CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DE ESTUDIOS AVANZADOS DEL IPN

Unidad Distrito Federal

Departamento de Matemática Educativa

Habilidades y Conceptos de Cálculo en Estudiantes de Ingeniería Industrial en Hidalgo. Un Estudio Comparativo

Tesis que presenta

Román Hernández Genis

para obtener el Grado de

Maestro en Ciencias

en la especialidad de Matemática Educativa

Directora de la Tesis: **Dra. Rosa María Farfán Márquez**

México, Distrito Federal Junio de 2012

RESUMEN

En esta tesis, realizo un estudio comparativo sobre las diferencias y semejanzas que se presentan entre estudiantes de una misma carrera, en tres diferentes instituciones educativas, sobre el aprendizaje de los conceptos de función, límite y derivada. Pretendo ubicar tales aspectos a la luz de las ideas de la transposición didáctica.

Abstract.- *In this thesis, I carry out a comparative study concerning the similarities and differences presented between students of the same career, from three different institutions, about the learning of the concepts of function, limit, and derivative. I pretend to locate such aspects in the light of the ideas of didactic transposition.*

Dedicatorias:

A mis hijos Tania, Marcos y Héctor

A mi madre y mi padre, dondequiera que estén.

A mi familia toda.

A mis amigos y maestros.

ÍNDICE

CAPÍTULO I.

I. INTRODUCCIÓN

1.1. GENERALIDADES.

El complejo problema de la enseñanza-aprendizaje de matemáticas se ha dado en condiciones muy diversas dentro de los distintos niveles educativos del país. Variados estudios se han desarrollado a lo largo del siglo pasado, particularmente en los últimos 40 años, pretendiendo encontrar respuestas a interrogantes demasiado amplias en su espectro, y para situaciones muy heterogéneas. Los mayores esfuerzos iniciales se dieron en los niveles básicos y durante mucho tiempo la enseñanza de matemáticas en los niveles medio superior y superior no fue objeto de estudio por parte de los investigadores.

En las últimas tres décadas se han iniciado en varias partes del mundo trabajos de investigación que empiezan a proporcionar un cúmulo de conocimientos básicos sobre la compleja situación de dicha actividad, y preparando el terreno por el que habrán de transitar las futuras generaciones de investigadores educativos en esta área.

La enseñanza de matemáticas para estudiantes de ingeniería o de áreas afines, se ha tomado como reto por parte de un equipo de investigadores, formado desde hace más de tres décadas, y que actualmente labora en el Departamento de Matemática Educativa (DME) del Centro de Investigación y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional (Cinvestav-IPN).

Es en el seno de este equipo de trabajo académico que he recibido la formación inicial como investigador educativo en el área de la Matemática Educativa, y bajo su influencia académica que me he propuesto desarrollar el presente estudio.

En este trabajo pretendo desarrollar un estudio comparativo sobre las habilidades, conceptos e ideas que los alumnos de Ingeniería Industrial tienen sobre algunos temas centrales de la disciplina del Cálculo, en tres distintas instituciones de educación superior que radican en la ciudad de Pachuca, y que imparten dicha especialidad de la Ingeniería. Las instituciones donde habré de realizar este trabajo son: la Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo (UAEH), específicamente en su Instituto de Ciencias Básicas e Ingeniería (ICBI), el Instituto Tecnológico de Pachuca (ITP) y el Campus Hidalgo del Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey (ITESM).

He dividido este trabajo en seis capítulos, donde esta introducción es el primero de ellos. Aquí pretendo plantear una breve semblanza de las instituciones donde se desarrolla el trabajo, particularizando en los programas de Ingeniería Industrial que cada una de ellas ofrece.

En el segundo capítulo se describen la hipótesis de trabajo, el tipo de habilidades, conocimientos y conceptos que se pretenden comparar, la metodología empleada y el marco teórico que la sustenta, la población sobre la que el estudio se realiza, los programas de estudio vigentes para la materia de Cálculo, los objetivos generales y particulares que dichos programas persiguen y finalmente algunas diferencias manifiestas en las distintas instituciones.

Para el tercer capítulo se presentan los argumentos para seleccionar los reactivos que habrán de permitir el estudio comparativo, la constitución del cuestionario, su organización, la relación entre reactivos y las ponderaciones posibles que se asignen a cada uno de ellos.

En el cuarto capítulo se describen los procedimientos mediante los cuales se seleccionaron a los estudiantes participantes en este estudio, los criterios de discriminación, los tiempos para la aplicación del cuestionario y las consideraciones tomadas en relación a las diferencias cuantitativas de las muestras.

El análisis de los resultados de este estudio, se desarrolla en el quinto capítulo, inicialmente a partir de una estadística muy general de los resultados, y posteriormente entrando a un análisis más detallado sobre las coincidencias y diferencias presentes entre los alumnos de las distintas escuelas, y aún, en algunos casos, entre ellos mismos. Como he mencionado anteriormente este trabajo pretende elaborar un diagnósticos que nos permita identificar las habilidades adquiridas por estudiantes de la misma carrera, en tres diferentes instituciones de Educación Superior en el Estado de Hidalgo, y poder así realizar una comparación en términos de los propósitos explícitos expresados en los plantes y programas de estudio de dichas Instituciones, a la luz de los resultados de este estudio.

Para el sexto y último capítulo, planteo mis observaciones generales de esta experiencia, reflexiono sobre los procedimientos e instrumentos utilizados y presento mis conclusiones. En este sentido, y bajo la perspectiva de la Ingeniería Didáctica planteo las posibles líneas de trabajo que pudieran abordarse como continuación de este diagnóstico, cuestión que puede ser de interés para autoridades y académicos de las instituciones involucradas, con la perspectiva de definir líneas específicas de investigación en una posible colaboración interinstitucional.

I.2. SOBRE LA PERTINENCIA DE REALIZAR ESTE TRABAJO.

Para iniciar investigaciones en la disciplina de la matemática educativa en el Estado de Hidalgo, en particular relacionadas con las dificultades que se presentan en los estudiantes para la construcción de los conceptos centrales del cálculo, es preciso contar con un diagnóstico que pueda permitir abrir líneas de acción o de investigación posteriores, a partir de que se tienen expectativas sobre las posibles consecuencias del mismo, sujetas evidentemente a un proceso de validación mínimo, y estar en condiciones para preparar una propuesta de presentación en el aula y en los textos, para las carreras de ingeniería, de los contenidos matemáticos que requiere la currícula respectiva, dicha propuesta contempla la revisión crítica de los contenidos matemáticos a exponer en el aula, pues coincidimos con [Artigue, 1995] en que...

"La preparación de matemáticas para estudiantes no es concebida como un proceso de elementarizar el conocimiento en cualquier sitio, ni adaptarlo a un conocimiento previo y habilidades cognitivas del estudiante. Se le percibe como una tarea didáctica que requiere un mayor análisis global de carácter sistémico".

Específicamente abordaremos un diagnóstico para:

a) valorar las habilidades, conocimientos y concepciones que los estudiantes de la carrera de Ingeniería Industrial de las tres Instituciones de Educación Superior que la ofrecen en el Estado de Hidalgo, tienen del tipo de conocimiento respecto de tres ideas centrales en la enseñanza y aprendizaje del Cálculo:
    a. función
    b. límite
    c. derivada

lo cual podrá permitir contar con elementos más actuales y objetivos para la realización de un diagnóstico.

b) Comparar las concepciones y transferencia de registros en estudiantes que han terminado los correspondientes cursos de Matemáticas, de las diversas Instituciones y la misma especialidad a nivel superior, identificando algunas de las concepciones que los estudiantes de esta especialidad tienen, en la disciplina mencionada.
c) Ponderar la confiabilidad que puede proporcionar un cuestionario diseñado bajo concepciones distintas del tradicional examen escolar, a fin de tener un diagnóstico más preciso de las habilidades y conocimientos adquiridos por los alumnos.

I.3. INSTITUCIONES DE EDUCACIÓN SUPERIOR EN HIDALGO

Aunque en el Estado de Hidalgo actualmente existen un número ya considerable de instituciones de educación superior, mencionaré solamente a las tres más importantes: Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo (UAEH), en particular el Instituto de Ciencias Básicas e Ingeniería (ICBI) dependiente de la misma, el Instituto Tecnológico de Pachuca (ITP) y el Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey (ITESM), Campus Hidalgo, por varias razones:

i) Son las instituciones con más tiempo de haberse establecido en el Estado.
ii) Son las únicas que ofrecen las carreras de Ingeniería.
iii) Juntas reúnen a más de 95% del estudiantado de nivel superior en Hidalgo.

Son estas instituciones donde habré de realizar el presente trabajo.

Las instituciones donde este trabajo se desarrolló son tres, con la característica común de que en todas existe la carrera de Ingeniería Industrial, lo que permitió tratar de establecer un análisis comparativo descrito líneas arriba.

A continuación hago una breve descripción de dichas instituciones, centrando la atención en la carrera de interés para este trabajo.

I.3.1. Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo (UAEH).

Es la institución de nivel superior más antigua en el estado, pues aunque formalmente sólo tiene poco menos de 50 años de denominarse así, sus antecedentes se remontan hasta el año en que se funda el Estado de Hidalgo (1869), teniendo en ese entonces la denominación de Instituto Literario (y Escuela de Artes y Oficios) del Estado de Hidalgo, durante el mandato del presidente Juárez. En 1925 resurge después del periodo revolucionario con el nombre de Instituto Científico y Literario del Estado de Hidalgo, agregándosele en 1948 el carácter de Autónomo (a partir de entonces, denominado el

ICLA) concedido este último por el entonces gobernador Vicente Aguirre. Para ese momento la Institución ofrecía además de los estudios de bachillerato las carreras de Enfermería y de Obstetricia, esta última cambiada poco después por la de Trabajo Social, y los dos primeros semestres de las carreras de Derecho y de Medicina, estudios que debían concluirse en la UNAM.

Su denominación y estructura actuales se dan en medio de un proceso de crecimiento acelerado de la matrícula estudiantil a nivel nacional, y en el momento de dejar de ser ICLA, se reúnen algunas de las carreras que ya existían y se integran algunas otras entre ellas la de Ingeniería Industrial, cosa que ocurre en 1961, mediante la creación de la Escuela de Ingeniería Industrial y en septiembre de 1974 se crea el Instituto de Ciencias Exactas (ICE) con la carrera mencionada, agregándosele la carrera de Químico en junio de 1977.

Es importante señalar que la carrera de Ingeniería Industrial es de las carreras más antiguas en la UAEH. En el momento de realizar este estudio la Universidad contaba con 12 carreras de nivel superior, de las cuales cuatro formaban el ICE, Ingeniería Industrial, licenciado en Química, Ingeniería Minero-Metalúrgica y Licenciatura en Computación, estas últimas creadas a partir de una revisión curricular realizada en 1987 En ese momento, el ICE era el instituto con mayor número de carreras (4), de profesores (140) y de alumnos (1500) en la UAEH. Aproximadamente 400 de estos alumnos estaban inscritos en Ingeniería Industrial, en los 9 semestres que marcaba el plan de estudios.

La carrera de Ingeniería Industrial en la Universidad ha pasado por altibajos a lo largo de su historia. Cuando se dio un proceso de industrialización creciente en el estado, con establecimiento de corredores industriales en Ciudad Sahagún, Tula-Tepeji del Río, Tizayuca y parcialmente Pachuca, las expectativas laborales de estos egresados se fortalecieron aunque esto no se correspondió con un fortalecimiento de la estructura académico – administrativa de la carrera. Se dio en la práctica un estancamiento de planes y programas de estudio, falta de laboratorios o deficiencias en el equipamiento de los ya existentes, inexistencia de capacitación y actualización de su planta docente, crecimiento muy grande del aparato administrativo y en general una política que no permitió el fortalecimiento de la carrera desde el punto de vista académico-administrativo.

Después de haber realizado este estudio, se han realizado dos revisiones curriculares que trataron de actualizar contenidos y proporcionar una estructura acorde con el énfasis que nacionalmente se le ha estado dando a la modernización de la planta productiva y al incremento de la productividad.

A pesar de estar contenido en los planes de reestructuración de la carrera, no se equiparon adecuadamente los laboratorios, la profesionalización de la planta docente no avanzó a un ritmo constante y creciente y tampoco fueron muchos los profesores de medio tiempo, tiempo completo o por horas que realizaran estudios de posgrado, a raíz que se iniciaron los trabajos de revisión curricular en el ICE en 1993.

Para el área de matemáticas, se modificaron los contenidos de algunas materias, sin entrar en ningún caso a un análisis curricular que le dotara de mayor coherencia entre los contenidos de cada asignatura y las de otras correlacionadas horizontal o verticalmente. Por otro lado, se modificó su secuencia parcialmente y se le dio más énfasis al álgebra lineal, incrementando los contenidos de la asignatura, creando un curso específico que se ubicó en el primer semestre.

La licenciatura en Ingeniería Industrial que ofrecía el ICE tenía como asignaturas de matemáticas, las siguientes:

MATERIAS	SEMESTRE
1. Matemáticas I. Cálculo	Primero
2. Matemáticas II. Cálculo Vectorial	Segundo

3. Métodos Numéricos	Segundo
4. Matemáticas III. Ecuaciones Diferenciales	Tercero
5. Estadística	Cuarto
6. Matemáticas IV. Álgebra Lineal	Quinto
7. Probabilidad	Quinto

Como este estudio se centra sobre tres conceptos matemáticos que están contenidos en el curso de Matemáticas I, veamos cuál era el programa de dicha materia, tal y como se aplicaba desde 1985, aunque vale la pena mencionar que poco tiempo después se realizó una revisión curricular, que modificó algunos contenidos de esta materia, aunque los cambios no fueron significativos.

El programa sintético contiene:

UNIDAD	TEMAS	SUBTEMAS
I	Funciones	♦ Concepto de función. ♦ Desigualdades. ♦ Vecindad. ♦ Relaciones. ♦ Funciones. ♦ Clasificación de funciones. ♦ Gráficas de funciones.
II	Límites	♦ Definición de Límite. ♦ Interpretación Geométrica de un límite. ♦ Límites infinitos. ♦ Límites al infinito. ♦ Límites unilaterales. ♦ Límites bilaterales ♦ Límites especiales, el número *e*. ♦ Gráficas de funciones por medio de

		límites (asíntotas). ♦ Aplicaciones a la Ingeniería y a la Economía. ♦ Continuidad.
III	Derivada	♦ Definición. ♦ Interpretación Geométrica. ♦ La derivada como razón de cambio instantáneo. ♦ Diferenciabilidad y continuidad. ♦ Interpretación geométrica del diferencial. ♦ Fórmulas fundamentales de derivación. ♦ Aplicaciones de la derivada. ♦ Teorema de Rolle. ♦ Teorema del Valor medio. ♦ Orden de una derivada. ♦ Máximos y mínimos. ♦ Regla de la cadena. ♦ Regla de L'Hospital. ♦ Ejemplos en ingeniería y economía.
IV	Integral	♦ Definición de integración. ♦ Integración indefinida. ♦ Fórmulas principales de integración. ♦ Artificios de integración. o Por partes. o Por sustitución trigonométrica. o Otros artificios. ♦ Integración definida. ♦ Teorema fundamental del cálculo.

		♦ Teoremas sobre la integral definida. ♦ Aplicaciones. ♦ Integración en coordenadas polares.

La bibliografía recomendada para este curso, principalmente son los siguientes textos:

1. Portter/Morray, Calculus with Geometry. Addison-Wesley Publishing.
2. Pishkunov. Cálculo Diferencial e Integral. Ed. MIR-Moscú.
3. Leithold. Cálculo Con Geometría Analítica. Ed. Harla.
4. Courant. Introducción al Cálculo y al Análisis Matemático. Ed. Limusa.

El objetivo general marcado para este programa dice:
"Al terminar el curso, el alumno deberá ser capaz de aplicar la teoría del cálculo en el planteamiento y solución de problemas típicos en ingeniería"

I.3.2. Instituto Tecnológico de Pachuca (ITP).

El ITP fue fundado en 1971 en el inicio del sexenio de Luis Echeverría, periodo en el cual ocurriera la principal fase de expansión de la matrícula estudiantil en el nivel superior. Inicialmente su denominación fue Instituto Tecnológico Regional (ITR) No. 20, ya que respondía a un proyecto de la SEP de regionalización de la educación superior, y la atención de la educación tecnológica a nivel medio superior, con carreras de técnico en máquinas herramientas y en control de calidad. Este proyecto fue sustituido en 1986 por un programa que priorizaba la atención de necesidades de carácter estatal, en particular ante una tendencia de industrialización de algunas zonas del estado (a estas alturas en franco retroceso por la recesión y los despidos masivos), y trasladar la atención de la educación tecnológica a nivel medio superior hacia los Centros de Bachillerato Tecnológicos, Industrial y de Servicios (CBTIS) y los Centros de Bachillerato Agropecuarios (CBTA).

Conviene recordar que el Sistema de Institutos Tecnológicos tiene su origen a fines de los años 60's, como una extensión académica del IPN en el resto del país. Los Institutos Tecnológicos, son actualmente 74 en todo el país, los cuales atienden un poco más de 200,000 alumnos, formando una red que ofrece nacionalmente 17 carreras de Licenciatura (de las cuales 12 son ingenierías), 2 carreras de técnico superior, 9 especializaciones, 17 maestrías y 5 doctorados, atendidos por más de 11,000 docentes y cerca de 7,700 trabajadores de apoyo.

Es de señalarse que dentro del Sistema de Institutos Tecnológicos, el ITP ha estacado en los concursos internos de ciencias básicas, especialmente en el área de matemáticas, logrando varios de sus alumnos ocupar en distintas fechas los primeros lugares. Posteriormente varios de estos alumnos se incorporaron a la planta docente del Instituto.

El iniciar ITR No. 20 contempla la creación de dos carreras de nivel superior:

a) Ingeniero Industrial Mecánico.
b) Ingeniero Industrial Eléctrico.

Las cuales estuvieron vigentes a lo largo de 15 años, hasta que la revisión del proyecto diera lugar a la creación de carreras más definidas en el contexto tradicional de las antiguas profesiones existentes en el Politécnico, del cual se toman los principales parámetros académicos y organizativos.

Con el cambio del proyecto (década de los 80) aparecen las carreras de:

a) Ingeniero Mecánico.
b) Ingeniero Eléctrico.
c) Ingeniero Industrial.
d) Lic. En Administración de Empresas.
e) Ingeniero Civil.

Con el paso de los años se han creado tres nuevas carreras, y se liquidó el plan de la carrera de Lic. En Administración de Empresas (1991), sustituyéndose por la Licenciatura en Informática. Las nuevas carreras que funcionaban en el ITP en el momento de realizar este estudio eran:

f) Ingeniería Química en Procesos Industriales.
g) Arquitectura.
h) Lic. En Informática.
i) Ingeniería en Sistemas Computacionales.

Puede deducirse de lo anterior, que la carrera de Ingeniería Industrial en el ITP es de las más antiguas (aunque inicialmente tenía las modalidades de Industrial Mecánico e Industrial Eléctrico), pues fue de las fundadoras del plantel. A pesar de ello ha tenido y tiene mayores carencias que otras carreras de menor antigüedad, en particular en cuanto a laboratorios y número de alumnos se refiere, dado que al reestructurarse la oferta educativa del plantel, inicialmente sólo se crearon las carreras de Mecánica y Eléctrica, con sus departamentos académicos correspondientes.

90's, aunque aún está por definirse parte del proyecto en cuanto a la especialización de la planta docente y la implementación de las estancias industriales (que forman parte de la currícula), como parte de la revisión curricular realizada a fines de los 80's.

El departamento de Ingeniería Industrial fue creado en 1992, y aún así es el único departamento que en la historia del ITP ha realizado un Congreso Internacional de su especialidad (1994), y poco después (1996), realizó el segundo. En el momento del estudio contaba con cerca de 350 alumnos, distribuidos en los nueve semestres que integraban el plan de estudios.

Los planes de estudio de la Licenciatura en Ingeniería Industrial dentro de los Institutos Tecnológicos marca como asignaturas del área académica de Matemáticas, el siguiente cuadro:

MATERIAS	SEMESTRE
1. Matemáticas I. Cálculo.	Primero
2. Matemáticas II. Cálculo Vectorial.	Segundo
3. Matemáticas III. Álgebra Lineal.	Tercero
4. Matemáticas IV. Ecuaciones Diferenciales.	Cuarto
5. Estadística I.	Tercero
6. Estadística II.	Cuarto
7. Probabilidad.	Quinto
8. Métodos Numéricos.	Cuarto

- **I.3.3. Instituto Tecnológico de Estudios Superiores de Monterrey. Campus Hidalgo.**

El ITESM-Hidalgo fue fundado en 1989 bajo los auspicios de un grupo de industriales y empresarios hidalguenses que no veían en las dos Instituciones, hasta ese entonces existentes en el Estado, una alternativa educativa para sus propios hijos, ni para el tipo de dirigentes empresariales que ellos querían. Hasta la fecha el Patronato del ITESM-Hidalgo está presidido por uno de sus impulsores y fundadores, el cual es uno de los industriales de mayor antigüedad y presencia en el estado.

Como es de suponerse el proyecto académico de la institución está acorde con el ITESM a nivel nacional, aunque en el estado toma algunas características especiales por las circunstancias propias del entorno. Además del Bachillerato sólo se ofrecen 3 carreras terminales, es decir, que pueden cursarse completas en Hidalgo, ellas son:

a) Ingeniería Industrial.
b) Lic. En Administración de Empresas.
c) Lic. En Informática.

Adicionalmente pueden empezarse los primeros dos semestres de algunas carreras que comparten materias con las anteriores, para después continuarlas en otros Campus.

La carrera de Ingeniería Industrial en el Tecnológico de Monterrey ha tenido algunos problemas, especialmente por el reducido número de alumnos inscritos por un lado, y por otro, la falta de personal con maestría en el área, requisito para poder impartir clases en dicha institución a nivel superior, pero por otro lado sólo aquí existe un verdadero laboratorio de Ingeniería Industrial, donde se pueden encontrar incluso robots industriales para la realización de prácticas por parte de los alumnos.

Un eficiente programa de vinculación con los sectores productivos le garantizan una alta interrelación con los sectores industrial y de servicios, que por otro lado les permite tener un buen servicio de bolsa de trabajo para los alumnos egresados y un alto índice de titulación, al estar estos en contacto cercano con un considerable número de empresas, donde pueden realizar con cierta facilidad sus prácticas profesionales y el servicio social.

El programa de la materia de Matemáticas I para Ingeniería que se imparte en el ITESM contiene diez unidades de aprendizaje, que para propósitos de evaluación se dividen en cuatro períodos siendo los temas y subtemas contemplados los siguientes:

UNIDAD	TEMAS	OBJETIVOS ESPECÍFICOS
I	Funciones	♦ Definir función, dominio, imagen y gráfica. ♦ Clasificación de funciones. ♦ Evaluación numérica y algebraica de funciones. ♦ Modelos matemáticos. ♦ Composición de funciones. ♦ Traslación de funciones. $f(x+a)$ y $f(x)+a$. ♦ Funciones trigonométricas.
II	Límites y Continuidad	♦ Definición intuitiva de Límite de una función. ♦ Teoremas sobre Límites. ♦ Evaluación de límites. ♦ Límites infinitos y al infinito. Asíntotas. ♦ Continuidad en un punto. ♦ Tipos de Discontinuidades. ♦ Intervalos de discontinuidad.

		♦ Teoremas sobre continuidad. ♦ Teorema del valor intermedio.
III	Derivación	♦ Establecer concepto de razón de cambio. ♦ Derivada de una función en un punto. ♦ Derivada unilateral. ♦ Teoremas sobre la derivada. ♦ Derivación de funciones ♦ Demostración de límites especiales. ♦ Derivadas de funciones trigonométricas. ♦ Regla de la Cadena. ♦ Ecuaciones de recta tangente y normal. ♦ Derivadas de orden superior. ♦ Diferenciales. ♦ Aplicación del concepto de diferencial.
IV	Aplicaciones de la derivada.	♦ Velocidad y Aceleración. ♦ Máximos y Mínimos. ♦ Extremos relativos y absolutos. ♦ Funciones crecientes y decrecientes. ♦ Concavidad de una curva. ♦ Trazado de la gráfica de una función. ♦ Problemas de aplicación de máximos y mínimos.

V	Integración	♦ Antiderivada. ♦ Fórmulas de integración básicas ♦ Antiderivadas de funciones trigonométricas. ♦ Regla de la cadena para antiderivadas. ♦ Propiedades de las sumatorias. ♦ Área bajo la curva mediante sumatorias. ♦ Integral definida. ♦ Noción intuitiva de función integrable. ♦ Propiedades básicas de la integral definida. ♦ Teorema fundamental del cálculo.
VI	Aplicaciones de la integral definida.	♦ Cálculo de área bajo la curva ♦ Volumen de un sólido de revolución.

VII	Funciones trascendentes y sus inversas.	♦ Función restricción del dominio para que una función sea inyectiva. ♦ Inversa de una función inyectiva. ♦ Gráfica de la inversa. ♦ Derivada de la función inversa. ♦ Derivadas de funciones trigonométricas inversas y sus respectivas antiderivadas. ♦ Función logaritmo natural.. ♦ Propiedades del logaritmo natural. ♦ Función exponencial. ♦ Propiedades de la función exponencial. ♦ Gráficas, derivada e integral de las funciones logaritmo y exponencial. ♦ Derivación logarítmica ♦ Problemas de aplicación. ♦ Integrales de *tanx*, *cotx*, *secx* y *cscx*. ♦ Funciones hiperbólicas. ♦ Derivadas e integrales de funciones hiperbólicas.
VIII	Métodos de Integración	♦ Integración por partes. ♦ Integrales trigonométricas. ♦ Integración por sustitución trigonométrica. ♦ Integración por fracciones parciales. ♦ Sustitución trigonométrica de ángulo medio.

IX	Formas indeterminadas e integraciones impropias.	♦ Formas indeterminadas. 0/0 e ∞/∞ ♦ Regla de L'Hopital ♦ Integrales impropias.
X	Coordenadas polares.	♦ Sistema de coordenadas polares. ♦ Conversión de ecuaciones de cartesianas a polares y viceversa. ♦ Simetrías en coordenadas polares. ♦ Graficar ecuaciones en coordenadas polares. ♦ Área entre dos curvas en coordenadas polares.
XI	Sucesiones y series.	♦ Sucesión de números reales. ♦ Convergencia de una sucesión. ♦ Sucesión geométrica. ♦ Sucesiones crecientes, decrecientes, monótonas y acotadas. ♦ Serie infinita y sucesión de sumas parciales. ♦ Convergencia de una serie. ♦ Serie geométrica. ♦ Operaciones con series convergentes. ♦ Criterios de convergencia. ♦ Series alternantes. ♦ Convergencia absoluta y condicional. ♦ Series de potencias de *(x-a).* ♦ Radio e intervalo de convergencia. ♦ Representar una función en serie de Taylor o de McLaurin.

La bibliografía recomendada para este curso son los siguientes textos:

1. Zill, Cálculo con Geometría Analítica. Grupo Editorial Iberoamérica.
2. Leithold, El Cálculo, Ed. Harla. 6ª Edición.
3. Ayres; Matrices. Serie Schaum, McGraw Hill.

CAPÍTULO II. EL PLANTEAMIENTO DEL ESTUDIO

2.1. MARCO TEÓRICO

Los problemas que han dado origen a las matemáticas en lo general, y al Cálculo en lo particular son muy antiguos. Los problemas de la enseñanza masiva de estos mismos temas son mucho más recientes, sobre todo después de que a escala mundial se ha dado una explosión en la demanda de educación media superior y superior, donde el Cálculo juega un papel importante.

Investigadores de los más diversos estilos y nacionalidades han venido trabajando en primer lugar sobre el planteamiento adecuado del problema.

Cada uno de estos conceptos interrelacionados con los demás, con un gran número de problemas intrínsecos, tal y como lo reportan investigadores del Psychology of Mathematics Education International Group:

1. "Los estudiantes aprenden procedimientos del Cálculo (encontrar límites, diferenciación, etc.) en un nivel puramente algorítmico, que es construido sobre imágenes conceptuales escasas"

2. "La visualización es poco común, y si ocurre, el vínculo cognitivo entre las representaciones visual-gráfica y la analítico-algebraica es un punto de mucha dificultad" [Dreyfus, 1987].

Esta escasez de referentes gráficos no sólo es una deficiencia del aprendizaje en el cálculo, sino que puede representar un serio obstáculo en la construcción de modelos para la resolución de problemas en Ingeniería. Es común encontrar que las presentaciones que se hacen del Cálculo en el ámbito del aula, hagan excesivo énfasis en los aspectos algebraicos, dejando de lado los acercamientos gráfico y numérico o en el mejor de los casos otorgándoles escasa importancia.

Esto último se explica parcialmente porque el Cálculo en su proceso de formalización, a fin de incrementar el rigor de las definiciones, tuvo que prescindir cada vez más de los enfoques gráfico y numérico.

Nuestro diagnóstico constituye el estudio cognitivo para completar el análisis preliminar de una Ingeniería Didáctica en el sentido de Artigue [Artigue, 1995]. La Ingeniería Didáctica vista como una metodología de investigación [Farfán, 1994], considera los siguientes aspectos:

La Epistemología.

La Componente Cognitiva.

Didáctica.

El primero de ellos nos debe permitir diferenciar entre el saber científico y el que se enseña en el aula, entre las necesidades que tiene la matemática misma y las que tiene la didáctica, sobre todo a partir de una historia del desarrollo de los conceptos matemáticos que nos evite el observarlos como verdades "en sí mismos"

El segundo aspecto, permite resolver las necesidades de que un mismo objeto matemático puede ser abordado desde puntos de vista diversos, y por otro el que el discurso dentro del aula es una comunicación (la cual en nuestro momento es masiva), que si de algo carece es de transparencia, por lo que siempre existen diferencias entre lo que el profesor expone y la imagen que el alumno construye.

No olvidemos que el discurso matemático actual (el que aparece por ejemplo en los textos), es el resultado de un inmenso trabajo de síntesis, que no refleja para nada las enormes dificultades por las que atravesaron generaciones completas de matemáticos y especialistas en otras disciplinas, que requirieron de desarrollar ideas matemáticas, sin otra fuente de inspiración que sus intuiciones, y que después de un gran número de ensayos y errores, llegaron a un producto "acabado" donde las dificultades previas han sido superadas de manera nada sencilla. Generalmente tales dificultades no aparecen a la hora de presentarlas al estudiante. Si esperamos que los alumnos sean capaces de acercarse a estos conceptos de una manera lineal, exenta de tropiezos, pues entonces estaríamos ignorando las experiencias que nos proporciona la historia de las ideas científicas.

Luego entonces existe un "Saber Enseñable" bajo la óptica de la teoría de la *Transposición Didáctica*, consistente esta última en un proceso ineludible y un conjunto de variables que intervienen en el tránsito del conocimiento científico al que es susceptible de ser enseñable, el cual a su vez, es diferente del enseñado realmente. [Farfán, 1995]

Quién es responsabilizado de diseñar un currículum olvida que sus decisiones no son objetivas, pues no basta que elija deliberadamente, sino que él mismo es parte del fenómeno de pérdida de conciencia, que ocurre en la sociedad como producto de factores ideológicos inherentes a ella.

Ha sido en el seno de la escuela francesa, desde los inicios de la década pasada que surgió la teoría de la Transposición Didáctica y de las Situaciones Didácticas que fundamentan la propuesta metodológica de la Ingeniería Didáctica, la cual, a semejanza de todas las ingenierías, se apoya en resultados científicos e involucra la toma de decisiones y el control sobre todas las componentes del proceso.

Desde estas perspectivas, el diseño de contenidos y la exposición de conceptos matemáticos para estudiantes no es sinónimo de "bajar el nivel" de dichos conceptos, o de volverlos elementales para adaptarlos a sus conocimientos previos y las habilidades cognitivas que ya posean, sino es necesario asumirlos como una tarea dentro de la didáctica que requiere de un mayor análisis global y un carácter riguroso y sistemático.

Una pregunta siempre presente entre grupos de profesores en ejercicio, es ¿qué tanto han olvidado nuestros alumnos ciertos conceptos clave vistos en los cursos básicos?

Pero para poder intentar dar una mediana respuesta a la pregunta anterior, es necesario precisar qué entendemos por conceptos clave, ¿qué permite calificarlos como tales?

Para poder pensar en tales aspectos centrales del aprendizaje matemático, es necesario no olvidar el carácter de lenguaje que posee la matemática y que nos puede permitir crear modelos, en donde los problemas de la Ingeniería pueden plantearse y resolverse de formas distintas, generalmente en forma más sencilla, más generalizadora y sobre todo de manera abstracta.

Si en los problemas que la Ingeniería plantea, podemos recurrir a un modelo matemático, es muy factible que dicho problema esté en vías de una solución, al menos aproximada; pero para que esto suceda, el usuario de la matemática deberá ser capaz de "ligar" el lenguaje matemático con el problema en cuestión, y esto puede suceder si dicha persona tiene clara la relación entre las teorías que gobiernan el fenómeno; particularmente, para el objetivo de este trabajo, los cambios en una o varias variables dependientes se presentan en relación a una o varias independientes.

Ante tales cuestiones podemos plantear los elementos que nos interesaría investigar, para poder decir que un individuo tiene los elementos básicos que le permitan acceder a un modelo matemático en situaciones de variación, a saber:

a) Concepto de Función.
b) Concepto de Límite.
c) Concepto de Derivada.

El primero de ellos, el concepto de función, tan oscuro en el terreno de las definiciones que ofrecen los textos (precisamente por lo que decíamos anteriormente de las necesidades de rigor que la matemática ha debido construir); dicho concepto ha superado una serie de tropiezos, lo cual ha permitido llegar a una idea mucho más general y por lo mismo más abstracta. Sin embargo para los problemas que la ingeniería plantea, es de particular importancia que el estudiante pueda llegar a formular, en cualquiera de sus representaciones, la función que existe entre las variables en juego para una situación particular, ya sea para una relación directa entre dichas variables puestas en juego para una situación particular, o como en muchos casos ocurre, en relación a las variaciones presentes en un fenómeno dado.

El segundo concepto, el de límite, tiene importancia para crear las imágenes de la acumulación de una variable respecto de otras (integración), a partir de elementos diferenciales agregados continuamente, o de la variación instantánea de una magnitud real o compleja, escalar o vectorial, que ha sido históricamente la aplicación del diferencial para la resolución de un problema mediante ecuaciones diferenciales.

El énfasis algorítmico que se ha dado a este concepto ante lo abstracto que resulta la definición formal (épsilon-delta), impide muchas veces que el estudiante pueda relacionar los tres conceptos aquí señalados.

Finalmente el tercero de los conceptos considerados para realizar este trabajo, el de la derivada, sintetiza desde el punto de vista de sus aplicaciones a problemas de ingeniería, la utilidad de esta rama matemática, a fin de construir un modelo que represente una situación de variación.

Estas consideraciones pueden llevarnos a extendernos en nuestras pretensiones de investigar en una población concreta, los aspectos a considerar, y por lo mismo a perdernos en objetivos demasiado generales o muy ambiguos.

Por ello centraremos nuestra atención en los aspectos:

I. Gráfico.

II. Numérico

III. Algebraico

Dado que no es posible observar directamente los procesos mentales que tienen lugar en el cerebro de un estudiante, la matemática educativa plantea el concepto de la investigación cognitiva, la cual parte de datos sobre dichos procesos mentales, con los que después se elaboran explicaciones que posibilitan una determinada comprensión lógica de los fenómenos que ocurren en el pensamiento del estudiante al enfrentar un concepto matemático [Cantoral, 1995]. En particular para el Cálculo, la investigación cognitiva busca proporcionar tanta información empírica como sea posible sobre los aspectos propios del aprendizaje de dicha disciplina.

Localizar donde se producen las dificultades de aprendizaje para poder estar en condiciones de elaborar una teoría y finalmente proponer un tratamiento remedial, sería el objetivo de dicha investigación. Como decíamos anteriormente, los aspectos algebraicos han sido prioritarios en la enseñanza del Cálculo, y luego de una serie de investigaciones se ha podido determinar que los conceptos de función y límite, presentan un alto nivel de dificultad cognitiva para la mayoría de los estudiantes, lo cual no es tan elemental de poner en evidencia, sino que es necesario recurrir a entrevistas o la resolución de cuestionaros, que nos provean de los datos necesarios a fin de realizar un diagnóstico.

Para ello es necesario plantearle al alumno actividades que nos permitan obtener datos empíricos, y normalmente tales actividades son cuestionarios, al intentar diagnosticar el conocimiento adquirido por un grupo de estudiantes más o menos numeroso, dado que las entrevistas clínicas u otro tipo de instrumento requiere de aplicarse a muy pocos alumnos.

Es decir, nuestra investigación es un diagnóstico sobre concepciones de los estudiantes y la transferencia de registros que hacen en tres temas centrales del curso de Cálculo.

2.2. EL ESTUDIO.

El estudio que desarrollo en este trabajo se realiza con estudiantes de tres diferentes instituciones pero de la misma disciplina, la Ingeniería Industrial, con tres ideas centrales asociadas al cálculo y cada una de ellas en tres ámbitos de desempeño matemático, el gráfico, el numérico y el algebraico.

¿Por qué tres instituciones distintas?

2.3. HIPÓTESIS DE TRABAJO

La hipótesis de trabajo con la que se realizará el presente estudio, es de que independientemente del tipo y del nivel académico que tenga una institución de estudios superiores, existen dificultades intrínsecas en los saberes matemáticos que entorpecen el adecuado desempeño de los estudiantes en su proceso de apropiación de los mismos, que dichas dificultades pueden localizarse principalmente en la construcción de imágenes conceptuales [Vihner y Tall, 1985] claras y coincidentes con los conceptos matemáticos en juego y que es posible detectarlas y estudiarlas cuando el alumno intenta transitar entre los ambientes gráfico, numérico y algebraico. Todas estas dificultades de construcción de imágenes conceptuales y de tránsito entre los distintos ambientes matemáticos, son semejantes entre estudiantes de una misma disciplina, pero de diversas instituciones educativas.

¿Por qué éstos ámbitos?

De acuerdo con Duval [Duval, 1999] podemos afirmar que en la enseñanza de matemáticas se requiere que los estudiantes transiten entre los distintos ámbitos en que se puede manifestar un determinado concepto, para que podamos afirmar que el proceso enseñanza-aprendizaje ha tenido éxito. Si existen dificultades de tránsito entre dichos ámbitos, eso nos revela que las imágenes conceptuales formadas en la mente del alumno son incompletas o parcialmente erróneas.

En el cuestionario diseñado para la realización de este estudio, hemos incluido reactivos que se ubican o transitan en los tres ámbitos referidos, aunque no fueron clasificados de acuerdo con ese criterio, sino con relación a los conceptos matemáticos ya señalados.

2.3. DISEÑO DEL INSTRUMENTO.

Proponemos un conjunto de 12 reactivos para formar un cuestionario, que pueda ser contestado por la totalidad de los alumnos de la muestra, en un tiempo no mayor a 40 minutos. En ellos se plantean problemas que tienen que ver con el tipo de imagen conceptual que los estudiantes conservan después de haber terminado los cursos regulares de matemáticas que tienen el Cálculo como contenidos centrales, es decir Cálculo Diferencial e Integral, Cálculo Vectorial y Ecuaciones Diferenciales.

En la carátula del cuestionario se le pide al alumno que ponga sólo sus iniciales, su edad, que indique su sexo, la institución donde estudia y el semestre que cursa.

Dicho cuestionario (ver anexo) está dividido en tres partes, la primera contiene cuatro reactivos sobre el concepto de función. Para principiar se le indica al alumno que el cuestionario no tiene propósitos de evaluación de él en lo personal ni de la carrera o la institución a la que pertenece, que las respuestas pueden involucrar aspectos gráficos, numéricos o algebraicos, pudiendo utilizar el que le parezca más conveniente y más de uno si lo considera necesario. Verbalmente se les indica utilizar lápiz, que pueden usar calculadora sin graficadora y que de ser necesario realicen operaciones en la parte trasera de las hojas del cuestionario.

CAPITULO TRES. EL INSTRUMENTO DE MEDICIÓN.

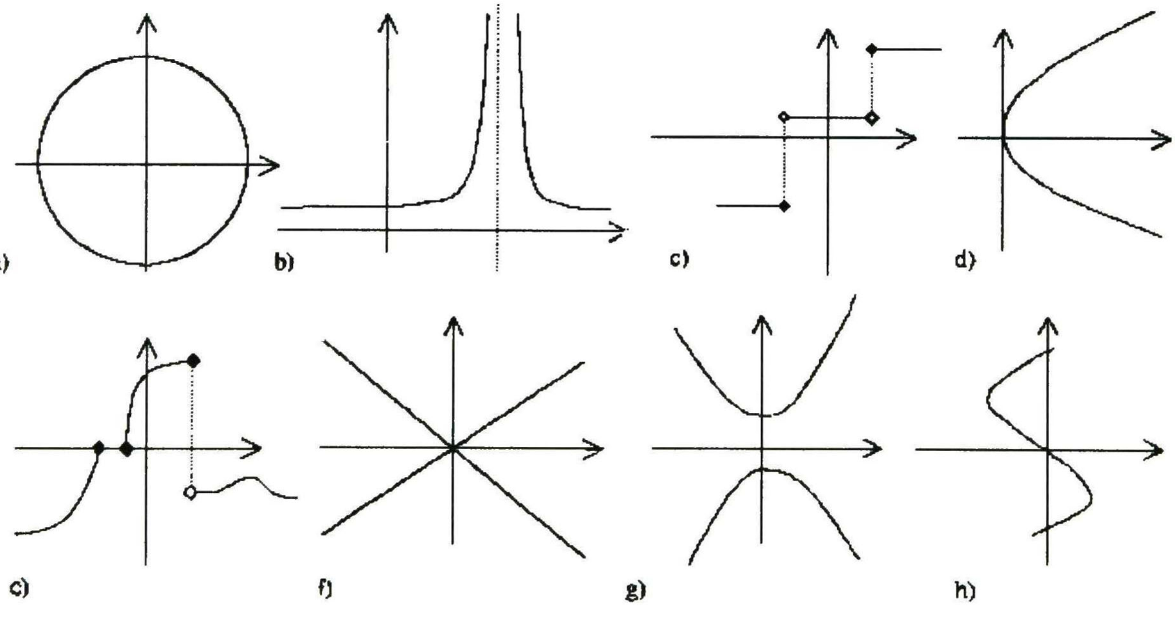
3.1 LOS REACTIVOS. SELECCIÓN Y DISEÑO.

En el cuestionario diseñado para la realización de este estudio, hemos incluído reactivos que se ubican o transitan en los tres ámbitos referidos en el capítulo anterior, aunque no fueron clasificados de acuerdo con ese criterio, sino con relación a los conceptos matemáticos ya señalados.

Proponemos un conjunto de 12 reactivos para formar un cuestionario, que pueda ser contestado por la totalidad de los alumnos de la muestra, en un tiempo no mayor a 40 minutos. En ellos se plantean problemas que tienen que ver con el tipo de imagen conceptual que los estudiantes conservan después de haber terminado los cursos regulares de matemáticas que tienen el Cálculo como contenidos centrales, es decir Cálculo Diferencial e Integral, Cálculo Vectorial y Ecuaciones Diferenciales

3.2 LA ORGANIZACIÓN DEL CUESTIONARIO

Reactivo No. 1.- Algunas de las siguientes gráficas no son funciones, indícalas:



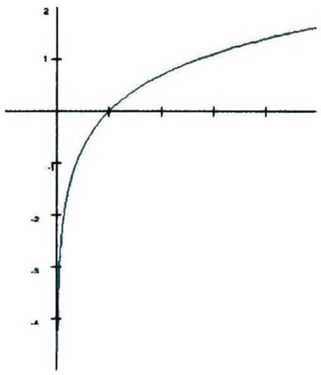
Reactivo No. 1. Este primer reactivo se ubica entre los del tipo Algebraico – gráfico, ya que plantea al alumno que partiendo de su definición de función, sea capaz de reconocer la gráfica de las que son o no son funciones. Se desea indagar, en primer lugar, si los alumnos identifican visualmente una función de variable real. Se presentan ocho gráficas distintas, algunas de ellas discontinuas, y se le pide indicar cuáles de ellas <u>no</u> son función, con este número de gráficas se pretende evitar que una posible respuesta correcta sea producto del azar.

En este reactivo los incisos a), d) f) g) y h) son las respuestas correctas al mismo, mientras que en los casos restantes se muestran gráficas de funciones que presentan dos características básicas, o son continuas por intervalos (inciso b) o son discontinuas (incisos c y e).

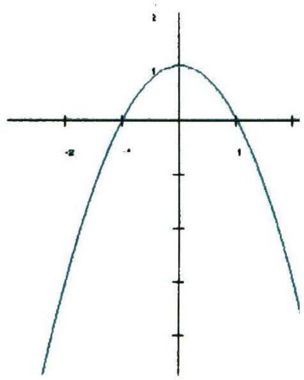
Este tipo de funciones se han propuesto con el propósito de determinar si el concepto de función que el alumno ha construido, es el correcto, o tiene algunas confusiones típicas que aparecen en el proceso de construcción del mismo. Las gráficas de las que sólo son relaciones fueron escogidas entre imágenes mas o menos comunes, como la circunferencia, la parábola, dos rectas cruzadas, la hipérbola o una senoidal inversa.

Reactivo No. 2. Coloca en el paréntesis de cada gráfica la letra que corresponda a la expresión que represente a cada función.

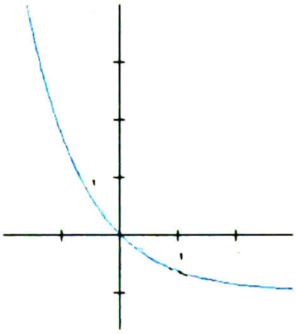
a) $f(x) = -x^2 + 1$
b) $f(x) = 1/(x-1)$
c) $f(x) = \ln x$
d) $f(x) = x\,(x+3)\,(x-2)$
e) $f(x) = e^{-x} - 1$
f) $f(x) = \lvert x - 3 \rvert$



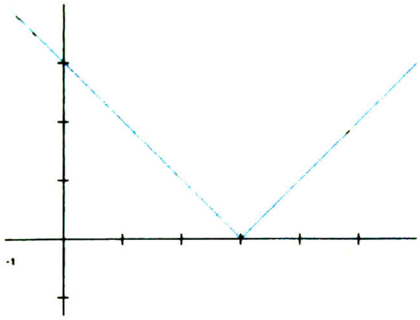
( )



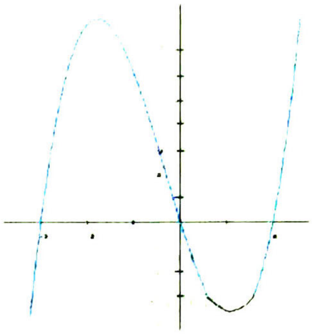
( )



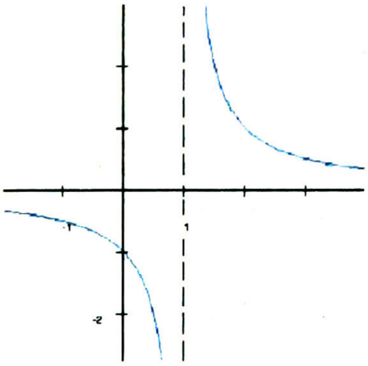
( )



( )



( )

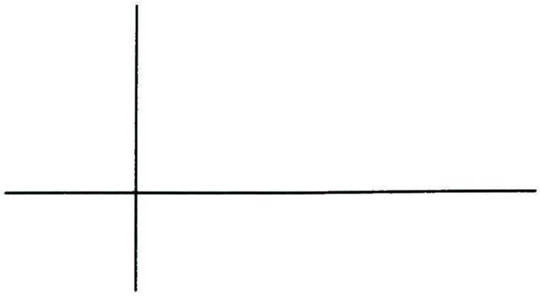


( )

En el segundo reactivo se presentan las gráficas de seis funciones, a fin de que identifique su correspondiente expresión algebraica. Todas las funciones presentadas corresponden a diferentes tipos, habiendo considerado una función cuadrática cuyas raíces son reales e identificables, una cúbica cuya expresión polinomial está factorizada, una función lineal con valor absoluto, una racional con una única asíntota vertical, la función logaritmo natural y una función exponencial desplazada.

Se pretende determinar que tan desarrollada es la referencia visual de los alumnos respecto de las funciones usuales en los textos, o que al menos utilice algunas estrategias de evaluación de las funciones para ubicar cual es la expresión que le corresponde, es decir una referencia numérica como auxiliar.

Reactivo No. 3.- Dibuja el esquema de una función que tenga como dominio los reales positivos y como contradominio (rango) a todos los números reales.



En el tercer reactivo se le pide al alumno que haga el esquema de una función que cumpla con los siguientes requisitos: a) Que su dominio sean todos los reales positivos y b) Que su contradominio sean todos los números reales. Para ello se le proporcionan un par de ejes coordenados. El objetivo de este ejercicio es observar si el estudiante tiene claras las ideas respecto de dominio y contradominio, y además la pregunta es lo bastante libre como para observar en la respuesta si busca graficar una función ya conocida, o simplemente recurre a una línea sin referencia a su expresión algebraica.

Esperaría en general que el alumno tenga dificultades para imaginar una función arbitraria que cumpla con las condiciones del enunciado, y que por lo tanto sólo sea capaz de generar la gráfica de una función que cumpla parcialmente con ellas.

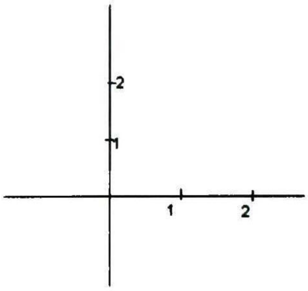
Reactivo No. 4.- Escriba la expresión algebraica que represente la siguiente función y/o dibuje la gráfica respectiva.

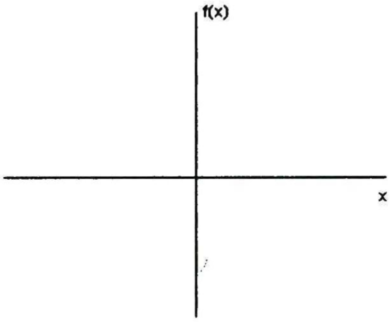
> Un campo petrolero que contiene 20 pozos, ha estado produciendo 4000 barriles diarios de petróleo, es decir cada pozo produce un promedio de 200 barriles diarios. Por cada nuevo pozo que es perforado, suponga que la producción diaria de cada uno disminuye 5 barriles.
>
> a) Exprese la producción diaria del campo petrolero en función del número x de pozos nuevos que se perforan.
>
> b) Si el precio de cada barril es de 10 dólares, exprese el ingreso que produce dicho campo petrolero en función del número z de pozos totales perforados.

La cuarta pregunta es la última del tema de función, y ahí se proporciona al alumno el enunciado de un problema con pozos petroleros. Se pide al alumno que obtenga la expresión algebraica y/o que dibuje la gráfica que represente en el primer inciso la producción petrolera en función del número de pozos nuevos y en el segundo el monto de los ingresos en función del número de pozos totales. Es de observarse que en cada inciso de este problema, la variable independiente es diferente. El problema se ubica en el terreno donde típicamente los alumnos tienen normalmente más dificultades, que es el de lograr construir una abstracción que permita crear un modelo matemático. El enunciado inicial sugiere que no necesariamente se tiene que obtener sólo la expresión algebraica, cosa que si se le dificulta al estudiante, se esperaría que intentara asignar algunos valores al número de pozos para obtener puntos de la gráfica y así poder esbozarla al menos.

Es de esperar que los alumnos tengan serias dificultades para generar la expresión algebraica que representa la situación del problema planteado en los dos incisos, y que algunos optarán por una estrategia numérica que les permita esbozar una gráfica al menos.

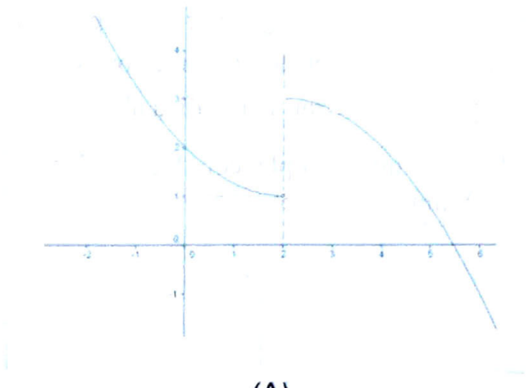
Reactivo No. 5.- Dibuja el esquema de una función que cumpla con las siguientes expresiones: a) $\lim_{x \to 1} f(x) = 2$ b) $\lim_{x \to 0} f(x) = -\infty$



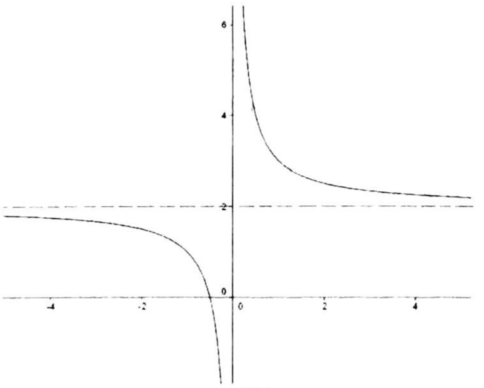


El reactivo número cinco inicia el tema referente al límite, planteando dos pares de ejes coordenados, para que en cada uno de ellos el alumno dibuje el esquema de una función que tiene, en el primer caso límite igual a 2 cuando x tiende a 1, y en el segundo el límite es infinito negativo cuando x tiende a cero. Para observar como los alumnos visualizan el concepto de límite, en el caso de que exista (primer caso), y de que no exista (segundo caso), es que se le pide que haga una gráfica que represente cada uno. Para el primer caso, esperaría que el alumno pudiese manejar alguna de las dos situaciones posibles, el de una función continua en el punto (1,2), o el de una función con discontinuidad de punto faltante o de discontinuidad removible en ese lugar. Interesa ver si los algoritmos usados para evaluar límites permiten al alumno tener una imagen gráfica del concepto. Habría que cruzar la información de este reactivo con el número siete, donde se pide calcular un par de límites, para evidenciar si esto último sucede.

Reactivo No. 6.- A partir de las gráficas siguientes



(A)



(B)

(A) Determina el valor del límite de la función cuando x tiende a 2.

(B) Determina el valor del límite de la función cuando x tiende a + ∞

La pregunta número seis es semejante a la anterior, sólo que está planteada al revés, es decir, ahora se proporciona la gráfica de un par de funciones discontinuas, y se pide al estudiante que a partir de ellas indique el valor del límite en ese lugar. Como en muchos otros tipos de problema, el invertir la pregunta puede producir dificultades adicionales que no se presentarían en el otro caso, particularmente porque en los textos no es común esta segunda forma de plantear la pregunta.

En el primer esquema, donde los límites unilaterales son distintos, es de esperarse que los alumnos tengan mayores dificultades que en el segundo esquema, donde el límite sí existe, aunque la presencia deliberada de una discontinuidad al infinito, juega el papel de distractor, pues el límite solicitado es precisamente cuando ***x*** tiende a infinito.

Reactivo No. 7 La pregunta siete, como ya habíamos anticipado, le solicita al alumno el cálculo o la determinación de un par de límites. El primero resoluble fácilmente por medio de la factorización y simplificación de la función, aunque el resultado queda en forma de fracción, lo cual puede inducir a error. En cambio el segundo no es resoluble por ninguno de los procedimientos comunes en los textos para el cálculo de límites, y esperaría observar por parte del alumno el uso de alguna otra estrategia, ya sea la numérica y/o la gráfica para aproximar el valor del límite, como se sugiere en el enunciado del reactivo, el cual aproximadamente es 0,1353352 o sea $1/e^2$ El propósito de plantear este límite en particular era que no pudiese el alumno determinarlo por medio de los algoritmos tradicionales que se emplean en un curso de cálculo, y por lo tanto se tenga que recurrir a otra estrategia.

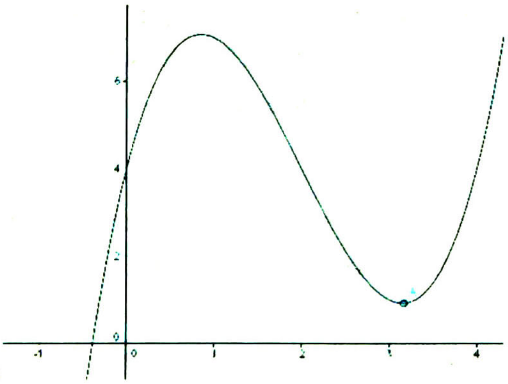
Reactivo No. 8.- En el reactivo número ocho, se le solicita al estudiante el límite de una serie convergente, aunque se le plantea como calcular el valor de una suma cuando el número de términos tiende a ser infinito, y para ello se sugiere emplear una expresión algebraica formada por los n primeros términos. Pretendo observar varias cosas, en primer lugar, el hecho de reconocer la serie de la que se pide calcular su valor, como el límite de la expresión dada, cuando $x = 1/2$ y además $n \to \infty$, si la expresión no le sugiere la forma de obtener el resultado, esperaría ver si el alumno intenta obtener un valor aproximado mediante el cálculo de la expresión para valores crecientes de n, lo cual podría acompañarse de una gráfica. Esto evidentemente plantea dificultades aún mayores pues no resulta desconocido que en este tipo de problemas, muchas veces el alumno tiene serias reservas acerca de que una serie tenga límite, precisamente por su carácter de infinita. Aún así, el hecho de que el enunciado del reactivo indica que hay que determinar el valor de la suma cuando $n \to \infty$, presupone para muchos alumnos el que existe, aunque no sepan el procedimiento para encontrarlo.

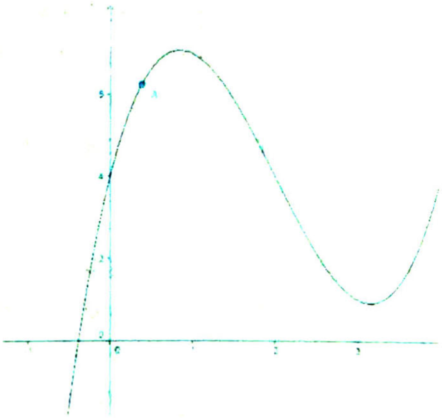
Reactivo No. 9.- Con la pregunta número nueve iniciamos el tema de derivada, y la que escogí es lo bastante general como para esperar que el alumno tenga muchas opciones para responder, aunque lo suficientemente precisa el cuanto a que me refiero a la relación que existe entre el concepto de derivada y el de límite. Con esta pregunta pretendo constatar que tanto el alumno "ve" la relación entre estos dos conceptos, o si por el contrario, el excesivo énfasis que se le da al aspecto algorítmico en el cálculo de límites, acaba por esconder a sus ojos el hecho de que la derivada no es otra cosa que un límite.

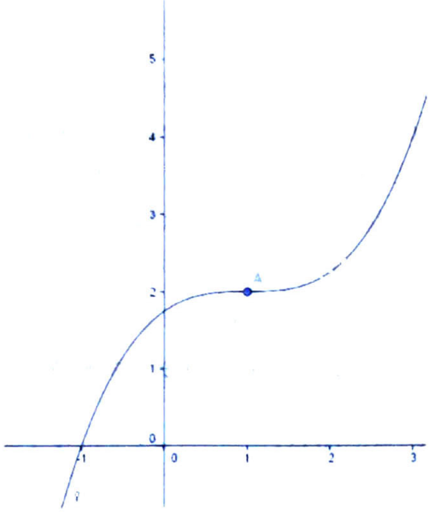
Reactivo No. 10.- Este reactivo, trata de evidenciar si los significados geométricos de la primera y segunda derivadas de una función están claros para el alumno. En él se pide al individuo participante, que grafique de manera aproximada, el tipo de puntos que se presentan en la gráfica de una función, si se conocen los signos de la función, de la primera y de la segunda derivadas evaluadas en un punto determinado. Para tal efecto, se plantean tres diferentes casos, en el inciso a) se le pide que grafique una función donde $f(x)$, $f'(x)$ y $f''(x)$ son todas positivas; en el inciso b) que haga el esbozo de gráfica de una función donde $f(x)$ es positiva, $f'(x)$ es cero y $f''(x)$ es negativa, y finalmente en el inciso c) se le pide algo semejante, solo que con $f(x)$ negativa, $f'(x)$ positiva y $f''(x)$ igual a cero.

En general se considera como conocimiento básico planteado en todos los cursos de cálculo el significado geométrico de la primera y segunda derivadas, pero es de esperarse que el alumno, por la mecanización del procedimiento para la ubicación de puntos críticos o de inflexión y determinar de que tipo son, pierda de vista, posiblemente por no hacerse el suficiente énfasis en ello, la relación entre estos conceptos. Por tal motivo esta pregunta se plantea fuera del contexto de una función en particular, y además para observar si se logra integrar los tres valores en la idea de un cierto tipo de punto, en la gráfica de una función y su ubicación respecto de los ejes.

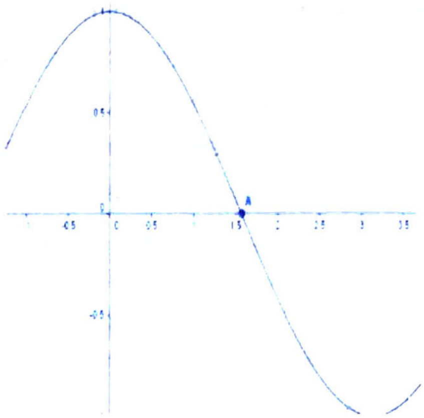
Reactivo No. 11.- Para cada punto A marcado sobre la gráfica indica si $f(x)$, $f'(x)$ y $f''(x)$ son positivas, negativas o tienen valor cero.

a) 

b) 



c)



d)

La pregunta número once, maneja los mismos elementos de la anterior sólo que ahora se proporciona la gráfica de una función y se señalan cuatro puntos; un mínimo relativo, un punto donde la función es creciente, un punto de inflexión que al mismo tiempo es crítico, y por último, otro que solo es de inflexión. se le pide al estudiante que indique si la función, la primera y la segunda derivadas son positivas, negativas o cero en cada caso. Evidentemente habrá que cruzar las respuestas de la pregunta anterior con ésta, para tener una idea más clara de las concepciones que el alumno ha construido acerca de las interpretaciones geométricas de las dos primeras derivadas.

Reactivo No. 12.- En la décima segunda y última pregunta le plantea al estudiante la gráfica de dos funciones, y se le indica que dibuje a un lado, un esquema de la gráfica de sus respectivas derivadas. Este tipo de reactivos se ha encontrado en otro tipo de cuestionarios que son los que mayores dificultades les causan a los alumnos, particularmente porque exigen un grado mayor de abstracción para poder imaginar la gráfica de la derivada a partir solamente de la gráfica de la función, o a la inversa, pero el solo hecho de que quien intenta resolver estos problemas, pueda esbozar algún tipo de gráfica relacionando a f(x) con f'(x), evidenciaría el tipo de imagen que se tiene en cuanto a el importante vínculo entre ellas, particularmente en vistas a sus posibles aplicaciones posteriores.

3.3 CLASIFICACIÓN DE LOS REACTIVOS

Los tipos de reactivos utilizados en el cuestionario que nos sirvió como instrumento de comparación para validar o no, nuestra hipótesis de trabajo, los hemos clasificado posteriormente conforme a un criterio basado en las ideas de Duval del tránsito entre los distintos ámbitos donde se desarrolla el aprendizaje de la matemática. De esta forma diseñamos reactivos que permitan observar el tránsito entre los tres ámbitos ya señalados.

Los doce reactivos utilizados quedaron clasificados de la siguiente manera:

GRUPO	DEL ÁMBITO	AL ÁMBITO	REACTIVOS
I	Algebraico	Gráfico	1,2 y 5
II	Algebraico	Numérico	4,7 y 8
III	Gráfico	Algebraico	9
IV	Gráfico	Numérico	3,6,11 y 12
V	Numérico	Gráfico	10 y 12

De los reactivos utilizados podemos decir que

7 de ellos tienen que ver con el ámbito Algebraico (1,2,4,5,7,8 y 9)

9 con el ámbito gráfico (1,2,3,5,6,9,10,11 y 12).

y 8 con el ámbito numérico (3,4,6,7,8,10,11 y 12)

Hemos definido el tipo de reactivo en relación con los ámbitos donde se ubica o transita, de esta forma tenemos reactivos de tránsito entre dos de éstos ámbitos. Así por ejemplo, incluimos reactivos que transitan de lo gráfico a lo numérico, de lo gráfico a lo algebraico o de lo gráfico a lo numérico y nuevamente a lo gráfico, y otros que transitan de lo algebraico a lo gráfico o a lo numérico. Existen dos reactivos que transitan del ámbito numérico al gráfico. No hemos considerado reactivos que transiten de lo numérico a lo algebraico, dado que este aspecto no se contempla como una habilidad en ninguno de los cursos tradicionales de cálculo.

CAPÍTULO CUATRO: LA APLICACIÓN.

4.1 PROCEDIMIENTO Y TIEMPOS DE APLICACIÓN.

Para poder aplicar el cuestionario en las tres distintas instituciones hubo necesidad de recurrir a diferentes estrategias, que tuvieron que ver principalmente con las facilidades que las autoridades de las diferentes instituciones involucradas otorgaron para aplicar el cuestionario con el que se realizó este trabajo.

En el Instituto de Ciencias Exactas de la UAH tuve menos dificultades dado que, en ese entonces, era mi centro de trabajo principal y que prácticamente conocía a la mayoría de los estudiantes de la Licenciatura en Ingeniería Industrial, así como a las autoridades responsables de la carrera. Pero debía resolver una cuestión de fondo en relación a los alumnos seleccionados para participar. Dada la naturaleza del estudio y del tipo de reactivos diseñados, creía que debían ser estudiantes con buenas habilidades en su desempeño en matemáticas, pero eso es difícil de decidir si uno cuenta tan solo con las calificaciones o la opinión de algunos maestros, incluso la mía propia. Así que en este caso decidí lanzar una convocatoria, o de los cuales tenía algún tipo de referencia, para que voluntariamente participaran en este estudio a través de resolver el cuestionario. Con ello pretendía yo resolver la cuestión de decidir a cuales alumnos involucrar, a partir de que fuesen ellos mismos los que decidieran tal cuestión, fundamentalmente porque consideraban como aceptable su preparación en matemáticas. A la convocatoria se presentaron 15 alumnos que cursaban en ese momento diversos semestres, de los cuales, luego de darles las instrucciones correspondientes, decidieron resolver el cuestionario los 12 que formaron la muestra de esta institución.

Algo semejante realicé en el Instituto Tecnológico de Pachuca, aunque ahora conté con el apoyo de dos profesores del área de Ciencias Básicas que me ayudaron a difundir la idea entre alumnos de cuarto a noveno semestres, sobre la participación voluntaria en este estudio. Dadas algunas condiciones de carácter administrativas en esta institución no fue posible publicar una convocatoria, y por lo mismo no fue posible que todos los alumnos de la carrera de Ingeniería Industrial que en aquel momento se encontraban inscritos, se enteraran de la misma. Esto se reflejó en un menor número de alumnos que atendieron a la invitación, por lo que sólo participaron 8 estudiantes en este centro educativo, sin que hubiese nadie que cambiara de parecer luego de escuchar las instrucciones del caso.

Donde las cosas resultaron más complicadas fue en el ITESM, pues las autoridades que coordinaban la Licenciatura de Ingeniería Industrial en aquel entonces, decidieron no otorgar su autorización para la libre invitación a los estudiantes de la misma, a fin de que participaran en el estudio. De hecho restringieron la aplicación del mismo a los alumnos seleccionados por ellos, ante la negativa para dar facilidades, opté por convencer a un profesor amigo mío que laboraba en esta institución, para que sólo a sus alumnos les hiciera la invitación respectiva, y quienes aceptaran participar voluntariamente, lo hiciera. Como yo no pude estar presente en el momento de la aplicación, fue él quien les dio indicaciones y aplicó el cuestionario a tan solo cinco estudiantes de quinto semestre de dicha licenciatura. En cada lugar las indicaciones generales fueron el que anotaran el nombre de la institución donde estudiaban, sus iniciales y su género. Se les indicó que la resolución del cuestionario tenía tan solo propósitos de análisis global y que por lo tanto no implicaba una calificación personal o institucional. El tiempo asignado en los tres casos fue de 40 minutos. En el ITESM desconozco el tiempo empleado por los estudiantes, aunque la indicación dada al profesor que lo aplicó, fue que no excedieran los 40 minutos.

4.2 CONSIDERACIONES SOBRE LAS DIFICULTADES DE APLICACIÓN.

El hecho significativo para pensar que los resultados son comparables para las tres diferentes escuelas, es el de haber seleccionado estudiantes a partir de que tuvieran la disposición de presentarse a contestar el cuestionario, una vez que se les hubiese explicado las razones que justificaban este hecho. La actitud de cada estudiante fue, en términos generales, de aceptación, a partir de sentirse en general bien preparados en la disciplina del cálculo (aunque después de contestar el cuestionario esto ya no fuese tan claro).

CAPÍTULO V: EL ANÁLISIS.

Dividiré mis observaciones en dos tipos, las de carácter general, que atienden a cuestiones que tienen que ver con la mayoría de los reactivos involucrados en el cuestionario, y las de carácter específico que se relacionan con uno o dos de los reactivos. Empezaré con

5.1 OBSERVACIONES DE CARÁCTER GENERAL.

Los porcentajes de respuestas acertadas en promedio de los estudiantes de cada institución, presentan diferencias muy marcadas entre ellos. En el ITESM el promedio fue de 47.56, mientras que en las instituciones de carácter público, fueron de 17.98 y 16.02 para el ITP y la UAEH, respectivamente.

Ahora podemos observar que en cierto grupo de problemas los alumnos del ITESM, respondieron bastante mejor que los otros. Este grupo corresponde a los reactivos más parecidos a los ejercicios que comúnmente se abordan en un curso de cálculo, los cuales generalmente, son del tipo algorítmico. Sin embargo, es muy notorio que el bloque de preguntas formados por los problemas 4, 5, 6, 8 y 10, no fueron contestadas correctamente por ninguno de los alumnos de las tres instituciones, lo que hace evidente una falla común en aspectos más relacionados con la teoría y la apropiación de conceptos básicos, que con lo algorítmico.

En las preguntas 11, 12 y 13, aunque no se dan respuestas incorrectas en su totalidad, sin embargo las respuestas correctas son muy pocas. Es de destacarse que el promedio de respuestas correctas en los estudiantes del ITESM en este último grupo de problemas desciende mucho más con relación al promedio general, que como ocurre entre los estudiantes del ITP o de la UAEH.

En el grupo de reactivos clasificados anteriormente como del grupo I (transición del ámbito algebraico al gráfico) notamos que los estudiantes del ITESM tienen un desempeño muy bueno, regular para los de la UAEH y malo para los del ITP Este grupo de problemas está muy ligado a los procesos algorítmicos que se ven regularmente en un curso de cálculo, a excepción del reactivo número

5, donde ningún estudiante contesta correctamente. Este reactivo aunque se ubica en el mismo tipo de transición, exige de los estudiantes un nivel de comprensión de mayor profundidad que los dos primeros.

En el grupo de reactivos clasificados en el grupo II (transición del ámbito algebraico al numérico) podemos observar con claridad un evidente descenso en el promedio de respuestas correctas para los alumnos de las tres instituciones, lo que pone de manifiesto que este proceso de transición ha sido descuidado o definitivamente no se aborda en ninguna de las tres instituciones, lo que si es claro es que se trata de un ámbito que representa un mayor nivel de dificultad para los estudiantes en general.

El reactivo 9, único incluido dentro del grupo III (transición del ámbito gráfico al algebraico), las respuestas correctas son más frecuentes en el ITESM, disminuyen casi a la mitad en el ITP y a la cuarta parte en la UAEH. Esto presupone que la relación entre el concepto de límite y el de derivada es mejor comprendido en la primera de las instituciones.

En el grupo de reactivos clasificados en el grupo IV (transición del ámbito gráfico al numérico) el nivel de respuestas correctas en las tres instituciones anda por debajo del 50%, nuevamente con mejores resultados para el ITESM, menores para el ITP y más bajos aún para la UAEH. Es un tipo de grupo semejante en cuanto a resultados al grupo II, donde seguramente existen poca atención en el ámbito escolar a este enfoque. Finalmente en el grupo V (transición del ámbito numérico al gráfico) encontramos nuevamente promedios muy bajos en las tres instituciones, por lo que podemos decir algo semejante a lo dicho en los grupos II y IV.

Resumiendo, los grupos II, IV y V representan a los reactivos donde el desempeño de los estudiantes deja muchas lagunas conceptuales, que no se cubren en ninguna de las tres instituciones analizadas y que por lo tanto, muestran el tipo de carencias que la enseñanza tradicional está teniendo en el aprendizaje de los conceptos centrales del cálculo. No es de extrañarse, por lo tanto, que los estudiantes pocas veces puedan utilizar adecuadamente los conceptos del cálculo en la resolución de problemas donde la variación continua es el elemento central de análisis.

5.2 OBSERVACIONES SOBRE REACTIVOS ESPECÍFICOS

1 a-h.- Se observa que este reactivo, de los cuales sólo observamos las respuestas a las seis gráficas que no representan a una función (a, d, f, g, h), lo contestan bien en un promedio de 84% los estudiantes del ITESM, los de la UAEH en un 23.3% y de tan solo 7.5% en el ITP. Es claro que este aspecto gráfico del concepto de función está muy descuidado en la UAEH y no lo abordan o no está presentado de manera adecuada en el ITP, lo que indica que desde el punto de vista gráfico la idea de función es muy pobre en los alumnos de estas dos últimas instituciones.

2 a-f.- En este reactivo, con sus seis incisos incluidos, observamos que los alumnos del ITESM alcanzan un promedio de 86.7%, los de la UAEH ascienden hasta un 61.1% y los del ITP a 58.3% (prácticamente iguales). La observación mas clara que podemos hacer en relación a estos resultados es que este tipo de reactivos son mucho mas comúnmente atendidos en la UAEH y el ITP, lo que hace que estos resultados sean muy contrastantes con los del reactivo anterior que involucra el mismo tipo de conocimientos, aunque enfocados de distinta manera

3 .- Como mencionamos anteriormente, en este reactivo existieron muchas dificultades para que los estudiantes pudiesen construir una respuesta acertada. De los estudiantes del ITP y de la UAEH, ninguno pudo encontrar una gráfica que cumpliera con los requisitos planteados, mientras que sólo 3 de 5 estudiantes del ITESM lo hicieron parcialmente. Resulta claro que éste tipo de reactivo es lo suficientemente general como para exigir de los estudiantes claridad en los conceptos de dominio y contradominio de una función, así como la de los intervalos abiertos donde esto debe ocurrir (sólo los reales positivos para el

primero). Esto no ocurrió en ningún caso. La referencia gráfica de un concepto como éste, no fue posible construirlo por ninguno de los estudiantes.

4.- Confirmando la hipótesis planteada al elaborar este reactivo, ninguno de los estudiantes participantes fue capaz de encontrar las respuestas adecuadas al mismo. La parte de modelación que exige, rebasó las habilidades de todos ellos. Sólo en tres casos los estudiantes intentaron algunos planteamientos de aproximación, pero en ningún de ellos pudieron alcanzar a expresar una relación clara entre el problema y las ecuaciones o las gráficas intentadas. En la mayoría de los casos hubo confusión respecto del cambio de variable planteada entre un inciso y el otro, lo cual se hizo evidente en las preguntas que hicieron cuando se aplicó el cuestionario.

El nivel de abstracción requerido para modelar matemáticamente la situación problema, al parecer excedió en todos los casos las habilidades de todos ellos, lo que muestra una vez más la desvinculación entre las diferentes representaciones con que un estudiante trata de abordar un problema matemático. El estudiante promedio no puede construir un modelo que relacione sus ideas básicas sobre un problema concreto y las posibles ecuaciones y/o gráficas que le permitan resolverlo.

5.- El primer reactivo sobre el concepto de límite, resultó al igual que el anterior reactivo, demasiado complicado para los estudiantes participantes. Ninguno pudo dibujar en una gráfica la situación de una función donde su límite existe y otro donde no es así. La idea que más se acercó a una respuesta correcta, se presentó sólo en tres casos, donde los estudiantes graficaron una función discontinua en x=1, cuestión que me permite suponer que la idea planteada frecuentemente en los cursos de cálculo como *... se acerca tanto como se quiera, pero no necesariamente llega"*, es interpretado en algunos estudiantes como la imposibilidad de que la función llegue a tomar el mismo valor indicado para el límite. Por otro lado el límite marcado como infinito, no fue interpretado adecuadamente por los estudiantes, ya que la mayoría se abstuvo de intentar graficarlo, y los pocos que lo hicieron, recurrieron a dibujar una asíntota horizontal en f(x) = 2. Nuevamente encontramos, al igual que en los reactivos 3 y 4, serias dificultades para que los estudiantes transiten de un concepto algorítmicamente trabajado en el salón de clases, como es el caso del límite, al ámbito de lo gráfico como se solicitaba en este reactivo.

6.- En la hipótesis planteada al elaborar este reactivo creíamos que la dificultad para encontrar una respuesta acertada, sería mayor que en el anterior. Aunque estuvo cerca de resultar igual (es decir, nadie contestar bien), hubo dos estudiantes del ITP que plantearon correctamente la respuesta al inciso b), donde se pedía indicar el valor del límite cuando la variable tendía a infinito en una asíntota horizontal. Lo que es interesante de anotar en las respuestas a este reactivo es el hecho de que las ideas algorítmicas asociadas tradicionalmente a la determinación de límites en los cursos de cálculo, no están relacionadas con el ámbito gráfico en prácticamente todos los estudiantes que participaron en este estudio. El que los límites unilaterales, gráficamente expresados, fuesen distintos, no significó para casi todos ellos, el que el límite no existiese. Casi todos ellos dieron como respuesta el límite unilateral derecho.

En la respuesta al otro inciso, tal como preveíamos, el elemento distractor, que era una asíntota vertical, hizo que casi todos los participantes contestaran la pregunta en relación a este elemento, no percatándose que la pregunta era otra. La concepción gráfica del infinito de la función pareciera ser dominante en las ideas que los alumnos tienen, pues no alcanzan a diferenciar el caso en el cual es la variable independiente la que tiende a ese valor.

7.- El primer inciso de este reactivo, es el problema clásico de los textos o del curso de cálculo, en relación al concepto de un límite. Se le pide al estudiante que encuentre el valor del límite de una función para un valor en el que la función no está definida, pero que puede ser evaluado por el recurso clásico de factorizar denominador y numerador a fin de eliminar la raíz común que hace que la función no esté definida en ese valor. Aunque el resultado del límite es un número fraccionario, que introdujo dificultades para algunos estudiantes, un número considerable de estudiantes pudo resolverlo adecuadamente, 80% de los alumnos del ITESM, la mitad de los del ITP y sólo la tercera parte de los de la UAEH.

Cuando ése recurso no es posible aplicarlo, como en el límite planteado en el inciso b), el desempeño adecuado de los participantes se desploma hasta un 40% para el ITESM, y ninguno para ITP y UAEH. Esto demuestra que en la determinación de límites, no está disponible para los estudiantes, en la mayoría de los casos, un acercamiento numérico y/o gráfico, que les permita tener al menos una idea aproximada del valor buscado.

8.- Ninguno de los alumnos participantes logró encontrar la respuesta correcta a este reactivo. Inclusive la mayoría de ellos, no intentó siquiera algún tipo de aproximación. La expresión planteada, así como las sugerencias, no tuvieron efecto. Si acaso cinco de los participantes intentó manipular la expresión para ver si podían lograr un resultado mediante la obtención de expresiones algebraicas equivalentes a la planteada, mas sin embargo, al no lograr nada que les fuese familiar, desistieron de sus intentos.

Algunos de los intentos parciales, permiten corroborar la hipótesis de que para ellos no tiene mucho significado el que una serie pudiese tener límite o converger. Al parecer los límites sólo tienen significado para algunos de ellos, si es que se plantean como una de las expresiones manejadas en los textos, es decir, como los ejercicios relativos al tema, semejantes al inciso a) del reactivo anterior, y donde exista algún tipo de "procedimiento" algebraico que les permita evaluarlo.

9.- Los porcentajes de alumnos que contestan acertadamente a este reactivo son de 60, 37.5 y 16.6% para el ITESM, ITP y UAEH respectivamente. La pregunta tiene que ver con el hecho de que si los alumnos consideran a la derivada como el resultado de un límite, o como un simple procedimiento algorítmico, mediante el cual se le puede determinar. Aunque la pregunta es lo suficientemente general en ese sentido, es de llamar la atención el hecho de que si bien todos los cursos de cálculo definen a la derivada como un límite, sean muchos los alumnos los que han perdido de vista esta relación entre un concepto y otro.

¿Qué tan importante puede ser esta percepción de los estudiantes? Eso está en función de cómo y para qué queremos que los estudiantes aprendan el concepto de derivada. Resultaría interesante plantear a partir de aquí la interrogante de qué tan precisa es la idea de derivada en los estudiantes que estudian cálculo, como para pensar que posteriormente puedan emplearla como recurso de modelación en ecuaciones diferenciales, por ejemplo, o en alguna otra asignatura de la carrera donde modelar o explicar un fenómeno natural o social, requiera del concepto de variación continua.

10.- Los resultados obtenidos por los alumnos en este reactivo, confirman nuestras sospechas. Sólo el 40% de los estudiantes del ITESM, lograron plantear una respuesta correcta al primero de los incisos, los otros dos no fueron contestados correctamente por los estudiantes de las tres instituciones. Es notable, en algunos esquemas elaborados por los alumnos, el elevado nivel de confusión que los signos de estos tres aspectos de la pregunta generaron en ellos, al grado que dos de ellos señalaron que no se podía graficar una función que tuviese simultáneamente valores positivos y negativos, sin poder diferenciar los valores de cada uno de los aspectos planteados en la pregunta.Es muy posible que los estudiantes no hayan tenido experiencias de graficar simultáneamente a la función y sus dos primeras derivadas en los cursos que tomaron, lo cual podría haberlos ayudado a dar una respuesta correcta en este caso, más sin embargo es destacable el alto nivel de dificultad que para ellos representó combinar los tres conceptos en una sola gráfica.

11.- El análisis de este reactivo lo dividí en doce rubros, para cada uno de los cuatro puntos dados gráficamente se solicita se indique el signo de f(x), de f '(x) y de f ''(x). Cada uno de ellos se verificó por separado. En los estudiantes del ITESM el porcentaje de respuestas correcta ascendió a poco más del 40%, cercano al 20% para los del ITP y de tan solo el 10% para los de la UAEH. En todos ellos el porcentaje mayor de respuestas correctas se ubicó en la respuesta al signo de f(x) en los cuatro casos considerados.

Encontré en 8 casos que una respuesta correcta sobre el signo de f'(x) para uno de los puntos dados era incorrecta en otro, aún cuando se tenía el mismo caso y algo semejante ocurrió en otros 6 casos respecto de la segunda derivada. Esto me hace pensar que en bastantes alumnos las respuestas eran poco seguras o definitivamente azarosas, y de aquí lógicamente no es posible deducir qué porcentaje de las respuestas correctas sólo fueron resultado de adivinar. Nuevamente, al igual que en el reactivo anterior, se presentan muchas confusiones inducidas por el signo de f(x) sobre los valores de f '(x) y f "(x).

Como una evidencia de los reactivos 10 y 11, podemos decir que prácticamente no existe una relación en los estudiantes encuestados, entre sus ideas numéricas sobre el valor de la función, sus dos primeras derivadas y las imágenes gráficas correspondientes.

12.- Las respuestas a este reactivo, no hicieron sino confirmar las observaciones obtenidas en las dos anteriores. Prácticamente no hubo respuestas acertadas a ninguno de los dos incisos planteados, donde se les solicita, en el primero de ellos, hacer un bosquejo de la gráfica de la derivada de una función, a partir de tener únicamente la gráfica de f(x), mientras que en segundo se pide lo mismo pero partiendo de f '(x) para realizar el bosquejo de f(x).

Si reunimos en un cuadro todos los resultados comentados en esta parte, podemos apreciar cómo es que son ciertos reactivos los que obtienen los mayores porcentajes de respuestas correctas, y que podemos ubicar en los aspectos que tradicionalmente se enfatizan en los textos, y por lo mismo, en los cursos tradicionales de Cálculo. Los casos donde se presentan porcentajes muy bajos de respuestas correctas, tienen que ver con los aspectos más ligados al dominio del concepto y no a los procedimientos algorítmicos mas usuales.

5.3.1 RESUMEN DE RESULTADOS POR REACTIVO

Número de respuestas correctas y porcentajes							
Reactivo	UAEH		ITP		ITESM		OBS.
	Num	%	Num	%	Num	%	
1.a	7	58.3	0	0	5	100	
1.d	0	0	0	0	4	80	
1.f	3	25	0	0	4	80	
1.g	2	16.6	0	0	3	60	
1.h	2	16.6	3	37.5	5	100	
2.a	7	58.3	6	75	4	80	
2.b	7	58.3	2	25	5	100	
2.c	7	58.3	5	62.5	4	80	
2.d	7	58.3	6	75	4	80	
2.e	5	41.7	2	25	5	100	
2.f	10	91.7	7	87.5	4	80	
3	0	0	0	0	3	60	
4.a	0	0	0	0	0	0	
4.b	0	0	0	0	0	0	
5.a	0	0	0	0	0	0	
5.b	0	0	0	0	0	0	
6.a	0	0	0	0	0	0	
6.b	0	0	2	25	0	0	
7.a	4	33.3	4	50	4	80	
7.b	0	0	0	0	2	40	
8	0	0	0	0	0	0	
9	2	16.6	3	37.5	3	60	
10.a	0	0	0	0	2	40	
10.b	0	0	0	0	0	0	
10.c	0	0	0	0	0	0	
11.f(a)	2	16.6	1	12.5	2	40	
11.f'(a)	0	0	1	12.5	3	60	
11.f''(a)	0	0	0	0	2	40	
11.f(b)	2	16.6	2	25	2	40	
11.f'(b)	0	0	2	25	2	40	
11.f''(b)	1	8.3	1	12.5	3	60	
11.f(c)	2	16.6	2	25	2	40	
11.f'(c)	1	8.3	2	25	2	40	
11.f''(c)	0	0	2	25	1	20	
11.f(d)	2	16.3	2	25	3	60	
11.f'(d)	3	24.3	0	0	2	40	
11.f''(d)	1	8.3	2	25	1	20	
12.2	0	0	0	0	0	0	
12.4	1	8.3	0	0	1	20	

5.3.2 RESUMEN DE RESULTADOS POR TIPO DE REACTIVO
(Porcentajes de respuestas correctas)

Transición	Reactivo	ITESM %	ITP %	UAEH %
Algebraico a Gráfico	1	84.0	9.3	23.3
	2	86.7	58.3	61.1
	5	0	0	0
Algebraico a Numérico	4	0	0	0
	7	60	25	16.7
	8	0	0	0
Gráfico a Algebraico	9	60	37.5	16.7
Gráfico a Numérico	3	60	0	0
	6	0	12.5	0
	11	40.8	19.8	10.3
	12 a)	0	0	0
Numérico a Gráfico	10	13.3	0	0
	12 b)	20	0	8.3

CAPITULO VI CONCLUSIONES.

1.- Cuando planteamos nuestra hipótesis de trabajo, expresamos que en el proceso de enseñanza aprendizaje del cálculo, se presentan carencias en la adquisición de conceptos y habilidades entre los alumnos, los cuales, independientemente del nivel con el que se abordan los temas o de las características de las instituciones de enseñanza, que les impiden llegar al nivel de las aplicaciones, de manera que se pueda afirmar que son capaces de modelar matemáticamente, problemas sencillos de la práctica que los profesionales de una disciplina enfrentan como parte de su formación básica.

Los resultados que hemos obtenido a través de un cuestionario aplicado a estudiantes de una misma licenciatura en Ingeniería, confirman que aun teniendo mejores niveles de desempeño algorítmico en ciertas habilidades o en el manejo de algunos conceptos del cálculo, existen varias otras habilidades o conceptos básicos, donde los estudiantes de todas las instituciones involucradas en este estudio, no fueron capaces de resolver los reactivos diseñados para tal fin.

2.- Tales habilidades no adquiridas o conceptos no construidos, tienen tras de sí, una importante relación con las ideas de la construcción de imágenes conceptuales y de la trasposición didáctica entre diferentes representaciones de un mismo concepto, los cuales evidentemente no han sido atendidos en las instituciones donde los alumnos participantes realizaron sus estudios.

3.- El estudio comparativo realizado en este trabajo, muestra con bastante claridad, cuáles de estos tránsitos entre representaciones mentales están ausentes entre prácticamente todos los estudiantes participantes en el mismo, y cómo es que tales carencias pueden incidir en una seria limitación que presentan para poder construir un modelo matemático que facilite la resolución de un problema o la apropiación de un determinado concepto, en particular para nuestro caso, el de función, el de límite o el de la derivada.

4.- Para dar continuidad a las ideas que guiaron este trabajo, creo que sería necesario poder hacer un estudio con mayores alcances en cuanto al número, al tipo de disciplina de los estudiantes involucrados, y la diversidad de instituciones de donde los estudiantes provienen. La pretensión sería poder establecer, en base a la investigación educativa de un equipo de profesionales de la Matemática Educativa, el tipo de actividades didácticas a realizar en el curso de cálculo que se imparte en los primeros semestres de las diversas licenciaturas, el diseño de las mismas que habrían de plasmarse en los textos o materiales de trabajo y en la capacitación correspondiente, así como las actividades de actualización y de formación que habría que instrumentar entre los profesores en activo o los que estuvieran en un proceso de incorporación a la planta docente de una institución educativa.

ANEXOS

ANEXO I

CUESTIONARIO APLICADO.

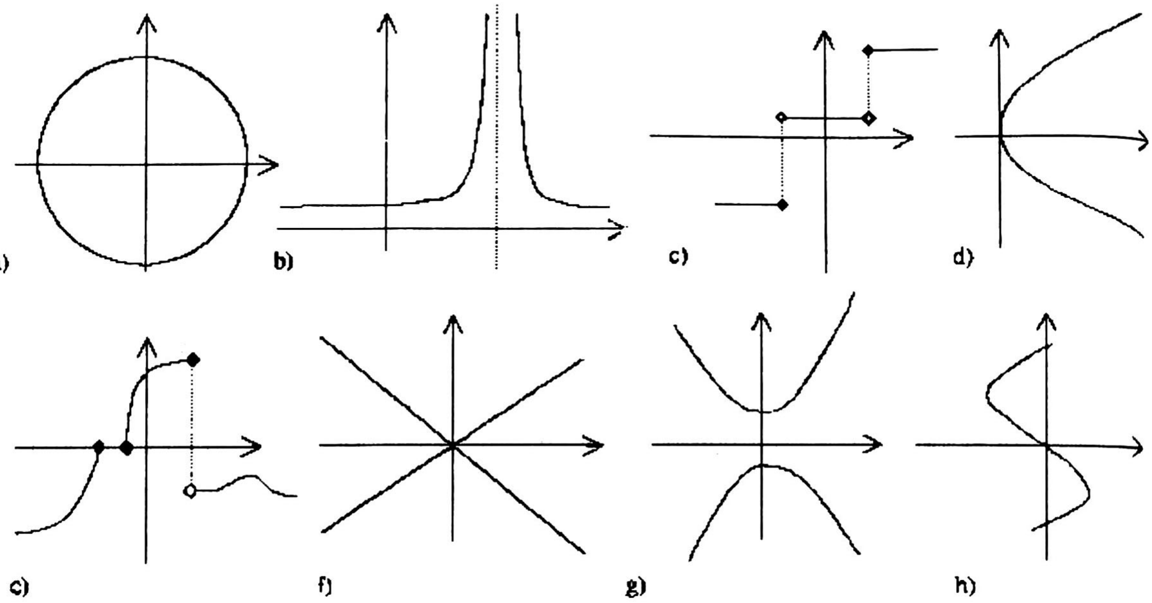
CUESTIONARIO SOBRE CONCEPTOS DE CÁLCULO.

Este cuestionario forma parte del trabajo de Tesis de Román Hernández Genis, que le permitirá obtener el grado de maestría en ciencias con especialidad en Matemática Educativa. Los resultados del mismo no tienen otro propósito que investigar las diferencias que se presentan entre estudiantes de tres diferentes instituciones donde se imparte la carrera de Ingeniería Industrial, cuando cursan la asignatura de Cálculo Diferencial. Por lo mismo no te solicitamos tu nombre, ni en qué grupo cursas la carrera actualmente, ni algún otro dato que permitiera ubicarte en el futuro. Tus respuestas serán usadas exclusivamente con fines comparativos en relación en cómo se apropian los estudiantes de ciertos conceptos claves de la asignatura mencionada.

Instrucciones: Coloca tus iniciales en el espacio correspondiente y el nombre de la institución donde cursas tus estudios. Lee con cuidado los enunciados de cada reactivo y contesta en el espacio destinado para cada uno de ellos. Si requieres de mas espacio para plantear tu respuesta, o si requieres explicar algún concepto con mayor amplitud, puedes emplear la parte trasera de cada hoja. Tiempo aproximado de aplicación: 40 minutos.

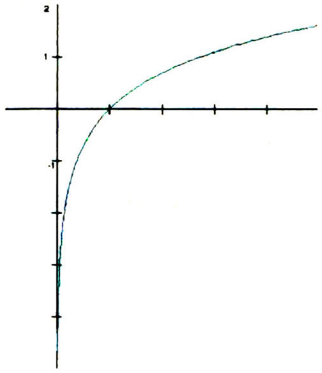
Iniciales: ____________________ Institución donde estudias: __________________

Reactivo No. 1.- Algunas de las siguientes gráficas <u>no</u> corresponden a una función, indícalas señalando el inciso que le corresponde, si lo consideras necesaria explica tu respuesta:

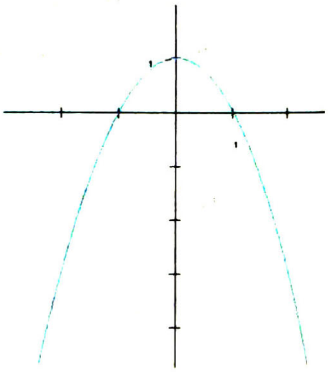


Reactivo No. 2. Coloca en el paréntesis de cada gráfica la letra que corresponda a la expresión que represente a cada función.

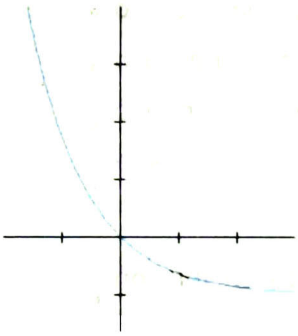
a) $f(x) = -x^{2} + 1$
b) $f(x) = 1/(x-1)$
c) $f(x) = \ln x$
d) $f(x) = x\,(x+3)\,(x-2)$
e) $f(x) = e^{-x} - 1$
f) $f(x) = \lvert x - 3 \rvert$



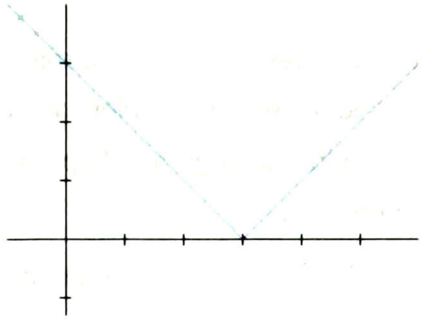
( )



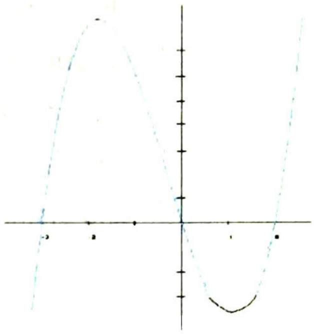
( )



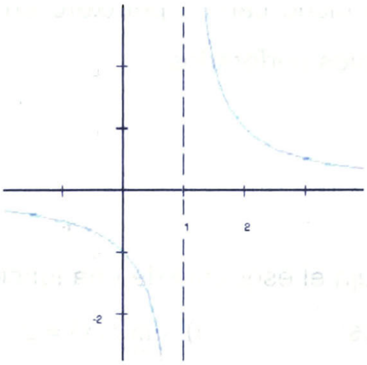
( )



( )

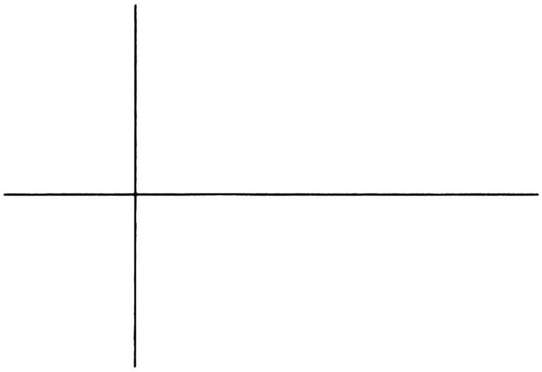


( )



( )

Reactivo No. 3.- Dibuja el esquema de una función que tenga como dominio los reales positivos y como contradominio (rango) a todos los números reales.



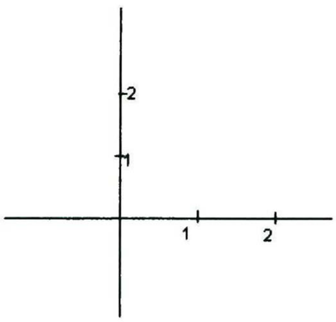
Reactivo No. 4.- Escriba la expresión algebraica que represente la siguiente función y/o dibuje la gráfica respectiva.

Un campo petrolero que contiene 20 pozos, ha estado produciendo 4000 barriles diarios de petróleo, es decir cada pozo produce un promedio de 200 barriles diarios. Por cada nuevo pozo que es perforado, suponga que la producción diaria de cada uno disminuye 5 barriles.

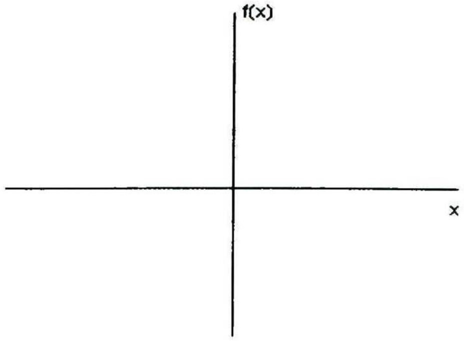
a) Exprese la producción diaria del campo petrolero en función del número *x* de pozos nuevos que se perforan.

b) Si el precio de cada barril es de 10 dólares, exprese el ingreso que produce dicho campo petrolero en función del número *z* de pozos totales perforados.

Reactivo No. 5.- Dibuja el esquema de una función que cumpla con las siguientes expresiones: a) $\lim_{x\to 1} f(x) = 2$ b) $\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$

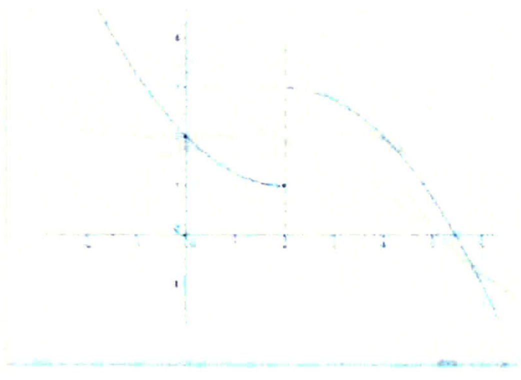


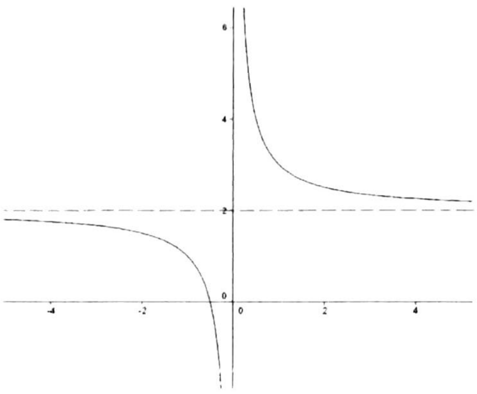
a)



b)

Reactivo No. 6.- A partir de las gráficas siguientes,


(A)


(B)

(A) Determina el valor del límite de la función cuando x tiende a 2.

(B) Determina el valor del límite de la función cuando x tiende a + ∞

Reactivo No. 7.- Determina el valor de los siguientes límites:

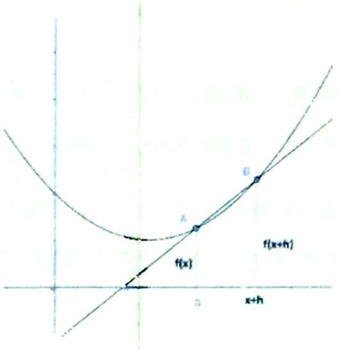
a) $\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x^2+3x-4}$ b) $\lim_{x\to 0} \frac{1}{(1+2x)^{1/x}}$

Emplea el procedimiento que consideres conveniente para lograrlo.

Reactivo No. 8.- Dada la siguiente serie, determina el valor del límite de la misma cuando $n \to \infty$. Si no conoces un procedimiento formal, puedes intentar alguna forma que te proporcione al menos un valor aproximado. Si lo consideras necesario, explica tu respuesta.

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ \dots+\frac{1}{2^n}$$

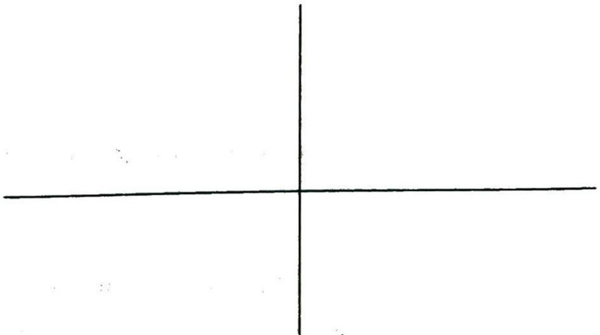
Reactivo No. 9.- Dada la gráfica de una función cualquiera, con un punto A situado en (x,f(x)) y otro punto cercano B situado en (x+h,f(x+h)), como se muestra en la siguiente gráfica, describe lo que interpretas a partir de la definición de la derivada que plantea: $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$



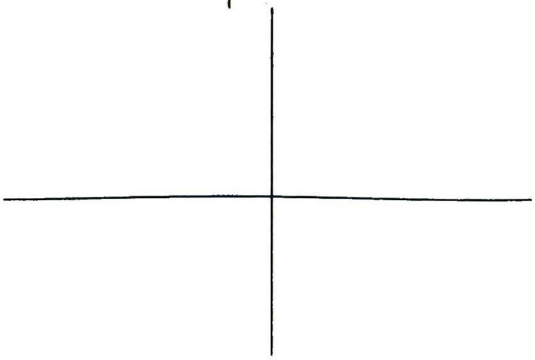
a) ¿Puedes relacionar cada parte de la definición con la gráfica?
b) ¿Por qué crees que se debe usar la expresión $\lim_{h\to\infty}$ para definir la derivada?

Reactivo No. 10.- En los siguientes pares de ejes coordenados x-y, dibuja la gráfica de una función cualquiera, que cumpla las condiciones que se indican para los valores de la función f(x), para el de su primer derivada f'(x) y para la segunda derivada f''(x). Estas condiciones deben cumplirse para un punto arbitrario x=a, el cual debes marcar sobre la gráfica de la función..

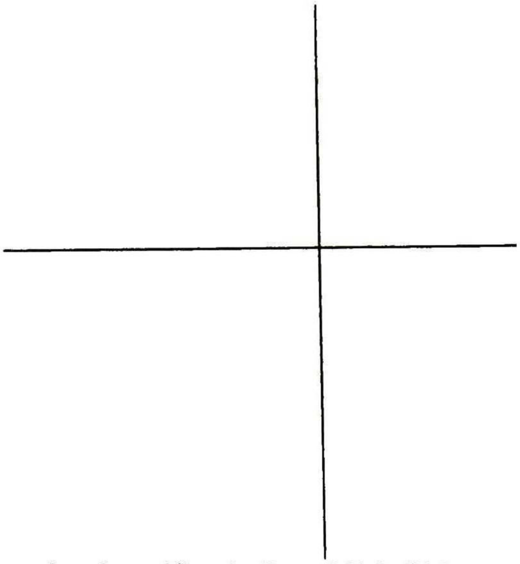
a) f(x), f'(x) y f''(x) son todas positivas.



b) f(x) positiva, f'(x)=0 y f''(x) negativa

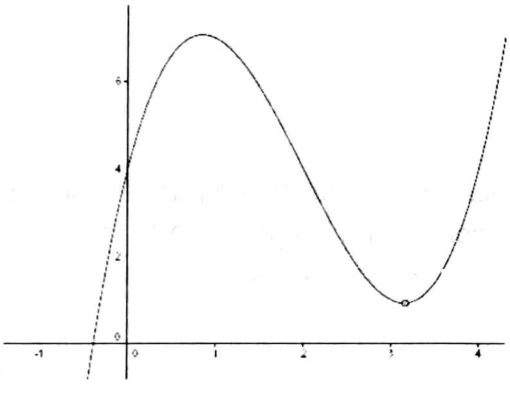


c) f(x) negativa, f'(x) positiva y f''(x)=0

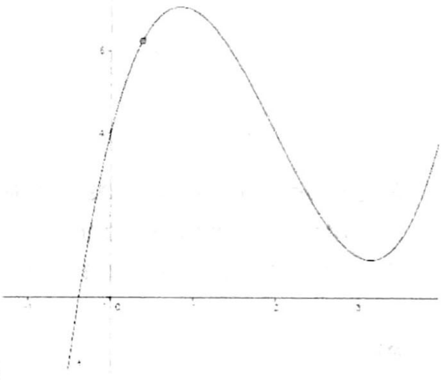


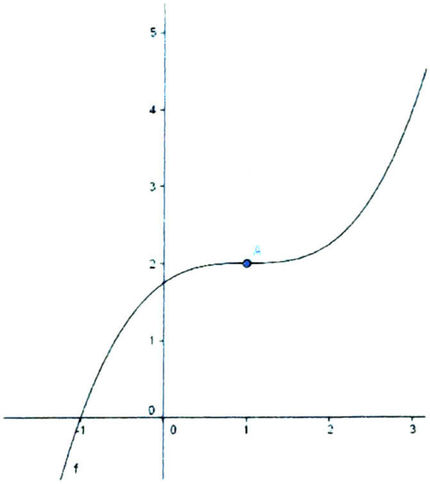
Reactivo No. 11.- Para cada punto A marcado sobre la gráfica indica si f(x), f'(x) y f''(x) son positivas, negativas o tienen valor cero.

a)

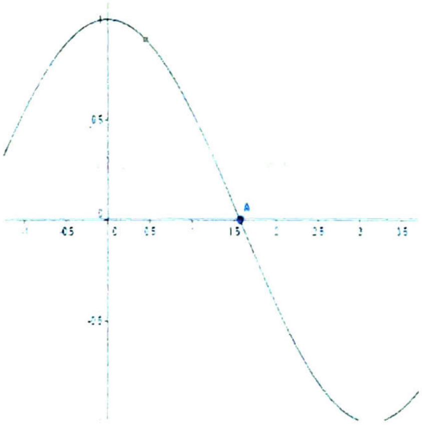


b)





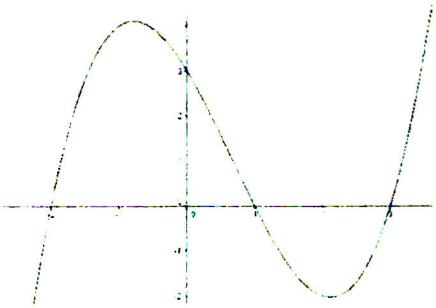
c)

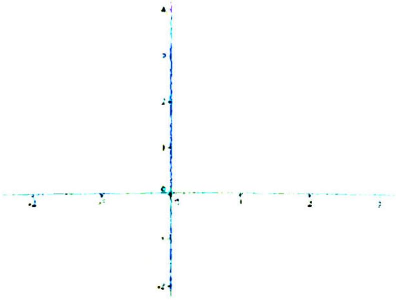


d)

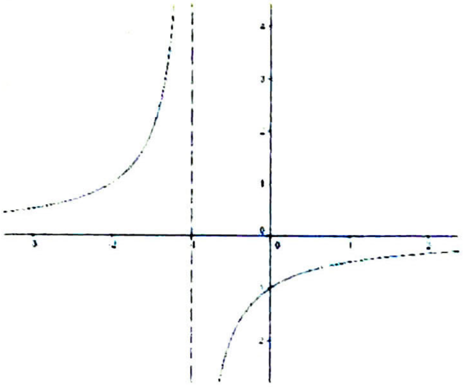
Reactivo No. 12.- En las siguientes gráficas se representa un par de funciones distintas. Dibuja de manera aproximada como sería la gráfica de su respectiva derivada en los ejes que se encuentran a la derecha de cada función.

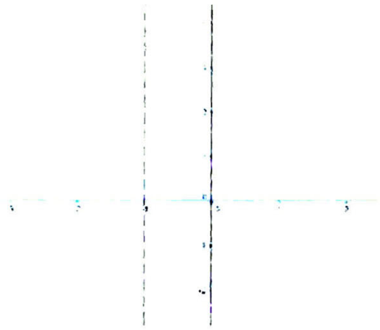
a)





b)





ANEXO 2

TABLA DE RESULTADOS POR ALUMNO Y POR REACTIVO

CUADRO DE RESULTADOS POR REACTIVO Y POR ALUMNO

TESIS DE ROMÁN HERNÁNDEZ GENIS

RESULTADOS DEL CUESTIONA POR PREGUNTA, INCISO Y ALUMNO.

Alumno	Institución	Preg. 1					Preg. 2						P3	P4		P5		P6		P7		P8	P9	P10			P11												P12		% ACIE
		a	d	f	g	h	a	b	c	d	e	f		a	b	a	b	[illegible]	b	a	b			a	b	c	f(a)	f'(a)	f''(a)	f(b)	f'(b)	f''(b)	f(c)	f'(c)	f''(c)	f(d)	f'(d)	f''(d)	a	b	
BANZ	ITESM	s	s		s	s	s	s	s	s	s	s	s	x	x	x	x	x	x	s	s	x	s	s	x	x	s	s	s	s	s	s	s	s	x	s	s	x	x	s	69
FRE	ITESM		x	[illegible]	x	s	x	s	x	s	s	x	x	x	x	x	x	x	x	x	s	x	x	x	x	x	x	s	x	x	x	s	x	x	x	s	x	x	x	x	26
RLM	ITESM	[illegible]	s	x	x	s	s			s	s	s	x	x	x	x	x		x	s	x	x	s	x	x	x	x	x	x	x	x	x		x	x	x	x	x	x	x	28
MHA	ITESM	s	s	s	s	s	s		s	s	s	s	s	x	x	x	x	x	x	s	x	x	x	x	x	x	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	[illegible]		x	x	64
FSP	ITESM	s	s	s	s	s	s	s	s	x	s	s	s	x	x	x	x	x	x	s	x	x	s	s	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	36
% ACIERTOS		100	80	80	60	100	80	100	80	80	100	80	60	0	0	0	0	0	0	80	40	0	60	40	0	0	40	60	40	40	40	60	40	40	20	60	40	20	0	20	
Alumno	Institución	Preg. 1					Preg. 2						P3	P4		P5		P6		P7		P8	P9	P10			P11												P12		
		a	d	f	g	h	a	b	c	d	e	f		a	b	a	b		b	a	b			a	b	c	f(a)	f'(a)	f''(a)	f(b)	f'(b)	f''(b)	f(c)	f'(c)	f''(c)	f(d)	f'(d)	f''(d)	a	b	
AVM	ITP	x	x	x	x		s	s	s	x	s	s	x	x	x	x	x	x	s	x	x	x	s	x	x	x	s	x	x	s	s	s	s	s	s	s	x	s	x	x	41
AKBR	ITP	x	x	x	x	x	s	x	s	s	x	s	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	s	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	13
YHO	ITP	x	x	x	x	x	s	s	s	s	s	s	x	x	x	x		x	x	s	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x		x	x	x	x	x	x	x	x	x	18
TLME	ITP	x	x		x	x	s	x	x	s	x	s	x	x	x	x	x	x	x	s	x	x	s	x	x	x	x	x	x	x		x	x	x	x	x	x	x	x	x	13
JMH	ITP	x	x	x	x	s	s	x	x	s	x	s	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x		x	x	x	x	x	x	x	x	x	10
JAMH	ITP	x	x	x	x	x	s	x	s	s	x	s	x	x		x	x		s	x	x	x	x	x	x	x	x	s	x	s	s	x	s	s	s	s	x	s	x	x	33
GNG	ITP	x	x	x	x	s	x	x	s	s	x	s	x	x	x	x	x	x	x	s	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	13
CSN	ITP	x	x	x	x	s	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	s	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	5
% ACIERTOS		0	0	0	0	38	75	25	63	75	25	88	0	0	0	0	0	0	25	50	0	0	38	0	0	0	13	13	0	25	25	13	25	25	25	25	0	25	0	0	
Alumno	Institución	Preg. 1					Preg. 2						P3	P4		P5		P6		P7		P8	P9	P10			P11												P12		
		a	d	f	g	h	a	b	c	d	e	f		a	b	a	b	a	b	a	b			a	b	c	f(a)	f'(a)	f''(a)	f(b)	f'(b)	f''(b)	f(c)	f'(c)	f''(c)	f(d)	f'(d)	f''(d)	2	4	
NHE	UAEH	s	x	x	x	x	s	s	s	s	s	x	x	x	x	x	x	x	x	s	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	18
MLE	UAEH	s	x	x	x	s	s	s	s	s	s	s	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	s	s	x	x	26
SRJO	UAEH	s	x		x	x	s	s	s	x	s	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x		x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	13
HVH	UAEH	x	x	x	s	x	x	x	s	x	s	s	x	x	x	x	x	x	x	s	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	13
EBA	UAEH	s	x	x	x	s	s	s	s	x	x	s	x	x	x	x	x	x	x		x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x		x	18
AVJC	UAEH	x	x	x	x	x	s	s	x	s	x	s	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	10
SRP	UAEH	s	x	s	s	x	x	s	x	s	x	s	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	s	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	18
DCO	UAEH	x	x	x	x	x	s	s	s	s	s	s	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	15
GJP	UAEH	x	x	x	x		x	x	x	s	x	s	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x		x	x	x	x	x			x	x		5
ABC	UAEH	x	x	x	x	x	x	x	s	s	x	s	x	x	x	x	x	x	x	s	x	x	x	x	x	x	s	x	x	s	x	s	s	s	x	s	s	x	x	x	28
CZU	UAEH	s	x	s	x	x	s	x	x	x	x	s	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	s	13
CALG	UAEH	s	x	s	x	x	x	x	x	x	x	s	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	s	x	x	x	s	x	x	s	x	x	s	x	x	s	s	x	x	x	23
% ACIERTOS		58	0	25	17	17	58	58	58	58	42	92	0	0	0	0	0	0	0	33	0	0	17	0	0	0	17	0	0	17	0	8.3	17	8.3	0	17	24	8.3	0	8.3	
% ACIERTOS TOTAL		48	16	28	20	40	68	56	64	68	48	84	12	0	0	0	0	0	8	48	8	0	32	8	0	0	20	16	8	24	16	20	24	20	12	28	20	16	0	8	

Respuestas s Correcta x Incorrecta

CUADRO DE RESULTADOS

TESIS DE ROMÁN HERNÁNDEZ GENIS

RESULTADOS DEL CUESTIONARIO POR PREGUNTA, INCISO Y ALUMNO.

Alumno	Institución	Preg. 1					Preg. 2						P3	P4		P5		P6		P7		P8	P9	P10			P11												P12		% ACIE
		a	d	f	g	h	a	b	c	d	e	f		a	b	a	b	a	b	a	b			a	b	c	f(a)	f'(a)	f''(a)	f(b)	f'(b)	f''(b)	f(c)	f'(c)	f''(c)	f(d)	f'(d)	f''(d)	a	b	
BANZ	ITESM	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	x	x	x	x	x	x	s	s	x	s	s	x	x	s	s	s	s	s	s	s	s	x	s	s	x	x	s	69
FRE	ITESM	s	x	s	x	s	x	s	x	s	s	x	x	x	x	x	x	x	x	x	s	x	x	x	x	x	x	s	x	x	x	s	x	x	x	s	x	x	x	x	26
RLM	ITESM	s	s	x	x	s	s	s	[illegible]	s	s	s	x	x	x	x	x	x	x	s	x	x	s	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	28
MHA	ITESM	s	s	s	s	s	s	s	[illegible]	s	s	s	s	x	x	x	x	x	x	s	x	x	x	x	x	x	s	s	[illegible]	s	s	s	s	s	s	s	s	s	x	x	64
FSP	ITESM	s	s	s	s	s	s	s	s	x	s	s	s	x	x	x	x	x	x	s	x	x	s	s	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	36
% ACIERTOS		100	80	80	60	100	80	100	80	80	100	80	60	0	0	0	0	0	0	80	40	0	60	40	0	0	40	60	40	40	40	60	40	40	20	60	40	20	0	20	

Alumno	Institución	Preg. 1					Preg. 2						P3	P4		P5		P6		P7		P8	P9	P10			P11												P12		
		a	d	f	g	h	a	b	c	d	e	f		a	b	a	b	a	b	a	b			a	b	c	f(a)	f'(a)	f''(a)	f(b)	f'(b)	f''(b)	f(c)	f'(c)	f''(c)	f(d)	f'(d)	f''(d)	a	b	
AVM	ITP	x	x	x	x	x	s	s	s	x	s	s	x	x	x	x	x	x	s	x	x	x	s	x	x	x	s	x	x	s	s	s	s	s	s	s	x	s	x	x	41
AKBR	ITP	x	x	x	x	x	s	x	s	s	x	s	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	s	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	13
YHO	ITP	x	x	x	x	x	s	s	s	s	s	s	x	x	x	x	x	x	x	s	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	18
TLME	ITP	x	x	x	x	x	s	x	x	s	x	s	x	x	x	x	x	x	x	s	x	x	s	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	13
JMH	ITP	x	x	x	x	s	s	x	x	s	x	s	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	10
JAMH	ITP	x	x	x	x	x	s	x	s	s	x	s	x	x	x	x	x	x	s	x	x	x	x	x	x	x	x	s	x	s	s	x	s	s	s	s	x	s	x	x	33
GNG	ITP	x	x	x	x	s	x	x	s	s	x	s	x	x	x	x	x	x	x	s	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	13
CSN	ITP	x	x	x	x	s	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	s	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	5
% ACIERTOS		0	0	0	0	38	75	25	63	75	25	88	0	0	0	0	0	0	25	50	0	0	38	0	0	0	13	13	0	25	25	13	25	25	25	25	0	25	0	0	

Alumno	Institución	Preg. 1					Preg. 2						P3	P4		P5		P6		P7		P8	P9	P10			P11												P12		
		a	d	f	g	h	a	b	c	d	e	f		a	b	a	b	a	b	a	b			a	b	c	f(a)	f'(a)	f''(a)	f(b)	f'(b)	f''(b)	f(c)	f'(c)	f''(c)	f(d)	f'(d)	f''(d)	2	4	
NHE	UAEH	s	x	x	x	x	s	s	s	s	s	x	x	x	x	x	x	x	x	s	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	18
MLE	UAEH	s	x	x	x	s	s	s	s	s	s	s	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	s	s	x	x	26
SRJO	UAEH	s	x	x	x	x	s	s	s	x	s	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	13
HVH	UAEH	x	x	x	s	x	x	x	s	x	s	s	x	x	x	x	x	x	x	s	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	13
EBA	UAEH	s	x	x	x	s	s	s	s	x	x	s	x	x	x	x	x	x	x	s	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	18
AVJC	UAEH	x	x	x	x	x	s	s	x	s	x	s	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	10
SRP	UAEH	s	x	s	s	x	x	s	x	s	x	s	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	s	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	18
DCO	UAEH	x	x	x	x	x	s	s	s	s	s	s	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	15
GJP	UAEH	x	x	x	x	x	x	x	x	s	x	s	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	5
ABC	UAEH	x	x	x	x	x	x	x	s	s	x	s	x	x	x	x	x	x	x	s	x	x	x	x	x	x	s	x	x	s	x	s	s	s	x	s	s	x	x	x	28
CZU	UAEH	s	x	s	x	x	s	x	x	x	x	s	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	s	13
CALG	UAEH	s	x	s	x	x	x	x	x	x	x	s	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	s	x	x	x	s	x	x	s	x	x	s	x	x	s	s	x	x	x	23
% ACIERTOS		58	0	25	17	17	58	58	58	58	42	92	0	0	0	0	0	0	0	33	0	0	17	0	0	0	17	0	0	17	0	8.3	17	8.3	0	17	24	8.3	0	8.3	
% ACIERTOS TOTAL		48	16	28	20	40	68	56	64	68	48	84	12	0	0	0	0	0	8	48	8	0	32	8	0	0	20	16	8	24	16	20	24	20	12	28	20	16	0	8	
Respuestas		s	Correcta			x	Incorrecta																																		

BIBLIOGRAFÍA.

Artigue, M. (1995). Ingeniería Didáctica. En Pedro Gómez (Ed.), *Ingeniería didáctica en educación matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. México: Una empresa docente.*

Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En Pedro Gómez (Ed.), *Ingeniería didáctica en educación matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.* México: Una empresa docente, Grupo Editorial Iberoamérica.

Cantoral, R. (1995). Acerca de las contribuciones actuales de una didáctica de antaño: El caso de la serie de Taylor, *Mathesis 11.*

Cantoral, R. y Reséndiz, E. (1996) El significado y el sentido de las nociones de variable y variación en los textos de cálculo. *Memorias de la Décima Reunión Centroamericana y del Caribe sobre formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa.* Vol. 1, 139-144, Universidad de Puerto Rico, P.R.

Cordero, F & Solís, M. (1996) Las gráficas de las funciones como una argumentación del Cálculo. Cuadernos Didácticos: Vol. 2. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Dreyfus, T. & Eisenberg, T. (1983) On the deep structure of functios. *Proceeding of the eleventh international conference for the psychology of mathematics education (pp. 190-196).* Montreal: Université de Quebec, Montreal. Citado por Tall 1992.

Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales.* (M. Vega, Trad.). "Sémiosis et pensé humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels (1995). Colombia: Cali, Restrepo, Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía, Grupo Editorial Iberoamérica.

Farfán, R.M. (1994). Ingeniería didáctica: *Un estudio de la variación y el cambio.* México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Farfán, R.M. (1995). Perspectivas y métodos de investigación en Matemática Educativa. En F Cordero (Ed.), *Serie de antologías 2 (pp. 55-69).* Área de educación superior, Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN. México.

Galindo, E. (1993). "Conjeturas y pruebas, el uso de las gráficas en la enseñanza de la Matemática" *Memorias del IV Simposio Internacional sobre Investigación en Educación Matemática.* Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN, México D.F

Vinner, S. (1992) The function Concept as a Prototype for Problems in Mathematics Learning. En E. Dubinsky & G. Harel (Eds.), *The concept of Function: Aspects of Epistemology and Pedagogy. E.U.: Mathematical Association of America. Volumen 25.*

El jurado designado por el Departamento de Matemática Educativa, Unidad Distrito Federal del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, aprueba la tesis:

Habilidades y conceptos de cálculo en estudiantes de Ingeniería Industrial en Hidalgo. Un estudio comparativo

que presenta Román Hernández Genis para su examen final de Maestría en Ciencias en la especialidad de Matemática Educativa el día 15 de junio del año 2012.

Dr. Ricardo Arnoldo Cantoral Uriza

Dra. Rosa María Farfán Márquez

Dr. Francisco Cordero Osorio