CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS
DEL INSTITUTO POLITECNICO NACIONAL

Unidad Distrito Federal

Departamento de Matemática Educativa

Productos notables en el sistema de Telesecundaria

Tesis que presenta

Noé Javier Ramírez Cruz

para obtener el Grado de

Maestro en Educación en Matemáticas

Directores de la Tesis:

Dr. Armando Solares Rojas

Dr. Eugenio Filloy Yagüe

México, Distrito Federal

Septiembre 2011

Agradecimientos:

Es de justicia reconocer la participación de quienes intervinieron, directa o indirectamente, en la consecución del presente trabajo.

Agradezco en primer término al Centro de Investigación y Estudios Avanzados (CINVESTAV), por el diseño del programa de estudios y el desarrollo de la Maestría en Educación Matemática para profesores en servicio, por el excelente desempeño del personal académico, administrativo y demás.

Asimismo, agradezco a los Servicios Educativos Integrados al Estado de México (SEIEM) y a la sección XVII del Sindicato Nacional de Trabajadores de la Educación, (SNTE), por su iniciativa de promoción de éstas y otras actividades similares, en beneficio de la niñez mexiquense.

Particularmente agradezco al Dr. Armando Solares Rojas, por la dirección de la presente tesis, así como del pertinente cuidado en el desarrollo de todo el trabajo de la presente tesis; en igual medida, al Dr. Eugenio Filloy Yagüe, por su trabajo de asesoría. También debo resaltar el papel de ambos en el desarrollo del proyecto de desarrollo "La adquisición del lenguaje algebraico", que nos proporcionó las herramientas teórico metodológicas suficientes para lograr la abstracción matemática propuesta por el modelo del Dr. Filloy.

Debo agradecer la participación de las Dras. Teresa Rojano Ceballos y Cristianne Butto Zarzar, por la lectura cuidadosa y su papel sinodal en el examen de grado.

En el plano personal, agradezco la paciencia, el apoyo incondicional y todas sus implicaciones, de mi compañera y cómplice, mi esposa Mtra. Nila Quintero de Anda. Quede constancia de ello.

No olvido la importancia del trabajo académico de mis alumnos y compañeros docentes, para quienes finalmente dedico el presente trabajo.

Para todos ellos, mi más sincero agradecimiento.

Noé Javier Ramírez Cruz

México D. F. Septiembre de 2011

Índice

Resumen

Se abordan las dificultades en la enseñanza y el aprendizaje de los productos notables, comúnmente identificados como: binomio al cuadrado, binomios conjugados, y binomios de tercer grado con un término común. El objetivo fue desarrollar una propuesta de intervención pedagógica para fortalecer la comprensión del concepto de productos notables; en tres sistemas matemáticos de signos: numérico, geométrico y algebraico, empleando el programa de geometría dinámica Geometer's Sketchpad

En el primer capítulo se plantea el Problema didáctico y sus Antecedentes. En el segundo, se presenta el Marco teórico denominado Modelo Teórico Local (Filloy, 1999). Estableciendo sólo dos componentes del MTL para la presente tesis, esto es, un Modelo de Enseñanza y un Modelo de Competencia Formal para los productos notables.

En el capítulo tres, la Metodología, se diseñaron los recursos a emplear, mediante hojas de trabajo y un interactivo computacional. Los Resultados se presentan en el capítulo cuatro, aportando un análisis cualitativo para las respuestas dada por los alumnos que permite establecer la adquisición de la comprensión de los productos notables lograda mediante la propuesta de intervención didáctica..

En las conclusiones destacamos que el uso de la hoja de trabajo y el interactivo, enriquecieron las significaciones dadas a las identidades correspondientes de los productos notables, en los tres sistemas matemáticos de signos propuestos. Con esto, podemos establecer que se consolidó el aprendizaje de las identidades mediante su verificación para distintas representaciones y con distintos significados.

Abstract

It discusses the difficulties in teaching and learning of the remarkable products, commonly identified as: binomial squared, conjugated pairs and pairs of the third degree with a common term. The objective was: to develop an educational intervention proposal to strengthen the understanding of the concept of remarkable products; in three mathematical sign systems: numerical, geometric and algebraic, using the dynamic geometry software Geometer's Sketchpad

The first chapter approach the problem discuss and its history. The second presents the theoretic context called Local Theoretical Model (Filloy, 1999). Establishing only two components of the MTL to this thesis, this is: a teaching model and a model of formal competition for notable products.

In chapter three, the methodology, is designed to use resources through, worksheets and an interactive computing. The results are presented in chapter four, providing a qualitative analysis for each answer given by students, grouped according to similarities.

The conclusions highlight that the use of the worksheet and interactive, rich meanings given to the corresponding remarkable products identities in the three systems proposed mathematical signs. With this, we can establish that learning is consolidated through verification of identities for different representations and different meanings.

INTRODUCCIÓN

En este trabajo de tesis, se desarrolla una propuesta de intervención que tiene la finalidad de dar soluciones didácticas a las dificultades que entraña el aprendizaje de los Productos Notables (PN), vistos desde tres perspectivas: la geométrica, la numérica y desde la que tradicionalmente se aborda su aprendizaje, esto es, una perspectiva algebraica. La propuesta de intervención pedagógica integra estas tres perspectivas a través del uso del programa computacional denominado Geometer's Sketchpad

Para la ubicación de las aportaciones del presente trabajo, es importante señalar que, desde una perspectiva docente, la enseñanza y el aprendizaje de la multiplicación y factorización de expresiones algebraicas y numéricas representan serios problemas en la Matemática Educativa; por ejemplo, en el estudio de las operaciones aritméticas es común que se confunda la factorización de algún número con su descomposición en sumando. Por ejemplo, la factorización del número 10, como 5×2, es comúnmente confundida con su descomposición en sumandos: $5 + 5$ ó $2 + 8$. Un ejemplo algebraico clásico corresponde a los errores frecuentemente cometidos que la investigación ha encontrado, por ejemplo, al establecer las siguientes igualdades: $(a + b)^2 = a^2 + b^2$ ó $(a + b)^3 = a^3 + b^3$ (Matz, 1982). De hecho, podemos encontrar estos errores desde el nivel básico hasta el nivel de educación superior.

Por estos motivos, es de interés contribuir a la construcción de las soluciones didácticas de esta problemática, para favorecer el aprendizaje significativo de la operatividad algebraica, específicamente del aprendizaje significativo de la multiplicación de expresiones algebraicas y los PN.

De lo anterior, se desprende el objetivo a lograr en el presente trabajo de tesis, que consiste en:

Desarrollar una propuesta de intervención pedagógica, cuya función será, fortalecer la comprensión del concepto de productos notables, en tres sistemas matemáticos de signos: numérico, geométrico y algebraico.

Para el desarrollo de este objetivo, empleamos un programa computacional, específicamente de geometría dinámica, denominado Geometer's Sketchpad, el cual nos permite integrar de manera dinámica los tres sistemas matemáticos de signos.

En esta tesis, se identifica a los *PN* como multiplicaciones de expresiones algebraicas, que se manejan por "reglas fijas" Por ejemplo: elevar un *binomio al cuadrado* siempre da como resultado un *trinomio cuadrado perfecto*; o bien, al realizar el producto de *binomios conjugados*, obtendremos una *diferencia de cuadrados*. Los PN son uno de los elementos más importantes en la construcción de la operatividad algebraica. A partir de ellos, por ejemplo, se podrán introducir las primeras y más usadas técnicas de factorización.

Con esta tesis, se busca contribuir a la solución de la problemática descrita, mediante el diseño de una propuesta de enseñanza de los PN. Se diseñaron actividades para *complementar el material escrito* empleado en lo particular por el sistema de telesecundarias, aplicando una secuencia de aprendizaje, que favorezca la comprensión del concepto de producto notable.

La tesis se divide en cuatro capítulos más las conclusiones del estudio. En los anexos se agregan las versiones finales de los recursos desarrollados en cada una de a las etapas de trabajo.

En el primer capítulo se plantea el problema didáctico que representan la enseñanza y el aprendizaje de los PN. Además, se presentan los antecedentes que proporcionan la investigación educativa y los trabajos de desarrollo didáctico y curricular respecto a esta problemática.

En el segundo capítulo, se presenta el marco teórico bajo el cual se desarrolló el trabajo, los *Modelos Teóricos Locales* (Filloy, 1999). Es importante señalar que la propuesta teórica y metodológica de Filloy está enfocada a la investigación educativa pero, en el presente trabajo, buscamos darle una aplicación para el desarrollo de una propuesta de intervención didáctica.

La perspectiva de los Modelos Teóricos Locales (MTL) nos permite observar y analizar los fenómenos educativos, considerando elementos esenciales de todo proceso de enseñanza y aprendizaje; esto es, los sujetos que involucrados en este proceso (alumnos y docentes), los conocimientos matemáticos trabajados, tanto por los docentes como por los alumnos; y finalmente, los procesos de comunicación que se desarrollan entre todos los actores. Filloy postula una manera de interpretar el fenómeno educativo a través del concepto teórico-metodológico de los Modelos Teóricos Locales, englobando en cuatro componentes interrelacionados: (1) Modelos de enseñanza, (2) Modelos de los procesos cognitivos, (3) Modelos de competencia formal, y (4) Modelos de comunicación.

Sobre la división en componentes, Filloy (1999) señala las siguientes recomendaciones:

1) Considerar los "Modelos Teóricos Locales" como una perspectiva que aborde sí fenómenos locales, pero sin olvidarnos de reflexionar sobre las cuatro componentes de este

modelo;

2) Reconocer que atenernos al manejo e interpretación de un Sistema Matemático de Signos, nos obliga a no limitar una única interpretación del fenómeno matemático; y

3) Tener plena conciencia de cuál es nuestro objeto de estudio

Con la observancia de estas recomendaciones, de acuerdo con Filloy, contaremos con mejores posibilidades de que nuestra investigación no caiga en lo que el autor define como tesis efímeras, "que no soportan su contrastación con los hechos empíricos observados" (Filloy, 1999).

Se debe señalar que el Modelo Teórico Local diseñado para la presente tesis sólo considera dos componentes: un Modelo de enseñanza y un Modelo de competencia formal para los PN. Esto se debe a que el principal interés de la tesis es desarrollar una propuesta de intervención didáctica. Sin embargo, como recomienda Filloy, a lo largo de la construcción de esta propuesta, se dieron muchas y muy significativas reflexiones y discusiones sobre el resto de las componentes, el Modelo de procesos cognitivos y el Modelo de comunicación.

La metodología seguida en este estudio, para diseñar la propuesta de enseñanza y ponerla a prueba en los salones de clases, es coherente con la perspectiva teórica adoptada.

El desarrollo de la metodología se realizó en tres etapas. En la primera etapa: el *Diagnóstico*, se aplicaron exámenes para identificar las dificultades que se presentan al operar con los PN y para identificar los conocimientos previos con que cuentan los estudiantes.

La segunda etapa: *Planeación*, correspondió al diseño de materiales didácticos (impresos y tecnológicos), en concordancia con la metodología del sistema de telesecundarias y siguiendo las directrices propuestas en el Modelo Renovado de Telesecundaria. (SEP 2006a). Se trabajó en Telesecundarias debido a que es el sistema en el cual se tienen la experiencia docente previa y las facilidades para la implementación de la propuesta de intervención.

La tercera etapa: *Intervención*, consintió en la puesta en práctica de la propuesta de enseñanza diseñada en la etapa anterior, con el fin de evaluar los materiales didácticos propuestos, y realizar adecuaciones pertinentes.

Una primera aplicación de la propuesta se realizó con alumnos que cursaban el tercer grado bajo el esquema del "Plan y programas de estudio 1993" (SEP 1993), que no utilizaron *bloques algebraicos* como recurso didáctico en el aprendizaje del álgebra. La segunda aplicación se realizó con alumnos de tercer grado que manejaron los bloques algebraicos desde el primer grado, usando la propuesta didáctica y los materiales desarollados en el Modelo Renovado para Telesecundaria, propuesto en los "Planes y Programas de Estudio 2006" (SEP, 2006b). La tercera aplicación, denominada *toma principal de datos,* se realizó después de las adecuaciones necesarias en las hojas de trabajo, considerando los resultados obtenidos en las aplicaciones anteriores.

Los materiales didácticos diseñados fueron *hojas de trabajo* impresas e *interactivos,* construidos usando un programa de geometría dinámica (Geometer's Sketchpad), para apoyar el aprendizaje de los *PN,* mediante un interactivo que vincula tres sistemas matemáticos de signos: el numérico, el geométrico y el algebraico.

La propuesta de intervención permitió enriquecer los significados construidos por el uso y la vinculación de los tres sistemas matemáticos de signos.

Es importante señalar que con el uso de las hojas de trabajo, las interpretaciones de los estudiantes se ubicaron, centralmente, en los referentes numéricos, pero también se presentaron muchos referentes y relaciones algebraicas.

Debemos resaltar que, desde el punto de vista geométrico, el trabajo efectuado con los algebloques se refuerza y enriquece con el trabajo en el interactivo. Los estudiantes lo expresaron de ésta manera: *"en los bloques algebraicos no me daban valores y en el Sketchpad sí los da"* De hecho, la relación entre los sistemas de signos es la que más enriquece y consolida la verificación de la identidad.

En resumen, el interactivo y las hojas de trabajo permitieron trabajar con las interrelaciones de las representaciones de estas igualdades en los tres distintos sistemas matemáticos de signos.

Esperamos que los resultados de esta propuesta de intervención para la enseñanza de los PN contribuyan a construir respuestas didácticas a las dificultades en torno a la adquisición de la operatividad algebraica.

CAPÍTULO 1

La enseñanza y el aprendizaje de los productos notables

En este capítulo presentamos los antecedentes que motivaron el desarrollo de la presente tesis y la problemática abordada. Se incluyen las investigaciones que anteceden el presente estudio; se continúa con la determinación de los conocimientos matemáticos en torno de los temas de factorización y productos notables (PN) que se enseñan actualmente en la educación básica; y finalizamos con el planteamiento de la problemática abordada.

1.1. Antecedentes

Tanto en el ámbito de la investigación educativa, como en los trabajos de desarrollo de la didáctica de las matemáticas, existe evidencia del problema curricular que representan la enseñanza y el aprendizaje del algebra, en lo general, y de los productos notables, en lo particular.

Presentamos los resultados principales de un trabajo de investigación sobre algunos errores clásicos vinculados con los productos notables (Matz, 1982); un estudio didáctico sobre el tema de productos notables (Ramírez, 1997) y tres diseños didácticos para la enseñanza de la operatividad algebraica, relacionados con los mismos productos notables (Hernández, 2004; Morales y Sepúlveda, 2006, y Hernández. y Cardoso, 2009).

Para el caso específico de la presente tesis, entendemos a los PN como resultados de multiplicaciones de expresiones algebraicas que se manejan por "*reglas fijas*" Por ejemplo: elevar un *binomio al cuadrado* siempre nos da como resultado un *trinomio cuadrado perfecto*; o bien, al realizar el *producto de binomios conjugados*, obtendremos una diferencia de cuadrados.

Numerosas investigaciones dan cuenta de las dificultades en el aprendizaje de la operatividad algebraica, específicamente de la multiplicación y factorización de expresiones algebraicas. Un antecedente muy relevante para el presente estudio es la investigación de Matz (1982) sobre los errores cometidos sistemáticamente en el proceso de adquisición del lenguaje algebraico. Algunos de los errores clásicos encontrados por este autor están directamente vinculados con los productos notables, por ejemplo:

$(a + b)^2 = a^2 + b^2$

$(a + b)^3 = a^3 + b^3$

Estos errores aparecen desde el nivel básico hasta el nivel de educación superior. Matz relaciona la "sobre-estimación" de la aplicación de reglas lineales a la producción de estos errores.

Entre los estudios didácticos que indican la existencia de serias dificultades en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la factorización de expresiones algebraicas y de productos notables se encuentra la tesis "La factorización algebraica en telesecundaria", de Ramírez (1997). Esta tesis identifica los errores más comunes que cometen los estudiantes de tercer grado de telesecundaria en la factorización de expresiones numéricas y algebraicas. Ramírez concluye que "existe un desempeño aceptable en la realización de factorizaciones numéricas, que disminuye sensiblemente en el proceso de la factorización empleando números primos" (p.117). Sin embargo, el desempeño en la realización de factorización de expresiones algebraicas representa un serio problema dado que "solo 1.5 de cada 10 alumnos logra medianamente realizar procesos correctos de este tipo de operaciones matemáticas", (p. 117).

Entre los trabajos que proponen diseños didácticos para la enseñanza de la operatividad algebraica se encuentra la tesis: "El modelo concreto de bloques: un modelo de enseñanza para alumnos de bajo desempeño" de Hernández (2004). Si bien esta tesis se centra en la enseñanza de la operatividad de los números positivos y negativos y de su relación con el estudio del álgebra, para el presente estudio resultan relevantes los resultados obtenidos en ella respecto de la introducción de la operatividad algebraica, mediante el uso de los *bloques algebraicos* (rectángulos que representan expresiones algebraicas). De las conclusiones que Hernández (2004) obtiene en su tesis, las siguientes resultan importantes para el presente estudio.

> Los recursos que ofreció el modelo concreto de bloques fueron limitados, ya que a pesar, de que permitió abordar el estudio del algebra en su etapa introductoria, donde les permitió generar significados para el lenguaje simbólico y emplearlo para abordar la solución de problemas, así como expresar y justificar algunas generalizaciones; también es cierto que para otros estudiantes, el uso del lenguaje algebraico partiendo del modelo concreto, puede resultar muy complicado al relacionar una letra con los rectángulos y en definitiva resultaba más sencillo partir de la sintaxis algebraica para su comprensión. (p. 389).

Las dificultades y las ventajas encontradas por Hernández, al introducir la sintaxis algebraica mediante los bloques algebraicos, permiten considerar posibles usos en otros diseños didácticos y dificultades en su implementación.

Otro estudio que propone un diseño didáctico es la *Propuesta para la enseñanza de la factorización en el curso de álgebra*, de Morales y Sepúlveda (2006). Esta propuesta introduce la representación geométrica de expresiones algebraicas para la enseñanza de la factorización en el primer año de bachillerato. En la propuesta se trabaja con productos de polinomios "que usualmente aparecen en el contexto escolar del bachillerato" (Morales y Sepúlveda, 2006, pp. 1 y 2), mediante su representación geométrica con figuras cuadradas y rectangulares. Tal como describen Morales y Sepúlveda, la operatividad se introduce a partir de "operaciones" geométricas: cortar y mover las figuras recortadas a cualquier otra posición y adherirlas o pegarlas para formar otra figura no alteran el área de la figura original, aunque ésta cambie de forma (p. 5). Esta propuesta didáctica está relacionada con la parte simbólica del álgebra y consiste en construir ideas algebraicas a partir de figuras geométricas, mediante la representación de expresiones algebraicas a través de áreas (Morales y Sepúlveda, 2006, p. 6). La propuesta resulta significativa para el presente estudio, pues se pretende también contribuir a la parte simbólica del álgebra, pero mediante la interrelación de tres *Sistemas Matemáticos de Signos*: el sistema algebraico, el geométrico y el sistema numérico.

Más recientemente, Hernández y Cardoso (2009) reportan un trabajo realizado mediante el uso de *algeblocks*, en el ciclo escolar 2007 _ 2008, con dos grupos de alumnos de segundo grado de secundaria, uno experimental y otro de control. En palabras de los autores:

> El objetivo general de la investigación fue evaluar el desarrollo del pensamiento algebraico a través del uso de los algeblocks en los alumnos de segundo grado de secundaria. Los objetivos específicos fueron: identificar las características psicopedagógicas de los algeblocks como recursos didáctico para el desarrollo del pensamiento algebraico; analizar los contenidos algebraicos que se pueden construir con el uso de este recurso didáctico así como identificar las competencias que se desarrollan con este material didáctico. Asimismo, la hipótesis de investigación fue: el empleo de los algeblocks como recurso didáctico, favorece el desarrollo del pensamiento algebraico de los alumnos de segundo grado de educación secundaria. (p. 4)

Los resultados fueron satisfactorios, de acuerdo con lo reportado por Hernández. y Cardoso (2009). "el 85% de los alumnos manifestó su agrado por las matemáticas gracias a este recurso" (p. 10*);* además de mejorar su desempeño académico en el área de matemáticas y favorecer su interés por la asignatura, en general.

Finalizamos este apartado destacando aspectos importantes de los trabajos de investigación y los desarrollos didácticos, de acuerdo con el propósito de la presente tesis, sobre los productos notables.

El primero se refiere al desarrollo de una investigación sobre errores en la adquisición del lenguaje algebraico (Matz, 1982); los desarrollos didácticos (Hernández, 2004; Morales y Sepúlveda, 2006; Hernández y Cardoso, 2009) y los estudios relacionados con los productos notables (Ramírez, 1997) tienen en común el tema que nos ocupa, que son los productos notables. En el caso de Matz (1982), se presentan errores comunes algebraicos que son comúnmente relacionados con los procesos de factorización implicados en el desarrollo de los productos notables; para los desarrollos didácticos de Hernández (2004), Morales y Sepúlveda, (2006) y de Hernández y Cardoso (2009) todos pretenden, en lo general, desarrollar los conceptos implicados en el manejo de los productos notales; mientras que del estudio de Ramírez (1997) se detectó la problemática que representa el tema en el nivel específico de telesecundaria.

Otra similitud importante en Hernández (2004), Morales y Sepúlveda (2006); y de Hernández y Cardoso, (2009), es que emplean recursos didácticos relacionados con los bloques algebraicos, algebloques o representaciones geométricas; de manera similar a como se aplican en el sistema de telesecundarias, lo cual es parte sustancial en el trabajo propuesto en esta tesis.

1.1.1 La multiplicación y la factorización numérica como precursores de la introducción de los productos notables

En términos estrictos, no podemos hablar de productos notables en el nivel de primaria, sin embargo, sí podemos considerar a la multiplicación y la factorización numérica como antecedentes o precursores a la introducción de los productos notables. Estos temas se ubican en el programa de estudios de Educación Primaria en el Eje "Los números, sus relaciones y sus operaciones", del Apartado "Números naturales"

A continuación, ubicamos los temas desarrollados de acuerdo con el grado cursado.

<u>Quinto Grado</u>

En este grado encontramos los siguientes temas: planteamiento y resolución de problemas que conduzcan a la descomposición de un número en sumandos o factores; planteamiento y resolución de problemas que impliquen dos o más operaciones con números naturales; y utilización de diversos recursos para mostrar la equivalencia de algunas fracciones. (SEP 2000).

Sexto Grado

En este grado se espera una conclusión de los temas anteriores, mediante el desarrollo de los siguientes temas: múltiplos de un número; mínimo común múltiplo; planteamiento y resolución de problemas diversos cuya solución implique dos o más operaciones; equivalencia y orden entre las fracciones.

En síntesis, en la educación primaria se aborda el estudio de los problemas de tipo multiplicativo (que implican multiplicaciones y divisiones) y se inicia el estudio de la descomposición en factores primos. Estos dos antecedentes son esenciales para el estudio de la multiplicación y factorización de expresiones algebraicas; (SEP 2004)

1.2 Los productos notables en la educación secundaria

En este apartado ubicamos el tema de PN en el programa de estudios de secundaria y analizamos su relación con los temas previamente estudiados en primaria.

La Tabla 1 muestra la ubicación de este tema en términos de organización de contenidos del programa de estudios; (SEP 2006b)

Grado	Tercero
Bloque	Uno
Eje	Sentido numérico y pensamiento algebraico
Tema	Significado y uso de las operaciones
Subtema	Operaciones combinadas
Aprendizaje esperado	Al término de la secuencia, se espera que los alumnos logren transformar expresiones algebraicas en otras equivalentes, para aplicarlas en la solución de problemas.

Tabla 1 Ubicación en el Plan y Programa de Estudio 2006, asignatura: Matemática, del tema de la factorización y los Productos Notales

Conocimientos y habilidades	a) efectuar o simplificar cálculos con expresiones algebraicas Ejemplos: $(x+y)^2$; $(x+a)(x+b)$; $(x+y)(x-y)$; etc. b) factorizar expresiones algebraicas Ejemplos: $x^2+2xy+y^2$; $x^2+(a+b)x+ab$; x^2-y^2; ax^2+bx; etc.

Tabla 1 (continuación). Ubicación en el Plan y Programa de Estudio 2006, asignatura: Matemáticas, del tema de la factorización y los Productos Notales

En los comentarios del programa se sugiere generalizar las propiedades de la factorización y multiplicación numérica para "abstraer" por generalización las propiedades de los productos notables. Se dice, por ejemplo:

> La realización de cálculos donde intervienen Productos Notables tiene sentido en, al menos, dos casos:
>
> a) Para expresar o llevar a cabo cálculos numéricos
>
> b) Para resolver ecuaciones o problemas diversos
>
> Las leyes generales con que se manejan los PN pueden aplicarse en la resolución de problemas diversos, por ejemplo:
>
> $103 \times 97 = (100 + 3)(100 - 3) = 100^2 - 3^2 = 10000 - 9 = 9991$
>
> De manera similar se podría abordar el producto de dos binomios de la forma $(x + a)(x + b)$:
>
> $(x + a)(x + b) = x^2 + ax + bx + ab = x^2 + (a + b)x + ab$
>
> Al aplicar este resultado a un cálculo aritmético particular se tendrá, por ejemplo:
>
> $31 \times 32 = (30 + 1)(30 + 2) = 30^2 + (1 + 2)30 + 1 \times 2 = 992$ (SEP 2006b p.107)

Continuando con la ubicación del tema de la factorización y los Productos Notables se localiza en el Eje: Sentido Numérico y Pensamiento Algebraico. En este eje se vincula el estudio de la aritmética y del álgebra, para darle sentido al lenguaje matemático, ya sea oral o escrito, creando una relación entre la aritmética y el álgebra. Dando por sentado que desde la primaria existen contenidos que en la secundaria se profundizarán y consolidarán.

El eje Sentido Numérico y Pensamiento Algebraico pretende que los alumnos se inicien en el estudio del algebra durante el primer grado, para que en los dos grados sucesivos profundicen en su estudio, considerando tres usos conceptuales de las literales:

a) Como número general, identificado en el Plan y programa como: "significado y uso de los números"
b) Como incógnita, identificado en el Plan y programa como: "significado y uso de las operaciones"
c) En una relación funcional, identificado en el Plan y programa como: "significado y uso de las literales"

En este punto, es necesario acotar que estos usos y significados de la variable presentan una estrecha relación con los conceptos y el enfoque desarrollado por Ursini (2005) y otros investigadores.

El uso del lenguaje algebraico, en estas tres concepciones, implica cambios conceptuales importantes para alumnos y docentes, en cuanto a la forma de generalizar propiedades aritméticas y geométricas.

Desarrollar un pensamiento deductivo, usando las literales como representación de un número general, se favorece, por ejemplo, con la obtención de expresiones algebraica donde se calcula un término específico de una sucesión, gobernado por una regla de correspondencia.

De manera similar se pretende favorecer el uso de las literales como incógnita mediante la modelación y resolución de problemas por medio de ecuaciones con una o dos incógnitas, que sean preferentemente inducidas por los alumnos.

Para el estudio de las variables aplicadas en una relación funcional, se usan literales en expresiones algebraicas que representen la relación entre dos variables, considerando tres tipos de funciones: lineales (en las que la proporcionalidad es un caso particular), cuadráticas y exponenciales.

Por último, en la Tabla 2 presentamos los antecedentes del tema de PN del libro de Segundo Grado de Telesecundaria. (SEP 2007).

Secuencia	Contenidos trabajados que se relacionan con la secuencia de segundo
3 "Expresiones algebraicas y modelos geométricos"	En esta secuencia desarrolla el tema de ecuaciones equivalentes, partiendo de modelos geométricos donde se muestra que el área puede representarse mediante equivalentes, concluyendo con el ejemplo: $4(a+2)=4a+8=2(a+2)+2(a+2)$ Resaltando que si damos el mismo valor numérico a la literal, obtenemos el mismo resultado
12 Multiplicación y división de polinomios	El propósito de la secuencia es resolver problemas multiplicativos con expresiones algebraicas

Tabla 2. Antecedente de los PN en los libros para segundo grado

En estas secuencias se introduce la multiplicación de expresiones algebraicas mediante su representación con bloques algebraicos.

1.3 El problema educativo

Desde la perspectiva de mi práctica docente, la enseñanza y el aprendizaje de los temas relacionados con los *PN*: trinomio cuadrado perfecto, diferencia de cuadrados y trinomios de segundo grado con un término común, siempre ha provocado serios problemas. Las dificultades en la realización de operaciones, que van desde la suma, resta, multiplicación y división de expresiones algebraicas, se pueden encontrar desde el primer grado de secundaria hasta niveles de educación superior. En el caso de los PN, estas dificultades tienden a agudizarse.

Por ejemplo, en el estudio de las operaciones aritméticas es común que se confunda la factorización de algún número. Tomemos como ejemplo el número 10, factorizado como 5×2, con un error común con su descomposición en sumandos: 5 + 5 o bien, 2 + 8.

Un ejemplo algebraico clásico es la multiplicación de las expresiones algebraicas, particularmente los PN. Como ya mencionamos, algunos de los errores clásicos encontrados por la investigación sobre el desarrollo y adquisición del pensamiento algebraico están directamente vinculados con los PN, por ejemplo, Matz (1982) encontró que los siguientes desarrollos se producen sistemáticamente entre los estudiantes de secundaria:

$(a + b)^2 = a^2 + b^2$ o $(a + b)^3 = a^3 + b^3$

Morales y Sepúlveda (2006) expresan que:

> … existe consenso de que la factorización (y los Productos Notables) es uno de los temas del curso de álgebra que más se dificultan a los alumnos: primero, porque el reconocimiento del tipo de expresión algebraica ya implica dificultades asociadas con la utilización de números, letras y signos de operación para conformarlas, así como por la noción de variable; y segundo, porque aun conociendo los diferentes métodos no saben cuál de ellos utilizar en un determinado momento. (p 1)

Por estos motivos, es de interés contribuir a la construcción de las soluciones didácticas de esta problemática, para favorecer el aprendizaje significativo de la operatividad algebraica, específicamente del aprendizaje significativo de la multiplicación de expresiones algebraicas y los PN.

Debemos acotar que en el presente estudio nos restringiremos a los PN que se proponen en el currículo para el tercer grado de secundaria (SEP 2008). Éstos son los siguientes:

1. El producto de elevar un *binomio al cuadrado*, cuyo resultado es un *trinomio cuadrado perfecto*: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
2. El producto de dos *binomios conjugados*, cuyo resultado es una *diferencia de cuadrados*: $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$
3. El producto de dos *binomios con término común*, cuyo resultado es un *trinomio con término común*: $(a+b)(a+c) = a^2 + a(b+c) + bc$.

En el desarrollo de la Componente Formal, cuando presentemos el Modelo Teórico Local para el presente trabajo, abundaremos sobre estos productos y sus reglas de operación.

Para el desarrollo de la presente propuesta de intervención, se propone el diseño de actividades para complementar el material escrito empleado en lo particular por el sistema de telesecundarias. Desarrollamos una propuesta que favorece la comprensión de la operación de los PN, vinculando tres "fuentes" de significado: numérica, geométrica y algebraica,

Realizamos esta vinculación mediante un interactivo diseñado con un programa computacional de geometría dinámica: Geometer's Sketchpad (Jackiw, 2003).

Con estas consideraciones, termina la exposición del problema educativo, así como los antecedentes del presente trabajo y la ubicación del tema en el currículo educativo.

En el siguiente apartado presentaremos, el marco teórico en que sustentamos el estudio.

Capítulo II

Marco Teórico

En este apartado se presenta el marco teórico en que se sustenta el presente trabajo y se establece por qué se eligió el marco de los Modelos Teóricos Locales (MTL), de Filloy (1999). Asimismo, se muestra el Modelo Teórico Local construido para la presente tesis, con dos de los componentes que propone Filloy (1999): el Modelo de Competencia Formal y el Modelo de Enseñanza.

2.1 Modelos Teóricos Locales

En el libro *Aspectos Teóricos del Álgebra Educativa* (Filloy, 1999) queda la percepción de que no existe un enfoque paradigmático para visualizar, desde la idea de paradigma de Kuhn, (1962) a la investigación educativa matemática como una "ciencia normal". Kuhn (1962) define la idea de ciencia normal como la "investigación basada firmemente en una o más realizaciones científicas pasadas, realizaciones que alguna comunidad científica particular reconoce durante cierto tiempo como fundamento para su práctica posterior" (Kuhn, 1962, p. 33).

Esta condición ha inducido la realización de la investigación educativa en matemáticas, con un enfoque eminentemente pragmático, con aportes de diversas disciplinas como: la lingüística, la lógica la psicolingüística, la semiótica, la psicología general cognitiva, la psicología de las matemáticas, la epistemología de las matemáticas, la historia de las matemáticas, la psicología de la educación, la teoría del desarrollo del currículo de matemáticas y la didáctica de las matemáticas (Filloy, 1999, p. 1).

Este pragmatismo es lo que lleva a Filloy a proponer la creación de los Modelos Teóricos Locales (MTL) "apropiados sólo para *fenómenos específicos*" (Filloy, 1999, p. 7), que preferentemente consideren cuatro componentes teórico metodológicas, que el mismo autor clasifica como: a) Modelos de enseñanza, b) Modelos para los procesos cognitivos, c) Modelos de competencia formal y d) Modelos de comunicación (Filloy, 1999, p. 6)

Para el caso específico de la presente tesis, decidimos valernos de la propuesta de Filloy (1999) sobre la construcción de un Modelo Teórico Local, que nos permite una guía teórica y metodológica suficiente para entender el fenómeno educativo que nos interesa, en este caso, los productos notables considerados para el nivel de secundaria. Específicamente abordaremos nuestro MTL, considerando sólo dos de las componentes del modelo, a saber: los Modelos de

Enseñanza y los Modelos de Competencia Formal.

Esta perspectiva de los MTL nos permite observar y analizar los fenómenos educativos, considerando sus elementos esenciales: los procesos curriculares de enseñanza y aprendizaje; los sujetos que están en este proceso (alumnos y docentes); los conocimientos matemáticos involucrados, tanto por los docentes como por los alumnos mismos; y, finalmente, los procesos de comunicación que se desarrollan entre todos los actores.

Es importante destacar que no se pretende observar cada componente del MTL separadamente. En este punto, Filloy (1999) resalta que "tendremos que concentrarnos en modelos teóricos locales apropiados sólo para fenómenos específicos; pero, capaces de tomar en cuenta todas las cuatro componentes" (p. 7).

Estas componentes son: (1) los Modelos de enseñanza, (2) los Modelos de los Procesos Cognitivos, (3) los Modelos de competencia formal, y (4) los Modelos de comunicación.

En combinación con estas cuatro componentes, Filloy propone el uso de otra herramienta metodológica, a la que denomina como Sistemas Matemáticos de Signos (SMS), mediante los cuales, Filloy postula una manera de interpretar el fenómeno educativo a través del concepto teórico-metodológico de los Modelos Teóricos Locales, englobando en cuatro componentes interrelacionados, las maneras en que podemos interpretar el quehacer docente matemático. En seguida mostraremos nuestra interpretación de cada componente.

2.1.1. Modelos de enseñanza

Esta componente se integra con la codificación y decodificación de temas matemáticos, a través de un sistema matemático de signos, sistemas que son empleados por los docentes y los alumnos, cada cual con sus particulares niveles de abstracción; que, para el caso particular del presente trabajo, versa sobre los productos notables algebraicos.

Filloy (1999) expone que hay dos tendencias específicas para abordar los modelos de enseñanza, una definida como sintáctica y la otra como de "modelaje concreto" o semántico.

En la primera tendencia, se hace una modelación mediante esquemas sintácticos, donde se parte de las reglas sintácticas. Tomando como ejemplo la solución de ecuaciones lineales de una incógnita, Filloy identifica la existencia de, al menos, dos métodos sintácticos. El primer método se denomina *euleriano*, donde la "adición y multiplicación de los inversos aditivo o multiplicativo, respectivamente en los dos miembros de la ecuación" (Filloy, 1999, p. 23) permiten solucionar las ecuaciones.

El otro método se denomina *sintáctico _ viético*. En éste se usa la transposición de términos de un miembro a otro de una ecuación. Filloy establece que éste es el "tratamiento tradicional en la enseñanza de la resolución de ecuaciones" (Filloy, 1999, p. 23).

La segunda tendencia en los modelos de enseñanza propone el uso de elementos más "concretos", que requieren de la manipulación de los alumnos para que aprehendan la sintaxis de la matemática, precisamente como una inferencia o deducción de estos elementos "concretos"

Tomando nuevamente como ejemplo la solución de ecuaciones lineales de una incógnita, Filloy identifica el método geométrico y el método de la balanza.

El siguiente esquema pretende clarificar la interpretación que damos a la componente de los Modelos de Enseñanza:

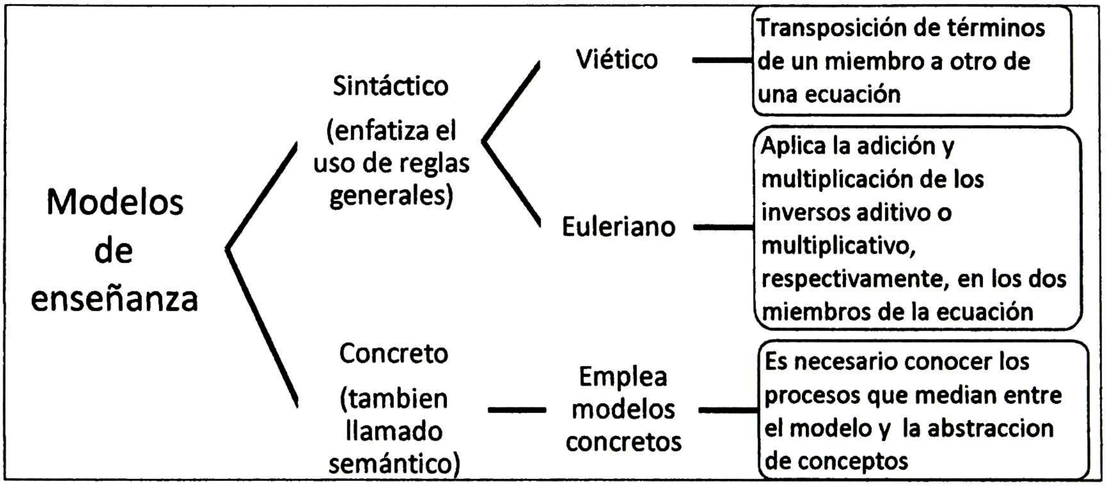


Figura 1. Métodos comunes de la componente de los Modelos de Enseñanza en los MTL.

Es importante resaltar que para la presente tesis, la tendencia del uso de modelos concretos, en la componente de los Modelos de enseñanza, es la estrategia empleada para el desarrollo del interactivo mediante el programa de geometría dinámica.

2.1.2. Modelos de Competencia Formal

Esta componente involucra otro concepto propuesto por Filloy (1999): la destreza en el uso e interpretación de las reglas formales del conocimiento matemático. Este uso e interpretación requiere, también, de Sistema Matemático de Signos, (SMS) de tipo formal; esto es, en primer término, un conocimiento eficiente y de mayor profundidad en el conocimiento matemático específico que se está indagando, de tal manera que se puedan "decodificar intercambios de mensajes en el momento en que algún sujeto (enseñante), con un adecuado nivel de uso (actuación competente), de la numeración y sus operaciones", de acuerdo con el ejemplo propuesto por Filloy (1999)

En el apartado 2.4 sobre el "Modelo Teórico Local para la presente tesis" destacaremos los elementos que consideramos pertinentes sobre esta componente para el conocimiento matemático formal sobre los productos notables.

2.1.3 Modelos de comunicación.

Se emplean para "describir las reglas de competencia comunicativa formación y decodificación de textos, desambiguación contextual y circunstancial" (Filloy 1999 p. 6).

El elemento sustancial de este modelo es el intercambio de mensajes entre los sujetos involucrados en el fenómeno educativo. En este intercambio de información está involucrado el Sistema Matemático de Signos con que cada participante maneja su conocimiento; ello provoca, en ocasiones, desequilibrios en la manera en que cada participante interpreta la información.

Filloy establece que hay al menos cuatro tipos de fuentes de significados:

> 1.- De transformaciones dentro de un SMS sin referencia a otro SMS
> 2.- De traducciones a través de SMS distintos
> 3.- De traducciones entre SMS y Sistemas de Signos Matemáticos, como lenguaje natural, textos producidos con imágenes visuales y los sistemas de señales que utilizan los sujetos durante los procesos de enseñanza /aprendizaje
> 4.- Con la consolidación, simplificación, generalización y rectificación de acciones, procedimientos y conceptos de los SMS intermedios creados durante el desarrollo de las secuencias de enseñanza/aprendizaje (...), estos SMS intermedios evolucionan hacia un nuevo SMS más 'abstracto' (Filloy 1999, p. 73, 74).

2.1.4 Modelos de los procesos cognitivos

En esta componente se consideran los procesos cognitivos necesarios para abstraer y generalizar conocimientos matemáticos.

Algunos elementos relevantes para la definición del modelo de procesos cognitivos son la percepción en el manejo de conceptos geométricos y sus transformaciones, el direccionamiento para la comprensión de conceptos, el uso de la memoria, concatenado con procesos de análisis y síntesis que involucran necesariamente la lógica, así como el uso de herramienta para la resolución de problemas.

Es en esta componente, donde, a nuestro juicio, el uso de los sistemas matemáticos de signos adquiere una importancia particular, puesto que dependiendo del nivel de abstracción que maneje, ya sea el alumno o el profesor puede provocar usos incorrectos en el aprendizaje o enseñanza de las matemáticas.

Filloy (1999) emplea tres métodos clásicos para la resolución de problemas, mediante los cuales ejemplifica el rol de los procesos cognitivos en la descripción de los fenómenos de enseñanza y aprendizaje del álgebra. Éstos son:

Método de inferencias analíticas sucesivas (MIAS): de acuerdo con Filloy, "este es el método analítico clásico para resolver problemas" (Filloy 1999, p. 37), emplea enunciados para describir, "situaciones reales o estados posibles del mundo" (Filloy 1999, p. 37), con las cuales se hacen aproximaciones hasta llegar a una posible solución que se reconoce como la solución del problema.

Método analítico de exploraciones sucesivas (MAES): en este método, "se usan exploraciones con datos particulares" (Filloy 1999, p. 37), que nos permiten analizar el problema y encontrar su solución.

Método cartesiano (MC): emplea un SMS más abstracto, traduciendo el problema a un código matemático, que facilite encontrar la solución del problema. "Este acercamiento a la resolución de problemas es el usual en los textos actuales de algebra" (Filloy 1999, p. 38)

La tendencia natural es hacer un uso cada vez más eficiente del MC; sin embargo, el autor destaca que es importante identificar que método resulta más adecuado para resolver un problema específico.

2.2 Sistemas matemáticos de signos

En la propuesta de los MTL, Filloy (1999, 1996) aporta una poderosa herramienta de análisis semiótico, materializando el análisis por medio de los Sistemas Matemáticos de Signos. Tomando como punto de partida un trabajo de Puig (en prensa), donde se cita a Pierce (1987) como un teórico contemporáneo de la semiótica, se puede caracterizar los Sistemas Matemáticos de Signos.

Puig retoma la relación tríadica que se establece entre el *signo* que representa un *objeto* y es decodificada por un *interpretante* (en el caso presente, un estudiante o el docente, que aprende o enseña un contenido sobre productos notables). A partir de lo que esta relación implica, desarrolla la caracterización de tres tipos de signo, llamándolos: Índice, Icono y Símbolo.

La Figura 2 muestra cómo interpretamos la relación tríadica entre los elementos del proceso que Puig propone y los tres tipos de signos mencionados:

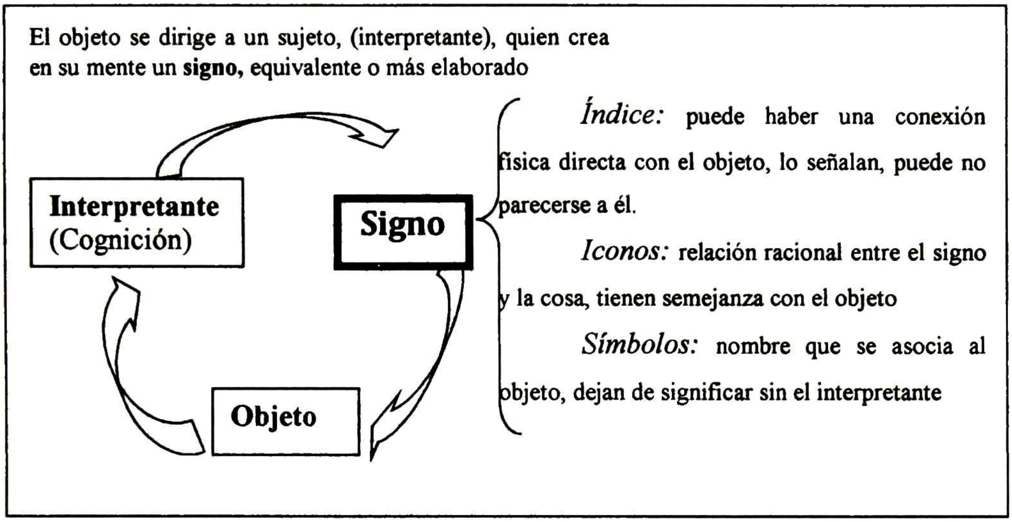


Figura 2. La relación tríadica propuesta por Puig, para el signo, en el Sistema Matemático de Signos.

Respecto al lenguaje algebraico, es decir al Sistema Matemático de Signos del Álgebra, Puig (en prensa), señala:

> Es un tópico referirse a las expresiones algebraicas como 'lenguaje simbólico', por ejemplo, cuando se habla de poner un problema en ecuaciones, se describe usualmente como 'paso del lenguaje natural al lenguaje simbólico' Sin embargo, si usamos la terminología de Pierce, las expresiones algebraicas no son símbolos, sino que son iconos, aunque parezca extraño a primera vista. (Puig, en prensa, p. 7.)

En la Figura 2 se ubica al signo, que destacamos mediante letra negrita, formando parte del flujo formado por el interpretante y el objeto; como integrado por tres elementos, entre los que se encuentra específicamente el ícono, además de los símbolos y los índices.

Para concluir, Pierce (1987) citado en Puig, en prensa, menciona que:

> Las expresiones algebraicas pues son un ejemplo de la imbricación de los tres tipos de signos en las escrituras matemáticas: **las letras son índices, los signos**

+, =, etc. son símbolos y la expresión globalmente considerada es un icono. (p 7) [1]

Las acotaciones anteriores no siempre son ponderadas en los trabajos de investigación, donde se percibe un manejo pragmático de los Sistema Matemático de Signos (SMS).

A manera de conclusión sobre el Modelo Teórico Local, desde nuestro punto de vista, las partes fundamentales del Modelo de Filloy, son las siguientes:

- Considerar los "Modelos Teóricos Locales" como una perspectiva que aborde fenómenos locales, pero sin olvidarnos de reflexionar sobre las cuatro componentes de este modelo, de tal forma que permita considerar los elementos básicos de todo fenómeno de enseñanza-aprendizaje.
- Reconocer que atenernos al manejo e interpretación de un Sistema Matemático de Signos, nos obliga a no limitar una única interpretación del fenómeno matemático estudiado, antes bien, es imperioso considerar otros marcos teóricos que pudieran complementar nuestras observaciones y conclusiones.
- Tener plena conciencia de cuál es nuestro objeto de estudio, ya sea la observación de competencias matemáticas (significado formal) o el uso que se hace de esas competencias, (significado en el uso), buscando la congruencia en el empleo propio del Sistema Matemático de Signos que adoptemos.

Con la observancia de estas recomendaciones, contaremos con mejores posibilidades de que nuestra investigación no caiga en lo que el autor define como tesis efímeras, "que no soportan su contrastación con los hechos empíricos observados" Filloy (1999).

Es importante agregar que en un MTL se da preferencia al significado que los alumnos dan al uso de sus propios saberes matemáticos, de tal manera que cuando se enfrentan a nuevo problemas de aprendizaje o aplicaciones matemáticas que aún no dominan, en donde sus saberes no son suficientes, generan estrategias y códigos personales para, a partir de ellos, intentar resolver el nuevo problema planteado, lo que los lleva a aplicar sus conocimientos desarrollando mecanismos novedosos en la asimilación de nuevos aprendizajes o soluciones a los problemas

[1] Las "negritas" y el resaltado, en todas las referencias, son propias del tesista

planteados.

En este proceso se producen significados intermedios que, en ocasiones, ocasionan lo que Filloy y otros, identifica como errores naturales de sintaxis (Filloy y Rojano, 1989; Filloy, Rojano y Solares, 2002; Solares 2002; citados en Solares 2007), (Butto, 2005)

2.3 Justificación del uso de los MTL

En el desarrollo de la presente propuesta de diseño de una secuencia didáctica, en el campo del álgebra, específicamente en el manejo de los PN, consideramos que la propuesta de Filloy nos proporciona una estructura con enorme solidez teórica, al mismo tiempo que una deseable flexibilidad.

Los MTL nos proporcionan herramientas para organizar al proyecto en sí mismo, para definir su planteamiento y desarrollo, proponiendo la obtención, organización, análisis de datos y la obtención de resultados; que resaltamos, contiene un enfoque que busca eminentemente una solución pragmática a problemas propios del trabajo docente.

En consonancia con los MTL, en el presente estudio se considera que:

- La aplicación de las herramientas conceptuales y metodológicas permiten el estudio de la problemática planteada.
- Se conceptualiza la aula como un espacio experimental de la interrelación alumno – docente – currícula.

La aproximación de los MTL nos permite estudiar, en el espacio experimental conformado por el aula, la problemática en torno a la enseñanza y aprendizaje de los productos notables mediante el desarrollo de una propuesta de intervención didáctica, cuyo diseño y análisis se efectúa usando las mismas herramientas de los MTL.

Se debe acotar que en nuestro MTL desarrollamos dos componentes: el Modelo de Competencia Formal, integrado por los productos notables: binomio al cuadrado, binomio conjugado y binomio con termino común; y el Modelo de Enseñanza de los productos notables en telesecundaria, mediante bloques algebraicos. Estas componentes se presentan en el siguiente apartado.

2.4 El Modelo Teórico Local para la presente tesis

La componente formal del MTL para la presente tesis se conforma con dos modelos: el modelo de competencia formal y un modelo de enseñanza.

En el primero, desarrollaremos lo relacionado con las definiciones de los PN; en la segunda componte, mostraremos la evolución histórico pedagógica de cómo se enseñó el tema de los PN durante la vigencia del modelo propuesto en los Planes de estudio de 1993, y su posterior evolución, en los Planes de estudio de 2006, donde resaltamos el uso de los bloques algebraicos, que resultan importantes para la propuesta de la presente tesis.

2.4.1. Modelo de competencia formal

Nos restringiremos a los PN que se proponen en el currículo para el tercer grado de secundaria, específicamente en la propuesta del Modelo Renovado de Telesecundaria.

Identificamos a los PN como multiplicaciones de expresiones algebraicas; la característica de "notables" obedece a que son expresiones fácilmente reconocibles y ampliamente empleadas en el estudio del álgebra escolar de secundaria, como en las factorizaciones y resolución de ecuaciones.

En general estos productos se operan empleando reglas fijas, por lo que su desarrollo es considerado clásico; esta característica nos permite que sean fácilmente reconocibles. Especificamos cada caso:

a) **"*Binomios al Cuadrado*"**, cuyo producto origina un "trinomio cuadrado perfecto"; dicho de otra manera: el producto de elevar un binomio al cuadrado, da como resultado un trinomio cuadrado perfecto: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ (Lehemann, 1986; Rees, 1970; Filloy y Rojano, 2001).

Anfossi (1961, p. 50) nos proporciona la regla verbal característica de operación, con el siguiente enunciado: "el cuadrado de un binomio es igual al cuadrado del primer término más el doble producto de los dos términos, más el cuadrado del segundo"

En el material escrito para el tercer grado de telesecundaria (SEP, 2008, p. 15) se proporciona un ejemplo particular, a manera de conclusión, sin que se mencione ningún enunciado; el ejemplo que se aporta es:

$$(3x+5)^2 = 9x^2 + 30x + 25$$

Un caso particular es el cuadrado de una diferencia: al elevar al cuadrado una diferencia también se obtiene un trinomio cuadrado perfecto, pero ahora el doble del producto de los términos del binomio tiene signo menos (Anfossi, 1961, p. 19).

El ejemplo que se propone en el material escrito para telesecundaria, para ejemplificar este tipo de binomio al cuadrado es:

$$(x-b)^2 = x^2 - 2xb + b^2$$

Con este ejemplo, más los ejercicios que el mismo texto establece, se espera que los alumnos perciban la diferencia entre el binomio cuadrado con los términos positivos y el mismo con uno de los términos negativos.

b) *Binomios conjugados.* Anfossi (1961) establece la regla oral para su operación, que dice: "El producto de dos binomios conjugados (binomios que sólo difieren en el signo del segundo término) es igual al cuadrado del primer término menos el cuadrado del segundo término". (p. 50) (Lehemann, 1986; Rees, 1970; Filloy y Rojano, 2001).

En el material escrito para el tercer grado de telesecundaria (S. E. P. 2008, p. 22), este producto notable se explica como un ejemplo general:

El producto de dos binomios conjugados es una diferencia de cuadrados

$\boxed{\text{Binomios conjugados}}$ $(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$ $\boxed{\text{Diferencia de cuadrados}}$

La factorización de una diferencia de cuadrados son dos binomios conjugados

c) *Binomios con Término Común.* Anfossi (1961) establece que: el producto de dos binomios que tienen un término común es igual al cuadrado de dicho término, más el producto del mismo por la suma algebraica de los otros dos términos, más el de éstos. Una expresión general de este producto notable, es la siguiente: $(a+b)(a+c) = a^2 + a(b+c) + bc$

En los libros de texto para telesecundaria de tercer grado (SEP. 2008, p. 26) se establece que para obtener el producto de dos binomios con término común, se puede hacer lo siguiente:

$$(x+4)(x+3) = x^2 + 7x + 12$$

El término común "x" se eleva al cuadrado

Se suman los términos no comunes 4 +3; el resultado 7 se multiplica por "x"

Se multiplican los términos no comunes (4) (3) = 12

2.4.2. Modelo de enseñanza

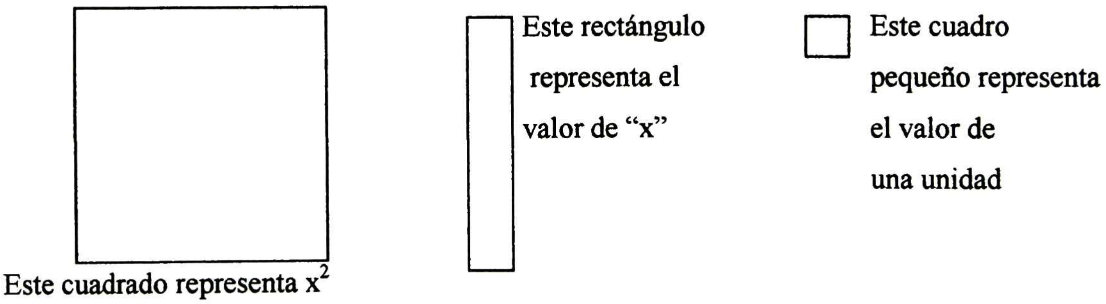
En las generalidades de la componente de enseñanza, destacamos que Filloy postula dos tendencias en los modelos de enseñanza, la primera, integrada con dos elementos sintácticos denominados euleriano y viético, y que corresponden con las maneras en cómo se trataba el tema de la factorización algebraica propuestos en el Plan de Estudios de 1993.

En la guía de estudio Conceptos básicos para tercer grado de telesecundaria (S E P, 1994) se comienza el estudio de los productos notables y su factorización con el siguiente enunciado:

> un trinomio cuadrado perfecto es el resultado de elevar un binomio al cuadrado. Para identificarlo se ve si dos de sus términos son cuadrados perfectos y si el otro corresponde al doble producto de las raíces cuadradas de ambos (p. 142)

Posteriormente, en la Guía de actividades, se realizaba una serie de ejercicios con la intención de aplicar la explicación de la factorización del trinomio cuadrado perfecto.

Para el tema de cómo tratar el tema de la factorización algebraica en el Modelo Renovado de Telesecundaria (SEP 2008b), se propone el uso de los bloques algebraicos, como representaciones geométricas de expresiones algebraicas. El ejemplo dado en el libro es el siguiente:



Los algebloques son representaciones geométricas de expresiones algebraicas y se emplean para operarlas. Para el caso específico de los productos notables, se utilizan los algebloques para representar con figuras rectangulares, el binomio al cuadrado, el binomio conjugado y el binomio con término común.

La manipulación de los bloques algebraicos permite la abstracción de la operatividad algebraica mediante el uso de modelos concretos. En términos de la aproximación teórica de

Filloy (1997), se hace uso de elementos más concretos, que requieren de la manipulación de los alumnos, para que aprehendan la sintaxis de la matemática, precisamente como una inferencia o deducción de estos elementos concretos

Partiendo de esta propuesta de uso de los bloques algebraicos, en el presente estudio desarrollamos una propuesta didáctica basada en hojas de trabajo que proponen tareas a los alumnos para que manipulen, mediante un programa de geometría dinámica, representaciones de dinámicas de los bloques algebraicos, para resolver problemas de multiplicación de expresiones algebraicas, específicamente de productos notables. En el siguiente capítulo titulado Metodología, se presentan las hojas de trabajo y los "interactivos" de geometría dinámica diseñados.

CAPÍTULO III

Metodología

En este capítulo se presenta la metodología para llevar a cabo este proyecto de desarrollo. Esta metodología es consistente con la perspectiva teórica de los Modelos Teóricos Locales (Filloy, 1999) y se puede resumir mediante el esquema de la figura 3.

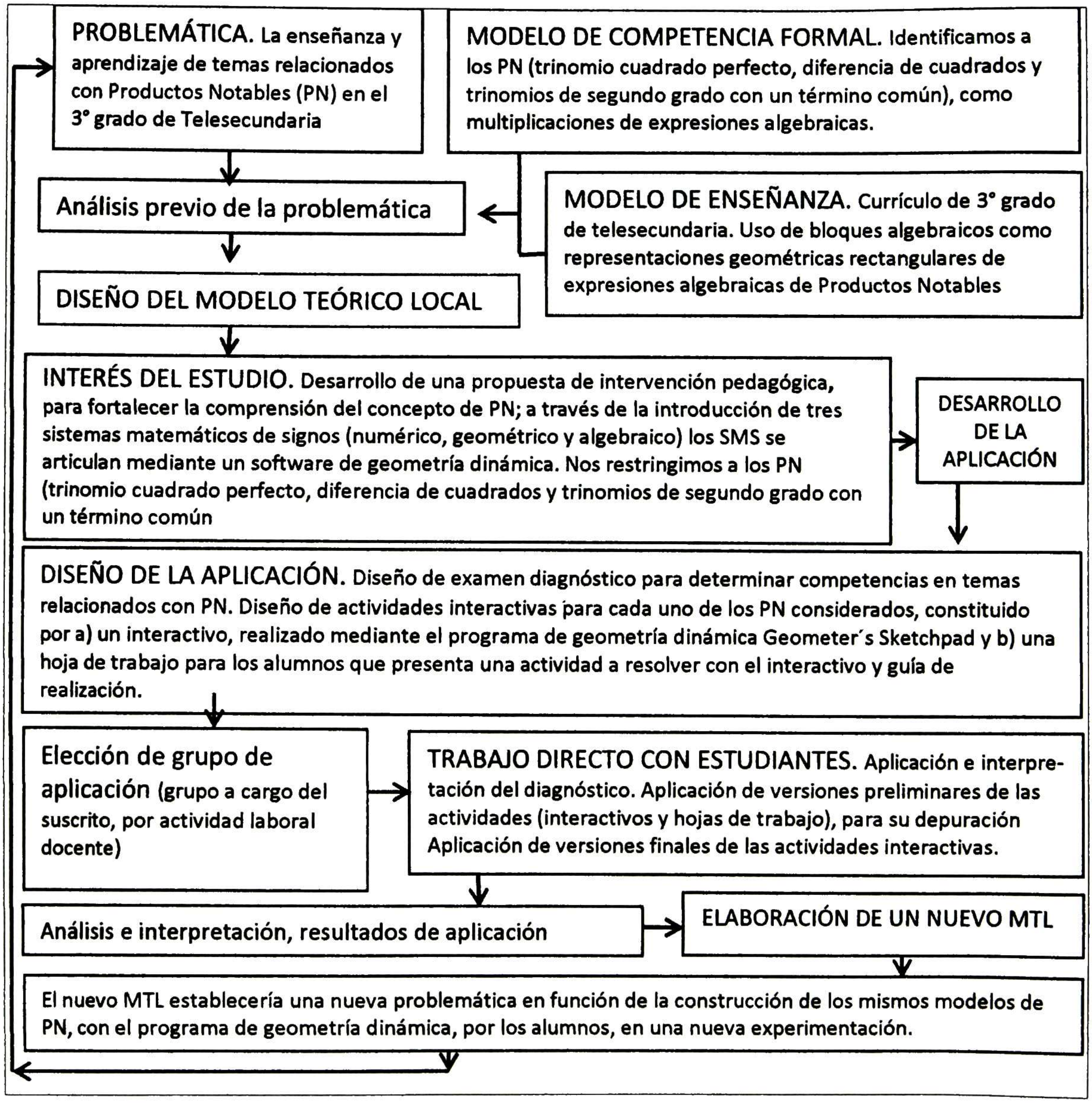


Figura 3. Esquema del diseño de la aplicación. Se destaca el aspecto recursivo del modelo, a partir de un nuevo Modelo Teórico Local

A continuación, se discute los elementos de la metodología empleados en este trabajo.

En cuanto a la problemática, ésta se abordó en el capítulo uno, apartado 1.3, sobre el problema educativo, por lo que no abundaremos en ello; sólo destacaremos que nuestro interés fue: Desarrollar una propuesta que favorece la comprensión de la operación de los PN, vinculando tres "fuentes" de significado: numérica, geométrica y algebraica, mediante el uso de un interactivo diseñado con un programa computacional de geometría dinámica: Geometer's Sketchpad. Para ello, se diseñaron actividades para *complementar el material escrito* empleado en el sistema de telesecundarias, aplicando una secuencia de aprendizaje, que favorece la comprensión del concepto de Producto Notable.

Es imperioso resaltar que el diseño del interés del estudio que podemos identificar como objetivo ha evolucionado, modificándose los que originalmente se tenían contemplados, en virtud de las etapas y características en que se ha desarrollo el presente proyecto. Esto significa que el objetivo que actualmente se presenta es producto de la evolución que ha presentado el proyecto.

Por cuanto al análisis del problema se refiere, en el capítulo dos, se desarrollaron dos componentes del Modelo Teórico Local para la presente tesis, que versaron sobre la componente formal y la componente de enseñanza.

Ahora abordaremos el diseño de aplicación partiendo del examen diagnóstico.

3.1. Diagnóstico

El examen diagnóstico fue diseñado para determinar cuáles son los conocimientos previos con que cuentan los alumnos al momento de realizarse el estudio, así como clasificar las dificultades que tienen para comprender expresiones algebraicas, usando referentes numéricos. Por otro lado, hacemos eco de la propuesta metodológica de Filloy (1999) respecto al diseño de la etapa experimental, donde expresa con respecto al diseño de la experimentación:

> ...conviene escoger el momento de la observación experimental en algún punto del currículum de matemáticas en que lo aprendido (de lo enseñado hasta ese punto) no permita que lo siguiente a enseñar pueda descubrirse espontáneamente sin la intervención de la enseñanza futura. Lo ideal es encontrarse con una zona conceptual en la que al diagnosticarse las

> competencias de la población respecto de los usos de tales conceptos, lleve a actuaciones muy alejadas a lo esperado (p. 47).

El examen diagnóstico diseñado permite ubicar el momento en que es pertinente la intervención de la enseñanza de los PN con los alumnos con los que trabajamos en este estudio. (Una versión completa de este instrumento puede consultarse en el anexo 1).

Características del examen

El examen diagnóstico se diseñó a partir de dos documentos en los que se tratan el tema de la factorización y los productos notables. De la tesis de Ramírez (1997) se retomaron los ítems correspondientes a tareas de factorizaciones numéricas. Del libro de cuarto grado de primaria (SEP, 1994) se identificaron y adecuaron los ejercicios relacionados con factorizaciones numéricas.

El examen consta de 10 ítems agrupados en cuatro partes. A continuación se describe cada una de estas partes.

Primera parte. Estructuras aditivas y estructuras multiplicativas

Consta de tres ítems, los cuales exploran las ideas que tienen los estudiantes sobre la factorización de números, contrastando las estructuras aditivas y multiplicativas, incluyendo las nociones de factorización mediante números primos (identificada aquí como *factorización completa*).

En la Figura 4 se presentan los ítems de esta parte.

Ítem 1	De las posibles factorizaciones del número 100, señala todas las respuestas que consideres correctas, colocando una **V** en los cuadros de la derecha:	(2)(50)	
		50 + 50-	
		99+1	
		101-1	
		4(25)	
		$\frac{200}{2}$	

Ítem 2	Escribe una **V** en los cuadros de la derecha, señalando las respuestas correctas, de las posibles factorizaciones del número 36 (considera tanto las factorizaciones con números primos como compuestos)	(6)(6)	
		(5)(6) + 6	
		$(2^2)(3^2)$	
		(7)(11) - 41	
		(9)(4)	
		(2)(2)(3)(3)	

Ítem 3	Realiza la factorización total (empleando números primos) del número 50 =

Figura 4. Primera parte del examen diagnóstico: estructuras aditivas vs estructuras multiplicativas.

Segunda parte. Factorización de PN desde una perspectiva numérica

Los ítems de la segunda parte (ítems 4, 5, 6, 7 y 8) exploran los conocimientos que tienen los estudiantes respecto a la factorización numérica de estructuras multiplicativas aritméticas que corresponden a productos notables: *binomio al cuadrado*, *trinomio cuadrado perfecto*, *diferencia de cuadrados* y *producto de binomios conjugados*.

La Figura 5 presenta los ítems de la segunda parte del diagnóstico.

Ítem 4 Completa la siguiente factorización, colocando en las líneas los números faltantes

Tercera parte

$37^2 = (\quad + \quad)(\quad + \quad)$

Ítem 5

Factoriza la siguientes expresión numérica, como un producto conjugado $9^2 - 4^2 =$

Ítem 6

Factoriza la siguientes expresión numérica, como un producto conjugado(36 - 9)=

Ítem 7

Factoriza la siguientes expresión numérica, como un producto de cuadrados

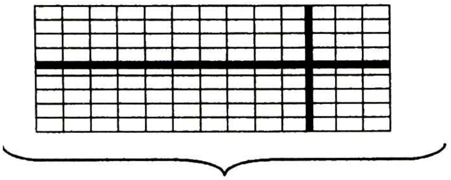
Figura 5. Factorización de PN desde una perspectiva numérica.

Tercera parte. Multiplicación de binomios y áreas

La tercera parte del diagnóstico está formada por un solo ítem (ítem 8), el cual relaciona la multiplicación de binomios "aritméticos" con el cálculo del área de una figura geométrica. El binomio se presenta con valores numéricos, no con literales.

La Figura 6 presenta al ítem 8.

Ítem 8, Calcula la cantidad de cuadritos que tiene el siguiente rectángulo



4 + 5

10 + 3

¿Podrías emplear la siguiente expresión?: (10+3)(4+5)

Si es así, aplícala

Figura 6. Multiplicación de binomios y áreas.

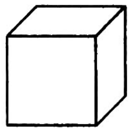
Cuarta parte. Más sobre estructuras multiplicativas

Los ítems 10 y 11 abordan vínculos de las estructuras multiplicativas con otras áreas de la matemática: cálculo de volúmenes y proporcionalidad (mínimo común múltiplo).

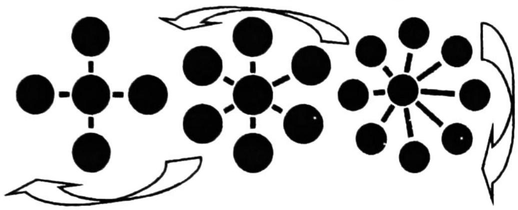
La Figura 7 presenta los ítems de esta parte del diagnóstico.

Ítem 9

¿Cuál sería la medida de las aristas de un cubo que tuviera 8 cm^3 de volumen?



Ítem 10. Observa la siguiente figura



Si estas figuras giraran en el sentido que indican las flechas, y cada círculo representara un diente de un engrane, calcula el número de dientes que tiene que girar en cada vuelta

Primer engrane		Segundo engrane		Tercer engrane	
Número de dientes que gira	Numero de vueltas	Número de dientes que gira	Numero de vueltas	Número de dientes que gira	Número de vueltas
4	1	6	1	8	1
	2		2		2
	3		3		3
	4		4		4

¿A las cuántas vueltas volverán los tres engranes a estar en la misma posición que en este momento se ve?

Figura 7. Más sobre estructuras multiplicativas.

3.2. Aplicación y herramientas de análisis para el diagnóstico

La aplicación del examen diagnóstico se realizó en una escuela telesecundaria ubicada en la comunidad de Santa María Zolotepec, municipio de Xonacatlán, Estado de México. Este plantel está conformado por 12 grupos, con un promedio aproximado de 30 alumnos por grupo. En la escuela hay cuatro grupos de cada grado. Se solicitó a los profesores de cada uno de estos grupos que seleccionaran a 3 alumnos de acuerdo con el siguiente criterio: un alumno con desempeño bueno o sobresaliente en matemáticas, uno con desempeño medio y uno con desempeño bajo. Con esta selección, se esperaba contar con una muestra que fuera representativa de cada grupo y particularmente de sus habilidades para resolver problemas de factorización numérica.

Los conocimientos sobre factorización que habían estudiado los alumnos seleccionados al momento de la aplicación del diagnóstico fueron los siguientes.

Los alumnos de primer grado no habían estudiado aún los temas relacionados con la factorización algebraica. En cuarto, quinto y sexto grados de primaria estudiaron temas relacionados con la factorización numérica, como cálculo de áreas y adiciones y sustracciones de números fraccionarios con diferente denominador, que implican cálculos sobre máximo común divisor y mínimo común múltiplo.

Los alumnos de segundo grado ya habían comenzado el estudio de los temas sobre máximo común divisor y mínimo común múltiplo, relacionados con la factorización numérica.

Los alumnos de tercer grado ya habían estudiado los temas de Productos Notables que se abordan en secundaria.

Un dato que debemos señalar es sobre la población a la que se esperaba aplicar el diagnóstico; en la fecha de aplicación no se contó con un grupo de tercer grado, por lo que nuestra muestra se redujo a 33 alumnos.

En seguida presentamos, ítem por ítem, el análisis de los resultados obtenidos de la aplicación del examen diagnóstico.

3.3 Resultados del examen diagnóstico

Primera parte

Ítem 1. La noción de factorización, como descomposición en factores está confundida con la noción de descomposición en sumandos. En general, los estudiantes de los tres grados entendieron la factorización como "descomposición" ya sea en factores o en sumandos. Sin embargo, las descomposiciones en sumandos distintos o usando una resta (99 + 1, 101 – 1) aparecieron muy poco.

Ítem 2. En general, los estudiantes de los tres grados eligieron las descomposiciones por factores que no son potencias. Es necesario señalar que las opciones de descomposición, usando estructuras aditivas combinan una suma o una resta con una multiplicación; es decir, sus estructuras son más complicadas.

La factorización en números primos tuvo porcentajes de respuestas correctas muy bajos.

De hecho, en primer grado no hubo una sola respuesta correcta. A medida que se avanza en el grado escolar aumenta ligeramente el porcentaje de respuestas correctas.

Segunda parte

A pesar de que este tipo de preguntas no se abordan en los temas enseñados en la escuela, este ítem de factorización tuvo mayores porcentajes de respuestas correctas que el ítem de factorización en números primos. Nuevamente, percibimos que a medida que se avanza en el grado escolar aumenta ligeramente el porcentaje de respuestas correctas.

Tercera parte

Los ítems que involucran vocabulario que se estudia en los temas de factorización algebraica (diferencia de cuadrados y trinomio cuadrado perfecto) sólo fueron resueltos por los alumnos de tercer grado. Sin embargo, aún en el caso de los alumnos de tercer grado, se detectaron muchos errores al factorizar estas expresiones aritméticas, que involucran números y no tienen literales.

En el Ítem 5: (*Factoriza la siguiente expresión numérica, como un producto conjugado* $\left[9^2 - 4^2\right] =$) no hubo respuestas correctas.

En el Ítem 6: (*Factoriza la expresión numérica, (36 9)= como un producto conjugado*) sólo el 33% de los alumnos de tercer grado logró solucionar correctamente.

En el Ítem 7: *(Factoriza la siguiente expresión numérica, como un producto de cuadrados"* $10^2 + 2\left[(10)(5)\right] + 5^2 =$), no hubo respuestas correctas.

Para el ítem 8, la situación cambió pues sí hubo respuestas correctas en los tres grados.

Este ítem no es propiamente de factorización, sino de multiplicación. Además, se presentan referentes geométricos que enriquecen las posibles interpretaciones y entradas a la solución de la tarea.

Cuarta parte

En general, los resultados obtenidos en esta parte son significativamente mejores que los de las partes anteriores. Esto puede deberse a que los ítems están tomados de ejercicios de primaria, haciendo énfasis en la factorización numérica.

Nuevamente observamos que se presentan fortalezas en el manejo de un sistema matemático numérico; el grado académico también afecta la eficiencia de solución.

3.4. Conclusiones sobre el diagnóstico

* Hay una gran cantidad de estudiantes de los tres grados que entienden *factorización* como *descomposición* en sumandos, especialmente cuando la estructura de la suma en la que se descompone es "sencilla" (no combina operaciones) y los números en los que se descompone son "sencillos" (iguales, por ejemplo).

* En el momento de aplicación del examen diagnóstico, los alumnos de tercer grado no aplicaban las propiedades estudiadas sobre los PN y su factorización a la resolución de los problemas numéricos presentados.

* A medida que se tiene un nivel mayor de escolaridad aumentan la eficiencia y eficacia en la resolución de factorizaciones numéricas.

A partir de los resultados del diagnóstico, concluimos que la confusión en la descomposición entre estructuras aditivas (sumandos) y estructuras multiplicativas (factores) obliga a revisar lo estudiado sobre multiplicación de expresiones en la escuela secundaria como paso anterior al estudio de la factorización algebraica. Esto confirma la pertinencia del desarrollo de alternativas de enseñanza de este tema: los PN en educación secundaria.

3.5. El diseño de las "Hojas de Trabajo" y el interactivo de Geometer's Sketchpad

Para la estrategia de enseñanza de los Productos Notables diseñamos una serie de actividades interactivas usando el programa de geometría dinámica denominado Geometer's Sketchpad[2]. Con estas actividades esperamos promover el aprendizaje de los productos notables, a partir de una mayor comprensión de la manera en que se representan numérica y geométricamente. Las actividades están diseñadas para ser desarrolladas con alumnos que están cursando tercer año de secundaria.

Los productos notables considerados fueron:

a) "Binomio al cuadrado", cuyo resultado es un trinomio cuadrado perfecto.

b) Producto de "binomios conjugados", cuyo resultado es una diferencia de cuadrados.

c) Producto de un "binomio con un término común", cuyo resultado es una expresión algebraica del tipo: $x^2 + x(a+b) + ab$.

---

[2] The Geometer's Sketchpad, version 4.05.

Para la introducción de cada uno de estos productos notables, diseñamos un "interactivo" en *Geometer's Sketchpad* y una hoja de trabajo correspondiente. La combinación de estos dos recursos, el interactivo y la hoja de trabajo correspondiente, forma cada una de las actividades interactivas diseñadas. Es decir, en nuestro estudio los recursos diseñados son complementarios pero están profundamente vinculados; se "necesitan" uno a otro para el desarrollo de las actividades.

Las actividades interactivas hacen énfasis en la variabilidad de las literales presentes en las expresiones algebraicas, en los distintos dominios numéricos en los cuales toman valores las literales (números enteros y números decimales) y en las relaciones dinámicas entre las representaciones algebraica, geométrica y la concreción numérica de los productos notables considerados.

Un elemento importante que nos permitió desarrollar las actividades interactivas es la propuesta didáctica que se propone en el Nuevo Modelo Renovado de Telesecundaria, que incorpora el recurso denominado "bloques algebraicos"; los cuales se emplean desde el primer grado en la modalidad educativa de Telesecundaria como estrategia de enseñanza para contenidos relacionados con el álgebra.

Consideramos que estos aspectos que enfatizan las actividades interactivas constituyen los aportes del proyecto de intervención diseñado. La interactividad con el programa Geometer's Sketchpad permite el estudio de las relaciones dinámicas de las representaciones de los productos notables: algebraica, geométrica y numérica, puesto que facilita la medición de los segmentos con los que se construye geométricamente cada producto, observando con claridad los diferentes valores que toman las literales de la expresión (no sólo enteros, sino racionales, en general). Además, las características dinámicas del Geometer's Sketchpad permiten enfatizar la generalidad de la validez de los productos notables, son válidos para valores generales de las literales.

Dicho de otra manera, las actividades diseñadas permiten la comprensión de lo que significan los PN, dejando de ser sólo un conocimiento descontextualizado, para vincular los referentes algebraicos con los geométricos y los numéricos.

En las figuras siguientes presentamos las partes introductorias de las hojas de trabajo y su relación con los interactivos correspondientes. Estas primeras versiones de las hojas de trabajo se incluyen completas en los Anexos 2A, 2B, 3A, 3B, 4A y 4B. El interactivo diseñado se agrega en un archivo electrónico, adjunto a este documento de tesis.

Las figuras 8, 9 y 10 presentan el inicio de las hojas de trabajo de "Binomios al cuadrado", "Binomios conjugados" y "Binomios con término común" Al inicio de cada una de estas hojas de trabajo se hace referencia a las sesiones en donde se desarrolla el tema de acuerdo con el libro de Telesecundaria, mencionando la sesión y la secuencia correspondiente, así como la identificación general de los alumnos.

> ***"A formar cuadrados"*** y ***"el cuadrado de una diferencia"*** (corresponde las sesiones 1 y 2 de la secuencia "productos notables)
>
> Nombre del alumno____ edad ____
>
> Escuela ____ fecha ______
>
> En las sesiones 1 y 2 elaboraste cuadrados con los bloques algebraicos, para encontrar como obtener el producto de un binomio por otro binomio igual. Esto es, elevaste al cuadrado un binomio y encontraste como resultado un "trinomio cuadrado perfecto"

Figura 8. Introducción y datos generales de los alumnos, en la hoja de trabajo para el tema Binomios al cuadrado.

> ***"La diferencia de dos cuadrados"*** (corresponde a la sesión 3 de la secuencia "productos notables)
>
> Nombre del alumno_________________________________ edad ____
>
> Escuela ____ fecha ______
>
> Con esta segunda hoja de trabajo, esperamos que comprendas como pueden ser los valores (fraccionarios y enteros), con que puede operar un binomio conjugado, dando como resultado una diferencia de cuadrados.

Figura 9. Introducción y datos generales de los alumnos, en la hoja de trabajo del tema Binomios conjugados.

"A formar rectángulos" (corresponde con la sesión 4 de la secuencia "productos notables)

Nombre del alumno____ edad ____

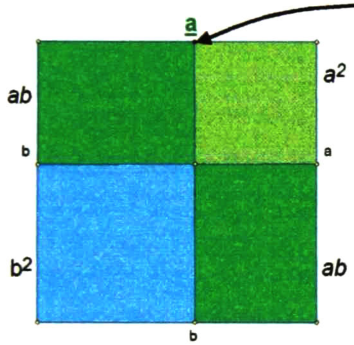
Escuela ____ fecha ______

En este interactivo, apreciaras como se presentan las variaciones dinámicas con números enteros y fraccionarios, en el producto de un binomio con un término común, generalizado con la expresión algebraica:

$(x+a)(x+b) = x + x(a+b) + ab$

Figura 10. Introducción y datos generales de los alumnos, en la hoja de trabajo para el tema Binomios con término común.

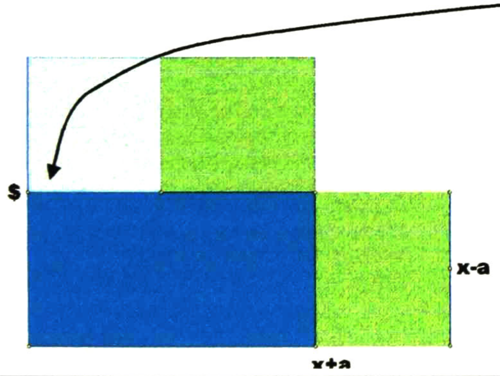
Otro elemento de las hojas de trabajo a destacar es la indicación sobre cómo operar el interactivo. En las figuras se presentan las indicaciones de uso de los interactivos correspondientes a las hojas de trabajo de "Binomios al cuadrado" "Binomios conjugados" y "Binomios con término común".



Para operar el interactivo, **selecciona el punto a** presiona el botón derecho del mouse, se abrirá un cuadro de dialogo, elige el comando "animar el punto" (observa las variaciones que toman los valores de los segmentos a y b del cuadrado). Sugerencia: en el cuadro de dialogo del comando animar el punto, puedes modificar la velocidad con que se mueve el punto; modifica la velocidad para que puedas apreciar mejor las variaciones numéricas.

Otra opción es que muevas manualmente el punto a, para que observes las variaciones de los valores.

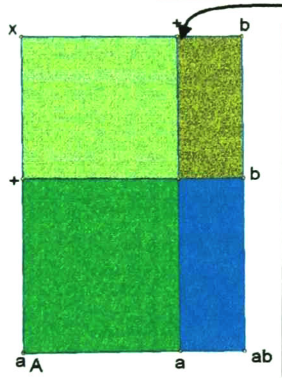
Figura 11. Indicaciones de cómo operar la hoja de trabajo para el tema Binomios al cuadrado.



Para operar el interactivo, selecciona el punto $ presiona el botón derecho del mouse, se abrirá un cuadro de dialogo, elige el comando "animar el punto" (observa las variaciones que toman los valores de los segmentos a y b del rectángulo).

Sugerencia: en el cuadro de dialogo del comando animar el punto, puedes modificar la velocidad con que se mueve el punto; modifica la velocidad para que puedas apreciar mejor las variaciones numéricas. Otra opción es que muevas manualmente el punto $ para que observes las variaciones de los valores.

Figura 12. Indicaciones de cómo operar la hoja de trabajo para el producto Binomios conjugados.



Para operar el interactivo, selecciona el punto +, presiona el botón izquierdo del mouse, se abrirá un cuadro de dialogo, elige el comando "animar el punto" (observa las variaciones que toman los valores de los segmentos a y b del rectángulo).

Sugerencia: en el cuadro de dialogo del comando animar el punto, puedes modificar la velocidad con que se mueve el punto; modifica la velocidad para que puedas apreciar mejor las variaciones numéricas. Otra opción es que muevas manualmente el punto +, para que observes las variaciones de los valores.

Figura 13. Indicaciones de cómo operar la hoja de trabajo para el tema Binomios con término común.

Como puede verse de estos extractos, en el diseño de las hojas de trabajo se cuidó su relación con los temas y materiales oficiales de secundaria. Además, en todo momento se hizo explícita la relación de la hoja de trabajo con el interactivo correspondiente.

A continuación presentamos la versión inicial del interactivo únicamente de los "Binomios conjugados", como un ejemplo de su relación y de la estructura que tienen las actividades interactivas diseñadas.

En este primer diseño aparecía una representación parcial del binomio conjugado, (compárese con la figura 12), lo que obligó a reestructurar el interactivo para su corrección, al igual que las preguntas de la hoja de trabajo correspondiente, como se verá posteriormente.

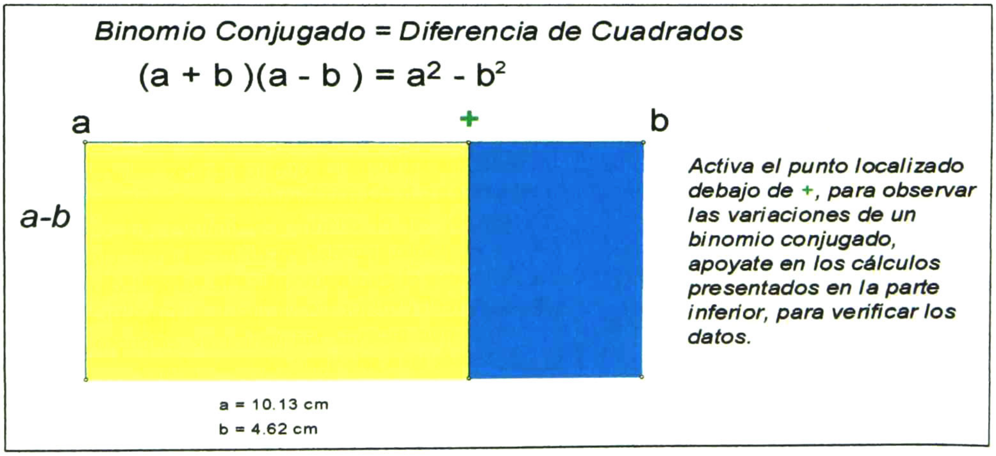


Figura 14. La hoja de trabajo para el producto Binomios conjugados en su fase inicial.

Las hojas de trabajo también sufrieron adecuaciones, como ejemplo presentamos la hoja de trabajo para el producto: "Binomio al cuadrado" en su versión inicial, que como observaremos posteriormente, también se reestructuró, posteriormente a sus primeras aplicaciones con el grupo.

1.- ¿Cómo son los valores de los segmentos a y b?

2.- ¿Qué relación hay entre la medida del segmentos a con la expresión a^2?

3.- ¿Qué relación hay entre las medidas de los segmentos "a" y "b" con la expresión ab.? ¿y con el producto 2ab?

4.- ¿Cómo varia los cuadrados de las expresiones a^2 y b^2?

5.- ¿La medida del cuadrado completo, que corresponde con la expresión $a^2 + 2ab + b^2$ cambia su valor cuando los cuadrados de a^2 y b^2 se agrandan o reducen?

6.- Escribe en tu cuaderno, ¿cómo explicarías esta situación?

Figura 15. Primera versión del cuestionario para la hoja de trabajo para el producto Binomios al cuadrado.

3.6. Primera puesta a prueba

Una aplicación parcial de la primera hoja de trabajo junto con una aplicación parcial del interactivo para la misma sesión, se realizó con un grupo de 27 alumnos de tercer grado, que se encontraban estudiando bajo el esquema metodológico del modelo 1993, (SEP.1993), previo al Modelo Renovado de Telesecundarias (SEP. 2006a). Esta primera puesta a prueba se realizó en la escuela telesecundaria "Adolfo López Mateos" ubicada en la comunidad de Santa María Zolotepec, Municipio de Xonacatlán, Estado de México.

Con esta aplicación identificamos los siguientes problemas.

a) Debido a que no contaban con experiencia previa de emplear los algebloques para el estudio de operaciones algebraicas, los alumnos encontraron muchas dificultades para entender la representación geométrica de las expresiones algebraicas (los algebloques se utilizan desde primer grado, pero bajo la modalidad del Modelo Renovado de Telesecundarias). Por esta razón, el tiempo destinado a la experimentación se destinó a mostrar a los niños cómo emplear los algebloques para representar y manipular expresiones algebraicas; dificultando, definitivamente, la aplicación de esta primera sesión. Esta situación obligó a cancelar definitivamente el resto de las sesiones de aprendizaje.

b) El desconocimiento general del manejo de programas computacionales, específicamente de programas de geometría dinámica –como el de Geometer's Sketchpad– obligó nuevamente a emplear tiempo en la enseñanza del uso del software, en perjuicios del tiempo destinado a la experimentación con el interactivo programado con el programa de geometría dinámica.

Estas consideraciones nos plantean como prerrequisitos el manejo de los bloques algebraicos y las experiencias en el manejo del programa de geometría dinámica.

3.7. Segunda puesta a prueba

El interactivo desarrollado con el programa de geometría dinámica Geometer's Sketchpad, junto con las hojas de trabajo, se aplicaron en una segunda ocasión, sin realizar modificaciones a ninguno de los recursos. Se trabajó con un grupo de 25 alumnos de tercer grado, estudiantes de la escuela telesecundaria "Adolfo López Mateos", escuela que, como ya mencionamos, se encuentra ubicada en la comunidad de Santa María Zolotepec, Municipio de Xonacatlán, Estado de México.

Estos alumnos habían trabajado desde el primer grado con los bloques algebraicos, tal como se propone en el libro de telesecundaria (SEP, 2006).

Además estos alumnos ya contaban con experiencia en el manejo del programa de geometría dinámica Geometer's Sketchpad, lo que definitivamente propició un manejo muy dinámico del interactivo.

Esta puesta a prueba se desarrolló en un aula de medios electrónicos de la escuela. En esta aula se contaba con 15 equipos de cómputo, con características técnicas diversas, entre ellas, poca memoria de trabajo RAM, que sin embargo, fue suficiente para la operación del programa de geometría dinámica Geometer's Sketchpad.

Se trabajó con equipos de dos a tres estudiantes, promoviendo el un trabajo colaborativo y el intercambio de información que permitió socializar fácilmente el trabajo.

La aplicación del interactivo y la solución de las hojas de trabajo requirieron dos sesiones de trabajo, de 100 minutos de duración cada una de ellas.

Esta aplicación nos permitió afinar las hojas de trabajo y apuntalar el trabajo interactivo con el programa computacional.

3.8. Modificaciones realizadas a las hojas de trabajo y al interactivo

Las hojas de trabajo y el interactivo se pusieron a prueba en dos ocasiones, antes de la aplicación principal. Como resultado de estas puestas a prueba se afinaron los aspectos que presentamos a continuación.

Debemos destacar que durante toda la etapa de aplicación, en su fase de experimentación, análisis y depuración, tanto del interactivo como de las hojas de trabajo, contamos con una sala de medios, conformada por 11 computadoras, un pizarrón interactivo (Smart Board), el programa Geometer´s Sketchpad, instalado en las 11 computadoras y las hojas de trabajo para cada alumno.

Como ejemplo, presentamos los principales cambios en la versión inicial del interactivo y la hoja de trabajo de "Binomios conjugados" Las versiones finales completas de las hojas de trabajo se encuentran en los Anexos 6A y 6B.

"Binomios conjugados"

En la versión inicial del interactivo detectamos que sólo habíamos logrado una presentación dinámica parcial de la diferencia de cuadrados, como resultado del producto de binomios conjugados. En la versión final enfatizamos las relaciones dinámicas entre los distintos elementos y representaciones de este producto notable.

La Figura 16 muestra la pantalla del interactivo "Binomios conjugados"

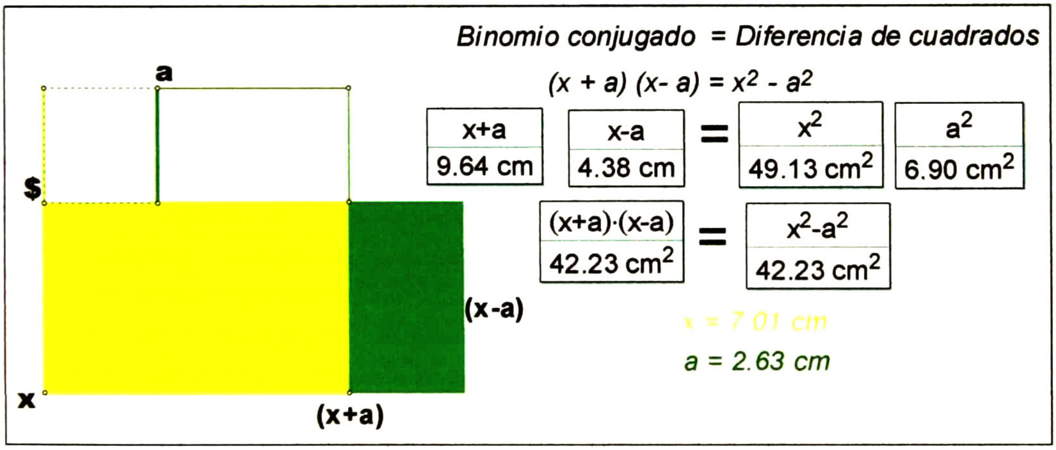


Figura 16. Pantalla del interactivo "Binomios conjugados", realizado mediante el programa de geometría dinámica.

En el interactivo están vinculados dinámicamente la representación algebraica del producto notable (la igualdad entre el producto de binomios conjugados y la diferencia de cuadrados, en este caso), la representación geométrica de esta igualdad y la evaluación de las expresiones algebraicas involucradas, considerando los valores específicos que toman las literales ("x" y "a", en este caso) al variarse el tamaño del segmento correspondiente en la representación geométrica. La contribución principal del interactivo consiste en vincular los tres sistemas matemáticos de signos involucrados (algebraico, geométrico y aritmético) en torno a la igualdad entre el producto de binomios conjugados y la diferencia de cuadrados.

En la representación geométrica, el cuadrado de área x^2 está representado por el cuadrado de medida x (en la figura, con línea de color rojo). El cuadrado de área a^2 es el cuadrado pequeño (localizado en el ángulo superior izquierdo, con línea punteada, entre las líneas de color rojo y verde). En las indicaciones que se incluyen en las hojas de trabajo, se pide que muevan el punto "$", que determina la magnitud del segmento que corresponde a "a" De esta manera, se promueve variar los valores que toma "a", dejando fijo el valor de x (aunque si se quiere, el interactivo permite variar también el valor de x). A partir de esta configuración geométrica, el interactivo permite observar con claridad la diferencia $x^2 - a^2$

El interactivo permite observar también el área del rectángulo que corresponde al producto de los binomios conjugado $(x + a)$ y $(x - a)$. Esta área está formada por dos rectángulos de color (amarillo y verde).

La hoja de trabajo correspondiente a este interactivo también tuvo modificaciones: se modificó para guiar más a el trabajo con el interactivo, se hizo énfasis en la variación sobre dominios numéricos no enteros (racionales expresados como números decimales) y en la relación entre las distintas representaciones del producto notable.

La Figura 17 muestra las preguntas de la hoja de trabajo correspondiente al producto "binomio conjugado"

Observa atentamente los valores de los segmentos x y a

1.- ¿Para qué valores de (x-a) el resultado es cero?

____

2.- ¿Para qué valores de (x+a) el resultado es negativo?

____

3.- ¿Cómo son entre sí los resultados de $(x-a)\ (x+a)=x^2 - a^2$.?

____

Observa los valores de la igualdad $(x-a)\ (x+a)=x^2 - a^2$.

4.- ¿Notas diferencias en sus resultados?. ______ ¿Cómo explicas esta situación?

____

5.- Si sólo se emplearan valores enteros, contrastándolos con los valores que aquí se observan. ¿Habría diferencia con los resultados obtenidos con la igualdad $(x-a)\ (x+a)=x^2 - a^2$.?. Explica tu respuesta

____

6.- ¿Hay valores de x y a para los cuales no se cumple la igualdad? ________

¿Cuáles? ______________________________________

Compara tus respuestas con tus compañeros y redacta una conclusión.

Figura 17. Preguntas de la hoja de trabajo correspondiente al producto binomio conjugado.

El objetivo de estas preguntas es hacer notar al estudiante la relación entre las distintas representaciones del producto notable, la igualdad de los dos miembros (producto de binomios conjugados y diferencia de cuadrados, en este caso), construida a partir del sistema algebraico de signos, del sistema geométrico de signos y del sistema aritmético de signos.

A continuación presentamos el proceso de modificación de las versiones finales de las hojas de trabajo (ver Anexos 5A, 5B, 6A, 6B, 7A y 7B) y de los interactivos correspondientes, a partir de su puesta a prueba con alumnos.

3.9. La toma principal de datos.

Con los datos recabados en las dos etapas anteriores, se realizaron ajustes tanto a las hojas de trabajo como al interactivo con el programa Geometer´s Sketchpad, para ser aplicados en una tercera aplicación en un grupo de experimentación, con las siguientes características:

a.- Este grupo fue el mismo al que se le aplicó la segunda experimentación; por circunstancias particulares de dos alumnos, el grupo al que se le aplicó, estuvo integrado con 23 alumnos de tercer grado, localizados en la misma escuela telesecundaria "Adolfo López Mateos" de la comunidad de Santa María Zolotepec, Municipio de Xonacatlán, Estado de México.

b.- Esta experimentación se desarrolló en la misma aula de medios electrónicos, al servicio de la población estudiantil y docente del plantel "Adolfo López Mateos"; en esta aula, en el momento de la tercera aplicación, se contaba con 15 equipos de cómputo que permitieron que se trabajara con equipos de alumnos de uno a dos estudiantes, facilitando un trabajo colaborativo y de intercambio de información que permitió socializar el trabajo.

c.- Estos alumnos ya tenían antecedentes tanto del manejo de los bloques algebraicos propios del currículo oficial, como un conocimiento previo del trabajo con el interactivo, puesto que con ellos se había aplicado anteriormente la segunda experimentación.

d.- Debemos destacar que esta condición de trabajo previo obedece a que el grupo se encontraba a cargo del tesista, como parte del trabajo laboral docente cotidiano.

Finalizamos este apartado sobre la metodología, donde presentamos el objetivo de la tesis, el examen diagnóstico para sustentar una intervención pedagógica y el diseño de hojas de trabajo, en combinación con el programa Geometer´s Sketchpad.

En el siguiente capítulo presentamos el análisis de la recopilación principal de datos.

Capítulo IV

Resultados

En el presente capítulo mostraremos el análisis de los resultados obtenidos de la aplicación de las versiones finales de las actividades interactivas de cada uno de los productos notables. Clasificamos las respuestas obtenidas y las analizamos en términos de la articulación de los significados provenientes de los tres sistemas matemáticos de signos involucrados: geométrico, aritmético y algebraico. Primero, presentamos el análisis de las respuestas para la actividad de binomio al cuadrado; luego, el análisis de las respuestas para el binomio conjugado; y, finalmente, el análisis de binomio con término común.

Si bien el presente estudio no contempló la aplicación de entrevistas a los estudiantes, al término del capítulo presentamos algunos extractos de las producciones de dos estudiantes a los que se aplicó la versión final de las actividades interactivas. El análisis de estos extractos nos permite tener un acercamiento al proceso de adquisición de significados que estos dos estudiantes desarrollaron al solucionar las actividades presentadas.

4.1 Respuestas para la hoja de trabajo sobre Binomio al cuadrado

A continuación, presentamos el análisis de las soluciones a cada una de las preguntas de la actividad interactiva "Binomio al cuadrado" Para cada pregunta presentamos la siguiente estructura:

♣ Una clasificación de las respuestas dadas por los estudiantes, elaborada en términos de sus características.

♣ La frecuencia de aparición de los tipos de respuestas.

♣ Al final de la clasificación de las respuestas, presentamos un análisis global de los resultados.

Pregunta 1: *¿de qué manera cambian las medidas de los segmentos a y b?*

Para esta pregunta encontramos cinco tipos de respuestas. En todas ellas, los alumnos relacionan la variación de las medidas de a y b de distintas maneras. Además, las relaciones entre las variaciones están expresadas a partir del trabajo con el interactivo.

Es importante señalar que en la configuración del interactivo que se reciben los estudiantes, los valores de a y b están relacionados de manera que su suma es fija:

$a + b = 9.78$.

Respuesta 1: *los lados a y b disminuyen por el movimiento.*

Frecuencia de la respuesta: 1.

En las Figura 18a y 18b, se observa que el alumno hizo "movimientos" a la configuración geométrica que representa al PN y que estos movimientos hicieron variar los valores numéricos de las literales que aparecen en las expresiones algebraicas de los PN.

Es importante señalar que las pantallas presentadas en las figuras de las respuestas son pantallas "genéricas" que representan las respuestas de los estudiantes. En general, estas pantallas genéricas corresponden a producciones de los estudiantes pero, debido a que sólo se tomó notas escritas de ellas (no se grabaron en la computadora), las pantallas genéricas son sólo "aproximaciones" a las originales de los estudiantes.

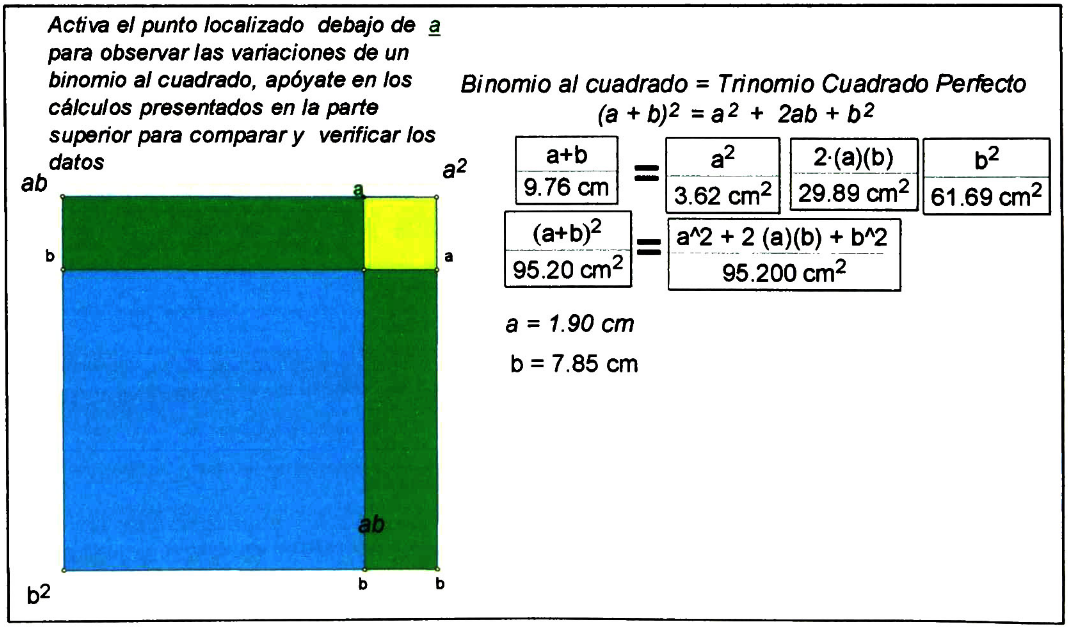


Figura 18a. (antes de manipular los valores de los segmentos "a=1.90" y "b=7.85").

Pregunta 1: "¿de qué manera cambian las medidas de los segmentos a y b?"

Respuesta 1: "los lados a y b disminuyen por el movimiento".

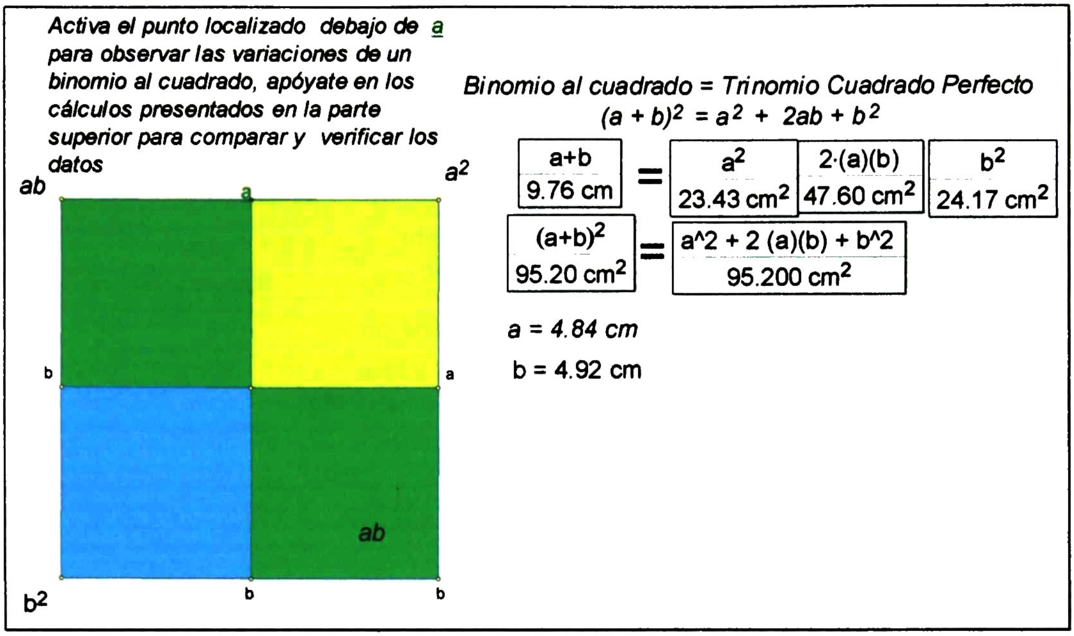


Figura 18b. (después de manipular los valores de los segmentos "a=4.84" y "b=4.92).

Pregunta 1: "¿de qué manera cambian las medidas de los segmentos a y b?"

Respuesta 1: "los lados a y b disminuyen por el movimiento"

Presentamos dos pantallas para observar que el alumno manipula la representación geométrica (utiliza un sistema matemático de signos geométrico) y obtiene variaciones en los valores numéricos que toman las literales de la expresión algebraica (relaciones con los sistemas matemáticos de signos aritmético y algebraico).

Pregunta 1: *¿de qué manera cambian las medidas de los segmentos a y b?*

Respuesta 2: *"de manera proporcional"*

Frecuencia de la respuesta: 2.

En las Figuras 19a y 19b, se muestra cómo los alumnos modifican las medidas de los segmentos "a y" b, (sistema matemático geométrico) y obtienen distintos valores al evaluar las expresiones (mediante un sistema matemático aritmético).

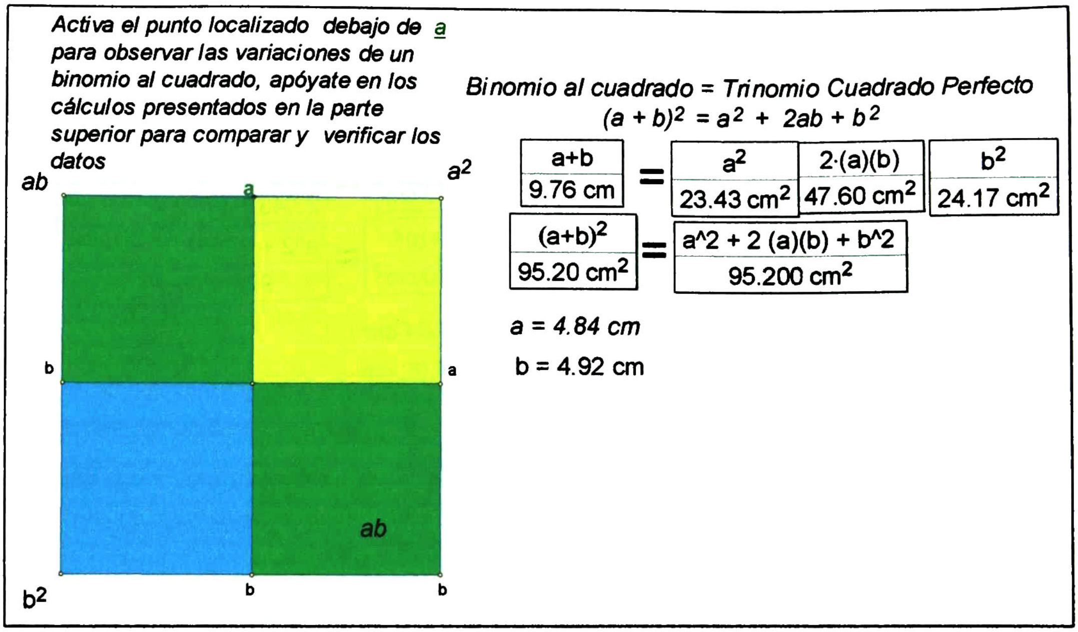


Figura 19a. *(antes de manipular los valores de los segmentos "a=4.84" y "b=4.92")*

Pregunta 1: "¿de qué manera cambian las medidas de los segmentos a y b?"

Respuesta 2: "*de manera proporcional*"

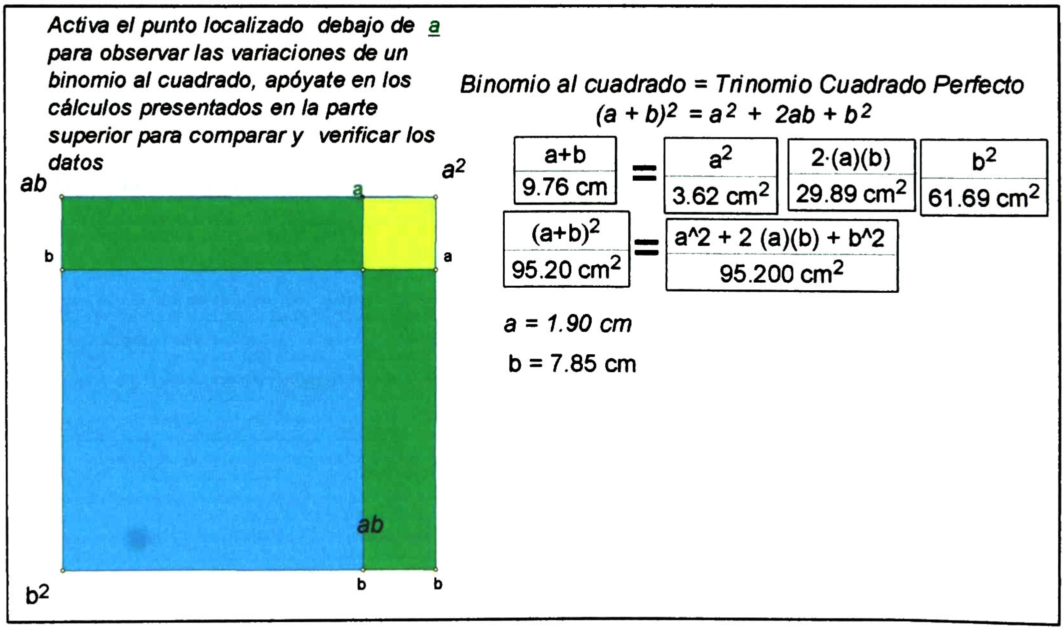


Figura 19b. (después de manipular los valores de los segmentos "a=1.90" y "b=7.85)

Pregunta 1: "¿de qué manera cambian las medidas de los segmentos a y b?".

Respuesta 2: "de manera proporcional"

Se debe destacar que los estudiantes señalaron que la variación es proporcional, sin especificar si es inversa o directa.

Respuesta 3: "*van aumentando pero a la vez disminuyendo*"

Frecuencia de la respuesta: 2.

En la Figura 20 se presenta la pantalla que obtuvieron los alumnos que dieron esta respuesta.

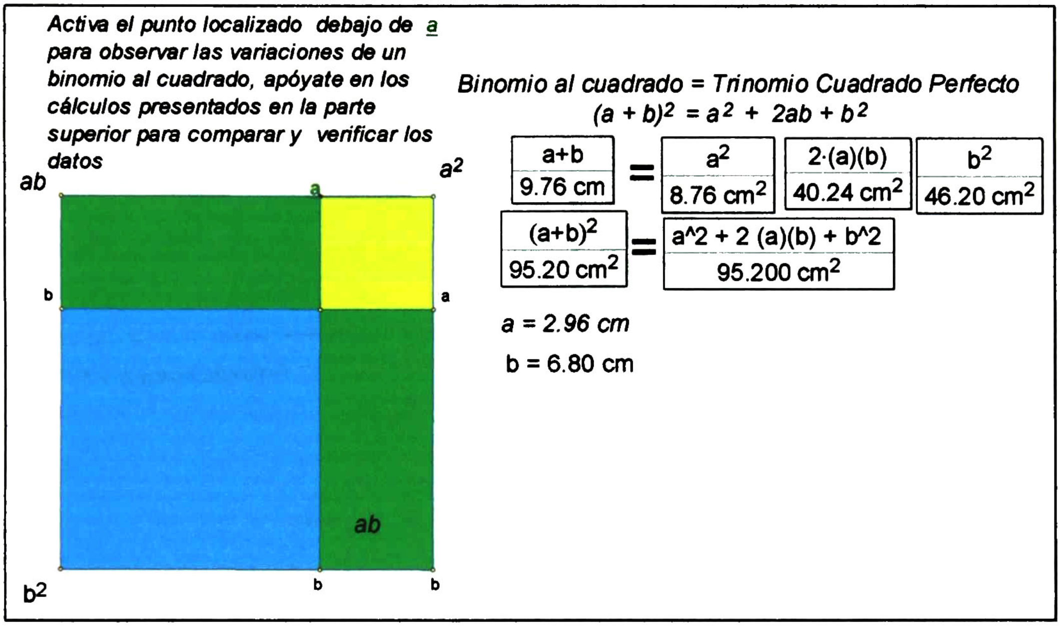


Figura 20. Pregunta 1: "¿de qué manera cambian las medidas de los segmentos a y b?" Respuesta 3: "van aumentando pero a la vez disminuyendo"

Destacamos que, al decir "van aumentando pero a la vez disminuyendo", los estudiantes hacen un uso coloquial del lenguaje. Se percibe la idea de relación "decreciente" en la variación, como en la *proporcionalidad inversa*, pero no llegan a emplear un lenguaje formalizado.

Respuesta 4: "*sus medidas van cambiando de menor a mayor*"

Frecuencia de la respuesta: 7.

En esta respuesta notamos que los alumnos únicamente observaron la variación en la medida de "a", que posiblemente se vio influida por el movimiento geométrico del interactivo, como se aprecia en las pantallas; pero perdieron de vista las modificaciones en el segmento "b". En la Figura 21 se muestra la pantalla correspondiente.

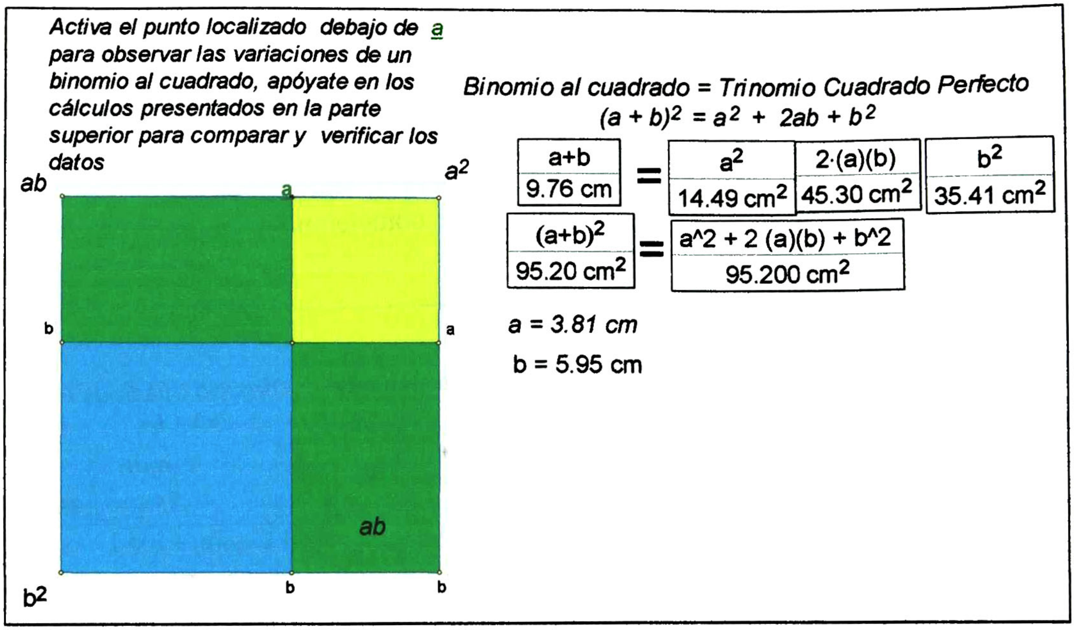


Figura 21. Pregunta 1: "¿de qué manera cambian las medidas de los segmentos a y b?" Respuesta 4: "sus medidas van cambiando de menor a mayor".

Respuesta 5: "*cuando "a" aumenta "b" disminuye y viceversa*".

Frecuencia de la respuesta: 11.

Para estas respuestas, que fueron la mayoría, destacamos el uso combinado de los sistemas matemáticos aritmético y geométrico.

Como en las demás respuestas, empleamos dos pantallas para contrastar la expresión: "*cuando "a" aumenta "b" disminuye y viceversa*" (Figuras 22a y 22b).

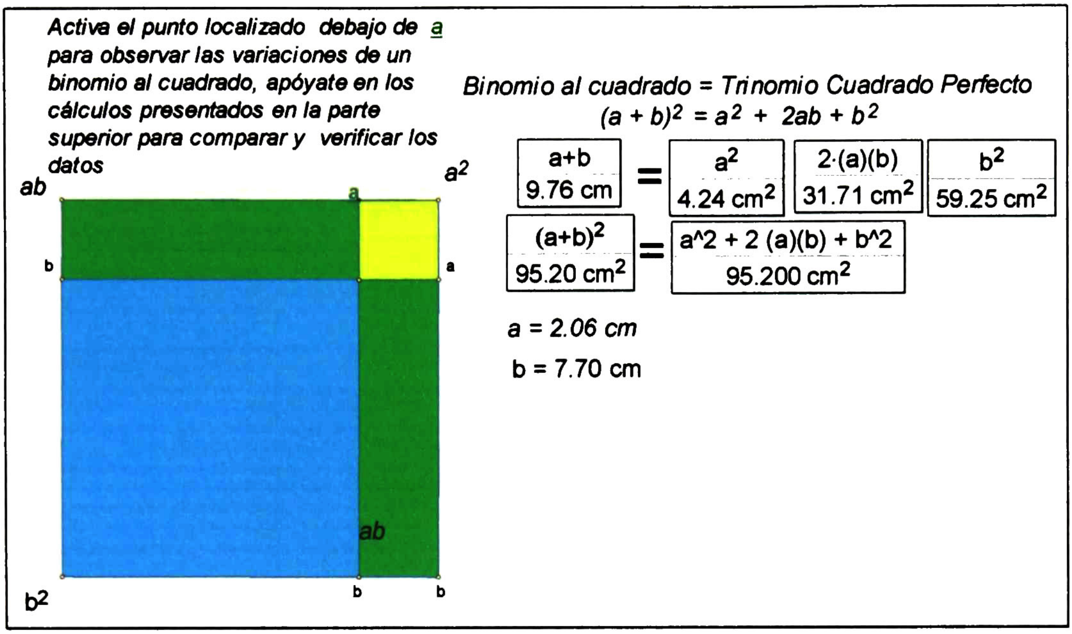


Figura 22a. Pregunta 1: (antes de manipular los valores de los segmentos "a=2.06" y "b=7.70"): "¿de qué manera cambian las medidas de los segmentos a y b?".

Respuesta 5 "cuando "a" aumenta "b" disminuye y viceversa"

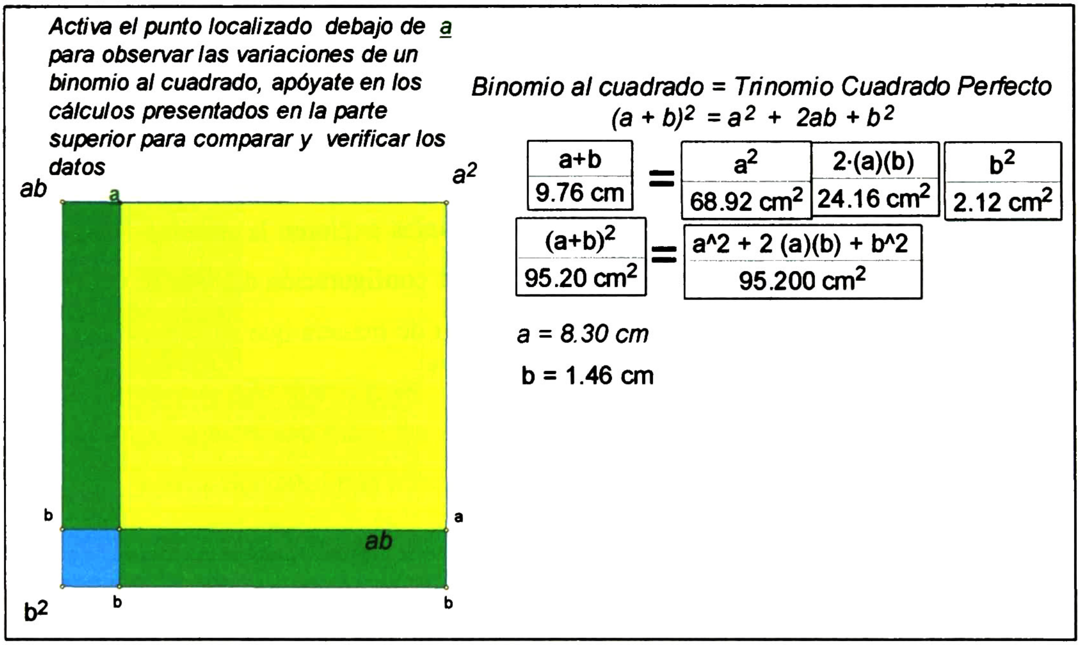


Figura 22b. Pregunta 1: (después de manipular los valores de los segmentos "a=8.30" y "b=1.46):" ¿de qué manera cambian las medidas de los segmentos a y b?"

Respuesta 5: "cuando "a" aumenta "b" disminuye y viceversa"

Consideramos que éste es un muy buen acercamiento a la variación "decreciente", empleando geometría dinámica.

La Tabla 3 presenta la frecuencia de cada uno de los tipos de respuestas dadas a la Pregunta 1.

Pregunta 1: "*¿de qué manera cambian las medidas de los segmentos a y b?*"	
Tipo de respuesta	Frec.
Los lados a y b disminuyen por el movimiento	1
De manera proporcional	2
Van aumentando pero a la vez disminuyendo	2
Sus medidas van cambiando de menor a mayor	7
Cuando "a" aumenta "b" disminuye y viceversa	11
Total de respuestas	23

Tabla 3. Frecuencias de respuestas obtenidas para la pregunta 1 de la actividad Binomio al cuadrado.

Las respuestas obtenidas permiten afirmar que los estudiantes identificaron la relación "decreciente" que vincula a las variables a y b ($a + b = 9.78$). Como se puede ver en la tabla, todos los estudiantes consideran que sus valores cambian. Y, de un total de 23, 20 estudiantes dan indicios de que la relación de variación es decreciente: cuando una aumenta, la otra disminuye.

Pregunta 2: "*¿para qué valores de* a *los valores de* b *son menores que los de* a"?

El objetivo de esta pregunta es que los estudiantes exploren la relación de dependencia entre las variables $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$. Es importante señalar que en la configuración del interactivo que reciben los estudiantes, los valores de $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ están relacionados de manera que su suma es fija: $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = 9.78$. De manera que, $\boldsymbol{b} < \boldsymbol{a}$ para $4.89 < \boldsymbol{a} < 9.78$.

Para esta pregunta encontramos cuatro tipos de respuestas que relacionan los valores de $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ de distintas maneras. Estas relaciones están expresadas a partir del trabajo con el interactivo.

Respuesta 1: "*cuando el valor de a^2 es mayor que b^2.*".

Frecuencia de la respuesta: 1.

En las respuestas mostradas en las pantallas 23a y 23b, destacamos que este alumno emplea los valores de las variables cuadradas, cuando hace sus comparaciones.

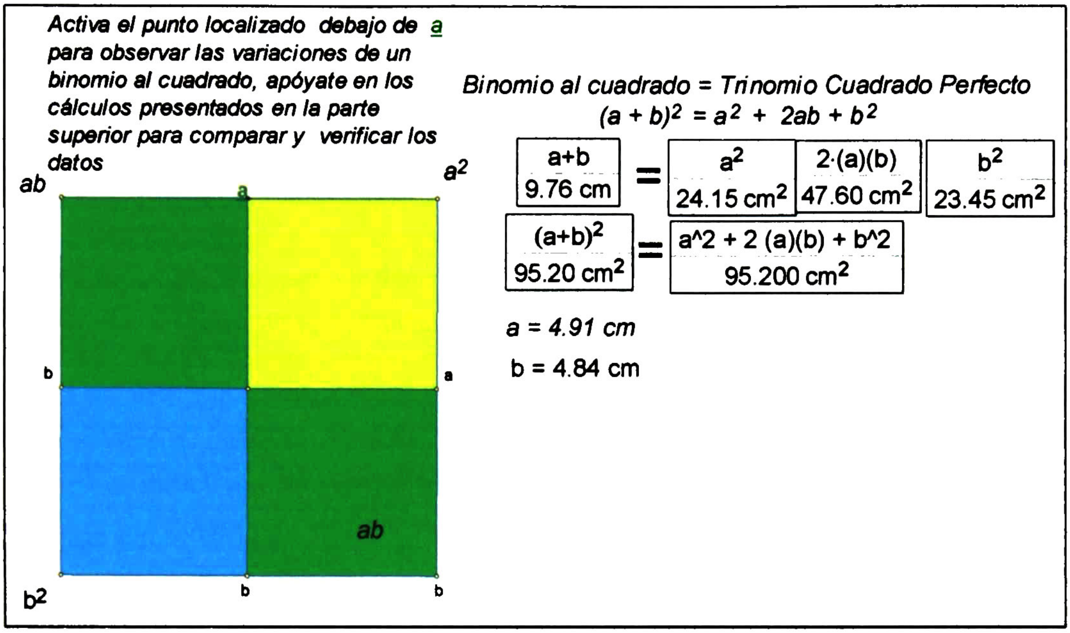


Figura 23a. (antes de manipular los valores de los segmentos "a=4.91" y "b=4.84")

Pregunta 2: "¿para qué valores de "a" los valores de "b" son menores?"

Respuesta 1: "cuando el valor de a^2 es mayor que b^2"

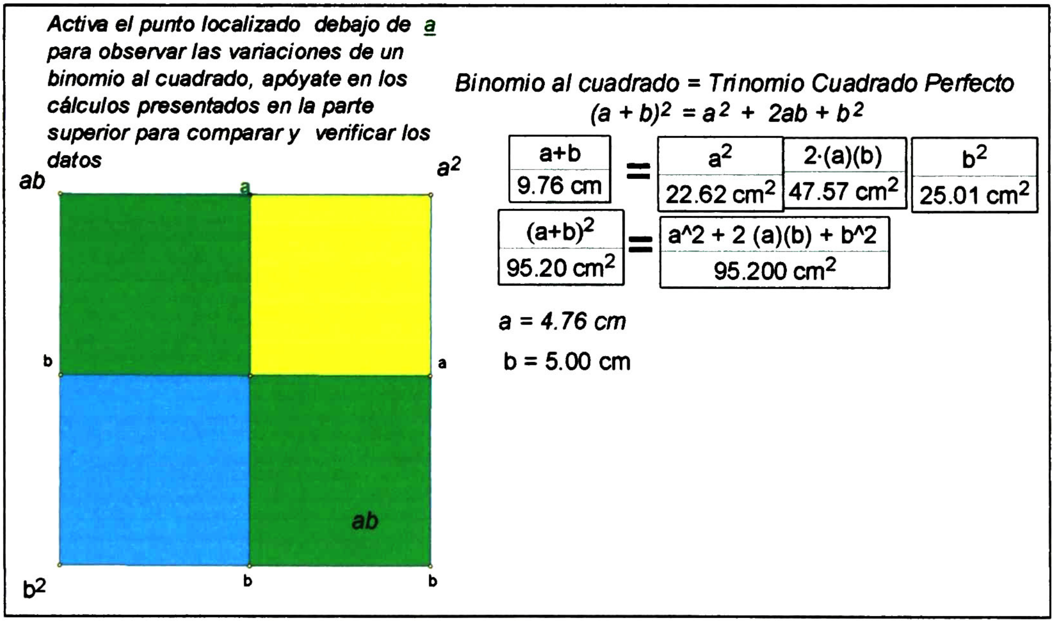


Figura 23b. (después de manipular los valores de los segmentos "a=4.76" y "b=5.0)

Pregunta 2: "¿para qué valores de "a" los valores de "b" son menores?"

Respuesta 1: "cuando el valor de a^2 es mayor que b^2"

Esta respuesta fue dada por un alumno que "confundió" los valores numéricos de los productos cuadrados con los valores de las medidas de los segmentos "a" y "b" pero su descripción es equivalente y correcta, tal como se puede deducir de las representaciones geométrica y numérica del PN. Es decir, $\boldsymbol{a}<\boldsymbol{b}$ si y sólo si $\boldsymbol{a}^2<\boldsymbol{b}^2$, con $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} >0$.

Pregunta 2: "*¿para qué valores de* a *los valores de* b *son menores que los de* a*"?*

Respuesta 2: "*cuando el punto "b" es mayor que el "a", el "b" llega al 99 y el punto "a". va disminuyendo"*

Frecuencia de la respuesta: 2.

En esta respuesta, es importante destacar la manipulación que hacen los alumnos, en cuanto al manejo geométrico del interactivo; centrándose en valores extremos que proporciona el programa. Se emplean dos pantallas (24a y 24b) para presentar las respuestas

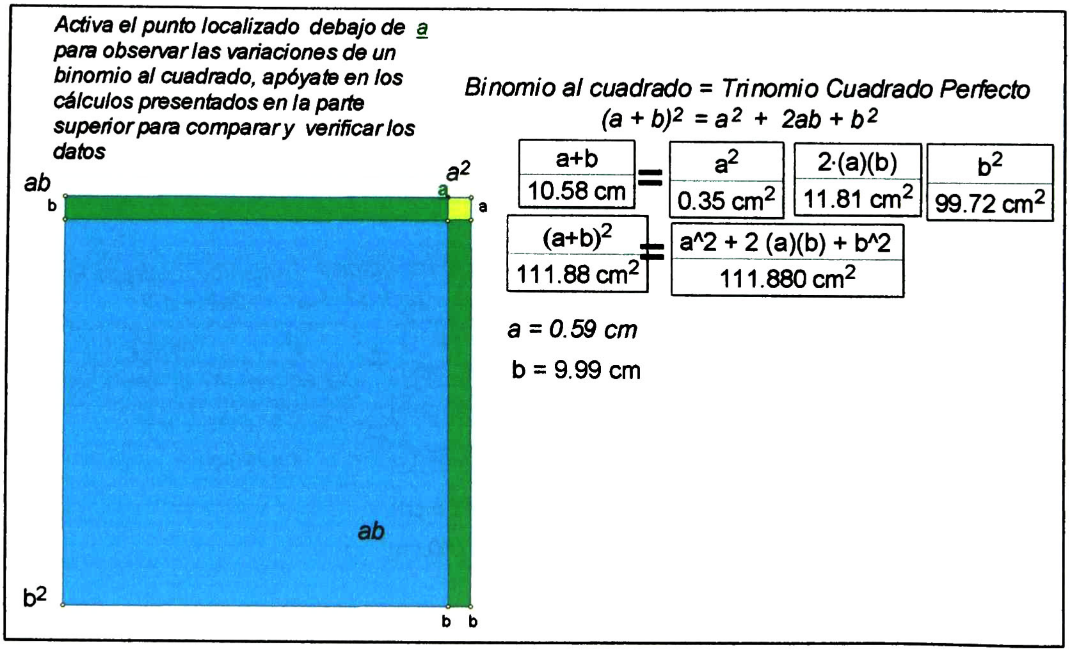


Figura 24a. *(antes de manipular los valores de los segmentos "a=0.59" y "b=9.99").*

Pregunta 2: "¿para qué valores de "a" los valores de "b" son menores?".

Respuesta 2: "cuando el punto "b" es mayor que el "a", el "b" llega al 99 y el punto "a" va disminuyendo".

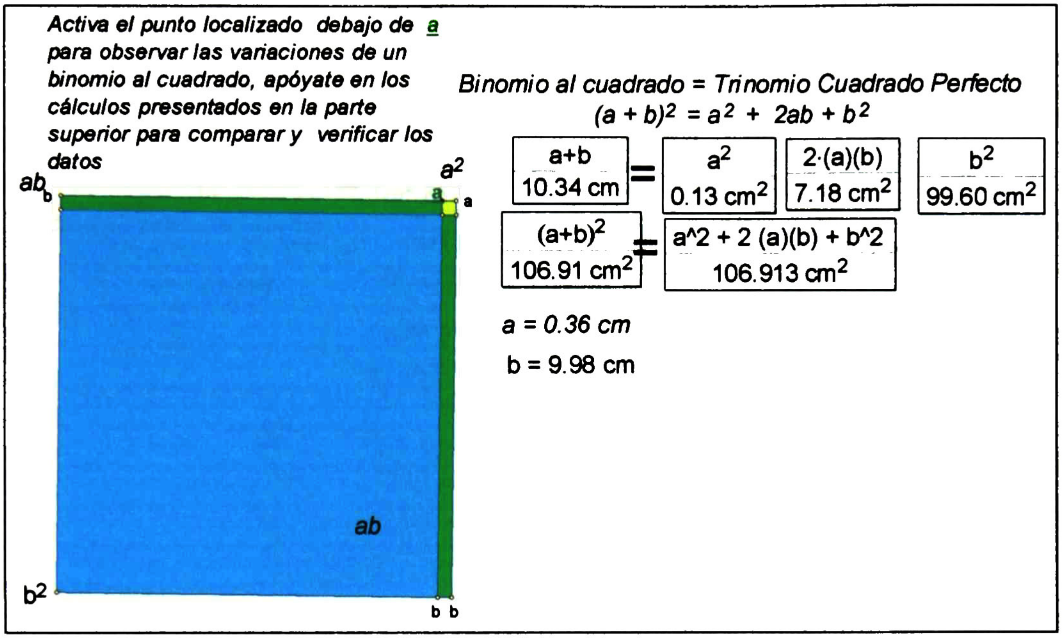


Figura 24b. *(después de manipular los valores de los segmentos "a=0.36" y "b=9.98).*

Pregunta 2: "¿para qué valores de "a" los valores de "b" son menores?".

Respuesta 2: "cuando el punto "b" es mayor que el "a", el "b" llega al 99 y el punto "a" va disminuyendo"

En esta respuesta los alumnos toman puntos extremos de valores de "a" y de "b", sin percatarse que existe un valor en donde los valores de las variables coinciden (el punto medio del lado del cuadrado de longitud $a + b$). Esta respuesta está centrada en una interpretación geométrica del interactivo.

A continuación presentamos dos respuestas vinculadas por el mismo tipo de descripción de la relación entre los valores de ***a*** y ***b***, pero que están expresadas de maneras distintas.

Pregunta 2: "¿para qué valores de "a" los valores de "b" son menores?"

Respuesta 3: "d*espués de 4.86"*

Frecuencia de la respuesta: 8.

En la figura 25, observamos que los alumnos centran sus observaciones, donde los valores de las variables corresponden aproximadamente con los "puntos medios" de las variables.

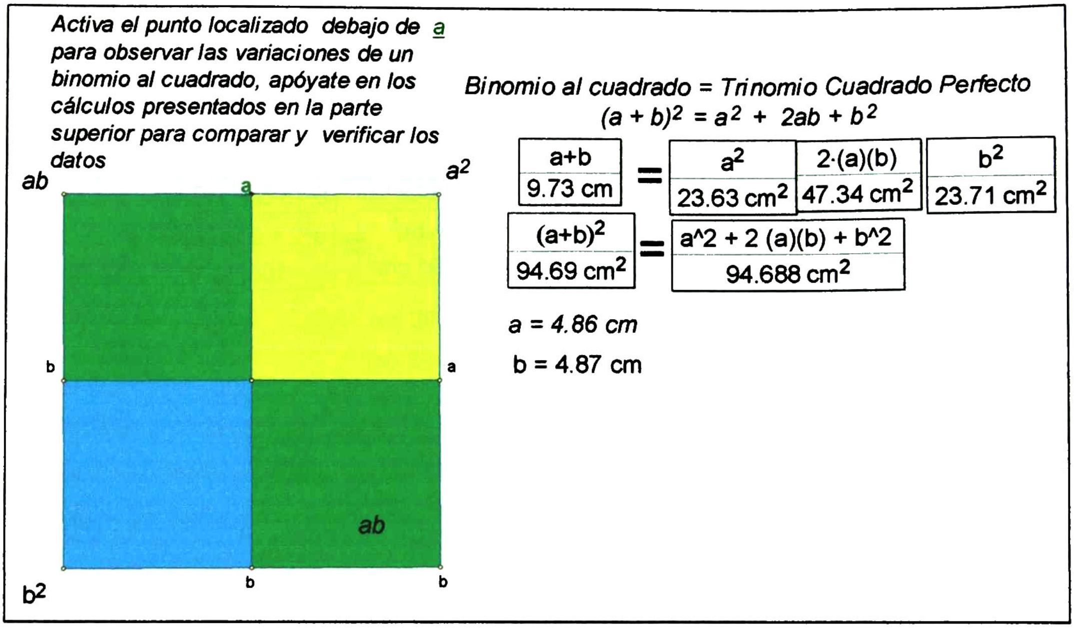


Figura 25. Pregunta 2: "¿para qué valores de "a" los valores de "b" son menores?"

Respuesta 3 "después de 4.86"

Esta respuesta está dada a partir del valor de ***a***, sin dar el correspondiente valor de ***b***. Además, señala el valor aproximado en el cual ***a*** y ***b*** coinciden.

Pregunta 2: "¿para qué valores de "a" los valores de "b" son menores?".

Respuesta 4: *"cuando a tiende hacia arriba de 4.90 cm se ha dirigido a la izquierda, y b va disminuyendo proporcionalmente y b=4.88"*

Frecuencia de la respuesta: 12

En la figura 26 se presenta una ligera discrepancia con los datos de los alumnos; consideramos que se debe a las características propias del programa de geometría dinámica.

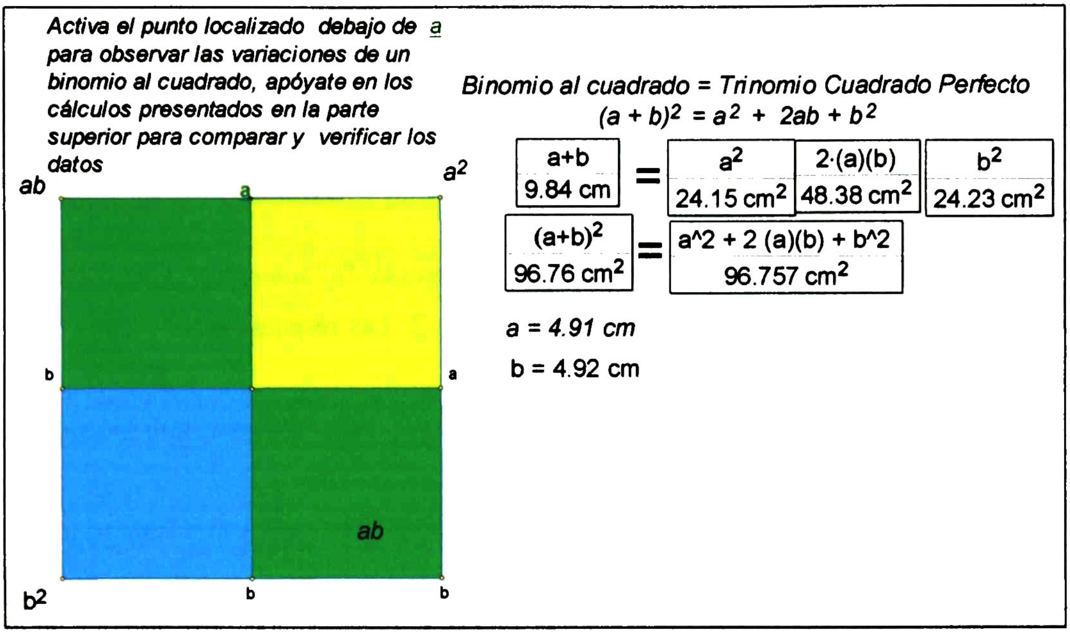


Figura 26. Pregunta 2: "¿para qué valores de "a" los valores de "b" son menores?"

Respuesta 4 "cuando a tiende hacia arriba de 4.90 cm se ha dirigido a la izquierda, y b va disminuyendo proporcionalmente y b=4.92".

En este tipo de respuesta se dan el valor de ***a*** y el correspondiente valor de ***b***. En esta respuesta, hay ligeras variaciones debidas a variaciones propias del programa. Es de destacar que quienes dieron la segunda respuesta argumentan con elementos tomados de sistemas matemáticos tanto geométricos como aritméticos.

A continuación, presentamos la tabla de frecuencia para cada uno de los tipos de respuestas dadas a la Pregunta 2.

Pregunta 2: "¿para qué valores de "a" los valores de "b" son menores?"	
Tipo de respuesta	Frec.
Cuando el valor de a^2 es mayor que b^2	1
Cuando el punto "b" es mayor que el "a", el "b" llega al 99 y el punto "a" va disminuyendo	2
Después de 4.86	8
Cuando a tiende hacia arriba de 4.90 cm se ha dirigido a la izquierda, y b va disminuyendo proporcionalmente y b=4.92	12
TOTAL	23

Tabla 4. Frecuencias de respuestas obtenidas para el binomio al cuadrado en la pregunta 2

Las respuestas obtenidas muestran que los estudiantes identificaron que a es mayor que b hasta el punto medio del segmento que es lado del cuadrado mayor de la representación geométrica (es decir, para $4.86 < a < 9.78$). Como se puede ver de la tabla 4, 20 estudiantes identificaron que 4.86 (aproximadamente) es el punto donde coinciden los valores de a y b y que, a partir de ese valor el orden se invierte.

Pregunta 3: "¿para qué valores de "a" los valores de "b" son mayores que "a"?".

Esta pregunta es complemento de la pregunta 2. Las respuestas obtenidas nos permiten confirmar lo encontrado en la pregunta anterior.

Encontramos cuatro tipos de respuestas, en que los alumnos comparan los valores de las variables a y b.

Para presentar los primeros tres tipos de respuestas, empleamos la misma pantalla, puesto que las referencias que hacen los alumnos, se observan en esta misma pantalla.

Respuesta 1: *"para los valores a partir de que b = 4.9 y a = 4.92 y "a" continúa disminuyendo hasta cero"*

Frecuencia de la respuesta: 14.

La pantalla 27 muestra la mayoría de las respuestas dadas por los alumnos a esta pregunta, destacando el uso de las propiedades geométricas que permite el programa.

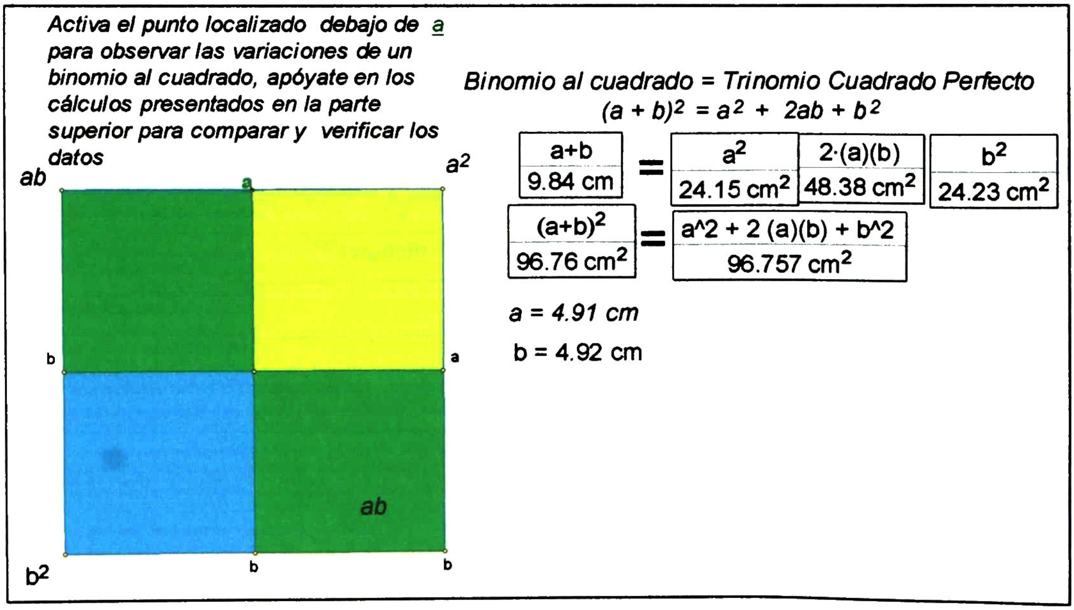


Figura 27. Pregunta 2: "¿para qué valores de "a" los valores de "b" son menores?" Respuesta 1: "para los valores a partir de que b = 4.9 y a = 4.92 y "a" continua disminuyendo hasta cero"

Esta respuesta está centrada en la observación de la variación de los valores numéricos obtenida a partir de la variación de los objetos geométricos (los segmentos) dados por el programa de geometría dinámica, es decir, a partir del sistema geométrico de signos.

Pregunta 3: "¿para qué valores de "a" los valores de "b" son mayores que "a"?"

Respuesta 2: "cuando b^2 *es mayor que* a^2".

Frecuencia de la respuesta: 3

En esta respuesta (ver Figura 27) apreciamos comparaciones de los valores numéricos de los cuadrados de las variables *a* y *b*.

Respuesta 3: *"cuando pasa la mitad de la recta que recorre el punto*

$a = 4.9$ y el punto $b = 5$"

Frecuencia de la respuesta: 3

Los alumnos emplean los sistemas matemático geométrico y algebraico para apoyar su afirmación sobre el punto donde está la coincidencia de estos valores y, en consecuencia, el cambio de orden en los tamaños de los valores numéricos de las variables (ver Figura 27).

Pregunta 3: "¿para qué valores de "a" los valores de "b" son mayores que "a"?".

Respuesta 4: *"antes de 4.86"*

Frecuencia de la respuesta: 3

En la pantalla 28 se muestra el uso de las características numéricas que permite el programa, facilitándoles a los alumnos sus apreciaciones en un sistema de signos numérico.

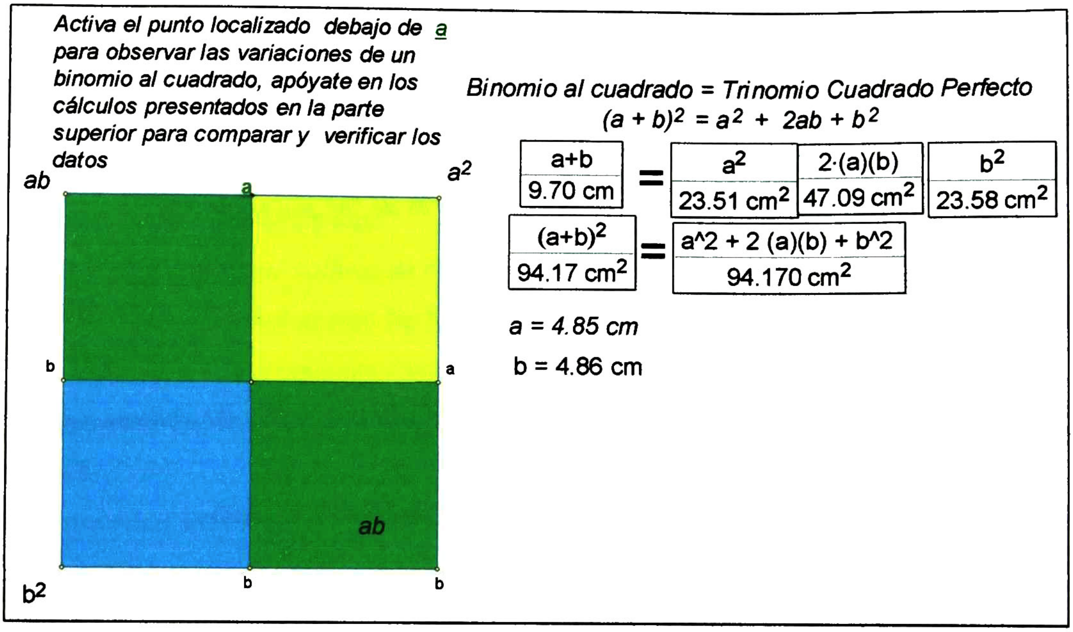


Figura 28. Pregunta 3: "¿para qué valores de "a" los valores de "b" son mayores que "a"?". Respuesta 4: "antes de 4.86"

Esta respuesta también considera el punto de coincidencia de los valores de las variables ***a*** y ***b***, pero sólo describe uno de los valores numéricos (aproximado) sin describir la variación de las dos variables.

Ahora presentamos la tabla que correspondiente a la pregunta 3

Pregunta 3: ¿Para qué valores de "a" los valores de "b" son mayores que "a"?	
Tipo de respuesta	Frec.
para los valores a partir de que b = 4.9 y a = 4.89 y "a" continua disminuyendo hasta cero	14
cuando b^2 es mayor que a^2	3
antes de 4.86	3
cuando pasa la mitad de la recta que recorre el punto a = 4.7 y el punto b = 5	3
Total de respuestas	23

Tabla 5. Frecuencias de respuestas obtenidas para el binomio al cuadrado en la pregunta 3.

Los resultados de la tabla 5 confirman lo encontrado en la pregunta anterior. Las respuestas obtenidas muestran que los estudiantes identificaron que a es menor que b desde cero y hasta el punto medio del segmento que es lado del cuadrado mayor de la representación geométrica (es decir, para $4.86 < a < 9.78$).

Pregunta 4: "¿en qué momento los valores de "a" son iguales a los de la medida de "b"?"

Con esta pregunta se espera que los alumnos identifiquen el punto de igualdad de las longitudes de los segmentos que conforman los lados del cuadrado. Debemos resaltar que lograr esta igualdad también implicó un manejo preciso del programa de geometría dinámica "Sketchpad", puesto que inicial e intencionalmente, no se les proporcionó con las medidas que finalmente los alumnos encontraron.

Encontramos seis tipos de respuesta, al igual que las anteriores, agrupadas atendiendo a sus similitudes.

Pregunta 4: "¿en qué momento los valores de "a" son iguales a los de la medida de "b"?"

Respuesta 1: "a= 4.91 y b=4.88"

Frecuencia de la respuesta: 1

La pantalla 29 muestra el uso de los valores numéricos que el alumno usó en su respuesta

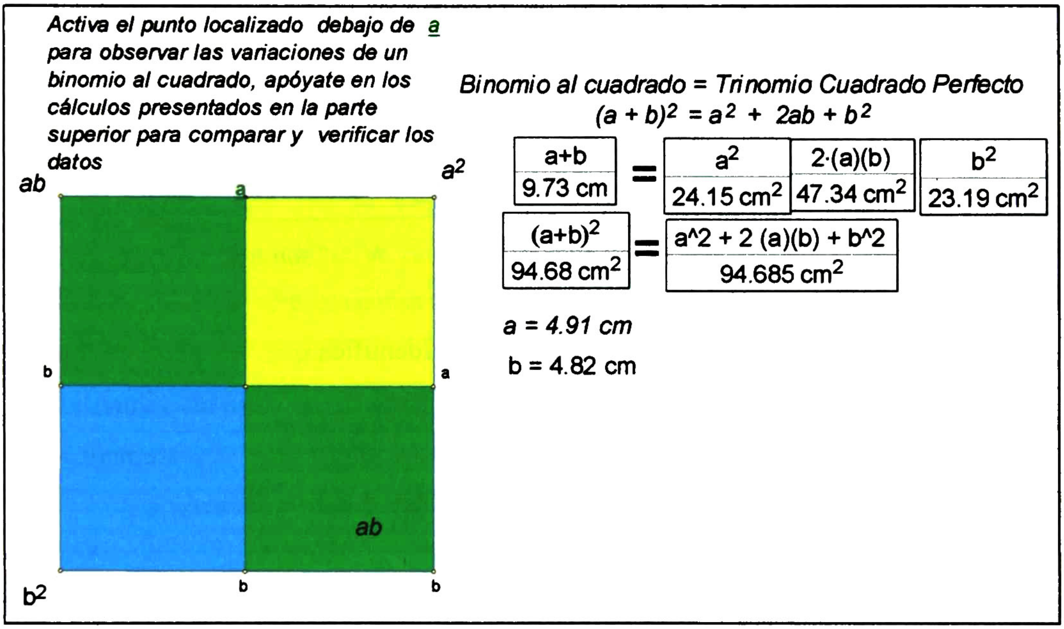


Figura 29. Pregunta 4: "¿en qué momento los valores de "a" son iguales a los de la medida de "b"?.

Respuesta 1: "a= 4.91 y b=4.82"

Este alumno formula su respuesta en términos de los valores numéricos (es decir, del sistema matemático aritmético). Resaltamos que no logra identificar plenamente los valores en que se da la igualdad, pero da una aproximación cercana.

Pregunta 4: "¿en qué momento los valores de "a" son iguales a los de la medida de "b"?.

Respuesta 2: "cuando $a^2 = b^2$ tienen la misma medida 9.76".

Frecuencia de la respuesta: 2

En la figura 30, se muestran la pantalla donde estos alumnos compararon los valores numéricos cuadrados de las variables a y b.

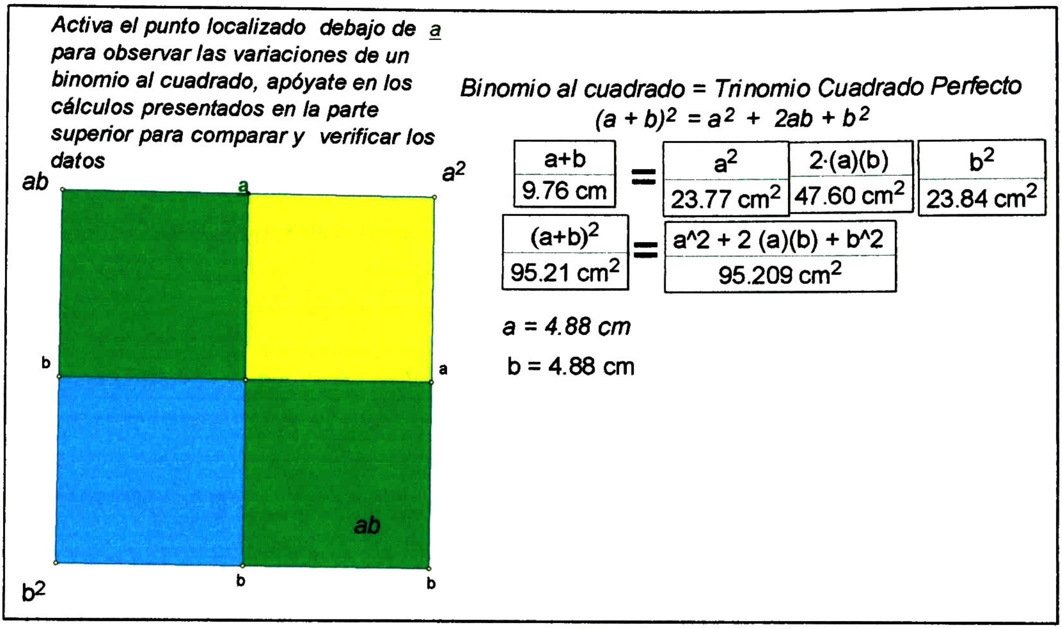


Figura 30. Pregunta 4: "¿en qué momento los valores de "a" son iguales a los de la medida de "b"?" Respuesta 2 "cuando $a^2 = b^2$ tienen la misma medida 9.76".

Esta respuesta presenta algunas peculiaridades. Identifica que "a^2" debe ser igual a "b^2", mediante la manipulación del interactivo pero aparentemente equivoca en los valores al cuadrado.

Sin embargo, se debe resaltar que en su procedimiento los dos alumnos identifican plenamente el valor correcto (4.88), a pesar de que dan una respuesta incorrecta.

Pregunta 4.- "¿en qué momento los valores de "a" son iguales a los de la medida de "b"?".

Respuesta 3: "no son iguales porque a la mitad pierde su valor, se acerca pero no es exacto"

Frecuencia de la respuesta: 5

En esta respuesta los alumnos no lograron observar valores exactamente iguales en las variables a y b, por las características del programa, lo que motivó su respuesta: "*se acerca pero no es exacto*".

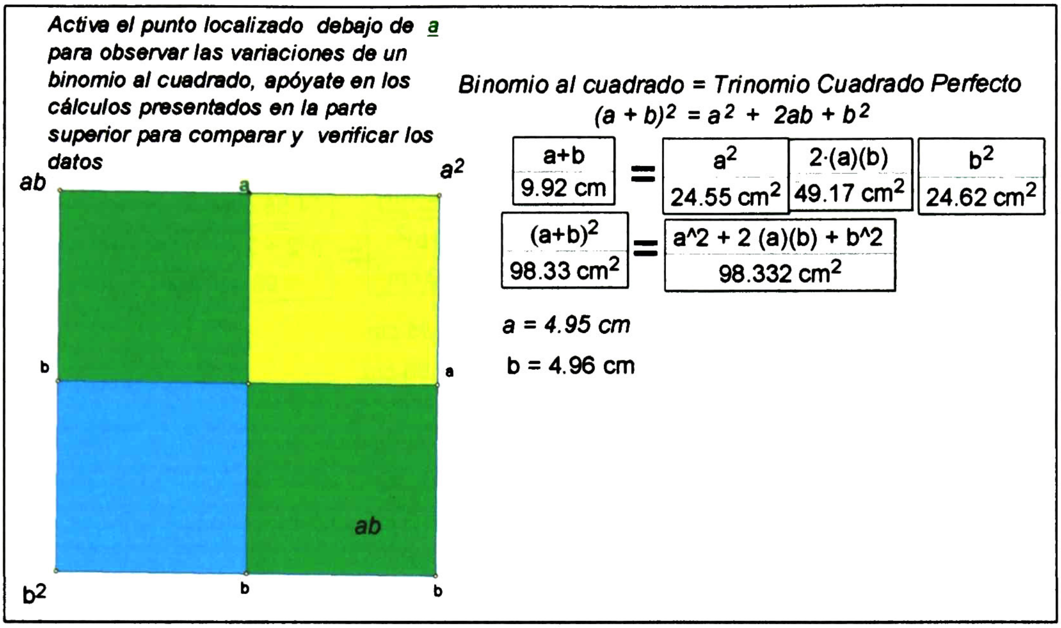


Figura 31. Pregunta 4: "¿en qué momento los valores de "a" son iguales a los de la medida de "b"? ".

Respuesta 3: "No son iguales porque a la mitad pierde su valor, se acerca pero no es exacto"

Usando la combinación de sistemas aritmético y geométrico de signos que proporciona el interactivo, los alumnos "deducen" que la igualdad debería darse en el punto medio del lado del cuadrado grande, pero tal vez por la dificultad de obtener valores numéricos que sean exactamente iguales (dáda por las característica de aproximación del programa), afirman que la igualdad "se acerca, pero no es exacto"

Pregunta 4.- "¿en qué momento los valores de "a" son iguales a los de la medida de "b"?".

Respuesta 4: *"no son iguales porque los valores van cambiando al mover el punto b".*

Frecuencia de la respuesta: 3

En esta respuesta, nuevamente los alumnos no lograron observar valores exactamente iguales en las variables *a* y *b*, por las características del programa, lo que motivó su respuesta: "*... los valores van cambiando...* "

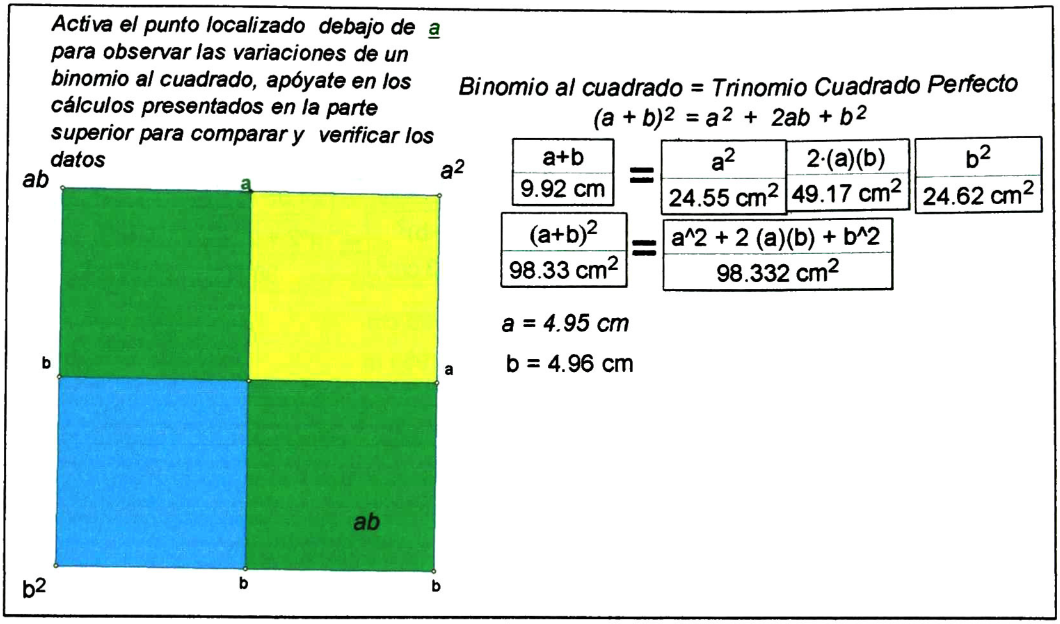


Figura 32. Pregunta 4: "¿en qué momento los valores de "a" son iguales a los de la medida de "b"?

Respuesta 4: "no son iguales porque los valores van cambiando al mover el punto b".

En esta respuesta parece que los alumnos no perciben que se presenta la igualdad. Tal vez las características de aproximación de valores numéricos del programa les impidieron considerar que sí hay valores para a = b.

En las respuestas cinco y seis, volvemos a emplear sólo una pantalla del programa, en virtud de que en ella se observan las respuestas de los alumnos.

Pregunta 4.- "¿en qué momento los valores de "a" son iguales a los de la medida de "b"?".

Respuesta 5: "a= 4.89 y b=4.89"

Frecuencia de la respuesta: 5

Es de destacar la eficiencia que mostraron estos cinco alumnos, al lograr el valor exacto de 4.89 para las variables *a* y *b*.

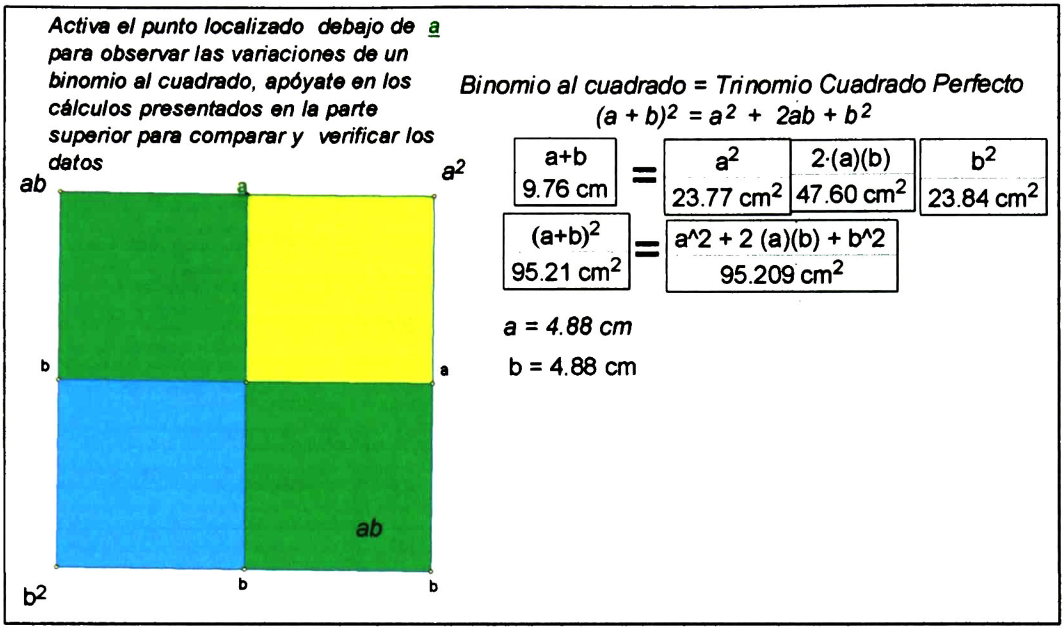


Figura 33. Pregunta 4: "¿en qué momento los valores de "a" son iguales a los de la medida de "b"?"

Respuesta 5 "a= 4.88 y b=4.88".

En estas respuestas se presenta el empleo de los sistemas matemáticos aritmético, algebraico y geométrico, logrando identificar plenamente la igualdad solicitada.

Pregunta 4.- "¿en qué momento los valores de "a" son iguales a los de la medida de "b"?".

Respuesta 6: "*cuando están en el punto del centro*"

Frecuencia de la respuesta: 7

Otra vez, destacamos la eficiencia de los siete alumnos en el manejo del programa de geometría dinámico, que permitió esta respuesta en un sistema matemático geométrico, apoyado en los valores dados por el sistema numérico.

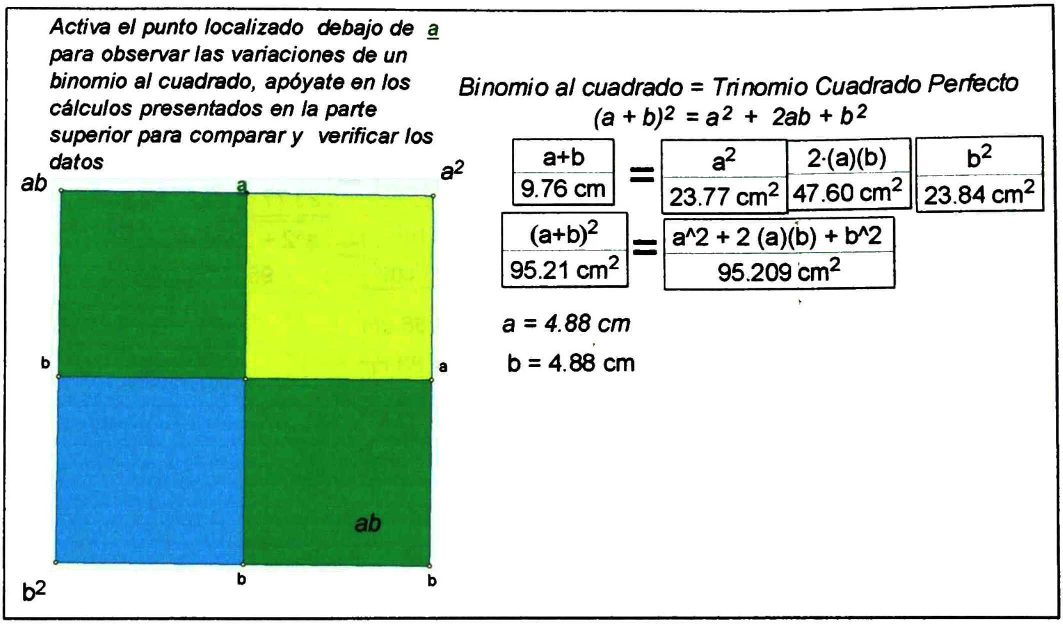


Figura 34. Pregunta 4: "¿en qué momento los valores de "a" son iguales a los de la medida de "b"?.

Respuesta 6: "cuando están en el punto del centro"

Nuevamente, en estas respuestas se identifica plenamente la igualdad solicitada, pero en éste caso el énfasis al referente geométrico es central.

En seguida presentamos la tabulación correspondiente a la Pregunta 4

Pregunta 4: "¿en qué momento los valores de "a" son iguales a los de la medida de "b"?"	
Tipo de respuesta	Frec.
a= 4.91 y b=4.82	1
cuando $a^2 = b^2$ tienen la misma medida 9.76	2
no son iguales porque a la mitad pierde su valor, se acerca pero no es exacto	5
no son iguales porque los valores van cambiando al mover el punto b	3
a=4.89 y b=4.89	5
cuando están en el punto del centro	7
Total de respuestas	23

Tabla 6. Frecuencias de respuestas obtenidas para el binomio al cuadrado en la pregunta 4.

Como se ve de la Tabla 6, sólo tres estudiantes señalaron que no se da la igualdad de los valores de *a* y *b*, 20 estudiantes identificaron que sí hay un valor para el cual se da esta igualdad.

De estos últimos, las respuestas estuvieron fuertemente vinculadas a las manipulaciones efectuadas en el sistema de signos geométrico.

Pregunta 5: "¿en qué momento el valor de la expresión $(a + b)^2$ es diferente de $a^2 + 2ab + b^2$?"

En esta pregunta agrupamos los tipos de respuesta en tres grupos, una vez más, atendiendo a la similitud de las respuestas.

Respuesta 1: "en ninguno porque se redondean"

Frecuencia de la respuesta: 3

En la pantalla de la figura 35, se aprecia el "redondeo" que hacen los tres alumnos, con los valores de $(a + b)^2 = 95.72$ *comparado con* $a^2 + 2ab + b^2 = 95.721$.

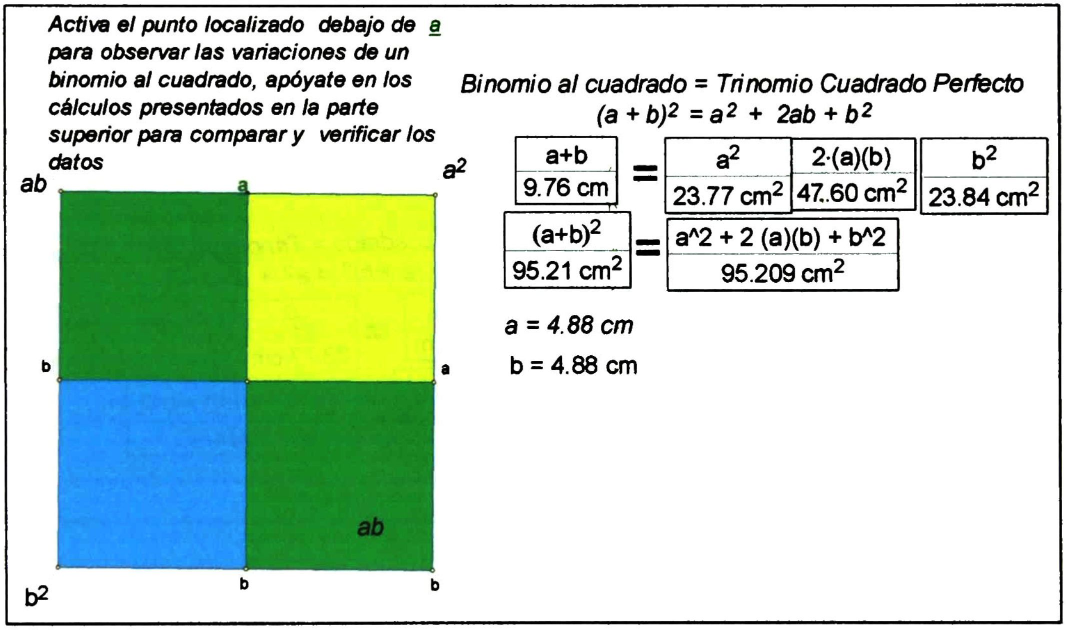


Figura 35. Pregunta 5: "¿en qué momento el valor de la expresión $(a + b)^2$ es diferente de $a^2 + 2ab + b^2$?"

Respuesta 1 "en ninguno porque se redondean".

En esta respuesta los alumnos identifican que no hay diferencia, pero su argumento de "porque se redondean" indica que la aproximación que da el programa puede hacer que la igualdad no sea "exacta"

Tal como hemos hecho anteriormente, empleamos sólo una pantalla (número 36) del programa Sketchpad para apoyar nuestras observaciones a las respuestas 2 y 3.

Pregunta 5: "¿en qué momento el valor de la expresión $(a + b)^2$ es diferente de $a^2 + 2ab + b^2$?".

Respuesta 2: "*nunca son diferentes*"

Frecuencia de la respuesta: 16

En la pantalla 36, destacamos esta respuesta: "nunca son diferentes", que corresponde con la mayoría de lo escrito por los alumnos, donde se aprecia que éstos logran identificar la igualdad del binomio al cuadrado con el trinomio cuadrado perfecto correspondiente.

Respuesta 3: *"en ninguno porque $(a + b)^2$ es la factorización de $a^2 + 2ab + b^2$ y es lo mismo".*

Frecuencia de la respuesta: 4

En esa respuesta debemos destacar el uso de un sistema de signos algebraico, sustentado en los sistemas geométrico y numérico. También observado en la pantalla número 36.

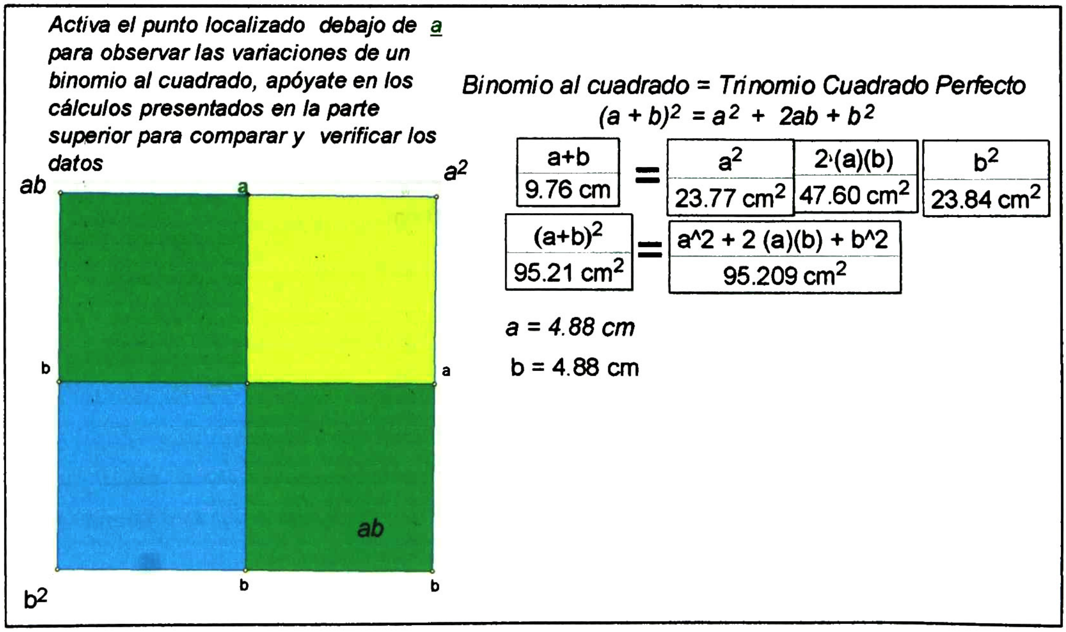


Figura 36. Pregunta 5: "¿en qué momento el valor de la expresión $(a + b)^2$ es diferente de $a^2 + 2ab + b^2$?".

Respuesta 2: "nunca son diferentes"

Respuesta 3: "en ninguno porque $(a + b)^2$ es la factorización de $a^2 + 2ab + b^2$ y es lo mismo"

En todas estas respuestas, consideramos que es clara la adquisición del concepto de igualdad del binomio al cuadrado y su desarrollo como trinomio cuadrado perfecto Además, destacamos el uso del sistema algebraico de signos para la formulación de la justificación de la respuesta 3.

Ahora mostramos la tabla correspondiente para este reactivo.

Pregunta 5: "¿en qué momento el valor de la expresión $(a + b)^2$ es diferente de $a^2 + 2ab + b^2$?".	
Tipo de respuesta	Frec.
en ninguno porque se redondean	3
nunca son diferentes	16
en ninguno porque $(a+b)^2$ es la factorización de $a^2 + 2ab + b^2$ y es lo mismo	4
Total de respuestas	23

Tabla 7. Frecuencias de respuestas obtenidas para el binomio al cuadrado en la pregunta 5

Como se ve en la tabla 7, es sobresaliente que 20 de los estudiantes afirmen que nunca son distintos los valores que toman las expresiones del producto notable en cuestión (binomio al cuadrado). Los otros tres estudiantes señalaron que, salvo aproximaciones, los valores de las expresiones nunca difieren. Es importante destacar que 4 estudiantes justificaron su respuesta sobre la igualdad (numérica) de los valores de las expresiones mediante de referentes algebraicos.

Pregunta 6: "describe como explicarías esta situación (explicar punto 5)".

Las respuestas dadas por los alumnos a esta pregunta se agrupan en tres tipos

Respuesta 1: "*cuando movemos en cualquier punto no se cambia ni se mueve ningún ángulo ni ningún lado del cuadrado de afuera*".

Frecuencia de la respuesta: *1*

En la figura 37, es de resaltar la igualdad que el alumno percibe, mediante un sistema geométrico de signos, de este PN.

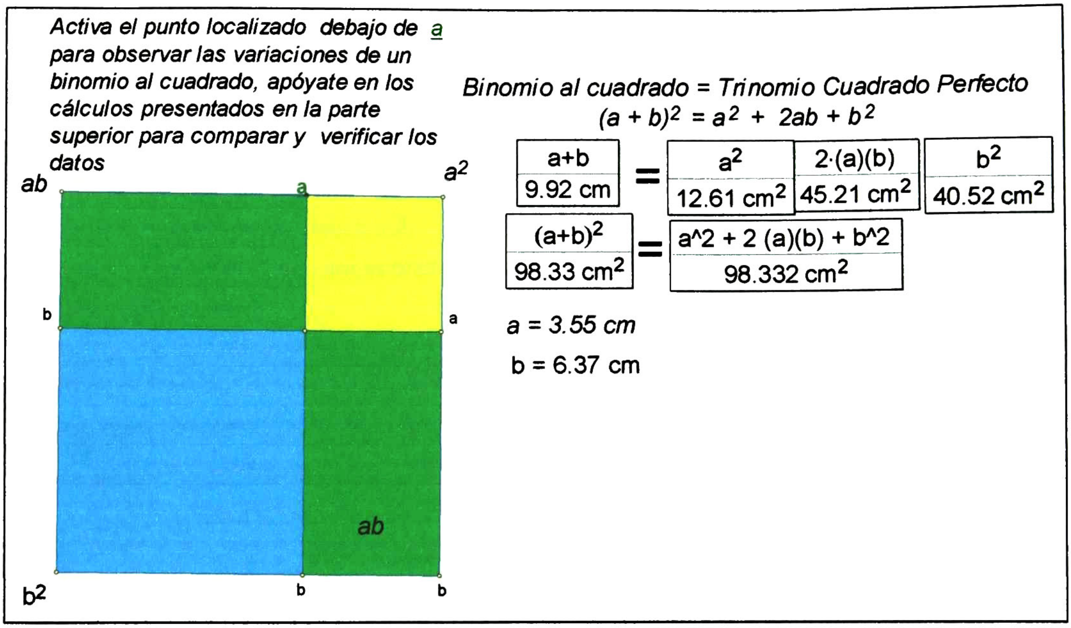


Figura 37. Pregunta 6: "describe como explicarías esta situación (explicar punto 5)"

Respuesta 1: "cuando movemos en cualquier punto no se cambia ni se mueve ningún ángulo ni ningún lado del cuadrado de afuera"

Esta respuesta resulta interesante porque el alumno está interpretando que realmente hay dos cuadrados involucrados: el que está conformado por la suma de (a + b) y el que se integra con $a^2 + 2ab + b^2$

Nuevamente, para las respuestas dos y tres de la pregunta seis, utilizamos la misma pantalla (38) de Sketchpad, dado que en ambas se observa el mismo argumento de los alumnos.

Pregunta 6: "describe como explicarías esta situación (explicar punto 5)"

Respuesta 2: *"el que $a^2 + 2ab + b^2$ es el resultado del binomio $(a+b)^2$".*

Frecuencia de la respuesta: 10

En esta pantalla se verifica la adquisición del concepto adquirido sobre este PN, empleando un sistema matemático algebraico.

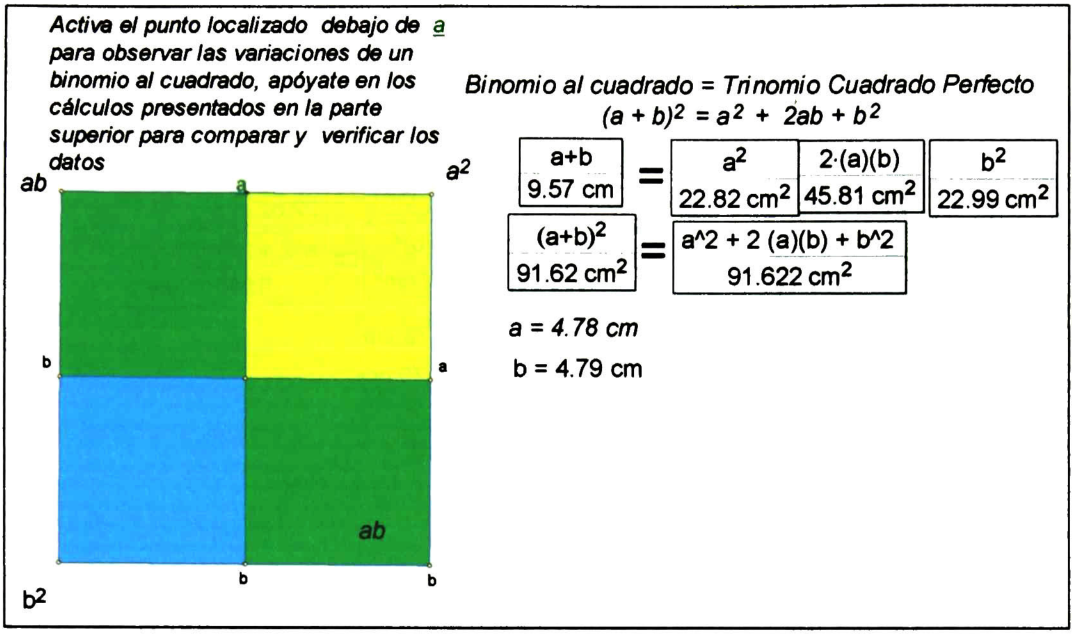


Figura 38. Pregunta 6: "describe como explicarías esta situación (explicar punto 5)"
Respuesta 2: "el que $a^2 + 2ab + b^2$ es el resultado del binomio $(a+b)^2$"

Pregunta 6: "describe como explicarías esta situación (explicar punto 5)"

Respuesta 3: *"$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = 91.63$; esto significa que va variando y no cambia la ecuación".*

Frecuencia de la respuesta: 12

En la figura 39, se observa que los alumnos tomaron sólo el valor de $(a + b)^2$ pero se aprecia que logran identificar plenamente la igualdad de la expresión algebraica.

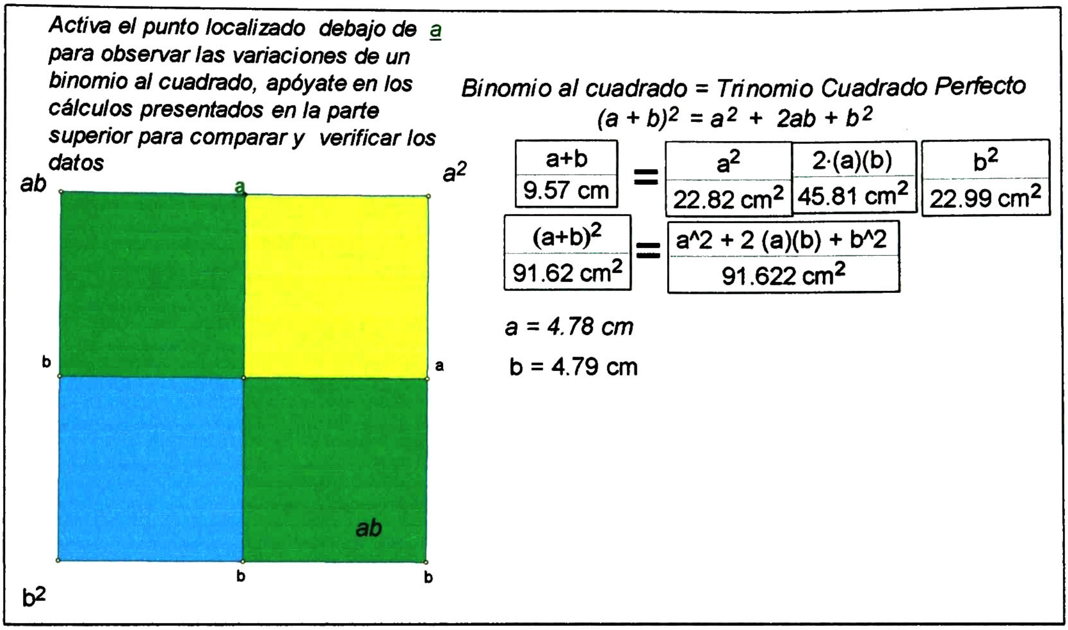


Figura 39. Pregunta 6: "describe como explicarías esta situación (explicar punto 5)"

Respuesta 3: "$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = 9.57$; esto significa que va variando y no cambia la ecuación"

Con estas respuestas más la primera respuesta de la misma pregunta, podemos afirmar que el concepto del binomio al cuadrado igual a un trinomio cuadrado perfecto está plenamente adquirido, lo que implica un uso eficiente de varios sistemas matemáticos de signos.

Anexamos la tabla correspondiente a la pregunta 6

Pregunta 6: "describe como explicarías esta situación (explicar punto 5)".	
Tipo de respuesta	Frec.
Cuando movemos en cualquier punto no se cambia ni se mueve ningún ángulo ni ningún lado del cuadrado de afuera	1
el que $a^2 + 2ab + b^2$ es el resultado del binomio $(a+b)^2$	10
$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = 9.57$; esto significa que va variando y no cambia la ecuación	12
Total de respuestas	23

Tabla 8. Frecuencias de respuestas obtenidas para el binomio al cuadrado en la pregunta 6

Destacamos, nuevamente, que los alumnos logran identificar, en los sistemas matemáticos de signos geométrico, numérico y algebraico, la presencia de dos expresiones que representan al binomio al cuadrado y al trinomio cuadrado perfecto.

Pregunta 7: "si comparas, ¿encuentras diferencias entre las dos maneras de entender $(a+b)^2$?"

Las respuestas obtenidas para la pregunta siete nos llevaron a clasificar 5 tipos de respuestas, clasificadas de acuerdo con su semejanza en la respuesta.

Respuesta 1: *"no cambia de manera que la ecuación es igual, o sea que no aumenta ni disminuye"*

Frecuencia de la respuesta: 2

Respuesta 2: *"no, aunque prefiero el manejo de los bloques algebraicos, pero, de todas maneras, es lo mismo".*

Frecuencia de la respuesta: 3

Respuesta 3: *"sí, en los bloques algebraicos no me daban valores y en el Sketchpad sí los da".*

Frecuencia de la respuesta: 6

Respuesta 4: *"no".*

Frecuencia de la respuesta: 4

Respuesta 5: *"esta figura cambia constantemente por el movimiento de adentro, pero no por fuera"*

Frecuencia de la respuesta: 8

De manera similar a lo aplicado en otras respuestas anteriores, hacemos uso de una sola pantalla (figura 40), para apreciar con mayor facilidad lo dicho por los alumnos en los cinco tipos de respuestas.

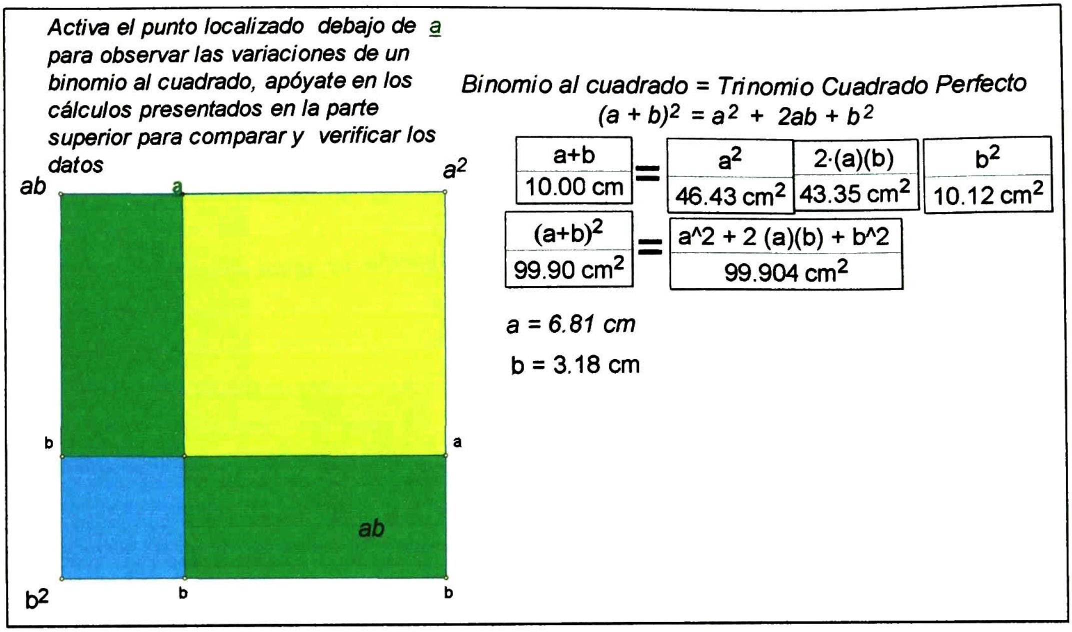


Figura 40. Pregunta 7:"si comparas, ¿encuentras diferencias entre las dos maneras de entender $(a+b)^2$?"

Respuesta 1: "no cambia, de manera que la ecuación es igual, o sea que no aumenta ni disminuye"

Respuesta 2: "no, aunque prefiero el manejo de los bloques algebraicos, pero de todas maneras es lo mismo"

Respuesta 3: "sí, en los bloques algebraicos no me daban valores y en el Sketchpad sí los da"

Respuesta 4: "no"

Respuesta 5: "esta figura cambia constantemente por el movimiento de adentro pero no por fuera"

Debemos resaltar que aquí se percibe claramente la apreciación, por parte de los alumnos, de que el producto notable se representa geométricamente con dos cuadrados, cada uno como representación, ya sea el binomio al cuadrado, o bien, el otro cuadrado superpuesto, el trinomio cuadrado perfecto.

En todas estas cinco respuestas, podemos apreciar el impacto que tiene finalmente el programa de geometría dinámica para la aprehensión del concepto de este producto notable, destacando que obtener datos numéricos, especialmente de tipo fraccionario, permite a los alumnos ampliar la percepción de que estos PN también responden a una representación numérica; situación que el manejo exclusivo de los bloques algebraicos no facilita.

4.2 Conclusiones sobre "Binomio al Cuadrado"

El uso de la hoja de trabajo y el interactivo enriquecieron las significaciones dadas a la identidad correspondiente al *binomio al cuadrado*. El interactivo y las hojas de trabajo permiten trabajar con las interrelaciones de las representaciones de esta igualdad en distintos sistemas de signos: el algebraico, el numérico y el de las representaciones geométricas de las expresiones algebraicas que se consideran en las hojas de trabajo.

El trabajo con estas interrelaciones permitió la consolidación del aprendizaje de la identidad mediante su verificación para distintas representaciones y con distintos significados.

Por un lado, desde el punto de vista geométrico, se calcula el área del cuadrado de lado $a + b$ de dos maneras:

(1) Como la medida de la superficie del interior del cuadrado,

(2) Como la suma de las áreas de las figuras en las que se divide el cuadrado de lado $a + b$: un cuadrado de lado a, un cuadrado de lado b y dos rectángulos de lados a y b.

La identidad algebraica: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ se confirma en la representación geométrica al verificar que las expresiones igualadas corresponden a las dos maneras de calcular la misma área.

Además, esta construcción es dinámica, es decir, las magnitudes de las longitudes de los segmentos a y b pueden variar, de manera que sus variaciones se reflejen en el resto de la construcción: las dimensiones de los cuadrados y de los rectángulos.

Por otro lado, desde el punto de vista numérico, la identidad algebraica correspondiente al producto de un binomio al cuadrado se verifica numéricamente.

Las expresiones $(a + b)^2$ y $(a^2 + 2ab + b^2)$ se evalúan en los distintos valores que toman a y b al variar las dimensiones de las figuras. El interactivo muestra los valores que toman las expresiones. La igualdad de valores que toman las expresiones para todo valor de a y b se establece como generalización, a partir de los valores verificados en el interactivo.

Los resultados obtenidos con las hojas de trabajo muestran que los estudiantes identifican claramente la variación de las magnitudes de las variables a y b, tanto desde el punto de vista geométrico como desde el numérico. Además, la mayoría identifica la interdependencia de las variables, tanto desde el punto de vista geométrico (el punto "a" va disminuyendo y el punto "b" va aumentando), como desde el punto de vista numérico (para los valores a partir de que b = 4.9 y a = 4.86 y "a" continúa disminuyendo hasta cero).

Los estudiantes verificaron igualdad de las expresiones algebraicas $(a + b)^2$ y $(a^2 + 2ab + b^2)$, a partir de las significaciones de los dos sistemas de signos que se introducen, además del algebraico.

Desde el punto de vista geométrico, el trabajo efectuado con los algebloques se refuerza y enriquece con el trabajo con el interactivo. "En los bloques algebraicos no me daban valores y en el Sketchpad sí los da", dicen los estudiantes. De hecho, la relación entre los dos sistemas de signos es la que más enriquece y consolida la verificación de la identidad.

Desde el punto de vista numérico, la evaluación de las expresiones igualadas permite relacionar las expresiones algebraicas, su referente geométrico (el área de la figura) y los referentes numéricos, al obtener un número específico, como resultado del cálculo del área.

Además, la evaluación numérica hace explícito el hecho de que a y b toman valores tanto enteros (positivos), como decimales (positivos). La generalidad de la validez de la identidad, se aplica no sólo a valores generales pero "fijos" de las variables, como con los algebloques, sino a variables que toman valores en conjuntos como los racionales.

4.3 Respuestas para la hoja de trabajo producto de "binomios conjugados".

En este apartado presentamos el análisis de las soluciones a cada una de las preguntas de la actividad interactiva *Binomio conjugado*. Para cada pregunta presentamos la siguiente estructura:

♣ Una clasificación de las respuestas dadas por los estudiantes, elaborada en términos de sus características.

♣ Las frecuencias de aparición de los tipos de respuestas.

♣ Al final de la clasificación de las respuestas, presentamos un análisis global de los resultados.

Pregunta 1: "¿para qué valores el resultado de (x + a) (x - a) es cero?".

Para esta pregunta, encontramos cuatro tipos de respuestas. La mayoría de ellas dependen de las exploraciones que hicieron los estudiantes al variar los valores de los lados del rectángulo $(x + a)$ y $(x - a)$. Sin embargo, también encontramos respuestas en las que los referentes geométricos dados por el interactivo juegan un papel esencial.

Respuesta 1: *"la figura se va haciendo más delgada y más larga"*.

Frecuencia de la respuesta: 2.

En la pantalla de la figura 41, se aprecia que dos estudiantes perciben los cambios en el binomio conjugado *(x + a) (x - a)*, pero parece que no logran percibir el cuadrado que representa la diferencia de cuadrados. Emplean únicamente un sistema matemático geométrico que posiblemente limitó sus apreciaciones.

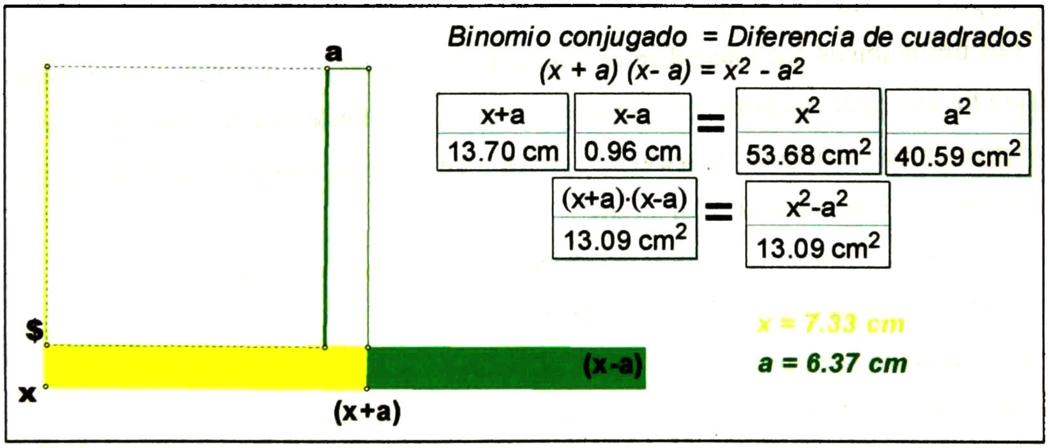


Figura 41. Pregunta 1: "¿para qué valores el resultado de (x + a) (x - a) es cero?"
Respuesta 1: "la figura se va haciendo más delgada y más larga".

En esta respuesta los estudiantes no dieron valores numéricos, sino una descripción de los cambios de la construcción geométrica del interactivo. Al acercarse a cero el producto considerado, correspondiente al área del rectángulo de base *(x + a)* y altura *(x – a)*, la medida de la altura (x – a) tiende también a cero. Esto se refleja en la construcción del interactivo como un adelgazamiento del rectángulo.

Pregunta 1: "¿para qué valores el resultado de (x + a)(x - a) es cero?"

Respuesta 2: "*en ningún punto*".

Frecuencia de la respuesta: 3.

En este ítem, ejemplificada en la figura 42, parece que la manipulación del interactivo no fue suficiente, puesto que los alumnos no lograron obtener el valor solicitado.

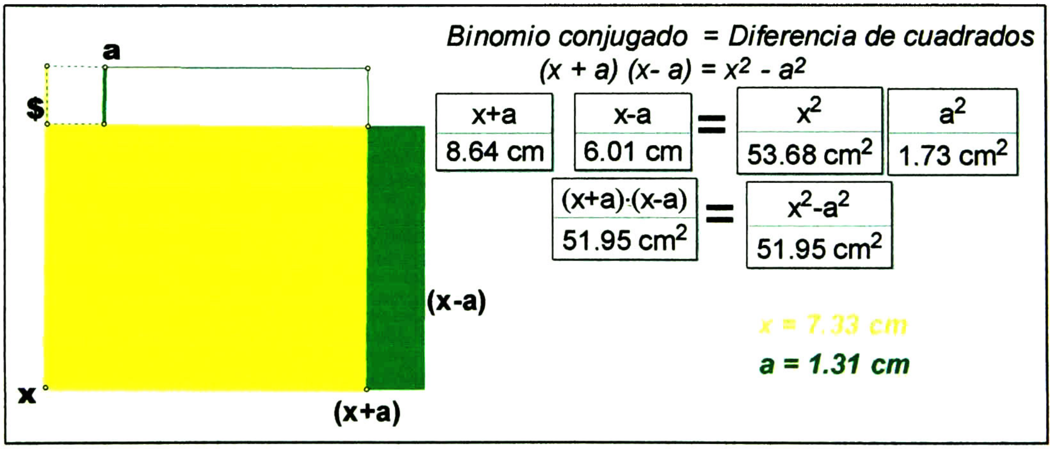


Figura 42. Pregunta 1: "¿para qué valores el resultado de (x + a)(x - a) es cero?"
Respuesta 2: "en ningún punto"

Los tres alumnos que integraban el equipo de trabajo, no lograron localizar los valores de ***x*** y ***a*** para los cuales el producto considerado se hacía cero. En este caso, tampoco lograron hacer una descripción geométrica del proceso de variación de las medidas de los lados del rectángulo, que podía llevar a hacer su área igual a cero.

Pregunta 1: "¿para qué valores el resultado de (x + a)(x - a) es cero?"

Respuesta 3: "*cuando "a" y "x" están en 7.33 cm*"

Frecuencia de la respuesta: 11.

La figura 43 está integrada con dos pantallas, debido a que algunos alumnos manipularon el interactivo, modificando las dimensiones representadas en este PN. Hay un uso claro de un sistema matemático numérico.

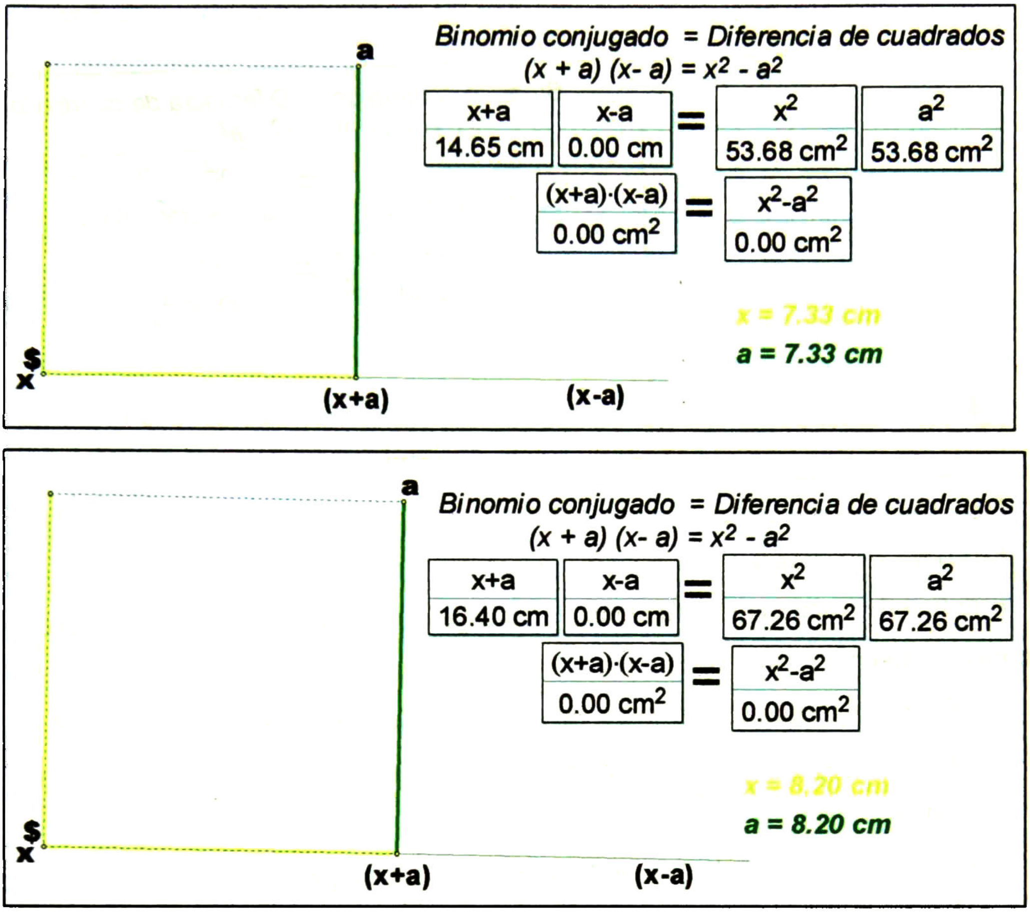


Figura 43. Pregunta 1: "¿para qué valores el resultado de (x + a)(x - a) es cero?"

Respuesta 3: "cuando "a" y "x" están en 7.33 cm"

Agrupamos en este tipo a las respuestas en las que los estudiantes identifican que para iguales valores de x y a, el producto es igual a cero. Encontramos algunas repuestas en las que ***x y a*** = 8.20 y otras en las que son iguales a 7.33, dependiendo de la manipulación que los estudiantes hicieron de las magnitudes de los segmentos del interactivo (tanto x como a pueden modificarse).

Pregunta 1: "¿para qué valores el resultado de (x + a)(x - a) es cero?".

Respuesta 4: "*cuando el valor de $x + a = 16.40$*"

Frecuencia de la respuesta: 7.

La pantalla de la figura 44 tiene la característica de que los alumnos consideraron un parámetro diferente de los anteriores para encontrar el valor solicitado.

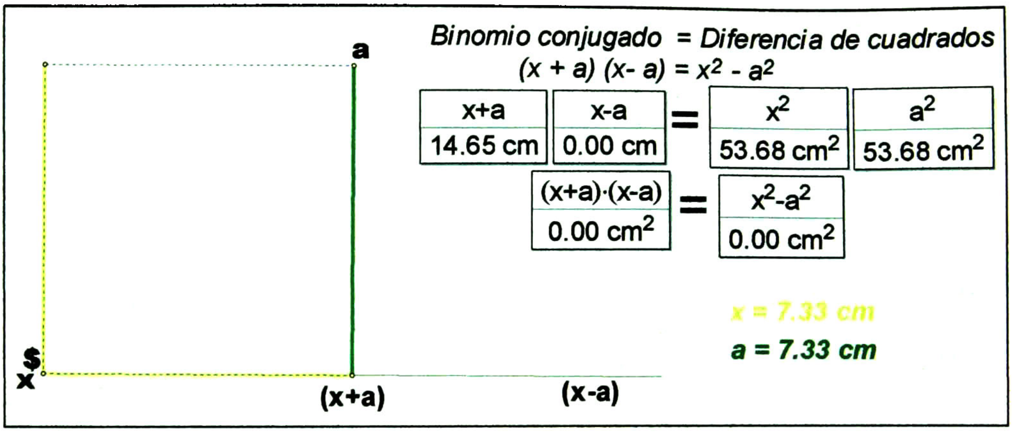


Figura 44. Pregunta 1: "¿para qué valores el resultado de (x + a)(x - a) es cero?" Respuesta 4: "cuando el valor de x + a = 16.40".

Este tipo de respuesta está fuertemente vinculado a la anterior. La única diferencia radica en que en este tipo no se dan los valores de x ni a por separado (en la respuesta anterior x y a son iguales a 8.46 o 7.30, según el caso), sino que se da el valor de la suma para cuando el producto es cero (cuando $x = a$). En este caso, se manifiesta la necesidad de precisar la redacción de la Pregunta 1 pidiendo explícitamente los valores de $\boldsymbol{x}$ y de $\boldsymbol{a}$.

A continuación, presentamos la tabla de frecuencia para cada uno de los tipos de respuestas dadas a la pregunta 1.

Pregunta 1: "¿para qué valores de (x + a) (x - a) el resultado es cero?"	Frec.
la figura se va haciendo más delgada y más larga	2
en ningún punto	3
En el valor de 7.30 cm (u 8.46 en otros ejemplos)	11
Cuando el valor de x + a = 16.93	7
Total de respuestas	23

Tabla 9. Frecuencias de respuestas obtenidas para el binomio conjugado en la pregunta 1.

En esta tabla, podemos apreciar que los alumnos utilizaron sistemas matemáticos de signos numéricos, geométricos y algebraicos. Aún no se aprecia la aprehensión del concepto para el binomio conjugado como una diferencia de cuadrados.

Pregunta 2: "¿cómo son entre si los resultados de la igualdad? *(a + x)(a - x) = x² - a²?"*

Para esta pregunta encontramos cinco tipos de respuestas. Es impórtate señalar que la redacción de la pregunta pudo haber generado confusión en la obtención de las respuestas encontradas. Sin embargo, las evaluaciones que proporcionan los referentes numéricos de los interactivos, sirvieron de base para que la mayoría de las respuestas señalaran que los dos miembros de la igualdad toman valores iguales para cualesquiera valores de x y a (racionales positivos en los casos considerados por los estudiantes).

Pregunta 2: "¿cómo son entre si los resultados de la igualdad? $(a + x)(a - x) = x^2 - a^2$?"

Respuesta 1: *SIN RESPUESTA*.

Frecuencia de la respuesta: 1.

Es posible que esta ausencia de respuesta obedezca a que el alumno consideró incorporada su contestación en la respuesta de su equipo.

Pregunta 2: "¿cómo son entre si los resultados de la igualdad? $(a + x)(a - x) = x^2 - a^2$?"

Respuesta 2: "q*ue tienen un término en común que es* x".

Frecuencia de la respuesta: 1.

En la siguiente pantalla, se aprecia el uso de un sistema matemático algebraico, que sustenta en el alumno la respuesta proporcionada.

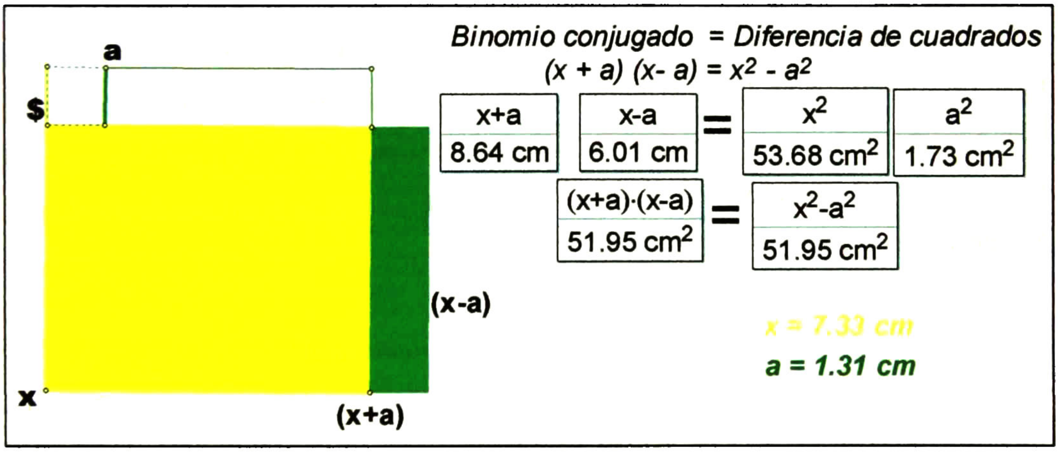


Figura 45. Pregunta 2: "¿cómo son entre si los resultados de la igualdad? $(a + x)(a - x) = x^2 - a^2$?" Respuesta 2: "que tienen un término en común que es x".

Consideramos que, en esta respuesta, el alumno centra su respuesta en los símbolos algebraicos de la identidad considerada. Es posible que esté relacionando este PN (*diferencia de* *cuadrados*) con el *binomio con término común*. Sin embargo, estrictamente hablando, su respuesta es correcta.

Pregunta 2: "¿cómo son entre si los resultados de la igualdad? $(a + x)(a - x) = x^2 - a^2$?"

Respuesta 3: "n*o cambia y pasa a negativo*"

Frecuencia de la respuesta: 2.

En la figura 46, se percibe el uso de un sistema matemático numérico, con énfasis en los símbolos de suma y resta.

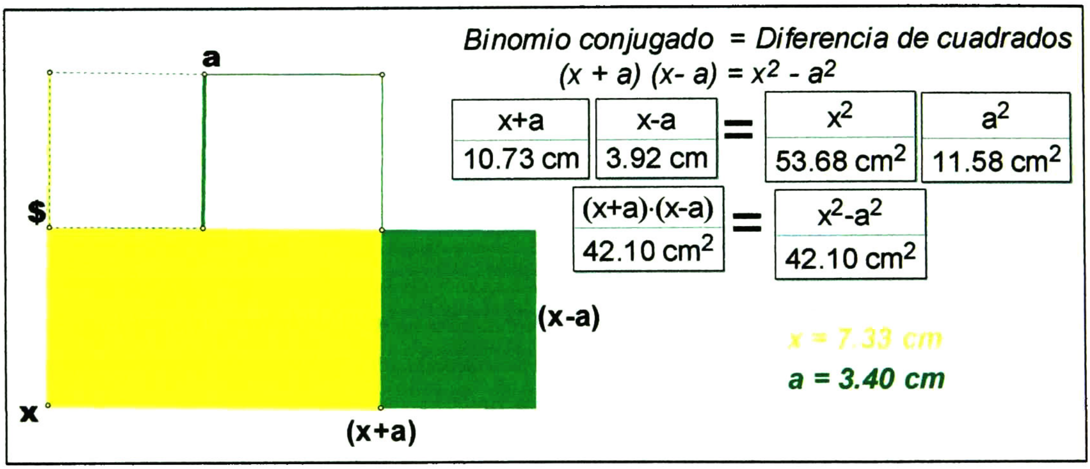


Figura 46. Pregunta 2: "¿cómo son entre si los resultados de la igualdad? $(a + x)(a - x) = x^2 - a^2$?"
Respuesta 3: "n*o cambia y pasa a negativo*"

Consideramos que aquí se presenta una descripción de las relaciones entre las representaciones simbólicas de los miembros de la igualdad. El orden de las literales es el mismo ("no cambia") primero está *a* y luego *x*. Además, en el primer factor de izquierda a derecha, el signo que precede a la literal *x* es "+"; luego, en el segundo factor y en el miembro de la derecha, el signo que precede a *x* es "–". Es decir, el signo cambia.

Pregunta 2: "¿cómo son entre si los resultados de la igualdad? $(a + x)(a - x) = x^2 - a^2$?"

Respuesta 4: "s*on variables a los resultados del valor de la expresión del valor del segmento*"

Frecuencia de la respuesta: 2.

En la respuesta observada en la pantalla 47, se aprecia el uso de sistema matemático geométrico, que es favorecido por las características del programa de geometría dinámica

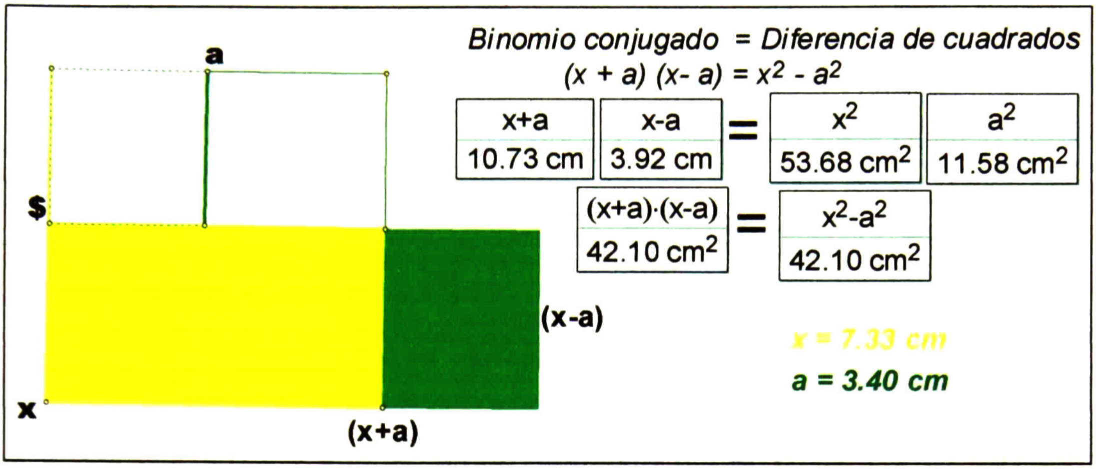


Figura 47. Pregunta 2: "¿cómo son entre si los resultados de la igualdad? $(a + x)(a - x) = x^2 - a^2$?"

Respuesta *4: "son variables a los resultados del valor de la expresión del valor del segmento"*

Consideramos que esta respuesta obedece a la variabilidad que proporciona el interactivo. Es probable que los estudiantes se hayan centrado en que los distintos valores que proporciona el interactivo, el valor de x, el de a y los valores de las expresiones: $(x + a)$, $(x - a)$ y $x^2 - a^2$

Pregunta 2: "¿cómo son entre si los resultados de la igualdad? $(a + x)(a - x) = x^2 - a^2$?"

Respuesta 5: "q*ue dos de ellos son iguales"*

Frecuencia de la respuesta: 17.

En esta respuesta los estudiantes se refieren a la igualdad de los valores numéricos de las expresiones $(a + x)(a - x)$ y $a^2 - x^2$, que son los dos miembros de la identidad considerada. La siguiente pantalla ejemplifica estas respuestas.

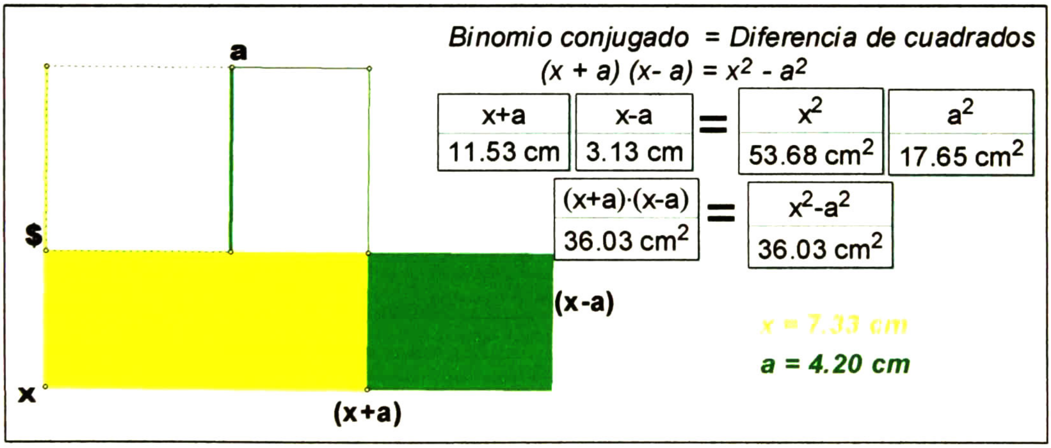


Figura 48. Pregunta 2: "¿cómo son entre si los resultados de la igualdad? $(a + x)(a - x) = x^2 - a^2$?"

Respuesta 5: "que dos de ellos son iguales"

Esta respuesta involucra a la mayoría de los alumnos, en ella se aprecia el uso de diversos sistemas matemáticos de signos, que nos permite intuir que se logra conceptualizar el PN.

En las siguientes respuestas a la pregunta 3, confirmaremos esta suposición.

A continuación, presentamos la tabla de frecuencia para cada uno de los tipos de respuestas dadas a la pregunta 2.

Pregunta 2: "¿cómo son entre si los resultados de la igualdad $(a + x)(a - x) = x^2 - a^2$"	Frec.
Sin respuesta	1
Que tienen un término en común que es "x"	1
no cambia y pasa a negativo	2
son variables a los resultados del valor de la expresión del valor del segmento	2
que dos de ellos son iguales	17
Total de respuestas	23

Tabla 10 Frecuencias de respuestas obtenidas para el binomio conjugado en la pregunta 2

Es evidente que se emplearon diversos sistemas matemáticos de signos, observamos que diecisiete de las respuestas mencionan que "*dos de ellos son iguales*", en respuesta a la pregunta "*¿cómo son entre si los resultados de la igualdad? $(a + x)(a \quad x) = x^2 \quad a^2$?*" Esto nos permite demostrar que la mayoría ha logrado conceptualizar este PN. Veremos que en las siguientes respuestas se evidencia más este aprendizaje.

Pregunta 3*: "¿notas diferencias en sus resultados? Explica".*

Si bien esta pregunta repite lo dicho en la Pregunta 2, las respuestas de los alumnos nos permitieron confirmar la identificación de la igualdad de los resultados de los miembros de la identidad: $(a + x)(a - x) = a^2 - x^2$. Además, obtuvimos algunas explicaciones de las maneras de entender esta igualdad.

Para esta pregunta encontramos cinco tipos de respuestas. Los 23 estudiantes con los que se trabajó contestaron "No" a la primera parte de *Pregunta 3: "¿notas diferencias en sus resultados? Explica"*

Como veremos a continuación, aunque las explicaciones que dan son de distinta naturaleza, la mayoría de los estudiantes señala que los resultados de los miembros de la identidad son iguales.

Explicación 1: "*sólo cambia el signo + por el signo –* "

Frecuencia de la respuesta: 2.

En esta respuesta se hace uso de un sistema matemático de signos algebraico, los alumnos centran su respuesta en los valores de la variable "*x*"

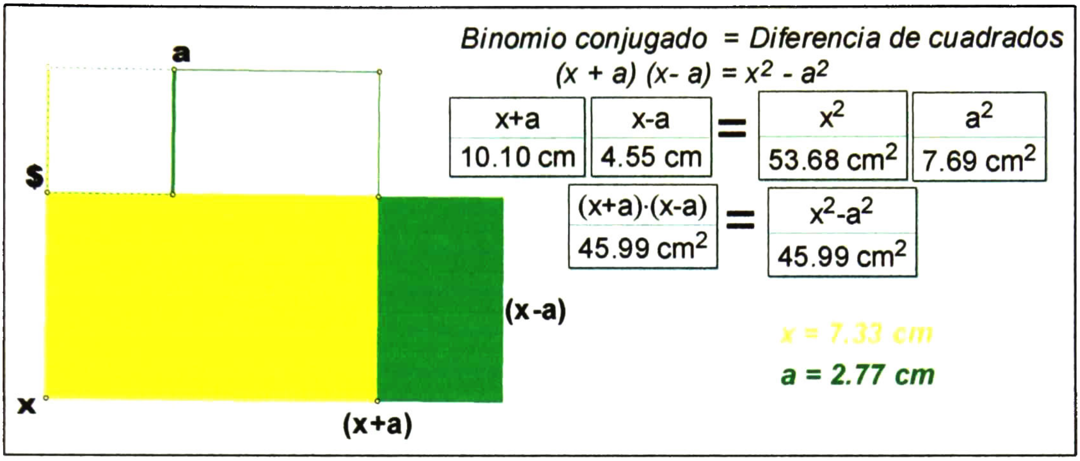


Figura 49. Pregunta :3 "¿notas diferencias en sus resultados? Explica"

Respuesta 1: "*sólo cambia el signo + por el signo –* "

Consideramos que aquí se presenta una descripción de las relaciones entre las representaciones algebraicas de los miembros de la igualdad. En el primer factor de izquierda a derecha, el signo que precede a la literal *x* es "+"; luego, en el segundo factor y en el miembro de la derecha, el signo que precede a *x* es "–".

Pregunta 3*: "¿notas diferencias en sus resultados? Explica"*

Explicación 2: "*son iguales*"

Frecuencia de la respuesta: 2.

En esta respuesta, ejemplificada en la figura 50, confirmamos que se identifica la igualdad del PN: binomio conjugado igual a diferencia de cuadrados

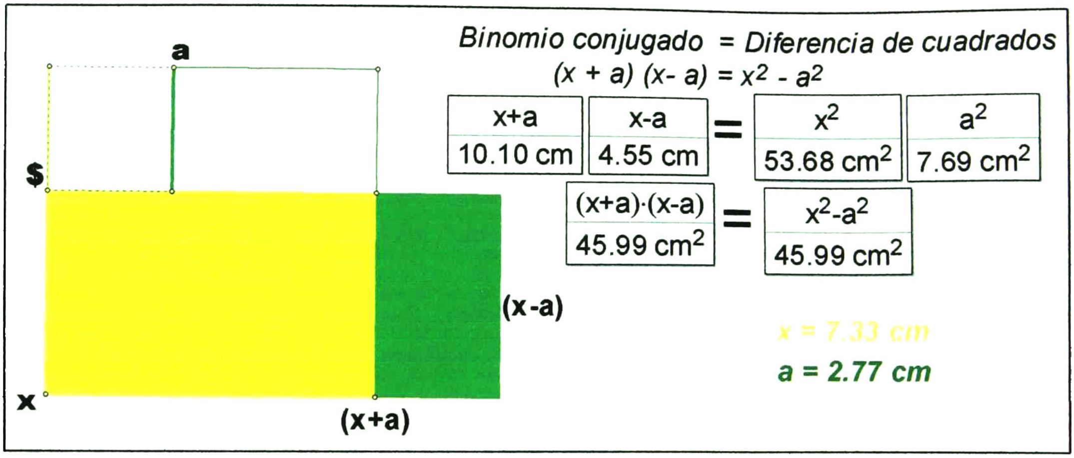


Figura 50. Pregunta 3: "¿notas diferencias en sus resultados? Explica"

Respuesta 2: "*son iguales*"

Consideramos que aquí se reitera la identificación de la igualdad de valores de las expresiones $(a + x)(a - x)$ y $a^2 - x^2$.

Pregunta 3: *"¿notas diferencias en sus resultados? Explica"*

Explicación 3: "$x^2 - a^2 = (x - a)(x + a)$; $x^2 = 40.97\ cm^2$; $(x - a)(x + a) = 36.28\ cm^2$"

Frecuencia de la respuesta: 3.

En la siguiente pantalla es notorio que los alumnos modificaron las dimensiones del interactivo, (situación que ya habíamos comentado). Se aprecia que en su introducción señalan la igualdad: "$x^2 - a^2 = (x - a)(x + a)$", pero hay inexactitud al comparar los valores numéricos. La siguiente pantalla (51) ejemplifica la obtención de esta respuesta.

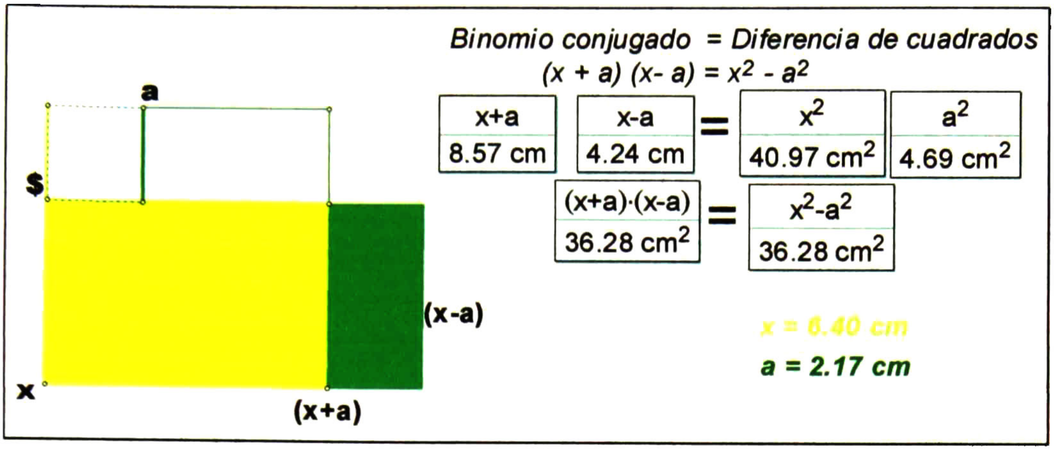


Figura 51. Pregunta 3 Pregunta 3: "¿notas diferencias en sus resultados? Explica".

Respuesta 3: "$x^2 - a^2 = (x - a)(x + a)$; $x^2 = 40.97\ cm^2$; $(x - a)(x + a) = 36.28\ cm^2$".

En esta respuesta se indica la diferencia entre el valor que toma x^2 y el valor del producto $(x - a)(x + a)$ para un valor de x y de a (6.40 y 2.17, respectivamente). Es posible que la equivocación numérica resultara de confundir los renglones de los valores.

Explicación 4: "*pues que no hay ninguno numero negativo*"

Frecuencia de la respuesta: 3.

En esta respuesta se perdió de vista que la intención era comparar la identidad: $x^2 - a^2 = (x - a)(x + a)$. Los alumnos hicieron comparaciones fuera de esta intención.

Las explicaciones 3 y 4, que presentamos anteriormente, no reflejan la identificación de la igualdad de los valores de los miembros de la identidad. En realidad parecen responder a la necesidad de dar sentido a la reiteración de la pregunta 2, intentando encontrar alguna diferencia entre los dos miembros.

Pregunta 3: "*¿notas diferencias en sus resultados? Explica*"

Explicación 5: "*en que $x^2 - a^2$ es la diferencia de un cuadrados resultante de un binomio conjugado $(x + a)(x - a)$*"

Frecuencia de la respuesta: 13.

Esta respuesta es altamente satisfactoria, en virtud de que se logra emplear sistemas algebraicos, sustentados en sistemas geométricos y aritméticos, para llegar a la comprensión de la identidad entre la diferencia de cuadrados y el correspondiente producto de binomios conjugados.

A continuación, presentamos la tabla de frecuencia para cada uno de los tipos de respuestas dadas a la pregunta 3.

Pregunta 3: "¿notas diferencias en sus resultados? Explica"	
TIPO DE RESPUESTA	Frec.
solo cambia el signo + por el signo -	2
son iguales	2
$x^2 - a^2 = (x - a)(x + a)$; $x^2 = 13.90\ cm^2$; $(x - a)(x + a) = 12.76\ cm^2$	3
pues que no hay ninguno numero negativo	3
En que $a^2 - b^2$ es la diferencia de un cuadrados resultante de un binomio conjugado $(a - b)(a + b)$	13
Total de respuestas	23

Tabla 11 Frecuencias de respuestas obtenidas para el binomio conjugado en la pregunta 3

Sólo tres del total de alumnos, no proporcionaron una respuesta plenamente satisfactoria, ("*pues que no hay ninguno numero negativo* "), por lo que consideramos que la mayoría de los alumnos ha logrado sustentar con diversos sistemas matemáticos, el concepto de este PN

Pregunta 4: *"si sólo se emplearan valores enteros, contrastándolo con los valores que aquí se observan, ¿habría diferencias en los resultados obtenidos con la igualdad?*
$(x + a)(x - a) = x^2 - a^2$? Explica".

Para esta pregunta encontramos cuatro tipos de respuestas. Tres de los estudiantes contestaron que "sí" habría diferencias en los resultados de la igualdad. Los estudiantes que contestaron que no habría diferencia justificaron sus respuestas con explicaciones que son de distinta naturaleza, pero todos ellos reconocieron que los resultados de los miembros de la identidad son iguales.

Dada la naturaleza de las respuestas, no se requiere el apoyo de figura alguna para ejemplificar las respuestas.

Respuesta 1: **"*sí*"**

Explicación 1: "*porque si hacemos la expresión cambia las expresiones".*

Frecuencia de la respuesta: 3.

Consideramos que, en este caso, no se logró adquirir la validez de la identidad entre una diferencia de cuadrados y su correspondiente producto de binomios conjugados para cualesquiera valores de las variables. No tenemos evidencia de los usos del interactivo que, en este caso, hicieron los estudiantes.

Pregunta 4: *"si sólo se emplearan valores enteros, contrastándolo con los valores que aquí se observan, ¿habría diferencias en los resultados obtenidos con la igualdad?*

$(x + a)(x - a) = x^2 - a^2$? Explica"

Respuesta 2: "*no*".

Explicación 2: "*porque sólo cambia el signo*"

Frecuencia de la respuesta: 2.

En esta explicación se resaltan nuevamente las relaciones entre las representaciones simbólicas de las expresiones de la identidad.

Pregunta 4: *"si sólo se emplearan valores enteros, contrastándolo con los valores que aquí se observan, ¿habría diferencias en los resultados obtenidos con la igualdad?*

$(x + a)(x - a) = x^2 - a^2$? Explica".

Respuesta 3: "*no*"

Explicación 3: "*porque son diferentes*"

Frecuencia de la respuesta: 3.

Si bien en esta respuesta se reconoce la validez de la identidad para valores enteros de las variables, no queda clara la explicación dada. Desafortunadamente, en este caso tampoco tenemos evidencia del uso que se dio al interactivo.

Pregunta 4: *"si sólo se emplearan valores enteros, contrastándolo con los valores que aquí se observan, ¿habría diferencias en los resultados obtenidos con la igualdad?*

$(x + a)(x - a) = x^2 - a^2$? Explica"

Respuesta 4: "*no*"

Explicación 4: "*porque es el resultado de la multiplicación $(a - x)(a + x) = a^2 - x^2$ y por tanto es la diferencia de cuadrados*".

Frecuencia de la respuesta: 15.

En estas respuestas se hace uso de los referentes dados por el sistema matemático algebraico y, claramente, muestran el reconocimiento del presente producto notable: el *producto de dos binomios conjugados.*

En seguida presentamos la tabla de frecuencia para cada uno de los tipos de respuestas dadas a la pregunta 4.

Pregunta 4: *"si sólo se emplearan valores enteros, contrastándolo con los valores que aquí se observan, ¿habría diferencias en los resultados obtenidos con la igualdad? $(x + a)(x - a) = x^2 - a^2$? Explica"*	
Tipo de respuesta	Frec.
sí, porque si hacemos la expresión cambia las expresiones	3
no, porque solo cambia el signo	2
no, porque son diferentes	3
no, porque es el resultado de la multiplicación $(x - a)(x + a) = x^2 - a^2$ y por tanto es la diferencia de cuadrados	15
Total de respuestas	23

Tabla 11 Frecuencias de respuestas obtenidas para el binomio conjugado en la pregunta 4

Destacamos nuevamente que sólo tres alumnos manifiestan diferencias, lo que nos lleva a concluir que veinte de ellos, en este momento, ya manifiestan la comprensión del binomio conjugado. En la siguiente pregunta finalmente confirmamos que la totalidad logra identificar la igualdad: $(x - a)(x + a) = x^2 - a^2$

Pregunta 5: *"¿hay valores de "x" y "a" para los cuales no se cumple la igualdad? ¿Cuáles? Explica"*

Frecuencia de la respuesta: 23.

En esta pregunta se reitera el cumplimiento de la igualdad. Todos los estudiantes contestaron que "no" hay valores para los cuales no se cumpla la identidad. De amanera consistente, a la segunda parte de la pregunta (*Explica*), todos contestaron: "ninguno"

A pesar de que anteriormente se presentaron tres casos en que aparentemente evidenciaban la no conceptualización del binomio conjugado y su deferencia de cuadrados, esta respuesta nos da evidencia de que sí se logró, al menos en parte, en los tres casos que hacemos referencia.

4.4 Conclusiones para Producto de "Binomios conjugados".

Nuevamente, el uso de la hoja de trabajo y del interactivo enriquecieron las significaciones dadas a la identidad correspondiente al *producto de binomios conjugados*. Permitieron trabajar con las interrelaciones de las representaciones de esta igualdad en distintos sistemas de signos: el algebraico, el numérico y el de las representaciones geométricas de las expresiones algebraicas, que se consideran en las hojas de trabajo.

El trabajo con estas interrelaciones consolidó el aprendizaje de la identidad, mediante su verificación para distintas representaciones y con diversos significados.

Es importante señalar que con el uso de esta hoja de trabajo las interpretaciones de los estudiantes se centraron en los referentes numéricos, pero que también se presentaron muchos referentes y relaciones algebraicas. Por ejemplo, en las respuestas a la Pregunta 4, (*Si sólo se emplearan valores enteros, contrastándolo con los valores que aquí se observan, ¿habría diferencias en los resultados obtenidos con la igualdad?* $(x + a)(x - a) = x^2 - a^2$ *?* Las justificaciones de la validez de la identidad para números enteros se efectúo con base en la identidad (algebraica) entre el producto del binomio conjugado y la diferencia de cuadrados (Respuesta 4: *...es el resultado de la multiplicación* $(a \quad x)(a + x) = a^2 - x^2$ *y por tanto es la diferencia de cuadrados*). Además, en la pregunta 3, por ejemplo, las respuestas a la pregunta sobre diferencias entre los miembros de la identidad se centraron en establecer relaciones entre las representaciones simbólicas de los miembros (Explicación 1: *Sólo cambia el signo "+" por el signo "–"*).

Asímismo, como con las anteriores hojas de trabajo, en este caso encontramos que los estudiantes identifican plenamente que la identidad algebraica se verifica para todos los valores decimales y enteros (positivos). Las expresiones $(a + x)(a - x)$ y $a^2 - x^2$ se evalúan en los distintos valores que toman x y a, al variar las dimensiones de las figuras. La igualdad de valores que toman las expresiones se establece como generalización a partir de los valores verificados en el interactivo. Además, esta verificación se hace de modo dinámico relacionando los valores numéricos con las dimensiones geométricas.

4.5 Respuestas para la hoja de trabajo Producto de "binomios con término común".

Al igual que con las hojas de trabajo anteriores, para cada pregunta presentamos el análisis de las soluciones a cada una de las preguntas de la actividad interactiva *Binomio conjugado*. Para cada pregunta presentamos la siguiente estructura:

♣ Una clasificación de las respuestas dadas por los estudiantes, elaborada en términos de sus características.

♣ Las frecuencias de aparición de los tipos de respuestas.

♣ Al final de la clasificación de las respuestas, presentamos un análisis global de los resultados.

Pregunta 1: *"¿qué tipo de números son los valores de los segmentos "x+ a" y "x+ b"?".*

Para esta pregunta encontramos cuatro tipos de respuestas. Todas ellas dependen de las exploraciones que hicieron los estudiantes al variar los valores de los segmentos $(x + a)$ y $(x + b)$.

Los primeros tres tipos de respuestas emplean un sistema matemático numérico y en ellos se indica el conjunto de números en el cuál los estudiantes están considerando que los segmentos toman sus valores.

En virtud de que las evidencias para estas tres respuestas las podemos observar en una misma pantalla, sólo utilizamos la figura 52 para ejemplificar estas tres primeras respuestas, haciendo notar que, efectivamente, las pantallas originales sí presentan diferencias, pero reiteramos, el tipo de respuesta es el mismo

Respuesta 1: "e*nteros, (decimales positivos)*"

Frecuencia de la respuesta: 3.

Respuesta 2: "p*ositivos con decimales*".

Frecuencia de la respuesta: 11.

Respuesta 3: "e*nteros*".

Frecuencia de la respuesta: 4.

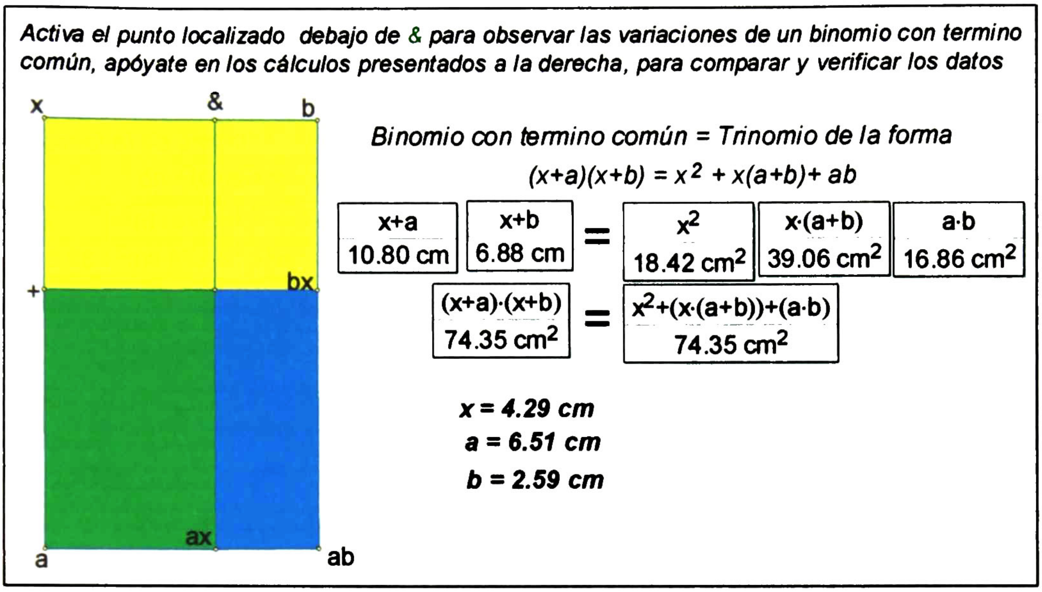


Figura 52. Pregunta 1: "¿qué tipo de números son los valores de los segmentos "x+ a" y "x+ b"?"

Respuesta 1 "enteros, (decimales positivos)"

Respuesta 2: "positivos con decimales.

Respuesta 3: "enteros"

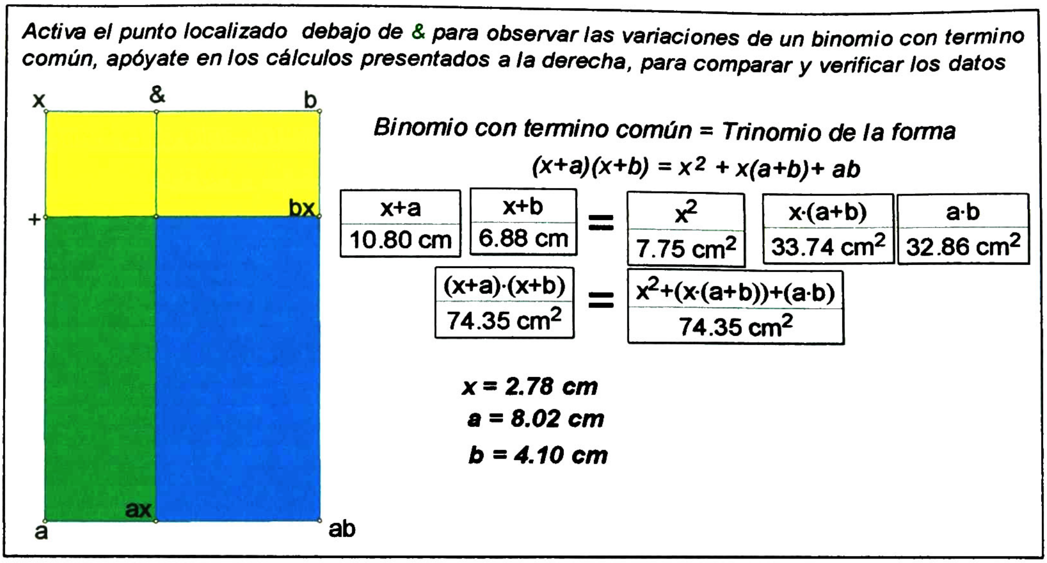
Evidentemente, en estas tres respuestas se aprecia el uso de un sistema matemático aritmético, identificando números enteros y decimales positivos.

Pregunta 1: *"¿qué tipo de números son los valores de los segmentos "x+ a" y "x+ b"?"*

Respuesta 4: "$x + b + a$"

Frecuencia de la respuesta: 5.

En esta respuesta se manejó un sistema matemático de signos diferente al utilizado para las tres preguntas anteriores. En este caso se empleó un sistema algebraico.



Pregunta 1: "¿qué tipo de números son los valores de los segmentos "x+ a" y "x+ b"?"

Respuesta 4: "$x + b + a$".

El cuarto tipo de respuesta es de naturaleza distinta. En esta respuesta se hace uso de un sistema matemático claramente algebraico. Pero esta respuesta sólo "aglutina" los símbolos.

Además, no logra identificar a los números decimales positivos como el conjunto en el que toman valores los segmentos $(x + a)$ y $(x + b)$.

A continuación, presentamos la tabla de frecuencia para cada uno de los tipos de respuestas dadas a la pregunta 1.

Pregunta 1: *"¿qué tipo de números son los valores de los segmentos "x+ a" y "x+ b"?"*	
Tipo de respuesta	Frec
Enteros, (decimales positivos)	3
positivos con decimales	11
Enteros	4
x + b + a	5
Total de respuestas	23

Tabla 12 Frecuencias de respuestas obtenidas para el binomio con término común en la pregunta 1

El sentido de la pregunta fue perfectamente resuelto en 18 del total de los alumnos. Las cinco preguntas que emplean un sistema matemático algebraico (respuesta tipo cuatro: $x + b + a$) posiblemente se centraron en considerar como variables a las literales mencionadas.

Pregunta 2: "¿observas diferencias en los resultados la igualdad:

$$\mathbf{(x+a)(x+b)=x^2+x(a+b)+ab}\text{?".}$$

Para esta pregunta encontramos tres tipos de respuestas. Todas ellas también dependen de las exploraciones que hicieron los estudiantes al variar los valores de *x, a* y *b* mediante el interactivo.

Es necesario señalar que la ambigüedad de la redacción de esta pregunta originó confusión en las respuestas obtenidas. La redacción correcta de la pregunta debió ser:

¿Cómo son entre sí los valores los miembros izquierdos y derecho de la igualdad $(x + a)(x + b) = x^2 + x(a + b) + ab$*?*

La intervención del maestro y el uso del interactivo dieron los elementos necesarios para que los estudiantes dedujeran que se preguntaba por los valores que tomaban las expresiones de los miembros derecho e izquierdo de la igualdad.

Respuesta 1: "n*o existe ninguna diferencia"*

Frecuencia de la respuesta: 6.

En la figura 54 se aprecia el uso de un sistema matemático algebraico, que se contrastará con las respuestas de la siguiente pregunta

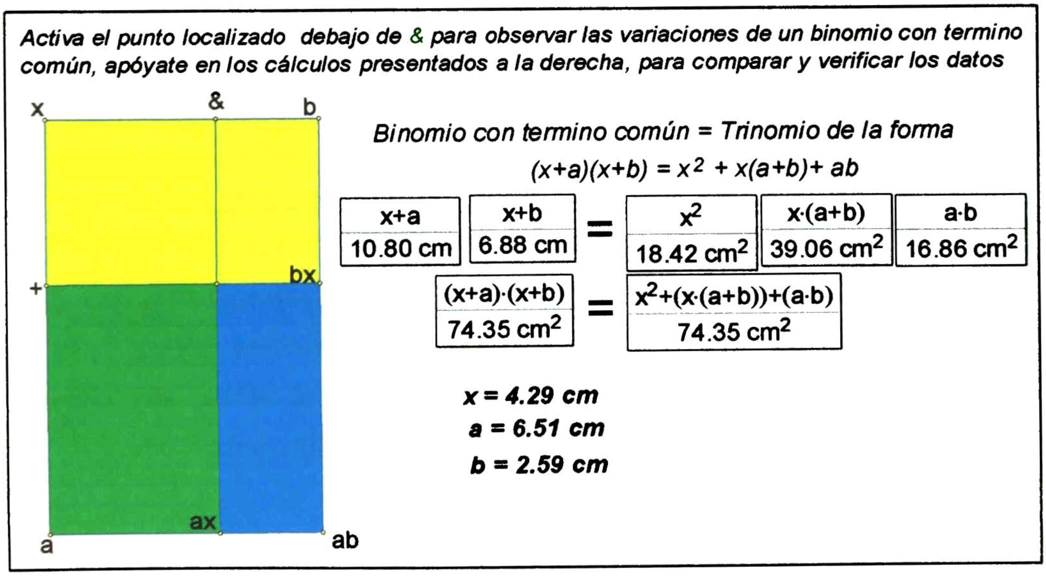


Figura 54. Pregunta 2: "¿Observas diferencias en los resultados la igualdad:

$(x + a)(x + b) = x^2 + x(a + b) + ab$ *?"*

Respuesta 1 No existe ninguna diferencia.

Los dos primeros tipos de respuesta encontrados para esta pregunta son análogos. Ambos identifican que se cumple la igualdad. Sólo que en el segundo se da el valor numérico que toman las expresiones para determinados valores de *x*, *a* y *b*.

Pregunta 2: "¿Observas diferencias en los resultados la igualdad:

$(x+a)(x+b)=x^2+x(a+b)+ab$ *?"*

Respuesta 2: *"no, son siempre el mismo, igual 113.32 cm²".*

Frecuencia de la respuesta: 14.

Existe una diferencia notable en esta respuesta en relación con la inmediatamente anterior, en este caso se emplea un sistema matemático aritmético.

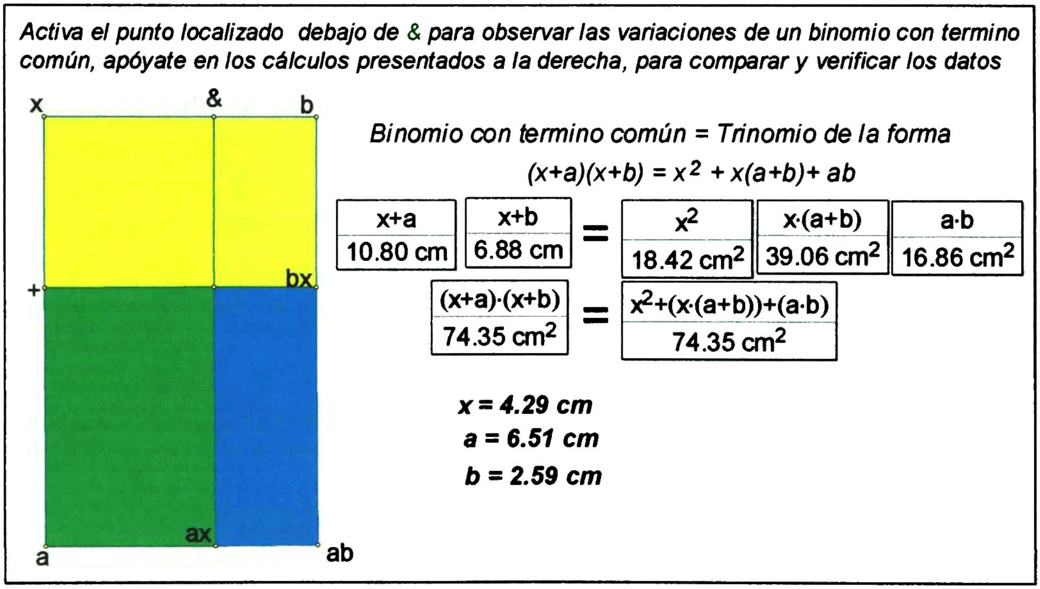


Figura 55. Pregunta 2: "¿Observas diferencias en los resultados la igualdad:

$(x+a)(x+b)=x^2+x(a+b)+ab$ *?"*

Respuesta 2: "no, son siempre el mismo, igual 113.32 cm²"

Como se había mencionado en la pregunta anterior, ahora se identifica plenamente la igualdad numérica. Destacamos que se emplea un sistema matemático aritmético.

Pregunta 2: "¿Observas diferencias en los resultados la igualdad:

$(x+a)(x+b)=x^2+x(a+b)+ab$ *?"*

Respuesta 3: *"s"í.*

Frecuencia de la respuesta: 3.

Esta respuesta, ejemplificada en la figura 56, fue elaborada por solamente tres alumnos, que responden, sí encontrar diferencias. Una posible explicación, es que confundieran la igualdad con los valores de las variables x=2.61; a=10.73 y b=5.89. Pero sólo es una posibilidad, puesto que no se investigó en el momento el porqué de su respuesta. En el comentario posterior a la figura, mencionamos otras posibilidades.

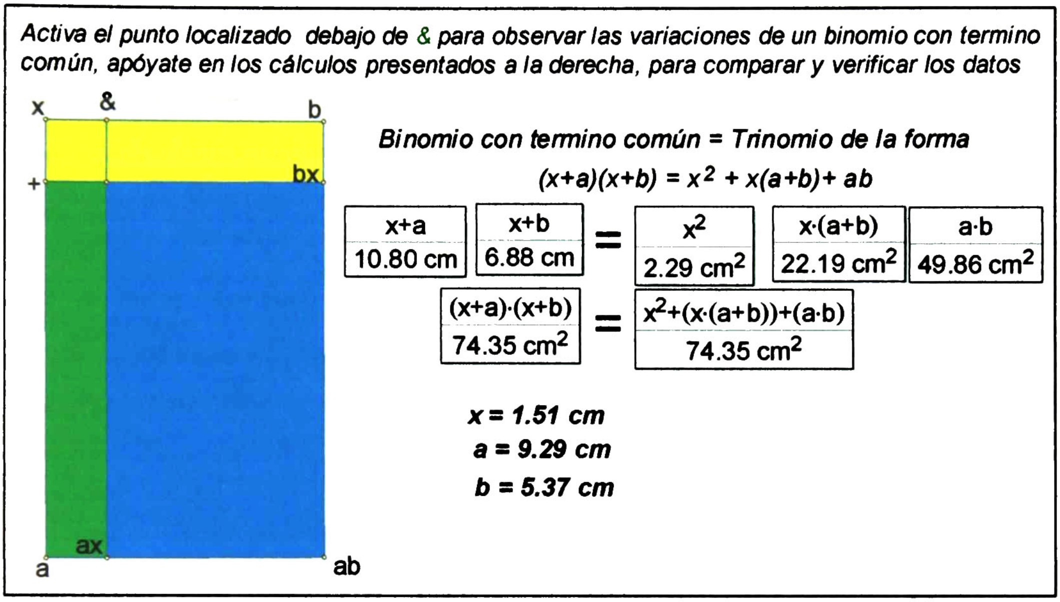


Figura 56 Pregunta 2: "¿Observas diferencias en los resultados la igualdad: $(x+a)(x+b)=x^2+x(a+b)+ab$ *?"*

Respuesta 3: "si".

Sólo 3 de los 23 alumnos creen percibir diferencias en la igualdad.

Párrafos anteriores habíamos mencionado que esta pregunta causó un margen de confusión en los datos que se buscaba comparar; posiblemente los tres alumnos que mencionaron encontrar diferencias en la igualdad tomaron los datos de (x+a) = 13.34, junto con (x+b)=8.50; y los compararon con x^2 = 6.82, y x(a+b) =43.38, sin considerar que en su sumatoria se encontraba la igualdad.

A continuación presentamos la tabla de frecuencia para cada uno de los tipos de respuestas dadas a la pregunta 2.

Pregunta 2: "¿Observas diferencias en los resultados la igualdad: $(x+a)(x+b)=x^2+x(a+b)+ab$ *?"*	
Tipo de respuesta	Frec.
no existe ninguna diferencia	6
No, son siempre el mismo, igual 113.31 cm²	14
si	3
Total de respuestas	23

Tabla 23 Frecuencias de respuestas obtenidas para el binomio con término común en la pregunta 2

En esta tabla, encontramos que 20 alumnos ya identifican la igualdad, lo que nos lleva a conjeturar que la mayoría percibe el concepto de este PN.

Pregunta 3: "¿en qué momento el valor de la expresión x^2 tiene valor cero?".

Para esta pregunta encontramos tres tipos de respuestas. Al igual que las anteriores, todas ellas dependen de las exploraciones que hicieron los estudiantes al variar los valores de ***x, a*** y ***b*** mediante el interactivo.

Respuesta 1: "*cuando x = 0 y a= 10.80 cm y b=6.88 cm*"

Frecuencia de la respuesta: 6.

En la figura 57, se aprecia el empleo de los sistemas matemáticos numérico y algebraico, con apoyo de un sistema geométrico propio del interactivo.

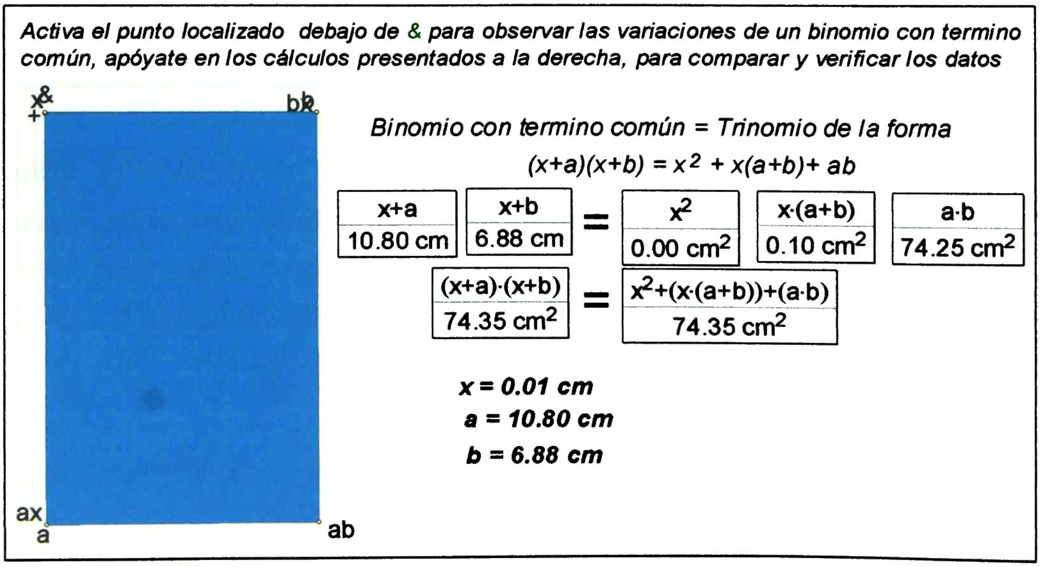


Figura 57. Pregunta 3: "¿En qué momento el valor de la expresión x² tiene valor cero?"
Respuesta 1:"cuando x = 0 y a= 10.80 cm y b=6.88 cm"

En estas respuestas se aprecia el empleo de un sistema matemático preponderantemente aritmético; las diferencias que mencionan los alumnos obedecen a variaciones propias del programa y son mínimas.

Pregunta 3: "¿en qué momento el valor de la expresión x^2 tiene valor cero?"

Respuesta 2: "*cuando $x\ (a + b) = 1.03\ cm^2$*"

Frecuencia de la respuesta: 4.

Debemos resaltar que el parámetro que emplearon los alumnos fue parcial, como se observa en la figura 58, donde solamente toman el valor de $x\ (a + b)$.

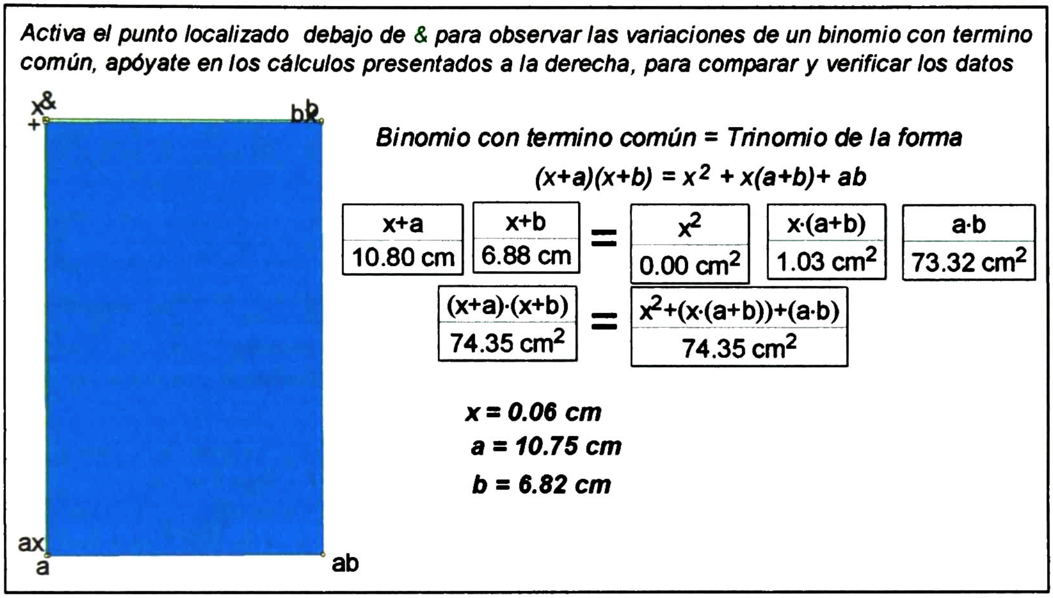


Figura 58. Pregunta 3: "¿en qué momento el valor de la expresión x^2 tiene valor cero?"

Respuesta 2: "cuando $x\ (a + b) = 1.03\ cm^2$"

En esta respuesta, los alumnos solo consideraron la expresión $x(a+b)$ como parámetro de comparación, pero no hicieron referencia a los valores de las variables $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ de manera independiente. Sin embargo, su respuesta es correcta.

Se observa que se hace un uso parcial de un sistema matemático numérico, sin concatenarlo con los sistemas matemáticos geométrico y algebraico.

Pregunta 3: "¿en qué momento el valor de la expresión x^2 tiene valor cero?"

Respuesta 3: "*en que aumenta*".

Frecuencia de la respuesta: 4.

Presentamos dos pantallas (figura 59) para apreciar el "aumento" al que se refieren los alumnos. El sistema matemático empleado es geométrico

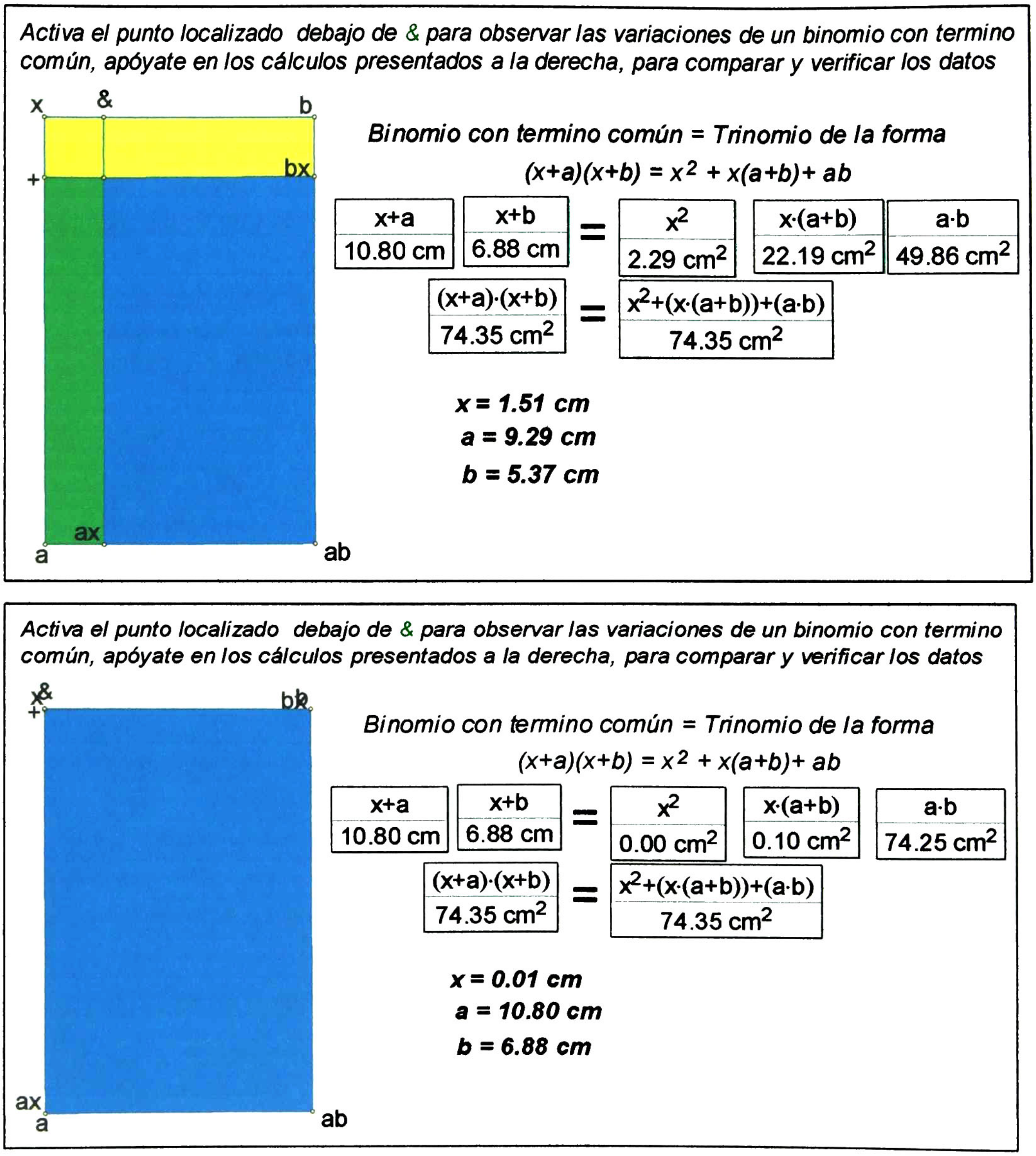


Figura 59. Pregunta: 3 "¿en qué momento el valor de la expresión x^2 tiene valor cero?". Respuesta 3: "en que aumenta"

El "aumento" corresponde a las dimensiones de las los lados *a* y *b* del rectángulo azul, así como de las dimensiones de las variables *a* y *b*.

Pregunta 3: "¿en qué momento el valor de la expresión x^2 tiene valor cero?"

Respuesta 4:"*en ningún momento*".

Frecuencia de la respuesta: 10.

La frecuencia de los alumnos que dieron esta respuesta es muy alta. Estos alumnos no localizaron el valor solicitado, a diferencia de los otros 13 que sí lo hicieron.

La naturaleza de la respuesta no requiere presentar pantalla de Sketchpad.

A continuación presentamos la tabla de frecuencia para cada uno de los tipos de respuestas dadas a la pregunta 3.

Pregunta 3: "¿en qué momento el valor de la expresión x^2 tiene valor cero?"	
TIPO DE RESPUESTA	Frec.
Cuando $x = 0$ *y* $a= 13.31$ *cm y* $b=8.48$ *cm*	6
cuando $x-(a+b) = 0.94$ cm²	3
en que aumenta	4
en ningún momento	10
Total de respuestas	23

Tabla 13. Frecuencias de respuestas obtenidas para el binomio con término común en la pregunta 3

En los dos primeros tipos de respuestas encontramos el uso de un sistema matemático de signos numérico, con respuestas acertadas. En los dos últimos tipos de respuestas, se emplea un sistema geométrico, hacemos énfasis que diez de los alumnos no ubicaron el valor solicitado.

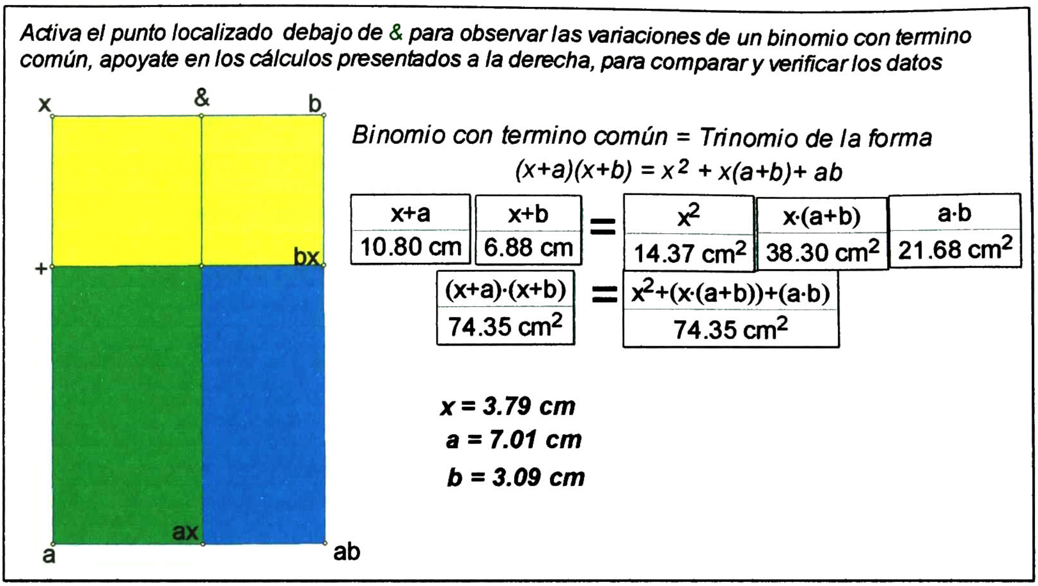
Pregunta 4: "*¿en qué momento las expresiones* $(x+a)$ *y* $(x+b)$ *tienen el mismo valor?*"

Para esta pregunta encontramos sólo un tipo de respuesta. Para todos los estudiantes las dos expresiones: $(x+a)$ *y* $(x+b)$ son siempre distintas.

Respuesta 1: "*en ningún momento*"

Frecuencia de la respuesta: 23.

La figura 60 está conformada por dos pantallas; la intención es comparar dos momentos de la manipulación del interactivo, que efectivamente, siempre mantienen la relación de desigualdad, esto es: $(x+a) \neq (x+b)$



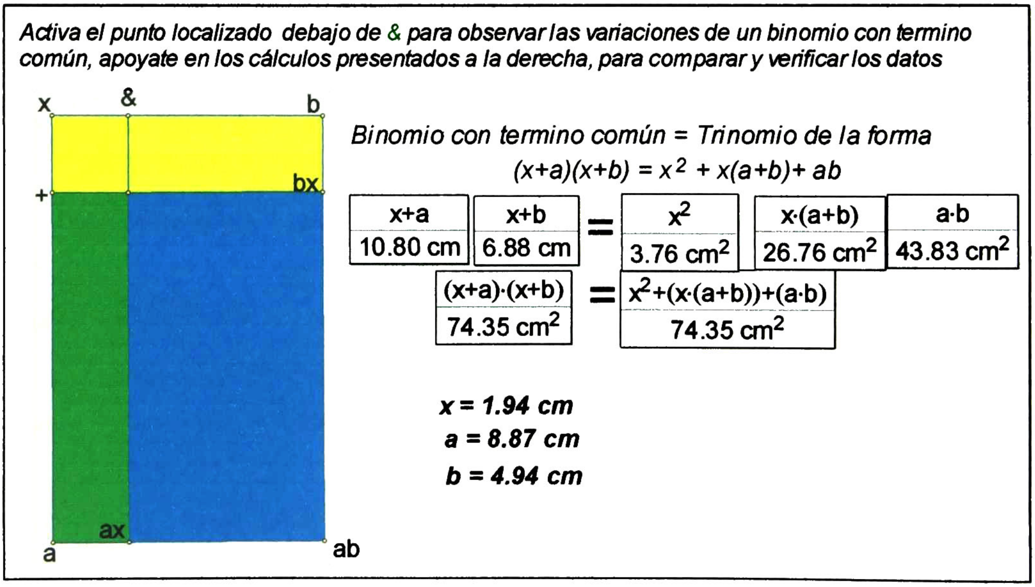


Figura 60. Pregunta 4: "¿en qué momento las expresiones (x+a) y (x+b) tienen el mismo valor?" Respuesta única: "en ningún momento"

En este tipo de respuesta, el sistema matemático empleado es algebraico. Como ya mencionamos, todos los alumnos dan una misma respuesta, debemos ponderar que los valores de las variables x, a y b no ocasionaron confusión; tampoco los valores de x^2, $x(a+b)$ y ab.

Dada la naturaleza de la respuesta, consideramos que no se requiere tabulación de estos datos.

4.6 Conclusiones para "Binomio con término común".

En este caso, también sucedió que el uso de la hoja de trabajo y del interactivo enriquecieron las significaciones dadas a la identidad correspondiente al *binomio al cuadrado.* Permitieron trabajar con las interrelaciones de las representaciones de esta igualdad en tres sistemas de signos: el algebraico, el numérico y el de las representaciones geométricas de las expresiones algebraicas, que se consideran en las hojas de trabajo.

El trabajo con estas interrelaciones permitió la consolidación del aprendizaje de la identidad mediante su verificación para distintas representaciones y con distintos significados.

Sin embargo, en el caso de los resultados del uso de esta hoja de trabajo, las interpretaciones de los estudiantes se ubicaron centralmente en los referentes numéricos.

El principal hallazgo consiste en que los estudiantes identifican plenamente que la identidad algebraica se verifica para todos los valores decimales (positivos).

Las expresiones $(x + a)(x + b)$ y $x^2 + x(a + b) + ab$ se evalúan en los distintos valores que toman x, a y b, al variar las dimensiones de las figuras. La igualdad de valores que toman las expresiones se establece como generalización a partir de los valores verificados en el interactivo. Además, esta verificación se hace de modo dinámico, relacionando los valores numéricos con las dimensiones geométricas.

Las preguntas 3 y 4 pretendían profundizar en las relaciones de las variables x, a y b dadas por el interactivo. Sin embargo, tal como muestran las respuestas dadas por los estudiantes, estas preguntas resultaron ser confusas y, de hecho, redundantes para la solución del problema central abordado por la hoja de trabajo: enriquecer las significaciones dadas a la identidad $(x + a)(x + b) = x^2 + x(a + b) + ab$. En una siguiente aplicación, estas dos preguntas serían eliminadas de la hoja de trabajo.

4.7 Evidencias de los alumnos

Por considerar de interés las evidencias que presentan los alumnos, mostramos en seguida, una transcripción del registro de dos alumnos que participaron en todas las etapas de experimentación del trabajo de tesis: "*productos notables en telesecundaria*"; en éstas, relatamos lo realizado por ambos alumnos.

Fernando. Edad: 14 años.

Este alumno se destacó como un alumno dedicado al estudio. Al finalizar su ciclo de educación secundaria, obtuvo un reconocimiento por su alto promedio de aprovechamiento durante los tres ciclos escolares.

Realizó el examen diagnóstico cuando cursaba el segundo grado, por lo que desconocía formalmente los PN; sus resultados del diagnóstico se presentan en la siguiente tabla:

Partes	Ítem	Aciertos	Total de Preguntas	Observaciones
Primera	Uno	4	6	
	Dos	4	6	
	Tres	1	1	Factoriza el número 50, empleando números primos como: (5*5)(5*5)
Segunda	Cuatro	1	1	Factoriza el número 37^2 como: (30+7) (30+7)
Tercera	Cinco	0	1	Factoriza la expresión ($9^2 - 4^2$) como producto conjugado así: (9*9) - (4*4)
	Seis	0	1	Factoriza la expresión (36 – 9) como producto conjugado así: (6*6) - (3*3)
	Siete	0	1	Factoriza la expresión $10^2 + 2(10)(5) + 5^2$ como producto de cuadrados así: $2(10^2) + (5^2)$
	Ocho	1	1	Para calcular la expresión (10 + 3)(4 + 5) utiliza lo siguiente: (10+3)(4+5)=40+50+12+15=117, lo que denota el uso de la propiedad distributiva de la multiplicación sobre la suma (4+5).
Cuarta	Nueve	1	1	
	Diez	1	1	

Tabla 14, Respuestas del alumno "Fernando" en el examen diagnóstico

Los resultados obtenidos nos permiten afirmar que este alumno contaba con un muy buen manejo de un sistema matemático aritmético, que definitivamente, contribuye a esperar buenos resultados con el sistema matemático algebraico, para su posterior aplicación en el sistema geométrico, lo cual finalmente, se desarrolló con el interactivo y las hojas de trabajo.

El desempeño de Fernando durante la resolución de las hojas de trabajo, durante la tercera experimentación, esto es, con las hojas de trabajo y el interactivo depurado, fue de la siguiente manera:

Durante las tres sesiones en que se aplicó la actividad, trabajó en equipo con dos compañeras estudiantes del grupo; en este equipo, al igual que en los demás, se les proporcionaron las hojas de trabajo al comenzar la actividad, para iniciar la interacción con el programa de geometría dinámica.

La estrategia que se empleo fue la manipulación del interactivo, al mismo tiempo que se resolvía el cuestionario de las hojas de trabajo.

De los resultados de este alumno, podemos destacar los siguientes:

Para el "*binomio al cuadrado*":

En la pregunta: "*¿en qué momento el valor de la expresión* $(a+b)^2$ *es diferente del valor de:* $a^2 + 2ab + b^2$ *?*"

R: "*nunca son diferentes*"

Esta respuesta se refuerza cuando escribe en su explicación solicitada en el ítem siguiente, (seis): "*el que* $a^2 + 2ab + b^2$ *es el resultado del binomio* $(a+b)^2$"

Ambas respuestas implican una adecuada aplicación de los sistemas matemáticos aritmético, geométrico y algebraico.

Otra respuesta que nos parece destacable es la conclusión escrita que se le pide al finalizar la sesión, donde escribe: "*el resultado de un binomio al cuadrado es igual a un trinomio cuadrado perfecto, en el cual sus valores de "a" y "b" pueden ser diferentes de forma proporcional o iguales, pero siempre manteniendo el valor del trinomio cuadrado perfecto, sin importar los cambios de "a" respecto a "b"*"

Nuevamente, su conclusión nos demuestra un uso adecuado de los sistemas matemáticos a que hicimos referencia.

Respecto al "binomio conjugado":

Destacamos nuevamente la conclusión escrita del alumno, porque incluye globalmente el trabajo de la sesión; Fernando escribió: "*el resultado de multiplicar dos binomios que solo difieren en uno des (sic) sus signos es igual a una diferencia de cuadrados; ejemplo: $(a-b)(a+b)= a^2 - b^2$. En el cual sus valores finales de $x^2 - a^2 = (x+a)(x-a)$ siempre son iguales*".

Finalmente, para el "*binomio con término común*", Fernando anota en su conclusión escrita: "*al multiplicar dos binomios con término común como resultado se obtiene: El cuadrado del primer término, más el producto del primer término (común) por la suma de los términos no comunes más el producto de los términos no comunes. Ejemplo: $(x+a)(x+b)= x^2 + x(a+b) + ab$*"

Debemos redundar que estas respuestas corresponden a la tercera etapa de aplicación.

En seguida, presentamos algunos comentarios obtenidos del mismo alumno durante la segunda aplicación; donde al finalizar las sesiones de la segunda aplicación, se les proporcionó un cuestionario. Trascribimos las respuestas dadas por Fernando:

P: "*¿qué diferencia encuentras entre los bloques algebraicos y esta presentación en GSP?*". [3]

F: "en que la presentación nos da mayor facilidad para observar los cambios de valores".

P: "*¿con cuál de estas dos estrategias se comprende mejor los productos notables?*"

F: "*con el programa GSP*"

P: "*¿por qué?*"

F: "*presenta mayores facilidades y los cambios de valores numéricos se entienden y observan mejor*".

P: "*en el programa de GSP sobre productos notables ¿qué te resultó más fácil de entender?*"

F:"*la relación de valores positivos y negativos que aparecen en ocasiones*"

P: "*¿qué fue lo más fácil de entender?*".

F: "*lo del trinomio cuadrado perfecto y la diferencia de cuadrados*"

P: "*realiza un comentario sobre GSP acerca de los productos notables*"

F: "*GSP es un excelente recurso para comprender de forma más fácil y sencilla en (sic) tema de productos notables, por lo que me parece maravillosamente bien que se haga uso de este recurso*".

Con las respuestas dadas en la segunda experimentación, queremos entender que ya desde

---

[3] GSP es el símbolo con que se identifica en el escritorio de la computadora, el programa Geometer´s Sketchpad

esa etapa se logra un acercamiento eficiente en el manejo de al menos los tres sistemas matemáticos de signos que abordamos en el trabajo de tesis.

Otra de las alumnas a quien se le aplicó el instrumento fue: Joelly. Edad: 13 años.

Esta alumna se clasificó como de aprovechamiento medio; con un promedio general al termino del ciclo de educación secundaria de 8.3.

Al igual que el alumno anterior, realizó el examen diagnóstico cuando cursaba segundo grado, lo que la coloca como desconocedora formal de los productos notables.

Los resultados de su prueba diagnóstico fueron:

Partes	Ítem	Aciertos	Total de Preguntas	Observaciones
Primera	Uno	6	6	
	Dos	5	6	
	Tres	0	1	Factoriza el número 50, empleando números primos como: (2*50); (50*1); (4)(12.5) y (10)(50)
Segunda	Cuatro	0	1	Factoriza el número 37^2 como: (20+17) (25+17)
Tercera	Cinco	0	1	Factoriza la expresión $(9^2 - 4^2)$ como producto conjugado así: 81-16
	Seis	0	1	Factoriza la expresión (36 – 9) como producto conjugado así: $6^2 - 3^2$
	Siete	0	1	Factoriza la expresión $10^2 + 2(10)(5) + 5^2$ como producto de cuadrados así: $10^2 + 100 + 5^2$

*Tabla 26. Respuestas de la alumna "*Joelly*" en el examen diagnóstico*

Nota: por cuestiones técnicas, se hizo necesario separar esta tabla en dos partes.

Partes	Ítem	Aciertos	Total de Preguntas	Observaciones
Tercera	Ocho	1	1	Para calcular la expresión (10 + 3)(4 + 5) escribe lo siguiente: (10+3)(4+5)=40+62+15 Esto implica el uso de la propiedad distributiva de la multiplicación sobre la suma (4+5). Agrega en su hoja lo siguiente: $\begin{array}{rrrr} & 10 & + & 3 \\ & 4 & + & 5 \\ \hline & 50 & + & 15 \\ 40 + & 12 & & \\ \hline 40 + & 62 & + & 15 \end{array}$ Con esta representación, aplica lo visto en clase, sobre producto de binomios, con la observación que lo aplica en un ejemplo numérico
Cuarta	Nueve	1	1	
	Diez	1	1	

Tabla 26. Respuestas de la alumna "Joelly" *en el examen diagnóstico.* (Continúa resultados de prueba diagnóstico)

Sus resultados nos confirman que no conoce en ese momento los PN, pero se percibe un buen manejo del algoritmo multiplicativo para las expresiones presentadas.

Joelly, al igual que Fernando, durante la resolución de las hojas de trabajo, durante la tercera aplicación, con las hojas de trabajo y el interactivo depurado, trabajó en equipo con una compañera del grupo; en este equipo, al igual que en los demás, se les proporcionaron las hojas de trabajo al comenzar la actividad, para iniciar la interacción con el programa de geometría dinámica.

La estrategia que se empleó fue la misma señalada con Fernando, esto es, manipulación del interactivo, al mismo tiempo que se resolvía el cuestionario de las hojas de trabajo.

De los resultados de esta alumna, destacamos los siguientes:

Para el "*binomio al cuadrado*":

P: En la pregunta *"¿en qué momento el valor de la expresión $(a+b)^2$ es diferente del valor de $a^2 +2ab + b^2$?".*

R: "*ninguno. Ya que $(a + b)^2$ es igual que $a^2 +2ab + b^2$*".

En la conclusión escrita que se le solicitó al finalizar la tercer aplicación, escribió: "*la conclusión es que ya sea con figuras en la computadora, o los bloques, la conclusión es lo mismo, aunque con mayor precisión en la computadora, y cuando un valor disminuye y otro aumenta y al momento que están en el centro, miden lo mismo y que es igual $(a + b)^2$ es igual (sic) $a^2 +2ab + b^2$*"

Podemos señalar que todas estas respuestas, implican una aplicación de los sistemas matemáticos aritmético, geométrico y algebraico.

Respecto al "binomio conjugado":

En el ítem 3, se le pregunta:

P: *"¿cómo son entre si los resultados de $(a-x)(a+x) =a^2 -x^2$"*.

R: "*iguales*"

En el ítem 5 se le pregunta.

P: *"¿habría diferencia en los resultados obtenidos con la igualdad $(a+b)(a-b) =a^2 -b^2$? Explica tu respuesta"*

R "*no, ya que $(a+b)$ y $(a-b)$ es la factorización de $a^2 -b^2$.*".

En su conclusión escrita, Joelly escribe: *"llegamos a la conclusión de que comprendimos como son los valores fraccionarios y enteros con que puede operar un binomio conjugado y que da como resultado una diferencia de cuadrados"*

Para el *"binomio con término común:".*

En la pregunta 4: *"¿observas diferencias en los resultados de la igualdad $(x+b)(x+a) = x^2 +x(a+b) +b^2$?".*

R: "no existe ninguna diferencia".

Joelly anota en su conclusión escrita: *"llegamos a la conclusión de que siempre los* *valores obtenidos son directamente proporcionales y siempre son semejantes y no existe ninguna diferencia"*

Nos parece que en este caso, también se logra un manejo adecuado de los sistemas matemáticos algebraico, geométrico y numérico.

Al igual que el alumno anterior, esta alumna también participó en la segunda experimentación, e igualmente, recuperamos el cuestionario aplicado, por parecernos de interés:

P: *"¿qué diferencia encuentras entre los bloques algebraicos y esta presentación en GSP?"* [4]

J: *"en los bloques solo tienes una medida y no la cambias y en GSP lo puedes hacer más grandes o más chicos".*

P: *"¿con cuál de estas dos estrategias se comprende mejor los productos notables?".*

J: *"en los bloques algebraicos"*

P: *"¿por qué?".*

J: *"ya que con los bloques es más fácil comprender utilizando ecuaciones y no multiplicando binomio por binomio o monomio"*

P: *"en el programa de GSP sobre productos notables ¿qué te resultó más fácil de entender?".*

J: *"las variaciones de un binomio conjugado y las variaciones de las medidas"*

P: *"¿qué fue lo más fácil de entender?".*

J: *"las proporcionalidades".*

P: *"realiza un comentario sobre GSP acerca de los productos notables"*

J: *"este programa me ayudó mucho, aunque en el principio se me hizo un poco difícil ya que yo no conocía nada de esto y tampoco nos tocaba en este año, pero después con la ayuda y explicación del profesor le fui entendiendo, además me va a ser útil para el otro año, aunque con los bloque algebraicos me es más fácil entenderlo, pero de todos modos me gustó mucho"*

Con las respuestas obtenidas por esa alumna, en la segunda aplicación redundamos en que queremos entender que ya desde esa etapa se logra un acercamiento eficiente en el manejo de al menos los tres sistemas matemáticos de signos que abordamos en el trabajo de tesis.

---

[4] Repetimos que GSP es el símbolo con que se identifica en el escritorio de la computadora, el programa Geometer´s Sketchpad

Finalizamos este apartado sobre los resultados de la toma principal de datos, donde presentamos el análisis de las respuestas dadas por los alumnos en las aplicaciones interactivas de las hojas de trabajo con el programa de geometría dinámica Geometer´s Sketchpad. Más las evidencias proporcionadas por dos alumnos mediante la recuperación de las conclusiones escritas que éstos aportaron, en donde se destaca la aprehensión del concepto de los PN : *binomio al cuadrado, binomios conjugados y binomios con término común.*

Resaltamos las interrelaciones que se lograron para los tres PN mediante tres sistemas matemáticos de sinos; geométrico, algebraico y numérico; que abordaremos en las conclusiones siguientes.

CONCLUSIONES

En este apartado final se presentan las conclusiones que se derivan del trabajo realizado en la presente tesis.

Debemos destacar la importancia de éste trabajo para la labor docente, así como los aportes para el aprendizaje de los alumnos. Consideramos que, en alguna medida, se ha contribuido a subsanar las dificultades de la enseñanza y el aprendizaje de los PN. Específicamente, los principales logros obtenidos son:

1.- Las construcciones realizadas mediante el programa Sketchpad nos permitieron establecer de modo dinámico, que las magnitudes de las longitudes de los diversos segmentos en cada producto notable podían variar; de manera que estas variaciones se reflejaran en el resto de las construcciones, en las dimensiones de los cuadrados y de los rectángulos formados. Éstas construcciones dinámicas marcan una importante diferencia con el trabajo realizado únicamente con los algebloques, que son representaciones geométricas estáticas. El dinamismo de las representaciones obtenidas con el interactivo permite generalizar la validez de las identidades de los Productos Notables, para cualquier valor de *x* (positivo, al menos).

2.- El uso de la hoja de trabajo y los correspondientes interactivos enriquecieron las interrelaciones entre los miembros de las identidades de los Productos Notables:

⅄ Las relaciones entre el binomio al cuadrado y el trinomio cuadrado perfecto correspondiente:

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$;

⅄ Las relaciones entre el producto de binomios conjugados y la diferencia de cuadrados correspondiente:

$(a + x)(a - x) = a^2 - x^2$

⅄ Las relaciones entre el producto de binomio con un término común y el trinomio correspondiente:

$(x + a)(x + b) = x^2 + x(a + b) + ab$

Los interactivos y las hojas de trabajo permitieron trabajar con las interrelaciones de las representaciones de estas igualdades en tres sistemas de signos: el algebraico, el numérico y el de las representaciones geométricas. El trabajo con estas interrelaciones permitió la consolidación del aprendizaje de las identidades, mediante su verificación para distintas representaciones y con distintos significados.

3.- El interactivo y las hojas de trabajo permitieron trabajar con las interrelaciones de las representaciones de estas igualdades en distintos sistemas matemáticos de signos. En seguida ejemplificamos algunas observaciones para cada sistema matemático de signos.

Por un lado, las representaciones algebraicas (elaboradas en el *Sistema matemático algebraico*) de los Productos Notables se confirmaron y retroalimentaron con las representaciones geométricas correspondientes (elaboradas en el *Sistema matemático geométrico*).

Por ejemplo, la identidad algebraica correspondiente a elevar un *binomio al cuadrado*: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, se confirmó con la representación geométrica, al verificar que las expresiones igualadas corresponden a dos maneras de calcular la misma área. El área del cuadrado de lado $(a + b)$ se calcula de dos maneras:

(1) Como la medida de la superficie del interior del cuadrado,

(2) Como la suma de las áreas de las figuras en las que se divide el cuadrado de lado $(a + b)$: un cuadrado de lado a, un cuadrado de lado b y dos rectángulos de lados a y b.

Además, ésta construcción es dinámica, es decir, las magnitudes de las longitudes de los segmentos a y b pueden variar de manera que sus variaciones se reflejan en el resto de la construcción: las dimensiones de los cuadrados y de los rectángulos.

Como señalamos en el Capítulo IV, se obtuvieron resultados similares al aplicar las hojas de trabajo correspondientes a los productos de *binomios conjugados* y de *binomios con un término común*. Además, las respuestas de los alumnos confirman la percepción de esta interrelación dinámica.

Por otro lado, las representaciones algebraicas (elaboradas en el *Sistema algebraico de signos*) y las representaciones geométricas (elaboradas en el *Sistema geométrico de signos*) se vincularon de manera dinámica con las evaluaciones numéricas (elaboradas en el *Sistema* *aritmético de signos*) de las expresiones en los valores determinados al variar las longitudes de las representaciones geométricas. De esta manera, la igualdad de valores que toman las expresiones se establece como generalización a partir de los valores verificados en el interactivo.

La evaluación de las expresiones igualadas permitió relacionar las expresiones algebraicas, su referente geométrico (el área de la figura) y los referentes numéricos, al obtener un número específico como resultado del cálculo del área. Además, la evaluación numérica hace explícito que las variables consideradas en los productos analizados toman valores tanto enteros (positivos), como cualquier número (real) positivo.

La generalidad de la validez de las identidades se aplica no sólo a valores generales pero "fijos" de las variables, como sucede con los *algebloques*; sino a variables que toman valores en los racionales o los reales.

Es importante señalar que con el uso de estas hojas de trabajo, las interpretaciones de los estudiantes se ubicaron, centralmente, en los referentes numéricos; pero también se presentaron muchos referentes y relaciones algebraicas y geométricas.

Debemos resaltar la referencia numérica, puesto que el trabajo exclusivo con los bloques algebraicos, no lo permite. Su importancia radica en que permitió a los alumnos darles un referente que rebasa únicamente la percepción algebraica o geométrica que los bloques permiten, proporcionándoles un manejo novedoso con el uso de un sistema matemático numérico, tanto para números enteros (positivos), como para números racionales e, incluso, reales (positivos).

Sin embargo, a pesar de que consideramos que el trabajo con el interactivo favoreció el aprendizaje de los Productos Notables, no dejamos de notar que algunos alumnos expresaron que les resultaba más fácil aprender con los *algebloques*, pero debemos mencionar que fue en las primeras etapas de aplicación de las hojas de trabajo.

Un aspecto importante que puede dificultar el trabajo con el interactivo es que se requiere el manejo del programa Sketchpad, como antecedente obligatorio para el trabajo con el interactivo

Por lo anterior, podemos resaltar que se logró "*Fortalecer la comprensión del concepto de* *productos notables en tres sistemas matemáticos de signos: numérico, geométrico y algebraico"* que fue nuestro planteamiento principal.

Finalizamos este trabajo con la satisfacción de aportar, en una mínima parte, elementos de una propuesta de enseñanza que apoya el aprendizaje significativo de los PN. Confiamos en que esta propuesta apoyará el desempeño académico, tanto de docentes como de los alumnos.

Referencias

Anfossi, Agustín (1961). *Curso de Algebra*, México, D. F. Ed. Progreso.

Butto, Z Cristianne M (2005) "Introducción temprana al pensamiento algebraico: una experiencia en la escuela primaria, Tesis de Doctorado en Ciencias, especialidad Matemática Educativa, México CINVESTAV

Filloy, Yagüe. E (1997). *La observación en matemática educativa. Modelos Teóricos Locales y sistema matemático de signos*. México D.F. Notas del Autor.

Filloy, Yagüe. E (1999). *Aspectos teóricos del álgebra educativa*, México D.F. Grupo Editorial Iberoamérica.

Filloy, Yagüe. E, Rojano C Teresa (2001). *Álgebra*, México D.F. Grupo Editorial Iberoamérica.

Hernández, S. José A. (2004). "El modelo concreto de bloques: un modelo de enseñanza para alumnos de bajo desempeño" Tesis de Maestría en Ciencias, especialidad Matemática Educativa, México CINVESTAV.

Hernández N. y Cardoso E. (2009) "Desarrollo del pensamiento algebraico a través del uso de los algeblocks" X Congreso Nacional de Investigación Educativa área 5: educación y conocimientos disciplinares. Veracruz, México, recuperado: 16 de enero de 2011. http://www.comie.org.mx/swgc/v2/sitio/sitio.php

Jackiw, Nicholas, (2003). *The Geometer's Sketchpad.* Software de geometría dinámica. Versión 4.05, versión en español. H Flores Samaniego.

Lehmann, Charles, H. (1986) *Algebra*, (20 reimp.) México, Ed. Limusa.

Pierce, Sanders, Charles, (1987). *Obra lógico-semiótica* Madrid, Taurus Edición de Armando Sercovich,

Puig, Luís, (en prensa). "Signos, textos y sistemas matemáticos de signos" Valencia, España, Universidad de Valencia.

Kuhn, Thomas S (1962). *La Estructura de las Revoluciones Científica*. México, F.C.E.

Matz, M., (1980). "Towards a computational theory of algebraic competence", Journal of mathematical behavior, Vol. 3, pp. 93-166.

Morales I. y. Sepúlveda A. (2006) "Propuesta para la enseñanza de la factorización en el curso de álgebra". XIV Encuentro de Profesores de Matemáticas, Ciudad universitaria, Morelia Michoacán.: Http://www.scribd.com/doc/36716984/multi-tablas recuperado 01 de febrero de 2011.

Ramírez, Cruz. Noé J. (1997). "La factorización algebraica en telesecundaria, una exploración en telesecundarias" Tesis de licenciatura, Centro de Actualización Magisterial en el Estado de México (C.A.M.E.M.).

Rees, Paul K. & Sparks, Fred W. (1970) *Algebra,* México, Editorial Reverte Mexicana

SEP (1993). *Plan y programas de estudio Educación Básica, Secundaria,* México, SEP.

SEP (1994). *Matemáticas cuarto grado.* Dirección General de Materiales y Métodos Educativos, México, SEP.

SEP (2000). *Matemáticas quinto grado.* Dirección General de Materiales y Métodos Educativos, México, SEP.

SEP (2004). *Matemáticas sexto grado.* Dirección General de Materiales y Métodos Educativos, México, SEP.

SEP (2006a). *Un acercamiento al modelo renovado de Telesecundaria,* Dirección General de Materiales Educativos de la Subsecretaría de Educación Básica, México, SEP

SEP (2006b). *Planes y Programas de Estudio, 2006, Matematicas,* México, SEP

SEP (2006d). *Reforma de la educación secundaria, Fundamento curricular: Matemáticas.* México, SEP.

SEP (2007). *Matemáticas II. 2° grado,* Vol. I, Libro para el Alumno, México, SEP

SEP (2008). *Matemáticas III. 3er grado,* Vol. I, Libro para el Maestro, México, SEP

SEP (2008b). *Matemáticas III. 3er grado,* Vol. I, Libro para el Alumno, México, SEP

Solares, R. Armando (2007). "Sistemas matemáticos de signos y distintos niveles de representación de la incógnita" Tesis de Doctorado en Ciencias, especialidad Matemática Educativa, México CINVESTAV

Ursini, Sonia. Escareño, Fortino. *et. al.* (2005). "*Enseñanza del algebra elemental*" México, Trillas.

Anexos

Anexo 1: diseño de las hojas de diagnóstico.

CINVESTAV del I.P.N.
Productos Notables en Telesecundaria
Instrumento de Evaluación Diagnóstica
para escuelas Telesecundarias

La presente batería es un instrumento de investigación educativa, tus respuestas son muy valiosas en los resultados que se obtengan; de antemano agradecemos tu colaboración.

Nombre del Alumno(a) ____Grado ____ grupo _______

Ítem 1

De las posibles factorizaciones del número 100, señala todas las respuestas que consideres correctas, colocando una **V** en los cuadros de la derecha:

(2)(50)	
50 + 50-	
99+1	
101-1	
4(25)	
$\frac{200}{2}$	

Ítem 2

Escribe una **V** en los cuadros de la derecha, señalando las respuestas correctas, de las posibles factorizaciones del número 36
Considera tanto las factorizaciones con números primos como compuestos.

(6)(6)	
(5)(6) + 6	
$(2^2)(3^2)$	
(7)(11) - 41	
(9)(4)	
(2)(2)(3)(3)	

Ítem 3.- Realiza la factorización total, empleando números primos, del número 50 =

Segunda parte

Ítem 4 - Completa la siguiente factorización, colocando en las líneas los números faltantes

37^2=(+)(+)

Tercera parte

Ítem 5.- Factoriza la siguientes expresión numérica, como un producto conjugado

$\left[9^2-4^2\right]=$

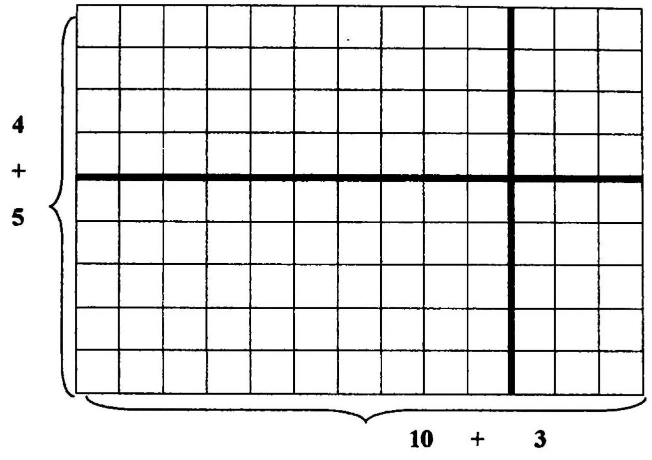
Ítem 6 .- Factoriza la siguientes expresión numérica, como un producto conjugado

(36 - 9)=

Ítem 7 .- Factoriza la siguientes expresión numérica, como un producto de cuadrados

$10^2+2[(10)(5)]+5^2=$

Calcula la cantidad de cuadritos que tiene el siguiente rectángulo

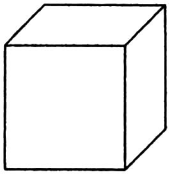


¿Podrías emplear la siguiente expresión?

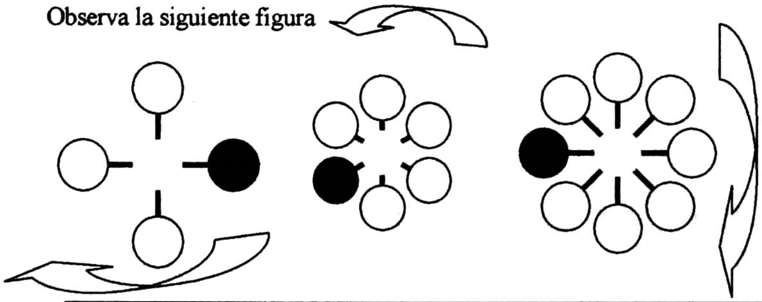
(10+3)(4+5)

Si es así, aplícala

¿Cuál sería la medida de las aristas de un cubo que tuviera 8 cm^3 de volumen?



Observa la siguiente figura



Si estas figuras giraran en el sentido que indican las flechas y cada círculo representara un diente de un engrane, calcula el número de dientes que tiene que girar en cada vuelta

Primer engrane		Segundo engrane		Tercer engrane	
Número de dientes que gira	Número de vueltas	Número de dientes que gira	Número de vueltas	Número de dientes que gira	Número de vueltas
4	1	6	1	8	1
	2		2		2
	3		3		3
	4		4		4

¿A las cuántas vueltas volverán los tres engranes a estar en la misma posición que en éste momento se ve?

Anexo 2A: Diseño de las de trabajo hojas para *binomios al cuadrado*, empleados en la segunda puesta a prueba.

Proyecto de desarrollo: "La adquisición del lenguaje algebraico"

PROYECTO: Productos notables en el sistema de telesecundarias

HOJA DE TRABAJO PARA EL INTERACTIVO DEARROLLADO EN EL PROGRAMA DE GEOMETRIA DINAMICA "SKETCHPAD"

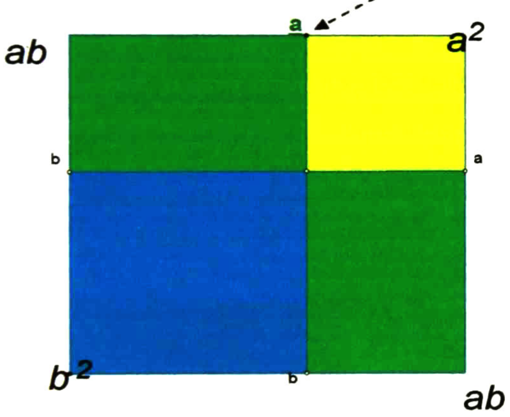
"A formar cuadrados" y ***"El Cuadrado de una diferencia"*** **(corresponde las sesiones 1 y 2 de la secuencia "Productos Notables)**

Nombre del alumno____ Edad ____

Escuela ____ Fecha ______

En las sesiones 1 y 2 elaboraste cuadrados con los bloques algebraicos, para encontrar cómo obtener el producto de un binomio por otro binomio igual: esto es, elevaste al cuadrado un binomio y encontraste como resultado un "Trinomio Cuadrado Perfecto"

En este interactivo, observaras cómo el binomio al cuadrado y su resultado, el trinomio cuadrado perfecto, pueden tomar valores fraccionarios.



Para operar el interactivo, selecciona el punto **a** presiona el botón izquierdo del mouse, se abrirá un cuadro de dialogo, elige el comando "animar el punto"
(Observa las variaciones que toman los valores de los segmentos a y b del cuadrado)

Sugerencia: en el cuadro de dialogo del comando animar el punto, puedes modificar la velocidad con que se mueve el punto; modifica la velocidad para que puedas apreciar mejor las variaciones numéricas.
Otra opción es que muevas manualmente el punto **a**, para que observes las variaciones de los valores

Observa y analiza de que manera varían los valores que pueden tomar las medidas de los lados del cuadrado, compara los resultados que se obtiene en los cuadrados que corresponden a las expresiones algebraicas a^2 y b^2. No olvides comparar los valores para las áreas que corresponden con los productos *ab*. Además verifica las variaciones que se observan en el valor del área total del cuadrado

Anexo 2B: Diseño de los cuestionarios de las hojas de trabajo para *binomios al cuadrado*, empleados en la segunda puesta a prueba.

1.- ¿Cómo son los valores de los segmentos *a* y *b*?

___

2.- ¿Qué relación hay entre la medida del segmentos *a* con la expresión a^2?

___

3.- ¿Qué relación hay entre las medidas de los segmentos "*a*" y "*b*" con la expresión *ab*?. ¿Y con el producto *2ab*?

___

4.- ¿Cómo varia los cuadrados de las expresiones a^2 y b^2?

___

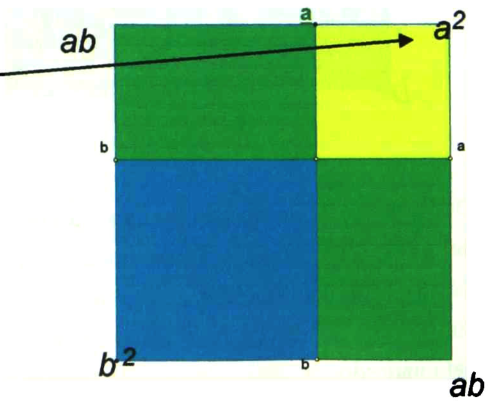
5.- ¿La medida del cuadrado completo, que corresponde con la expresión $a^2 + 2ab + b^2$, cambia su valor cuando los cuadrados de a^2 y b^2 se agrandan o reducen? ________________

6.- Escribe en tu cuaderno, ¿Cómo explicarías esta situación?

___

Colocando el puntero del mouse en el punto identificado como a^2,

puedes hacer más grande o más pequeño todo el cuadrado, realízalo, observa las variaciones en las medidas de todos los elementos y vuelve a contestar las preguntas de la 1 a la 6.



Compara tus respuestas con tus compañeros y escribe tus conclusiones al respecto

Anexo 3A: Diseño de las de trabajo hojas para *binomios conjugados*, empleados en la segunda puesta a prueba.

Proyecto de desarrolla "La adquisición del lenguaje algebraico"

PROYECTO: Productos notables en el sistema de telesecundarias

HOJA DE TRABAJO PARA EL INTERACTIVO DEARROLLADO EN EL PROGRAMA DE GEOMETRIA DINAMICA "SKETCHPAD"

"La diferencia de dos cuadrados" (corresponde a la sesión 3 de la secuencia "Productos Notables)

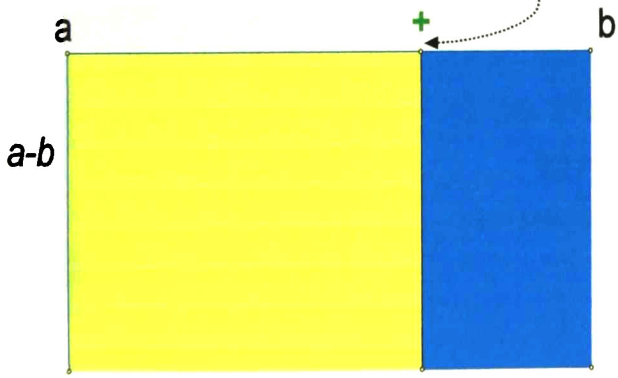
Nombre del alumno____ Edad ____

Escuela ____ Fecha ______

Con ésta segunda hoja de trabajo, esperamos que comprendas cómo pueden ser los valores (fraccionarios y enteros), con que puede operar un binomio conjugado, dando como resultado una diferencia de cuadrados.

Este producto notable lo trabajaste en la sesión 3 de tu libro de matemáticas.

Recuerda que el binomio conjugado se obtuvo cuando restaste un área igual a b^2 de un área mayor representada por a^2.



Para operar el interactivo, selecciona el punto **+** presiona el botón izquierdo del mouse, se abrirá un cuadro de diálogo, elige el comando *"animar el punto"*
(Observa las variaciones que toman los valores de los segmentos *a* y *b* del rectángulo)

Sugerencia: en el cuadro de diálogo del comando animar el punto, puedes modificar la velocidad con que se mueve el punto; modifica la velocidad para que puedas apreciar mejor las variaciones numéricas.
Otra opción es que muevas manualmente el punto **+**, para que observes las variaciones de los valores

Anexo 3B: Diseño de los cuestionarios aplicados en las hojas de trabajo para binomios conjugados, empleados en la segunda puesta a prueba.

1.- ¿Cómo son los valores que expresa el programa Sketchpad, de los segmentos *(a + b) y (a – b)?*

____

2.- Anota el dato obtenidos con la medición del segmento *(a + b)* ____________________

3.- Anota el dato obtenidos con la medición del segmento *(a - b)* ____________________

4.- Multiplica los dos datos anteriores y escribe su resultado ____________________

5.- Anota el dato obtenidos con la medición del segmento "*a*" ____________________

6.- Anota el dato obtenidos con la medición del segmento "*a*" elevado al cuadrado __________

7.- Anota el dato obtenidos con la medición del segmento "*b*" ____________________

8.- Anota el dato obtenidos con la medición del segmento "*b*" elevado al cuadrado __________

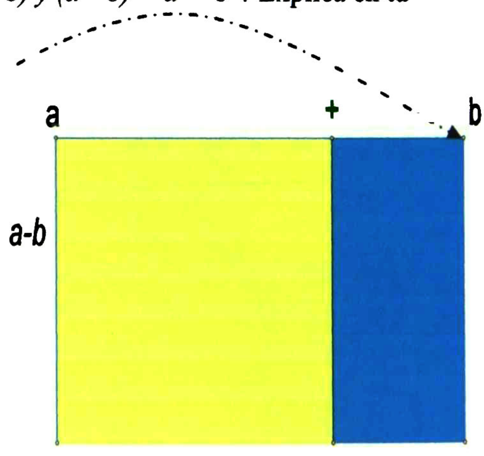
Observa los valores de la igualdad $(a + b)$ y $(a – b) = a^2 – b^2$

9.- ¿Notas diferencias en sus resultados? __________ ¿Cómo explicarías esta situación?

____

10.- Si sólo se emplearan valores enteros, contrastándolo con valores fraccionarios ¿Habría diferencia es los resultados obtenidos por la igualdad $(a + b)$ y $(a – b) = a^2 – b^2$? Explica en tu cuaderno tu respuesta

Colocando el puntero del mouse en el punto identificado como *b*, puedes hacer más grande o más pequeño todo el cuadrado, realízalo, observa las variaciones en las medidas de todos los elementos y vuelve a contestar las preguntas de la 1 a la 10.



Compara tus respuestas con tus compañeros y redacta una conclusión

Anexo 4A: Diseño de las de trabajo hojas para *binomios con término común*, empleados en la segunda puesta a prueba.

Proyecto de desarrolla “La adquisición del lenguaje algebraico”

PROYECTO: Productos notables en el sistema de telesecundarias.

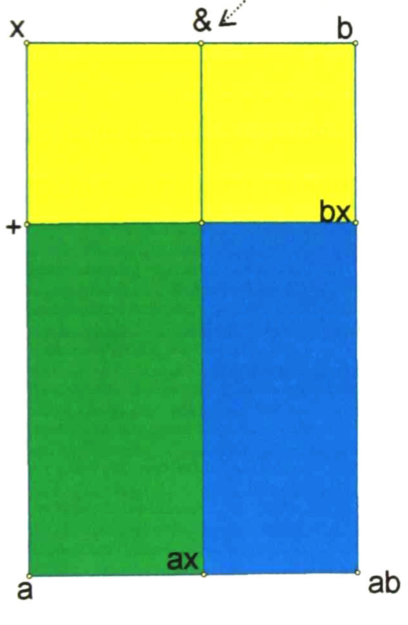
HOJA DE TRABAJO PARA EL INTERACTIVO DEARROLLADO EN EL PROGRAMA DE GEOMETRIA DINAMICA “SKETCHPAD”

“A formar rectángulos” (corresponde con la sesión 4 de la secuencia “Productos Notables)

Nombre del alumno____ Edad ____

Escuela ____ Fecha ______

En éste interactivo, apreciarás cómo se presentan las variaciones dinámicas con números enteros y fraccionarios, en el producto de un binomio con un término común, generalizado con la expresión algebraica: $(x+a)(x+b) = x + x(a+b) + ab$



Para operar el interactivo, selecciona el punto + presiona el botón izquierdo del mouse, se abrirá un cuadro de diálogo, elige el comando “animar el punto”
(Observa las variaciones que toman los valores de los segmentos a y b del rectángulo)

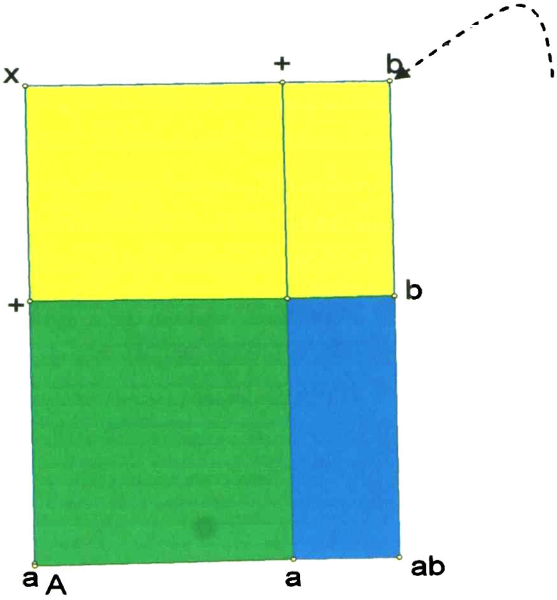
Sugerencia: en el cuadro de diálogo del comando animar el punto, puedes modificar la velocidad con que se mueve el punto; modifica la velocidad para que puedas apreciar mejor las variaciones numéricas
Otra opción es que muevas manualmente el punto +, para que observes las variaciones de los valores

Anexo 4B: Diseño de los cuestionarios aplicados en las hojas de trabajo para binomios con término común, empleados en la segunda puesta a prueba.

¿Cómo son los valores de los segmentos *(x + b) y (x + a)*?

____

1. Anota el valor del segmento "*a*" ______________________
2. Anota el valor del segmento "*b*" ______________________
3. Anota el valor del segmento "*x*" ______________________
4. Suma los datos de "a" mas "*x*" ______________________
5. Suma los datos de "b" mas "x" ______________________
6. Multiplica los datos que obtuviste en 5y 6 ________________
7. Eleva al cuadrado el valor del segmento "*x*" ________________
8. Multiplica la suma de los segmentos "*a*" mas "*b*" por el valor del segmento "*x*" ______
9. Multiplica los datos de los segmentos "*a*" por "*b*" ____________________
10. Suma los datos obtenidos en 8, 9 y 10 ________________________
11. Compara los resultados que obtuviste en el punto 7 y el punto 11
12. ¿Cómo son los resultados? ______________________________



Colocando el puntero del mouse en el punto identificado como *b*, puedes hacer más grande o más pequeño todo el cuadrado, realízalo, observa las variaciones en las medidas de todos los elementos y vuelve a contestar las preguntas de la 1 a la 13.

En tu cuaderno, escribe tus conclusiones y compara con tus compañeros

Anexo 5A: Diseño de las de trabajo hojas para binomios al cuadrado, empleados en la toma principal de datos

Proyecto de desarrollo "La adquisición del lenguaje algebraico"

PROYECTO: PRODUCTOS NOTABLES EN EL SISTEMA DE TELESECUNDARIAS

HOJA DE TRABAJO PARA EL INTERACTIVO DEARROLLADO EN EL PROGRAMA DE GEOMETRIA DINAMICA "SKETCHPAD"

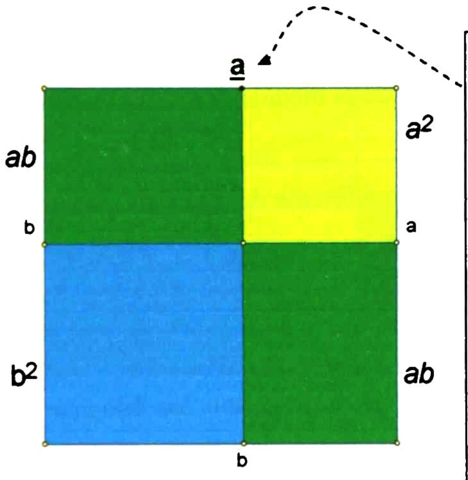
"A formar cuadrados" y *"El Cuadrado de una diferencia"* (corresponde las sesiones 1 y 2 de la secuencia "Productos Notables)

Nombre del alumno____ Edad ____

Escuela ____ Fecha ______

En las sesiones 1 y 2 , elaboraste cuadrados con los bloques algebraicos, para encontrar cómo obtener el producto de un binomio por otro binomio igual; esto es, elevaste al cuadrado un binomio y encontraste como resultado un "*Trinomio Cuadrado Perfecto*".

En este interactivo, observarás cómo el binomio al cuadrado y su resultado, el trinomio cuadrado perfecto, pueden tomar *valores fraccionarios.*



Para operar el interactivo, selecciona el punto presionando el botón derecho del mouse; se abrirá un cuadro de dialogo, elige el comando "*animar el punto*"

Observa las variaciones que toman los valores de los segmentos *a* y *b* del cuadrado

Sugerencia: en el cuadro de diálogo del comando: *animar el punto*, puedes modificar la velocidad con que se mueve el punto; modifícala para que puedas apreciar mejor las variaciones numéricas.

- Otra opción es que muevas manualmente el punto , para que observes las variaciones de los valores

Anexo 5B: Diseño del cuestionario aplicado en las hojas de trabajo para *binomios al cuadrado,* empleado en la toma principal de datos.

Observa y analiza atentamente de qué manera varían los valores que pueden tomar las medidas de los lados del cuadrado, compara los resultados que se obtiene en los cuadrados que corresponden a las expresiones algebraicas a^2 y b^2. No olvides comparar los valores para las áreas que corresponden con los productos ab. Además, verifica las variaciones que se observan en el valor del área total del cuadrado

Responde las siguientes preguntas, pero primero observa detenidamente los valores de los segmentos "*a*" y "*b*"

1.- ¿De qué manera cambian las medidas de los segmentos *a* y *b*?

____

2.- ¿Para qué valores de "*a*" los valores de "*b*" son menores que "*a*"?

3.- ¿Para qué valores de "*a*" los valores de "*b*" son mayores que "*a*"?

4.- ¿En qué momento los valores de "*a*" son iguales a los de la medida de "*b*"?

____

5.- ¿En qué momento el valor de la expresión $(a + b)^2$ es diferente del valor de $a^2 + 2ab + b^2$?

____

6.- ¿Cómo explicarías esta situación?

____

7.- Si comparas lo que aquí observaste, con lo que se manejó con los bloques algebraicos, ¿Encuentras diferencias entre las dos maneras de entender el binomio al cuadrado?

______

Compara tus respuestas con tus compañeros y escribe tus conclusiones al respecto

Anexo 6A: Diseño de las de trabajo hojas para binomios conjugados, empleados en la toma principal de datos.

Proyecto de desarrolla "La adquisición del lenguaje algebraico"
PROYECTO: PRODUCTOS NOTABLES EN EL SISTEMA DE TELESECUNDARIAS
HOJA DE TRABAJO PARA EL INTERACTIVO DEARROLLADO EN EL PROGRAMA DE GEOMETRIA DINAMICA "SKETCHPAD"

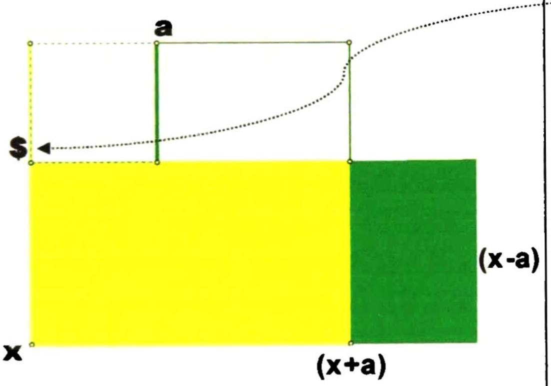
"La diferencia de dos cuadrados" (corresponde a la sesión 3 de la secuencia "Productos Notables)

Nombre del alumno____ Edad ____

Escuela ____ Fecha ______

Con ésta segunda hoja de trabajo, esperamos que comprendas cómo pueden ser los valores (fraccionarios y enteros), con que puede operar un binomio conjugado, dando como resultado una diferencia de cuadrados. Este producto notable lo trabajaste en la sesión 3 de tu libro de matemáticas.

Recuerda que el binomio conjugado se obtuvo cuando restaste un área igual a a^2 de un área mayor representada por x^2



Para operar el interactivo, selecciona el punto: **$,** presiona el botón derecho del mouse, se abrirá un cuadro de dialogo, elige el comando *"animar el punto"*
Observa las variaciones que toman los valores de los segmentos a y b del rectángulo
Sugerencia: en el cuadro de dialogo del comando *animar el punto,* puedes modificar la velocidad con que se mueve el punto; modifícala para que puedas apreciar mejor las variaciones numéricas.
Otra opción es que muevas manualmente el punto $ para que observes las variaciones de los valores

Anexo 6B: Diseño de los cuestionarios aplicados en las hojas de trabajo para *binomios conjugados*, empleados en la toma principal de datos.

Observa atentamente los valores de los segmentos x y a

1.- ¿Para qué valores de (x+a)(x-a) el resultado es cero?

____

2.- ¿Cómo son entre sí los resultados de $(x\text{-}a)\ (x+a)=x^2 - a^2$.?

____

Observa los valores de la igualdad $(x\text{-}a)\ (x+a)=x^2 - a^2$

3.- ¿Notas diferencias en sus resultados?. ______ ¿Cómo explicas esta situación?

____

4.- Si sólo se emplearan valores enteros, contrastándolos con los valores que aquí se observan. ¿Habría diferencia con los resultados obtenidos con la igualdad $(x\text{-}a)\ (x+a)=x^2 - a^2$.?. Explica tu respuesta

____

5.- ¿Hay valores de x y a para los cuales no se cumple la igualdad? ________

¿Cuáles? ___________________________________

Compara tus respuestas con tus compañeros y redacta una conclusión.

Anexo 7A: Diseño de las de trabajo hojas para *binomios de tercer grado con término común*, empleados en la segunda puesta a prueba.

Proyecto de desarrolla "La adquisición del lenguaje algebraico"

PROYECTO: PRODUCTOS NOTABLES EN EL SISTEMA DE TELESECUNDARIAS

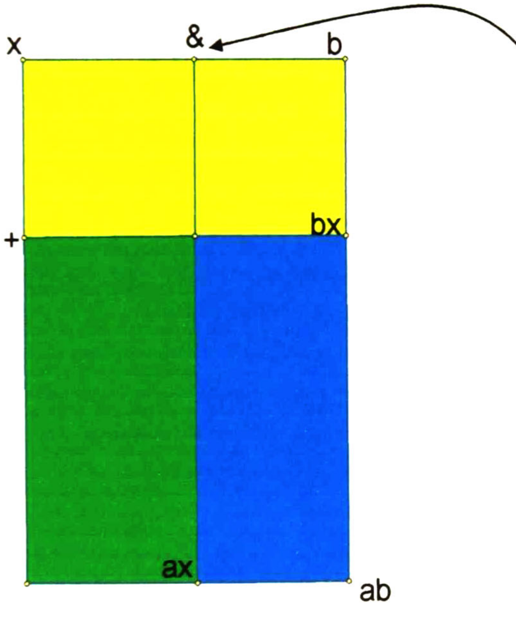
HOJA DE TRABAJO PARA EL INTERACTIVO DEARROLLADO EN EL PROGRAMA DE GEOMETRIA DINAMICA "SKETCHPAD"

"A formar rectángulos" (corresponde con la sesión 4 de la secuencia "Productos Notables)

Nombre del alumno____ Edad ____

Escuela ____ Fecha ______

En éste interactivo, apreciarás cómo se presentan las variaciones dinámicas con números enteros y fraccionarios, en el producto de un binomio con un término común, generalizado con la expresión algebraica: $(x+a)(x+b) = x + x(a+b) + ab$



Para operar el interactivo selecciona el punto + presiona el botón izquierdo del mouse, se abrirá un cuadro de diálogo, elige el comando *"animar el punto"*

Observa las variaciones que toman los valores de los segmentos *a* y *b* del rectángulo

Sugerencia: en el cuadro de dialogo del comando *animar el punto*, puedes modificar la velocidad con que se mueve el punto; modifícala para que puedas apreciar mejor las variaciones numéricas

Otra opción es que muevas manualmente el punto +, para que observes las variaciones de los valores

Anexo 7B: Diseño de los cuestionarios aplicados en las hojas de trabajo para *binomio con término común*, empleados en la toma principal de datos.

Observa con mucha atención los valores de los segmentos "x", "a", y "b" 1.- ¿Qué tipo de números son los valores de los segmentos $(x+a)$ y $(x+b)$?
2.- ¿Observas diferencias en los resultados de la igualdad $(x + a)(x + b) = x^2 + x(a+b) + ab$?
3.- ¿En qué momento el valor de la expresión x^2 tiene un valor de cero?
4.- ¿En qué momento las expresiones $(x+a)$ y $(x+b)$ tienen el mismo valor?
Escribe tus conclusiones y compara con tus compañeros

El jurado designado por el Departamento de Matemática Educativa, Unidad Distrito Federal del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, aprueba la tesis:

Productos notables en el sistema de Telesecundaria

que presenta **Noé Javier Ramírez Cruz** para su examen final de Maestría en Educación en Matemáticas el día 21 de septiembre del año 2011.

Dr. Eugenio Filloy Yagüe

Dra. María Teresa Rojano Ceballos

Dr. Armando Solares Rojas

Dra. Cristiane María Butto Zarzar