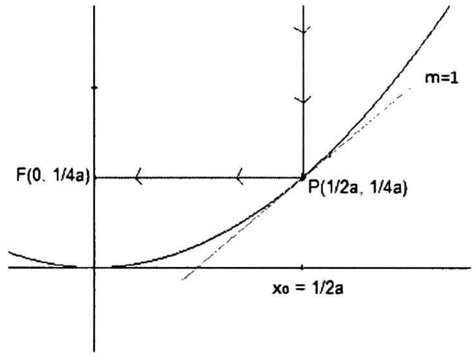


Figura 2.9: El rayo vertical que incide en el punto $P\left(\frac{1}{2}a,\ \frac{1}{4}a\right)$

cortará al eje de la parábola en el punto $F\left(0, \frac{1}{4a}\right)$. Mostraremos que se trata del punto por el que pasarán todos los rayos reflejados. Esto es, que todos los rayos que llegan de forma paralela al eje de la parábola y chocan en cualquier punto, pasarán por dicho punto F (figura. 2.9).

En la figura 2.10 un rayo paralelo al eje incide en el punto $Q(x, ax^2)$, sea θ el ángulo que hace la tangente en Q con la horizontal. Luego $\frac{\pi}{2} - \theta$ será el ángulo que hace el rayo incidente con la tangente y coincide con el ángulo que hace la tangente con el rayo reflejado, luego el ángulo que hace el rayo reflejado con la horizontal será $\theta - \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$.

Como consecuencia la pendiente del rayo reflejado, está dada por $tan\left(\theta - \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\right) = tan(2\theta - \frac{\pi}{2})$, simplificando, tenemos $tan\left(2\theta - \frac{\pi}{2}\right)$. Si evaluamos para un ángulo de $\theta = 45° = \frac{\pi}{4}$, la pendiente del rayo reflejado es $tan\theta = 0$, luego es el rayo horizontal como ya sabíamos.

Regresando al caso general, la pendiente es positiva para $\theta > \frac{\pi}{4}$ para y será negativa para $\theta < \frac{\pi}{4}$. Vamos a determinar $tan\left(2\theta - \frac{\pi}{2}\right)$ en términos de $tan\theta = 2ax$, usando

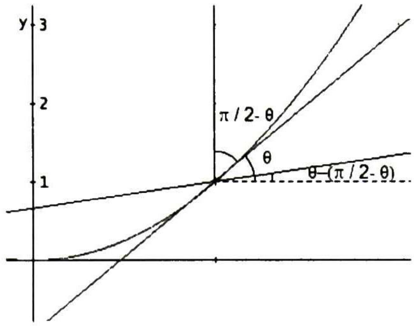


Figura 2.10: Rayo paralelo que incide en un punto $Q(x, ax^2)$

identidades trigonométricas de senos y cosenos, tenemos:

$$sen\left(2\theta - \frac{\pi}{2}\right) = sen\,2\theta\,cos\,\frac{\pi}{2} - sen\,\frac{\pi}{2}\,cos\,2\theta$$

$$sen\left(2\theta - \frac{\pi}{2}\right) = sen\,2\theta\,(0) - (1)\,cos\,2\theta$$

$$sen\left(2\theta - \frac{\pi}{2}\right) = -cos\,2\theta$$

Para el coseno.

$$cos\left(2\theta - \frac{\pi}{2}\right) = cos\,2\theta\,cos\,\frac{\pi}{2} - sen\,2\theta\,sen\,\frac{\pi}{2}$$

$$cos\left(2\theta - \frac{\pi}{2}\right) = cos\,2\theta\,(0) - sen\,2\theta(1)$$

$$cos\left(2\theta - \frac{\pi}{2}\right) = sen\,2\theta$$

La tangente queda expresada de la siguiente manera:

$$tan\left(2\theta - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{-cos2\theta}{sen2\theta}$$

$$tan\left(2\theta - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{-\left(cos^2\theta - sen^2\theta\right)}{2sen\theta cos\theta}$$

$$tan\left(2\theta - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{sen^2\theta - cos^2\theta}{2sen\theta cos\theta}$$

$$tan\left(2\theta - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\frac{sen^2\theta}{cos^2\theta} - 1}{2\frac{sen\theta}{cos\theta}}$$

$$tan\left(2\theta - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{tan^2\theta - 1}{2tan\theta}$$

Como $tan\theta = 2ax_1$ sustituyéndola en la ecuación anterior, obtenemos la pendiente del rayo reflejado $m_r = tan\left(2\theta - \frac{\pi}{2}\right)$, luego $m_r = \frac{(2ax_1)^2-1}{4ax_1}$.

La ecuación de la línea de rebote que pasa por el punto (x_1, ax_1^2) con pendiente m_r, está dada por:

$$y - ax_1^2 = \frac{(2ax_1)^2 - 1}{4ax_1}(x - x_1)$$

o sea,

$$y - ax_1^2 = \frac{4a^2x_1^2 - 1}{4ax_1}(x - x_1)$$

Haciendo el corte con el eje y, esto es haciendo $x = 0$ obtenemos

$$y - ax_1^2 = \frac{4a^2x_1^2 - 1}{4ax_1}(-x_1)$$

$$y = \frac{1 - 4a^2x_1^2}{4a} + ax_1^2$$

$$y = \frac{1 - 4a^2x_1^2 + 4a^2x_1^2}{4a}$$

$$y = \frac{1}{4a}$$

Su ordenada al origen será $y = \frac{1}{4a}$, determinando el mismo punto en el eje de la parábola, a saber, $F\left(0, \frac{1}{4a}\right)$ que es el punto candidato a foco.

Por otro lado sabemos de la construcción ordinaria de la parábola como lugar geométrico que si p es la distancia focal (distancia del vértice al foco) para una parábola vertical su ecuación es $4py = x^2$ o $y = \frac{1}{4p}x^2$, luego como nuestra ecuación es $y = ax^2$ igualando $\frac{1}{4p} = a$ de donde $p = \frac{1}{4a}$ tal y como había sido determinado.

En resumen hemos demostrado que todos los rayos que vienen paralelos al eje de la parábola al ser reflejados pasan por el foco de la parábola. Si consideramos una parábola de revolución, como el proceso es reversible, si una fuente luminosa se sitúa en el foco y la parábola de revolución es un espejo los rayos después de rebotar salen paralelos al eje de la parábola de revolución. Como ejemplo, tenemos los reflectores de las ferias que tienen un gran alcance capaz de iluminar las nubes.

2.2. Prerrequisitos y estrategias

Para introducir la propiedad focal o sea la reflexión en espejos parabólicos se plantean una serie de prerrequisitos conceptuales y sus estrategias cognitivas.

1. El concepto de función como relación entre dos variables. Para ello se diseñaron cuatro actividades relacionadas a dicho concepto mediante distintos registros de representación: enunciados, gráficas, fórmulas y tablas. Se plantean cuatro actividades:

   Actividad I. *Llamadas telefónicas.* Interpretación de funciones mediante una gráfica (ver ápendice A.1).

   Actividad II. *Viaje a la Universidad.* Interpretación de funciones mediante gráficas, tablas y enunciados (ver ápendice A.2).

   Actividad III. *Un simulacro para desalojar la escuela en caso de temblor.* Interpretación de funciones mediante una fórmula (ver ápendice A.3).

- Actividad IV. *Temperaturas en grados Fahrenheit y grados Centígrados.* Interpretación de funciones mediante una tabla (ver ápendice A.4).

2. El círculo trigonométrico. Identidades trigonométricas para suma de ángulos (Ápendice A).

   Actividad introductoria. *El circulo trigonométrico.* Identidades trigonométricas para suma de ángulos (Ápendice A.5).

3. Ley de reflexión en superficies planas y reducción al caso bidimensional: la ley de reflexión en rectas[4] Se diseñaron dos actividades, la primera referente a una investigación de la literatura (Internet) por parte del estudiante sobre la ley de reflexión. La segunda actividad, relacionada con la ley de reflexión en rectas (corte) enfocada al cálculo de ángulos entre rectas y pendientes de rectas (Ápendice A).

   Actividad V. Ley de reflexión. Investigación de la literatura (Internet) (Ápendice A.6).

   - Actividad VI. Ángulos entre rectas.

     a) Problema I. Ángulos entre rectas. Expresar la ley de reflexión en términos de los ángulos que se forman con la superficie reflectora. (Ápendice A.7).

     b) Problema II. (Ápendice A.7)

     c) Problema III. (Ápendice A.7)

     d) Problema IV. (Ápendice A.7)

4. Productos notables: desarrollo algebraico del cuadrado de un binomio. Representación geométrica de las potencia $(a+b)^2$y $(x+h)^2$ para darle significado al desarrollo algebraico del cuadrado del binomio y utilización de cálculos numéricos (calculadora) para "visualizar" desarrollos de aritmética del cuadrado de un binomio (Ápendice A).

   Actividad VII. Representación geométrica de las potencias $(a+b)^2$y $(x+h)^2$ y cálculos numéricos con la calculadora.

[4]Es el corte con el plano de reflexión del plano formado por el rayo incidente y la normal.

5. El análisis de la diferencia $f(x+h) - f(x)$. donde $f(x) = x^2$, esto es,$(x+h)^2 - x^2$cuando $|h| \ll 1$. Para ello analizando el comportamiento relativo de potencias de números pequeños. No se concretó el diseño de una actividad excepto la segunda mencionada en el punto anterior: comportamiento de h con $|h| \ll 1$.

6. Mirar de "cerca" la curva $y = x^2$ Con ayuda del Derive (zoom in) mirar de cerca la curva $y = x^2$ Para apreciar que la curva se rectifica i.e. se ve como su tangente y ver su pendiente en casos particularmente simples (por ejemplo para el punto $(1,1)$ su pendiente es $y' = 2$ que corresponde a $2x$ con $x = 1$). Tampoco se concreta una actividad.

2.3. Descripción y diseño de las actividades

Los conceptos antes enunciados y las estrategias didácticas para su aprendizaje se describen en mayor detalle. Para empezar citemos a Aebli *"Quien quiera aplicar el principio de la investigación por el alumno, debe tener en cuenta que este método es, con mucho, la más difícil de las formas de enseñanza"* (Aebli, 1958, p. 99), por lo mismo Aebli nos dice que la investigación por el estudiante debe constituir un *"proyecto de acción práctica, es decir, referido a satisfacer necesidades vitales y recreativas"* (Aebli 1958, p.101).

El diseño del plan de actividades (a ser realizada por los estudiantes) sigue el modelo de Aebli. Pero tomando en cuenta que el método de enseñanza como bien lo advierte Aebli es el más difícil se consideró más adecuado establecer un cierto "formato" para guiar el desarrollo de las actividades de investigación por los estudiantes limitando la posible improvisación en el salón de clases durante la experiencia.

Vale la pena mencionar que el diseño de algunas de las actividades fueron mejorándose durante la experimentación, es decir, que primero se aplicaron con un grupo auxiliar (para más detalle ver la subsección 3.1), a partir de los resultados obtenidos, el diseño de las actividades se mejoró y se aplicaron con un grupo experimental.

Los conceptos antes enunciados en la sección 2.2 y las estrategias didácticas para su aprendizaje a continuación se describen en mayor detalle.

2.3.1. Actividad I. *Llamadas telefónicas.*

La actividad tiene como principal objetivo indentificar la variable independiente y dependiente en un modelo simple (discreto y lineal). Primeramente se plantea a los

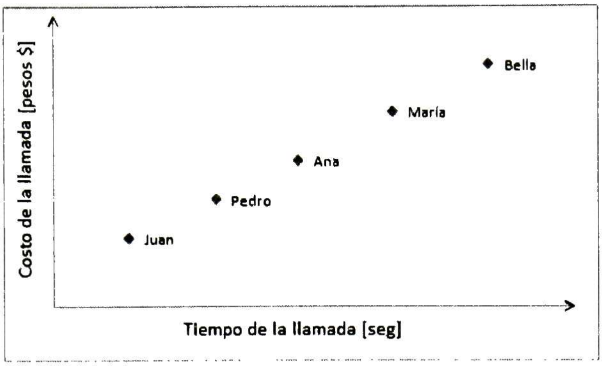


Figura 2.11: Gráfica costo vs tiempo.

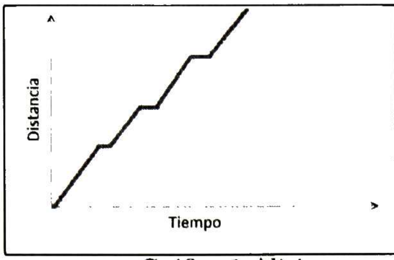
estudiantes un problema donde a través de la lectura de una gráfica, costo vs tiempo, sean capaces de observar una relación entre esas variables, el *tiempo* como variable independiente y el *costo* como variable dependiente. Para lograrlo se plantean una serie de preguntas que sirven como guía para observar la relación existente entre estas variables (ver detalle en el ápendice A.1)

Se habla de que cinco personas que hicieron llamadas telefónicas a varios lugares del país, las cuales registran el tiempo que estuvieron hablando y el costo de la llamada en una gráfica (Figura. 2.11), que para mayor comprension de los estudiantes el problema se idealizo.

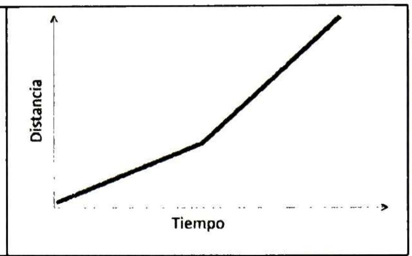
En la gráfica, el eje horizontal se encuentra la variable del tiempo y en el eje vertical la variable del costo, podemos observar que mientras comienza a avanzar el tiempo el costo de las llamadas aumenta. Por ejemplo, la persona que habló más tiempo es Bella y la que habló menos tiempo es Juan por lo consiguiente Bella pagó más por la llamada que hizo Juan. Queda claro que mientras el tiempo va aumentando el costo también aumenta, es decir, que el costo depende del tiempo. En la experimentación la mayoría de los estudiantes logra observar esta relación entre variables, ya que resuelven de manera exitosa preguntas como: ¿quién pagó más y menos por la llamada? y ¿quién habló durante más y menos tiempo?, ¿qué variables se mencionan en el problema?, ¿crees que las dos variables están relacionadas? (para más detalle, ver los resultados obtenidos en la sección 3.3).

2.3.2. Actividad II. *Viaje a la Universidad.*

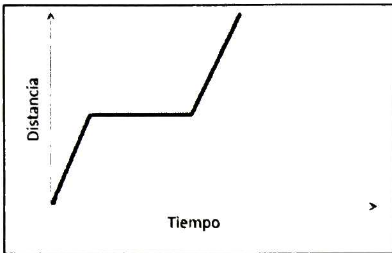
Si consideramos el concepto de función, asociados a él existen registros verbales, gráficos, algebraicos y tabulares. Esta actividad fue desarrollada pensando en esos registros



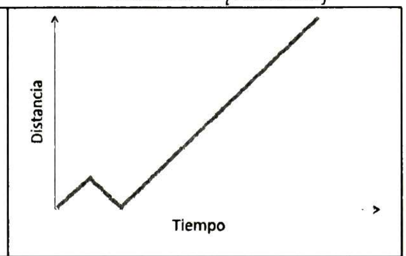
Gráfica 1 Alicia



Gráfica 2 *[Antonio]*



Gráfica 3 *[Carlos]*



Gráfica 4 *[Brenda]*

Figura 2.12: Gráficas del recorrido (distancia vs tiempo) de los cuatro alumnos hipotéticos.

y las conversiones existentes entre ellos. En la actividad se muestran cuatro gráficas del recorrido (gráfica distancia vs tiempo) de cuatro alumnos hipotéticos, Antonio, Brenda, Carlos y Alicia que viajan a una conferencia en la Universidad de Tecámac a cumplir con una tarea de la maestra de Proyectos. El recorrido tiene una distancia aproximada de 10 km. Salen de casa a las 7:30 para llegar a la conferencia a las 8:10.

Recordemos que se trata de un proyecto de acción práctica, o sea, que el contexto de los problemas es lo más parecido a la realidad para los estudiantes. Efectivamente la preparatoria existe, ésta se encuentra aproximadamente a 10 km de la Universidad de Tecámac que también existe y de igual manera existen la materia de Proyectos y la maestra que imparte dicha materia.

Se pone en juego la interpretación verbal de los primeros tres "alumnos" (Antonio, Brenda y Carlos) acerca de su recorrido (viaje a la universidad) pidiendo a los estudiantes que determinen de entre ellos las gráficas que corresponden a cada uno de ellos. En el caso de Alicia (la 4ta "alumna"), se hace un planteamiento inverso, se les dice que le corresponde la gráfica 1 para después pedirles que enuncien con sus propias palabras el medio en que ellos creen que viajó (un fenómeno inverso pero "suavizado", no se les pide tanto como la descripción verbal del movimiento asociado a la gráfica (figura 2.12). Las gráficas están idealizadas de manera que se observen lineales a trozos para que los estudiantes las logren interpretar.

En una segunda parte, se presentó a los estudiantes, gráficos del movimiento (distancia vs tiempo) que constituyen un registro gráfico de una función cuya interpretación requiere *tratamiento*, el cual se hace inicialmente con simple apoyo aritmético y mas adelante con *conversión* al registro tabular que cuantifica recorridos a intervalos de tiempo iguales.

Con ayuda de la lectura de las tablas el estudiante puede ser capaz de responder estas preguntas, ¿A qué hora llegó a la universidad?, si Antonio hubiera seguido con la misma velocidad del primer intervalo (7:30- 7:55) ¿Habría llegado a tiempo a la universidad? ¿Con cuánto de adelanto o de atraso?. Efectivamente Antonio llegó a tiempo a la universidad, si hubiera seguido con la misma velocidad hubiera llegado tarde con 10 minutos de retraso.

Hasta aquí el estudiante es capaz de ver una relación de la distancia y el tiempo, y ha podido identificar que hay una velocidad relacionada a ello que corresponde a la pendiente de la gráfica de movimiento.

En una tercera parte del problema se plantea la *conversión* del registro verbal al gráfico que describe el recorrido que realizó Carlos. Para tal conversión se recurre al registro aritmético como un apoyo.

Con una serie de preguntas planteadas al estudiante pretendemos que este determine a partir de una velocidad dada, la distancia que recorrió para finalmente dibujar una gráfica de la distancia recorrida en ciertos intervalos de tiempo.

Este ejemplo de interpretación induce a los estudiantes a una primera comprobación evitando el empleo de un simbolismo especial, además de establecer prontamente las relaciones existentes con la noción de función y su aplicación en la vida cotidiana.

2.3.3. Actividad III. *Un simulacro para desalojar la escuela en caso de temblor.*

En esta actividad se pone en juego la conversión del registro algebraico al registro gráfico Una vez más para los estudiantes se plantea una situación real, como lo es el simulacro para desalojar la escuela en caso de temblor. A partir de una ecuación algebraica $y = -5x+400$ que se les da a los estudiantes tienen que construir una gráfica de desalojo de la escuela preparatoria en un intervalo de cero a cien segundos, como se muestra en la siguiente gráfica (figura. 2.13). El tiempo trascurrido se representa con x y los alumnos que se encuentran en la escuela con la variable y.

Al construir esta gráfica con lápiz y papel se espera que los estudiantes puedan darse cuenta que a partir de 81 segundos a 100 segundos los valores que se obtiene para la

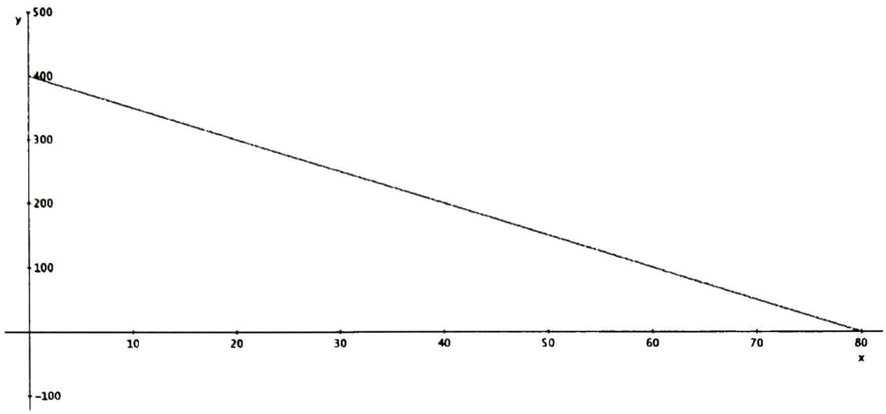


Figura 2.13: Gráfica de desalojo de los alumnos de la ecuela de cero a 80 segundos.

variable y (número de estudiantes que aún permanecen en la escuela), comenzarían a ser negativos, o sea, que ya no hay estudiantes que salgan de la escuela. En otras palabras los valores y después de 80 segundos ya no son significativos.

Ya que se tiene construida la gráfica de desalojo, con ayuda de una serie de preguntas los estudiantes pueden ser capaces de leer e interpretar la gráfica. Por ejemplo, se les pregunta ¿Cuántos alumnos había dentro de la escuela al inicio del simulacro? ¿Cómo lo determinaste? ¿En cuánto tiempo quedó totalmente desalojada la escuela? ¿Cómo determinaste ese tiempo?, con las respuestas que los estudiantes escriben podemos darnos cuenta si son capaces de encontrar las relaciones existentes entre el tiempo y los alumnos que se encuentran en la escuela.

2.3.4. Actividad IV. *Temperaturas en grados Fahrenheit y grados Centígrados.*

Esta actividad fue diseñada pensando en realizar la conversión de un registro tabular a un registro gráfico, de un registro gráfico a uno verbal, de un registro tabular a un registro algebraico. Se plantea una tabla de equivalencias entre grados Centígrados y grados Fahrenheit. El problema planteado es el siguiente: Carlos tiene un tío que vive en Denver Colorado, la última vez que hablo con él le contó que en tiempos de calor la temperatura llega a alcanzar unos los 90° Fahrenheit y en tiempos de frio las temperaturas bajan hasta unos 30° Fahrenheit. Carlos intrigado investigó cual era la equivalencia en grados Centígrados. Encontró la siguiente tabla:

Fahrenheit	-4	5	32	122
Centígrados	-20	-15	0	50

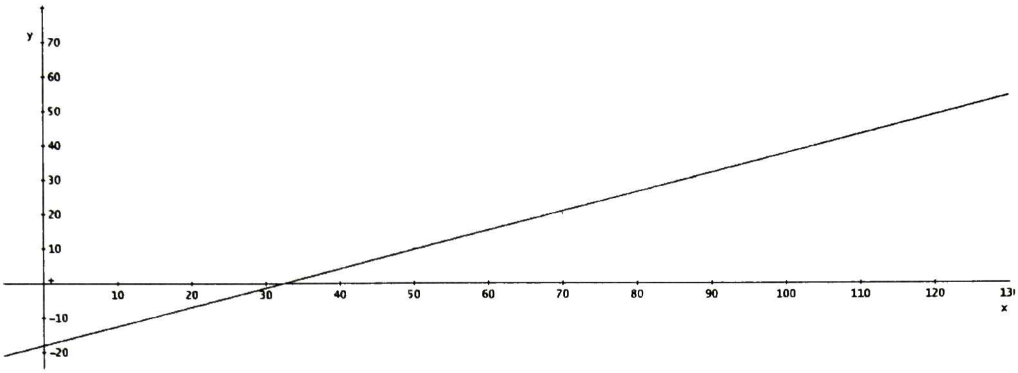


Figura 2.14: Gráfica $°C$ vs $°F$

Se les pide entonces a los estudiantes construir una gráfica a partir de la tabla anterior para ello proporcionándoles una hoja de papel milimétrico, donde el eje x representa los valores en grados Fahrenheit y en el eje y los valores en los grados Centígrados de$-25°C$ a $100°C$. Lo que se espera es que los estudiantes prolonguen la gráfica que construyeron con los datos anteriores y puedan responder las preguntas que se les plantea para encontrar equivalencias leyendo la gráfica que obtuvieron (Figura. 2.14).

He aquí algunas de las preguntas: ¿A cuántos grados centígrados equivalen 59° Fahrenheit? ¿A cuántos grados Fahrenheit equivalen 24 grados centígrados?. ¿Puedes ver en tu gráfica la equivalencia de -13 grados Fahrenheit a grados centígrados? ¿Si, no? ¿Por qué? ¿Qué harías para estimar esa temperatura si ya no aparece en tu dibujo?.

En otro apartado de la actividad se pide a los estudiantes encontrar una fórmula de la forma $y = m(x - a)$ donde y son los valores en $°C$ y x los correspondientes en $°F$, que te permita convertir los grados Fahrenheit a grados Centígrados. Aquí es donde los estudiantes presentaron grandes problemas. Mas tarde en la subsección 3.3 hablaremos con más detalle de la experiencia realizada.

Capítulo 3

Desarrollo de la Experimentación

3.1. Los grupos de experimentación

La experimentación se llevó a cabo con dos grupos de la Preparatoria Oficial No. 94 'Ricardo Flores Magón', ubicada en Ecatepec de Morelos que iniciaron clases el 31 de enero y concluyeron el 8 de julio del año en curso. En el cuarto semestre del nivel medio superior se ubica la materia de Geometría Analítica que es de carácter obligatorio para todos los estudiantes. Como ya se había mencionado fueron los grupos que se consiguieron de hecho para impartir. En unno de ellos (el grupo auxiliar), se les aplicó el guión preliminar de las Actividades que permitió mejorar la mayoria de los materiales didácticos[1] descritos en la sección 2.2. Al segundo grupo (el grupo experimental) que era el grupo de mayor interés se le aplicaron las actividades I, II, III y IV ya mejoradas (ver el ápendice A). En la sección 3.3 se reportan los resultados de las actividades realizadas por los grupos. Cabe mencionar que cada grupo estaba conformado por 43 estudiantes.

Los estudiantes ignoraron en todo momento que se trataba de una experimentación, sólo se les comento que las actividades formarían parte de su evaluación semestral, un motivo por el cual los estudiantes estuvieron dispuestos a realizar las actividades.

El salón de clases donde se llevó a cabo la experimentación, es un aula tradicional, cuenta con pizarrón blanco y sillas universitarias.

3.2. Desarrollo de la experimentación

Para llevar a cabo la experimentación, los estudiantes dentro de las sesiones de clases debían resolver las actividades que se describen en la sección 2.3, para lo cual se agruparon en equipos de cinco a seis personas. Ya que se encontraban agrupados, se

[1] Estos materiales también constituyen instrumentos de evaluación.

les fue entregando de manera individual cada actividad para que las respondieran en equipo y de esta manera favorecer la enseñanza activa dentro del aula. Al final de cada actividad se hizo una retroalimentación de las respuestas obtenidas por cada equipo y se trataron de explicar sus dudas.

Las actividades se aplicaron de acuerdo al plan mencionado en la sección 2.2 donde se describen los prerrequisitos conceptuales y sus estrategias cognitivas que seguimos para introducir la propiedad focal o sea la reflexión en espejos parabólicos.

En todas la sesiones los estudiantes tuvieron una participación activa en la realización de cada una de las actividades, expresando en algún momento, que ese tipo de actividades les agradaba mucho ya que en equipo se les facilitaba el trabajo, además, de que al plantearlas en un contexto real se sentían identificados.

3.3. Interpretación de los resultados

En este capítulo discutiremos las soluciones más sobresalientes de cada actividad. Se muestra el enunciado que se plantea a los estudiantes así como una serie de preguntas encaminadas a la búsqueda de la noción de un concepto. Se hace una interpretación de las soluciones planteadas por los equipos a cada una de las actividades. Las estadísticas de los resultados pueden consultarse en el apéndice B, donde aparece un resumen de las respuestas de los nueve equipos para cada una de las actividades aplicadas en la experimentación . Para que resulten útiles tales estadísticas en las siguientes secciones se amplía una descripción con resultados y observaciones para cada actividad.

Es preciso mencionar que las actividades se fueron diseñando mientras el curso de Geometría Analítica avanzaba, lo que nos causó contratiempos en la aplicación de algunas actividades, más adelante mencionaremos las condiciones en las que se aplicaron dichas actividades para cada uno de los grupos: el grupo auxiliar y el grupo experimental.

3.3.1. El concepto de función como relación entre dos variables.

Para estudiar la relación funcional entre variables se diseñaron guiones de las actividades I, II, III y IV, las cuales se aplicaron primero con el grupo auxiliar; de acuerdo a los resultados que se obtuvieron en esa primera experimentación se realizaron varios cambios en los guiones de las actividades. En particular la actividad II que se refiere a la descripción gráfica de un movimiento se extendió considerablemente[2] ; en primera

[2]En el apéndice A pueden compararse A.2.1(preliminar) con A.2.2 (final)

instancia la actividad solo mostraba los puntos uno, dos y tres. Posteriormente al punto dos se le incluyeron tablas con el fin de introducir el registro tabular a través de la conversión de la lectura de una gráfica, también se agregaron los punto cuatro, cinco y seis (véase el apéndice A.2). Esta actividad II fue la más completa, ya que se pone en juego el uso de varios registros de representación para un aprendizaje significativo en nuestro proyecto de acción (veáse la sección 3.3.1.2).

Los guiones de las actividades I, II, II y IV, ya modificadas se aplicaron con el grupo experimental. Mostraremos a continuación la interpretación de los resultados.

3.3.1.1. Resultados de la Actividad I. *Llamadas telefónicas.*

La actividad se presentó a los estudiantes del siguiente modo:

> Un fin de semana cinco personas hicierón llamadas telefónicas a varios lugares del país, registraron el tiempo que estuvieron hablando y el costo de la llamada se muestra en la siguiente gráfica.

En la primera parte de esta actividad, se pide a los estudiantes que observen la gráfica y respondan una serie de preguntas. Todos los equipos resolvieron las preguntas de manera correcta, como un ejemplo de ello son los resultados del equipo 1:

a) ¿Quién pagó más por la llamada? Bella
b) ¿Quién pagó menos por la llamada? Juan
c) ¿Quién habló durante más tiempo? Bella
d) ¿Quién habló durante menos tiempo? Juan

En la segunda parte del problema todos los equipos concluyeron que las variables que se relacionan en el problema son el costo de la llamada y el tiempo de la llamada. Cuando se les pregunta ¿Crees que las dos variables están relacionadas? todos responden que sí y cuando se les pide que justifiquen su respuesta, escriben en general justificaciones válidas, como por ejemplo el equipo 4 repondió:

¿Crees que las dos variables están relacionadas? Si Justifica tu respuesta
Si aumenta el tiempo de la llamada aumenta el costo

[Sí] [Si aumenta el tiempo de la llamada aumenta el costo]

Pero el equipo 8 no logró justificar su respuesta, al argumentar lo siguiente:

¿Crees que las dos variables están relacionadas? Si Justifica tu respuesta porque el tiempo se basa en el costo de la llamada

[Sí] [Si, porque el tiempo se basa en el costo de la llamada]

En base a las respuestas de los equipos podemos observar que los estudiantes a partir de la interpretación de la gráfica (registro gráfico) son capaces de hacer una interpretación verbal (registro verbal), esto es, se hace una *conversión* del registro gráfico al registro verbal para concluir que los estudiantes:

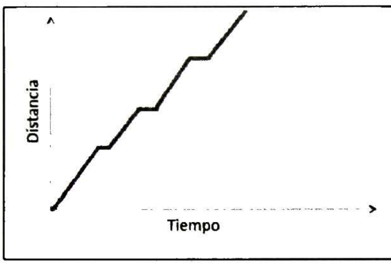
> Logran identificar las variables que se plantean en el problema, la variable independiente que es el *tiempo* y la variable *dependiente* que es el costo de la llamada.
>
> Identifican (con una excepción) la relación existente entre estas variables, a saber, el costo de la llamada depende del tiempo de la llamada.

Como lo observamos en la respuesta del equipo 8 ellos no logran describir como es la relación que existe entre el *costo* y *tiempo* de la llamada. Esto probablemente porque no pudieron identificar cual es la variable independiente.

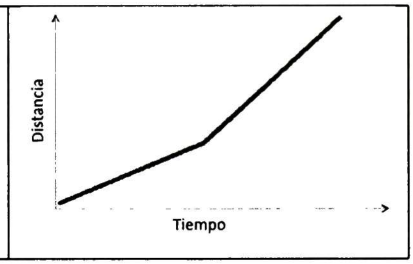
3.3.1.2. Resultados de la Actividad II. *Viaje a la universidad.*

La actividad se presentó a los estudiantes de la Preparatoria de Ecatepec del siguiente modo:

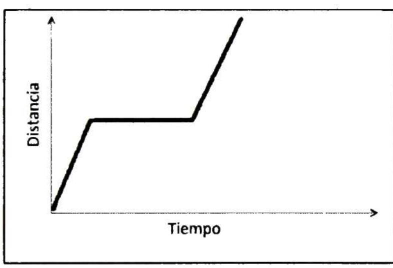
> La maestra de Proyectos envió a sus alumnos a una conferencia a la Universidad de Tecámac, la distancia aproximada es de 10 km. Salimos de casa a las 7:30 para llegar a la conferencia a las 8:10, las siguientes gráficas muestran cómo son los trayectos para Antonio, Brenda, Carlos y Alicia.



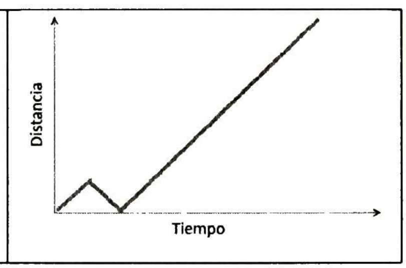
Gráfica 1



Gráfica 2



Gráfica 3



Gráfica 4

> Tres chicos comentaron como se dió su recorrido:
> *Antonio:* Salgo con calma en bicicleta, en el camino comienzo a pedalear más fuerte.
> *Brenda*: Al poco de salir me di cuenta que olvidé el refrigerio y tuve que volver.
> *Carlos*: Fui en moto pero en el camino me quedé sin gasolina, caminé hasta la gasolinera que está de paso y luego continué.

La mayoria de los equipos (7 de 9) respondieron las siguientes preguntas de manera correcta, como ejemplo de ello veamos la solución del equipo 4.

a) ¿A quién corresponde cada gráfica?
Gráfica 1: Alicia
Gráfica 2: Arturo
Gráfica 3: Carlos
Gráfica 4: [illegible]

Esto porque logran hacer una buena interpretación de la descripción del recorrido de cada alumno (registro verbal) y relacionarla (*conversión*) con cada una de las gráficas (registro gráfico) dando un resultado satisfactorio.

Los equipos 3 y 5 mostraron problemas al establecer una *conversión* entre el registro verbal y el registro gráfico. Más tarde en la discusión grupal estos equipos se dan cuenta de su error y lo corrigen escribiendo la respuesta correcta enseguida de su respuesta anterior.

a) ¿A quién corresponde cada gráfica?
Gráfica 1: Alicia
Gráfica 2: Antonio
Gráfica 3: Brenda Carlos
Gráfica 4: Carlos Brenda.

En las preguntas ¿Qué diría Alicia acerca de su viaje? ¿En qué crees viajó?, es evidente que sólo se les pidió que enuncien con sus propias palabras el medio en que ellos creen que viajó, una situación inversa a la de la pregunta anterior, aunque no se les pide tanto como la descripción verbal del movimiento descrito en la gráfica, ya que ello resultaría muy difícil. Para esta pregunta hay una variedad de soluciones, veamos ejemplos de las más representativas:

Solución del Equipo 3

b) ¿Qué diría Alicia acerca de su viaje? ¿En qué crees viajo?
viajo en camion por que [illegible]
[illegible] entre [illegible]

[Viajó en camión porque dio varias vueltas entre las calles]

- Solución del Equipo 4

b) ¿Qué diría Alicia acerca de su viaje? ¿En qué crees viajó?
que ella tomo un camion y este iba haciendo paradas

[Que ella tomó un camión y este iba haciendo paradas]

Solución del Equipo 5

b) ¿Qué diría Alicia acerca de su viaje? ¿En qué crees viajó?
En autobus o tambien pudria llevar su propio carro

[En autobús o también podría llevar su propio carro]

Solución del Equipo 7

b) ¿Qué diría Alicia acerca de su viaje? ¿En qué crees viajó?
Salio de su casa camino paso a la tienda, despues camino a la parada de camiones y despues se bajo y camino a la conferencia

[Salió de su casa, caminó, pasó a la tienda, después caminó a la parada de camiones y después se bajó y caminó a la conferencia]

La respuesta más acertada es la que plantea el equipo 4; efectivamente Alicia debió viajar en camión y realizar paradas, todos los equipos sugieren el camión. Las distintas soluciones dejan al descubierto la forma en que los estudiantes interpretan el recorrido que hace Alicia a partir de la gráfica. En la solución del equipo 3 podemos darnos cuenta que los estudiantes conciben a la gráfica como si ésta describiera la trayectoria que sigue Alicia, diciendo por ejemplo que es un camión que se va entre calles y no se dan cuenta que la gráfica solo describe la distancia que se recorre en un determinado tiempo y los segmentos horizontales corresponden a las varias paradas del camión.

La respuesta del equipo 5 acierta en que seguramente Alicia viajó en camión. Pero la posibilidad de que viajara en automóvil no justifica el que haya unos pocos segmentos horizontales en la gráfica. A menos que viajara en su propio auto pero habiendo semáforos en el camino, aunque ello no se aclara en su respuesta de manera explícita porque no se los pedimos.

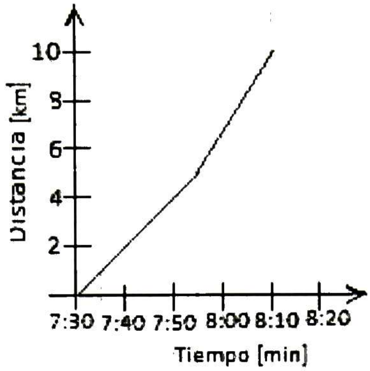


Figura 3.1: Viaje de Antonio

El equipo 7 mostró tener mucha imaginación. La gráfica que corresponde a Alicia es una gráfica lineal a trozos, siendo cuatro los trozos más grandes. Para responder la pregunta, pareciera ser que este equipo le asignó una razón de ser a cada uno de ellos, primero que salió de su casa y caminó a la tienda, segundo que caminó a la parada del camión, se bajó y tercero que caminó a la conferencia. De un modo u otro estos estudiantes están observando que Alicia avanza y se detiene, avanza otra vez y se detiene y vuelve a avanzar. No describen el recorrido como lo hizo el equipo 4 que dice que va en un camión y hace paradas pero es evidente que entienden en alguna medida el movimiento que lleva Alicia (no es pues el movimiento uniforme).

Cabe mencionar que esta actividad después de ser aplicada en el grupo auxiliar fue complementada. Consideramos que esta actividad es la más completa de las cuatro que se plantean para la noción de función, ya que implementó la conversión de más de dos registros. En la segunda parte del la actividad se plantea el recorrido de Antonio con más detalle. Pasamos del registro gráfico con apoyo de la aritmética para pasar al registro tabular. En la sexta parte de la actividad, se describe verbalmente el recorrido de Carlos, esto es, ir del registro verbal apoyándonos del registro aritmético para pasar al registro gráfico.

Comenzaremos describiendo la segunda parte del problema. Como habíamos mencionado se plantea de manera más precisa el trayecto que hace Antonio en bicicleta. Se muestra a los estudiantes una gráfica más detallada de dicho movimiento (ver la figura 3.1).

Lo que se quiere lograr con esta actividad es que los estudiantes interpreten la gráfica apoyándose en el registro aritmético para hacer una interpretación (de la gráfica) a través de una conversión al registro tabular. Que observen que hay dos intervalos de tiempo en que la velocidad y distancia son distintas. Siendo el primer intervalo de 7:30

a 7:55, con una velocidad constante menor que la del segundo intervalo de 7:55 a 8:10. Y que de este modo puedan determinar la distancia recorrida en los dos intervalos de tiempo.

Veamos las preguntas y respuestas del equipo 1 y 9 para esta segunda parte de la actividad:

Solución del equipo 1

c) ¿Cuántos Km lleva recorrido Antonio a las 7:45? 3 Km
¿Qué ocurre a las 7:55? aumentó su velocidad
¿Cuánto tiempo empleó en la primera mitad del trayecto? 25 min ¿Y en la segunda mitad? 15 min
d) ¿Cuántos Km pedaleó entre las 7:45 y las 8:05? [illegible] Km

[3km] [aumentó su velocidad] [25 min] [15 min] [5 km]

Solución del equipo 9

c) ¿Cuántos Km lleva recorrido Antonio a las 7:45? 3 Km
¿Qué ocurre a las 7:55? empieza a pedalear más [illegible]
¿Cuánto tiempo empleó en la primera mitad del trayecto? 25 min ¿Y en la segunda mitad? [illegible]
d) ¿Cuántos Km pedaleó entre las 7:45 y las 8:05? [illegible] Km

[3 km] [empieza a pedalear más fuerte] [25 min] [15 min] [5 km]

Estos dos equipos responden de una manera correcta, son capaces de deducir a partir de la gráfica que la velocidad de Antonio aumenta en la segunda mitad de su trayecto.

Ahora veamos la solución del equipo 6:

Solución del equipo 6

c) ¿Cuántos Km lleva recorrido Antonio a las 7:45? 3Km
¿Qué ocurre a las 7:55? recorre 5 Km
¿Cuánto tiempo empleó en la primera mitad del trayecto? 7:55mn ¿Y en la segunda mitad? 8:10mn
d) ¿Cuántos Km pedaleó entre las 7:45 y las 8:05? 5 Km

[3 km] [recorre 5 km] [7:55 min] [8:10 min][5 km]

Este equipo responde de manera correcta, al parecer la pregunta no quedo clara para los estudiantes, el equipo en vez de reportar el tiempo de la primera y segunda mitad del trayecto, reportan la hora en que termina cada uno de ellos, aunque leen perfectamente la distancia recorrida de Antonio en los intervalos de tiempo de 7:30 a 7:45 y de 7:45 a 8:05.

Continuando con la segunda parte del problema. Se presentan las respuestas de dos equipos respecto a la interpretación que hacen de la gráfica de la primera parte del recorrido de Antonio. Esto se logra con apoyo de tratamientos aritméticos para completar la tabla que se les presenta a los estudiantes y con ellos realizar una conversión tabular. A partir de la construcción de estas tablas o por lectura de la gráfica los estudiantes podrán ser capaces de responder si Antonio llegó a tiempo a la conferencia. Incluso determinar con cuantos minutos de retraso si hubiera continuado a la velocidad inicial. Al mismo tiempo se presentan las respuestas que dieron los equipos a la tercera parte del problema. Se pregunta a los estudiantes si pueden determinar qué variables son las que se relacionan en el problema. Ejemplificamos con las soluciones de dos equipos.

Solución del equipo 5

e) ¿Cómo se puede saber que Antonio ha ido a la misma velocidad en los primeros 25 minutos?
Para ayudarte a responder la pregunta completa la tabla donde registres la distancia recorrida cada 5 minutos empezando por el intervalo 7:30-7:35

Intervalo	7:30-7:35	7:35 a 7:40	7:40-7:45	7:45 a 7:50	7:50-7:55
Recorrido [Km]	1	1	1	1	1

¿Cuál es tu respuesta en base a los datos de la tabla anterior? Cada 5 minutos recorrio un Kilometro

f) ¿Cómo se puede saber que Antonio también ha ido a la misma velocidad en los últimos 15 minutos (de las 7:55 a las 8:10)? Construye una tabla.

Intervalo	7:55 a 8:10	8:10 a 8:15	8:15 a 8:20
Recorrido [Km]	3	1	1

¿Qué puedes concluir con los datos de la tabla que construiste? Recorrio los mismos Kilometros pero en diferentes tiempos

g) ¿En cuál de los dos intervalos fue menor la velocidad de Antonio?
Todos tienen la misma velocidad

h) ¿En cuál intervalo de tiempo Antonio viajo más rápido? de 7:55 a 8:10

i) ¿A qué hora llegó a la universidad? 8:20

j) Si Antonio hubiera seguido con la misma velocidad del primer intervalo (7:30- 7:55) ¿Habría llegado a tiempo a la universidad? NO ¿Con cuánto de adelanto o de atraso? con: 25 10 min ___ de atraso

3. En base a tus resultados discute con tu equipo.
   a) ¿Qué variables se mencionan en el problema? Tiempo y distancia
   b) ¿Crees que las dos variables están relacionadas? S Justifica tu respuesta la distancia depende de el tiempo

Podemos observar que en la respuesta del inciso e), los estudiantes logran hacer una buena lectura o interpretación de la gráfica, pueden darse cuenta que en la primera parte del recorrido de Antonio, el avanza un kilometro cada 5 minutos. En el inciso f) se les pide construir una tabla para la segunda mitad del recorrido, el cual es diferente al del inciso e). Se observa que el equipo tiene dificultades para completar esta tabla, no están interpretando de manera correcta la gráfica, ya que no hay trazo del recorrido en el intervalo de 8:10 a 8:20. Como consecuencia de ello, los incisos g), i), y j) los responden de manera incorrecta. En el inciso h) la respuesta es correcta. Son capaces de observar que la distancia depende del tiempo, que hay dos partes del recorrido donde la velocidad es distinta y que la segunda parte del recorrido en donde Antonio viaja más rápido.

Solución del equipo 3

e) ¿Cómo se puede saber que Antonio ha ido a la misma velocidad en los primeros 25 minutos?
Para ayudarte a responder la pregunta completa la tabla donde registres la distancia recorrida cada 5 minutos empezando por el intervalo 7:30-7:35

Intervalo	7:30-7:35	7 35 - 7 - 40	7:40-7:45	7:45 - 7:50	7:50-7:55
Recorrido [Km]	1	1	1	1	1

¿Cuál es tu respuesta en base a los datos de la tabla anterior? Que el recorrido depende del intervalo

f) ¿Cómo se puede saber que Antonio también ha ido a la misma velocidad en los últimos 15 minutos (de las 7:55 a las 8:10)? Construye una tabla.

Intervalo	7.55 - 8:00	8.00 - 8:05	8:05 - 8:10
Recorrido [Km]	1.5	1.5	2

¿Qué puedes concluir con los datos de la tabla que construiste? Que el recorrido cambio a cambio a comparacion de los otros

g) ¿En cuál de los dos intervalos fue menor la velocidad de Antonio?
El primero de 7:30 - 7:35

h) ¿En cuál intervalo de tiempo Antonio viajo más rápido? en el segundo de 7:55 - 8:10

i) ¿A qué hora llegó a la universidad? 8:10

j) Si Antonio hubiera seguido con la misma velocidad del primer intervalo (7:30- 7:55) ¿Habría llegado a tiempo a la universidad? no ¿Con cuánto de adelanto o de atraso? con: 10 min ___de atraso

3. En base a tus resultados discute con tu equipo.
   a) ¿Qué variables se mencionan en el problema? distancia y tiempo
   b) ¿Crees que las dos variables están relacionadas? Si Justifica tu respuesta
   si porque depende el tiempo es lo que reccorre y ala velocidad.

$$\frac{\text{distacio}}{\text{Tiempo}}$$

A comparación del equipo anterior, este equipo logra responder a medias correctamente. El inciso e) logran construir la tabla con éxito y logran observar que el recorrido que efectúa Antonio cambia en la primera y segunda mitad del recorrido. En el inciso f) tienen un error al calcular el recorrido en el intervalo de 8:05 a 8:10. Determinan que en la segunda parte del trayecto, la velocidad ha aumentado. También responden de manera correcta los incisos g), h), i) y j). Deducen que el recorrido (distancia) que efectúa Antonio y el tiempo que transcurre para ello están relacionados, y aunque no mencionan como tal la relación entre esas variables es la velocidad. Se puede deducir en el esbozo de la fórmula de la velocidad que escriben al final de las preguntas.

En una cuarta parte del problema, se presenta a los estudiantes la tabla del inciso e) modificada en los primeros 25 minutos de 7:30 a 7:55 (inciso a), con el fin de que observen que recorren la misma distancia en un mismo intervalo de tiempo y por ende que la velocidad es constante. En el segundo inciso, el b), se plantea a los equipos que completen una tabla con valores acumulados de la distancia y el tiempo. En el inciso c) se les pide que calculen la velocidad expresada en km/min. En seguida observaremos tres soluciones diferentes.

- Solución del equipo 4

4. Discute con tu equipo para responder.

Regresando al viaje recorrido de Antonio

a) Has visto que Antonio ha ido a la misma velocidad en los primeros 25 minutos como se ve en la tabla modificada.

Intervalo	7:30-7:35	7:35-7:40	7:40-7:45	7:45-7:50	7:50-7:55
Tiempo transcurridos [min]	5	5	5	5	5
Recorrido [Km]	1	1	1	1	1

¿Qué puedes comentar al respecto? Se recorre la misma distancia en el mismo tiempo y la velocidad es constante

b) Con ayuda de la tabla anterior, completa la siguiente tabla de valores acumulados para el primer recorrido

Intervalo	7:30-7:35	7:35-7:40	7:40-7:45	7:45-7:50	7:50-7:55
Tiempo transcurridos [min]	5	10	15	20	25
Distancia recorrida [Km]	1	2	3	4	5

c) Observando la última tabla podrías calcular la velocidad de Antonio (en la primera mitad del recorrido) en $km/\min$

$$[V = \frac{d}{t}; V = \frac{5}{25} = \frac{1}{5} = 0{,}2\frac{km}{min}]$$

Solución del equipo 5

4. Discute con tu equipo para responder.

Regresando al viaje recorrido de Antonio

a) Has visto que Antonio ha ido a la misma velocidad en los primeros 25 minutos como se ve en la tabla modificada.

Intervalo	7:30-7:35	7:35-7:40	7:40-7:45	7:45-7:50	7:50-7:55
Tiempo transcurridos [min]	5	5	5	5	5
Recorrido [Km]	1	1	1	1	1

¿Qué puedes comentar al respecto? Que ha ido a la misma velocidad

b) Con ayuda de la tabla anterior, completa la siguiente tabla de valores acumulados para el primer recorrido

Intervalo	7:30-7:35	7:35-7:40	7:40-7:45	7:45-7:50	7:50-7:55
Tiempo transcurridos [min]	5	10	15	20	25
Distancia recorrida [Km]	1	2	3	4	5

c) Observando la última tabla podrías calcular la velocidad de Antonio (en la primera mitad del recorrido) en km/min

1Km cada 5 min.

$[1km \text{ cada } 5\,min]$

- Solución del equipo 9

4. Discute con tu equipo para responder.

Regresando al viaje recorrido de Antonio

a) Has visto que Antonio ha ido a la misma velocidad en los primeros 25 minutos como se ve en la tabla modificada.

Intervalo	7:30-7:35	7:35-7:40	7:40-7:45	7:45-7:50	7:50-7:55
Tiempo transcurridos [min]	5	5	5	5	5
Recorrido [Km]	1	1	1	1	1

¿Qué puedes comentar al respecto? El tiempo es constante respecto al recorrido, la velocidad es constante con respecto a tiempo y recorrido

b) Con ayuda de la tabla anterior, completa la siguiente tabla de valores acumulados para el primer recorrido

Intervalo	7:30-7:35	7:35-7:40	7:40-7:45	7:45-7:50	7:50-7:55
Tiempo transcurridos [min]	5	10	15	20	25
Distancia recorrida [Km]	1	2	3	4	5

c) Observando la última tabla podrías calcular la velocidad de Antonio (en la primera mitad del recorrido) en *km* / min

$V = \frac{d}{t}$

$V = \frac{1}{5} =$

$V = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$

$V = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$

$V = \frac{4}{20} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$

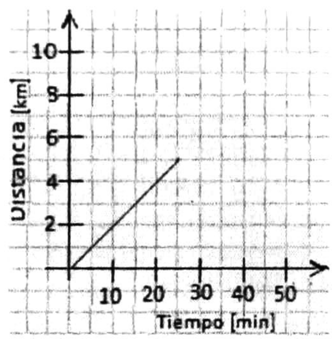
$V = \frac{5}{25} = \frac{1}{5}$

En general todos los equipos respondieron de manera correcta esta cuarta parte del problema. Para el inciso c), hay diferentes formas de calcular la velocidad. En particular el equipo 9 calcula la velocidad para cada intervalo de tiempo resultando la misma para cada intervalo.

En una quinta sección de la actividad se les pide a los estudiantes calcular la pendiente del recorrido de Antonio para los primeros 25 min. Ellos eligen un par de puntos aleatorios y con los cálculos que realizan, y la pregunta que se les plantea, se percatan que la velocidad y la pendiente son las mismas. Ejemplo de ello son las respuestas del equipo 3 y 5. Los dos equipos usan pares distintos de la gráfica por donde pasa la recta del recorrido. Llegan a la misma solución y comparando su respuesta con la solución obtenida en la cuarta parte de la actividad, inciso c), deducen que la velocidad que lleva Antonio y la pendiente son iguales.

- Solución del equipo 3

5. En la siguiente figura hemos representado la primera parte del recorrido de Antonio en una gráfica de distancia recorrida vs minutos transcurridos a partir de 7:30



a) En la gráfica anterior se observa una gráfica que pasa por una serie de puntos coordenados elige un par de ellos y llámalos P_1 y P_2

$P_1(10,2)$
$P_2(20,4)$

b) Con los dos puntos elegidos, determina la pendiente de la recta

Pendiente $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ $\quad \frac{4-2}{20-10} \quad \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$

c) Compara tu resultado con la velocidad de Antonio para la primera mitad recorrida que calculaste. ¿Qué puedes concluir al respecto?

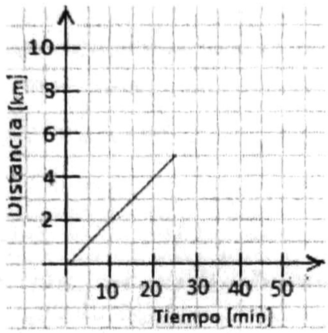
La velocidad y la pendiente es lo mismo

d) Sabiendo que 60min / 1hr es la unidad y que lo que sea multiplicado por la unidad no se altera, utilízalo como factor para convertir la velocidad de *km* / min a *km / hr*

$$\left(\frac{60\,\text{min}}{1\,\text{hr}}\right)\left(\frac{1}{5}\,\frac{\text{Km}}{\text{min}}\right) = \frac{60}{5}\,\frac{\text{min}\cdot\text{Km}}{\text{hr}\ \text{min}} = 12\ \text{Km}/\text{hr}$$

- Solución del equipo 5

5. **En la siguiente figura hemos representado la primera parte del recorrido de Antonio en una gráfica de distancia recorrida vs minutos transcurridos a partir de 7:30**



a) En la gráfica anterior se observa una gráfica que pasa por una serie de puntos coordenados elige un par de ellos y llámalos P_1 y P_2

$P_1(0,0)$
$P_2(15,5)$

b) Con los dos puntos elegidos, determina la pendiente de la recta

Pendiente $m = \frac{y_2 - y_1}{x^2 - x^1}$ $\quad m = \frac{5-0}{25-0} = \frac{5}{25} = \frac{1}{2}$

c) Compara tu resultado con la velocidad de Antonio para la primera mitad recorrida que calculaste. ¿Qué puedes concluir al respecto?

Que la pendiente y la distancia son iguales

d) Sabiendo que 60min / 1hr es la unidad y que lo que sea multiplicado por la unidad no se altera, utilízalo como factor para convertir la velocidad de $km/\min$ a km/hr

1h - 60 min
x — 25 min
x = 0 4166

En general esta quinta parte para tres euipos resultó un poco complicada, ya que muestran dificultad para hacer operaciones de quebrados como lo muestra la solución del equipo 3 al inciso a) de esta quinta parte. Elige bien un par de puntos pero a la hora de reducir dicho resultado lo hacen de manera incorrecta. El equipo 5 en el inciso d) no logra hacer una conversión de la velocidad. Lo que intentan hacer es una regla de tres mal planteada.

En la sexta parte y última de la actividad, se plantea la descripción detallada del recorrido que hace Carlos. Se pretendía que los estudiantes hicieran una conversión del registro verbal al registro gráfico. Esto se logró con el apoyo de cálculos aritméticos y lo observado en las partes anteriores de la actividad. La mayoria de los estudiantes no mostraron problemas al resolver las preguntas que se les plantearon. Solo el equipo 5 sigue mostrando problemas para realizar conversiones, intentando hacer una regla de tres sin llegar a una solución. Como ejemplo de una respuesta correcta se muestra la solución del equipo 3.

6. Ahora veremos la descripción detallada de Carlos.
Carlos: Salí con calma a una velocidad de $30\ km/hr$ durante los primeros 10 minutos y me di cuenta que me quedaba sin gasolina. Perdí 10 minutos tratando de conseguir un par de litros y luego continué a mucha mayor velocidad durante unos 5 minutos llegando a Tecamac a las 7:55 a.m

En base a la historia de Carlos, resuelve las siguientes preguntas:

a) De las 7:30 a las 7:40 Carlos viajó a $30\ km/hr$ ¿Cuántos kilómetros por minuto recorre Carlos a esta velocidad? Convierte $30\ km/hr$ a su equivalente en $km/\cancel{hr}$ min (utiliza el factor unidad $\frac{1\ hr}{60\ min}$)

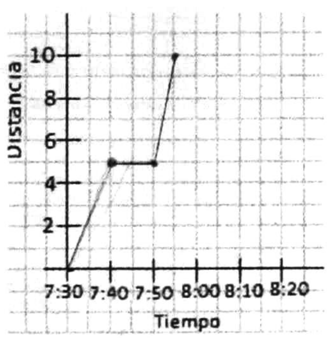
$$\left(\frac{1\ hr}{60\ min}\right)\left(\frac{30\ km}{1\ hr}\right) = \frac{30\ hr\ km}{60\ min\ hr} = \frac{3}{6}\frac{km}{hr} = \frac{1}{2}\frac{km}{hr}$$

Carlos recorre 1 km cada 2 min $\frac{1}{2}$

b) Luego de 7:30 a 7:40 transcurren 10 minutos a $\frac{1}{2}$ $km/\min$. Luego recorrerá 5 Km en 10 min

7. No cambia la distancia entre 7:40 y 7:50. Y finalmente avanza lo que le faltaba para los $10km$ totales, a saber 5 km en el intervalo de 7:50 a 7:55.

8. Con todos los datos anteriores representa en el cuadriculado el viaje de Carlos



El equipo responde correctamente, solo comenten un pequeño error al reportar las unidades de la velocidad que lleva Carlos en el inciso a), colocan km/hr cuando debió ser km/min. En el último punto, el punto ocho, logran dibujar la trayectoria de Carlos en el cuadriculado.

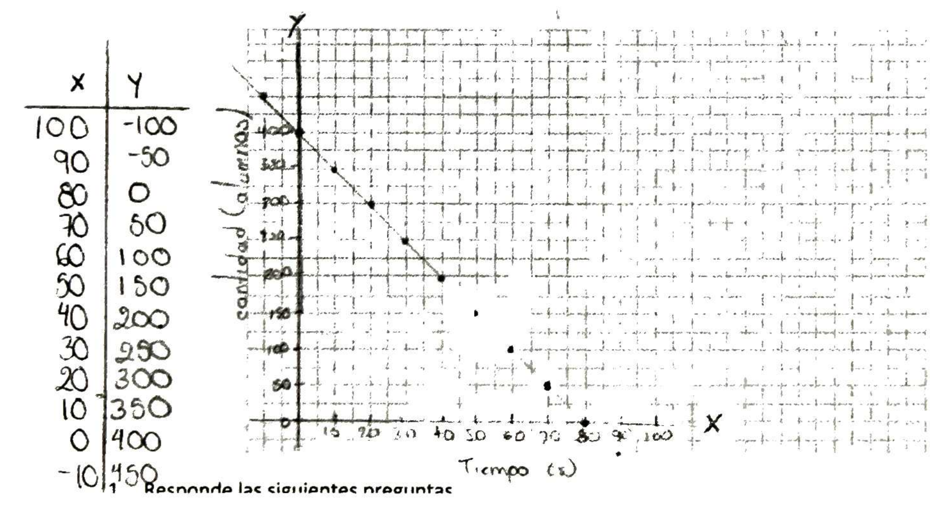
3.3.1.3. Resultados de la Actividad III. *Un simulacro para desalojar la escuela en caso de temblor.*

Se plantea a los estudiantes el siguiente problema.

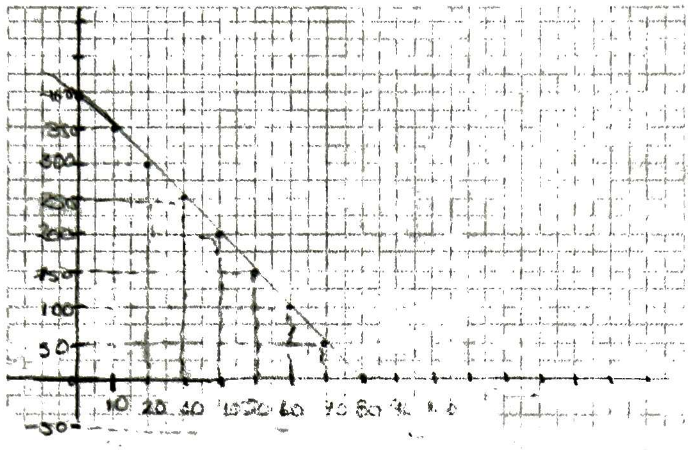
> En la preparatoria se llevó a cabo un simulacro; la siguiente ecuación permite calcular el tiempo que tardan los estudiantes en desalojar la escuela.
>
> $$y = -5x + 400$$
>
> Donde y representa el número de estudiantes que restan dentro de la escuela y x el tiempo en segundos que han transcurrido desde que empezó el desalojo. A partir de la ecuación anterior construye una gráfica de desalojo para los primeros 100 segundos.

En este problema se pretende que los estudiantes deben partir de la ecuación algebraica y realizar una conversión al registro gráfico. Para poder realizar esto, los equipos se apoyaron espontáneamente en el registro tabular, es decir, de la ecuación algebraica pasaron al registro tabular y del tabular al registro gráfico. Como ejemplo veamos las soluciones de los equipos 4 y 9.

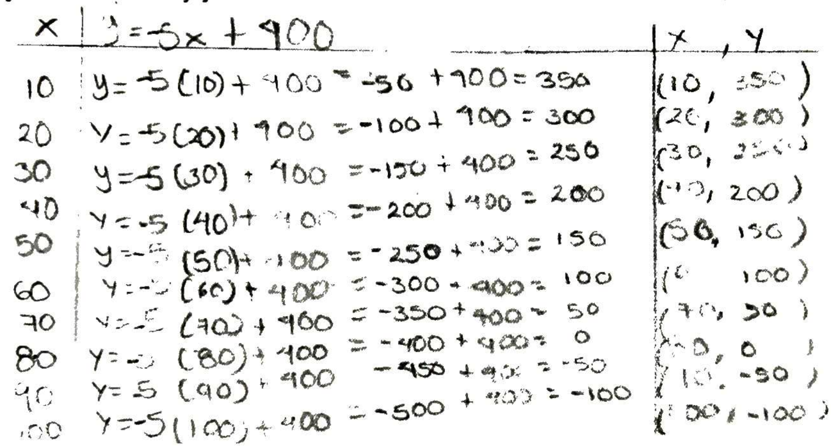
Solución del equipo 4



Solución del equipo 9



[Reverso de la hoja]



x	y=-5x+400	x , y
10	y=-5(10)+400 = -50 +400 = 350	(10, 350)
20	y=-5(20)+400 = -100 + 400 = 300	(20, 300)
30	y=-5(30) + 400 = -150 + 400 = 250	(30, 250)
40	y=-5 (40)+400 = -200 + 400 = 200	(40, 200)
50	y=-5 (50)+400 = -250 + 400 = 150	(50, 150)
60	y=-5 (60) + 400 = -300 + 400 = 100	(60, 100)
70	y=-5 (70) + 400 = -350 + 400 = 50	(70, 50)
80	y=-5 (80) + 400 = -400 + 400 = 0	(80, 0)
90	y=5 (90) + 400 -450 + 400 = -50	(90, -50)
100	y=-5(100) + 400 = -500 + 400 = -100	(100, -100)

Estos equipos a partir de la ecuación realizan una tabla para poder graficar. El equipo 4 muestra una tabla sin los cálculos que realizó, tal y como lo hizo el equipo 9, el cual muestra paso a paso cada cálculo.

Después de la gráfica construida se plantea una serie de preguntas sobre cuántos estudiantes restan en la escuela en un determinado tiempo. Esto lo pueden calcular u observar de dos maneras diferentes. La primera, interpretando la gráfica que construyeron con ayuda de los cálculos y la segunda por medio de la tabla que construyeron. Veamos algunas respuestas.

Solución del equipo 3

a) ¿Cuántos estudiantes había dentro de la escuela al inicio del simulacro? habia 400 alumnos
¿Cómo lo determinaste? Por que aún no habia transcurrido el tiempo y estaba en 0 segundos

b) ¿Cuántos estudiantes estaban aún dentro de la escuela cuando habían transcurrido 30 segundos del simulacro? 250 ¿Cómo lo determinaste? Por medio de la grafica

c) ¿Cuántos estudiantes estaban aún dentro de la escuela cuando habían transcurrido 55 segundos del simulacro? 125 ¿Cómo lo determinaste? Por medio de la grafica

d) ¿Cuántos segundos habían transcurrido cuando quedaban 325 estudiantes? 15 segn.

e) ¿Cómo encontraste la respuesta? por que en 350 habian transcurrido 10 y 20 300 es por la grafica que a los 350 alumnos habian transcurrido 15 min

f) ¿En cuánto tiempo quedó totalmente desalojada la escuela? 80 seg

g) ¿Cómo determinaste este tiempo? Por medio de la grafica que se realizo

- Solución del equipo 4

a) ¿Cuántos estudiantes había dentro de la escuela al inicio del simulacro? 400
¿Cómo lo determinaste? porque aun no habia transcurrido el tiempo estaba en 0 segundos en la tabulacion con 0 s

b) ¿Cuántos estudiantes estaban aún dentro de la escuela cuando habían transcurrido 30 segundos del simulacro? 250 ¿Cómo lo determinaste? con la grafica

c) ¿Cuántos estudiantes estaban aún dentro de la escuela cuando habían transcurrido 55 segundos del simulacro? 125 ¿Cómo lo determinaste? con la grafica

d) ¿Cuántos segundos habían transcurrido cuando quedaban 325 estudiantes? 15 s

e) ¿Cómo encontraste la respuesta? con la grafica

f) ¿En cuánto tiempo quedó totalmente desalojada la escuela? en 80 s

g) ¿Cómo determinaste este tiempo? con la grafica

Solución del equipo 7

a) ¿Cuántos estudiantes había dentro de la escuela al inicio del simulacro? 400
¿Cómo lo determinaste? con la formula

b) ¿Cuántos estudiantes estaban aún dentro de la escuela cuando habían transcurrido 30 segundos del simulacro? 150 ¿Cómo lo determinaste? con la tabla

c) ¿Cuántos estudiantes estaban aún dentro de la escuela cuando habían transcurrido 55 segundos del simulacro? 175 ¿Cómo lo determinaste? con la tabla

d) ¿Cuántos segundos habían transcurrido cuando quedaban 325 estudiantes? 15 segundos
e) ¿Cómo encontraste la respuesta? con la tabla

f) ¿En cuánto tiempo quedó totalmente desalojada la escuela? 100 segundos
g) ¿Cómo determinaste este tiempo? con la tabla

Solución del equipo 9

a) ¿Cuántos estudiantes había dentro de la escuela al inicio del simulacro? 400
¿Cómo lo determinaste? tabulando y mediante la gráfica

b) ¿Cuántos estudiantes estaban aún dentro de la escuela cuando habían transcurrido 30 segundos del simulacro? 250 ¿Cómo lo determinaste? Tabulando

c) ¿Cuántos estudiantes estaban aún dentro de la escuela cuando habían transcurrido 55 segundos del simulacro? 125 ¿Cómo lo determinaste? Tabulando y graficando

d) ¿Cuántos segundos habían transcurrido cuando quedaban 325 estudiantes? 15 seg
e) ¿Cómo encontraste la respuesta? Por la recta

f) ¿En cuánto tiempo quedó totalmente desalojada la escuela? 80 seg
g) ¿Cómo determinaste este tiempo? Tabulación

Observemos que las respuestas del equipo 3 y 4 son soluciones correctas. El equipo 7 responde de manera incorrecta los incisos c) y f), esto probablemente se debe a que están haciendo para el inciso c) una mala lectura de su tabla que reportan, la cual es idéntica a la del equipo 4. El único equipo que reporta el uso de dos registros para encontrar las soluciones del inciso a) y c), es el equipo 9, ya que menciona que encuentra las respuestas mediante la tabulación que hicieron y mediante la gráfica.

En el inciso e) el equipo 3 da un argumento mucho más detallado de cómo es que encontraron el tiempo transcurrido cuando quedaban 325 estudiantes en la escuela. A partir de la lectura de la gráfica reportan que cada 10 segundos salen 50 alumnos, entonces por una interpolación determinan que la solución son 15 segundos. En el mismo inciso el equipo 9, solo reporta que encuentran la respuesta por la recta, queda entendido que pudieron determinar el tiempo transcurrido a partir de la lectura de la gráfica (interpolando).

En general esta actividad fue muy sencilla para todos los equipos. Reportaron una tabla para poder hacer la gráfica de desalojo de la escuela sin que se los pidiéramos. Esto se observa en las respuestas que reportan los equipos en la segunda parte del problema, donde describen como creen que están relacionadas estas dos variables. Todos los equipos responden de manera correcta. Veamos el caso especial del equipo 9. Este equipo observa una relación funcional entre los alumnos desalojados de la escuela y el tiempo que transcurre para ello. No se utiliza la ecuación de la recta como relación funcional de modo sistemático, esto se refiere, a que interpolan para hallar el tiempo en que quedaban 325 alumnos sin desalojar en vez de sustituir $y = 325$ y despejar x (tiempo).

Solución del equipo 9

2. En base a tus resultados discute con tu equipo.

a) ¿Qué variables se mencionan en el problema? Alumnos y Tiempo(seg)

b) ¿Crees que las dos variables están relacionadas? si Justifica tu respuesta por que dependiendo del tiempo da el resultado de los [illegible] dentro de la escuela y de igual manera [illegible] alumnos se determina el tiempo

3.3.1.4. Resultados de la Actividad IV. *Temperaturas en grados Fahrenheit y grados Centígrados.*

En esta actividad se plantea el siguiente problema.

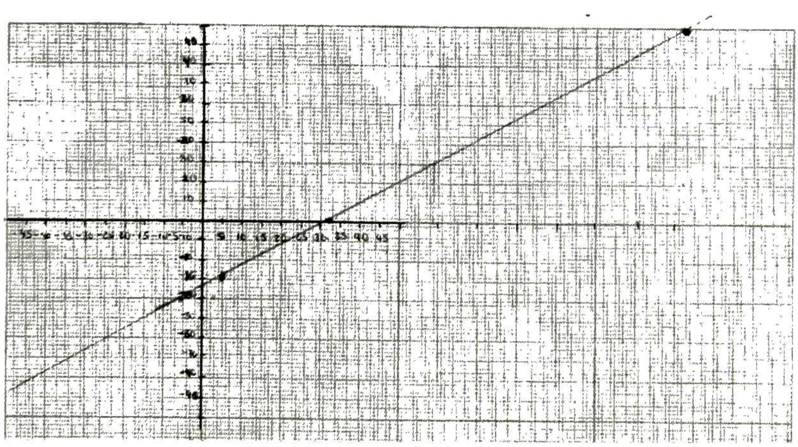
> Carlos tiene un tío que vive en Denver Colorado, la última vez que habló con él le contó que en tiempos de calor la temperatura llega a alcanzar unos 90°Fahrenheit y en tiempos de frío las temperaturas bajan hasta unos 30° Fahrenheit. Carlos intrigado investigó cual era la equivalencia en grados Centígrados, pero solo encontró la siguiente tabla.

Fahrenheit	-4	5	32	122
Centígrados	-20	-15	0	50

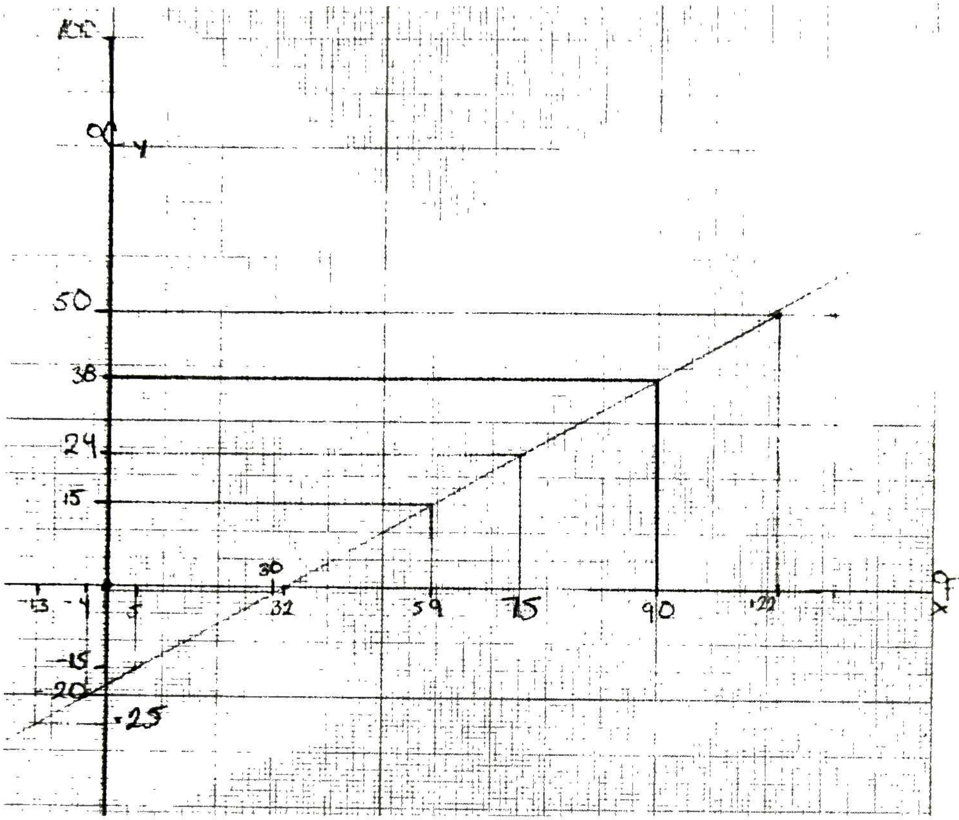
Como primera parte de la actividad se les pide a los estudiantes hacer una gráfica con ayuda de papel milimétrico que se anexa en la actividad, esto con la intención de que hagan uso de esta hoja para realizar una gráfica mucho más precisa y así responder una serie de preguntas que más tarde se les plantea. Específicamente se les dice que el eje X representa los valores en grados Fahrenheit y en el eje Y los valores en los grados Centígrados de $-25°C$ a $100°C$.

Las gráficas que pintan son muy variadas, en general no se aprovecha el espacio de la hoja milimétrica, solo una estudiante aprovecha toda la hoja para dibujar su gráfica. Veremos el ejemplo de una integrante del equipo 4 y otra del 9.

Gráfica de la estudiante del equipo 4



- Gráfica de la estudiante del equipo 9



En una segunda parte del problema se pide a los estudiantes responder una serie de preguntas, las cuales se espera sean respondidas con la lectura de la gráfica que dibujaron. Veamos los ejemplos de solución para los mismos equipos que se mostraron anteriormente.

Solución del equipo 4

2. Observa la grafica que dibujaste, trata de estimar las siguientes equivalencias. *(Nota: es importante que trates de estimar las equivalencias con ayuda de la gráfica sin necesidad de usar una formula y mantener esta postura hasta finalizar la actividad)*

a) ¿A cuántos grados centígrados equivalen 59°Fahrenheit? 16° C

b) ¿A cuántos grados Fahrenheit equivalen 24 grados centígrados? 70°F

c) ¿Puedes ver en tu gráfica la equivalencia de -13 grados Fahrenheit a grados centígrados? ¿Si, no? ¿Porqué? no pasa por el punto de intersección

¿Qué harías para estimar esa temperatura si ya no aparece en tu dibujo? alargando la línea

¿Cuál es la equivalencia que encontraste? -51° C

d) El agua hierve a 100° C, ¿a qué temperatura en °F hierve el agua? $100°C =$ 203 °F

- Solución del equipo 9

2. **Observa la grafica que dibujaste, trata de estimar las siguientes equivalencias.** ***(Nota: es importante que trates de estimar las equivalencias con ayuda de la gráfica sin necesidad de usar una formula y mantener esta postura hasta finalizar la actividad)***

a) ¿A cuántos grados centígrados equivalen 59°Fahrenheit? 15°C

b) ¿A cuántos grados Fahrenheit equivalen 24 grados centígrados? - 15 °F

c) ¿Puedes ver en tu gráfica la equivalencia de -13 grados Fahrenheit a grados centígrados? ¿Si, no? ¿Porqué? Sí por que se puede alargar la gráfica
¿Qué harías para estimar esa temperatura si ya no aparece en tu dibujo? alargar la gráfica
¿Cuál es la equivalencia que encontraste? -25°C

d) El agua hierve a 100° C, ¿a qué temperatura en °F hierve el agua? $100°C = \underline{212}\ °F$

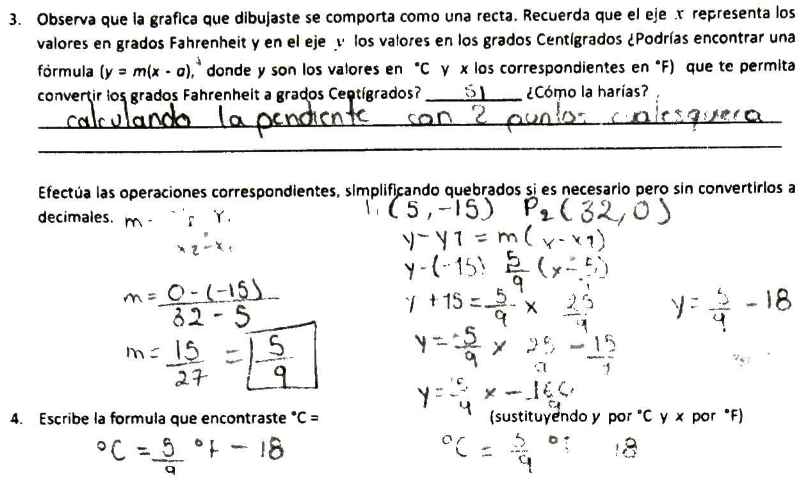
En esta seccuión de preguntas podemos observar diferencias notables respecto a sus respuestas. Para el inciso a) los dos equipos responden correctamente, la diferencia radica en las respuestas de los incisos b) al d). Como era de esperarse, para responder estas preguntas, los estudiantes debían de ser capaces de leer la gráfica con ayuda de cálculos aritméticos. El equipo 9 lo logra correctamente pero el equipo 4 no responde correctamente. Esto debido a que las gráficas que dibujaron no son tan exactas, lo que influye en responder incorrectamente. Esto lo confirmamos con las respuestas que nos dan todos los equipos en el inciso e). A continuación veamos como ejemplo la respuesta del equipo 4.

e) Compara tus respuestas con las de tus compañeros de equipo. ¿Encuentras diferencias notables? Si
¿A qué crees que se deban? a la escala que utilizamos que no se hizo con exactitud.

Con esta respuesta comprobamos lo que habíamos supuesto, que las respuestas incorrectas de la segunda sección se debían no a la mala lectura de la grafica, sino, a que su gráfica no era muy exacta (subutilizaron el papel milimétrico como ya se había comentado).

En la tercera parte del problema se les pide encontrar una fórmula que permita convertir los grados Fahrenheit a grados Centígrados. Es aquí donde se complica considerablemente el problema, porque cuando intentan determinar la ecuación que permite la conversión entre temperaturas, se pierden al estar haciendo cálculos y quieren utilizar decimales. Esto se puede observar en la solución que le dan a la cuarta parte del problema donde se les pide expresar la fórmula en terminos de °C y °F. Veamos los siguientes ejemplos de soluciones.

- Solución equipo 4



3. Observa que la grafica que dibujaste se comporta como una recta. Recuerda que el eje x representa los valores en grados Fahrenheit y en el eje y los valores en los grados Centígrados ¿Podrías encontrar una fórmula ($y = m(x - a)$, donde y son los valores en °C y x los correspondientes en °F) que te permita convertir los grados Fahrenheit a grados Centígrados? Si ¿Cómo la harías?

calculando la pendiente con 2 puntos cualesquiera

Efectúa las operaciones correspondientes, simplificando quebrados si es necesario pero sin convertirlos a decimales.

$P_1(5,-15)$ $P_2(32,0)$

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$m = \frac{0-(-15)}{32-5}$

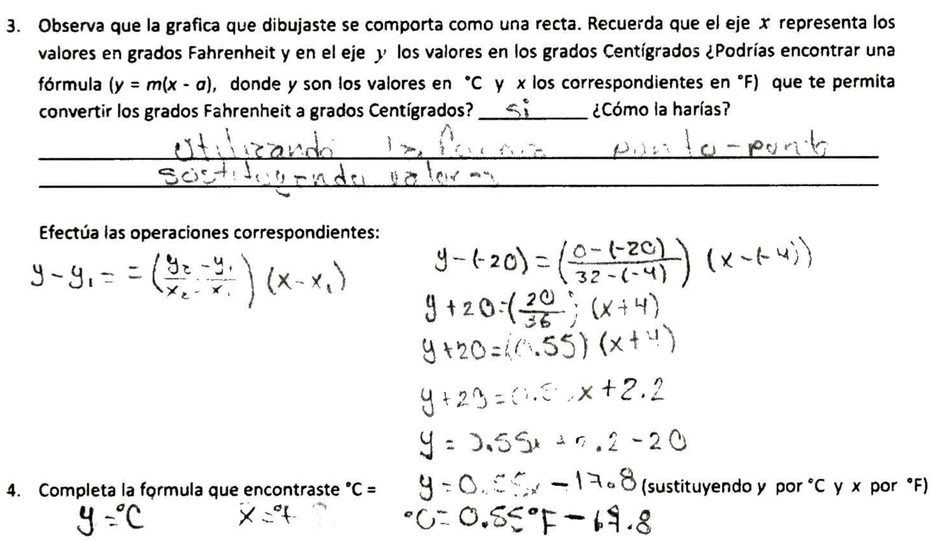
$m = \frac{15}{27} = \boxed{\frac{5}{9}}$

$y = \frac{5}{9} - 18$

4. Escribe la formula que encontraste °C = (sustituyendo y por °C y x por °F)

$°C = \frac{5}{9}°F - 18$

- Solución del equipo 8



3. Observa que la grafica que dibujaste se comporta como una recta. Recuerda que el eje x representa los valores en grados Fahrenheit y en el eje y los valores en los grados Centígrados ¿Podrías encontrar una fórmula ($y = m(x - a)$, donde y son los valores en °C y x los correspondientes en °F) que te permita convertir los grados Fahrenheit a grados Centígrados? si ¿Cómo la harías?

utilizando la formula punto-punto sustituyendo valores

Efectúa las operaciones correspondientes:

$y - y_1 = \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)(x - x_1)$

$y-(-20) = \left(\frac{0-(-20)}{32-(-4)}\right)(x-(-4))$

$y+20 = \left(\frac{20}{36}\right)(x+4)$

$y+20 = (0.55)(x+4)$

$y+20 = 0.55x + 2.2$

$y = 0.55x + 2.2 - 20$

4. Completa la formula que encontraste °C = $y = 0.55x - 17.8$ (sustituyendo y por °C y x por °F)

$y = °C$ $x = °F$ $°C = 0.55°F - 17.8$

En estas dos secciones pocos equipos lograron llegar a una respuesta casi correcta como la del equipo 4. Y el resto de los equipos muestran dificultades como las del equipo 8. Esto como ya lo habíamos comentado porque los estudiantes no están acostumbrados a trabajar con números fraccionarios y tienden a convertir a su forma decimal estas fracciones.

Por último veamos las respuestas de la sección 5. Se pide a los estudiantes encontrar las equivalencias de las temperaturas que el tío de Carlos le dio al inicio del problema.

Aquí pocos estudiantes usan la ecuación que encontraron en la sección anterior. La gran mayoria trata de leerlo de sus tablas, pero ya que la mayoria de ellas no son tan exactas, no logran plantear una solución correcta. Si hablamos de las respuestas del equipo 4 y 9, observamos que estos dos equipos lograron encontar aproximadamente la fórmula para la conversión de temperaturas. Pero el equipo 9, muestra dos distitintas soluciones, la primera respondiendo con la lectura de la gráfica la cual tiene un error entre 90° C y 100° C, lo cual provoca que respondan incorrectamente. También lo hacen con la fórmula encontrada pero se observa un error para el inciso c). Veamos estas soluciones.

Solución del equipo 4

5. Ayuda a Carlos a encontrar las equivalencias en grados Centígrados de las temperaturas en Fahrenheit que le dio su tío.
   - a) 90° Fahrenheit a °C
     °C= 32
   - b) 30° Fahrenheit a °C
     °C= -1.33
   - c) Con la formula comprueba o corrige tu respuesta en 2(d)
     100°C = 118 °F

$°C = \frac{5}{9} °F - 18$

$\frac{5}{9} °F = C° - 18$

$°F = \frac{C° - 18}{\frac{5}{9}}$

$°F = \frac{9}{5}(C° - 18)$

$°F = \frac{9}{5} °C - \frac{9}{5}(18)$

$°F = \frac{9}{5} °C \quad \frac{162}{5}$

$°F = \frac{9}{5} °C \quad 32$

Solución del equipo 9

5 Ayuda a Carlos a encontrar las equivalencias en grados Centígrados de las temperaturas en Fahrenheit que le dio su tío.
   - a) 90° Fahrenheit a °C
     °C= 38
   - b) 30° Fahrenheit a °C
     °C= 1
   - c) Con la formula comprueba o corrige tu respuesta en 2(d)
     100°C = 212 °F

$°C = \frac{5}{9} °F - 18$

$°C = \frac{5}{9}(90) - 18 \quad 32$

$°C = \frac{5}{9}(30) - 18 = -1.33$

$°F = \frac{9}{5} °C \quad 32$

$°F \quad \frac{9}{5}(100) - 32 = 148$

Los equipos 4 y 9 llegan a una fórmula aproximada en la forma $y = mx + b$ donde m es exacto a $\left(\frac{5}{9}\right)$, b es redondeada a 18 lo que en realidad es el quebrado $\left(\frac{160}{9}\right)$. No pudieron expresarlo en la forma pedida $y = m(x - a)$ donde $m = \left(\frac{5}{9}\right)$ y $a = 32$. Aún con la forma aproximada cometen errores al despejar $°F$ para hallar $100°C$.

3.3.2. El circulo trigonométrico. Actividad introductoria.

En esta Actividad pretendíamos que los estudiantes manejaran la suma de ángulos los cuales se necesitan manejar muy bien para las Actividades referentes a la ley de reflexión en rectas. Primeramente se les da un recordatorio de lo que es el círculo trigonométrico para luego plantearles problemas que consistían en encontrar el signo del seno y el coseno correspondiente a cada uno de los cuatro cuadrantes del sistema coordenado, también se les pidió que encontrar el valor de las funciones trigonométricas de algunos ángulos de cada cuadrante.

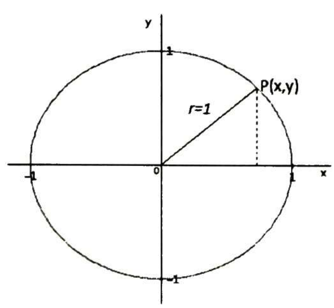
Esta Actividad tuvo algunos inconvenientes, sólo se aplicó con el grupo auxiliar con miras a mejorar el diseño de las mismas, para luego poder aplicarlas al grupo experimental; pero esto último no pudo ser aplicado con el grupo experimental por falta de tiempo. A continuación se mostrarán algunos de los resultados obtenidos en dicha actividad y plantearemos una observación final de lo antes mencionado.

3.3.2.1. Resultados de la actividad introductoria. El circulo trigonométrico e identidades trigonométricas para la suma de ángulos.

La actividad se dividió en dos partes, la primera de ellas consistió en dar una pequeña clase introductoria que nos sirve para recordar las razones trigonométricas asociadas al círculo unitario (véase el apéndice A.5) y la segunda en resolver una serie de problemas.

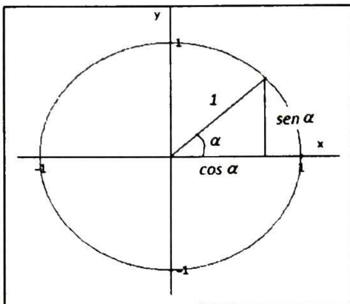
En clase se les dio a los estudiantes siguiendo el siguiente guión.

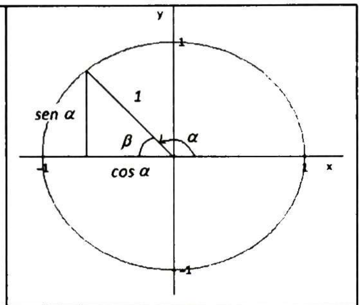
> El círculo trigonométrico es un círculo unitario que tiene su centro en el origen de coordenadas.



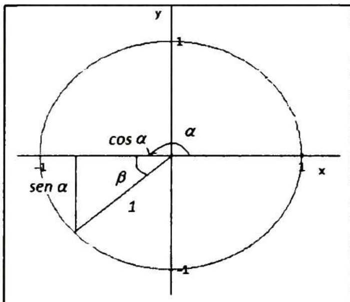
> Si tomamos un punto cualquiera $P(x, y)$ en la circunferencia, por el teorema de Pitágoras [la hipotenusa elevada al cuadrado es igual a la suma de los cuadrados de los catetos $c^2 = a^2 + b^2$, en este caso la hipotenusa mide

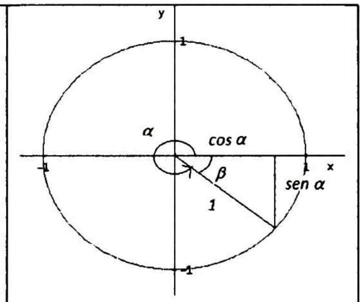
la unidad y x y y son los catetos], escribiendo la ecuación de la forma acostumbrada $x^2 + y^2 = 1$ se tiene la ecuación cuyo lugar geométrico es un circulo de radio 1 (unitario) con centro en el origen. Definición de $sen\,\alpha$ y $cos\,\alpha$: $sen\,\alpha = y$, $cos\,\alpha = x$ y $tan\,\alpha = \frac{y}{x}$





$0 < \alpha < 90°$ $sen\alpha$ positivo $(y > 0)$ $cos\alpha$ positivo $(x > 0)$ $tan\alpha$ positivo $\left(\frac{y}{x} > 0\right)$	$90° < \alpha < 180°$ $sen\alpha$ positivo $(y > 0)$ $cos\alpha$ negativo $(x < 0)$ $tan\alpha$ negativa $\left(\frac{y}{x} < 0\right)$



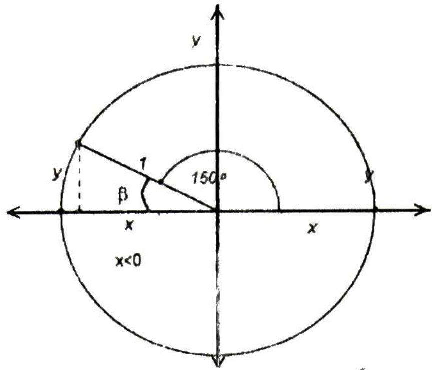


$180° < \alpha < 270°$ $sen\alpha$ negativo $(y < 0)$ $cos\alpha$ negativo $(x < 0)$ $tan\alpha$ positiva $\left(\frac{y}{x} > 0\right)$	$270° < \alpha < 360°$ $sen\alpha$ negativo $(y < 0)$ $cos\alpha$ positivo $(x > 0)$ $tan\alpha$ negativo $\left(\frac{y}{x} < 0\right)$

Después de dar esta pequeña introducción se planteó a los estudiantes una serie de problemas que consistían en encontrar el signo del seno y el coseno correspondiente a cada uno de los cuatro cuadrantes del sistema coordenado, también se les pidió que encontrar el valor de las funciones trigonométricas de algunos ángulos de cada cuadrante. A continuación veamos algunos de los resultados.

- Solución del equipo 6

1. **Observa la siguiente figura y completa lo que se te pide.**



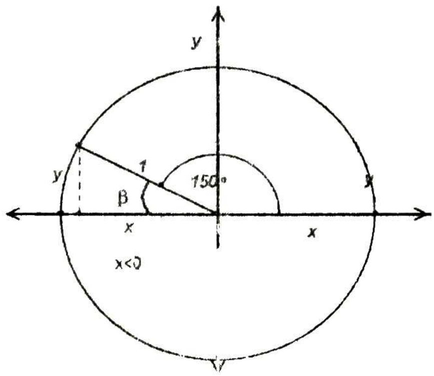
a) Si $\alpha = 150°$ entonces $\beta =$ 30°, luego $sen\,150° =$ + sen 30° por estar en el cuadrante II

b) $\cos 150° =$ − $\cos$ 30°

Observemos que en la respuesta anterior, el equipo logra identificar el valor del ángulo suplementario, al igual que los signos del seno y coseno en cada caso. Esta respuesta la observamos en seis equipos que lo hacen correctamente. Dos de los equipos restantes no logran identificar el signo del seno y coseno en cada caso y particularmente el último, el equipo 1, responde de una manera confusa, veamos la solución que este equipo dio.

- Solución del equipo 1

1. **Observa la siguiente figura y completa lo que se te pide.**

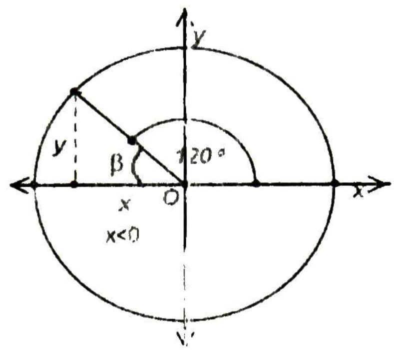


a) Si $\alpha = 150°$ entonces $\beta =$ 30°, luego $sen\,150° =$ β sen 30 por estar en el cuadrante II

b) $\cos 150° =$ β $\cos$ 30

De primera instancia identifican el ángulo $\beta = 30°$, luego cuando se les pide poner el signo del seno y coseno, erróneamente colocan β en su lugar. Otro error es que al coseno de 30° le colocan el signo negativo en el ángulo. Responden de la misma manera el problema número dos.

2. Observa la siguiente figura y completa lo que se te p de.



a) Si $\alpha = 120°$ entonces β = 60°, luego $sen\,120° = ß\ sen$ ___ por estar en el cuadrante II

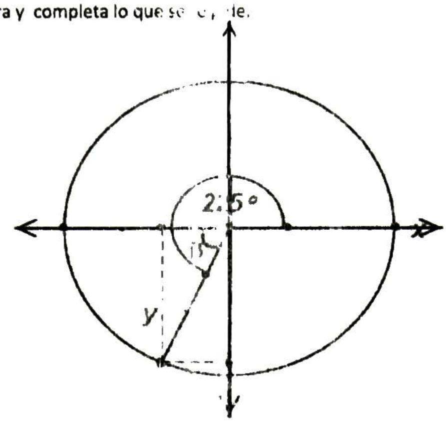
b) $\cos 120° = ß\ \cos$ − 60

Respecto a los ocho equipos restantes, dos de ellos vuelven a equivocarse en los signos del seno y coseno y los últimos seis responden de una manera correcta este último problema (véase el resumen en el apéndice B).

Los tres equipos que respondieron de manera incorrecta los problemas anteriores para los problemas tres y cuatro lo hacen de una manera correcta, igual que los equipos restantes. En particular, el equipo 1 se da cuenta de su error y corrige los problemas colocando de manera correcta los signos del seno y coseno al igual que los ángulos. Veamos un ejemplo de la solución.

- Solución del equipo 1

3. Observa la siguiente figura y completa lo que se te pide.



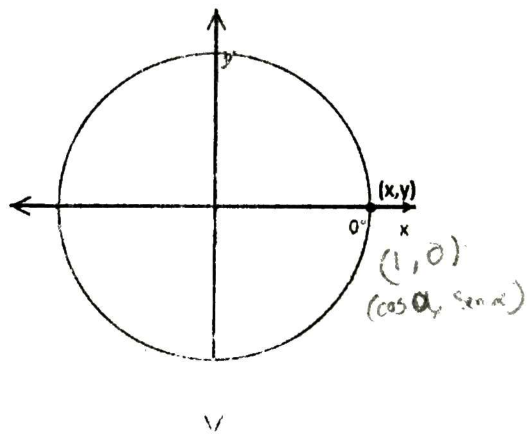
a) Si $\alpha = 225°$ entonces $\beta =$ 45 , luego $sen\,225° = -\,sen\,45°$ por estar en el cuadrante III

b) $\cos 225° = -\cos 45°$

Posterioremente se les plantea a los estudiantes tres ploblemas más para los ángulos $\alpha = 0^{\circ}$, $\alpha = 90^{\circ}$, y $\alpha = 180^{\circ}$. Veamos algunos ejemplos de las soluciones.

Solución del equipo 3

1. Observa la siguiente figura y completa lo que se te pide.



a) Si $\alpha = 0°$ entonces $(x, y) = (1, 0)$, luego $sen\,0° =$ 0 por tener altura 0 y

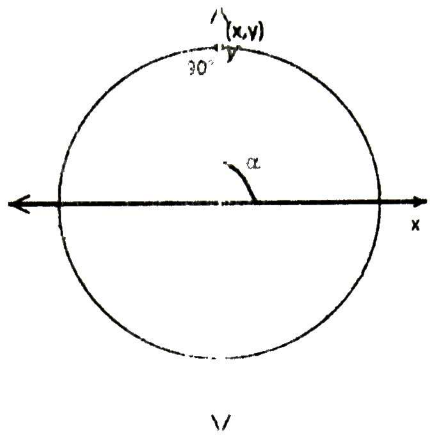
b) $\cos 0° =$ 1 porque la abscisa del punto es 1

La solución que se presentó es ejemplo de una solución correcta, en general los nueve equipos no tuvieron problemas para determinar el valor el seno y coseno en cada caso.

Ahora veamos un ejemplo de solución para el segundo problema.

- Solución del equipo 1

2. Observa la siguiente figura y completa lo que se te pide.



a) Si $\alpha = 90°$ entonces $(x,y) = (1\ ,1)$, luego $sen\ 90° =$ 1 por tener altura 1 y

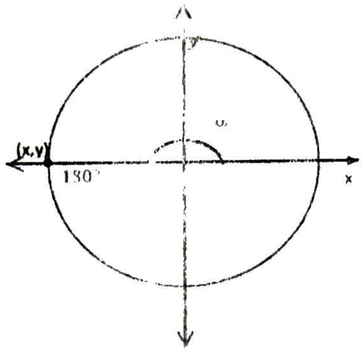
b) $\cos 90° =$ 1 porque la abscisa del punto es 1

Nuevamente el equipo 1 comete un error, éste al no identificar de manera correcta el valor del seno y coseno, reportan que la abscisa correspondiente a ese punto es $x = 1$, lo cual es incorrecto ya que es $x = 0$, los ocho restantes responden de manera correcta.

Por otro lado para el tercer y último problema todos los equipos responden de manera correcta, veamos un ejemplo.

Solución del equipo 8

3. Observa la siguiente figura y completa lo que se pide.



a) Si $\alpha = 180°$ entonces $(x,y) = (-1, 0)$, luego sen $180° =$ 0 por tener altura 0

b) $\cos 180° =$ −1 porque la abscisa del punto es −1

Por la forma en la que lo escribieron pareciera que la coordenada que el equipo reporta es $(1,0)$, sin embargo deducimos de la solución que dan para la abscisa en ese punto, a saber es $x = -1$, que efectivamente la coordenada que ellos escriben es $(-1,0)$, lo acual no se alcanza a distinguir bien por su escritura.

En general en esta actividad los estudiantes mostraron no tener problemas, excepto por el equipo 1, que mostró tener varios errores, esto por una mala lectura de la gráfica pero aún así son mínimos.

Vale la pena observar que aunque aparecen signos de la tangente en la clase introductoria, se omitieron preguntas sobre tangente en el guión de la actividad y desafortunadamente tuvo consecuencias como se verá mas adelante.

3.3.3. Ley de reflexión en superficies planas y reducción al caso bidimensional

Recordemos que para introducir la propiedad focal o sea la reflexión en espejos parabólicos se diseñaron dos Actividades referentes a la reflexión en superficies planas: la primera referente a una investigación de la literatura (Internet) por parte del estudiante sobre la ley de reflexión. La segunda actividad, relacionada con la ley de reflexión en rectas (corte) enfocada al cálculo de ángulos entre rectas y pendientes de rectas (Ápendice A).

En particular las Actividades solo se realizaron con el grupo auxiliar, sin embargo, el diseño se mejoró en base a los resultados obtenidos con miras a aplicarse con el grupo experimental, pero esto último ya no se realizó.

En esta sección abordaremos los resultados más sobresalientes, los cuales nos llevaron a realizar las mejoras de las actividades propuestas en la sección A.6 podremos observar las actividades mejoradas.

3.3.3.1. Resultados de la Actividad V. Ley de reflexión. Investigación de la literatura.

Para esta actividad como su nombre lo dice, se pidió a los estudiantes realizar una investigación sobre la Ley de reflexión, la cual se les propuso que la consultaran en internet o en un libro de física. Todos los equipos optaron por el internet.

La primera pregunta todos los equipos la respondieron, en cierta manera, correctamente, sus argumentos son diferentes pero expresan la idea principal. Veamos un par de ejemplos para la primera pregunta.

Solución del equipo 5

1. ¿Qué es *reflexión*?

Cuando la luz llega a un cuerpo plano o superficie plana y esta es reflejada

[Cuando la luz llega a un cuerpo plano o superficie plana y esta es reflejada.]

- Solución del equipo 6

1. ¿Qué es *reflexión*?

[illegible] imagen especular de la original.

[En geometría es el proceso de trasladar o copiar todos los puntos de una figura a otra posición equidistante de una recta denominada eje de simetría. El resultado final es una imagen especular de la original.]

Para la segunda pregunta, se observó que cinco de nueve equipos trajeron la información incorrecta, esto es, en lugar de reportar la ley de reflexión, trajeron la ley de refracción; como consecuencia de esto, respondieron de manera incorrecta las preguntas que se hacen al respecto. Veremos ejemplos de ambos equipos que sí realizaron la investigación de manera correcta y también los que la confundieron con la ley de refracción.

Solución del equipo 5

2. Enuncia la *Ley de Reflexión*

1)El rayo incidente, el rayo reflegado y la recta normal deven estar en el mismo plano, con respecto a la superficie de reflexión en el punto de incencidencia.
2) El angulo formado entre el rayo incendent y la recta es igual al ángulo que existe entre el rayo reflejado y la recta normal

[1) El rayo incidente, el rayo reflejado y la recta normal deben estar en el mismo plano, con respecto a la superficie de reflexión en el punto de incidencia.
2) El ángulo formado entre el rayo incidente y la recta [normal] es igual al ángulo que existe entre el rayo reflejado y la recta normal.]

Solución del equipo 6

2. Enuncia la *Ley de Reflexión*

[illegible]

[Cuando un rayo luminoso incide sobre la superficie de separación en dos medios transparentes, homogéneos e isótropos una parte del rayo incidente se refleja y se queda en el medio de dónde provino y la otra parte se transmite al otro medio.]

Como podemos observar la segunda pregunta es respondida de manera incorrecta, por el equipo 6 este equipo trajo de investigación la ley de refracción, esto dio pie a modificar el contenido de la actividad; en la nueva versión (ver apéndice A.6.2) se les da a los estudiantes el enunciado de la ley de reflexión, esto con el fin de orientarlos un poco y que partan de ese enunciado correcto para poder responder a las demás preguntas.

Una tercera pregunta constaba en describir los elementos involucrados en la ley de reflexión. Los equipos encuentran distintas soluciones, algunos de ellos confunden unas con otras. Uno pensaría que los cuatro equipos que enuncian de manera correcta la ley de reflexión, van a describir correctamente esta parte del problema, lo cierto es, que no todos lo hacen: un par de ellos no contestan y los demás escriben respuestas confusas como el resto de los cinco equipos. Veamos algunos ejemplos de solución.

Solución equipo 6

3. **Describe cada uno de los siguientes términos:**

a) Superficie reflectora

Es una superficie plana

b) *Rayo incidente* r_i

Es aquel rayo que entro a una medio formado un angulo de 90° con la Normal y se transforma al rayo reflejado.

c) *Rayo reflejado* r_r

En que parte se ejemplifica de refrexion desde un punto dado lo donde le toca al rayo inciden

d) *Punto de incidencia* P_i

Es el punto de reflexion de luz sobre algun reflectivo concavo o convexo

e) *Normal* N

Es todo aquello que se encuentra en un lado natural lo que se toma como norma o regla

f) *Ángulo de incidencia o ángulo incidente* θ_i

Es el punto de reflexion de luz sobre algun reflecto concavo o convejo

g) *Ángulo de reflexión o ángulo reflejado* θ_r

Es el cambio de direccion roja o una onda que cambia ver la superficie de separacion de 2 medios

- Solución del equipo 9

3. Describe cada uno de los siguientes términos:

a) Superficie reflectora

es convexa = externo y concavo = interno

b) Rayo incidente r_i

es aquel que llega a la superficie [illegible] de los [illegible] trazados

c) Rayo reflejado r_r

el rayo que pasa al otro lado

d) Punto de incidencia P_i

es el punto de reflexion de la luz sobre algun reflector concavo o convexo

e) Normal N

es la perpendicular a la superficie de separación de los medios trazada

f) Ángulo de incidencia o ángulo incidente θ_i

el angulo que se forma entre el incidente y la normal

g) Ángulo de reflexión o ángulo reflejado θ_r

el angulo formado por la normal y el rayo reflejado

Las dos respuestas que se muestran anteriormente son incorrectas. Posteriormente en una sesión de retroalimentación con el grupo se retoma el tema y se deja en claro cada término de la pregunta 3, como antecedente a la siguiente actividad (3.3.3.2).

Como consecuencia de la respuesta incorrecta al problema dos que dio el equipo 3, el problema cuatro lo responden de manera incorrecta; ven la forma de acomodar los elementos involucrados en la ley de refracción y los colocan de esa manera en el dibujo.

- Solución del equipo 3

4. Coloca en la siguiente figura el inciso correspondiente a los términos que definiste anteriormente.

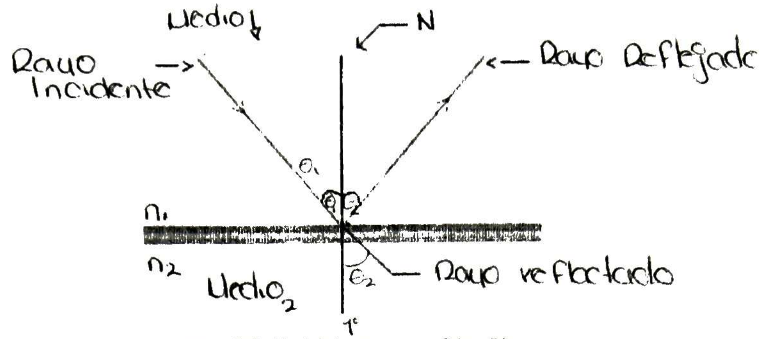


Figura 1. Reflexión de la luz en una superficie pulida

Solo un equipo, el número seis a pesar que respondió mal el problema tres, este problema lo contesta correctamente, colocan de manera acertada los elementos involucrados en la ley de reflexión.

Solución del equipo 6

4. Coloca en la siguiente figura el inciso correspondiente a los términos que definiste anteriormente.

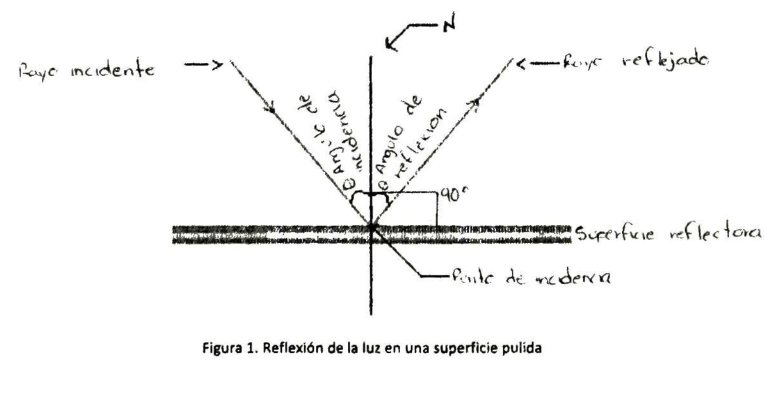
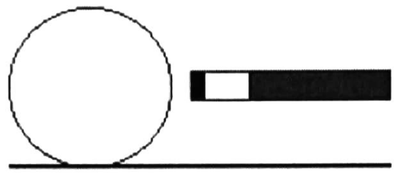


Figura 1. Reflexión de la luz en una superficie pulida

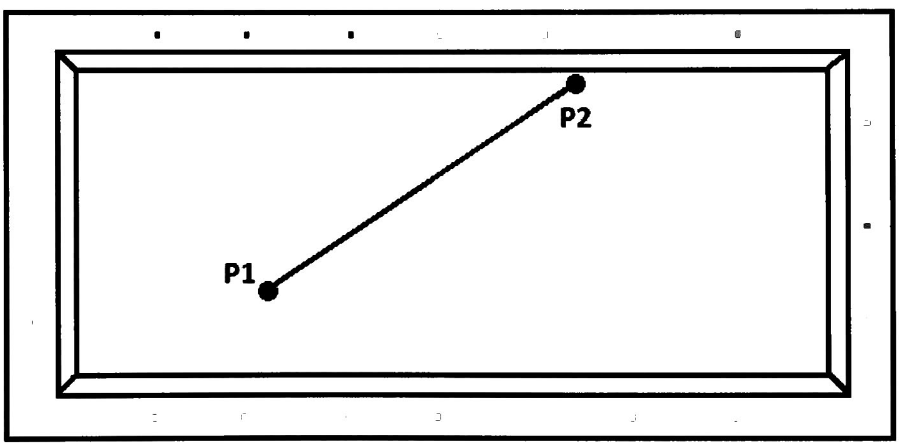
En la nueva versión de esta actividad cambió el enunciado del punto cuatro y el dibujo de manera que los estudiantes al leerlo solo colocaran los elementos que se les piden y que al observar fuera fácil para ellos identificarlos (ver apéndice A.6.2).

Como complemento a la actividad, en la nueva versión se le anexó información relevante acerca de una de las aplicaciones de esta ley, en particular como se aplica esa ley en el billar con la intención de ponerlos en un contexto real para ellos. El enunciado que se les planteó y que reproducimos, fue el siguiente:

Imagina que estas en el billar "La Buchaca" con tus amigos, en una jugada le pegas a la bola con el taco justo como se muestra en la figura, sin efecto alguno.



En la siguiente figura se ilustra una mesa de billar, la marca P1 indica la posición inicial de la bola amarilla, la marca P2 indica la segunda posición llegando a la banda. Ilustra la trayectoria posible de la bola amarilla, marcando la posición P3 (choque con la segunda banda) y P4. (Choque con la tercera banda). Para ilustrar lo que se te pide mira las trayectorias como si fuera un rayo incidente y un rayo reflejado, también marca dichos ángulos.



3.3.3.2. Resultados de la Actividad VI. Ángulos entre rectas

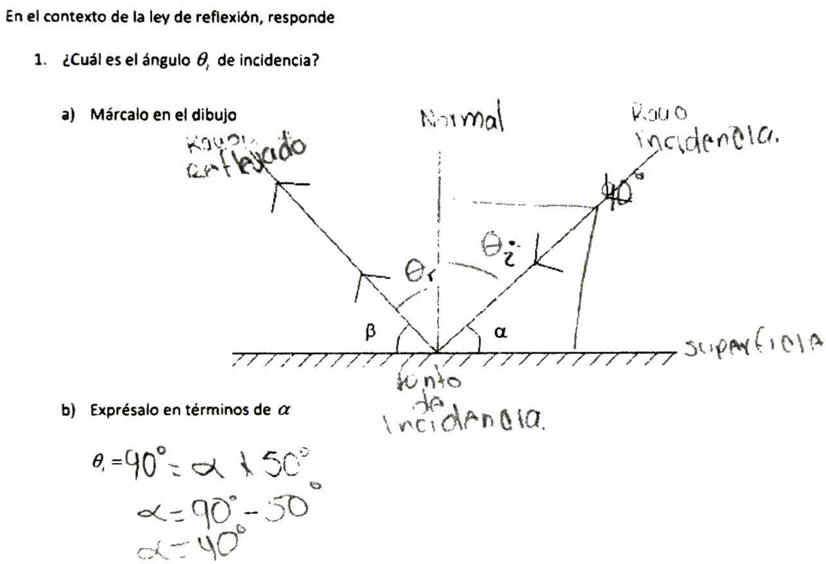
Esta actividad se divide en cuatro secciones, o sea, cuatro problemas referentes a la aplicación de la ley de reflexión. Cabe recalcar que antes de iniciar con esta actividad hubo retroalimentación en el grupo para tener el enunciado correcto de la ley de reflexión, el cual se enunció de la siguiente manera:

> El rayo incidente choca en un punto de incidencia de una superficie reflectora plana donde se refleja y surge el rayo reflejado. El ángulo de incidencia

θ_i (ángulo formado por el rayo incidente y la normal) es igual al ángulo de reflexión θ_r (ángulo formado por el rayo reflejado y la normal). El rayo incidente, la normal y el rayo reflejado se encuentran en un mismo plano.

El primer problema tiene como objetivo que los estudiantes sean capaces de identificar y marcar en un dibujo el ángulo de incidencia y el ángulo de reflexión correspondientes a la ley de reflexión. En particular nos interesaba que en este primer problema identificaran los ángulos complementarios a los ángulos de incidencia y de reflexión al igual que la forma en cómo encontrar las medidas de dichos ángulos. Veamos algunas soluciones para los puntos 1 y 2 de este primer problema, ya que son muy similares.

Solución del equipo 1


En el contexto de la ley de reflexión, responde

1. ¿Cuál es el ángulo θ_i de incidencia?

a) Márcalo en el dibujo

b) Exprésalo en términos de α

$\theta_i = 90° = \alpha + 50°$

$\alpha = 90° - 50°$

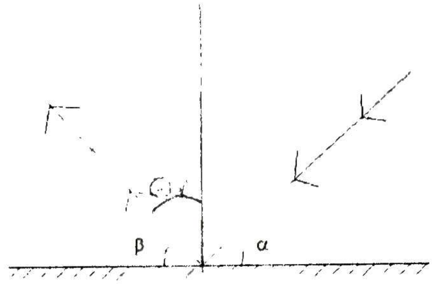
$\alpha = 40°$

La mayoría de los estudiantes logra identificar el ángulo de incidencia en el inciso a) (del punto uno) e incluso marca los demás componentes sin que se los hayamos pedido. En el inciso b) dos del punto uno es donde muestran dificultades, no logran expresar el ángulo de incidencia en términos de α; les es muy difícil el uso de las variables por lo cual prefieren darle un valor al ángulo de incidencia para encontrar el valor de α. Responden de manera similar el punto dos del problema 1. A continuación veamos un ejemplo de ese punto.

- Solución del equipo 9

2. ¿Cuál es el ángulo de reflexión θ_r?

   a) Márcalo en el dibujo



   b) Expresa θ_r en términos de β

   $\theta_r = 90^0 - \beta$

El punto dos es muy similar al uno, este equipo no tienen dificultades en expresar el ángulo de reflexión θ_r en términos de β. Este equipo tampoco tuvo problemas en el punto uno.

El punto tres del problema 1 tiene como objetivo que los estudiantes deduzcan a partir del manejo de una ecuación que los ángulos complementarios al ángulo de incidencia y de reflexión son también iguales. En el punto tres se les pide expresar la ley de reflexión en términos de estos ángulos complementarios α y β.

- Solución del equipo 3

3. Sabiendo que $\theta_i = \theta_r$ (el ángulo de incidencia es igual al ángulo de reflexión) compara α con β. ¿Cómo son estos dos ángulos?

$\alpha = \beta$ $\quad$ $90 - \alpha = 90 - \beta$

$\theta_r = \theta_i$ ✓ $\quad$ $\alpha = \cancel{90} - 90 - \beta$

$\alpha = \beta$

- Solución del equipo 4

3. Sabiendo que $\theta_i = \theta_r$ (el ángulo de incidencia es igual al ángulo de reflexión) compara α con β. ¿Cómo son estos dos ángulos?

$180^\circ = \beta + \theta_r + \theta_i + \alpha$ $\qquad \beta = 180^\circ - 90^\circ + \beta - 90^\circ + \alpha$

$\beta = 180^\circ - \theta_r + \theta_i - \alpha$

$\beta = 180^\circ - (90^\circ - \beta) - (90^\circ - \alpha) \cdot \alpha$ $\qquad \beta = \beta$

Este punto solo lo logra responder un equipo, el equipo 3, los demás equipos no llegan a la respuesta correcta, no observan la relación para estos ángulos, tienen problemas para establecer una relación entre los ángulos de incidencia, de reflexión y sus complementos por lo que no llegan a la solución que esperábamos. Como consecuencia de ello no saben cómo escribir la ley de reflexión en el punto cuatro, o sea, en función de los ángulos complementarios; escriben la ley de reflexión que se comentó en la retroalimentación que se realizó con la actividad anterior, ejemplo de ello es el equipo 3; solo el equipo 9 se aproxima mucho. Veamos las soluciones.

- Solución del equipo 3

4. ¿Cómo podrías enunciar la ley de reflexión en términos de los ángulos que hacen el rayo incidente y el de reflexión con el corte de la superficie? (esto es, en términos de los ángulos α y β)

cuando tenemos una superficie plana entra un Rayo de incidencia y se Refleja un Rayo reflejado, y la linea Normal con el Rayo de incidencia forman un angulo de incidencia θi y la normal con el Rayo Reflejado un angulo de Reflexion θr y ambos son iguales

- Solución del equipo 9

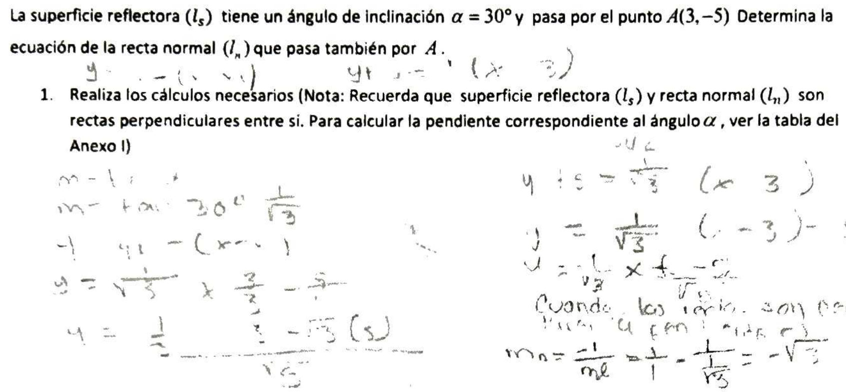
4. ¿Cómo podrías enunciar la ley de reflexión en términos de los ángulos que hacen el rayo incidente y el de reflexión con el corte de la superficie? (esto es, en términos de los ángulos α y β)

Cuando un rayo de incidencia toca a Una superficie, este en conjunto con la superficie forman un $\measuredangle \alpha$, y el rayo reflector con la superficie forma un $\measuredangle \beta$.

$\alpha = \beta$

La segunda parte de la actividad (el problema dos) tiene como objetivo calcular las pendientes y ecuaciones del rayo de incidencia y del rayo de reflexión, en algunos casos la ecuación de la normal y del corte de la superficie reflectora. Para calcular las pendientes correspondientes, se provee a los alumnos de una tabla anexa con las razones trigonométricas de los ángulos de 30°, 45° y 60° (ver en el apéndice A). Veamos ejemplos de las soluciones a cada uno de los puntos de este problema.

Solución del equipo 6


La superficie reflectora (l_s) tiene un ángulo de inclinación $\alpha = 30°$ y pasa por el punto $A(3,-5)$ Determina la ecuación de la recta normal (l_n) que pasa también por A.

1. Realiza los cálculos necesarios (Nota: Recuerda que superficie reflectora (l_s) y recta normal (l_n) son rectas perpendiculares entre sí. Para calcular la pendiente correspondiente al ángulo α, ver la tabla del Anexo I)

$m = \tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$y = \frac{1}{\sqrt{3}}(x-3) - 5$

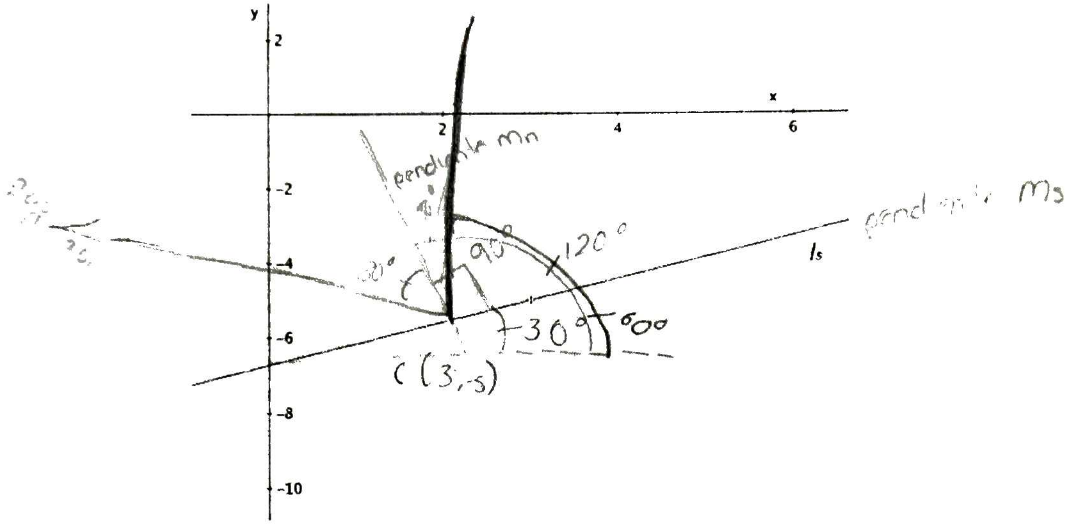
Cuando las rectas son perpendiculares

$m_n = \frac{-1}{m_l} = \frac{-1}{\frac{1}{\sqrt{3}}} = -\sqrt{3}$

Este equipo encuentra la ecuación del corte de la superficie reflectora, es decir la recta l_s y sólo la pendiente de la normal l_n, que denota como m_n pero no la ecuación de la recta normal, como se les pide en el problema.

En un segundo punto se les da una gráfica de la superficie reflectora, en la cual tienen que marcar el ángulo de inclinación de dicha superficie y dibujar la recta normal. Veamos la respuesta del equipo 5.

2. A continuación se muestra la grafica de la recta de la superficie reflectora l_s, marca con una línea punteada la horizontal (recta paralela al eje x que pasa por el punto A), marca el ángulo de inclinación α y dibuja la recta normal l_n



En este punto la mayoría de los equipos (7 de 9) bosquejan los trazos, muchos de ellos se ven encimados y amontonados, esto porque en los puntos siguientes, el tres y cuatro, les pedimos que regresen a marcar ángulos en la gráfica anterior. Para evitar esto, en la versión final y en el problema tres (tercera parte de la actividad, el problema tres) se agrega una gráfica más en el punto cuatro.

En el punto tres y cuatro de esta segunda parte se les pide medir los ángulos que se forman entre la superficie reflectora y la recta normal, la recta normal con la horizontal, el rayo incidente y el rayo reflejado con la horizontal; estos medidos de acuerdo al círculo trigonométrico. Veamos la solución de algunos equipos.

- Solución del equipo 8

3. Con los datos que te plantea el problema determina lo siguiente

   a) ¿Qué ángulo forma la recta l_n con la recta l_s?

   de 90°

   b) ¿Qué ángulo forma la recta normal con la horizontal? (Recuerda como se miden los ángulos de acuerdo al círculo trigonométrico)

   120°

   c) Marca todos ángulos en la gráfica

4. Un rayo incidente choca en el punto $A(3,-5)$ con un ángulo de incidencia $\theta_i = 30°$

   a) ¿Cuál es el ángulo de reflexión θ_r?

   $\theta_r =$ 30°

   b) Marca en la gráfica el rayo de incidencia, el ángulo de reflexión y los ángulos correspondientes a cada rayo.

   c) ¿Qué ángulo forma el rayo incidente con la horizontal?

   60°

   d) ¿Qué ángulo forma el rayo reflejado con la horizontal?

   30°

   e) ¿Calcula la pendiente del rayo reflejado y su ecuación que pasa por el punto A? (Para calcular la pendiente utiliza el circulo unitario y el Anexo)

   150°

   $\tan \omega = m$

   $\tan 150° = m$ 4

   $\frac{1}{\sqrt{3}} = m$ $A(3,-5)$ x_1, y_1

   $y - y_1 = m(x - x_1)$

   sustitución

   $y - (-5) = \frac{1}{\sqrt{3}}(x-3)$

En el punto tres todos los equipos respondieron correctamente, en el punto cuatro mostraron dificultades para medir el ángulo reflejado con la horizontal, ya que no lo hacen de acuerdo al círculo trigonométrico.

- Solución equipo 3

4. Un rayo incidente choca en el punto $A(3,-5)$ con un ángulo de incidencia $\theta_i = 30°$

a) ¿Cuál es el ángulo de reflexión θ_r ?

θ_r - 30°

b) Marca en la gráfica el rayo de incidencia, el ángulo de reflexión y los ángulos correspondientes a cada rayo.

c) ¿Qué ángulo forma el rayo incidente con la horizontal?

60°

d) ¿Qué ángulo forma el rayo reflejado con la horizontal?

30°

e) ¿Calcula la pendiente del rayo reflejado y su ecuación que pasa por el punto A ? (Para calcular la pendiente utiliza el circulo unitario y el Anexo)

150°

$\tan \alpha = m$

$\tan 150°$

$\frac{1}{\sqrt{3}} = m$ $A(3,-5)$

$y - y_1 = m(x - x_1)$

sustitución

$y - (-5) = \frac{1}{\sqrt{3}}(x-3)$

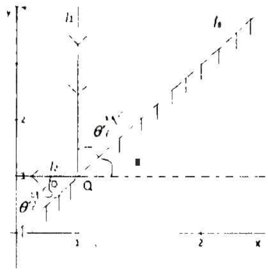
Un error sobresaliente en este último punteo es el inciso e) calculan la pendiente del rayo reflejado la cual es $tan150°$ la valuan como la $tan30°$ lo cual es correcto en magnitud pero les falta el signo negativo, ya que es una pendiente negativa. Esta es una consecuencia de no haber propuesto ejercicios sobre los signos de la tangente en la actvidad introductoria del círculo trigonométrico (ver A.6).

El tercer problema (tercera parte de la actividad) en base a lo que se obtuvo en la experiencia anterior fue modificado el orden los puntos. El punto uno del problema dos pasó a ser el punto tres en el problema tres; el punto dos pasó a ser el punto uno, el punto tres paso a ser el punto dos y el punto cuatro se quedo en el mismo número de orden.

En un cuarto problema (cuarta parte de la ctividad) se les plantea un problema muy particular, el rayo que incide en un punto de la superficie reflectora es paralelo al eje Y la superficie reflectora tiene pendiente 1, como consecuencia el rayo reflejado será paralelo al eje X, con una pendiente igual a cero. Veamos este ejemplo en particular ya que es muy interesante lo que responden los estudiantes.

- Solución del equipo 2

En la siguiente figura se muestra el perfil de una superficie reflectora donde incide un rayo de incidencia y un rayo reflejado. La superficie reflectora (l_s) tiene una pendiente $m = 1$, el rayo de luz vertical (l_1) en el punto $Q(1,1)$ el cual se refleja en un rayo (l_2) como se muestra en la figura.



Con los datos que se te dan responde las siguientes cuestiones.

a) ¿Podrías encontrar la ecuación de la superficie reflectora que pasa por Q y su ángulo de inclinación α con la horizontal? Realiza los cálculos necesarios.

$m = 1$ $y - y_1 = m(x - x_1)$

$1 = \tan \alpha$ $Q(1,1)$ $y - 1 = 1(x - 1)$ $y = 1x$

$\alpha = \tan^{-1}(1)$ $y - 1 = 1x - 1$ $y = x$

$\alpha = 45°$

b) ¿Podrías calcular el ángulo θ'_i del rayo que incide sobre la superficie reflectora? Calcúlalo una vez encontrado α

$\theta_i = 45°$

c) ¿Puedes determinar el ángulo θ'_r ?

θ_r $45°$

d) Sustituye los valores de los ángulos θ'_i y θ'_r en la figura anterior.

$\theta_i = 45$ y $\theta_r = 45°$

En los puntos anteriores del problema cuatro, los estudiantes realizan una serie de cálculos, ésto para encontrar el valor de los ángulos complementarios al ángulo incidente y reflejado. Pocos de los equipos presentaron problemas en el cálculo de la ecuación de la superficie referentes al manejo del algebra.

Solución del equipo 6

e) ¿Qué puedes decir acerca de la pendiente del rayo reflejado?

(Que no tiene pendiente ni inclinacion)
La pendiente vale 0 cero

[Que no tiene pendiente, ni inclinación. La pendiente vale cero.]

Solución del equipo 2

e) ¿Qué puedes decir acerca de la pendiente del rayo reflejado?

Que no tiene pendiente ni inclinación

[Que no tiene pendiente ni inclinación.]

Solución del equipo 7

e) ¿Qué puedes decir acerca de la pendiente del rayo reflejado?

Que una superficie plana
no tiene pendiente.

[Que una superficie plana no tiene pendiente.]

En el problema planteado podemos observar que la pendiente del rayo reflejado es horizontal, la mayoría de los estudiantes (como el equipo 2) responden al último punto del problema que la recta l_2 no tiene pendiente ni inclinación, otros que su pendiente vale cero y otros equipos como el 6 reporta las dos opciones. Otra solución observada es la del equipo 7 interpretamos que dicen "superficie plana" en vez de horizontal y que esta no tiene pendiente. Es interesante ver como los estudiantes en lugar de decir que la pendiente es igual a cero dicen que no existe.

3.3.4. Productos notables: desarrollo algebraico del cuadrado de un binomio.

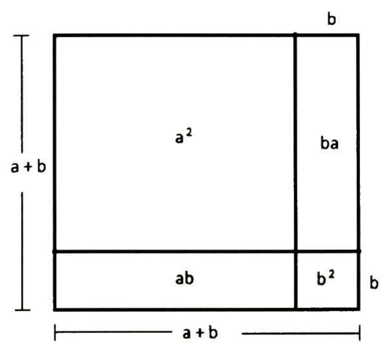
En la siguiente actividad se plantea a los estudiantes el desarrollo algebraico del cuadrado de un binomio por medio de la representación geométrica de las potencias $(a+b)^2$y $(x+h)^2$, para darle significado al desarrollo algebraico del cuadrado del binomio y también la utilización de cálculos numéricos (calculadora) para "visualizar" desarrollos aritmeticos del cuadrado de un binomio, analizando el comportamiento relativo de potencias de números pequeños. Véase el guión de dicha actividad en el Apéndice A.8.

Las actividades que se plantean en esta sección se probaron directamente con el grupo experimental sin pasar por el grupo auxiliar. Esto no se logró por falta de tiempo, esta actividad se aplicó en las últimas semanas del semestre en el cual los estudiantes ya no estaban interesados en seguir realizando actividades, es por eso, que se tomó la decisión de aplicar directamente con el grupo experimental. A continuación veremos con mucho más detalle las observaciones y resultados obtenidos.

3.3.4.1. Resultados de la Actividad VII. Representación geométrica de las potencias $(a+b)^2$y $(x+h)^2$

La actividad comienza explicando a los estudiantes la forma geométrica del desarrollo de la potencia $(a+b)^2$de la siguiente manera:

> En la siguiente figura se puede observar un gran cuadrado formado por dos cuadrados, el grande de lado a (cuya área es a^2) y el pequeño de lado b (cuya área es b^2), además de dos rectángulos de lado a y b (cada uno con área ab) como se muestra en las siguiente figura.



Por lo que el área del cuadrilátero $a+b$, a saber $(a+b)^2$. es igual a la suma de las áreas de las figuras descritas anteriormente. Luego al sumar las áreas que conforman el cuadrado

$$A = (a+b)^2$$

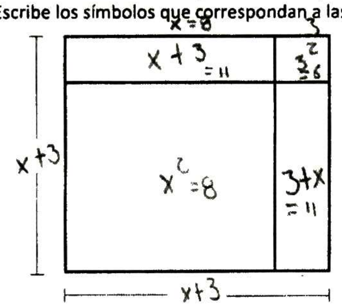
$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + ab + ba$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ba + b^2$$

Léase: el cuadrado de la suma es igual al cuadrado del primer término, más el doble producto del primero por el segundo más el cuadrado del segundo.

- Solución del equipo 2

1. Dada la siguiente figura un cuadrado de lado $x+3$, donde $x>3$, el cual ha sido descompuesto en cuadrados y rectángulos. Escribe los símbolos que correspondan a las longitudes y las áreas en la figura



Interpreta la figura que has completado desarrollando a $(x+3)^2$ en una fórmula.

$(x+3)^2 = x^2 + 3^2 + x3 + 3x$

$(x+3)^2 = x^2 + 6 + 6x$

$(x+3)^2 = 8x + 6$

$2x + 6 - 6 = 8x$

$2x = 8x$

$2x$
$8x$
$x=4$

$x^2=8$

Cabe mencionar que esta actividad resultó muy dificil para los estudiantes. Haremos observaciones al respecto.

Al pasar del cuadrado $a+b$ al que se le deja al estudiante con $x+3$ no se previeron varias cosas:

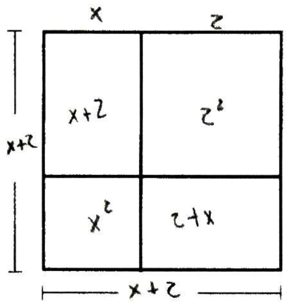
> Las áreas de los rectángulos en el problema de muestra (el cuadrado de $a+b$) resultan ab (base a y altura b) y ba (base b y altura a) de manera natural, mientras que en el problema 1 que se les plantea dichas áreas van a resultar literalmente hablando, $3x$ y $x3$. Pero esta última notación para describir a $x \cdot 3$ (x por 3)

no se usa porque se presta a confusión, misma que tuvo el equipo 2 (véase). Así leyeron $x3$ correctamente como $3x$, pero también leyeron x^2como $x2$ (x por 2) que al sumar con $6x$ les da $8x$. Profundizaremos aún más en el siguiente punto.

- Al utilizar la x en la figura a completar que se deja de ejercicio (cuadrado de lado $x+3$) nuestro propósito era utilizar x como variable (pensando en la notación funcional) para luego considerar $x+h$ de acuerdo al plan original. En cambio los estudiantes vieron la x como incógnita, así que no se concentraron en el desarrollo de $(x+3)^2 = x^2 + 6x + 9$, sino que tenían que despejar la x como si fuera la incógnita de una ecuación. Lo hacen haciendo trampa: x^2 se convierte en $x \cdot 2$ (x por 2) que es $2x$. Tienen que despejar x porque buscan valores numéricos para las áreas.

Este equipo "resuelve" de igual modo los problemas 2 y 3. A continuación se pueden observar dichas respuestas.

2. Dada la siguiente figura, a saber, un cuadrado de lado $x+2$, donde $x<2$, descomponlo en cuadrados y rectángulos correspondientes. Escribe los símbolos para las longitudes y áreas en cada caso.



Interpreta la figura que has completado desarrollando a $(x+2)^2$ en una fórmula.

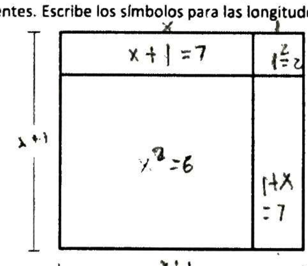
$(x+2)^2 = x^2 + z^2 + xz + zx$

$x+4 = x2 + 4 + 4x$ $\frac{3x}{4x}$ $x = 1.3$

$3x\ 4 - 4 = +4x$

$3x = 4x$

3. Dada la siguiente figura, a saber, un cuadrado de lado $x+1$, donde $x>1$, descomponlo en cuadrados y rectángulos correspondientes. Escribe los símbolos para las longitudes y áreas en cada caso.



Traduciendo la figura que has dibujado expresa $(x+1)^2$ en fórmula.

$x^2 = 6$

$(x+1)^2 = x^2 + 1 + x1 + 1x$

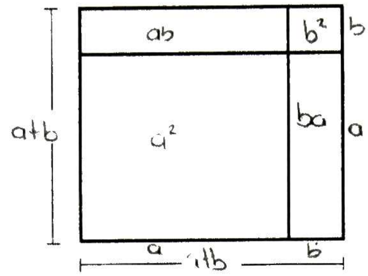
$2x + x = x^2 + 1 + 2x$ $2x + = x$ $x = 3$

$2x + 2 - 1 = 2x + 2x$

$2x + 1 = 4x$

Solución del equipo 4.

1. Dada la siguiente figura un cuadrado de lado $x+3$, donde $x>3$, el cual ha sido descompuesto en cuadrados y rectángulos. Escribe los símbolos que correspondan a las longitudes y las áreas en la figura



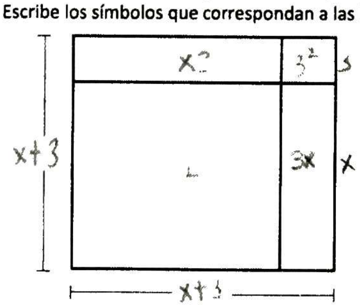
Interpreta la figura que has completado desarrollando a $(x+3)^2$ en una fórmula.

$$(x+3)^2 = (a+b)^2$$
$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + ab + ba$$
$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Este equipo no pudo resolver el ejercicio, lo que hacen es volver a aplicar lo que se les explicó al principio de la actividad. Logran identificar las longitudes a y b satisfactoriamente pero no logran hacer la conversión en los términos que se les pide, en este caso, $a = x$ y $b = 3$. Y responden de la misma manera los problemas 2 y 3, que son muy similares alproblema 1 (ver Apéndice B).

Solución del equipo 3

1. Dada la siguiente figura un cuadrado de lado $x+3$, donde $x>3$, el cual ha sido descompuesto en cuadrados y rectángulos. Escribe los símbolos que correspondan a las longitudes y las áreas en la figura



Interpreta la figura que has completado desarrollando a $(x+3)^2$ en una fórmula.

$$(x+3)^2 = x^2 + 3^2 + x3 + 3x$$
$$(x+3)^2 = x^2 + 2x3 + 3^2$$

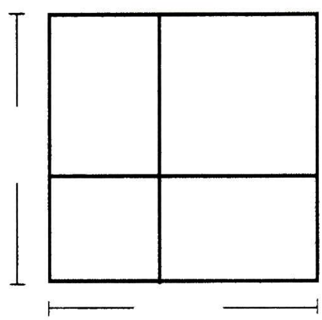
El equipo 3 responde a medias el ejercicio número 1. Observemos que el primer paso lo hace de manera correcta excepto por la notación $x3$; en el segundo paso agrupa correctamente los términos semejantes pero ya no muestran la secuencia de ese cálculo, se quedan en el segundo paso.

Es una lástima que este equipo no terminara la actividad ya que es el único que mostró dos pasos correctos, a comparación de los demás equipos que responden a lo mas uno. Este equipo no muestra solución para los problemas 2 y 3.

- Solución del equipo 8.

Presentamos la solución al problema número 2, ya que no mostraron la solución para el problema número 1.

2. Dada la siguiente figura, a saber, un cuadrado de lado $x+2$, donde $x<2$, descomponlo en cuadrados y rectángulos correspondientes. Escribe los símbolos para las longitudes y áreas en cada caso.



Interpreta la figura que has completado desarrollando a $(x+2)^2$ en una fórmula.

$(x+2)^2 = x^2+4$

Observamos que el equipo 8 "linealiza" la potencia $(x+2)^2$ elevando cada término al cuadrado. Contestando de manera incorrecta y del mismo modo de la misma manera el ejercicio 3 (ver Apéndice B).

A partir del punto 4 se introduce el uso de la calculadora mostrando desarrollos aritméticos de cuadrados de sumas.

En la parte introductoria del problema 4 se presenta a los estudiantes una serie de potencias de números decimales, se les pide que comprueben los resultados con la calculadora y que calculen el faltante. Para este problema, ocho de los nueve equipos respondieron de manera correcta, el restante simplemente no contestó.

Solución para el equipo 3

4. Comprueba o realiza las operaciones para elevar al cuadrado los siguientes números (es decir, multiplicar a dichos números por sí mismos):

$(1.001)^2 = 1.002001$

$(2.001)^2 = 4.004001$

$(1.003)^2 = 1.006009$

$(1.004)^2 = 1.008016$

$(2.002)^2 = 4.$ [illegible]

$(2.003)^2 = 4.012009$

En la respuesta del equipo 3 observamos que después de corroborar las respuestas correctas palomea los resultados.

Por otro lado en el problema 4 inciso a) se plantea a los estudiantes observar un patrón que explique los resultados anteriores.

- Solución del equipo 9.

a) Observe detenidamente los resultados anteriores ¿Puedes encontrar algún patrón que explique los resultados? Tal vez te ayude ver lo anterior en la siguiente forma:

$(1.001)^2 = (1+.001)^2 = 1.002001 = 1+.002+.000001$

$(2.001)^2 = (2+.001)^2 = 4+.004+.000001 = 4.004001$

$(1.003)^2 = (1+.003)^2 = 1+.006+.000009 = 1.006009$

$(1.004)^2 = (1+.004)^2 = 1+.008+.000016 = 1.008016$

$(2.002)^2 = (2+.003)^2 = 4+.008+.000004 = 4.008004$

$(2.003)^2 = (2+.003)^2 = 4+0.12+.000009 = 40.12009$

Escribe tus observaciones:

[illegible]

Cabe resaltar que al escribir esta actividad, especialmente en esta sección se cometieron dos errores. El primero se observa en la potencia número 5, se escribió $(2.002)^2 = (2+.003)^2$ lo cual debería ser $(2.002)^2 = (2+.002)^2$ El segundo error lo observamos en la potencia número 6 que se escribió $(2.003)^2 = (2+.003)^2 = 40.12009$; en esta última igualdad el punto decimal se recorrió un lugar a la izquierda, el resultado correcto es $(2.003)^2 = (2+.003)^2 = 4.012009$.

En el caso del primer error, este confunde a la mayoría de los estudiantes ya que no saben que potencia calcular. En el caso del segundo error algunos se dieron cuenta que no obtenían el mismo resultado, incluso lo comentan como el equipo 9. Se observa que para la última potencia incluso pintan el punto decimal en la posición correcta y argumentan que no obtuvieron el resultado correcto.

Veamos ahora la solución del equipo 3.

a) **Observe detenidamente los resultados anteriores ¿Puedes encontrar algún patrón que explique los resultados? Tal vez te ayude ver lo anterior en la siguiente forma:**

$(1.001)^2 = (1+.001)^2 = 1.002001 = 1 + .002 + .000001$

$(2.001)^2 = (2+.001)^2 = 4 + .004 + .000001 = 4.004001$

$(1.003)^2 = (1+.003)^2 = 1 + .006 + .000009 = 1.006009$

$(1.004)^2 = (1+.004)^2 = 1 + .008 + .000016 = 1.008016$

$(2.002)^2 = (2+.003)^2 = 4 + .012 + .000009 = 4.012009$

$(2.003)^2 = (2+.003)^2 = 40 + .12 + .00009 = 40.12009$

Escribe tus observaciones:

Que si te hace falta aunque sea un cero o un punto

el resultado sale diferente

El equipo 3, como todos los demás equipos (exceptuando el equipo 9) en la quinta potencia, optan por tomar la expresión $(2+.003)^2$ (en donde está el error) para desarrollar dicha potencia. Sólo el equipo 9 se percata que el resultado está mal (corre el punto decimal de la expresión dada) El equipo forza el desarrollo para ajustarlo al resultado erróneo 40.12009.

Por otro lado, en el ejercicio 4 inciso b), se plantea a los estudiantes elevar al cuadrado distintos decimales con ayuda de la calculadora, para después compararlas con el cálculo exacto de esas potencias a mano y explicar que es lo que se observa. Se esperaba, en algunos casos que no coincidieran, dependiendo de la precision de la calculadora (especificamente, cuántas cifras maneja).

Solución del equipo 7:

b) **Ahora realiza la operación de elevar al cuadrado utilizando la calculadora y también a "mano", para los siguientes números.**

$(1.0003)^2$ = 1,00060009 = 1.00060009

con calculadora *a mano*

$(1.0002)^2$ 1.00040004 - 1.00040004

con calculadora *a mano*

$(1.00003)^2$ = 1.00006 = 1.0000600009

con calculadora *a mano*

$(1.00002)^2$ = 1.0000400004 = 1.0000400004

con calculadora *a mano*

¿Notas diferencias en algunos de los casos entre los resultados de la calculadora y a "mano"? ¿En qué casos?

no en nada hay diferencia

Esta respuesta la encontramos en dos equipos el 7 y 9, observamos que no tuvieron problema para realizar los cálculos con ayuda de la calculadora. Cuando realizan los cálculos a mano observamos que llegan al mismo resultado pero no nos queda claro si en realidad lo calcularon, se ven algunos cálculos borrados pero eso es sólo para la primera potencia, para los demás ya no aparecen ni borrados ni escritos en la hoja.

En la parte de evaluar al cuadrado $(1.00003)^2$ queriendo que lo vieran como el cuadrado de un binomio se cometieron errores. Se subestimó en el diseño de la actividad la capacidad de las calculadoras que utilizaron. Concretamente el gran número de cifras significativas. Se pensó que $(1.00003)^2 = 1.0000600009$ (exacto) no iba a poder verse el 9 en su calculadora, sino el valor redondeado 1.00006001, pensando que la calculadora manejaría a lo sumo 10 dígitos (y no 11, como ocurrió)

Respecto a lo anterior dos equipos el 3 y el 8 reportaron lo que esperábamos. Que al realizar la potencia anterior el 9 no se ve, sino que como se dijo la calculadora redondea el resultado.

Solución del equipo 8.

b) **Ahora realiza la operación de elevar al cuadrado utilizando la calculadora y también a "mano", para los siguientes números.**

$(1.0003)^2$ = 1.00060009   10006 0009
con calculadora   *a mano*

$(1.0002)^2$ = 1.004004 = 1.004004
con calculadora   *a mano*

$(1.00003)^2$ = 1.000060001   1.000060001
con calculadora   *a mano*

$(1.00002)^2$ = 1.00004   1.00004
con calculadora   *a mano*

¿Notas diferencias en algunos de los casos entre los resultados de la calculadora y a "mano"? ¿En qué casos?

No ya que el resultado siempre ~~es~~ el mismo

En este equipo también es dudoso que hubieran realizado los cálculos a mano, ya que no los muestran y afirman que les da lo mismo cuando no es cierto (la calculadora redondea).

Solución del equipo 3.

b) **Ahora realiza la operación de elevar al cuadrado utilizando la calculadora y también a "mano", para los siguientes números.**

$(1.0003)^2$ = 1.[illegible]6[illegible] = 2.0009
con calculadora   *a mano*

$(1.0002)^2$ = [illegible] = 2.0004
con calculadora   *a mano*

$(1.00003)^2$ = [illegible] - 2.[illegible]9
con calculadora   *a mano*

$(1.00002)^2$ = [illegible]4   2.[illegible]04
con calculadora   *a mano*

¿Notas diferencias en algunos de los casos entre los resultados de la calculadora y a "mano"? ¿En qué casos?

Si, que a mano solo multiplicas y no tomas en cuenta los paréntesis y la calculadora si y salen diferentes los resultados de mano a calculadora

Observando los cálculos que este equipo debió realizar a mano (exacto), resultó que aparentemente no saben hacer estos cálculos a mano, pues multiplican por 2 la parte entera, en vez de elevarla al cuadrado y elevan el dígito no cero en la parte decimal al cuadrado, dejando el resultado en la misma posición.

Veamos otro ejemplo de solución, este con el fin de observar que en general los estudiantes no saben realizar una multiplicación a mano de números decimales y al parecer tampoco con una calculadora.

Solución del equipo 6.

b) Ahora realiza la operación de elevar al cuadrado utilizando la calculadora y también a "mano", para los siguientes números.

$(1.0003)^2$ = ______ = ______
con calculadora *a mano*

$(1.0002)^2$ = 2.0004 = 40.00100016
con calculadora *a mano*

$(1.00003)^2$ = [illegible] = 4.00002400000
con calculadora *a mano*

$(1.00002)^2$ 2.00004 = 40.0001600016
con calculadora *a mano*

Con la calculadora "eleva" al cuadrado multiplicando el número por 2. Sus cálculos a mano, simplemente no se entienden.

Por último, se plantea a los estudiantes otra pregunta, la 4 inciso c), este con el fin de que observen que la calculadora desprecia segundas potencias de números pequños cuando además aparecen números no pequeños.

Solución del equipo 7.

c) Utilizando calculadora realiza las siguientes sumas.

1 + .00001 = 1.00001

1 + $(.00001)^2$ = 1.0000000001

Escribe una reflexión final acerca de tus resultados obtenidos y las comparaciones hechas:

que solo aumentan los ceros al multiplicarse al cuadrado

Una vez más subestimamos la capacidad de la calculadora. En la segunda operación ($1 + (0.00001)^2$) esperabamos que la calculadora redondeara el resultado, lo cual no sucedió (la calculadora maneja 11 cifras).

Por contraste, veamos el ejemplo de solución del equipo 3, el cual no escriben ninguna reflexión sobre sus resultados obtenidos.

c) Utilizando calculadora realiza las siguientes sumas.

$1 + .00001 =$ 1.[illegible]

$1 + (.00001)^2 -$ 1

Escribe una reflexión final acerca de tus resultados obtenidos y las comparaciones hechas:

Solución del equipo 6.

c) Utilizando calculadora realiza las siguientes sumas.

$1 + .00001 =$ 1.000 1

$1 + (.00001)^2 =$ 1,000 2

Escribe una reflexión final acerca de tus resultados obtenidos y las comparaciones hechas:

[illegible]

Se observa que este equipo no realizó bien los cálculos con la calculadora, se "come" un cero en la primera operación y aparentemente calcula el cuadrado del decimal multiplicándolo por 2, como se puede observar en el resultado anterior. Para ver en resumen los resultados obtenidos véase el apéndice B.

Resumiendo la experiencia, la parte negativa son algunos errores numéricos en los enunciados de nuestra parte al haber subestimado la capacidad de las calculadoras que emplearon los estudiantes y el haber sobrestimado la preparación de los estudiantes al emplear la calculadora o realizar cálculos a mano.

La parte positiva es la información acerca de las deficiencias o limitaciones aritméticas que muestran los estudiantes tanto en el significado de elevar al cuadrado, como de realizar cálculos a mano. Desde luego, el propósito original de la experiencia quedó anulado.

Vale la pena comentar que esta actividad al no pasar por el filtro de probarlas con el grupo auxiliar, como se hizo con las actividades I, II, III y IV, no nos ayudo para prever muchas de las dificultades antes mencionadas.

Capítulo 4

Conclusiones

Recordemos que el objetivo principal de esta tesis era introducir ideas de cálculo diferencial en un curso de Geometría Analítica; para lograrlo queríamos generalizar la ley de reflexión para superficies planas, a la de la reflexión en un espejo parabólico, para lo cual necesitábamos ver a la parábola como una función conjuntamente con una serie de prerrequisitos conceptuales para llegar a este fin, los cuales se exponen en la subsección 2.2.

Las actividades más importantes y de mayor éxito fueron las diseñadas para el concepto de función como relación entre dos variables: Actividad I, Actividad II, Actividad III y Actividad IV. Antes de comenzar con las conclusiones referentes a ellas, es conveniente comentar que el guión de estas actividades se fue diseñando mientras el curso de geometría analítica avanzaba; también es cierto que fueron estas actividades a las que se les dedicó más tiempo en su diseño y aplicación. Recordemos que estas actividades primero se aplicaron con el grupo auxiliar y el guión ya mejorado se aplicó después al grupo experimental.

Estas actividades resultaron interesantes para los estudiantes ya que se les planteó en un contexto que resultaba real para ellos y con el cual se sentían identificados. Todas las actividades necesitaban una pequeña investigación por su parte. En particular el grupo auxiliar expresó espontáneamente que les gustó trabajar en equipo con ese tipo de actividades.

Respecto a la Actividad I, "Llamadas telefónicas" (apéndice A.1), el 100 % de los equipos contestaron correctamente la pregunta uno. En la pregunta dos (referente a las variables involucradas y la variable independiente) el 89 % de los equipos respondieron correctamente ambos incisos, lograron identificar la variable independiente (tiempo) y la variable dependiente (costo). Entonces entre más tiempo se hable más se cobrará por la llamada. El único equipo que respondió mal esta pregunta fue el equipo 8; responden que el tiempo se basa en el costo, no logran describir la relación existente entre el costo y tiempo de la llamada (aunque las identifican como una variable), seguramente porque no pudieron indentificar cuál es la variable independiente. Esto dio pie para sacar a relucir que tradicionalmente la variable independiente es el tiempo y que siempre se marca en el eje horizontal.

La Actividad II, "Viaje a la universidad" (apéndice A.2.2) que se refiere a la descripción gráfica de un movimiento, fue la más elaborada de las cuatro actividades relacionadas al concepto de función. En esta actividad se abordan varios registros de representación y sus conversiones entre ellos: verbal, gráfico, algebraico y tabular.

En el punto uno de la actividad, el 78 % de los equipos (7 de 9) respondieron de manera correcta, el porcentaje restante (2 equipos), que respondieron mal, contestan que la gráfica 3 corresponde a Brenda y la gráfica 4 a Carlos cuando es al contrario; al parecer hubo confusión en cuanto a su respuesta. Respecto a la interpretación del movimiento el 100 % de los equipos entienden en alguna medida el movimiento que lleva Alicia, al mencionar que tal vez viajó en camión y hace paradas.

En el segundo punto de la actividad, el 78 % de los equipos observan que el recorrido de Antonio es diferente en dos intervalos de tiempo; con ayuda de las tablas propuestas son capaces de darse cuenta que hay una velocidad constante que cambia 25 min después de iniciado su recorrido. El 22 % restante muestran dificultades para llenar las tablas que se les presentan, ya que no hacen un buen uso del apoyo aritmético para leer la gráfica y completar dichas tablas.

En el punto tres logran determinar que la distancia que recorre Antonio depende del tiempo, pero también observan otra variable involucrada: la velocidad. Al menos 56 % de los equipos hacen alusión a la velocidad.

En el cuarto punto se hace más evidente que hay una velocidad involucrada en el movimiento de Antonio y que aquella es constante en los primeros 25 minutos de recorrido; el 67 % de los equipos la describen de manera explícita, el 33 % restante no lo describe en su respuesta pero intuitivamente lo sabe; esto se observa cuando se les pide calcular el valor de la velocidad. El 100 % de los equipos logran realizar el cálculo de la velocidad aplicando la fórmula $v = \frac{d}{t}$, la cual intuimos la aprendieron en su curso de Física.

En el punto cinco, el 78 % de los equipos logran ver que la pendiente de la recta del recorrido de Antonio y la velocidad que lleva en la primera parte del recorrido son iguales, con ello se proponía la introducción de una noción del Cálculo. El 22 % restante no logra calcular satisfactoriamente la pendiente, tienen errores al elegir un par de puntos sobre la recta, no hacen una buena lectura aritmética para identificar una pareja de puntos coordenados lo que ocasiona un cálculo erróneo de la pendiente.

En esta parte también podemos observar que el 89 % de los equipos son capaces de convertir la velocidad que obtuvieron con unidades en $\frac{km}{min}$ a $\frac{km}{hr}$ que como ya habíamos comentado seguramente lo aprendieron en cursos de Física; el 11 % restante trata de hacer la conversión con una regla de tres mal planteada y mal realizada.

En el sexto y último punto, el 89 % de los estudiantes logran responder el problema, haciendo una conversión del registro verbal al gráfico, logrando exitosamente graficar el recorrido de Carlos que realizó en motocicleta. El 11 % sigue mostrando dificultad para convertir las unidades de la velocidad de $\frac{km}{hr}$ a $\frac{km}{min}$, aunque al final dibujan de manera correcta la gráfica del recorrido de Carlos.

Por último compárese la primera versión de esta actividad (apéndice A.2.1) con la actual que hemos venido comentando (apéndice A.2.2).

Respecto a las conclusiones de la Actividad III, "Un simulacro para desalojar la escuela en caso de temblor" (apéndice A.3), podemos decir que fue exitosa en el sentido de que los nueve equipos se apoyaron en una tabla para dibujar la gráfica del desalojo de estudiantes, ya que ellos la construyeron a partir de la fórmula sin que nosotros se lo pidiéramos (conversión espontánea). El 89 % de los equipos se apoyaron en la lectura de la gráfica y de la tabla que construyeron para determinar cuántos "alumnos" había dentro de la escuela al inicio del simulacro, a los 30 y 55 segundos, al igual que encontrar el tiempo en segundos cuando quedaban 325 alumnos dentro de la escuela; el 11 % restante responde de manera incorrecta. En particular nos llamó la atención el método del equipo 9, el cual para encontrar la solución recurre a la interpolación a partir de la lectura de la gráfica. Es decir, no se utiliza la ecuación de la recta como relación funcional de modo sistemático: interpolan para hallar el tiempo en que quedaban 325 alumnos sin desalojar en vez de sustituir $y = 325$ y despejar x (tiempo). Desde luego, esto último presupone un buen manejo algebraico. El 100 % de los equipos determinan que las variables que se involucran en el problema son el tiempo y los alumnos desalojados.

En la Actividad IV, "Temperaturas en grados Fahrenheit y grados Centígrados" (apéndice A.4) se observaron algunas dificultades, en primer lugar, el problema que se plantea a los estudiantes es de tipo inverso a lo que se venía planteando. Ahora, a partir de una tabla tenían que encontrar la fórmula de la recta que les permitiera convertir los grados Fahrenheit a grados Centígrados y aparentemente se pierden al estar haciendo cálculos. En los pasos que deben seguir para encontrar la fórmula se encuentran con números fraccionarios los cuales tienden a convertir a su forma decimal aproximada para su manejo, lo que ocasiona que no puedan llegar a la fórmula pedida que requiere fracciones. En general los equipos respondieron casi correctamente pero los errores que presentan no los dejan concluir de manera satisfactoria la actividad con la fórmula pedida. Más adelante abundaremos en la deficiencia que los estudiantes presentan en el manejo de número fraccionarios.

Respecto a la Actividad Introductoria para el Círculo Ttrigonométrico (apéndice A.5), en general los equipos no mostraron tener dificultades; salvo el equipo 1 que se equivocó en un par de problemas. Más bien la deficiencia se observó en el diseño de la actividad: muy tarde nos dimos cuenta que se omitieron preguntas sobre la tangente trigonométrica en el guión, lo cual tuvo consecuencias en la Actividad VI donde necesitamos el cálculo de la tangente para determinar la pendiente de una recta.

En las Actividades V (versión preliminar) y VI referentes a la reflexión en superficies planas (apéndices A.6.1 y A.7), se observaron algunas dificultades. Se observaron problemas para la lectura de ángulos en un plano, en particular, cuando se les pide determinar la medida de los ángulos complementarios al ángulo de incidencia y de reflexión; la mayoría de los estudiantes no sabe cómo se leen los ángulos de acuerdo al círculo trigonométrico. Otro problema que se observó es que los equipos tuvieron problemas para el cálculo de ecuaciones de rectas, principalmente para encontrar la pendiente de la recta, esta leída como la tangente de un ángulo medido respecto a la horizontal; error que pudo evitarse si se hubieran aplicado preguntas sobre el cálculo de tangentes en la Actividad Introductoria del Círculo Trigonométrico. De la misma manera el problema que ya se había mencionado anteriormente: a los estudiantes nos les gusta manejar números fraccionarios, tienden a convertirlos a su forma decimal, lo cual acarrea problemas a la hora de determinar la ecuación de la recta. Esta es una conjetura que más adelante trataremos de validar.

Un resultado interesante que observamos dentro de estas actividades es que una recta horizontal, a la cual le llaman una "superficie plana" (en el contexto de reflexiones especulares) dicen que no tiene inclinación y por lo tanto no tiene pendiente. Muchos estudiantes en lugar de decir que la pendiente es igual a cero, dicen que no existe. Esto se dio en el 87 % de los equipos, sólo un equipo (13 %) menciona que esta recta horizontal, no tiene pendiente ni inclinación y que la pendiente vale cero.

Finalmente hablaremos de la Actividad VII (apéndice A.8) cuya primera parte se refiere a la representación geométrica de las potencias $(a+b)^2$y $(x+h)^2$, se observaron algunos problemas al utilizar la x en la figura a completar, ejercicio uno (cuadrado de lado $x+3$); nuestro propósito era utilizar x como variable (pensando en la notación funcional) para luego considerar $x+h$ de acuerdo al plan original. En cambio los estudiantes vieron la x como incógnita, así que no se concentraron en el desarrollo de $(x+3)^2 = x^2+6x+9$, sino que tenían que despejar la x como si fuera la incógnita de una ecuación. Además lo hacen haciendo trampa: x^2 se convierte en $x \cdot 2$ (x por 2) que es $2x$. Aparentemente tienen que despejar x porque buscan valores numéricos para las áreas. Otro problema que se observa es que muchos estudiantes no saben el significado de elevar al cuadrado un binomio, en su lugar linealizan la potencia elevando cada término al cuadrado. En la pregunta cuatro de la actividad que plantea el cuadrado del binomio en el contexto aritmético se observa que no saben realizar operaciones adecuadamente con la calculadora, ni a mano, ya que presentan resultados sumamente extraños. Respecto a los cálculos que realizan a mano pudimos observar que los estudiantes no saben hacer multiplicaciones a mano y que se les dificulta mucho si estas son con números decimales; se pierden con la posición del punto decimal.

De nuestra parte también cometimos errores numéricos en un par de enunciados que planteamos. Otro error nuestro fue haber subestimado la capacidad de las calculadoras y sobreestimado el uso de ellas por parte de los estudiantes.

A continuación hablaremos de las actividades de exploración que diseñamos para validar las conjeturas que anteriormente mencionamos. Se realizaron dos actividades cada una de ellas en un grupo diferente al de la experimentación de tercer semestre, el cual suponemos es la misma población; estas actividades exploratorias se aplicaron de manera individual, el primer grupo contaba con 29 estudiantes y el segundo grupo con 30 estudiantes.

De la primera exploración (ver apéndice C.1) observamos lo siguiente:

- Un primer ejercicio indujo a los estudiantes a leer números decimales para que posteriormente pudieran resolver otro ejercicio a base de esta lectura. Aproximadamente el 85 % de los estudiantes respondieron correctamente esta pregunta y el 15 % restante se confundió en sus respuestas.

- En un segundo ejercicio se les plantea a los estudiantes la adición $1 + 0\,.\,00004$. El 72 % contestó correctamente y el restante 27 % contestó incorrectamente. El error que más observamos fue el siguiente: los estudiantes no cuentan con el orden de magnitud de los números; suman la unidad con el cuatro diezmilésimo , obteniendo como resultado $0\,.\,00005$, obviamente sin percatarse que la suma debería ser mayor a la unidad y no tan pequeña.

- Después se les plantea la siguiente diferencia $5\,.\,01 - \frac{1}{100}$. El 45 % de los estudiantes responden de manera incorrecta, hacen operaciones extrañas y sin sentido. El 49 % simplemente no contestan, muy probablemente porque no saben cómo hacer la operación. Solo un estudiante, el 3 % del grupo, responde correctamente, haciéndolo de una manera que no esperábamos. El estudiante convierte el número decimal a mixto $\left(5\,.\,01\; a\; 5\frac{1}{100}\right)$ y luego le resta $\frac{1}{100}$ obteniendo como resultado el 5. En general observamos que a los estudiantes no les gusta trabajar con números fraccionarios de la misma manera que no saben leer una fracción decimal,

$\frac{1}{100}$ como un centésimo, con lo cual hubiesen resuelto la diferencia, pues antes habían sido inducidos de manera satisfactoria a leer un decimal. Pero entonces nos resultó muy claro que no leen $\frac{1}{100}$ como un centésimo.

Posteriormente en dos problemas más, les pedimos realizar $2 \times 0\,.\,0005$ y 1 $01 \times 2\,.\,0005$. En la primera el 72 % de los estudiantes la responden, el 7 % no responden correctamente; la segunda la responden correctamente solo el 38 %, 3 % sin respuesta y el resto incorrectamente. Observamos especialmente en la segunda multiplicación que no saben colocar el punto decimal en el lugar que le corresponde.

En un último ejercicio se les plantea aparear la siguiente potencia cuadrática $(1\,.\,0003)^2$ Se ofrecen cuatro opciones: $(1\,.\,0003) \times (1\,.\,0003)$ y $1\,.\,0003 \times 1\,.\,0003$ que son correctas y $(1\,.\,0003) \times 2$ y $2\,.\,0009$ que son incorrectas. El 68 % de los estudiantes responden correctamente. El 27 % responden incorrectamente y el 3 % prefieren no contestar. Observando las respuestas correctas el 31 % de los estudiantes les gusta trabajar con la multiplicación sin paréntesis, al 36 % la multiplicación con paréntesis y solo el 3 %, o sea, un estudiante solo las dos opciones correctas.

En la segunda exploración (apéndice C.2) principalmente queríamos observar si los estudiantes eran capaces de leer un número decimal en sus diferentes representaciones; acerca de esta actividad podemos mencionar lo siguiente:

Como primer problema también fueron inducidos a leer números decimales. El 100 % respondió de manera satisfactoria.

- Ya que respondieron correctamente el problema anterior, uno supondría que el segundo problema lo responderían también correctamente. Se les dio el número decimal 1.03 el cual tenían que aparear teniendo cuatro opciones (véase el apéndice C.2). El 48 % de los estudiantes respondieron correctamente y el 52 % de manera incorrecta. Entre las opciones: $1\frac{3}{100}$ (mixto correcto), $1 + \frac{3}{100}$ (suma de sus partes) y $1 + 0 \times 10^{-1} + 3 \times 10^{-2}$ (desarrollo de potencias) que son opciones correctas y $1\frac{3}{10}$ (mixto erróneo) que es una opción incorrecta, el 24 % solo elige la primera opción, el número mixto; el 17 % opta por el número mixto combinado con el de la suma de sus partes; el 7 % opta por el número mixto combinado con el desarrollo de potencias; el 3 % solo elige el de la suma de sus partes. De las respuestas incorrectas, el 35 % elige el mixto erróneo $\left(1\frac{3}{10}\right)$, el 14 % restante eligen el mixto erróneo combinado con una opción válida y 3 % no responde.

Como último problema se plantea a los estudiantes una adición y una substracción como al grupo anterior: $2 + 0\,.\,00004$ y $5\,.\,1 - \frac{1}{100}$. Con los resultados obtenidos confirmamos aún más nuestras conjeturas, ya que este grupo tuvo errores muy parecidos a los del grupo anterior. Para la adición el 63 % responde correctamente y el 17 % tiene el mismo error del grupo anterior, esto es, no tienen idea del orden de magnitud y suman el número entero con el cienmilésimo, el 7 % hace operaciones extrañas e incorrectas y el 13 % no contesta. Para la substracción solo el 7 % (2 estudiantes) responden correctamente realizando la división indicada en la fracción convirtiéndola a número decimal y luego restarlo del 5.1 obteniendo 5. El 67 % responde incorrectamente haciendo operaciones extrañas e incorrectas y el 28 % restante no contesta. Este problema en general resultó muy complicado para los estudiantes. La gran mayoría no tiene idea de como resolverlo confirmando la gran dificultad que para ellos representan las fracciones, aún las más sencillas.

Con los resultados anteriores quedan confirmadas las conjeturas que planteamos en las conclusiones de las Actividades que se comentan en este capítulo. La estadística de resultados referente a esta exploración de conjeturas se pueden ver más a detalle en el apéndice C.3.

En términos generales, puede decirse que los alumnos mostraron deficiencias no sólo de naturaleza algebraica, sino incluso aritmética, que les impidieron completar cabalmente algunas de las actividades propuestas. Desde luego, creemos que destacar tales deficiencias resulta relevante para la investigación en Matemática Educativa.

En general podemos concluir que nuestro guión para introducir el concepto de función, resulta adecuado para los estudiantes, puesto que, planteando situaciones en un contexto real y haciendo uso de la conversión entre registros de representación, se generó la habilidad de efectuar operaciones en sentido directo como en sentido inverso, es decir, efectuar recíprocamente la conversión entre dos registros, de esta manera los estudiantes descubrieron de manera natural, la relación entre dos variables, la variable independiente que determina los valores de la otra variable, dependiente.

De este modo, la introducción de la noción de función como la relación entre dos variables en el contexto de rectas, queda muy acorde para aplicarse con estudiantes del curso de Geometría Analítica. En un futuro podría verse la posibilidad de ampliar los guiones de las Actividades, en algunos de los casos mejorar el planteamiento de las preguntas en base a las deficiencias y errores que se observaron y mencionaron en la interpretación de los resultados, incluso pensar en el diseño de nuevas Actividades que incluyan el uso de la tecnología con el fin de complementar y/o reforzar la noción que estamos abordando, todo esto, sin perder de vista que las actividades deben ser planteadas como un proyecto de acción práctica, es decir, referido a satisfacer necesidades vitales y recreativas como lo menciona Aebli (1958).

Por otro lado creemos que fue un acierto promover las actividades de los estudiantes en equipo, porque con ello se vieron motivados en todo momento a resolver y a discutir los problemas que les planteamos, de alguna forma se les hizo responsables de construir su propio aprendizaje.

Bibliografía

Aebli, H. (1958). *Una didáctica fundada en la psicología de Jean Piaget*, Kapelusz, Argentina.

Aguilar, A. M. (2007). *Una introducción algebraica y dinámica al concepto de derivada.* Tesis de maestría no publicada. Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN, México. D. F.

Aguilar, A. M. & Riestra, J. A. (2009). Una introducción algebraica y dinámica al concepto de derivada. *El Cálculo y su Enseñanza*, pp 1–12. ISSN en trámite.

Andreu, M.E. & Riestra, J.A. (2005), "Propuesta alternativa para la enseñanza del concepto de derivada desde una perspectiva histórico epistemológica de su desarrollo" en Cortes & Hitt (Ed.), *Reflexiones sobre el aprendizaje del cálculo y su enseñanza*, Morevallado *Editores*, Michoacán, pp. 157–174.

Andreu, M. E. (2006). *Propuesta alternativa para un curso de cálculo diferencial acorde con el desarrollo histórico epistemológico de la derivada y con apoyo computacional.* Tesis doctoral no publicada. Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN, México.

Cedillo, T., Rojano, T. & Ursini, S. (2002). *De los números al álgebra en secundaria mediante el uso de la calculadora.* EMAT, SEP, Educación Secundaria.

Cortés, J. & Hitt,F. (2005), *Reflexiones sobre el aprendizaje del cálculo y su enseñanza*, Morevallado Editores, Michoacán.

Duval, R. (1992). "Gráficas y Ecuaciones: la articulación de dos registros" en F. Hitt (Ed.9), en *Antología de Educación Matemática*, Sección de Matemática Educativa del CINVESTAV, México, pp. 125-139.

Duval, R. (1998). "Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento" en F. Hitt (Ed.9), en *Investigaciones de Matemática Educativa II*, Grupo Editorial Iberoamérica, México, pp. 173-201.

Duval, R. (1999). *Semiosis y Pensamiento Humano.* Traducción al español a cargo de M. Vega, realizada en la Universidad del Valle, Colombia, del original francés del mismo titulo publicado por P. Lang, Suiza en 1995.

Hitt, F. (2005). "Dificultades en el aprendizaje del cálculo" en Cortes & Hitt (Ed.), *Reflexiones sobre el aprendizaje del cálculo y su enseñanza*, Morevallado Eds, Michoacán, pp. 81–108.

Hitt, F. & Páez,R. (2005). "Dificultades de aprendizaje del concepto de límite y actividades de enseñanza" en Cortes & Hitt (Ed.), *Reflexiones sobre el aprendizaje del cálculo y su enseñanza*, Morevallado Editores, Michoacán, pp. 133–156.

Polya, G. (1965). *Cómo plantear y resolver problemas.* Editorial Trillas: México.

Riestra, J.A. (1998), "Las cantidades relativas y su relevancia en el Cálculo" en F. Hitt (Ed.), *Investigaciones en Matemática Educativa II*, Grupo Editorial Iberoamérica, México, pp. 67–102.

Riestra, J.A. (2001). "El método de Fermat para la determinación de Extremos de Polinomios. Una Visión Moderna", *Miscelánea Matemática*, No. 34, México, pp. 103–112.

Riestra, J.A. (2004). "El Estudio de la Variación en la Edad Media y su Relación con el Concepto de Límite", *Miscelánea Matemática*, No. 39, México, pp. 49–60.

Riestra, J.A. & Ulin, C.A. (2003). "Tangencia, contacto y la diferencial" en E.Filloy et al (Eds.), *Matemática Educativa: Aspectos de la Investigación Actual*, Fondo de Cultura Económica, México, pp.218–241.

APÉNDICES

Apéndice A

Materiales didácticos experimentales

A.1. Actividad I

Llamadas telefónicas

Un fin de semana cinco personas hicierón llamadas telefónicas a varios lugares del país, registraron el tiempo que estuvieron hablando y el costo de la llamada se muestra en la siguiente gráfica.

1. Observa la gráfica y responde las siguientes preguntas:

a) ¿Quién pagó más por la llamada? ______________________

b) ¿Quién pagó menos por la llamada? ______________________

c) ¿Quién habló durante más tiempo? ______________________

d) ¿Quién habló durante menos tiempo?______________________

2. En base a tus resultados discute con tu equipo.

e) ¿Qué variables se mencionan en el problema? ______________________

f) ¿Crees que las dos variables están relacionadas? ______Justifica tu respuesta

____

____

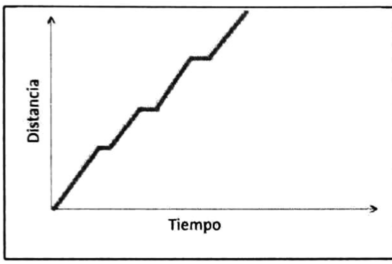
____

A.2. Actividad II

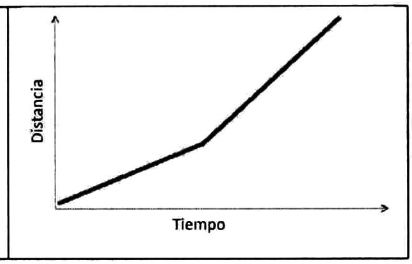
A.2.1. Versión preliminar

Viaje a la universidad

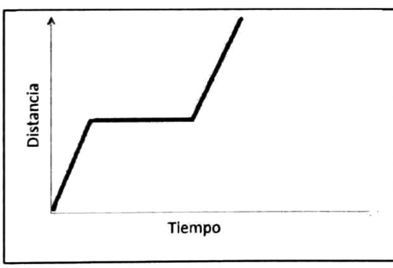
La maestra de Proyectos envió a sus alumnos a una conferencia a la Universidad de Tecámac, la distancia aproximada es de 10 km. Salimos de casa a las 7:30 para llegar a la conferencia a las 8:10, las siguientes gráficas muestran cómo son los trayectos para Antonio, Brenda, Carlos y Alicia.



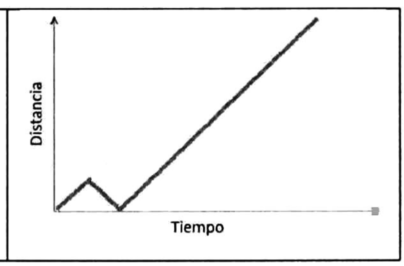
Gráfica 1



Gráfica 2



Gráfica 3



Gráfica 4

Tres chicos comentaron como se dio su recorrido:

Antonio: Salgo con calma en bicicleta, en el camino comienzo a pedalear más fuerte.

Brenda: Al poco de salir me di cuenta que olvidé el refrigerio y tuve que volver.

Carlos: Fui en moto pero en el camino me quedé sin gasolina, caminé hasta la gasolinera que está de paso y luego continué.

1. Omitiendo la gráfica 1 observa las gráficas y responde las siguientes preguntas.

a) ¿A quién corresponde cada gráfica?

Gráfica 1: ______________________

Gráfica 2: ______________________

Gráfica 3: ______________________

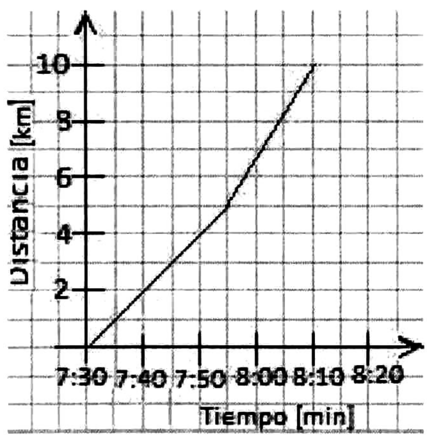
Gráfica 4: ______________________

b) ¿Qué diría Alicia acerca de su viaje? ¿En qué crees viajó?

____

____

2. Si observamos de manera más precisa la gráfica de Antonio podremos resolver varias preguntas:



a) ¿Cuántos Km lleva recorrido Antonio a las 7:45?________________

¿Qué ocurre a las 7:55? ______________________________

¿Cuánto tiempo empleó en la primera mitad del trayecto? ____________

¿Y en la segunda?______________________________

b) ¿Cuántos Km pedaleó entre las 7:45 y las 8:05? ________________

c) ¿Cómo se puede saber que Antonio ha ido a la misma velocidad en los primeros 25 minutos?

e) ¿En qué intervalo de tiempo fue menor la velocidad de Antonio? ________

f) ¿En cuál intervalo de tiempo Antonio viajo más rápido?______________

g) ¿A qué hora llegó a la universidad?______________________________

h) Si Antonio hubiera seguido con la misma velocidad ¿Habría llegado a tiempo a la universidad?______ ¿Con cuánto de adelanto o de atraso? con ___min de __________

3. En base a tus resultados discute con tu equipo.

a) ¿Qué variables se mencionan en el problema? ____________________

b) ¿Crees que las dos variables están relacionadas?______Justifica tu respuesta

____

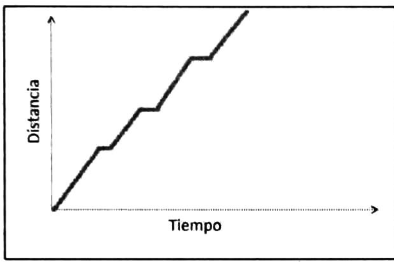
____

____

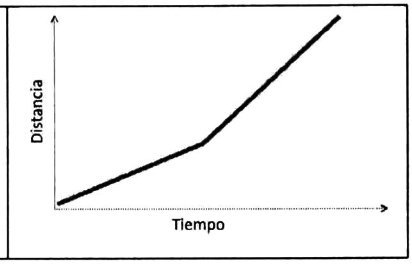
A.2.2. Versión final

Viaje a la universidad

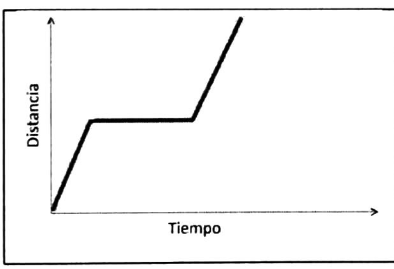
La maestra de Proyectos envió a sus alumnos a una conferencia a la Universidad de Tecámac, la distancia aproximada es de 10 km. Salimos de casa a las 7:30 para llegar a la conferencia a las 8:10, las siguientes gráficas muestran cómo son los trayectos para Antonio, Brenda, Carlos y Alicia.



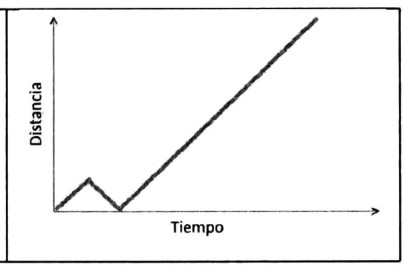
Gráfica 1



Gráfica 2



Gráfica 3



Gráfica 4

Tres chicos comentaron como se dio su recorrido:

Antonio: Salgo con calma en bicicleta, en el camino comienzo a pedalear más fuerte.

Brenda: Al poco de salir me di cuenta que olvidé el refrigerio y tuve que volver.

Carlos: Fui en moto pero en el camino me quedé sin gasolina, caminé hasta la gasolinera que está de paso y luego continué.

1. Omitiendo la gráfica 1 observa las gráficas y responde las siguientes preguntas.

a) ¿A quién corresponde cada gráfica?

Gráfica 1: *Alicia*

Gráfica 2: ______________________

Gráfica 3: ______________________

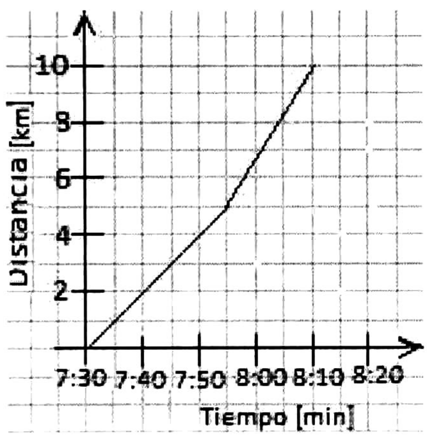
Gráfica 4: ______________________

b) ¿Qué diría Alicia acerca de su viaje? ¿En qué crees viajó?

____

____

2. Si observamos de manera más precisa la gráfica de Antonio podremos resolver varias preguntas:



a) ¿Cuántos Km lleva recorrido Antonio a las 7:45?_______________

¿Qué ocurre a las 7:55? ______________________________

¿Cuánto tiempo empleó en la primera mitad del trayecto? ___________

¿Y en la segunda?______________________________________

b) ¿Cuántos Km pedaleó entre las 7:45 y las 8:05? _______________

c) ¿Cómo se puede saber que Antonio ha ido a la misma velocidad en los primeros 25 minutos?

Para ayudarte a responder la pregunta completa la tabla donde registres la distancia recorrida cada 5 minutos empezando por el intervalo 7:30-7:35

Intervalo	7:30-7:35		7:40-7:45		7:50-7:55
Recorrido [Km]	1				

¿Cuál es tu respuesta en base a los datos de la tabla anterior?____________

____

d) ¿Cómo se puede saber que Antonio también ha ido a la misma velocidad en los últimos 15 minutos (de las 7:55 a las 8:10)?Construye una tabla.

Intervalo			
Recorrido [Km]			

¿Qué puedes concluir con los datos de la tabla que construiste? ____________

____

e) ¿En cuál de los dos intervalos fue menor la velocidad de Antonio? __________

f) ¿En cuál intervalo de tiempo Antonio viajo más rápido?________________

g) ¿A qué hora llegó a la universidad?__________________________________

h) Si Antonio hubiera seguido con la misma velocidad del primer intervalo (7:30- 7:55) ¿Habría llegado a tiempo a la universidad?______ ¿Con cuánto de adelanto o de atraso? con ___min de _____________

3. En base a tus resultados discute con tu equipo.

a) ¿Qué variables se mencionan en el problema? ________________________

b) ¿Crees que las dos variables están relacionadas?______Justifica tu respuesta

____

____

____

4. Discute con tu equipo para responder.

Regresando al viaje recorrido de Antonio

a) Has visto que Antonio ha ido a la misma velocidad en los primeros 25 minutos como se ve en la tabla modificada.

Intervalo	7:30-7:35	7:35-7:40	7:40-7:45	7:45-7:50	7:50-7:55
Tiempo transcurridos [min]	5	5	5	5	5
Recorrido [Km]	1	1	1	1	1

¿Qué puedes comentar al respecto?____________________________________

____

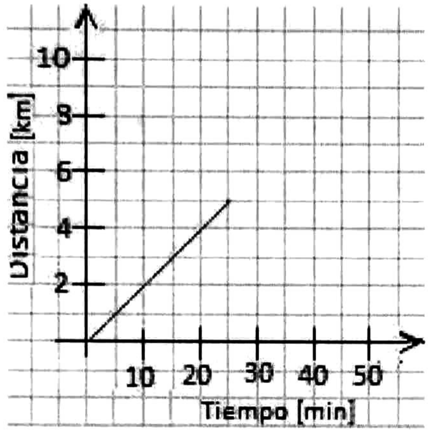
____

b) Con ayuda de la tabla anterior, completa la siguiente tabla de valores acumulados para el primer recorrido

Intervalo	7:30-7:35	7:35-7:40	7:40-7:45	7:45-7:50	7:50-7:55
Tiempo transcurridos [min]	5	10			
Distancia Recorrida [Km]	1	2			

c) Observando la última tabla podrías calcular la velocidad de Antonio (en la primera mitad del recorrido) en km/min

5. En la siguiente figura hemos representado la primera parte del recorrido de Antonio en una gráfica de distancia recorrida vs minutos transcurridos a partir de 7:30



a) En la gráfica anterior se observa una gráfica que pasa por una serie de puntos coordenados elige un par de ellos y llámalos P_1 y P_2.

$$P_1(\quad)$$

$$P_2(\quad)$$

b) Con los dos puntos elegidos, determina la pendiente de la recta

Pendiente $m =$

c) Compara tu resultado con la velocidad de Antonio para la primera mitad recorrida que calculaste. ¿Qué puedes concluir al respecto?

____

____

d) Sabiendo que $60min/hr$ es la unidad y que lo que sea multiplicado por la unidad no se altera, utilízalo como factor para convertir la velocidad de a km/min a km/hr.

6. Ahora veremos la descripción detallada de Carlos.

Carlos: Salí con calma a una velocidad de $30km/hr$ durante las primeros 10 minutos y me di cuenta que me quedaba sin gasolina. Perdí 10 minutos tratando de conseguir un par de litros y luego continué a mucha mayor velocidad durante unos 5 minutos llegando a Tecámac a las 7:55 a.m.

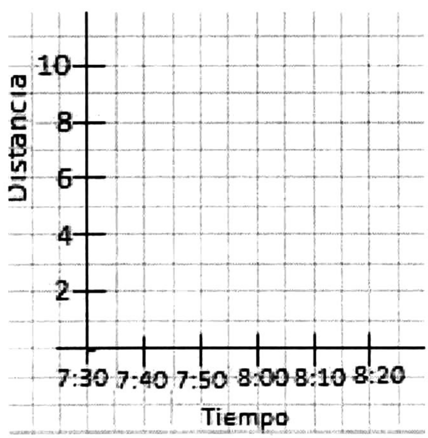
En base a la historia de Carlos, resuelve las siguientes preguntas:

a) De las 7:30 a las 7:40 Carlos viajó a $30km/hr$¿Cuántos kilómetros por minuto recorre Carlos a esta velocidad? Convierte $30km/hr$ a su equivalente en km/hr (utiliza el factor unidad $1hr/60min$).

b) Luego de 7:30 a 7:40 transcurren 10 minutos a ________km/min Luego recorrerá ________ km en 10 min.

c) No cambia la distancia entre 7:40 y 7:50. Y finalmente avanza lo que le faltaba para los 10 km totales, a saber que avanza ______km en el intervalo de 7:50 a 7:55.

d) Con todos los datos anteriores representa en el cuadriculado el viaje de Carlos.



A.3. Actividad III

Un simulacro para desalojar la escuela en caso de temblor

En la preparatoria se llevo a cabo un simulacro, la siguiente ecuación permite calcular el tiempo que tardan los estudiantes en desalojar la escuela.

$$y = -5x + 400$$

Donde y representa el número de estudiantes que restan dentro de la escuela y x el tiempo en segundos que han transcurrido desde que empezó el desalojo. A partir de la ecuación anterior construye una gráfica de desalojo para los primeros 100 segundos.

1. Responde las siguientes preguntas.

a) ¿Cuántos estudiantes había dentro de la escuela al inicio del simulacro?_______

¿Cómo lo determinaste? ____

b) ¿Cuántos estudiantes estaban aún dentro de la escuela cuando habían transcurrido 30 segundos del simulacro? __________________________

¿Cómo lo determinaste? _____________________________________

c) ¿Cuántos estudiantes estaban aún dentro de la escuela cuando habían transcurrido 55 segundos del simulacro? ___________________________________

¿Cómo lo determinaste? _____________________________________

d) ¿Cuántos segundos habían transcurrido cuando quedaban 325 estudiantes?______

e) ¿Cómo encontraste la respuesta?____

f) ¿En cuánto tiempo quedó totalmente desalojada la escuela? ______________

g) ¿Cómo determinaste este tiempo? _______________________________________

2. En base a tus resultados discute con tu equipo.

a) ¿Qué variables se mencionan en el problema? _________________________

b) ¿Crees que las dos variables están relacionadas? ______Justifica tu respuesta_____

____

A.4. Actividad IV

Temperaturas en grados Fahrenheit y grados Centígrados

Carlos tiene un tío que vive en Denver Colorado, la última vez que hablo con él le conto que en tiempos de calor la temperatura llega a alcanzar unos los 90° Fahrenheit y en tiempos de frio las temperaturas bajan hasta unos 30° Fahrenheit. Carlos intrigado investigo cual era la equivalencia en grados Centígrados, solo encontró la siguiente tabla.

Fahrenheit	-4	5	32	122
Centígrados	-20	-15	0	50

1. Usa los valores de la tabla para hacer una gráfica utilizando el papel milimétrico anexo. En el eje representa los valores en grados Fahrenheit y en el eje los valores en los grados Centígrados de -25 °C a 100°C.

2. Observa la grafica que dibujaste, trata de estimar las siguientes equivalencias. (Nota: es importante que trates de estimar las equivalencias con ayuda de la gráfica sin necesidad de usar una formula y mantener esta postura hasta finalizar la actividad)

a) ¿A cuántos grados centígrados equivalen 59°Fahrenheit? ______________

b) ¿A cuántos grados Fahrenheit equivalen 24 grados centígrados? ________

c) ¿Puedes ver en tu gráfica la equivalencia de -13 grados Fahrenheit a grados centígrados? ¿Si, no? ¿Porqué?____

¿Qué harías para estimar esa temperatura si ya no aparece en tu dibujo?____________

____

¿Cuál es la equivalencia que encontraste?___________________________________

d) El agua hierve a 100° C, ¿a qué temperatura en °F hierve el agua? 100° C =_________

e) Compara tus respuestas con las de tus compañeros de equipo. ¿Encuentras diferencias notables?________ ¿A qué crees que se deban?___________________

____

3. Observa que la grafica que dibujaste se comporta como una recta. Recuerda que el eje representa los valores en grados Fahrenheit y en el eje los valores en los grados Centígrados ¿Podrías encontrar una fórmula ($y = m(x - a)$, donde y son los valores en °C y x los correspondientes en °F) que te permita convertir los grados Fahrenheit a

grados Centígrados? ________ ¿Cómo la harías?

____

____

____

Efectúa las operaciones correspondientes, simplificando quebrados si es necesario pero sin convertirlos a decimales.

4. Escribe la formula que encontraste (sustituyendo y por °C y x por °F)

°C =

5. Ayuda a Carlos a encontrar las equivalencias en grados Centígrados de las temperaturas en Fahrenheit que le dio su tío.

a) 90° Fahrenheit a °C °C=____________

b) 30° Fahrenheit a °C °C=____________

c) Con la formula comprueba o corrige tu respuesta en 2(d)

6. En base a tus resultados discute con tu equipo.

a) ¿Qué variables se mencionan en el problema? ________________________

b) ¿Qué observas con respecto a la variación de la temperatura en grados centígrados?____

c) ¿Crees que las dos variables están relacionadas? _____Justifica tu respuesta

____

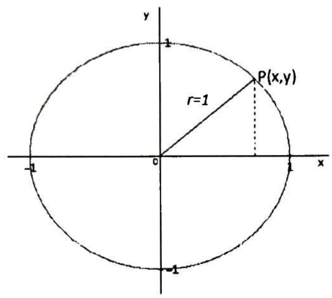
____

A.5. Actividad introductoria.

El circulo trigonométrico

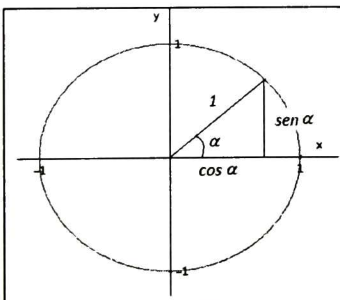
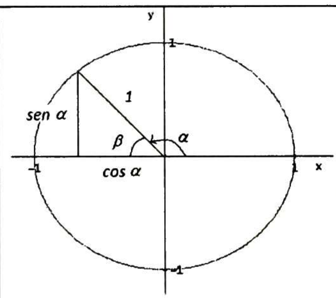
Introducción en clase.

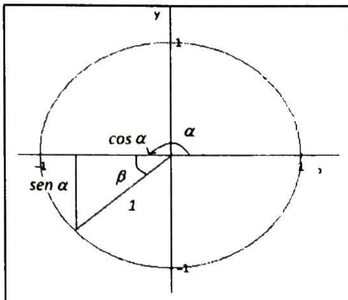
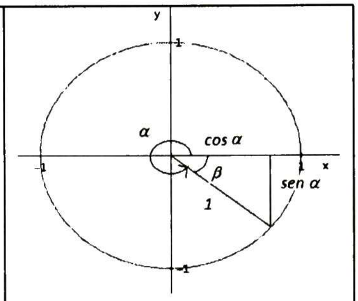
El círculo trigonométrico es un círculo unitario que tiene su centro en el origen de coordenadas.



Si tomamos un punto cualquiera $P\,(x, y)$en la circunferencia por el teorema de Pitágoras [la hipotenusa elevada al cuadrado es igual a la suma de los cuadrados de los catetos $c^2 = a^2 + b^2$, en este caso la hipotenusa mide la unidad y x y y son los catetos], escribiendo la ecuación de la forma acostumbrada $x^2 + y^2 = 1$ se tiene la ecuación cuyo lugar geométrico es un circulo de radio 1 (unitario) con centro en el origen.

Definición de $sen\,\alpha$ y $cos\,\alpha$: $sen\,\alpha = y$, $cos\,\alpha = x$ y $tan\,\alpha = \frac{y}{x}$

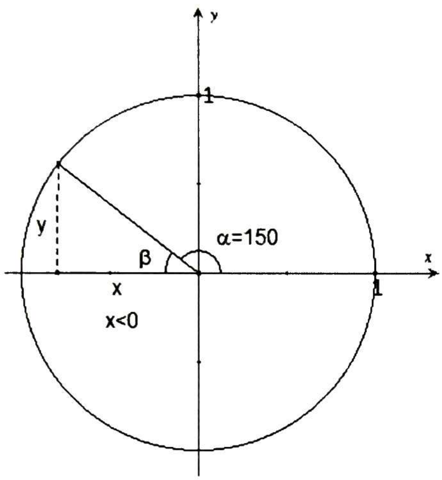
	
$0 < \alpha < 90°$ $sen\alpha$ positivo $(y > 0)$ $cos\alpha$ positivo $(x > 0)$ $tan\alpha$ positivo $\left(\frac{y}{x} > 0\right)$	$90° < \alpha < 180°$ $sen\alpha$ positivo $(y > 0)$ $cos\alpha$ negativo $(x < 0)$ $tan\alpha$ negativa $\left(\frac{y}{x} < 0\right)$

	
$180° < \alpha < 270°$ $sen\alpha$ negativo $(y < 0)$ $cos\alpha$ negativo $(x < 0)$ $tan\alpha$ positiva $\left(\frac{y}{x} > 0\right)$	$270° < \alpha < 360°$ $sen\alpha$ negativo $(y < 0)$ $cos\alpha$ positivo $(x > 0)$ $tan\alpha$ negativo $\left(\frac{y}{x} < 0\right)$

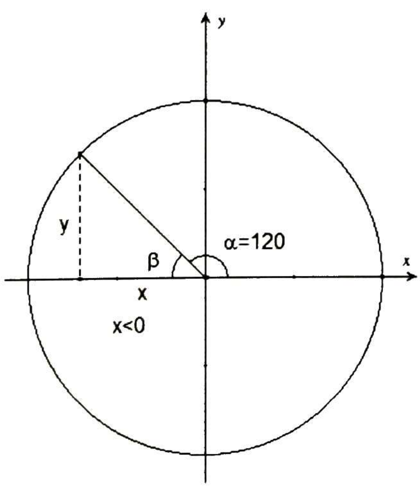
Problemas

1. Usando las condiciones del circulo trigonométrico determina las siguientes relaciones trigonométricas.

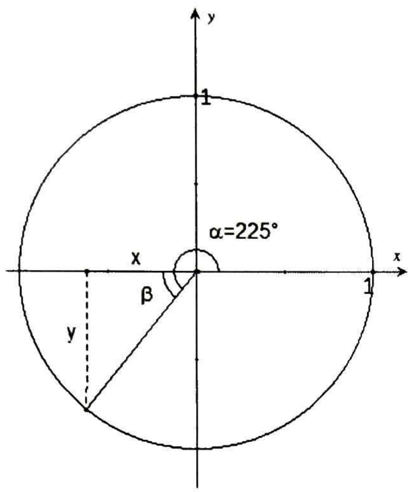
   a) Si $\alpha = 150°$ entonces $\beta =$ ______, luego $sen 150° =$ ___*sen*______ por estar en el cuadrante II y $cos 150° =$ ___*cos*______



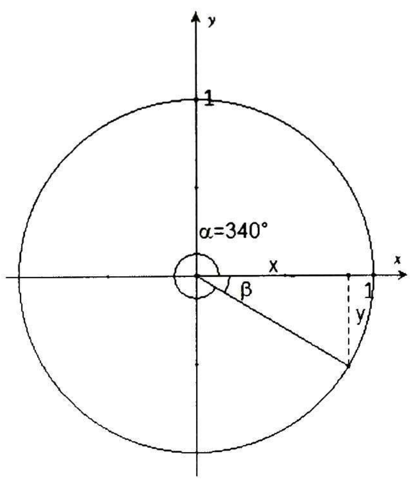
   b) Si $\alpha = 120°$ entonces $\beta =$ ______, luego $sen 120° =$ ___*sen*______ por estar en el cuadrante II y $cos 120° =$ ___*cos*______



c) Si $\alpha = 225°$ entonces $\beta =$ ______, luego $sen225° =$ ___sen______ por estar en el cuadrante III y $cos150° =$ ___cos______

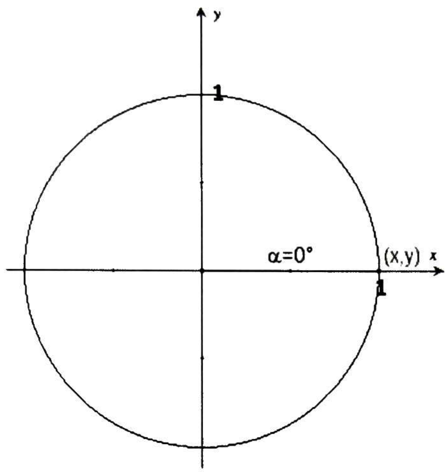


d) Si $\alpha = 340°$ entonces $\beta =$ ______, luego $sen340° =$ ___sen______ por estar en el cuadrante IV y $cos340° =$ ___cos______

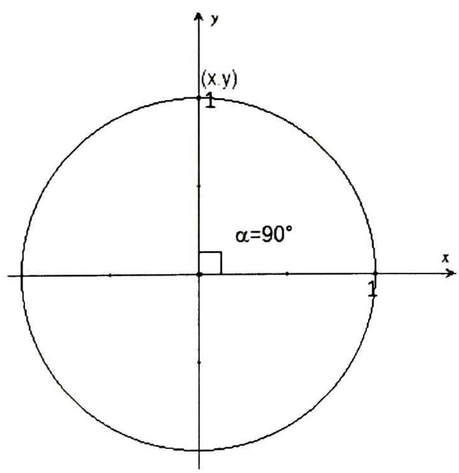


2. Casos cuando $\alpha = 0°$, $\alpha = 90°$, $\alpha = 180°$, $\alpha = 270°$, $\alpha = 360°$

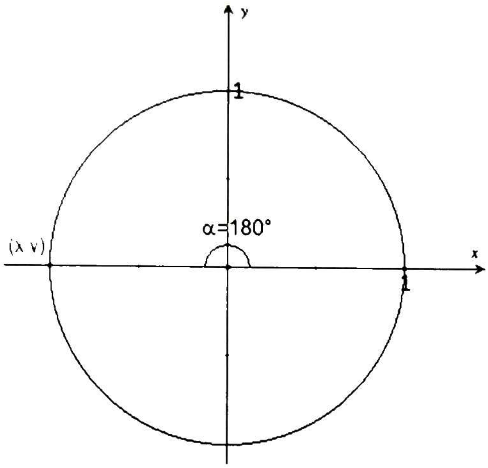
   a) Si $\alpha = 0°$ entonces $(x, y) = (\; , \;)$, luego $sen 0° =$ ______ por tener altura ______ y $cos 0° =$ ______ porque la abscisa del punto es ______



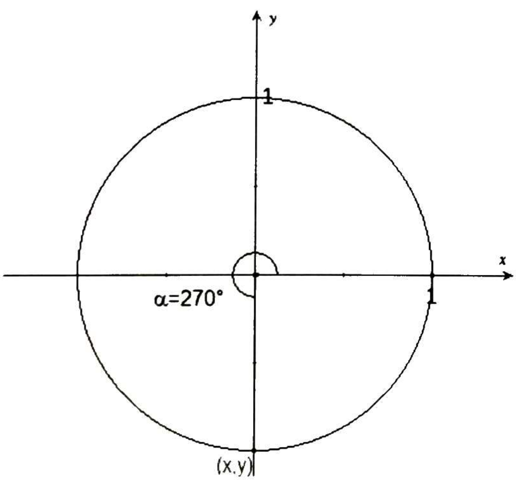
   b) Si $\alpha = 90°$ entonces $(x, y) = (\; , \;)$, luego $sen 90° =$ ______ por tener altura ______ y $cos 90° =$ ______ porque la abscisa del punto es ______



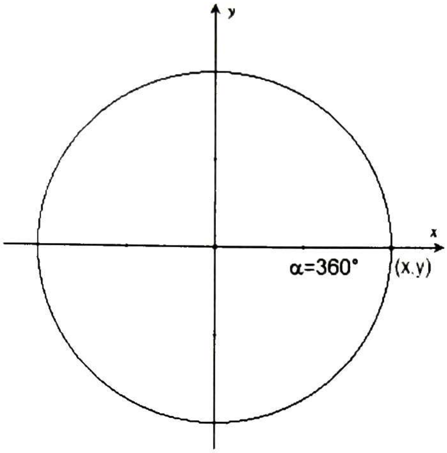
c) Si $\alpha = 180°$ entonces $(x, y) = (\ , \ )$, luego $sen180° =$ ______ por tener altura ______ y $cos180° =$ ______ porque la abscisa del punto es ______



d) Si $\alpha = 270°$ entonces $(x, y) = (\quad)$, luego $sen270° =$ ______ por tener altura ______ y $cos270° =$ ______ porque la abscisa del punto es ______



e) Si $\alpha = 360°$ entonces $(x, y) = (\ , \ )$, luego $sen360° =$ ______ por tener altura ______ y $cos360° =$ ______ porque la abscisa del punto es ______



A.6. Actividad V

A.6.1. Versión preliminar

Ley de Reflexión Investigación de la literatura (Internet)

¿Alguna vez has observado como los espejos reflejan la luz? ¿Qué pasa cuando un haz de luz procedente del Sol se refleja en un espejo?

En base a tu experiencia, ¿Qué responderías?

____

____

Toda la luz se genera en alguna fuente de energía, pero la mayoría de la luz que llega a nuestros ojos proviene de luz reflejada. Gracias a la reflexión podemos observar la luna, mirarnos en un espejo o enviar información por fibra óptica. Pero, ¿qué es reflexión? ¿Cómo ocurre? Te invito a estudiar este fenómeno. En este contexto investiga en internet o en un libro de física.

1. ¿Qué es reflexión?

   ____

   ____

2. Enuncia la Ley de Reflexión

   ____

   ____

3. Describe cada uno de los siguientes términos:

   a) Superficie reflectora

      ____

      ____

   b) Rayo incidente

      ____

      ____

   c) Rayo reflejado

____

____

d) Punto de incidencia

____

____

e) Normal

____

____

f) Ángulo de incidencia o ángulo incidente

____

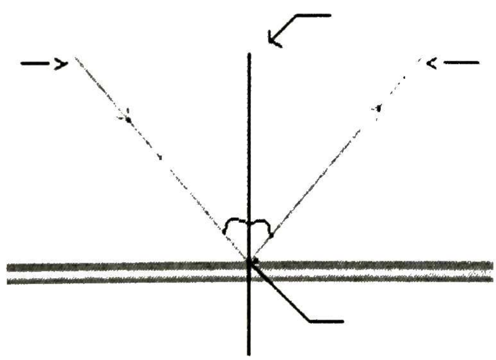
____

g) Ángulo de reflexión o ángulo reflejado

____

____

4. Coloca en la siguiente figura el inciso correspondiente a los términos que definiste anteriormente.



Reflexión de la luz en una superficie pulida (corte[1])

5. ¿Qué puedes concluir acerca del ángulo de reflexión y el ángulo de incidencia?

[1]Corte: con el plano determinado por los rayos incidente y reflejado, y la normal en el punto de incidencia.

6. La normal y el corte de la superficie reflectora son rectas ¿Paralelas? Ó ¿Perpendiculares? ¿Por qué?

7. Reponde las siguientes preguntas

   a) Si un rayo incide en un espejo, ¿cuántas posibles direcciones puede tener el rayo reflejado?

   b) ¿Por qué no es conveniente sacar fotos con flash frente a un espejo?

A.6.2. Versión final

Ley de Reflexión . Investigación de la literatura (Internet)

¿Alguna vez has observado como los espejos reflejan la luz? ¿Qué pasa cuando un haz de luz procedente del Sol se refleja en un espejo?

En base a tu experiencia, ¿Qué responderías?

Toda la luz se genera en alguna fuente de energía, pero la mayoría de la luz que llega a nuestros ojos proviene de luz reflejada. Gracias a la reflexión podemos observar la luna, mirarnos en un espejo o enviar información por fibra óptica. Pero, ¿qué es reflexión? ¿Cómo ocurre? Te invito a estudiar este fenómeno. En este contexto investiga en internet o en un libro de física.

1. ¿Qué es reflexión?

____

2. Enunciado de la Ley de Reflexión de la luz

   El rayo incidente choca en un punto de incidencia de una superficie reflectora plana donde se refleja y surge el rayo reflejado. El ángulo de incidencia (ángulo formado por el rayo incidente y la normal) es igual al ángulo de reflexión (ángulo formado por el rayo reflejado y la normal). El rayo incidente, la normal y el rayo reflejado se encuentran en un mismo plano.

3. Describe cada uno de los siguientes términos:

   a) Superficie reflectora

   ____

   ____

   b) Rayo incidente

   ____

   ____

   c) Rayo reflejado

   ____

   ____

   d) Punto de incidencia

   ____

   ____

   e) Normal

   ____

   ____

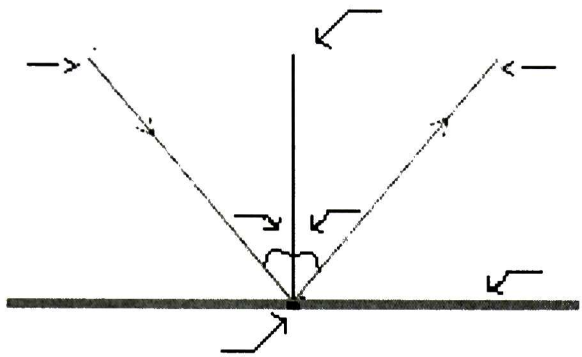
   f) Ángulo de incidencia o ángulo incidente

   ____

   ____

   g) Ángulo de reflexión o ángulo reflejado

4. Coloca en la siguiente figura el inciso correspondiente a los términos que definiste anteriormente.



Reflexión de la luz en una superficie pulida (corte[2])

5. ¿Qué puedes concluir acerca del ángulo de reflexión y el ángulo de incidencia?

6. La normal y el corte de la superficie reflectora son rectas ¿Paralelas? Ó ¿Perpendiculares? ¿Por qué?

7. Reponde las siguientes preguntas

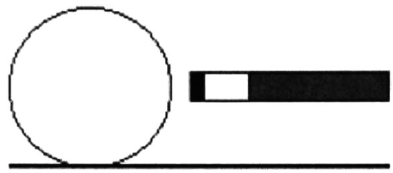
   a) Si un rayo incide en un espejo, ¿cuántas posibles direcciones puede tener el rayo reflejado?

   b) ¿Por qué no es conveniente sacar fotos con flash frente a un espejo?

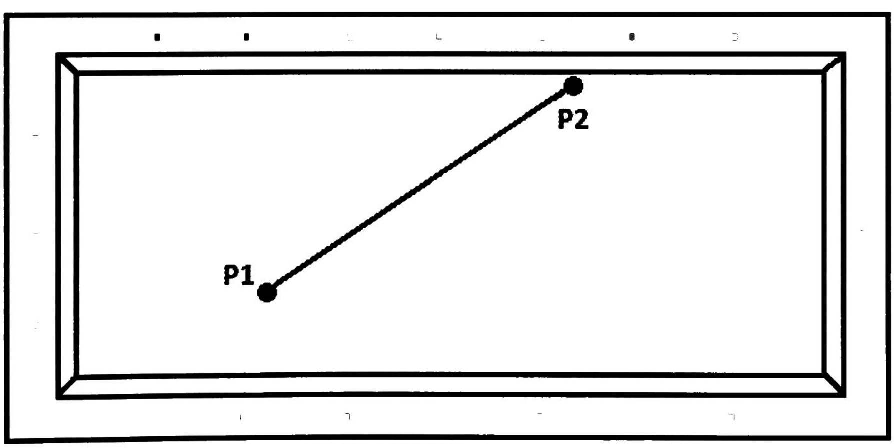
[2]Corte: con el plano determinado por los rayos incidente y reflejado, y la normal en el punto de incidencia.

También se puede observar la ley de reflexión en los deportes, un ejemplo de ello es en el billar.

Imagina que estas en el billar "La Buchaca" con tus amigos, en una jugada le pegas a la bola con el taco justo como se muestra en la figura, sin efecto alguno.



En la siguiente figura se ilustra una mesa de billar, la marca P1 indica la posición inicial de la bola amarilla, la marca P2 indica la segunda posición llegando a la banda. Ilustra la trayectoria posible de la bola amarilla, marcando la posición P3 (choque con la segunda banda) y P4. (Choque con la tercera banda). Para ilustrar lo que se te pide mira las trayectorias como si fuera un rayo incidente y un rayo reflejado, también marca dichos ángulos.

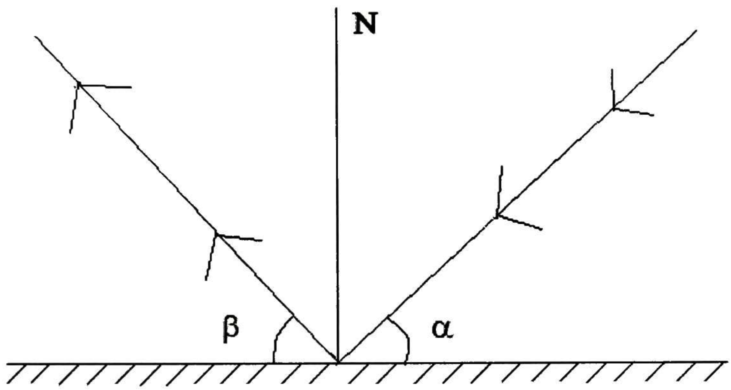


A.7. Actividad VI

Ángulos entre rectas. Ley de la reflexión

Problema I

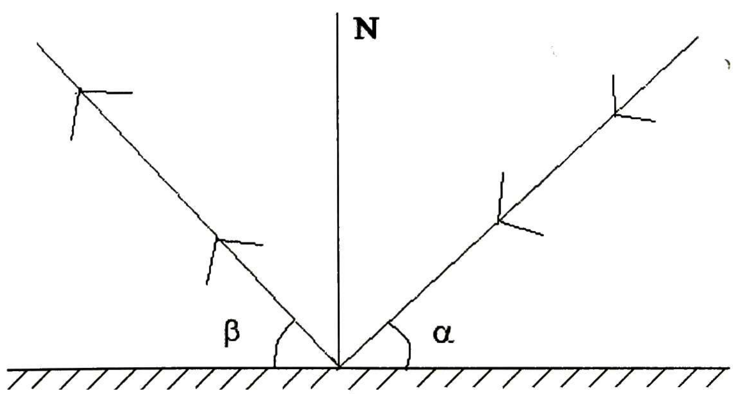
Un rayo incide sobre una superficie reflectora horizontal donde se conoce el ángulo α que hace el rayo incidente con el corte de la superficie como se muestra en la siguiente figura.



En el contexto de la ley de reflexión, reponde

1. ¿Cuál es el ángulo θ_i de incidencia?

    a) Márcalo en el dibujo

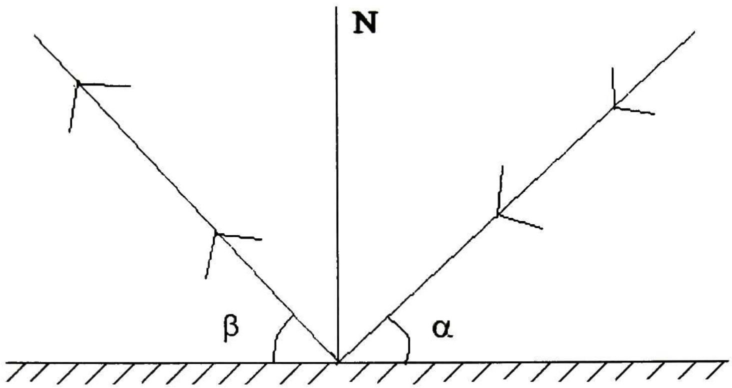


    b) Expresa θ_i en términos de α

    θ_i=

2. ¿Cuál es el ángulo de reflexión θ_r?

   a) Márcalo en el dibujo



   b) Expresa θ_r en términos de β

   θ_r=

3. Sabiendo que $\theta_i = \theta_r$ (el ángulo de incidencia es igual al ángulo de reflexión) compara α con β. ¿Cómo son estos dos ángulos?

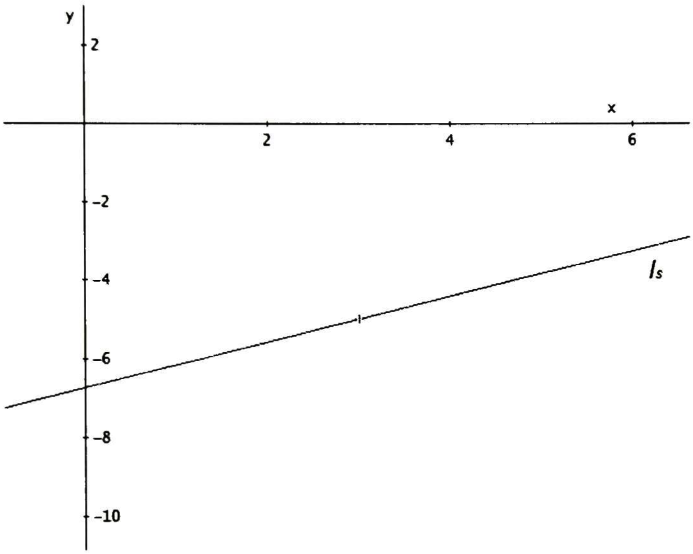
4. ¿Cómo podrías enunciar la ley de reflexión en términos de los ángulos que hacen el rayo incidente y el de reflexión con el corte de la superficie? (esto es, en términos de los ángulos α y β)

____

____

Problema II

1. La superficie reflectora (l_s) tiene un ángulo de inclinación $\alpha = 30°$ y pasa por el punto $A\,(3,-5)$. A continuación se muestra la grafica de la recta de la superficie reflectora l_s. Marca el punto A, marca con una línea punteada la horizontal (recta paralela al eje x que pasa por el punto A), marca el ángulo de inclinación α y dibuja la recta normal l_n usa regla y transportador.



2. Con los datos que te plantea el problema determina lo siguiente

   a) ¿Qué ángulo forma la recta l_n con la recta l_s?

   b) ¿Qué ángulo forma la recta normal con la horizontal? (Recuerda como se miden los ángulos de acuerdo al círculo trigonométrico)

   c) Marca los ángulos en la gráfica

3. Determina la ecuación de la recta normal (l_n) que pasa también por A. Realiza los cálculos necesarios (Para calcular la pendiente correspondiente al ángulo α ver la tabla del Anexo I)

4. Un rayo incidente choca en el punto $A\,(3,-5)$ con un ángulo de incidencia $\theta_i = 30°$

   a) ¿Cuál es el ángulo de reflexión θ_r ?

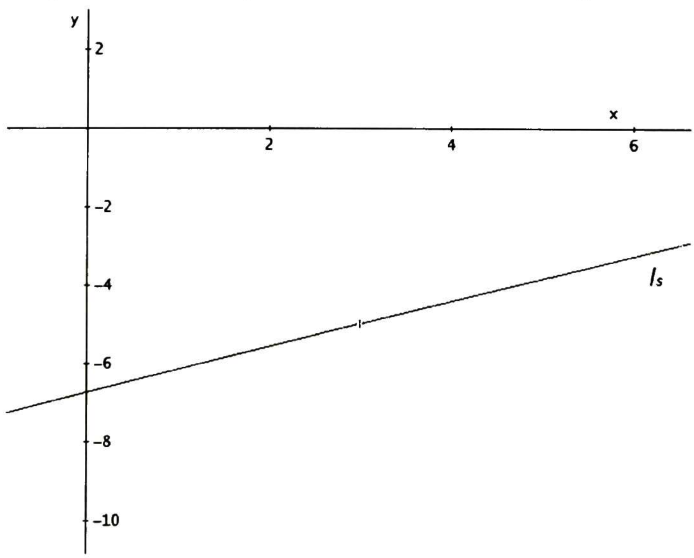
   $\theta_r=$

   b) Marca en la segunda gráfica el rayo de incidencia, el ángulo de reflexión y los ángulos correspondientes a cada rayo.

   c) ¿Qué ángulo forma el rayo incidente con la horizontal? (Piensa en el circulo trigonométrico)

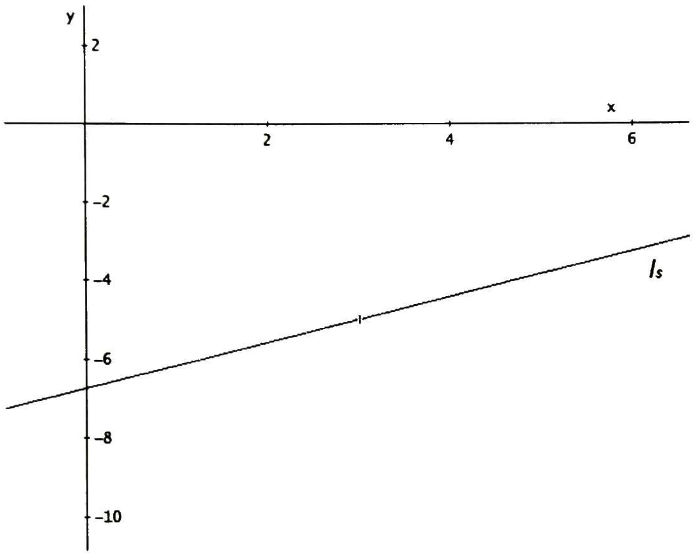
   d) ¿Qué ángulo forma el rayo reflejado con la horizontal?

   e) ¿Calcula la pendiente del rayo reflejado y su ecuación que pasa por el punto A? (Para calcular la pendiente utiliza el circulo trigonométrico y el Anexo)



Problema III

1. La superficie reflectora (l_s) tiene un ángulo de inclinación $\alpha = 30°$ y pasa por el punto $A\,(3, -5)$. A continuación se muestra la grafica de la recta de la superficie reflectora l_s. Marca el punto A, marca con una línea punteada la horizontal (recta paralela al eje x que pasa por el punto A), marca el ángulo de inclinación α y dibuja la recta normal l_n usa regla y transportador.



2. Con los datos que te plantea el problema determina lo siguiente

   a) ¿Qué ángulo forma la recta l_n con la recta l_n?

   b) ¿Qué ángulo forma la recta normal con la horizontal?

   c) Marca los ángulos en la gráfica

3. Determina la ecuación de la recta normal (l_n) que pasa también por A. Realiza los cálculos necesarios (Para calcular la pendiente correspondiente al ángulo α . ver la tabla del Anexo I)

4. Un rayo incidente choca en el punto $A\,(3,-5)$ con un ángulo de incidencia $\theta_i = 60°$

   a) ¿Cuál es el ángulo de reflexión θ_r ?

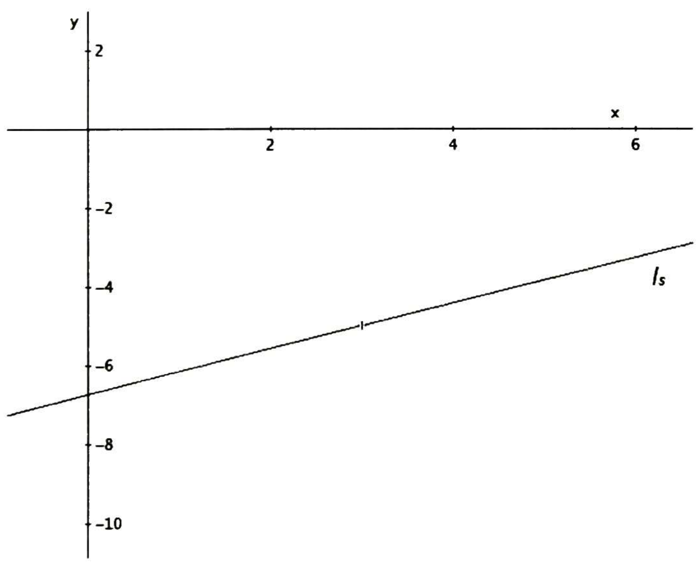
      $\theta_r =$

   b) Marca en la segunda gráfica el rayo de incidencia, el ángulo de reflexión y los ángulos correspondientes a cada rayo.

   c) ¿Qué ángulo forma el rayo incidente con la horizontal? (Piensa en el circulo trigonométrico)

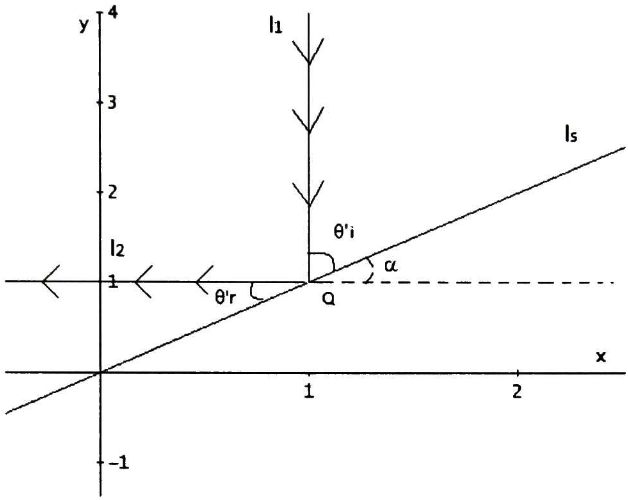
   d) ¿Qué ángulo forma el rayo reflejado con la horizontal?

   e) ¿Calcula la pendiente del rayo reflejado y su ecuación que pasa por el punto A? (Para calcular la pendiente utiliza el circulo trigonométrico y el Anexo)



Problema IV

En la siguiente figura se muestra el perfil de una superficie reflectora donde incide un rayo de incidencia y un rayo reflejado. La superficie reflectora (l_s) tiene una pendiente $m = 1$, el rayo de luz vertical (l_1) en el punto $Q(1,1)$ el cual se refleja en un rayo l_2 como se muestra en la figura.



1. Con los datos que se te dan responde las siguientes cuestiones.

   a) ¿Podrías encontrar la ecuación de la superficie reflectora que pasa por Q y su ángulo de inclinación α con la horizontal? Realiza los cálculos necesarios.

   b) ¿Podrías calcular el ángulo θ_i' del rayo que incide sobre la superficie reflectora? Calcúlalo una vez encontrado α.

   c) ¿Puedes determinar el ángulo θ_r' ?

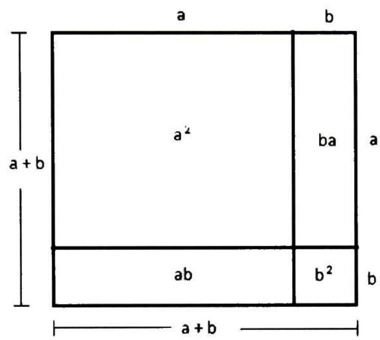
   d) Sustituye los valores de los ángulos θ_i' y θ_r' en la figura anterior.

   e) ¿Qué puedes decir acerca de la pendiente del rayo reflejado?

A.8. Actividad VII

Representación geométrica de las potencias las potencia $(a+b)^2$y $(x+h)^2$

En la siguiente figura se puede observar un gran cuadrado formado por dos cuadrados, el grande de lado a (cuya área es a^2) y el pequeño de lado b (cuya área es b^2), además de dos rectángulos de lado a y b (cada uno con área ab) como se muestra en las siguientes figuras.



Por lo que el área del cuadrilátero $a+b$, a saber $(a+b)^2$, es igual a la suma de las áreas de las figuras descritas anteriormente. Luego al sumar las áreas que conforman el cuadrado

$$A = (a+b)^2$$

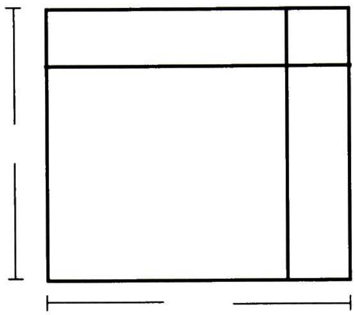
$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + ab + ba$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ba + b^2$$

Léase: el cuadrado de la suma es igual al cuadrado del primer término, más el doble producto del primero por el segundo más el cuadrado del segundo.

Acontinuación resuleve los siguientes ejercicios:

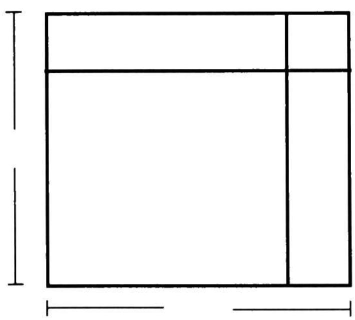
1. Dada la siguiente figura un cuadrado de lado $x+3$, donde $x > 3$, el caula ha sido descompuesto en cuadrados y rectángulos. Escribe los símbolos que correspondan a las longitudes y las áreas en la figura.



Interpreta la figura que has completado a $(x+3)^2$ en una fómula.

$$(x+3)^2 =$$

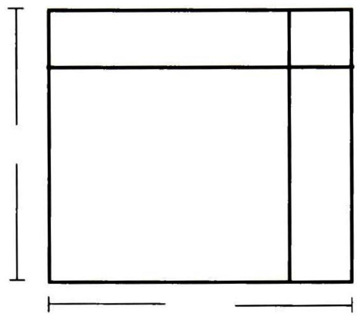
2. Dada la siguiente figura, a saber, un cuadrado de lado $x+2$, donde $x < 2$, descomponlo en cuadrados y rectángulos correspondientes. Escribe los símbolos para las longitudes y áreas en cada caso.



Interpreta la figura que has completado desarrolladola a $(x+2)^2$ en una fórmula.

$$(x+2)^2 =$$

3. Dada la siguiente figura, a saber, un cuadrado de lado $x + 1$, donde $x > 1$, descomponlo en cuadrados y rectángulos correspondientes. Escribe los símbolos para las longitudes y áreas en cada caso.



Traduciendo la figura que has dibujado expresa $(x + 1)^2$ en una fórmula.

$$(x + 1)^2 =$$

4. Comprueba o realiza las operaciones para elevar al cuadrado los siguientes números (es decir, multiplicar a dichos números por si mismos):

$(1.001)^2 = 1.002001$

$(2.002)^2 = 4.004001$

$(1.003)^2 = 1.006009$

$(1.004)^2 = 1.008016$

$(2.002)^2 =$

$(2.003)^2 = 4.012009$

a) Observe detenidamente los resultados anteriores ¿Piede encontrar algún patrón que explique los resultados? Tal vez te ayude ver lo anterior en la siguiente forma:

$(1.001)^2 = (1 + .001)^2 = 1.002001 = 1 + .002 + .000001$

$(2.002)^2 = (2 + .001)^2 = 4 + .004 + .000001 = 4.004001$

$(1.003)^2 = (1 + .003)^2 = 1 + .006 + .000009 = 1.006009$

$(1.004)^2 = (1 + .004)^2 = 1 + .008 + .000016 = 1.008016$

$(2.002)^2 = (2 + .002)^2 = \quad + \quad + \quad =$

$(2\,.\,003)^2 = (2 + .003)^2 = \quad + \qquad + \qquad = 4\,.\,012009$

Escribe tus observaciones:

b) Ahora realiza la operación de elevar al cuadrado utilizando la calculadora y también a "mano", para los siguientes números.

$(1\,.\,0003)^2 = \qquad\qquad\qquad =$

con calculadora *a mano*

$(1\,.\,0002)^2 = \qquad\qquad\qquad =$

con calculadora *a mano*

$(1\,.\,00003)^2 = \qquad\qquad\qquad =$

con calculadora *a mano*

$(1\,.\,00002)^2 = \qquad\qquad\qquad =$

con calculadora *a mano*

¿Notas diferencias en algunos de los casos entre los resultados de la clacula- dora y a "mano"?¿En qué casos?

c) Utilizando calculadora realiza las siguientes sumas.

$1 + .00001 =$

$1 + (.00001)^2 =$

Escribe una reflexi´pn final acerca de tus resultados obtenidos y las comparaciones hechas:

Apéndice B

Estadística de resultados de las Actividades

Resultados de la Actividad I

Llamadas telefónicas

		Pregunta 1				Pregunta 2	
Equipo	Nombres	a)	b)	c)	d)	a)	b)
1	Karina Fraga / Edith Bello/ Luisa Chavarria / Victor García	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)	Si, Por que entre mas tiempo hables mas te cuesta la llamada
2	Elibeth Castañeda / Eduardo Estrada/ Manuel Dominguez /Julieta Herrera	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)	si, porque el costo depende del tiempo
3	Claudia García / Brenda Cortés / Karina Huitron / Jennifer Díaz	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)	si, porque para ver cuanto pagas es dependiendo del tiempo que te tardas en hablar
4	Luisa Hernández / Raúl Capuchino/ Jessica Guevara	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)	si, si aumenta el tiempo de la llamada aumenta el costo
5	Ruby de la Torre / Noemy Torres/ Diana Salgado/ Mónica Lachino	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)	si, el costo de la llamada dependera del tiempo que se tarde
6	Arturo Ortega / Jesica Ocaña/ Miguel Perales/Alicia Morales	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)	si, entre mas consumo mas costo
7	Erick Osorio/Arturo Inclán/ Gabriela Requena/	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)	si, entre mas tiempo hables mas sera el costo de la llamada
8	Gabriel Cid/ Eduardo Sánchez/ Judith Díaz/ Ivan Murrieta	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)	si, porque el tiempo de la llamada se basa en el costo (i)
9	Juan Carlos Fernandez/ Jessica Vargas/ Ana Martinez/ Yamel Santos	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)	si, dependiendo el tiempo aumenta el costo

(c) repuesta correcta (i) respuesta incorrecta (n) no contesto

Resultados de la Actividad II

Viaje a la Universidad (continuación...)

Equipo	Pregunta 3		Pregunta 4					Pregunta 5					Pregunta 6			
	a)	b)	a)	b) 1	b) 2	b) 3	c)	a)		b)	c)	d)	a)	b)	c)	d)
1	Tiempo y distancia	Mientras más km recorra mas tiempo tardará	Que cada 5 min recorre 1 kilometro	(c)	(c)	(c)	(c)	(10,2)	(25,5)	(c)	La velocidad y la pendiente son iguales	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)
2	Tiempo y distancia	Porque la distancia se recorre en cierto tiempo	Que llevaba una velocidad constante	(c)	(c)	(c)	(c)	(10,2)	(15,3)	(c)	Que por cada 5 min recorre 1 Km	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)
3	Distancia y tiempo	Si porque el tiempo es lo que recorre y a la velocidad	Que el tiempo y recorrido se mantienen en constancia en el aumento entre el intervalo y la velocidad constante	(c)	(c)	(c)	(c)	(10,2)	(20,4)	(i)	La velocidad y la pendiente son lo mismo	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)
4	Distancia y tiempo	Que la velocidad que lleva va a depender de la constancia entre distancia y tiempo	Se recorre la misma distancia en elmismo tiempo y al velocidad es constante	(c)	(c)	(c)	(c)	(10,2)	(20,4)	(c)	La velocidad y la penidente son las mismas	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)
5	Tiempo y distancia	La distancia depende del tiempo	Que ha ido a la misma velocidad	(c)	(c)	(c)	(c)	(0,0)	(25,5)	(c)	Que la pendiente y la distancia son iguales	(i)	(i)	(c)	(c)	(c)
6	Tiempo y distancia	Que la distancia depende del tiempo que recorre	Que de cada 5 minutos recorria 1 km y que la velocidad es constante	(c)	(c)	(c)	(c)	(i)	(i)	(i)	Que calculando al pendiente calculas la velocidad	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)
7	Tiempo y distancia	Aunque camine sigue avanzando el tiempo	Que cada 5 min recorre 1 km	(c)	(c)	(c)	(c)	(i)	(i)	(i)	La velocidad y la pendiente son la base	(i)	(c)	(c)	(c)	(c)
8	Tiempo y distancia	Porque van a escala	Que la equivalencia entre el tiempo, el intervalo y el recorrido es constante	(c)	(c)	(c)	(c)	(10,2)	(20,4)	(c)	Son iguales velocidad y pendiente	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)
9	km y minutos	Porque depende el tiempo aumenta los km	La distancia va constante con el tiempo	(c)	(c)	(c)	(c)	(2,10)	(4,20)	(c)	La velocidad y la pendiente son iguales	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)

(c) repuesta correcta (i) respuesta incorrecta (n) no contesto

G2, G3, G4, corresponde a Gráfica 2, Gráfica 3, Gráfica 4 respectivamente

Resultados de la Actividad III

Un simulacro para desalojar la escuela en caso de temblor

Equipo	Pregunta 1										Pregunta 2	
	a)		b)		c)		d)	e)	f)	g)	a)	b)
1	(c)	Porque aún no habia trascurrido el tiempo y estaba en 0 segundos	(c)	Por medio de la gráfica	(c)	Por medio de la gráfica	(c)	Porque en 350 habían transcurrido 10 y 20, 300 es por la gráfica que a los 350 alumnos habían transcurrido 15 min	(c)	Por medio de la gráfica que se realizó	Alumnos desalojados y tiempo	Los alumnos que esten dentro de la escuela van a depender del tiempo
2	(c)	Con la tabla	(c)	Con la tabla	(c)	Con la tabla	(c)	Con la tabla	(c)	Con la gráfica	Alumnos y tiempo	Dependiendo el tiempo los alumnos salen
3	(c)	Tabulando y con la gráfica	(c)	Con la gráfica	(c)	Con la gráfica	(c)	Usando la gráfica	(c)	Gráfica	Tiempo y alumnos	Los alumnos dependen del tiempo
4	(c)	Porque aún no habia trascurrido el tiempo y estaba en 0	(c)	Con la gráfica	(c)	Con la gráfica	(c)	Con la gráfica	(c)	Con la gráfica	Tiempo y alumnos	Alumnos que salen dependen del tiempo
5	(c)	Usando la tabla	(c)	La tabla	(c)	La tabla	(c)	La tabla	(c)	La tabla	Alumnos y tiempo	Mientras avanza el tiempo los alumnos salen
6	(c)	Con la gráfica	(c)	Usando la tabla	(c)	Con la tabla	(c)	Con la tabla	(c)	Con la tabla	Alumnos y tiempo	Los alumnos dependen del tiempo
7	(c)	Con la fórmula	(c)	Con la tabla	(i)	Con la tabla	(c)	Con la tabla	(i)	Con la tabla	Tiempo y alumnos	Depede del tiempo la salida de los alumnos
8	(c)	Por medio de la gráfica	(c)	Usando la gráfica	(c)	Gráfica	(c)	Gráfica	(c)	Gráfica	Tiempo y alumnos	Los alumnos dependen del tiempo
9	(c)	Tabulando y mediante la fórmula	(c)	Tabulando	(c)	Tabulando y graficando	(c)	Por la recta	(c)	Tabulando	Alumnos y tiempo (seg)	Porque dependiendo del tiempo da el resultado de los alumnos que estan dentro de la escuela y de igual manera dependiendo de los alumnos se determina el tiempo

(c) repuesta correcta (i) respuesta incorrecta (n) no contesto

Resultados de la Actividad IV Temperaturas en grados Fahrenheit y grados Centigrados

Equipo	Pregunta 1	Pregunta 2							Pregunta 3	Pregunta 4	Pregunta 5			Pregunta 6	
		a)	b)	c)			d)	e)			a)	b)	c)		
1	(c)	(i)	(i)	Alargamos un poquito	Alargar	(i)	(i)	Si a la grafica que se utilizó	Calculando la pendiente con dos puntos	(i)	(i)	(i)	(i)	°C y °F	No, porque también puede cambiar por grados kelvin
2	(c)	(c)	(i)	Alargando la linea	Alrgando	(i)	(i)	No, por las escalas	Con dos puntos	(i)	(i)	(i)	(i)	Grados centigrados y fahrenheit	(n)
3	(c)	(c)	(i)	Pasa por el punto de intersección	Alargando la linea	(i)	(i)	Porque se trabajo en equipo	Calculando la pendiente de dos puntos	(i)	(i)	(i)	(i)	Grados centigrados y fahrenheit	Cambiar por grados
4	(c)	(c)	(i)	No pasa por el punto de intersección	Alargando la linea	(i)	(i)	Si, a la escala que utilizamos que no se hizo con exactitud	Si, calculando la pendiente con 2 puntos cualesquiera	(i)	(i)	(i)	(i)	Centigrados y Fahrenheit	No, porque también puede cambiar por grados kelvin
5	(n)	(n)	(n)	(n)	(n)	(n)	(n)	(n)	(n)	(n)	(n)	(n)	(n)	(n)	(n)
6	(n)	(n)	(n)	(n)	(n)	(n)	(n)	(n)	(n)	(n)	(n)	(n)	(n)	(n)	(n)
7	(c)	(i)	(i)	Grados centigrados a grados fahrenheit	Alargandola	(i)	(i)	Si, a que cambian los grados	Calculando la pendiente de dos puntos cualesquiera	(i)	(i)	(i)	(i)	Centigrados y Fahrenheit	Porque cad vez que aumenta, aumenta le otro
8	(c)	(c)	(i)	Si, porque es donde se cruzan	Alargandola	(i)	(c)	A la escala que utilzamos	Utilizando la forma punto-punto, sustituyendo valores	(i)	(i)	(i)	(i)	°C y °F	No, porque también puede cambiar por grados kelvin
9	(c)	(c)	(c)	Si, porque se puede alargar la gráfica	Alargar la gráfica	(c)	(c)	No, no se hicierón con exactitud	Si, calculando la pendiente con 2 puntos cualesquiera	(i)	(i)	(i)	(i)	Grados centigrados	Cambiar por grados

(c) repuesta correcta (i) respuesta incorrecta (n) no contesto

Equipo	Actividad introductoria																El círculo trigonometrico											
	Problema 1				Problema 2				Problema 3				Problema 4				Problema 1				Problema 2				Problema 3			
	a)			b)	a)			b)	a)			b)	a)			b)	a)			b)	a)			b)	a)			b)
1	(c)	(i)	(i)	(i)	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)	(i)	(i)	(i)	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)
2	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)
3	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)
4	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)
5	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)
6	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)
7	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)
8	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)
9	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)

Apéndice C

Actividades de exploración para la validación de conjeturas

C.1. Exploración I. Grupo 1

Nombre:____

Reponde a continuación lo que se te pide.

1. Traduce en palabras el número dado.

   Ejemplo:

   2.003 lectura: Dos unidades y tres milésimas

   a)1.01 lectura: ________________________

   b) 0.003 lectura: ________________________

2. Realiza la operación indicada sin usar calculadora mostrando el procedimiento

   a) $1 + 0.00004 =$________________________

   Resultado

   Procedimiento:

   b) $5.01 - \frac{1}{100} =$________________________

   Resultado

   Procedimiento:

c) $2 \times 0.0005 =$ ____

Resultado

Procedimiento:

d) $1.01 \times 2.0005 =$ ____

Resultado

Procedimiento:

3. Coloca en el o en los paréntesis la letra A cuando corresponda a la operación indicada

A) $(1.0003)^2$

[ ] (1.0003×2)

[ ] $(1.0003) \times (1.0003)$

[ ] 1.0003×1.0003

[ ] 2.0009

C.2. Exploración II. Grupo 2

Nombre:____

Reponde a continuación lo que se te pide.

1. Traduce en palabras el número dado.

   Ejemplo:

   2.003 lectura: <u>Dos unidades, cero décimas, cero centésimas y tres milésimas</u>

   a)1.02 lectura: ______________________________

   b) 0.0004 lectura: ______________________________

   c) 1.0 lectura: ______________________________

2. Coloca en el o en los paréntesis la letra **A** cuando corresponda a la operación indicada en el inciso.

   A) 1,03

   [ ] $\left(1\frac{3}{100}\right)$

   [ ] $\left(1\frac{3}{10}\right)$

   [ ] $1 + 0 \times 10^{-1} 3 \times 10^{-2}$

   [ ] $1 + \frac{3}{100}$

3. Realiza la operación indicada sin usar calculadora mostrando el procedimiento.

   a) $2 + 0.0004 =$______________________________

   Resultado

   Procedimiento:

   c) $5.1 - \frac{1}{10} =$______________________________

   Resultado

   Procedimiento:

C.3. Estadística de resultados de la exploración de conjeturas

Actividad de exploración para la validación de congeturas

Actividad I - Grupo I

Estudiantes 29

Errores y aciertos identificados

Pregunta	Inciso	Tipos de Respuestas	No. Estudiantes	Porecentaje
1	a)	Correcta	23	79.3
		Incorrecta	6	20.7
	b)	Correcta	26	89.7
		Incorrecta	3	10.3
2	a)	Correcta	21	72.4
		Incorrecto: No tienen idea del orden de magnitud esperado la suma debía ser mayor que la unidad y no muchísimo menor que la unidad	8	27.6
	b)	Correcto: Pasa al número decimal a mixto y luego hace la resta	1	3.4
		Incorrecto	13	44.8
		No contesta	14	48.3
		Usa calculadora	1	3.4
	c)	Correcto	21	72.4
		Incorrecto	5	17.2
		Usa calculadora	1	3.4
		No contesta	2	6.9
	d)	Correcto	11	37.9
		Incorrecto	7	24.1
		Incorrecto: falla la ubicación del punto decimal	8	27.6
		Usa calculadora	2	6.9
		No contesta	1	3.4
3	a)	Correcto: Elige las dos opciones correctas	1	3.4
		Correcto: Multiplicación sin parentesis	9	31.0
		Correcto: Multiplicación con parentesis	10	34.5
		Incorrecto: una opción incorrecta	1	3.4
		Incorrecto: incorrecto + un incorrecto	2	6.9
		Incorrecto: una opcion incorrecta + dos correctas	5	17.2
		No contesta	1	3.4

Apéndice D

Fotografías del grupo de experimentación

A continuación se muestran algunas fotografías tomadas al grupo experimental durante la relización de las Actividades.

Equipo 1

Equipo 2

Equipo 3

Equipo 4

Equipo 5

Equipo 6

Equipo 7

Equipo 8

Equipo 9

Grupo expermiental

El jurado designado por el Departamento de Matemática Educativa, Unidad Distrito Federal del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, aprueba la tesis:

Introducción de prerrequisitos de Cálculo en un curso de Geometría Analítica del Bachillerato

que presenta **Yazmin Castañeda Segura** para su examen final de Maestría en Ciencias en la especialidad de Matemática Educativa el día 14 de diciembre del año 2011.

Dr. Gonzalo Zubieta Badillo

Dr. Jesús Alfonso Riestra Velázquez

Dr. Hugo Rogelio Mejía Velasco