CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS
DEL INSTITUTO POLITECNICO NACIONAL

Unidad Distrito Federal

Departamento de Matemática Educativa

LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS ARITMÉTICOS EN LA EDUCACIÓN PREESCOLAR

TESIS

Tesis que presenta

CLAUDIA SANTANA DOMINGUEZ

para obtener el Grado de

Maestra en Educación en Matemáticas

Directora de la Tesis:
Dra. Laura Macrina Gómez Espinoza

México, Distrito Federal Diciembre 2011

Agradecimientos a los

Servicios Educativos Integrados al Estado de México y

a la Sección 17 del S. N. T. E.

por el apoyo brindado durante mis estudios en el

programa

Maestría en Educación en Matemáticas

en el

Departamento de Matemática Educativa del

Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN

Existe una gran verdad en este planeta; seas quien seas o hagas lo que hagas, cuando deseas con firmeza alguna cosa, es porque este deseo nació en el alma del Universo. Es tu misión en la tierra.

Paulo Coelho

Por ustedes:
Héctor, Alejandro, Héctor José y
Mis Asesoras: Rosa María, Laura y Martha

Resumen

Se presenta el diseño y puesta a prueba de una estrategia de enseñanza para facilitar el desarrollo de procedimientos de resolución de problemas aritméticos en los niños preescolares a fin de acercarlos de manera significativa a la comprensión de las operaciones aritméticas básicas.

Se revisaron algunos elementos teóricos sobre la conceptualización del número y la resolución de problemas aritméticos, así como los fundamentos didácticos que sustentan la estrategia de enseñanza, para lo cual se recuperan algunos conceptos básicos de la "Teoría de las situaciones didácticas" desarrollada por Brousseau.

La estrategia de enseñanza se conforma de cinco secuencias de situaciones didácticas organizadas y jerarquizadas a partir de una serie de variables didácticas. Se detallan los elementos, situaciones didácticas y recursos que integran cada una de las secuencias, así como los instrumentos para la evaluación y seguimientos de los avances de los alumnos.

La aplicación de la estrategia y su evaluación se llevó a cabo en un grupo de segundo grado de preescolar durante el año escolar 2007-2008 y los dos primeros meses de 2008-2009. Los resultados muestran el progreso en la solución de problemas y las estrategias utilizadas por los niños quienes requieren el apoyo de los objetos concretos.

El trabajo concluye con una propuesta para acercar a los niños de manera significativa a la comprensión de las operaciones aritméticas aditivas y multiplicativas que faciliten el desarrollo de los procedimientos de resolución de problemas aritméticos y contribuyan, a su vez, al desarrollo de sus conocimientos matemáticos.

Abstract

This work present a design and the test of a teaching strategy in order to promote the development of procedures solving in the preschool's students when they were solving arithmetical problems with the purpose of collaborate in their significantly understanding of the operations involved in that problems.

Were review some theoretical elements about the conceptualization of number and arithmetical problem solving, as well as didactical foundations that supported the teaching strategy we considered, some basic concepts of the "theory of didactic situations" developed by Brousseau.

The teaching strategy consists of five organized and hierarchical sequence from a series of instructional variables. Includes details of didactic situations and resources that make up each of the sequences as well as tools to assess and monitor student progress.

The implementation of the strategy and the test is conducted in a group of preschool second grade during the 2007-2008 school year and the first two months of 2008-2009. The results show progress in solving problems and the strategies used by children who require the support of concrete objects.

The paper concludes with a proposal to bring children a significantly understanding of the additive and multiplicative arithmetic operations to facilitate the development of procedures for solving arithmetic problems, and contribute, in turn, the development of mathematical knowledge.

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

Desde 1993, *la resolución de problemas* es un tema central en los programas de matemáticas de la primaria y la secundaria de nuestro país. En el nivel preescolar, aparece de manera explícita hasta 2004 con la introducción del programa vigente. En este programa se plantea, por una parte, la importancia de abordar el desarrollo del pensamiento matemático de los preescolares a partir de la resolución de problemas, considerando que ello constituye "la fuente de elaboración de conocimientos matemáticos" (SEP, 2004, p. 73), y por otra, la resolución de problemas se introduce como una competencia específica a favorecer, para promover en los niños la posibilidad de plantear y resolver problemas aritméticos "en situaciones que le son familiares y que implican agregar, reunir, quitar, igualar, comparar y repartir objetos" (p. 77).

Antes de la difusión de este programa, la resolución de problemas era un tema ausente de las prácticas educativas del nivel preescolar. Se consideraba que esto correspondía a la primaria. Las ideas que teníamos los docentes del nivel sobre lo que significa resolver problemas provenían de nuestra propia experiencia como estudiantes. Cuando cursábamos la primaria, resolvíamos problemas aritméticos utilizando las operaciones que nos habían enseñado. Así, primero teníamos que aprender a sumar, restar, multiplicar o dividir para poder resolver problemas. Por lo tanto, pensábamos que si los niños en preescolar no sabían hacer las operaciones escritas, mucho menos podrían resolver los problemas.

En el Programa de Educación Preescolar 2004[1] y en otros documentos que los docentes de este nivel hemos recibido como apoyo para nuestro trabajo (SEP, 2004; SEP, 2005) *se plantea una idea diferente. La resolución de un problema requiere que busquemos* procedimientos propios, que utilicemos lo que sabemos. "La resolución de un problema nuevo se inicia casi siempre con procedimientos de ensayo y error: se prueban hipótesis, ideas, resultados particulares. Al resolver otros problemas similares, poco a poco se van construyendo ciertas relaciones que permiten elaborar procedimientos más generales y sistemáticos (...) si antes de plantearle el problema, se le enseña la <fórmula> que lo

[1] En lo sucesivo se referirá este programa con la abreviatura PEP 2004.

resuelve de manera sistemática, se le quita la oportunidad de hacer matemáticas, es decir, de construir por sí misma herramientas para resolver problemas, y éste es, sin embargo, uno de los principales propósitos de la enseñanza de las matemáticas..." (SEP, 2005, p. 224).

La idea de resolver problemas como detonador para la construcción de *herramientas matemáticas*, que se plantea en el párrafo anterior, es aplicable a diversos tipos de problemas (como los espaciales y de medida) y no sólo a los aritméticos. Sin embargo, cabe aclarar que en este trabajo se centra, específicamente, en éstos últimos. En el caso de los problemas aritméticos, enseñar la "fórmula" se refiere a enseñar los algoritmos convencionales de la suma, resta, multiplicación y división.

Dentro del campo formativo del pensamiento matemático, el PEP 2004 se incluye una competencia que los niños deben desarrollar referida a la resolución de problemas aritméticos y es la siguiente: "Plantea y resuelve problemas en situaciones que le son familiares y que implican agregar, reunir, quitar, igualar, comparar y repartir objetos" (SEP, 2004, p. 75). Lo que me llevó a centrar mi interés específicamente en este tema, fue darme cuenta de que no estaba abordando de una manera adecuada esta competencia, debido al desconocimiento y falta de claridad sobre lo que significa enseñar matemáticas, desde el enfoque planteado en el programa.

A través del diagnóstico llevado a cabo durante el primer año de la maestría, se observó que otras maestras de preescolar pensaban de manera similar. Este diagnóstico se realizó a través de la aplicación de 21 cuestionarios y dos entrevistas a mis compañeras docentes de la Zona 005 del Valle de Toluca y del Centro de Atención Psicopedagógica de Educación Preescolar (CAPEP) Tenancingo. La aplicación de estos instrumentos tenía como propósito conocer su opinión y forma de como abordaran el trabajo de las competencias del campo formativo de pensamiento matemático, en particular sobre la que se refiere a la resolución de problemas de reunir, agregar, quitar, comparar, igualar y repartir.

Los resultados de esta aplicación mostraron que, entre las docentes, existía un conocimiento muy parcial sobre el campo formativo del pensamiento matemático del Programa de Educación Preescolar 2004, que hacía que no se le diera la suficiente atención al planteamiento y resolución de problemas, a pesar de que en el mismo programa se dice que "para favorecer el desarrollo del pensamiento matemático, el trabajo en este campo se sustenta en la resolución de problemas" (SEP, 2004, p. 73).

Asimismo, nos dimos cuenta que estas docentes de preescolar desarrollan su *práctica basada en tradiciones que les han resultado efectivas, sin embargo, esto las ha* limitado a analizar el programa actual con la profundidad que se requiere.

Por otra parte, aplicamos a los alumnos con los que en ese momento trabajamos algunos problemas, observando lo que hacían para resolverlos y les pedíamos que explicaran a sus compañeros cómo los habían resuelto. Los niños utilizaron los materiales que se tenían en ese momento en el salón de clase; algunos intentaron hacer la actividad con palitos y fichas, otros lo hicieron con sus dedos, otros más usaron las sillas y a sus compañeros quienes representaron a los personajes del problema que eran unos "monitos"

Esta experiencia nos permitió observar que los niños sí son capaces de resolver los problemas, que buscan sus propias estrategias y las exponen al grupo. Además de que las interacciones entre los niños son muy útiles para hacerlos avanzar en sus procesos.

A partir de la información obtenida con mis compañeras docentes y de las observaciones a los niños, delimitamos la problemática a abordar en este trabajo de tesis. Reflexionamos sobre la importancia de conocer información específica acerca del campo formativo pensamiento matemático y, en especial, sobre la resolución de problemas aritméticos para poder guiar el aprendizaje de mis alumnos de manera más eficaz.

Lo que pretendemos demostrar es que a través de un trabajo sistematizado, que considere el planteamiento de problemas aritméticos, es posible llevar a los niños a desarrollar conocimientos numéricos que les permitan poner en práctica procedimientos de resolución cada vez más avanzados. Consideramos que la etapa preescolar es la más adecuada para iniciar la educación matemática de manera intencionada, si queremos que los niños lleguen a ser competentes en esta materia y puedan enfrentarse con éxito a los retos que se les presentarán en otros niveles educativos y en la vida cotidiana. El trabajo de investigación esta conformado de la siguiente manera:

En el primer capítulo se presenta el marco referencial que fundamenta este trabajo. Se describen los elementos teóricos y didácticos que guiaron la construcción de la propuesta de intervención.

En el segundo capítulo, se explica el diseño de la estrategia de enseñanza y se detallan los elementos, situaciones didácticas y recursos de cada una de las secuencias didácticas que la integran.

En el tercer capítulo se describe la implementación de la estrategia. En primer lugar se expone una evaluación diagnóstica considerando los instrumentos y apoyos empleados en su aplicación; en seguida, se presenta la fase de intervención se relatan algunos aspectos relevantes de la puesta en práctica de cada una de las secuencias didácticas y se concluye el capítulo refiriendo las evaluaciones intermedia y final.

En el cuarto capítulo se reportan, analizan y discuten los resultados de la aplicación de la estrategia de enseñanza en cuanto a los avances de los niños y al perfeccionamiento de la intervención docente.

Finalmente, se exponen las principales conclusiones del presente trabajo de tesis.

La pregunta de investigación que planteamos es: ¿Cómo se puede sistematizar el trabajo diario en el jardín de niños para que los alumnos planteen y resuelvan problemas aritméticos, desde el enfoque de la enseñanza de las matemáticas propuesto en el PEP 2004?

El producto de este trabajo se concreta en la formulación y puesta a prueba de una propuesta de intervención educativa para facilitar el desarrollo de procedimientos de resolución de problemas aritméticos en los niños preescolares para acercarlos de manera significativa a la comprensión de las operaciones aritméticas básicas[2] Esta propuesta considera la selección y diseño de situaciones didácticas, el empleo de recursos y pautas para la evaluación, así como pautas para orientar la intervención docente.

Los objetivos que guían esta tesis son:

- Comprender y explicitar los contenidos matemáticos implicados en la competencia "Plantea y resuelve problemas en situaciones que le son familiares y que implica agregar, reunir, quitar, igualar, comparar, y repartir objetos"

- Seleccionar, adaptar y poner a prueba situaciones didácticas a fin de sistematizar una estrategia de enseñanza encaminada a favorecer el desarrollo de esta competencia.

- Identificar las formas de organización grupal y del aula que faciliten la aplicación de dicha estrategia de enseñanza.

- Establecer pautas para el seguimiento y evaluación del aprendizaje de los niños a través de la observación de las estrategias que emplean en la resolución de los problemas.

[2] Suma, resta, multiplicación y división.

CAPÍTULO 1

MARCO REFERENCIAL

1.1 El conteo y la resolución de problemas aritméticos

Se ha visto que los seres humanos, por naturaleza, tenemos un sentido numérico primitivo, que nos permite desde muy pequeños distinguir la diferencia entre un elemento y muchos elementos entre un conjunto pequeño y un conjunto grande. Sin embargo, este conocimiento intuitivo no es suficiente cuando se tiene que determinar con precisión la numerosidad de conjuntos mayores de seis o siete elementos. Por eso fue necesario inventar el conteo.

Nuestros antepasados idearon métodos para llevar la cuenta del tiempo y de sus pertenencias, basados en la correspondencia biunívoca y la equivalencia. Por ejemplo, para registrar las pieles que añadían a un montón, hacían muescas en un palo o hueso. Para comprobar si seguían existiendo la cantidad de pieles registradas realizaban una correspondencia biunívoca emparejándolas, una a una, con las muescas. Con el tiempo se tuvieron que inventar métodos más precisos para medir cantidades asignando una etiqueta numérica a cada objeto.

Un proceso similar se observa en el desarrollo de la comprensión numérica en los niños preescolares. Para comparar la numerosidad de dos colecciones, primeramente se valen de la percepción, enseguida recurren a poner en correspondencia los elementos de ambos conjuntos para comprobar si hay igual, más o menos cantidad. Finalmente, descubren el conteo como un recurso más eficiente y económico y lo emplean sistemáticamente.

De acuerdo con Baroody (2000), los niños desarrollan una serie de técnicas de conteo que les permiten cuantificar colecciones de manera cada vez más eficiente. Primeramente, dominan la cadena numérica verbal, enseguida la técnica de coordinar los nombres de los números que se pronuncian en esa cadena, con el señalamiento del objeto a contar. En tercer lugar pueden reconocer que la última etiqueta pronunciada designa el valor cardinal del conjunto contado. Y por último, la coordinación de las tres técnicas anteriores permite a los niños reconocer diferencias entre las magnitudes de los conjuntos, por ejemplo hay dos conjuntos uno con ocho elementos y otro con seis al contarlos se identifica que hay más elementos en el conjunto donde se contaron ocho elementos que en el que se contaron seis. Mediante la experiencia que el niño tiene al contar, también descubre que hay transformaciones que no alteran el valor cardinal del conjunto como la dispersión o cambio de disposición física de sus elementos, mientras que otras, como agregar o quitar elementos hacen cambiar los números. "Cuando los niños llegan a ser competentes en la enumeración (...) están preparados para darse cuenta de relaciones aritméticas importantes. Un niño puede determinar que añadir un bloque a otro es <dos> (...) de manera similar un niño preescolar puede ver enseguida que si se quita una galleta a un conjunto de tres, quedan dos. No hay más que una fina línea entre contar y aumentar o disminuir en una unidad" (Baroody, 1988, p. 115).

Por lo tanto, hay una relación importante entre contar y resolver problemas aritméticos. Las relaciones semánticas como agregar, quitar, comparar, entre otras, "desencadenan en los niños diferentes procedimientos de conteo, en los que ponen en juego sus conocimientos" (SEP, 2005, p. 284).

1.2 ¿Qué es un problema?

"Un problema es una situación para la cual el destinatario no tiene una solución construida de antemano. La resolución de problemas es una fuente de elaboración de conocimientos matemáticos; tiene sentido para los niños preescolares cuando se trata de situaciones que son comprensibles para ellos, pero de las cuales en ese momento desconocen la solución" (SEP, 2004, p. 73).

Los problemas que se refieren específicamente en esta tesis son *los problemas aritméticos verbales* que se pueden definir como textos o historias cortas que cuenta algún tipo de actividad en el que el protagonista tiene que resolver una incógnita valiéndose de sus conocimientos previos. Lo importante es que ese destinatario comprenda el problema para que así le pueda dar la solución correcta. Este proceso de comprender el problema lo llevará a reflexionar, buscar y expresar diferentes soluciones, lo que va a permitir potenciar las formas de pensamiento matemático (Maza, 1991).

Es importante recordar que el hecho de resolver problemas no se refiere a aquella forma tradicionalista de aprender y mecanizar formas de solución, sino entender las relaciones que están implicadas en los problemas. El resolver problemas requiere que los niños los contextualicen de acuerdo a sus vivencias, de tal forma que le den sentido a sus conocimientos, esto implica un reto intelectual que moviliza sus capacidades de razonamiento y expresión.

Los problemas aritméticos pueden ser aditivos, los que se resuelven con operaciones de suma o resta, y multiplicativos, los que se resuelven con operaciones de multiplicación y división. Los problemas pueden ser de una etapa o de más de una etapa dependiendo de que necesitemos una sola operación o varias para encontrar la solución. En preescolar se trabajan preferentemente los problemas de una etapa.

Los problemas aritméticos de una etapa se conforman, de tres momentos que son: el Estado Inicial (EI), el Operador (Op) y el Estado Final (EF), ejemplo Erick tiene 2 canicas rojas (EI), y Luis le regaló 5 canicas blancas (Op), ¿Cuántas canicas tiene ahora Erick? (EF).

Estos tres elementos son importantes para el planteamiento de los problemas aritméticos verbales. Aunque en los problemas más conocidos, por lo regular, la incógnita se encuentra en el estado final, también puede estar en el operador o en el estado inicial. Por ejemplo: ejemplo Erick tiene 2 canicas rojas (EI), y Luis le regaló algunas canicas blancas (Op), ahora Erik tiene 7 canicas (EF). ¿Cuántas canicas le regaló Luis? (Op). La operación para resolver el problema se podría plantear de la siguiente manera: 2 + (?) = 7

Dependiendo de la operación que se requiera para resolver los problemas y de la posición de la incógnita, pueden formularse diversos problemas. El cuadro 1 se muestra las posibles combinaciones:

Cuadro 1

Posibles combinaciones para formular un problema aritmético según el tipo de operación y la posición de la incógnita

Problemas	Posición de la incógnita		
	Estado Inicial	Operador	Estado Final
Aditivos	? + b = c	a + ? = c	a + b = ?
	? - b = c	a - ? = c	a – b = ?
Multiplicativos	? x b = c	a x ? = c	a x b = ?
	? / b = c	a / ? = c	a / b = ?

1.3 Tipos de problemas aritméticos

En relación con la resolución de problemas aritméticos, en el Programa de Educación Preescolar (SEP, 2004) se establece que los niños deben desarrollar la competencia: "Plantea y resuelve problemas en situaciones que le son familiares y que implican agregar, quitar, reunir, igualar, comparar y repartir objetos" Los problemas que, de acuerdo con esta competencia, se pueden trabajar con los niños de educación preescolar son como los siguientes:

- Tengo 5 canicas y me regalan 4 canicas ¿Cuántas tengo? (agregar)
- Había 8 focas jugando, 3 se fueron a nadar. ¿Cuántas focas se quedaron jugando? (quitar)
- Pedro tiene 3 pelotas azules y Claudia tiene 5 rojas. ¿Cuántas pelotas tienen entre los dos? (reunir)
- Laura tiene 3 cochecitos y Luis tiene 8. ¿Cuántos cochecitos necesita Laura para tener la misma cantidad de cochecitos de Luis? (igualar)
- Mary tiene 3 estampas y Juan tiene 8. ¿Cuántas estampas más tiene Juan que Mary? (comparar)

- Claudia tiene 9 dulces y los va a repartir entre sus 3 amigos. A todos les quiere dar lo más posible de dulces. ¿Cuántos le tocan a cada quien? (repartir).

Los problemas que involucran una operación, como los de estos ejemplos, son situaciones en las que contar tiene sentido. De las relaciones señaladas entre los paréntesis, las primeras (agregar, quitar, reunir, igualar y comparar) corresponden a las relaciones aditivas y la última (repartir) a las multiplicativas. Las podríamos agrupar como se muestra en el cuadro 2.

Las acciones de separar y agrupar marcadas en cuadro 2 con asterisco no se mencionan en el PEP 2004, pero se incluyeron en la tabla para mostrar una clasificación más completa.

Cuadro 2

Relaciones aditivas y multiplicativas.

Acciones implicadas en los problemas	Tipo de relaciones Aritméticas
Agregar Quitar Reunir Separar* Comparar Igualar	Aditivas
Repartir Agrupar*	Multiplicativas

Los problemas de separar implican una relación inversa a reunir. Por ejemplo:

- Pedro y Claudia tienen 8 pelotas los dos juntos. De esas, 3 son de Pedro. ¿Cuántas pelotas son de Claudia?

De acuerdo con estudios realizados por algunos investigadores (Riley, Heller y Greeno, 1983) los problemas de separar son más complejos que los de reunir y, por lo tanto, más difíciles para los preescolares.

Los problemas, que para los propósitos de esta tesis, se denominarán de "agrupar"[1] implican una relación inversa a repartir porque colocan la incógnita en el conjunto total de elementos formados por todas las partes y no en la cantidad de elementos de cada parte. Por ejemplo:

- Carla va a repartir dulces a sus 3 amigos. A cada uno le quiere dar 4 dulces. ¿Cuántos dulces necesita tener Carla en total?

Para resolver este problema con el apoyo de objetos se tendrían que formar 3 grupos de 4 dulces y contarlos todos y en esta acción estaría implicada la operación de multiplicar 3 por 4, como antecedente o base para la multiplicación. En situaciones cotidianas esta relación se puede presentar y los niños de preescolar podrían resolver este tipo de problemas con cantidades pequeñas

De acuerdo con Irma Fuenlabrada (2005), los niños preescolares no resuelven los problemas aritméticos utilizando las operaciones de suma, resta, multiplicación y división pero sí "realizando el conteo de diversas maneras, en función de las relaciones semánticas entre los datos" (p. 283). Con relaciones "semánticas" se refiere a las acciones implicadas en los problemas como uniones, separaciones, incrementos, decrementos, comparación de diferencias, agrupaciones y repartos. De acuerdo con esta autora, cuando resuelven los problemas, los niños recurren al conteo llevando a cabo acciones que reflejan estas relaciones semánticas. Por ejemplo para resolver el problema "Erik tiene 2 canicas rojas y su mamá le regaló 5 canicas blancas ¿Cuántas canicas tienen Erik? Un niño pondría 2 y agregaría 5 más a esa colección, al terminar, contaría la colección resultante desde el 1 y obtendría como resultado 7.

En otro problema como "Erik tiene siete canicas y le regala 2 a su hermana ¿Cuántas canicas le quedan a Erik? El niño pondría las siete canicas, quitaría 2 y contaría las que quedan para encontrar el resultado.

El primer problema implica una relación de incremento en la que hay que agregar, mientras que el segundo problema presenta una relación de decremento en la que hay que

[1] Se eligió ese nombre por la acción que los niños realizan de hacer grupos cuando resuelven este tipo de problemas.

quitar. A cada una de estas relaciones corresponde la operación de suma y resta respectivamente.

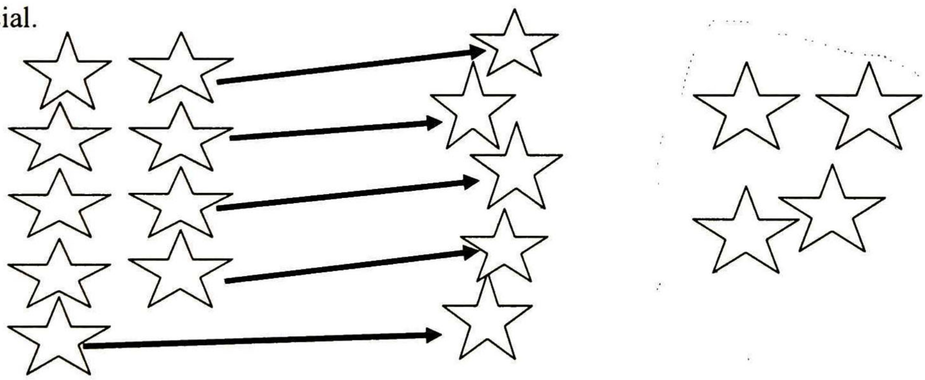
Pero estos no son todos los tipos de problemas que puede haber. Algunos investigadores han realizado clasificaciones de los tipos de problemas que pueden existir, de acuerdo con el tipo de relaciones semánticas involucradas (Carpenter y Moser, 1982; Riley, Heller y Greeno, 1983; Vergnaud, 1981). Aunque los nombres que les han dado difieren, las relaciones semánticas son las mismas.

Problemas aditivos

La clasificación desarrollada por Riley, Heller y Greeno, (1983) para los problemas verbales aditivos simples (que son los problemas expresados en palabras que para resolverse requieren de una sola operación de suma o de resta) considera cuatro tipos o categorías, dependiendo de la acción o relaciones semánticas[2] que involucran. Estas categorías son: Cambio, Combinación, Comparación e Igualación. A continuación se muestran algunos ejemplos:

- Problemas de cambio: José tenía 9 estrellas. Le dio 5 a Lupita ¿Cuántas estrellas le quedan a José?

En este caso, el conjunto de estrellas de José disminuyó con la acción de quitarle cinco elementos. Esta disminución produce un cambio o transformación en el conjunto inicial.

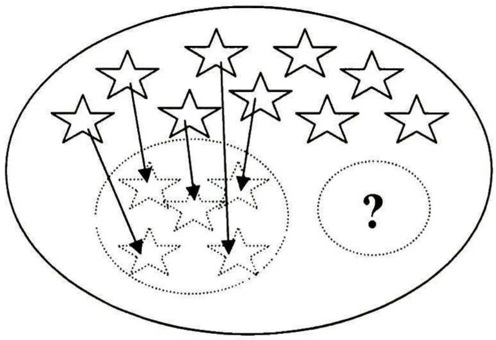


Quedan

[2] "Por relación semántica nos referimos al conocimiento conceptual acerca de incrementos, decrementos, combinaciones y comparaciones, en los que intervienen conjuntos de objetos"

- Problemas de Combinación:

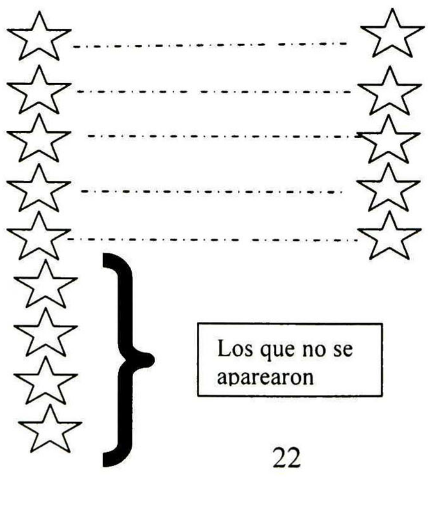
José y Lupita tienen, los dos juntos, 9 estrellas. De ésas, 5 son de José y el resto de Lupita. ¿Cuántas estrellas son de Lupita?



En este problema está implicada una relación entre un conjunto total (el de las estrellas de José y Lupita juntos) y los subconjuntos (el de las estrellas de José y el de las de Lupita separados). Aquí ninguno de los dos conjuntos se modifica.

- Problemas de Comparación:

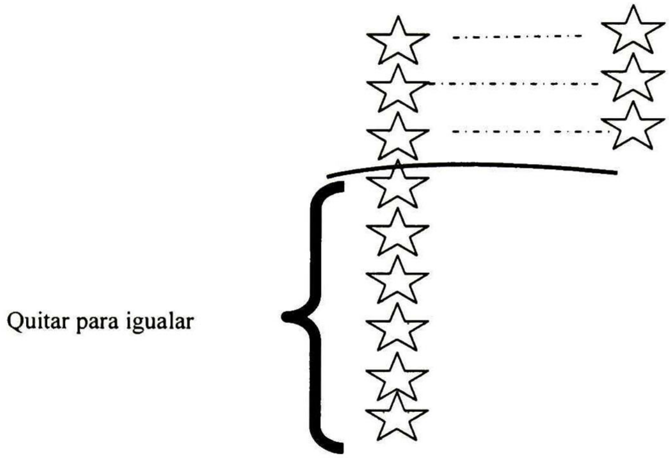
Lupita tiene 9 estrellas. José tiene 5 estrellas menos que Lupita. ¿Cuántos caramelos tiene José? Aquí tampoco hay transformación de los conjuntos, sino una relación comparativa.



- Problemas de Igualación:

José tiene 9 estrellas. Lupita tiene 5 estrellas. ¿Cuántas estrellas necesita guardar José para tener las mismas que Lupita?

En este caso para igualar ambos conjuntos, es necesario quitar estrellas de "las de José" hasta que queden en correspondencia cuantitativa con "las de Lupita"



Los problemas de cambio e igualación describen una relación dinámica, ya que para resolverlos hay que hacer transformaciones de incremento o decremento en los conjuntos.

Los problemas de comparación y combinación por el contrario, plantean una relación estática entre sus entidades.

Cabe mencionar que aquí sólo se han mostrado algunos ejemplos de problemas aditivos, pero dentro de cada categoría existen otras variantes, de acuerdo al lugar en que se encuentre la incógnita. En el anexo 1 se presenta un cuadro con ejemplos de otras variantes de la estructura de los problemas verbales aditivos de cada tipo.

Problemas multiplicativos

En cuanto a las relaciones multiplicativas no se han realizado tantos estudios ni tan avanzados como en el caso de los problemas aditivos, pero algunos investigadores han tratado de elaborar una clasificación semántica de los problemas e indagar su grado de dificultad y determinar las estrategias que los niños usan, cuando se enfrentan a tales problemas (por ejemplo, Vergnaud, 1981, 1983,1988; Schwartz, 1988; Nesher, 1988, 1992; Maza-Gómez, 1991a, 1991b citados en Puig y Cerdán, 1995). En general, estos estudios se han llevado a cabo con niños que cursan los últimos grados de la educación primaria.

De acuerdo con Vergnaud (1991) pueden extraerse numerosas clases de problemas, según la forma de la relación multiplicativa, y cada una de esas clases, a su vez, dividirse en numerosas subclases según el tipo de números empleados (enteros, decimales, unidades inferiores a 1) pero la complejidad de estos problemas esta más allá de las posibilidades de comprensión de los niños.

Para el propósito de este trabajo de tesis, se comentará de manera muy sintética, que los problemas de multiplicar pueden ser de dos tipos generales:

1) Problemas de razón hay una relación simple y directa entre dos medidas, por ejemplo, “Hay 5 floreros con cinco flores cada uno ¿Cuántas flores hay en total?

2) Problemas de combinación o producto cartesiano. Por ejemplo: “María tiene dos faldas y tres blusas. ¿Cuántas combinaciones puede hacer con ellas?”

Los problemas de razón son más sencillos porque pueden asociarse con la adición ya que, para los niños, el significado más evidente de la multiplicación es el de la adición repetida. De acuerdo con Baroody (1988) cuando la multiplicación se basa en experiencias de adición familiares para los niños, la asimilan con rapidez. Por eso es recomendable darles conexión con los problemas de adición repetida, esto es, que los niños pongan en práctica los conocimientos que ya tienen sobre la adición para así poder resolver con mayor facilidad los problemas de multiplicación con cantidades pequeñas como 3 por 3 ó 2 por 2.

Los problemas de división se relacionan con los de multiplicación. Puig y Cerdán (1995) presentan una visión conjunta de estos problemas a través de los siguientes ejemplos:

- Problema 1: Hay 5 estantes de libros en la habitación de Juan. Juan puso 8 libros en cada estante. ¿Cuántos libros puso Juan en su habitación?

- Problema 2: Hay 40 libros en la habitación de Juan. Hay 5 estantes. ¿Cuántos libros hay por estante?

- Problema 3: Hay 40 libros en la habitación de Juan. Hay 8 libros en cada estante. ¿Cuántos estantes hay?

El problema 1 se resuelve con una multiplicación (5 x 8 = 40).

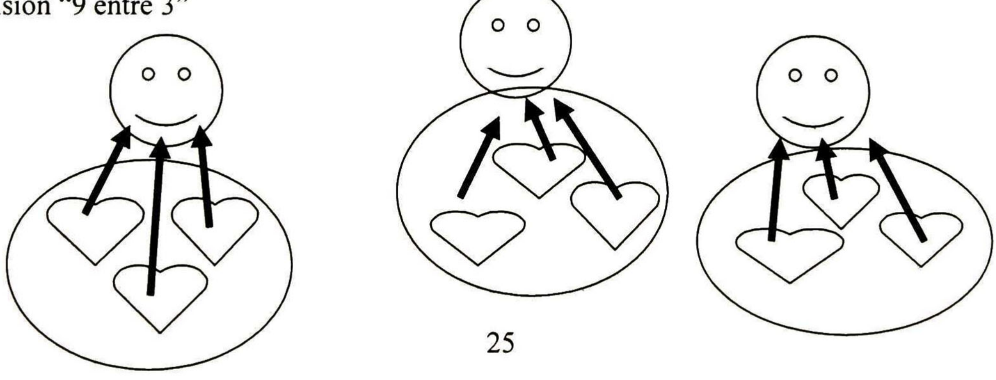
Los problemas 2 y 3 se resuelven con una división, pero en el problema 2 la pregunta es de qué tamaño es cada parte, es decir, cuantos elementos hay en cada parte y, por lo tanto, la división planteada sería ¿Cuántos elementos tocan a cada parte si repartimos 40 elementos entre 5 partes? (40 : 5 = 8). La relación implicada en este tipo de problemas se denomina *partición.*

En cambio, en el problema 3 la pregunta sería ¿cuál es el número de partes? y la operación planteada sería ¿Cuántas partes resultan si agrupamos los 40 elementos en conjuntos de 8 elementos? (40 : 8 = 5) La relación en este tipo de problemas se denomina agrupamiento.

Los problemas de multiplicación en preescolar son los que llevan a los niños a realizar las acciones de repartir y de agrupar como los que se ejemplifican a continuación:

- Carlos tiene 9 corazones y los va a repartir entre sus tres amigos. A todos les quiere dar lo más posible de corazones. ¿Cuántos corazones le tocan a cada uno?

Para poder resolver este problema de reparto, lo más probable es que los niños se apoyen en distribuir físicamente los nueve corazones entre los tres amigos para saber cuántos le tocan a cada uno. Por lo tanto, este problema se resolvería con una operación de división "9 entre 3"



Otra forma de plantear este problema sería: "Carlos quiere darle 3 corazones a cada uno de sus tres amigos ¿Cuántos corazones necesita en total?" La estrategia que posiblemente usarían sería construir una colección de tres corazones, repetirla tres veces y contar el total de corazones. En este caso la operación sería una multiplicación "3 por 3"

Presentar situaciones problemáticas de una manera informal para los niños, en problemas de la vida cotidiana, les permitirá darle sentido a las relaciones que existen entre los problemas multiplicativos y aditivos. Al hablar de "manera informal" nos referimos a que no es necesario enseñar la fórmula, las operaciones aritméticas o los signos convencionales para que los niños preescolares puedan resolver un problema multiplicativo o aditivo, ya que en esta edad se apoyan en diferentes estrategias que van desde el empleo de objetos o los dedos, hasta dirigirlos poco a poco a desarrollar estrategias mentales que es a donde los pretendemos llevar.

1.4 Estrategias de resolución de los problemas aditivos

Existen varios estudios sobre la forma como los niños de preescolar resuelven problemas aritméticos, principalmente los que implican operaciones aditivas (de suma y resta). Algunos investigadores (Carpenter y Moser, 1982; DeCorte y Verschafel, 1987) afirman que los niños resuelven diversos problemas aritméticos verbales utilizando sus propias estrategias, las que se ven influenciadas por la estructura semántica del problema, ya que de acuerdo al contexto en donde se desarrollan van a resolverlo.

Estas estrategias son las siguientes:

a. Estrategias concretas, basadas en modelaje directo con objetos físicos concretos o con los dedos (modelaje directo).

b. Estrategias verbales, basadas en el uso de conteo de series (conteo verbal).

c. Estrategias mentales, basadas en la evocación de hechos numéricos (empleo de combinaciones numéricas aprendidas).

En el PEP 2004 se menciona que los niños pueden resolver los problemas utilizando "estrategias de conteo (organización en fila, señalamiento de cada elemento, desplazamiento de los ya contados, añadir objetos (...), etc.) y de sobreconteo (contar a partir de un número dado de una colección, por ejemplo, a partir del cinco y continuar contando de uno en uno los elementos de la otra colección, seis, siete,...)" (SEP, 2004, p. 77).

Las estrategias que en el PEP se denominan de "conteo" se refieren a las estrategias concretas de modelaje directo ya que requieren de apoyos físicos para representar todos los el elementos del problema. Las de "sobreconteo" se asocian con las estrategias verbales porque los niños ya no necesitan contar todos los elementos y se auxilian del conteo de las palabras numéricas. Las estrategias mentales no se mencionan en el PEP pero en la práctica se ha visto que están presentes porque los niños preescolares van reconociendo y aprendiendo ciertas combinaciones numéricas como "dos más, dos, tres más tres, cinco más cinco" y las emplean para resolver los problemas de manera más rápida.

A continuación se explican estas estrategias y se detallan algunas variantes que pueden observarse dentro de cada tipo:

Estrategias concretas

Para el conteo se basan en el modelaje directo con objetos físicos concretos o con los dedos, por lo cual también se denominan "estrategias de modelaje directo". Los niños construyen uno o más conjuntos de objetos con elementos que se puedan manipular (fichas, bloques, palitos, piedritas o los dedos), los cuales son utilizados como representaciones de la cantidad* problema a resolver para realizar las acciones que permiten resolverlo (como juntar los conjuntos, quitarles o agregarles elementos, ponerlos en correspondencia, entre otras).

Estrategias verbales

Se basan en el uso de conteo de series, por lo cual también se denominan "estrategias de conteo verbal". Los procedimientos en esta categoría se apoyan en la serie numérica verbal, en un punto diferente al uno, contando en forma ascendente o descendente. El doble conteo o seguimiento consiste en contar a partir del segundo conjunto. Por ejemplo, para sumar "dos más tres" el niño contaría los elementos del segundo conjunto diciendo "tres, cuatro, cinco" llevando en la mente el doble conteo porque el elemento "tres" es al mismo tiempo el "uno" del segundo conjunto y el "cuatro" y "cinco" son el "dos" y "tres", respectivamente. Esta estrategia puede apoyarse del uso de objetos o de los dedos, sin embargo, aquí los objetos no representan las entidades del problema, más bien representan el conteo a través de la palabra.

Dentro de esta categoría se puede observar diferentes tipos de conteo verbal utilizados por los niños:

- Conteo hacia adelante a partir de. Aquí la última palabra del conteo que se pronuncia es la respuesta a un problema aditivo.

- Conteo hacia delante. El conteo hacia adelante a partir del punto de entrada inicial, termina cuando el número especificado de palabras ha sido pronunciado. Este procedimiento también es conocido como conteo ascendente a partir de lo dado.

- Conteo hacia atrás a partir de. El conteo hacia atrás a partir del punto de entrada inicial termina cuando un número especificado de conteos verbales ha sido pronunciado.

- Conteo hacia atrás. A partir del punto de entrada inicial termina cuando un número especificado de palabras es pronunciado. Contando el número de conteos verbales pronunciados se determina la respuesta al problema de sustracción.

Estrategias mentales

Se basan en la evocación de hechos o combinaciones numéricas aprendidas. Estos procedimientos comprenden dos categorías: Evocación de hechos básicos y hechos derivados o heurísticos (inventados).

- Evocación de hechos básicos. A través de la enseñanza escolar formal o del contacto con los padres u otras personas los niños llegan a conocer ciertas combinaciones numéricas básicas sobre la adición y la sustracción que pueden ser evocadas por la memoria sin utilizar algún otro recurso. Los niños pueden utilizar un hecho que se relacione directamente con el orden de los números presentados en el problema verbal o podrían conmutar el orden de los números presentados apoyándose en las variaciones semánticas. Por ejemplo, si conocen que la combinación "dos más tres es igual a cinco" podrían emplearla para resolver un problema de "tres más dos"

- Hechos derivados. Involucran la descomposición de uno de los números dados en partes más pequeñas de modo que una de las partes pueda usarse con el otro número dado como un hecho conocido. La estrategia que involucran es un hecho derivado llamado compensación, se usa como parte de un hecho básico a partir del cual se hace un ajuste a la respuesta final o al otro número ejemplo: Para $6 + 7$: "Seis más seis son doce y uno más son trece". Para 13 – 5: "Trece menos tres son diez y diez menos dos son ocho"

1.5 Estrategias de resolución de los problemas multiplicativos

Cuando los niños se enfrentan con problemas de repartir recurren a diversas estrategias:

En un primer momento, suelen dar una cantidad a cada quien sin cuidar que a todos les toque lo mismo, o bien, asignan uno o dos elementos a cada parte sin importarles que queden repartidos todos o la mayoría de los que se puedan repartir.

Poco a poco, los niños aprenden a coordinar estas dos relaciones e inventan procedimientos para asegurar que el reparto sea equivalente y que sobre la menor cantidad de elementos posible o, en caso de que la cantidad se pueda repartir exactamente, que no sobre nada. La estrategia más común es asignar un elemento a cada parte, en tantas rondas como sea necesario. Otra estrategia es dar a cada quien una determinada cantidad y compensar el reparto quitando o agregando elementos hasta que todos tengan lo mismo.

Carpenter, Fennema, Franke, Levi y Empson (1999) observaron que igual que con los problemas de suma y resta, los niños resuelven los problemas de multiplicación y división "modelizando la acción y las relaciones descritas en el enunciado del problema y, con el paso del tiempo, estas estrategias de modelización son sustituidas por estrategias más eficientes basadas en el conteo, la suma y la resta, o el uso de hechos numéricos derivados" (p. 43).

De manera general, las estrategias que describen estos investigadores son las siguientes:

a. Estrategias de modelización.

b. Estrategias de conteo verbal.

c. Estrategias mentales basadas en la evocación de hechos numéricos.

Estrategias de modelización

En un problema como "Juana compró cinco cajas de pasteles. Había cuatro pasteles en cada caja. ¿Cuantos pasteles compró Juana?" Los niños modelan cada uno de los grupos utilizando objetos o representaciones y, finalmente, cuentan el número total de objetos.

Hay variantes de estas estrategias que están relacionadas con la estructura semántica del problema. Por ejemplo, en el problema "Juana necesita veinte pasteles. En cada caja hay cuatro pasteles. ¿Cuántas cajas necesita comprar Juana? La estrategia probable sería formar un grupo con cuatro pasteles y luego otro con otros cuatro y contarlos todos, si no se completa el total el niño formará otro grupo de cuatro pasteles y volverá a contarlos y, así, seguirá formando grupos sucesivamente y contándolos hasta completar el total de veinte. Otra posible estrategia para este problema sería contar y modelar de inicio el conjunto de veinte pasteles, formar grupos de cuatro y contar cuántos grupos se obtuvieron.

Si el problema dijera "Juana tiene veinte pasteles y los tiene que guardar en cinco cajas" ¿Cuántos pasteles deberá poner en cada caja?", los niños recurrirían a una estrategia de reparto representando las cinco partes o "cajas" y asignando elementos a cada parte hasta lograr que en cada una haya lo mismo. Esto podrían hacerlo mediante un reparto cíclico sistemático o asignando una cantidad determinada de elementos a cada parte y añadiendo o quitando, para compensar las cantidades, hasta lograr la igualdad de las partes.

Estrategias de conteo verbal

Según Carpenter et al. (1999) Las estrategias de conteo para resolver problemas multiplicativos no aparecen tan pronto como en los problemas aditivos. Sin embargo los niños las comienzan a emplear poco a poco. La más común es el "contar a saltos" o intervalos especialmente cuando el significado de la multiplicación en el problema es de suma repetida. Por ejemplo, para resolver el problema "Hay 3 pelotas en cada bote ¿Cuántas pelotas hay en 5 botes?" El niño pondría cinco dedos y contaría de tres en tres diciendo "tres, seis, nueve, doce, quince" al mismo tiempo que va señalando cada dedo, y daría como respuesta el último número que pronunció. Por lo general, los niños logran un mejor dominio del conteo en intervalos de dos en dos, de tres en tres, de cinco en cinco o diez en diez que otras como cuatro en cuatro o siete en siete. Algunos niños utilizan la "estrategia de suma" que consiste en sumar reiteradamente el número que representa la cantidad de elementos que hay en cada grupo.

Las estrategias de conteo también varían dependiendo de la estrategia semántica del problema. Por ejemplo, si fuera "Hay que poner 3 pelotas en cada bote ¿Cuántos botes se pueden llenar con 15 pelotas?" la solución sería el número de veces que se suma (o resta) el número o de palabras pronunciadas en el conteo a intervalos. Lo que haría el niño sería extender un dedo por cada palabra pronunciada diciendo "tres, seis, nueve, doce, quince" y dar como respuesta la cantidad de dedos que extendió.

En los problemas de repartir (que implican una división) es más difícil para los niños recurrir a estrategias de conteo porque lo que conocen es el número de la colección total y la cantidad de partes y lo que no saben es la cantidad de elementos de cada parte que es lo que les da la pauta para contar en intervalos. Entonces tienen que recurrir al ensayo y error. En el problema "Hay 15 pelotas y 5 botes ¿Cuántas pelotas se pueden poner en cada bote? Para que en todos los botes quede la misma cantidad" el niño podría hacer el primer ensayo eligiendo un número al azar, por ejemplo, contando de dos en dos ("dos, cuatro, seis, ocho, diez") o de cuatro en cuatro ("cuatro, ocho, doce, dieciséis, veinte") y al ver que no llega a la cantidad o la rebasa, aumentar o disminuir el número que suma o que repite a intervalos.

Estrategias mentales

Con el tiempo y las experiencias los niños aprenden algunas combinaciones de las tablas de multiplicar y las usan para resolver los problemas, de manera directa o haciendo ajustes y compensaciones (hechos derivados). Algunas son más fáciles que otras, especialmente las que siguen un patrón relacionado con la estructura decimal del sistema como los múltiplos de cinco, de diez o de nueve, el cual sigue un patrón regular sumando diez y quitando uno en la siguiente decena. Generalmente aprenden de memoria algunas combinaciones y derivan otras. En el problema "Tengo 6 cajas en cada caja hay 4 duraznos ¿cuántos duraznos habrá en las seis cajas?" Si el niño sabe que "cuatro por cinco es veinte" y que el seis es la suma de un cinco y un uno, puede derivar el resultado sumando una vez más el cuatro al veinte y obtener el resultado.

Estas estrategias fueron observadas en niños de primaria, pero los niños preescolares pueden ir descubriendo combinaciones sencillas. Por ejemplo un niño puede darse cuenta de que "dos mas dos" es igual que "dos por dos". Estos conocimientos básicos son útiles para construir, poco a poco, otras combinaciones con cantidades mayores.

Carpenter et al. (1999) señalan la conveniencia de introducir tempranamente sencillos problemas verbales de multiplicación y división, incluso desde la educación infantil o preescolar, que los niños pueden resolver utilizando apoyos concretos para modelarlos.

1.6 Desarrollo de la representación numérica

Los niños comprenden la noción de número la numeración escrita a muy temprana edad apoyándose en sus propias hipótesis. Esto lo realizan debido al contacto que tienen con el entorno con el que interactúan.

Sus ideas acerca de la escritura de los números se basan en dos informaciones: la que extraen de la numeración hablada y la que les da el conocimiento de la escritura convencional de los números. Al principio, para representar cantidades, emplean formas de representación personales que para ellos son más significativas.

De acuerdo con Hughes (1996), estas representaciones evolucionan mostrando diferentes tipos:

- Idiosincrásicas: Se trata de garabatos que no se relacionan con la cantidad ni la cualidad física de los elementos a representar.

- Pictográficas: Dan cuenta de la cantidad exacta de elementos a representar, dibujándolos lo más fiel posible. Por ejemplo si hay que expresar un conjunto de cinco flores, dibujarán cinco flores. Aunque los niños no puedan reconocer todavía la cardinalidad de una colección pueden representar la cantidad estableciendo la relación término a término.

- Icónicas: Son representaciones de la cantidad exacta de objetos a representar a través de marcas que no reflejan la cualidad física del objeto. Por ejemplo, pueden dibujar tantas rayitas o círculos como objetos haya. Utilizan este tipo de marcas indistintamente de el tipo de objeto de que se trate, ya sea flores, personas o cualquier otra cosa. Este tipo de representaciones supone un salto conceptual importante. Es señal de que el niño ha comenzado a comprender que la expresión matemática debe centrarse en las propiedades cuantitativas de la colección dejando de lado sus propiedades cualitativas.

- Simbólicas: En este tipo de representaciones lo niños utilizan símbolos, generalmente las grafías convencionales pero también es posible encontrar producciones con escritura de los nombres de los números. Antes de comprender que una sola cifra puede expresar la cantidad de objetos, suelen escribir tantas cifras como cantidades de objetos tienen que representar. Es decir, lleva a cabo nuevamente una relación término a término. Con el tiempo y las experiencias, los niños descubren que con una sola grafía pueden representar la cantidad, entonces comienzan a emplear los números convencionales con sentido para ellos.

Sobre las formas de representación de las operaciones aritméticas, no hay muchos estudios, pero se ha visto que los niños buscan formas de representar las relaciones expresadas en los problemas como reunir, quitar, comparar e igualar. Por ejemplo, Nemirowsky (1988, referido por Armenta y Rangel, 1990) observó que, para representar una resta, los niños dibujaban los elementos del conjunto total y borraban o tachaban los elementos a restar.

Es importante aclarar que, en la educación preescolar, no se pretende que los niños aprendan y hagan uso directo de los signos convencionales de las operaciones aritméticas (+, -, x, /, =). Los problemas que propone el PEP 2004, los niños los pueden expresar o representar con dibujos y formas personales que les resulten significativos. Así como la representación convencional de los primeros dígitos.

1.7 La resolución de problemas aritméticos en los programas de educación preescolar

Haciendo una revisión de los contenidos curriculares de los programas que han fundamentado la educación preescolar desde su inicio, en 1903, se encontró que la resolución de problemas no aparece de manera explícita hasta 1992 (SEP, 1992). En el PEP 04 se recomienda planear actividades que permitieran a los niños "realizar acciones que le presenten la posibilidad de resolver problemas que implican criterios de distinta naturaleza: cuantificar, medir, clasificar, ordenar, agrupar, nombrar" (p. 46). No se habla propiamente de problemas aritméticos, aunque se menciona la importancia de procurar que los niños empleen objetos y materiales que den pie a "acciones y operaciones mentales" entre las que se incluyen algunas que se implican en los problemas aritméticos como agrupar objetos, relacionarlos en correspondencia, compararlos e igualarlos numéricamente, quitarlos y repartirlos (p.47).

En el programa de educación preescolar se enfatiza la importancia de favorecer "dos habilidades básicas que los niños pequeños pueden adquirir y que son fundamentales en este campo formativo" (SEP, 2004, p.71): la abstracción numérica y el razonamiento numérico. La primera se refiere a la posibilidad de abstraer y representar el valor numérico de un conjunto de objetos, y el segundo a la capacidad de operar con estos valores. Por ejemplo, "en una situación problemática como <tengo 5 canicas y me regalan 4 canicas ¿Cuántas tengo? El razonamiento numérico se hace en función de (…) *agregar* las cuatro que me regalan a las 5 que tenía" (p.72). Además, como referimos con anterioridad, en el PEP 2004 se incluye por primera vez una competencia que contempla explícitamente la resolución de problemas aritméticos, ("plantea y resuelve problemas en situaciones que le son familiares y que implican agregar, quitar, igualar, comparar y repartir objetos", p. 77).

No se propone en este programa que los niños aprendan las operaciones aritméticas, sino que resuelvan problemas en los que puedan descubrir las "relaciones semánticas entre los datos" (SEP, 2005, p. 284) es decir, relaciones como juntar (o reunir) dos o más conjuntos, añadir o quitar elementos a uno de ellos, comparar o igualar los objetos de dos colecciones y repartir equitativamente los elementos de un conjunto.

1.8 Fundamentos didácticos para el diseño de la estrategia de enseñanza

En el Programa de educación preescolar (PEP 2004) se plantea que no hay un método único que "resuelva todas las necesidades que implica el trabajo con los niños pequeños (SEP, 2004, p. 121)" Sin embargo, se propone el trabajo a través de situaciones didácticas. De acuerdo con este programa, una situación didáctica es "un conjunto de actividades articuladas que implican relaciones entre los niños, los contenidos y la maestra con la finalidad de construir aprendizajes" (p. 121). En el campo formativo de pensamiento matemático una situación se organiza a partir de la resolución de problemas, y una situación didáctica puede ser, entre otras cosas, "un problema a resolver" (p. 121). Así mismo, en el volumen I del "Curso de Formación y Actualización Profesional de Educación Preescolar" difundido en el ciclo escolar 2005-2006 como apoyo a la implementación del PEP 2004, se señala que la resolución de problemas "es lo que se hace cuando se tiene una meta y no se sabe cómo alcanzarla" (Thornton, 2005, p. 245). Se parte de la idea de que el niño tiene que averiguar, por sí mismo, cómo resolver el problema planteado, lo que le va a permitir inventar estrategias propias y adquirir nuevos conceptos.

Dado que en el PEP 2004 se propone el trabajo a través de situaciones didácticas, para tener un conocimiento mas claro sobre éstas y fundamentar la propuesta de intervención educativa que se presenta en este trabajo de tesis, se revisaron algunos aspectos relevantes de la "Teoría de las situaciones didácticas" propuesta por Guy Brousseau, la cual resulta congruente con el enfoque del PEP 2004.

De acuerdo con Brousseau una situación didáctica es aquella que "se lleva a cabo normalmente en la clase entre un maestro y uno o varios alumnos, alrededor de un saber y está regida por el contrato" (Chamorro, 2005, p. 46). En estos términos no se puede concebir el proceso de enseñanza aprendizaje sin sus actores que son: el saber, el alumno y el maestro. En una situación didáctica interactúan estos tres elementos: el profesor (o maestra) que es el responsable de hacer funcionar el sistema didáctico, el alumno (o niño) que es quien se debe apropiar de los saberes establecidos socialmente según su edad, estudios y nivel y el saber (o contenido) en este caso los conocimientos matemáticos de los que se debe apropiar el alumno. de la teoría de Brousseau para este trabajo sólo se tomaron algunos aspectos.

En este sistema inciden varios elementos. Algunos de los que se consideran útiles para el trabajo de esta tesis se explican a continuación.

- Situación didáctica

En primer lugar, es importante clarificar el concepto de "situación didáctica" desde el punto de vista de Brousseau. Este autor define a la situación didáctica como un contexto en donde a los ojos del alumno el conocimiento "aparezca como la solución optima del problema que se va a resolver" (Chamorro, 2005, p. 43). Con esto se busca que el alumno construya con sentido un conocimiento matemático.

Para explicar esto tomaremos como ejemplo la forma como el hombre inventó el conteo como respuesta a un problema que se le planteaba al tener que recordar una cantidad. Como se mencionó al inicio de este capítulo, nuestros antepasados tuvieron que buscar maneras de llevar la cuenta de sus pertenencias y primero recurrieron a la correspondencia biunívoca haciendo muescas en una pieza de madera o hueso por cada piel o pertenencia que iban juntando y, para comprobar si la cantidad era la misma, emparejaban cada pertenencia con cada muesca. Pero cuando la cantidad esa muy numerosa este método requería mucho tiempo, así que idearon paulatinamente el conteo, él cual consiste en emparejar una palabra numérica con cada elemento de lo conjuntos, en lugar de emparejar directamente los elementos de los dos conjuntos.

Del mismo modo que nuestros antepasados, los niños pueden llegar a descubrir la utilidad del conteo si lo tienen que emplear para resolver un problema, de construir una colección equivalente a otra. Chamorro (2005) explica este proceso con una situación didáctica clásica planteada por Brousseau que consiste en pedir a los niños que lleven el número necesario de cucharas para colocar una dentro de cada una de las tazas que se encuentran en una mesa. Para solucionar este problema los niños pueden recurrir a llevar, cada vez, una cuchara y colocarla dentro de una taza hasta terminar con todas, haciendo tantos viajes como tazas se hayan colocado en la mesa. Es decir, el niño puede usar una estrategia de correspondencia uno a uno (o biunívoca). Después puede continuar utilizando esta estrategia, pero si la maestra quiere hacerla evolucionar, lo que debe hacer es poner una restricción o regla a la actividad para que el niño ya no la pueda usar. En este caso podría poner como restricción "llevar las cucharas en un solo viaje". De esta manera lo más probable es que, en los primeros intentos, el niño lleve menos o más cucharas de las necesarias y para "ganar" el juego se vea precisado a valerse de otros medios. Por ejemplo, puede memorizar la configuración en que se encuentran acomodadas las tazas y reproducirla con las cucharas. Esto podría funcionarle si la cantidad de objetos es pequeña y la puede reconocer a simple vista. Entonces la maestra podría introducir un cambio en la actividad para que la configuración ya no sea tan fácil de copiar (colocándolas unas lejos de las otras o aumentando la cantidad), obstaculizando así el empleo de esa estrategia. El método que se pretende desencadenar en el niño es el uso del conteo a partir del reconocimiento que el número permite memorizar una cantidad que no está presente. Después de haber vivido estas experiencias el niño estará en condiciones de descubrir que la estrategia ganadora es la que consiste en usar el número como memoria de cantidad, es decir, "contar" y éste es precisamente el conocimiento o herramienta matemática que la maestra pretende que el alumno construya a través de la situación didáctica.

Por lo tanto, en la teoría de las situaciones didácticas se trata de "buscar las condiciones para una génesis artificial de los conocimientos matemáticos bajo la hipótesis de que éstos no se construyen de manera espontánea" (Panizza, 2003, p. 60), es decir, la situación didáctica es "una situación construida intencionalmente con el fin de hacer adquirir a los alumnos un saber determinado" (p. 61). Por lo tanto, la maestra tiene que planear situaciones en las que presente problemas a los niños cuya resolución requiera de emplear estrategias de resolución cada vez más completas y cercanas a las herramientas matemáticas formales. Por ejemplo, en el caso de los problemas aditivos, los niños pueden resolver el problema con recursos propios como contar con objetos o con los dedos, y poco a poco, descubrir que el procedimiento más eficiente es usar las sumas y restas convencionales.

- Variable didáctica

Ya que los conocimientos de los niños tienen que ir evolucionando, y el maestro es el responsable de garantizar las condiciones de la situación didáctica necesarias para promover esta evolución, Brousseau introduce el concepto de "variable didáctica" para referirse a las modificaciones o restricciones que el docente introduce en la actividad a fin de que el alumno ponga en juego nuevos conocimientos o utilice otras estrategias. En el ejemplo descrito, cada una de las restricciones o reglas que propone la maestra para que los niños ya no puedan emplear la correspondencia uno a uno o la apreciación global de la cantidad, constituye una "variable didáctica"

- Situación a-didáctica

Un concepto importante dentro de la teoría de Brousseau es el de "situación a-didáctica" (o fase a-didáctica) que es el momento, dentro de la situación didáctica, en el que el alumno se encuentra solo frente a la resolución de un problema. Sin desconocer que el maestro es responsable del proceso de aprendizaje de sus alumnos, se considera necesario generar espacios en los que los alumnos se involucren en la resolución del problema sin que el maestro intervenga. En la fase a-didáctica el maestro lleva a cabo la devolución de la responsabilidad del aprendizaje al propio alumno. La "devolución" es "el acto por el cual el enseñante hace aceptar al alumno una situación de aprendizaje (a-didáctica) o de un problema y acepta, él mismo las consecuencias de esa transferencia" (Brousseau 1998, referido en Panizza, 2003, p. 65).

- Contrato didáctico

La posición del maestro y del alumno en la clase es asimétrica y sus respectivos papeles son diferentes. El maestro es el que sabe más y el que tiene la responsabilidad de organizar las situaciones de enseñanza apropiadas para los alumnos. Brousseau señala que, como en todo medio social, las interacciones entre los miembros de la clase se rigen por una especie de contrato al que denomina "contrato didáctico" en el que los participantes asumen sus roles en función de una serie de reglas implícitas. El contrato didáctico establece las responsabilidades tanto del maestro como del alumno para la construcción del conocimiento matemático y permite la conversación entre las dos partes para darle sentido a las actividades propuestas. En una situación de enseñanza clásica el maestro es el que dicta el saber, el que dice lo que hay que hacer y el que señala lo que está bien o está mal y el alumno el que copia el saber, ejecuta las indicaciones del maestro y espera a que sus respuestas sean avaladas o rechazadas por éste.

Brousseau advierte la necesidad de romper el "contrato didáctico" en la fase a-didáctica para dar la oportunidad al alumno de asumir la responsabilidad de su aprendizaje y las consecuencias de sus acciones en el logro de una respuesta correcta o no. La fase a-didáctica permite al alumno validar su procedimiento de resolución. El éxito o fracaso de su estrategia es lo que le va a "sancionar" su acción. El concepto de "sanción" dentro de la teoría de Brousseau se refiere la posibilidad del alumno para juzgar por sí mismo los resultados de su acción y de intentar nuevas resoluciones a partir de su propia validación.

- Institucionalización

Otro concepto fundamental dentro de la teoría es el de "institucionalización" definido por Brousseau como "la consideración oficial del objeto de enseñanza por parte del alumno y del aprendizaje del alumno por parte del maestro" (1994, p.74), es decir, el momento en que el maestro relaciona el conocimiento informal desarrollado por el alumno a través de su propia acción, con el conocimiento formal de las matemáticas. Por ejemplo, si el niño resuelve un problema de reunir dos cantidades con una estrategia propia en la que encuentra sentido a la acción de sumar, el maestro puede vincular ese conocimiento informal con el conocimiento formal de la suma e institucionalizar el saber adquirido por el alumno diciendo "esto se llama sumar" o mostrando el algoritmo convencional. La institucionalización se lleva a cabo, una vez que el alumno ha construido el significado del concepto matemático.

- Tipos de situaciones didácticas

La teoría propuesta por Brousseau establece, básicamente, tres tipos de situaciones didácticas: situaciones de acción, situaciones de formulación y situaciones de validación.

En las *situaciones de acción* (también denominadas de autocomunicación) el alumno actúa directamente en un medio (material o simbólico). Se puede decir que el alumno "se envía un mensaje a sí mismo" (Chamorro, 2005, p. 47) y, mediante ensayos, resuelve directamente el problema. El ejemplo descrito en el que el niño tiene que identificar la cantidad necesaria de cucharas para las tazas es una situación de éste tipo.

En las *situaciones de formulación* (o comunicación) un alumno (o grupo de alumnos) es el emisor y debe formular explícitamente un mensaje destinado a otro alumno (o grupo de alumnos) que es el receptor, el cual debe comprender el mensaje y actuar (sobre un medio natural o simbólico) de acuerdo con el conocimiento contenido en el mensaje. La situación de las cucharas y las tazas se puede transformar en una situación de formulación haciendo que un niño, pareja o grupo de niños elabore un mensaje para que otro niño, pareja o grupo identifique la cantidad necesaria de cucharas.

En las *situaciones de de validación* dos alumnos (o grupo de alumnos) plantean algunas afirmaciones alrededor de la solución matemática del problema y deben de ponerse de acuerdo sobre la verdad o falsedad de ellas. Las afirmaciones propuestas por cada grupo son sometidas a las consideraciones del otro grupo, que debe tener la capacidad de sancionarlas, es decir, de aceptarlas, rechazarlas, pedir pruebas, o proponer afirmaciones alternativas. Por ejemplo, para promover la validación de las respuestas de los niños en la actividad de las tazas y las cucharas, se podría dar a un equipo el conjunto de las tazas y a otro el de las cucharas para que el primero solicitara al segundo la cantidad de cucharas necesarias a través de un mensaje y, posteriormente, una vez que se ha comprobado que la cantidad solicitada es la correcta o no, ambos grupos discutieran sobre la pertinencia o no del mensaje para resolver el problema.

Las interacciones promovidas a través de este tipo de situaciones tienen como propósito llevar a los alumnos a la construcción y justificación, cada vez más elaborada, de afirmaciones, teoremas, demostraciones, etc. En opinión de Brousseau este tipo de experiencias es muy importante porque en matemáticas los conceptos no pueden ser aprendidos por imposición de la autoridad del adulto, sino a través de la argumentación y puesta a prueba de las ideas.

Brousseau considera indispensable trabajar situaciones de los tres tipo porque "hacer matemáticas, para el niño, es una actividad social y no únicamente individual" (Brousseau, 1976, referido en Chamorro 2005, p. 49).

1.9 Antecedentes ó Investigaciones previas

A partir de la revisión de estudios previos relacionados con este tema se observó que son escasos los que se refieren específicamente a la enseñanza de los problemas aritméticos en el nivel preescolar. Sin embargo, se encontró un trabajo de tesis que llamó la atención por tratarse de una experiencia didáctica en el nivel preescolar. En ella se estimula a los niños preescolares no sólo a resolver problemas, sino también a inventarlos (Armenta y Rangel, 1990). Las autoras observaron que, comúnmente, los maestros de preescolar no aprovechan los conocimientos previos que tienen sus alumnos. Además, lejos de guiarlos a construir sus propios procedimientos, les imponen formas de resolución específicas, lo que hace que tiendan a la simple repetición, sin permitirles razonar.

En este trabajo de tesis se llevaron a cabo 10 sesiones, en las cuales se procuró que los niños distinguieran las tres etapas o momentos del problema (estado inicial, estado de cambio y estado final), así como el tipo de acción requerida. De esta manera, los niños lograron inventar y plantear a sus compañeros problemas sencillos de suma y resta. También se les condujo a representar gráficamente las acciones implicadas en los problemas que inventaban, lo cual mostró formas espontáneas de los niños que les resultaban significativas.

El trabajo concluye que tanto la conceptualización como la representación de las relaciones involucradas en los problemas evolucionaron de manera importante a partir de la experiencia llevada a cabo, aunque no necesariamente ambos procesos se desarrollaron al mismo tiempo.

Otra investigación encontrada al respecto, es la tesina titulada "La resolución de problemas sencillos de adición y sustracción en el nivel preescolar" Xolalpa (2002), en donde la autora describe una serie de actividades que aplicó con su grupo para facilitarles la resolución de problemas aditivos sencillos. El trabajo se desarrolló en el marco del programa de educación preescolar 1992, anterior al que actualmente está vigente desde 2004, y por ellos se orienta por los lineamientos didácticos de dicho documento. Se da especial importancia al desarrollo de las primeras estructuras conceptuales del pensamiento fundamentándose en la teoría de Piaget. Por esto, como parte inicial del trabajo con los niños, se proponen actividades de clasificación, seriación y correspondencia término a término. También incluye otras actividades y juegos de conteo y resolución de problemas de suma y resta. La autora del trabajo explica que llevó a cabo cada una de las actividades descritas con el grupo de alumnos de tercer grado de preescolar que tenía a su cargo, pero no señala los resultados que obtuvo en el aprendizaje de los alumnos a través de la aplicación.

Dentro de esta búsqueda, no se localizaron otros trabajos sobre el tema en el nivel preescolar. Se encontraron dos trabajos relacionados, pero desarrollados con alumnos del primer grado de educación primaria cuyos títulos son los siguientes "Estrategias didácticas para favorecer la resolución de problemas matemáticos de estructura aditiva en los alumnos del primer grado de educación primaria" (González, 1998) y "La suma en el primer grado de primaria" (Figueroa, 2007).

El primer trabajo se trata de una propuesta integrada por seis estrategias didácticas en las que se detallan los objetivos, medios, desarrollo. Se explican las dificultades de aprendizaje de los alumnos a cargo de la docente que presenta se trabajo pero la propuesta no se aplica.

El segundo se enfoca en la problemática de aprendizaje de los niños de una comunidad indígena del estado de Michoacán los cuales son escasamente apoyados por sus padres para continuar sus estudios más allá de la primaria, por lo cual, la docente que escribe este trabajo considera que el aprendizaje que logran en sus primeros años de la escolaridad primaria son muy importantes. No se plantea ninguna propuesta de enseñanza, más bien se trata de un documento teórico en el que se revisan una serie de conceptos sobre la práctica docente, el aprendizaje del conteo y el desarrollo infantil, desde las perspectivas de Piaget y de Vigotsky.

Según se pudo apreciar, existen pocas investigaciones sobre el tema de la resolución de problemas aritméticos, especialmente en el nivel preescolar y no se encontró ninguna en las que se aborden o se refieran las cuatro operaciones aritméticas (adición, sustracción, multiplicación y división).

CAPITULO 2

DESCRIPCIÓN DE LA ESTRATEGIA DE ENSEÑANZA

En este capítulo se presenta la estrategia de enseñanza que diseñamos los integrantes del proyecto "El sentido de la educación matemática en el nivel preescolar" para facilitar el desarrollo de procedimientos de resolución de problemas aritméticos en los niños preescolares.

La estrategia está organizada alrededor de situaciones didácticas. Como se mencionó anteriormente, en el campo formativo del pensamiento matemático las situaciones didácticas se conforman a partir del planteamiento de problemas. En la estrategia de enseñanza propuesta, estas situaciones tienen la característica de que se parte de un problema, el cual requiere que el niño busque soluciones, procedimientos para resolverlo y así ponga en juego, valide, confronte y exprese los conocimientos que queremos hacer evolucionar.

Las situaciones se han ordenado según el grado de dificultad que presentan los problemas planteados a los niños. Por lo tanto, puede decirse que se trabaja con "secuencias de situaciones didácticas" Dentro de cada secuencia, las situaciones se van complejizando a través de la introducción de variables didácticas o modificaciones al problema para inducir que los niños tengan que utilizar estrategias de resolución más elaboradas.

La estrategia de enseñanza se compone de cinco secuencias de situaciones didácticas, cada una tiene un propósito central en relación con las acciones y los conocimientos que se pretende promover en los niños. En el cuadro 3 se presenta el contenido central que se trabaja en cada secuencia.

Cabe mencionar que, con la introducción de las variables didácticas, varias secuencias comparten los propósitos de manera secundaria. Por ejemplo, al incluir el uso de dos dados, en lugar de uno, en la segunda variable de la secuencia "ganar y perder" además de la construcción de conjuntos equivalentes, se promueve la resolución de problemas de sumar. Por esta razón, los contenidos de todas las secuencias están relacionados.

Las tres primeras secuencias se organizaron a partir de tres juegos numéricos. En la cuarta se llevó a cabo la recreación de un entorno de uso social del número, en el cual los niños practican el juego simbólico de compra-venta. La quinta secuencia es una actividad específica para trabajar el contenido matemático de las operaciones aritméticas a partir del planteamiento verbal de problemas y se divide en dos fases: en la primera, los niños resuelven los problemas que se les plantea y, en la segunda, inventan sus propios problemas y los plantean a sus compañeros.

Cuadro 3

Enfoque central de las secuencias didácticas

Secuencias	Contenido
1ª Secuencia "Ganar y perder"	Construcción de conjuntos equivalentes
2ª Secuencia "Minigenerala"	Reconocimiento de cantidades
3ª Secuencia "El autobús"	Representación de cantidades
4ª. Secuencia "La papelería"	Planteamiento y resolución de problemas de sumar, restar y repartir en situaciones prácticas
5ª Secuencia "Historias problema" Primera fase: Resolver problemas Segunda fase: Inventar problemas	Planteamiento y resolución de problemas verbales de sumar, restar y repartir.

2.1 Criterios para organizar las secuencias didácticas

Es importante mencionar que, a partir de un trabajo conjunto desarrollado por los integrantes del proyecto de desarrollo "El sentido de la educación matemática en el nivel preescolar" del que formé parte como estudiante de la maestría para la cual se elabora este trabajo de tesis, se definieron los elementos que se consideró necesario incluir en la estructura de las secuencias didácticas. Se decidió que los elementos para la conformación de las secuencias serían los siguientes:

- *Competencia:* que se refiere en PEP 2004 dentro del campo formativo del pensamiento matemático y que se relaciona con el contenido que se pretende favorecer con cada secuencia didáctica de la estrategia de enseñanza.

- *Contenido matemático:* es la herramienta matemática que se va a ver favorecida directamente a través del desarrollo de la secuencia.

- *Manifestaciones:* acciones señaladas en el PEP 2004 que indican algunas formas en que se favorecen y manifiestan las competencias en los niños y que sirven como referencia de los aprendizajes que se espera alcanzar.

- *Formas de organización del grupo:* sugerencias de la forma en que se recomienda organizar al grupo para que la realización de la actividad sea funcional, en atención al contenido implicado.

- *Previsión de materiales:* se proponen el tipo y cantidad de los materiales necesarios, los cuales podrán ser similares o adaptados.

- *Objetivo para niño:* se refiere a lo que debe quedar claro al niño sobre lo que tiene que hacer para llevar a cabo la actividad.

- *Presentación del problema:* se da una breve explicación sobre lo que se pretende que realicen los niños, dándose una visión general de la actividad considerando los materiales, espacios, y organización del grupo.

- *Consigna:* es la instrucción textual que se le da al alumno, en la que se debe procurar plantear un reto cognitivo para él y cuidar de no sugerir la estrategia de resolución del problema. Por ejemplo, en la consigna no se debe decir a los niños que cuenten los objetos porque ellos podrían valerse de otros recursos que les resultan más significativos. Es recomendable anotar la consigna y decirla textualmente para evitar lo anterior.

- *Procedimientos esperados:* es lo que se espera que el niño realice, las estrategias o formas de resolver el problema, de qué medios se puede valer. Este punto tiene como finalidad anticipar sus posibles acciones sobre el contenido a tratar.

- *Variable didáctica:* hace referencia a las restricciones o modificaciones introducidas en las situaciones didácticas para aumentar el grado de dificultad al problema dado y estimular la aparición de estrategias de resolución más elaboradas.

2.2 Presentación y explicación de las secuencias didácticas

Ya que se definieron los contenidos matemáticos relativos a la competencia que se aborda en esta propuesta se diseñaron las siguientes secuencias didácticas.

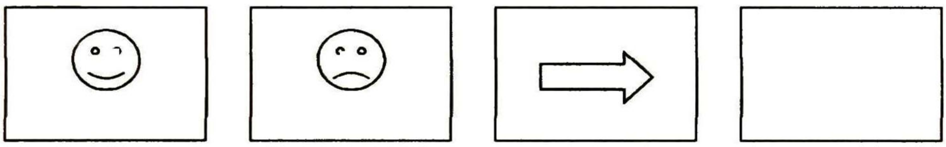
Es importante aclarar que, dado que el propósito de la propuesta es facilitar el desarrollo de procedimientos de resolución de problemas aritméticos en los niños preescolares, la secuencia didáctica principal en la propuesta es la 5ª denominada "Historias problema" En un principio la propuesta estaba conformada únicamente por esta secuencia, considerando sus dos fases: 1ª Resolver problemas y 2ª Inventar problemas. Sin embargo, al iniciar la aplicación se observó que los niños no podían desarrollar las actividades propuestas porque no sabían contar. La mayoría no repetía la serie numérica en el orden convencional ni era capaz de emplear el conteo para reconocer una cantidad y construir un conjunto. Por esta razón se decidió incluir las cuatro primeras secuencias que tienen como propósito favorecer el desarrollo de la habilidad de contar en los niños, así como la representación de las cantidades.

En las siguientes páginas se presentan y explican las secuencias didácticas en el orden en que se llevaron a cabo en la aplicación.

1ª Secuencia didáctica

"GANAR Y PERDER"

Esta secuencia didáctica se organizó a partir del juego "Ganar y perder" El juego consiste en colocar una serie de tarjetas o cartas en una pila boca abajo e ir tomándolas por turnos. De acuerdo con la indicación que señale la tarjeta, los jugadores ganan o pierden la cantidad de fichas que sale al tirar un dado, dan las fichas ganadas a un compañero o pierden su turno. Las indicaciones de ganar se presentan con una cara feliz, las de perder con una cara triste, la que señala a qué compañero deben dar sus fichas, con una flecha y las de perder turno con una tarjeta en blanco. En el anexo 2 se presentan el modelo y cantidad de las tarjetas empleadas para cada indicación.



La intención central del juego es que los niños construyan un conjunto de fichas equivalente al que muestra la cantidad de puntos del dado. No obstante en la aplicación completa del juego también se llevan a cabo acciones en las que los niños tienen que repartir cantidades (al distribuir equitativamente el conjunto inicial de fichas entre los jugadores), identificar relaciones de orden (al decidir y respetar la secuencia de turnos para hacer las jugadas) y resolver problemas de juntar cantidades (a partir de la segunda variable, cuando se emplean dos dados).

1. **Competencia:**

- Utiliza los números en situaciones variadas que implican poner en juego los principios del conteo.

- Plantea y resuelve problemas en situaciones que le son familiares y que implican agregar, reunir, quitar, igualar, comparar y repartir objetos.

2. **Contenido central:** Reconocimiento de la cardinalidad de un conjunto.

   Otros contenidos: Establecer relación de orden, resolver problemas de juntar dos cantidades y de repartir.

3. **Manifestaciones relacionadas:**

- Identifica, por percepción, la cantidad de elementos en colecciones pequeñas y, en colecciones mayores, a través del conteo.
- Identifica el lugar que ocupa un objeto dentro de una serie ordenada.
- Utiliza estrategias de conteo y sobreconteo para resolver problemas numéricos.

4. **Formas de organización:** Se sugiere trabajar con equipos de 4 a 6 integrantes.

5. **Previsión de materiales:** Dados con puntos convencionales (constelaciones) del 1 al 6, con puntos no convencionales del 1 al 6 y con números del 1 al 6. Juego de tarjetas con instrucciones (Las tarjetas empleadas se muestran en el anexo 1).

6. **Objetivo para niño:** Reunir la mayor cantidad de fichas para ganar el juego.

7. **Presentación del problema:** Se pone una cantidad de fichas en la mesa (60 por ejemplo si son 6 niños) y se les dice que tienen que idear alguna manera para que todos tengan la misma cantidad de fichas, sin que sobren ni que falten. Una vez repartidas las fichas se les explica en qué consiste el juego de ganar y perder. Antes de comenzar a jugar, los niños deben ponerse de acuerdo para saber quién va a tener el primer turno, el segundo, y así, sucesivamente. Cada jugador lanzará el dado y tomará una tarjeta. Si saca carita feliz tomará la cantidad de fichas que se indique en la cara del dado. Si le sale carita triste regresará la cantidad de fichas que indique la cara del dado. Si le sale flecha tendrá que darle su compañero que esté a la derecha o izquierda (según la orientación de la flecha) la cantidad de fichas que marque el dado y, si la tarjeta es blanca, no gana ni pierde fichas y se salta el turno. Gana quien reúna mayor cantidad de fichas. Al final comparan las fichas para identificar quien ganó.

8. **Consigna:** "Van a tirar el dado y tomarán una tarjeta para realizar la acción que ésta indique, como les expliqué antes"

9. **Procedimientos esperados:**

*Para reconocer la cardinalidad de los conjuntos: Que los niños utilicen la percepción súbita, la correspondencia término a término o el conteo.

*Para resolver problemas de juntar cantidades: Que utilicen procedimientos de conteo, sobreconteo y usen combinaciones numéricas aprendidas.

10. Variables:

1ª Utilizar un dado con constelaciones del 1al 3.

2ª Utilizar un dado convencional del 1 al 3 y otro con uno en todas sus caras.

3ª Utilizar un dado convencional y otro con dos en todas sus caras.

4ª Un dado convencional y otro con tres en todas sus caras.

5ª Utilizar el dado con constelaciones del 1 al 6.

6 ª Utilizar un dado de constelaciones y otro con 4 en todas sus caras.

7 ª Utilizar un dado de constelaciones y otro con 5 en sus seis caras.

8ª Variar la utilización del dado de constelaciones, por el dado de números convencionales.

9ª Utilizar dos dados uno convencional y el otro con números. Esto para promover el empleo de estrategias de sobreconteo.

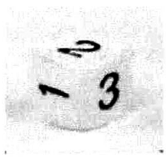
2ª Secuencia didáctica

"MINIGENERALA"

Esta secuencia se elaboró a partir de la adaptación del juego "Minigenerala" presentado por Broitman (1998), el cual se juega en parejas y consiste en llenar las casillas de un tablero, tirando un dado, por turnos, y tachando la casilla correspondiente a la columna de cada jugador. Gana el que primero que llena su tablero.

Se comenzó como en el juego original tachando las casillas, posteriormente, para ahorrar papel y poder utilizar el mismo tablero varias veces, se decidió que los niños marcaran las casillas con fichas.

En el anexo 2 se muestran los tableros que se emplearon en cada variable. El tablero que se empleó en la primera variable es como el siguiente:



	NOMBRE ______	NOMBRE ______
•		
• •		
• • •		
• • • •		
• • • • •		
• • • • • •		

1. **Competencias:**

- Utiliza los números en situaciones variadas que implican poner en juego los principios del conteo.

- Plantea y resuelve problemas en situaciones que le son familiares y que implican agregar, reunir, quitar, igualar, comparar y repartir objetos.

2. **Contenido central:** Reconocimiento de la cardinalidad de un conjunto.

   Otros contenidos: Relacionar las grafias numéricas con la cantidad que representan, resolver problemas de juntar dos cantidades.

3. **Manifestaciones relacionadas:**

- Identifica, por percepción, la cantidad de elementos en colecciones pequeñas y, en colecciones mayores, a través del conteo.

- Utiliza estrategias de conteo y sobreconteo para resolver problemas numéricos.
- Identifica el orden de los números en forma escrita dentro de situaciones escolares y familiares.

4. **Formas de organización del grupo:** Se sugiere jugarlo en parejas.
5. **Previsión de materiales:** Un tablero y un dado para cada pareja de jugadores. Crayolas o fichas para marcar las casillas.
6. **Objetivo del juego para el niño:** Llenar todas las casillas del tablero en la columna con su nombre.
7. **Presentación del problema:** Se colocan los nombres de los jugadores en las columnas correspondientes. Cada jugador en su turno, tira el dado y marca con una cruz la casilla que corresponde a la cantidad que obtuvo al tirar el dado. Si esa casilla ya está marcada, no se anota nada y continúa el otro jugador. Gana el que primero que llena sus casillas.
8. **Consignas:**

1ª "Ustedes tienen que tirar el dado y marcar con una cruz la casilla que tenga el mismo dibujo que la cara del dado que salió. Gana el que llena primero su tablero"

2ª "Este juego es igual que el anterior, pero esta vez tienen que fijarse cuál es la casilla que tiene la misma cantidad de puntitos que el dado"

3 ª "Este juego es igual al anterior, pero esta vez tienen que fijarse cuál es la casilla que tiene el número que ustedes se sacaron en el dado"

4 ª "¿Se acuerdan del juego que hacíamos con este tablero y un dado? Ahora vamos a jugar a ese mismo juego, pero hay que sumar los dos dados para saber dónde vamos a poner la cruz. Por ejemplo, si salieron el 1 y el 1, pongo la cruz en el 2. Les tapé a los dados los números más grandes y tienen otros 1, 2 y 3"

5 ª "Ahora vamos a jugar con dos dados y no les tapé ninguna cara"

9. **Procedimientos esperados:**

Con el empleo de un solo dado:

*Reconocer directamente la configuración espacial en el dado, es decir el "dibujo de los puntos" o la forma como están acomodados.

*Realizar una correspondencia término a término entre cada punto del dado y cada punto de la casilla.

*Contar los puntos del dado y buscar entre las casillas el que tiene la misma cantidad, contándolos también.

*Reconocer los números escritos del 1 al 6 y asociarlos con las cantidades correspondientes.

*Cuando se emplean tableros con grafías convencionales, los niños podrían ennumerar las casillas verticalmente a la vez que dicen un número, ya que las grafías están ordenadas del 1 al 6.

Con el empleo de dos dados:

*Contar conjuntamente el total de puntos de los dos dados realizado un solo conteo como si fuera una sola colección.

*Contar los puntos de un dado, los del otro dado y luego volver a contar ambas colecciones utilizando los dedos.

*Evaluar directamente la cantidad de uno de los dados y realizar un sobreconteo a partir del primer número.

*Emplear el conocimiento memorizado de algunas sumas.

10. Variables:

1ª Usar tableros con configuraciones como en los dados convencionales, del 1 al 6 (En el anexo 3 se muestran los tableros empleados en cada una de las variables.)

2ª Variar el tablero colocando los puntos alineados, para que los niños ya no puedan emplear procedimientos de reconocimiento perceptual y dado con puntos del 1 al 6.

3ª Usar tableros con números escritos en los casilleros en lugar de puntos. Y un dado con puntos del 1 al 6.

4ª Usar tableros con números acomodados en desorden y un dado con configuraciones, o bien, un tablero con configuraciones acomodadas en desorden y un dado con números.

5ª Usar tableros numerados del 2 al 6 y dos dados con puntos del 1 al 3.

6ª. Usar tableros numerados del 2 al 9 con un dado de puntos del 1 al 6 y el otro del 1 al 3.

7ª Usar tableros numerados del 2 al 12 con dos dados de puntos del 1 al 6.

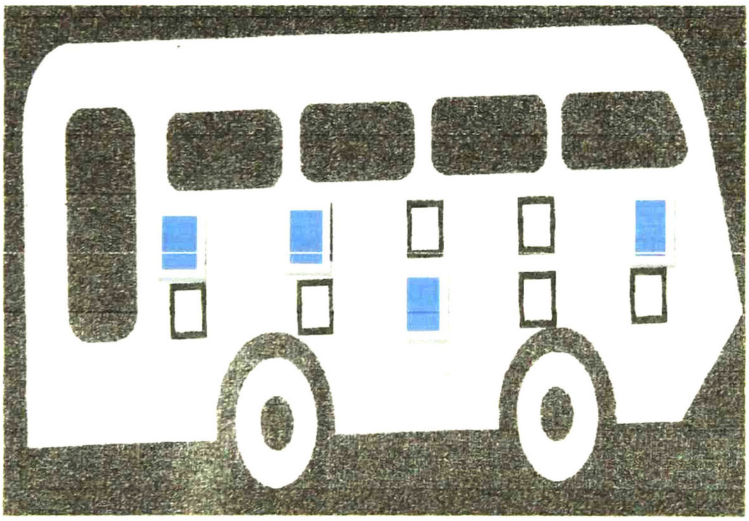
8ª Usar tableros numerados del 2 al 12 con un dado de puntos y otro de números. Ambos del 1 al 6.

9ª Usar tableros numerados del 2 al 12 con dos dados con números del 1 al 6.

10ª. Usar tableros numerados del 2 al 18 con 3 dados, dos de puntos y uno con numeral.

3ª Secuencia didáctica

"EL AUTOBÚS"



El juego en que se basa esta secuencia es la situación fundamental de la teoría Brousseau y se tomó de Ruiz Higueras (2005). En el juego original se utiliza un soporte en el que se colocan hojas con las que se representan los asientos del autobús, algunos ocupados y otros desocupados. En esta secuencia se empleó la imagen de un autobús, como la que se muestra, con pequeños cuadrados en color oscuro que representan los asientos ocupados y otros en color claro que representan los que están desocupados.

El juego consiste en identificar cuántos asientos libres tiene el autobús y traer la cantidad necesaria de "pasajeros" que faltan para llenarlo.

En un *primer momento*, se trata de una situación de acción (o autocomunicación) ya que los niños tienen la posibilidad de tomar directamente la cantidad de "pasajeros" (representados con pequeños muñecos o fichas). Estos pasajeros se encuentran lejos del lugar donde está el autobús, de manera que los niños no pueden verlo cuando tienen que tomar la cantidad requerida.

En un *segundo momento* la situación es de formulación (o comunicación) porque los niños solicitan la cantidad de pasajeros necesaria por escrito, a través de un "mensaje"

1. **Competencia:** Utiliza los números en situaciones variadas que implican poner en juego los principios del conteo.

2. **Contenido central:** Reconocimiento y representación de cantidades.

   Otros contenidos: Reconocimiento de la cardinalidad de un conjunto.

3. **Manifestaciones relacionadas:**

   - Identifica, por percepción, la cantidad de elementos en colecciones pequeñas y, en colecciones mayores, a través del conteo.

   - Utiliza objetos, símbolos propios y números para representar cantidades, con distintos propósitos y en diversas situaciones.

4. **Formas de organización:** En equipos de 6 niños.

5. **Previsión de materiales:**

   * Una tarjeta con la imagen de un autobús con cuadrados oscuros que representan los asientos ocupados y cuadrados claros que representan los asientos libres.

* Pequeños cuadritos de papel para representar a los pasajeros.

* Hojas y lápices (crayolas u otros elementos para escribir).

6. **Objetivo del juego para el niño:** Conseguir la cantidad exacta de pasajeros para llenar el autobús.

7. **Presentación del problema:**

Cada niño tiene en su lugar un a tarjeta con la imagen de un autobús. Se les muestran unos cuadritos de papel y se les explica que con ellos representarán a los pasajeros. Los niños deben identificar la cantidad de asientos libres en su autobús y conseguir dicha cantidad de pasajeros para llenarlo. Los cuadritos se colocan en un lugar distante de manera que ellos no puedan ver su autobús al mismo tiempo que toman los cuadritos. En un primer momento toman directamente los cuadritos y en un segundo momento los solicitan a través de un mensaje.

8. **Consignas:**

1ª "Debes ir a buscar exactamente los pasajeros necesarios, sólo los necesarios, ni más ni menos, para completar los asientos libres del autobús"

2ª "Debes pedir por escrito, en un mensaje, los pasajeros que necesitas para llenar tu autobús"

9. **Procedimientos esperados:**

En el primer momento de la actividad:

* Correspondencia uno a uno (hacer varios viajes para traer, cada vez, un pasajero hasta completar los necesarios).

* Apreciación global de la cantidad.

* Usar los dedos para representar la cantidad.

* Contar los elementos de la colección.

En el segundo momento de la actividad:

* Hacer dibujos, palitos o signos gráficos para representar cada elemento de la colección.

* Utilizar los numerales para representar la cantidad.

10. Variables:

1ª Emplear autobuses con un total de 5 asientos y de 1 a 3 desocupados.

2ª Emplear autobuses con un total de 10 asientos, variando el número de asientos libres, de 3 a 9. Ubicando los asientos desocupados juntos.

3ª Utilizar el mismo rango numérico, pero distribuir los asientos desocupados en diferentes lugares del autobús, de manera que no sea tan fácil reconocer a simple vista las cantidades.

4ª Emplear autobuses con 16 asientos en total y de 5 a 12 libres, distribuyéndolos de manera dispersa.

5ª En todas las variables anteriores se puede proporcionar a todos los niños del equipo tarjetas en las que falte la misma cantidad de pasajeros. Se puede aumentar la dificultad del problema proporcionando a cada integrante del equipo tarjetas en las que falten diferentes cantidades de pasajeros

4ª Secuencia didáctica

"LA PAPELERÍA"

Para desarrollar esta secuencia didáctica se llevó a cabo la recreación de una papelería en el salón de clases en la que los niños practicaban el juego de la compra-venta. Esta secuencia podría trabajarse, también, a partir de la recreación de otro entorno de uso social del número como una tienda, el mercado, la feria, una mañanita mexicana u otro por el estilo. Lo importante es generar un contexto de interés para los niños en donde se puedan plantear y resolver problemas aritméticos.

1. **Competencia:** Plantea y resuelve problemas en situaciones que le son familiares y que implican agregar, reunir, quitar, igualar, comparar y repartir objetos.

2. **Contenido central:** Relaciones aditivas.

Otros contenidos: Representación de cantidades e identificación de las grafías numéricas convencionales.

3. **Manifestaciones relacionadas:**

   - Interpreta o comprende problemas numéricos que se le plantean y estima sus resultados.
   - Utiliza estrategias propias para resolver problemas numéricos y los representa usando objetos, dibujos, símbolos y/o números.
   - Utiliza estrategias de conteo y sobreconteo.

4. **Formas de organización:** Se sugiere trabajar en equipos de 4 niños.

5. **Previsión de materiales:**

* Fichas de colores y círculos de cartón con números escritos para representar monedas de diferentes valores.

* Materiales de papelería (resistol, gomas, lápices, libretas, lapiceros, calcomanías, hojas, entre otras.)

6. **Objetivo para el niño:** Identificar la cantidad que debe pagar por los productos adquiridos. A partir de la variable , determinar la cantidad que deberá regresar de "cambio" cuando el valor de las monedas con que se paga sea mayor al de los productos comprados.

7. **Presentación del problema:**

El problema se presenta en el contexto del juego de compra-venta, para el cual, previamente se habrá conformado el escenario de la papelería con los materiales necesarios y se habrán ordenado y etiquetado los productos con su precio. Asimismo se designarán los roles de vendedor y compradores entre los niños.

8. **Consigna:** "Van a jugar a comprar en la papelería. Deben darle al vendedor las monedas necesarias para pagar los productos que compren"

A partir de la 3ª variable se agrega a la consigna: "El vendedor deberá regresarles el cambio"

9.-Procedimientos esperados:

*Utilizar el conteo total apoyándose de objetos o de los dedos"

*Utilizar el sobreconteo, el conteo regresivo o el conteo hacia delante"

*Emplear el conocimiento memorizado de algunas sumas y restas.

10.-Variables:

1ª Utilizar monedas de 1 peso (representadas con fichas) y comprar productos con precio máximo de 5 pesos.

2ª. Utilizar monedas de 1 peso y comprar productos con precio máximo de 8 pesos.

3ª Utilizar fichas de colores asignándoles un valor 1 peso, 2 pesos y 5 pesos y comprar productos con precio máximo de 8 pesos, regresando "cambio" en caso necesario.

4ª Cambiar las fichas de colores por fichas con números que indiquen el valor de las monedas.

5ª Utilizar fichas de colores o con números con valor 1, 2, 5 y 10 pesos y comprar productos con precio máximo de 18 pesos, regresando "cambio" en caso necesario.

6ª Utilizar fichas con números con valor 1, 2, 5 y 10 pesos y comprar productos con precios más altos (hasta 50 pesos).

7ª Solicitar por escrito las cantidades que deben pagar y recibir de cambio.

Nota: Se recomienda destinar un lugar, dentro del salón de clases, para dejar instalada la papelería el tiempo que se requiera para dar la oportunidad a los niños de practicar el juego de compra venta en varias ocasiones. También se sugiere proponer a los niños que ellos mismos elaboren los materiales con los que se van a jugar, apoyados por los padres de familia.

5ª Secuencia didáctica

"HISTORIAS PROBLEMA"

Esta secuencia se divide en dos fases. La primera se desarrolla a partir de la presentación verbal de algunos problemas de agregar, quitar, reunir, comparar, igualar, repartir y agrupar para que los niños los resuelvan. En la segunda, los niños tienen que formular sus propios problemas y plantearlos a sus compañeros para que los resuelvan. En las dos fases los niños tienen que justificar sus respuestas y explicar a sus compañeros cómo hicieron para encontrar el resultado y, en algunas ocasiones, los representan gráficamente.

Primera fase: Resolver problemas

1. **Competencia:** Plantea y resuelve problemas en situaciones que le son familiares y que implican agregar, reunir, quitar, igualar, comparar, agrupar y repartir objetos.

2. **Contenido central:** Relaciones aditivas y multiplicativas.

   Otros contenidos: Representación de las cantidades y las relaciones aritméticas implicadas en los problemas.

3. **Manifestaciones relacionadas:**

- Interpreta o comprende problemas numéricos que se le plantean y estima sus resultados.
- Utiliza estrategias propias para resolver problemas numéricos y los representa usando objetos, dibujos, símbolos y/ o números.

4. **Formas de organización del grupo:** Se sugiere trabajar alternativamente con equipos de 6 niños como máximo, mientras los demás realizan otras actividades o juegos de matemáticas previamente organizados.

5. **Previsión de materiales:**

*Tarjetas con los problemas escritos.

*Fichas, palitos, cubos u otros materiales que sirvan para contar. (Estos materiales estarán a la disposición de los niños, pero sólo se emplearán si ellos así lo deciden.)

6. **Objetivo para el niño:** Encontrar el resultado del problema.

7. **Presentación del problema**:

Se lee el problema a los niños. Se les coloca al alcance algunos elementos para contar y se les indica que los pueden usar o no según ellos quieran. Después de que cada niño exprese su respuesta debe confrontarla con la de sus compañeros y explicar cómo hizo para encontrar el resultado. Posteriormente se les pide que representen gráficamente su respuesta.

Ejemplo de problema:

"Pepe tiene 3 canicas. Luego Tomasito le dio 5 canicas más ¿Cuántas canicas tiene ahora Pepe?"

En el anexo 4 se presentan algunos ejemplos de problemas de cada relación aritmética.

8. **Consigna:** "Les voy a leer un problema. Cada quien lo va a resolver y después nos

va a explicar cómo le hizo para resolverlo"

Después de que lo resuelven: "Ahora en esta hoja apunten el problema" (Esta consigna se da en caso de que se incluya la variable de la representación gráfica).

9. Procedimientos esperados:

* El conteo total de objetos o los dedos
* Utilizar otras estrategias de conteo verbal como el sobreconteo, el conteo regresivo y el conteo hacia delante a partir de un número.
* Emplear las combinaciones numéricas que conoce.
* Representar gráficamente las cantidades y relaciones del problema con símbolos personales o convencionales.

10. Variables:

Para los problemas de sumar y restar:

* Utilizar números que en total den cantidades menores a 5 y agregar o quitar un elemento (+1 o -1)
* Utilizar números que en total den cantidades a 10 y de agregar o quitar dos elementos (+2 o -2)
* En los problemas de sumar, variar el orden en que se presentan los datos: número más grande primero (Ej. 5 + 2) o número más pequeño primero (Ej. 2 + 5).
* Restringir el empleo de los objetos y elementos de apoyo concreto.
* Que los niños representen o no gráficamente el problema.

Para los problemas de repartir:

* Cantidad máxima a repartir 6 elementos como máximo en dos partes.
* Cantidad máxima a repartir 12 elementos como máximo en dos partes.
* Cantidad máxima a repartir 9 elementos como máximo en tres partes.
* Cantidad máxima a repartir 18 elementos como máximo en tres partes.

* Cantidad máxima a repartir 20 elementos como máximo en cuatro o cinco partes

* Restringir el empleo de los objetos y elementos de apoyo concreto.

* Que los niños representen o no gráficamente el problema.

* Formular el problema cambiando el orden de los datos para promover estrategias de agrupar.

Ejemplo:

Problema de repartir:

"Carlos tiene 12 galletas y las va a repartir entre sus tres amigos. ¿Cuántas galletas le tocan a cada uno?" (12 : 3 = 4)

Problema de agrupar:

"Carlos quiere darle 4 galletas a cada uno de sus tres amigos ¿Cuántas galletas necesita en total?" (4 x 3 = 12)

Segunda fase: Inventar problemas

1. **Competencia:** Plantea y resuelve problemas en situaciones que le son familiares y que implican agregar, reunir, quitar, igualar, comparar y repartir objetos.
2. **Contenido central:** Relaciones aditivas y multiplicativas.

   Otros contenidos: Representación de las cantidades y las relaciones aritméticas implicadas en los problemas.
3. **Manifestaciones relacionadas**:

- Interpreta o comprende problemas numéricos que se le plantean y estima sus resultados.
- Utiliza estrategias propias para resolver problemas numéricos y los representa usando objetos, dibujos, símbolos y/ o números.

4. **Formas de organización:** Igual que en la primera fase, trabajar alternativamente con equipos de 6 niños como máximo, mientras los demás realizan otras

actividades o juegos matemáticos previamente organizados.

5. **Previsión de materiales**:

- Hojas y lápices, plumones, crayolas u otros materiales para escribir.
- Fichas, palitos de madera u otros objetos para contar.

6. **Objetivo para el niño**: Inventar un problema y plantearlo a sus compañeros. Apuntar el problema en una hoja.

7. **Presentación del problema**:

Se explica a los niños que van a jugar a inventar problemas para presentarlos a sus compañeros. Se les ofrecen algunos objetos que les pueden servir para contar como fichas o palitos de madera y se les indica que los pueden utilizar o no, según ellos decidan. Se promueve que se pongan de acuerdo para definir quien va a comenzar a presentar su problema. Posteriormente se les proporciona hojas y lápiz o crayolas para que representen el problema que inventaron.

8. **Consigna:** "Van a inventar problemas como los que hemos trabajado y los van a presentar a sus compañeros para que los resuelvan. Aquí les dejo este material para que los utilicen si les sirve"

Después de que lo plantean y resuelven: "Ahora en esta hoja apunten el problema que inventaron para que no se nos olvide"

9. **Procedimientos esperados de los niños**:

* Forma conjuntos utilizando objetos.

* Se apoya en cantidades mayores a 10 para inventar su problema.

*Utilizar las combinaciones numéricas que conoce.

*Toma en cuenta los datos que debe contener el problema y el resultado.

*Representar las cantidades y relaciones del problema con símbolos personales o convencionales o el resultado.

10. **Variables:**

* Restringir el empleo de los objetos y elementos de apoyo concreto.

* Que los niños representen gráficamente el problema.

2.3 Recursos didácticos complementarios a la aplicación de las secuencias

Juegos

Además de los propuestos en las secuencias didácticas, hay muchos otros juegos tradicionales atractivos en los que los niños tienen que resolver problemas de agregar, juntar, repartir, entre otros. Por ejemplo, los que se practican con dados, cartas o tableros como las serpientes y escaleras. Dentro de la estrategia de enseñanza estos juegos se pueden llevar a cabo como complemento. Es importante mencionar que estos juegos deben adecuarse introduciendo variables didácticas similares a las que se están trabajando en la secuencia didáctica en ese momento, por ejemplo, si es el caso, usando dados que sólo tengan hasta el número 3 o disminuyendo el número de casillas en un juego de tablero. De esta forma es como se recobra la importancia del juego como recurso para propiciar aprendizajes.

Situaciones cotidianas de uso funcional del número

Las situaciones didácticas incluidas en las secuencias de la estrategia de enseñanza tienen la intención de favorecer el desarrollo de un contenido matemático específico. Sin embargo, en las actividades cotidianas o en momentos imprevistos surgen situaciones incidentales que pueden aprovecharse para plantear a los niños un problema aritmético en un contexto funcional e interesante, ya que se trata de problemas de la realidad. A continuación se señalan algunos ejemplos:

- En el momento del refrigerio se puede pedir a los niños que los distribuyan y preguntarles "¿Cuántos desayunos necesitas para los niños de tu mesa?"

- Al momento de distribuir los materiales con los que se va a trabajar, por ejemplo cuadritos de papel, podemos preguntarles a los niños "¿Todos tienen la misma cantidad?" Si alguno tiene más o menos "¿Cuántos te faltan? ¿Cuántos te sobran?"

- Cuando se inicia una actividad en la que el grupo tiene que organizarse en equipos en cada mesa, se puede aprovechar el momento y preguntarles "¿Cuántos niños pueden quedar en cada mesa sin que sobren ni que falten niños?"

- Cuando se organiza o acomoda el material para trabajar alguna actividad se les puede decir: "Tienes que poner dos tijeras en cada mesa ¿Cuántas tijeras necesitas para todas las mesas?"

- Cuando se elaboran los adornos para los eventos cívicos o sociales también se puede comparar la cantidad elaborada por cada equipo y preguntar "¿Cuántos adornos más necesita hacer este equipo para tener los mismos que aquel?"

- Cuando se realiza el pase de lista se puede preguntar a los niños ¿Cuántas niñas vinieron hoy y cuántos niños? y si los juntamos ¿Cuántos son en total?

- Se puede hacer la comparación entre la cantidad de niños que asistieron ese día y el día anterior y preguntar "¿Cuántos niños llegaron en total ayer y cuántos llegaron hoy en total? ¿Cuántos más (o menos) vinieron hoy?"

2.4 La organización del ambiente en el aula para la puesta en práctica de la estrategia de enseñanza

Para la aplicación de la estrategia de enseñanza descrita es importante crear un ambiente de aprendizaje en el que los alumnos tengan la posibilidad y la confianza de actuar con iniciativa, para enfrentarse a experiencias oportunas que les permita poner en juego sus conocimientos y construir otros nuevos. De acuerdo con lo que establece el PEP 2004, es necesario propiciar un ambiente interactivo y de comunicación atendiendo a la diversidad, pero sin dejar de lado las características propias de cada niño.

Por otra parte, hay que poner atención en la organización física del aula en cuanto a la disposición del mobiliario y los materiales ya que éstos deben ser suficientes y estar al alcance de los niños oportunamente. Por otro lado, las formas de organización del grupo tienen que ver con el tipo de actividades y sobre todo la finalidad, son fundamentales para trabajar en un ambiente que permita el intercambio y colaboración entre los niños y la posibilidad al docente de observarlos y apoyarlos.

La forma en que se propuso aplicar la estrategia es en pequeños grupos o equipos, en un circuito, en el que los equipos se roten para trabajar alternativamente con la guía de la maestra. Esto implica que, en algunos momentos, los niños que no trabajen con la docente, deberán desarrollar actividades paralelas de manera autónoma.

Por esta razón, es recomendable al inicio de la aplicación de la estrategia, así como al presentar cada secuencia didáctica, establecer claramente las normas y acuerdos para el desarrollo de las actividades, ya que estás serán el motor que va a conducir las acciones de los niños y de la docente. De esto dependerá el éxito en las interacciones y la buena convivencia en el grupo. Los niños deben reconocer y respetar las normas de comportamiento del grupo social al que pertenecen y los docentes debemos ser congruentes con lo que decimos y lo que hacemos.

Una vez establecidas las reglas del salón de clase, se podrá propiciar un ambiente de confianza, solidaridad y respeto entre todos, procurando que todos los niños participen en su momento y que sea el mismo grupo quien siga fomentando estas normas y acuerdos. No hay que olvidar que no todos los niños pueden expresarse con facilidad, por sus características muy particulares. El aula, por lo tanto, se debe trasformar en un espacio donde prevalezca la equidad, se manifiesten los sentimientos y deseos de cada miembro del grupo, pero dentro de un marco de respeto, sin dejar de lado que los niños que asuman y enfrenten las consecuencias de sus actos.

CAPÍTULO 3

APLICACIÓN DE LA ESTRATEGIA DE ENSEÑANZA

La estrategia de enseñanza se trabajó con un grupo de segundo grado de preescolar en un Jardín de Niños del Valle de Toluca, México. El grupo estaba integrado por 25 educandos (12 niñas y 13 niños). Las edades de los niños, al inicio de la aplicación, oscilaban entre 3 años 8 meses y 4 años 5 meses.

La aplicación de la estrategia de enseñanza tuvo lugar durante todo el ciclo escolar 2007-2008 y los dos primeros meses del ciclo escolar 2008-2009, cuando los alumnos ya cursaban el tercer grado. Esto fue posible ya que, durante esos dos ciclos, el grupo estuvo a cargo de la docente que escribe este trabajo de tesis.

La aplicación de la propuesta se realizó en tres momentos principales: evaluación diagnóstica, intervención y evaluación final. Cabe aclarar que se realizó también una evaluación intermedia, en el mes de abril de 2008, a fin de reorientar las actividades.

3.1 EVALUACIÓN DIAGNÓSTICA

La evaluación diagnóstica se llevó a cabo en el mes de septiembre del ciclo escolar 2007-2008 con la finalidad de identificar los conocimientos previos de los niños al momento de iniciar la investigación y así poder aplicar la propuesta de enseñanza partiendo de esos conocimientos.

Inicialmente, la actividad diagnóstica consistió en que los niños resolvieran una serie de problemas aritméticos que se les planteaba verbalmente. Estos problemas fueron tomados del volumen I del "Curso de formación y actualización profesional para el personal docente de educación preescolar" (SEP, 2005, pp. 230-231) y son los siguientes:

- *Agregar:* Claudia tenía 3 adornos para la cabeza y cuando fue a la tienda le compraron 5 más ¿Cuántos adornos para la cabeza tiene Claudia ahora?

- *Reunir:* Pedro tiene 3 pelotas azules y Claudia tiene 5 rojas. ¿Cuántas pelotas tiene entre los dos?

- *Quitar:* Había 8 focas jugando, 3 se fueron a nadar. ¿Cuántas focas se quedaron jugando?

- *Igualar:* Laura tiene 3 cochecitos y Luis tiene 8. ¿Cuántos cochecitos necesita Laura para tener la misma cantidad de cochecitos que Luis?

- *Comparar:* Mary tiene 3 estampas y Juan tiene 8. ¿Cuántas estampas más tiene Juan que Mary?

- *Repartir:* Carla tiene 9 dulces y los va a repartir entre sus 3 amigos. A todos les quiere dar lo más posible de dulces. ¿Cuántos dulces le tocan a cada uno?

Como se mencionó en el capítulo 2, al iniciar la aplicación de la evaluación diagnóstica, se observó que los niños no sabían contar más allá de tres elementos y, por este motivo, no lograban resolver los problemas aritméticos ni aún valiéndose de apoyos concretos. Esto planteó la necesidad de evaluar los conocimientos que tenían con relación al conteo, por lo cual se aplicó una segunda actividad que tenía como propósito identificar los procedimientos que empleaban los niños para reconocer una cantidad y su nivel de dominio en el conteo.

Para diseñar esta actividad se tomó la primera parte del juego "Ganar y perder", descrito en el capítulo 2, que consiste en tirar un dado convencional con puntos del 1 al 6 y ganar o perder la cantidad de fichas que indicaba la cara del dado.

Esta aplicación de la evaluación diagnóstica se organizó de la siguiente forma: Se distribuyó al grupo, en forma aleatoria, en tres subgrupos de seis integrantes y uno de siete, formando cuatro equipos; para trabajar con cada equipo se utilizó una sesión aplicando, en la misma, los problemas aritméticos y la actividad para evaluar el nivel de dominio del conteo que tenían los niños. Por lo tanto, se ocuparon cuatro sesiones de 60 minutos cada una.

En ambas actividades se empleaba una cantidad no mayor a seis elementos. En el juego, como se utilizaba un solo dado, la cantidad máxima de fichas que tendrían que identificar era seis. Los problemas se aplicaban, primeramente, con cantidades que sumaran en total seis. Si los niños no podían resolver los problemas, para facilitar la actividad, las cantidades se reducían a 3 y se procuraba emplear combinaciones sumando o restando un solo elemento: 6 (+1) ó (-1), 3 (+1) ó (-1), 2 (+1) ó (-1), 1 (+1) ó (-1).

Para identificar el nivel de las estrategias que empleaban los alumnos para resolver los problemas de agregar, reunir, quitar, igualar, comparar y repartir, así como el problema de identificar una cantidad y construir una colección equivalente, se elaboraron algunos cuadros en los que se señalan las acciones que indican tres niveles de dominio o apropiación de las estrategias empleadas por los educandos para resolver los problemas. Estos niveles se definieron con base en la descripción de los procesos por los que atraviesan los niños en la conceptualización del número y de la evolución de sus procedimientos para resolver problemas aritméticos (descritos por los autores revisados y referidos en el capítulo 1 del presente trabajo) así como en la observación y análisis de las respuestas de los alumnos. Estos niveles se presentan en los cuadros 4, 5 y 6.

Resolución de problemas de identificar cantidades y construir colecciones equivalentes

La identificación de cantidades y la construcción de colecciones numéricamente equivalentes son indicadores útiles del nivel de conceptualización lógica del número y del desarrollo de la noción de cardinalidad alcanzado por los niños[1]

Para advertir estos niveles, es necesario plantear un problema en el que se tenga que formar un conjunto numéricamente equivalente a otro de referencia. En el caso de la actividad diagnóstica aplicada a los niños, se les planteó el problema de "tomar la cantidad de fichas que indica la cara del dado". Los niños pueden proceder de diversas maneras, tal como se aprecia en el cuadro 4. Algunos únicamente miraban los puntos del dado y tomaban una cantidad de fichas sin importar que fuera exactamente la que indicaba el dado. Los niños que hacían esto se ubicaron en el nivel 1. Otros establecían la correspondencia física entre las fichas y los puntos del dado. Como se utilizó un dado grande (de 7 cm. de

---

[1] La información básica para elaborar el cuadro correspondiente a este contenido se tomó del trabajo de tesis de Reyes (en proceso de elaboración).

arista, aproximadamente), algunos niños colocaban las fichas sobre los puntos del dado para igualar la cantidad o establecían la correspondencia visualmente colocando una ficha a la vez que señalaban un punto del dado. Con las cantidades pequeñas algunos "copiaban" la configuración de los elementos y reconocían las cantidades a partir de la percepción global. Estos niños se ubicaron en el nivel 2. Los que emplearon el conteo eficazmente, al menos hasta el 6 en la evaluación diagnóstica y hasta el 12, en las evaluaciones intermedia y final, se ubicaron en el nivel 3.

Es importante mencionar que en este cuadro, así como en los dos siguientes, se incluyó un nivel 0 para ubicar a los niños que no eran capaces de llevar a cabo, ninguna de las acciones señaladas en el nivel 1.

Cuadro 4
Niveles de referencia para observar las estrategias empleadas por los niños para identificar la Cardinalidad de un conjunto y construir una colección equivalente

Nivel 0	Nivel 1	Nivel 2	Nivel 3
El niño no hace nada. No se le ocurre ninguna estrategia para resolver el problema.	Toma una cantidad cualquiera de elementos sin importar si sobran o faltan. Su estrategia se basa en la percepción. Parece pensar "si se ven muchos tomo una cantidad grande" Cardinación súbita	Resuelve el problema sólo si puede contar estableciendo correspondencia física o visual entre los elementos de cada conjunto. Cuando los conjuntos son muy pequeños (menores de cinco elementos) podría emplear la percepción global de la cantidad.	Utiliza el conteo de manera eficiente con conjuntos mayores de seis elementos. Cuenta los elementos del conjunto de referencia (por ejemplo, los puntos del dado) y construye el conjunto equivalente (por ejemplo de fichas ganadas) contando también sus elementos.

Resolución de problemas que implican relaciones aditivas (agregar, reunir, quitar, igualar y comparar)

Como se describió en el capítulo 1, las estrategias de resolución de problemas aritméticos atraviesan por tres niveles de abstracción creciente: 1) Estrategias concretas en las cuales los niños modelan los conjuntos y las acciones señalados en el problema. Este es un nivel en el que la percepción tiene un lugar importante; 2) Estrategias verbales que se basan en el conteo de las palabras que van pronunciando. Dentro de éstas, están las estrategias de sobreconteo en las que los niños ya no tienen que contar los elementos del primer conjunto y comienzan a partir del segundo; y. 3) Estrategias mentales que consisten en la evocación de "hechos numéricos" o combinaciones aprendidas como 2+ 2 = 4, 5 + 5 = 10, 7 + 3 = 10. El cuadro 5, en el que se presentan las acciones observadas para identificar el nivel de las estrategias utilizadas por los niños para resolver los problemas aditivos, se elaboró, básicamente, a partir de esta clasificación.

Cuadro 5
Niveles de referencia para observar las estrategias empleadas por los niños para resolver problemas que implican relaciones aditivas (agregar, reunir, quitar, igualar y comparar)

Nivel 0	Nivel 1	Nivel 2	Nivel 3
No resuelve el problema.	Utiliza estrategias de conteo apoyándose en objetos. Requiere visualizar todos los elementos de los dos conjuntos y realizar concretamente las acciones que indica el problema.	Utiliza estrategias verbales como la de sobreconteo apoyándose en objetos o en los dedos. Ya no cuenta el primer conjunto. Comienza a partir del segundo. Se apoya de las estrategias que conoce.	Utiliza las combinaciones numéricas que conoce.

Resolución de problemas de repartir

Para definir las acciones que indicaban los diferentes niveles de elaboración de las estrategias empleadas por los niños para resolver problemas de repartir, se retomó el proceso de conceptualización de la noción de reparto. En este proceso el dominio del reparto atraviesa por varias etapas en las que los niños se van apropiando progresivamente de dos nociones básicas: la equivalencia y la exhaustividad. La noción de equivalencia se refiere a la comprensión de que, cada una de las partes del reparto, debe contener la misma cantidad de elementos y la exhaustividad a que todos los elementos del conjunto deben ser repartidos. Cuando los niños se enfrentan con problemas de repartir recurren a estrategias en las cuales el desarrollo de estas nociones se ve reflejado. En un primer momento, suelen dar una cantidad a cada quien sin cuidar que a todos les toque lo mismo, o bien, asignan uno o dos elementos a cada parte sin importar que queden elementos sin repartir. Poco a poco, los niños aprenden a coordinar estas dos relaciones e inventan procedimientos para asegurar que el reparto sea equivalente. La estrategia más común es asignar un elemento a cada parte, en tantas rondas como sea necesario. Otra estrategia común es dar a cada quien una determinada cantidad y compensar el reparto quitando o agregando elementos hasta que todos tengan lo mismo.

Igual que en el caso de las relaciones aditivas, los niños van aprendiendo hechos o combinaciones numéricas que evocan y utilizan para resolver el problema. Por ejemplo, con la experiencia, se dan cuenta que siempre que se reparte equitativamente una cantidad en varias partes el resultado es el mismo y aprenden, por ejemplo, que 9 entre 3 es igual a tres, que diez entre dos es igual a cinco y otras combinaciones por el estilo.

El cuadro 6, en el que se presentan las acciones que indican el nivel de las estrategias para resolver problemas de repartir, se elaboró basándose en este proceso. Cabe aclarar que, aunque en la aplicación de la propuesta se trabajaron los problemas multiplicativos que implican relaciones tanto de agrupar como de repartir, en la evaluación sólo se llevó el seguimiento de estos últimos.

Cuadro 6

Niveles de referencia para observar las estrategias empleadas por los niños para resolver problemas que implican relaciones multiplicativas (repartir)

Nivel 0	Nivel 1	Nivel 2	Nivel 3
No resuelve el problema.	Reparte parcialmente. El reparto no es equivalente porque da una cantidad a cada quien sin cuidar que a todos les toque lo mismo. O bien, asignan uno o dos elementos a cada parte sin importar que queden elementos sin repartir.	Reparte equitativamente todos los elementos del conjunto. La estrategia más común es asignar un elemento a cada parte, en tantas rondas como sea necesario. Otra estrategia es dar a cada quien una determinada cantidad y compensar el reparto quitando o agregando elementos hasta que todos tengan la misma cantidad.	Utiliza las combinaciones numéricas que conoce.

3.2 INTERVENCIÓN

La aplicación de la estrategia de enseñanza se realizó en 60 sesiones, de 40 minutos cada una, durante tres días a la semana; a partir de mes de abril de 2008, se amplió el tiempo a tres sesiones semanales de 90 minutos. Los alumnos se distribuyeron en cuatro equipos (tres de seis educandos y uno de siete) y se decidió dedicar una sesión a cada equipo, rotativamente, mientras los otros tres equipos desarrollaban actividades simultáneas que no requerían la atención constante de la educadora.

Al principio, las actividades que realizaban paralelamente no tenían que ver con las de la secuencia pero, posteriormente, una vez que un equipo de alumnos aprendía el juego de la secuencia con el apoyo de la educadora, en las sesiones sucesivas, lo continuaban practicando por su cuenta, al mismo tiempo que la docente trabajaba con otro equipo. Así, en el tiempo destinado a las tres sesiones semanales, todos los alumnos practicaban actividades para favorecer las competencias del campo formativo del pensamiento matemático. En el anexo 6 se presenta un cuadro en el que se han concentrado las situaciones didácticas y el orden y condiciones en que se llevó a cabo la aplicación de las secuencias didácticas.

Esta forma de organización requirió que los niños aprendieran a desenvolverse de manera más autónoma dentro del salón de clases. Por esta razón, se inició con el establecimiento de las normas y acuerdos de trabajo con los niños, ya que el cumplimiento de ellas permitiría que la educadora pudiera apoyar, por tiempos, a los diferentes equipos. Una de las principales normas establecidas fue que los niños no debían interrumpir a la maestra mientras estaba en el otro equipo.

En la siguiente parte de este capítulo se describen algunos aspectos significativos de la aplicación de cada una de las secuencias didácticas

Primera secuencia didáctica: "Ganar y perder"

Como se mencionó en el capítulo 2, el propósito central de esta secuencia era que los niños construyeran colecciones equivalentes al tirar un dado y ganar o perder la cantidad de fichas que éste indicara, es decir, tenían que construir una colección de fichas equivalente a la cantidad de puntos que mostraba la cara del dado.

En las primeras sesiones de la aplicación, se utilizó un dado con constelaciones del 1 al 3 ya que las posibilidades de conteo de los niños eran muy limitadas. Después de identificar la cantidad de puntos en el dado, los niños elegían al azar, una tarjeta que indicaba si habían ganado o perdido fichas. En la Imagen 1 se puede observar esta situación.

Imagen 1

Un niño muestra una de las tarjetas con las que se jugaba a "ganar y perder" en la cual se observa una carita triste, lo que implicaba que el jugador perdía la cantidad de fichas que marcaba el dado.

En la segunda sesión sucedió algo interesante en el equipo 4. Una niña, al ser cuestionada por la educadora sobre cómo podemos saber la cantidad de puntos que cae en la cara del dado, mencionó "si contamos lo sabremos" La educadora aprovechó este incidente y llamó la atención de todo el grupo sobre lo que la niña había dicho. En el siguiente diálogo se pueden apreciar las interacciones de los niños:

CONTEXTO: La maestra llama a los niños y éstos dejan de hacer sus actividades y se reúnen alrededor del equipo con el que está trabajando para que Michel les explique "qué es contar", provocando con ello los comentarios de otros niños.

Brayan: ¿Qué dijo de cómo contar?

Luis Enrique: Pues si tú cuentas los puntos que caen en el dado, es contar.

Michel: Pues así (tira el dado y cuenta, en voz alta, a la vez que va viendo cada punto) uno, dos, tres...

Educadora: Efectivamente, lo que hacemos cuando vamos viendo los puntos que caen en el dado se llama contar.

Es interesante observar, en este diálogo, cómo los niños tratan de expresar sus ideas y se apoyan entre sí para elaborar y consolidar sus conocimientos. Los niños conocían y utilizaban la palabra contar, pero en ese momento, sus intervenciones propiciaron que le dieran un significado. A algunos todavía se les dificultaba entender esta acción y otros practicaban la estrategia de contar pero no sabían cómo llamarle.

La conformación de los equipos se hizo de manera aleatoria, quedando los niños integrados con diferentes niveles de dominio, lo que propició, que los que ya tenían un dominio más amplio del rango numérico, apoyaran de manera espontánea a sus compañeros. Una ventaja importante del trabajo en equipos es que los niños pueden comunicar sus conocimientos y compartir sus estrategias con sus compañeros.

En la quinta sesión se reestructuraron los equipos tomando como criterio principal el dominio que mostraban en relación con el conteo. Se conformó un equipo con los educandos que eran capaces de identificar, a través del conteo, cantidades del 1 al 6 y el resto de los equipos se conformaron con los que sólo reconocían cantidades del 1 al 3. Por esta razón se trabajó al mismo tiempo con las dos variables.

En la sexta sesión se introdujo el empleo de dos dados, para así continuar incrementando las cantidades a contar y promover la resolución de problemas aditivos de reunir con cantidades pequeñas. En el siguiente diálogo, que tuvo lugar en esta sesión, se observa cómo los niños corroboran el conteo de sus compañeros, contando nuevamente los puntos del dado, lo que les servía a unos y otros como modelo de la acción de contar.

Educadora: (coloca las tarjetas al centro de la mesa) Se van a poner de acuerdo de quien tira primero y a su derecha van a seguir tirando. ¿Quién va a tirar?

Luis Enrique: Yo (tira los dados).

Educadora: ¿Cuantos puntos son?

Luis Enrique: Son ocho puntos.

Educadora: ¿Están de acuerdo que son ocho? (pregunta al resto del equipo).

Jessica: No son ocho, son cinco.

E: ¿Como los sabes?

Jessica: (Contando) mira: uno, dos, tres, cuatro y cinco.

Educadora: ¿Están de acuerdo? (se dirige a los otros niños del equipo).

Alan: A ver, déjame contarlos.

Educadora: (Le pide a Jessica que le dé los dados a su compañero).

Alan: (cuenta los puntos de los dados) Uno, dos, tres, cuatro, seis. No, son seis.

Jessica: (le quita los dados y vuelve a contar los puntos) Son cinco, mira: uno, dos, tres cuatro, cinco.

Alan: ¿Cinco?

Luis Enrique: (vuelve a contar) a ver, uno, dos, tres, cuatro, cinco. Si son cinco.

Educadora: Entonces ¿Cuántas fichas te voy a dar?

Luis Enrique: Cinco.

José Miguel: Yo se las doy uno, dos, tres, cuatro, cinco (cuenta las fichas y se las da a su compañero.

La educadora procura no evaluar la respuesta de los niños pero si intervenía cuando los niños estaban en un error marcándolo para que el niño se diera cuenta. En cambio, promueve el intercambio de sus opiniones, con lo cual propicia el aprendizaje entre pares esto parece tener mayor importancia para los niños ya que, al utilizar un lenguaje comprensible entre ellos, les ayuda a darse cuenta de que la estrategia que emplean para contar puede no ser tan eficiente como la que su compañero utiliza y, a partir de observarla, cambia o mejorar la estrategia propia. Como se puede observar, al ver el conteo de su compañera Jessica, Luis Enrique se da cuenta de su error y cuenta ahora de manera correcta, como lo hace ella.

Por otra parte, la actitud de agrado por las actividades que se realizan es muy importante para el aprendizaje. Se observó que este tipo de actividades motiva a los niños a participar y a esforzarse por resolver el problema numérico que se les plantea. En la imagen 2 se aprecia cómo los niños se mostraban interesados en el juego y lo practicaban con entusiasmo.

Imagen 2

Segunda secuencia: "Minigenerala"

En la séptima sesión se dio inicio a la segunda secuencia. Es importante mencionar que el juego de la primera secuencia no se dejó de lado, sino que los niños siguieron practicándolo pero sin el apoyo de la educadora.

Una vez trabajada la primera secuencia, se tomó en cuenta el dominio del reconocimiento de cantidades que tenían los educandos para formar los equipos o parejas que practicarían el juego.

En la primera variable de la secuencia "Minigenerala" se requiere un tablero para cada pareja en el que están dibujadas las 6 caras del dado con los puntos de menor a mayor en forma vertical y dos casilleros en donde se coloca el nombre de cada jugador. Por turnos, cada niño tira el dado y marca en su casillero con una ficha la cantidad que salió en la cara del dado. Si la cantidad que aparece ya está marcada ya no se coloca otra ficha y se le da el turno al otro jugador. Gana el que primero que llena todas sus casillas. En la imagen 3 se observa una pareja de niños practicando este juego.

Imagen 3

En esta imagen Luis Marco está corrigiendo a Carlos Alberto sobre la cantidad que le cayó en el dado y le indica en qué casilla debe ubicar la ficha.

Una vez que los niños habían comprendido la dinámica del juego, se les dejaba practicarlo sin que la educadora interviniera, ya que se trataba de promover el momento a-didáctico en el que el docente devuelve a los alumnos la responsabilidad de su aprendizaje. Sin embargo, la docente observa las estrategias que utilizan los niños y apoya a los que mostraban alguna dificultad. En el siguiente diálogo se aprecia que la pareja de Jessica y Carlos Alberto no logra ponerse de acuerdo llamando la atención de la educadora quien les recuerda las reglas por medio de cuestionamientos y además los apoya para que perfeccionen su estrategia de conteo.

CONTEXTO: La educadora organiza al grupo por parejas para realizar la actividad, explica el juego y recuerda las reglas que se establecieron al interior del grupo. Al ver que una pareja de niños que no se ponía de acuerdo, debido a que uno decía que la casilla que ya tenía una ficha ya no se marcaba y el otro decía que sí, se acerca y pregunta:

Educadora: ¿qué pasa cuando ya está marcado?

Carlos Alberto: Ya no se marca y se regresa el dado a su compañero para que esté tire.

Jessica: (asiente mostrándose de acuerdo).

Carlos Alberto: tira el dado el cual cae en el número 5.

Educadora: ¿Cuántos son?

Carlos Alberto: Va señalando los puntos del dado uno a uno a la vez que cuenta: uno, dos, tres. Son tres

Educadora: ¿Estas seguro?

Carlos Alberto: (no contesta)

Educadora: (Se dirige a Jessica) ¿Estás de acuerdo?

CONTEXTO: Carlos Alberto le da el dado a su compañera y ésta cuenta los puntos.

Jessica: cinco.

Educadora: (Dirigiéndose a Carlos Alberto) A ver, vuelve a contar punto por punto.

Carlos Alberto: (toma el dado y cuenta pero no hace corresponder el señalamiento con las palabras que pronuncia) uno, dos, tres, cuatro, cinco y seis.

Educadora: ¿Estás seguro?

Carlos Alberto: Sí, mira, uno, dos, tres cuatro, cinco y seis.

Educadora ¿Y dónde esta esa cantidad en el tablero?

Carlos Alberto: (Señala con su dedo en el tablero la cantidad) Aquí hay seis.

Educadora: Ahora le toca tirar a tu compañera.

A veces los niños realizan su conteo y se dan cuenta que no es eficiente porque no logran identificar la cantidad. Al seguir intentándolo, lo van a ir perfeccionando con el apoyo de su compañero o de la educadora. Hacer que los niños trabajen en pares es útil porque les permite compartir sus experiencias para construir nuevos conocimientos, pero también, porque esta forma de organización facilita a la educadora observarlos de manera más cercana para darse cuenta de sus dificultades y avances.

Tercera secuencia didáctica: *"El autobús"*

En la sesión número veinte se da inicio a la tercera secuencia. En ésta secuencia se pega con anterioridad, en cada lugar de los niños, la imagen del autobús y se les dice "En su lugar hay un autobús que transporta pasajeros, tiene asientos ya ocupados y asientos vacíos ustedes tienen que anotar en el papel que les di la cantidad de pasajeros que se necesitan para llenar su autobús"

El contenido matemático a trabajar con los niños, en esta ocasión, fue el reconocimiento de cantidades, partiendo como en las anteriores situaciones, del establecimiento de reglas y normas.

En el siguiente diálogo se ejemplifica la manera cómo se condujo esta secuencia.

CONTEXTO: La educadora organiza al grupo para realizar la actividad del autobús con todo el grupo, recuerda las reglas establecidas y menciona las de la actividad en especial.

Educadora: Vean ¿qué tenemos en su mesa?

Niños: ¡Un carro! (todos contestan al mismo tiempo).

Educadora: Un autobús o un carro. Ese carro ya tiene pasajeros pero le hacen falta pasajeros. Ustedes, en el papelito que tienen, van anotar la cantidad de pasajeros que les hacen falta a su carro o autobús. No les deben sobrar ni faltar. Van a venir conmigo para que yo les dé la cantidad de pasajeros que me hayan anotado en el papelito ¿De acuerdo? No se vale traer su autobús.

CONTEXTO: Todos los niños están contando en voz alta. Algunos llevan su autobús pero la educadora les recuerda que deben anotar la cantidad en su papelito.)

Marisela: (Lleva a la educadora su papelito y le pide cinco pasajeros.)

Educadora: ¿Cuántos?

Marisela: cinco.

Educadora: (le entrega la cantidad solicitada) anótame tu nombre en el papelito. Aquí tienes resistol y lo compartes con tus compañeros de la mesa. (Se dirige a otro niño)¿Cuántos necesitas Marco?

Marco: Cinco (muestra su papelito).

Educadora: Te doy tus cinco y me anotas tu nombre.

David: Maestra, Maestra (lleva su papelito con la educadora)

Educadora: ¿Cuántos necesitas?

David: Cuatro.

Educadora: A ver, ¿cuántos anotaste?

David: (Vuelve a contar) uno, dos, tres, cuatro, cinco. Cinco, maestra.

Educadora: ¿Estas seguro?

David: Sí maestra.

La conducción de la actividad fue difícil porque se trabajó con todo el grupo. Por eso, en la segunda sesión de esta secuencia, se organizó al grupo en equipos de seis integrantes y se asignó a tres niños la tarea de entregar a sus compañeros la cantidad de pasajeros, la cual debían solicitar a través de su mensaje escrito. Esta forma de organización permitió a la docente observar las estrategias que los niños ya utilizan para identificar y representar las cantidades.

Además, al ser los mismos niños los encargados de entregar los "pasajeros" a sus compañeros, se promovió que la situación fuera de formulación (o comunicación), ya que los niños tenían que formular su petición por escrito y los que recibían el mensaje tenían que descifrarlo para identificar las cantidades que éstos les solicitaban, verificar que eran correctas y, en su caso, ayudar a corregirlas.

A continuación se presentan algunos ejemplos de las representaciones gráficas de las cantidades producidas por los niños en sus mensajes.

Imagen 4

La imagen 4 muestra la representación de Carlos Alberto que es idiosincrática[6] ya que los elementos representados no se relacionan con la cantidad de pasajeros que necesita su autobús.

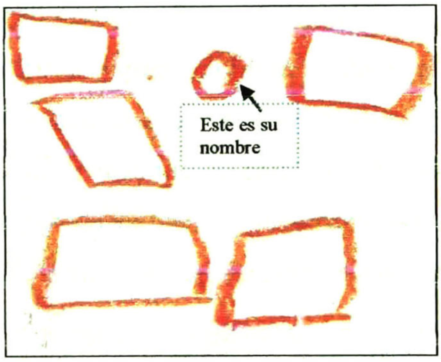


Imagen 5

La imagen 5 es un ejemplo de representación pictográfica en la que Luis Marco representó con dibujos de los cuadritos, la cantidad exacta de cuadritos de papel que requería para completar el autobús. Éste es el tipo de representación que utilizó la mayoría de los niños.

[6] Idiosincráticas: Se trata de garabatos que no se relacionan con la cantidad ni la cualidad física de los elementos a representar.

Imagen 6

En la imagen 6 se puede observar una representación icónica en la que Estrella anota la cantidad exacta de elementos que necesita, a través de marcas que no tienen nada que ver, fisicamente, con el objeto. En este caso, representa con rayas la cantidad de cuadritos de papel que requiere.

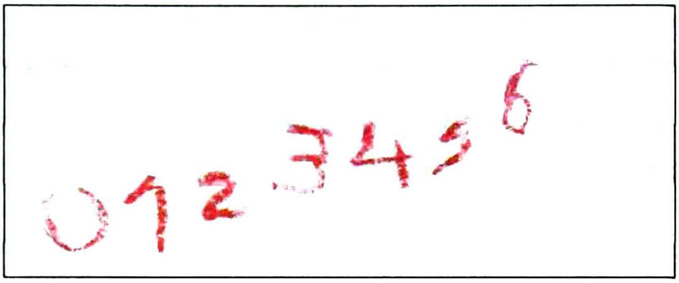


Imagen 7

En la imagen 7 se aprecia que Brayan ya utilizaba símbolos convencionales para solicitar la cantidad de pasajeros que necesitaba su autobús, pero su representación seguía siendo icónica porque requería utilizar tantas grafías como cuadritos de papel solicitaba, realizando una correspondencia término a término.

Imagen 8

La imagen 8 es una representación simbólica en la que Mizraim utilizó una sola grafia convencional para solicitar la cantidad exacta de pasajeros que necesitaba para su autobús.

En este momento de la aplicación de la estrategia de enseñanza, la mayoría de los niños ya eran capaces de realizar el conteo y representar cantidades en un rango del 1 al 10 y, cuando no estaban seguros se apoyaban entre ellos, por lo que podemos decir que compartían, a través del diálogo, sus conocimientos y estrategias.

Cuarta secuencia didáctica: "La papelería"

El propósito central de esta secuencia era que los niños comenzaran a resolver problemas aritméticos en un contexto funcional y significativo para ellos. Primeramente, se organizó el escenario en el que se plantearían las situaciones didácticas. Los materiales que se utilizaron fueron: fichas de colores, fichas de cartón con numerales para indicar su valor y monedas de plástico de 1, 2, 5 y 10 pesos.

Para llevar a cabo esta secuencia, se distribuyó a los alumnos en cuatro equipos de seis integrantes cada uno. Al inicio, la educadora determinó quién haría el papel de vendedor y quienes comprarían. En las siguientes sesiones fueron los niños los que decidían quién jugaría cada rol, incluso, decidieron que uno de ellos sería el encargado de repartir el dinero entre los integrantes del equipo. En la imagen 9 se puede observar cómo se organizaban los niños de los equipos para distribuir las monedas con la cuales jugarían.

Imagen 9

En esta ocasión, Juan Carlos es quien reparte las monedas a sus compañeros para que ellos puedan comprar en la papelería.

A continuación se presenta un diálogo para ejemplificar cómo se llevaba a cabo el juego de la papelería. En esa ocasión la consigna fue: "Van a jugar a comprar en la papelería. Deben pagar con sus monedas y el vendedor deberá regresarles el cambio" Según la variable que se estaba trabajando, el rango era del 1 al 10 y los niños utilizaron fichas de cartón con números representando monedas de 1, 2, 5 y 10 pesos.

CONTEXTO: Los niños se organizan para decidir quién es el que va a vender, quien el cajero y quienes son los que compran. La educadora observa cómo se organizan en el equipo. Finalmente, acuerdan que Alan será el que atienda la papelería y Yahir el que atienda la caja y, en esta ocasión, les entregue una moneda de diez pesos a cada uno de sus demás compañeros que serán los compradores.

Fernando: (Dirigiéndose a Alan) Dame un dado de 5 pesos ¿cuánto me vas a dar de cambio?

Alan: Te regreso dos monedas de a dos pesos y una de a peso.

Mizrraim: Quiero comprar un juguete, tengo 10 pesos ¿cuánto vale?

Alan: Cuesta 10 ¿lo quieres?

Mizrraim: Sí.

Alan se lo entrega, Mizrraim paga con su moneda de 10 pesos y espera su cambio.

Alan: No te queda nada.

Mizrraim: Sí, me tienes que dar cambio.

Alan: no te queda nada.

Mizrraim: (Dirigiéndose a la educadora) ¡Maestra! Alan no me da mi cambio.

Alan: No le queda nada, maestra.

Educadora: A ver, ¿quien le puede explicar a Mizrraim por qué no le queda nada?

José Alfredo: Mira, éste cuesta diez y tú le pagaste a Alan con una moneda de a diez, por eso no te queda nada.

Fernando: Sí, tú tenías una moneda de 10 pesos y tú le pediste el juguete de 10 pesos, por eso no te da cambio.

Educadora: ¿Ya quedaste convencido? (dirigiéndose al niño.)

Mizrraim: Sí (pero su cara muestra lo contrario).

Sonia Ninel: Alan, yo quiero una pintura de 10 pesos.

Alan: (le da la pintura) pero no te sobra cambio.

Fernando: ¿Ya viste Mizrraim como no le dieron cambio a Sonia Ninel igual que a ti?

Educadora: ¿Y por qué pasó lo mismo?

Fernando: Porque los dos cuestan lo mismo.

Educadora: Así es, los dos cuestan 10 pesos y la moneda que tenían era de 10 pesos, por lo tanto, no sobra nada.(con éste niño se trabajo en diversas ocasiones para que él observara las estrategias de sus compañeros y las aplicara posteriormente).

En esta situación se pudo observar cómo los niños utilizaban los conocimientos de tipo social que habían adquirido en su contexto real y los aplicaban al jugar a la papelería. También se pudo observar cómo tomaban sus propias decisiones. Al momento de dar los cambios, ellos mismos corregían a sus compañeros si su cambio no era el adecuado.

Una vez que se llevaron a cabo las secuencias anteriores, según los equipos las iban dominando, las situaciones didácticas trabajadas pasaban a formar parte de las actividades que los niños podían practicar sin el apoyo de la educadora, pero respetando las reglas establecidas. Así, el aula se convirtió en un espacio donde los niños podían practicar las actividades de la secuencias, de manera organizada y asumiendo su responsabilidad, mientras la docente conducía las situaciones didácticas de la siguiente secuencia con un equipo en particular.

Quinta secuencia didáctica: Historias problemas

Para su aplicación, esta situación se dividió en dos fases. En la primera fase se abordó la resolución de problemas aritméticos verbales y, en la segunda, los niños inventaron problemas y los plantearon a sus compañeros.

1ª Fase: Resolución de problemas

Como en las secuencias anteriores, para abordar la resolución de problemas verbales, el grupo se dividió en cuatro equipos y se organizó un circuito para trabajar cada vez con un equipo, mientras los otros practicaban, de manera autónoma, alguno de los juegos que habían aprendido en las secuencias anteriores.

Al inicio, a los niños se les dificultó resolver los problemas, pero en la medida en que se involucraron en la actividad y la practicaron en forma periódica, resolverlos se les fue facilitando. A continuación se presenta un extracto de diálogo de una de las primeras aplicaciones de esta secuencia.

CONTEXTO: La educadora se dirige a un equipo, les proporciona algunos palitos de madera y fichas y les explica la actividad que van a realizar.

Educadora: Les voy a leer unos problemas y ustedes los van a resolver. Aquí les dejo estos materiales y ustedes deciden si los utilizan o no. Pongan mucha atención. Resulta que Vanesa ayer compró diez chocolates y le dio cuatro a Estrella ¿Con cuántos chocolates se quedó Vanesa?

Brayan: Con tres.

Educadora: ¿Cómo lo sabes?

Brayan: (no contesta).

Otros niños: Con cuatro

Educadora: ¿Cómo lo saben? A ver, ¿cómo me podrían demostrar que se quedó con cuatro chocolates? ¿En dónde estarían sus diez chocolates? ¿Con qué podríamos hacer muestros diez chocolates?

Jaqueline: Con las fichas (toma las fichas y cuenta diez). Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve, diez.

Educadora: Los demás también pueden contar sus diez fichas o palitos. Lo que ustedes decidan

CONTEXTO: Todos los niños cuentan las fichas.

Educadora: Pero le dio cuatro a Estrella. ¿Con cuántas se quedó?

Jaqueline: Con tres.

Educadora: A ver, vamos a hacerlo. Cuenta cuatro y dáselas a Areli.

CONTEXTO: Jaqueline le entrega 5 fichas a su compañera.

Fernando: No, está mal es así (dirigiéndose a la educadora, muestra con sus dedos la cantidad correcta).

CONTEXTO: Jaqueline cuenta las cinco fichas que le quedan.

Fernando: No, así no es (se dirige a su compañera corrigiéndola y él le muestra cómo hacerlo).

Brayan: (Cuenta sus fichas) Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve, diez, once.

Educadora: Se me hace que te están sobrando. ¿Cuantas te sobran?

Brayan: Una.

Educadora: A ver, ahora separa cuatro ¿cuántas te quedan? (se le apoya al niño para que se de cuenta de que su conteo no es eficiente)

Brayan: (Hace lo que le dice la educadora y cuenta) Una, dos, tres, cuatro, cinco, seis.

Educadora: Seis fichas ¿me lo podrías hacer en esta hoja, en dónde anotes cuántos dieron y con cuántas se quedó?

Brayan: ¿Cómo?

Educadora: Como tu sepas, si ya sabes hacer los números házmelos aquí.

CONTEXTO: Los otros niños del equipo empiezan a hacer lo que su compañero hizo y corroboran lo que el dijo.

Fernando: Sobran seis.

Éste es sólo un ejemplo del diálogo que generalmente se desarrollaba, pero en cada situación surgían nuevas estrategias como el conteo verbal, por parte de los niños para resolver los problemas aritméticos planteados. Un factor importante para que fueran avanzando y utilizando estrategias de resolución más elaboradas y eficientes fue el apoyo que se daban entre ellos de manera espontánea y cuando la educadora los animaba a socializar sus conocimientos. Además, la docente procuraba que expresaran y explicaran sus procedimientos con preguntas o frases claves como: "¿cómo lo sabes?", ¿cómo me lo puedes demostrar o explicar?" y "dibuja o elabora tu problema"

El hecho de que los niños explicaran sus procedimientos facilitaba a los demás encontrar la manera de resolverlos. Algunos lo lograban más rápido y lo hacían de manera más completa y explícita que otros. Esta situación se aprovechó posteriormente para distribuir a los equipos de tal forma que, los niños que ya tenían mayor dominio, apoyaran a los que todavía se les dificultaba y así pudieran llevar a cabo la actividad sin el apoyo de la educadora en los momentos en que ésta se encontraba trabajando con otro equipo.

2ª Fase: Los niños inventan problemas

Esta fase se inició con cierta reserva ya que, como se mencionó, en la fase anterior la resolución de problemas se les dificultó, por lo que se pensaba que a los niños se les dificultaría esta fase, ya que tendrían que formular los problemas con sus propias palabras y, por ello, se dejó al final de la aplicación de la estrategia de enseñanza. Sin embargo, fue sorprendente observar que esto no les representó gran dificultad porque empleaban formas verbales semejantes a los de los problemas que habían resuelto en la fase anterior. A pesar de que la invención de problemas aritméticos implica en los niños un razonamiento estructurado ya que deben por un lado formular el problema, determinar los datos y dar el resultado. Esto se logra en la medida en que los niños tengan un proceso en el cual pongan en práctica sus aprendizajes y estrategias.

En el siguiente diálogo se puede apreciar cómo formulaban sus problemas.

CONTEXTO: La educadora entrega una hoja a cada niño del equipo, les proporciona algunas fichas y palitos de madera y les explica la actividad.

Educadora: en esta hoja van a hacer un problema como los que ya hemos jugado. Pueden utilizar los materiales que tienen en la mesa. El problema se lo van a decir a sus compañeros para que ellos se los resuelvan.

CONTEXTO: Los niños comienzan a elaborar su problema en la hoja.

Educadora: ¿Ya tienen su problema?

Fernando: Yo ya.

Educadora: A ver ¿Qué hiciste Fernando?

Fernando: Tenía cinco pececitos y me comí cinco y me quedan dos.

Educadora: A ver, cuántos te comiste.

Fernando: Tres.

Educadora: Pero si tenías cinco y te comiste cinco ¿Cuántos te quedan?

Vanessa: Seis.

Educadora: Si tenía cinco y me comí cinco ¿Cuántos me quedan?

Fernando: Cinco.

Educadora: (Escribe en la hoja el problema de Fernando.) A ver, cuenta cinco fichas que son tus pececitos y me das cinco ¿Cuántas te quedan?

Fernando: (Piensa) nada.

Vanessa: Yo tenía siete chocolates y me comí tres ¿Cuántos me quedan?

Educadora: (Lee el problema de Vanesa) Tenía siete chocolates y se comió tres ¿Cuántos le quedan?

Vanessa: Cuatro.

CONTEXTO: Los otros niños comienzan a representar el problema para comprobar si quedan cuatro.

Fernando: Sí, son cuatro.

Brayan: (Expone su problema) tengo 15 chocolates y le regalé 12 a Carlos ¿Cuántos me quedan? (Cuenta los doce chocolates y se los da a su compañero).

Brayan: Me quedan tres.

Los otros niños intentan resolver el problema pero no lo logran y Brayan los apoya.

Brayan: Aquí tengo los 15 chocolates y le regalo 12 a Carlos, me quedan tres chocolates.

Vanessa: Sí, ya lo hice, le quedan 3 chocolates.

Al principio inventaban el problema pero ellos mismos daban la solución. Poco a poco se fueron familiarizando con el planteamiento de problemas logrando estructurarlos con mayor cantidad de elementos y ya no daban la respuesta a sus compañeros. Además, la actividad resultó muy motivante ya que para ellos se trasformó en un reto el que sus compañeros de equipo contestaran acertadamente su problema.

Cuando los niños inventaban sus problemas la educadora establecía un rango como por ejemplo, del 1 al 5, del 1 al 10 ó más así los niños tenían un parámetro para inventar su problema. Se podía observar como ellos primero formaban los conjuntos que necesitaban para su problema y la solución a este, después lo estructuraban, para poderlo expresar a sus compañeros.

Como parte de esta secuencia, tanto en la fase de resolución como en la de invención de problemas, se promovió la representación gráfica. La educadora les proporcionaba hojas y crayolas y les pedía que anotaran el problema. En la imagen 10 se puede ver una escena mientras los niños desarrollan esta tarea.

Imagen 10

Cuando los niños ya lograban elaborar sus propios problemas aritméticos se los decían a sus compañeros de equipo para que ellos los resolvieran. Aquí, Estrella propone su problema y Luis Marco es quien lo resuelve mostrando su resultado. El problema es Tengo 8 broches y Luis Marco me da 4 ¿Cuántos tengo ahora?

En algunas ocasiones la representación gráfica les sirvió para apoyar su estrategia de resolución porque les permitía tener un apoyo concreto para observar los conjuntos y acciones que se mencionaban. Otras veces, únicamente se utilizó para expresar los resultados obtenidos o para poder recordar los datos que mencionaba el problema. Más adelante se presentan algunos ejemplos de las producciones gráficas elaboradas por los niños.

Cada equipo de niños proponía diferentes maneras de llevar a cabo el planteamiento de problemas. Después de plantearlos al interior de sus equipos, propusieron jugar con todo el grupo estableciendo una competencia entre equipos[7] Esto los motivaba mucho y los hacía sentir satisfechos especialmente cuando los integrantes de su equipo lograban resolver correctamente los problemas. De alguna manera, los niños también evaluaban la forma como estaba estructurado el problema, ya que argumentaban no poder resolverlos debido a que no estaban planteados con claridad, ejemplo: Tengo 8 y me regalan 2 ¿Cuántas me quedan? "Decían los niños necesitamos saber que es lo que tenia para saber cuantos tiene"

[7] También propusieron hacer una competencia con otros grupos de la escuela, pero esto se llevó a cabo sólo una vez y la actividad no tuvo éxito, ya que, al no haber tenido experiencias previas, a los niños del otro grupo se les dificultó la actividad y no lograron resolver ni formular los problemas.

Para resolver los problemas, al principio los niños utilizaban estrategias concretas y requerían el apoyo de fichas o palitos. Pero pronto comenzaron a valerse de estrategias más elaboradas. En el siguiente ejemplo, Estrella emplea una estrategia verbal de conteo regresivo.

Estrella: (Repite el problema en voz alta) "Marcos tenía 9 canicas y me regaló 4" (cuenta con sus dedos diciendo uno, dos, tres... hasta el nueve. Después cuenta hacia atrás, señalando cuatro dedos, en orden inverso, a la vez que va diciendo cada número) ocho, siete, seis, cinco, le quedan a Marco cinco.

Juan Carlos: No, son ocho.

Estrella: Mira, cuenta nueve (cuenta apoyándose nuevamente en sus dedos hasta el nueve) ya tengo nueve y le quito 4 me quedan 5. ¿Verdad Marco que son cinco?

Luis Marco: Sí, son cinco.

Educadora: Entonces ¿quien tiene la razón Estrella o Juan Carlos?

Estrella: Yo, porque Luis Marco se quedó con cinco canicas y yo con cuatro.

CONTEXTO: Juan Carlos repite el conteo y lo comprueba.

Cuando se les planteaban los problemas, los niños buscaban estrategias propias para resolverlos como es el caso de Estrella, quien apoyándose en sus dedos, utilizaba el conteo hacia atrás. Cuando los niños se iban familiarizando con los problemas y su conteo se volvía más eficiente, adoptaban estrategias más elaboradas, similares a las que señalan Carpenter y Moser (1982) y DeCorte y Verschafel (1987) quienes observaron que, primero, los niños necesitan del apoyo de los objetos para resolver los problemas y, paulatinamente, pasan al conteo verbal y al empleo de combinaciones numéricas. En este ejemplo se puede ver que Estrella ya no requería tanto de los apoyos concretos y utilizaba el conteo de las palabras para obtener el resultado final.

También usaban las combinaciones numéricas que iban aprendiendo con las actividades de las secuencias y con la resolución misma de los problemas.

Ejemplos de representación gráfica de los problemas

Hasta aquí se han mencionado las formas como los niños resolvían los problemas aritméticos. Como se comentó anteriormente, en esta secuencia didáctica se trabajó también la representación gráfica de los problemas. Algunas de sus representaciones reflejaban las estrategias que en ese momento eran capaces de utilizar. A continuación se muestran algunas de sus producciones.

En el ejemplo de la imagen 11 se puede apreciar que Sonia se apoyaba en el modelaje directo. El problema que trata de representar es "Había ocho focas que estaban jugando, cuatro se fueron a nadar. ¿Cuántas se quedaron jugando?". Primero dibuja círculos grandes para representar el conjunto de las ocho focas y los utiliza para encontrar el resultado del problema. Menciona que el resultado son cuatro e intenta representarlo dibujando otros círculos más pequeños. Finalmente, encierra cuatro que es el resultado que mencionó.

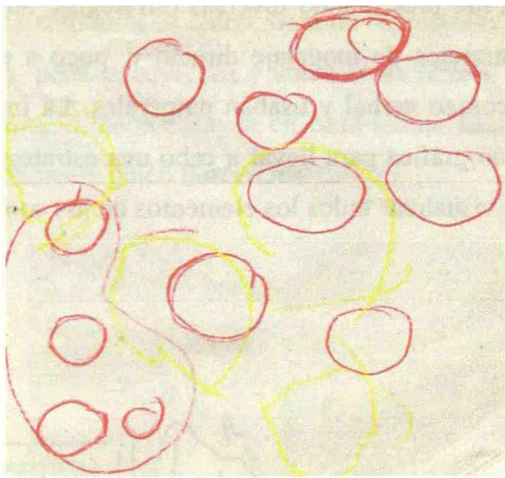


Imagen 11

Otro ejemplo es el que se muestra en la imagen 12. En esta imagen Vanessa representa el problema que ella misma inventó con dibujos y numerales pero para resolverlo se apoya en el trazado de rayas. El problema decía: "Hoy compré cuatro panes pero me llegaron visitas y compré cinco panes más ¿Cuántos panes compré en total?" Representa los panes comprados con las grafías cuatro y cinco. Las rayas que se observan en la imagen son los conjuntos que va formando. Primero traza 4 palitos, después otros

cinco y finalmente los nueve que representan la cantidad total. Para mostrar el resultado anota la grafia nueve de manera invertida.

Imagen 12

Cada uno de los niños fue presentando diversas estrategias. Algunos se quedaban por periodos largos con la estrategia de modelaje directo y, poco a poco, de acuerdo a sus experiencias, pasaban al conteo verbal y usaban numerales. La imagen 13 ejemplifica el empleo de la representación gráfica para llevar a cabo una estrategia de sobreconteo en la que el niño ya no necesita visualizar todos los elementos de los conjuntos enunciados en el problema.

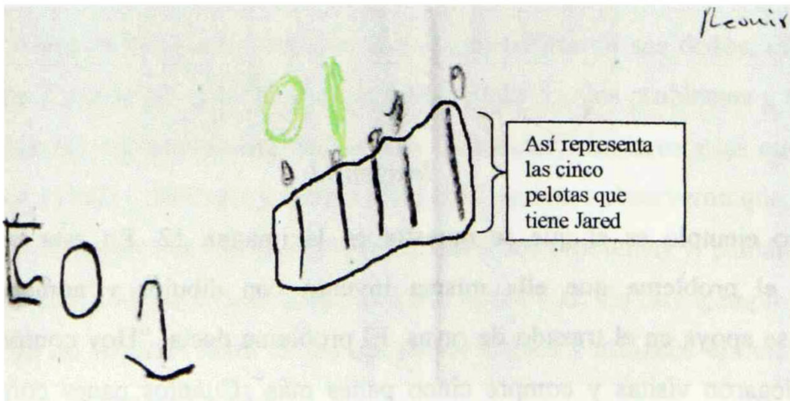


Imagen 13

En este ejemplo, Carlos Alberto utiliza numerales y palitos para representar las cantidades del siguiente problema: "Estrella tiene cinco pelotas rojas y Jared tiene 5 pelotas amarillas ¿Cuántas pelotas tiene los dos juntos?". Al momento de representarlo, Carlos Alberto ya no dibuja el primer conjunto de las 5 pelotas de Estrella, sólo representa, con palitos, las pelotas que tenía Jared y comienza a contarlas a partir del cinco para llegar al resultado. Por último, utiliza numerales para representar el resultado que es 10, aunque lo hace invirtiendo la posición de las grafías.

Los niños comenzaron a emplear las grafías convencionales en sus representaciones relativamente rápido, aunque en algunos casos las usaban como sustituto de la representación de los objetos. En la imagen 14 se observa esta situación.

Para representar el problema "Vanessa tenía 10 paletas y le regaló a Fernando cinco paletas ¿Cuántas paletas tiene ahora Vanessa?", Brayan inicia tratando de anotar la serie numérica del uno al diez para representar las 10 paletas de Vanessa, aunque se salta el 8 y el 9. Como ya sabe que la respuesta es cinco, trata de representarla anotando la serie del 1 al 5 debajo de la anterior, pero se equivoca y anota hasta el seis. Al no estar seguro de la representación de su resultado, hace ensayos en cada hilera, hasta que en la última logra anotarlo empleando exactamente cinco numerales.

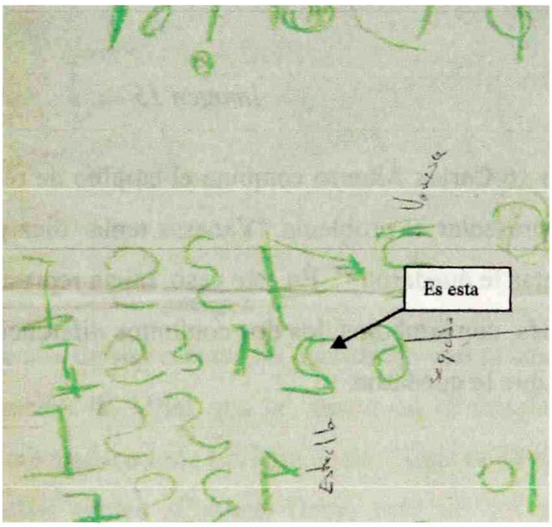


Imagen 14

Brayan en esta representación intenta primero representar los primero cinco numérales al ser cuestionado por la educadora el niño vuelve a escribir los numerales pero hasta el seis, la educadora pregunta que como lo sabe, vuelve a escribir los numerales hasta lograr escribir la cantidad que el considera es la adecuada.

A veces, los niños representaban los elementos de los conjuntos pero no empleaban esa representación para resolver el problema. Por ejemplo, en la imagen 15 se muestra el problema que elaboró Alan y que decía "Alan tenía 10 canicas y le dio a Yahir 10 ¿Cuántas me quedan?" Para representarlo el niño dibujó las 10 canicas pero para resolverlo contó con sus dedos. Primero enumeró sus diez dedos y luego empleó la estrategia de contar hacia atrás. Sin embargo, no concluyó el conteo porque en el proceso se percató que contaría los diez dedos nuevamente y, por lo tanto, el resultado sería "nada" o "cero".

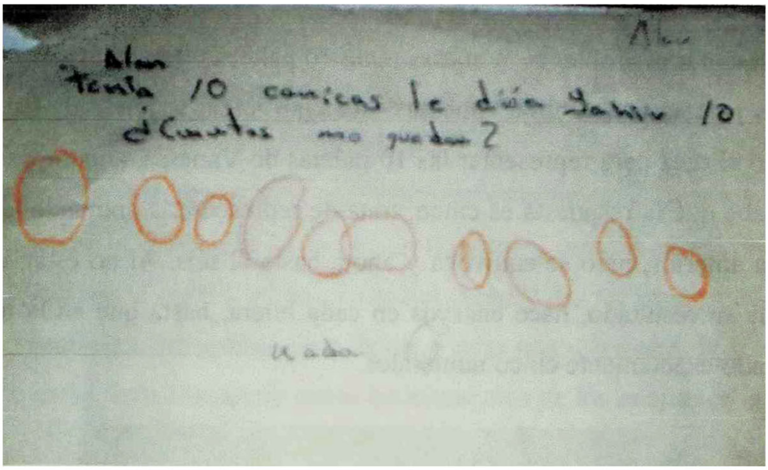


Imagen 15

En la imagen 16 Carlos Alberto combina el empleo de representaciones simbólicas y numerales para representar el problema "Vanessa tenía diez paletas y le dio a Estrella cuatro ¿Cuántas paletas le quedaron?" En este caso, inicia representando con numerales las diez paletas, y después, con símbolos, los dos conjuntos diferenciados de las cuatro paletas que regaló y las seis que le quedaron.

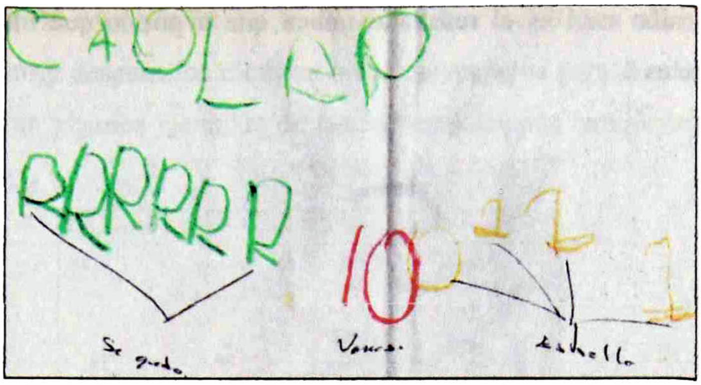


Imagen 16

En varios casos los niños usaban sólo numerales para representar las cantidades que se mencionaban en el problema, así como el resultado. Por ejemplo, para representar el problema: "Estrella tiene tres chocolates y Michel tiene ocho. ¿Cuántos chocolates necesita Estrella para tener la misma cantidad de chocolates que Michel?" Luis Marco anota los numerales 3, 8 y 5 como se muestra en la imagen 17 (conto con los dedos para representar los datos y finalmente el resultad).

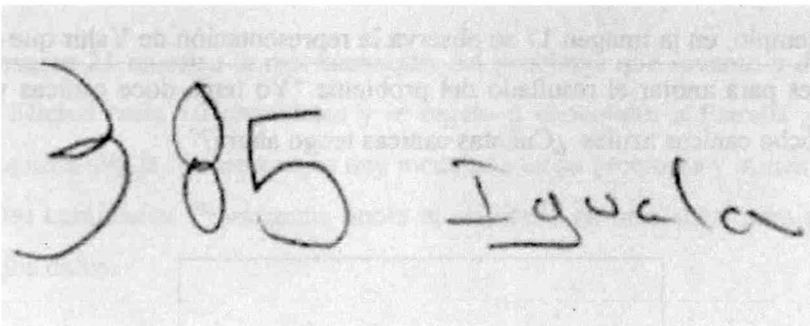


Imagen 17

También se observaron intentos de representar las cantidades con palabras numéricas. Este es el caso de la representación de Uriel que se ilustra en la imagen 18. El problema inventado y dictado por su compañero Luis Enrique decía: "Luis tenia cinco fichas azules y Luis Enrique tenía tres fichas azules ¿Cuántas fichas tenemos los dos?" Como puede observarse, Uriel anota las dos cantidades dictadas con las grafias 3 y 5 y trata de escribir la palabra "seis" para representar el resultado, aunque en esta ocasión, es incorrecto. Al preguntarle al niño cual es el resultado indica que 6 por lo que un Brayan lo corrige indicándole que es 8.

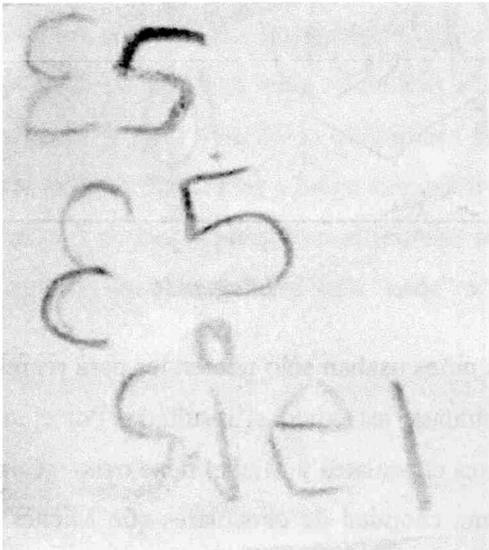


Imagen 18

En otros casos los niños anotaban solamente el resultado del problema. Esto se daba, especialmente, cuando lo resolvían empleando las combinaciones numéricas que ya sabían. Por ejemplo, en la imagen 17 se observa la representación de Yahir que usa grafías convencionales para anotar el resultado del problema "Yo tenía doce canicas verdes y le gané a Jared ocho canicas azules ¿Cuántas canicas tengo ahora?"

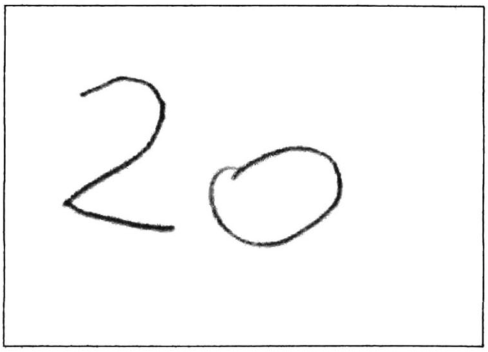


Imagen 19

En la segunda fase de la quinta secuencia los niños inventaban sus problemas, los formulaban por escrito y después los dictaban a sus compañeros para que los resolvieran. Enseguida se muestran algunos ejemplos de las representaciones que llevaron a cabo en esta fase.

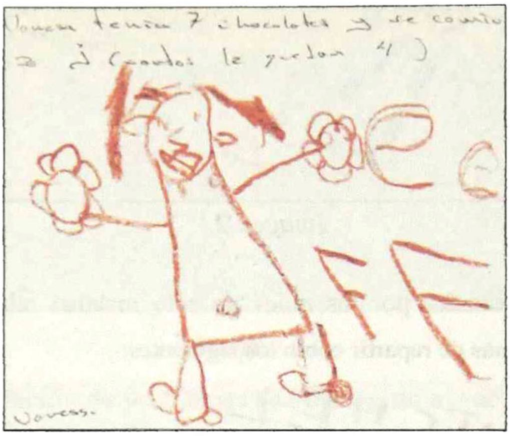


Imagen 20

En la imagen 20 se puede ver uno de los primeros intentos de Vanessa para presentar su problema el cual formuló de la siguiente manera: "Tenia siete chocolates y me comí tres ¿Cuántos me quedan?" Se dibuja ella misma y anota el siete de forma invertida para expresar los siete chocolates que tenía.

La imagen 21 muestra la representación del problema que inventó y dictó Michell que decía: "Michel tenia 10 chocolates y le regalo 6 chocolates a Estrella ¿Cuántos les quedan?" La niña dibuja los personajes que menciona en su problema y utiliza grafías para representar las cantidades. Finalmente, anota el resultado en otro color para diferenciarlo del resto de los datos.

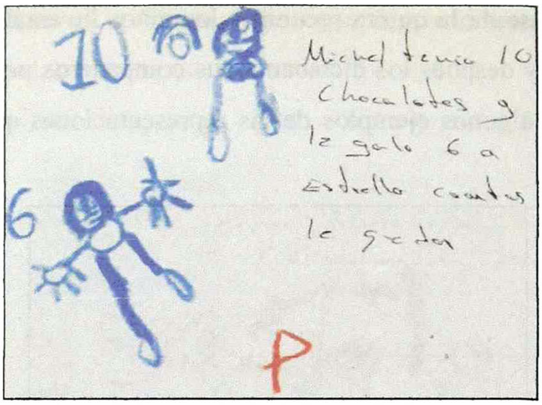


Imagen 21

Los problemas inventados por los niños no sólo incluían relaciones aditivas. Algunos formulaban también problemas de repartir como los siguientes:

Imagen 22

En la imagen 22 se muestra otro problema formulado por Michel que decía: "Michel tenía nueve dulces y los repartió a sus tres amigos ¿Cuántos dulces le tocan a cada uno?" Primero representa el conjunto de los elementos que es la nube que se observa. Se dibuja ella en la parte alta del lado izquierdo escribiendo en forma indecisa el numeral (escribe primero el seis y encima de este el nueve) posteriormente representa a sus tres amigos y le anota a cada uno el número tres que corresponde a los dulces entregados.

Otro problema de repartir es el siguiente que inventó Maricela: "Tengo 3 pasteles y se los voy a repartir a mis 3 amigas ¿cuántos pasteles le tocan a cada amiga?" En la imagen

23 se puede ver la representación que llevó a cabo Jessica para resolver el problema planteado por su compañera.

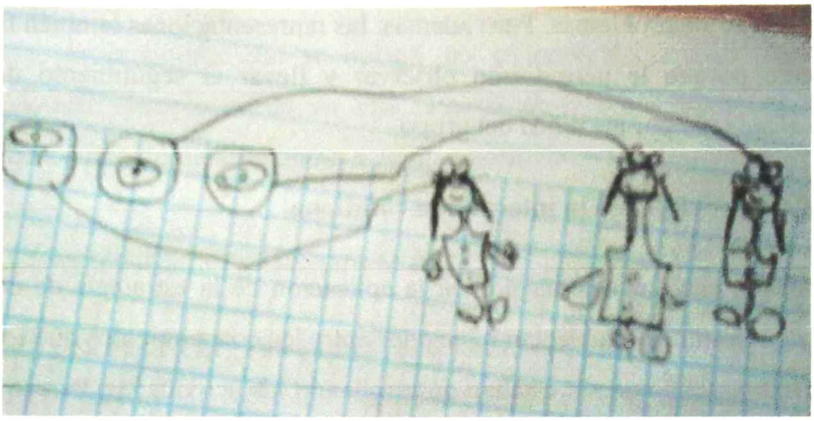


Imagen 23

En la actividad de formulación de problemas se observó un avance significativo. Los niños utilizaban, por iniciativa propia, cantidades mayores y, además, algunos planteaban relaciones más elaboradas. Por ejemplo Luis Marco inventó y planteó el siguiente problema: "Tengo 18 canicas en 3 botes y las voy a repartir a mis 6 amigas ¿Cuántas canicas le tocan a cada una?" Como puede observarse en la imagen 24 Luis Marco representa las 18 canicas y primero distingue cuántas había en cada uno de los botes encerrándolas en grupos de seis. Posteriormente, dibuja a las seis amigas y anota con la grafía convencional la cantidad que toca a cada una.

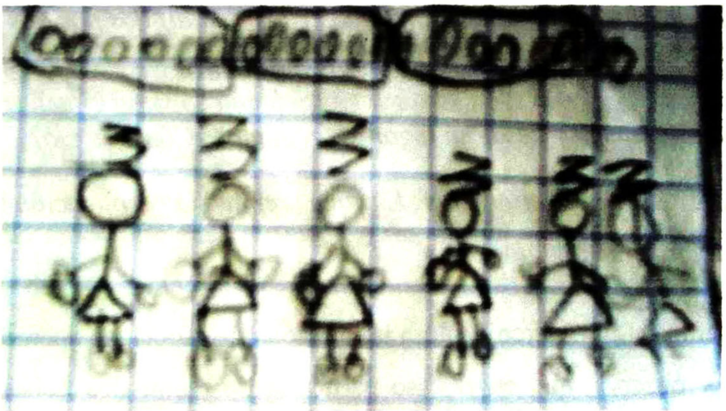


Imagen 24

Como se puede apreciar en las imágenes mostradas, la representación gráfica fue un apoyo importante para los niños porque lo empleaban para expresar sus ideas y como medio para resolver los problemas. Pero además, las representaciones también fueron útiles para la docente porque le permitieron observar y llevar el seguimiento del nivel de comprensión alcanzado por los niños del grupo.

Otros aprendizajes en la interacción cotidiana

Finalmente, cabe mencionar que en la aplicación de la estrategia de enseñanza se observó que algunos niños establecían relaciones entre los conocimientos que tenían y otros nuevos y los expresaban cuando estaban desarrollando las actividades. Parece ser que los niños no se limitan a aprender sólo aquello que los docentes nos proponemos enseñarles específicamente. Algunos expresaban espontáneamente comentarios que reflejaban sus ideas y descubrimientos. El siguiente diálogo ejemplifica el descubrimiento que lleva a cabo uno de los niños del grupo:

Luis Marco: ¿Verdad maestra que es lo mismo "dos más dos" que "dos por dos"?

Docente: ¿Por que dices eso Luis Marco?

Luis Marco: Porque mira, tengo dos fichas (toma dos fichas y las pone sobre la mesa) y dos fichas (pone otras dos fichas) son cuatro, dos más dos son cuatro. (Enseguida coloca otras dos y las señala) dos por dos (vuelve a sacar otras dos y las pone a un lado) son cuatro.

Luis Enrique: (escucha y desde su lugar le pregunta) ¿Cómo es eso?

Luis Marco: Es así, ven. (Luis Enrique repite la explicación que dio anteriormente a la docente)

En este ejemplo Luis Marco explora la relación que asocia las operaciones de sumar y de multiplicar y observa, que en el caso particular de reunir dos fichas con otras dos fichas, es decir, establecer una relación aditiva, el resultado coincide con el de la operación de poner dos fichas dos veces, es decir establecer una relación multiplicativa. Lo que el niño trata de exponer es su idea de que hacer una operación de "por" (como él se refiere a la multiplicación) significa sumar repetidamente ese número.

Aunque la propuesta que se trabajó no se enfocaba explícitamente sobre la multiplicación, este ejemplo puede ser una muestra de que los niños tienden a usar y extender un conocimiento para encontrar sentido en otro.

3.3 EVALUACIONES INTERMEDIA Y FINAL

Como se mencionó al principio de este capítulo, se llevó a cabo una evaluación intermedia a fin de reorientar el desarrollo de las secuencias didácticas y una evaluación final al término de la aplicación de la estrategia de enseñanza. La evaluación intermedia se aplicó en el mes de abril de 2008 y la final en el mes de octubre del mismo año.

En ambas evaluaciones se emplearon las mismas actividades diseñadas para la evaluación diagnóstica: 1) la primera parte del juego "Ganar y perder" que consistía en tirar un dado convencional con puntos del 1 al 6 y ganar o perder la cantidad de fichas que indicaba la cara del dado y 2) la aplicación de una serie de problemas verbales aditivos y de repartir. La única modificación que se tuvo que introducir fue el rango numérico empleado. En la evaluación diagnóstica las cantidades no excedían de seis elementos, pero en el momento de las evaluaciones intermedia y final, los problemas con este número resultaban muy sencillos para la mayoría de los niños, por lo que se decidió emplear cantidades de al menos 12 elementos tanto en la resolución de los problemas aritméticos, como en la actividad para evaluar el nivel de dominio del conteo que tenían los niños. Para ésta última, en el juego "ganar y perder" se emplearon dos dados en lugar de uno.

Del mismo modo que en la evaluación diagnóstica, la aplicación se llevó a cabo en cuatro sesiones de 60 minutos, aproximadamente, atendiendo a un equipo de seis integrantes, cada vez.

Para llevar el seguimiento de los avances de los niños a lo largo de la aplicación de la estrategia de enseñanza y ubicar el nivel en que se encontraban los momentos de la evaluación intermedia y final se utilizaron cuadros diseñados para este fin y descritos al inicio de este capítulo, en los que se señalan las acciones que indican tres niveles de dominio o apropiación de las estrategias empleadas por los educandos para resolver los problemas.

Los resultados de estas evaluaciones y de la evaluación diagnóstica se presentan en el siguiente capítulo.

CAPÍTULO 4

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

En este capítulo se presentan y discuten los datos que dan cuenta de los avances observados en los niños del grupo segundo "D" en un Jardín de niños del Valle de Toluca, México, a partir de la estrategia de enseñanza aplicada, así como de algunos cambios operados en la intervención educativa de la docente que llevó a cabo dicha aplicación y que reporta este trabajo de tesis.

En cuanto a *los avances de los niños*, se comparan los datos obtenidos en las evaluaciones inicial, intermedia y final y se presentan a través de algunas gráficas.

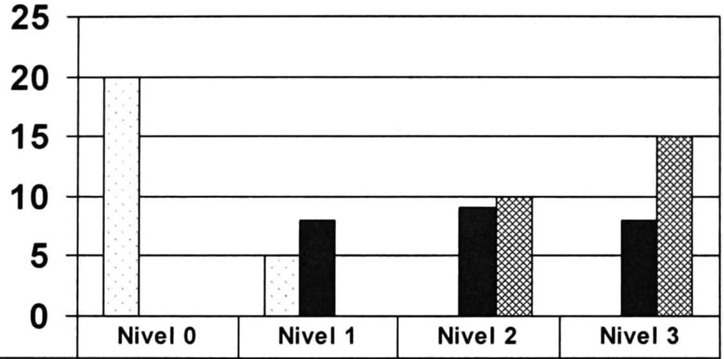
Como se explicó anteriormente, para llevar a cabo esta valoración, se examinaron las estrategias que los niños empleaban para resolver tres tipos de problemas. El primero consistía en reconocer la cardinalidad de una colección y construir una colección equivalente; el segundo, en resolver problemas aditivos (de reunir, agregar, quitar, igualar y comparar) planteados verbalmente y el tercero, en resolver problemas de repartir también planteados verbalmente. La identificación del nivel en que se encontraba cada uno de los educandos se determinó a partir de la información de los cuadros de niveles presentados en el capítulo 3.

En la gráfica 1 se muestra la frecuencia de niños que empleó estrategias de cada nivel para resolver el primer tipo de problemas, en cada momento de la evaluación. El problema se planteó a través de un juego en el que los niños tiraban un dado y ganaban la cantidad de fichas que indicaba la cara del mismo.

Cabe mencionar que en esta actividad también se pudo observar la posibilidad de los niños de contar oralmente. Aunque algunos eran capaces de repetir la serie numérica en el orden convencional hasta cierto número, no coordinaban la palabra numérica que pronunciaban con el objeto, es decir, no había correspondencia en su conteo, por lo cual no les servía para determinar la cantidad correcta. En la resolución del problema planteado en la evaluación, se consideró que los niños se ubicaban en el nivel 3, siempre y cuando su conteo fuera eficiente y útil para reconocer el valor de la colección.

Gráfica 1

Estrategias empleadas por los niños para identificar la cardinalidad de un conjunto y construir una colección equivalente



	Nivel 0	Nivel 1	Nivel 2	Nivel 3
□ Evaluación diagnóstica	20	5	0	0
■ Evaluación intermedia	0	8	9	8
⊠ Evaluación final	0	0	10	15

Descripción de los niveles:

Nivel 0: No se le ocurre ninguna estrategia para resolver el problema.

Nivel 1: Toma una cantidad cualquiera de elementos sin importar si sobran o faltan. Su estrategia se basa en la percepción. Parece pensar "si se ven muchos tomo una cantidad grande"

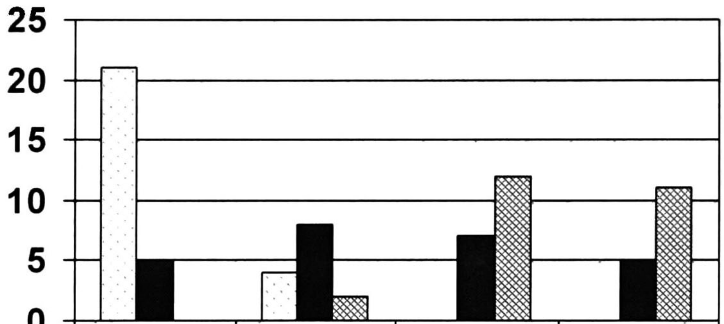
Nivel 2: Resuelve el problema sólo si puede establecer correspondencia física o visual entre los elementos de cada conjunto. Cuando los conjuntos son muy pequeños (menores de cinco elementos) pueden emplear la percepción global de la cantidad.

Nivel 3: Utiliza el conteo de manera eficiente. Cuenta los elementos del conjunto de referencia (por ejemplo, los puntos del dado) y construye el conjunto equivalente (por ejemplo de fichas ganadas) también contando sus elementos.

Como se puede apreciar en la gráfica 1, el avance en este aspecto fue evidente. En la evaluación diagnóstica, la mayor parte del grupo se encontraba en el nivel 0 y únicamente 5 niños alcanzaron el nivel 1. A lo largo de la aplicación de las secuencias didácticas, las estrategias de los niños fueron evolucionando de manera que, en la evaluación final, la totalidad del grupo se ubicó en los niveles 2 y 3. Es importante mencionar que en la evaluación diagnóstica se valoró la posibilidad de conteo de los niños con colecciones de al menos 6 elementos, en tanto que en las evaluaciones intermedia y final el problema planteado resultaba muy fácil con cantidades de este rango numérico, por lo que se decidió emplear cantidades de 12 o más objetos. Cabe señalar, que los 10 niños que no alcanzaron el nivel 3 en la evaluación final, eran capaces de resolver el problema de la actividad evaluatoria con cantidades menores y, por lo tanto, podían emplear estrategias de conteo en la resolución de los problemas aritméticos con cantidades pequeñas.

Gráfica 2

Estrategias empleadas por los niños para resolver problemas que implican relaciones aditivas (agregar, reunir, quitar, igualar y comparar)



	Nivel 0	Nivel 1	Nivel 2	Nivel 3
□ Evaluación diagnóstica	21	4	0	0
■ Evaluación intermedia	5	8	7	5
⊠ Evaluación final	0	2	12	11

Descripción de los niveles:

Nivel 0: No se le ocurre ninguna estrategia para resolver el problema.

Nivel 1: Utiliza estrategias de conteo apoyándose en objetos. Requiere visualizar todos los elementos los dos conjuntos y realizar concretamente las acciones que indica el problema.

Nivel 2: Utiliza estrategias verbales como la de sobreconteo apoyándose en objetos o en los dedos.

Nivel 3: Utiliza las combinaciones numéricas que conoce.

En la gráfica 2 se observa la evolución de los procedimientos de resolución de problemas aditivos desde los niveles 0 y 1 en que se encontraba el grupo al inicio de la aplicación de la estrategia de enseñanza hasta los niveles 2 y 3 en los que se ubicó la mayoría de los niños en la evaluación final. Cabe mencionar que en las evaluaciones intermedia y final se ubicó en el nivel 3 a los niños que reconocían algunas combinaciones de números mayores de 12, ya que este rango es el que se tomó en cuenta en esas evaluaciones, pero es importante mencionar que la mayoría de los niños empleaban, en algunos momentos, las combinaciones numéricas que sabían con números más pequeños y también que, aún cuando fueran capaces de utilizar hechos numéricos, los niños del nivel 3, en ocasiones recurrían también a estrategias más sencillas, de conteo verbal o incluso concretas cuando el problema era más difícil. Cuando las cantidades del problema eran mayores a 25, por lo general los niños regresaban al empleo de las fichas o se apoyaban contando con sus dedos.

Aunque el rango numérico considerado para el planteamiento de los problemas era menor, se incrementó por iniciativa de algunos de los alumnos, ya que al inventar sus problemas usaban los números que ellos elegían. Fuenlabrada (2005, 2009) plantea que no se requiere emplear números grandes para complejizar los problemas y recomienda trabajar con cantidades pequeñas en la etapa preescolar. Lo observado con los niños indica que si bien es cierto que al principio los niños tienen que comenzar con números pequeños porque su conteo es limitado, con el tiempo van desarrollando la habilidad de contar y de razonar con números mayores. Se observó el planteamiento de problemas por parte de algunos niños con cantidades mayores a 20 elementos. Para resolver estos problemas los niños extendían su conocimiento de la serie numérica. Por ejemplo si tenían que saber cuánto faltaba del 32 al 40, lo hacían contando del 2 al 10.

En el PEP 2004 no se señala una cantidad específica con la que se deban trabajar los problemas aritméticos. Se observó que al finalizar la aplicación de la estrategia de enseñanza, todos los niños del grupo eran capaces de resolver los problemas con cantidades de por lo menos 12 elementos y, por lo menos la tercera parte del grupo, podía hacerlo con cantidades alrededor de 20. Como se mencionó anteriormente, algunos llegaron a hacerlo con números hasta 50.

Se pudo ver, de manera general, que las estrategias de los niños evolucionaron por los tres niveles de abstracción que señalan Carpenter y Moser (1982), Riley, Heller, y Greeno (1983) y De Corte y Verschafel (1987) y también se observaron algunas de las variantes que describen estos autores en cada nivel. Las más comunes eran el "conteo hacia delante a partir de" (o sobreconteo) en los problemas de sumar y el "conteo hacia atrás" (o conteo regresivo) en los problemas de restar. Otra estrategia verbal empleada con frecuencia en los problemas de restar era el "conteo hacia delante desde el número más pequeño"

Un hecho notorio observado es que algunos niños invertían los números del problema para comenzar a contar por el más grande por ejemplo, en el problema "Brayan tiene 9 paletas y Yahir 15 ¿cuantas paletas tienen los dos juntos?" empezaban a contar desde el 15 y no desde el 9. Para poder llegar a distinguir este proceso los niños empezaron con cantidades pequeñas y poco a poco fueron encontrando nuevas estrategias para resolverlos, y poder explicar a sus compañeros de equipo como lo hacían.

Esto indica que entendían que no importa el orden de los números en la suma para obtener el mismo resultado. Es decir, llegaron a comprender la propiedad conmutativa de la suma.

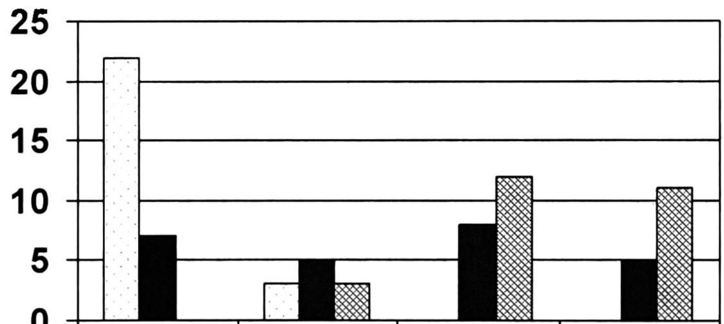
En cuanto a la relación de la estructura del problema con la estrategia utilizada, también se observó lo que plantean Riley, Heller, y Greeno (1983), sobre todo cuando los niños tenían que modelar el problema con objetos, llevaban a cabo las acciones concretas de agregar, quitar, juntar o comparar los elementos. Para los problemas de igualar se observó algo curioso. Por lo general, los niños no construían los dos conjuntos y los comparaban, sino que construían uno (el del número más pequeño) y luego iban agregando la cantidad de elementos necesaria para llegar al más grande. Por ejemplo, en el problema "Estrella tiene 12 canicas y Luis Enrique tiene 20 ¿cuántas le faltan a Estrella para tener las mismas que Luis Enrique? Primero ponían 12 fichas para representar el conjunto de Estrella y luego agregaban fichas para llegar hasta 20 y el resultado lo sabían contando las fichas que habían agregado.

Fuenlabrada (2005, 2009) refiere que la dificultad de los problemas no está sólo en el tamaño de los números sino en el tipo de relación en los problemas. Se pudo ver que los problemas de igualar y de comparar eran más difíciles para los niños que, por ejemplo, los de reunir o los de quitar. Parece ser, según lo que señalan Riley, Heller, y Greeno (1983) que esto se debe a que en los problemas de igualar y comparar los niños tienen que poner en práctica mayor cantidad relaciones que en los de reunir o quitar.

En relación con los problemas de repartir, en la gráfica 3 se muestran los resultados.

Gráfica 3

Estrategias empleadas por los niños para resolver problemas de repartir



	Nivel 0	Nivel 1	Nivel 2	Nivel 3
□ Evaluación diagnóstica	22	3	0	0
■ Evaluación intermedia	7	5	8	5
▧ Evaluación final	0	3	12	11

Descripción de los niveles:

Nivel 0: No se le ocurre ninguna estrategia para resolver el problema.

Nivel 1: Reparte parcialmente. El reparto no es equivalente (porque da una cantidad a cada quien sin cuidar que a todos les toque lo mismo) ni exhaustivo (porque *asignan uno o dos elementos a cada parte sin importar que queden elementos sin repartir).*

Nivel 2: Reparte equitativamente y agota todos los elementos del conjunto. La estrategia más común es asignar un elemento a cada parte, en tantas rondas como sea necesario. Otra estrategia es dar a cada quien una determinada cantidad y compensar el reparto quitando o agregando elementos hasta que todos tengan la misma cantidad.

Nivel 3: Utiliza las combinaciones numéricas que conoce.

La gráfica 3 muestra el avance de las estrategias de los niños para resolver los problemas de repartir. Según se puede apreciar, en la evaluación diagnóstica únicamente 3 niños del grupo alcanzaron el nivel 1, en tanto en la evaluación final la mayoría ponía en práctica estrategias de los niveles 2 y 3.

Cabe aclarar que en las actividades de las secuencias didácticas, la dificultad de los problemas de repartir se fue incrementando, llegando a realizar repartos con cantidades de hasta 30 elementos entre cinco o seis partes. En la evaluación diagnóstica se emplearon repartos más simples, con cantidades menores y entre dos o tres partes.

En las acciones de los niños para resolver este tipo de problemas se observó lo descrito por Kieren (1983, 1988 citado en Ramírez, 1994) en cuanto a las características del reparto. En un principio, los niños no tomaban en cuenta la equivalencia ni la exhaustividad al repartir, pero poco a poco sus estrategias se fueron haciendo más eficientes y, relativamente pronto, comenzaron a emplear hechos numéricos, ya que recordaban el resultado de sus repartos anteriores. Algunos eran capaces de explicar que en 50 había "cinco veces diez" o que 50 repartidos entre cinco le tocaban "de a diez a cada quien"

En ninguno de los documentos teóricos revisados se mencionan las diferencias en la dificultad de los problemas multiplicativos, pero se observó que para los niños era más fácil resolver los problemas de repartir que los de agrupar. Posiblemente porque en los de repartir podían tener a la vista el conjunto total de los elementos y de ahí obtenían las partes. En cambio en los de multiplicar o agrupar, al principio, sólo tenían lo que valía una de las partes y no conocían el conjunto total hasta que habían terminado la construcción de todas las partes y contaban los elementos del conjunto total.

Es importante mencionar que se observaron diferencias individuales en el aprendizaje de los niños. Algunos requerían mayor apoyo que otros y, por eso la atención por parte de la docente era diferenciada.

En general, una vez que los niños tenían el dominio del conteo, lo empleaban para resolver los problemas que se le presentaban y, de forma paulatina, iban dejando de lado los objetos físicos para apoyarse únicamente en el conteo verbal. Pero a algunos niños les costó más trabajo que a otros pasar de la estrategia de modelaje directo a la estrategia basada en el uso del conteo. Para facilitar que estos niños lograran avanzar, se les solicitó a los compañeros que ya tenían un mejor dominio que los apoyaran, propiciando con esto el aprendizaje entre pares que el PEP 2004 propone. Pero, además, la docente siempre estaba atenta para intervenir en el momento que se consideraba oportuno. Todo esto contribuyó a que el aprendizaje fuera significativo para los niños.

Por otra parte, se observó que la representación ayudó a los niños en su proceso de resolución de los problemas porque les hacía ordenar sus ideas al tener que presentarlas gráficamente. Aunque en este trabajo no se llevó el seguimiento sistemático de las representaciones de los niños, se puede afirmar que éstas también evolucionaron de acuerdo con los niveles que señala Hughes (1996). Como se mostró en el capítulo anterior, los niños comenzaron representando las cantidades con los dibujos de los objetos para pasar poco a poco a las representaciones simbólicas y al empleo de las grafías convencionales.

Otro factor que, fue útil para observar el avance de los niños, es el hecho de que se les dio oportunidad de inventar los problemas en la segunda fase de la quinta secuencia didáctica. Consideramos que esto les ayudó para tener más claridad de las relaciones aditivas y multiplicativas que estaban implicadas en ellos. Al principio, los niños repetían las formas verbales que se habían empleado en la fase previa en la que se les planteaban los problemas y ellos los resolvían, pero poco a poco fueron expresándolos con otro tipo de palabras o frases y aumentaban el rango numérico.

En cuanto a la *intervención educativa*, se puede decir que los cambios llevados a cabo en la práctica docente fueron fundamentales para la aplicación de la propuesta. La intervención educativa no puede hacerse al azar o basada en intuiciones. Como plantea Chamorro (2005), los docentes deben tener herramientas científicas para ejercer su profesión. Por esto, a partir de la aplicación de la estrategia de enseñanza diseñada, se puede constatar que es fundamental sistematizar la intervención educativa y para ello, el tomar en cuenta algunos elementos que Brouseeau (1994) propone en su teoría de las situaciones didácticas fue muy importante. Se comprobó, por ejemplo, que es fundamental proporcionar a los niños momentos en los que se enfrenten con el problema sin la ayuda de la docente, es decir, es importante promover el momento a-didáctico como señala Brousseau (1994, referido en Chamorro 2005). También se pudo observar que los niños aprenden mejor si comparten sus ideas y explican a sus compañeros los procedimientos que emplean y que la situación didáctica debe plantear un reto a los niños y para eso es importante que la variable didáctica sea adecuada al nivel de comprensión de los niños.

En primer lugar, para sistematizar la estrategia se tuvieron que delimitar los contenidos matemáticos que se pretendía favorecer. Consideramos que, estos contenidos no están planteados de manera clara y completa en el PEP 2004, en particular los que se refieren a la competencia "Plantea y resuelve problemas en situaciones que le son familiares y que implica agregar, reunir, quitar, igualar, comparar, y repartir objetos" Para identificar y entender los contenidos fue necesario revisar información teórica y didáctica más amplia.

Una vez delimitado el contenido matemático se tuvieron que seleccionar las situaciones didácticas y organizarlas en función de su dificultad introduciendo las variables didácticas. La aplicación de la propuesta planteó la necesidad de hacer cambios en la práctica docente que se venía desarrollando anteriormente.

Por una parte, se dejaron de aplicar las actividades con el grupo completo y con la misma actividad para todos. Anteriormente se llevaban a cabo actividades en pequeños grupos, sentados alrededor de cada mesa y se consideraba que estaban trabajando "en equipo" pero no era así porque cada quien desarrollaba su trabajo individualmente. Se reconoció que el hecho de estar reunidos físicamente no garantiza que los niños trabajen colaborativamente. En la aplicación de la estrategia de enseñanza se planteaban las actividades de tal manera que todos los niños pudieran participar hacia un objetivo común de la tarea y que reconocieran que los materiales eran para todos. En cada equipo había un "jefe" que era el que se encargaba de llevar los materiales y cuidar que se respetaran las reglas, especialmente cuando se encontraban trabajando sin el apoyo de la educadora.

El trabajo en pequeños grupos permitió apreciar también el beneficio de la interacción entre pares. En la resolución de los problemas, los niños daban a conocer sus estrategias y si los compañeros veían que eran más fáciles o prácticas las retomaban. Como señala Broitman (1998) los niños modifican sus estrategias por otras más avanzadas a partir de observarlas en sus compañeros.

Se comprobó que el trabajo en pequeños grupos es más útil, por una parte, porque los niños se apoyan mutuamente pero, por otra, porque esto facilita a la docente tener un contacto más cercano con cada alumno y observar sus dificultades y logros.

Al tomar en cuenta los conocimientos previos de los niños, se dejaron de aplicar actividades uniformes para todo el grupo y se procuró adaptarlas de manera que realmente representaran un reto para ellos. La adecuación de la variable didáctica propiciaba que el juego fuera interesante y propiciaba que, los niños de este grupo, al aprender un nuevo conocimiento fuera como un juego interesante. Los niños se motivaban mucho con las actividades y querían seguirlas practicando e incluso, buscaban los espacios para seguir practicando los juegos las secuencias didácticas como "minigenerala" "ganar y perder", "la papelería" y, en su momento, ya intentaban por su cuenta, elaborar problemas aritméticos.

También hubo cambios en la organización y selección de los materiales. Anteriormente la docente era quien los proporcionaba a los niños y les decía en donde se tenían que guardar. Cuando los niños tenían los materiales esperaban a que la maestra les dijera lo que tenían que hacer. A partir de la aplicación de la propuesta, los materiales se pusieron a su alcance y eran ellos quienes los tomaban y los colocaban en su lugar cuando la situación así lo requería.

En relación con el uso de los materiales, es importante comentar que siempre se ha manejado que en preescolar los niños requieren de los materiales concretos (PEP 2004). Esto es cierto, pero en el caso de la resolución de los problemas aritméticos, se observó que los niños los necesitan sólo al principio y ellos mismos los van dejando en la medida que van descubriendo otros recursos para resolver los problemas.

Otro factor importante para la aplicación de la estrategia de enseñanza fue el establecimiento de normas y reglas dentro del salón de clases lo que permitió aprovechar el tiempo al máximo y conocer de cerca los saberes y estrategias de los niños ya que todos tenían la oportunidad de expresarse. Se acordaron reglas para el uso y cuidado de los materiales, para la participación en el grupo y en los equipos. Entre las más importantes, se cuidaba de que los niños mostraran siempre respeto por la opinión de los compañeros, que escucharan y tomaran en cuenta las ideas de los otros, sobre todo, evitando cualquier sarcasmo.

Por otra parte, el interés de los niños y la necesidad de ampliar los espacios y las oportunidades para que pudieran practicar las actividades de las secuencias didácticas, propició el acercamiento con los padres. En varias ocasiones se les invitó a participar en reuniones informativas en las que se les explicaba en qué consistía el trabajo que se estaba desarrollando y se les proponía que llevaran los juegos y las actividades de resolución de problemas a casa y los practicaran con sus hijos. Esto fue muy provechoso para el desarrollo de la estrategia de enseñanza y se reflejó en el aprendizaje de los niños.

Lo descrito anteriormente respalda la idea de que un trabajo sistematizado sobre el planteamiento y resolución de problemas aritméticos ayuda a los niños a desarrollar conocimientos numéricos y procedimientos de resolución cada vez más avanzados.

Finalmente se pudo observar que la estrategia de enseñanza impactó no sólo en el aprendizaje matemático de los niños, sino también en otros campos formativos. Por ejemplo, el hecho de que formularan problemas y los representaran gráficamente contribuyó al desarrollo de su expresión oral y escrita que se considera en el campo formativo del lenguaje y comunicación. También se observó una mejora en el campo formativo del desarrollo personal social, ya que los niños aprendieron a desenvolverse de manera más autónoma y a expresar sus ideas de forma asertiva y con mayor confianza.

CONCLUSIONES

Este trabajo de tesis muestra cómo un trabajo sistematizado sobre el planteamiento y resolución de problemas aritméticos puede contribuir de manera efectiva al desarrollo de los conocimientos matemáticos de los niños y facilitar el desarrollo de sus procedimientos de resolución de problemas aritméticos para acercarlos de manera significativa a la comprensión de las operaciones aritméticas aditivas y multiplicativas.

Se constató que la etapa preescolar es el momento oportuno para iniciar, de manera intencionada, la promoción de este aprendizaje si se quiere que los niños lleguen a ser competentes y puedan enfrentarse con mejores herramientas a los retos que enfrentarán en su vida cotidiana y en niveles educativos más avanzados.

La pregunta de investigación formulada al inicio de este trabajo fue ¿cómo se puede sistematizar el trabajo diario en el jardín de niños para que los alumnos planteen y resuelvan problemas aritméticos, desde el enfoque de la enseñanza de las matemáticas propuesto en el PEP 2004? Para responder a esta pregunta se llevó a cabo la revisión y análisis de la información teórica y metodológica necesaria con lo cual se logró comprender y explicitar los contenidos matemáticos implicados en la competencia "Plantea y resuelve problemas en situaciones que le son familiares y que implica agregar, reunir, quitar, igualar, comparar, y repartir objetos"

Se diseñaron y aplicaron cinco secuencias didácticas sistematizadas, encaminadas a favorecer el desarrollo de esta competencia y se definieron algunas pautas para el seguimiento y evaluación del aprendizaje de los niños a través de la observación de las estrategias que empleaban en la resolución de los problemas. La definición de estas pautas facilitó el seguimiento de los avances de los niños y guió la intervención de la docente permitiéndole acercar a sus alumnos, de manera significativa, a la comprensión de las operaciones aritméticas básicas. A este respecto se observó que los niños comenzaron empleando estrategias concretas y posteriormente llegaron a utilizar estrategias verbales como el sobre conteo, así como la evocación de hechos numéricos, lo que les permitió resolver de una forma más rápida y eficaz los problemas que la educadora o sus compañeros les plantearon.

Para llevar a cabo la aplicación exitosa de la estrategia de enseñanza se introdujeron algunas modificaciones en organización del aula, de los materiales y de las formas de trabajo con el grupo.

A continuación se mencionan las principales observaciones y reflexiones surgidas a partir de la realización de este trabajo de tesis.

En cuanto a los aprendizajes de los niños:

- Se observó que, si se realizan actividades sistemáticas con propósito claro como las que se aplicaron en la estrategia de enseñanza presentada, los niños logran resolver problemas aritméticos con procedimientos cada vez más cercanos a los procedimientos matemáticos.

- A lo largo de la aplicación se les permitió y motivó a poner en juego sus propias estrategias y mostrárselas a sus compañeros con la finalidad de que las ampliaran o modificaran. Los niños las modificaban en el momento que dejaban de serles útiles y entonces creaban otras nuevas que les servían mejor para resolver los problemas aritméticos.

- La organización de los alumnos en pequeños grupos fue muy importante. A través del trabajo colaborativo entre pares, los niños aprendieron de sus compañeros y fueron capaces de explicar los procedimientos de solución que llevaban a cabo, alcanzando mayores niveles de aprendizaje en los que podían llegar a utilizar términos o estrategias que los encaminan hacia un pensamiento matemático más completo.

- El trabajo en pequeños grupos fue posible y útil gracias a que se establecieron reglas claras que los alumnos respetaron y, en su momento, las hicieron respetar por parte de sus compañeros.

- La planeación sistemática de las actividades permitió que lograran alcanzar niveles de aprendizaje que en un primer momento no se tenían contemplados como es el empleo de cantidades mayores o de hechos numéricos en los problemas de repartir y agrupar.

- Los niños utilizaron la representación gráfica como un recurso para resolver lo problemas y dar a conocer sus estrategias. Este fue un elemento que ayudó a la comprensión de las relaciones implicadas en los problemas.

- Aunque no se llevó a cabo el seguimiento sistemático de la representación, se observó un avance evidente que acercó a los niños de manera significativa al empleo de las grafías numéricas convencionales.

- La posibilidad de inventar problemas y no sólo resolverlos influyó en el mejor aprendizaje de los niños ya que, según se pudo apreciar, los hacía ordenar sus ideas para que sus compañeros las pudieran entender. A partir de la fase en que los niños comenzaron a inventar problemas se observó un avance significativo. Complementariamente, la posibilidad de inventar problemas y presentarlos a sus compañeros redundó en beneficio de su seguridad y confianza para expresarse y desenvolverse autónomamente.

En cuanto a la intervención docente:

- Uno de los principales aspectos de mejora en la intervención docente fue darle un sentido más claro a la planeación. La delimitación de los niveles por los que atraviesan los niños en su proceso de conceptualización numérica y de las estrategias de resolución de problemas aritméticos, permitió visualizar hacia dónde dirigir la práctica y llevar a cabo las actividades de las secuencias didácticas de manera sistematizada.

- El conocimiento y manejo de los contenidos matemáticos planteados en el PEP 2004 permitió dar sentido a la planeación para no perderse y tener claro cómo continuar a partir de las respuestas y avances de los alumnos. Uno de los logros que consideramos más importantes es darle significado a muchos conceptos expresados en el PEP 2004 que anteriormente no comprendía.

- El conocimiento del proceso de conceptualización numérica infantil, también facilitó la identificación de los conocimientos previos de los alumnos y la posibilidad de adecuar las actividades para partir de ellos.

- Se consideró que la organización del aula, de los materiales y del grupo son factores importantes para el éxito en la aplicación de la estrategia de enseñanza. Fue especialmente importante para el desarrollo de las secuencias didácticas el trabajo en equipos como una nueva forma de trabajo que, tanto los alumnos como la maestra, tuvieron que aprender.

- La ambientación del aula fue un elemento importante para poder llevar a cabo las situaciones didácticas, logrando un trabajo colaborativo y de confianza entre los niños, pues al aportar soluciones a los problemas se creó un clima de respeto y aprendizaje, ya que compartían el material, se apoyaban entre ellos, respetaban turnos y tiempos. Anteriormente se trabajaba con el total del grupo lo que limitaba la atención que se podía dar a cada niño y observar sus aprendizajes o las dudas que llegaban a presentar.

- El lograr la sistematización del trabajo me hizo tomar nota de la importancia de permitir y promover que los niños expresen sus ideas, así como tener más claro mi papel como moderadora de las actividades y guía del aprendizaje de los niños al observar de cerca sus capacidades y avances.

- La utilización de materiales sencillos y que estuvieran al alcance de los niños facilitó la dinámica de las actividades. Los niños los podían tomar cuando los necesitaban, favoreciendo además, que se responsabilizaran de ellos y tomaran decisiones, lo que redundó en el desarrollo de su autonomía.

- Se pudo constatar que cuando se tiene establecido el propósito que se pretende lograr con los niños, no es necesario una gran variedad de actividades para despertar su interés. Con una sola secuencia didáctica los niños pueden lograr aprendizajes significativos, ya que las variables que se les plantean permiten atender los procesos individuales de la diversidad de niños.

- Las actividades que se planearon realmente captaron su interés lo que facilitó que aprendieran sin la necesidad de estar cambiando los materiales y las actividades. Los niños practicaron repetidas veces los juegos y actividades de las secuencias con o sin el apoyo de la docente, manteniéndose siempre motivados por realizarlas.

- Por otra parte, se observó que la aplicación de la estrategia de enseñanza favoreció el aprendizaje de los niños, también, en otros campos formativos. Por ejemplo se observó una mejora en su expresión oral y escrita, así como en su desarrollo personal y social. Esto se debe probablemente a la posibilidad que se les dio para expresarse verbal y gráficamente en los momentos que tenían que resolver y plantear problemas.

- Es importante, mencionar que el avance del grupo con el que se trabajo fue evidente en la comunidad educativa en la que trabajo, ya que en las evaluaciones oficiales que se llevan a cabo en la escuela, los alumnos del grupo han obtenido resultados sobresalientes en relación con los de los otros grupos, tanto en el campo formativo del pensamiento matemático como en los otros campos, lo que en una ocasión motivó que se me hiciera entrega de una nota laudatoria. Esta situación ha contribuido a que las compañeras docentes del plantel y de la zona soliciten apoyo y asesoría de mi parte para la planeación de su trabajo, la cual se ha venido practicando desde los estudios de la maestría. Por esta razón, puedo decir que mi proceso de profesionalización docente ha impactado positivamente en la comunidad educativa en la que laboro.

- Finalmente puedo decir que si el trabajo con los niños se planea de una forma sistemática y se abordan los contenidos matemáticos de la misma forma los niños tienen mayores posibilidades de adquirir las bases para incursionar en el mundo de las matemáticas sin ningún problema, además las docente tendremos la posibilidad de observar los avances de los niños y así evaluarlos.

REFERENCIAS

Armenta, M. y Rangel M. A. (1990). *Los niños de edad preescolar inventan y resuelven problemas de suma y resta.* Tesis para obtener la licenciatura en Educación Preescolar. Escuela Normal de Ecatepec, Estado de México. México.

Baroody, A. J. (2000). *El pensamiento matemático de los niños.* Madrid: Visor

Broitman, C. (1998). Análisis didáctico de los problemas involucrados en un juego de dados. En *Enseñar matemática. Colección 0 a 5 La educación en los primeros años, 2,* 20-41. Buenos Aires: Ediciones Novedades Educativas.

Brousseau, G. (1994). Los diferentes roles del maestro. En Parra, C. y Sainz I. (Comps.) *Didáctica de las matemáticas. Aportes y reflexiones.* Buenos Aires: Paidós Educador.

Carpenter, T. P. y Moser, J. M. (1982). El desarrollo de habilidades para resolver problemas de adición y sustracción. En Carpenter, T. P., Moser, J. M. y Romber T. (Eds.) *Addition and Substraction Acognitive: perspective.* New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Carpenter, T. P., Fennema, E., Franke, M. L., Levi, L., Empson, S. B. (1999). *Children's Mathematics. Cognitively Guided Instruction* [Versión electrónica]. Portsmouth, NH: Heinemann. Traducción de Carlos de Castro Hernández y Marta Linares Alonso.

De Corte, E. y Verschafel, L. (1987). The effect of semantic structure on first grader's strategies for solving addition and subtraction words problems. *Journal for Research in Mathematics Education, 18,* (5) 363-381.

Chamorro, M. C. (2005). Herramientas de análisis en didáctica de las matemáticas. En Chamorro, M. C. (Coord.) *Didáctica de las matemáticas.* Preescolar. Madrid: Pearson Prentice Hall.

Figueroa M. S. (2007). *La suma en el primer grado de primaria.* Tesina para obtener la licenciatura en educación primaria para el medio indígena. Universidad Pedagógica Nacional, Unidad 162, Zamora, Michoacán.

Fuenlabrada, I. (2005). ¿Cómo desarrollar el pensamiento matemático en los niños de preescolar? La importancia de la presentación de una actividad. En *Curso de formación y actualización profesional para el personal docente de educación preescolar*. Volumen I. México: SEP.

Fuenlabrada, I. (2009). *¿Hasta el 100?... ¡No! ¿Y las cuentas?... ¡Tampoco! Entonces... ¿Qué?* Documento de la Reforma Integral de la Educación Básica (RIEB). México: Secretaría de Educación Pública.

González, R. A. (1997). *Estrategias didácticas para favorecer la resolución de problemas matemáticos de estructura aditiva en los alumnos de primer grado de educación primaria.* Tesis para obtener la licenciatura en educación primaria. Universidad Pedagógica Nacional, Unidad 08, Chihuahua.

Hughes, M. (1996). *Los niños y los números*. Barcelona: Planeta.

Maza, C. (1991). *Enseñanza de la suma y la resta.* Madrid: Síntesis.

Panizza, M. (2003). Conceptos básicos de la teoría de las situaciones didácticas. En Panizza, M. (Comp.) *Enseñar matemática en el nivel inicial y el primer ciclo de la EGB*". Buenos Aries: Paidós.

Puig, L. y Cerdán, F. (1995). *Problemas aritméticos escolares.* Madrid: Síntesis.

Ramírez, M. E. (1994). *La partición, mecanismo constructivo de los racionales. Estudio de casos.* Tesis para la obtención del grado de Maestro en Ciencias con Especialidad en Matemática Educativa. Departamento de Matemática Educativa Cinvestav-IPN. Distrito Federal, México.

Reyes, L. (en proceso). *El acercamiento del niño preescolar al sistema numérico decimal, su conceptualización y su representación*. Tesis para obtener el grado de Maestro en

Educación en Matemáticas. Departamento de Matemática Educativa Cinvestav, Distrito Federal, México.

Riley, M. S., Heller, J. I. y Greeno, J. G. (1983). Desarrollo de la habilidad de los niños para la resolución de problemas aritméticos. En Ginsburg H. P. (Ed.) *The development of mathematical thinking*. New York: Academic Press.

Ruiz Higueras, L. (2005). La construcción de los primeros conocimientos numéricos. En Chamorro, M. C. (Coord.) *Didáctica de las matemáticas*. Preescolar. Madrid: Pearson Prentice Hall.

Secretaría de Educación Pública [SEP] (1992). *Programa de Educación Preescolar*. México: Autor.

Secretaría de Educación Pública [SEP] (2004). *Programa de Educación Preescolar*. México: Autor.

Secretaría de Educación Pública [SEP] (2005). Pensamiento matemático infantil e intervención docente. Módulo IV. En *Curso de formación y actualización profesional para el personal docente de educación preescolar*. Volumen I. México: Autor.

Thornton, S. (2005). Por qué es interesante la resolución infantil de problemas. En *Pensamiento matemático infantil e intervención docente. Módulo IV del curso de formación y actualización profesional para el personal docente de educación preescolar*. Volumen I. México: Secretaría de Educación Pública.

Vergnaud G. (1991). *El niño, las matemáticas y la realidad*. México: Trillas.

Xolalpa, R. H. (2002). *La resolución de problemas sencillos de adición y sustracción en el nivel preescolar*. Tesina para obtener la licenciatura en educación preescolar. Universidad Pedagógica Nacional, Unidad 095, Azcapotzalco, Distrito Federal.

ANEXO 1

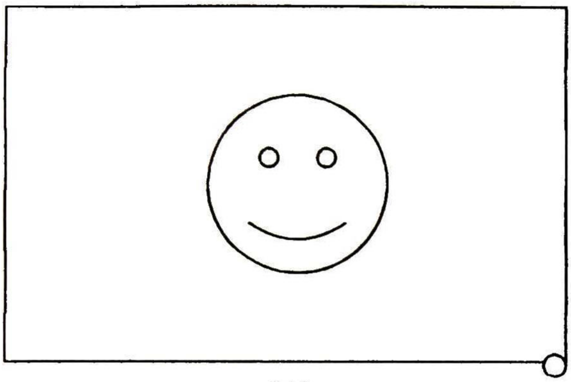
Ejemplos de la estructura de los problemas verbales aditivos simples

<table>
<tr><th>CAMBIO</th><th>COMBINACIÓN</th></tr>
<tr><td rowspan="3">*Pepe tiene 3 canicas
Luego, Tomasito le dió 5 canicas más
¿Cuántas canicas tiene ahora Pepe?
*Pepe tenia 8 canicas
luego, le dio 5 a Tomasito,
¿Cuántas canicas tiene ahora Pepe?
Cambio desconocido:
*Pepe tenia 3 canicas,
Luego, le dió algunas canicas más.
Ahora Pepe tiene 8 canicas.
¿Cuántas canicas le dió Tomasito?
*Pepe tenia 8 canicas
luego, le dió algunas canicas a Tomasito
ahora Pepe tiene 3 canicas,
¿Cuántas canicas le dió a tomasito?
Punto de partida desconocido:
*Pepe tenia algunas canicas
Luego, Tomasito le dio 5 canicas más.
Ahora Pepe tiene 8 canicas
¿Cuántas canicas tenia Pepe al principio?
*Pepe tenía algunas canicas.
Luego, le dio 5 canicas a Tomasito
Ahora Pepe tiene 3 canicas
¿Cuántas canicas tenia Pepe al principio?</td><td>Valor de combinación desconocido
*Pepe tiene 3 canicas
Tomasito tiene 5 canicas
¿Cuántas canicas tienen los dos juntos
Subconjuntos desconocido
*Pepe y Tomasito tienen, los dos juntos
8 canicas.
Pepe tiene 3 canicas.
¿Cuántas canicas tiene Tomasito?</td></tr>
<tr><th>COMPARACIÓN</th></tr>
<tr><td rowspan="3">Diferencia desconocida:
*Pepe tenia 8 canicas
Tomasito tiene 5 canicas
¿Cuántas canicas más tiene Pepe que Tomasito?
*Pepe tiene 8 canicas
Tomasito tiene 5 canicas
¿Cuántas canicas menos tiene Tomasito que Pepe?
Cantidad que se compara, desconocida.
*Pepe tiene 3 canicas
Tomasito tiene 5 canicas más que Pepe.
¿Cuántas canicas tiene Tomasito?
*Pepe tiene 8 canicas
Tomasito tiene 5 canicas menos que Pepe
¿Cuántas canicas tiene Tomasito?
Referente desconocido:
*Pepe tiene 8 canicas
El tiene cinco canicas más que Tomasito.
¿Cuántas canicas tiene Tomasito?
*Pepe tiene 3 canicas
El tiene 5 canicas menos que Tomasito.
¿Cuántas canicas tiene Tomasito?</td></tr>
<tr><th>IGUALACIÓN</th></tr>
<tr><td>*Pepe tiene 3 canicas
Tomasito tiene 8 canicas
¿Qué podría hacer Pepe para tener igual número de canicas que Tomasito?
(¿Cuántas canicas necesita Pepe para tener las mismas que Tomasito?)
*Pepe tiene 8 canicas.
Tomasito tiene 3 canicas.
¿Qué podría hacer Pepe para tener igual número de canicas que Tomasito?</td></tr>
</table>

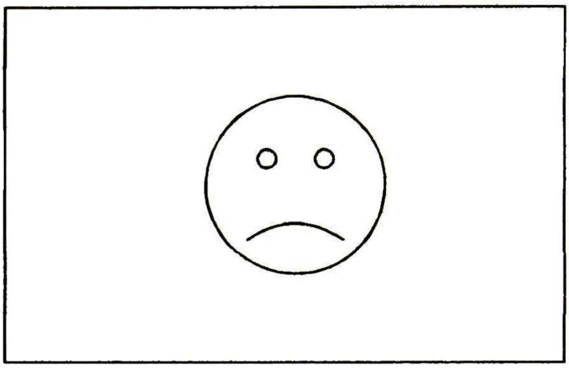
ANEXO 2

Modelo y cantidad tarjetas de indicaciones para el juego de la

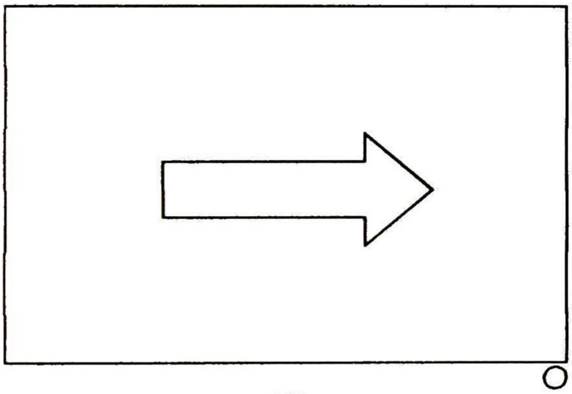
Secuencia 1: "Ganar y perder"



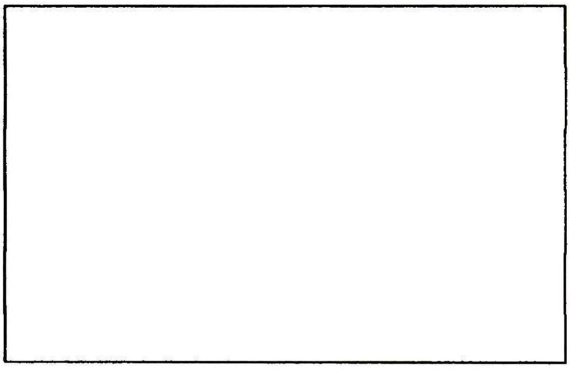
(A)



(B)



(C)



(D)

Se requieren:

(A) 10 tarjetas con carita feliz que indican que se ganan fichas.

(B) 5 tarjetas con carita triste que indican que se pierden fichas.

(C) 5 tarjetas con flecha que indica que la cantidad de fichas que indica el dado se le debe dar al jugador que esté a la derecha o a la izquierda, según la orientación de la flecha

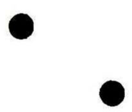
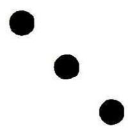
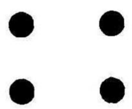
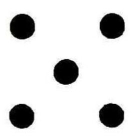
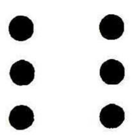
(D) 3 Tarjetas en blanco que indican que no se ganan ni se pierden fichas y se salta el turno.

ANEXO 3

Variantes de los tableros empleados en el juego de la

Secuencia 2: "Minigenerala[8]"

Variante 1: Tablero con puntos con configuraciones como en los dados

	NOMBRE	NOMBRE
		
		
		
		
		
		

[8] Los tableros presentados en las variantes 1, 2, 3 y 5 fueron tomados de Broitman (1998).

Variante 2: Tablero con puntos alineados horizontalmente

	NOMBRE	NOMBRE
●		
● ●		
● ● ●		
● ● ● ●		
● ● ● ● ●		
● ● ● ● ● ●		

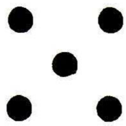
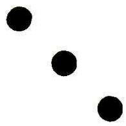
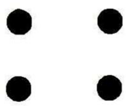
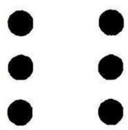
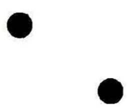
Variante 3: Tablero con numerales en orden convencional

	NOMBRE	NOMBRE
1		
2		
3		
4		
5		
6		

Variante 4(a): Tablero con números acomodados en desorden

	NOMBRE	NOMBRE
5		
3		
4		
1		
6		
2		

Variante 4(b): Tablero con configuraciones acomodadas en desorden

	NOMBRE	NOMBRE
		
		
		
		
		
		

Variante 5: Tablero numerado del 2 al 6

	NOMBRE	NOMBRE
2		
3		
4		
5		
6		

Variante 6: Tablero numerado del 2 al 9

	NOMBRE	NOMBRE
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		

Variante 7: Tablero numerado del 2 al 12

	NOMBRE	NOMBRE
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		
11		
12		

Variante 8: Tablero numerado del 2 al 18

	NOMBRE	NOMBRE
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		
11		
12		
13		
14		
15		
16		
17		
18		

ANEXO 4

Ejemplos de problemas planteados en la secuencia didáctica "Historias problema".

Relación aritmética: **agregar**

"Jaqueline tenia 5 muñecas para jugar y cuando fue a la tienda su papá le regalo 3 más ¿Cuántas muñecas tiene Jaqueline ahora?"

Relación aritmética: **quitar**

"Había 20 niños en el salón y 8 salieron al patio a jugar ¿Cuántos niños se quedaron en el salón?"

Relación aritmética: **reunir**

"Brayan tiene 9 chocolates y Fernando tiene 8 ¿Cuántos chocolates tienen entre los dos?

Relación aritmética: **separar ***

"Brayan y Fernando tienen 7 chocolates entre los dos. De esos 4 son de Brayan ¿Cuántos son de Fernando?"

Relación aritmética: **comparar**

"Maricela tiene 8 chicles y Jared tiene 15 ¿Cuántos chicles más tiene Jared que Marisela?

Relación aritmética: **igualar**

"Francisco tiene 10 paletas y David tiene 2 ¿Cuántas paletas necesita comprar David tener la misma cantidad que Francisco?

Relación aritmética: **repartir**

"Marisela tiene 10 helados y los va a repartir entre sus 2 amigas ¿Cuántos helados le tocan a cada una?"

Relación aritmética: **agrupar**

"José tiene 4 botes y en cada uno hay 5 canicas ¿Cuántas canicas tiene en total?"

* **Nota:** Los problemas de separar no se aplicaron debido su grado de dificultad.

ANEXO 5

Concentrado de variables didácticas empleadas para graduar la complejidad de los problemas planteados

Diagnóstico	Problemas	Ganar y perder				
	Agregar Reunir Quitar Igualar Comparar agrupar Repartir	Rango para las 2 actividades 6 (+1) ó (-1) 3 (+1) ó (-1) 2 (+1) ó (-1) 1 (+1) ó (-1)				
Propuesta de Intervención	Problemas	Ganar y perder	Minigenerala	El autobús	Papelería	Inventar Problemas
	Cambio Combinación Comparación Igualación Reparto Con rangos de: 1 + 1, 2 + 1, 3 + 1, 4 + 1 Después se cambiara al siguiente rango: 5 + 1 ó 5 -1 6 + 1 ó 6 -1 7 + 2 ó 7 - 2	Para el reparto se trabajara con 12 fichas que repartirán entre 4 niños y se va a ir incrementando la cantidad de fichas.	Se iniciará con la identificación de imágenes de acuerdo a la cara del dado que caiga. Para después identificar cantidades del 1 al 6 e ir aumentando gradualmente las cantidades	Se inicia identificando la cantidad de pasajeros que hagan falta partiendo de 2 pasajeros e ir aumentando la cantidad gradualmente la cantidad de asientos libres	Los niños van a iniciar por proponer las cantidades que va a valer cada objeto y jugaran con fichas a las cuales les asignaran un valor.	De acuerdo a sus conocimientos elaboraran sus propios problemas aritméticos para que los propongan a sus compañeros para que los resuelvan.
Evaluación final	Problemas	Ganar y perder				
	Agregar Reunir Quitar Igualar Comparar Reparto	Rango 6 (+1) ó (-1) 7 (+1) ó (-1) 8 (+1) ó (-1) 9 (+1) ó (-1) 10 (+2) ó (-2)				

ANEXO 6

Orden y condiciones de aplicación de las secuencias didácticas

Nombre de la situación	Contenido Matemático específico	Variable	Equipo con apoyo de la educadora	Sesiones	Variable	Equipo sin apoyo de la educadora
Ganar y perder	Reconocimiento De cantidades del 1 al 3 Pautas numéricas (añadir o quitar una cantidad) Reconocimiento de pautas numéricas. Combinaciones numéricas. Reconocimiento de regularidades. 1 + 1, 2 + 1, 3 + 1, 4 + 1 Después se cambiara al siguiente rango: 5 + 1 ó 5 - 1 6 + 1 ó 6 - 1 7 + 2 ó 7 - 2	Utilizar números que en su total den números menores a 3. 1era. Utilizar un dado con constelaciones del 1 a al 3 2da. Utilizar el dado con constelaciones del 1 al 6 3era.Variar la utilización del dado de constelaciones, por el dado de números convencionales. 4ta. Utilizar dos dados uno convencional y el otro con números. 5ta. Dar utilidad a los puntos que están en las tarjetas cuando salga carita triste	**Descripción:** se pone una cantidad de fichas en la mesa y se les dice que tienen que buscar la forma de que todos tengan la misma cantidad de fichas sin que sobre ni falte, se entregan las tarjetas de caritas y se explica el significado de cada una, gana el que acumule más fichas. Ya que se cambiaron los integrantes de los equipos se trabaja con el equipo en donde están los niños **Organización:** se recomienda equipos con un máximo de 6 niños. Y en la segunda ronda se cambian los equipos. **Materiales:** tarjetas con caritas, fichas, dados con numeración del 1 al 3. Se utiliza un dado en donde dos caras tienen el uno, dos el dos y dos el tres, Un dado convencional, dados especiales como dados de unos (con un punto en sus seis caras, de dos, de tres, cuatro, cinco y así sucesivamente) y dados con numérales.	1era. Se trabaja con los equipos (1 y 2)	Utiliza números que en su total den números menores a 3	Juegan los equipos (2,3,y 4) y cambian *Pinzas *Tapetes *Rompecabezas
				2da. Se trabaja con los equipos (3 y 4)		*Ganar y perder Con el equipo que ya tienen mayor dominio de la representación de cantidades. *Rompecabezas *Tapetes
				3era. Se trabaja con los equipos (1 y 2)		
				4da. Se trabaja con los equipos (3 y 4)		
Minigenerala	Reconocimiento de cantidades del 1 al 6 Configuraciones Valor cardinal Correspondencia biunívoca. Abstracción numérica Irrelevancia del orden.	Utilizar números que en su total den cantidades menores a 6		1era. Se trabaja con los equipos (1 y 2).		
				2da. Se trabaja con los equipos (3 y 4)		*Ganar y perder Con los equipo que ya tienen mayor dominio de la representación de cantidades. *Rompecabezas
		Utilizar la correspondencia término a término entre la cara del dado y el tablero.	**Descripción:** se coloca el nombre de los jugadores en los casilleros correspondientes. Cada jugador en su turno tira el dado y marca con una cruz en el casillero que tiene dibujada la misma cara del dado que tiro. Si ya está marcado el casillero correspondiente no se anota nada y se le da al otro jugador, gana el que primero llene todos sus casilleros. **Organización:** Jugarlo por parejas, respetando los equipos integrados. **Materiales:** Un tablero, un dado y crayolas.	1era. Se trabaja con los equipos (1 y 2)	Utiliza números que en su total den números menores a 6	*Ganar y perder Con el dado convencional. *Rompecabezas *Material de construcción
		Variar el tablero colocando los puntos alineados, para que los niños varíen los procedimientos de reconocimiento		2da. Se trabaja con los equipos (3 y 4)		
				1era. Se trabaja con los equipos (1 y 2)	Utiliza la correspondencia término a término entre la cara del dado y el tablero.	*Ganar y perder Con el dado convencional. *Minigenerala. (con tablero en donde los puntos sean como en la cara del dado.
				2da. Se trabaja con los equipos		

				(3 y 4).		•Taller papelería
		Se propone un tablero con números escritos en los casilleros en lugar de puntos.		1era. Se trabaja con los equipos (1 y 2)	Variar el tablero colocando los puntos alineados, para que los niños varíen los procedimientos de reconocimiento	
				2da. Se trabaja con los equipos (3 y 4)		
El autobús	Reconocimiento de cantidades Incremento de rango numérico Representación	Utilizar sus estrategias de conteo para identificar el número de pasajeros que necesita su autobús.	**Descripción:** Se da la siguiente consigna: "En su lugar hay un autobús que transporta pasajeros tiene asientos ya ocupados y asientos vacíos ustedes tienen que anotar en el papel que se les dio la cantidad de pasajero que necesitan para llenar su autobús". En una segunda ronda se nombra un jefe de quipo para que sea el quien reparta el número de pasajeros que hace falta. **Organización:** Se recomienda trabajar con equipos de un máximo de 6 niños. **Materiales:** Un dibujo del autobús, cuadros de papel del tamaño de los asientos, fichas o muñecos.	1era. Se trabaja con los equipos (1 y 2)	Se propone un tablero con números escritos en los casilleros en lugar de puntos	Juegan los equipos (2,3 y 4) •Ganar y perder •Minigenerala. (con tableros en donde los puntos sean como en la cara del dado. •El autobús
		Disposición estratégica de los pasajeros de modo que sean 5 los ocupados y 5 los que falten		2da. Se trabaja con los equipos (3 y 4)		
				1era. Se trabaja con los equipos (1 y 2)	Utiliza sus estrategias de conteo para identificar el número de pasajeros que necesita su autobús.	
		Utilizar números que en su total den cantidades menores a 10 variando el número asientos ocupados.		2da. Se trabaja con los equipos (3 y 4)		
				1era. Se trabaja con los equipos (1 y 2).	Disposición estratégica de los pasajeros de modo que sean 5 los ocupados y 5 los que falten	
				2da. Se trabaja con los equipos (3 y 4)		
La papelería	Problemas de agregar y juntar Pautas numéricas (añadir o quitar una cantidad) Reconocimiento de pautas numéricas. Retro contar (contar hacia atrás)	Utilizar fichas de cartón con números con un rango del 1 al 10	**Descripción:** Se organiza al grupo con anterioridad para elaborar los materiales que vamos a utilizaren la papelería. Ubicar dentro del salón el lugar donde se3 instalara la papelería. Por equipos se asigna quien es el vendedor y quienes van a comprar. Colocar la mercancía de la papelería y etiquetar con precio cada uno de los productos y después agruparlos según sus características. **Organización:** Se sugiere jugarlo con equipos máximo de 6 integrantes. **Materiales:** Monedas de cartón, Fichas de colores, material de papelería (resistol, gomas, libretas, lapiceros, calcomanías, hojas, lápices, colores, etc.)	1era. Se trabaja con los equipos (1 y 2)	Utiliza números que en su total den cantidades menores a 10 variando el número asientos ocupados	Juegan los equipos (2,3 y 4) •Ganar y perder con 2 dados convencionales. •Minigenerala. (con tableros en donde los puntos estén alineados. •El autobús.
				2da. Se trabaja con los equipos (3 y 4)		
		Se utilizan fichas que representan monedas y se incrementa el rango a 15		1era. Se trabaja con los equipos (1 y 2)		
				2da. Se trabaja con los equipos (3 y 4).		
		Jugar con monedas de colores y que ellos le asignen un valor a cada color.		1era. Se trabaja con los equipos (1 y 2)		

				2da. Se trabaja con los equipos (3 y 4).		
Problemas aritméticos verbales 1era. Fase	Resolver problemas aritméticos verbales de: agregar, quitar, igualar, comparar, reunir y agrupar.	Utilizar números que en su total den números menores a 5 (+1) o (-1).	**Descripción:** Una vez que se aplicó a los niños la secuencia Historia problema nos dimos cuenta que de esta forma no funcionaba ya que se perdían en la historia. Por lo que decidimos plantear los problemas aritméticos directamente y proporcionarles hojas, crayolas, para que los pudieran registrar. **Organización:** Se recomienda trabajar con equipos integrados por 6 niños. **Materiales:** Se recomienda se utilicen materiales diversos (fichas, palitos, cuadros de papel, tiras de papel, etc.)	1era. Se trabaja con los equipos (1 y 2)	Se utilizan fichas que representan monedas y se incrementa el rango a 15	Juegan los equipos (2,3 4, 5, y 6) *Ganar y perder Con dado convencional y uno que tenga números *Minigenerala. (con tableros en donde están escritos los números) *El autobús.
				2da. Se trabaja con los equipos (3 y 4)		
				3era. Se trabaja con los equipos (1 y 2)		
				4ta. Se trabaja con los equipos (3 y 4).		
		Utiliza números que en su total den cantidades menores a 10 (+2) o (-2)		1era. Se trabaja con los equipos (1 y 2)		
				2da. Se trabaja con los equipos (3 y 4).		
				3era. Se trabaja con los equipos (1 y 2)		
				4ta. Se trabaja con los equipos (3 y 4)		
		Restringir el empleo de los objetos y elementos de apoyo concretos	**Descripción:** Se plantearon los problemas aritméticos verbales en donde se utilizan los términos de agregar, reunir, comparar, igualar y repartir, se los deja a la vista materiales como: hojas, crayolas con la finalidad de que las utilicen para representarlos. **Organización:** Se recomienda reducir los equipos a 4 integrantes. **Materiales:** Se recomienda no dejarles a la vista los materiales de apoyo con la finalidad de que utilicen sus dedos o evoquen hechos numéricos.	1era. Se trabaja con los equipos (1y 2)		
				2da. Se trabaja con los equipos (3 y 4).		
				3era. Se trabaja con los equipos (5 y 6)		
		Que los niños representen gráficamente el problema.		1era. Se trabaja con los equipos (1 y 2)		
				2da. Se trabaja con los equipos (3 y 4).		

				3era. Se trabaja con los equipos (5 y 6)		
Problemas aritméticos verbales 2da. Fase	Plantear problemas aritméticos verbales de: agregar, quitar, igualar, comparar, reunir y agrupar.	Utilizar números que en su total den cantidades menores y combinaciones 5 (+1) o (-1).	**Descripción:** Hoy vamos a jugar a que ustedes inventen sus propios problemas parecidos a los que hemos hecho para que después se los presenten a sus compañeros para que ellos lo resuelvan. **Organización:** Se recomienda trabajar con equipos integrados por 6 niños. **Materiales:** Se le proporcionaran diversos materiales (fichas, palitos, cuadros de papel, tiras de papel, etc.).	1era. Se trabaja con los equipos (1 y 2) 2da. Se trabaja con los equipos (3 y 4) 3era. Se trabaja con los equipos (1 y 2) 4ta. Se trabaja con los equipos (3 y 4).	Se utilizan fichas que representan monedas y se incrementa el rango a 15	Juegan los equipos (2,3 4, 5, y 6) •Ganar y perder con dado convencional. Y uno que tenga números •Minigenerala. (en donde en el tablero estén escritos los números) •El autobús.
		Utiliza números que en su total den cantidades menores a 10 y combinaciones (+2) o (-2)	**Descripción:** Una vez que ellos han planteado sus primeros problemas aritméticos se les puede decir que elaboren problemas en donde su total sea 10. **Organización:** Se recomienda reducir los equipos a 4 integrantes. **Materiales:** Se recomienda no dejarles a la vista los materiales de apoyo con la finalidad de que utilicen sus dedos o evoquen hechos numéricos	1era. Se trabaja con los equipos (1 y 2) 2da. Se trabaja con los equipos (3 y 4). 3era. Se trabaja con los equipos (1 y 2) 4ta. Se trabaja con los equipos (3 y 4)	Utilizar números que en su total den cantidades menores y combinaciones 5 (+1) o (-1).	4, 5, y 6) •Ganar y perder Con dado convencional y uno que tenga números •Minigenerala. (con tableros en donde estén escritos los números •El Autobús. •2da. Fase Plantear sus propios problemas.
		Restringir el empleo de los objetos y elementos de apoyo concretos	.	1era. Se trabaja con los equipos (1y 2) 2da. Se trabaja con los equipos (3 y 4). 3era. Se trabaja con los equipos (5 y 6)		
		Que los niños representen gráficamente el problema.		1era. Se trabaja con los equipos (1 y 2) 2da. Se trabaja con los equipos (3 y 4). 3era. Se trabaja con los equipos (5 y 6)		

El jurado designado por el Departamento de Matemática Educativa, Unidad Distrito Federal del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, aprueba la tesis:

La resolución de problemas aritméticos en la educación preescolar

que presenta **Claudia Santana Domínguez** para su examen final de Maestría en Educación en Matemáticas el día 15 de diciembre del año 2011.

Dra. Mirela Rigo Lemini

Dra. Silvia Azucena Mayén Galicia

Dra. Irma Rosa Fuenlabrada Velázquez

Dra. Laura Macrina Gómez Espinoza