CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y ESTUDIOS AVANZADOS
DEL INSTITUTO POLITECNICO NACIONAL

Unidad Distrito Federal

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA EDUCATIVA

CREANDO LA ZONA DE DESARROLLO PRÓXIMO PARA QUE NIÑOS DE PRIMARIA TRABAJEN CON LOS TRES USOS DE LA VARIABLE

Tesis que presenta

Beatriz Romero Sánchez

para obtener el Grado de

Maestra en Ciencias

especialidad Matemática Educativa

Directora de la Tesis:Dra. Sonia Ursini Legovich

MÉXICO, DISTRITO FEDERAL FEBRERO 2011

Resumen

La gran mayoría de estudios que abordan la comprensión de la variable multifacética, se han centrado en el nivel medio o medio superior, muy poca investigación ha habido con niños de escuela elemental respecto a la factibilidad de una iniciación temprana a la comprensión de los distintos usos de la variable. Nosotros reportamos un estudio realizado con dos parejas de niños cuyas edades fluctúan entre los 9 y 11 años, que explora si a partir de la introducción de simbología algebraica para representar a la variable multifacética, es posible desarrollar el potencial en ellos para interpretar el uso de los símbolos de forma algebraica apropiada. Este trabajo se inscribe por tanto, en la corriente llamada Álgebra Temprana.

El planteamiento de nuestra investigación difiere de varias investigaciones en Álgebra Temprana (por ejemplo, Blanton y Kaput, 2001; Lannin, et al 2006; Carraher et, al. 2008) que proponen la construcción de un camino que genere la necesidad del uso del símbolo. El marco teórico que guía nuestro estudio se basa en la teoría socio-cultural de Vygotsky que subraya la importancia del uso funcional de la palabra o cualquier otro signo, como medio para fijar la atención, en la formación de los conceptos y enfatiza que el dominio de un concepto nuevo es una consecuencia de una interacción con personas más competentes y es precisamente esta interacción la que crea la *zona de desarrollo próximo.* Otra guía para nuestro estudio nos la proporciona el *Modelo 3UV* (Ursini y Trigueros, 2001) que describe los aspectos que caracterizan los usos de la variable como número general, como incógnita y como variables relacionadas. Los resultados revelaron elementos para poder afirmar que si es posible crear una *zona de desarrollo próximo* para que niños de primaria sean capaces de usar e interpretar símbolos literales asociados a los distintos usos de la variable.

Abstract

The majority of studies addressing the understanding of multifaceted variable have focused on middle or high school levels. There is only a short amount of research focusing on elementary school children investigating the possibility of an early introduction to the use of variable. We report a study with two pairs of children aged between 9 and 11, exploring the feasibility to create pupils' potential to interpret and use algebraic symbols to represent multifaceted variable. Although this work can be ascribed to early algebra, it differs from other studies (eg, Blanton and Kaput, 2001; Lannin et al., 2006; Carraher et al., 2008) that propose to construct a path to creates the need to use symbols.

The theoretical framework guiding our study is based on Vygotsky's theory stressing the importance of the functional use of words or any other sign, in order to develop concepts. He emphasizes that the mastering of a new concept is a consequence of interacting with more competent persons, experts, and through this interaction a *zone of proximal development* is created. Another guide for our study is provided by the *3UV Model* (Ursini and Trigueros, 2001) which describes the aspects that characterize the different uses of the variable: as general number, as unknown and related variables.

The results obtained reveal elements allowing us to affirm that it is possible to create a *zone of proximal development* for elementary school children to be able to use and interpret algebraic symbols associated to the different uses of variable.

Agradezco a la secretaría de Educación Pública (SEP)
por el apoyo brindado durante la realización de la Maestría.

Agradecimientos

A la Dra. Sonia Ursini Legovich directora de tesis, por su profesionalismo y por sus valiosas aportaciones para la realización del presente estudio.

A las Dras. Aurora Gallardo Cabello y Andrea López Pineda por su interés y orientaciones que enriquecieron este trabajo.

Al Director de la Escuela Primaria Sor Juana Inés de la Cruz, por las facilidades para el desarrollo de este trabajo experimental.

A los niños participantes por su disposición y entusiasmo en el trabajo realizado.

A los doctores del Departamento de Matemática Educativa, por compartir sus conocimientos y experiencia en los diferentes seminarios del programa de Maestría.

A Dante, Julio y Santiago
motivos de mi ser y
alegría de mi vida

A Dante por el apoyo
la confianza y el amor

A mis Padres
por ser un gran ejemplo de vida

A mis hermanos
por su solidaridad y amor

ÍNDICE

Introducción.. 1

Capítulo I Revisión de Literatura

I.1 Antecedentes.. 4
I.2 La variable multifacética.. 6
I.3 La variable multifacética, un obstáculo específico en la comprensión del álgebra.. 7
I.4 Propuestas de abordar el álgebra tomando en cuenta el carácter multifacético de la variable.. 9
I.5 Álgebra temprana.. 12
I.6 Simbolización y Álgebra Temprana.. 17
I.7 Resultados de investigaciones recientes en Álgebra Temprana.. 18
Problema de Investigación.. 23
Preguntas de investigación 23

Capítulo II Marco Teórico

II.1. El pensamiento algebraico y la *zona de desarrollo próximo*.. 24
II.2. La interacción, punto fundamental para desarrollar nuevos conceptos.. 27
II.3. El papel del experto en la interacción.. 28
II.4. El *Modelo 3UV*.. 31
II.5. El *Modelo 3UV* como herramienta de diseño de la investigación.. 33

Capítulo III Método

III.1. Características de los Instrumentos Diseñados.. 36
  III.1.1. Cuestionario.. 36
  III.1.2. Actividades diseñadas y presentadas a los alumnos en hojas de papel.. 39

III.1.3. Guía de interacción semi-estructurada.............................. 56
III.2. Sujetos.. 57
III.3. Escenario.. 58
III.4. Datos.. 59
III.5. Análisis de los datos... 59

Capítulo IV Resultados

IV.1. Resultados del cuestionario.. 60

IV.2. Resultados de las actividades.. 65

IV.2.1 Resultados con respecto al uso de la variable como incógnita............ 68
IV.2.2 Resultados con respecto al uso de la variable como número general............ 90
IV.2.3 Resultados de la variable como función.............................. 99
IV.2.4 Resultados de diferenciación del uso de la variable..................... 106
IV.2.5 Resultados de las actividades de integración............................ 117

Capítulo V Conclusiones

V.1. Conclusiones.. 128
V.2. Limitaciones del estudio... 131
V.3. Recomendaciones... 132
V.4. Investigaciones Futuras.. 132

Introducción

El estudio de la noción de variable y sus distintas interpretaciones es la puerta de acceso a los diferentes mundos del álgebra, a saber, el mundo de las expresiones abiertas, de las identidades, de las relaciones funcionales, de las ecuaciones (Ursini, 1996). Investigaciones que estudian a los niños que se inician en el álgebra o que no han recibido aún instrucción formal en álgebra, ponen de manifiesto la necesidad de diseñar ambientes, en los cuales los niños puedan usar sus conocimientos matemáticos previos para acercarse a las diferentes caracterizaciones de la variable con sentido (Ursini, 1994). La gran mayoría de quiénes se han preocupado de esta problemática, por ejemplo, Sutherland y Hoyles (1986), Ursini (1993), López (1996), Rojano (2001), Bills (2001), Montes (2005), Willie (2008), Thair, Cavanagh, y Mitchelmore (2009), se han centrado en el nivel medio o medio superior. Muy poca investigación ha habido con niños de escuela elemental respecto a la factibilidad de una iniciación temprana a la comprensión de los distintos usos de la variable.

Esta investigación pretende contribuir explorando la posibilidad de empezar a trabajar el concepto de variable con niños de primaria que aún no inician un estudio formal del álgebra. Esto es, explorar la posibilidad de desarrollar en ellos un potencial para trabajar con diferentes caracterizaciones de la variable y desarrollar habilidades de cambiar de una caracterización a otra con flexibilidad. Este trabajo se inscribe por tanto, en la corriente llamada *Álgebra Temprana.*

El *Álgebra Temprana* comparte dos aspectos con la mayoría de las matemáticas: la generalización y la simbolización. Y considera a estos dos aspectos, a lo cuales subyace el álgebra, como el corazón de todo razonamiento algebraico (Kaput, Moreno y Blanton 2008).

Esta línea de investigación contempla cuatro sistemas diferentes de representación simbólica: lenguaje natural, notación algebraica, representaciones tabulares y gráficas. Según Kaput (2008), la mayoría de los estudios en *Álgebra Temprana*, si bien introducen la notación algebraica, sólo lo hacen cuando los alumnos tienen dominio de otros sistemas representacionales. Por ejemplo, Blanton y Kaput (2003); Brizuela y Schliemann (2004); Carraher, Schlieman y Brizuela (2007); Warren y Cooper (2008) presentan investigaciones enfocadas al razonamiento de los niños y al uso y comprensión de la notación del álgebra simbólica. En éstas orientan a los estudiantes a identificar regularidades, a partir de explorar un problema en distintos contextos para que de este modo puedan llegar a generalizaciones y a partir de estas actividades introducir a los estudiantes al lenguaje simbólico, mostrando una amplia gama de resultados de lo que estudiantes muy jóvenes pueden hacer.

A diferencia de los trabajos antes mencionados, nuestro estudio se ocupa de la problemática de la interpretación de los distintos usos de la variable, cuando ésta se representa desde un inicio con notación algebraica, que sabemos por investigaciones anteriores, es motivo de muchas dificultades en todos los niveles educativos (por ejemplo, Usiskin, 1988; Ursini et al, 2000; Bardini, Radford y Sabena, 2005).

El marco teórico que guía nuestro estudio es por un lado el *Modelo 3UV* y por el otro la teoría de Vygostsky en cuanto a la creación de la *zona de desarrollo próximo.*

La investigación se realiza con una pareja de niños que ingresan a sexto y con una pareja de niños que cursan cuarto de primaria. Se presentan a las dos parejas actividades diseñadas, con el objeto de investigar qué sentido logran otorgar a las diferentes caracterizaciones de la variable, cuando éstas aparecen representadas con símbolos literales. Se estudia la posibilidad de propiciar la creación de la *zona de desarrollo próximo* para el concepto de variable.

El diseño de las tareas se realizó con base en el *Modelo 3UV* (Ursini y Trigueros, 2001), el cual permite delimitar el propósito de las actividades y formular las preguntas específicas y necesarias para ayudar a los niños a desarrollar la comprensión del concepto de variable. Este modelo se presenta en 2001, siendo utilizado posteriormente en diversas investigaciones (Juárez 2002; Benítez, 2004; Montes, 2005 y Real, 2008) y para el diseño de una propuesta alternativa de la enseñanza del álgebra para los niveles medio y medio (Ursini, Escareño, Montes y Trigueros 2005).

La presentación de esta investigación se organizó en seis capítulos.

El capítulo uno presenta una revisión de las investigaciones realizadas en torno a la enseñanza y aprendizaje del álgebra enfocadas en el concepto de variable y sus diferentes caracterizaciones. Además muestra trabajos acerca de lo que estudiantes muy jóvenes pueden hacer en matemáticas. Estos estudios se inscriben en una línea de investigación actual y muy potente conocida como *Álgebra Temprana* (Early Algebra).

El capítulo dos presenta en forma detallada, los fundamentos teóricos de este estudio. Por un lado se explica la perspectiva teórica sociocultural que se toma en cuenta y, por el otro, se describe el *Modelo 3UV.* La combinación del enfoque socio-cultural y del *Modelo 3UV* proporcionan la herramienta para el diseño del ambiente de interacción y el análisis de datos.

El capítulo tres describe el método utilizado en esta investigación y las categorías de análisis que servirán para analizar los resultados.

El capítulo cuatro contiene los resultados de la aplicación de un cuestionario y se presentan los resultados y análisis de las actividades realizadas con una pareja de niñas que ingresan a sexto y una pareja de niños que cursan cuarto de primaria.

El capítulo cinco expone las conclusiones generales, a las que nos llevó el estudio. Además se señalan las limitaciones del mismo y se hacen algunas recomendaciones para investigaciones futuras.

Finalmente se incluye la bibliografía y un anexo que contiene 5 tablas que muestran los objetivos particulares de cada una de las actividades.

Capítulo I

Antecedentes

Los trabajos de investigación que revisaremos como antecedentes de nuestra investigación pueden clasificarse en dos grupos: estudios en torno a la variable, y estudios en donde se desarrolla razonamiento algebraico en estudiantes de escuela elemental.

Kieran (2006) destaca tres temas mayoritarios que han emergido a lo largo de 30 años de investigación sobre el aprendizaje y la enseñanza del álgebra, reportados en los PME desde 1977 hasta 2006, mismos que se mantienen vigentes.

Temas	*Fecha en que emergen*
• Transición del aritmética al álgebra, variables e incógnitas, ecuaciones y resolución de ecuaciones, problemas verbales del álgebra	Desde 1977
• El uso de herramientas tecnológicas en el aprendizaje del álgebra, y un enfoque sobre representaciones múltiples y generalización	Mediados de los 80´s
• Pensamiento algebraico en estudiantes de escuela elemental, un enfoque sobre el álgebra del profesor y para la enseñanza; modelos dinámicos de situaciones físicas y otros ambientes dinámicos del álgebra.	Mediados de los 90´s

Esta autora señala que las primeras investigaciones enfocadas en la búsqueda de lo que piensan estudiantes adolescentes, cuando transitan de la aritmética al álgebra, acerca de la variable, revelaron una variedad de interpretaciones (Küchemann, 1981; Wagner, 1981; Clement, 1982). Trabajos que dieron continuidad a ésta línea de investigación (Booth, 1984; Matz, 1982; Ursini, 1990; Ursini y Trigueros, 1997, 1999; Fuji 1993; Bills 1997, 2001; Stacey y MacGregor, 1997; Furinghetti y Paola, 1994; Bloedy- Vinner, 2001) afirman que la variable se presenta en una diversidad de formas cuando se resuelven problemas y que en su carácter multifacético está el origen de muchas de las dificultades de los alumnos.

Los resultados de estas investigaciones pioneras y otras más recientes (Kieran, 1992; Bardini et al, 2005; Schmittau, 2005) reportan dificultades y errores comunes que los estudiantes cometen al iniciar el estudio del algebra elemental. Para el presente estudio es importante anotar los siguientes:

Varias han sido las dificultades reportadas con el proceso de formulación de generalizaciones algebraicas. En 1992 Kieran, apunta que los estudiantes no asignan ningún significado a **a** en la expresión $a+3$ porque la expresión carece de un signo igual y un miembro en el lado derecho. Además, afirma que los estudiantes no tienen nociones de cómo tratar ecuaciones del tipo $3x + 5 = 2x + 12$, aún cuando pueden resolver ecuaciones de la forma $3x + 5 = 26$. Esta autora también ha encontrado, que los alumnos no poseen la capacidad de hacer sentido de la igualdad, a pesar de que transponen correctamente en ecuaciones.

Cuando los estudiantes son introducidos por primera vez al concepto de variable tienden de manera natural a interpretar los símbolos literales como representantes de objetos o abreviaturas de nombres de objetos o como números específicos (Küchemann, 1981; Booth, 1984; Stacey y MacGregor, 1997). Las dificultades que los estudiantes tienen con los símbolos literales son persistentes y no se corrigen fácilmente. En esta dirección, estudios recientes por ejemplo, Bardini et al. (2005) afirman que uno de los problemas fundamentales del aprendizaje del álgebra recae en hacer sentido de las literales. Estos autores encuentran que los estudiantes consideran a la variable como un número temporalmente indeterminado, cuyo destino es ser determinado en algún momento.

Estudios que se han enfocado en investigar que pasa con la concepción de variable después de varios años de vida escolar, muestran por ejemplo, que jóvenes que inician la universidad tienen una pobre concepción de la variable en una relación funcional y como número generalizado (Ursini, et al. 2000); estudiantes de preparatoria y universidad restringen variables a números enteros pequeños (Schmittau, 2005).

Algunos de estos estudios en parte de sus conclusiones coinciden en hacer énfasis en aspectos que deben ser cuidados o tomados en cuenta durante la enseñanza del álgebra.

A raíz de estos resultados algunos investigadores como Usiskin (1988, 1997), Ursini (1994), Montes (2005), Willie (2008) y Thair et al. (2009), se han abocado a realizar estudios y propuestas donde se introduce a los estudiantes a la comprensión del concepto de variable tomando en cuenta su carácter multifacético. La gran mayoría de estos estudios y de quiénes se han preocupado de esta problemática, se han centrado en el nivel medio o medio superior, pero muy poca investigación ha habido con niños de escuela elemental respecto a la factibilidad de una iniciación temprana a la comprensión de los distintos usos de la variable.

A este respecto, Kieran (2006) menciona que muchos estudios de investigación enfocados en las dificultades involucradas en la transición del razonamiento aritmético al algebraico han proporcionado, tanto la motivación para pensar en comenzar con exploraciones algebraicas en la escuela elemental, como los fundamentos para algunas de las investigaciones recientes inscritas en la corriente llamada *Álgebra Temprana.*

I.1 La variable multifacética

A principios de los 80`s, Kücheman nos presenta el significado que estudiantes de nivel secundaria asignan a las literales. Identificando seis maneras diferentes de interpretarlas: *Letra evaluada, letra no utilizada, letra utilizada como objeto, letra como incógnita específica, letra como número generalizado, letra como variable*. En donde las tres primeras categorías indican un nivel bajo de respuesta.

De acuerdo con Usiskin (1988), el concepto de variable incluye diversos usos: generalización de patrones utilizado en la aritmética generalizada, incógnitas o constantes como medio para resolver ciertos problemas, argumentos o parámetros en el estudio de relaciones y marcas arbitrarias en el papel en el estudio de las estructuras. En esta misma dirección Ursini (1996), apunta que dependiendo del contexto en el cual aparece la variable se puede caracterizar de tres formas distintas en la enseñanza elemental, una variable puede representar una incógnita cuyo valor se puede conocer con exactitud, puede usarse para representar una relación funcional entre magnitudes variables, o para expresar una generalización. Esta caracterización ha servido de base para varios trabajos de investigación, por ejemplo, Bills (2001), Juárez (2002), Malinassi (2009), Thair et al., (2009).

En 2001 Ursini y Trigueros, como resultado del análisis minucioso de las investigaciones hechas alrededor de éste concepto multifacético tanto por otros investigadores como por ellas mismas (Ursini, 1990; Ursini y Trigueros, 1997, 1999; Fuji, 1993; Bills, 1997, 2001; Stacey y MacGregor, 1997), presentan una herramienta teórica denominada *Modelo 3UV*, la cual además de ayudar a identificar las dificultades con el concepto y los errores que se cometen al resolver problemas planteados que involucren a la variable, sirve como base para poner en práctica propuestas de enseñanza, al permitir delimitar con claridad el propósito de las actividades y formular preguntas especificas y necesarias para ayudar a los alumnos a desarrollar la comprensión del concepto de variable. En el siguiente capítulo se detallará el *Modelo 3UV.*

I.2 La variable multifacética, un obstáculo específico en la comprensión del álgebra

Tal como refiere Kieran (2006), la investigación de las dificultades que presentan los estudiantes acerca de la comprensión del carácter multifacético de la variable ha sido un área de investigación activa en Matemática Educativa, desde los trabajos pioneros de Kücheman (1981), Matz (1982) y Wagner (1983).

Una vez establecida esta línea de investigación, se han realizado trabajos diversos, cuyos resultados hacen énfasis en las posibles causas de las dificultades que los niños presentan con las diferentes caracterizaciones de la variable.

A criterio de Kücheman, para que los estudiantes tengan una buena comprensión aún en los inicios del álgebra, tienen que ser capaces de enfrentar preguntas que requieran el uso de la letra como incógnita específica, aún cuando la estructura de tal problema sea simple. Como comenta Ursini (1994), Kücheman afirma que un niño habrá comprendido perfectamente el uso de los símbolos literales en álgebra, cuando sea capaz de trabajar con la letra como variable, ya que para poder interpretar las letras de esta manera, puede decirse que es un avance sobre la interpretación de la letra como incógnita específica o como número generalizado.

En cuanto a la investigación realizada por Usiskin (1988), éste muestra que si bien sólo uno de los usos de la variable puede aparecer dentro de un problema específico, es usual que los estudiantes tengan que resolver problemas, en los que aparecen más de uno de estos usos. Esto implica que, los estudiantes deben ser capaces de trabajar con números generales, con incógnitas, con variables en una relación funcional y poder pasar de una a otra interpretación, aún cuando estas diferentes caracterizaciones de la variable tengan la misma representación simbólica.

Se ha encontrado que reconocer las diferencias que caracterizan los distintos usos de la variable, puede parecer trivial y hasta insignificante, pero es crucial para los principiantes (Ursini, 1994; Juárez, 2002; Montes, 2005; Willie, 2008; Thair et al., 2009). El no reconocerlas se torna frecuentemente un obstáculo que bloquea el aprendizaje del álgebra, como señalaba Matz (1982) hace ya dos décadas.

En México también se ha hecho investigación en esta línea y queremos destacar algunos resultados recientes:

La investigación desarrollada por Juárez (2002) indica que las concepciones de los profesores acerca de la variable, revelan una problemática muy similar a la reportada en los estudiantes. El autor afirma que las deficiencias mostradas por los profesores se encuentran en los estudiantes también.

Otro aspecto que se analizado para conocer factores causantes de las dificultades con la variable multifacética, son los libros de texto más usados en las escuelas secundarias de nuestro país. Benítez (2004), indica un trato aislado de la variable en los libros de texto, reducido al uso de "la variable como incógnita", lo cual limita la posibilidad de que los alumnos logren desarrollar una buena o, por lo menos, aceptable comprensión del concepto.

Por su parte Ursini y Trigueros (2006) al indagar cuales aspectos de la variable utilizan estudiantes de diferentes niveles educativos, encuentran que, si bien los estudiantes usan con mayor flexibilidad estos aspectos conforme progresan en los cursos de matemáticas avanzadas, su pensamiento algebraico no se desarrolla como se esperaría. Estas mismas investigadoras hacen énfasis en que el uso flexible de la variable es requerido para la solución de ecuaciones algebraicas complejas en un nivel universitario (Ursini y Trigueros 2008).

Los resultados de estas investigaciones han motivado la búsqueda de soluciones tanto nacional como internacionalmente. Se ha realizado propuestas de enseñanza en ambientes tecnológicos y no tecnológicos, cuyo énfasis ha sido tratar de identificar y estudiar lo que los estudiantes son capaces de hacer. De estos trabajos se habla en el apartado siguiente.

I.3 Propuestas de abordar el álgebra tomando en cuenta el carácter multifacético de la variable

A principios de 1990 la perspectiva de muchos investigadores cambia, en lugar de enfocarse en las dificultades que los estudiantes tienen con las diferentes caracterizaciones de la variable cuando trabajan en álgebra, sus trabajos dan muestra de lo que estos pueden hacer en ambientes diseñados para acercarse a tales conceptos con sentido. Los ambientes tienen la finalidad de ayudar a los alumnos a desarrollar un potencial para trabajar con la variable multifacética. Parte de estos trabajos se abordan desde la perspectiva teórica socio-cultural.

La investigación de Ursini (1993), realizada en un ambiente Logo con niños sin instrucción algebraica, muestra la posibilidad de desarrollar en ellos un potencial para trabajar en el mismo periodo de tiempo con diferentes caracterizaciones de la variable y desarrollar habilidades de cambiar de una caracterización de la variable a otra con flexibilidad. Sus resultados enfatizan, que la introducción de los diferentes usos de la variable no necesariamente tiene que ser ordenada de una forma específica, y que los distintos niveles de complejidad de cada una de ellos deben abordarse de forma gradual, a través de situaciones cada vez más complejas.

En otro estudio que involucra un ambiente tecnológico con niños que cursan primer año de secundaria, enfocado en el uso de la hoja de cálculo y tareas diseñadas cuidadosamente, Bills (2004) describe como crear oportunidades para los estudiantes. Si bien proporcionan herramientas técnicas para trabajar con la notación algebraica; lo más importante es que ayuda a fabricar recursos asociados con la construcción de los diferentes significados de la variable. Los resultados obtenidos sugieren que a pesar del lenguaje impreciso de los niños, ellos son capaces de describir la estructura de un patrón general. Además logran construir el significado de la variable como "receptáculo" (placeholder) y utilizan este número generalizado para simbolizar reglas generales.

En ambientes no tecnológicos también se han realizado propuestas interesantes. Existe evidencia que al abordar la enseñanza elemental del álgebra en primer grado de secundaria a través del concepto de variable, usando como soporte el *Modelo 3UV* y una perspectiva sociocultural, se obtienen resultados favorables (Montes, 2005). Estos sugieren, que para lograr un buen aprendizaje se deben además abordar por igual todos los aspectos que contempla cada uso de la variable establecido en el *Modelo 3UV*. Por ejemplo, la autora enfatiza que no es más importante la manipulación de la variable que la interpretación de la misma. El estudio recomienda a los profesores tomar en cuenta que el *Modelo 3UV* por sí solo no garantiza una buena enseñanza, si no que es el trabajo del profesor, bajo una perspectiva sociocultural, junto con la propuesta sugerida, los que permiten lograr un buen proceso de enseñanza aprendizaje.

Otro estudio experimental llamado *enfoque multifacético,* realizado con niños de primero y segundo de secundaria, en el cual consideran a la variable como incógnita, como número general y en una relación funcional de manera simultánea, fue llevado a cabo por Thair et al. (2009). Los problemas involucrados en el experimento de enseñanza utilizan contextos reales para asociar significado a la variable involucrada, combinando patrones, ecuaciones lineales y usando múltiples representaciones como tablas de valores, expresiones algebraicas y gráficas. Los autores apuntan que el énfasis considerable sobre el significado de la variable y la situación de instrucción algebraica en contextos familiares, interesantes y simples (lineales); dan como resultado que los estudiantes adquieran un concepto más viable de variable que los métodos tradicionales.

Una propuesta reciente con relevancia para la enseñanza del álgebra elemental (Ursini, Escareño, Montes y Trigueros, 2005), ha mostrado que usar como auxiliar el *Modelo 3UV* para planificar y estructurar el trabajo que se realiza en el aula, puede ayudar a desarrollar las capacidades de los estudiantes que les permiten resolver exitosamente problemas que involucran a la variable en sus distintos usos: como incógnita, como número general y en una relación funcional. Además ilustra como el *Modelo 3UV* puede usarse como guía en el diseño de actividades dirigidas a los alumnos y finalmente como es usado para el diagnóstico y la evaluación.

La efectividad del uso de modelos como estrategia de enseñanza para desarrollar en estudiantes universitarios ideas sobre las ecuaciones lineales y su solución es analizada por Trigueros, Possani, Lozano y Sandoval (2009). En sus experimentos de enseñanza exploran la relación entre las estrategias de los estudiantes obtenidas a través de un modelo y su uso en la comprensión de la variable. Los resultados que obtienen dependen de la capacidad de los estudiantes de trabajar de forma flexible con los tres usos de la variable. Mostrando así que los alumnos competentes trabajando con variables y aquellos que desarrollaron esta flexibilidad durante la investigación, desarrollaron estrategias ricas y fueron capaces de usarlas para modelar y trabajar con diferentes tipos de problemas. Los alumnos menos avanzados en el manejo de la variable intentaron sin éxito resolver sistemas de ecuaciones, además no lograron hacer sentido de los resultados o interpretar sus soluciones. En este trabajo el *Modelo 3UV* es utilizado para analizar la comprensión del concepto de variable a través de la interpretación del trabajo de los estudiantes.

La mayor parte de la literatura, sobre propuestas de enseñanza que contemplan las diferentes caracterizaciones de la variable, no ha abordado maneras de cómo llevar a cabo una enseñanza bajo esta perspectiva en la escuela elemental. En este sentido, investigadores reconocen que el aprendizaje del álgebra es un proceso complicado y por tanto no debe llevarse a cabo rápidamente. Recomiendan que en la escuela elemental los niños comiencen el estudio de primeras ideas algebraicas y construyan el significado de conceptos abstractos de forma gradual (Davis 1967, 1971/ 1972, 1985; Vergnaud, 1988; Davydov, 1991; Mason ,1996; Usiskin, 1997; Kaput, 1998).

De los pocos investigadores que proporcionan ejemplos de cómo se podría abordar la enseñanza del álgebra en los primeros grados, a través del enfoque multifacético de la variable, es Usiskin (1997). Este investigador analiza algunas páginas de los libros de texto de la escuela elemental, usados en la Unión Soviética a finales de los 70´s, y pone en evidencia como en cada problema aparece un uso particular de la variable (incógnita, fórmulas, patrones generalizados, placeholders, relaciones), si bien señala que en ese entonces no se hacía un énfasis explícito de los distintos usos de la variable durante la enseñanza, éstos aparecen de forma implícita en los textos.

Resultados de investigaciones recientes hechas en Rusia muestran que estudiantes, que trabajaron con las propuestas de los 70´s en la escuela elemental, tienen un dominio más general de las matemáticas (Bodannskii 1991, Schmittau, 2005). La tarea de conducir a los estudiantes de la escuela elemental a lo largo de nuevos caminos de pensamiento algebraico, ha ido construyendo lo que se conoce como *Álgebra temprana.*

I.4 Álgebra Temprana

Considerar como fundamental lo que los estudiantes hacen, piensan y hablan de las matemáticas ha sido un foco de interés para investigadores que han dirigido el álgebra en los primeros grados, desarrollando estudios sobre como los niños comprenden conceptos algebraicos y sus representaciones. Estas propuestas se adscriben a la línea de investigación llamada *Álgebra Temprana* (Early Algebra).

A principios de los 60´s, estudios soviéticos (Davydov, 1962, 1975), muestran que se puede enseñar a los niños métodos generales para representar y resolver problemas a una edad más temprana, lo cual ha implicado la posibilidad de reconsiderar la forma como se ha abordado la enseñanza del álgebra y la edad en la que debe llevarse a cabo dicha introducción. En los últimos años, varios investigadores (Mason,1985; Schmittau, 2005; Dougherty, 2008; Kieran, 2004; Carpenter, Franke y Levi, 2003; Carraher, Schliemann y

Schwartz 2008; Blanton; Cai y Knuth 2005; Bastable y Schifter 2008), estudian los distintos aspectos del álgebra y su papel en las matemáticas propias de la educación primaria.

La propuesta de introducir álgebra a lo largo de todos los grados, hace necesario expandir los puntos de vista de qué es álgebra y reconocer que además de ser un cuerpo de conocimiento establecido, es un *pensamiento* que emerge de la actividad humana (Kaput, 2008). Según el enfoque del *Álgebra Temprana*, los profesores de todos los niveles deben promover el *pensamiento algebraico,* con el objetivo de facilitar el aprendizaje del álgebra y fomentar un aprendizaje con comprensión de las matemáticas. Esta línea de investigación, pretende promover un pensamiento matemático avanzado de acuerdo con las capacidades de los estudiantes de educación primaria, siendo clave la consideración de conexiones entre lo concreto, lo pictórico y el desarrollo de conceptos (Molina, 2004).

Exploraciones sobre qué tipo de experiencias matemáticas preparan a estudiantes de la escuela elemental para un estudio formal del álgebra, han mostrado que el *Álgebra Temprana* puede ocurrir de varias formas interrelacionadas dentro del salón de clases.

Davydov (1962, 1975, 1991), Schmittau (2005), Dougherty (2008), muestran que a los niños se les puede enseñar de manera efectiva métodos generales para representar y resolver problemas desde primer grado de primaria. En estos estudios los alumnos experimentan con modelos físicos de los problemas, el uso de diagramas y la representación simbólica al mismo tiempo, además se apoyan en las relaciones parte-todo y en el uso de problemas que involucran únicamente datos con literales. Por ejemplo, ellos utilizan materiales como volúmenes de agua, pesos diversos de rocas, tiras de papel para mostrar a los niños el significado de todos y partes, desde el comienzo indican con letras los todos y las partes. A continuación relacionan los todos y las partes mediante ecuaciones que involucran los símbolos: +,- e =. Posteriormente inician la resolución de problemas en donde utilizan textos como: *Hay a lápices rojos y b lápices azules en una caja. En total hay c lápices.*

La propuesta de estos investigadores es la base de un desarrollo matemático alternativo que promueve en los niños de primer grado construir, reconocer y usar propiedades de los números reales antes de trabajar con los números enteros o los números naturales.

En la búsqueda de acercamientos que ayuden a los alumnos a desarrollar pensamiento algebraico y su representación simbólica; Mason (1985), por ejemplo, presenta como se puede ayudar a los alumnos a trabajar con aritmética generalizada. De acuerdo con Ursini (1994), Mason enfatiza la importancia de ofrecer a los alumnos la posibilidad de percibir patrones o relaciones y estimular la necesidad de expresarlos antes de apresurarlos para que trabajen con símbolos literales. El generalizar patrones numéricos es visto como un vehículo potencial para que los alumnos transiten de un pensamiento numérico a un pensamiento algebraico, porque ofrece el potencial para dar significado a los símbolos algebraicos al relacionarlos a un referente cuantitativo (Lannin, Baker y Townsend, 2006).

Blanton y Kaput (2001) proponen que en el proceso de introducir ideas algebraicas a estudiantes de educación elemental se tomen en cuenta tres aspectos:
(1) Construir tareas que promuevan la generalización y la formalización progresiva de patrones y de estructuras matemáticas, (2) ejercitar los ojos y los oídos de los profesores sobre el álgebra, de modo que puedan reconocer las oportunidades para realizar tareas algebraicas en las prácticas cotidianas, (3) crear prácticas y una cultura en el salón de clases que apoye el desarrollo de ideas algebraicas a una edad temprana.

Las investigaciones llevadas a cabo por Kieran (2004), respecto a propiciar el paso de la aritmética al *Álgebra Temprana*, han sido relevantes para varios estudios en esta dirección, por ejemplo Izsák y Findell (2005), Cai y Knuth (2005), dado que sugiere cinco puntos a seguir:
(1) Poner atención en los pasos y no simplemente en el cálculo de una respuesta numérica, (2) centrarse en las operaciones así como en sus inversas y en la idea relacionada de hacer y deshacer, (3) poner atención en ambos, representación y solución de un problema más allá de simplemente resolverlo, (4) centrarse en ambos, números y letras, y no solo en números, (5) replantear el significado del signo de igual.
Si bien los cinco puntos sugeridos por Kieran recaen dentro del dominio aritmético, estos representan un cambio dirigido al desarrollo de ideas fundamentales para el estudio del álgebra.

Warren y Cooper (2005), indican que niños de seis y siete años, que reciben un acercamiento al álgebra a partir de una aproximación funcional, permite que los alumnos realicen generalizaciones, proporcionen ejemplos de relaciones y funciones, describan el inverso de tales relaciones y emitan razones validas de cómo encontraron las relaciones inversas.

Por su parte Carraher, Schliemann y Schwartz (2008) sostienen que el algebra reside silenciosamente dentro de los planes de estudios de matemáticas iníciales en problemas verbales, en operaciones (adición, sustracción, multiplicación, división) y en sistemas representacionales (línea numérica, tablas, notación aritmética). Ellos muestran como los profesores pueden ayudar a traer a la luz el carácter algebraico de las matemáticas elementales, a partir de las tablas, dibujos y comentarios verbales que realizan los niños.

Otro de los estudios que aporta evidencias de cómo la propuesta *Álgebra Temprana* está al alcance de todos los alumnos de educación primaria, es por ejemplo, el realizado por Bastable y Shifter (2008) que presenta episodios de diversas clases de educación primaria, cuyos profesores han participado en proyectos diseñados para desarrollar una práctica educativa centrada en el pensamiento matemático de los niños. Estos episodios muestran que cuando el ambiente de una clase de aritmética, es diseñado para seguir el pensamiento algebraico de los niños y dar la oportunidad de que ellos ejerzan sus propias preguntas, exponen interés y habilidad para formular y responder generalizaciones, usando el lenguaje, diagramas e historias contextuales que capturan las acciones de las operaciones más que una notación simbólica formal.

Otro aspecto que se ha explorado con el fin de promover el pensamiento algebraico, ha sido recurrir a ambientes de cómputo con los que se generan contextos de aplicación. Dentro de este tipo de investigaciones podemos mencionar, por ejemplo las realizadas en México por Ursini (1993), Butto y Rojano (2004), Rojano y Perrusquía (2001). Si bien estos estudios buscan introducir ideas de variación funcional, generalización ó razonamiento proporcional, no tienen como objetivo la introducción a la notación algebraica.

Las consideraciones anteriores muestran como desde diversas perspectivas, se ha explorado la viabilidad de la propuesta de "*Álgebra Temprana*", sus dimensiones, su puesta en práctica y las capacidades que ponen de manifiesto los alumnos de educación primaria. No obstante, reconociendo el potencial de esta propuesta, se pone de manifiesto la necesidad de:

- explorar la puesta en práctica de esta propuesta y analizar el desarrollo del pensamiento algebraico por alumnos de educación primaria.
- identificar que contenidos pueden y deben ser presentados en la escuela elemental,
- analizar que herramientas (diagramas, notaciones, gráficos) pueden conducir con éxito, a los alumnos a desarrollar modos algebraicos de pensar,
- estudiar la implicación de la aplicación de esta propuesta para la enseñanza de las matemáticas en niveles superiores (Lins y Kaput, 2004).

Además de estas investigaciones que se enfocan en "qué", "cuándo" y "cómo" se debe abordar el *Álgebra Temprana,* existen otras muy interesantes que tratan de justificar "porqué" desarrollar el pensamiento algebraico desde los niveles elementales. Por ejemplo Wong (2005), quien a través de entrevistas a profesores e investigadores involucrados en el desarrollo del currículo de la escuela primaria de Hon Kong cita:

Mr. LamI: a partir de mi experiencia enseñando en escuela elemental y secundaria, pienso que es correcto introducir álgebra en las matemáticas de la escuela elemental, porque: si esto fuera de otra manera causaría inconveniencia
Entrevistador: ¿porque?,
Mr. LamI: imagina que no introduces álgebra en la escuela primaria, cuando introduces ecuaciones en primero y segundo grados de secundaria, los alumnos simplemente ignoran, dado que pueden resolver los problemas fácilmente con reglas aritméticas con las que están familiarizados. Cuando se presentan problemas más complicados, los alumnos no encuentran un método aritmético que puedan aplicar ni han adquirido un método algebraico para resolverlo"(opinión Mr. P. M. Lam, entrevista realizada en 2002, Wong, 2005, p 26)

De acuerdo con Wong, las ecuaciones simples en el currículo elemental para Mr. Lam sirven como un andamio para el aprendizaje del álgebra en secundaria (en Hong Kong los símbolos son introducidos en el contexto de las ecuaciones desde cuarto grado de primaria).

Resultados de otras investigaciones que se han enfocado en "porque" se debe desarrollar pensamiento algebraico desde la primaria muestran que los niños pueden hacer más de lo que anteriormente se creía (Mason, 2008). Por ejemplo son capaces de hacer generalizaciones, aún cuando estas son matemáticamente incorrectas (Warren, 2001). Además los niños expresan sus generalizaciones en un lenguaje cotidiano simple, un paso necesario para progresar del pensamiento aritmético al algebraico (Herscovics y Linchevski, 1994).

I.5 Simbolización y Álgebra Temprana

"Cuando la simbolización llega a ser algebraica, alcanzar nuevos mundos de la matemática es posible. (Kaput, Blanton y Moreno, 2008).

Dos aspectos son considerados cruciales para la transición de la aritmética al álgebra. Estos son, primero el uso de letras para representar números y segundo una conciencia explícita del procedimiento que esta siendo simbolizado (Kieran, 1992). Lo anterior involucra un cambio de soluciones puramente numéricas a la consideración de un proceso. Muchos estudiantes experimentan dificultades en este sentido, Kieran (1992) sugiere que una razón de estas dificultades se debe a que a la mayoría de los estudiantes no se les brinda la oportunidad de hacer conexiones explícitas entre la aritmética y el álgebra.

¿Para estudiantes de escuela primaria que tipo y nivel de representación algebraica podemos abordar?

En trabajos de investigación en *Álgebra Temprana* (con excepción de los desarrollados bajo la propuesta de Davydov), se observa que los investigadores posponen la representación simbólica algebraica, en favor de la expresión deliberada, a través del lenguaje natural y los dibujos. En este sentido Kaput (2008), señala que la mayoría de estos estudios, si bien introducen la notación algebraica, sólo lo hacen cuando los alumnos tienen dominio de otros sistemas representacionales (lenguaje natural, representaciones tabulares y representaciones gráficas).

Diversos estudios, por ejemplo, Blanton y Kaput (2001), Bastable y Shifter (2008), Carraher, Schliemann y Schwartz (2008), Castro y Molina (2007), revelan que la planificación del profesor juega un papel importante en la organización del proceso de simbolización, lo cual incluye el grado al que quiere llegar. El proceso de simbolización ha sido descrito en términos del desarrollo de una cadena de significación (Cobb et al., 1997) dirigida por la comunicación que reformula la situación inicial y que quizás llegue a una simbolización convencional.

De acuerdo con Duval (1998), la comunicación que tiene lugar en el aula de matemáticas es posible gracias a la consideración de representaciones externas, pues los objetos matemáticos son en definitiva construcciones mentales. Las representaciones son fundamentales en la comprensión de las matemáticas de muy diversas formas: posibilitan la reflexión, haciendo ideas numéricas más concretas, dan soporte y promueven la extensión del razonamiento ayudando a los alumnos a centrarse en determinadas características de una situación matemática y ayudan a reconocer semejanzas y diferencias entre ideas matemáticas favoreciendo la comprensión, comunicación y demostración al facilitar el razonamiento matemático (Fennel y Rowan, 2001; Rico, 1998).

Recientemente Kaput, Blanton y Moreno (2008), apuntan que el proceso de simbolización no puede estar separado de la conceptualización. Ellos consideran que ideas de generalización surgen de nuestros intentos por expresar los símbolos para nosotros mismos y para otros. El nivel y tipo de comprensión de una idea matemática, está condicionado por el tipo de sistemas de símbolos que se consideran para su representación. Por ejemplo, el uso de la notación algebraica permite la eliminación de información superflua y da pie para empezar a generar otros conceptos matemáticos tales como el concepto de función (Kieran, 1996). En Brizuela (2004) se muestra que la notación algebraica puede constituir una herramienta de generalización, para que niños de 10 años comprendan funciones lineales y resuelvan problemas.

I.6 Resultados de investigaciones en Álgebra Temprana

Desde la educación primaria, los estudiantes encuentran el signo igual en diversas actividades matemáticas. En un estudio realizado por Behr, Erlwanger y Nichols (1980),con niños de seis y siete años, se observó que los niños perciben el signo igual como un estímulo para dar una respuesta y tienen ideas definidas sobre como debe escribirse la igualdad. Por ejemplo, los alumnos no aceptan igualdades de la forma ___ = 22- 9, afirman que están al revés y las modifican escribiendo 22-9= ___. Además rechazan igualdades de no acción, es decir, igualdades de la forma 3=3, o que incluyen signos operacionales en ambos lados de la igualdad, 3+5= 7+1. En estudios subsecuentes, se ha detectado la persistencia de concepciones erróneas del signo igual en estudiantes de todos los grados de educación elemental. La mayoría de estos estudios, refieren como principal causa de la limitada comprensión del signo igual, la reiterada consideración de igualdades únicamente de la forma a + b = c (Kieran, 1992; Carpenter, Franke y Levi, 2003, Castro y Molina 2007).

Investigaciones han demostrado que la mayoría de los estudiantes de educación elemental presentan una correcta comprensión del concepto de igualdad, cuando consideran relaciones de igualdad en experiencias físicas de modelización o en problemas verbales (Carraher, Schliemann y Brizuela, 2007). De acuerdo con Castro y Molina (2007), el trabajo con sentencias numéricas verdaderas y falsas basadas en relaciones o propiedades aritméticas básicas, en las que se les da prioridad a la discusión y explicación de lo realizado por parte de los estudiantes, favorece y desarrolla la comprensión de las igualdades.

Por otro lado, durante la escuela primaria y antes de cualquier acercamiento al álgebra, los niños empiezan a trabajar con problemas simples en los que se les pide determinar el valor de una incógnita específica. Usualmente para resolverlos se introducen expresiones de la forma 2+3= ____, □+12=59, es decir, el valor no es representado por un símbolo literal si no por otros signos. Sin embargo, se ha documentado que al principio del periodo de transición del aritmética al álgebra los estudiantes no ven el porqué necesitan plantear y resolver una ecuación para resolver problemas (Cai et al, 2005).

La investigación acerca de la introducción de problemas cuando se inicia el estudio del álgebra, ha reportado resultados favorables cuando por ejemplo, se usan ambos enfoques (aritmético y algebraico) para resolver ecuaciones, después de un periodo de tiempo, los estudiantes llegan a ver las ventajas de utilizar ecuaciones en la resolución de problemas (Cai et al, 2005). En esta misma dirección, se ha encontrado que los problemas en donde todos los valores numéricos son conocidos, provocan respuestas de cálculo en su mayoría, mientras que aquellos en donde los valores permanecen en la comparación de lo desconocido o parcialmente desconocido, de forma frecuente propician otro tipo de justificaciones (Carraher, Schliemann y Brizuela, 2007). Algunos investigadores recomiendan que la enseñanza del álgebra no se debe abordar usando problemas que refieren situaciones del mundo real, porque la esencia del álgebra no es aplicada (Kieran 1992, Usiskin 1995).

Es importante para este estudio anotar también que el sistema simbólico algebraico es considerado como una de las principales fuentes de dificultades, motivo por el cual se pospone la introducción progresiva de interpretaciones del simbolismo algebraico más abstractas. No obstante el estudio realizado por Behr, Erlwanger y Nichols (1980), muestra que niños de seis y siete años, son capaces de concebir que las letras representan números, cuando se trabaja con expresiones de la forma 2*6=4*3 en las cuales se incluyen de forma gradual más operaciones, y como siguiente paso se esconde uno de los números (con un dedo, sustituyéndolo con una caja o con una letra).

Sin embargo, generalmente en matemáticas se ha enseñado que se usan letras para representar números y que estas representan cualquier número. Pero, ni los libros ni el profesor consideran necesario aclarar la diferencia entre la letra usada como número general y la letra usada como incógnita. Esto lleva a la confusión que manifiestan los estudiantes: "La letra representa cualquier valor sin embargo, hay que encontrar cual es ese valor". Así para muchos estudiantes es aceptable que en la expresión 3+a+a+a=10, se asignen distintos valores a la letra involucrada. Puestos ante la expresión 3+a+a+a=b, muchos estudiantes comentan: "No se puede resolver porque no tiene un resultado" o "Es el resultado de una suma x". Lo cual manifiesta la dificultad para aceptar a un número general como resultado de una suma, así como el problema que tienen muchos estudiantes en ver que la expresión muestra una relación entre dos variables (Ursini et al. 2005).

Un estudio realizado por Cai et al. (2005), reporta distintos acercamientos al álgebra que se han usado en el currículo elemental de varios países (China, Corea del Sur, Singapur, Rusia y Estados Unidos). Estos autores mencionan que el currículo de primaria de Singapur proporciona a los estudiantes de primaria, una amplia variedad de experiencias que ayudan a desarrollar en los alumnos pensamiento algebraico, lo cual se hace posible por el uso de tres enfoques: resolución de problemas, generalización y funcional. El análisis que ellos realizan, muestra el uso de tres grandes ideas: incógnitas, patrones numéricos y letras como variables. Sin embargo la noción de letras como variables es introducida hasta sexto grado de primaria, antes los estudiantes sólo usan rectángulos para representar incógnitas en problemas verbales y exploran las estructuras que subyacen a patrones numéricos. No obstante, los autores apuntan que esta forma de abordar el desarrollo del pensamiento algebraico en nivel primaria podría proveer una transición menos difícil al álgebra de secundaria.

En la propuesta *Álgebra Temprana* los estudiantes necesitan ser introducidos a la notación algebraica de tal forma que les hagan sentido. Desde 1991 Bodanskii, encuentra que niños de 10 años que fueron introducidos a problemas algebraicos y a la notación de ecuaciones desde primer grado, tienen mejor desempeño en la resolución de problemas verbales y el planteamiento de ecuaciones que estudiantes que solo acceden al estudio del álgebra a la edad de 11 años.

Los trabajos referidos en este capítulo, involucran a estudiantes de todas las edades pero sobre todo de educación primaria. Además, destacan ideas esenciales respecto a cómo superar las dificultades propias del aprendizaje del álgebra, la comprensión de los distintos usos de la variable y su representación simbólica. Para ubicar nuestra investigación, hemos catalogado la literatura consultada en dos grandes bloques. Esta clasificación, se hace en relación a la manera en que los estudios han propuesto la introducción de la simbología algebraica formal.

El primer bloque, es encabezado por las investigaciones realizadas por Davydov, que plantean introducir el uso de símbolos literales para representar generalizaciones desde el inicio de la educación elemental. En estos estudios, por ejemplo, los investigadores observan cuidadosamente cada detalle de los niños inmersos en todos los refinamientos de comparación de cantidades, y al mismo tiempo los confrontan con pruebas en las que los niños determinan que cuando agregan un volumen A a un volumen B, el resultado es el mismo, cuando el orden de la adición es el contrario los niños etiquetan sus resultados con letras, tales como T+C= C+T, con la comprensión de que tal resultado es generalizable a cualquiera dos cantidades. Tal forma especial de instrucción se enfoca en las estructuras algebraicas y entonces aplica los conocimientos teóricos a ejemplos numéricos concretos (Davydov 1962, 1975, 1991; Schmittau, 2005 y Dougherty, 2008).

Las investigaciones de este bloque han mostrado que el uso de representaciones físicas, gráficas y el uso de literales al mismo tiempo, tienen una fuerte influencia positiva en la habilidad de los niños para tratar con matemáticas más complejas a una edad temprana. Además, muestran que los niños son capaces de usar notación algebraica como un medio para lograr la comprensión e interpretación de situaciones problemáticas.

El segundo bloque, en donde están incluidos la mayoría de los estudios presentados, aporta evidencias importantes en relación a la posibilidad de introducir conceptos algebraicos desde la educación primaria, mediante un proceso que culmina con la introducción de la notación algebraica asociada al concepto. Esto es, varios de estos estudios recurren al uso de otros sistemas de representación, para elaborar un plan que conduce a la introducción gradual de la notación formal del álgebra, y cuando esto ocurre el proceso se da por terminado. Esto genera la impresión de que los investigadores asumen, que en el momento en que los niños usan el símbolo, es porque han comprendido el concepto algebraico asociado, y su representación formal.

Algunos estudios de éste segundo bloque, sugieren trabajar con el concepto de variable previamente a la introducción del simbolismo algebraico, de estos trabajos, existen los que se abordan en el contexto de la aritmética y los que se abordan en ambientes computacionales. Por ejemplo, los trabajos realizados en México (Butto, 2007; Perrusquia, 2001), en ambientes computacionales, aportan evidencia de la posibilidad de desarrollar en niños de primaria un potencial para trabajar con este concepto.

También ha habido estudios interesantes, desarrollados con estudiantes de escuela secundaria o medio superior (Bills 2001, Ursini, 1993; Montes, 2005; Thair et. al, 2009), en los que se profundiza sobre la comprensión del concepto de variable multifacética en diversos contextos (aritmético, geométrico, resolución de problemas verbales). No obstante estos siguen el enfoque que va de los fenómenos particulares a la generalización.

De lo hasta aquí mencionado surgen las ideas que motivan nuestro trabajo de investigación. Proponemos explorar la posibilidad de que los estudiantes de primaria otorguen un sentido algebraico a los diferentes usos de la variable partiendo de la introducción de la literal. Esto es, no vamos a llegar al uso de la literal para representar a la variable a través de la generalización de casos particulares como los estudios del segundo bloque y como es la tendencia en México. Sino, a partir de una introducción temprana de símbolos representar a la variable multifacética, indagar si es posible desarrollar el potencial de los niños para interpretar el uso de los símbolos de forma algebraica apropiada. Este planteamiento difiere de varias investigaciones en *Álgebra Temprana* (por ejemplo, Blanton y Kaput, 2001; Lannin, et al 2006; Carraher et, al. 2008) que proponen la construcción de un camino que genere la necesidad del uso del símbolo.

Lo anterior puede ser expresado en el planteamiento del siguiente problema de investigación.

Explorar que tanto sentido logran otorgar estudiantes de primaria, a la simbología algebraica formal asociada a los diferentes usos de la variable, cuando se trabaja en un ambiente de interacción con el investigador, diseñado bajo la perspectiva del modelo 3UV. Entenderemos por "sentido", la expresión de lo que el niño se imagina acerca de la variable simbólica en acciones, palabras, dibujos y símbolos (Mason, 2006).

Dada la relevancia del problema nos centramos en dar respuesta a las siguientes preguntas.

¿Es posible crear una zona de desarrollo próximo para que los niños de primaria sean capaces de usar e interpretar símbolos literales asociados a los distintos usos de la variable?

¿A partir de que grado de nivel primaria se puede crear la zona de desarrollo próximo para que los niños de primaria sean capaces de usar e interpretar símbolos literales asociados a los distintos usos de la variable?

Capítulo II

Marco Teórico

Es de interés para este estudio dar cuenta de la posibilidad de ayudar a estudiantes muy jóvenes a desarrollar un potencial para: trabajar con los distintos usos de variable, usar e interpretar la notación algebraica asociada.

La idea de ayudar a desarrollar un potencial para trabajar con conceptos algebraicos esta ligada a la idea de "*zona de desarrollo próximo*" (*ZDP*) de Vygotsky (Ursini, 1994). El planteamiento de la *ZDP*, ha sido útil para que educadores e investigadores de la infancia temprana vean a los niños de otra manera, y por tanto modifiquen la forma en que enseñan e interactúan (Bodrova y Leong, 2004).

II.1 El pensamiento algebraico y la zona de desarrollo próximo

En las primeras décadas del siglo XX Vygotsky establece claramente su punto de vista sobre el pensamiento algebraico.

El paso de los preconceptos (como son normalmente los conceptos aritméticos del escolar) a los verdaderos conceptos, tales como los conceptos algebraicos de los adolecentes, se consigue generalizando las generalizaciones del nivel anterior. En dicho estadio, las ideas numéricas habían sido abstraídas y generalizadas a partir de ciertos aspectos de los objetos. Los conceptos algebraicos representan abstracciones y generalizaciones de ciertos aspectos de los números, no de los objetos, y de este modo suponen una nueva orientación, un plano nuevo y superior del pensamiento. Estos conceptos nuevos y superiores, a su vez, transforman el significado de los inferiores. El adolescente que llega a dominar los conceptos algebraicos alcanza un punto desde donde se le ofrece una visión panorámica de los conceptos aritméticos. (Vygotsky, 1995, p. 190).

Vygotsky tiene en cuenta que un concepto no es una formación aislada, fosilizada e inmutable, sino una parte activa del proceso intelectual, puesta continuamente al servicio de la comunicación, el entendimiento y la resolución de problemas. Además lo que juega un papel central en la formación de conceptos es un uso funcional de la palabra, o de cualquier otro signo, como medio para fijar la atención seleccionar los rasgos definitivos, analizarlos y sintetizarlos. La formación de los conceptos es el resultado de una actividad muy compleja, en la que intervienen todas las funciones intelectuales básicas. Por tanto éste proceso no se puede reducir a asociación, atención, imágenes y juicio ni a tendencias determinantes. Todos estos factores son indispensables pero insuficientes sin el uso del signo o palabra como "instrumento" funcional.

En sus observaciones Vygotsky sostiene que sólo los conceptos superiores (también llamados científicos) son los conceptos reales. Los conceptos empíricos (también llamados espontáneos) no son conceptos verdaderos y de aquí, son designados como preconceptos (Schmittau, 2005).

Estos dos grupos de conceptos diferentes, aunque relacionados entre sí: el científico y el espontáneo, de acuerdo con la teoría vygotskiana, tienen su origen en dos formas de experiencia básica. Los conceptos científicos se originan en la actividad sumamente estructurada y especializada del aula e imponen al niño conceptos definidos lógicamente. Los conceptos espontáneos surgen de las propias reflexiones del niño sobre su experiencia cotidiana. En cuanto a la relación que guardan entre sí *"Se podría decir que el desarrollo de los conceptos espontáneos se produce de abajo arriba y el desarrollo de los conceptos científicos, de arriba abajo, hacia un nivel más elemental y concreto*" (Vygotsky, 1995, p. 184). Además, tanto los conceptos científicos como los espontáneos, empiezan, no terminan su desarrollo, cuando el niño aprende el término que denotan los nuevos conceptos.

Si bien, los conceptos científicos y los espontáneos se desarrollan en direcciones opuestas, los dos procesos están íntimamente conectados. *Cuando un niño aprende conceptos científicos, se reestructuran sus conceptos de la vida diaria, si un niño carece de conocimientos previos, o si sus conceptos de la vida diaria no igualan los significados convencionales, entonces tiene dificultad para adquirir conceptos científicos* (Bodrova y

Leong, 2008, p. 102). Esto es, el desarrollo del concepto espontáneo es necesario para que el niño sea capaz de asimilar un concepto científico.

Basados en esta teoría, algunos investigadores rusos defienden la presentación de conceptos, que en nuestras escuelas son introducidos apenas en la escuela secundaria, en los primeros años de la escuela primaria e incluso en el jardín de niños (Davydov, 1991; Rubtsov, 1991).

¿Qué ocurre en la mente del niño con los conceptos científicos que se le enseñan en la escuela?

Para Vygotsky (1995) a cualquier edad, un concepto expresado en una palabra representa un acto de generalización. Pero los significados de las palabras evolucionan. Cuando el niño aprende una palabra nueva, el desarrollo verbal apenas acaba de empezar: al principio, la palabra es una generalización de tipo más primitivo; conforme se desarrolla el intelecto del niño, es reemplazada por generalizaciones de un tipo más elevado (un proceso que culmina con la formación de los verdaderos conceptos), el desarrollo de conceptos, o significado de palabras, presupone el desarrollo de muchas funciones intelectuales (atención deliberada, memoria lógica, abstracción, la capacidad para comparar y diferenciar).

Esta teoría enfatiza que la enseñanza directa de los conceptos es imposible y estéril, esto es, quien intente hacer esto no conseguirá nada salvo el verbalismo hueco, una repetición mecánica de palabras que simula un conocimiento de los conocimientos correspondientes, pero que, en realidad encubre un vacío.

Kozulin en la introducción del libro Pensamiento y Lenguaje de Vygotsky, apunta que en la formación de los conceptos de un niño, el progreso alcanzado en cooperación de un adulto es un indicador mucho más sensible de las aptitudes intelectuales del niño. En este contexto Vygotsky usaba el término "*zona de desarrollo próximo*"*: lugar en el que, los conceptos espontáneos de un niño, empíricamente abundantes, pero desorganizados, "se encuentran" con la sistematización y lógica del razonamiento adulto. Como resultado de tal encuentro la debilidad del razonamiento espontáneo queda compensada por la fortaleza de la lógica científica del adulto* (Vygotsky, 1995, p. 25). El producto final de esta cooperación entre el niño y el adulto es una solución que, al ser interiorizada, se convierte en parte integrante del propio razonamiento infantil.

Para Vygotsky, "*un aspecto esencial del aprendizaje es que este va creando la ZDP, ya que despierta una variedad de procesos internos de desarrollo que operan sólo cuando el niño interactúa con otras personas de su entorno y con sus compañeros. Una vez que tales procesos son interiorizados, se vuelven parte del propio desarrollo del niño*"(Ursini, 1994, p. 103).

II.2 La interacción, punto fundamental para desarrollar nuevos conceptos

De acuerdo con Ursini (1994), se considera que el dominio de un concepto nuevo es una consecuencia de una interacción con personas más competentes y es precisamente esta interacción la que crea la *ZDP* Esto es, la *ZDP* no esta en el niño esperando que una persona más competente la despierte, sino que se crea, para un tema en particular, en consecuencia a las negociaciones que se establecen entre el niño y el experto (McLane, 1987).

A partir de las negociaciones entre el niño y el experto, el niño se encuentra ante la posibilidad de "experimentar algo", de interpretar, valorar, de dotar de sentido a la realidad. Según Guitart (2008) en el hecho de interpretar, de dotar de sentido y significado a la realidad se ponen en juego los conocimientos previos, las experiencias, las características psicológicas, y las características del entorno.

En la interacción sensible y adecuada con el niño, el maestro puede distinguir cuál es exactamente el concepto que tiene. Desde el enfoque socio-cultural la producción de explicaciones de los niños, durante los diálogos con el maestro, dan claridad en la creación de la *zona de desarrollo próximo* y en el desarrollo de la comunicación (Brown y Palincsar, 1989). Explicar, puede además, realzar la conciencia de las diferencias mínimas planteadas y discutidas, consideradas importantes para el que explica tanto en los puntos débiles como los fuertes de su propio razonamiento respecto por ejemplo, a un tema de matemáticas (Hershkowits y Arcavi, 2009).

De acuerdo con Lave (2008), lo que el niño aprende es lo que puede hacer en conjunto con otro. Conforme el niño interactúa con otras personas, en contextos distintos, con tareas distintas, reestructura su significado personal inicial una y otra vez. Con el tiempo el significado se hace similar al significado adoptado culturalmente o al significado convencional (Bodrova y Leong, 2004).

Si bien, como podemos observar el vehículo fundamental de la creación de la *ZDP* bajo las ideas de Vygotsky es la interacción social, enseñar es una actividad compleja que exige al enseñante utilizar diversas estrategias.

II.3 El papel del experto en la interacción

La teoría socio-cultural contempla que al principio del proceso de aprendizaje el experto tiene más participaciones activas y le brinda al niño una mayor cantidad de ayuda. Dirige su conducta más de lo que hará en el resto del proceso. Conforme el novato aprende, su responsabilidad respecto al desempeño cambia, puesto que su papel en la producción de la conducta se vuelve más importante. Entonces la tarea del experto consiste en determinar cuando retirar la ayuda para propiciar el exitoso desempeño independiente del niño (Bodrova y Leong, 2008, p. 102).

De acuerdo con Bruner (1983), en la *ZDP* ocurre lo siguiente con el papel del experto.

- La tarea no se hace más fácil, pero la cantidad de asistencia varía.
- La responsabilidad del desempeño se traspasa o se cede al niño conforme éste aprende

En esta misma dirección Wood (1998) ha desarrollado un enfoque de la enseñanza caracterizado por unos principios de *incertidumbre* y de *contingencia*. Según este enfoque, la incertidumbre dificulta el aprendizaje. Cuando un estudiante se siente inseguro o está poco familiarizado con las características relevantes de una tarea se reduce la motivación, la orientación hacia la tarea y el recuerdo de la tarea misma. Esto recuerda la noción de Greeno (1991) de "aprender el paisaje" o entorno de una tarea. Para Greeno, un experto, es en parte, alguien que está familiarizado con el terreno de la tarea, con sus rasgos y sus exigencias. Por lo tanto, un experto es alguien que ha reducido la incertidumbre en relación con una tarea. Los estudiantes con una incertidumbre elevada necesitan apoyo durante el proceso de reducir esta incertidumbre o de "aprender el paisaje" de la tarea.

El segundo principio fundamental del enfoque de Wood es que el apoyo ofrecido en la *ZDP* de un estudiante cuya incertidumbre en relación con una tarea es elevada debe ser dependiente de las respuestas del estudiante. Dentro de la *ZDP* de la situación de aprendizaje-enseñanza concebida por Wood se proponen cinco niveles de control creciente. Las indicaciones o sugerencias van desde un control mínimo- el enseñante da pie a la respuesta del estudiante mediante una pregunta de carácter general como ¿qué se podría hacer aquí?- hasta situaciones muy controladas donde el enseñante hace una demostración de los pasos necesarios para realizar la tarea. A continuación presentamos los niveles de Wood: (0) ninguna ayuda, (1) sugerencia verbal general por ejemplo, "¿qué se podría hacer aquí?", (2) sugerencia verbal concreta por ejemplo, "aquí podrías usar el equipo informático?", (3) indicar materiales por ejemplo, "¿por qué no usas el trazador de gráficos?", (4) preparar materiales, (5) hacer una demostración del uso de instrumentos.

Según el principio de contingencia de Wood, cada vez que el estudiante realice correctamente un paso o una acción, el enseñante deberá reducir el nivel de control; por otro lado si el estudiante comete un error, el nivel de control deberá aumentar. Por tanto, el nivel de apoyo es contingente –dependiente- en relación con los progresos del estudiante durante la interacción con el enseñante; Wood nombra "principio de contingencia" a esta interpretación de la interacción. La tarea del enseñante es procurar garantizar estos progresos y al mismo tiempo, reducir el nivel de control. Lo ideal es que el estudiante vaya reduciendo su nivel de dependencia de la estructura de apoyo a medida que avanza en la secuencia de aprendizaje.

Además de la asistencia proporcionada por el experto en la interacción, otro punto importante considerado por la teoría Vygotskiana, es que el ambiente lingüístico con sus significados verbales estables y permanentes, traza el camino que tomarán las generalizaciones del niño. Los adultos, mediante su comunicación verbal con el niño, son capaces de predeterminar la senda del desarrollo de las generalizaciones y su punto final, un concepto plenamente formado. Pero el adulto no puede transmitir al niño su forma de pensar. Simplemente le proporciona los significados acabados de las palabras, en torno a los cuales el niño construye complejos. El eslabón que conecta el pensamiento por complejos y el pensamiento por conceptos son los pseudoconceptos. Son semejantes a los conceptos en su apariencia, pero difieren sustancialmente de ellos en su realidad interna.

Para este estudio tomaremos en cuenta todos estos trabajos, dado que, procederemos a centrarnos en el proceso de la formación del concepto de variable al hacer un uso funcional de la notación algebraica. Esto es, introduciremos el uso de la notación algebraica como un equivalente a la introducción de la palabra que refiere Vygotsky como "instrumento" funcional indispensable en la formación de conceptos.

El interés de nuestra investigación, no es buscar que el niño asimile el significado del uso de la notación algebraica de una forma directa e inmediata, sino que a partir de la introducción de simbología carente de significado, acompañemos al niño para que encuentre respuestas, se le explique, y se lleve al estudiante a que reflexione y explique el mismo, que encuentre significados en torno a la simbología que representa la variable en su carácter multifacético y se le va ofreciendo elementos que le ayuden a corregir y refinar sus explicaciones. Esto es, trabajar la creación de la *ZDP,* realizando la conexión entre sus conocimientos, y este nuevo concepto, a través de la interacción con el adulto.

El ambiente de interacción que se desarrollará, pretende crear oportunidades para escuchar, discutir, imitar y legitimar diferentes propuestas que subyacen al concepto de variable y a la comprensión de los símbolos literales asociados a los tres usos de la variable. Además, este ambiente estará diseñado para proveer espacios para explicaciones y negociaciones por medio de la verbalización, la ilustración, la ejemplificación, el uso de la tecnología y la realización de analogías. Lo anterior, con el fin de explorar hasta donde el niño, en interacción con el experto, otorga sentido a las diversas caracterizaciones de la variable representadas con notación algebraica; y que esta exploración pueda servir como punto de partida a investigaciones futuras sobre como abordar una propuesta de enseñanza de este tema desde la enseñanza elemental.

Bajo esta perspectiva sociocultural, podemos determinar el papel del investigador como un experto que; por un lado utilizando estrategias comunicativas y propiciando la participación activa de los estudiantes mediante preguntas guía y la introducción de los elementos iníciales en la resolución de un problema; ayuda a los estudiantes, a construir el concepto de variable representado con notación algebraica y a desarrollar un potencial para trabajar con sus distintos usos. Por otro lado mediante la comunicación verbal con el niño, es capaz de predeterminar la senda del desarrollo de las generalizaciones y su punto final, un concepto plenamente formado.

Este es, el marco teórico que guiará esta investigación tanto en su fase de trabajo de campo como en el análisis de los datos obtenidos y en la interpretación de los resultados.

II.4 *Modelo 3UV*

El *Modelo 3UV* ***(modelo de los tres usos de la variable)***, fue propuesto por Ursini y Trigueros en 2001, como un marco para analizar las producciones de los estudiantes, para diseñar instrumentos diagnóstico y para la investigación. Además ha sido utilizado como guía en el diseño de actividades de enseñanza y para analizar materiales de enseñanza relacionados al concepto de variable en álgebra elemental.

El *Modelo 3UV* presenta un análisis muy detallado de cada uno de los tres principales usos de la variable en el álgebra elemental: incógnita específica, número general y relación entre variables. La comprensión de cada uno de los usos de la variable requiere del manejo de diferentes aspectos que subyacen a cada uso, en diferentes niveles de abstracción.

De acuerdo con sus autoras los requerimientos pueden ser presentados de forma sintética de la siguiente manera:

Para trabajar exitosamente con problemas y ejercicios que involucran a la variable como incógnita es necesario:

I1 Reconocer e identificar, en una situación problemática la presencia de algo desconocido que puede ser determinado considerando las restricciones del problema

I2 Interpretar la variable simbólica que aparece en una ecuación, como la representación de valores específicos.

I3 Sustituir la variable por el valor o valores que hacen de la ecuación un enunciado verdadero.

I4 Determinar la cantidad desconocida que aparece en ecuaciones o problemas, realizando operaciones aritméticas, algebraicas o de ambos tipos.

I5 Simbolizar las cantidades desconocidas identificadas en una situación especifica y utilizarlas para plantear ecuaciones.

Para trabajar exitosamente con problemas y ejercicios que involucran a la variable como número general es necesario:

G1 Reconocer patrones y percibir reglas y métodos, en secuencias y en familias de problemas.

G2 Interpretar la variable simbólica como la representación de una entidad general, indeterminada, que puede asumir cualquier valor.

G3 Deducir reglas y métodos generales, en secuencias y en familias de problemas.

G4 Manipular (simplificar, desarrollar) la variable simbólica.

G5 Simbolizar enunciados, reglas o métodos generales.

Para trabajar exitosamente con problemas y ejercicios que involucran variables en una relación funcional es necesario:

F1 Reconocer la correspondencia entre variables relacionadas, independientemente de la representación utilizada (tablas, graficas, problemas verbales, expresiones analíticas).

F2 Determinar los valores de la variable dependiente, dados los valores de la independiente.

F3 Determinar los valores de la variable independiente, dados los valores de la dependiente.

F4 Reconocer la variación conjunta de las variables involucradas en una relación funcional, independientemente de la representación utilizada (tablas, graficas, problemas verbales, expresiones analíticas).

F5 Determinar los intervalos de variación de una de las variables, dado el intervalo de variación de la otra.

F6 Simbolizar una relación funcional, con base en el análisis de los datos de un problema.

Una comprensión de la variable implica la comprensión de todos estos aspectos y la posibilidad de cambiar entre ellos dependiendo del problema a resolver. Lo cual implica que los estudiantes necesitan desarrollar la habilidad de *interpretar la variable* de diferentes maneras, dependiendo de la situación problemática específica, adquiriendo la flexibilidad de cambiar entre sus diferentes usos y la capacidad de integrarlos como facetas de un mismo objeto matemático. Así mismo necesitan desarrollar la habilidad de *manipular variables simbólicas* con el fin de realizar cálculos simples. Ambas habilidades ayudan al estudiante a adquirir gradualmente una compresión de porque las operaciones funcionan. La habilidad de *simbolizar reglas y relaciones* en diferentes situaciones problemáticas los conduce a prever las consecuencias de usar variables (Ursini, 2008).

II.5 El modelo 3UV una herramienta de diseño de la investigación

El *Modelo 3UV* puede usarse como guía en el diseño de actividades que efectuarán los sujetos de una investigación, puesto que permite delimitar con claridad el propósito de las actividades, y formular preguntas específicas y necesarias, tanto para ayudar a los estudiantes a desarrollar la comprensión del concepto de variable (Montes, 2003), como para investigar la comprensión del concepto que poseen los alumnos (Real, 2008).

Se ha usado además, para la elaboración de instrumentos diagnóstico que tienen la finalidad de investigar la capacidad de interpretar, manipular y simbolizar situaciones que implican los distintos usos del concepto de variable. Estos instrumentos se han aplicado a poblaciones de educación secundaria (Trigueros, Ursini y Lozano, 2000; Real, 2008), y preparatoria (Malinassi, 2008).

Los resultados que han reportado los estudios mencionados, por ejemplo Trigueros, Ursini y Lozano (2000), sugieren que la mala conceptualización de la variable que manifiestan los estudiantes parece tener su origen en la manera como se tratan los distintos usos de la variable, dado que las características que los hacen diferentes no suelen hacerse explicitas. De acuerdo con estas autoras en los distintos cursos se pone énfasis en uno u otro uso de la variable de manera aislada, y no se hace ningún esfuerzo explícito para ayudar a los estudiantes a integrarlos y darse cuenta de que se trata de un concepto multifacético.

Resultados como el anterior han permitido dar un enfoque diferente a la enseñanza del álgebra, basado en el *Modelo 3UV* (Ursini et al., 2005).

Es así que para dar respuesta a nuestra pregunta de investigación se usarán dos marcos complementarios. Por un lado, para el análisis de la creación de la *ZDP* para trabajar las diferentes caracterizaciones de la variable utilizando notación algebraica, recurriremos a la teoría socio-cultural de Vygotsky. Por otro lado, dado que se explora qué tanto sentido logran otorgar estudiantes de primaria, a la simbología algebraica asociada a los diferentes usos de la variable, se usará el *Modelo 3UV* para analizar la comprensión de los estudiantes a través de la interpretación de su trabajo. Además, las actividades estarán diseñadas bajo la perspectiva del *Modelo 3UV.*

Capítulo III

Método

La información que permitirá dar cuenta del problema de investigación se obtendrá mediante una investigación de carácter cualitativo. La pertinencia del carácter cualitativo tiene que ver con el propósito de obtener evidencia de la creación de la *zona de desarrollo próximo* para la comprensión de la simbología algebraica asociada a los tres usos de la variable.

Con el propósito de responder a nuestras preguntas de investigación se procederá a:

- Diseñar un cuestionario que ayude a detectar los significados que otorgan los niños, a la simbología que se suele usar en primaria para representar la incógnita con la cual ya están familiarizados. Dicho cuestionario además, pondrá en uso símbolos literales, para identificar cual es la interpretación que logran hacer los niños ante la aparición de estos símbolos.
- Diseñar actividades que, a través de la interacción entre los niños y el investigador, fomenten el uso de diferentes símbolos para representar los distintos usos de la variable.
- Analizar el sentido que logran otorgar los alumnos a la representación simbólica algebraica (literales), al trabajar en un ambiente de interacción con el investigador.

Se elaborarán por lo tanto los siguientes instrumentos:

- Cuestionario
- Actividades diseñadas y presentadas en hojas de papel a cada estudiante
- Guía semi-estructurada de interacción estudiante-investigador

III.1 Características de los Instrumentos Diseñados

Los aspectos de la variable, considerados en el *Modelo 3UV*, que se contemplan en la elaboración del cuestionario y las actividades son: reconocer, interpretar y simbolizar. Si bien en menor grado se tratarán también los aspectos que implican la manipulación de la variable en lo que respecta al número general, y la determinación del valor de la variable en el caso de la incógnita.

III.1.1 Cuestionario

Antes de dar inicio al trabajo de campo, se elaboró un cuestionario para indagar sobre los posibles significados que asignan los niños a distintos símbolos usados para representar la incógnita. Entre estos, se encontró el cuadro vacío, con el que los niños de primaria están familiarizados. También se presentaron símbolos literales, si bien sabíamos que estos no son usados en primaria como símbolos para representar a la incógnita, queríamos ver si los niños lograban asociarlos con el cuadro vacío o bien lograban deducir, a partir de las situaciones en donde aparecían involucrados, que sirven para representar a una cantidad desconocida que se puede determinar considerando las restricciones del problema.

En el diseño del cuestionario únicamente se consideró a la variable como incógnita, tomando en cuenta que los niños desde muy chicos utilizan el símbolo $\square$, en ecuaciones lineales del tipo:

$4+\square = 18$, $12+20=\square$ y $\square+40= 60$

Estas son las únicas ideas algebraicas que se manejan en primaria que consideran un símbolo. Si bien, en geometría aparecen expresiones del tipo $P=l+l+l+l$, estas no tienen un carácter algebraico, tienen un carácter de etiqueta, por eso el cuestionario no indagó sobre este uso de las letras. Así mismo, en tratamiento de la información se trabaja con variables relacionadas, sin embargo, no se maneja una notación algebraica o pre-algebraica en la que aparezcan símbolos.

Para el diseño del cuestionario, se involucraron operaciones aritméticas sencillas, con la finalidad de no distraer a los niños con operaciones complicadas y obtener información acerca de su manera de interpretar la simbología empleada. Las preguntas se plantearon con base en el *Modelo 3UV*. Inicialmente se elaboró un cuestionario con 8 situaciones conformadas por varias preguntas.

El instrumento fue puesto a prueba mediante un piloteo, realizado con 25 alumnos que cursaban 5o. de primaria. El estudio piloto mostró que el cuestionario permite obtener información acerca de la zona de desarrollo actual de los alumnos en relación a como interpretan el uso de la simbología. También nos mostró que había que hacer algunas modificaciones: se eliminaron 2 situaciones que eran repetitivas y aportaban información redundante, se eliminó una situación que involucraba el símbolo literal X por la confusión que generó con el símbolo de multiplicación, y se recurrió mejor a otros símbolos literales (Z, U). Finalmente el cuestionario quedo conformado por 5 situaciones.

Los aspectos de la variable implicados en la resolución de cada una de las situaciones son:

- Situación 1, 2 y 3: I1, I4, I3 e I2.
- Situación 4: I2
- Situación 5:I1, I2

La versión final del cuestionario es la que se presenta a continuación:

Situación 1

Observa lo siguiente y responde las preguntas:

4 +□ = 10

¿Qué es lo que se desconoce?

¿Cómo lo encuentras?

¿Hay otro valor que resuelva?

¿Qué entiendes por □ ?

Situación 2

Observa lo siguiente y responde las preguntas:

4 +♡ = 10

¿Qué es lo que se desconoce?

¿Cómo lo encuentras?

¿Hay otro valor que resuelva?

¿Qué entiendes por ♡ ?

Situación 3

Observa lo siguiente y responde las preguntas:

4 + Z = 10

¿Qué es lo que se desconoce?

¿Cómo lo encuentras?

¿Hay otro valor que resuelva?

¿Qué entiendes por Z ?

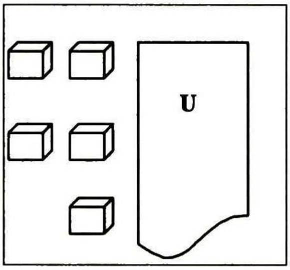
Situación 4

En los ejercicios anteriores:

¿Qué representan □ . ♡ . y **Z**?

Situación 5

Observa el dibujo, tiene 9 cajas en total. Pero solo se ven 5, las otras han sido cubiertas con una tela.



5 + U = 9

¿Qué se desconoce en el problema?

Observa la expresión que esta debajo del dibujo y responde.

¿Que representa en el dibujo el número **5** de la expresión **5 + U =9** ?

¿Qué representa en el dibujo el número **9** de la expresión **5 + U =9** ?

¿Qué representa en el dibujo la **U** de la expresión **5 + U =9** ?

Para el estudio principal este cuestionario se aplicó a un grupo de 23 alumnos que cursaban 5° de primaria.

III.1.2 Actividades diseñadas y presentadas a los alumnos en hojas de papel

Con base en los resultados obtenidos en el piloteo del cuestionario se decidió desarrollar una secuencia de actividades. Las actividades fueron presentadas a los niños en hojas de papel, y se diseñaron para introducir desde el inicio del marco experimental la simbología algebraica asociada al concepto de variable; con la finalidad de explorar durante el experimento, la posibilidad de crear *la zona de desarrollo próximo* para que los niños lleven a cabo procesos de comprensión de los símbolos (en su mayoría literales). Además las preguntas incluidas en todas las actividades están diseñadas bajo la perspectiva del *Modelo 3UV*, y por tanto encauzan a los estudiantes para que vayan adquiriendo las capacidades de reconocer, interpretar y simbolizar a las variables.

Otra característica de la secuencia de actividades tomando como base el *Modelo 3UV*, es la siguiente: en un primer momento se proponen problemas y situaciones que implican, cada uno, un uso específico de la variable; en un segundo momento, llamado momento de integración, se proponen situaciones que implican distintos usos de la variable en un mismo problema, y en este momento se hace hincapié para que los alumnos observen las diferencias entre estos usos y pasen de manera natural de uno a otro.

Se diseñaron un total de 25 actividades y se desarrollaron en condiciones de cooperación entre una pareja de niños y el experto. Lo anterior por lo que implica la creación de la *zona de desarrollo próximo* y lo señalado por Forman (Moll, 1993), en cuanto a obtener una mayor comprensión de diversas tareas por medio de la colaboración entre pares. Las tareas se pusieron a prueba con una pareja de niños que finalizaban quinto grado, para ver la comprensión del texto y el tiempo que implicaba trabajarlas; resultaron bien, no hubo necesidad de ajustes. Sólo se observó dificultad, en cuanto a la perspicacia para entender, lo que debían realizar en la actividad 15, esta dificultad se derivó de la falta de comprensión, por parte de los niños, del símbolo igual como una equivalencia. Para superar este inconveniente en el piloto, se recurrió al uso de la tecnología, concretamente se trabajó con la unidad interactiva "Resolución de ecuaciones de primer grado", Matemáticas II, que fue desarrollada en el Instituto Latinoamericano de la Comunicación Educativa (ILCE), por el grupo Descartes para el nuevo modelo de la Telesecundaria (SEP-ILCE). Dicha unidad interactiva fue elegida dado que plantea la resolución de ecuaciones utilizando la balanza.

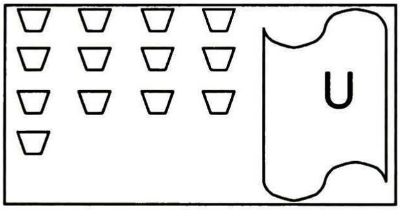
El uso del software se implementó en una sesión y se llevó a cabo de la siguiente manera: En un primer momento, los niños interactuaron con el material y cualquier duda que tenían fue expuesta al experto, quien en todo momento estuvo atento a lo que hacían y les apoyó. En un segundo momento, mientras los niños interactuaban con el material, el experto realizaba preguntas en torno a lo que podían deducir, a partir de la unidad interactiva en cuanto a expresiones de la forma x=5 ó x+3=10. En un tercer momento, el experto pidió a los niños que utilizaran el software para resolver ecuaciones y finalmente que resolvieran ecuaciones sin utilizarlo. El uso de este software ayudó a superar la dificultad generada por el símbolo de igualdad, reforzó la comprensión del uso de los símbolos para representar cantidades e introdujo el uso de la letra X como símbolo (letra que se había evitado en las actividades anteriores por la confusión con el signo de multiplicación). Por tanto se decidió implementarlo de la misma forma en el estudio final en un intervalo entre la actividad 14 y 15. Las 25 actividades, fueron programadas a 10 sesiones de 50 minutos en promedio. La distribución de las actividades es la siguiente:

- ✓ 2 de reconocimiento, interpretación y uso de simbología para representar la incógnita (□, ⚡),
- ✓ 5 de reconocimiento, interpretación y simbolización de la incógnita (símbolos literales),
- ✓ 7 de reconocimiento, interpretación y simbolización del número general (símbolos literales),
- ✓ 2 de diferenciación del número general y de la incógnita, a partir del análisis de distintas expresiones algebraicas (símbolos literales),
- ✓ 5 de reconocimiento, interpretación y simbolización de dos variables relacionadas (símbolos literales),
- ✓ 1 de diferenciación del número general, de la incógnita y de dos variables relacionadas, a partir del análisis de distintas expresiones algebraicas,
- ✓ 3 integradoras en las que aparecen los tres usos de la variable, y es necesario pasar de un uso a otro en la misma actividad.

A continuación se presentan las 25 actividades que se trabajaron en el estudio y los aspectos de la variable implicados en la resolución de las mismas.

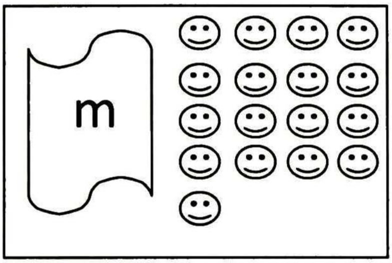
Actividad 1 (Incógnita)	Aspecto de la variable implicado
En la ecuación: $19 + \square = 27$	
¿Qué entiendes por resolver esta ecuación?	**I1** reconocer e identificar la presencia de algo desconocido que puede ser determinado
¿Qué operaciones haces para resolver?	I4 Determinar la cantidad desconocida, que aparece en la expresión realizando operaciones aritméticas
¿Existe otro valor que resuelva? Dime porque	I3 Sustituir el cuadrito por el valor que hace de la expresión un enunciado verdadero

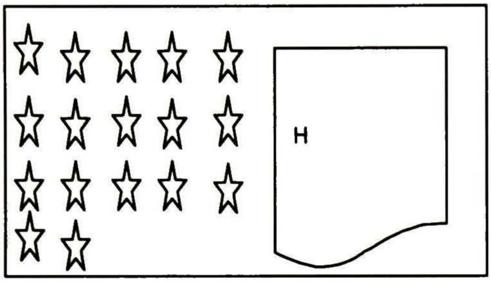
Actividad 2 (Incógnita)	Aspecto de la variable implicado
En la Ecuación: 23 + ϟ = 51	
¿Qué representa el ϟ en esta ecuación?	I1 reconocer e identificar la presencia de algo desconocido que puede ser determinado
¿Puedo cambiar el ϟ por algo más en la ecuación? Escribe todo lo que se te ocurra que pueda aparecer en lugar de el ϟ	I5 simbolizar la cantidad desconocida identificada en una situación específica
¿Cómo escribirías ahora la ecuación si cambiaras el ϟ por las opciones que propones? Escribe una ecuación por cada opción.	I5 utilizar los símbolos propuestos que representan la cantidad desconocida para plantear ecuaciones
Observa muy bien las opciones que anotaste: ¿Qué que observas en las ecuaciones? Ahora elige uno de los representantes que has propuesto y escribe ecuaciones diferentes con ese mismo representante	

Actividad 3 (Incógnita)	Aspecto de la variable implicado
Observa el dibujo, tiene 47 vasos en total. Pero solo algunos de ellos se ven, porque los otros han sido cubiertos con una tela.  ¿Qué se desconoce en el problema?	I1 reconocer la presencia de algo desconocido que puede ser determinado considerando las restricciones del problema
Ahora, observa esta ecuación $13 + U = 47$ Trata de relacionarla con el dibujo contestando: ¿Que representa en el dibujo el número 13 de la formula $13 + U =47$? ¿Qué representa en el dibujo el número 47 de la formula $13+ U =47$?	I2 interpretar el símbolo U que aparece en la ecuación como la representación de un valor específico pero desconocido
¿Qué representa en el dibujo la U de la formula $13 + U =47$? ¿Conoces el valor de U?	
¿Puedes encontrar el valor de U? Esto es ¿puedes calcular cuantos vasos hay debajo de la tela?	I4 determinar la cantidad desconocida realizando operaciones aritméticas
¿Puedes cambiar la U por cualquier otra letra?, ¿Como quedaría la ecuación?	I5 simbolizar las cantidades desconocidas identificadas en la situación específica y las utiliza para plantear ecuaciones

Actividad 4 (Incógnita)	Aspecto de la variable implicado
Anota una ecuación que relaciones con la siguiente situación: Compre una caja 500 cerillos, al abrirla en casa sólo 123 estaban en buen estado.	I1 reconocer e interpretar en la situación descrita la presencia de algo desconocido que puede ser determinado I5 simbolizar la cantidad desconocida y plantear una ecuación
¿Cómo relacionas tu ecuación con la situación?	
¿Qué puedo conocer si resuelvo la ecuación? ¿Qué número de cerillos estaba en mal estado?	I2 interpretar la variable simbólica como la representación de un valor específico

Actividad 5 (Incógnita)	Aspecto de la variable implicado
La población escolar aumentó en 19 alumnos este año, haciendo un total de 351. Esto indica, que si sumamos 19 a la población que había el año pasado se tendrá 351. ¿A qué número debemos sumar 19 para que de 351?	I1 reconocer la presencia de algo desconocido que puede ser determinado considerando las restricciones del problema
¿Qué valor es el que desconocemos en el problema?	
¿Podrías usar un símbolo para representarlo?	I5 simbolizar la cantidad desconocida identificada
¿Con ese símbolo que tendríamos que hacer para obtener la población final?	I5, I2 utilizar la cantidad desconocida simbolizada para plantear una ecuación e interpretar la variable simbólica como la representación de un valor específico
¿En este problema ese símbolo representa un valor único o varios valores?, ¿Por qué?	I2 interpretar la variable simbólica como la representación de un valor específico
¿Qué tendríamos que hacer para hallar el valor que representa ese símbolo?	I4, I3 Determinar la cantidad desconocida identificada, realizando operaciones aritméticas y sustituir el valor que hace a la ecuación un enunciado verdadero

Actividad 6 (Número general)	Aspecto de la variable implicado
Como relacionas la expresión m + 17 con el dibujo  ¿Qué representamos con la letra m? ¿Qué representa la expresión m+17 en relación al dibujo? ¿Tiene un valor específico, si o no? ¿Cuáles valores representa? ¿Me puedes decir cuantas galletas hay en total?	G2 interpretar la variable simbólica como la representación de una entidad general que puede asumir cualquier valor

Actividad 7 (Número general)	
Observa el dibujo  Trata de relacionar el dibujo con una expresión ¿Qué representa la H en la expresión que escribiste? ¿En total cuantas estrellas hay? Que condición tendría que existir para que la H tome un valor único	G5 simbolizar a la variable como la representación de una entidad general que puede asumir cualquier valor G2 interpretar a la variable simbólica como la representación de una entidad general que puede asumir cualquier valor I5 plantear una ecuación I2 interpretar a la variable simbólica que aparece en la ecuación como la representación de un valor específico

Actividad 8 (Número general)	Aspectos de la variable implicados
En enero Ana leyó 10 libros, y en febrero leyó 8 libros ¿En total cuántos libros leyó Ana durante estos dos meses? En enero Celia leyó 6 libros y en febrero leyó N libros ¿En total cuántos libros leyó Celia durante estos dos meses? En enero un estudiante leyó A libros y en febrero leyó B libros ¿Cuántos libros leyó el estudiante durante estos dos meses?	G5 simbolizar enunciados generales

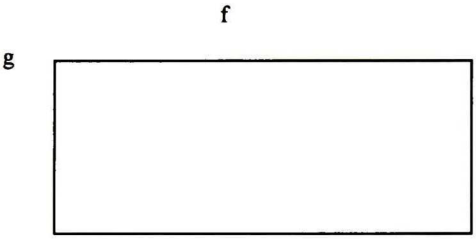
Actividad 9 (Incógnita y Número general)	Aspecto de la variable implicado
A continuación: Subraya con rojo en que casos la letra representa un número desconocido que puedes encontrar y que es único Subraya con azul en que casos la letra representa muchos números. $51 + k$ $\qquad$ $111 - m = 100$ $12 + 56 = a$ $\qquad$ $b + 51 = 105$ $21 \quad t$ $\qquad$ $50 \div q$ $b + 5$ $\qquad$ $12 + a = 50$	I2 interpretar la variable simbólica que aparece en una ecuación, como la representación de valores específicos. G2 interpretar la variable simbólica como la representación de una entidad general que puede asumir cualquier valor

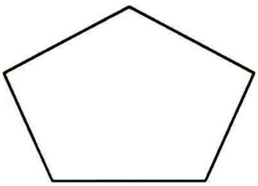
Actividad 10 (Número general)	Aspecto de la variable implicado
Tengo ahorrado $40. Si P representa el precio de cualquier playera que yo quiera comprar, ¿Cuánto dinero necesito para comprar la playera?.	G2 interpretar la variable simbólica como la representación de una entidad general que puede asumir cualquier valor G5 simbolizar enunciados generales

Actividad 11 (Número general)	Aspecto de la variable implicado
José ayer compró 171 cajas de piso. Hoy al despertar se dio cuenta de que le habían robado algunas. De la siguiente lista subraya la opción que representa el número de cajas que le quedaron a José. . $171 \div b$ $171 - m$ $171 - a$ $171 \times s$ $171 - k$ $171 - r$ ¿Importa o no que letra escriba?	G2 interpretar a la variable simbólica como la representación de una entidad general

¿El número que no sabemos cual es lo podemos representar con cualquier letra	

Actividad 12 (Incógnita)	Aspecto de la variable implicado
K + K + K = 9	I2 interpretar la variable simbólica que aparece en una ecuación, como la representación de valores específicos. I3 sustituir la variable por el valor que hace de la ecuación un enunciado verdadero. I4determinar la cantidad desconocida realizando operaciones aritméticas.

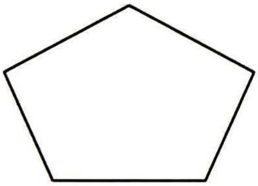
Actividad 13 (Número general)	Aspecto de la variable implicado
¿Cuál es el perímetro del siguiente rectángulo? 	G1 Reconocer el método general que se sigue para determinar un perímetro G2 interpretar las variables simbólicas involucradas G5 Simbolizar el perímetro de ésta figura G4 Simplificar la variable simbólica

Actividad 14 (Número general)	Aspecto de la variable implicado
¿Cuál es perímetro del siguiente pentágono regular? 	G5 asignar un símbolo que represente la medida de los lados de la figura G2 interpretar a la variable que asignan como la representación de una entidad general, indeterminada que puede tomar cualquier valor. G4 simplificar la variable simbólica G5 simbolizar el perímetro de la figura.

Actividad 15 (Incógnita y número general)	Aspecto de la variable implicado
Observa lo siguiente, que comprendes en cada situación. $3 = 3$ $n= 157 + 392$ $M=4$ $50 + w = 15 + 83$ $Z = Z$ $112 = q + 23$	I2 interpretar la variable simbólica que aparece en una ecuación, como la representación de valores específicos. G2 interpretar la variable simbólica como la representación de una entidad general que puede asumir cualquier valor

Actividad 16 (Incógnita)	Aspecto de la variable implicado
Explica como se relacionan las ecuaciones con cada uno de los problemas En un lado de la balanza hay 500 gramos de peso y en el otro hay una bolsa de azúcar de 350 gramos. ¿Cómo podemos equilibrar la báscula? $350 + x = 500$ $500 – x = 350$ En un lado de la balanza hay una jarra de miel y en el otro lado hay un kilogramo de peso. La balanza es equilibrada. ¿Qué cantidad de miel debe haber si la jarra pesa 300 gramos? $300 + x = 1000$ $1000 – x = 300$ $1000 - 300 = x$	I2 interpreta al símbolo X que aparece en las ecuaciones como la representación de valores específicos. I4 Determinar la cantidad desconocida I3 sustituir la variable por el valor que hacen de la ecuación un enunciado verdadero.

<table>
<tr><th colspan="2">Actividad 17 (Incógnita y número general, variables relacionadas)</th><th>Aspecto de la variable implicado</th></tr>
<tr><td colspan="2">Observa, que comprendes en cada situación:</td><td rowspan="5">I2 interpretar la variable simbólica que aparece en una ecuación, como la representación de valores específicos
G2 interpretar la variable simbólica como la representación de una entidad general que puede asumir cualquier valor
F1 reconocer la correspondencia entre variables</td></tr>
<tr><td>7M</td><td>3L</td></tr>
<tr><td>3P + 1</td><td>3W + 4</td></tr>
<tr><td>N = N</td><td>N + 3 = N + 3</td></tr>
<tr><td>N + 12 = N + 8</td><td>P = E</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>Actividad 18 (Relación funcional)</th><th>Aspecto de la variable implicado</th></tr>
<tr><td>El perímetro del siguiente pentágono regular es igual a K.

¿Qué comprendes en esta situación?</td><td>F1 reconocer la correspondencia entre variables
F6 simbolizar una relación funcional, con base en el análisis de la situación planteada.</td></tr>
</table>

Actividad 19 (Relación funcional)

5 Z = K

¿Qué valor puede tomar la Z? ¿Qué valor toma la K?
¿De que depende el valor de la K?
¿Puedes llenar la siguiente tabla de valores?

Z	K

Si el valor de la Z es 15 ¿Cuál es el valor de K?

Si cambia el valor de Z, ¿cambia el valor de K?

¿Habrá un número máximo como valor de Z?

Aspecto de la variable implicado

F1 reconocer la correspondencia entre variables relacionadas

F5 determinar los intervalos de variación de una de las variables, dado el intervalo de variación de la otra

F2 determinar los valores de la variable dependiente dados los valores de la variable independiente.

F3 determinar los valores de la variable independiente dalos los valores de la dependiente

F4 reconocer la variación conjunta de las variables involucradas

Actividad 20 (Relación funcional)

b=a+5
Observa la expresión anterior. ¿Puedes llenar la siguiente tabla de valores?

¿Qué valores puede tomar la b? ¿Qué valores toma la

Aspecto de la variable implicado

F1 reconocer la correspondencia entre valores

F5 determinar los intervalos de variación de una de las variables, dado el intervalo de variación de la otra

F2 determinar los valores de la variable dependiente dados los valores de la variable independiente.

F3 determinar los valores de la variable

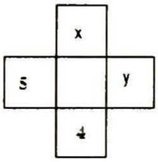
<table>
<tr><td>¿De que depende el valor de la b?
¿Puede a tomar el valor de 1000?
Si el valor de la a es 756 ¿Cuál es el valor de b?
Si el valor de b es 555 ¿cuál es el valor de a?
Si cambia el valor de a, ¿cambia el valor de b?
¿Habrá un número máximo como valor de b?</td><td>independiente dalos los valores de la dependiente
F4 reconocer la variación conjunta de las variables involucradas
F5 determinar los intervalos de variación de una de las variables, dado el intervalo de variación de la otra</td></tr>
</table>

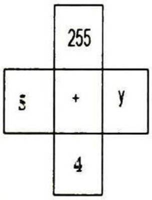
<table>
<tr><th>Actividad 21 (Relación funcional)</th><th>Aspecto de la variable implicado</th></tr>
<tr><td><table><tr><td>P</td><td>S</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>2</td><td>2</td></tr><tr><td>3</td><td>3</td></tr><tr><td>4</td><td>4</td></tr><tr><td>5</td><td>5</td></tr><tr><td>6</td><td>6</td></tr><tr><td>7</td><td>7</td></tr></table></td><td>F1 reconocer la correspondencia entre variables relacionadas
F4 reconocer la variación conjunta de las variables involucradas
F6 simbolizar la relación funcional, con base en el análisis de la tabla</td></tr>
</table>

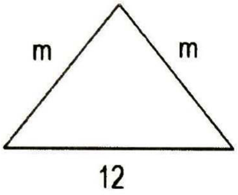
<table>
<tr><th>Actividad 22 (Relación funcional)</th><th>Aspecto de la variable implicado</th></tr>
<tr><td>La siguiente tabla nos muestra el precio que se cobra por persona en una agencia turística que se encarga de realizar un recorrido a Teotihuacán y se encuentran los últimos viajes que han realizado<table><tr><td>Numero de personas</td><td>Precio por persona</td></tr><tr><td>8</td><td>150</td></tr><tr><td>3</td><td>400</td></tr><tr><td>20</td><td>60</td></tr><tr><td>1</td><td>1200</td></tr></table>¿Qué pasa con el precio por persona cuando aumenta el número de personas?
¿Qué valores puedo poner en la columna de la izquierda? ¿y en la derecha?
¿Hay un precio máximo?
¿Hay un precio mínimo?</td><td>F4 reconocer la variación conjunta de las variables involucradas en un relación
F1 reconocer la correspondencia entre variables relacionadas
F2 determinar los valores de la variable dependiente, dados los de la independiente</td></tr>
</table>

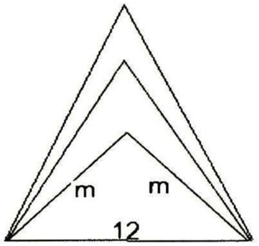
Actividad 23 (Integración de los tres usos de la variable)	Aspecto de la variable implicado
Había 545 metros de franela en una tienda. La semana pasada se vendieron p metros. ¿Cuántos metros quedaron en la tienda?	G5 simbolizar el número general
¿Qué representa aquí la p? ¿Qué valor tiene?	G2 interpretar la variable simbólica como la representación de una cantidad indeterminada
¿Qué operación debe hacerse para hallar el número de metros que quedaran en la tienda?	G4 manipular la variable simbólica
Observa la siguiente expresión: 545 – p = h	
¿Cómo relaciono esta expresión con el problema?	F1 Reconocer la correspondencia entre variables relacionadas
¿Qué valor puede tomar la p? ¿Qué valor toma la h?	
¿De que depende el valor de la h?	
¿Puedes hacer una tabla de valores?	
¿Puede h tomar el valor de 600?	F5 determinar los intervalos de variación de una de las variables, dado el intervalo de variación de la otra.
Si el valor de la p es 100 ¿Cuál es el valor de h?	F2 Determinar los valores de la variable dependiente asignando valores a la independiente
Si el valor de h es 500 ¿cuál es el valor de p?	F3 Determinar los valores de la variable independiente asignando valores a la dependiente
Si cambia el valor de p, ¿cambia el valor de h?	F4 Reconocer la variación conjunta de las variables
¿Cuál es el mínimo número de metros que se quedó en la tienda?	
¿Cuál es el máximo número de metros que pudo quedarse en la tienda?	F5 determinar los intervalos de variación de una de las variables, dado el intervalo de variación de la otra.
Ahora si decimos que en la tienda quedaron exactamente 367 metros después de la venta de P metros. ¿Cómo puedo representar la situación?	I1 reconocer la presencia de algo desconocido que puede ser determinado considerando las restricciones del problema.

¿Qué valor tiene la p? ¿Puede p tener cualquier valor?	I5 simbolizar las cantidades desconocidas u plantear una ecuación
¿Cómo puede comprobarse que el valor de p es el que encontraste? De lo anterior tenemos tres expresiones: $545 - p$ $545 - p = h$ $545 - p = 367$ ¿Qué valores puede tener la letra p en cada caso?	I4 determinar la cantidad desconocida que aparece en el problema I3 sustituir la ecuación por el valor que hace verdadera la ecuación.

Actividad 24 (Integración de los tres usos de la variable)	Aspecto de la variable implicado
	
En el crucigrama se obtiene el mismo resultado al sumar horizontal y verticalmente. De donde $x + 4 = 5 + y$	F1 Reconocer la correspondencia entre variables relacionadas
¿Cómo relaciono esta expresión con la situación?	F4 reconocer la variación conjunta de las variables involucradas en una relación funcional
¿Qué valor puede tomar la x? ¿Qué valor toma la y?	
¿De que depende el valor de la y?	F2 Determinar los valores de la variable dependiente asignando valores a la independiente
¿Puedes hacer una tabla de valores?	F3 Determinar los valores de la variable independiente asignando valores a la dependiente
¿Qué valores puede tomar la x?	
Si el valor de la x es 12 ¿Cuál es el valor de y?	G2 interpretar una entidad general, que puede asumir cualquier valor
Si el valor de y es 39 ¿cuál es el valor de x?	

Si cambia el valor de x, ¿cambia el valor de y?	
Ahora: ¿Cómo puedo representar el número que obtengo al sumar los que se ubican en la parte horizontal del crucigrama?	
¿Cómo puedo representar el número que obtengo al sumar los que se ubican en la parte vertical del crucigrama?	
Ahora, si el crucigrama es: 	I1 reconocer la presencia de algo desconocido que puede ser determinado considerando las restricciones del problema
¿Cómo puedo encontrar el valor de y?	I2 interpretar la variable simbólica que aparece en una ecuación, como la representación de valores específicos
¿Qué valor tiene la y?	I4 determinar la cantidad desconocida realizando operaciones aritméticas.
¿Cómo puede comprobarse que el valor de y es el que encontraste?	I3 sustituir la variable por el valor que hace de la ecuación un enunciado verdadero
De lo anterior tenemos las expresiones: $x + 4 = 5 + y$ $x + 4$ $5 + y$ $259 = 5 + y$	
¿Qué valores puede tener la letra y en cada caso?	
¿Qué valores puede tomar la x en cada caso?	

Actividad 25 (Integración de los tres usos de la variable)	Aspecto de la variable implicado
 	
¿Cuál es el perímetro de este triángulo?	G2 interpreta a la variable simbólica como la representación de una entidad general que puede asumir cualquier valor.
¿Qué representa aquí la letra m? ¿Qué valor tiene?	G4 Manipula a la variable simbólica
¿Qué operación debe hacerse para hallar el perímetro?	G5 simboliza al perímetro
Ahora si decimos que el perímetro del triángulo tiene un valor de 50 cm ¿como podemos expresar esto?	
Con esta nueva condición ¿Qué valor tiene m? ¿Puede m tener cualquier valor?	I2 interpreta a la variable simbólica que aparece en la ecuación como la representación de valores específicos
¿Cómo podemos conocer su valor?	I4 Determina la cantidad desconocida que aparece realizando operaciones aritméticas
¿Cómo puede comprobarse que el valor de m es el que encontraste?	I3 sustituye a la variable por el valor que hace de la ecuación un enunciado verdadero.
Ahora observa la siguiente situación: La figura triangular esta formada por una cinta elástica, con base fija de 12 cm. Y podemos modificarla como se muestra	

	F1 reconocer la correspondencia entre valores
Ahora el perímetro queda expresado F=2m + 12 ¿El valor del perímetro es el mismo en los tres casos? ¿De que depende su valor?	F2 determinar los valores de la variable dependiente dados los valores de la variable independiente.
Si el valor de m es 10 ¿Cuál es el de F?	F3 determinar los valores de la variable independiente dalos los valores de la dependiente
Si el valor de F es 42 ¿cuál es el de m?	F4 reconocer la variación conjunta de las variables involucradas
Si cambia el valor de m ¿cambia el de F?	F5 determinar los intervalos de variación de una de las variables, dado el intervalo de variación de la otra
Si el máximo valor que puede tomar m es 20 ¿Cuál es el máximo valor que puede tomar F?	
De lo anterior tenemos tres expresiones: 2m + 12 2m + 12 = 50 F= 2m + 12 ¿Qué valores puede tener la letra m en cada caso?	

Las actividades 3, 8 y 16 son de Usiskin (1997), las actividades 13,14 y 22 son de Montes (2003), la actividad 10 es de Kaput (1993), las actividades 5 y 25 son de Ursini et al (2005) y la actividad 24 es de Ngai-Ying (2005). Las actividades 3, 8, 16, 10, 24 se ajustaron a la intencionalidad didáctica del *Modelo 3UV*.

III.1.3 Guía semi-estructurada de interacción estudiante-investigador

Para este estudio se aplican las ideas de la teoría de Vygotsky, que emanan de la definición de *zona de desarrollo próximo*. Por lo tanto, en la interacción con los alumnos se considera al investigador como experto y al alumno como novato. En el caso particular de esta investigación no se trabaja con un alumno en individual si no con una pareja, siguiendo la recomendación de Tudge que determina *"la interacción es eficaz cuando los niños tienen que trabajar en pos de lograr metas compartidas"(Moll, 1993).* Además, propusimos trabajar con una pareja para que hubiera una relación adecuada con el investigador que fomentara la interacción y colaboración entre ellos, y que de alguna manera esto permitiera a la pareja, alcanzar una mayor comprensión de las diferentes tareas. La manera como se interactuó es la siguiente:

Se proporcionaron las actividades en hojas de papel a los alumnos, cada una de éstas presenta un texto básico de manera escrita que permite la organización de la tarea. Todas las actividades conforman nuestra guía semi-estructurada de interacción, dado que en todo momento los participantes en la interacción tuvieron la libertad de incorporar la reflexión que consideraron pertinente. En el momento en que pareció que había un bloqueo, el investigador aplicó las ideas de la teoría de Vygotsky, que emanan de la definición de *zona de desarrollo próximo*. Esto es, siguiendo el principio de contingencia de Wood, cada vez que la pareja de niños realiza correctamente un paso o una acción, el experto reduce el nivel de ayuda; por otro lado si el estudiante comete un error, el nivel de ayuda por parte del experto aumenta. Por tanto, para este estudio el nivel de apoyo fue contingente –dependiente- en relación con los progresos del estudiante durante la interacción con el experto. La tarea del investigador fue procurar garantizar estos progresos y al mismo tiempo, reducir el nivel de ayuda.

En todo momento se buscó que el estudiante fuera reduciendo su nivel de dependencia a medida que avanzaba en las actividades. Así pues, el papel del investigador fue el de un experto, que interactuando con los alumnos les ayudó a: construir el concepto de variable al mismo tiempo que se utilizó la simbología algebraica formal, y a desarrollar un potencial para trabajar con sus distintos usos.

III.2 Sujetos

Después de la fase piloto en la que se trabajaron las actividades con una pareja de niños que finalizaba quinto grado de primaria, se decidió realizar el estudio principal con una pareja de niñas al inicio del siguiente ciclo escolar, escogidas entre un grupo 23 alumnos que contestaron el cuestionario cuando finalizaban quinto grado de primaria. Una de las niñas era de promedio escolar alto y otra de promedio bajo, pero sus respuestas al cuestionario fueron similares y mostraban un intento de interpretación del símbolo. Hubo varios niños con estas características, pero ellas fueron más explícitas en sus respuestas. Las edades de las niñas eran de diez años diez meses y once años.

El estudio con estas dos niñas terminó en septiembre. A partir de los resultados obtenidos, se decidió trabajar con una pareja de niños de cuarto para ver que tanto se podía crear la *zona de desarrollo próximo.* Si los resultados hubiesen sido totalmente desfavorables, entonces trabajaríamos con niños de quinto grado. Para trabajar con los niños de cuarto, por razones de funcionamiento interno de la escuela no se aplicó el cuestionario a ningún grupo de cuarto grado. Sin mediar el cuestionario, la pareja de niños de cuarto fueron designados por el profesor de grupo con la condición de que uno tuviese un promedio escolar alto y otro un promedio escolar bajo, cuyas edades eran de nueve años.

La forma de trabajar fue la siguiente: durante el tiempo asignado a los estudiantes para tomar clase de matemáticas, la pareja de alumnos salía del salón y se trasladaba al espacio asignado para la investigación. Los sujetos se sentaban en una mesa para dos personas y el investigador se sentaba a un costado de la mesa para poder discutir cada actividad con ellos. Se trabajaba durante 50 minutos por sesión.

Desafortunadamente después de dos sesiones de trabajo uno de los niños desertó y seguimos el trabajo con un solo niño de primaria.

III.3 Escenario

La investigación se llevó a cabo en la escuela Primaria Sor Juana Inés de Cruz turno vespertino, adscrita a la SEP, ubicada en Ecatepec de Morelos México, perteneciente a una zona de nivel económico medio-bajo. El estudio se realizó en un espacio asignado por la dirección de la escuela, dentro del horario escolar dos veces por semana, a lo largo de once semanas.

III.4 Datos

Cada sesión se video-grabó, enfocando a la pareja de estudiantes. Dado que las actividades fueron presentadas en hojas de papel y comentadas, se les pidió a los alumnos que escribieran todas sus respuestas en los espacios determinados, lo que escribieron en las hojas es parte de los datos. Además al finalizar cada sesión, la investigadora, anotó sus observaciones en un cuaderno, lo cual también forma parte de los datos.

III.5 Análisis de los datos

Para realizar un análisis de los datos recabados en el cuestionario, para cada una de las 5 situaciones, se elaboró un cuadro que agrupara todas las respuestas que proporcionó el grupo estudiado, con el fin de vislumbrar los posibles significados que asignan los niños a distintos símbolos usados para representar la incógnita. En el cuadro, se registraron los nombres de los 23 alumnos y sus respectivas respuestas a cada una de las preguntas de la situación en cuestión. El análisis de los datos recabados en las situaciones se realizó tomando en cuenta los aspectos que siguiendo el *Modelo 3UV* caracterizan a la incógnita.
Los datos recabados en las sesiones se analizaron actividad por actividad. Los resultados preliminares de cada sesión condujeron a una toma de decisiones con respecto a la siguiente sesión. El análisis de los datos recabados en las actividades se realizó tomando en cuenta los aspectos que caracterizan los usos de la variable que se describen en el *Modelo 3UV*, atendiendo además a los lineamientos proporcionados por la *zona de desarrollo próximo.*

Capítulo IV

Resultados

IV.1 Resultados del Cuestionario

El objetivo de aplicar un cuestionario fue indagar sobre los significados que otorgan los niños a la simbología que se suele usar en primaria para representar la incógnita (cuadro vacío). Este además incluía símbolos literales con la finalidad de observar si los niños lograban asociarlos con el cuadro vacío o bien lograban deducir que sirven para representar una cantidad desconocida, a partir de las situaciones en donde aparecían involucrados.

El cuestionario se aplicó a un grupo de 23 niños que finalizaban quinto grado de primaria (en el mes de mayo). Este instrumento nos sirvió para seleccionar a una pareja de estudiantes con la que se hizo el pilotaje de las actividades durante el mes de junio. Además nos permitió identificar a la pareja de estudiantes con las que se realizó el estudio principal llevado a cabo la primeras semanas del siguiente ciclo escolar.

Resultados generales del cuestionario

El análisis de los datos recabados en el cuestionario se realizó tomando en cuenta los aspectos que siguiendo el *Modelo 3UV* caracterizan a la incógnita y aparecen en las respuestas que componen las distintas situaciones que conforman el cuestionario.

La Tabla 1, muestra el análisis de las respuestas a las preguntas que involucran el aspecto I2 en cada una de las situaciones planteadas. Estas preguntas son: ¿Qué entiendes por□ ? (situación 1), ¿Qué entiendes por ♡ ? (situación 2), ¿Qué entiendes por Z? (situación 3), ¿Qué representa □,♡ y Z? (situación 4) y ¿Qué representa en el dibujo la **U** de la expresión **5 + U =9**? (situación 5).

Las categorías incluidas en la Tabla 1 se definen de la siguiente manera:

Correcto: los niños hicieron un intento por interpretar el símbolo como representante de una cantidad desconocida en la expresión planteada y no como receptáculo. Ejemplos de sus repuestas son: "*que falta un número y lo tengo que buscar*", "*que falta un número*"

Parcialmente correcto: los niños consideraron al símbolo como un espacio en donde se tiene que poner el número y no como representante de una cantidad desconocida. Ejemplos de sus respuestas son: *"que tengo que poner un número", "que pusiéramos el número faltante"*

Incorrecto: los niños no hicieron intento alguno por interpretar al símbolo que aparece en la expresión como la representación de un valor específico. Ejemplos de sus respuestas son: *"corazón", "cuadrado" "una letra"*

Aspecto I2	**Situación 1**	**Situación 2**	**Situación 3**	**Situación 4**	**Situación 5**
Correcto	**4**	**3**	**1**	**2**	**7**
Parcialmente correcto	**10**	**7**	**5**	**8**	**6**
Incorrecto	**9**	**13**	**13**	**10**	**7**
Sin respuesta	**0**	**0**	**4**	**3**	**3**

Tabla 1: Respuestas a preguntas que involucran la interpretación de la variable simbólica como la representación de un valor específico (I2).

Lo que se puede observar en la Tabla 1, es que en la situación 1 la mayoría de los niños interpretaron el cuadro vacío de forma parcialmente correcta (sólo como un receptáculo y no como representante de una cantidad). En cuanto se cambia en la misma expresión, el cuadro por otro símbolo (corazón o Z), la mayoría de los niños le asigna una interpretación incorrecta. Sin embargo, es interesante señalar que cuando se guía al niño, aunque sea sólo a través de algunas preguntas, para que trate de interpretar el símbolo (situación 5), la cantidad de niños que dan una respuesta correcta aumenta considerablemente. Esto ya puede considerarse como un primer indicio de que con ayuda algunos niños de 5° grado de primaria ya pueden interpretar correctamente un símbolo literal que representa a la incógnita.

La Tabla 2, muestra el análisis de las respuestas a las preguntas que involucran el aspecto I1 en las situaciones 1, 2, 3 y 5. Estas preguntas son: ¿Qué es lo que se desconoce? (situación 1, 2 y 3), ¿Qué es lo que se desconoce en el problema? (situación 5).

Las categorías incluidas en la Tabla 2 se definen de la siguiente manera:

Correcto: los niños hicieron un intento por reconocer el símbolo como representante de una cantidad desconocida en la expresión planteada. Ejemplos de sus repuestas son: *"el número" "el número que falta"*.

Parcialmente correcto: los niños reconocieron la presencia del símbolo. Ejemplos de sus respuestas son: *"que ponen la U en vez del 4"*

Incorrecto: los niños no hicieron intento alguno por reconocer la presencia de algo desconocido que puede ser determinado. Ejemplos de sus respuestas son: *"nada", "el cuadrado" "que hay un corazón en vez de un cuadro" "la tela"*

Aspecto I1	**Situación 1**	**Situación 2**	**Situación 3**	**Situación 5**
Correcto	**9**	**6**	**4**	**0**
Parcialmente correcto	**0**	**0**	**0**	**5**
Incorrecto	**14**	**17**	**19**	**17**
Sin respuesta	**0**	**0**	**0**	**3**

Tabla 2: Respuestas a preguntas que involucran el reconocimiento en una situación problemática de la presencia de algo desconocido que puede ser determinado considerando las restricciones del problema (I1).

Lo que se puede observar en la Tabla 2 es que la mayoría de los niños no hicieron un intento de reconocimiento de la presencia de algo desconocido. Además la cantidad de niños que sí hizo un intento por reconocer la presencia de algo desconocido en la situación 1 disminuye cuando se le cambian los símbolos.

Las respuestas a las preguntas que involucran los aspectos I3 e I4 en las situaciones 1,2 y 3, mostraron que los niños determinaron y sustituyeron el valor que hace de la ecuación una ecuación verdadera. En estas respuestas detectamos además, dos categorías que nombramos: explícita y breve.

Explícita: La respuesta de los niños incluía una explicación del proceso que hacían para responder. Por ejemplo: *"en la mente voy viendo que numero encuentro para que me de 10" "del cuatro en adelante cuento y en el número en que me quede es el resultado"*

Breve: La respuesta de los niños no incluía alguna explicación. Por ejemplo: "4+6=10", "sumando"

En base al análisis mostrado pudimos detectar a Paulina y Elizabeth, quienes dieron las siguientes respuestas a preguntas que involucran la interpretación de la variable simbólica como la representación de un valor específico (I2).

Paulina

	Respuestas a preguntas que involucran la interpretación de la variable simbólica como la representación de un valor específico (I2).	
Situación 1	que falta un número y hay que sumar	Correcto
Situación 2	que la suma es la mas probable de entender	incorrecto
Situación 3	que es la letra z	incorrecto
Situación 4	el cuadrado y el corazón para que nos apoyemos para contestar lo que se te pide y la z es una letra	Parcialmente correcto
Situación 5	lo que se suma con el 5	Parcialmente correcto

Elizabeth

	Respuestas a preguntas que involucran la interpretación de la variable simbólica como la representación de un valor específico (I2).	
Situación 1	que es un espacio para que pongamos el número que falta	Parcialmente correcto
Situación 2	que debo de encontrar el número que sumándolo con el 4 me de 10	Correcto
Situación 3	que se tiene que escribir	incorrecto
Situación 4	cuadro y corazón son espacios y la z es una letra que se utiliza en palabras	Parcialmente correcto
Situación 5	que el número 5 se debe sumar a la U	Parcialmente correcto

Se observó que Paulina y Elizabeth:

- hicieron un intento de interpretación del símbolo ☐ y ♡
- no lograron hacer un intento del símbolo literal cuando aparece en la situación 3.

- hicieron un intento de interpretación del símbolo literal en la situación 5 lo cual indica que con ayuda ya pueden interpretar correctamente un símbolo literal.

Lo anterior indica que ambas hicieron un intento de interpretación del símbolo en la mayoría de las situaciones.

En lo que toca a sus respuestas a las preguntas que involucran el aspecto I1 en las situaciones 1, 2, 3 y 5. Ellas contestaron.

Elizabeth

	Respuestas a preguntas que involucran el reconocimiento en una situación problemática de la presencia de algo desconocido que puede ser determinado considerando las restricciones del problema (I1).	
Situación 1	que no esta el número que se tiene que sumar con el 4	correcto
Situación 2	que solo hay un número que puede resolver esa suma	incorrecto
Situación 3	los dos espacios que no tiene nada	incorrecto
Situación 5	que algunas cajas están cubiertas	Parcialmente correcto

Paulina

	Respuestas a preguntas que involucran el reconocimiento en una situación problemática de la presencia de algo desconocido que puede ser determinado considerando las restricciones del problema (I1).	
Situación 1	que son números que si sumas te sale el resultado	incorrecto
Situación 2	que los números anteriores la suma es la misma	incorrecto
Situación 3	la suma y luego la z	incorrecto
Situación 5	que dentro de la manta que esta a la derecha están varias cajas	Parcialmente correcto

Se observó que:

- Elizabeth pertenece al grupo de niños que hizo un intento de reconocimiento del símbolo como indicador de que algo falta en la primera situación y cuando en la misma expresión se le cambia el símbolo (situación 2 y 3) no logró reconocer la presencia de algo desconocido, situación que se observo en también en otros niños.

- Paulina en ninguna de las situaciones 1, 2 y 3 reconoció la presencia de algo desconocido como la mayoría de los niños.
- Elizabeth y Paulina reconocieron parcialmente en la situación 5 que el símbolo literal representa a una cantidad desconocida.

Sus repuestas a las preguntas que involucran I3, I4, muestran que son capaces de determinar y sustituir el valor que convierte a las expresiones que se les presentaron en verdaderas. Más aún las respuestas de ambas se ubicaron en la categoría de repuestas explícitas.

El análisis anterior nos proporciona el perfil que tenían las niñas antes del estudio y por el cual fueron seleccionadas. Existía otra niña con el perfil parecido al de ellas pero al entrevistarnos con el profesor nos decidimos por Paulina y Elizabeth porque una tenía un promedio escolar bajo y la otra un promedio escolar alto y se descartó la otra posibilidad porque también era de promedio escolar alto.

Recordemos que los dos niños de cuarto que participaron en el estudio no contestaron el cuestionario por tanto no tenemos un perfil de ellos en este sentido

IV.2 Resultados de las actividades

Como se estipuló en el capítulo III, el uso funcional de la simbología algebraica como medio para fijar la atención en el desarrollo del concepto de variable, es el objetivo global de las actividades. En esta sección se presentan los objetivos particulares de cada una de las actividades que se trabajaron durante el estudio y los resultados que se obtuvieron.

Para llevar a cabo las sesiones de las actividades se procedió a escoger dos niñas del grupo al cual se les aplicó el cuestionario. El desarrollo de las actividades se realizó cuando iniciaban 6° de primaria. Paulina y Elizabeth fueron escogidas porque sus respuestas al cuestionario fueron similares y mostraban un intento de interpretación del símbolo, hubo varios niños con estas características, pero ellas fueron más explícitas en sus respuestas.

Además, de acuerdo con el profesor encargado del grupo al que ellas pertenecían, Elizabeth era de promedio escolar alto y Paulina de promedio escolar bajo.

En base a los resultados preliminares obtenidos con Paulina y Elizabeth y, con la finalidad de contestar la segunda pregunta de investigación de nuestro estudio, *¿A partir de que grado de nivel primaria se puede crear la zona de desarrollo próximo para que los niños de primaria sean capaces de usar e interpretar símbolos literales asociados a los distintos usos de la variable?*, decidimos explorar que sucedía en cuarto de primaria, ver hasta dónde se lograba desarrollar la misma serie de actividades y si se podía crear o no la *zona de desarrollo próximo*. La pareja de cuarto también eran niños de la misma escuela pública, sin embargo por razones de funcionamiento interno de la escuela no pudimos seleccionarlos en base al cuestionario. Sin mediar el cuestionario, la pareja de niños de cuarto fueron designados por el profesor de grupo con la condición de que uno tuviese un promedio escolar alto y otro un promedio escolar bajo. Nos asignaron a Jorge de promedio alto y a Uriel de promedio bajo.

Si bien el trabajo con los niños de cuarto fue consecuencia de los resultados del trabajo con las niñas de sexto, para la presentación de los resultados, haremos la discusión sobre ambas parejas y mostraremos los resultados obtenidos durante la interacción de manera conjunta. En el apartado IV.1 se comentan los objetivos particulares y el análisis de los resultados obtenidos en las actividades que contemplan a la variable como incógnita. En el apartado IV.2 se comentan los objetivos particulares y el análisis de los resultados de las actividades que utilizan a la variable como número general. En el apartado IV.3 se hace lo propio con las actividades que consideran a la variable en una relación funcional. El apartado IV.4 refiere los propósitos particulares y resultados de actividades que contemplan la aparición de simbología para representar los tres usos de la variable. Finalmente los resultados de las actividades integradoras se muestran en el apartado IV.5.

Para dar inicio a la interacción se presentó a las parejas la siguiente hoja de papel y se dio lectura en voz alta a su contenido:

a) En tus cursos anteriores has trabajado con expresiones de la forma:

$$4 + \square = 10$$

Las llamaremos

"Ecuaciones"

Se resuelven como te enseñaron tus maestros, es sólo para llamarlas de una forma especial.

b) Cuando encuentres algo de la forma

$$4 + \square$$

Le llamaremos simplemente **expresión**

Sobre el apartado a) ambas parejas comentaron que conocían estas expresiones, que sus maestros se las presentaban cuando hacían operaciones (sumas, restas, multiplicaciones) en el salón o cuando les dejaban tarea, además los cuatro proporcionaron varios ejemplos en los cuales utilizaron el cuadrito en posiciones diferentes a las presentadas, variando también la operación.

La investigadora cuestionó si comprendían lo que se establecía en los dos apartados, sus respuestas no mostraron confusiones. Por tanto, se procedió a presentar la primera actividad de la serie. A cada pareja se proporcionó la actividad en hojas de papel, a partir de cada pregunta incluida en la actividad se generó la interacción, una vez concluida la primera actividad, se retiraron estas hojas, se procedió a otorgar la segunda actividad y así sucesivamente.

IV.2.1 Resultados con respecto al uso de la Incógnita

En esta sección se presentan los resultados obtenidos al trabajar con las actividades que involucran a la variable como incógnita. Las actividades se pueden consultar en el capítulo III, apartado III.1.2.

Resultados correspondientes a la actividad 1

El propósito de esta actividad era presentar expresiones que les son familiares a los estudiantes e introducir la palabra ecuación, no como una definición, sino, como una palabra que hace referencia a tales expresiones. Además, guiar a los sujetos para que notaran la presencia de algo desconocido.

Paulina y Elizabeth omiten dar lectura al símbolo en la expresión $19 + \square = 27$, además intentan, de forma inmediata, calcular mentalmente el valor que hace verdadera la expresión, y escribir dentro del cuadro. No reconocen la presencia de algo desconocido (I1) de manera explícita, para ellas el valor que representa el cuadrito es conocido, dado que les han enseñado a determinarlo. Sustituyen oralmente el cuadro por el valor que hace verdadera la expresión (I3). Dudan al determinar que el valor encontrado es único, pues al cuestionarles por qué es único enseguida piensan que puede haber otro si se cambia la expresión y proponen nuevas expresiones.

Jorge y Uriel, no omiten dar lectura al símbolo de la expresión y, están seguros de que la cantidad que encuentran en este caso era única. No tienen problema en determinar la cantidad representada por el cuadro (I4).

Sin embargo, para ambas parejas fue complicado percibir que el cuadro representa la presencia de algo desconocido (I1), a pesar de la insistencia de la investigadora. Esto se ilustra con los siguientes fragmentos de la interacción que se tuvo con Jorge y Uriel, algo parecido sucedió con Paulina y Elizabeth.

I: *Antes de que sumes en tu mente ¿lo conoces o no lo conoces?* (Uriel se queda pensando).

U: Antes no.

J: No, porque no lo había pensado, sólo lo había visto y ya (refiriéndose a la ecuación).

I: No lo habías pensado, sabes que aquí va a ir un número pero no lo habías pensado. Entonces, ¿cómo es el número antes de hacer la suma en la mente? (se observa que no entienden la pregunta).

I: ¿Lo conoces o no lo conoces?

J, U: No.

I: Entonces el número que vamos a escribir aquí es un número desconocido.

Como se puede notar los alumnos no lograron comprender por sí mismos, que la cantidad que determinaron por medio de un cálculo aritmético, en un principio era desconocida, por tanto la investigadora proporcionó una ayuda concreta.

Después de determinar y sustituir la cantidad desconocida, la investigadora decidió revisar nuevamente el problema. La respuesta de Jorge indicó la dificultad que aún tenía de reconocer la presencia de algo desconocido que puede ser determinado y, que seguía pensando en operar.

I*: Entonces cuando ustedes vean una ecuación como ésta, ¿en qué piensan?*

J: En la operación para encontrar el resultado.

La investigadora insistió en que los niños notaran la aparición del símbolo y que éste a su vez representa la presencia de algo desconocido.

I: Lo primero que debo pensar cuando yo vea esto, es que el cuadro... ¿que me va a representar, que significa?

J: Que falta un número, que.....hay que buscar.

U: Que hay un número perdido.

I: Que hay un número perdido o...que aquí falta un número ¿y ese número lo conozco o no lo conozco?

J, U: No.

I: Entonces cuando vea el cuadro, debo pensar, ahí hay un número desconocido, que tengo que encontrar.

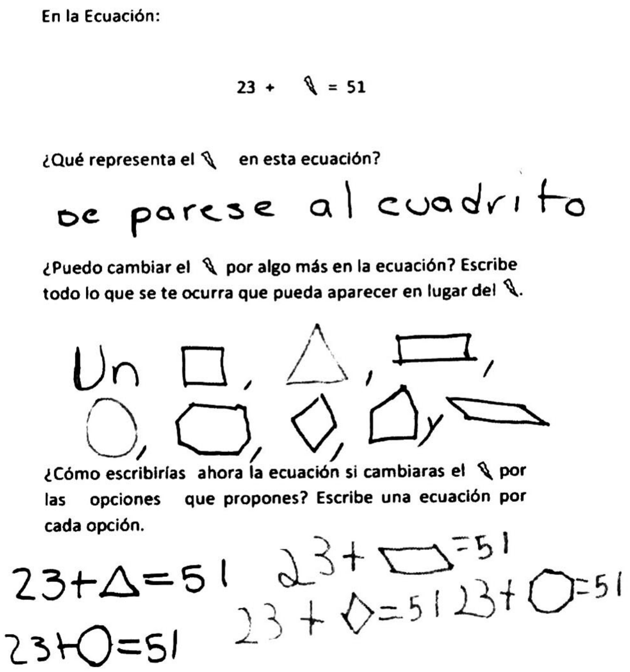
Las interacciones mostraron que ambas parejas estaban poco familiarizados con esta nueva forma de ver a la expresión 19+□=27. La participación del experto, durante la interacción fue activa, con el objetivo de lograr que reconocieran la presencia de algo desconocido y motivarlos para realizar la tarea. Se pudo constatar que la segunda pregunta de la actividad 1, se encuentra dentro de la zona de desarrollo actual de ambas parejas, por lo que no representó dificultad para ellos.

Resultados correspondientes a la actividad 2

El objetivo de la segunda actividad era reforzar el de la primera, enfrentarlos con simbología nueva, hacerles notar la presencia del símbolo, observar si ellos proponían símbolos, qué tipo de símbolos proponían, como lograban interpretarlos y como trataban a estos símbolos con respecto a los valores que pueden tomar.

Paulina y Elizabeth, en la primera pregunta de la actividad no reconocieron que el símbolo (⚡ representa la presencia de algo desconocido (I1), mencionaron que es el **espacio para poner el número** que resuelve la operación 23 + ⚡ = 51. Lo anterior justifica el tipo de figuras (triángulo, cuadrado, rectángulo, rombo) que a ellas se les ocurrió que pueden aparecer en lugar del rayo. Escribieron la misma ecuación variando el símbolo sin ninguna dificultad (I5).

El proceso que siguió la pareja de cuarto fue parecido al de la pareja de sexto. Esto se ilustra con la siguiente hoja que guía la interacción, contestada por Jorge y Uriel.



En la Ecuación:

23 + ✎ = 51

¿Qué representa el ✎ en esta ecuación?

se parese al cuadrito

¿Puedo cambiar el ✎ por algo más en la ecuación? Escribe todo lo que se te ocurra que pueda aparecer en lugar del ✎.

Un □, △, ▭, ○, ⬡, ◇, ⬠ y ▱

¿Cómo escribirías ahora la ecuación si cambiaras el ✎ por las opciones que propones? Escribe una ecuación por cada opción.

23+△=51 23+▱=51

23+◇=51 23+⬡=51

23+○=51

Es importante notar que en esta actividad a diferencia de la primera, tanto la pareja de cuarto como la de sexto, ya no buscaron determinar rápidamente el número que hace verdadera la igualdad, lograron fijar su atención en el símbolo, interpretarlo (I2) y además usaron otros símbolos (I5). Esto puede ser resultado de elegir una ecuación en la que no es sencillo determinar el valor con un cálculo numérico simple.

Las distintas opciones, que tanto la pareja de sexto como la de cuarto, sugieren que pueden ocupar el lugar de la figura dada, tienen la forma de recipiente (quizás con la intención de escribir dentro el número desconocido).

Los siguientes fragmentos de la interacción, muestran cómo el niño aprende de acuerdo con lo que hace en conjunto con el experto; y cómo con tareas nuevas, no se limita el mismo sólo a llenar las figuras que propuso en la situación anterior, y reestructura su significado inicial una y otra vez.

Cuando Paulina y Elizabeth contestaban la pregunta, ¿Qué observas en las ecuaciones?, se registró el siguiente diálogo:

P: Que puede ser diferente….

E: La figura del espacio (Elizabeth complementa la respuesta de Paulina).

P: Que pueden ser diferentes tipos de figuras, pero que siempre va a ser el mismo resultado…..el mismo número que están pidiendo para que lo sumemos con el otro número

I: Y tú ¿qué piensas Ely?

E: Que si, que sólo varían las figuras pero que el número que falta es el mismo.

Paulina y Elizabeth notaron, que todas las ecuaciones son equivalentes y no cometieron el error reportado por Booth (1984), de considerar que símbolos distintos necesariamente representan valores distintos.

Al continuar con actividad que pedía **ahora elige uno de los representantes que has propuesto y escribe ecuaciones diferentes con ese mismo representante**, se dieron las siguientes interacciones:

I: ¿Cuáles son sus ecuaciones?

E: Diez más triángulo igual a cuarenta y dos, ocho más triángulo igual a doce, catorce más triángulo igual a cincuentaitrés y veintidós más triángulo igual a cuarenta y cuatro.

P: Cuatro más rectángulo igual a nueve, quince más rectángulo igual a treinta y dos, veinte más rectángulo igual a sesenta y doscientos más rectángulo igual a trescientos cuarenta.

Paulina y Elizabeth fueron capaces de escribir ecuaciones diferentes, además, se puede observar que al dar lectura a las ecuaciones que proponen ya no omitieron nombrar el símbolo, lo cual nos indica que en esta actividad empezaron a darle importancia al símbolo.

I: ¿Qué nos indican el triángulo y el rectángulo que tienen en sus ecuaciones?

*P: Es el **espacio** para escribir.*

*E: Es el **representante** de que ahí falta un número.*

*I: Exactamente es el **representante** de que ahí falta un número.*

*I: En tu caso Paulina ¿quién es tu **representante**?*

P: El rectángulo.

Elizabeth no sólo no omitió nombrar el símbolo, además como se puede ver ha adquirido un nuevo significado para ella e introduce la palabra **representante** para expresarlo. Además se manifestó muy emocionada y mostró que es capaz de reconocer la presencia de algo que falta (I1). La investigadora resaltó esta respuesta con el objeto de que Paulina también asignara el mismo significado al símbolo.

I: Eli, en tu primera ecuación ¿a quién ***representa*** *el triángulo?*
E, P: al 32.

Como se observa ambas fueron capaces de determinar la cantidad desconocida que aparece en la ecuación (I1) y sustituir el valor (I4).

I: ¿Qué podemos decir?
E: El triángulo ***representa*** *que ahí falta un número.*
I: En este caso ¿a cuantos números diferentes ***representa?***
P: A 4.
I: ¿Qué podemos decir de las ecuaciones?
E: Son diferentes, pero nada más tienen ***un representante.***
I: Entonces ese ***representante*** *¿puede tomar......?*
E: Diferentes números.

Paulina y Elizabeth se percataron además, que el valor del símbolo depende de la ecuación en la cual aparece. Este fragmento muestra también, el uso de la palabra **representante** como un **instrumento funcional** en la construcción del significado de símbolo. Al finalizar la actividad la investigadora comentó con las niñas que a lo que ellas han llamado **representantes** de números en álgebra se conocen como símbolos y se representan más bien con letras.

Con la pareja de cuarto grado, si bien la investigadora tuvo una mayor cantidad de intervenciones, se lograron obtener los mismos resultados que con la pareja de sexto. A continuación se muestra una fracción de la interacción con Jorge y Uriel.

Ante la pregunta ¿Qué observas en las ecuaciones? de la actividad 2, se dio el siguiente diálogo:

J: Que cada una tiene diferente figura.

I: Aparte de esto, ¿qué notan?

U: Que es diferente.

I: ¿Qué es diferente?

U: La figura.

I: ¿Cómo son las ecuaciones?

J: Las ecuaciones son iguales.

I: ¿Cómo?

J: Las ecuaciones son iguales aunque la figura cambie (señala las ecuaciones).

I: ¿Qué quiere decir que las ecuaciones sean iguales?

J: Que no importa que figura pongas...cuadrado.... pero la operación es la misma.

U: El mismo resultado (señalando el símbolo).

I: No importa si es cuadro, rayo, círculo. ¿Cuál sería ese resultado?

J: 28.

I: Entonces todas las figuras que escribieron ¿a quien representan?

J,U: Al número 28.

Si bien se pueden observar algunas imprecisiones en el lenguaje de los niños, por ejemplo, cuando Jorge menciona *pero la operación es la misma* en realidad se refiere a la ecuación. La reacción de la investigadora no pretende corregir drásticamente, sino lograr distinguir cuál es exactamente su concepto y conseguir que la interacción sea sensible.

Las intervenciones que tuvieron ambas parejas durante el diálogo con el experto, dan claridad del proceso en lo que respecta a creación de la *zona de desarrollo próximo para trabajar con símbolos.*

Creemos además importante comentar sobre la actitud de los niños en esta actividad:

Elizabeth y Paulina intervinieron de forma animada, en algunas ocasiones una complementaba la respuesta de la otra, lo cual se puede observar en los fragmentos mostrados anteriormente.

Pero en la pareja de los niños de cuarto, notamos que, Uriel mostraba poco interés, su actitud daba señales de aburrimiento (bostezaba, jugaba con el plumón, volteaba para todos lados), la investigadora no logró que pusiera interés y sus intervenciones durante el diálogo fueron pocas. Por el contrario el interés y la motivación de Jorge iban en aumento. La producción de cuestionamientos y explicaciones de Jorge, dan claridad, en la creación de la *ZDP* para que Jorge sea capaz de usar e interpretar símbolos literales asociados al uso de la variable como incógnita, y en el desarrollo de la comunicación. Esto se nota en los siguientes fragmentos del diálogo:

J: En las ecuaciones ¿también puede ser resta?

I: Puedes ocupar cualquier operación.

(Jorge entusiasmado escribe)

$$10 \times \square = 1500$$

$$1765 - \square = 135$$

Jorge expuso sus dudas, las cuales muestran que el concepto de ecuación ha empezado a desarrollarse. Se puede notar como el significado de la palabra ecuación evoluciona.

J: ¿Sólo existen esas ecuaciones o también existen... que puedes poner 23 más algo, menos algo.... más cuadro.... así muchas?

I: Si también existen. En las ecuaciones puedes ocupar varias operaciones y tener varios símbolos.

En la formación del concepto de ecuación de Jorge, el progreso alcanzado en cooperación del adulto, se convierte en parte integrante del propio razonamiento de Jorge.

J: Y también lo pudimos hacer al revés. El hexágono primero y después el número

I: A ver escríbelo

$$\text{⬡} + 50 = 150$$

Sin duda el estudiante ha notado la propiedad conmutativa de la suma.

Resultados correspondientes a la actividad 3

El propósito esta actividad era reforzar la actividad anterior, pero viendo si eran capaces de interpretar a las letras como símbolos que representan números, cómo trataban a las letras en el contexto de las matemáticas, qué confusiones podían surgir y observar si era posible pasar al uso de la literal o no.

La pareja de sexto no tuvo ninguna dificultad para responder las preguntas de esta actividad, además, la interacción que se generó permitió que Elizabeth y Paulina alcanzaran un grado aceptable de comprensión del concepto de variable como incógnita. Esto se observa en los siguientes diálogos:

I: Ahora observa esta ecuación.

P: Trece más U igual a cuarenta y siete.

E: Ah! Ya.... o sea que este sería el ***representante****, la U.*

P: La U ***representa*** *el número de vasos que están detrás de la tela.*

I: Estas de acuerdo Elizabeth.

E: Si.

Es la primera vez que se les presentaron letras como símbolos para representar la incógnita y Paulina verbalizó la ecuación sin omitir el símbolo literal. Elizabeth dio una interpretación correcta del significado de la U. Ambas comenzaron a interpretar el símbolo U como **representante** de un valor especifico pero desconocido (I2).

I: ¿Pueden encontrar el valor de la U?

E: Si, primero restamos 47-13.

P: Para que nos dé el número de resultado de la U.

(Las niñas realizan la operación)

I: Entonces 34 ¿qué es?

P, E: El número de vasos que están detrás de la tela.

I: O sea que es el valor de quien.

P, E: De la U.

Lograron determinar la cantidad desconocida realizando operaciones aritméticas (I4) sin ninguna dificultad. Con ayuda de la investigadora pudieron relacionar la cantidad desconocida con la situación problemática planteada. Se puede notar aún algunas imprecisiones en el lenguaje *para que nos dé el número de resultado de la U.* La asistencia proporcionada por la investigadora durante la interacción no pretende transmitirles su forma de pensar de forma directa, sino acompañarlos para que encuentren significados.

I: ¿Cómo escribiríamos esto?
P,E: 13+34=47, 34 en lugar de la U.

Paulina y Elizabeth logran sustituir el valor de la variable por el valor que hace de la ecuación un enunciado verdadero (I3). Como se puede observar conforme interactúan con la investigadora el significado del uso de la simbología se va haciendo similar al significado convencional.

I: Muy bien, pero si yo digo que el valor de la U es igual a 34... ¿cómo lo escribirían?
*E: Como si esto fuera el **representante** del número, así como si fuera la figura en donde tenemos que poner el número.*
I: Pero esta ya no es una figura.
P: No, es una letra.
*E: O sea que las figuras que pusimos antes **representan** el número que falta ahí.*
(Paulina con un gesto de seguridad afirma con la cabeza)
I: Exactamente, entonces la U ¿qué es?
*E: Un **representante** en esta ecuación.*
*P: Un **representante** del número que falta.*

Paulina y Elizabeth logran reconocer que la U indica la presencia de algo que falta en la ecuación (I1). Además Elizabeth participó activamente y reconoció el uso de las figuras (simbología algebraica) como **instrumento funcional** en la formación del concepto de variable como incógnita. Las explicaciones de Elizabeth realzan las diferencias mínimas discutidas y consideradas importantes para ella dentro de un ambiente de reflexión.

I: Posteriormente ustedes ya no van a trabajar con el cuadrito para representar a un número ¿con qué se imaginan que van a trabajar?
E, P: Con letras.
I: Con cuales.

P: Con la A, la I, la O,..
E: Con cualquier letra.
I: Pero ¿qué van a representar esas letras?
E: Los números que faltan.

Paulina y Elizabeth en compañía de la investigadora han logrado encontrar significado a la simbología que representa a la variable como incógnita.

Para finalizar la actividad Paulina y Elizabeth, escribieron la misma ecuación con símbolos literales distintos y se reforzó la actividad anterior en cuanto a escribir ecuaciones equivalentes con símbolos distintos para representar la incógnita sin cometer el error de considerar que letras distintas representan valores distintos.

A partir de la interacción con el investigador, la pareja de cuarto fue capaz también de dotar de sentido al símbolo literal que aparece en la actividad, de una forma similar a la pareja de sexto. Al observar la ecuación $13+U=47$ se dio este dialogo:
J: Ahora ya no es figura es letra.
I: Exactamente. No es una figura es una letra. Ahora Uriel ya no es...
U: Un cuadro o un círculo.
J: Ni un rayo.
I: Ahora ¿qué es?
J, U: Una letra.
I: Las letras se usan en matemáticas también, ¿para qué creen ustedes?
U: Es un número, el 34.
J: El número que va ahí.
Con la pareja de cuarto se logró alcanzar los mismos objetivos de la actividad de forma parecida a la descrita anteriormente con las niñas de sexto. En este caso Jorge fue quien tuvo una participación activa y Uriel presentó una incertidumbre elevada en relación con la tarea, por lo que el número de intervenciones por parte de la investigadora con la pareja de cuarto fue algo mayor, con la finalidad de reducir dicha incertidumbre.

Otro punto interesante que se observó, fue que Uriel al observar la ecuación inmediatamente se concentró en calcular el valor de la U. La investigadora trató durante la actividad integrarlo en la conversación, Uriel respondía pero se le notaba preocupado por encontrar el número.

Resultados correspondientes a la actividad 4

En esta actividad se introdujo un problema verbal simple, que comúnmente los niños resuelven durante su educación primaria. El propósito era guiar a los estudiantes para que lo resolvieran planteando una ecuación.

En general la pareja de sexto no presentó ninguna dificultad para contestar las preguntas planteadas en esta actividad. La ayuda que se les otorgó fue mínima, sus dudas fueron resueltas por ellas mismas como se puede observar en el siguiente fragmento de la interacción:

I: ¿Cómo representaríamos la situación con una ecuación?
P: 123 más el número que falta igual a 500.
I: ¿Cómo lo escriben?
E: ¿Con el resultado que falta? o...
I: ¿Con qué podemos escribir al número que falta?
*P, E: Con un **representante.***

De forma oral Paulina hace el planteamiento correcto de la ecuación. La investigadora las encauza a que simbolicen, la respuesta de Elizabeth permite ver que está abierta a la posibilidad de que aparezca algo en lugar del número que falta.

E: O sea una figura.
I: ¿Con una figura o?
P,E: O con una letra.

Elizabeth propone que sea un símbolo el que represente a la cantidad determinada, dado que la tarea del experto es garantizar los progresos mostrados en la actividad 3 acompaña a las niñas a recordar que existen otro tipo de símbolos, cuestión que realizan sin ningún problema.

Paulina escribe	Elizabeth escribe
$123+K=500$	$123+A=500$

Como se puede observar las niñas logran simbolizar la cantidad desconocida, y la utilizan para plantear una ecuación (I5). Además, no les produce ninguna dificultad aceptar que no estén utilizando el mismo símbolo para representar a la cantidad desconocida.

Elizabeth

$123 + A = 500$

123 es el numero de cerillos que estaban en
buen estado y la A representa el numero
de cerillos que salieron mal y el 500 es
el resultado de todos los cerillos que venian er
la caja.

Paulina

$123 + K = 500$

123 es el número de serillos que salieron en buen
estado.
K es el número de serillos que estaban en mal
estado.
500 el número de todos los serillos.

La pareja interpreta de forma correcta lo que indica la ecuación, y que la variable simbólica representa un valor específico (I2). Lo anterior da cuenta además, de cómo, conforme avanzan en el estudio, el significado que asocian a la letra se hace similar al significado convencional.

Para finalizar la actividad Paulina y Elizabeth determinaron la cantidad desconocida que aparece en la ecuación realizando operaciones aritméticas (I4) y de forma oral sustituyeron la variable por el valor que representa (I3).

Con esta actividad se finalizó la primera sesión con la pareja de sexto grado. En el caso de la pareja de estudiantes de cuarto grado la primera sesión concluyó una vez realizada la actividad 3. Es así que con Jorge y Uriel se trabajó la actividad 4 en la segunda sesión.

A continuación se analiza lo sucedido en esta actividad con la pareja de cuarto:

Jorge dio lectura a la actividad 4 y de inmediato comentó, *deben ser 500 menos 123*. Esto da muestra de que al principio del periodo de transición del aritmética al álgebra, los estudiantes comúnmente no ven el por qué necesitan plantear una ecuación para resolver un problema (Cai, 2005).

El experto leyó nuevamente la tarea con la intención de que ellos se enfocaran en el uso de ecuaciones para modelar y resolver situaciones problemáticas. Uriel expresó que no comprendía lo que se pide, mientras Jorge escribió rápidamente

$$123+G=500$$

Uriel, observó lo que Jorge hizo y escribió (I5)

$$123+5=500$$

A solicitud de la investigadora Jorge y Uriel interpretaron cada uno de los elementos involucrados en la ecuación que plantearon (I2), sus interpretaciones fueron correctas. Sólo Jorge determinó la cantidad desconocida que aparece en la ecuación (I4) y sustituyó de forma oral la variable por el valor que hace de la ecuación un enunciado verdadero (I3).

A diferencia de las niñas de sexto, quienes durante la interacción respondieron de forma espontánea, complementaron sus frases, o contestaron al mismo tiempo; Jorge contestó rápidamente y Uriel se quedó callado, y respondió posteriormente lo mismo que Jorge, o respondió sólo cuando se le solicitaba. Durante toda la actividad se observó a Uriel afligido por las operaciones que debía realizar para encontrar el número de cerillos en mal estado. Jorge manifestó sus inquietudes, mismas que dan cuenta de la creación de *la zona de desarrollo próximo* para la comprensión del símbolo asociado a la variable como incógnita. El siguiente fragmento muestra evidencia de lo referido.

J: No hemos hecho esto de que también, por ejemplo... de que pongas primero.

$$G+123=500$$

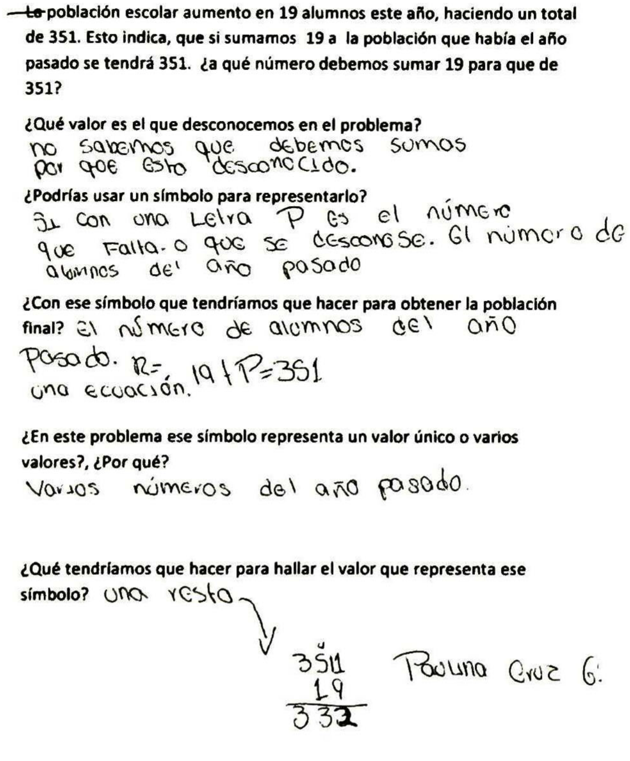
I: Tienes razón, ¿Cuál es la diferencia entre G más 123 igual a 500 y 123 más G igual a 500?
J: Ninguna.

Sin duda el estudiante ha notado, además, la propiedad conmutativa de la suma.

Resultados correspondientes a la actividad 5

El propósito de esta actividad era lograr que los niños usaran ecuaciones para modelar y resolver una situación problemática. En primer lugar se adecuó la situación de modo que los estudiantes pudieran reconocer en la situación la presencia de algo desconocido y que puede ser determinado. En segundo lugar se plantearon preguntas precisas. Finalmente, durante la interacción se centró la atención en responder únicamente las preguntas y se hizo caso omiso a las aportaciones de los alumnos orientadas en resolver únicamente la sustracción.

Elizabeth y Paulina no tuvieron dificultades para responder la mayoría de las preguntas que se les plantearon. Como se puede observar en lo que escribieron:



~~La~~ población escolar aumento en 19 alumnos este año, haciendo un total de 351. Esto indica, que si sumamos 19 a la población que había el año pasado se tendrá 351. ¿a qué número debemos sumar 19 para que de 351?

¿Qué valor es el que desconocemos en el problema?
no sabemos que debemos somos por que esto desconocido.

¿Podrías usar un símbolo para representarlo?
si con una Letra P es el número que Falta. o que se desconose. El número de alumnos del año pasado

¿Con ese símbolo que tendríamos que hacer para obtener la población final? El número de alumnos del año pasado. R= una ecuación. $19+P=351$

¿En este problema ese símbolo representa un valor único o varios valores?, ¿Por qué?
Varios números del año pasado.

¿Qué tendríamos que hacer para hallar el valor que representa ese símbolo? una resta

$$\begin{array}{r} 3\overset{u}{5}11 \\ 19 \\ \hline 332 \end{array}$$

Paulina Cruz G.

Las respuestas son muy claras y muestran la comprensión que han logrado alcanzar respecto del uso de la variable como incógnita y su representación simbólica. Si bien, como se puede observar Paulina, comete el error de escribir que el símbolo representa a varios números, este error es generado por el número de cifras que compone al número que se desconoce. Pero la dificultad se resuelve cuando dan respuesta a la última pregunta de la actividad.

Durante la resolución de esta tarea el papel de la investigadora consistió en brindar ayuda de carácter muy general, y traspasar la responsabilidad a la pareja conforme esta aprende, ante esto la pareja se desenvolvió de forma exitosa. Como se puede observar en el siguiente fragmento:

I: Con ese símbolo ¿qué tendríamos que hacer para obtener la población final?

E: Sumar el número de alumnos que aumentaron.

I: Y ¿cómo le haríamos?

(Elizabeth, se queda pensando)

E: Como...una ecuación (Paulina afirma con la cabeza)

I: ¿Cuál sería la ecuación?

E: 19 más...

P: La letra.

E: Bueno aquí en el mío sería 19 más F igual...351.

Conforme Paulina y Elizabeth aprenden su papel en la interacción se vuelve más importante, se sienten seguras, por tanto verbalizan con entusiasmo y colaboran para lograr metas compartidas.

La pareja de cuarto presentó dificultades al trabajar con esta actividad. Tales dificultades fueron el resultado de que durante el desarrollo de las actividades anteriores, Uriel se limitaba a imitar lo establecido por Jorge y su atención se centraba en resolver cuestiones aritméticas. Con Uriel no se lograron despertar procesos durante la interacción, que interiorizara y los hiciera propios. Además, la actitud usualmente negativa, del niño hacia las matemáticas pudo ser también un motivo determinante.

A continuación se presenta el análisis de las interacciones que se dicen durante esta actividad:

I: Entonces cual será el símbolo que queremos.....¿Estás pensando en resolverla Uriel?, ¿Cuál sería su símbolo?

J: La G.

U: El 81.

Uriel no presta atención a la discusión, opera para encontrar el número de alumnos del año pasado y su resultado es incorrecto. La investigadora trata de involucrarlo al pedirle que plantee cual es su símbolo.

I: ¿El 81... ese sería tu símbolo?, hemos visto símbolos aquí (se les presentó la hoja de las ecuaciones que propusieron anteriormente). *Señálenme aquí ¿cuáles son los símbolos?*
J: Estos.
I: Uriel elige uno de estos símbolos para representar al número de alumnos,... ¿El 81 es un símbolo?
U: No.
Jorge señala correctamente cuales son los símbolos, Uriel se nota confundido y la investigadora le da como ayuda una sugerencia concreta al preguntarle si el 81 es un símbolo, a lo que Uriel contesta que no, pero de forma insegura.

J: Elige una letra.
I: ¿Puede ser cualquier letra Jorge?
J: Si.
(Uriel escribe S= 81)
I: Esto que escribiste qué sentido tiene.
U: Nada.

Como se observa Jorge interviene e indica a Uriel lo que él ha comprendido que es un símbolo. La investigadora se apoya de esto para que Uriel note que puede ser cualquier letra. Uriel escribe, pero se nota que quiere dar sentido al número que ha encontrado. Sin embargo cuando se le pregunta qué sentido tiene lo que escribió, contesta sin interés *nada.*

U: Es que a mí siempre me han traído con sumas y restas... y.... divisiones o multiplicaciones en la escuela y en mi casa mi mamá.... y por eso no se mucho.
I: Pero ahorita no te preocupes, porque no las vamos a resolver, ahorita sólo nos interesa trabajar con símbolos, cuando no puedas resolver una suma o resta no importa,....
U: Es que ya me chocaron.

Con Uriel no se ha logrado iniciar el desarrollo de la formación del concepto de variable como incógnita al tratar de hacer un uso funcional de la notación algebraica. Al parecer el resolver operaciones, produce una angustia en el niño, que no le permite centrarse en otro tipo de procesos.

Con esta actividad se finalizó la segunda sesión del estudio con la pareja de cuarto y en base a los resultados observados se decidió trabajar con los dos niños por separado. Sin embargo, esto no fue posible, debido a que Uriel comentó que no quería continuar y, por tanto, seguimos el estudio sólo con Jorge.

Resultados correspondientes a la actividad 12

Esta actividad se trabajó después de haber efectuado seis actividades de la variable como número general. El propósito era presentar una ecuación sin contextualizar y observar qué sentido logran otorgar a la expresión, ver si durante la interacción son capaces de interpretar el símbolo correctamente y si lo pueden sustituir por el valor específico que representa.

Al principio de la actividad la pareja parece estar de acuerdo que la K en la ecuación K+K+K=9 representa al número 3, sin embargo como en Elizabeth domina la idea de resultado comete el error de asignar distintos valores a la letra involucrada. Ante este error Paulina interviene rápidamente y afirma *pero tienen que ser a fuerza....los números iguales*. La investigadora determina dejar que la pareja se desempeñe:

P: Pero tienen que ser a fuerza....los números iguales.

E: Pero también da 9.

P: Si...pero ¿cómo habías dicho?

E: Cuatro, dos y tres.

P: Cuatro, aquí no puede ser porque es la K si hubiera sido la S o la P, entonces si se puede.

E: Entonces todas las K´s tienen el mismo valor ¿por ser la misma letra?

Al observar la investigadora que son capaces de comprender por si solas, contesta las preguntas que las niñas le plantean directamente, de forma muy general o les solicita que expliquen lo que comprenden, sus respuestas muestran que conforme aprenden su papel en la interacción se vuelve más importante. Como se observa en el siguiente fragmento:

I: Recuerden la K ¿qué representa?
P: Representa un número.
P: Aquí sólo puede ser un mismo número 3.
I: ¿Cómo explicas esto que dices?
E: Si fueran diferentes letras (señalando la expresión) *si se podrían cambiar los números.*

En esta respuesta de Elizabeth vemos como fue suficiente el comentario de Paulina, para que Elizabeth hiciera suya esta convención, lo que muestra claramente que el considerar que las mismas letras en una expresión representan el mismo valor está en su *ZDP*.

I: ¿Cómo escribirían este ejemplo que están dando?
Paulina escribió.

$$P + E + M = 9$$

$$P = 4 \quad E = 2 \quad M = 3$$

Se continua trabajando de la misma manera, ellas proponen diversos ejemplos que nos muestran que son capaces de: interpretar a la variable simbólica que aparece en la ecuación como la representación de un valor específico (I2), determinar a la cantidad desconocida (I4) y sustituir a la variable por el valor correctamente (I3).

$$Z+P+P=9$$

$$Z=5 \quad P=2 \quad P=2$$

$$a+a+a+a+a+a+a+a+a+a+a+a+a+a+a+a+a+a=18$$

$$a=1$$

La investigadora enfatiza sobre la importancia de lo que ellas descubrieron respecto al uso de la letra como incógnita.

I: Con esto, ustedes acaban de descubrir algo que se establece en álgebra, en una ecuación un símbolo siempre representa al mismo valor.
E: En esta ecuación, podría ser K más K más K más K... así muchas veces la K.
I: Claro, pero la K siempre representa al mismo número.

Al realizar esta actividad con Jorge se pudo observar que el niño tuvo el mismo error que Elizabeth. Si bien al presentarle la ecuación K+K+K=9, contestó que "K=3" reconociendo a la variable como incógnita (I1), y cálculo su valor (I4), al preguntarle si existiría otra manera de resolver la ecuación asignó valores distintos a la K. Por tanto, la investigadora proporcionó significados verbales para trazar el camino que lleve al niño a comprender una ecuación un símbolo siempre representa al mismo valor. Para esto utilizó diversas estrategias, por ejemplo recurrir a las actividades resueltas por la pareja de sexto y mostrárselas al niño para que dedujera lo que habían comprendido las niñas. Sin embargo, para Jorge resultó complicado deducir, por tanto la investigadora decidió comentarle directamente *recuerda cuando veas en una ecuación o en una expresión que aparece la misma letra varias veces siempre debe tomar el mismo valor. Esto sólo si aparecen en la misma ecuación. Si aparece la letra en dos ecuaciones diferentes no tiene por que tomar el mismo valor* y recurrió a varios ejemplos hasta que el niño logró asimilar la convención. Como se observa en el siguiente diálogo.

(La investigadora escribió)

$$m+n+p+m=10$$

I: ¿Qué observas?

J: La m valdría 3, la n valdría 3, la p valdría 3 y la m, 1.

I: ¿Esto que escribí es una? (indica la ecuación)

J: Ecuación.

I: Mencioné hace rato que siempre que aparezca una letra varias veces en una misma ecuación ¿Qué va a pasar?

J: Como yo veo, estas como son iguales deben valer lo mismo (señalando otra expresión).

$$s+s+s+s=20$$

J: Y estas como no son las mismas… no. (Señalando la expresión m+n+p+m=10).

$$m+n+p+m=10$$

I: Pero en esa expresión ¿cuáles no son las mismas?

J: La n y la p.

I: Y cuál es la misma.

J: La m.

I: ¿Entonces aquí que puede estar pasando?

J: Que estas dos valen lo mismo (refiriéndose a las dos apariciones de la m) *y estas dos diferente* (refiriéndose a la p y la n).

I: p y n pueden valer diferente o pueden valer lo mismo, lo importante es que las m toman a fuerza el mismo valor.

El fragmento anterior muestra una pequeña evidencia de que el niño llega a comprender con ayuda del investigador, después de mucho trabajo realizado por ambos.

Podemos decir que, como para Elizabeth, la comprensión de esta regla ya está en la *ZDP* de Jorge pero de manera más incipiente. Es muy probable que si se siguiera con este tipo de intervenciones para Elizabeth, esta regla estaría muy pronto en su *ZD,* mientras para Jorge está tomando un poco más de tiempo.

Tanto con Elizabeth y Paulina como con Jorge, durante esta misma actividad, surgió la posibilidad de introducir la forma en que se opera con la variable simbólica (por ejemplo, k+k+k=9). Se partió de expresiones de la forma 8+8+8+8+8=40 y se recurrió a sus conocimientos aritméticos previos. Con Jorge el proceso no fue sencillo, estuvo lleno de dificultades, inhibiciones y olvidos, al finalizar la sesión el niño dio muestras de empezar a comprender. Con las niñas el proceso fue menos complicado que con Jorge, dado que Elizabeth tenía buenas bases aritméticas, y con la ayuda de la investigadora fueron capaces ambas de hacer la analogía.

Resultados correspondientes a la actividad 16

El propósito esta actividad era presentar a los niños situaciones problemáticas que refieren el uso de una balanza y además, muestran las posibles representaciones de dichas situaciones por medio de ecuaciones, con el fin de que los alumnos interpretaran al símbolo X que aparece en cada una de las ecuaciones como la representación de valores específicos (I2).

Al trabajar con Paulina y Elizabeth nos dimos cuenta que los enunciados presentados en esta actividad les hicieron mucho sentido, por lo que no les fue difícil interpretar las ecuaciones mostradas de un forma correcta. Ante esto, la función de la investigadora fue encauzarlas a explicar lo que comprendían:

E: Sería que el 350 más la X da 500, o sea que aquí (señalando a la X) *tendría que haber 150.*
I: Y ¿cómo la relacionan con el problema?
P: Que en un lado de la balanza hay 500 gramos de peso...
P,E: Y en el otro lado hay 300 y nos piden más azúcar para equilibrar.
I: ¿Cómo equilibró mi báscula?
P: Se tendría que poner una bolsa con el valor de X.
I: O sea,.. ¿Con el valor de?
P, E: 150

Como se puede notar son capaces de interpretar el símbolo como la representación de una cantidad específica (I2), además calcularon su valor (I4). Con la misma naturalidad relacionaron el enunciado con la otra ecuación presentada.

La investigadora se valió de que las niñas lograban comprender las situaciones presentadas en esta actividad, para presentar ecuaciones de la forma 9+10=5+w, y enfatizar sobre el uso del signo igual en una ecuación como indicador de equilibrio en una balanza. Elizabeth dio muestras de empezar a comprender, sin embargo Paulina siguió refiriéndose a la expresión que aparece a la derecha del signo igual, como el resultado. No obstante, la investigadora continuó solicitando a las niñas que equilibraran las ecuaciones que les presentaba.

Jorge también logró sin ninguna dificultad interpretar el símbolo X (I2), que aparece en cada una de las ecuaciones, además explicó muy bien la relación que hay entre cada ecuación y el problema que modela (ver los resultados de la actividad 15).

IV.2.2 Resultados con respecto al uso de la variable como número general

En esta sección se presentan los resultados obtenidos al trabajar con las actividades que involucran a la variable como número general. Las actividades se pueden consultar en el capítulo III, apartado III.1.2.

Resultados correspondientes a la actividad 6

El propósito era ver la capacidad de los niños participantes, para interpretar un número general (G2). Esto se hizo introduciendo un dibujo que involucra una cantidad específica y un símbolo literal en representación de una cantidad que es imposible determinar. Además se incluyeron preguntas que generaran una interacción que lleve la atención del niño a interpretar al símbolo.

En esta primera actividad de número general Paulina y Elizabeth, con seguridad afirmaron que el símbolo literal representa *el número de galletas que están detrás de la tela.* Sin embargo no lograron interpretar a dicho símbolo literal como el representante de una cantidad imposible de determinar (G2). Paulina dio indicios de comprender, cuando comentó *yo digo que no tiene un valor específico, porque no sabemos cuántas galletas hay detrás de la manta*, sin embargo, los argumentos de Elizabeth confundieron a Paulina y ella no logró defender sus propios argumentos, como lo ha hecho en otras ocasiones cuando sentía seguridad en lo que manifestaba.

En este primer acercamiento a la variable como número general, la investigadora no intentó tomar el control de la interacción, sólo les mostró la actividad 3, que involucra una incógnita, y había sido previamente resuelta por ellas mismas anteriormente, y preguntó, *¿Cuál es la diferencia entre ésta situación problemática y la que estamos resolviendo?*. Comentaron que *la anterior tiene cuál es el total y ésta no tiene*. Esta observación que hicieron y el apoyo contingente de la investigadora sirvieron para que dieran respuesta a las preguntas planteadas en la actividad. Si bien sus respuestas mostraron imprecisiones, también mostraron que el apoyo les hizo notar diferencias, entre esta actividad y la actividad 3:

Ante las siguientes preguntas Paulina y Elizabeth contestaron por escrito:

¿Qué representamos con la letra m?

el número desconocido de galletas

¿Tiene un valor específico, si o no?

no, por que no hay número total de galletas

Si bien como se puede observar, usaron el término que se utilizó para la variable como incógnita, "el número desconocido", ahora notando que algo era distinto.

Jorge, de cuarto grado, no tuvo ninguna dificultad para interpretar el símbolo como la representación de una entidad general, indeterminada que puede asumir cualquier valor (G2):

I: ¿Cuántas caritas hay debajo de la tela?
J: No se sabe.
I: Me puedes decir ¿cuántas hay?
J: No.
I: Qué pasa, es como con los pájaros. ¿Por qué?

Aquí la investigadora se refiere a un diálogo que sostuvo con Jorge antes de esta actividad:
I: Dime ¿cuántos pajaritos hay en el mundo?
J: Muchos

I: Si me puedes decir... ¿Cuántos?

J: Más de 10 millones,....., muchos

I: Observa el árbol ¿cuántas hojas tiene?

J: Muchas pero no sé cuantas,... son muchas

I: Son muchas ¿y por qué no sabes cuantas?

J: Porque son muchas y a simple vista no se puede ver cuántas son

J: Porque, no los puedo contar, porque los pájaros vuelan y no lo puedo atrapar y contarlos y aquí no puedo quitar la tela para ver.

Algo que sin duda fue indispensable, para que Jorge interpretara desde esta primera actividad que el símbolo literal representaba en este problema a una cantidad que no tenemos posibilidad de determinar, fue, que antes de presentarle dicha actividad, la investigadora recurrió como estrategia al uso de analogías.

Este tipo de apoyo no se le brindó a la pareja de sexto, lo cual pudo ser la causa de que Jorge lograra interpretar correctamente y sin ayuda, el número general, mientras que para Elizabeth y Paulina fue más difícil.

Resultados correspondientes a la actividad 7

El propósito de esta actividad era presentar una situación parecida a la anterior, pero que pedía proponer una expresión que representara la situación (G5). Durante la interacción se quería observar si lograban representar cantidades en expresiones, que se pueden representar cantidades con expresiones algebraicas, sin importar que éstas no sean específicas (G2). Además pedir al niño que sugiera una condición a la situación presentada para plantear una ecuación (I5), en la que el símbolo involucrado represente un valor específico (I2). Observar si comprenden la diferencia sobre el uso de la variable como número general y su uso como incógnita.

Elizabeth escribió una expresión sin ninguna dificultad (G5) mostrando que interpretaba el símbolo como número general. Ambas relacionaron correctamente el símbolo dado con la situación planteada. Se pudo notar además que las niñas empezaban a dotar de un nuevo sentido al símbolo literal. Ante la pregunta ¿Qué representa la H en su expresión?, Elizabeth contestó *pues varios porque no dice tampoco el total.* Por su parte Paulina asignó varios valores a la letra H. La investigadora aprovechó la intervención de Paulina, para enfatizar que pueden ser esos o muchos más, pero que en realidad no importa qué número sea.

Finalmente las niñas con mucho entusiasmo, mencionaron qué condición tendría que existir para que la H tomara un valor único (I2).

Elizabeth escribió

un total de todo, tengo 47 estrellas en total
son descubiertas y otras tapadas

$17 + H = 47$

Lo anterior ilustra que las niñas asociaron una condición a la situación inicial presentada, pero además simbolizaron una ecuación (I5), con lo cual se nota que empiezan a representar, haciendo uso de la notación algebraica, la diferencia entre el uso de la variable como incógnita y el uso de la variable como número general.

Por su parte Jorge simbolizó (G5) sin ninguna dificultad el total de estrellas e interpretó a la variable simbólica como la representación de un valor indeterminado (G2). Sin embargo, mostró dificultad al responder la última pregunta. Ante esto la investigadora mostró a Jorge lo actividad 3, que había resuelto previamente, y entre los dos recordaron lo que se había hecho. Jorge reflexionó en voz alta.

J: Ahí solo se sabe el número de estrellas que se ven.

J: Si se supiera el número de estrellas que hay (apunta a las que si se ven en la ilustración) *y el resultado, se podría encontrar m, pero no hay el total.*

De las intervenciones de Jorge, Elizabeth y Paulina se puede observar como conforme interactúan con el experto con tareas distintas, son capaces de reestructurar sus significados personales una y otra vez.

Resultados correspondientes a la actividad 8

El propósito era observar si los niños lograban comprender, el uso de un número general como resultado de una suma planteada en un problema verbal, además de interpretar a las variables simbólicas involucradas, como representantes de entidades generales que pueden asumir cualquier valor (G2).

Tanto Elizabeth y Paulina como Jorge interpretaron sin dificultad la letra N como representante de una cantidad indeterminada. Ante la pregunta ¿cuántos libros leyó el estudiante durante estos dos meses? se dieron los siguientes diálogos:

(Interacción Paulina-Elizabeth-Investigador)
P: ¿Las expresiones también se pueden hacer de A y B?
(Elizabeth escribió A+B)
I: ¿Que representa A+B?
P, E: El número de libros que leyó en total.
I: Muy bien, en las expresiones algebraicas pueden aparecer muchos símbolos.

(Interacción Jorge-Investigador)
J: ¿Qué no se supone que debería de haber un número?
I: ¿Qué es A?
J: Ah... el número de libros que leyó en enero.
(Jorge escribe A+B)
I: ¿Qué entiendes?
J: Una expresión, el número de libros que leyó en enero y los que leyó en febrero.
I: Y... ¿por que la suma?
J: Porque es el número de libros que leyó en los dos meses.

Lo anterior da evidencia de que aún cuando tienen dudas de lo que deducen, porque va más allá de lo que han trabajado con el experto, lo exponen y esperan una aprobación del investigador. Ante esto el experto no se limita a complacer a los niños por el hecho de que estén bien, sino que les plantea preguntas, para que reflexionen si lo que hacen está bien o no.

Resultados correspondientes a la actividad 10

El propósito de esta actividad era ver si los niños podían proponer una expresión algebraica como representación de una cantidad indeterminada (G5), y modelar una situación sencilla.

Elizabeth y Paulina resolvieron sin dificultad la actividad, no obstante la investigadora hizo preguntas para proveerles un espacio en el cual ellas dieran explicaciones sobre lo que escribieron y pudieran comprobar que la representación algebraica de la cantidad indeterminada (G2) que proponían era correcta. Ante la pregunta ¿Cuánto dinero necesito para comprar la playera?, se dio el siguiente diálogo:

P: ¿P es el número que cuesta la playera?

E: Mmm... con una expresión.

P: P-40.

I: ¿Qué sería P-40?

P: Es una expresión.

I: Si, ¿pero que representa en este caso?

P: Qué P-40 es la expresión que nos dice cuánto dinero necesito para comprar la playera.

Jorge también resolvió sin dificultad la actividad, y la investigadora procedió de forma similar que con las niñas de sexto.

Como se puede notar la forma en que se introdujo el número general fue por medio de expresiones abiertas. Por tanto, en estas actividades (6,7,8,9,10), tanto Paulina y Elizabeth como Jorge, lograron reconocer a la variable simbólica involucrada en la expresión abierta, como la representación de una entidad general, pero les costó trabajo reconocer a la expresión misma como un número general. Ante esto, el papel de la investigadora fue encauzar a los niños para que reflexionaran al respecto.

Resultados correspondientes a la actividad 11

El propósito de la actividad era observar si ante una entidad general indeterminada, los niños aceptan que se puede representar con cualquier símbolo literal y si a partir una situación verbal sencilla pueden interpretar a la variable simbólica como la representación de la entidad general involucrada (G2).

Paulina y Elizabeth fueron capaces de relacionar sin ninguna dificultad la situación presentada con la representación simbólica correcta y, además, en la interpretación que hicieron de la variable no les preocupó conocer su valor específico (G2):

E: Sería 171-m.
I: ¿Porque 171-m?
E: 171 por las cajas que compró.
P: Y la m por las que le robaron.

Se pudo observar además, que tenían claro que una cantidad se puede representar con cualquier símbolo literal. Además reconocieron sin dificultad que en las opciones contempladas en la hoja, había algunas que eran equivalentes:

P: Aunque también podría ser esta con la a, o la, k o la r
I: ¿Por qué, que representa la m?
E, P: El número de cajas que le robaron.
I: Y,.. ¿la a, la k y la r?
E, P: También representan al número de cajas que le robaron.
I: ¿Entonces puedo ocupar cualquier letra?
P: Si pero, la de por (refiriéndose la expresión 17 x s) *no sería, porque le robaron cajas no se las aumentaron.*
E: y entre tampoco.

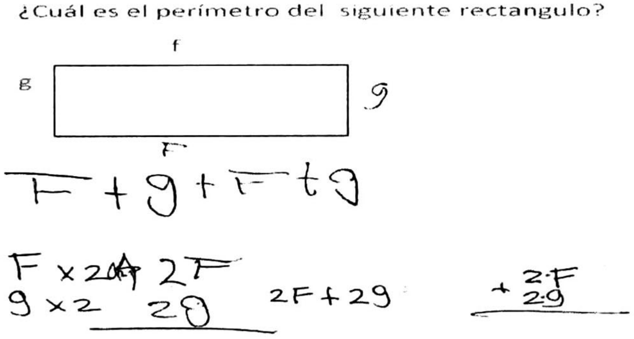
En el caso de Jorge también se obtuvieron resultados muy similares.

Resultados correspondientes a la actividad 13 y 14

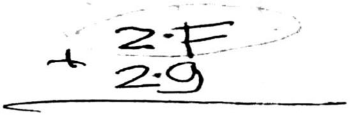
El propósito de estas actividades era mostrar figuras geométricas y solicitarles que encontraran el perímetro, para observar si lograban simbolizar métodos (G5). La figura de la actividad 13 incluía dos símbolos literales, con el objetivo que ellos los asociaran a las medidas. La figura de la actividad 14 tenía la condición de ser una figura regular, pero no se usaba ningún símbolo.

Antes de presentarles la actividad 13 a los niños se discutió con ellos que entendían por perímetro y se les explicó además, el significado de una figura regular.

Elizabeth y Paulina interpretaron de forma inmediata los símbolos como números generales (G2) incluidos en la actividad 13. Hicieron el siguiente comentario *esta es la medida de acá... bueno es el* ***representante*** *de la medida.* Después de interpretar, simbolizaron el perímetro de la figura Paulina escribió *f+g* y comentó *y sería un total,* la investigadora preguntó ¿podemos conocer un total?, a lo que ellas respondieron *no porque nos sabemos los números,* la investigadora preguntó además, si la expresión estaba bien escrita y Elizabeth negó y completó de forma oral *f+g+f+g*, además explicó correctamente la manera en que procedió. Esto motivó a Paulina a completar también en la hoja. Finalmente, a petición de la investigadora, manipularon la variable (G4). A continuación se muestra la hoja contestada por ellas.


¿Cuál es el perímetro del siguiente rectangulo?

Después de que Elizabeth escribió 2f+2g comentó *o también puede ser así* escribiendo:



Lo anterior muestra que Elizabeth hizo una extrapolación de la aritmética y acomodó los sumandos para efectuar una suma. La investigadora explicó, porque no es posible escribir de esta manera, pero tuvieron dificultad en comprenderlo.

Al mostrarles la actividad 14 se generó el siguiente diálogo entre ellas:

P,E: ¿Nosotros le ponemos las medidas?

E: ¿Con letras o con números?

P: Con letras porque no sabemos el número que mide.

Lo anterior da evidencia de que representar una cantidad indeterminada con una letra está en la *ZDP* de ambas. Después de estos comentarios ellas simbolizaron sin ninguna dificultad la medida de los lados (G5) usando la misma letra. La investigadora preguntó porque utilizaban la misma letra, sus repuestas evidenciaron que habían comprendido el significado de número general y que en un problema se usa la misma literal para representar la misma cantidad. Finalmente escribieron el perímetro y simplificaron la expresión de forma correcta (G4).

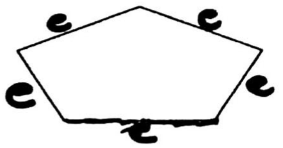
Jorge, de cuarto, se condujo de forma similar a las niñas de sexto en estas dos actividades. He aquí la interacción generada a raíz de la actividad 14:

I: ¿Qué notas diferente de la actividad anterior?

J: Que aquí no tiene letra.

I: ¿Crees que se puedan poner letras?

J: Si la e.



I: ¿Por qué escribiste en todos los lados de la figura la letra e?

J: Por que miden lo mismo.

I: ¿Me puedes decir cuánto mide el perímetro o lo puedes representar?

J: Representar.

$e+e+e+e+e$

I: ¿Podrías escribir esa misma expresión de forma más corta?

J: Solo así, 5 por e, por que no se sabe el número

El diálogo anterior hace evidente el desempeño exitoso que logró tener el niño, ante los cuestionamientos realizados por el investigador, además cuando Jorge señaló que al número general lo puede representar, mostró claridad de que ha logrado una buena comprensión del concepto de variable como número general.

IV.2.3 Resultados del la variable como función

En esta sección se presentan los resultados obtenidos al trabajar con las actividades que involucran a la variable en una relación funcional. Las actividades se pueden consultar en el capítulo III, apartado III.1.2.

Resultados correspondientes a la actividad 18

En esta actividad se presenta a los niños una figura regular cuyo perímetro se representa con el símbolo K. Se quiere observar su capacidad para simbolizar una relación funcional (F6), y reconocer la correspondencia entre las variables involucradas (F1).

Antes de dar inicio a la actividad con Elizabeth y Paulina la investigadora cuestionó si recordaban qué es una figura regular. Sus repuestas no presentaron confusión. Se les proporcionó la actividad y Elizabeth expuso la duda que le generó el hecho de que la figura no tuviese ninguna medida indicada. La investigadora acompañó a las niñas para que razonaran sobre la duda de Elizabeth:

E: ¿Escribimos con letras o con números? (se refiere a las medidas de los lados)

I: Veamos este ejemplo con el que ya trabajamos (act.13). *¿Con que representé yo la medida de los lados?*

P: Con letras.

I: ¿Por qué yo ocupe letras?

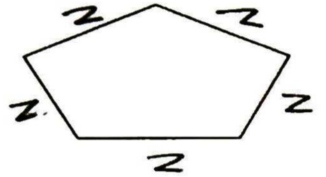
Ambas contestan al mismo tiempo:

P: Porque las letras representan números.

E: Porque no sabía que números van.

La investigadora resalta las respuestas de las niñas, mismas que ofrecen evidencia del sentido correcto que logran otorgar ante la aparición de símbolos literales en la actividad 13, y enfatiza que en este caso utilizó a letras porque representan cualquier número, precisamente porque desconoce el número específico de la medida.

Elizabeth escribe:



E: Así porque todos miden lo mismo.

I: ¿Cuál sería entonces el perímetro de esa figura?

E: Hacer así como ésta (refiriéndose a la act. 14) *y de resultado poner la letra K*

Elizabeth escribe

$$Z+Z+Z+Z+Z=K$$

I: ¿Cómo podemos hacer más corta esta expresión, lo recuerdan?

Paulina escribe

$$Z5=K$$

Eli: no, no, no.

Elizabeth Escribe $5Z=K$

La investigadora comenta que ambas están bien, pero que comúnmente en algebra se escriben de la forma en que lo hizo Eli. Como se puede notar han simbolizado a dos variables relacionadas, sin ningún problema.

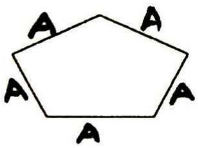
Con Jorge de cuarto, se procede de forma similar. Al leer la actividad Jorge comenta:

J: Puede ser cualquier número, porque no hay un lado que diga el número que debe ser.

I: ¿Con que representas a cualquier número?

J: Ah... con una letra.

Jorge escribe



Jorge aún no ha notado la necesidad de utilizar símbolos para representar a cualquier número, pero sabe que puede hacerlo. Es importante señalar que usa sin titubeos, la misma letra para representar lados del mismo tamaño.

Resultados correspondientes a la actividad 19

El propósito de esta actividad era retomar la expresión 5Z=K y acompañarlos para ver si podían reconocer la correspondencia entre variables relacionadas (F1), determinar los valores de la variable dependiente dados los valores de la independiente (F2), reconocer la variación conjunta (F4), y determinar los valores de la variable independiente dados los valores de la dependiente (F3)

Paulina y Elizabeth cuando observaron la expresión 5Z=K, explicaron al experto que significaba Z+Z+Z+Z+Z=K, lo cual muestra que entienden el significado de 5Z y además, la guía que se les ha ofrecido ha sido importante para que ellas no cometan errores reportados en otras investigaciones, como por ejemplo al ver la expresión 2M considerar que el valor de M es 2 (López, 1996).

La investigadora generó la siguiente discusión para que ellas notaran la correspondencia entre las variables Z y K.

I: Vamos a dar valores a esto que tenemos aquí (5Z=K). ¿Qué significa esto que dije?

E: Que vamos a darle un número a la Z y a la K.

I: Si les digo que Z vale 3 ¿que comprenden?

P: Un número para que se pueda resolver.

La aportación de Paulina muestra que pasar de un uso de la variable a otro con flexibilidad, ésta en su ZDP. Antes de que la investigadora pidiera a Paulina, que explicara lo que dijo, Elizabeth aportó un comentario en la misma dirección, *como en el polígono pero el lado vale 3.* La investigadora entonces recurrió a la actividad previamente resuelta y pidió a Elizabeth que explicara:

E: Si... yo digo que la Z que pusimos es como si fuera el ***representante*** *del 3*

I: ¿Cómo puedes escribir eso?

E: Así como este pero en lugar de la Z... 3.

Paulina escribe 53

E: Y aquí ya podríamos poner el resultado (señalando a la letra K en la expresión 5Z=K)

I: ¿Cuál sería el resultado?

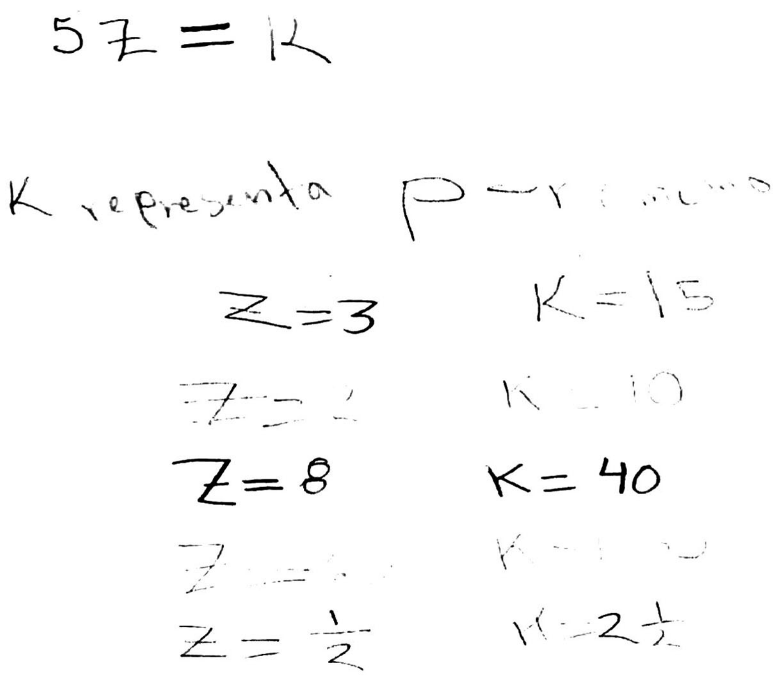
P: 5 veces tres.

Como se puede notar Paulina sustituyó el valor de Z por el 3 en la expresión 5Z, aún cuando pudiese parecer que escribe el número cincuenta y tres, ella no lo entendió así, y esto se puede observar con la respuesta *5 veces 3.* Si bien la investigadora no corrigió en cuanto Paulina sustituyó, lo hizo una vez que Paulina comentó *5 veces 3.* Y para reforzar el carácter general de la expresión preguntó:

I: ¿Cuándo yo no conozca quien es la Z? ¿Quién es la K, a quien representa?

E: a muchos

Para continuar la investigadora procedió a otorgar valores a la Z y ellas encontraron los valores correspondientes de la K, lo cual ilustramos con la siguiente hoja:



5Z = K

K representa p—r [illegible]

Z = 3   K = 15

Z = 2   K = 10

Z = 8   K = 40

Z = [illegible]   K = [illegible]

Z = $\frac{1}{2}$ K = 2$\frac{1}{2}$

La investigadora utilizó un valor decimal y uno fraccionario, para hacer énfasis en que los símbolos literales representan números, todos lo que conocen y los que conocerán más adelante. Como se puede notar, las niñas encontraron sin problema el valor de la variable dependiente en cuanto la investigadora les brindaba el valor de la independiente (F2).

La investigadora además, hizo las siguientes preguntas a las niñas para corroborar si comprendían la correspondencia entre las variables:

I: Si yo les digo la Z vale 3, ¿la K puede ser cualquier número?
E: No, tiene que ser 15.
I: ¿Es el único valor que puede tomar la K?
E: Nada más si la Z valiera 3.
I: ¿Si la Z vale 2?
P: La K, 10.
I: ¿Qué es lo que observan?
E: Que para darle un valor específico a la Z tendría que dar el valor de la K.
I: Esa es una forma de verlo y ¿otra?
E: O también para darle un valor a la K tendríamos que conocer el valor de la Z.

Como se puede notar las niñas no presentaron ninguna dificultad para comprender los diferentes aspectos (F1, F2, F3 y F4) involucrados en la resolución de la situación. La investigadora finalmente explicó a Paulina y Elizabeth este comportamiento de los valores que asumen las letras se debía a que estaban relacionadas y que la relación está determinada por la expresión. Esta explicación fue bien aceptada por las niñas. Otro punto que es importante mencionar es que a petición del investigador, Paulina y Elizabeth dedujeron correctamente y sin ayuda, como utilizar la tabla de valores, para escribir los valores que habían encontrado, y que se mostraron anteriormente.

Jorge, el niño de cuarto, no necesitó recurrir a la actividad anterior (la #18), como sucedió con las niñas, para enfrentar esta actividad. El trabajó directamente con la expresión 5Z=K y lo hizo de forma casi independiente. Pero como el propósito del estudio, no es reportar únicamente lo que logran hacer los niños, si no buscar cuales son los significados que otorgan a los símbolos, se generó el siguiente diálogo:

I: ¿De qué depende el valor de la K?

J: Del valor que tengo con la Z.

I: ¿Cómo es eso?

J: A ver... si yo pusiera 5 por... que aquí fuera 2. Ya puedes confirmar el valor de la K que es 10.

I: ¿Entonces de que depende el valor de la K?

J: De la Z... bueno del número que se ponga con la Z.

I: ¿Puedes llenar la tabla?

J: Bueno como no se sabe qué número es... pueden ser muchos.

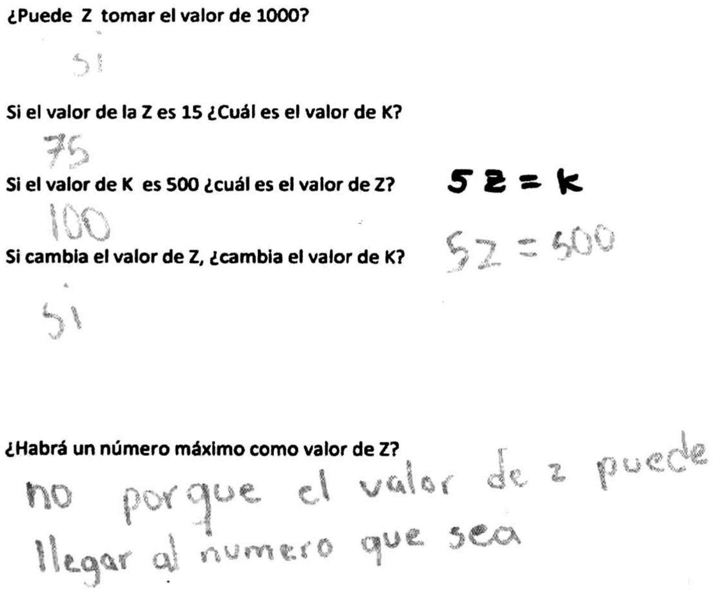
(Procedió a llenar la tabla en la columna de la variable independiente)

I: Puedes poner el valor de la K así tan fácilmente como lo hiciste con la Z.

*J: Si... ah bueno debo de multiplicar.... Como aquí dice (*se refiere a la pregunta con que dio inicio la interacción) *de que depende el valor de la K, de que pongas primero éste. (*Refiriéndose a los valores de la columna asignada a la variable independiente. Procedió a llenar la columna de la K, sin necesidad de ayuda y lo hizo bien)

Jorge reconoció la correspondencia entre variables (F1), determinó los valores de la variable dependiente dados los valores de la independiente (F2) y reconoció la variación conjunta (F4), sin dificultad. Además, expresó la forma en que lo había pensado, lo cual ayudó a realzar la conciencia de las diferencias mínimas discutidas, consideradas importantes para Jorge, tanto en los puntos débiles como fuertes de su razonamiento con respecto a las variables relacionadas.

A continuación mostramos la hoja contestada por Jorge:



¿Puede Z tomar el valor de 1000?

si

Si el valor de la Z es 15 ¿Cuál es el valor de K?

75

Si el valor de K es 500 ¿cuál es el valor de Z? 5Z = K

100

Si cambia el valor de Z, ¿cambia el valor de K? 5Z = 500

si

¿Habrá un número máximo como valor de Z?

no porque el valor de z puede llegar al numero que sea

Para que Jorge diera respuesta a la última pregunta la investigadora explicó cuál es el significado de valor máximo.

Resultados correspondientes a la actividad 20

El propósito de esta actividad iba en el mismo sentido que la actividad anterior, pero con la expresión b=a+5. Lo que se buscaba era ver como relacionaban los símbolos cuando había una operación después del signo de igualdad.

Paulina al leer la expresión, comentó *b=a+5...sería a+5=b*, lo cual muestra que ve el símbolo de igualdad como el que lleva a un resultado. Paulina además, dijo *es algo parecido a la otra es como aumentación,* reconociendo que la literal estaba involucrada en una operación. Elizabeth distinguió más claramente la diferencia entre la expresión a+5=b y la expresión 5Z=K, *aquí ya no está diciendo que 5 veces la a, aquí nos está diciendo que se va a sumar para que dé el resultado de b*, lo que muestra además, que ha reconocido la correspondencia entre las variables (F1). Elizabeth otorgó valores a las letras para

ejemplificar (F2). Paulina también otorgó valores lo que sugiere que ella también había logrado otorgar significado a la expresión a+5=b.
Una vez que entendieron la expresión planteada, la interacción continuó de forma muy parecida a la actividad descrita anteriormente con Jorge.

Jorge en esta actividad se comportó, de la misma forma, como lo hizo en la actividad 19. Trabajó con la expresión b=a+5 y no presentó la necesidad de cambiarla por a+5=b para comprenderla.

Resultados correspondientes a la actividad 21 y 22

Los resultados obtenidos en estas dos actividades, mostraron que los niños pueden trabajar sin dificultad los aspectos implicados de la variable relacionada. El comportamiento tanto de Elizabeth y Paulina como el de Jorge es similar al descrito en la actividad 19.

IV.2.4 Diferenciación del uso de la variable

En esta sección se presentan los resultados obtenidos al trabajar con las actividades de diferenciación de los tres usos. Las actividades se pueden consultar en el capítulo III, apartado III.1.2.

Resultados correspondientes a la actividad 9

El propósito de la actividad era presentar a los alumnos una lista de expresiones algebraicas parecidas a las que hasta el momento se habían analizado (ecuaciones de la forma 5+m=35 y expresiones abiertas 2m+3) y otras distintas, pedirles que interpreten que representa la variable simbólica.

Al analizar la actividad Paulina notó de inmediato la presencia de más operaciones, aparte de la suma, *este ya es otro tipo... de la resta y la división,* a lo que la investigadora contestó, *sí las escribí para que noten que en las expresiones algebraicas puede haber cualquier operación, no solo sumas.*

En un primer momento fue difícil para las niñas hacer la clasificación que se les pedía, por lo que la investigadora recurrió a la actividad 7, que se había trabajado la sesión anterior, y solicitó que comentaran lo que habían hecho en esa actividad. Ellas relataron correctamente, y la investigadora escuchaba y enfatizaba los comentarios, para proporcionarles seguridad.

Los comentarios que hacen las niñas muestran que han logrado asociar el número general a una representación que les hace mucho sentido:

I: ¿Qué comprenden en 51+k?

E: Es una expresión.

P: El 51 es un número de cualquier cosa, que lo están sumando con la k, que es número de las cosas que también se están sumando.

I: ¿Podrían hacer la lista?

E: Ah ya sé... son las ecuaciones si y las expresiones no. (Refiriéndose a cuáles tienen un valor específico)

I: Las expresiones ¿por qué no?

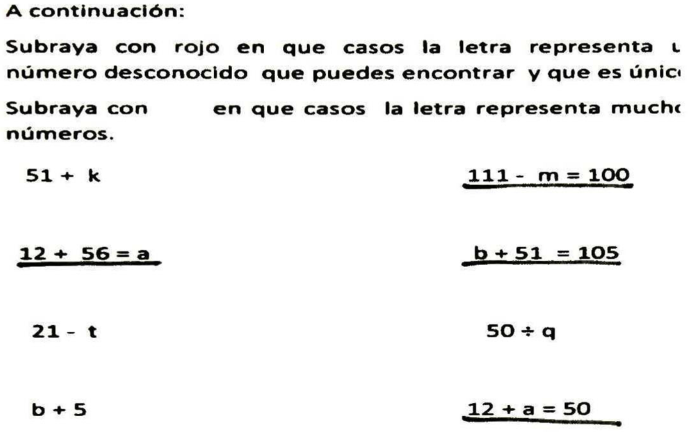
P: Por que nada más tienen 51+k...

E: No hay total.

P: Y no sabemos cuál es el total, nada más sabemos el número que hay y el número que se va a sumar.

Paulina y Elizabeth han logrado fijar la atención en rasgos que juegan un papel central en la formación del concepto de variable multifacética y logran diferenciar entre los distintos usos de la variable y las expresiones en las que intervienen. Recordemos que este es un primer acercamiento al álgebra. Aún cuando sabemos que las ecuaciones son también expresiones algebraicas, no todas las expresiones son ecuaciones y ésta es la diferencia que han logrado entender, a partir del **uso funcional** que le hemos dado a la palabra **expresión** desde el primer momento del estudio. De acuerdo con Vygotsky la palabra en un principio es una generalización del tipo más primitivo; conforme se desarrolla el intelecto del niño, es reemplazada por generalizaciones de un tipo más elevado, un proceso que culmina con la formación de los verdaderos conceptos.

Con Jorge, se trabajó esta actividad y la actividad 7 en la misma sesión. Al leer la actividad Jorge comentó, o *sea que subrayo con rojo los que tengan un número desconocido, o sea la a, la m,... y con azul los que no tienen total... y que puede ser cualquiera.* A continuación mostramos la hoja que subrayó Jorge.



A continuación:

Subraya con rojo en que casos la letra representa
número desconocido que puedes encontrar y que es únic

Subraya con en que casos la letra representa much
números.

51 + k

111 - m = 100

12 + 56 = a

b + 51 = 105

21 - t

50 ÷ q

b + 5

12 + a = 50

Para finalizar la actividad la investigadora preguntó a Jorge:

I: *¿Me puedes decir el valor de b aquí?* (señalando b+51=100)

J: 54.

I: ¿Cuál es el valor de b aquí? (señalando b+5)

J: Puede ser cualquiera.

A Jorge no le pareció extraño que la actividad involucrara operaciones distintas a la suma, lo cual se debe probablemente a las intervenciones que el mismo ha tenido en otras actividades. (Ver resultados de actividad 2).

Resultados correspondientes a la actividad 15

El propósito esta actividad era presentar a los alumnos expresiones algebraicas de la forma z=z y 112=q+23, y acompañarlos para que interpreten distinguiendo que, la variable simbólica que aparece en una expresión puede representar en ocasiones valores específicos (I2), y en ocasiones puede asumir cualquier valor (G2), dependiendo del tipo de expresión en el que aparezca la variable.

La investigadora utilizó la tecnología, previo a la presentación de la actividad, de la forma descrita en el capítulo III, apartado III.1.2, para encauzar a los niños a ver una ecuación como una balanza, donde el signo igual indica que la balanza está equilibrada.

Después de la experiencia con el uso de la tecnología, la pareja de sexto interpretó sin ningún problema que en la expresión Z=Z, la variable simbólica podía asumir cualquier valor (G2). Sin embargo, fue muy difícil para Paulina y Elizabeth interpretar en las ecuaciones 112=q+23, 50+w =15+83 y n= 157 + 392, a la variable simbólica como la representación de valores específicos (I2).

Al observar la ecuación 112=q+23 Paulina y Elizabeth ignoran la presencia del símbolo:

I: Acabamos de ver que el signo igual es como una balanza, entonces, lo que pesa aquí, pesa de este lado (señalando los miembros de la ecuación que aparece en la computadora).
I: En esta ecuación (112=q+23) *que aparece en la hoja, si la relacionamos con la balanza ¿aquí cuánto pesa?*
P,E: 112.
I: Y ¿aquí?
P,E: 23.

La investigadora busca que ellas realicen una analogía con lo que se trabajó en la computadora previamente. Sin embargo, Paulina continua ignorando la letra y Elizabeth se queda pensativa.

I: Pero el signo igual dice que la balanza está equilibrada ¿cómo entienden eso?
P: Es lo mismo.
I: Observemos 112=q+23 es ecuación que como vimos es como una balanza que está equilibrada, ¿de un lado tengo?
P: 112.
I: ¿Y del otro tengo?
P: 23.

La investigadora hace una pregunta concreta, para ayudarles a entender el significado de que una balanza se encuentre equilibrada:

I: Sí de un lado tengo 112 monedas de a peso y del otro tengo 23 monedas de a peso ¿la balanza estará equilibrada?
E, P: No.
Elizabeth empieza a otorgarle sentido a la ecuación como una balanza.

E: Tendria que haber 112 también

Una vez que Elizabeth relaciona la ecuación, con el ejemplo proporcionado por la investigadora sobre la balanza, empieza a interpretar a la variable simbólica que aparece en las ecuaciones, como la representación de un valor específico:

E: Que por eso se pone 112 igual a q... porque q es entonces el valor para que la balanza se equilibre (Elizabeth expresa muy emocionada).
E: Ah! Ya... creo que ya le entendí...que según 112 es igual a q ... pero la q se tiene que sumar al 23 para que complete los 112.

La ecuación que se propuso fue complicada, no obstante la pareja puso todo su empeño para lograr comprender. Elizabeth además, precisó muy bien para apoyar a su compañera:

I: ¿Entiendes Pau?
P: Así como dijo Eli, la q se tendría que sumar al 23 para que de 112.
E: La q es el número que se suma a 23 para que de 112.

El proceso que siguieron las niñas con las ecuaciones $50 + w = 15 + 83$ y $n = 157 + 392$ fue parecido al descrito anteriormente. En ambos casos, la dificultad radicó en que en un primer momento percibieron al símbolo igual como generador de un resultado y no como símbolo de equivalencia. La investigadora mediante la comunicación verbal las acompañó, hasta que dieron muestras de entender el significado de la igualdad e interpretar el símbolo como representante de un valor específico (I2).

A pesar de que Elizabeth y Paulina, interactuaron con la tecnología con la finalidad de que vieran a la ecuación como una equivalencia, no se tuvieron muchos avances en este sentido.

La ayuda del profesor fue más significativa en este caso, para que ellas lograran interpretar las expresiones algebraicas presentadas.

En el caso de Jorge, el interactuar con la tecnología fue significativo, ya que al presentarle la actividad en la hoja, el inmediatamente interpretó de forma correcta los símbolos que aparecen y en ningún momento titubeó. Además, aunque no se le solicitó, él determinó en cada ecuación la cantidad desconocida (I4), siempre teniendo en mente una balanza y de forma oral sustituyó correctamente el valor de los símbolo (I3). La investigadora tiene muy pocas intervenciones. Jorge logró entender la diferencia entre la letra usada como número general (G2) y la letra usada como incógnita (I2).

Ante las expresiones **3=3, M=4, Z=Z** Jorge comentó:

J: Bueno todas son expresiones.

3=3 aquí es un número y dice que 3 es igual a 3

M=4 aquí es una expresión, que dice que M es igual a 4, aquí debe de ser la M el 4.

Z=Z y aquí no se sabe, bueno puede ser cualquier número, por ejemplo si fuera 5, las dos Z's tendrían que ser 5.

Ante la expresión **n= 157 + 392** Jorge comentó:

J: Ah! Ya... si sumas esto te da el resultado de la n.

Ante la expresión **50 + w = 15 + 83** Jorge comentó:

J: 50 más W es igual a 15 más 83.
J: Aquí voy a sumar primero 15 más 83.
J: O sea que la w vale 48.
I: ¿Para qué haces que la w valga 48?
J: Si sumas 50 más 48 te da 98, y si aquí sumas 15 más 83 te da 98, o sea que es igual.
I: Cuantos valores puede tomar la w.

J: La w puede tomar sólo un valor... el 48.

Ante la expresión **112 = q + 23** Jorge resolvió en la hoja y comentó:

J: Es así o... otra vez me equivoque.

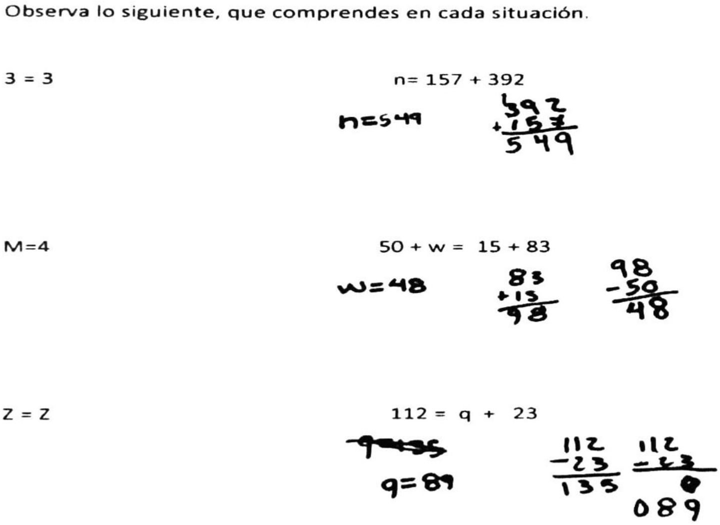
I: ¿Por qué piensas que te equivocaste?

J: Porque si hacía una suma me pasaba del 112.

I: ¿Por qué se te ocurrió hacer una resta?

J: Porque si 112 es igual a q más 23, la q debe ser menos que 112.

A continuación mostramos la hoja en la cual trabajó.



Observa lo siguiente, que comprendes en cada situación.

3 = 3

n= 157 + 392

n=549

$\begin{array}{r} 392 \\ +157 \\ \hline 549 \end{array}$

M=4

50 + w = 15 + 83

w=48

$\begin{array}{r} 83 \\ +15 \\ \hline 98 \end{array}$ $\begin{array}{r} 98 \\ -50 \\ \hline 48 \end{array}$

Z = Z

112 = q + 23

~~q=135~~

q=89

$\begin{array}{r} 112 \\ -23 \\ \hline 135 \end{array}$ $\begin{array}{r} 112 \\ -23 \\ \hline [illegible] \\ 089 \end{array}$

Como podemos observar el apoyo que se le había bridado a Jorge en actividades anteriores y junto con el uso de la tecnología, le han ayudado a desarrollar la capacidad de trabajar con situaciones complejas y a lograr hacer reflexiones que van más allá del propósito principal de la actividad.

Si bien no era nuestro propósito indagar acerca del impactó del uso de la tecnología, estos ejemplos ponen de manifiesto que, no siempre los alumnos pueden transferir lo aprendido en un ambiente tecnológico a un ambiente de lápiz y papel, a pesar de la ayuda que se les brindó (caso de Paulina y Elizabeth). Pero hay niños para los cuales el uso de la tecnología puede ser de gran apoyo (caso de Jorge).

Resultados correspondientes a la actividad 17

El propósito de esta actividad era presentar distintas expresiones del tipo que se han venido trabajando (expresiones abiertas y tautologías) a partir de la introducción de la variable como número general y preguntar a los niños sobre el significado que otorgan a cada una. Además introducir una expresión que involucre a dos variables y observar qué significado le otorgan.

A continuación mostramos el análisis de la interpretación que hacen los niños de los símbolos en 2 de las expresiones presentadas, pues éstas indican de manera general la forma en que abordaron las demás.

Elizabeth y Paulina interpretaron sin ninguna dificultad el símbolo que aparece en las expresiones abiertas como un número general (G2):

I: ¿Qué comprenden aquí? (Señalando la expresión 7M)

E: ¿Que sería 7 veces M? (Elizabeth escribe)

$M+M+M+M+M+M+M$

E: Así como le hicimos el otro día, es solo para hacerlo más corto, pero no le ponemos el por, porque se confundiría con la X.

I: Elizabeth ya me dijo que significa. ¿Díganme ahora que representa?

E: ¿Qué representa la M?

E: Valores

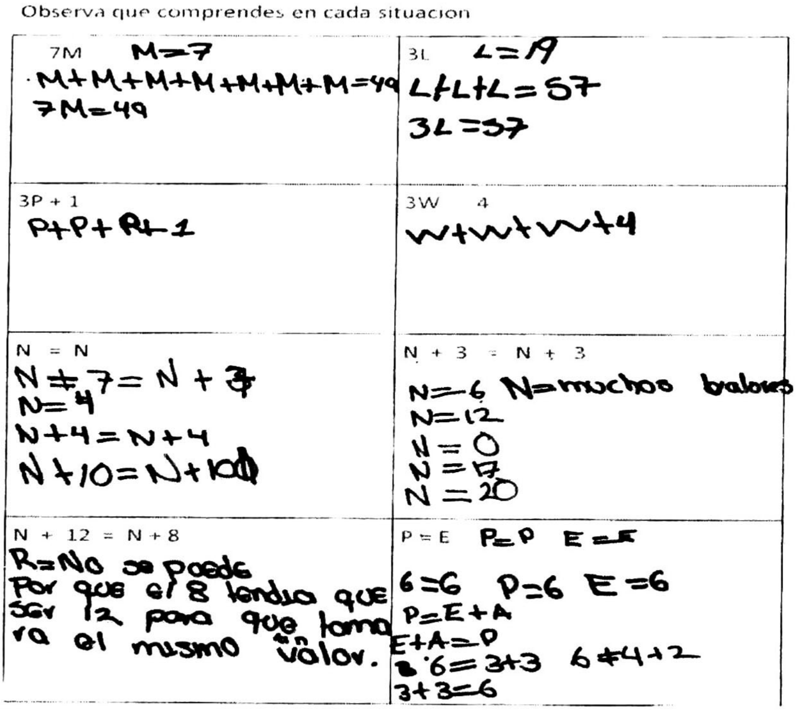
P: muchos valores

Paulina da varios ejemplos en los que se puede notar además, que se percatan de la relación existente entre M y 7M (F1), de la misma forma se aborda la expresión 3L. La investigadora enfatiza que tanto 7M como 3L son números imposibles de conocer, que ellas les asignen un número les puede ayudar a comprender, pero que este número es indeterminado.

Al observar la expresión N+3=N+3, las expresiones faciales de las niñas mostraron que les creaba confusión, misma que se resolvió en la interacción:

E: *Aquí la N no valdría nada, porque tendría que ser cero, para que fuera 3 igual a 3.*
I: Observen la expresión N=N, ¿como la comprenden?
P,E: Que la N sería el mismo valor.
P: 5=5, 10=10, así muchos valores.
E: Como con la balanza.
I: Si yo pusiera 0=0 ¿se puede?
P: Si pesaría cero
I: Ahora veamos aquí N+3=N+3, ¿que comprenden?
(Insisten en que el valor que toma la N debe ser 0)
I: ¿Aquí cuantos valores toma la N? (Indicando N=N)
E: Ah! No...... sí ...sí se puede, por ejemplo, si la N fuera igual a 6 entonces aquí (refiriéndose a N+3) *sería 9 y el resultado sería 6* (señalando la N) *pero si lo sumamos con el 3.*
I: Ah, muy, bien esto tiene que ver con el signo igual, ¿se acuerdan como lo podemos ver?
E: Como el total de algo.
P: Como una balanza.
(Paulina a petición del investigador, interpreta el valor de la N con el peso que tiene que poner en la balanza y lo expresa muy bien)
I: Exactamente como una balanza.
I: Que otro valor puede tomar la N.
E: Muchos.

En este diálogo se puede observar cómo las niñas empiezan a conducirse de una manera menos dependiente, el apoyo que les brinda el experto es sólo una guía para que ellas relacionen lo que comprendieron en otro momento con la expresión que tratan de descifrar. Se puede apreciar también que Paulina y Elizabeth recurren a la balanza para comprender las igualdades. A continuación mostramos la hoja contestada por las niñas, correspondiente a esta actividad



Observa que comprendes en cada situacion

7M M=7 ·M+M+M+M+M+M+M=49 7M=49	3L L=19 L+L+L=57 3L=57
3P + 1 P+P+P+1	3W 4 W+W+W+4
N = N N+7= N + 7 N=4 N+4=N+4 N+10=N+10	N + 3 = N + 3 N=6 N=muchos balores N=12 N=0 N=17 N=20
N + 12 = N + 8 R=No se poede Por que el 8 tendria que ser 12 para que toma ra el mismo en valor.	P = E P=P E=E 6=6 P=6 E=6 P=E+A E+A=P 6=3+3 6=4+2 3+3=6

En el caso de Jorge, mostraremos el análisis de la situación N+12=N+8 que muestra claramente su confusión de que en una misma expresión represente siempre el mismo valor. Con las expresiones abiertas no tuvo ninguna dificultad y se expresó de forma parecida a como lo hicieron las niñas. He aquí el dialogo que se sostuvo con Jorge:

I: ¿Qué observas ahí?

J: Que ahora la N va a tomar... diferente valor.

(La expresión de su rostro muestra confusión)

I: ¿Crees que se pueda?

J: No... ¿ó si?... aquí como se ve no... se debe de hacer, porque si no......aquí dice que es igual (señala el signo de igual) ¿pero cómo?... la N siempre debe de ser igual.

I: La N siempre debe ser igual, eso lo hemos visto, hemos dicho que en una ecuación la N toma siempre el mismo valor. ¿Tú qué crees que pasa en este caso?

J: Aquí puede ser... -12... aquí en lugar de ¿más... menos?

I: Ah.. la corregirías, quiere decir que está mal la expresión, ¿Por qué está mal?

J: Porque si tú sumas, a ver la voy a hacer aquí abajito con una... 20 +12 es 32... y... 20+8 es 28 que no es igual (refiriéndose a la expresión N+12=N+8, donde asigna a la N un valor arbitrario, el 20)

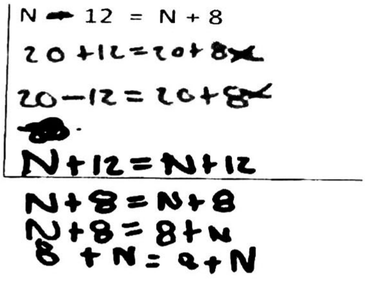
I: Entonces, ¿como la corregirías?

J: 20- 12=20+8... ay no... tampoco.

J: 20-12=20-8... no, no.

I: Observa nuevamente la expresión. ¿Cómo la corregirías? Trata de hacerlo con símbolos. Fíjate en las expresiones anteriores de esta misma hoja.

J: ¡Ah, ya!.. qué cambiaras aquí en lugar de 12 el 8 o en lugar de 8 el 12



N [illegible] 12 = N + 8

20 + 12 = 20 + 8 ✗

20 − 12 = 20 + 8 ✗

[illegible]

N + 12 = N + 12

N + 8 = N + 8

N + 8 = 8 + N

8 + N = 8 + N

Como se puede notar a pesar de su confusión tiene presente que el valor del símbolo es el mismo en una expresión, además trata de corregir la expresión. Con la respuesta, *porque si tú sumas, a ver la voy a hacer aquí abajito con una ...20 +12 es 32 ...y ...20+8 es 28 que no es igual (refiriéndose a la expresión 20+12=20+8),* reconoce que la N puede tomar cualquier valor (G2) pero en todas sus apariciones debe ser el mismo. Ejemplifica con un valor que la expresión está mal planteada y recurre a ejemplos numéricos para comprender. Finalmente escribe unas expresiones correctas (G5).

Los diálogos presentados dan claridad de la creación de la *zona de desarrollo próximo* para que los niños comprendan el uso de la variable como número general.

IV.2.5 Resultados de las actividades de integración

En esta sección se presentan los resultados obtenidos al trabajar con las actividades integradoras. Las actividades que se propusieron tienen las mismas características, demandan a los estudiantes un manejo de la variable en sus distintos usos, en el cual deben reconocer, interpretar, simbolizar y determinar valores para poder resolver la situación que se les presenta. Las actividades se pueden consultar en el Capítulo III, apartado III.1.2.

Como se puede observar en el Capítulo III las actividades integradoras están diseñadas de forma similar. Además la forma de trabajar en interacción fue la misma.

Presentaremos el análisis completo de 2 de las actividades, en las cuales se muestra claramente cómo conforme el novato aprende, su responsabilidad respecto al desempeño cambia, puesto que su papel en la producción de la conducta cambia. Por tanto, la tarea de la investigadora fue propiciar el exitoso desempeño independiente del niño.

Los resultados correspondientes a la actividad 24

El propósito de la actividad era presentar a los estudiantes un crucigrama, con una condición particular, que además contiene símbolos literales. La actividad presenta en primer lugar una reflexión con variables relacionadas, en segundo lugar se plantean preguntas sobre esta expresión que involucran F1, F2, F3 y F4. Se pasa después al uso de la variable como número general (G2) y por último, se anexa una condición a la situación inicial que permite trabajar con la variable como incógnita (I1, I2, I3, I4 e I5).

En el caso del niño de cuarto, durante el desarrollo de la actividad la investigadora lee las preguntas establecidas, cuyo propósito en primer lugar es, lograr que el estudiante muestre explícitamente, si es capaz de reconocer en la expresión que se propone que hay dos cantidades relacionadas. La primera respuesta de Jorge, muestra que no ve a las cantidades de forma aislada, y por tanto, identifica la relación entre las cantidades (F1):

I: ¿Qué comprendes en la expresión x+4=5+y?

J: Que se necesita un número más para la x, que la y porque como es 4 (señala el 4 de la expresión x+4=5+y) *y aquí 5* (señala el 5 de la expresión x+4=5+y).

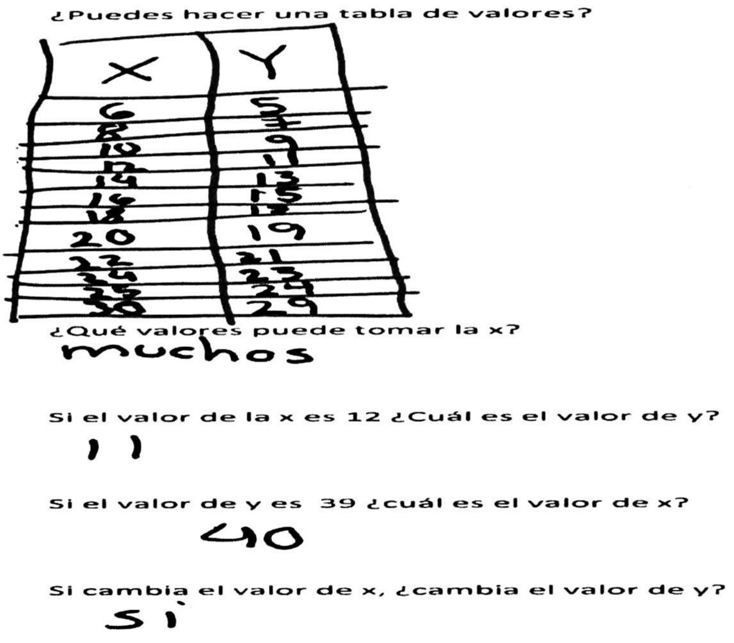
Su respuesta fue un tanto confusa, pero observemos que conforme avanza en la actividad, él mismo da claridad de cómo comprende la situación, además, determina los valores de la variable dependiente dados los de la independiente (F2) y reconoce la correspondencia (F1) y la variación conjunta (F4) de las variables involucradas:

I: ¿Qué valores puede tomar la x?
J: Seis.
I: ¿Y entonces cuál sería el valor de la y?
J: 5 Porque debe ser uno menos que la x.
I: ¿Es el único valor que puede tomar la x?
J: No (lo dice muy seguro), *puede tomar muchos, aquí puede ser 8 y aquí 7, aquí 9 y aquí 8, aquí 14 y aquí 13, pero siempre deber ser aquí, uno mayor que aquí* (en cada ejemplo que da, el señala las literales que están en la ecuación, primero señala a la x y después a la y).

A continuación se presentan las demás respuestas que Jorge proporcionó en cuanto al uso de la variable en una relación funcional.

¿De que depende el valor de la y?

del valor de la x



¿Puedes hacer una tabla de valores?

X	Y
6	5
8	7
10	9
12	11
14	13
16	15
18	17
20	19
22	21
24	23
26	24
30	29

¿Qué valores puede tomar la x?

muchos

Si el valor de la x es 12 ¿Cuál es el valor de y?

11

Si el valor de y es 39 ¿cuál es el valor de x?

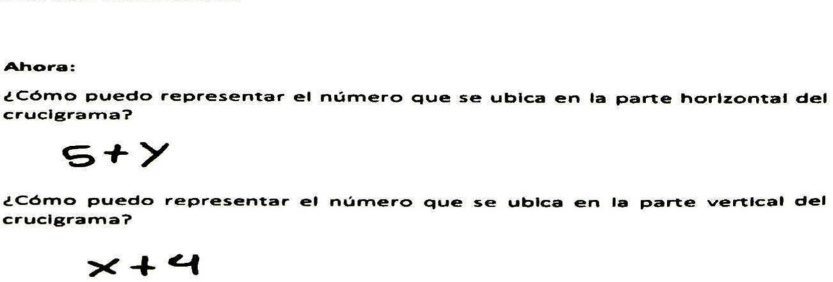
40

Si cambia el valor de x, ¿cambia el valor de y?

sì

Como podemos observar Jorge escribe todos los valores de la variable independiente de forma ascendente, más aún cuando, la investigadora le pregunta qué valores tomaría entonces la **y**, él responde *uno menos que la* ***x***. Sin duda Jorge reconoce que existe una correspondencia entre dos variables y que éstas varían de manera relacionada (F4), además se da cuenta de que cada una puede tomar distintos valores dependiendo de cómo está definida la relación (F5), y es capaz de determinar los valores de una variable dado los valores de la otra (F2),(F3).

El niño contesta sin ninguna interrupción las siguientes preguntas de la actividad, lo cual muestra que puede pasar de usar variables relacionadas a usar a la variable como número general con flexibilidad.



Ahora:

¿Cómo puedo representar el número que se ubica en la parte horizontal del crucigrama?

5+Y

¿Cómo puedo representar el número que se ubica en la parte vertical del crucigrama?

x+4

Cuando Jorge termina de contestar estas preguntas, la investigadora interviene para hacer énfasis en el uso de la variable como número general:

I: Si en la secundaria te encuentras expresiones como estas que escribiste $5+y$, $x+4$, ¿tú que comprenderás?

J: Una expresión.

I: Y esa expresión que representa.

J: El número que aquí señala el crucigrama.

I: Digamos que en la secundaria ya no te ponen el crucigrama, sólo la expresión como la entenderías.

J: Una expresión que me dice una cantidad.

Lo anterior da evidencia de que Jorge puede trabajar con la variable como número general, pues es capaz de usar símbolos para representar la situación general que se le solicita y además, ante una expresión general, interpreta los símbolos involucrados como símbolos generales, los cuales representan cantidades que no es necesario determinar (G2).

La actividad retoma el crucigrama inicial, pero, ahora sólo con el símbolo literal **y**. Jorge lee la pregunta *¿cómo puedo encontrar el valor de y?*, ante esta pregunta procede a resolver rápidamente la operación aritmética para determinar el valor de **y** (I4). Por lo que, la investigadora interfiere de la siguiente manera:

I: ¿No te puedes ayudar con algo?, para encontrar lo que buscas.

J: Es 254 (ignora la sugerencia).

I: ¿Cómo me lo puedes comprobar?

(Jorge explica las operaciones que realizó)

I: ¿Podrías escribir una ecuación con lo que observas en el crucigrama?

(Jorge escribe)

$$255+4=5+y$$

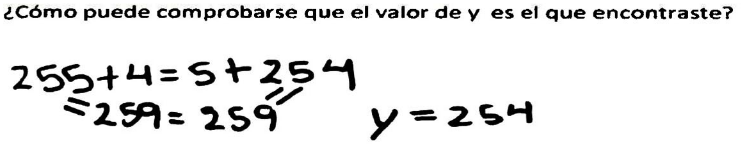
Jorge muestra, que puede usar ambos enfoques (aritmético y algebraico), para resolver la situación problemática planteada. De acuerdo con Cai (2005), después de un periodo de tiempo de usar ambos enfoques para resolver un problema, se espera a que el estudiante llegue a ver las ventajas de utilizar ecuaciones.

Jorge además, es capaz de sustituir el valor que hace verdadera la ecuación, no solo de forma oral, sino también de forma escrita:

I: Ahora dime como puedes comprobar en la ecuación, que ese valor que encontraste, es el valor de y.

J: Es lo mismo que aquí (señalando la ecuación), *nada más se escribe el numero en lugar de la y.*

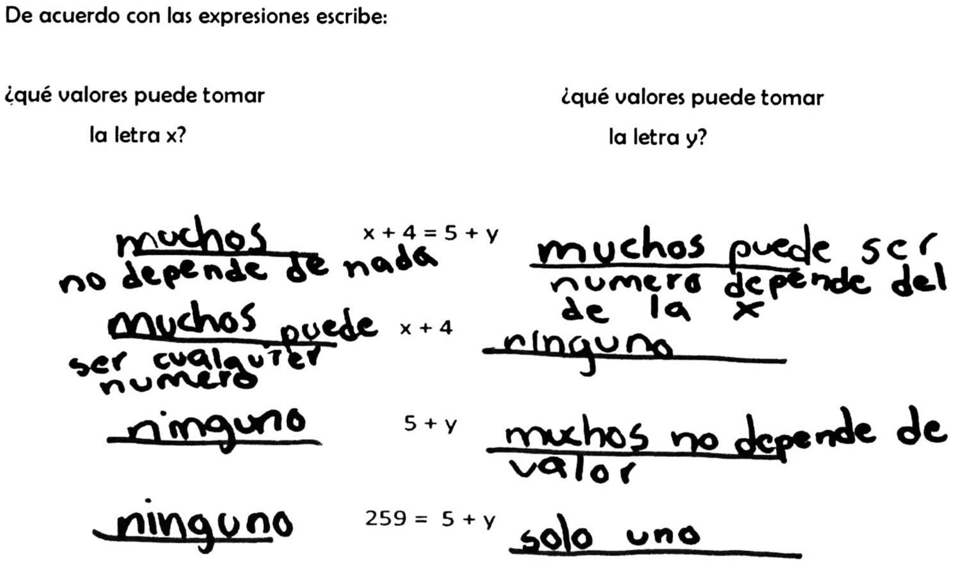
(Jorge escribe y explica)



¿Cómo puede comprobarse que el valor de y es el que encontraste?

255+4=5+254
=259=259   y=254

Finalmente se puede observar que Jorge reconoce los tres usos de la variable en las expresiones que surgieron durante el trabajo previo a partir de lo que escribió en su hoja:



De acuerdo con las expresiones escribe:

¿qué valores puede tomar la letra x?		¿qué valores puede tomar la letra y?
muchos no depende de nada	x + 4 = 5 + y	muchos puede ser numero depende del de la x
muchos puede ser cualquier numero	x + 4	ninguno
ninguno	5 + y	muchos no depende de valor
ninguno	259 = 5 + y	solo uno

Jorge en la primera expresión, pensó que el valor de la y podía ser cualquiera, no obstante reconsideró y escribió que el valor de la y depende del valor de la x.

Las niñas de sexto no presentaron dificultades durante el desarrollo de esta actividad y su comportamiento fue similar al de Jorge.

Los resultados de estas actividades muestran que cuando el trabajo se dirige adecuadamente, los estudiantes desde muy jóvenes, son capaces de trabajar ayudados por el investigador, con situaciones complejas, las cuales podrían enfrentar más adelante por sí mismos.

Los resultados correspondientes a la actividad 25

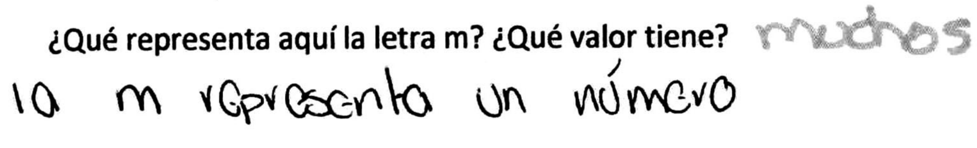
El propósito de la actividad era enfrentar a los niños con un problema bastante complejo, diseñado para primero de secundaria, que involucra los distintos usos de la variable y ver si los niños lograban reconocer, interpretar y simbolizar a la variable y pasar de un uso a otro con flexibilidad.

Al observar la figura y la pregunta ¿Cuál es el perímetro de este triángulo?, Paulina y Elizabeth dieron respuestas de las cuales no tenían la certeza. Por ejemplo, Elizabeth dijo 36 y preguntó *¿todos los lados miden lo mismo?*, a lo que La investigadora respondió que *no*. La investigadora intervino de forma muy general como se muestra enseguida:

I: La m ¿qué es?
E: El representante de lo que miden los lados.
I: El representante de un número.
P: ¿Para encontrar el perímetro le tendríamos que poner un valor a esto?(señala a la m).
I: No necesariamente.
E: Ya sé con una expresión.
(Elizabeth escribe)

$12+m+m$

Lo anterior muestra que Elizabeth pudo simbolizar el método para encontrar el perímetro (G5). Las niñas además, contestaron sin apoyo la siguiente pregunta, con lo cual muestran que pueden interpretar al símbolo como la representación de una entidad general que puede asumir cualquier valor (G2).



¿Qué representa aquí la letra m? ¿Qué valor tiene? muchos

la m representa un número

Sin embargo en este primer acercamiento, no manipularon a la variable (G4). En lugar de escribir que el perímetro es igual a 2m+12, ellas escribieron

12+m+m=A

Para justificarlo Paulina dijo que *A es el resultado del perímetro.* Elizabeth estuvo de acuerdo, y argumentó que *como la m representa un número que no se puede saber, entonces el resultado lo puedo representar con otra letra.* El razonamiento que realizaron, da muestra de que Elizabeth y Paulina han comprendido el concepto de variable en su faceta de número general y en la de variable relacional. La investigadora no insistió en que operaran, puesto que en esta misma actividad se iban a encontrar con la expresión 2m+12.

Por tanto se procedió a continuar con la actividad. La pareja dedujo, que al valer el perímetro 50 debían hacer una división para encontrar el valor del lado representado por m. Fue algo difícil para ambas plantear la ecuación, ante esto la investigadora les brindó apoyo, lo que llevó a Paulina a plantearla:

I: Ustedes saben ¿cómo calcular el perímetro?

E: Con una división.

I: ¿Cuál división?

E: 50 entre.....no... porque... son diferentes estos lados.

P: Pueden ser diferentes.

I: A ver ¿cómo calcularon el perímetro hace rato?

P: Sumando.

I: ¿Sumado qué?

P: 12+m+m.

I: ¿Esto qué representa? (señalando a la expresión 12+m+m)

P: El perímetro.

I: ¿Qué podemos entender?, si decimos que el perímetro vale 50

*I: ¿Aquí cuánto vale el perímetro? (*señalando la respuesta anterior)

P, E: A.

P: A ver lo escribo

$12+m+m=50$

P: Ahora ya sabemos cuál es el total del perímetro, ¿o sea que todo esto mide 50 en total?

I: Así es.

*P: Entonces ya es una ecuación,...entonces tendríamos que buscar un número para que sumando esto, con esto, con esto (*señalando el 12+m+m*) de 50.*

Es importante notar que cuando Paulina analizó lo que había escrito, comprendió que se trataba de una ecuación y en consecuencia reconoció la presencia de algo desconocido que puede ser determinado (I1), lo cual hizo sin ayuda. La participación de Paulina fue activa, y Elizabeth permaneció callada, por lo que la investigadora preguntó si comprendía. Ante esto Paulina explicó nuevamente sin que la investigadora lo solicitara, lo cual muestra la confianza que le proporcionó su respuesta.

Elizabeth y Paulina colaboraron para determinar el valor de m realizando operaciones aritméticas y de forma oral sustituyeron el valor para verificar (I4) (I3). Ante la pregunta ¿Puede m tomar cualquier valor?, contestaron rápidamente *no, porque si le ponemos otro valor a la m no daría 50.*

Como se puede observar tuvieron un poco de dificultad para pasar con flexibilidad de un uso a otro, pero como se observa en el dialogo anterior, en cuanto lograron modelar la situación con notación algebraica, pasaron sin ninguna dificultad del uso de la variable como número general, al uso de la variable como incógnita. Esto muestra el uso de la notación algebraica como un **instrumento funcional** en la construcción del concepto de variable multifacética.

Para pasar al siguiente uso la investigadora dio lectura a la situación y explicó detenidamente a que se refiere. La investigadora preguntó si comprendían la expresión F=2m +12 lo que generó el siguiente diálogo:

P: F es el perímetro en total.
I: ¿Qué significa F= 2m+12?

$m + 12$

I: ¿estás de acuerdo Paulina?
P: si nosotros representáramos así, sería m+m
(Paulina escribe)

$2m$ $m+m$

(Elizabeth completa)

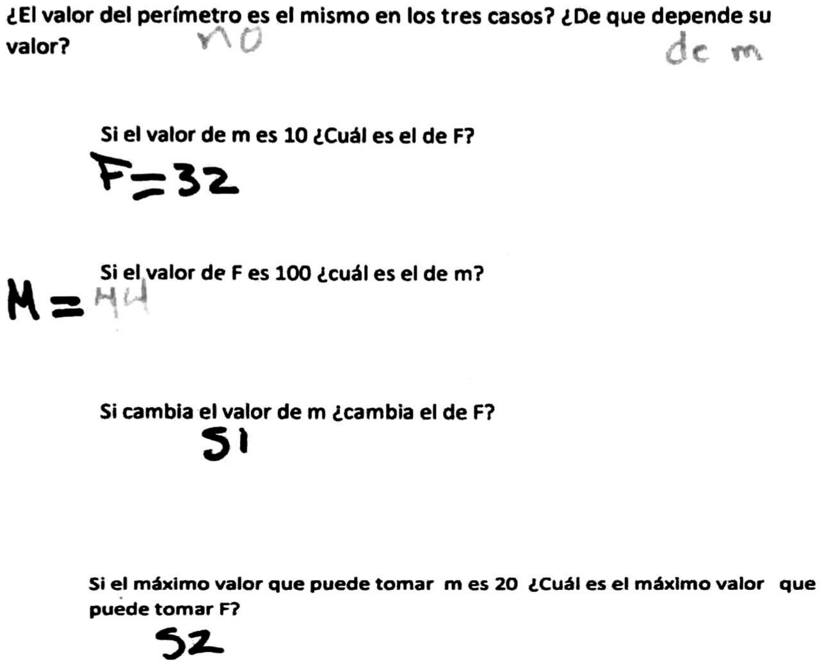
$m+m + 12$

(Paulina completa)

$F= m+m + 12$

Lo anterior da evidencia de que logran manipular a la variable simbólica (G4), aún cuando no lo hicieron cuando se les requirió en una pregunta anterior. Además Paulina notó que esta expresión era igual a la expresión 12+m+m=A, que habían escrito anteriormente. La investigadora preguntó si importaba que las letras fueran diferentes, ellas contestaron que *no que las dos representaban lo mismo.*

A continuación se presentan las demás respuestas que Paulina y Elizabeth proporcionaron en cuanto al uso de la variable en una relación funcional. Ambas participaron activamente y no presentaron ninguna dificultad para responder.



¿El valor del perímetro es el mismo en los tres casos? ¿De que depende su valor? no dc m

Si el valor de m es 10 ¿Cuál es el de F?

F=32

Si el valor de F es 100 ¿cuál es el de m?

M = 44

Si cambia el valor de m ¿cambia el de F?

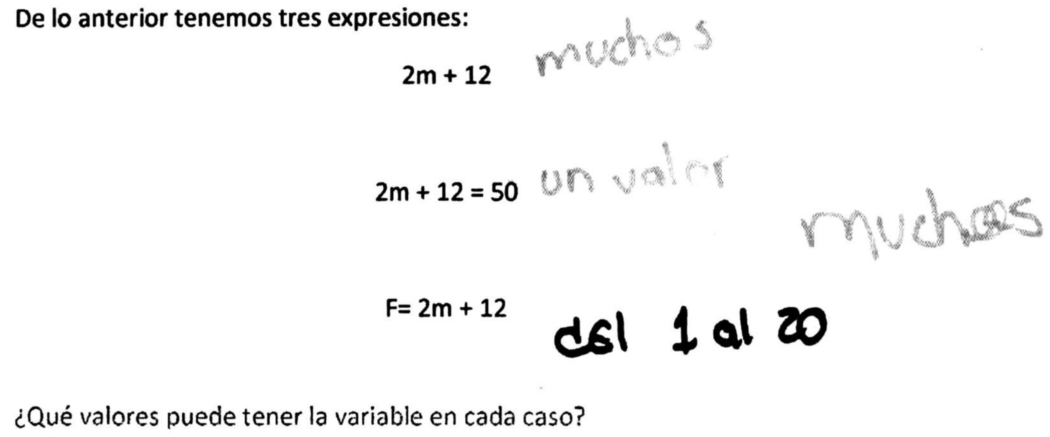
SI

Si el máximo valor que puede tomar m es 20 ¿Cuál es el máximo valor que puede tomar F?

52

Sin duda Paulina y Elizabeth reconocieron la correspondencia entre la variable m y la variable F (F1), además fueron capaces de determinar los valores de una variable dados los valores de la otra (F2),(F3).

Finalmente se pudo observar que Elizabeth y Paulina reconocieron los tres usos de la variable en las expresiones que surgieron durante el trabajo previo. Además lograron determinar los intervalos de variación de una de las variables, dado el intervalo de variación de la otra (F5). Ellas escribieron:



De lo anterior tenemos tres expresiones:

$2m + 12$ muchos

$2m + 12 = 50$ un valor

muchos

$F= 2m + 12$ del 1 al 20

¿Qué valores puede tener la variable en cada caso?

Los resultados de esta actividad muestran que cuando el trabajo se dirige adecuadamente, estudiantes que inician sexto de primaria, son capaces de trabajar, ayudados por la investigadora, con situaciones diseñadas para primero de secundaria, que involucran los tres usos de la variable.

El análisis de los resultados mostrados en esta sección indica que se puede crear la *ZDP* para trabajar los tres usos de la variable y su simbología algebraica desde los tres últimos años de la escuela primaria.

Capítulo V

V.1. Conclusiones

El propósito del estudio era explorar que tanto sentido logran otorgar estudiantes de primaria, a la simbología algebraica formal asociada a los diferentes usos de la variable, cuando se trabaja en un ambiente de interacción con el investigador, diseñado bajo la perspectiva del *Modelo 3UV.*

El estudio completo se llevó a cabo con dos niñas que iniciaban sexto de primaria, prácticamente con conocimientos de quinto y con un niño que cursaba cuarto. Los tres asistían a la misma escuela pública.

Las actividades trabajadas se diseñaron en base al *Modelo 3UV*, el cual contempla una descripción detallada de la variable como un concepto multifacético. El ambiente de interacción se desarrolló bajo la perspectiva Vygotskiana, con el fin de explorar hasta donde el niño en interacción con el experto otorga sentido a las diversas caracterizaciones de la variable representada con notación algebraica.

En relación a las preguntas de investigación se concluye lo siguiente:

1ª ¿Es posible crear una *zona de desarrollo próximo* para que los niños de primaria sean capaces de usar e interpretar símbolos literales asociados a los distintos usos de la variable? Esta pregunta es posible contestarla en base a los resultados obtenidos en la interacción. A continuación mencionaremos en cada uno de los tres usos de la variable los resultados que dan cuenta de la posibilidad de creación de la *ZDP,* tanto en las niñas de sexto como en el niño de cuarto.

Incógnita:

- Reconocen la presencia del símbolo y lo interpretan como el **representante** de un número desconocido.
- Se percatan de que el valor del símbolo depende de la ecuación en la cual aparece.

- Interpretar a los símbolos literales que aparecen en una ecuación como la representación de valores específicos.
- Determinan la cantidad desconocida que aparece en un problema.
- Sustituyen el valor de la variable simbólica por el valor que hace de la ecuación un enunciado verdadero.
- Simbolizan ecuaciones equivalentes con símbolos literales distintos.
- Simbolizan una cantidad desconocida identificada en una situación específica y la utilizan para plantear una ecuación.
- Interpretan que las mismas letras en una misma expresión representan el mismo valor.
- Relacionan ecuaciones con las situaciones que modelan de forma correcta.

Algunas de las habilidades mencionadas están en su *zona de desarrollo próximo* y otras lograron llevarlas a su *zona de desarrollo actual.*

Si bien durante esta parte del estudio, el niño de cuarto requirió de un poco más de ayuda, para trabajar con la simbología asociada a la variable como incógnita, que la pareja de niñas, si está en su zona de desarrollo próximo. Además un punto importante a señalar, es que en algún momento ellas presentaron mayor dificultad para trabajar con la incógnita. Esta dificultad se reveló a través de un anclaje al uso de igualdad como un signo después del cual viene el resultado. Mientras el niño de cuarto al no tener tan arraigado el uso de acción y resultado del signo de igualdad, no tuvo ningún problema de trabajar la igualdad como la equivalencia y aceptar ecuaciones de la forma 112=q+23 (actividad 15).

Número general:

- Interpretan a las variables simbólicas como representantes de entidades generales que pueden asumir cualquier valor y las usan para simbolizar.
- Deducen como representar simbólicamente el método general para calcular el perímetro.
- Manipulan los símbolos literales que representan a una entidad general.

En general tanto las niñas de sexto como el niño de cuarto, logran interpretar en las expresiones abiertas y en las tautologías la presencia de la variable simbólica como la representación de una entidad general que puede asumir cualquier valor (actividades 9, 17, 24, 25). Los resultados indican que en esta parte del estudio, el niño de cuarto logra acceder a una mayor comprensión del número general (actividad 14).

Función:

Después del trabajo de la variable como incógnita y como número general, los estudiantes mostraron potencial para desempeñarse de forma casi independiente con variables relacionadas y lo hicieron de manera exitosa. Lograron trabajar con todos los aspectos de la variable implicados en las actividades presentadas para este uso. Lo cual muestra que esta en su zona de desarrollo próximo.

Un punto importante que se notó en esta parte del estudio, fue que el niño de cuarto, trabajó directamente con la notación algebraica, si recurrir a los referentes trabajados para apoyarse, mientras que las niñas lo necesitaron. Además el pudo trabajar con expresiones de la forma b=a+5, y las niñas la cambiaron por a+5 =b, lo cual muestra otra vez el anclaje al significado del sino igual como generador de un resultado.

Integración de los 3 usos:

Los resultados mostraron que cuando el trabajo se guía adecuadamente, desde una edad temprana los niños son capaces de trabajar, ayudados por un experto, con situaciones complejas, que involucran los tres usos de la variable.

En cuanto a la ayuda que proporcionó el investigador en las actividades de integración fue de carácter general. Para explicar lo que pedía la actividad o para hacerles preguntas de tipo general que los llevaran a recordar cuestiones que habían comprendido en alguna actividad previa. El desempeño exitoso de los niños fue casi independiente.

Es importante señalar que los niños mostraron un manejo flexible del concepto de variable. Si bien se pudo observar que son capaces de conducirse de forma algebraica cuando trabajan con la variable como número general y como función, también se detectó que su acercamiento a la variable como incógnita es de forma aritmética. Esto es, por más que pueden plantear una ecuación, tienen muy arraigado determinar cual es el valor que se desconoce utilizando únicamente medios aritméticos.

Todo lo anterior nos ofrece los elementos para poder concluir que si es posible crear una *zona de desarrollo próximo* para que niños de primaria sean capaces de usar e interpretar símbolos literales asociados a los distintos usos de la variable.

2ª ¿A partir de que grado de nivel primaria se puede crear la *zona de desarrollo próximo* para que los niños de primaria sean capaces de usar e interpretar símbolos literales asociados a los distintos usos de la variable?

El análisis de los resultados mostrados en el estudio indica que se puede crear la *ZDP* para trabajar los tres usos de la variable y su simbología algebraica desde los tres últimos años de la escuela primaria.

Se puede argumentar además que las dificultades que presentaron las niñas de sexto se deben es consecuencia del grado escolar en el que se encuentran, mientras que el niño de cuarto aún no está tan enganchado con el pensamiento aritmético y esto permite obtener mejores resultados para trabajar con la simbología algebraica. Esto nos indica que no tenemos que esperar hasta sexto para trabajar con el uso de símbolos algebraicos.

V.2. Limitaciones del Estudio

Si bien los resultados obtenidos son alentadores en relación a poder crear la *ZDP* para trabajar con los tres usos de la variable y su simbología algebraica desde los tres últimos años de la escuela primaria, este estudio tuvo limitaciones. El cuestionario no fue aplicado a niños de cuarto grado, por lo cual no pudimos trabajar con algún niño de cuarto que hubiese hecho un intento de interpretación del símbolo y que fuese de promedio bajo, características de una de las niñas de sexto con quien se obtuvieron buenos resultados.

Los resultados sugieren que si es posible continuar con esta exploración lo ideal sería realizar el trabajo con niños de cuarto y quinto grado, que muestren un intento de interpretación del símbolo en el cuestionario y que tengan promedios escolares bajos. Además sería importante observarlos previamente para tener datos sobre sus actitudes hacia las matemáticas, factor determinante en el caso del niño que tenía promedio escolar bajo, que inició el estudio pero deserto después de la actividad 3.

V.3. Recomendaciones

Con base en los resultados se puede argumentar que si a los niños se les orienta hacia otorgar sentido al uso de la notación algebraica asociada a la variable multifacética, ellos se logran enganchar con esta manera de trabajar con los símbolos. Además, consideramos necesario partir del apoyo de referentes que brinden la oportunidad a los niños de hacer sentido del uso de la notación. Posteriormente pueden recurrir a ellos o no, como se pudo observar en el caso del niño de cuarto, quien avanzó de tal manera que la notación por si sola le ofreció algún significado.

Sería conveniente trabajar al mismo tiempo en la primaria con la aritmética y con el álgebra diferenciando qué se puede hacer con los símbolos numéricos y que se puede hacer con los símbolos literales en un nivel muy sencillo.

V.4. Investigaciones futuras

Sería interesante indagar cómo niños de los últimos tres años de la escuela primaria van desarrollando la comprensión y van construyendo los conceptos algebraicos. Dentro de las posibles investigaciones que se podrían hacer en esta dirección se encuentra una que despierta particularmente nuestro interés: estudiar el proceso de la formación del concepto de variable multifacética, identificando las tres fases en el camino hacia la formación del concepto determinadas por Vygotsky, en donde el papel principal lo jugará el uso funcional de la simbología algebraica.

Para ello será necesario contestar las siguientes preguntas de investigación que involucran a las 3 fases básicas hacia la formación de conceptos consideradas por Vygotsky:

¿Cuáles son las imágenes sincréticas que forma el niño de primaria y que representan para él, el significado del uso de la notación algebraica asociada a la variable?

¿Qué complejos construyen los niños de primaria alrededor del uso de la notación algebraica asociada a la variable?

¿Cuáles son los conceptos potenciales precursores del concepto de variable multifacética, que logran desarrollar los niños de primaria?

Para llevar a cabo este estudio trabajaríamos con *el método de doble estimulación* planteado por Vygotsky (1995), en el cual se presentan al sujeto dos series de estímulos, una como objeto de su actividad, la otra como signo que puede servir para organizar dicha actividad (en nuestro caso el signo sería la notación algebraica o pre-algebraica).

Realizaríamos este estudio con 10 niños de cuarto de primaria y 10 de quinto de ambos sexos que pertenezcan a una escuela pública y el estudio se desarrollaría en las instalaciones de la escuela.

Bibliografía

Ainley, J. Bills, L. y Wilson, K. (2004). Constructing meanings and utilities within algebraic tasks. En: M. Hoines, A. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28TH Conference of the international Group for the Psychology of Mathematics Education,* 2, 1-8.

Bardini, C., Radford, L., Sabena, C. (2005). Struggling with variables parameters, and indeterminate objects or how to go insane in mathematics. *PROCEEDINGS of the 29th Conference of the international Group for the Psychology of Mathematics Education* 2(139-136). Melbourne Australia.

Bastable, V. y Schifter, D. (2008). Classroom Stories: Examples of Elementary Students Engaged in Early Algebra. En: J. Kaput, D. Carraher y M. Blanton (Eds.), *ALGEBRA in the early grades,* 6, 165-184. Nueva York, EUA.

Benítez, E. (2001). Los usos de la variable en algunos libros de texto de matemáticas para la escuela secundaria. *Tesis,* CINVESTAV, México.

Berh, M., Erlwanger, S., y Nichols, E. (1980). How children view the equal sign. *Mathematics Teaching,* 92, 13-15

Bills, L. (1997). Stereotypes of literal symbol use in senior school algebra. En E. Pehkonen (Ed.), *Proceedings of the 21st PME International Conference, 2*(73-80).

Bills, L. (2001). Shifts in the meanings of literal symbols. En M. van den Heuvel-Panhuize (Ed.), *Proceedings of the 25 th PME International Conference, 2*(161-168).

Blanton, M., y Kaput, J. (2001). Algebrafying the elementary mathematics experience. Part II: Transforming practice on

Blanton, M., y Kaput, J. (2003). Developing Elementary Teachers "Algebra Eyes and Ears" *Teaching Children Mathematics,*

Bloedy-Vinner, H. (2001). Beyond unknowns and variables- parameters and dummy variables in high school algebra. En R. Sutherland, T. Rojano, A. Bell y R. Lins (Eds.), *Perspectives on school algebra* 177-189. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

Bodannskii (1991)

Bodrova, E. y Leong, J.D. (2004). *Herramientas de la mente el aprendizaje en la infancia desde la perspectiva de Vygotsky.* México: Pearson Educación.

Booth, L. R. (1984). Algebra: Children´s strategies and errors. Winsor, UK: NFER-Nelson.

Brizuela, B., y Shliemann, A. (2004). Ten year-old solving linear equations. *For the learning of mathematics 24*(2), 33-40.

Carperter,T., Franke, M., y Levi, L. (2003). *Thinking mathematically: Integrating arithmetic and algebra in elementary school.* Portsmouth: Heinemann

Carraher, D., Schliemann, A. y Brizuela B.M. (2007). *Bringing out the algebraic character of arithmetic. From children's ideas to classroom practice.* London: Lawrence Erlbaum associates, publishers.

Carraher, D., Schliemann, A. y Schwartz. (2008). Early algebra is not Algebra Early. En: J. Kaput, D. Carraher y M. Blanton (Eds.), *ALGEBRA in the early grades* 6(165-184). Nueva York, EUA.

Castro, E., y Molina, M. (2007). Desarrollo del pensamiento relacional mediante trabajo con igualdades numéricas en aritmética básica. *Educación matemática, 19*(2), 67-94.

Clement, J. (1982). Algebra word problem solutions: Thought processes underlying a common misconception. *Journal for research in Mathematics Education, 13*(16-30).

Davydov, V. (1975). The psychological characteristics of the "prenumerical" period of mathematics instruction. En L. P. Steffe (Ed.), *Soviet studies in the psychology of learning and teaching mathematics,* 7(109-206). Chicago, IL: The University of Chicago Press.

Dougherty, B. (2008). Measure ul: A Quantitative View of Early Algebra. En: J. Kaput, D. Carraher y M. Blanton (Eds.), *ALGEBRA in the early grades,* 15, 389-412. Nueva York, EUA.

Duval, R. (1998). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En F, Hitt (Ed.), *Investigaciones en Matemática Educativa II.* Grupo Editorial Iberoamérica, México.

Fujii, T. (1993). A clinical interview on children's understanding and misconceptions of literal symbols in school mathematics. En I. Hirabayashi, N. Nohda, K. Shigematsu y F. L. Lin (Eds.), *Proceedings of the 17 th PME International Conference, 1*(173-180).

Hershkowitz, R. y Arcavi, A. (2009). Are second grades able to explain their mathematical ideas?. En: M. Tzekaki, M. Kaldrimidou, H. Sakonidis (Eds.), *Proceedings of the 33rd Conference of the international Group for the Psychology of Mathematics Education* 5(217-224).Thessaloniki, Grecia.

Juárez, J. A. (2002). La comprensión del concepto de variable en profesores de secundaria. *Tesis*, CINVESTAV, México.

Kaput, J. (1998). Transforming algebra from an engine of inequity to an engine of mathematical power by "algebrafying" the K-12 curriculum. En National Council Teachers of Mathematics y Mathematical Sciences Education Board (Eds.), *The nature and role of algebra in the k-14 curriculum: Proceedings of a national symposium* (25-26). Washington, DC: National Research Council, National Academy Press.

Kaput, J. (2008). What Is Algebra? What is Algebraic Reasoning?. En: J. Kaput, D. Carraher y M. Blanton (Eds.), *ALGEBRA in the early grades* 1(5-17). Nueva York, EUA.

Kaput, Moreno y Blanton. (2008). Algebra From Symbolization Point of View. En: J. Kaput, D. Carraher y M. Blanton (Eds.), *ALGEBRA in the early grades,* 2, 19-55. Nueva York, EUA.

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. En D. A. Grouws (Ed.), *The handbook of research on mathematics teaching and learning* (390-419). New York: Macmillan.

Kieran, C. (2004). Algebraic thinking in the early grades: What is it?. *The mathematics educator*, 8(1), 139-151.

Kieran, C. (2006). Research on the learning and teaching of algebra. En A. Gutierrez y P. Boero (Eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education. Past, Present and Future* (pp. 11-49). Sense Publisher.

Küchemann, D. (1981). Algebra. En K. Hart (Ed.), *Children´s understanding of mathematics:* 11-16 (pp. 102-119). London, UK: John Murray.

Lannin, J., Baker, D. y Townsend, B. (2006). Algebraic Generalizations Strategies: Factors influencing Student Strategy Selection. *Mathematics Education Research Journal. 18*(3), 3-28.

Lins, R. y Kaput, J. (2004). The Early Development of Algebraic Reasoning: The Current State of the field. En: K. Stacey, H. Chick y M. Kendal (Eds.), *The Future of the Teaching and Learning of Algebra The 12th ICMI Study* 4(47-70). Dordrecht, the Netherlands: Kluwer Academic.

Malisani, E. y Spagnolo, F. (2009). From arithmetical tought to algebraic tought: the role of the "variable". *Educational studies in mathematic,* 71 (1), 19-41.

Mason, J., Graham, A., y Pimm, D. (1985). *Routes to roots of algebra.* Milton Keynes, UK: Open University Press.

Mason, J. (2008). Making Use of Children's Powers to Produce Algebraic Thinking. En: J. Kaput, D. Carraher y M. Blanton (Eds.), *ALGEBRA in the early grades* 3(57-94). Nueva York, EUA.

Matz, M. (1982). Towards a process model for high school algebra errors. En D.H. Sleeman y J. S. Brown (Eds.), *Intelligent tutoring systems* (25-50). New York: Academic Press.

Montes, D. (2003). Iniciación al álgebra a través de la variable. Una aplicación didáctica del Modelo 3UV. *Tesis*, CINVESTAV, México.

Schmittau, J. (2005). The development of algebraic thinking. A vygotskian perspective. *ZDM, 37*(1), 16-22.

Thair, S., Cavanagh, M. y Mitchelmore, M.(2009). A Multifaceted Approach to Teaching Algebra: Student's Understanding of Variable. En: M. Tzekaki, M. Kaldrimidou, H. Sakonidis (Eds.), *Proceedings of the 33rd Conference of the international Group for the Psychology of Mathematics Education,* 5, 217-224.

Trigueros, M., Ursini, S. y Lozano, D. (2000). La conceptualización de la variable en la enseñanza media. *Educación Matemática,* 12(2), 27-48.

Trigueros, M., Possani, E., Lozano, D., y Sandoval, I. (2009). Learning Sistems of Linear Equations through modelling. En: M. Tzekaki, M. Kaldrimidou, H. Sakonidis (Eds.), *Proceedings of the 33rd Conference of the international Group for the Psychology of Mathematics Education,* 5, 225-232.

Usiskin, Z. (1988). Conceptions of School Algebra and Uses of Variables. En: A.F. Coxford y A.P. Shulte (Eds.), *The Ideas of Algebra K-12.* Reston, V.A.

Usiskin Z. (1997). Doing Algebra in grades K-4. *Teaching Children Mathematics.* 3(6), 346-356.

Ursini, S. (1990). Generalization processes in elementary algebra: interpretation and symbolization. En G. Booker, P. Cobb, y T. N. Mendicuti (Eds.), *Proceedings of the 25th Conference of the international Group for the Psychology of Mathematics Education,* 4, 327-334.

Ursini, S. (1994). Los niños y las variables. *Educación Matemática.* 6 (3), 90-108.

Ursini, S. (1996). Creación de un potencial para trabajar con la noción de variable. En: F. Hitt Espinosa (Ed.), *Investigaciones en Matemática Educativa* 23(423-440). DF, México.

Ursini, S. y Trigueros, M. (2001). A model for the uses of variable in elementary algebra. En: M. van den Heuvel- Panhuizen (Ed.), *Proceedings of the 25th Conference of the international Group for the Psychology of Mathematics Education,* 4, 327-334.

Ursini, S. Trigueros, M. (2009). In search of characteristics of successful solution strategies when dealing with inequalities. En: M. Tzekaki, M. Kaldrimidou, H. Sakonidis (Eds.), *Proceedings of the 33rd Conference of the international Group for the Psychology of Mathematics Education,* 5, 265- 272

Ursini, S., Escareño, F., Montes, D. y Trigueros, M. (2005). *Enseñanza del ALGEBRA ELEMENTAL. Una propuesta alternativa.* México: Trillas.

Vygotsky L. S. (1995). *Pensamiento y Lenguaje.* España: Paidós Ibérica.

Wagner, S. (1981). Conservation of equation and function under transformation of variable. *Journal for Research in Mathematics Education, 12,* 107-118.

Wood, D. (1998). How Children Think and Learn: The social Contexts of Cognitive Development, Oxford, Blackwell.

ANEXO

La siguiente tabla muestra los propósitos de cada una de las 7 actividades que involucran el uso de la variable como incógnita.

Actividad	**Objetivo**
1	Presentar expresiones conocidas e introducir la palabra ecuación. Guiar la atención de los niños para que perciban en la expresión la presencia de algo desconocido (I1), y para que observen, que las operaciones que comúnmente realizan les sirven para determinar la cantidad desconocida (I4), (I3). Lograr que los estudiantes expresen y compartan sus ideas durante la interacción.
2	Reforzar la actividad anterior (I1), (I4), (I3). Invitar a los estudiantes a variar el cuadro por otros símbolos (I5). Buscar que ellos en interacción con el experto deduzcan el uso de los símbolos en álgebra, y que no es importante cual sea el símbolo considerado en una expresión, lo importante es el valor numérico que representa y que es determinado por la ecuación. Para esta actividad consideramos importante que el valor desconocido no sea fácil de encontrar por medio de un simple cálculo numérico.
3	Mostrar una ecuación con un símbolo literal, asociada a una situación problemática. Lograr que los niños en interacción con el experto deduzcan que la letra representa el número que se desconoce en la situación planteada (I1). Trabajar con los aspectos (I2), (I4) e (I5). Lograr que aprecien, tal y como lo hicieron en la actividad anterior que símbolos literales distintos, no representan necesariamente números distintos.
4	Partir de un problema verbal que involucra una cantidad desconocida (I1), encauzar a los estudiantes para que simbolicen y planteen una ecuación (I5), interpreten a la variable simbólica como la representación del valor específico que se desconoce en el problema (I2).
5	Lograr que los niños con ayuda del experto reconozcan la presencia de un valor desconocido (I1), lo representen simbólicamente (I5), escriban una

	ecuación para modelar la situación (I5), interpreten los valores encontrados en términos de la situación (I2) y realicen operaciones aritméticas (I4), (I3).
12	Presentar a los estudiantes una expresión algebraica sin contextualizar y observar que sentido logran otorgar a la expresión, si son capaces de interpretar el símbolo correctamente (I2) y si lo pueden sustituir por el valor específico que representa (I3), (I4).
16	Mostrar situaciones problemáticas que ayuden a profundizar sobre la comprensión del uso de los símbolos literales en ecuaciones. Interpretar la variable simbólica que aparece en una ecuación como la representación de un valor específico (I2), que puede ser determinado considerando las restricciones de la situación (I3), (I4). Lograr que los niños comprendan el significado de la igualdad como equivalencia.

La siguiente tabla muestra los propósitos de cada una de las 8 actividades que involucran el uso de la variable como número general.

Actividad	**Objetivo**
6	Introducir una situación problemática que involucra a un símbolo literal que representa a una cantidad que es imposible determinar. Presentar preguntas que generen una interacción que ayude al niño a interpretar al símbolo como la representación de una entidad general, indeterminada que puede asumir cualquier valor (G2).
7	Presentar una situación aparentemente parecida a la anterior, que permite observar si el niño propone una expresión que represente la situación (G5) y además interpreta la variable simbólica como la representación de una entidad general (G2). Pedir al niño que ponga una condición a la situación presentada, para que el símbolo involucrado represente un valor específico (I2) en una ecuación (I5). Observar si comprenden la diferencia entre el uso de la variable como número

	general y como incógnita y precisar sobre este punto.
8	Detectar si los niños comprenden el uso de un número general como resultado de una suma de dos cantidades indeterminadas que aparecen en un problema verbal. Es necesario que interpreten a las variables simbólicas involucradas, como representantes de entidades generales que pueden asumir cualquier valor (G2) y las usen para simbolizar (G5).
10	Que los niños propongan una expresión algebraica como representación de una cantidad (G5), en un problema sencillo, usando el símbolo dado (G2)
11	Reafirmar que una entidad general, indeterminada se puede representar con cualquier símbolo literal. Interpretar a la variable simbólica como la representación de la entidad general determinada por el problema planteado (G2).
13	Determinar un perímetro de una figura, ayudando al niño a percibir que siempre siguen el mismo procedimiento (G1). Presentar dos símbolos literales asociados a las medidas de los lados de un rectángulo para ver si pueden interpretarlos como representantes estas medidas (G2). Guiarlos para que deduzcan como representar simbólicamente al perímetro de la figura dada (G3), (G5). Encauzarlos para que simplifíquenla expresión, manipulando la variable simbólica (G4).
14	Después de explicar que significa que un polígono sea regular, mostrar un pentágono regular y solicitar al estudiante, que diga cual es el perímetro de la figura. Con el propósito de que asigne en primer lugar un número general a uno de los lados (G5). Es necesario reconocer un patrón para deducir el perímetro (G1), simbolizar (G3) y representar el perímetro (G5). Simplificar la expresión que representa al perímetro (G4).

La siguiente tabla muestra los propósitos de cada una de las 5 actividades que involucran a variables relacionadas.

Actividad	Objetivo
18	Presentar a los niños una figura regular cuyo perímetro se representa con el símbolo K, para ver su capacidad para simbolizar una relación funcional (F6).
19	A partir de la expresión 5Z=K ver si pueden reconocer la correspondencia entre variables relacionadas (F1), determinar los valores de la variable dependiente dados los valores de la independiente (F2), reconocer la variación conjunta (F4), y determinar los valores de la variable independiente dalos los valores de la dependiente (F3) .
20	Similar a la actividad anterior pero representando las variables con otras literales.
21	Presentar tabla de valores de la función identidad y ver si los niños pueden simbolizar la relación (F1), (F4), (F6).
22	Utilizar una situación problemática verbal y ver si los niños pueden reconocer la correspondencia (F1) y la variación conjunta de las variables involucradas (F4), determinar los valores de la variable dependiente dados los valores de la independiente (F2).

La siguiente tabla muestra los propósitos de cada una de las 3 actividades que involucran expresiones algebraicas que aluden a los tres usos de la variable.

Actividad	Objetivo
9	Presentar a los alumnos una lista de expresiones algebraicas parecidas a las que hasta el momento se han analizado (ecuaciones de la forma 5+m=35 y expresiones abiertas 2m+3) para ver si pueden interpretar y reconocer cuando la variable simbólica representa un valor específico (I2), y cuando un número general (G2). Se incluyen además expresiones con operaciones diferentes a la suma, para familiarizarlos con distintas expresiones algebraicas.
15	Presentar a los alumnos expresiones algebraicas distintas a las presentadas anteriormente y ver su capacidad para interpretar la variable simbólica que aparece en una expresión puede representando un valor específico (I2) y, por

	otro lado, cuando esta representa un número general (G2). Para ver si los estudiantes alcanzan una mayor comprensión se recurre al uso de la tecnología de la forma descrita en el capítulo III.
17	Presentar 8 expresiones algebraicas distintas, 7 de ellas representan números generales y una introduce a dos variables relacionadas para ver su capacidad de interpretación diferenciada.

La siguiente tabla muestra los propósitos de cada una de las 3 actividades integradoras.

Actividad	**Objetivo**
23	A partir de una situación problemática sencilla se analiza si los alumnos logran reconocer, interpretar y simbolizar a la variable y pasar de un uso a otro con flexibilidad (I1, I2, I3, I4, I5, G2, G4, G5, F1, F2, F3, F4, F5)
24	A partir de un crucigrama que contiene símbolos literales, ver si los estudiantes para que logran reconocer, interpretar y simbolizar a la variable y pasar de un uso a otro con flexibilidad (I3, I4, I5, G2, F1, F2, F3, F4).
25	A partir de un problema diseñado para usarse en primero de secundaria, que involucra los distintos usos de la variable, ver si los estudiantes pueden reconocer, interpretar y simbolizar a la variable y pasar de un uso a otro con flexibilidad (I1, I2, I3, I4, I5, G2, F1, F2, F3, F4).

El jurado designado por el Departamento de Matemática Educativa, Unidad Distrito Federal del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, aprueba la tesis:

Creando la zona de desarrollo próximo para que niños de primaria trabajen con los tres usos de la variable

que presenta **Beatriz Romero Sánchez** para su examen final de Maestría en Ciencias en la especialidad de Matemática Educativa el día 15 de febrero del año 2011.

Dra. Sonia Ursini Legovich

Aurora Gallardo
Dra. Aurora Gallardo Cabello

Dra. Andrea López Pineda